П. ХАЛМОШ

КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

ПЕРЕВОД С АНГЛИЙСКОГО
Д. Ф. БОРИСОВОЙ и Д. А. РАЙКОВА

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

FINITE-DIMENSIONAL VECTOR SPACES

by

PAUL R. HALMOS

Professor of Mathematics
The University of Chicago

SECOND EDITION

D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC.

PRINCETON, NEW JERSEY

TORONTO LONDON

NEW YORK

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Цель, поставленная мною в этой книге,— изучить линейные операторы на конечномерных векторных пространствах методами более общих теорий. Идея заключается в выдвижении на первый план простых геометрических понятий, общих для многих разделов математики и ее применений, притом на языке, выдающем профессиональные секреты и показывающем читателю действительный ход мыслей тех, кто доказывает теоремы об интегральных уравнениях и гильбертовых пространствах. Однако мое, субъективное освещение вопроса отнюдь не должно разделяться читателем. Если не считать редких ссылок на курс математики для высшей школы, книга представляет собой самостоятельное целое и может быть прочитана любым, кто стремится глубже ознакомиться с линейными проблемами, обычно рассматриваемыми в курсах теории матриц или «высшей» алгебры. Алгебраические бескоординатные методы не теряют силы и изящества при ограничении конечномерным случаем и, на мой взгляд, столь же элементарны, как классический координатный метод.

Первоначально я намеревался включать в эту книгу теорему в том и только в том случае, когда уже существует ее бесконечномерное обобщение. Однако соблазнительная легкость некоторых существенно конечномерных понятий и результатов оказалась неотразимой, так что конечный результат носит лишь едва заметный отпечаток моих первоначальных намерений. Наиболее ясно он проявляется в том, что упор делается всюду на обобщаемые методы, а не на получение возможно более сильных результатов. Читатель сможет кое-где усмотреть очевидные способы сокращения предложенных мною доказательств. Но в таких случаях все шансы за то, что бесконечномерный аналог более короткого доказательства либо значительно длиннее, либо вообще не существует.

Первоначальный вариант этой книги (впервые опубликованной издательством Princeton University Press в 1942 г. в качестве седьмого выпуска серии Annals of Mathematics Studies) находился в обращении в течение нескольких лет. Помимо некоторых незначительных изменений в стиле изложения и порядке расположения материала, различие между первоначальным и настоящим текстом заключается в том, что последний содержит следующий новый материал: 1) краткое рассмотрение полей, причем при изучении векторных пространств со скалярным произведением особое внимание уделяется вещественному случаю; 2) определение определителей в инвариантных терминах с помощью теории полилинейных форм; 3) упражнения.

Упражнения (их более трехсот) составляют наиболее важное дополнение; надеюсь, что их найдут полезными как студенты, так и преподаватели. При этом читатель должен знать о них две вещи. Во-первых, если упражнение дается не в повелительной («Доказать, что...») и не в вопросительной («Верно ли, что...?»), а просто в декларативной форме, то его следует рассматривать как призыв к исследованию. В таких случаях читателю предлагается установить, верно ли утверждение или ложно, доказать его, если оно верно, или построить контрпример, если оно ложно, и, что важнее всего, рассмотреть такие изменения условия и заключения, которые бы истинные утверждения превращали в ложные, а ложные — в истинные. Во-вторых, упражнения, какова бы ни была их грамматическая форма, не всегда помещены там, где само их местоположение служило бы указанием для решения. Часто упражнения приводятся сразу после того, как утверждение приобретает смысл, и значительно раньше, чем развит механизм для их быстрого решения. Можно ожидать, что читатель, пытающийся (даже безуспешно) решить подобную «несвоевременную» задачу, сможет благодаря такой попытке лучше оценить и понять последующее. Имея в виду возможные будущие издания этой книги, я прошу читателей сообщить мне об ошибках в упражнениях и предложить свои исправления и добавления.

(Разумеется, то же относится и к основному тексту книги.)

Ни одна из теорем и почти ни одно из упражнений не являются моим открытием; бо́льшая часть их известна большинству работающих математиков, и притом уже давно. Хотя я и не привожу подробного списка источников, тем не менее вполне сознаю, что очень многим обязан книгам и работам, по которым я учился, а также друзьям и всем тем, кто до и после опубликования первого варианта поддержал меня своим одобрением и высказал много ценных критических замечаний. Особенно признателен я Дж. Л. Дубу и Арлен Броуну, прочитавшим всю рукопись в ее первом и втором вариантах и давшим мне много полезных советов, и Дж. фон Нейману, бывшему одним из творцов современных идей и методов, которые я пытался здесь изложить, и чье преподавание вдохновило меня на написание этой книги.

ГЛАВА I

ПРОСТРАНСТВА

§ 1. Поля

В дальнейшем нам придется пользоваться различными числовыми классами (как, например, классы всех вещественных или комплексных чисел). Чтобы не связывать себя на этой ранней стадии каким-либо конкретным классом, мы воспользуемся приемом наименования чисел *скалярами*. Читатель не потеряет ничего существенного, понимая всюду под скалярами вещественные или комплексные числа; в разбираемых далее примерах встретятся оба класса. Для точности (а также чтобы действовать на должном уровне общности) перечислим все нужные нам в дальнейшем общие факты о скалярах.

А. Каждой паре скаляров α, β отвечает скаляр $\alpha+\beta$, называемый *суммой* α и β, причем

1) сложение коммутативно, $\alpha+\beta=\beta+\alpha$,

2) сложение ассоциативно, $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma$,

3) существует однозначно определенный скаляр 0 (называемый *нулем*) такой, что $\alpha+0=\alpha$ для каждого скаляра α,

4) каждому скаляру α отвечает однозначно определенный скаляр $-\alpha$ такой, что $\alpha+(-\alpha)=0$.

В. Каждой паре скаляров α, β отвечает скаляр $\alpha\beta$, называемый *произведением* α и β, причем

1) умножение коммутативно, $\alpha\beta=\beta\alpha$,

2) умножение ассоциативно, $\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma$,

3) существует однозначно определенный ненулевой скаляр 1 (называемый *единицей*) такой, что $\alpha 1=\alpha$ для каждого скаляра α,

4) каждому ненулевому скаляру α отвечает однозначно определенный скаляр α^{-1} $\left(\text{или } \frac{1}{\alpha}\right)$ такой, что $\alpha\alpha^{-1}=1$.

C. Умножение дистрибутивно относительно сложения, $\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$.

Если сложение и умножение определены в некотором множестве объектов (скаляров) так, что выполнены условия A, B и C, то это множество (с заданными в нем операциями) называется *полем*. Так, например, множество $\mathcal{Q}$ всех рациональных чисел (с обычными определениями суммы и произведения) есть поле, и то же верно для множеств $\mathcal{R}$ всех вещественных и $\mathcal{C}$ всех комплексных чисел.

Упражнения

1. Почти все законы элементарной арифметики являются следствиями аксиом, определяющих поле. Доказать, в частности, что если $\mathcal{F}$ — поле и α, β, γ принадлежат $\mathcal{F}$, то справедливы следующие соотношения:

a) $0+\alpha=\alpha$.

b) Если $\alpha+\beta=\alpha+\gamma$, то $\beta=\gamma$.

c) $\alpha+(\beta-\alpha)=\beta$. (Здесь $\beta-\alpha=\beta+(-\alpha)$.)

d) $\alpha\cdot 0=0\cdot\alpha=0$. (Для ясности или выделения мы иногда обозначаем умножение точкой.)

e) $(-1)\alpha=-\alpha$.

f) $(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta$.

g) Если $\alpha\beta=0$, то либо $\alpha=0$, либо $\beta=0$ (либо то и другое одновременно).

2. a) Является ли множество всех целых положительных чисел полем? (Имея дело с хорошо известными системами, как, например, система целых чисел, мы почти всегда будем употреблять обычные операции сложения и умножения. Редкие случаи отступления от этого соглашения будут отчетливо оговариваться. Здесь и всюду в дальнейшем под словом «положительное» понимается «большее или равное нулю». Желая исключить равенство нулю, мы будем говорить «строго положительное».)

b) А множество всех целых чисел?

c) Могут ли измениться ответы на эти вопросы, если сложение или умножение (или и то и другое) определить иначе?

3. Пусть m — целое число $\geqslant 2$ и $\mathcal{Z}_m$ — множество всех положительных целых чисел, меньших m: $\mathcal{Z}_m=\{0, 1, \ldots, m-1\}$. Для α и β, принадлежащих $\mathcal{Z}_m$, будем под $\alpha+\beta$ понимать наименьший положительный остаток, полученный от деления (обычной) суммы α и β на m, и, аналогично, под $\alpha\beta$ — наименьший положительный остаток, полученный от деления (обычного) произведения α и β на m. (Например, если $m=12$, то $3+11=2$ и $3\cdot 11=9$.)

a) Доказать, что $\mathcal{Z}_m$ — поле тогда и только тогда, когда m — простое число.

b) Что есть -1 в $\mathcal{Z}_5$?

c) Что есть $\frac{1}{3}$ в $\mathcal{Z}_7$?

4. Пример $\mathcal{Z}_p$, где p — простое, показывает, что не все законы элементарной арифметики справедливы в полях; например, в $\mathcal{Z}_2$ $1+1=0$. Доказать, что если $\mathcal{F}$ — поле, то либо результат повторного прибавления 1 к самой себе всегда отличен от нуля, либо 0 впервые получается, когда число слагаемых — простое. (По определению, *характеристикой* поля $\mathcal{F}$ называется 0 в первом случае и указанное критическое простое число — во втором.)

5. Пусть $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ — множество всех вещественных чисел вида $\alpha+\beta\sqrt{2}$, где α и β — рациональные числа.

a) Является ли $\mathcal{Q}(\sqrt{2})$ полем?

b) А если требовать, чтобы α и β были целыми?

6. a) Образует ли множество всех полиномов с целыми коэффициентами поле?

b) А если разрешить коэффициентам принимать любые вещественные значения?

7. Пусть $\mathcal{F}$ — множество всех (упорядоченных) пар (α, β) вещественных чисел.

a) Станет ли $\mathcal{F}$ полем, если сложение и умножение определить так:

$$(\alpha, \beta)+(\gamma, \delta)=(\alpha+\gamma, \beta+\delta)$$

и

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta)=(\alpha\gamma, \beta\delta)?$$

b) Если сложение и умножение определить правилами

$$(\alpha, \beta)+(\gamma, \delta)=(\alpha+\gamma, \beta+\delta)$$

и

$$(\alpha, \beta)(\gamma, \delta)=(\alpha\gamma-\beta\delta, \alpha\delta+\beta\gamma),$$

будет ли тогда $\mathcal{F}$ полем?

c) Каков будет ответ, если в предшествующих двух вопросах рассматривать упорядоченные пары не вещественных, а комплексных чисел?

§ 2. Векторные пространства

Теперь мы подошли к основному понятию этой книги. В нижеследующем определении предполагается, что нам задано некоторое поле $\mathcal{F}$, и все рассматриваемые скаляры должны быть его элементами.

Определение. *Векторным пространством* называется множество $\mathcal{V}$ элементов, именуемых *векторами*, удовлетворяющее следующим аксиомам:

A. Каждой паре x, y векторов из $\mathscr{V}$ отвечает вектор $x+y$, называемый *суммой* x и y, причем

1) сложение коммутативно, $x+y=y+x$,

2) сложение ассоциативно, $x+(y+z)=(x+y)+z$,

3) в $\mathscr{V}$ существует однозначно определенный вектор 0 (называемый *началом*) такой, что $x+0=x$ для каждого вектора x,

4) каждому вектору x из $\mathscr{V}$ отвечает однозначно определенный вектор $-x$ такой, что $x+(-x)=0$.

B. Каждой паре α, x, где α — скаляр, а x — вектор из $\mathscr{V}$, отвечает вектор αx, называемый *произведением* α и x, причем

1) умножение на скаляры ассоциативно, $\alpha(\beta x)=$ $=(\alpha\beta)x$, и

2) $1x=x$ для каждого вектора x.

C. 1) Умножение на скаляры дистрибутивно относительно сложения векторов, $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$, и

2) умножение на векторы дистрибутивно относительно сложения скаляров, $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$.

Эти аксиомы не претендуют на логическую независимость; они просто являются удобной характеризацией объектов, которые мы желаем изучить. Отношение между векторным пространством $\mathscr{V}$ и основным полем $\mathscr{F}$ выражают, говоря, что $\mathscr{V}$ — векторное пространство *над* $\mathscr{F}$. Если $\mathscr{F}$ — поле $\mathscr{R}$ вещественных чисел, то $\mathscr{V}$ называется *вещественным векторным пространством*; аналогично, если $\mathscr{F}$ — поле $\mathscr{Q}$ или $\mathscr{C}$, говорят о *рациональном* или, соответственно, *комплексном векторных пространствах*.

§ 3. Примеры

Прежде чем рассматривать следствия из аксиом, приведем несколько примеров. Во всем последующем изложении мы неоднократно будем ссылаться на эти примеры и употреблять обозначения, которые вводятся в этих примерах.

1. Пусть $\mathscr{C}^1\,(=\mathscr{C})$ — множество всех комплексных чисел; если понимать под $x+y$ и αx обычные сумму и произведение комплексных чисел, $\mathscr{C}^1$ станет комплексным векторным пространством.

2. Пусть $\mathscr{P}$ — множество всех полиномов от переменной t с комплексными коэффициентами. Чтобы сделать $\mathscr{P}$ комплексным векторным пространством, будем понимать под сложением векторов и умножением на скаляр обычные операции сложения двух полиномов и умножения полинома на комплексное число; началом в $\mathscr{P}$ будет полином, тождественно равный нулю.

Пример 1 слишком прост, а пример 2 слишком сложен, чтобы считаться типичным для основного содержания этой книги. Приведем теперь другой пример комплексного векторного пространства, достаточно общий (как мы увидим позже) для всех наших целей.

3. Пусть $\mathscr{C}^n$ — множество всех упорядоченных наборов по n комплексных чисел. Если $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — элементы $\mathscr{C}^n$, положим, по определению,

$$\begin{aligned} x+y &= (\xi_1+\eta_1, \ldots, \xi_n+\eta_n), \\ \alpha x &= (\alpha\xi_1, \ldots, \alpha\xi_n), \\ 0 &= (0, \ldots, 0), \\ -x &= (-\xi_1, \ldots, -\xi_n). \end{aligned}$$

Легко проверить, что все условия аксиом А, В и С § 2 выполнены, так что $\mathscr{C}^n$ — комплексное векторное пространство; мы будем называть его *n-мерным комплексным координатным пространством.*

4. Пусть $\mathscr{P}_n$ для каждого положительного целого n — множество всех полиномов степени $\leqslant n-1$ с комплексными (как в примере 2) коэффициентами, с присоединенным к нему полиномом, тождественно равным нулю. (При обычном понимании степени полинома, степень этого полинома не определена, так что мы не можем говорить, что его степень $\leqslant n-1$.) При том же определении линейных операций (сложения и умножения на скаляр), что и в примере 2, $\mathscr{P}_n$ есть комплексное векторное пространство.

5. В близком родстве с $\mathscr{C}^n$ находится множество $\mathscr{R}^n$ всех упорядоченных наборов по n вещественных чисел. При том же формальном определении сложения и умножения на скаляры, что и для $\mathscr{C}^n$, за тем исключением, что теперь рассматриваются лишь вещественные скаляры α, $\mathscr{R}^n$ становится вещественным векторным пространством;

мы будем называть его *n-мерным вещественным координатным пространством.*

6. Все предшествующие примеры допускают обобщение. Так, пример 1 допускает следующее очевидное обобщение: каждое поле может рассматриваться как векторное пространство над самим собой. А одновременное обобщение примеров 3 и 5 получится, если, приняв за исходный пункт произвольное поле $\mathcal{F}$, образовать множество $\mathcal{F}^n$ всевозможных упорядоченных наборов по n элементов из $\mathcal{F}$ с таким же формальным определением линейных операций, как в случае $\mathcal{F}=\mathcal{C}$.

7. Согласно определению поле содержит по крайней мере два элемента; векторное же пространство может состоять и из одного только элемента. Поскольку каждое векторное пространство содержит начало, имеется по существу (т. е. с точностью до обозначений) только одно векторное пространство, состоящее из единственного вектора. Это самое тривиальное векторное пространство будет обозначаться $\mathcal{O}$.

8. Если в множестве $\mathcal{R}$ всех вещественных чисел определить обычным образом сложение вещественных чисел и умножение вещественного числа на рациональное, то $\mathcal{R}$ станет рациональным векторным пространством.

9. Если в множестве $\mathcal{C}$ всех комплексных чисел определить обычным образом сложение комплексных чисел и умножение комплексного числа на вещественное, то $\mathcal{C}$ станет вещественным векторным пространством. (Сравнить с примером 1; эти примеры совершенно различны.)

§ 4. Замечания

Следует сделать несколько замечаний относительно наших аксиом и обозначений. Существуют черты разительного сходства (и в равной мере различия) между аксиомами поля и аксиомами векторного пространства над полем. В обоих случаях аксиомы A описывают аддитивную структуру системы, аксиомы B — ее мультипликативную структуру, а аксиомы C устанавливают связь между этими структурами. Те, кто знаком с алгебраической терминологией, узнают в аксиомах A (как в § 1, так и в § 2) определяющие условия коммутативной группы; аксиомы B и C в § 2 выражают тот факт, что эта группа имеет скаляры своими операторами. Попутно заметим, что когда скаляры являются элементами не поля, а кольца, соответствующее обобщение понятия векторного пространства называется *модулем.*

Некоторые вещественные векторные пространства (как $\mathcal{R}^2$ и $\mathcal{R}^3$) часто встречаются в геометрии. На этой стадии может показаться неоправданным наше по-видимому бесполезное пристрастие к полям, отличным от $\mathcal{R}$, и, в частности, к полю $\mathcal{C}$ комплексных чисел. Но, как мы надеемся, читатель согласится принять на веру, что позднее нам придется воспользоваться глубокими свойствами комплексных чисел (сопряженность, алгебраическая замкнутость) и что комплексные числа играют важную роль как в применениях векторных пространств к современной (квантово-механической) физике, так и при математическом обобщении наших результатов на гильбертово пространство. Одно из больших неудобств комплексных пространств заключается в трудности наглядного изображения; обычное изображение пространства $\mathcal{C}^1$ (диаграмма Аргана) неотличимо от изображения $\mathcal{R}^2$, а графическое представление $\mathcal{C}^2$ по-видимому выходит за пределы человеческих возможностей. Поэтому в тех случаях, когда нам придется пользоваться наглядным языком, мы будем применять к $\mathcal{C}^n$ терминологию $\mathcal{R}^n$ и говорить, например, о $\mathcal{C}^2$ как о плоскости.

И, наконец, замечание по поводу обозначений. Символ 0 употреблялся в двояком смысле: то как скаляр, то как вектор. Позже положение усложнится еще тем, что при введении линейных функционалов и операторов этому символу будут придаваться и другие значения. К счастью, взаимоотношения различных интерпретаций символа 0 таковы, что после этого предостережения такая практика не породит никакой путаницы.

Упражнения

1. Доказать, что если x, y — векторы, а α — скаляр, справедливы следующие соотношения:

a) $0 + x = x$.

b) $-0 = 0$.

c) $\alpha \cdot 0 = 0$.

d) $0 \cdot x = 0$. (Обращаем внимание на то, что в обеих частях равенства стоит один и тот же символ 0; слева он означает скаляр, а справа — вектор.)

e) Если $\alpha x = 0$, то либо $\alpha = 0$, либо $x = 0$ (либо и то и другое).

f) $-x = (-1)x$.

g) $y + (x - y) = x$. (Здесь $x - y = x + (-y)$.)

2. Если p — простое число, то $\mathcal{Z}_p{}^n$ — векторное пространство над $\mathcal{Z}_p$ (см. § 1, упражнение 3); сколько векторов содержит это векторное пространство?

3. Пусть $\mathcal{V}$ — множество всех (упорядоченных) пар вещественных чисел. Если $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$ — элементы $\mathcal{V}$, будем писать

$$\begin{aligned} x + y &= (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2), \\ \alpha x &= (\alpha \xi_1, 0), \\ 0 &= (0, 0), \\ -x &= (-\xi_1, -\xi_2). \end{aligned}$$

Будет ли $\mathcal{V}$ при таком определении линейных операций векторным пространством? Почему?

4. Иногда подмножество векторного пространства само является векторным пространством (относительно уже введенных линейных операций). Рассмотрим, например, векторное пространство $\mathcal{C}^3$ и его подмножество $\mathcal{V}$, состоящее из тех векторов (ξ_1, ξ_2, ξ_3), для которых

a) ξ_1 — вещественное число,

b) $\xi_1 = 0$,

c) $\xi_1 = 0$, либо $\xi_2 = 0$,

d) $\xi_1 + \xi_2 = 0$,

e) $\xi_1 + \xi_2 = 1$.

В каком из этих случаев $\mathcal{V}$ будет векторным пространством?

5. Рассмотрим векторное пространство $\mathcal{P}$ и его подмножества $\mathcal{V}$, состоящие из тех векторов (полиномов) x, для которых

a) степень x равна трем,

b) $2x(0) = x(1)$,

c) $x(t) \geqslant 0$, когда $0 \leqslant t \leqslant 1$,

d) $x(t) = x(1 - t)$ для всех t.

В каком из этих случаев $\mathcal{V}$ будет векторным пространством?

§ 5. Линейная зависимость

Теперь, после описания пространств, которыми мы будем заниматься, нам следует установить те отношения между их элементами, которые будут представлять для нас интерес.

Сначала несколько слов об обозначении суммирования. Если каждому элементу i некоторого множества индексов отнесен вектор x_i, причем точное указание этого множества не требуется или представляет неудобство, мы будем просто говорить о множестве $\{x_i\}$ векторов. (Мы допускаем возможность того, что двум различным индексам соответствует один и тот же вектор. Поэтому следует со всей определенностью сказать, что важно не то, какие векторы входят в $\{x_i\}$, а то, как они входят.) Если рассматриваемое множество индексов конечно, мы будем обозначать сумму соответствующих векторов $\sum_i x_i$ (или, если желательно, более определенным символом, например $\sum_{i=1}^{n} x_i$). Удачным приемом, позволяющим избежать частого и докучливого рассмотрения отдельных случаев, является допущение в общую теорию сумм $\sum_i x_i$ даже тогда, когда нет индексов i, по которым должно производиться суммирование, или, более точно,— когда рассматриваемое множество индексов пусто. (Конечно, в этом случае нет векторов, подлежащих суммированию, или, более точно, множество $\{x_i\}$ также пусто.) Вполне естественно, что значением такой «пустой суммы» по определению считается вектор 0.

Определение. Конечное множество $\{x_i\}$ векторов называется *линейно зависимым*, если существует соответствующее множество $\{\alpha_i\}$ скаляров, не все из которых равны нулю, такое, что $\sum_i \alpha_i x_i = 0$. Если же из $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ следует, что $\alpha_i = 0$ для каждого i, то множество $\{x_i\}$ называется *линейно независимым*.

Это определение сформулировано так, чтобы оно охватывало и случай пустого множества; результат в этом случае, хотя, быть может, и парадоксален, весьма удовлетворительно согласуется с остальной частью теории. Он заключается в том, что пустое множество векторов линейно независимо. Действительно, если нет никаких индексов i, то невозможно выбрать какие-нибудь из них и отнести им ненулевые скаляры так, чтобы соответствующая сумма стала равной нулю. Трудность не в том, чтобы обойтись без отнесения нулевого значения. а в том, чтобы найти индекс, которому вообще можно было бы что-нибудь отнести. Заметим, что из этого доказательства следует, что пустое множество не является линейно зависимым; для читателя, не знакомого с доказательствами посредством «пустой импликации», эквивалентность определения линейной независимости простому отрицанию определения линейной зависимости требует некоторого дополнительного интуитивного оправдания. Простейший способ освоиться с утверждением, что «$\sum\limits_i \alpha_i x_i = 0$ влечет $\alpha_i = 0$ для каждого i» в том случае, когда индексов i не существует, состоит в следующей его перефразировке: «если $\sum\limits_i \alpha_i x_i = 0$, то нет ни одного индекса i, для которого $\alpha_i \neq 0$». В такой редакции утверждение, очевидно, справедливо и когда вообще нет ни одного индекса i.

Линейная зависимость и независимость — свойства множеств векторов; однако вошло в обычай применять соответствующие прилагательные к самим векторам, так что иногда вместо «линейно независимое множество векторов» мы будем говорить «множество линейно независимых векторов». Будет удобно говорить также о линейной зависимости и независимости не обязательно конечного множества $\mathscr{X}$ векторов. Мы скажем, что $\mathscr{X}$ линейно независимо, если этим свойством обладает каждое его конечное подмножество; в противном случае $\mathscr{X}$ будет называться линейно зависимым.

Чтобы лучше вникнуть в смысл линейной зависимости, рассмотрим примеры, уже встречавшиеся нам ранее.

1) Любые два вектора x и y из $\mathscr{C}^1$ образуют линейно зависимое множество. Когда $x = y = 0$, это тривиально; в противном же случае имеем, например, соотношение $yx + (-x)\,y = 0$. Так как, очевидно, каждое множество, содержащее линейно зависимое подмножество, само линейно зависимо, то это показывает, что каждое множество в $\mathscr{C}^1$, содержащее более одного элемента, линейно зависимо.

2) Более интересно положение в пространстве $\mathscr{P}$. Так, скажем, векторы x, y, z, определяемые формулами

$$x(t) = 1 - t, \quad y(t) = t(1 - t), \quad z(t) = 1 - t^2,$$

линейно зависимы, поскольку $x+y-z=0$. Однако бесконечное множество векторов x_0, x_1, x_2, ..., определенных формулами

$$x_0(t)=1,\ x_1(t)=t,\ x_2(t)=t^2,\ \ldots,$$

линейно независимо, ибо, если бы имелось какое-нибудь соотношение вида $\alpha_0 x_0+\alpha_1 x_1+\ldots+\alpha_n x_n=0$, то мы получили бы полиномиальное тождество

$$\alpha_0+\alpha_1 t+\ldots+\alpha_n t^n=0,$$

откуда

$$\alpha_0=\alpha_1=\ldots=\alpha_n=0.$$

3) Как уже упоминалось, пространства $\mathscr{C}^n$ являются прототипами тех пространств, которые нам нужно изучить; рассмотрим, например, случай $n=3$. Для тех, кто знаком с многомерной геометрией, понятие линейной зависимости в этом пространстве (или, точнее говоря, в его вещественном аналоге $\mathscr{R}^3$) имеет конкретный геометрический смысл, который мы лишь упомянем. На геометрическом языке два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны с началом, а три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны с началом. (Если понимать под вектором не точку в пространстве, а стрелку, проведенную из начала в некоторую данную точку, то в предыдущей фразе следует в обоих случаях опустить слова «с началом».) Вскоре мы введем понятие линейных многообразий (или векторных подпространств) в векторном пространстве и в этой связи будем иногда пользоваться языком, подсказываемым подобными геометрическими рассмотрениями.

§ 6. Линейные комбинации

Если $x=\sum_i \alpha_i x_i$, будем говорить, что x — *линейная комбинация* $\{x_i\}$; без дальнейших пояснений будут использоваться все простые грамматические производные этой терминологии. Так, в случае, когда x есть линейная комбинация $\{x_i\}$, мы будем говорить, что x линейно зависит от $\{x_i\}$; предоставим читателю доказать, что если $\{x_i\}$

линейно независимо, то для того, чтобы x было линейной комбинацией $\{x_i\}$, необходимо и достаточно, чтобы расширенное множество, полученное путем присоединения x к $\{x_i\}$, было линейно зависимо. Заметим, что, в соответствии с определением пустой суммы, начало является линейной комбинацией пустого множества векторов; более того, это — единственный вектор, обладающий этим свойством.

Следующая теорема представляет собой фундаментальный результат, относящийся к линейной зависимости.

Теорема. *Множество ненулевых векторов $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимо тогда и только тогда, когда некоторое x_k, $2 \leqslant k \leqslant n$, является линейной комбинацией предшествующих векторов.*

Доказательство. Предположим, что векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно зависимы, и пусть k — первое целое $\geqslant 2$, для которого $x_1, \ldots, x_k$ линейно зависимы. (В наихудшем случае наше предположение гарантирует, что $k = n$.) Тогда

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k = 0$$

при надлежащих коэффициентах α (не все из которых равны нулю); более того, во всяком случае $\alpha_k \neq 0$, ибо мы имели бы тогда отношение линейной зависимости между $x_1, \ldots, x_{k-1}$, в противоречие с определением. Следовательно,

$$x_k = \frac{-\alpha_1}{\alpha_k} x_1 + \ldots + \frac{-\alpha_{k-1}}{\alpha_k} x_{k-1},$$

что и требовалось. Этим доказана необходимость нашего условия; достаточность очевидна, поскольку, как было раньше отмечено, каждое множество, содержащее линейно зависимое множество, само линейно зависимо.

§ 7. Базисы

Определение. *Базисом* (или *координатной системой*) векторного пространства $\mathscr{V}$ называется множество $\mathscr{X}$ линейно независимых векторов, такое, что каждый вектор пространства $\mathscr{V}$ является линейной комбинацией элементов из $\mathscr{X}$. Векторное пространство $\mathscr{V}$ *конечномерно*, если оно имеет конечный базис.

За исключением эпизодических примеров, наше внимание на протяжении всей книги будет сосредоточено на конечномерных векторных пространствах.

За примерами базисов мы обратимся снова к пространствам $\mathscr{P}$ и $\mathscr{C}^n$. В $\mathscr{P}$ множество $\{x_n\}$, где $x_n(t) = t^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, есть базис; по определению, каждый полином есть линейная комбинация конечного числа x_n. Более того, в $\mathscr{P}$ нет конечного базиса, так как для любого заданного конечного множества полиномов можно найти полином степени большей, чем у всех них; этот последний полином, очевидно, не будет линейной комбинацией предыдущих.

Примером базиса в $\mathscr{C}^n$ является множество векторов x_i $(i = 1, \ldots, n)$, определенных условием, что j-й координатой x_i служит δ_{ij}. (Здесь мы впервые пользуемся популярным кронекеровским δ; оно определяется так: $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$). Таким образом, мы утверждаем, что в $\mathscr{C}^3$ векторы $x_1 = (1, 0, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0)$, $x_3 = (0, 0, 1)$ образуют базис. Легко видеть, что они линейно независимы, а формула

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3$$

показывает, что каждый вектор x из $\mathscr{C}^3$ есть линейная комбинация этих векторов.

В произвольном конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ с базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$, как мы знаем, каждый вектор x может быть записан в виде

$$x = \sum_i \xi_i x_i;$$

мы утверждаем, что все ξ однозначно определяются этим вектором x. Это доказывается приемом, часто используемым в теории линейной зависимости. Если бы $x = \sum_i \eta_i x_i$, то после вычитания мы имели бы

$$\sum_i (\xi_i - \eta_i) x_i = 0.$$

Вследствие линейной независимости векторов x_i, отсюда следовало бы, что $\xi_i - \eta_i = 0$ для $i = 1, \ldots, n$; другими словами, каждое ξ_i совпадает с соответствующим η_i. (Заметим, что запись $\{x_1, \ldots, x_n\}$ для базиса, образованного n элементами, неподходяща в случае $n = 0$. Несмотря на это, мы будем часто пользоваться этим обозначением. Всякий раз, делая это, мы, в принципе, обязаны добавить специальное рассмотрение, имеющее целью распространить полученные результаты на векторное пространство $\mathcal{O}$. Однако в действительности всё относящееся к этому пространству столь тривиально, что подробности не заслуживают расписывания, и мы будем опускать их.)

Теорема. *Пусть $\mathcal{V}$ — конечномерное векторное пространство и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — некоторое множество его линейно независимых векторов. Тогда, если они не образуют еще базиса, можно найти такие векторы $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$, что совокупность всех y, т. е. $\{y_1, \ldots, y_m, y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}\}$, уже образует базис. Другими словами, каждое линейно независимое множество может быть расширено до базиса.*

Доказательство. Так как $\mathcal{V}$ конечномерно, то оно обладает конечным базисом, скажем, $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Рассмотрим множество $\mathcal{S}$ векторов

$$y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n$$

и, сохраняя порядок следования векторов, применим к этому множеству несколько раз подряд теорему § 6. Множество $\mathcal{S}$ линейно зависимо, так как каждый из векторов y (как и вообще всякий вектор) есть линейная комбинация векторов x. Следовательно, некоторый вектор из $\mathcal{S}$ является линейной комбинацией предшествующих; пусть z — первый такой вектор. Тогда z отличен от любого из векторов y (поскольку эти векторы линейно независимы) и потому равен некоторому x, скажем, $z = x_i$. Рассмотрим новое множество $\mathcal{S}'$ векторов

$$y_1, \ldots, y_m, \quad x_1, \ldots, x_{i-1}, \quad x_{i+1}, \ldots, x_n.$$

Заметим, что каждый вектор из $\mathcal{V}$ является линейной комбинацией векторов множества $\mathcal{S}'$, так как через $y_1, \ldots, y_m$, $x_1, \ldots, x_{i-1}$ можно выразить x_i, а затем через $x_1, \ldots, x_{i-1}$, $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n$ — любой вектор (векторы x образуют базис). Если $\mathscr{S}'$ линейно независимо, то цель достигнута. Если же нет, то таким же способом будем применять теорему § 6 снова и снова до тех пор, пока не получим линейно независимого множества, содержащего $y_1, \ldots, y_m$, через векторы которого можно выразить каждый вектор из $\mathscr{V}$. Это множество и будет базисом, содержащим векторы y.

Упражнения

1. a) Доказать, что четыре вектора

$$x=(1,\ 0,\ 0),\quad y=(0,\ 1,\ 0),\quad z=(0,\ 0,\ 1),\quad u=(1,\ 1,\ 1)$$

образуют в $\mathscr{C}^3$ линейно зависимое множество, но любые три из них линейно независимы. Проверка линейной зависимости векторов $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, $y=(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ и $z=(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ в $\mathscr{C}^3$ производится следующим образом. Предположим, что можно подобрать α, β и γ так, что $\alpha x+\beta y+\gamma z=0$. Это означает, что

$$\begin{aligned}\alpha\xi_1+\beta\eta_1+\gamma\zeta_1&=0,\\ \alpha\xi_2+\beta\eta_2+\gamma\zeta_2&=0,\\ \alpha\xi_3+\beta\eta_3+\gamma\zeta_3&=0.\end{aligned}$$

Векторы x, y, z линейно зависимы тогда и только тогда, когда эта система уравнений имеет решение, отличное от $\alpha=\beta=\gamma=0$.

b) Пусть x, y, z и u — векторы из $\mathscr{P}$, определенные формулами $x(t)=1$, $y(t)=t$, $z(t)=t^2$ и $u(t)=1+t+t^2$. Доказать, что x, y, z и u линейно зависимы, но любые три из них линейно независимы.

2. Доказать, что если $\mathscr{R}$ рассматривать как рациональное векторное пространство (см. § 3, 8), то для линейной независимости векторов 1 и ξ из $\mathscr{R}$ необходимо и достаточно, чтобы вещественное число ξ было иррациональным.

3. Верно ли, что если x, y z — линейно независимые векторы, то этим же свойством обладают $x+y$, $y+z$, $z+x$?

4. a) Каким условиям должен удовлетворять скаляр ξ, чтобы векторы $(1+\xi,\ 1-\xi)$ и $(1-\xi,\ 1+\xi)$ из $\mathscr{C}^2$ были линейно зависимы?

b) Каким условиям должен удовлетворять скаляр ξ, чтобы векторы $(\xi,\ 1,\ 0)$, $(1,\ \xi,\ 1)$, $(0,\ 1,\ \xi)$ из $\mathscr{R}^3$ были линейно зависимы?

c) Каков будет ответ на вопрос b) при замене $\mathscr{R}^3$ на $\mathfrak{Q}^3$?

5. a) Векторы (ξ_1, ξ_2) и (η_1, η_2) из $\mathscr{C}^2$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда $\xi_1\eta_2=\xi_2\eta_1$.

b) Найти аналогичное необходимое и достаточное условие линейной зависимости двух векторов из $\mathscr{C}^3$. Сделать то же для трех векторов из $\mathscr{C}^3$.

c) Имеется ли в $\mathscr{C}^2$ множество, состоящее из трех линейно независимых векторов?

6. a) Каким условиям должны удовлетворять скаляры ξ и η, чтобы векторы $(1, \xi)$ и $(1, \eta)$ из $\mathscr{C}^2$ были линейно зависимы?

b) Каким условиям должны удовлетворять скаляры ξ, η, ζ, чтобы векторы $(1, \xi, \xi^2)$, $(1, \eta, \eta^2)$ и $(1, \zeta, \zeta^2)$ из $\mathscr{C}^3$ были линейно зависимы?

Обобщить a) и b) на $\mathscr{C}^n$.

7. a) Найти в $\mathscr{C}^4$ два базиса, единственными общими векторами которых служат $(0, 0, 1, 1)$ и $(1, 1, 0, 0)$.

b) Найти два базиса в $\mathscr{C}^4$ так, чтобы они не имели ни одного общего вектора, причем один из них содержал векторы $(1, 0, 0, 0)$ и $(1, 1, 0, 0)$, а другой — векторы $(1, 1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1, 1)$.

8. a) Каким условиям должен удовлетворять скаляр ξ, чтобы векторы $(1, 1, 1)$ и $(1, \xi, \xi^2)$ образовывали базис в $\mathscr{C}^3$?

b) Каким условиям должен удовлетворять скаляр ξ, чтобы векторы $(0, 1, \xi)$, $(\xi, 0, 1)$ и $(\xi, 1, 1+\xi)$ образовывали базис в $\mathscr{C}^3$?

9. Рассмотрим множество всех тех векторов из $\mathscr{C}^3$, каждая координата которых равна либо 0, либо 1; сколько различных базисов содержит это множество?

10. Пусть $\mathscr{X}$ — множество, состоящее из шести векторов $(1, 1, 0, 0)$, $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 0, 0, 1)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 1, 0, 1)$, $(0, 0, 1, 1)$ пространства $\mathscr{C}^4$. Найти два различных максимальных линейно независимых подмножества этого множества. (Максимальное линейно независимое подмножество множества $\mathscr{X}$ — это линейно независимое подмножество $\mathscr{Y}$ из $\mathscr{X}$, становящееся линейно зависимым всякий раз, когда к нему присоединен не принадлежащий ему вектор из $\mathscr{X}$.)

11. Доказать, что каждое векторное пространство обладает базисом. (Доказательство этого факта недостижимо для тех, кто не знаком с какими-либо трансфинитными ухищрениями, подобными полному упорядочению или лемме Цорна.)

§ 8. Размерность

Теорема 1. *Все базисы конечномерного векторного пространства $\mathscr{V}$ состоят из одинакового числа векторов.*

Доказательство. Доказательство этой теоремы представляет собой небольшое усовершенствование метода, использованного в § 6, и, между прочим, дает несколько больше, чем утверждается в теореме. Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathscr{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — два конечных множества векторов, каждое из которых обладает одним из двух определяющих свойств базиса, а именно, каждый вектор из $\mathscr{V}$ является линейной комбинацией векторов x (которые, однако, не предполагаются линейно независимыми), векторы же y линейно независимы (но не предполагается, что каждый вектор пространства является их линейной комбинацией). К множеству $\mathscr{S}$ векторов

$$y_m, x_1, \ldots, x_n$$

можно так же, как раньше, применить теорему § 6. И снова мы знаем, что каждый вектор является линейной комбинацией векторов из $\mathscr{S}$ и что $\mathscr{S}$ линейно зависимо. Рассуждая точно так же, как раньше, получаем множество $\mathscr{S}'$ векторов

$$y_m, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$$

по-прежнему с тем свойством, что каждый вектор является линейной комбинацией векторов из $\mathscr{S}'$. Припишем теперь y_{m-1} перед множеством $\mathscr{S}'$ и применим то же рассуждение. Продолжая этот процесс, заметим, что векторы x не будут исчерпаны раньше векторов y, поскольку в противном случае оставшиеся векторы y оказались бы линейными комбинациями уже включенных в $\mathscr{S}$, тогда как мы знаем, что векторы y линейно независимы. Другими словами, после m-кратного применения этого рассуждения получится множество, обладающее свойством множества векторов x и отличающееся от него тем, что m векторов x заменено векторами y. Это простое на вид утверждение и есть как раз то, что нам нужно; из него следует, что $n \geqslant m$. Следовательно, если и $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ являются базисами (так что каждое из них обладает обоими свойствами), то $n \geqslant m$ и $m \geqslant n$.

Определение. *Размерностью* конечномерного векторного пространства $\mathscr{V}$ называют число элементов его базиса.

Заметим, что так как пустое множество векторов является базисом тривиального пространства $\mathcal{O}$, то из определения следует, что это пространство имеет размерность 0. В то же время это определение (вместе с тем фактом, что в § 7 уже демонстрировался конкретный базис пространства $\mathscr{C}^n$) оправдывает наконец нашу терминологию и позволяет объявить приятный результат: n-мерное координатное пространство n-мерно. (Так как аргументация одна и та же для $\mathscr{R}^n$ и для $\mathscr{C}^n$, то утверждение справедливо и для вещественного, и для комплексного случая.)

Нашим дальнейшим результатом является следствие из теоремы 1 (получающееся с помощью теоремы § 7):

Теорема 2. *Каждое множество из $n+1$ векторов n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$ линейно зависимо. Множество из n векторов пространства $\mathscr{V}$ является базисом тогда и только тогда, когда оно линейно независимо, или, иначе, тогда и только тогда, когда каждый вектор из $\mathscr{V}$ является линейной комбинацией элементов этого множества.*

§ 9. Изоморфизм

В качестве применения понятия линейного базиса или координатной системы, мы выполним теперь данное неявно обещание и покажем, что каждое конечномерное векторное пространство над полем $\mathscr{F}$ по существу совпадает (выражаясь техническим языком, изоморфно) с некоторым $\mathscr{F}^n$.

Определение. Два векторных пространства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ (над одним и тем же полем) *изоморфны*, если можно установить взаимно однозначное соответствие между векторами x из $\mathscr{U}$ и y из $\mathscr{V}$ (скажем, $y = T(x)$) так, чтобы

$$T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2).$$

Другими словами, $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ изоморфны, если между ними можно установить изоморфизм (подобный T), где под *изоморфизмом* понимается взаимно однозначное соответствие, сохраняющее все линейные соотношения.

Легко видеть, что изоморфные конечномерные векторные пространства имеют одинаковую размерность: каждому базису одного пространства соответствует базис другого пространства. Таким образом, размерность является инвариантом изоморфизма; мы покажем теперь, что это — единственный инвариант изоморфизма, в том смысле, что любые два векторных пространства одинаковой конечной размерности (и, конечно, над одним и тем же полем) изоморфны. Так как изоморфизм $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, с одной стороны, и $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — с другой стороны, влекут изоморфизм $\mathscr{U}$ и $\mathscr{W}$, то достаточно будет доказать следующую теорему.

Теорема. *Всякое n-мерное векторное пространство $\mathscr{V}$ над полем $\mathscr{F}$ изоморфно $\mathscr{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — любой базис пространства $\mathscr{V}$. Каждый вектор x из $\mathscr{V}$ может быть записан в виде $\xi_1 x_1 + \ldots + \xi_n x_n$, причем, как мы знаем, скаляры $\xi_1, \ldots, \xi_n$ однозначно определяются вектором x. Рассмотрим взаимно однозначное соответствие

$$x \rightleftarrows (\xi_1, \ldots, \xi_n)$$

между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{F}^n$. Если $y = \eta_1 x_1 + \ldots + \eta_n x_n$, то

$$\alpha x + \beta y = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1) x_1 + \ldots + (\alpha\xi_n + \beta\eta_n) x_n;$$

этим и установлен утверждаемый изоморфизм.

Мог бы возникнуть соблазн утверждать, что теперь было бы глупо пытаться сохранять видимость общности, толкуя об общих n-мерных векторных пространствах, поскольку мы знаем, что с точки зрения изучения линейных проблем изоморфные векторные пространства неотличимы, а потому можно всегда с тем же успехом изучать $\mathscr{F}^n$. Но есть один выигрыш. Важнейшие свойства векторов и векторных пространств — это те, которые не зависят от координатных систем или, другими словами, инвариантны при изоморфизмах. Однако, соответствие между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{F}^n$ было установлено путем выбора некоторой координатной системы; если бы мы всегда изучали $\mathscr{F}^n$, то мы всегда были бы связаны с этой конкретной координатной системой, или же, в противном случае, всегда сталкивались бы с необходимостью показывать, что наши определения и теоремы не зависят от координатной системы, в которой их случилось установить. (Эта неприятная дилемма станет ясней позже, в тех нескольких случаях, когда для формулирования определения мы будем вынуждены воспользоваться конкретной координатной системой.) Поэтому в большей части этой книги мы будем игнорировать только что доказанную теорему и рассматривать n-мерные векторные пространства сами по себе независимо от какого бы то ни было базиса. Кроме только что упомянутых причин, есть и другие основания поступать подобным образом: многие конкретные примеры векторных пространств, как, скажем, $\mathscr{P}_n$, утратили бы большую часть своего наглядного содержания, если бы мы преобразовывали их в $\mathscr{C}^n$ и говорили только о координатах. При изучении векторных пространств, подобных $\mathscr{P}_n$, и их отношения к другим векторным пространствам мы должны уметь обращаться с ними с одинаковой легкостью в различных координатных системах или, что по существу то же самое, мы должны уметь обращаться с ними, не пользуясь вообще никакой координатной системой.

Упражнения

1. a) Какова размерность множества $\mathscr{C}$ всех комплексных чисел, рассматриваемого как вещественное векторное пространство? (См. § 3, 9.)

b) С каждым комплексным векторным пространством $\mathscr{V}^{\circ}$ тесно связано вещественное векторное пространство $\mathscr{V}^{\circ -}$, получающееся из $\mathscr{V}^{\circ}$, если условиться допускать умножение векторов из $\mathscr{V}^{\circ}$ только на вещественные скаляры. Если размерность комплексного векторного пространства $\mathscr{V}^{\circ}$ равна n, то какова размерность вещественного векторного пространства $\mathscr{V}^{\circ -}$?

2. Является ли множество $\mathscr{R}$ всех вещественных чисел конечномерным векторным пространством над полем $\mathscr{Q}$ всех рациональных чисел? (См. § 3, 8. Вопрос не тривиален; он требует некоторых сведений о кардинальных числах.)

3. Сколько векторов существует в n-мерном векторном пространстве над полем $\mathscr{Z}_p$ (p — простое число)?

4. Обсудить следующее утверждение: если два рациональных векторных пространства обладают одним и тем же кардинальным числом (т. е. между ними существует взаимно однозначное соответствие), то они изоморфны (т. е. между ними существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее линейные соотношения). Для разумного обсуждения необходимо знание основных фактов арифметики кардинальных чисел.

§ 10. Подпространства

Объектами, которыми интересуется геометрия, являются не только точки рассматриваемого пространства, но также его прямые, плоскости и т. д. Мы приступаем к изучению аналогов этих многомерных элементов в общих векторных пространствах.

Определение. Непустое подмножество $\mathscr{M}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ называется *подпространством*, или *линейным многообразием*, если $\mathscr{M}$ вместе с каждой парой своих векторов x, y содержит также все их линейные комбинации $\alpha x+\beta y$.

Обращаем внимание: вместе с каждым вектором x подпространство содержит $x-x$. Значит, при истолковании подпространств как обобщенных прямых и плоскостей следует проявлять осмотрительность и рассматривать только те прямые и плоскости, которые проходят через начало.

Подпространство $\mathcal{M}$ векторного пространства $\mathcal{V}$ само является векторным пространством; читатель легко проверит, что относительно уже имеющихся в $\mathcal{V}$ операций сложения векторов и умножения их на скаляры это множество удовлетворяет аксиомам A, B и C § 2.

Двумя особыми примерами подпространств являются I) множество $\mathcal{O}$, состоящее из единственного элемента — начала, и II) всё пространство $\mathcal{V}$. Следующие примеры менее тривиальны.

1) Пусть m и n — любые два строго положительных целых числа, причем $m \leqslant n$. $\mathcal{M}$ — множество всех векторов $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\mathcal{C}^n$, для которых $\xi_1 = \ldots = \xi_m = 0$.

2) При тех же m, n, что и в примере 1), рассмотрим пространство $\mathcal{P}_n$ и m любых вещественных чисел t_1, $t_2, \ldots, t_m$. $\mathcal{M}$ — множество всех векторов (полиномов) x из $\mathcal{P}_n$, для которых $x(t_1) = \ldots = x(t_m) = 0$.

3) $\mathcal{M}$ — множество всех векторов x из $\mathcal{P}_n$, для которых $x(t) = x(-t)$ тождественно относительно t.

Нам понадобятся некоторые обозначения и термины. Для любого семейства $\{\mathcal{M}_\nu\}$ подмножеств данного множества (например, для семейства подпространств векторного пространства $\mathcal{V}$) через $\bigcap\limits_\nu \mathcal{M}_\nu$ будет обозначаться *пересечение* всех $\mathcal{M}_\nu$, т. е. множество тех точек, которые входят во все $\mathcal{M}_\nu$. Далее, если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — подмножества некоторого множества, мы пишем $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, если $\mathcal{M}$ — подмножество в $\mathcal{N}$, т. е. если каждый элемент из $\mathcal{M}$ принадлежит также $\mathcal{N}$. (Заметим, что мы не исключаем возможности $\mathcal{M} = \mathcal{N}$; так, мы пишем $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$, так же. как и $\mathcal{O} \subset \mathcal{V}$.) Для конечного семейства $\{\mathcal{M}_1, \ldots, \mathcal{M}_n\}$ вместо $\bigcap\limits_\nu \mathcal{M}_\nu$ мы будем писать $\mathcal{M}_1 \cap \ldots \cap \mathcal{M}_n$; в случае, когда два подпространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ таковы, что $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} = \mathcal{O}$, мы будем говорить, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ *дизъюнктны*.

§ 11. Действия над подпространствами

Теорема 1. *Пересечение любого семейства подпространств есть подпространство.*

Доказательство. Будем для различения элементов данного семейства пользоваться индексом ν и пусть

$$\mathcal{M} = \bigcap_{\nu} \mathcal{M}_{\nu}.$$

Поскольку каждое $\mathcal{M}_{\nu}$ содержит 0, $\mathcal{M}$ также содержит 0 и, значит, не пусто. Если x и y принадлежат $\mathcal{M}$ (т. е. всем $\mathcal{M}_{\nu}$), то $\alpha x + \beta y$ принадлежит всем $\mathcal{M}_{\nu}$, а потому $\mathcal{M}$ — подпространство.

Чтобы познакомиться с применением этой теоремы, предположим, что $\mathcal{S}$ — произвольное множество векторов (не обязательно подпространство) векторного пространства $\mathcal{V}$. Тогда несомненно существуют подпространства $\mathcal{M}$, содержащие все элементы из $\mathcal{S}$ (т. е. такие, что $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}$); например, таким подпространством является всё $\mathcal{V}$. Пусть $\mathcal{M}$ — пересечение всех подпространств, содержащих $\mathcal{S}$; очевидно, $\mathcal{M}$ само является подпространством, содержащим $\mathcal{S}$. Более того, ясно, что $\mathcal{M}$ — наименьшее такое подпространство; если $\mathcal{S}$ содержится также в подпространстве $\mathcal{N}$, $\mathcal{S} \subset \mathcal{N}$, то $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$. Так определенное подпространство $\mathcal{M}$ называется подпространством, *порожденным* $\mathcal{S}$, или *натянутым на* $\mathcal{S}$, или *линейной оболочкой* $\mathcal{S}$. Следующий результат устанавливает связь между понятием линейной оболочки и понятиями, рассмотренными в §§ 5—9.

Теорема 2. *Подпространство $\mathcal{M}$, порожденное каким-либо множеством $\mathcal{S}$ векторов векторного пространства $\mathcal{V}$, совпадает с множеством всевозможных линейных комбинаций элементов из $\mathcal{S}$.*

Доказательство. Ясно, что линейная комбинация линейных комбинаций элементов множества $\mathcal{S}$ снова может быть записана в виде линейной комбинации элементов из $\mathcal{S}$. Поэтому множество всевозможных линейных комбинаций элементов из $\mathcal{S}$ является подпространством, содержащим $\mathcal{S}$, а значит и $\mathcal{M}$. А теперь обратим рассуждение: $\mathcal{M}$ содержит $\mathcal{S}$ и является подпространством; значит, $\mathcal{M}$ содержит все линейные комбинации элементов из $\mathcal{S}$.

Мы видим тем самым, что в нашей новой терминологии базис можно определить как множество линейно независимых векторов, порождающее всё пространство.

Следующий наш результат является простым следствием теоремы 2; его доказательство можно спокойно предоставить читателю.

Теорема 3. *Подпространство $\mathscr{M}$, натянутое на объединение каких-либо подпространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$, совпадает с множеством всевозможных векторов вида $x+y$, где x — вектор из $\mathscr{H}$, а y — из $\mathscr{K}$.*

Этой теоремой подсказывается для подпространства $\mathscr{M}$, порожденного объединением подпространств $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$, обозначение $\mathscr{H}+\mathscr{K}$. Мы будем говорить, что подпространство $\mathscr{K}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ является *дополнением* к подпространству $\mathscr{H}$, если $\mathscr{H}\cap\mathscr{K}=\mathscr{O}$ и $\mathscr{H}+\mathscr{K}=\mathscr{V}$.

§ 12. Размерность подпространства

Теорема 1. *Подпространство $\mathscr{M}$ n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$ является векторным пространством размерности $\leqslant n$.*

Доказательство. Возможно следующее обманчиво короткое доказательство этой теоремы. Каждое множество, состоящее из $n+1$ векторов пространства $\mathscr{V}$, линейно зависимо, значит, то же верно и в $\mathscr{M}$; поэтому, в частности, число элементов любого базиса подпространства $\mathscr{M}$ будет $\leqslant n$, что и требовалось доказать.

Слабый пункт этого рассуждения состоит в том, что мы определили размерность n требованием, чтобы прежде всего существовал конечный базис, и затем, чтобы он содержал точно n элементов. Приведенное доказательство показывает только, что ни один базис не может содержать более n элементов; но оно не показывает, что хоть один базис существует. Однако, раз уже эта трудность замечена, легко восполнить пробел. Если $\mathscr{M}=\mathscr{O}$, то $\mathscr{M}$ 0-мерно, и всё доказано. Если $\mathscr{M}$ содержит ненулевой вектор x, то пусть $\mathscr{M}_1$ $(\subset\mathscr{M})$ — подпространство, натянутое на x_1. Если $\mathscr{M}=\mathscr{M}_1$, то $\mathscr{M}$ 1-мерно, и всё доказано. Если же $\mathscr{M}\neq\mathscr{M}_1$, то пусть x_2 — элемент из $\mathscr{M}$, не содержащийся в $\mathscr{M}_1$, и $\mathscr{M}_2$ — подпространство, натянутое на x_1 и x_2; и так далее. А теперь мы вправе воспользоваться приведенным выше соображением: после не более чем n таких шагов процесс закончится, поскольку (по теореме 2 § 8) нельзя найти $n+1$ линейно независимых векторов.

Важным следствием этого второго корректного доказательства теоремы 1 является

Теорема 2. *Каково бы ни было m-мерное подпространство $\mathcal{M}$ n-мерного векторного пространства $\mathcal{V}$, можно найти базис $\{x_1, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n\}$ пространства $\mathcal{V}$ такой, что $x_1, \ldots, x_m$ принадлежат подпространству $\mathcal{M}$ и потому образуют его базис.*

Мы будем обозначать размерность векторного пространства $\mathcal{V}$ символом $\dim \mathcal{V}$. При таком обозначении теорема 1 утверждает, что если $\mathcal{M}$ — подпространство конечномерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\dim \mathcal{M} \leqslant \dim \mathcal{V}$.

Упражнения

1. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — конечномерные подпространства одинаковой размерности и $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, то $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.

2. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — подпространства векторного пространства $\mathcal{V}$ и каждый вектор из $\mathcal{V}$ принадлежит либо $\mathcal{M}$, либо $\mathcal{N}$ (либо тому и другому), то либо $\mathcal{M} = \mathcal{V}$, либо $\mathcal{N} = \mathcal{V}$ (либо $\mathcal{M} = \mathcal{N} = \mathcal{V}$).

3. Если x, y и z — векторы, для которых $x + y + z = 0$, то x и y порождают то же подпространство, что y и z.

4. Пусть x и y — векторы, а $\mathcal{M}$ — подпространство векторного пространства $\mathcal{V}$; пусть, далее, $\mathcal{H}$ — подпространство, натянутое на $\mathcal{M}$ и x, а $\mathcal{K}$ — подпространство, натянутое на $\mathcal{M}$ и y. Доказать, что если y принадлежит $\mathcal{H}$, но не принадлежит $\mathcal{M}$, то x принадлежит $\mathcal{K}$.

5. Пусть $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ и N — подпространства векторного пространства.

a) Показать, что равенство

$$\mathcal{L} \cap (\mathcal{M} + \mathcal{N}) = (\mathcal{L} \cap \mathcal{M}) + (\mathcal{L} \cap \mathcal{N})$$

не всегда выполняется.

b) Доказать, что

$$\mathcal{L} \cap (\mathcal{M} + (\mathcal{L} \cap \mathcal{N})) = (\mathcal{L} \cap \mathcal{M}) + (\mathcal{L} \cap \mathcal{N}).$$

6. a) Возможно ли, чтобы нетривиальное подпространство векторного пространства $\mathcal{V}$ (т. е. подпространство, отличное и от $\mathcal{O}$, и от $\mathcal{V}$) имело единственное дополнение?

b) Если $\mathcal{M}$ — m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства, то каждое дополнение к $\mathcal{M}$ имеет размерность $n-m$.

7. a) Показать, что трехмерные подпространства пятимерного векторного пространства не дизъюнктны.

b) Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — конечномерные подпространства векторного пространства, то

$$\dim \mathcal{M} + \dim \mathcal{N} = \dim (\mathcal{M} + \mathcal{N}) + \dim (\mathcal{M} \cap \mathcal{N}).$$

8. Полином x называется *четным*, если $x(-t) = x(t)$ тождественно относительно t (см. § 10, 3)), и *нечетным*, если $x(-t) = -x(t)$.

a) Как класс $\mathcal{M}$ четных полиномов, так и класс $\mathcal{N}$ нечетных полиномов являются подпространствами пространства $\mathcal{P}$ всех (комплексных) полиномов.

b) Доказать, что $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ служат дополнениями друг к другу.

§ 13. Сопряженные пространства

Определение. *Линейным функционалом* на векторном пространстве $\mathcal{V}$ называется скалярная функция y, определенная для каждого вектора x и обладающая свойством

$$y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y(x_1) + \alpha_2 y(x_2)$$

(тождественно относительно векторов x_1, x_2 и скаляров α_1, α_2).

Рассмотрим несколько примеров линейных функционалов.

1) Для всех $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\mathcal{C}^n$ положим $y(x) = \xi_1$. Более общим образом, взяв n любых скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, положим

$$y(x) = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n.$$

Заметим, что для любого линейного функционала y на любом векторном пространстве

$$y(0) = y(0 \cdot 0) = 0 \cdot y(0) = 0;$$

по этой причине линейный функционал, как мы определили его, называют иногда *однородным*. В частности, в $\mathcal{C}^n$

$$y(x) = \alpha_1 \xi_1 + \ldots + \alpha_n \xi_n + \beta$$

не является линейным функционалом, если только β не есть 0.

2) Для любого полинома x из $\mathcal{P}$ положим $y(x) = x(0)$. Более общим образом, взяв n любых скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и n любых вещественных чисел $t_1, \ldots, t_n$, положим

$$y(x) = \alpha_1 x(t_1) + \ldots + \alpha_n x(t_n).$$

Еще один пример, в некотором смысле — предельный случай только что рассмотренного, получается следующим образом. Пусть (a, b) — любой конечный интервал вещественной оси t и α — любая комплексная интегрируемая функция, определенная на (a, b); определим y следующим образом:

$$y(x) = \int_a^b \alpha(t)\, x(t)\, dt.$$

3) На произвольном векторном пространстве $\mathscr{V}$ определим y, положив

$$y(x) = 0$$

для каждого x из $\mathscr{V}$.

В последнем примере содержится первый намек на некую общую ситуацию. Пусть $\mathscr{V}$ — любое векторное пространство и $\mathscr{V}'$ — совокупность всех линейных функционалов на $\mathscr{V}$. Обозначим через 0 линейный функционал, определенный в примере 3 (см. замечание в конце § 4). Если y_1 и y_2 — линейные функционалы на $\mathscr{V}$, α_1 и α_2 — скаляры, обозначим через y функцию, определенную формулой

$$y(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Легко видеть, что y — линейный функционал; мы будем обозначать его $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$. При таком определении линейных понятий (нуль, сложение, умножение на скаляр) множество $\mathscr{V}'$ образует векторное пространство; его называют пространством, *сопряженным* к $\mathscr{V}$.

§ 14. Скобки

Прежде чем приступить к более подробному изучению линейных функционалов и сопряженных пространств, мы хотим ввести обозначение, которое на первый взгляд может показаться странным, но впоследствии прояснит многие ситуации. Обычно мы обозначаем линейный функционал одной буквой, например y. Однако иногда оказывается необходимым пользоваться полным функциональным обозначением и как-то указывать, что если y — линейный функционал на $\mathscr{V}$, а x — вектор из $\mathscr{V}$, то $y(x)$ — некий конкретный скаляр. Согласно принимаемому нами обозначению вместо того, чтобы к y приписывать x, заключенное в круглые скобки, мы будем заключать x и y в квадратные скобки, отделяя запятой. Учитывая необычность этого обозначения, уделим ему еще несколько слов.

Как мы только что отметили, $[x, y]$ есть замена обычного функционального символа $y(x)$; оба эти символа обозначают скаляр, получающийся, если взять значение, принимаемое линейной функцией y на векторе x. Рассмотрим аналогичную ситуацию (относящуюся, однако, к нелинейным функциям). Пусть y — вещественная функция вещественного переменного, определенная для каждого вещественного числа x формулой $y(x)=x^2$. Обозначение $[x, y]$ есть символический способ выписки рецепта действий, которые на самом деле следует произвести; он соответствует предложению [возьми число и возведи его в квадрат].

Используя это обозначение, можно подытожить сказанное так: каждому векторному пространству $\mathscr{V}$ мы относим сопряженное пространство $\mathscr{V}'$, состоящее из всех линейных функционалов на $\mathscr{V}$; каждой паре x, y, где x — вектор из $\mathscr{V}$, а y — линейный функционал из $\mathscr{V}'$, мы сопоставляем скаляр $[x, y]$, определяемый как значение y на x. С применением символа $[x, y]$ определяющее свойство линейного функционала выражается формулой

$$[\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2, y]=\alpha_1[x_1, y]+\alpha_2[x_2, y], \tag{1}$$

а определение линейных операций для линейных функционалов — формулой

$$[x, \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2]=\alpha_1[x, y_1]+\alpha_2[x, y_2]. \tag{2}$$

Совместно оба эти соотношения выражают, говоря, что $[x, y]$ есть *билинейный функционал* векторов x из $\mathscr{V}$ и y из $\mathscr{V}'$.

Упражнения

1. Будем рассматривать множество $\mathscr{C}$ всех комплексных чисел как вещественное векторное пространство (см. § 3, 9). Пусть для каждого $x=\xi_1+i\xi_2$ из $\mathscr{C}$ (где ξ_1, ξ_2 — вещественные числа и $i=\sqrt{-1}$) функция y определена формулой

a) $y(x)=\xi_1$,

b) $y(x)=\xi_2$,

c) $y(x)=\xi_1^2$,

d) $y(x)=\xi_1-i\xi_2$,

e) $y(x)=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}$. (Знаком квадратного корня перед положительным числом всегда обозначается положительный квадратный корень из этого числа.)

В каких из этих случаев y является линейным функционалом?

2. Пусть для каждого $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ из $\mathscr{C}^3$ функция y определена формулой

a) $y(x)=\xi_1+\xi_2$,

b) $y(x)=\xi_1-\xi_3^2$,

c) $y(x)=\xi_1+1$,

d) $y(x)=\xi_1-2\xi_2+3\xi_3$.

В каких из этих случаев y является линейным функционалом?

3. Пусть для каждого x из $\mathscr{P}$ функция y определяется формулой

a) $y(x)=\int\limits_{-1}^{+2} x(t)\,dt$,

b) $y(x)=\int\limits_{0}^{2} [x(t)]^2\,dt$,

c) $y(x)=\int\limits_{0}^{1} t^2x(t)\,dt$,

d) $y(x)=\int\limits_{0}^{1} x(t^2)\,dt$,

e) $y(x)=\dfrac{dx}{dt}$,

f) $y(x)=\left.\dfrac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=1}$

В каких из этих случаев y является линейным функционалом?

4. Пусть $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ — произвольная последовательность комплексных чисел. Для каждого элемента x из $\mathscr{P}$, $x(t)=\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i t^i$, положим $y(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\xi_i\alpha_i$. Доказать, что y — элемент из $\mathscr{P}'$ и что каждый элемент из $\mathscr{P}'$ может быть получен таким способом при надлежащем выборе чисел α.

5. Пусть y — ненулевой линейный функционал на векторном пространстве $\mathscr{V}$ и α — произвольный скаляр; всегда ли существует вектор x из $\mathscr{V}$ такой, что $[x, y]=\alpha$?

6. Доказать, что если y и z — линейные функционалы (на одном и том же векторном пространстве), причем $[x, y]=0$ всякий раз, как $[x, z]=0$, то существует скаляр α такой, что $y=\alpha z$. (Указание: предполагая $[x_0, z] \neq 0$, взять $\alpha=[x_0, y]/[x_0, z]$.)

§ 15. Сопряженные базисы

Еще несколько слов, прежде чем приступать к доказательствам важных теорем. Понятие сопряженного пространства было определено безотносительно к каким-либо координатным системам; а уже беглый взгляд на нижеследующие доказательства обнаружит чрезмерное обилие координатных систем. Мы хотим подчеркнуть, что это явление неизбежно; мы собираемся установить результаты, касающиеся размерности, а это — понятие, само определение которого (пока что) давалось в терминах базиса.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{V}$ — n-мерное векторное пространство и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — его базис. Каковы бы ни были скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, существует один и только один линейный функционал y на $\mathscr{V}$ такой, что $[x_i, y]=\alpha_i$ для $i=1, \ldots, n$.*

Доказательство. Каждое x из $\mathscr{V}$ может быть однозначно записано в виде $x=\xi_1 x_1+\ldots+\xi_n x_n$; если y — линейный функционал, то

$$[x, y]=\xi_1[x_1, y]+\ldots+\xi_n[x_n, y].$$

Из этого соотношения явствует единственность требуемого y; если $[x_i, y]=\alpha_i$, то значение $[x, y]$ определяется для каждого x формулой $[x, y]=\sum_i \xi_i\alpha_i$. Это рассуждение можно также обратить: если определить y формулой

$$[x, y]=\xi_1\alpha_1+\ldots+\xi_n\alpha_n,$$

то y действительно будет линейным функционалом и $[x_i, y]=\alpha_i$.

Теорема 2. *Если $\mathscr{V}$ — n-мерное векторное пространство и $\mathscr{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — его базис, то в $\mathscr{V}'$ существует единственный базис $\mathscr{X}'=\{y_1, \ldots, y_n\}$, обладающий тем свойством, что $[x_i, y_j]=\delta_{ij}$. Следовательно, пространство, сопряженное к n-мерному, n-мерно.*

Базис $\mathscr{X}'$ называют *сопряженным* к базису $\mathscr{X}$.

Доказательство. Из теоремы 1 следует, что для каждого $j=1, \ldots, n$ может быть найдено единственное y_j из $\mathscr{V}'$ такое, что $[x_i, y_j]=\delta_{ij}$; остается только доказать, что множество $\mathscr{X}'=\{y_1, \ldots, y_n\}$ есть базис пространства $\mathscr{V}'$.

Во-первых, $\mathscr{X}'$ — линейно независимое множество, так как если $\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n=0$ или, другими словами, если

$$[x, \alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n]=\alpha_1[x, y_1]+\ldots+\alpha_n[x, y_n]=0$$

для всех x, то для $x=x_i$ мы будем иметь

$$0=\sum_j \alpha_j[x_i, y_j]=\sum_j \alpha_j \delta_{ij}=\alpha_i.$$

Во-вторых, каждое y из $\mathscr{V}'$ является линейной комбинацией векторов $y_1, \ldots, y_n$. Чтобы доказать это, положим $[x_i, y]=\alpha_i$; тогда для $x=\sum_i \xi_i x_i$ будем иметь

$$[x, y]=\xi_1\alpha_1+\ldots+\xi_n\alpha_n.$$

С другой стороны,

$$[x, y_j]=\sum_i \xi_i[x_i, y_j]=\xi_j.$$

Подставив в предыдущее равенство, получим

$$[x, y]=\alpha_1[x, y_1]+\ldots+\alpha_n[x, y_n]=$$
$$=[x, \alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n].$$

Следовательно, $y=\alpha_1 y_1+\ldots+\alpha_n y_n$, и теорема доказана.

Нам потребуется также очевидное следствие теоремы 2.

Теорема 3. *Для любых двух различных векторов u, v n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$ существует линейный функционал y на $\mathscr{V}$ такой, что $[u, y] \neq [v, y]$; или, что равносильно этому, для любого ненулевого вектора x из $\mathscr{V}$ найдется вектор y из $\mathscr{V}'$ такой, что $[x, y] \neq 0$.*

Доказательство. То, что два утверждения теоремы действительно равносильны, показывает рассмотрение вектора $x=u-v$. В соответствии с этим будем доказывать только последнее утверждение.

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольный базис пространства $\mathcal{V}$, $\mathcal{X}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — сопряженный базис в $\mathcal{V}'$. Если $x = \sum_i \xi_i x_i$, то (как выше) $[x, y_j] = \xi_j$. Поэтому, если $[x, y] = 0$ для всех y, и, в частности, если $[x, y_j] = 0$ для $j = 1, \ldots, n$, то $x = 0$.

§ 16. Рефлексивность

Естественно полагать, что если пространство $\mathcal{V}'$, сопряженное к векторному пространству $\mathcal{V}$, и связи между пространством и его сопряженным представляют вообще какой-нибудь интерес для $\mathcal{V}$, то они в той же мере представляют интерес и для $\mathcal{V}'$. Другими словами, мы намереваемся теперь образовать пространство $(\mathcal{V}')'$, сопряженное к $\mathcal{V}'$; для простоты мы будем обозначать его $\mathcal{V}''$. Словесное описание элемента из $\mathcal{V}''$ громоздко: такой элемент является линейным функционалом от линейных функционалов. Однако именно в этом пункте проявляется наибольшее преимущество обозначения $[x, y]$; с его помощью легко рассматривать $\mathcal{V}$ и его связь с $\mathcal{V}''$.

Рассматривая символ $[x, y]$ при некотором фиксированном $y = y_0$, мы не получаем ничего нового: $[x, y_0]$ есть просто другой способ записи значения $y_0(x)$ функции y_0 на векторе x. Однако если в символе $[x, y]$ зафиксировать некоторое $x = x_0$, то мы заметим, что функция от векторов пространства $\mathcal{V}'$, значение которой на y равно $[x_0, y]$, есть скалярная функция, оказывающаяся линейной (см. § 14, (2)); другими словами, $[x_0, y]$ определяет линейный функционал на $\mathcal{V}'$ и, следовательно, элемент из $\mathcal{V}''$.

Этим методом мы выявили *некоторые* линейные функционалы на $\mathcal{V}'$, но все ли? Для конечномерного случая ответ положителен, как показывает следующая

Теорема. *Если $\mathcal{V}$ — конечномерное векторное пространство, то каждому линейному функционалу z_0 на $\mathcal{V}'$ отвечает вектор x_0 из $\mathcal{V}$ такой, что $z_0(y) = [x_0, y] = y(x_0)$ для каждого y из $\mathcal{V}'$; соответствие $z_0 \rightleftarrows x_0$ между $\mathcal{V}''$ и $\mathcal{V}$ есть изоморфизм.*

Соответствие, описанное в этом утверждении, называется *естественным соответствием* между $\mathcal{V}''$ и $\mathcal{V}$.

Доказательство. Рассмотрим это соответствие с точки зрения перехода от $\mathcal{V}'$ к $\mathcal{V}''$; иначе говоря, каждому x_0 из $\mathcal{V}$ поставим в соответствие вектор z_0 из $\mathcal{V}''$, определяемый условием $z_0(y) = y(x_0)$ для каждого y из $\mathcal{V}'$. Так как $[x, y]$ линейно зависит от x, то отображение $x_0 \longrightarrow z_0$ линейно.

Покажем, что это — взаимно однозначное отображение $\mathcal{V}$ на его образ; другими словами, мы утверждаем, что если x_1, x_2 — векторы из $\mathcal{V}$, а z_1, z_2 — соответствующие векторы из $\mathcal{V}''$ (так что $z_1(y) = [x_1, y]$ и $z_2(y) = [x_2, y]$ для всех y из $\mathcal{V}'$) и если $z_1 = z_2$, то $x_1 = x_2$. Сказать $z_1 = z_2$ все равно, что сказать $[x_1, y] = [x_2, y]$ для каждого y из $\mathcal{V}'$; а тогда требуемое заключение следует из теоремы 3 § 15.

Два последних абзаца вместе показывают, что множество тех линейных функционалов z на $\mathcal{V}'$ (т. е. элементов из $\mathcal{V}''$), которые действительно имеют требуемый вид (т. е. $z(y)$ тождественно равно $[x, y]$ при надлежащем подборе x из $\mathcal{V}$), является подпространством пространства $\mathcal{V}''$, изоморфным $\mathcal{V}$, и потому n-мерным. Но n-мерность $\mathcal{V}$ влечет n-мерность $\mathcal{V}'$, которая в свою очередь влечет n-мерность $\mathcal{V}''$. Следовательно, $\mathcal{V}''$ должно совпадать со своим только что описанным n-мерным подпространством, и теорема доказана.

Важно отметить, что теорема устанавливает не только, что $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}''$ изоморфны — это тривиально вытекает из того факта, что они имеют одинаковую размерность, — но и то, что естественное соответствие есть изоморфизм. Это свойство векторных пространств называется *рефлексивностью*; каждое конечномерное векторное пространство рефлексивно.

Часто оказывается удобным допускать в отношении $\mathcal{V}''$ некоторую неряшливость: в случае конечномерных векторных пространств мы будем отождествлять $\mathcal{V}''$ с $\mathcal{V}$ (посредством естественного изоморфизма) и говорить, что элемент z_0 из $\mathcal{V}''$ совпадает с элементом x_0 из $\mathcal{V}$, всякий раз, как $z_0(y) = [x_0, y]$ для всех y из $\mathcal{V}'$. На этом языке очень легко выразить связь между базисом $\mathcal{X}$ пространства $\mathcal{V}$ и базисом, сопряженным к его сопряженному, в $\mathcal{V}''$; симметрия соотношения $[x_i, y_j] = \delta_{ij}$ показывает, что $\mathcal{X}'' = \mathcal{X}$.

§ 17. Аннуляторы

Определение. *Аннулятором* $\mathscr{S}^\circ$ подмножества $\mathscr{S}$ (не обязательно подпространства) векторного пространства $\mathscr{V}$ называется множество всех векторов y из $\mathscr{V}'$ таких, что $[x, y] = 0$ для всех x из $\mathscr{S}$.

Так, $\mathcal{O}^\circ = \mathscr{V}'$ и $\mathscr{V}^\circ = \mathcal{O}(\subset \mathscr{V}')$. Если $\mathscr{V}$ конечномерно и $\mathscr{S}$ содержит ненулевой вектор, т. е. $\mathscr{S} \neq \mathcal{O}$, то, как показывает теорема 3 § 15, $\mathscr{S}^\circ \neq \mathscr{V}'$.

Теорема 1. *Если $\mathscr{M}$ — m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$, то $\mathscr{M}^\circ$ есть $(n - m)$-мерное подпространство пространства $\mathscr{V}'$.*

Доказательство. Предоставляем читателю проверить, что $\mathscr{M}^\circ$ (в действительности $\mathscr{S}^\circ$ для произвольного $\mathscr{S}$) всегда есть подпространство; остается доказать только утверждение, касающееся размерности $\mathscr{M}^\circ$.

Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис в $\mathscr{V}$, первые m элементов которого взяты из $\mathscr{M}$ (и потому образуют базис в $\mathscr{M}$); и пусть $\mathscr{X}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — сопряженный базис в $\mathscr{V}'$. Обозначим через $\mathscr{N}$ подпространство (в $\mathscr{V}'$), натянутое на векторы $y_{m+1}, \ldots, y_n$; очевидно $\mathscr{N}$ имеет размерность $n - m$. Докажем, что $\mathscr{M}^\circ = \mathscr{N}$.

Любой вектор x из $\mathscr{M}$ есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_m$,

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i x_i,$$

так что для каждого $j = m+1, \ldots, n$ имеем

$$[x, y_j] = \sum_{i=1}^{m} \xi_i [x_i, y_j] = 0.$$

Другими словами, y_j принадлежит $\mathscr{M}^\circ$ для $j = m+1, \ldots$ $\ldots, n$; следовательно,

$$\mathscr{N} \subset \mathscr{M}^\circ.$$

С другой стороны, пусть y — произвольный элемент из $\mathscr{M}^\circ$. Принадлежа $\mathscr{V}'$, он является линейной комбинацией базисных векторов $y_1, \ldots, y_n$,

$$y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j y_j.$$

Так как, по предположению, y принадлежит $\mathcal{M}^\circ$, то для каждого $i = 1, \ldots, m$ имеем

$$0 = [x_i, y] = \sum_{j=1}^{n} \eta_j [x_i, y_j] = \eta_i;$$

другими словами, y есть линейная комбинация векторов $y_{m+1}, \ldots, y_n$. Это означает, что y принадлежит $\mathcal{N}$, так что

$$\mathcal{M}^\circ \subset \mathcal{N},$$

и теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\mathcal{M}$ — подпространство конечномерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\mathcal{M}^{\circ\circ} (= (\mathcal{M}^\circ)^\circ) = \mathcal{M}$.*

Доказательство. Отметим, что здесь мы пользуемся соглашением об отождествлении $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}''$, принятым в конце § 16. По определению, $\mathcal{M}^{\circ\circ}$ есть множество всех векторов x таких, что $[x, y] = 0$ для всех y из $\mathcal{M}^\circ$. Так как, по определению $\mathcal{M}^\circ$, $[x, y] = 0$ для всех x из $\mathcal{M}$ и y из $\mathcal{M}^\circ$, то заключаем, что $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}^{\circ\circ}$. Для завершения доказательства остается привлечь размерностные соображения. Пусть $\mathcal{M}$ m-мерно; тогда $\mathcal{M}^\circ$ имеет размерность $n - m$, а $\mathcal{M}^{\circ\circ}$ — размерность $n - (n - m) = m$. Значит, $\mathcal{M} = \mathcal{M}^{\circ\circ}$, что и требовалось доказать.

Упражнения

1. Построить ненулевой линейный функционал y на $\mathcal{C}^3$ такой, что для $x_1 = (1, 1, 1)$ и $x_2 = (1, 1, -1)$ выполняются условия $[x_1, y] = [x_2, y] = 0$.

2. Векторы $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, -1)$ и $x_3 = (1, -1, -1)$ образуют в $\mathcal{C}^3$ базис. Обозначая через $\{y_1, y_2, y_3\}$ сопряженный базис, найти $[x, y_1]$, $[x, y_2]$ и $[x, y_3]$, если $x = (0, 1, 0)$.

3. Доказать, что если y — линейный функционал на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$, то множество тех векторов x, для которых $[x, y] = 0$, образует в $\mathcal{V}$ подпространство; какова его размерность?

4. Пусть $y(x) = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$, где $x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — вектор из $\mathcal{C}^3$; показать, что y — линейный функционал на $\mathcal{C}^3$; найти базис подпространства, состоящего из тех векторов x, для которых $[x, y] = 0$.

5. Доказать, что если $y_1, \ldots, y_m$ — линейные функционалы на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$, причем $m < n$, то в $\mathcal{V}$ существует ненулевой вектор x такой, что $[x, y_j] = 0$ для $j = 1, \ldots, m$. Что означает этот результат в приложении к решениям линейных уравнений?

6. Пусть $y_1, \ldots, y_m$ — линейные функционалы на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$, причем $m < n$. Каким условиям должны подчиняться скаляры $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, чтобы существовал вектор x такой, что $[x, y_j] = \alpha_j$ для $j = 1, \ldots, m$? Что означает этот результат в приложении к решениям линейных уравнений?

7. Если $\mathcal{V}$ — n-мерное векторное пространство над конечным полем и $0 \leqslant m \leqslant n$, то число m-мерных подпространств в $\mathcal{V}$ равно числу $(n-m)$-мерных подпространств.

8. a) Доказать, что каково бы ни было подмножество $\mathcal{S}$ конечномерного векторного пространства, $\mathcal{S}^{00}$ совпадает с подпространством, натянутым на $\mathcal{S}$.

b) Если $\mathcal{S}$ и $\mathcal{J}$—подмножества векторного пространства и $\mathcal{S} \subset \mathcal{J}$, то $\mathcal{J}^0 \subset \mathcal{S}^0$.

c) Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — подпространства конечномерного векторного пространства, то $(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})^0 = \mathcal{M}^0 + \mathcal{N}^0$ и $(\mathcal{M} + \mathcal{N})^0 = \mathcal{M}^0 \cap \mathcal{N}^0$. (Указание: последовательно применить b) и теорему 2 § 17.)

d) Справедливо ли заключение пункта c), если векторные пространства не обязательно конечномерны?

9. Подпространства, о которых идет речь в этом упражнении, не обязательно конечномерны; большинство его пунктов (но не все) опирается на какого-либо рода трансфинитные соображения, необходимые для обоснования того, что каждое векторное пространство обладает базисом (ср. упражнение 11 § 7).

a) Пусть f и g — скалярные функции, определенные на множестве $\mathcal{X}$; если α, β — скаляры, пусть $h = \alpha f + \beta g$ означает функцию, определяемую условием $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ для всех x из $\mathcal{X}$. Множество всех таких функций является векторным пространством при этом определении линейных операций, и то же справедливо для всех финитно-ненулевых функций. (Функция f на $\mathcal{X}$ называется *финитно-ненулевой*, если множество тех x из $\mathcal{X}$, для которых $f(x) \neq 0$, конечно.)

b) Каждое векторное пространство изоморфно множеству всех финитно-ненулевых функций на некотором множестве.

c) Если $\mathcal{V}$ — векторное пространство с базисом $\mathcal{X}$ и f — скалярная функция, определенная на множестве $\mathcal{X}$, то на $\mathcal{V}$ существует единственный линейный функционал y такой, что $[x, y] = f(x)$ для всех x из $\mathcal{X}$.

d) Используя a), b) и c), доказать, что каждое векторное пространство $\mathcal{V}$ изоморфно подпространству пространства $\mathcal{V}'$.

e) Какие векторные пространства изоморфны своим сопряженным?

f) Если $\mathcal{Y}$ — линейно независимое подмножество векторного пространства $\mathcal{V}$, то в $\mathcal{V}$ существует базис, содержащий $\mathcal{Y}$. (Ср этот результат с теоремой § 7.)

g) Если $\mathcal{X}$ — множество и y — его элемент, будем через f_y обозначать скалярную функцию, определенную на $\mathcal{X}$ условием $f_y(x) = 1$ или 0 соответственно тому, будет ли $x = y$ или $x \neq y$.

Пусть $\mathcal{Y}$ — множество всех функций f_y с присоединенной к ним функцией g, определенной условием $g(x)=1$ для всех x из $\mathcal{X}$. Доказать, что если $\mathcal{X}$ бесконечно, то $\mathcal{Y}$ — линейно независимое подмножество векторного пространства всех скалярных функций на $\mathcal{X}$.

h) Естественное отображение $\mathcal{V}$ в $\mathcal{V}''$ определено для всех векторных пространств (не только конечномерных): для каждого элемента x_0 из $\mathcal{V}$ соответствующий ему элемент z_0 из $\mathcal{V}''$ определяется условием $z_0(y)=[x_0, y]$ для всех y из $\mathcal{V}'$. Доказать, что если $\mathcal{V}$ рефлексивно (т. е. если каждое z_0 из $\mathcal{V}''$ может быть получено таким образом при надлежащем выборе x_0), то $\mathcal{V}$ конечномерно. (Указание: представить $\mathcal{V}'$ в виде множества всех скалярных функций на некотором множестве и затем, пользуясь g), f) и c), построить элемент из $\mathcal{V}''$, не порождаемый ни одним элементом из $\mathcal{V}$.)

Предостережение: утверждение, что векторное пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда оно конечномерно, шокирует большинство знатоков вопроса. Причина — в том, что общепринятое и плодотворное обобщение понятия рефлексивности на бесконечномерные пространства является не столь простым, как данное в h).

§ 18. Прямые суммы

Мы рассмотрим несколько важных общих методов построения новых векторных пространств из уже имеющихся; в этом параграфе мы начнем с простейшего из этих методов.

Определение. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — векторные пространства (над одним и тем же полем). Их *прямой суммой* называется векторное пространство $\mathcal{W}$ (обозначаемое $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$), элементами которого являются всевозможные упорядоченные пары $\langle x, y\rangle$ с x из $\mathcal{U}$ и y из $\mathcal{V}$, а линейные операции определены формулой

$$\alpha_1\langle x_1, y_1\rangle+\alpha_2\langle x_2, y_2\rangle=\langle\alpha_1x_1+\alpha_2x_2, \alpha_1y_1+\alpha_2y_2\rangle.$$

Заметим, что образование прямой суммы аналогично способу построения плоскости по двум ее координатным осям.

Перейдем к изучению связи этого понятия с некоторыми понятиями, рассмотренными нами ранее

Множество всех векторов вида $\langle x, 0\rangle$ образует в $\mathcal{W}$ подпространство; соответствие $\langle x, 0\rangle \rightleftarrows x$ показывает, что это подпространство изоморфно $\mathcal{U}$. Удобно еще раз позволить себе логическую неаккуратность и, отождествляя x и $\langle x, 0\rangle$, говорить об $\mathcal{U}$ как о подпространстве пространства $\mathcal{W}$. Разумеется, аналогичным образом векторы

y из $\mathscr{V}$ могут быть отождествлены с векторами вида $\langle 0, y\rangle$ из $\mathscr{W}$, и мы можем рассматривать $\mathscr{V}$ как подпространство в $\mathscr{W}$. Конечно, эта терминология не совсем точна, но обойти логическую трудность здесь гораздо легче, чем в случае второго сопряженного пространства. Можно было бы определить прямую сумму $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ (по крайней мере в том случае, когда $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ не имеют общих ненулевых векторов) как множество, содержащее все x из $\mathscr{U}$, все y из $\mathscr{V}$ и все те пары $\langle x, y\rangle$, в которых $x \neq 0$ и $y \neq 0$. Это определение приводит к теории, во всех деталях аналогичной той, которую мы разовьем, но она порождает неудобства при доказательстве теорем из-за вызываемой ею необходимости различать отдельные случаи. Однако ясно, что с точки зрения этого определения $\mathscr{U}$ действительно является подмножеством в $\mathscr{U}\oplus\mathscr{V}$. В этом смысле, или с точностью до изоморфизма при принятом нами определении, поставим теперь вопрос: какова связь между $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, если рассматривать эти пространства как подпространства объемлющего пространства $\mathscr{W}$?

Теорема. *Если $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — подпространства векторного пространства $\mathscr{W}$, то следующие три условия эквивалентны:*

1) $\mathscr{W}=\mathscr{U}\oplus\mathscr{V}$.

2) $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}=\mathscr{O}$ и $\mathscr{U}+\mathscr{V}=\mathscr{W}$ (т. е. $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ служат дополнениями друг к другу).

3) Каждый вектор z из $\mathscr{W}$ может быть записан одним и только одним способом в виде $z = x + y$, где x принадлежит $\mathscr{U}$, а y принадлежит $\mathscr{V}$.

Доказательство. Мы докажем импликации 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathscr{W}=\mathscr{U}\oplus\mathscr{V}$. Если $z=\langle x, y\rangle$ принадлежит одновременно $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$, то $x = y = 0$, так что $z = 0$; это показывает, что $\mathscr{U}\cap\mathscr{V}=\mathscr{O}$. Из того, что каждое z из $\mathscr{W}$ представимо в виде $z=\langle x, 0\rangle+\langle 0, y\rangle$, следует, что $\mathscr{U}+\mathscr{V}=\mathscr{W}$.

2) $\Rightarrow$ 3). Если принять 2), так что, в частности, $\mathscr{U}+\mathscr{V}=\mathscr{W}$, то ясно, что каждое z из $\mathscr{W}$ обладает требуемым представлением $z = x+y$. Чтобы доказать единственность, допустим, что $z = x_1+y_1$ и $z = x_2+y_2$, где x_1 и x_2 принадлежат $\mathscr{U}$, а y_1 и y_2 принадлежат $\mathscr{V}$. Так как $x_1+y_1=x_2+y_2$, то $x_1-x_2=y_2-y_1$. Так как левая часть

этого равенства принадлежит $\mathcal{U}$, а правая $\mathcal{V}$, то из дизъюнктности подпространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ следует, что $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

3) $\Rightarrow$ 1). Эта импликация практически неотличима от определения прямой суммы. Если образовать прямую сумму $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, а затем отождествить $\langle x, 0\rangle$ и $\langle 0, y\rangle$ соответственно с x и y, то это обяжет нас к отождествлению суммы $\langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle + \langle 0, y\rangle$ с тем, что по нашему предположению является общим элементом $z = x + y$ пространства $\mathcal{W}$; из предположенной единственности представления z в виде $x + y$ заключаем, что соответствие между $\langle x, 0\rangle$ и x (а также между $\langle 0, y\rangle$ и y) взаимно однозначно.

Если подпространства $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ векторного пространства $\mathcal{W}$ дизъюнктны и в совокупности порождают $\mathcal{W}$ (т. е. если они удовлетворяют условию 2)), принято говорить, что $\mathcal{W}$ есть *внутренняя прямая сумма* $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$; символически это, как прежде, записывают $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Желая оттенить различие между этим понятием и тем, которое было определено раньше, мы будем называть $\mathcal{W}$ в первом случае *внешней прямой суммой* $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. В силу рассмотренных выше естественных изоморфизмов и особенно ввиду последней теоремы, это различие скорее формальное, чем по существу. В соответствии с нашим отождествительным соглашением мы будем обычно игнорировать его

§ 19. Размерность прямой суммы

Что можно сказать о размерности прямой суммы? Если $\mathcal{U}$ n-мерно, $\mathcal{V}$ m-мерно и $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, то какова размерность $\mathcal{W}$? На этот вопрос легко ответить.

Теорема 1. *Размерность прямой суммы равна сумме размерностей ее слагаемых.*

Доказательство. Мы утверждаем, что если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства $\mathcal{U}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — базис пространства $\mathcal{V}$, то множество $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ (или, более точно, множество $\{\langle x_1, 0\rangle, \ldots, \langle x_n, 0\rangle, \langle 0, y_1\rangle, \ldots, \langle 0, y_m\rangle\}$) служит базисом в $\mathcal{W}$. Простейшее доказательство этого утверждения состоит в использовании импликации 1) $\Rightarrow$ 3) теоремы предыдущего параграфа. Так как каждое z из $\mathcal{W}$ может быть записано в виде $z = x + y$, где x — линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_n$, а y — линейная комбинация векторов $y_1, \ldots, y_m$, то $\mathscr{W}$ действительно порождается указанным множеством. Чтобы показать, что это множество к тому же линейно независимо, допустим, что

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n + \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m = 0.$$

Из единственности представления 0 в виде $x + y$ вытекает, что

$$\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta_1 y_1 + \ldots + \beta_m y_m = 0,$$

а тогда из линейной независимости векторов x и линейной независимости векторов y следует, что

$$\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = \beta_1 = \ldots = \beta_m = 0.$$

Теорема 2. *Каковы бы ни были $(n+m)$-мерное векторное пространство $\mathscr{W}$ и его n-мерное подпространство $\mathscr{U}$, в $\mathscr{W}$ существует m-мерное подпространство $\mathscr{V}$ такое, что $\mathscr{W} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$.*

Доказательство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — какой-либо базис в $\mathscr{U}$; по теореме § 7 в $\mathscr{W}$ найдется множество векторов $\{y_1, \ldots, y_m\}$ такое, что $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ будет базисом в $\mathscr{W}$. Пусть $\mathscr{V}$ — подпространство, натянутое на $y_1, \ldots, y_m$; мы опустим проверку того, что $\mathscr{W} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$.

Теорема 2 означает, что каждое подпространство конечномерного векторного пространства обладает дополнением.

§ 20. Сопряженное к прямой сумме

В дальнейшем понятие прямой суммы будет большей частью относиться к подпространствам векторного пространства $\mathscr{V}$; это избавит нас от хлопот с принятым в § 18 отождествительным соглашением и к тому же окажется наиболее полезным в ходе дальнейшей работы. А пока заключим наше изучение прямых сумм установлением простых связей между сопряженными пространствами, аннуляторами и прямыми суммами. Чтобы оттенить нашу нынешнюю точку зрения на прямые суммы, мы вернемся к прежним обозначениям.

Теорема. *Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — подпространства векторного пространства $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{N}$, то $\mathcal{M}'$ изоморфно $\mathcal{N}^\circ$, $\mathcal{N}'$ изоморфно $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{V}'=\mathcal{M}^\circ\oplus\mathcal{N}^\circ$.*

Доказательство. Для упрощения записи мы на протяжении этого доказательства будем обозначать буквами x, x', x° соответственно элементы пространств $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}'$ и $\mathcal{M}^\circ$ и аналогично закрепим буквы y за $\mathcal{N}$ и буквы z за $\mathcal{V}$. (Эта запись вовсе не должна означать, что, скажем, между векторами x из $\mathcal{M}$ и x' из $\mathcal{M}'$ существует какая-то особая зависимость.)

Если z' принадлежит одновременно $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}^\circ$, т. е. $z'(x) = z'(y) = 0$ для всех x и y, то $z'(z) = z'(x+y) = 0$ для всех z; это показывает, что $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}^\circ$ дизъюнктны. Далее, для любого вектора z' из $\mathcal{V}'$ и $z = x+y$ положим $x^\circ(z) = z'(y)$ и $y^\circ(z) = z'(x)$. Легко видеть, что определенные так функции x° и y° являются линейными функциями на $\mathcal{V}$ (т. е. элементами $\mathcal{V}'$), принадлежащими соответственно $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}^\circ$; из того, что $z' = x^\circ + y^\circ$, вытекает, что $\mathcal{V}'$ действительно является прямой суммой $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}^\circ$.

Чтобы доказать утверждаемый изоморфизм, отнесем каждому x° функционал y' из $\mathcal{N}'$, определяемый равенством $y'(y) = x^\circ(y)$, и предоставим читателю шаблонную проверку того, что соответствие $x^\circ \longrightarrow y'$ линейно и взаимно однозначно, а потому является изоморфизмом между $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}'$; соответствующий результат для $\mathcal{N}^\circ$ и $\mathcal{M}'$ получается по симметрии перестановкой x и y. (Заметим, что для конечномерных векторных пространств одно лишь существование изоморфизма, скажем, между $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}'$, тривиально следует из размерностных соображений; действительно, $\mathcal{M}^\circ$ и $\mathcal{N}'$ имеют ту же размерность, что и $\mathcal{N}$.)

Заметим по поводу всего нашего изложения теории прямых сумм, что в числе два нет ничего магического; можно было бы определить прямую сумму любого конечного числа векторных пространств и доказать очевидные аналоги всех теорем трех последних параграфов, причем усложнились бы только обозначения. Предупреждаем, что позже мы воспользуемся этим замечанием и будем рассматривать вытекающие из него теоремы как доказанные.

Упражнения

1. Пусть x, y, u и v—векторы из $\mathscr{C}^4$, а $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — подпространства в $\mathscr{C}^4$, натянутые соответственно на $\{x, y\}$ и $\{u, v\}$. В каких из нижеследующих случаев $\mathscr{C}^4 = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$?

a) $x=(1, 1, 0, 0)$, $y=(1, 0, 1, 0)$,
$u=(0, 1, 0, 1)$, $v=(0, 0, 1, 1)$.

b) $x=(-1, 1, 1, 0)$, $y=(0, 1, 1, 1)$,
$u=(1, 0, 0, 0)$, $v=(0, 0, 0, 1)$.

c) $x=(1, 0, 0, 1)$, $y=(0, 1, 1, 0)$,
$u=(1, 0, 1, 0)$, $v=(0, 1, 0, 1)$.

2. Если $\mathscr{M}$—подпространство, образованное теми векторами $(\xi_1, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{2n})$ из $\mathscr{C}^{2n}$, для которых $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$, и $\mathscr{N}$ — подпространство тех векторов, для которых $\xi_j = \xi_{n+j}$ $(j = 1, \ldots, n)$, то $\mathscr{C}^{2n} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}$.

3. Построить три подпространства $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}_1$ и $\mathscr{N}_2$ векторного пространства $\mathscr{V}$ так, чтобы $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N}_1 = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N}_2 = \mathscr{V}$, но $\mathscr{N}_1 \neq \mathscr{N}_2$. (Это означает, что для прямых сумм не существует закона сокращения). Какова геометрическая картина, соответствующая этой ситуации?

4. a) Пусть $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$ — векторные пространства; какова связь между $\mathscr{U} \oplus (\mathscr{V} \oplus \mathscr{W})$ и $(\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}) \oplus \mathscr{W}$ (т. е. в каком смысле образование прямых сумм является ассоциативной операцией)?

b) В каком смысле образование прямых сумм коммутативно?

5. a) Три подпространства $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ векторного пространства $\mathscr{V}$ называются *независимыми*, если каждое из них дизъюнктно с суммой двух других. Доказать, что $\mathscr{V} = \mathscr{L} \oplus (\mathscr{M} \oplus \mathscr{N})$ (а также $\mathscr{V} = (\mathscr{L} \oplus \mathscr{M}) \oplus \mathscr{N}$) тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ независимы и $\mathscr{V} = \mathscr{L} + \mathscr{M} + \mathscr{N}$. (Подпространство $\mathscr{L} + \mathscr{M} + \mathscr{N}$ есть множество всевозможных векторов вида $x+y+z$ с x из $\mathscr{L}$, y из $\mathscr{M}$ и z из $\mathscr{N}$.)

b) Привести пример трех подпространств векторного пространства $\mathscr{V}$, образующих в сумме $\mathscr{V}$, попарно дизъюнктных и тем не менее не являющихся независимыми.

c) Пусть x, y и z — элементы векторного пространства, а $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$, соответственно,— порожденные ими подпространства. Доказать, что векторы x, y и z линейно независимы тогда и только тогда, когда подпространства $\mathscr{L}$, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ независимы.

d) Доказать, что три конечномерных подпространства независимы тогда и только тогда, когда сумма их размерностей равна размерности их суммы.

e) Обобщить результаты a) — d) с трех на любое конечное число подпространств.

§ 21. Факторпространства

Как мы уже знаем, если $\mathscr{M}$ — подпространство векторного пространства $\mathscr{V}$, обычно существует много других подпространств $\mathscr{N}$ в $\mathscr{V}$ таких, что $\mathscr{M} \oplus \mathscr{N} = \mathscr{V}$. Не существует никакого естественного способа отличать из всего множества дополнений к $\mathcal{M}$ какое-то одно. Однако существует естественная конструкция, связывающая с $\mathcal{M}$ и $\mathcal{V}$ новое векторное пространство, играющее для всех практических целей роль дополнения к $\mathcal{M}$. Теоретическое преимущество, которое эта конструкция имеет перед образованием произвольного дополнения, заключается именно в ее «естественном» характере, т. е. в том, что она не зависит от выбора какого-нибудь базиса, да, собственно говоря, и вообще от выбора чего бы то ни было.

Чтобы понять эту конструкцию, неплохо иметь в виду какой-нибудь образец. Предположим, например, что $\mathcal{V}=\mathcal{R}^2$ (вещественная координатная плоскость), а $\mathcal{M}$ состоит из всех тех векторов (ξ_1, ξ_2), для которых $\xi_2=0$ (горизонтальная ось). Каждое дополнение к $\mathcal{M}$ есть прямая (отличная от горизонтальной оси), проходящая через начало. Заметим, что всякое такое дополнение обладает тем свойством, что оно пересекает каждую горизонтальную прямую точно в одной точке. Идея описываемой конструкции состоит в превращении множества всех горизонтальных прямых в векторное пространство.

Прежде всего выделим с помощью $\mathcal{M}$ некоторые подмножества из $\mathcal{V}$. (Мы снова вернулись к общему случаю.) Для произвольного вектора x из $\mathcal{V}$ обозначим через $x+\mathcal{M}$ множество всевозможных сумм $x+y$ с y из $\mathcal{M}$; каждое множество вида $x+\mathcal{M}$ называется *смежным классом* по $\mathcal{M}$. (В предыдущем примере плоскости с выделенной прямой смежные классы — это горизонтальные прямые.) Заметим, что один и тот же смежный класс может порождаться двумя разными векторами, т. е. даже если $x \neq y$, может случиться, что $x+\mathcal{M}=y+\mathcal{M}$. Тем самым имеет смысл говорить о смежном классе, скажем, $\mathcal{H}$, по $\mathcal{M}$, не указывая, от какого элемента (или элементов) он получился; сказать, что $\mathcal{H}$ есть смежный класс (по $\mathcal{M}$), означает просто, что существует по крайней мере одно такое x, что $\mathcal{H}=x+\mathcal{M}$.

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ — смежные классы (по $\mathcal{M}$); обозначим через $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ множество всевозможных сумм $u+v$ с u из $\mathcal{H}$ и v из $\mathcal{K}$; мы утверждаем, что $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ также является смежным классом по $\mathcal{M}$. Действительно, если $\mathcal{H}=x+\mathcal{M}$ и $\mathcal{K}=y+\mathcal{M}$, то каждый элемент из $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ принадлежит смежному классу $(x+y)+\mathcal{M}$ (заметим, что $\mathcal{M}+\mathcal{M}=\mathcal{M}$), и, обратно, каждый элемент из $(x+y)+\mathcal{M}$ принадлежит $\mathcal{H}+\mathcal{K}$. (Если, например, z принадлежит $\mathcal{M}$, то $(x+y)+z=$ $=(x+z)+(y+0)$.) Другими словами, $\mathcal{H}+\mathcal{K}=$ $=(x+y)+\mathcal{M}$, так что $\mathcal{H}+\mathcal{K}$ есть смежный класс, что и утверждалось. Предоставим читателю проверку того, что сложение смежных классов коммутативно и ассоциативно. Смежный класс $\mathcal{M}$ (т. е. $0+\mathcal{M}$) таков, что $\mathcal{H}+\mathcal{M}=\mathcal{H}$ для любого смежного класса $\mathcal{H}$, причем $\mathcal{M}$—единственный смежный класс, обладающий таким свойством. (Если $(x+\mathcal{M})+(y+\mathcal{M})=x+\mathcal{M}$, то $x+\mathcal{M}$ содержит $x+y$, так что $x+y=x+u$ для некоторого u из $\mathcal{M}$; отсюда y принадлежит $\mathcal{M}$, а потому $y+\mathcal{M}=\mathcal{M}$.) Если $\mathcal{H}$—смежный класс, то множество, состоящее из всех векторов $-u$, где u принадлежит $\mathcal{H}$, тоже является смежным классом; мы будем обозначать его $-\mathcal{H}$. Смежный класс $-\mathcal{H}$ таков, что $\mathcal{H}+(-\mathcal{H})=\mathcal{M}$, причем $-\mathcal{H}$—единственный смежный класс, обладающий таким свойством. Подытожим: сложение смежных классов удовлетворяет аксиомам А § 2.

Пусть $\mathcal{H}$—смежный класс и α — скаляр; если $\alpha\neq 0$, обозначим через $\alpha\mathcal{H}$ множество, образованное всевозможными векторами αu с u из $\mathcal{H}$; под $0\mathcal{H}$ будем понимать $\mathcal{M}$. Простая проверка показывает, что так определенное умножение удовлетворяет аксиомам В и С § 2.

Таким образом, доказано, что множество всех смежных классов является векторным пространством относительно определенных выше линейных операций. Это векторное пространство называется *факторпространством* пространства $\mathcal{V}$ по подпространству (или модулю) $\mathcal{M}$ и обозначается $\mathcal{V}/\mathcal{M}$.

§ 22. Размерность факторпространства

Теорема 1. *Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$—дополнительные друг к другу подпространства векторного пространства $\mathcal{V}$, то соответствие, относящее каждому вектору y из $\mathcal{N}$ смежный класс $y+\mathcal{M}$, является изоморфизмом между $\mathcal{N}$ и $\mathcal{V}/\mathcal{M}$.*

Доказательство. Если y_1. y_2—элементы из $\mathcal{N}$ такие, что $y_1+\mathcal{M}=y_2+\mathcal{M}$, то, в частности, y_1 принадлежит $y_2+\mathcal{M}$, а потому $y_1=y_2+x$, где x принадлежит $\mathcal{M}$

Так как это означает, что $y_1 - y_2 = x$, а $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ дизъюнктны, то $x = 0$ и, следовательно, $y_1 = y_2$. (Напомним, что вместе с y_1 и y_2 также $y_1 - y_2$ принадлежит $\mathcal{N}$.) Это рассуждение показывает, что изучаемое нами соответствие взаимно однозначно на том, что оно охватывает. Чтобы доказать, что оно охватывает достаточно много, рассмотрим произвольный смежный класс по $\mathcal{M}$, скажем, $z + \mathcal{M}$. Так как $\mathcal{V} = \mathcal{N} + \mathcal{M}$, z можно записать в виде $y + x$ с x из $\mathcal{M}$ и y из $\mathcal{N}$; отсюда вытекает (поскольку $x + \mathcal{M} = \mathcal{M}$), что $z + \mathcal{M} = y + \mathcal{M}$. Это показывает, что каждый смежный класс по $\mathcal{M}$ может быть получен выбором некоторого элемента из $\mathcal{N}$ (взамен какого-нибудь прежнего элемента из $\mathcal{V}$); следовательно, $y \to y + \mathcal{M}$ — действительно взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{N}$ и $\mathcal{V}/\mathcal{M}$. Линейность этого соответствия следует непосредственно из определения линейных операций в $\mathcal{V}/\mathcal{M}$; в самом деле,

$$(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) + \mathcal{M} = \alpha_1 (y_1 + \mathcal{M}) + \alpha_2 (y_2 + \mathcal{M}).$$

Теорема 2. *Если $\mathcal{M}$ — m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства $\mathcal{V}$, то $\mathcal{V}/\mathcal{M}$ имеет размерность $n - m$.*

Доказательство. По теореме 2 § 19 можно найти такое подпространство $\mathcal{N}$, что $\mathcal{M} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{V}$. Пространство $\mathcal{N}$ имеет размерность $n - m$ (по теореме 1 § 19), и это пространство изоморфно пространству $\mathcal{V}/\mathcal{M}$ (по только что доказанной теореме 1).

В теории факторпространств существует немало вопросов, которые можно было бы рассмотреть (например, о связи этих пространств с сопряженными пространствами и аннуляторами). Поскольку, однако, большинство таких вопросов представляет собой едва ли больше, чем упражнения, требующие использования техники, которой мы уже располагаем, мы обратимся вместо этого к некоторым новым и неочевидным способам построения полезных векторных пространств.

Упражнения

1. Рассмотрим факторпространства, получаемые путем факторизации пространства $\mathcal{P}$ всех полиномов по различным его подпространствам. Если $\mathcal{M} = \mathcal{P}_n$, будет ли $\mathcal{P}/\mathcal{M}$ конечномерным? А если $\mathcal{M}$ — подпространство, состоящее из всех четных полиномов?

А если $\mathcal{M}$—подпространство, состоящее из всех полиномов, делящихся на x_n (где $x_n(t) = t^n$)?

2. Пусть $\mathcal{S}$ и $\mathcal{J}$ — произвольные подмножества векторного пространства (не обязательно смежные классы по какому-нибудь подпространству); ничто не мешает нам определить $\mathcal{S} + \mathcal{J}$ точно так, как определялось сложение для смежных классов, и аналогично можно определить $\alpha\mathcal{S}$ (где α — скаляр). Какие аксиомы векторного пространства выполнены при наделении класса всех подмножеств векторного пространства этими «линейными операциями»?

3. a) Пусть $\mathcal{M}$—подпространство векторного пространства $\mathcal{V}$. Два вектора x и y называются *сравнимыми* по модулю $\mathcal{M}$, символически $x \equiv y$ $(\mathcal{M})$, если $x - y$ принадлежит $\mathcal{M}$. Доказать, что сравнимость по модулю $\mathcal{M}$ есть *отношение эквивалентности*, т. е. что оно рефлексивно ($x \equiv x$), симметрично (если $x \equiv y$, то $y \equiv x$) и транзитивно (если $x \equiv y$ и $y \equiv z$, то $x \equiv z$).

b) Если α_1, α_2 — скаляры, а x_1, x_2, y_1 и y_2 векторы, для которых $x_1 \equiv y_1$ $(\mathcal{M})$ и $x_2 \equiv y_2$ $(\mathcal{M})$, то $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \equiv \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ $(\mathcal{M})$.

c) Сравнимость по модулю $\mathcal{M}$ разбивает $\mathcal{V}$ на классы эквивалентности, т. е. такие множества, что два вектора принадлежат одному и тому же множеству тогда и только тогда, когда они сравнимы. Доказать, что подмножество векторного пространства $\mathcal{V}$ является классом эквивалентности по модулю $\mathcal{M}$ тогда и только тогда, когда оно является смежным классом по $\mathcal{M}$.

4. a) Пусть $\mathcal{M}$—подпространство векторного пространства $\mathcal{V}$. Каждому линейному функционалу y на $\mathcal{V}/\mathcal{M}$ (т. е. каждому элементу y из $(\mathcal{V}/\mathcal{M})'$) отвечает линейный функционал z на $\mathcal{V}$ (т. е. элемент z из $\mathcal{V}'$), определяемый равенством $z(x) = y(x + \mathcal{M})$. Доказать, что соответствие $y \to z$ есть изоморфизм между $(\mathcal{V}/\mathcal{M})'$ и $\mathcal{M}^0$.

b) Пусть $\mathcal{M}$ — подпространство векторного пространства $\mathcal{V}$. Каждому смежному классу $y + \mathcal{M}^0$ по $\mathcal{M}^0$ в $\mathcal{V}'$ (т. е. каждому элементу $\mathcal{H}$ из $\mathcal{V}'/\mathcal{M}^0$) отвечает линейный функционал z на $\mathcal{M}$ (т. е. элемент z из $\mathcal{M}'$), определяемый условием $z(x) = y(x)$. Доказать, что z однозначно определяется смежным классом $\mathcal{H}$ (т. е. не зависит от специального выбора y) и что соответствие $\mathcal{H} \to z$ есть изоморфизм между $\mathcal{V}'/\mathcal{M}^0$ и $\mathcal{M}'$.

5. Пусть $\mathcal{V}$— конечномерное векторное пространство и $\mathcal{W} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{V}'$. Доказать, что соответствие $\langle x, y\rangle \to \langle y, x\rangle$ есть изоморфизм между $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$.

§ 23. Билинейные формы

Прямая сумма $\mathcal{W} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ векторных пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (над одним и тем же полем) снова есть векторное пространство; мы собираемся изучить некоторые функции на $\mathcal{W}$. (Для этой цели первоначальное определение $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$, с помощью упорядоченных пар, наиболее подходяще.) Значение такой функции, скажем w, на некотором элементе $\langle x, y\rangle$ из $\mathcal{W}$ будем обозначать $w(x, y)$. Рассмотрение линейных функций на $\mathscr{W}$ уже не представляет для нас особого интереса; основные относящиеся к ним факты были рассмотрены в § 20. Теперь мы хотим рассмотреть билинейные функции; по определению, это скалярные функции на $\mathscr{W}$, обладающие тем свойством, что для каждого фиксированного значения любого из аргументов они линейно зависят от другого. Более точно, скалярная функция w на $\mathscr{W}$ называется *билинейной формой* (или *билинейным функционалом*), если

$$w(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2,\ y) = \alpha_1 w(x_1,\ y) + \alpha_2 w(x_2,\ y)$$

и

$$w(x,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 w(x,\ y_1) + \alpha_2 w(x,\ y_2)$$

тождественно относительно всех входящих векторов и скаляров.

В одной специальной ситуации нам уже встретились билинейные функционалы. А именно: если $\mathscr{V}$ — пространство, сопряженное к $\mathscr{U}$, $\mathscr{V} = \mathscr{U}'$, и $w(x, y) = [x, y]$ (см. § 14), то w — билинейный функционал на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{U}'$. В качестве примера более общей ситуации, пусть $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — произвольные векторные пространства (как всегда, над одним и тем же полем), u и v — элементы, соответственно, из $\mathscr{U}'$ и $\mathscr{V}'$, и $w(x, y) = u(x)\, v(y)$ для всех x из $\mathscr{U}$ и y из $\mathscr{V}$. Еще более общий пример получим, выбрав конечное число элементов в $\mathscr{U}'$, скажём, $u_1, \ldots, u_k$, и такое же число элементов в $\mathscr{V}'$, скажем, $v_1, \ldots, v_k$, и положив $w(x, y) = u_1(x)\, v_1(y) + \ldots + u_k(x)\, v_k(y)$. Какое из слов «функционал» или «форма» употребляется, зависит отчасти от контекста, и, пожалуй, еще больше от прихоти автора. В этой книге мы будем обычно употреблять «функционал» с прилагательным «линейный» и «форма» с прилагательным «билинейная» (и его многомерными обобщениями).

Пусть w_1 и w_2 — билинейные формы на $\mathscr{W}$, α_1 и α_2 — скаляры и w — функция на $\mathscr{W}$, определяемая формулой

$$w(x,\ y) = \alpha_1 w_1(x,\ y) + \alpha_2 w_2(x,\ y).$$

Легко видеть, что w — билинейная форма; мы будем обозначать ее $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. При таком определении линейных операций множество всех билинейных форм на $\mathscr{W}$ является векторным пространством. Основная цель дальнейшей части этого параграфа — установить (для конечномерного случая), как размерность этого пространства зависит от размерностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.

Теорема 1. *Если $\mathcal{U}$ — n-мерное векторное пространство с базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathcal{V}$ — m-мерное векторное пространство с базисом $\{y_1, \ldots, y_m\}$, то для всякого множества nm скаляров $\{\alpha_{ij}\}$ $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, m)$ существует и притом только одна билинейная форма w на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ такая, что $w(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$ для всех i и j.*

Доказательство. Если $x = \sum_i \xi_i x_i$, $y = \sum_j \eta_j y_j$ и w — билинейная форма на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ такая, что $w(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$, то

$$w(x, y) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j w(x_i, y_j) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \alpha_{ij}.$$

Из этого равенства явствует единственность w; существование же требуемого w доказывается прочтением того же равенства справа налево, т. е. принятием его за определение w. (Сравнить этот результат с теоремой 1 § 15.)

Теорема 2. *Если $\mathcal{U}$ — n-мерное векторное пространство с базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathcal{V}$ — m-мерное векторное пространство с базисом $\{y_1, \ldots, y_m\}$, то векторное пространство $\mathcal{W}$ всех билинейных форм на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ обладает однозначно определенным базисом $\{w_{pq}\}$ $(p = 1, \ldots, n;$ $q = 1, \ldots, m\}$, удовлетворяющим условиям $w_{pq}(x_i, y_j) = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Следовательно, размерность пространства всех билинейных форм на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ равна произведению размерностей $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$.*

Доказательство. Применяя теорему 1, определим w_{pq} (для каждого фиксированного p и q) заданным условием $w_{pq}(x_i, y_j) = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Так определенные билинейные формы линейно независимы, ибо из

$$\sum_p \sum_q \alpha_{pq} w_{pq} = 0$$

следует, что

$$0 = \sum_p \sum_q \alpha_{pq} \delta_{ip} \delta_{jq} = \alpha_{ij}.$$

Кроме того, если w — произвольный элемент из $\mathscr{W}$ и $w(x_i, y_j) = \alpha_{ij}$, то $w = \sum\limits_p \sum\limits_q \alpha_{pq} w_{pq}$. Действительно, при $x = \sum\limits_i \xi_i x_i$, $y = \sum\limits_j \eta_j y_j$ имеем

$$w_{pq}(x, y) = \sum_i \sum_j \xi_i \eta_j \delta_{ip} \delta_{jq} = \xi_p \eta_q,$$

а потому

$$w(x, y) = \sum_i \sum_j \xi_j \eta_j \alpha_{ij} = \sum_p \sum_q \alpha_{pq} w_{pq}(x, y).$$

Следовательно, векторы w_{pq} образуют базис пространства билинейных форм, и теорема доказана. (Сравнить этот результат с теоремой 2 § 15.)

Упражнения

1. a) Если w — билинейная форма на $\mathscr{R}^n \oplus \mathscr{R}^n$, то существуют скаляры α_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ такие, что, каковы бы ни были $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, $w(x, y) = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$. Скаляры α_{ij} однозначно определяются формой w.

b) Если z — линейный функционал на пространстве всех билинейных форм на $\mathscr{R}^n \oplus \mathscr{R}^n$, то существуют скаляры β_{ij} такие, что (в обозначениях из a)) $z(w) = \sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_{ij} \beta_{ij}$ для каждого w. Скаляры β_{ij} однозначно определяются функционалом z.

2. Билинейную форму w на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ называют *вырожденной*, если как функция одного из своих аргументов она тождественно равна нулю для некоторых ненулевых значений другого аргумента; в противном случае ее называют *невырожденной*.

a) Привести пример вырожденной (не тождественно нулевой) билинейной формы на $\mathscr{C}^2 \oplus \mathscr{C}^2$.

b) Привести пример невырожденной билинейной формы на $\mathscr{C}^2 \oplus \mathscr{C}^2$.

3. Если w — билинейная форма на $\mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$, y_0 — элемент из $\mathscr{V}$ и y — функция на $\mathscr{U}$, определенная равенством $y(x) = w(x, y_0)$, то y — линейный функционал на $\mathscr{U}$. Верно ли, что если форма w — невырожденная, то каждый линейный функционал на $\mathscr{U}$ может быть получен таким способом (надлежащим выбором y_0)?

4. Пусть для всех x и y из $\mathscr{P}_n$ функция w определена равенством:

a) $w(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$,

b) $w(x, y) = x(1) + y(1)$,

c) $w(x, y) = x(1) \cdot y(1)$,

d) $w(x, y) = x(1) \left(\dfrac{dy}{dt}\right)_{t=1}$

В каких из этих случаев w является билинейной формой на $\mathcal{P}_n \oplus \mathcal{P}_n$? В каких случаях она невырожденна?

5. Существуют ли векторное пространство $\mathcal{V}$ и билинейная форма w на $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ такие, что w не равно тождественно нулю, но $w(x, x) = 0$ для каждого x из $\mathcal{V}$?

6. a) Билинейную форму w на $\mathcal{V} \oplus \mathcal{V}$ называют *симметричной*, если $w(x, y) = w(y, x)$ для всех x и y. *Квадратичной* формой на $\mathcal{V}$ называют функцию q на $\mathcal{V}$, получающуюся из билинейной формы w, если положить $q(x) = w(x, x)$. Доказать, что если характеристика основного скалярного поля отлична от 2, то каждая симметричная билинейная форма однозначно определяется соответствующей квадратичной формой. Что случится, если характеристика равна 2?

b) Могут ли несимметричная и симметричная билинейные формы определить одну и ту же квадратичную форму?

§ 24. Тензорные произведения

В этом параграфе будет описан новый метод построения из двух векторных пространств третьего, а именно их тензорного произведения. Нам представится относительно мало случаев использовать тензорные произведения, но их теория тесно соприкасается с некоторыми рассматриваемыми далее вопросами, а также применяется в других родственных разделах математики, как теория представления групп и тензорное исчисление. Это понятие существенно сложнее понятия прямой суммы; поэтому мы начнем с рассмотрения некоторых примеров, показывающих, как должны выглядеть тензорные произведения; мы будем руководствоваться этими примерами при установлении определения.

Пусть $\mathcal{U}$ — множество всех полиномов, скажем, с комплексными коэффициентами от одной переменной s; $\mathcal{V}$ — множество всех полиномов от другой переменной t; и наконец, $\mathcal{W}$ — множество всех полиномов от двух переменных s и t. С очевидными определениями линейных операций, $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ являются комплексными векторными пространствами; в этом случае нам было бы желательно назвать $\mathcal{W}$, или нечто подобное ему, тензорным произведением $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Одним из оснований для такой терминологии является то, что если взяты некоторое x из $\mathcal{U}$ и некоторое y из $\mathcal{V}$, то можно образовать их произведение, т. е элемент из $\mathscr{W}$, определенный равенством $z(s, t)=x(s)y(t)$. (Это — обычное произведение двух полиномов. Здесь, как и раньше, мы упорно игнорируем то не относящееся к делу обстоятельство, что можно перемножать и два элемента из $\mathscr{U}$, т. е. что произведение двух полиномов от одной и той же переменной есть снова полином от этой переменной. Векторные пространства, в которых определено хорошее понятие умножения, называют алгебрами, и их изучение, как таковое, выходит за рамки этой книги.)

В предыдущем примере рассматривались векторные пространства, элементами которых служат функции. При желании можно было бы считать и обычное векторное пространство $\mathscr{C}^n$ совокупностью функций; областью определения в этом случае является множество, состоящее ровно из n точек, скажем, из n первых (строго) положительных целых чисел. Другими словами, вектор $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ можно считать функцией ξ, значение которой $\xi(i)$ определено для $i=1, \ldots, n$; определение векторных операций в $\mathscr{C}^n$ таково, что в новых обозначениях они соответствуют обычным операциям, выполняемым над функциями ξ. Если одновременно рассматривать $\mathscr{C}^m$ как совокупность функций η, значение которых $\eta(j)$ определено для $j=1, \ldots, m$, то было бы желательно считать тензорным произведением $\mathscr{C}^n$ и $\mathscr{C}^m$ множество всех функций ζ, значение которых $\zeta(i, j)$ определено для $i=1, \ldots, n$ и $j=1, \ldots, m$. Другими словами, тензорное произведение здесь — совокупность всех функций, определенных на множестве, состоящем ровно из nm элементов, а потому, естественно, изоморфно $\mathscr{C}^{nm}$. Этот пример выявляет свойство тензорных произведений, а именно мультипликативность размерностей, — которое было бы желательно сохранить в общем случае.

Попытаемся теперь выделить самые важные свойства этих примеров. Определение прямой суммы было одним из возможных способов придать строгий характер грубой интуитивной идее — написать, формально, сумму двух векторов, принадлежащих различным векторным пространствам. Подобно этому, наши примеры наводят на мысль, что тензорное произведение $\mathscr{U} \otimes \mathscr{V}$ двух векторных пространств $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ должно было бы быть таким, чтобы каждому x из $\mathscr{U}$ и каждому y из $\mathscr{V}$ отвечало некое «произведение» $z = x \otimes y$ в $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, причем это соответствие между x и z для каждого фиксированного y, так же как соответствие между y и z для каждого фиксированного x, было линейным. (Разумеется, под этим понимается, что $(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \otimes y$ должно быть равно $\alpha_1 (x_1 \otimes y) + \alpha_2 (x_2 \otimes y)$ и что аналогичное равенство должно выполняться для $x \otimes (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$.) Проще говоря, $x \otimes y$ должно определять билинейную (векторную) функцию от x и y.

Понятие формального умножения наводит также на мысль, что если u и v — линейные функционалы соответственно на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, то их произведение w, определяемое равенством $w(x, y) = u(x)\, v(y)$, должно быть в некотором смысле общим элементом сопряженного пространства $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V})'$. Заметим, что это произведение есть билинейная (скалярная) функция от x и y.

§ 25. Произведение базисов

Еще одно небольшое предварительное пояснение, и мы сможем обсудить формальное определение тензорного произведения. Оказывается, что технически удобней подойти к $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ окольным путем, определив его как сопряженное к некоторому другому пространству; для получения самого $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ мы неявно воспользуемся рефлексивностью. Поскольку рефлексивность была доказана лишь для конечномерных пространств, мы ограничим наше определение только такими пространствами.

Определение. *Тензорным произведением* $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ двух конечномерных векторных пространств $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ (над одним и тем же полем) называется пространство, сопряженное к векторному пространству всех билинейных форм на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$. Для каждой пары векторов x и y с x из $\mathcal{U}$ и y из $\mathcal{V}$ их тензорное произведение $z = x \otimes y$ есть элемент из $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, определенный для каждой билинейной формы w равенством $z(w) = w(x, y)$.

Это определение является одним из самых быстрых строгих подходов к теории, но позже оно приводит к некоторым неприятным техническим осложнениям. Заметим, однако, что каковы бы ни были его недостатки, оно, очевидно, обладает двумя требуемыми свойствами: а именно ясно, что размерность мультипликативна (см. теорему 2 § 23 и теорему 2 § 15) и что $x \otimes y$ линейно зависит от каждого своего сомножителя.

Другое возможное (и заслуженно популярное) определение тензорного произведения — это определение с помощью формальных произведений. Согласно этому определению, $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ получается, если рассмотреть всевозможные символы вида $\sum_i \alpha_i (x_i \otimes y_i)$ и в множестве таких символов произвести отождествления, требуемые линейностью векторных операций и билинейностью тензорного умножения. (Для ревнителей строгости: в этом определении $x \otimes y$ означает просто упорядоченную пару x и y; знак умножения есть просто напоминание о намерениях.) Ни то, ни другое определение не просто; мы предпочли данное нами потому, что оно кажется более гармонирующим с духом последующего изложения. Основной недостаток нашего определения в том, что его нелегко распространить на наиболее важные обобщения конечномерных векторных пространств, а именно на модули и бесконечномерные пространства.

Пока мы докажем только одну теорему о тензорных произведениях. Эта теорема служит еще одним оправданием использования терминологии, принятой для произведений, и, кстати, уточняет утверждение о мультипликативности размерности.

Теорема. *Если $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — базисы соответственно в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, то множество $\mathcal{Z}$ векторов $z_{ij} = x_i \otimes y_j$ $(i = 1, \ldots, n;\ \ j = 1, \ldots, m)$ является базисом в $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.*

Доказательство. Пусть w_{pq} — билинейная форма на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ такая, что

$$w_{pq}(x_i \otimes y_j) = \delta_{ip}\delta_{jq}.$$

$$(i,\ p = 1, \ldots, n;\ \ j,\ q = 1, \ldots, m);$$

существование таких билинейных форм и тот факт, что они образуют базис пространства всех билинейных форм, следуют из теоремы 2 § 23. Пусть $\{w'_{pq}\}$ — сопряженный базис в $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, так что $[w_{ij}, w'_{pq}] = \delta_{ip}\delta_{jq}$. Для произвольной билинейной формы $w = \sum_p \sum_q \alpha_{pq} w_{pq}$ на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$

имеем

$$w'_{ij}(w) = [w, w'_{ij}] = \sum_p \sum_q \alpha_{pq} [w_{pq}, w'_{ij}] = \alpha_{ij} = w(x_i, y_j) = z_{ij}(w).$$

Справедливость утверждения теоремы следует теперь из того, что векторы w'_{ij} образуют базис пространства $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

Упражнения

1. Пусть $x=(1, 1)$ и $y=(1, 1, 1)$ — векторы соответственно в $\mathcal{R}^2$ и $\mathcal{R}^3$; найти координаты $x \otimes y$ в $\mathcal{R}^2 \otimes \mathcal{R}^3$ относительно произведения базисов $\{x_i \otimes y_j\}$, где $x_i=(\delta_{i1}, \delta_{i2})$, а $y_j=(\delta_{1j}, \delta_{2j}, \delta_{3j})$.

2. Пусть $\mathcal{P}_{n,m}$ — пространство всех полиномов z от двух переменных s, t с комплексными коэффициентами, таких, что либо $z=0$, либо $z(s, t)$ имеет степень $\leqslant m-1$ для каждого фиксированного s и $\leqslant n-1$ для каждого фиксированного t. Доказать, что между $\mathcal{P}_n \otimes \mathcal{P}_m$ и $\mathcal{P}_{n,m}$ существует изоморфизм, при котором элемент z из $\mathcal{P}_{n,m}$, соответствующий $x \otimes y$ (с x из $\mathcal{P}_n$ и y из $\mathcal{P}_m$), задается равенством $z(s, t)=x(s)\,y(t)$.

3. В какой мере образование тензорных произведений коммутативно и ассоциативно? Как обстоит дело с дистрибутивным законом $\mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W}) = (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \oplus (\mathcal{U} \otimes \mathcal{W})$?

4. Верно ли, что если x и y — элементы конечномерного векторного пространства, то $x \otimes y = y \otimes x$?

5. a) Пусть $\mathcal{V}$ — конечномерное вещественное векторное пространство, а $\mathcal{U}$ — множество $\mathcal{C}$ всех комплексных чисел, рассматриваемое как (двумерное) вещественное векторное пространство. Образуем тензорное произведение $\mathcal{V}^+ = \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Доказать, что существует способ определения умножения элементов из $\mathcal{V}^+$ на комплексные числа, при котором $\alpha(x \otimes y) = \alpha x \otimes y$ для всех α и x из $\mathcal{C}$ и y из $\mathcal{V}$.

b) Доказать, что относительно векторного сложения и умножения на комплексные скаляры, определенного как в a), $\mathcal{V}^+$ является комплексным векторным пространством.

c) Выразить размерность комплексного векторного пространства $\mathcal{V}^+$ через размерность вещественного векторного пространства $\mathcal{V}$.

d) Доказать, что векторное пространство $\mathcal{V}$ изоморфно подпространству пространства $\mathcal{V}^+$ (рассматриваемого как вещественное векторное пространство).

Мораль этого упражнения в том, что не только каждое комплексное векторное пространство можно рассматривать как вещественное векторное пространство, но в определенном смысле верно и обратное. Векторное пространство $\mathcal{V}^+$ называется *комплексификацией* пространства $\mathcal{V}$.

6. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — конечномерные векторные пространства; что представляет собой пространство, сопряженное к $\mathcal{U}' \otimes \mathcal{V}'$?

§ 26. Перестановки

Основной предмет этой книги принято именовать линейной алгеброй. Однако в трех последних параграфах упор был сделан на нечто, называемое полилинейной алгеброй. Трудно точно сказать, где пролегает граница между двумя этими предметами. А так как каждый из них весьма обширен, было бы непрактично пытаться втиснуть детальное изучение обоих в одну книгу. Но нежелательно рассматривать линейную алгебру и в абсолютно чистом виде; добавление даже небольшой порции полилинейной теории (подобной содержащейся в современном изложении тензорных произведений и определителей) расширяет область применимости линейной теории далеко непропорционально затраченным усилиям. Поэтому мы намерены продолжить изучение полилинейной алгебры; наша цель заключается в том, чтобы проложить более или менее прямой путь от знаний, которыми мы уже располагаем, к основным фактам, касающимся определителей. Имея это в виду, мы посвятим три следующих параграфа рассмотрению некоторых простых фактов комбинаторики; связь этих фактов с полилинейной алгеброй выяснится сразу же после этого изучения.

Под *перестановкой* целых чисел от 1 до k (включительно) мы будем понимать взаимно однозначное преобразование, относящее каждому такому целому другое (а возможно и то же самое) целое из той же совокупности.

Говоря, что преобразование π взаимно однозначно, мы, естественно, имеем в виду, что если $\pi(1), \ldots, \pi(k)$ — целые числа, которые π относит числам $1, \ldots, k$, то равенство $\pi(i) = \pi(j)$ может иметь место только в случае $i = j$. Поскольку это влечет то, что оба множества $\{1, \ldots, k\}$ и $\{\pi(1), \ldots, \pi(k)\}$ состоят точно из k элементов, отсюда следует, что они состоят точно из одних и тех же элементов. Отсюда, в свою очередь, заключаем, что перестановка π множества $\{1, \ldots, k\}$ отображает это множество *на* себя, т. е., если $1 \leqslant j \leqslant k$, существует по крайней мере одно (и на самом деле ровно одно) i такое, что $\pi(i) = j$. Общее число рассматриваемых целых чисел, а именно k, будет считаться далее фиксированным.

Теория перестановок, как и всякая теория вообще, будет понятней в свете каких-либо нетривиальных примеров. Однако, прежде чем приводить какие-то примеры, напомним, что вообще можно делать с перестановками; благодаря этому примеры пояснят не только само основное понятие, но и его основные свойства.

Если σ и τ — произвольные перестановки, можно определить еще одну перестановку (обозначаемую $\sigma\tau$), положив

$$(\sigma\tau)(i) = \sigma(\tau i)$$

для каждого i. Чтобы показать что $\sigma\tau$ — действительно перестановка, заметим, что если $(\sigma\tau)(i) = (\sigma\tau)(j)$, то $\tau(i) = \tau(j)$ (поскольку σ взаимно однозначно), а потому $i = j$ (поскольку τ взаимно однозначно). Перестановка $\sigma\tau$ называется *произведением* перестановок σ и τ. Предупреждение: порядок существен. В общем случае $\sigma\tau \neq \tau\sigma$, или, другими словами, умножение перестановок не коммутативно.

Умножение перестановок ассоциативно, т. е. если π, σ и τ — перестановки, то

$$(\pi\sigma)\tau = \pi(\sigma\tau). \tag{1}$$

Чтобы доказать это, нужно показать, что

$$((\pi\sigma)\tau)(i) = (\pi(\sigma\tau))(i)$$

для каждого i. Доказательство состоит из нескольких применений определения произведения, а именно:

$$((\pi\sigma)\tau)(i) = (\pi\sigma)(\tau i) = \pi(\sigma(\tau(i)))$$

и

$$(\pi(\sigma\tau))(i) = \pi((\sigma\tau)(i)) = \pi(\sigma(\tau(i))).$$

Основываясь на этом результате, мы можем — и будем — опускать скобки при записи произведения трех или более перестановок. Этот результат позволяет также доказать очевидные законы действий со степенями. Степени перестановки π определяют по индукции, полагая $\pi^1 = \pi$ и $\pi^{p+1} = \pi \cdot \pi^p$ для всех $p = 1, 2, 3, \ldots$; из ассоциативного закона следует, что $\pi^p\pi^q = \pi^{p+q}$ и $(\pi^p)^q = \pi^{pq}$ для всех p и q. Заметим, что любые две степени перестановки перестановочны друг с другом, т. е. $\pi^p\pi^q = \pi^q\pi^r$.

Простейшая перестановка — *тождественная* (обозначаемая ε); она определяется условием $\varepsilon(i)=i$ для каждого i. Какова бы ни была перестановка π,

$$\varepsilon\pi=\pi\varepsilon=\pi; \tag{2}$$

другими словами, умножение на ε оставляет каждую перестановку неизменной. Доказательство непосредственно: для каждого i имеем

$$(\varepsilon\pi)(i)=\varepsilon(\pi(i))=\pi(i)$$

и

$$(\pi\varepsilon)(i)=\pi(\varepsilon(i))=\pi(i).$$

Относительно умножения перестановка ε ведет себя так же, как число 1. По аналогии с соглашением, принятым для чисел, нулевая степень любой перестановки определяется равенством $\pi^0=\varepsilon$.

Для каждой перестановки π существует перестановка (обозначаемая π^{-1}) такая, что

$$\pi^{-1}\pi=\pi\pi^{-1}=\varepsilon. \tag{3}$$

Для определения $\pi^{-1}(j)$, где, конечно, $1\leqslant j\leqslant k$, находим единственное i такое, что $\pi(i)=j$, и пишем $\pi^{-1}(j)=i$; справедливость равенств (3) есть непосредственное следствие определений. Перестановка π^{-1} называется *обратной* к перестановке π.

Пусть $\mathscr{S}_k$ — множество всех перестановок целых чисел от 1 до k. Доказанное до сих пор сводится к тому, что для элементов множества $\mathscr{S}_k$ может быть определена операция умножения, причем 1) это умножение ассоциативно, 2) существует тождественный элемент, т. е. элемент, умножение на который оставляет любой элемент из $\mathscr{S}_k$ неизменным, и 3) каждый элемент обладает обратным, т. е. элементом, произведение которого с данным есть тождественный элемент. Множество, удовлетворяющее условиям 1) — 3), называют *группой* относительно понятия умножения, к которому они относятся; в частности, множество $\mathscr{S}_k$ называют *симметрической группой степени* k. Заметим, что целые $1,\ldots,k$ можно было бы заменить любыми k различными объектами. Это не затронуло бы ни одного из определенных выше понятий, изменились бы только обозначения.

§ 27. Циклы

Вот простой пример перестановки: выбираем любые два различных целых числа в пределах от 1 до k, скажем, p и q, и пишем $\tau(p)=q$, $\tau(q)=p$ и, наконец, $\tau(i)=i$, если $i \neq p$ и $i \neq q$. Определенная так перестановка τ будет обозначаться (p, q); каждая перестановка такого вида называется *транспозицией*. Если τ — транспозиция, то $\tau^2=\varepsilon$.

Другой полезный способ построения примеров таков: выбираем p различных целых чисел, заключенных в пределах от 1 до k, скажем, $i_1, \ldots, i_p$, и пишем:

$$\begin{aligned} &\sigma(i_j)=i_{j+1}, && \text{если } 1 \leqslant j < p, \\ &\sigma(i_p)=i_1, && \\ &\sigma(i)=i, && \text{если } i \neq i_1, \ldots, i \neq i_p. \end{aligned}$$

Определенная так перестановка σ будет обозначаться $(i_1, \ldots, i_p)$. Если $p=1$, то $\sigma=\varepsilon$; если $p=2$, то σ — транспозиция. При $1<p \leqslant k$ каждая перестановка вида $(i_1, \ldots, i_p)$ называется *p-членным циклом*, или просто *циклом*; двучленные циклы — это не что иное как транспозиции. Предупреждение: не предполагается, что $i_1 < \ldots < i_p$. Например, для $k=5$ и $p=3$ существует двадцать различных циклов. Отметим также, что обозначение для циклов не однозначно; символы (1, 2, 3), (2, 3, 1) и (3, 1, 2) означают все одну и ту же перестановку. Циклы $(i_1, \ldots, i_p)$ и $(j_1, \ldots, j_q)$ называются *независимыми*, если ни одно из i не равно ни одному из j. Если σ и τ — независимые циклы, то $\sigma\tau=\tau\sigma$, или, другими словами, σ и τ перестановочны.

Теорема 1. *Каждая перестановка есть произведение попарно независимых циклов.*

Доказательство. Если π — некоторая перестановка и i таково, что $\pi(i) \neq i$ (предположим пока, что $\pi \neq \varepsilon$), образуем последовательность $(i, \pi(i), \pi^2(i), \ldots)$. Так как от 1 до k существует только конечное число различных целых чисел, то должны существовать показатели степени p и q $(0 \leqslant p < q)$ такие, что $\pi^p(i)=\pi^q(i)$. Поскольку π взаимно однозначно, тогда $\pi^{q-p}(i)=i$, т. е., при очевидном изменении обозначения, мы уже доказали, что должен существовать строго положительный показатель степени p такой, что $\pi^p(i) = i$. Если p — наименьший показатель степени, обладающий таким свойством, то целые числа $i, \ldots, \pi^{p-1}(i)$ попарно различны. (Действительно, если $0 \leqslant q < r < p$ и $\pi^q(i) = \pi^r(i)$, то $\pi^{r-q}(i) = i$, в противоречие с минимальностью p.) Значит, $(i, \ldots$ $\ldots, \pi^{p-1}(i))$ — p-членный цикл. Если в пределах от 1 до k существует j, отличное от каждого $i, \ldots, \pi^{p-1}(i)$, равно как и от $\pi(j)$, повторение той же процедуры приводит к циклу с j вместо i. Такое образование циклов продолжаем, пока после каждого шага еще можно найти новое целое число, которое π не относит самому себе; построенное так произведение независимых циклов и есть π. Случай $\pi = \varepsilon$ охватывается достаточно естественным соглашением, что под произведением без сомножителей, «пустым произведением», нужно понимать тождественную перестановку.

Теорема 2. *Каждый цикл есть произведение транспозиций.*

Доказательство. Пусть σ есть p-членный цикл; для простоты записи мы проведем доказательство, в действительности совершенно общее, для частного случая $p = 5$. Оно состоит из одной строчки:

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (i_1, i_5)(i_1, i_4)(i_1, i_3)(i_1, i_2).$$

Быть может, окажутся небесполезными некоторые дополнительные пояснения. Согласно определению произведения перестановок правая часть последнего равенства действует на каждое число от 1 до k наизнанку, или, быть может, понятнее, справа налево. Так, например, результат применения $(i_1, i_5)(i_1, i_4)(i_1, i_3)(i_1, i_2)$ к i_3 вычисляется следующим образом: $(i_1, i_2)(i_3) = i_3$, $(i_1, i_3)(i_3) = i_1$, $(i_1, i_4)(i_1) = i_4$, $(i_1, i_5)(i_4) = i_4$, а потому $(i_1, i_5)(i_1, i_4) \times$ $\times (i_1, i_3)(i_1, i_2)(i_3) = i_4$.

Для дальнейших ссылок зафиксируем очевидное следствие двух предыдущих теорем.

Теорема 3. *Каждая перестановка есть произведение транспозиций.*

Заметим, что теоремы 2 и 3 не содержат требования независимости транспозиций; в общем случае последние и не являются независимыми.

Упражнения

1. a) Сколько перестановок содержится в $\mathcal{S}_k$?

b) Сколько различных p-членных циклов содержится в $\mathcal{S}_k$ $(1 \leqslant p \leqslant k)$?

2. Если σ и τ — перестановки (из $\mathcal{S}_k$), то $(\sigma\tau)^{-1} = \tau^{-1}\sigma^{-1}$.

3. a) Для любых перестановок σ и τ (из $\mathcal{S}_k$) существует и притом единственная перестановка π такая, что $\sigma\pi = \tau$.

b) Если π, σ и τ — перестановки, такие, что $\pi\sigma = \pi\tau$, то $\sigma = \tau$.

4. Привести пример перестановки, не являющейся произведением независимых транспозиций.

5. Доказать, что каждая перестановка из $\mathcal{S}_k$ есть произведение транспозиций вида $(j, j+1)$, где $1 \leqslant j < k$. Единственно ли такое разложение на множители?

6. Будет ли обращение цикла также циклом?

7. Доказать, что представление перестановки в виде произведения независимых циклов с точностью до порядка сомножителей единственно.

8. *Порядком* перестановки π называется наименьшее целое $p\ (>0)$ такое, что $\pi^p = \varepsilon$.

a) Каждая перестановка имеет порядок.

b) Каков порядок p-членного цикла?

c) Пусть σ — p-членный цикл, τ — q-членный цикл, причем σ и τ независимы; каков порядок $\sigma\tau$?

d) Привести пример, показывающий, что предположение независимости в c) существенно.

e) Если π — перестановка порядка p и $\pi^q = \varepsilon$, то q делится на p.

9. Всякая перестановка из $\mathcal{S}_k$ $(k > 1)$ может быть записана в виде произведения, каждый множитель которого есть одна из транспозиций $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, ..., $(1, k)$.

10. Перестановки σ и τ называют *сопряженными*, если существует перестановка π такая, что $\sigma\pi = \pi\tau$. Доказать, что σ и τ являются сопряженными перестановками тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое строение циклов. (Это означает, что в представлении σ в виде произведения независимых циклов число p-членных циклов совпадает для каждого p с соответствующим числом для τ.)

§ 28. Четность

Равенство $(1, 3)(1, 2) = (1, 2)(2,3)\ (= (1, 2, 3))$ показывает, что представление перестановки (даже цикла) в виде произведения транспозиций не обязательно единственно. А так как $(1, 3)(1, 4)(1, 2)(3, 4)(3, 2) = (1, 4) \times \times (1, 3)(1, 2)\ (= (1, 2, 3, 4))$, то даже число транспозиций, в произведение которых раскладывается данный цикл, не обязательно однозначно определено. Тем не менее, в разложении на множители есть нечто однозначное, а именно четность или нечетность числа входящих в разложение транспозиций. Перейдем к точной формулировке и доказательству этого факта.

Для простоты записи положим $k = 4$. Пусть f — полином (от четырех переменных t_1, t_2, t_3, t_4), определенный равенством

$$f(t_1, t_2, t_3, t_4) = (t_1 - t_2)(t_1 - t_3)(t_1 - t_4)(t_2 - t_3)(t_2 - t_4)(t_3 - t_4).$$

(В общем случае f есть произведение всевозможных разностей $t_i - t_j$ с $1 \leqslant i < j \leqslant k$.) Каждая перестановка π из $\mathcal{S}_4$ переводит f в новый полином, обозначаемый πf; по определению

$$(\pi f)(t_1, t_2, t_3, t_4) = f(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, t_{\pi(3)}, t_{\pi(4)}).$$

Словами: πf получается путем замены в f каждой переменной той, индекс которой получится, если подвергнуть индекс данной переменной действию перестановки π. Например, если $\tau = (2, 4)$, то

$$(\tau f)(t_1, t_2, t_3, t_4) =$$
$$= (t_1 - t_4)(t_1 - t_3)(t_1 - t_2)(t_4 - t_3)(t_4 - t_2)(t_3 - t_2).$$

Если

$$\sigma = (1, 2, 3, 4),$$

так что $\sigma\tau = (1, 3, 2)$, то

$$(\sigma(\tau f))(t_1, t_2, t_3, t_4) = ((\sigma\tau) f)(t_1, t_2, t_3, t_4) =$$
$$= (t_3 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_4)(t_1 - t_2)(t_1 - t_4)(t_2 - t_4).$$

Эти вычисления представляют собой иллюстрацию и подсказывают доказательство трех важных фактов. 1) *Для каждой перестановки π сомножители в πf те же, что и сомножители в f с точностью до знака и порядка*; следовательно, $\pi f = f$ или $\pi f = -f$. Перестановка π называется *четной*, если $\pi f = f$, и *нечетной*, если $\pi f = -f$. Для каждой перестановки π положим $\operatorname{sgn} \pi$ (читается: *сигнум* π) равным $+1$ или -1 соответственно тому, четна π или нечетна; таким образом, всегда $\pi f = (\operatorname{sgn} \pi) f$. 2) *Если τ — транспозиция, то* $\operatorname{sgn} \tau = -1$, *или, что равносильно этому, каждая транспозиция* *нечетна.* Доказательство состоит в очевидном обобщении следующего рассуждения, проведенного на нашем примере (2, 4). Лишь один сомножитель полинома f содержит одновременно и t_2 и t_4, и этот сомножитель меняет знак при переходе от f к πf. Сомножители, не содержащие ни t_2, ни t_4, остаются неизменными. Сомножители, содержащие только одну из переменных t_2, t_4, входят парами (как, например, пара $(t_2 - t_3)$ и $(t_3 - t_4)$ или пара $(t_1 - t_2)$ и $(t_1 - t_4)$). Каждый сомножитель такой пары переходит в другой ее сомножитель, возможно с переменой знака; но если знак меняется у одного сомножителя, он меняется и у его напарника. 3) *Для любых перестановок σ и τ имеем* $(\sigma\tau)f = \sigma(\tau f)$; следовательно, $\sigma\tau$ четна тогда и только тогда, когда σ и τ обладают одинаковой четностью. Заметим, что $\operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (\operatorname{sgn}\sigma)(\operatorname{sgn}\tau)$.

Из 2) и 3) вытекает, что произведение нескольких транспозиций четно тогда и только тогда, когда этих транспозиций — четное число, и нечетно — в противном случае. (Заметим, в частности, что, как видно из доказательства теоремы 2 § 27, p-членный цикл четен тогда и только тогда, когда p нечетно; другими словами, если σ — p-членный цикл, то $\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^{p+1}$.) В итоге приходим к заключению: каким бы образом перестановка π ни разлагалась в произведение транспозиций, число сомножителей либо всегда четно (в том случае, когда π четна), либо всегда нечетно (в том случае, когда π нечетна).

Произведение двух четных перестановок четно; перестановка, обратная к четной, четна; тождественная перестановка четна. Резюмируя эти факты, говорят, что множество всех четных перестановок является *подгруппой* группы $\mathscr{S}_k$; эту подгруппу (обозначаемую $\mathscr{A}_k$) называют *знакопеременной группой степени k.*

Упражнения

1. Сколько перестановок содержится в $\mathscr{A}_k$?

2. Дать примеры четных перестановок четного порядка и четных перестановок нечетного порядка; то же для нечетных перестановок.

3. Всякая перестановка из $\mathscr{A}_k$ $(k > 2)$ может быть записана в виде произведения, каждый сомножитель которого является одним из трехчленных циклов (1, 2, 3), (1, 2, 4), ..., (1, 2 k).

§ 29. Полилинейные формы

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы продолжить изучение полилинейной алгебры. Основным ее понятием служит понятие полилинейной формы (или функционала), очевидное обобщение понятия билинейной формы. Пусть $\mathscr{V}_1, \ldots, \mathscr{V}_k$ — векторные пространства (над одним и тем же полем); *k-линейной формой* ($k = 1, 2, 3, \ldots$) называют скалярную функцию на прямой сумме $\mathscr{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{V}_k$, обладающую тем свойством, что при произвольных фиксированных значениях любых ее $k-1$ аргументов она линейно зависит от оставшегося аргумента. 1-линейные формы — это просто линейные функционалы (на $\mathscr{V}_1$), а 2-линейные формы — это билинейные формы (на $\mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2$); 3-линейные (трилинейные) формы — это скалярные функции w (на $\mathscr{V}_1 \oplus \mathscr{V}_2 \oplus \mathscr{V}_3$) такие, что

$$w(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y, z) = \alpha_1 w(x_1, y, z) + \alpha_2 w(x_2, y, z),$$

и аналогичные тождества выполнены для $w(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, z)$ и $w(x, y, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)$. *Полилинейной формой* называют функцию, k-линейную при некотором k.

На полилинейный случай легко распространяется значительная часть теории билинейных форм. Так, например, если w_1 и w_2 — k-линейные формы, α_1 и α_2 — скаляры и w определено равенством

$$w(x_1, \ldots, x_k) = \alpha_1 w_1(x_1, \ldots, x_k) + \alpha_2 w_2(x_1, \ldots, x_k)$$

для любых x_i из $\mathscr{V}_i$, $i = 1, \ldots, k$, то w является k-линейной формой, обозначаемой $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2$. При таком определении линейных операций множество всех k-линейных форм является векторным пространством; размерность этого векторного пространства равна произведению $n_1 \ldots n_k$, где, разумеется, n_i — размерность пространства $\mathscr{V}_i$. Доказательства всех этих утверждений совершенно аналогичны доказательствам соответствующих утверждений для билинейного случая (в § 23). Мы могли бы продолжить аналогию с билинейной теорией и, в частности, изучать кратные тензорные произведения. Чтобы свести наше отклонение к полилинейности к минимуму, мы вместо этого пойдем в другом, более специальном и для наших целей более полезном направлении.

В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением того случая, когда все k пространств $\mathscr{V}_i$ равны одному и тому же векторному пространству, скажем $\mathscr{V}$; будем предполагать, что $\mathscr{V}$ конечномерно. В этом случае мы будем называть «k-линейную форму на $\mathscr{V}_1 \oplus \ldots \oplus \mathscr{V}_k$» просто «$k$-линейной формой на $\mathscr{V}$», или даже еще проще «k-линейной формой»; такой язык несколько неточен, но в контексте совершенно недвусмыслен. Если размерность $\mathscr{V}$ равна n, то размерность векторного пространства всех k-линейных форм на $\mathscr{V}$ равна n^k. В дальнейшем изложении пространство $\mathscr{V}$ и, конечно, размерность n будут считаться фиксированными.

Специальный характер изучаемого нами случая позволит нам воспользоваться техникой, не обладающей универсальной применимостью, а именно, техникой применения к k-линейным формам перестановок из $\mathscr{S}_k$. Если w — k-линейная форма и π — перестановка из $\mathscr{S}_k$, будем писать

$$\pi w(x_1, \ldots, x_k) = w(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)}),$$

каковы бы ни были $x_1, \ldots, x_k$ из $\mathscr{V}$. Так определенная функция πw снова является k-линейной формой. (Значение πw на $(x_1, \ldots, x_k)$ правильнее было бы обозначать $(\pi w)(x_1, \ldots, x_k)$; однако, так как наше более простое обозначение явно не порождает никакой путаницы, мы будем продолжать пользоваться им.)

Путем применения перестановок к k-линейным формам можно определить некоторые интересные множества таких форм. Так, например, k-линейная форма w называется *симметричной*, если $\pi w = w$ для каждой перестановки π из $\mathscr{S}_k$. (Заметим, что при $k=1$ это условие тривиально выполняется.) Множество всех симметричных k-линейных форм является подпространством пространства всех k-линейных форм. Значит, в частности, начало этого пространства, k-линейная форма 0, симметрична. Для получения нетривиального примера предположим, что $k=2$, и, взяв линейные функционалы y_1 и y_2 на $\mathscr{V}$, напишем

$$w(x_1, x_2) = y_1(x_1)\, y_2(x_2) + y_1(x_2)\, y_2(x_1).$$

Этот способ построения k-линейных форм допускает полезные обобщения. Так, например, если $1 \leqslant h < k \leqslant n$,

u — h-линейная форма и v — $(k-h)$-линейная форма, то равенство

$$w(x_1, \ldots, x_k) = u(x_1, \ldots, x_h) \cdot v(x_{h+1}, \ldots, x_k)$$

определяет k-линейную форму w, которая вообще не симметрична. Симметричная k-линейная форма может быть получена из w (и, собственно говоря, из любой данной k-линейной формы) образованием $\sum \pi w$, где суммирование распространяется на все перестановки π из $\mathcal{S}_k$.

Мы не будем дальше заниматься симметричными k-линейными формами. Мы ввели их здесь потому, что они составляют весьма естественный класс функций, определимый в терминах перестановок. А теперь перейдем к другому классу функций, играющему значительно более важную роль в теории.

§ 30. Знакопеременные формы

k-линейная форма w называется *кососимметричной*, если $\pi w = -w$ для каждой нечетной перестановки π из $\mathcal{S}_k$. Эквивалентно, w называется кососимметричной, если $\pi w = (\operatorname{sgn} \pi) w$ для каждой перестановки π из $\mathcal{S}_k$. (Если $\pi w = (\operatorname{sgn} \pi)\, w$ для всех π, то, в частности, $\pi w = -w$, когда π нечетна. Обратно, если $\pi w = -w$ для всех нечетных π, то, разлагая данную произвольную перестановку π в произведение транспозиций, скажем, $\pi = \tau_1 \ldots \tau_q$, замечаем, что $\operatorname{sgn} \pi = (-1)^q$, и так как $\pi w = (-1)^q w$, то заключаем, что $\pi w = (\operatorname{sgn} \pi)\, w$, как и утверждалось. В этом доказательстве неявно используется тот недоказанный нами, но легко устанавливаемый факт, что если σ и τ — перестановки из $\mathcal{S}_k$, то $\sigma(\tau w) = (\sigma\tau)\, w$.) Множество всех кососимметричных k-линейных форм есть подпространство пространства всех k-линейных форм. Для получения нетривиального примера кососимметричной билинейной формы w берем линейные функционалы y_1 и y_2 и полагаем

$$w(x_1, x_2) = y_1(x_1)\, y_2(x_2) - y_1(x_2)\, y_2(x_1).$$

Более общим образом, кососимметричная k-линейная форма может быть получена из произвольной k-линейной формы

w путем образования $\sum(\operatorname{sgn}\pi)\pi w$, где суммирование распространяется на все перестановки π из $\mathscr{S}_k$.

k-линейная форма w называется *знакопеременной*, если $w(x_1, \dots, x_k) = 0$ всякий раз, когда какие-либо два из векторов x совпадают. (Заметим, что при $k = 1$ это условие удовлетворяется по пустоте множества объектов, к которым оно относится.) Множество всех знакопеременных k-линейных форм есть подпространство пространства всех k-линейных форм. Между знакопеременными и кососимметричными формами имеется важная связь.

Теорема 1. *Каждая знакопеременная полилинейная форма кососимметрична.*

Доказательство. Пусть w — знакопеременная k-линейная форма, а i и j — целые числа, такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Положим

$$w_0(x_i, x_j) = w(x_1, \dots, x_k);$$

если все векторы x, отличные от x_i и x_j, зафиксировать (временно), то w_0 будет знакопеременной билинейной формой от двух своих аргументов. Так как, по билинейности,

$$w_0(x_i + x_j, x_i + x_j) = \\ = w_0(x_i, x_i) + w_0(x_i, x_j)w_0(x_j, x_i) + w_0(x_j, x_j),$$

а по знакопеременности w_0 левая часть и два крайних члена правой части этого равенства — нули, то $w_0(x_j, x_i) = -w_0(x_i, x_j)$. Но это означает, что

$$(i, j)\, w(x_1, \dots, x_k) = -w(x_1, \dots, x_k),$$

или, в силу произвольности векторов x, что $(i, j)\, w = -w$. Поскольку каждая нечетная перестановка π есть произведение нечетного числа транспозиций, подобных (i, j), заключаем, что $\pi w = -w$ для каждой нечетной π, и теорема доказана.

В вопросе о связи знакопеременных форм с кососимметричными имеется одна тонкость. Рассмотрим следующее «доказательство» обращения теоремы 1: если w — кососимметричная k-линейная форма, $1 \leqslant i < j \leqslant k$ и $x_1, \dots, x_k$ — такие векторы, что $x_i = x_j$, то $(i, j)\, w(x_1, \dots, x_k) = w(x_1, \dots, x_k)$, поскольку $x_i = x_j$, и в то же время $(i, j)\, w\, (x_1, \dots, x_k) = -w\, (x_1, \dots, x_k)$, поскольку w

кососимметрична; значит, $w(x_1, \ldots, x_k) = -w(x_1, \ldots, x_k)$, т. е. w знакопеременна. Это доказательство ошибочно; его слабым пунктом является заключение, что «если $w = -w$, то $w = 0$». Присмотревшись к нему ближе, мы обнаружим, что оно основывается на следующем рассуждении: если $w = -w$, то $w + w = 0$, т. е. $(1+1)w = 0$. Это правильно. Но беда в том, что в некоторых полях $1 + 1 = 0$, а потому переход от $(1+1)w = 0$ к $w = 0$ незаконен; и действительно, обращение теоремы 1 неверно для векторных пространств над такими полями.

Теорема 2. *Если $x_1, \ldots, x_k$ — линейно зависимые векторы и w — знакопеременная k-линейная форма, то $w(x_1, \ldots, x_k) = 0$.*

Доказательство. Если $x_i = 0$ для некоторого i, то утверждение теоремы тривиально. Пусть все x_i отличны от 0. По теореме § 6 найдется вектор x_h, $2 \leqslant h \leqslant k$, являющийся линейной комбинацией предшествующих векторов. Если, скажем, $x_h = \sum_{i=0}^{h-1} \alpha_i x_i$, заменим x_h в $w(x_1, \ldots, x_k)$ этим разложением, воспользуемся линейностью $w(x_1, \ldots, x_k)$ по ее h-му аргументу и $(h-1)$-кратным применением предположенной знакопеременности w придем к требуемому заключению.

В одном предельном случае (а именно, когда $k = n$) справедливо некоторого рода обращение теоремы 2.

Теорема 3. *Если w — ненулевая знакопеременная n-линейная форма и $x_1, \ldots, x_n$ — линейно независимые векторы, то $w(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.*

Доказательство. Так как (теорема 2 § 8) векторы $x_1, \ldots, x_n$ образуют базис, можно каждый из произвольно заданного множества n векторов $y_1, \ldots, y_n$ представить в виде линейной комбинации векторов x. Заменим каждое y в $w(y_1, \ldots, y_n)$ соответствующей линейной комбинацией и, пользуясь полилинейностью, разложим полученное выражение. Мы придем к длинной линейной комбинации членов вида $w(z_1, \ldots, z_n)$, где каждое z есть один из векторов x. Если в таком члене два z совпадают, этот член должен равняться нулю, поскольку w знакопеременна. С другой стороны, если все z различны, то $w(z_1, \ldots, z_n) = \pi w(x_1, \ldots, x_n)$ при некоторой перестановке π. Из кососимметричности w (теорема 1) вытекает, что $w(z_1, \ldots, z_n) = (\operatorname{sgn} \pi) w(x_1, \ldots, x_n)$. Если бы $w(x_1, \ldots, x_n)$ равнялась 0, то мы получили бы, что $w(z_1, \ldots, z_n) = 0$ и, значит, $w(y_1, \ldots, y_n) = 0$ для всех $y_1, \ldots, y_n$, в противоречие с предположением, что $w \neq 0$.

Из доказательства (но не формулировки) этого результата вытекает ценное следствие.

Теорема 4. *Любые две знакопеременные n-линейные формы линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть w_1 и w_2 — знакопеременные n-линейные формы и $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис. Каждый из любых заданных n векторов $y_1, \ldots, y_n$ запишем в виде линейной комбинации векторов x и так же, как выше, заменим каждое y в выражениях $w_1(y_1, \ldots, y_n)$ и $w_2(y_1, \ldots, y_n)$ соответствующей линейной комбинацией. Мы получим, что и $w_1(y_1, \ldots, y_n)$, и $w_2(y_1, \ldots, y_n)$ есть (одна и та же) линейная комбинация членов вида $w_1(z_1, \ldots, z_n)$ и $w_2(z_1, \ldots, z_n)$, где каждое z есть одно из x. Будучи скалярами, $w_1(x_1, \ldots, x_n)$ и $w_2(x_1, \ldots, x_n)$ линейно зависимы, так что существуют скаляры α_1 и α_2, не равные одновременно нулю и такие, что $\alpha_1 w_1(x_1, \ldots, x_n) + \alpha_2 w_2(x_1, \ldots, x_n) = 0$; из этих фактов следует, что $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = 0$, и теорема доказана.

§ 31. Знакопеременные формы максимальной степени

Просмотрев последний параграф, читатель заметит, что мы не привели ни одного нетривиального примера знакопеременных k-линейных форм и даже косвенно не намекнули на какую-либо касающуюся их теорему существования. На самом деле они не всегда существуют; так, например. из теоремы 2 § 30 вытекает, что если $k > n$, то 0 — единственная знакопеременная k-линейная форма. (См. теорему 2 § 8.) Для имеющихся в виду применений нам потребуется лишь одна теорема существования; переходим к доказательству ее довольно яркой формы.

Теорема. *Векторное пространство знакопеременных n-линейных форм на n-мерном векторном пространстве одномерно.*

Доказательство. Покажем сначала, что если $1 \leqslant k \leqslant n$, то существует по крайней мере одна ненулевая знакопеременная k-линейная форма; доказательство будет вестись индукцией по k. При $k = 1$ требуемый результат вытекает из существования нетривиальных линейных функционалов (см. теорему 3 § 15). Пусть $1 \leqslant k < n$ и v — ненулевая знакопеременная k-линейная форма; используя ее, построим ненулевую знакопеременную $(k+1)$-линейную форму w. Поскольку $v \neq 0$, можно найти векторы $\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_k$, для которых $v(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_k) \neq 0$ (верхние значки здесь просто индексы). Так как $k < n$, то существует вектор $\overset{\circ}{x}_{k+1}$, не принадлежащий подпространству, натянутому на $\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_k$, а тогда (см. теорему 1 § 17) найдется линейный функционал u такой, что $u(\overset{\circ}{x}_1) = \ldots = u(\overset{\circ}{x}_k) = 0$, но $u(\overset{\circ}{x}_{k+1}) \neq 0$.

Искомая $(k+1)$-линейная форма w получается из линейного функционала u и k-линейной формы v следующим образом:

$$w(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k} (i, k+1)\, v(x_1, \ldots, x_k)\, u(x_i) - v(x_1, \ldots, x_k)\, u(x_{k+1}). \quad (1)$$

Так, например, если $k = 3$, то

$$w(x_1, x_2, x_3, x_4) = v(x_4, x_2, x_3)\, u(x_1) + v(x_1, x_4, x_3)\, u(x_2) + v(x_1, x_2, x_4)\, u(x_3) - v(x_1, x_2, x_3)\, u(x_4).$$

Из элементарных рассмотрений § 29 следует, что w, действительно, есть $(k+1)$-линейная форма; нам нужно доказать, что она ненулевая и знакопеременная.

То, что w не равна тождественно нулю, доказывается легко. В самом деле, из того, что $u(\overset{\circ}{x}_i) = 0$ для $i = 1, \ldots, k$, следует, что если мы заменим в (1) каждое x_i на $\overset{\circ}{x}_i$, $i = 1, \ldots, k+1$, то первые k членов суммы в правой части обратятся в нуль, и значит

$$w(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_k, \overset{\circ}{x}_{k+1}) = -v(\overset{\circ}{x}_1, \ldots, \overset{\circ}{x}_k)\, u(\overset{\circ}{x}_{k+1}) \neq 0. \quad (2)$$

Предположим теперь, что $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$ — векторы, а i, j — целые числа такие, что $1 \leqslant i < j \leqslant k+1$ и $x_i = x_j$. Нам нужно доказать, что при этих обстоятельствах $w(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}) = 0$. Заметим, что x_i и x_j одновременно входят в качестве аргументов v в $k-1$ из общего числа $k+1$ членов правой части формулы (1). Так как v знакопеременна, все эти члены обращаются в нуль.

Дальнейшая часть доказательства естественно распадается на два случая. Если $j=k+1$, то остается только

$$(i,\ k+1)\, v(x_1,\ \ldots,\ x_k)\, u(x_i) - v(x_1,\ \ldots,\ x_k)\, u(x_{k+1}),$$

что очевидно равно 0, поскольку $x_i = x_{k+1}$. Если же $j \leqslant k$, то каждый из двух еще оставшихся возможно не равных нулю членов может быть получен из другого с помощью транспозиции $(i,\ j)$. Значит, эти члены отличаются только знаком, а потому их сумма равна нулю. Этим доказано, что w знакопеременна, и тем самым доказано, что размерность пространства всех знакопеременных n-линейных форм не меньше 1. То́ же, что размерность пространства знакопеременных n-линейных форм не больше 1, есть непосредственное следствие теоремы 4 § 30.

На этом заканчивается наше ознакомление с полилинейной алгеброй. Читатель вполне мог бы обвинить нас в том, что оно было не очень строго мотивировано. Полная мотивировка и не может содержаться в этой книге; оправданием изучения полилинейной алгебры является широкая применимость этого предмета. Единственным же применением ее, которое мы сделаем, будет применение к теории определителей (которые, разумеется, можно было бы рассмотреть и с помощью более прямых, но менее изящных методов, в большей степени зависящих от произвола в выборе базиса); это будет сделано в следующей главе.

Упражнения

1. Если w k-линейная форма, а характеристика основного поля скаляров отлична от 2 (т. е. если $1+1 \neq 0$), то w является суммой симметричной и кососимметричной k-линейных форм. Что будет, если характеристика равна 2?

2. Дать пример кососимметричной, но не знакопеременной полилинейной формы. (Напомним, что, ввиду сказанного в § 30, поле скаляров должно иметь характеристику 2.)

3. Привести пример ненулевой знакопеременной k-линейной формы w на n-мерном пространстве ($k<n$) такой, что $w(x_1, \ldots, x_k)=0$ для некоторого множества линейно независимых векторов $x_1, \ldots, x_k$.

4. Какова размерность пространства всех симметричных k-линейных форм? А кососимметричных? А знакопеременных?

ГЛАВА II

ОПЕРАТОРЫ

§ 32. Линейные операторы

Мы переходим теперь к тем вопросам, которые действительно придают векторным пространствам интерес.

Определение. *Линейным оператором* A *на* векторном пространстве $\mathscr{V}$ (или *линейным отображением* $\mathscr{V}$ в себя) называется соответствие, относящее каждому вектору x из $\mathscr{V}$ вектор Ax из $\mathscr{V}$ так, что

$$A(\alpha x+\beta y)=\alpha Ax+\beta Ay$$

для любых векторов x и y и скаляров α и β.

Как и по поводу определения линейных функционалов, заметим, что для линейного оператора A, как он нами определен, $A0 = 0$. По этой причине такие операторы иногда называют *однородными* линейными операторами.

Прежде чем изучать какие бы то ни было свойства линейных операторов, приведем несколько примеров. Мы не будем входить в доказательство того, что рассматриваемые ниже операторы действительно линейны; во всех случаях проверка равенства, определяющего линейность, будет простым упражнением.

1) Для последующего будут особо важны два специальных оператора, всюду в дальнейшем обозначаемые соответственно символами 0 и 1, определяемые (для всех x) равенствами $0x = 0$ и $1x = x$.

2) Пусть x_0 — любой фиксированный вектор пространства $\mathscr{V}$ и y_0 — любой линейный функционал на $\mathscr{V}$; положим $Ax = y_0(x)\cdot x_0$. Более общим образом, пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — произвольное конечное множество векторов из $\mathscr{V}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — такое же количество линейных

функционалов на $\mathscr{V}$; положим $Ax = y_1(x)x_1 + \ldots + y_n(x)x_n$. Нетрудно доказать, что если, в частности, $\mathscr{V}$ n-мерно и векторы $x_1, \ldots, x_n$ образуют его базис, то каждый линейный оператор A на $\mathscr{V}$ может быть представлен в только что указанном виде.

3) Пусть π — перестановка целых чисел $\{1, \ldots, n\}$; для каждого вектора $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ из $\mathscr{C}^n$ положим $Ax = (\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)})$. Аналогично, пусть π — полином с комплексными коэффициентами; для каждого вектора (полинома) x из $\mathscr{P}$ положим $Ax = y$, где y — полином, определяемый равенством $y(t) = x(\pi(t))$.

4) Для любого x из $\mathscr{P}_n$, $x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j t^j$, положим $(Dx)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} j\xi_j t^{j-1}$. (Мы используем здесь букву D для напоминания, что Dx есть производная полинома x. Заметим, что так же, как на $\mathscr{P}_n$, мы могли бы определить D и на $\mathscr{P}$; позже мы воспользуемся этим. Отметим, что дифференцирование полиномов допускает чисто алгебраическое определение и не нуждается в обычной теории пределов.)

5) Для каждого x из $\mathscr{P}$, $x(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j t^j$, положим $Sx = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\xi_j}{j+1} t^{j+1}$. (Мы снова маскируем алгебраическим обозначением хорошо известное аналитическое понятие. Так же, как в 4) $(Dx)(t)$ заменяло $\frac{dx}{dt}$, здесь $(Sx)(t)$ есть не что иное, как $\int_0^t x(s)\,ds$.)

6) Пусть m — полином с комплексными коэффициентами от переменной t. (Можно, хотя это и не очень выгодно, считать m элементом пространства $\mathscr{P}$.) Для каждого x из $\mathscr{P}$ обозначим через Mx полином, определенный формулой $(Mx)(t) = m(t)x(t)$. Это специальное обозначение введено для дальнейших целей; в случае $m(t) = t$ мы будем обозначать оператор M буквой T так что $(Tx)(t) = tx(t)$.

§ 33. Линейные операторы как векторы

Приступим теперь к установлению некоторых элементарных свойств и связей линейных операторов, заданных на векторном пространстве. Точнее говоря, укажем некоторые способы получения из данных операторов новых; как правило, мы будем ограничиваться определением новых операторов, опуская доказательство их линейности.

Пусть A и B — линейные операторы; их *сумму* $S = A+B$ мы определим равенством $Sx = Ax + Bx$ (для всех x). Заметим, что из коммутативности и ассоциативности сложения в $\mathcal{V}$ непосредственно следует, что сложение линейных операторов коммутативно и ассоциативно. Но это далеко еще не все. Рассмотрение суммы любого линейного оператора A и линейного оператора 0 (определенного в предыдущем параграфе) показывает, что $A+0 = A$. Далее, обозначая для каждого A через $-A$ оператор, определенный равенством $(-A)\,x = -(Ax)$, видим, что $A+(-A) = 0$ и что так определенный оператор $-A$ является единственным линейным оператором B, обладающим тем свойством, что $A+B = 0$. Подытожим: свойства векторного пространства, описанные в аксиомах A § 2, вновь обнаруживаются в множестве всех линейных операторов на этом пространстве; множество всех линейных операторов образует коммутативную группу относительно операции сложения.

Продолжим в том же духе. Теперь уже никого не удивит, что множество всех линейных операторов на векторном пространстве удовлетворяет также аксиомам B и C векторных пространств. И это действительно так. Для любого A и любого скаляра α определим произведение αA равенством $(\alpha A)\,x = \alpha\,(Ax)$. Выполнение аксиом B и C очевидно. Таким образом, справедлива следующая

Т е о р е м а. *Множество всех линейных операторов на векторном пространстве само является векторным пространством.*

Мы будем вообще игнорировать эту теорему; дело в том, что о линейных операторах можно сказать гораздо большее, а один лишь факт, что они образуют векторное пространство, используется крайне редко. Это «гораздо большее», что можно сказать о линейных операторах, заключается в том, что для них существует достаточно удовлетворительное определение умножения, которое будет рассмотрено в следующем параграфе.

Упражнения

1. Доказать, что каждое из описываемых ниже соответствий линейно.

a) $\mathcal{V}$ — множество $\mathcal{C}$ комплексных чисел, рассматриваемое как вещественное векторное пространство; Ax — число, комплексно сопряженное к x.

b) $\mathcal{V}$ есть $\mathcal{P}$; $(Ax)(t) = x(t+1) - x(t)$ для каждого полинома x.

c) $\mathcal{V}$ есть k-кратное тензорное произведение векторного пространства с самим собою; A задано условием $A(x_1 \otimes \ldots \otimes x_k) = x_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes x_{\pi(k)}$, где π — перестановка множества $\{1, \ldots, k\}$.

d) $\mathcal{V}$ — множество всех k-линейных форм w на векторном пространстве; $Aw(x_1, \ldots, x_k) = w(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(k)})$, где π — перестановка множества $\{1, \ldots, k\}$.

e) $\mathcal{V}$ — множество всех k-линейных форм w на векторном пространстве; $Aw = \sum \pi w$, где суммирование распространено на все перестановки π из $\mathcal{S}_k$.

f) То же, что в e), с тем отличием, что $Ax = \sum (\operatorname{sgn} \pi) \pi w$.

2. Доказать, что если $\mathcal{V}$ — конечномерное векторное пространство, то пространство всех линейных операторов на $\mathcal{V}$ конечномерно, и найти его размерность.

3. Понятие «линейного оператора», как оно было определено выше, слишком узко для некоторых целей. Согласно более общему определению, линейным отображением векторного пространства $\mathcal{U}$ в векторное пространство $\mathcal{V}$ над тем же полем называется соответствие A, относящее каждому вектору x из $\mathcal{U}$ вектор Ax из $\mathcal{V}$ так, что

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay.$$

Доказать, что каждое из описанных ниже соответствий является линейным отображением в этом обобщенном смысле.

a) $\mathcal{V}$ — поле скаляров пространства $\mathcal{U}$; A — линейный функционал на $\mathcal{U}$.

b) $\mathcal{U}$ — прямая сумма пространства $\mathcal{V}$ с некоторым другим пространством; A отображает каждую пару из $\mathcal{U}$ на ее первую координату.

c) $\mathcal{V}$ — факторпространство пространства $\mathcal{U}$ по некоторому подпространству; A отображает каждый вектор из $\mathcal{U}$ на определяемый им смежный класс.

d) Пусть w — билинейный функционал на прямой сумме $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}_0$ и $\mathcal{V}$ — пространство, сопряженное к $\mathcal{V}_0$; определим A как соответствие, которое каждому x_0 из $\mathcal{U}$ относит линейный функционал на $\mathcal{V}_0$, получаемый, если первый аргумент в w положить равным x_0.

4. а) Предположим, что $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ — векторные пространства над одним и тем же полем. Если A и B — линейные отображения $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$, α и β — скаляры и

$$Cx = \alpha Ax + \beta By$$

для каждого x из $\mathscr{U}$, то C — линейное отображение $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$.

b) Если принять, по определению, $C = \alpha A + \beta B$, то множество всех линейных отображений $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$ станет векторным пространством относительно этого определения линейных операций.

c) Доказать, что если $\mathscr{U}$ и $\mathscr{V}$ конечномерны, то пространство всех линейных отображений $\mathscr{U}$ в $\mathscr{V}$ также конечномерно, и найти его размерность.

5. Пусть $\mathscr{M}$ — m-мерное подпространство n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$. Доказать, что множество тех линейных операторов A на $\mathscr{V}$, для которых $Ax = 0$ при всех x из $\mathscr{M}$, является подпространством множества всех линейных операторов на $\mathscr{V}$, и найти размерность этого подпространства.

§ 34. Произведения

Произведение $P = AB$ линейных операторов A и B определяется равенством $Px = A(Bx)$.

Понятие умножения будет основным для всего дальнейшего. Прежде чем иллюстрировать значение произведений операторов примерами, остановимся на смысле символа $P = AB$. Когда говорят, что P — оператор, то это, конечно, означает, что каков бы ни был вектор x, P что-то с ним делает. Что именно — устанавливается, если подействовать на x оператором B, т. е. найти Bx, а затем применить к результату A. Другими словами, если смотреть на символ оператора как на рецепт для выполнения определенных действий, то символ произведения двух операторов следует читать справа налево. Порядок отображения посредством AB таков: сначала отобразить посредством B, затем — посредством A. Может показаться, что мы поднимаем много шуму по малозначительному поводу; однако, как мы вскоре увидим, умножение операторов вообще не коммутативно, так что порядок, в котором производится отображение, совсем не безразличен.

Наиболее известный пример некоммутативности можно найти в пространстве $\mathscr{P}$. Рассмотрим операторы дифференцирования и умножения D и T, определяемые равенствами $(Dx)(t)=\frac{dx}{dt}$ и $(Tx)(t)=tx(t)$; имеем

$$(DTx)(t)=\frac{d}{dt}(tx(t))=x(t)+t\frac{dx}{dt},$$

а

$$(TDx)(t)=t\frac{dx}{dt}.$$

Другими словами, не только неверно, что $DT=TD$ (т. е. $DT-TD=0$), но на самом деле $(DT-TD)x=x$ для каждого x, так что $DT-TD=1$.

Основываясь на примерах § 32, читатель мог бы построить много примеров пар неперестановочных операторов. Те, кто привык представлять себе линейные отображения геометрически, могут, например, легко убедиться в том, что произведение двух вращений $\mathscr{R}^3$ (вокруг начала) вообще зависит от порядка, в котором они выполняются.

Большинство формальных алгебраических свойств числового умножения (за уже отмеченным важным исключением коммутативности) справедливо и в алгебре операторов. Так,

$$A0=0A=0, \tag{1}$$

$$A1=1A=A, \tag{2}$$

$$A(B+C)=AB+AC, \tag{3}$$

$$(A+B)C=AC+BC, \tag{4}$$

$$A(BC)=(AB)C. \tag{5}$$

Доказательства всех этих тождеств непосредственно следуют из определений сложения и умножения; для пояснения принципа докажем (3), один из законов дистрибутивности. Доказательство состоит из следующих выкладок:

$$(A(B+C))x=A((B+C)x)=A(Bx+Cx)=$$
$$=A(Bx)+A(Cx)=(AB)x+(AC)x=(AB+AC)x.$$

§ 35. Полиномы

Закон ассоциативности умножения позволяет записывать произведение трех (или большего числа) сомножителей без всяких скобок; в частности, можно рассматривать произведение любого конечного числа, скажем, m

сомножителей, каждый из которых равен A. Это произведение зависит только от A и m (и не зависит, как только что было отмечено, от какой бы то ни было расстановки скобок); мы будем обозначать его A^m. Хотя умножение операторов вообще не коммутативно, такое обозначение оправдано тем, что для степеней одного оператора имеют место обычные законы действий над показателями: $A^nA^m = A^{n+m}$ и $(A^n)^m = A^{nm}$. Заметим, что $A^1 = A$; принято также считать, по определению, $A^0 = 1$. При этих определениях действия со степенями одного оператора — почти такие же, как в обычной арифметике. В частности, можно определить полиномы от линейного оператора. Так, если p — любой полином со скалярными коэффициентами от переменной t, скажем $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n$, можно образовать линейный оператор

$$p(A) = \alpha_0 1 + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_n A^n.$$

Правила алгебраических действий с такими полиномами просты. Так, $p(t)\,q(t) = r(t)$ влечет $p(A)\,q(A) = r(A)$ (так что, в частности, любые $p(A)$ и $q(A)$ перестановочны); если $p(t) = \alpha$ (тождественно), мы будем обычно (вместо $p(A) = \alpha \cdot 1$) писать $p(A) = \alpha$; это согласуется с использованием символов 0 и 1 для линейных операторов.

Если p — полином от двух переменных, а A и B — линейные операторы, обычно бывает невозможно придать символу $p(A, B)$ какое-нибудь разумное истолкование. Конечно, затруднение состоит в том, что A и B могут быть неперестановочны, и даже простой одночлен, как, скажем, s^2t, может породить путаницу. Если $p(s, t) = s^2t$, что нужно понимать под $p(A, B)$? Будет это A^2B, или ABA, или BA^2? Важно осознать, что здесь заключена трудность; к счастью, нам нет необходимости пытаться справиться с ней. Мы будем работать с полиномами от нескольких переменных, только если речь идет о перестановочных операторах, а тогда все просто. Так, если $AB = BA$, то $A^nB^m = B^mA^n$, а тогда $p(A, B)$ имеет однозначный смысл для каждого полинома p. Формальные свойства соответствия между (перестановочными) операторами и полиномами одинаково справедливы как для одного, так и для нескольких переменных, но мы не будем вдаваться в это.

В качестве примера возможного поведения степеней оператора рассмотрим оператор дифференцирования D на $\mathscr{P}$ (или, с таким же успехом, на $\mathscr{P}_n$ для некоторого n). Легко видеть, что каковы бы ни были положительное целое k и полином x из $\mathscr{P}$, $(D^k x)(t) = \frac{d^k x}{dt^k}$. Заметим, что, во всяком случае, оператор D понижает степень полинома, на который он действует, ровно на одну единицу (в предположении, конечно, что эта степень $\geqslant 1$). Пусть x — полином, скажем, степени $n-1$; что такое $D^n x$? Или иначе: каково произведение двух (перестановочных) операторов D^k и D^{n-k} (где k — некоторое целое число между 0 и n), рассматриваемых на пространстве $\mathscr{P}_n$? Мы приводим этот пример, чтобы выявить озадачивающее обстоятельство, содержащееся в ответе на последний вопрос: произведение двух операторов может оказаться равным нулю даже тогда, когда ни один из них не равен нулю. Ненулевой оператор, произведение которого с некоторым ненулевым оператором равно нулю, называют *делителем нуля*.

Упражнения

1. Вычислить линейные операторы $D^n S^n$ и $S^n D^n$, $n = 1, 2, \ldots$; другими словами, найти, во что переводит каждый такой оператор произвольный элемент из $\mathscr{P}$. (Здесь D и S означают операторы дифференцирования и интегрирования, определенные в § 32.)

2. Если A и B — линейные операторы, такие, что $AB - BA$ перестановочно с A, то $A^k B - BA^k = kA^{k-1}(AB - BA)$ для каждого положительного целого k.

3. Пусть $Ax(t) = x(t+1)$ для каждого x из $\mathscr{P}_n$; доказать, что если D — оператор дифференцирования, то

$$1 + \frac{D}{1!} + \frac{D^2}{2!} + \ldots + \frac{D^{n-1}}{(n-1)!} = A.$$

4. a) Для каждого линейного оператора A на n-мерном векторном пространстве существует ненулевой полином p степени $\leqslant n^2$ такой, что $p(A) = 0$.

b) Пусть $Ax = y_0(x)\, x_0$ (см. § 32, 2)); найти ненулевой полином p такой, что $p(A) = 0$. Какова наименьшая возможная степень полинома p?

5. Произведение линейных отображений различных векторных пространств определено только в том случае, когда они «спарены»

в следующем смысле. Пусть $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ — векторные пространства над одним и тем же полем и пусть A, B — линейные отображения соответственно $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}$ в $\mathcal{W}$. Произведение $C=BA$ (порядок существен) определим как линейное отображение $\mathcal{U}$ в $\mathcal{W}$, задаваемое равенством $Cx=B(Ax)$. Интерпретировать и доказать как можно большее число равенств (1)—(5) § 34 для этого понятия умножения.

6. Пусть A — линейный оператор на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$.

a) Доказать, что множество всех тех линейных операторов B на $\mathcal{V}$, для которых $AB=0$, есть подпространство пространства всех линейных операторов на $\mathcal{V}$.

b) Показать, что при надлежащем выборе A размерность подпространства, описанного в a), может быть сделана равной 0, n или n^2. Какие вообще значения может принимать эта размерность?

c) Можно ли способом, описанным в a) (при надлежащем выборе A), получить каждое из подпространств пространства всех линейных операторов?

7. Пусть A — линейный оператор на векторном пространстве $\mathcal{V}$; рассмотрим соответствие, относящее каждому линейному оператору X на $\mathcal{V}$ линейный оператор AX. Доказать, что это соответствие является линейным оператором (на пространстве всех линейных операторов). Можно ли таким способом (при надлежащем выборе A) получить каждый линейный оператор на этом пространстве?

§ 36. Обратимость

В каждом из двух предыдущих параграфов было приведено по примеру; эти примеры выявляют два скверных свойства умножения линейных операторов, а именно: некоммутативность и существование делителей нуля. Обратимся теперь к более приятным свойствам, которыми иногда обладают линейные операторы.

Может случиться, что линейный оператор A обладает одним или обоими из следующих двух весьма специальных свойств.

(I) Если $x_1 \neq x_2$, то $Ax_1 \neq Ax_2$.

(II) Для каждого вектора y существует (по крайней мере один) вектор x такой, что $Ax = y$.

В том случае, когда A обладает обоими этими свойствами, мы будем говорить, что A *обратим*. Если A обратим, мы определим линейный оператор, называемый *обратным* к A и обозначаемый A^{-1}, следующим образом. Для любого вектора y_0 можно (по свойству (II)) найти x_0 такое, что $Ax_0 = y_0$. Более того, это x_0 однозначно определено, ибо если $x_0 \neq x_1$, то (по свойству (I)) $y_0=$

$= Ax_0 \neq Ax_1$. Мы положим $A^{-1}y_0$ равным x_0. Чтобы доказать линейность A^{-1}, найдем $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$. Если $Ax_1 = y_1$ и $Ax_2 = y_2$, то, в силу линейности A, имеем $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$, а потому $A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 A^{-1} y_1 + \alpha_2 A^{-1} y_2$.

В качестве тривиального примера обратимого оператора укажем тождественный оператор 1; очевидно, $1^{-1} = 1$. Оператор 0 не обратим; для него нарушаются, в той мере, в какой это вообще возможно, оба условия (I) и (II).

Из определения непосредственно следует, что каков бы ни был обратимый оператор A,

$$AA^{-1} = A^{-1}A = 1;$$

покажем, что эти равенства характеризуют A^{-1}.

Т е о р е м а 1. *Если A, B и C — такие линейные операторы, что*

$$AB = CA = 1,$$

то A обратим и $A^{-1} = B = C$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $Ax_1 = Ax_2$, то $CAx_1 = CAx_2$, а потому (поскольку $CA = 1$) $x_1 = x_2$; другими словами, первое условие определения обратимости оператора выполнено. Второе условие также выполнено, ибо, если y — любой вектор и $x = By$, то $y = ABy = Ax$. Умножая $AB = 1$ слева, а $CA = 1$ справа на A^{-1}, получаем $A^{-1} = B = C$.

Чтобы показать, что ни одно из условий $AB = 1$, $CA = 1$ в отдельности не достаточно для обеспечения обратимости A, вспомним операторы дифференцирования и интегрирования D и S, определенные в § 32, 4) и 5). Хотя $DS = 1$, ни D, ни S не обратим; для D нарушено условие (I), а для S — условие (II).

В конечномерных пространствах ситуация проще.

Т е о р е м а 2. *Линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ обратим тогда и только тогда, когда $Ax = 0$ влечет $x = 0$, а также тогда и только тогда, когда каждое y из $\mathscr{V}$ может быть записано в виде $y = Ax$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если A обратим, то оба условия выполнены тривиальным образом. Предположим теперь, что $Ax = 0$ влечет $x = 0$. Тогда $u \neq v$, т. е.

$u - v \neq 0$ влечет $A(u - v) \neq 0$, т. е. $Au \neq Av$, и свойство (I) доказано. Для доказательства свойства (II) предположим, что $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис пространства $\mathscr{V}$; мы утверждаем, что $\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$— также базис. Согласно теореме 2 § 8, требует доказательства лишь линейная независимость. Но $\sum_i \alpha_i Ax_i = 0$ означает $A\left(\sum_i \alpha_i x_i\right) = 0$, а в силу предположения это влечет $\sum_i \alpha_i x_i = 0$; но тогда линейная независимость векторов x_i показывает, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Следовательно, действительно, каждый вектор y может быть записан в виде $y = \sum_i \alpha_i Ax_i = A\left(\sum_i \alpha_i x_i\right)$.

Предположим теперь, что каждое y есть Ax, и пусть $\{y_1, \ldots, y_n\}$— любой базис в $\mathscr{V}$. Для каждого y_i можно найти (не обязательно единственное) x_i такое, что $y_i = Ax_i$; мы утверждаем, что $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — также базис. Действительно, $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ влечет $\sum_i \alpha_i Ax_i = \sum_i \alpha_i y_i = 0$, так что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. Значит, каждое x может быть записано в виде $x = \sum_i \alpha_i x_i$ и, на только что указанном основании, $Ax = 0$ влечет $x = 0$.

Теорема 3. *Если A и B обратимы, то AB обратимо и $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Если A обратим и $\alpha \neq 0$, то αA обратим и $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$. Если A обратим, то A^{-1} обратим и $(A^{-1})^{-1} = A$.*

Доказательство. Согласно теореме 1 достаточно доказать (для первого утверждения), что результат умножения AB на $B^{-1}A^{-1}$ как слева, так и справа, есть тождественный оператор; проверку этого предоставим читателю. Доказательства двух оставшихся утверждений в основном совпадают с доказательством первого; например, последнее утверждение следует из того, что равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$ совершенно симметричны относительно A и A^{-1}.

Мы закончим рассмотрение обратимости следующим замечанием. Действуя в духе предыдущего параграфа, можно было бы, при желании, определить рациональные функции от A, когда это возможно, с помощью A^{-1}. Мы не встретимся с необходимостью делать это, за исключением одного случая: если A обратим, то, как мы знаем, A^n $(n = 1, 2, \ldots)$ также обратим; мы будем вместо $(A^n)^{-1}$ писать A^{-n}, так что $A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Упражнения

1. Какие из линейных операторов, описанных в упражнении 1 § 33, обратимы?

2. Линейный оператор A на $\mathscr{C}^2$ определяется формулой

$$A(\xi_1, \xi_2) = (\alpha\xi_1 + \beta\xi_2, \gamma\xi_1 + \delta\xi_2),$$

где α, β, γ и δ — фиксированные скаляры. Доказать, что A обратим тогда и только тогда, когда $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

3. Если A и B — линейные операторы (на одном и том же векторном пространстве), то для того, чтобы они оба были обратимы, необходимо и достаточно, чтобы были обратимы AB и BA.

4. Если A и B — линейные операторы на конечномерном векторном пространстве и $AB = 1$, то A и B обратимы.

5. a) Если A, B, C и D — линейные операторы (все — на одном и том же векторном пространстве) и как $A + B$, так и $A - B$ обратимы, то существуют линейные операторы X и Y такие, что

$$AX + BY = C$$

и

$$BX + AY = D.$$

b) Насколько необходимы предположения обратимости в a)?

6. a) Линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ обратим тогда и только тогда, когда он сохраняет линейную независимость. Под утверждением, что A сохраняет линейную независимость, понимается, что всякий раз, когда $\mathscr{X}$ — линейно независимое множество в $\mathscr{V}$, $A\mathscr{X}$ — также линейно независимое множество в $\mathscr{V}$. (Символ $A\mathscr{X}$ обозначает, конечно, множество всех векторов вида Ax, где x принадлежит $\mathscr{X}$.)

b) Необходимо ли предположение конечномерности для справедливости a)?

7. Показать, что линейный оператор A, для которого $A^2 - A + 1 = 0$, обратим.

8. Если A и B — линейные операторы (на одном и том же векторном пространстве) и $AB = 1$, то A называют *левым обратным* оператора B, а B — *правым обратным* оператора A. Доказать, что если A имеет единственный правый обратный, скажем B, то A обратим. (Указание: рассмотреть $BA + B - 1$.)

9. Если A — обратимый линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$, то существует полином p такой, что $A^{-1} = p(A)$. (Указание: найти ненулевой полином q наименьшей

степени, для которого $q(A)=0$, и доказать, что его свободный член не может быть равен 0.)

10. Придумать разумное определение обратимости для линейных отображений одного векторного пространства в другое. Используя это определение, установить, (есть ли и) какое из линейных отображений, описанных в упражнении 3 § 33, обратимо?

§ 37. Матрицы

А теперь снова вернемся к нити наших рассуждений; введя новое понятие — линейного оператора, мы должны теперь установить, как оно связано со старыми понятиями базиса, линейных функционалов и т. д.

Одним из наиболее важных средств изучения линейных операторов на конечномерных векторных пространствах является понятие матрицы. Так как это понятие вообще не имеет приемлемого аналога в бесконечномерных пространствах и так как в большинстве рассмотрений можно обойтись без него, мы попытаемся не пользоваться им при доказательстве теорем. Однако все же важно знать, что такое матрица, и мы приступаем теперь к детальному рассмотрению этого вопроса.

Определение. Пусть $\mathscr{V}$ — n-мерное векторное пространство, $\mathscr{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — его произвольный базис и A — линейный оператор на $\mathscr{V}$. Так как каждый вектор является линейной комбинацией векторов x_i, имеем, в частности,

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$$

для $j = 1, \ldots, n$. Множество (α_{ij}) из n^2 скаляров, помеченных двойным индексом i, j, называют *матрицей* оператора A в координатной системе $\mathscr{X}$; мы будем обычно обозначать ее $[A]$, или $[A; \mathscr{X}]$, если окажется необходимым указание базиса $\mathscr{X}$, к которому она отнесена. Матрицу (α_{ij}) обычно записывают в виде квадратной таблицы:

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix};$$

скаляры $(\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{in})$ образуют *строку*, а $(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ — *столбец* этой матрицы.

Это определение характеризует не «матрицу», а «матрицу, ассоциированную в некоторых условиях с линейным оператором». Часто бывает полезным рассматривать матрицу как нечто существующее само по себе в виде квадратной таблицы; однако в этой книге матрица будет обычно связываться с линейным оператором и базисом.

Несколько замечаний относительно обозначений. Обычно матрицу обозначают тем же символом, что и оператор, скажем, A. Оправдание этому можно найти в дальнейших рассмотрениях (относящихся к свойствам матриц). Мы не следуем здесь этому обыкновению, поскольку одной из наших основных целей, применительно к матрицам, является упор на то, что они зависят от координатной системы (тогда как понятие линейного оператора — нет), а также изучение того, как изменяется соответствие между матрицами и линейными операторами при переходе от одной координатной системы к другой.

Обращаем внимание также на особенность индексирования элементов α_{ij} матрицы $[A]$. Базис есть базис, и до сих пор, хотя мы обычно и индексировали его элементы первыми n положительными целыми числами, порядок элементов в нем был совершенно несуществен. Однако при рассмотрении матрицы принято говорить, скажем, о ее первой строке или первом столбце. Этот язык оправдан только, если мы мыслим элементы базиса $\mathscr{X}$ расположенными в определенном порядке. Поскольку в большей части наших рассмотрений порядок строк и столбцов матрицы столь же несуществен, как и порядок элементов базиса, мы не включили этот аспект понятия матрицы в наше определение. Важно, однако, понимать, что вид квадратной таблицы, ассоциированной с матрицей $[A]$, изменяется при переходе к другому упорядочению базиса $\mathscr{X}$. Соответственно этому всё, что будет сказано о матрицах, может быть истолковано с двух различных точек зрения: либо в строгом соответствии с буквой нашего определения, либо следуя модифицированному определению, связывающему матрицу (с упорядоченными строками и столбцами) не только с линейным оператором и базисом, но также и с упорядочением базиса.

Еще несколько слов для посвященных. Сама суть дела, а не своенравие автора, заставляет нас писать

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$$

вместо более обычного равенства

$$Ax_i = \sum_j \alpha_{ij} x_j.$$

Дело в том, что мы хотим, чтобы формулы матричного умножения и действия матриц на числовые векторы (т. е. векторы $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\mathscr{C}^n$) имели нормальный вид, но где-то в процессе перехода от векторов к их координатам индексы меняются местами. Вот точная формулировка нашего правила: запишите Ax_j в виде линейной комбинации векторов $x_1, \ldots, x_n$ и выпишите полученные при этом коэффициенты в качестве j-го *столбца* матрицы $[A]$. (Первый индекс коэффициента α_{ij} — всегда индекс строки, а второй — индекс столбца.)

Рассмотрим для примера оператор дифференцирования D на пространстве $\mathscr{P}_n$ и базис $\{x_1, \ldots, x_n\}$, определенный равенствами $x_i(t) = t^{i-1}$, $i = 1, \ldots, n$. Какова матрица оператора D в этом базисе? Имеем:

$$\begin{aligned}
Dx_1 &= 0x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_{n-1} + 0x_n \\
Dx_2 &= 1x_1 + 0x_2 + \ldots + 0x_{n-1} + 0x_n \\
Dx_3 &= 0x_1 + 2x_2 + \ldots + 0x_{n-1} + 0x_n \qquad (1) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
Dx_n &= 0x_1 + 0x_2 + \ldots + (n-1)\, x_{n-1} + 0x_n,
\end{aligned}$$

а потому

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Неприятное явление перестановки индексов обнаруживается сравнением формул (1) и (2).

§ 38. Матрицы операторов

А теперь нам предстоит выполнить некоторую формальную работу, бо́льшую часть которой мы проделаем, не входя в детали. Задача такова: как в фиксированной координатной системе $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, зная матрицы операторов A и B, найти матрицы операторов $\alpha A + \beta B$, AB, 0, 1 и т. д.?

Пусть $[A] = (\alpha_{ij})$, $[B] = (\beta_{ij})$, $C = \alpha A + \beta B$, $[C] = (\gamma_{ij})$; мы утверждаем, что

$$\gamma_{ij} = \alpha\alpha_{ij} + \beta\beta_{ij};$$

далее, если $[0] = (o_{ij})$ и $[1] = (e_{ij})$, то

$$o_{ij} = 0$$

и

$$e_{ij} = \delta_{ij} \text{ (дельта Кронекера).}$$

Более сложное правило: если $C = AB$, $[C] = (\gamma_{ij})$, то

$$\gamma_{ij} = \sum_k \alpha_{ik} \beta_{kj}.$$

Для доказательства воспользуемся определением матрицы, ассоциированной с оператором, и проделаем следующие манипуляции:

$$Cx_j = A(Bx_j) = A\Big(\sum_k \beta_{kj} x_k\Big) = \sum_k \beta_{kj} Ax_k =$$
$$= \sum_k \beta_{kj} \Big(\sum_i \alpha_{ik} x_i\Big) = \sum_i \Big(\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}\Big) x_i.$$

Связь между операторами и матрицами точно такая же, как между векторами и их координатами, и аналог теоремы § 9 об изоморфизме справедлив в наилучшем возможном смысле. Эти утверждения имеют следующий точный смысл.

С помощью фиксированного базиса $\mathcal{X}$ мы поставили в соответствие каждому линейному оператору A некоторую матрицу $[A]$; соответствие описывается равенствами $Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$. Мы утверждаем, что это соответствие взаимно однозначно (т. е. матрицы двух различных операторов различны) и что каждая таблица (α_{ij}) из n^2 скаляров является матрицей некоторого оператора. Чтобы доказать это, заметим, во-первых, что знание матрицы оператора A вполне определяет A (т. е. этим Ax однозначно определено для каждого x); а именно, если $x = \sum_j \xi_j x_j$, то $Ax = \sum_j \xi_j Ax_j = \sum_j \xi_j \left(\sum_i \alpha_{ij} x_i\right) = \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} \xi_j\right) x_i$. (Иначе говоря, если $y = Ax = \sum_i \eta_i x_i$, то

$$\eta_i = \sum_j \alpha_{ij} \xi_j.$$

Сравнить это равенство с замечаниями, сделанными в § 37 по поводу своенравного поведения индексов.) Во-вторых, ничто не мешает нам прочитать равенство $Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$ в обратном порядке. Другими словами, какова бы ни была таблица (α_{ij}), — мы можем воспользоваться этим равенством для определения линейного оператора A; ясно, что его матрицей будет как раз (α_{ij}). (Однако, еще раз подчеркнем тот основной факт, что это взаимно однозначное соответствие между операторами и матрицами было установлено с помощью определенной координатной системы и что при переходе от одной координатной системы к другой один и тот же линейный оператор может соответствовать разным матрицам, так же как одной и той же матрице могут соответствовать разные линейные операторы.) Следующая теорема подытоживает существенную часть этих рассмотрений.

Теорема. *Определим в множестве всех матриц (α_{ij}), (β_{ij}) и т. д., $i, j = 1, \ldots, n$ (рассматриваемых вне связи с линейными операторами), сумму, умножение на скаляры, произведение, (o_{ij}) и (e_{ij}) формулами*

$$(\alpha_{ij}) + (\beta_{ij}) = (\alpha_{ij} + \beta_{ij}),$$
$$\alpha(\alpha_{ij}) = (\alpha\alpha_{ij}),$$
$$(\alpha_{ij})(\beta_{ij}) = \left(\sum_k \alpha_{ik}\beta_{kj}\right),$$
$$o_{ij} = 0, \qquad e_{ij} = \delta_{ij}.$$

Тогда соответствие (устанавливаемое с помощью произвольной координатной системы $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ n-мерного векторного пространства $\mathcal{V}$) между всеми линейными операторами A на $\mathcal{V}$ и всеми матрицами (α_{ij}), описывае-

мое равенствами $Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$, *является изоморфизмом; другими словами, это — взаимно однозначное соответствие, сохраняющее сумму, умножение на скаляры, произведение,* 0 *и* 1.

Мы старательно избегали рассмотрения матрицы оператора A^{-1}. Выражение для $[A^{-1}]$ через элементы α_{ij} матрицы $[A]$ дать можно, но оно не просто и, к счастью, не потребуется нам.

Упражнения

1. Пусть A — линейный оператор на $\mathscr{P}_n$, определенный формулой $(Ax)(t) = x(t+1)$, и $\{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ — базис в $\mathscr{P}_n$, определенный формулами $x_j(t) = t^j$, $j = 0, \ldots, n-1$. Найти матрицу оператора A в этом базисе.

2. Найти матрицу оператора сопряжения в $\mathscr{C}$, рассматриваемом как вещественное векторное пространство, в базисе $\{1, i\}$ (где $i = \sqrt{-1}$).

3. a) Пусть π — перестановка целых чисел $1, \ldots, n$; для каждого вектора $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\mathscr{C}^n$ положим $Ax = (\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)})$. Найти матрицу оператора A в базисе $\{x_1, \ldots, x_n\}$, где $x_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{in})$.

b) Найти все матрицы, перестановочные с матрицей оператора A.

4. Рассмотрим векторное пространство, состоящее из всех вещественных квадратных матриц второго порядка. Пусть A — линейный оператор на этом пространстве, переводящий каждую матрицу X в PX, где $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Найти его матрицу в базисе, состоящем из $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Рассмотрим векторное пространство, состоящее из всех линейных операторов на векторном пространстве $\mathscr{V}$, и пусть A (левый) оператор умножения, относящий каждому оператору X на $\mathscr{V}$ оператор PX, где P — некоторый заданный оператор на $\mathscr{V}$. Каким условиям должно удовлетворять P, чтобы A был обратимым?

6. Доказать, что если I, J и K соответственно комплексные матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

(где $i = \sqrt{-1}$), то $I^2 = J^2 = K^2 = -1$, $IJ = -JI = K$, $JK = -KJ = I$ и $KI = -IK = J$.

7. a) Доказать, что если A, B и C — линейные операторы на двумерном векторном пространстве, то $(AB - BA)^2$ перестановочно с C.

b) Справедливо ли утверждение a) для пространств высших размерностей?

8. Пусть A — линейный оператор на $\mathscr{C}^2$, определенный формулой $A(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1+\xi_2, \xi_2)$. Доказать, что если линейный оператор B перестановочен с A, то существует такой полином p, что $B = p(A)$.

9. В каких из нижеследующих случаев справедливо равенство $p(A)=0$?

a) $p(t)=t^3-3t^2+3t-1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $p(t)=t^2-3t$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $p(t)=t^3+t^2+t+1$, $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $p(t)=t^3-2t$, $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

10. Доказать, что если A и B соответственно комплексные матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(где $i=\sqrt{-1}$), а $C=AB-iBA$, то $C^3+C^2+C=0$.

11. Если A и B — линейные операторы на векторном пространстве и $AB=0$, то будет ли отсюда следовать, что $BA=0$?

12. Что произойдет с матрицей линейного оператора на конечномерном векторном пространстве, если элементы базиса, относительно которого вычислена матрица, подвергнуть перестановке?

13. a) Пусть $\mathscr{V}$ — конечномерное векторное пространство с базисом $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — попарно различные скаляры. Если A — линейный оператор, для которого $Ax_j=\alpha_j x_j$, $j=1, \ldots, n$, а B — линейный оператор, перестановочный с A, то существуют скаляры $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такие, что $Bx_j=\beta_j x_j$.

b) Доказать, что линейный оператор B на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$, перестановочный с каждым линейным оператором на $\mathscr{V}$, есть скаляр (т. е. существует скаляр β такой, что $Bx=\beta x$ для всех x из $\mathscr{V}$).

14. Если $\{x_1, \ldots, x_k\}$ и $\{y_1, \ldots, y_k\}$ — линейно независимые множества векторов конечномерного векторного пространства $\mathscr{V}$, то существует обратимый линейный оператор A на $\mathscr{V}$ такой, что $Ax_j=y_j$, $j=1, \ldots, k$.

15. Если матрица $[A]=(\alpha_{ij})$ такова, что $\alpha_{ii}=0$, $i=1, \ldots, n$, то существуют матрицы $[B]=(\beta_{ij})$ и $[C]=(\gamma_{ij})$ такие, что $[A]=[B][C]-[C][B]$. (Указание: испытать $\beta_{ij}=\beta_i\delta_{ij}$.

16. Определить, какие из следующих матриц обратимы, и найти обратные матрицы, когда они существуют.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. f) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. g) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

17. При каких значениях α следующие матрицы обратимы? Найти обратные матрицы, когда это возможно.

a) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

18. При каких значениях α следующие матрицы обратимы? Найти обратные матрицы, когда это возможно.

a) $\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 1 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$. c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

19. a) Теория матриц легко обобщается на линейные отображения в другие векторные пространства. Предположим, что $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — векторные пространства над одним и тем же полем, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_m\}$ — базисы соответственно в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ и A — линейное отображение $\mathcal{U}$ в $\mathcal{V}$. По определению, матрица отображения A есть прямоугольная таблица из $m \times n$ скаляров, определяемая равенствами

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} y_i.$$

Определить сложение и умножение прямоугольных матриц так, чтобы обобщить возможно большее число результатов § 38. (Заметим, что произведение матрицы из m_1 строк и n_1 столбцов с матрицей из m_2 строк и n_2 столбцов в этом порядке определено лишь если $n_1 = m_2$.)

b) Пусть A и B — перемножаемые матрицы. Разобьем A на четыре прямоугольных клетки (верхнюю левую, верхнюю правую, нижнюю левую, нижнюю правую) и затем B — аналогичным образом, так, чтобы число столбцов верхней левой клетки матрицы A равнялось числу строк верхней левой клетки матрицы B. Если, в очевидной сокращенной записи, эти разбиения обозначены

$$A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix},$$

то

$$AB=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21} & A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21} & A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

c) Используя подпространства и дополнения, выразить результат b) в терминах линейных отображений (а не матриц).

d) Обобщить b) и c) на случай бо́льшего (чем четыре) числа блоков.

§ 39. Инвариантность

Возможным отношением между подпространствами $\mathcal{M}$ векторного пространства и линейными операторами A на этом пространстве является инвариантность. Мы говорим, что $\mathcal{M}$ *инвариантно* относительно A, если «x принадлежит $\mathcal{M}$» влечет «Ax принадлежит $\mathcal{M}$». (Заметим, что справедливость этой импликации требуется только в одном направлении; мы не предполагаем, что каждое y из $\mathcal{M}$ может быть представлено в виде $y = Ax$, где x принадлежит $\mathcal{M}$; равным образом мы не предполагаем, что «Ax принадлежит $\mathcal{M}$» влечет «x принадлежит $\mathcal{M}$». Вскоре будут рассмотрены примеры, в которых эти не предполагаемые нами условия действительно не выполнены.) Как мы знаем, подпространство векторного пространства само является векторным пространством; если известно, что $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A, то можно игнорировать тот факт, что A определено вне $\mathcal{M}$, и рассматривать A как линейный оператор, определенный на векторном пространстве $\mathcal{M}$. Часто инвариантность рассматривается относительно не одного, а целого множества линейных операторов: $\mathcal{M}$ инвариантно относительно множества, если оно инвариантно относительно каждого элемента этого множества.

Что можно сказать о матрице линейного оператора A на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$, если известно, что некоторое $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A? Другими словами: имеется ли разумный способ выбора такого базиса $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ в $\mathcal{V}$, чтобы матрица $[A] = A; \mathcal{X}$

имела особенно простой вид? Ответ содержится в теореме 2 § 12: мы можем выбрать $\mathcal{X}$ так, чтобы $x_1, \ldots, x_m$ принадлежали $\mathcal{M}$, а $x_{m+1}, \ldots, x_n$ — нет. Выразим Ax_j через $x_1, \ldots, x_n$. При $m+1 \leqslant j \leqslant n$ нельзя сказать ничего, кроме того, что $Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$. Однако, если $1 \leqslant j \leqslant m$, то x_j принадлежит $\mathcal{M}$, и потому (поскольку $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A) также Ax_j принадлежит $\mathcal{M}$. Следовательно, в этом случае Ax_j есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_m$; коэффициенты α_{ij}, у которых $m+1 \leqslant i \leqslant n$, все равны нулю. Поэтому матрица $[A]$ оператора A в этой координатной системе принимает вид

$$[A] = \begin{pmatrix} [A_1] & [B_0] \\ [0] & [A_2] \end{pmatrix},$$

где $[A_1]$ — (m-строчная) матрица оператора A, рассматриваемого как линейный оператор на пространстве $\mathcal{M}$ (в координатной системе $\{x_1, \ldots, x_m\}$), $[A_2]$ и $[B_0]$ — некоторые таблицы скаляров (соответственно из $n-m$ строк и $n-m$ столбцов и из m строк и $n-m$ столбцов), а $[0]$ — прямоугольная таблица (из $n-m$ строк и m столбцов), состоящая из одних нулей. (Важно отметить то неприятное обстоятельство, что матрица $[B_0]$ не обязательно должна быть нулевой.)

§ 40. Приводимость

Особенно важным частным случаем понятия инвариантности является понятие приводимости. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — два подпространства, такие, что оба они инвариантны относительно A, и $\mathcal{V}$ есть их прямая сумма, то A *приводится* (разлагается) парой $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Различие между инвариантностью и приводимостью заключается в том, что в первом случае среди множества всех подпространств, инвариантных относительно A, может не оказаться никаких двух, кроме $\mathcal{O}$ и $\mathcal{V}$, которые бы обладали тем свойством, что $\mathcal{V}$ есть их прямая сумма. Или, говоря иначе, если $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A, то хотя, конечно, можно многими способами найти такое $\mathcal{N}$, чтобы $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, может случиться, что ни одно из этих $\mathcal{N}$ не будет инвариантным относительно A.

Описанный процесс приведения оператора допускает обращение. Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — любые два векторных пространства, а A и B — любые линейные операторы (соответственно на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$). Пусть далее $\mathcal{V}$ — прямая сумма $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$

$$\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N};$$

на $\mathcal{V}$ можно определить линейный оператор C, называемый прямой суммой A и B, положив

$$Cz = C(x, y) = (Ax, By).$$

Мы опускаем подробное рассмотрение прямых сумм операторов и приведем лишь результаты. Доказательство их не представит труда. Если $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ приводит C и если обозначить через A линейный оператор C, рассматриваемый только на $\mathcal{M}$, а через B линейный оператор C, рассматриваемый только на $\mathcal{N}$, то C будет прямой суммой A и B.

Надлежащим выбором базиса (а именно выбором $x_1, \ldots, x_m$ из $\mathcal{M}$ и $x_{m+1}, \ldots, x_n$ из $\mathcal{N}$) можно привести матрицу прямой суммы A и B к виду, продемонстрированному в предыдущем параграфе, с $[A_1] = [A]$, $[B_0] = [0]$ и $[A_2] = [B]$. Каков бы ни был полином p, если положить $A' = p(A)$ и $B' = p(B)$, то прямой суммой C' операторов A' и B' будет $p(C)$.

Упражнения

1. Пусть матрицей линейного оператора (на двумерном векторном пространстве) в некоторой координатной системе служит $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Сколько имеется подпространств, инвариантных относительно этого оператора?

2. Привести пример линейного оператора A на конечномерном векторном пространстве $\mathcal{V}$, который имел бы $\mathcal{O}$ и $\mathcal{V}$ единственными инвариантными подпространствами.

3. Пусть D — оператор дифференцирования на $\mathcal{P}_n$. Если $m \leqslant n$, то подпространство $\mathcal{P}_m$ инвариантно относительно D. Обратим ли D на $\mathcal{P}_m$? Существует ли в $\mathcal{P}_n$ дополнение к $\mathcal{P}_m$, которое вместе с $\mathcal{P}_m$ приводило бы D?

4. Доказать, что подпространство, натянутое на пару подпространств, каждое из которых инвариантно относительно некоторого оператора A, также инвариантно относительно A.

§ 41. Проекторы

Для наших целей особенно важна еще одна связь между прямыми суммами и линейными операторами.

Определение. Если $\mathscr{V}$ — прямая сумма $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$, так что каждое z из $\mathscr{V}$ единственным образом записывается в виде $z=x+y$ с x из $\mathscr{M}$ и y из $\mathscr{N}$, то *проектором* на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$ называется оператор E, определенный равенством $Ez=x$.

Если прямые суммы важны, то важны и проекторы, ибо, как мы увидим, они являются очень мощным алгебраическим орудием изучения геометрического понятия прямой суммы. Читатель легко поймет причины употребления слова «проектор», если представит себе пару осей (линейных многообразий) в плоскости (их прямой сумме). Чтобы картина получилась достаточно общей, не проводите перпендикулярных осей!

Мы перескакиваем через пункт, доказательство которого достаточно просто, чтобы его можно было опустить, но наличие которого следует сознавать: нужно показать, что E — линейный оператор. Предоставим сделать это читателю и перейдем к разысканию специальных свойств проекторов.

Теорема 1. *Линейный оператор E является проектором на некоторое подпространство тогда и только тогда, когда он идемпотентен, т. е. $E^2 = E$.*

Доказательство. Пусть E — проектор на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$ и $z = x+y$ с x из $\mathscr{M}$ и y из $\mathscr{N}$; так как разложение x есть $x+0$, то $E^2z=EEz=Ex=x=Ez$. Обратно, предположим, что $E^2 = E$. Пусть $\mathscr{N}$ — множество всех тех векторов z из $\mathscr{V}$, для которых $Ez=0$, а $\mathscr{M}$ — множество всех тех векторов z, для которых $Ez = z$. Очевидно, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ — подпространства; докажем, что $\mathscr{V}=\mathscr{M}\oplus\mathscr{N}$. Принимая во внимание теорему § 18, мы должны доказать, что $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ дизъюнктны и их объединение порождает $\mathscr{V}$.

Если z принадлежит $\mathscr{M}$, то $Ez = z$; если же z принадлежит $\mathscr{N}$, то $Ez=0$; значит, если z принадлежит и $\mathscr{M}$, и $\mathscr{N}$, то $z = 0$. Для любого z имеем $z=Ez+(1-E)z$. Положим $Ez = x$ и $(1-E)z = y$. Тогда $Ex = E^2z = Ez = x$, а $Ey = E(1-E)z = Ez - E^2z = 0$, так что

x принадлежит $\mathcal{M}$, а y принадлежит $\mathcal{N}$. Этим доказано, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ и что E действительно служит проектором на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$.

Из приведенного доказательства непосредственно следует также

Теорема 2. *Если E — проектор на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$, то $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ являются соответственно множествами всех решений уравнений $Ez = z$ и $Ez = 0$.*

С помощью этих двух теорем можно устранить кажущуюся несимметричность ролей, которые играют $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в определении проекторов. Если каждому $z = x + y$ поставить в соответствие не x, а y, мы также получим идемпотентный линейный оператор. Этот оператор (а именно, $1 - E$) будет проектором на $\mathcal{N}$ параллельно $\mathcal{M}$. Подытожим сказанное.

Теорема 3. *Линейный оператор E является проектором тогда и только тогда, когда $1 - E$ проектор; если E—проектор на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$, то $1 - E$ есть проектор на $\mathcal{N}$ параллельно $\mathcal{M}$.*

§ 42. Комбинации проекторов

Продолжая в духе теоремы 3 предыдущего параграфа, мы исследуем условия, при которых различные алгебраические комбинации проекторов также являются проекторами.

Теорема. *Пусть E_1 и E_2 соответственно проекторы на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ параллельно $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, и основное поле скаляров таково, что $1 + 1 \neq 0$.*

(I) *$E_1 + E_2$ есть проектор тогда и только тогда, когда $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$; при выполнении этого условия $E = E_1 + E_2$ есть проектор на $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ параллельно $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \cap \mathcal{N}_2$.*

(II) *$E_1 - E_2$ есть проектор тогда и только тогда, когда $E_1E_2 = E_2E_1 = E_2$; при выполнении этого условия $E = E_1 - E_2$ есть проектор на $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_2$ параллельно $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{M}_2$.*

(III) *Если $E_1E_2 = E_2E_1 = E$, то E есть проектор на $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ параллельно $\mathcal{N} = \mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2$.*

Доказательство. Напомним наши обозначения. Если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$—подпространства, то $\mathcal{H} + \mathcal{K}$ есть подпространство, порожденное их объединением; запись

$\mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$ означает, что $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$ дизъюнктны и тогда $\mathscr{H} \oplus \oplus \mathscr{K} = \mathscr{H} + \mathscr{K}$; $\mathscr{H} \cap \mathscr{K}$ есть пересечение $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$.

(I) Если $E_1 + E_2 = E$—проектор, то $(E_1 + E_2)^2 = E^2 = E = E_1 + E_2$, а потому

$$E_1E_2 + E_2E_1 = 0. \tag{1}$$

Умножив (1) слева и справа на E_1, получим

$$E_1E_2 + E_1E_2E_1 = 0, \quad E_1E_2E_1 + E_2E_1 = 0;$$

вычитание дает $E_1E_2 - E_2E_1 = 0$. Значит, E_1 и E_2 перестановочны и (1) показывает, что их произведение равно нулю. (Здесь нам и понадобилось предположение, что $1 + 1 \neq 0$.) Поскольку, обратно, из $E_1E_2 = E_2E_1 = 0$ очевидно следует (1), мы видим, что условие (I) также достаточно для того, чтобы E было проектором.

Будем, начиная отсюда, предполагать, что E — проектор; по теореме 2 § 41, $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ являются, соответственно, множествами всех решений уравнений $Ez = z$ и $Ez = 0$. Положим $z = x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, где $x_1 = E_1z$ и $x_2 = E_2z$ принадлежат соответственно $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$, а $y_1 = (1 - E_1)z$ и $y_2 = (1 - E_2)z$ — соответственно $\mathscr{N}_1$ и $\mathscr{N}_2$. Если z — вектор из $\mathscr{M}$, $E_1z + E_2z = z$, то

$$z = E_1(x_2 + y_2) + E_2(x_1 + y_1) = E_1y_2 + E_2y_1.$$

Поскольку $E_1(E_1y_2) = E_1y_2$ и $E_2(E_2y_1) = E_2y_1$, мы представили z в виде суммы вектора из $\mathscr{M}_1$ и вектора из $\mathscr{M}_2$, так что $\mathscr{M} \subset \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$. Обратно, если z является суммой вектора из $\mathscr{M}_1$ и вектора из $\mathscr{M}_2$, то $(E_1 + E_2)z = z$, так что z принадлежит $\mathscr{M}$. Следовательно, $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 + \mathscr{M}_2$. Наконец, если z принадлежит и $\mathscr{M}_1$, и $\mathscr{M}_2$, так что $E_1z = E_2z = z$, то $z = E_1z = E_1(E_2z) = 0$, и, значит, $\mathscr{M}_1$ и $\mathscr{M}_2$ дизъюнктны; тем самым доказано, что $\mathscr{M} = \mathscr{M}_1 \oplus \mathscr{M}_2$.

Остается найти $\mathscr{N}$, т. е. найти все решения уравнения $E_1z + E_2z = 0$. Если z принадлежит $\mathscr{N}_1 \cap \mathscr{N}_2$, это уравнение, очевидно, выполнено; обратно, $E_1z + E_2z = 0$ влечет (по умножении слева соответственно на E_1 и E_2) $E_1z + E_1E_2z = 0$ и $E_2E_1z + E_2z = 0$. Поскольку $E_1E_2z = E_2E_1z = 0$ для всех z, получаем окончательно $E_1z = E_2z = 0$, так что z принадлежит одновременно $\mathscr{N}_1$ и $\mathscr{N}_2$.

Техника, использованная при этом доказательстве, и полученные результаты позволяют уже без труда доказать оставшиеся части теоремы.

(II) По теореме 3 § 41, $E_1 - E_2$ есть проектор тогда и только тогда, когда $1-(E_1-E_2)=(1-E_1)+E_2$ есть проектор. Согласно (I) это имеет место (поскольку ведь $1-E_1$ — проектор на $\mathcal{N}_1$ параллельно $\mathcal{M}_1$) тогда и только тогда, когда

$$(1-E_1)\,E_2 = E_2(1-E_1) = 0, \tag{2}$$

причем в этом случае $(1-E_1)+E_2$ является проектором на $\mathcal{N}_1 \oplus \mathcal{M}_2$ параллельно $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}_2$. Поскольку (2) эквивалентно равенствам $E_1E_2=E_2E_1=E_2$, утверждение (II) доказано.

(III) То, что равенства $E=E_1E_2=E_2E_1$ влекут, что E есть проектор, — ясно, поскольку тогда E идемпотентно. Поэтому предположим, что E_1 и E_2 перестановочны, и найдем $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$. Если $Ez=z$, то $E_1z=E_1Ez=E_1E_1E_2z=$ $=E_1E_2z=z$, и аналогично $E_2z=z$, так что z содержится одновременно в $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$. Обратное очевидно: если $E_1z=$ $=z=E_2z$, то $Ez=z$. Предположим теперь, что $E_1E_2z=0$; отсюда следует, что E_2z принадлежит $\mathcal{N}_1$, а на основании перестановочности E_1 и E_2,— что E_1z принадлежит $\mathcal{N}_2$. Это — даже бóльшая симметрия, чем нужно нам; поскольку $z=E_2z+(1-E_2)\,z$ и $(1-E_2)\,z$ принадлежит $\mathcal{N}_2$, мы представили z в виде суммы вектора из $\mathcal{N}_1$ и вектора из $\mathcal{N}_2$. Обратно, если z — такая сумма, то $E_1E_2z=0$; это завершает доказательство того, что $\mathcal{N}=$ $=\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$.

Позже мы еще вернемся к теоремам этого типа и получим в некоторых случаях более точные результаты. Однако, прежде чем перейти к другой теме, обратим внимание на несколько второстепенных особенностей теоремы этого параграфа. Во-первых, отметим, что хотя и в (I), и в (II) $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ были *прямыми* суммами заданных подпространств, в (III) установлено только, что $\mathcal{N}=\mathcal{N}_1+\mathcal{N}_2$. Рассмотрение возможности $E_1=E_2=E$ показывает, что это неизбежно. Кроме того, утверждалась лишь достаточность условия (III); можно построить проекторы E_1 и E_2, произведение которых E_1E_2 будет проектором, но для которых E_1E_2 и E_2E_1 различны. Наконец, можно предположить, что результат (I) распространим по индукции на случай более чем двух слагаемых. Это предположение хотя и верно, но, вопреки ожиданиям, не тривиально; позже мы докажем его в одном особо интересующем нас случае.

§ 43. Проекторы и инвариантность

Мы уже видели, что изучение проекторов равносильно изучению разложений в прямые суммы. С помощью проекторов можно также изучать понятия инвариантности и приводимости.

Теорема 1. *Если подпространство $\mathcal{M}$ инвариантно относительно линейного оператора A, то $EAE = AE$ для каждого проектора E на $\mathcal{M}$. Обратно, если $EAE = AE$ для некоторого проектора E на $\mathcal{M}$, то $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A, $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ для некоторого $\mathcal{N}$ и E — проектор на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$. Для любого $z = x + y$ (с x из $\mathcal{M}$ и y из $\mathcal{N}$) имеем $AEz = Ax$ и $EAEz = EAx$; поскольку принадлежность x подпространству $\mathcal{M}$ обеспечивает принадлежность Ax тому же подпространству, заключаем, что EAx также равно Ax, что и требовалось.

Обратно, предположим, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$ и $EAE = AE$ для проектора E на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$. Если x принадлежит $\mathcal{M}$, то $Ex = x$, так что

$$EAx = EAEx = AEx = Ax,$$

и, следовательно, Ax также принадлежит $\mathcal{M}$.

Теорема 2. *Если $\mathcal{V} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{N}$, то линейный оператор A на $\mathcal{V}$ приводится парой $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда $EA = AE$, где E — проектор на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $EA = AE$, и докажем, что A приводится парой $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Если x принадлежит $\mathcal{M}$, то $Ax = AEx = EAx$, так что Ax также принадлежит $\mathcal{M}$; если x принадлежит $\mathcal{N}$, то $Ex = 0$ и $EAx = AEx = A0 = 0$, так что Ax также принадлежит $\mathcal{N}$.

Теперь предположим, что A приводится парой $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, и докажем, что $EA = AE$. Так как $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A, то, по теореме 1, $EAE = AE$; поскольку $\mathcal{N}$ также инвариантно относительно A, а $1 - E$ есть проектор на $\mathcal{N}$, то, аналогично, $(1 - E) A (1 - E) = A (1 - E)$. Из последнего равенства, по выполнении указанных умножений и упрощений, получаем $EAE = EA$, и теорема полностью доказана.

Упражнения

1. a) Пусть E — проектор на векторном пространстве $\mathcal{V}$; переопределим умножение на скаляр так, чтобы произведение вектора x на скаляр α в новом смысле равнялось прежнему произведению Ex на α. Показать, что сложение векторов (в старом смысле) и умножение на скаляр (в новом смысле) удовлетворяют всем аксиомам векторного пространства за исключением $1 \cdot x = x$.

b) В какой мере справедливо, что описанный в a) метод является единственным способом построения систем, удовлетворяющих всем аксиомам векторного пространства, за исключением $1 \cdot x = x$?

2. a) Пусть $\mathcal{V}$ — векторное пространство, x_0 — его вектор и y_0 — линейный функционал на $\mathcal{V}$; положим $Ax = [x, y_0] x_0$ для каждого x из $\mathcal{V}$. Каким условиям должны удовлетворять x_0 и y_0, чтобы A было проектором?

b) Если A — проектор, скажем, на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$, охарактеризовать $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в терминах x_0 и y_0.

3. Если A есть умножение слева на P в пространстве линейных операторов (см. упражнение 5 § 38), то каким условиям должен удовлетворять P, чтобы A было проектором?

4. Если A — линейный оператор, E — проектор и $F = 1 - E$, то

$$A = EAE + EAF + FAE + FAF.$$

Использовать этот результат для доказательства правила умножения клеточных (квадратных) матриц (как в упражнении 19 § 38).

5. a) Если E_1 и E_2 — перестановочные проекторы соответственно на $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ параллельно $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, то $E_1 + E_2 - E_1 E_2$ есть проектор.

b) Пусть $E_1 + E_2 - E_1 E_2$ — проектор на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$; описать $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в терминах $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$.

6. a) Указать такой не идемпотентный линейный оператор A, для которого бы $A^2 (1 - A) = 0$.

b) Указать не идемпотентный линейный оператор, для которого бы $A (1 - A)^2 = 0$.

c) Доказать, что линейный оператор A, для которого $A^2 (1 - A) = A (1 - A)^2 = 0$, идемпотентен.

7. a) Доказать, что проектор, определенный на конечномерном векторном пространстве, имеет в некотором базисе $\mathcal{X}$ матрицу (e_{ij}) следующего специального вида: $e_{ij} = 0$ или 1 для всех i и j и $e_{ij} = 0$, если $i \neq j$.

b) *Инволюцией* называется линейный оператор U, для которого $U^2 = 1$. Показать, что равенство $U = 2E - 1$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами всех проекторов E и всех инволюций U.

c) Что вытекает из a) и b) для матрицы инволюции на конечномерном векторном пространстве?

8. a) Пусть $\mathcal{M}^+$, $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$ — подпространства пространства $\mathcal{N}^2$ всех векторов (ξ_1, ξ_2), характеризуемые соответственно условиями $\xi_1=\xi_2$, $\xi_1=0$, $\xi_2=0$. Показать, что если E_1 и E_2 — проекторы на $\mathcal{M}^+$ соответственно параллельно $\mathcal{N}_1$ и $\mathcal{N}_2$, то $E_1E_2=E_2$ и $E_2E_1=E_1$.

b) Пусть $\mathcal{M}^-$ — подпространство, характеризуемое условием $\xi_1=-\xi_2$. Если E_0— проектор на $\mathcal{N}_2$ параллельно $\mathcal{M}^-$, то E_2E_0— проектор, но E_0E_2 — нет.

9. Показать, что если E, F и G — проекторы на векторном пространстве над полем характеристики, не равной 2, и $E+F+G=1$, то $EF=FE=EG=GE=FG=GF=0$. Пройдет ли доказательство, если вместо трех проекторов взять четыре?

§ 44. Сопряженный оператор

Исследуем теперь, как связаны между собой понятия линейного оператора и сопряженного пространства. Пусть $\mathcal{V}$ — любое векторное пространство и y — любой элемент из $\mathcal{V}'$; для любого линейного оператора A на $\mathcal{V}$ рассмотрим выражение $[Ax, y]$. При каждом фиксированном y функция y', определенная формулой $y'(x) = [Ax, y]$, является линейным функционалом на $\mathcal{V}$; используя для y', как и для y, обозначение с помощью квадратных скобок, имеем $[Ax, y] = [x, y']$. Если теперь считать y пробегающим $\mathcal{V}'$, то этим способом каждому y будет поставлено в соответствие некоторое y', зависящее, конечно, от y; положим $y' = A'y$. Определяющим свойством A' является равенство

$$[Ax, y]=[x, A'y]. \tag{1}$$

Мы утверждаем, что A' есть линейный оператор на $\mathcal{V}'$. Действительно, если $y = \alpha_1 y_1+\alpha_2 y_2$, то

$$[x, A'y]=[Ax, y]=\alpha_1[Ax, y_1]+\alpha_2[Ax, y_2]=$$
$$=\alpha_1[x, A'y_1]+\alpha_2[x, A'y_2]=[x, \alpha_1A'y_1+\alpha_2A'y_2].$$

Линейный оператор A' называют *сопряженным* к A; этот и следующий параграфы будут посвящены изучению свойств A'. Разделаемся сначала с формальными алгебраическими правилами; вот они:

$$0' = 0, \tag{2}$$

$$1' = 1, \tag{3}$$

$$(A+B)' = A' + B', \tag{4}$$

$$(\alpha A)' = \alpha A', \tag{5}$$

$$(AB)' = B'A', \tag{6}$$

$$(A^{-1})' = (A')^{-1}. \tag{7}$$

Здесь (7) нужно понимать в следующем смысле: если A обратим, то A' также обратим, и имеет место (7). Доказательства всех этих соотношений элементарны; чтобы продемонстрировать, как они проводятся, выполним выкладки, приводящие к (6) и (7). Чтобы доказать (6), достаточно просто заметить, что

$$[ABx, y] = [Bx, A'y] = [x, B'A'y].$$

Для доказательства формулы (7) предположим, что A обратим, так что $AA^{-1} = A^{-1}A = 1$. Применяя к этим равенствам (3) и (6), получаем

$$(A^{-1})' A' = A' (A^{-1})' = 1.$$

Теорема 1 § 36 показывает тогда, что A' обратим и имеет место формула (7).

В конечномерных пространствах справедливо еще одно важное соотношение:

$$A'' = A. \tag{8}$$

Это соотношение следует понимать не буквально. В том, что написано, A'' есть оператор не на $\mathscr{V}$, а на пространстве $\mathscr{V}''$, сопряженном к $\mathscr{V}'$. Если, однако, отождествить $\mathscr{V}''$ и $\mathscr{V}$ посредством естественного изоморфизма, то A'' будет действовать на $\mathscr{V}$, и (8) приобретет смысл. В такой интерпретации доказательство соотношения (8) тривиально. Из рефлексивности $\mathscr{V}$ следует, что каждый линейный функционал на $\mathscr{V}'$ может быть получен рассмотрением $[x, y]$ как функции от y при некотором фиксированном x из $\mathscr{V}$. Поскольку $[x, A'y]$ определяет функцию (линейный функционал) от y, оно может быть записано в виде $[x', y]$. Вектор x' по определению есть здесь $A''x$. Следовательно, для каждого y из $\mathscr{V}'$ и каждого x

из $\mathscr{V}$ имеем

$$[Ax, y] = [x, A'y] = [A''x, y];$$

равенство первого и последнего выражений этой цепочки и приводит к формуле (8).

При предположении, в котором выведено (8) (т. е. конечномерности пространства) несимметричность истолкования формулы (7) можно устранить; мы утверждаем, что в этом случае обратимость A' влечет обратимость A, а значит и справедливость формулы (7). Доказательство: применить прежнее истолкование формулы (7) к A' и A'' вместо A и A'.

Итогом наших рассмотрений в рефлексивном конечномерном случае является утверждение, что $A \longrightarrow A'$ есть взаимно однозначное отображение множества всех линейных операторов, заданных на $\mathscr{V}$, на множество всех линейных операторов, заданных на $\mathscr{V}'$, и даже алгебраический антиизоморфизм. (Приставка «анти» обусловлена правилом перестановочности (6).)

§ 45. Сопряженные проекторы

Существует один важный случай, когда порядок следования сомножителей не обращается, т. е. $(AB)' = A'B'$, а именно тот случай, когда A и B перестановочны. В частности, имеем $(A^n)' = (A')^n$ и, более общим образом, $(p(A))' = p(A')$ для каждого полинома p. Отсюда следует, что если E—проектор, то E'—тоже проектор. Возникает вопрос: с каким разложением в прямую сумму связан проектор E'?

Теорема 1. *Если E—проектор на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{N}$, то E'—проектор на $\mathscr{N}^0$ параллельно $\mathscr{M}^0$.*

Доказательство. Мы уже знаем, что $(E')^2 = E'$, а также $\mathscr{V}' = \mathscr{N}^0 \oplus \mathscr{M}^0$ (см. § 20). Нужно только найти подпространства, состоящие из всех решений уравнений $E'y = 0$ и $E'y = y$. Мы сделаем это в четыре шага.

(I) Если y принадлежит $\mathscr{M}^0$, то для всех x

$$[x, E'y] = [Ex, y] = 0,$$

так что $E'y = 0$.

(II) Если $E'y = 0$, то для всех x из $\mathscr{M}$

$$[x, y] = [Ex, y] = [x, E'y] = 0,$$

так что y принадлежит $\mathscr{M}^\circ$.

(III) Если y принадлежит $\mathscr{N}^\circ$, то для всех x

$$[x, y] = [Ex, y] + [(1 - E)x, y] = [Ex, y] = [x, E'y],$$

так что $E'y = y$.

(IV) Если $E'y = y$, то для всех x из $\mathscr{N}$

$$[x, y] = [x, E'y] = [Ex, y] = 0,$$

так что y принадлежит $\mathscr{N}^\circ$.

(I) и (II) в совокупности показывают, что множеством решений уравнения $E'y = 0$ служит $\mathscr{M}^\circ$, а (III) и (IV) — что множеством решений уравнения $E'y = y$ служит $\mathscr{N}^\circ$. Тем самым теорема доказана.

Теорема 2. *Если $\mathscr{M}$ инвариантно относительно A, то $\mathscr{M}^\circ$ инвариантно относительно A'; если A приводится парой $(\mathscr{M}, \mathscr{N})$, то A' приводится парой $(\mathscr{M}^\circ, \mathscr{N}^\circ)$.*

Доказательство. Мы докажем только первое утверждение; из него очевидным образом следует второе. Сначала заметим, что для любых линейных операторов E, $F = 1 - E$ и A справедливо тождество

$$FAF - FA = EAE - AE. \qquad (1)$$

(Сравнить с доказательством теоремы 2 § 43.) Пусть E — какой-нибудь проектор на $\mathscr{M}$; по теореме 1 § 43 правая часть тождества (1) обращается в нуль, а потому и левая часть равна нулю. Переходя к сопряженным, получаем $F'A'F' = A'F'$; так как по теореме 1 этого параграфа $F' = 1 - E'$ является проектором на $\mathscr{M}^\circ$, теорема 2 тем самым доказана. (Вот другое доказательство первого утверждения теоремы 2, не использующее того, что $\mathscr{V}$ есть прямая сумма $\mathscr{M}$ с каким-то еще подпространством. Если y принадлежит $\mathscr{M}^\circ$, то $[x, A'y] = [Ax, y] = 0$ для всех x из $\mathscr{M}$, и потому $A'y$ принадлежит $\mathscr{M}^\circ$. Единственное преимущество данного выше алгебраического доказательства перед этим простым геометрическим состоит в том, что первое подготавливает почву для будущей работы с проекторами.)

Мы заключим рассмотрение сопряженных операторов изучением их матриц, с целью пояснить теорию в целом и дать возможность читателю строить различные примеры.

Нам потребуется следующий факт: если $\mathscr{X}' = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — какой-нибудь базис в n-мерном векторном пространстве $\mathscr{V}$, $\mathscr{X}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — сопряженный базис в $\mathscr{V}'$ и (α_{ij}) — матрица линейного оператора A в координатной системе $\mathscr{X}$, то

$$\alpha_{ij} = [Ax_j, y_i]. \tag{2}$$

Это следует из определения матрицы линейного оператора: так как $Ax_j = \sum_k \alpha_{kj} x_k$, то

$$[Ax_j, y_i] = \sum_k \alpha_{kj} [x_k, y_i] = \alpha_{ij}.$$

Чтобы не сбиться в применении формулы (2), приведем еще ее словесную формулировку: чтобы найти элемент с индексом (i, j) матрицы $[A]$ оператора A в базисе $\mathscr{X}$, следует применить A к j-му элементу базиса $\mathscr{X}$, а затем найти значение i-го линейного функционала (из $\mathscr{X}'$) на полученном таким образом векторе.

А теперь очень легко найти матрицу $(\alpha'_{ij}) = [A']$ в координатной системе $\mathscr{X}'$; мы просто последуем только что данному рецепту.

Другими словами, рассмотрим $A'y_j$ и найдем значение i-го линейного функционала из $\mathscr{X}''$ (т. е. x_i, рассматриваемого как линейный функционал на $\mathscr{X}'$) на этом векторе; в результате получим

$$\alpha'_{ij} = [x_i, A'y_j].$$

Поскольку $[x_i, A'y_j] = [Ax_i, y_j] = \alpha_{ji}$, так что $\alpha'_{ij} = \alpha_{ji}$, матрицу $[A']$ называют *транспонированной* к матрице $[A]$.

Заметим, что наши результаты о связи между E и E' (где E проектор) можно было бы получить также, соединяя сведения о матричном представлении проекторов с последним результатом о матрицах сопряженных операторов.

§ 46. Изменение базиса

То, что делалось с линейными операторами до сих пор, даже когда могло показаться сложным, было в значительной степени автоматическим. Введя новое понятие линейного оператора, мы просто выявляли его связи с некоторыми ранее введенными понятиями. Теперь мы переходим к изучению самих линейных операторов. В качестве первого приложения теории мы займемся разрешением задач, возникающих при изменении базиса. Эти задачи могут быть сформулированы без упоминания линейных операторов, но наиболее эффективным образом они решаются в терминах линейных операторов.

Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathscr{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — два базиса в n-мерном векторном пространстве $\mathscr{V}$. Можно задаться следующими двумя вопросами.

Вопрос I. *Если x — вектор из $\mathscr{V}$, $x = \sum_i \xi_i x_i = \sum_i \eta_i y_i$ то какова связь между его координатами $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ в базисе $\mathscr{X}$ и его координатами $(\eta_1, \ldots, \eta_n)$ в базисе $\mathscr{Y}$?*

Вопрос II. *Если $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — упорядоченное множество из n скаляров, то какова связь между векторами $x = \sum_i \xi_i x_i$ и $y = \sum_i \xi_i y_i$?*

На оба эти вопроса легко ответить на языке линейных операторов. А именно, рассмотрим линейный оператор A, определенный равенствами $Ax_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Подробнее:

$$A\left(\sum_i \xi_i x_i\right) = \sum_i \xi_i y_i.$$

Пусть (α_{ij}) — матрица оператора A в базисе $\mathscr{X}$, т. е. $y_j = Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$. Заметим, что A обратим, поскольку $\sum_i \xi_i y_i = 0$ влечет $\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$.

Ответ на вопрос I. Так как

$$\sum_j \eta_j y_j = \sum_j \eta_j A x_j = \sum_j \eta_j \sum_i \alpha_{ij} x_i = \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} \eta_j\right) x_i,$$

то

$$\xi_i = \sum_j \alpha_{ij} \eta_j. \tag{1}$$

Ответ на вопрос II.

$$y = Ax. \tag{2}$$

Грубо говоря, обратимый линейный оператор A (или, точнее, матрицу (α_{ij})) можно рассматривать как преобразование координат (как в (1)), а можно рассматривать (как мы обычно рассматриваем его, в (2)) как преобразование векторов.

В классических руководствах по векторным пространствам принято трактовать векторы не как абстрактные объекты, а как упорядоченные системы из n чисел; это делает необходимым введение громоздкой терминологии. Мы дадим сейчас краткий словарь некоторых наиболее затрудняющих терминов и обозначений, возникающих в связи с сопряженными пространствами и операторами.

Вектор x n-мерного векторного пространства $\mathscr{V}$ задается своими координатами в некоторой привилегированной, абсолютной координатной системе; эти координаты образуют упорядоченное множество из n скаляров. Принято выписывать это множество скаляров в столбец,

$$x = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_n \end{bmatrix}.$$

Элементы сопряженного пространства $\mathscr{V}'$ записывают в виде строк, $x' = (\xi_1', \ldots, \xi_n')$. Если считать x (прямоугольной) матрицей из n строк и одного столбца, а x' — матрицей из одной строки и n столбцов, то матричное произведение $x'x$ есть матрица из одной строки и одного столбца, т. е. скаляр. В наших обозначениях этот скаляр есть $[x, x'] = \xi_1\xi_1' + \ldots + \xi_n\xi_n'$. Прием с представлением векторов в виде тонких матриц действует даже при рассмотрении полноценных матриц линейных операторов. Так, произведение матрицы (α_{ij}) и столбца (ξ_j) есть столбец, i-м элементом которого служит $\eta_i = \sum_j \alpha_{ij}\xi_j$. Вместо возни с сопряженными базисами и операторами, мы можем аналогичным способом образовать произведение строки (ξ'_j) с матрицей (α_{ij}) в порядке $(\xi'_j)(\alpha_{ij})$; в результате получится строка, которую мы раньше обозначали $y' = A'x'$. Выражение $[Ax, x']$ сокращенно записывается теперь в виде $x' \cdot A \cdot x$, где обе точки означают обычное матричное умножение. Векторы x из $\mathscr{V}$ называют *ковариантными*, а векторы x' из $\mathscr{V}'$ — *контравариантными*. Так как понятие произведения $x' \cdot x$ (т. е. $[x, x']$) с этой точки зрения зависит от координат векторов x и x', уместно задаться следующим вопросом: при изменении базиса в $\mathscr{V}$ с помощью обратимого линейного оператора A что следует сделать в $\mathscr{V}'$, чтобы сохранить произведение $x' \cdot x$? В наших обозначениях: если $[x, x'] = [y, y']$, где $y = Ax$, то как связано y' с x'? Ответ: $y' = (A')^{-1}x'$. Для выражения всего этого клубка идей классическая терминология говорит: векторы x изменяются *когредиентно*, а x' — *контрагредиентно*.

§ 47. Подобие

Следующие два вопроса тесно связаны с вопросами предыдущего параграфа.

Вопрос III. *Пусть B — линейный оператор на $\mathscr{V}$; какова связь между его матрицами (β_{ij}) и (γ_{ij}) в базисах $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$?*

Вопрос IV. *Дана матрица (β_{ij}); какова связь между линейными операторами B и C, определенными соответственно равенствами $Bx_j = \sum_i \beta_{ij}x_i$ и $Cy_j = \sum_i \beta_{ij}y_i$?*

Вопросы III и IV представляют собой точные формулировки поставленной ранее проблемы: одному оператору соответствует (в различных координатных системах) много матриц (вопрос III) и одной матрице — много операторов (вопрос IV).

Ответ на вопрос III. Имеем

$$Bx_j = \sum_i \beta_{ij}x_i \tag{1}$$

и

$$By_j = \sum_i \gamma_{ij}y_i. \tag{2}$$

С помощью линейного оператора A, определенного в предыдущем параграфе, можем записать

$$By_j = BAx_j = B\left(\sum_k \alpha_{kj} x_k\right) =$$

$$= \sum_k \alpha_{kj} Bx_k = \sum_k \alpha_{kj} \sum_i \beta_{ik} x_i = \sum_i \left(\sum_k \beta_{ik}\alpha_{kj}\right) x_i \qquad (3)$$

и

$$\sum_k \gamma_{kj} y_k = \sum_k \gamma_{kj} Ax_k = \sum_k \gamma_{kj} \sum_i \alpha_{ik} x_i = \sum_i \left(\sum_k \alpha_{ik}\gamma_{kj}\right) x_i. \quad (4)$$

Сравнивая (2), (3) и (4), видим, что

$$\sum_k \alpha_{ik}\gamma_{kj} = \sum_k \beta_{ik}\alpha_{kj}.$$

С помощью матричного умножения это записывается в опасно простой форме

$$[A][C] = [B][A]. \qquad (5)$$

Опасность заключена в том, что три из четырех матриц в равенстве (5) соответствуют своим линейным операторам в базисе $\mathscr{X}$, четвертая же — а именно обозначенная нами через $[C]$ — соответствует оператору B в базисе $\mathscr{Y}$. Однако, если понимать это, формула (5) корректна. Более употребительна следующая форма равенства (5), приспособленная в принципе к вычислению $[C]$, когда $[A]$ и $[B]$ известны:

$$[C] = [A]^{-1}[B][A]. \qquad (6)$$

Ответ на вопрос IV. Для выявления существенно геометрического характера как этого вопроса, так и ответа на него, заметим, что

$$Cy_j = CAx_j$$

и

$$\sum_i \beta_{ij} y_i = \sum_i \beta_{ij} Ax_i = A\left(\sum_i \beta_{ij} x_i\right) = ABx_j.$$

Следовательно, C таково, что

$$CAx_j = ABx_j,$$

или, окончательно,

$$C = ABA^{-1}. \qquad (7)$$

С равенством (7) не связаны затруднения, подобные заставившему нас сделать оговорку насчет истолкования соотношения (6); чтобы найти линейный оператор (не матрицу) C, мы перемножаем операторы A, B и A^{-1}, и незачем говорить что бы то ни было о координатных системах. Однако, сравнение формул (6) и (7) еще раз обнаруживает прирожденное своенравие математических символов. Это лишь другой аспект фактов, уже отмеченных в §§ 37 и 38.

Матрицы $[B]$ и $[C]$ называют *подобными*, если существует обратимая матрица $[A]$, удовлетворяющая соотношению (6); линейные операторы B и C называют *подобными*, если существует обратимый оператор A, удовлетворяющий соотношению (7). На этом языке ответы на вопросы III и IV могут быть выражены очень кратко; в обоих случаях ответ состоит в том, что данные матрицы или операторы должны быть подобны.

Получив ответ на вопрос IV, мы видим теперь, что формулировка этого вопроса содержит слишком много индексов. Справедливость соотношения (7) есть геометрический факт, совершенно не зависящий от линейности, конечномерности или любого другого случайного свойства, которым могут обладать A, B и C; ответ на вопрос IV является также ответом на гораздо более общий вопрос. Этот геометрический вопрос, перефразирующий аналитическую формулировку вопроса IV, таков: если B преобразует $\mathscr{V}$, а C таким же способом преобразует $A\mathscr{V}$, то как связаны между собой B и C? Выражение «таким же способом» не так неопределенно, как оно звучит; оно означает, что если B переводит x, скажем, в u, то C переводит Ax в Au. Разумеется, ответ таков же, как раньше: так как $Bx = u$ и $Cy = v$ (где $y = Ax$ и $v = Au$), то

$$ABx = Au = v = Cy = CAx.$$

Рассматриваемая ситуация удобно резюмируется следующей мнемонической диаграммой:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "B"] \arrow[d, "A"'] & u \arrow[d, "A"] \\ y \arrow[r, "C"'] & v \end{tikzcd}$$

Мы можем идти от y к v, используя короткий отрезок C или же обходя весь блок; иными словами, $C = ABA^{-1}$. Напомним, что ABA^{-1} должно применяться к y справа налево: сначала A^{-1}, затем B, потом C.

Мы уже видели, что теория изменения базисов параллельна теории обратимых линейных операторов. Обратимый линейный оператор есть *автоморфизм*, где под автоморфизмом мы понимаем изоморфизм векторного пространства с самим собою. (См. § 9.) Заметим, что, обратно, всякий автоморфизм является обратимым линейным оператором.

Надеемся, что связь между линейными операторами и матрицами теперь достаточно выяснена, так что читатель не будет возражать, если в дальнейшем, желая дать примеры линейных операторов с различными свойствами, мы будем довольствоваться выписыванием матрицы. В таких случаях всегда будет иметься в виду конкретное векторное пространство $\mathscr{C}^n$ (или одна из его обобщенных версий $\mathscr{F}^n$) и конкретный базис $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_r\}$, образованный векторами $x_i = (\delta_{i1}, \ldots, \delta_{ir})$. Разумеется, при этих условиях матрица (α_{ij}) определяет единственный линейный оператор A, заданный обычной формулой $A\left(\sum_i \xi_i x_i\right) = \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij}\xi_j\right) x_i$.

Упражнения

1. Если A — линейное отображение векторного пространства $\mathscr{U}$ в векторное пространство $\mathscr{V}$, то для каждого фиксированного y из $\mathscr{V}'$ существует вектор из $\mathscr{U}'$, который и в этом случае можно обозначить $A'y$, такой, что

$$[Ax, y] = [x, A'y]$$

для всех x из $\mathscr{U}$. Доказать, что A' есть линейное отображение $\mathscr{V}'$ в $\mathscr{U}'$. (Отображение A' называется *сопряженным* к A.) Истолковать и доказать все, что возможно, из равенств (2) — (8) § 44 для этого понятия сопряженности.

2. a) Доказать, что подобие линейных операторов является отношением эквивалентности (т. е. что оно рефлексивно, симметрично и транзитивно).

b) Если A подобно скаляру α, то $A = \alpha$.

c) Если A и B подобны, то то же верно и для A^2 и B^2, A' и B', а в случае, когда A и B обратимы,— для A^{-1} и B^{-1}.

d) Обобщить понятие подобия на операторы, определенные на различных векторных пространствах. Какие из предыдущих результатов останутся справедливыми для этого обобщенного понятия?

3. a) Если A и B — линейные операторы на одном и том же векторном пространстве и хотя бы один из них обратим, то AB и BA подобны.

b) Останется ли верным заключение a), если ни A, ни B не обратимо?

4. Если $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора A на $\mathscr{C}^2$ в базисе $\{(1, 0), (0, 1)\}$, какова будет матрица A в базисе $\{(1, 1), (1, -1)\}$? А в базисе $\{(1, 0), (1, 1)\}$?

5. Если $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ — матрица линейного оператора A на $\mathscr{C}^3$ в базисе $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0\ 1)\}$, какова будет матрица A в базисе $\{(0, 1, -1), (1, -1, 1), (-1, 1, 0)\}$?

6. a) Построение матрицы, ассоциированной с линейным оператором, зависит от двух базисов, а не от одного. Действительно, если $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\bar{\mathscr{X}} = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n\}$ — базисы пространства $\mathscr{V}$ и A — линейный оператор на $\mathscr{V}$, то матрица $[A; \mathscr{X}, \bar{\mathscr{X}}]$ оператора A в базисах $\mathscr{X}$ и $\bar{\mathscr{X}}$ должна определяться формулами

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij}\bar{x}_i.$$

Определение, принятое в тексте, соответствует тому специальному случаю, когда $\bar{\mathscr{X}} = \mathscr{X}$. Этот случай приводит к определению подобия (B и C подобны, если существуют базисы $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ такие, что $[B; \mathscr{X}] = [C; \mathscr{Y}]$). Аналогичное отношение, подсказываемое общим случаем, называется эквивалентностью; B и C *эквивалентны*, если существуют пары базисов $(\mathscr{X}, \bar{\mathscr{X}})$ и $(\mathscr{Y}, \bar{\mathscr{Y}})$ такие, что $[B; \mathscr{X}, \bar{\mathscr{X}}] = [C; \mathscr{Y}, \bar{\mathscr{Y}}]$. Доказать, что это действительно есть отношение эквивалентности.

b) Два линейных оператора B и C эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют обратимые линейные операторы P и Q такие, что $PB = CQ$.

c) Если A и B эквивалентны, то A' и B' также эквивалентны.

d) Существует ли линейный оператор A, эквивалентный скаляру α и такой, что $A \neq \alpha$?

e) Существуют ли эквивалентные линейные операторы A и B, для которых A^2 и B^2 не эквивалентны?

f) Обобщить понятие эквивалентности на операторы, определенные на различных векторных пространствах. Какие из предыдущих результатов останутся справедливыми для этого обобщенного понятия?

§ 48. Фактороператоры

Пусть A — линейный оператор на векторном пространстве $\mathscr{V}$ и $\mathscr{M}$ — подпространство последнего, инвариантное относительно A. При таких обстоятельствах существует естественный способ определения линейного оператора (который мы будем обозначать $A/\mathscr{M}$) на пространстве $\mathscr{V}/\mathscr{M}$; этот «фактороператор» находится почти в таком же отношении к A, как факторпространство к $\mathscr{V}$. Нам будет удобно (в этом параграфе) обозначать $\mathscr{V}/\mathscr{M}$ более компактным символом $\mathscr{V}^-$ и использовать соответствующие символы для векторов и линейных операторов, которые нам встретятся. Так, например, для любого вектора x из $\mathscr{V}$ мы будем обозначать смежный класс $x+\mathscr{M}$ через x^-; эти элементы x^- и образуют пространство $\mathscr{V}^-$.

Фактороператор $A/\mathscr{M}$ (обозначаемый иначе A^-) мы определим, положив

$$A^-x^- = (Ax)^-$$

для каждого вектора x из $\mathscr{V}$. Другими словами, чтобы найти, во что переводит $A/\mathscr{M}$ смежный класс $x+\mathscr{M}$, находим сначала, во что переводит A вектор x, а затем образуем смежный класс по $\mathscr{M}$, определяемый этим преобразованным вектором. Это определение должно быть подкреплено доказательством однозначности: мы должны быть уверены, что если два вектора определяют один и тот же смежный класс, то то же верно для их образов при отображении A. Ключевым фактом здесь служит инвариантность $\mathscr{M}$. Действительно, если $x+\mathscr{M}=y+\mathscr{M}$, то $x-y$ принадлежит $\mathscr{M}$, так что (инвариантность) $Ax-Ay$ также принадлежит $\mathscr{M}$, и потому $Ax+\mathscr{M}=Ay+\mathscr{M}$.

Что будет, если $\mathscr{M}$ не только инвариантно относительно A, но и, вместе с соответствующим подпространством $\mathscr{N}$, приводит A? В этом случае A является прямой суммой, скажем, $A=B\oplus C$, двух линейных операторов, определенных соответственно на подпространствах $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$; возникает вопрос: как связаны между собой A^- и C? Оба эти оператора можно рассматривать как дополнительные к A; оператор B описывает, как действует A на $\mathscr{M}$, а A^- и C различным образом описывают, как действуют A вне $\mathscr{M}$.

Пусть T — соответствие, относящее каждому вектору x из $\mathcal{N}$ смежный класс $x^{\sim}$ $(=x+\mathcal{M})$. Как мы уже знаем, T есть изоморфизм между $\mathcal{N}$ и $\mathcal{V}/\mathcal{M}$ (см. теорему 1 § 22); мы покажем сейчас, что этот изоморфизм переводит оператор C в оператор $A^{\sim}$. Если $Cx=y$ (где, конечно, x принадлежит $\mathcal{N}$), то $A^{\sim}x^{\sim}=(Ax)^{\sim}=(Cx)^{\sim}=y^{\sim}$; отсюда следует, что $TCx=Ty=A^{\sim}Tx$. Значит, $TC=A^{\sim}T$, как и было обещано. Допуская вольность (см. § 47), можно сказать, что $A^{\sim}$ действует на $\mathcal{V}^{\sim}$ таким же образом, как C на $\mathcal{N}$. Другими словами, линейные операторы $A^{\sim}$ и C абстрактно тождественны (изоморфны). Этот факт имеет большое значение в приложениях понятия факторпространства.

§ 49. Область значений и нуль-пространство

Определение. Пусть A — линейный оператор на векторном пространстве $\mathcal{V}$ и $\mathcal{M}$ — подпространство последнего. *Образом* $\mathcal{M}$ относительно A, символически $A\mathcal{M}$, называется множество всех векторов вида Ax, где x принадлежит $\mathcal{M}$. *Областью значений* оператора A называется множество $\mathcal{R}(A)=A\mathcal{V}$; *нуль-пространством* оператора A называется множество $\mathcal{N}(A)$ всех векторов x, для которых $Ax=0$.

Легко проверить, что $A\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}(A)$ — подпространства. Обозначая, как обычно, через $\mathcal{O}$ подпространство, состоящее из единственного вектора 0, нетрудно описать часть известных нам понятий на языке только что введенной терминологии; перечислим некоторые результаты.

(I) Оператор A обратим тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(A)=\mathcal{V}$ и $\mathcal{N}(A)=\mathcal{O}$.

(II) Если $\mathcal{V}$ конечномерно, то A обратим тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}(A)=\mathcal{V}$ или $\mathcal{N}(A)=\mathcal{O}$.

(III) Подпространство $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A тогда и только тогда, когда $A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$.

(IV) Пара взаимно дополнительных подпространств $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ приводит A тогда и только тогда, когда $A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$ и $A\mathcal{N}\subset\mathcal{N}$.

(V) Если E — проектор на $\mathcal{M}$ параллельно $\mathcal{N}$, то $\mathcal{R}(E)=\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}(E)=\mathcal{N}$.

Все эти утверждения легко доказываются; покажем, например, как доказать (V). Из теоремы 2 § 41 мы знаем, что $\mathcal{N}$ есть множество всех решений уравнения $Ex = 0$; это совпадает с нашим определением $\mathcal{N}(E)$. Известно также, что $\mathcal{M}$ есть множество всех решений уравнения $Ex = x$. Если x принадлежит $\mathcal{M}$, то x принадлежит также $\mathcal{R}(E)$, поскольку x является образом какого-то вектора (а именно, самого x) относительно E. Обратно, если вектор x является чьим-то образом относительно E, скажем, $x = Ey$ (так что x принадлежит $\mathcal{R}(E)$), то $Ex = E^2y = Ey = x$, так что x принадлежит $\mathcal{M}$.

Предупреждение: то, что для проекторов $\mathcal{R} \oplus \mathcal{N} = \mathcal{V}$ — случайность. В общем случае не обязательно даже, чтобы $\mathcal{R} = \mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{N} = \mathcal{N}(A)$ были дизъюнктны. Может случиться, например, что для некоторого вектора x $Ax \neq 0$, но $A^2x = 0$; для такого вектора, очевидно, Ax принадлежит одновременно и области значений, и нуль-пространству оператора A.

Т е о р е м а. *Пусть A — линейный оператор на векторном пространстве $\mathcal{V}$. Тогда*

$$(\mathcal{R}(A))^\circ = \mathcal{N}(A'), \tag{1}$$

а если $\mathcal{V}$ конечномерно, то

$$(\mathcal{N}(A))^\circ = \mathcal{R}(A'). \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если y принадлежит $(\mathcal{R}(A))^\circ$, то для всех x из $\mathcal{V}$

$$0 = [Ax, y] = [x, A'y],$$

так что $A'y = 0$ и y принадлежит $\mathcal{N}(A')$. С другой стороны, если y принадлежит $\mathcal{N}(A')$, то для всех x из $\mathcal{V}$

$$0 = [x, A'y] = [Ax, y],$$

так что y принадлежит $(\mathcal{R}(A))^\circ$.

Применяя (1) к A' вместо A, получаем

$$(\mathcal{R}(A'))^\circ = \mathcal{N}(A''). \tag{3}$$

Если $\mathcal{V}$ конечномерно (и, значит, рефлексивно), в равенстве (3) можно заменить A'' на A, а затем образовать аннулятор от обеих частей; утверждаемое заключение (2) будет следовать из теоремы 2 § 17.

Упражнения

1. С помощью оператора дифференцирования на $\mathcal{P}_n$ показать, что область значений и нуль-пространство линейного оператора не обязательно должны быть дизъюнктны.

2. a) Привести пример линейного оператора на трехмерном пространстве, имеющего двумерную область значений.

b) Привести пример линейного оператора на трехмерном пространстве, имеющего двумерное нуль-пространство.

3. Найти квадратную матрицу четвертого порядка, область значений которой натянута на векторы (1, 0, 1, 0) и (0, 1, 0, 1).

4. a) Проекторы E и F имеют одну и ту же область значений тогда и только тогда, когда $EF=F$ и $FE=E$.

b) Проекторы E и F имеют одно и то же нуль-пространство тогда и только тогда, когда $EF=E$ и $FE=F$.

5. Если $E_1, \ldots, E_k$ — проекторы с одной и той же областью значений и $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ — скаляры, удовлетворяющие условию $\sum_i \alpha_i = 1$, то $\sum_i \alpha_i E_i$ есть проектор.

§ 50. Ранг и дефект

Мы сосредоточим сейчас внимание на конечномерном случае и извлечем некоторые простые следствия из теоремы предыдущего параграфа.

Определение. *Рангом* $\varrho(A)$ линейного оператора A на конечномерном векторном пространстве называется размерность его области значений $\mathcal{R}(A)$, а *дефектом* $\nu(A)$ — размерность его нуль-пространства $\mathcal{N}(A)$.

Теорема 1. *Если A — линейный оператор на n-мерном векторном пространстве, то $\varrho(A)=\varrho(A')$ и $\nu(A)=n-\varrho(A)$.*

Доказательство. Из теоремы предыдущего параграфа и теоремы 1 § 17 вытекает, что

$$\nu(A') = n - \varrho(A). \tag{1}$$

Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — любой базис, в котором $x_1, \ldots, x_\nu$ принадлежат $\mathcal{N}(A)$; тогда для любого $x = \sum_i \xi_i x_i$ имеем

$$Ax = \sum_i \xi_i A x_i = \sum_{i=\nu+1}^{n} \xi_i A x_i.$$

Иначе говоря, Ax есть линейная комбинация $n-\nu$ векторов $Ax_{\nu+1}, \ldots, Ax_n$; поэтому $\varrho(A) \leqslant n-\nu(A)$. Применяя этот результат к A' и используя (1), получаем

$$\varrho(A') \leqslant n - \nu(A') = \varrho(A). \tag{2}$$

Так как в (2) A можно заменить на A', то имеем тогда

$$\varrho(A) = \varrho(A'') \leqslant \varrho(A'). \tag{3}$$

В совокупности (2) и (3) показывают, что

$$\varrho(A) = \varrho(A'), \tag{4}$$

а (1) и (4) — что

$$\nu(A') = n - \varrho(A'). \tag{5}$$

Наконец, замена в (5) A на A' дает

$$\nu(A) = n - \varrho(A), \tag{6}$$

что и завершает доказательство теоремы.

Эти результаты обычно рассматривают с несколько другой точки зрения. Пусть A — линейный оператор на n-мерном векторном пространстве, $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ — базис пространства и $[A] = (\alpha_{ij})$ — матрица A в координатной системе $\mathscr{X}$, так что

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i.$$

Если $x = \sum_j \xi_j x_j$, то $Ax = \sum_j \xi_j A x_j$; поэтому каждый вектор из $\mathscr{R}(A)$ является линейной комбинацией векторов Ax_j и, значит, любого максимального линейно независимого множества этих векторов. Следовательно, максимальное число линейно независимых векторов Ax_j есть не что иное, как $\varrho(A)$. В терминах координат $(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$ векторов Ax_j можно выразить это, сказав, что $\varrho(A)$ есть максимальное число линейно независимых столбцов матрицы $[A]$. Так как (§ 45) столбцы матрицы $[A']$ (выраженной в базисе, сопряженном к $\mathscr{X}$) являются строками матрицы $[A]$, то из теоремы 1 следует, что $\varrho(A)$ есть также максимальное число линейно независимых строк матрицы $[A]$. Таким образом, «ранг матрицы $[A]$ по строкам = рангу матрицы $[A]$ по столбцам — рангу матрицы $[A]$».

Теорема 2. *Если A — линейный оператор на n-мерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ и $\mathscr{H}$ — любое h-мерное подпространство в $\mathscr{V}$, то размерность $A\mathscr{H}$ будет $\geqslant h - \nu(A)$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{K}$ — произвольное подпространство, для которого $\mathscr{V} = \mathscr{H} \oplus \mathscr{K}$, так что, обозначая через k размерность $\mathscr{K}$, имеем $k = n - h$. Применяя A, получаем

$$A\mathscr{V} = A\mathscr{H} + A\mathscr{K}.$$

(Эта сумма не обязательно прямая; см. § 11.) Так как размерность $A\mathscr{V} = \mathscr{R}(A)$ равна $n - \nu(A)$, далее, размерность $A\mathscr{K}$, очевидно, $\leqslant k = n - h$ и, наконец, размерность суммы $\leqslant$ суммы размерностей, мы и приходим к утверждаемому результату.

Теорема 3. *Если A и B — линейные операторы на конечномерном векторном пространстве, то*

$$\varrho(A+B) \leqslant \varrho(A) + \varrho(B), \tag{7}$$

$$\varrho(AB) \leqslant \min\{\varrho(A), \varrho(B)\} \tag{8}$$

и

$$\nu(AB) \leqslant \nu(A) + \nu(B). \tag{9}$$

Если B обратим, то

$$\varrho(AB) = \varrho(BA) = \varrho(A). \tag{10}$$

Доказательство. Так как $(AB)x = A(Bx)$, то $\mathscr{R}(AB)$ содержится в $\mathscr{R}(A)$, так что $\varrho(AB) \leqslant \varrho(A)$, или, другими словами, ранг произведения не больше ранга первого сомножителя. Применим этот вспомогательный результат к $B'A'$; в соединении с тем, что мы уже узнали, это даст (8). Если B обратим, то

$$\varrho(A) = \varrho(AB \cdot B^{-1}) \leqslant \varrho(AB)$$

и

$$\varrho(A) = \varrho(B^{-1} \cdot BA) \leqslant \varrho(BA);$$

вместе с (8) это дает (10). Равенство (7) есть непосредственное следствие рассуждения, уже использованного при доказательстве теоремы 2. Доказательство (9) мы предоставим в качестве упражнения читателю. (Указание: применить теорему 2, взяв $\mathscr{H} = B\mathscr{V} = \mathscr{R}(B)$.) Формулы (8) и (9) вместе известны как *закон Сильвестра*.

§ 51. Операторы ранга один

Мы закончим наше рассмотрение ранга оператора описанием матриц линейных операторов ранга $\leqslant 1$.

Теорема 1. *Если A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$, такой, что $\rho(A) \leqslant 1$ (т. е. $\rho(A)=0$ или $\rho(A)=1$), то элементы его матрицы $[A]=(\alpha_{ij})$ в любой координатной системе имеют вид $\alpha_{ij}=\beta_i\gamma_j$; обратно, если матрица оператора A в какой-нибудь координатной системе имеет указанный вид, то $\rho(A)\leqslant 1$.*

Доказательство. Если $\rho(A)=0$, то $A=0$, и утверждение теоремы тривиально. Если $\rho(A)=1$, т. е. $\mathscr{R}(A)$ одномерно, то в $\mathscr{R}(A)$ существует ненулевой вектор x_0 (базис в $\mathscr{R}(A)$) такой, что каждый вектор из $\mathscr{R}(A)$ кратен x_0. Следовательно, для каждого x,

$$Ax = y_0 x_0,$$

где скалярный коэффициент $y_0 (= y_0(x))$, конечно, зависит от x. Из линейности A следует, что y_0 есть линейный функционал на $\mathscr{V}$. Пусть $\mathscr{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис в $\mathscr{V}$ и (α_{ij}) — соответствующая ему матрица оператора A, так что

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i.$$

Если $\mathscr{X}'=\{y_1, \ldots, y_n\}$ — сопряженный базис в $\mathscr{V}'$, то (см. § 45, (2))

$$\alpha_{ij} = [Ax_j, y_i].$$

В данном случае

$$\alpha_{ij} = [y_0(x_j)\, x_0, y_i] = y_0(x_j)\,[x_0, y_i] = [x_0, y_i]\,[x_j, y_0];$$

другими словами, мы можем взять $\beta_i=[x_0, y_i]$ и $\gamma_j = [x_j, y_0]$.

Обратно, предположим, что в некоторой координатной системе $\mathscr{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ матрица (α_{ij}) оператора A такова, что $\alpha_{ij}=\beta_i\gamma_j$. Мы можем найти такой линейный функционал y_0, что $\gamma_j=[x_j, y_0]$, и определить вектор x_0 равенством $x_0=\sum_k \beta_k x_k$. Линейный оператор $\widetilde{A}$, определяемый формулой $\widetilde{A}x = y_0(x)\,x_0$, есть, очевидно, оператор ранга 1 (конечно, за исключением того случая, когда $\alpha_{ij} = 0$ для всех i и j), и его матрица $(\widetilde{\alpha}_{ij})$ в координатной системе $\mathcal{X}$ задается равенствами

$$\widetilde{\alpha}_{ij} = [\widetilde{A}x_j,\ y_i]$$

(где $\mathcal{X}' = \{y_1, \ldots, y_n\}$ — базис, сопряженный к $\mathcal{X}$). Значит,

$$\widetilde{\alpha}_{ij} = [y_0(x_j)\,x_0,\ y_i] = [x_0,\ y_i]\,[x_j,\ y_0] = \beta_i\gamma_j,$$

и так как A и $\widetilde{A}$ обладают одинаковой матрицей в одной координатной системе, то $\widetilde{A} = A$. Теорема полностью доказана.

Следующая теорема позволяет в некоторых случаях применить теорему 1 для получения результатов, касающихся произвольного линейного оператора.

Теорема 2. *Линейный оператор A ранга ϱ на конечномерном векторном пространстве $\mathcal{V}$ может быть записан в виде суммы ϱ операторов ранга один.*

Доказательство. Поскольку $A\mathcal{V} = \mathcal{R}(A)$ имеет размерность ϱ, можно найти ϱ векторов $x_1, \ldots, x_\varrho$, образующих в $\mathcal{R}(A)$ базис. Следовательно, для каждого вектора x из $\mathcal{V}$ имеем

$$Ax = \sum_{i=1}^{\varrho} \xi_i x_i,$$

причем ξ_i, конечно, зависит от x; положим $\xi_i = y_i(x)$. Легко видеть, что y_i является линейным функционалом. С помощью найденных y_i определим для каждого $i = 1, \ldots, \varrho$ линейный оператор A_i равенством $A_i(x) = y_i(x)\,x_i$. Тогда каждый оператор A_i имеет ранг один и $A = \sum_{i=1}^{\varrho} A_i$. (Сравнить этот результат с примером 2) § 32.)

Небольшое усовершенствование изложенного доказательства приводит к следующему результату.

Теорема 3. *Для любого линейного оператора A на конечномерном векторном пространстве $\mathcal{V}$ существует такой обратимый линейный оператор P, что PA является проектором.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{R}$ и $\mathscr{N}$ соответственно область значений и нуль-пространство оператора A и $\{x_1, \ldots, x_\varrho\}$ — базис в $\mathscr{R}$. Пусть $x_{\varrho+1}, \ldots, x_n$ такие векторы, что $\{x_1, \ldots, x_n\}$ есть базис в $\mathscr{V}$. Поскольку x_i для $i = 1, \ldots, \varrho$ принадлежит $\mathscr{R}$, можно найти векторы y_i такие, что $Ay_i = x_i$. Наконец, выберем базис в $\mathscr{N}$; его можно обозначить $\{y_{\varrho+1}, \ldots, y_n\}$. Мы утверждаем, что $\{y_1, \ldots, y_n\}$ является базисом в $\mathscr{V}$. Разумеется, требует доказательства лишь то, что векторы y линейно независимы. Для этого предположим, что $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = 0$; тогда будем иметь (учитывая, что для $i = \varrho + 1, \ldots, n$ векторы y_i принадлежат $\mathscr{N}$)

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i\right) = \sum_{i=1}^{\varrho} \alpha_i x_i = 0,$$

откуда $\alpha_1 = \ldots = \alpha_\varrho = 0$. Следовательно, $\sum_{i=\varrho+1}^{n} \alpha_i y_i = 0$, а линейная независимость векторов $y_{\varrho+1}, \ldots, y_n$ показывает тогда, что и остальные коэффициенты должны обращаться в нуль.

Линейный оператор P, существование которого мы утверждаем, определяется теперь равенствами $Px_i = y_i$, $i = 1, \ldots, n$. Действительно, если $i = 1, \ldots, \varrho$, то $PAy_i = Px_i = y_i$, а если $i = \varrho + 1, \ldots, n$, то $PAy_i = P0 = 0$.

Рассмотрение оператора, сопряженного к A, в соединении с рефлексивностью $\mathscr{V}$, показывает, что можно найти также обратимый оператор Q, для которого AQ является проектором. В случае, когда A сам обратим, необходимо $P = Q = A^{-1}$.

Упражнения

1. Каков ранг оператора дифференцирования на $\mathscr{P}_n$? Каков его дефект?

2. Найти ранг следующих матриц:

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{d)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Пусть A есть умножение слева на P в пространстве линейных операторов (см. упражнение 5 § 38). Каков будет ранг A, если P имеет ранг m?

4. Ранг прямой суммы двух линейных операторов (на конечномерных векторных пространствах) равен сумме их рангов.

5. a) Если A и B — линейные операторы на n-мерном векторном пространстве и $AB=0$, то $\varrho(A)+\varrho(B)\leqslant n$.

b) Для каждого линейного оператора A на n-мерном векторном пространстве существует такой линейный оператор B, что $AB=0$ и $\varrho(A)+\varrho(B)=n$.

6. Если A, B и C — линейные операторы на конечномерном векторном пространстве, то

$$\varrho(AB)+\varrho(BC)\leqslant\varrho(B)+\varrho(ABC).$$

7. Доказать, что два линейных оператора (на одном и том же конечномерном векторном пространстве) эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

8) a) Пусть A и B — линейные операторы (на одном и том же конечномерном векторном пространстве) такие, что $A^2=A$ и $B^2=B$. Верно ли, что A и B подобны тогда и только тогда, когда $\varrho(A)=\varrho(B)$?

b) Пусть A и B — линейные операторы (на одном и том же конечномерном векторном пространстве) такие, что $A\neq 0$, $B\neq 0$ и $A^2=B^2=0$. Верно ли, что A и B подобны тогда и только тогда, когда $\varrho(A)=\varrho(B)$?

9. a) Если A — линейный оператор ранга один, то существует однозначно определенный скаляр α такой, что $A^2=\alpha A$.

b) Если $\alpha\neq 1$, то $1-A$ обратим.

§ 52. Тензорные произведения операторов

Установим теперь связь между линейными операторами и теорией тензорных произведений. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — конечномерные векторные пространства (над одним и тем же полем), а A и B — два произвольных линейных оператора соответственно на $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$. Определим линейный оператор $\overline{C}$ на пространстве $\mathcal{W}$ всех билинейных форм на $\mathcal{U}\oplus\mathcal{V}$ формулой

$$(\overline{C}w)(x, y)=w(Ax, By).$$

По определению, *тензорным произведением* $C=A\otimes B$ операторов A и B будет называться оператор, сопряженный к $\overline{C}$, так что

$$(Cz)(w)=z(\overline{C}w)$$

для любых z из $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ и w из $\mathcal{W}$. Применив C к элементу z_0 вида $z_0 = x_0 \otimes y_0$ (напомним, что это означает, что $z_0(w) = w(x_0, y_0)$ для всех w из $\mathcal{W}$), получим

$$(Cz_0)(w) = z_0(\overline{C}w) = (x_0 \otimes y_0)(\overline{C}w) = (\overline{C}w)(x_0, y_0) = \\ = w(Ax_0, By_0) = (Ax_0 \otimes By_0)(w).$$

Отсюда заключаем, что

$$Cz_0 = Ax_0 \otimes By_0. \tag{1}$$

Поскольку в $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ имеется отнюдь не малое количество элементов вида $x \otimes y$, во всяком случае, достаточное для образования базиса (см. § 25), это соотношение характеризует C.

Вот формальные правила оперирования с тензорными произведениями:

$$A \otimes 0 = 0 \otimes B = 0, \tag{2}$$

$$1 \otimes 1 = 1, \tag{3}$$

$$(A_1 + A_2) \otimes B = (A_1 \otimes B) + (A_2 \otimes B), \tag{4}$$

$$A \otimes (B_1 + B_2) = (A \otimes B_1) + (A \otimes B_2), \tag{5}$$

$$\alpha A \otimes \beta B = \alpha\beta (A \otimes B), \tag{6}$$

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}, \tag{7}$$

$$(A_1A_2) \otimes (B_1B_2) = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2). \tag{8}$$

Доказательства всех этих соотношений, за исключением, возможно, двух последних, просты.

Формула (7), как все формулы, включающие обратные операторы, требует дополнительного пояснения. Она должна означать, что если и A и B обратимы, то $A \otimes B$ также обратим, и имеет место указанное равенство; обратно, если $A \otimes B$ обратим, то обратимы также A и B. Мы будем доказывать (7) и (8) в обратном порядке.

Формула (8) следует из характеристического свойства (1) тензорных произведений и следующих выкладок:

$$(A_1A_2 \otimes B_1B_2)(x \otimes y) = A_1A_2x \otimes B_1B_2y = \\ = (A_1 \otimes B_1)(A_2x \otimes B_2y) = (A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2)(x \otimes y).$$

В качестве непосредственного следствия из (8) получаем

$$A \otimes B = (A \otimes 1)(1 \otimes B) = (1 \otimes B)(A \otimes 1). \qquad (9)$$

Для доказательства формулы (7) предположим, что A и B обратимы, и образуем $A \otimes B$ и $A^{-1} \otimes B^{-1}$. Так как, по (8), произведение этих двух операторов, в любом порядке, равно 1, то $A \otimes B$ обратим, и справедлива формула (7). Обратно, предположим, что $A \otimes B$ обратим. Учитывая, что тензорные произведения были определены нами только для конечномерных пространств, мы можем призвать на помощь теорему 2 § 36; достаточно доказать, что $Ax = 0$ влечет $x = 0$, а $By = 0$ влечет $y = 0$. Воспользуемся соотношением (1):

$$Ax \otimes By = (A \otimes B)(x \otimes y).$$

Если один из сомножителей слева равен нулю, то $(A \otimes B)(x \otimes y) = 0$, откуда $x \otimes y = 0$, так что или $x = 0$, или $y = 0$. Поскольку (в силу (2)) равенство $B = 0$ невозможно, существует вектор y, для которого $By \neq 0$. Применяя только что использованное соображение к этому y и любому x, для которого $Ax = 0$, заключаем, что $x = 0$. То же самое рассуждение, если в нем поменять A и B ролями, доказывает обратимость B.

Интересной (и сложной) стороной теории тензорных произведений операторов является теория кронекеровских произведений матриц. Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ — базисы в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, а $[A] = [A; \mathcal{X}] = (\alpha_{ij})$ и $[B] = [B; \mathcal{Y}] = (\beta_{pq})$ — матрицы операторов A и B. Какова будет матрица оператора $A \otimes B$ в координатной системе $\{x_i \otimes y_p\}$?

Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны напомнить проведенное в § 37 обсуждение вопроса о расположении базиса в линейном порядке. Так как, к сожалению, невозможно выписать матрицу, не приняв какого-то порядка следования строк и столбцов, мы сознательно воспользуемся этим: расположим $n \times m$ векторов $x_i \otimes y_p$ в так называемом лексикографическом порядке, а именно следующим образом:

$$x_1 \otimes y_1,\ x_1 \otimes y_2,\ \ldots,\ x_1 \otimes y_m,\ x_2 \otimes y_1,\ \ldots,\ x_2 \otimes y_m, \ldots$$
$$\ldots, x_n \otimes y_1, \ldots, x_n \otimes y_m.$$

Произведем также следующие выкладки:

$$(A \otimes B)(x_j \otimes y_q) = Ax_j \otimes By_q = \left(\sum_i \alpha_{ij} x_i\right) \otimes \left(\sum_p \beta_{pq} y_p\right) =$$
$$= \sum_i \sum_p \alpha_{ij}\beta_{pq}(x_i \otimes y_p).$$

Этот способ точно указывает, до каких пор можно обходиться без упорядочения базисных элементов; если, например, договориться индексировать элементы матрицы не парой целых чисел, а парой пар, скажем, (i, p) и (j, q), то мы знаем теперь, что элементом (i, p)-й строки и (j, q)-го столбца будет $\alpha_{ij}\beta_{pq}$. Если воспользоваться лексикографическим упорядочением, матрица оператора $A \otimes B$ примет вид

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1m} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{11} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{1m} \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ \alpha_{11}\beta_{m1} & \dots & \alpha_{11}\beta_{mm} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{m1} & \dots & \alpha_{1n}\beta_{mm} \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ \alpha_{n1}\beta_{11} & \dots & \alpha_{n1}\beta_{1m} & \dots & \alpha_{nn}\beta_{11} & \dots & \alpha_{nn}\beta_{1m} \\ & & \vdots & & & \vdots & \\ \alpha_{n1}\beta_{m1} & \dots & \alpha_{n1}\beta_{mm} & \dots & \alpha_{nn}\beta_{m1} & \dots & \alpha_{nn}\beta_{mm} \end{bmatrix}.$$

В сжатом обозначении, имеющем очевидный смысл, можно записать эту матрицу следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11}[B] & \dots & \alpha_{1n}[B] \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}[B] & \dots & \alpha_{nn}[B] \end{bmatrix}.$$

Эта матрица известна под названием *кронекеровского произведения* матриц $[A]$ и $[B]$, в этом их порядке. Правило ее образования легко описать словами: заменить каждый элемент α_{ij} квадратной матрицы n-го порядка $[A]$

квадратной матрицей m-го порядка α_{ij} $[B]$. Если в этом правиле поменять ролями A и B (и, следовательно, также n и m), то получится определение кронекеровского произведения матриц $[B]$ и $[A]$.

Упражнения

1. Как мы знаем, тензорное произведение пространств $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_m$ отождествимо с пространством $\mathcal{P}_{n,m}$ полиномов от двух переменных (см. упражнение 2 § 25). Доказать, что если A и B — операторы дифференцирования соответственно на $\mathcal{P}_n$ и $\mathcal{P}_m$, то $C=A\otimes B$ есть смешанное частное дифференцирование, т. е. $Cz=\dfrac{\partial^2 z}{\partial s\,\partial t}$ для каждого z из $\mathcal{P}_{n,m}$.

2. При лексикографическом упорядочении произведения базисов $\{x_i\otimes y_p\}$ матрица оператора $A\otimes B$ оказывается кронекеровским произведением матриц операторов A и B. Существует ли такое упорядочение этих базисных векторов, чтобы матрица оператора $A\otimes B$ в так упорядоченной координатной системе была кронекеровским произведением матриц операторов B и A (в этом же порядке)?

3. Каковы бы ни были линейные операторы A и B,

$$\varrho(A\otimes B)=\varrho(A)\,\varrho(B).$$

§ 53. Определители

Конечно, рассмотрения предыдущего параграфа возможно обобщить на полилинейные формы и кратные тензорные произведения. Но вместо углубления в эту часть полилинейной алгебры, мы пойдем в другом направлении: займемся непосредственно определителями.

Пусть A — линейный оператор и w — знакопеременная n-линейная форма на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$. Функция $\bar{A}w$, определяемая формулой

$$(\bar{A}w)(x_1, \ldots, x_n)=w(Ax_1, \ldots, Ax_n),$$

есть знакопеременная n-линейная форма на $\mathcal{V}$, причем $\bar{A}$ есть линейный оператор на пространстве таких форм. Поскольку (см. § 31) это пространство одномерно, отсюда следует, что $\bar{A}$ есть умножение на надлежащий скаляр. Другими словами, существует такой скаляр δ, что $\bar{A}w=\delta w$ для каждой знакопеременной n-линейной формы w. Таким несколько окольным путем (от A через $\bar{A}$ к δ) мы связали с каждым линейным оператором A на $\mathscr{V}$ однозначно определенный скаляр δ; назовем δ *определителем* оператора A и будем писать $\delta = \det A$. Заметим, что det не есть ни скаляр, ни оператор; это — функция, связывающая с каждым линейным оператором некий скаляр.

Нашей непосредственной целью является изучение функции det. Начнем с нахождения определителей простейших линейных операторов, а именно, умножений на скаляры. Если $Ax = \alpha x$ для каждого x из $\mathscr{V}$, то

$$(\bar{A}w)(x_1, \ldots, x_n) = w(\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) = \alpha^n w(x_1, \ldots, x_n)$$

для каждой знакопеременной n-линейной формы w; отсюда следует, что $\det A = \alpha^n$. Отметим, в частности, что $\det 0 = 0$ и $\det 1 = 1$.

Далее, нас интересуют мультипликативные свойства функции det. Предположим, что A и B — линейные операторы на $\mathscr{V}$, и пусть $C = AB$. Если w — знакопеременная n-линейная форма, то

$$(\bar{C}w)(x_1, \ldots, x_n) = w(ABx_1, \ldots, ABx_n) =$$
$$= (\bar{A}w)(Bx_1, \ldots, Bx_n) = (\bar{B}\bar{A}w)(x_1, \ldots, x_n),$$

так что $\bar{C} = \overline{B}\overline{A}$. Поскольку

$$\bar{C}w = (\det C)\, w,$$

а

$$\bar{B}\bar{A}w = (\det B)\, \bar{A}w = (\det B)(\det A)\, w,$$

заключаем, что

$$\det(AB) = (\det A)(\det B).$$

(Значения функции det — скаляры, и потому перестановочны друг с другом.)

Линейный оператор A называют *вырожденным*, если $\det A = 0$, и *невырожденным* в противном случае. Следующий наш результат состоит в том, что оператор A обратим тогда и только тогда, когда он невырожден. Действительно, если A обратим, то

$$1 = \det 1 = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1}),$$

и потому $\det A \neq 0$. С другой стороны, предположим, что

$\det A \neq 0$. Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис в $\mathscr{V}$ и w — ненулевая знакопеременная n-линейная форма на $\mathscr{V}$, то, по теореме 3 § 30, $(\det A)\, w(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$. Отсюда, по теореме 2 § 30, следует, что множество $\{Ax_1, \ldots, Ax_n\}$ линейно независимо (а потому есть базис); из него, в свою очередь, заключаем, что A обратим.

В классической литературе определитель определяется как функция матриц (а не линейных операторов); теперь мы в состоянии установить связь с таким подходом. Мы получим выражение для $\det A$ в терминах элементов (α_{ij}) матрицы, соответствующей A в некоторой координатной системе $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Пусть w — ненулевая знакопеременная n-линейная форма; как мы знаем,

$$(\det A)\, w(x_1, \ldots, x_n) = w(Ax_1, \ldots, Ax_n). \qquad (1)$$

Заменив каждое Ax_j в правой части формулы (1) на $\sum\limits_i \alpha_{ij} x_i$ и развернув полученное выражение, пользуясь полилинейностью, мы получим длинную линейную комбинацию членов вида $w(z_1, \ldots, z_n)$, где каждое z есть один из векторов x. (Сравните эту часть рассуждения с доказательством теоремы 3 § 30.) Если в таком члене два вектора z совпадают, то, поскольку w знакопеременна, этот член должен обращаться в нуль. С другой стороны, если все z различны, то $w(z_1, \ldots, z_n) = \pi w(x_1, \ldots, x_n)$ для некоторой перестановки π, и, более того, каждая перестановка π может встретиться в такой роли. Коэффициент при члене $\pi w(x_1, \ldots, x_n)$ равен произведению $\alpha_{\pi(1),1} \ldots \alpha_{\pi(n),n}$. Поскольку w кососимметрична (теорема 1 § 30), то

$$\det A = \sum_{\pi} (\operatorname{sgn} \pi)\, \alpha_{\pi(1),1} \ldots \alpha_{\pi(n),n}, \qquad (2)$$

где суммирование распространяется на все перестановки π из $\mathscr{S}_n$. (Напомним, что, по теореме 3 § 30, $w(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$, так что деление на $w(x_1, \ldots, x_n)$ законно.)

Из этого классического равенства (2) можно было бы прямым вычислением получить многие специальные свойства определителей. Вот один пример. Если σ и π — перестановки (из $\mathscr{S}_n$), то (поскольку $\pi\sigma$ — также перестановка) произведения $\alpha_{\pi(1),1} \ldots \alpha_{\pi(n),n}$ и $\alpha_{\pi\sigma(1),\sigma(1)} \ldots \alpha_{\pi\sigma(n),\sigma(n)}$ отличаются только порядком сомножителей. Если для каждого π взять $\sigma = \pi^{-1}$ и соответственно изменить в (2) каждое слагаемое, то получим

$$\det A = \sum_{\pi} (\operatorname{sgn} \pi)\, \alpha_{1,\, \pi(1)} \ldots \alpha_{n,\, \pi(n)}.$$

(Заметим, что $\operatorname{sgn} \pi = \operatorname{sgn} \pi^{-1}$ и что сумма по всем π та же, что и сумма по всем π^{-1}.) Так как последняя сумма точно такая же, как и сумма в (2), за исключением того, что вместо $\alpha_{\pi(i),\, i}$ стоит $\alpha_{i,\, \pi(i)}$, то, применив (2) к A', получаем

$$\det A = \det A'.$$

Вот еще одно полезное свойство определителей. Если $\mathcal{M}$ — подпространство, инвариантное относительно A, B — оператор A, рассматриваемый только на $\mathcal{M}$, и C — фактороператор $A/\mathcal{M}$, то

$$\det A = \det B \cdot \det C.$$

Это мультипликативное соотношение выполняется, в частности, если A есть прямая сумма двух операторов B и C. Доказательство может быть основано как непосредственно на определении определителей, так и на разложении, полученном выше.

Если для фиксированного линейного оператора A положить $p(\lambda) = \det(A - \lambda)$, то p будет функцией от скаляра λ; мы утверждаем, что это в действительности полином от λ степени n и коэффициент при λ^n равен $(-1)^n$. Для доказательства воспользуемся обозначением, принятым в (1). Легко видеть, что $w((A-\lambda)x_1, \ldots, (A-\lambda)x_n)$ есть сумма членов вида $\lambda^k w(y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = x_i$ ровно для k значений i и $y_i = Ax_i$ для оставшихся $n-k$ значений i ($k = 0, 1, \ldots, n$). Полином p называют *характеристическим полиномом*, а уравнение $p = 0$, т. е. $\det(A - \lambda) = 0$, — *характеристическим уравнением* оператора A. Корни этого уравнения называют *характеристическими корнями* оператора A.

Упражнения

1. С помощью определителей получить новое доказательство того факта, что если A и B — линейные операторы на конечномерном векторном пространстве и $AB = 1$, то A и B обратимы.

2. Если A и B — такие линейные операторы, что $AB = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, то $\det A = \det B = 0$.

3. Пусть (α_{ij}) — невырожденная квадратная матрица n-го порядка и $A_1, \ldots, A_n$ — линейные операторы (на одном и том же векторном пространстве). Доказать, что если линейные операторы $\sum_j \alpha_{ij}A_j$, $i=1, \ldots, n$, перестановочны друг с другом, то то же верно для $A_1, \ldots, A_n$.

4. Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\{y_1, \ldots, y_n\}$ — базисы одного и того же векторного пространства и A — линейный оператор такой, что $Ax_i = y_i$, $i=1, \ldots, n$, то $\det A \neq 0$.

5. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис конечномерного векторного пространства $\mathcal{V}$. Для любых векторов $y_1, \ldots, y_n$ из $\mathcal{V}$ обозначим через $w(y_1, \ldots, y_n)$ определитель линейного оператора A, определяемого условиями $Ax_j = y_j$, $j=1, \ldots, n$. Доказать, что w—знакопеременная n-линейная форма.

6. Если, в соответствии с формулой (2) этого параграфа, за определитель матрицы (α_{ij}) (а не линейного оператора) принять

$$\sum_\pi (\operatorname{sgn} \pi)\, \alpha_{\pi(1),1} \ldots \alpha_{\pi(n),n},$$

то для каждого линейного оператора A определители всех матриц $[A, \mathcal{X}]$ будут равны между собой. (Здесь $\mathcal{X}$ — произвольный базис.)

7. Если (α_{ij}) — квадратная матрица n-го порядка такая, что $\alpha_{ij}=0$ для более чем n^2-n пар значений i и j, то $\det(\alpha_{ij})=0$.

8. Если A и B — линейные операторы соответственно на векторных пространствах размерностей n и m, то

$$\det(A \otimes B) = (\det A)^m \cdot (\det B)^n.$$

9. Если A, B, C и D—матрицы, такие, что C и D перестановочны, а D обратима, то (см. упражнение 19 § 38)

$$\det\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

(Указание: умножить справа на $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ X & 1 \end{pmatrix}$.) Что, если D не обратима? Что, если C и D не перестановочны?

10. Всегда ли A и A' имеют один и тот же характеристический полином?

11. a) Если A и B подобны, то $\det A = \det B$.

b) Если A и B подобны, то они имеют одинаковый характеристический полином.

c) Если A и B обладают одним и тем же характеристическим полиномом, то $\det A = \det B$.

d) Справедливы ли утверждения, обратные этим?

12. Найти характеристический полином матрицы (или, лучше, линейного оператора, определяемого этой матрицей)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \alpha_{n-1} & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-3} & \ldots & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

и сделать вывод, что каждый полином есть характеристический полином некоторого линейного оператора.

13. Пусть A и B — линейные операторы на одном и том же конечномерном векторном пространстве.

a) Доказать, что если A — проектор, то AB и BA имеют один и тот же характеристический полином. (Указание: выбрать базис, в котором матрица оператора A принимает наиболее простой возможный вид, и затем оперировать непосредственно с матрицами.)

b) Доказать, что AB и BA всегда имеют один и тот же характеристический полином. (Указание: найти такое обратимое P, чтобы PA было проектором, и применить a) к PA и BP^{-1}.)

§ 54. Собственные значения

Скаляр λ называют *собственным значением*, а ненулевой вектор x — *собственным вектором* линейного оператора A, если $Ax = \lambda x$. Почти все комбинации прилагательных собственный, характеристический, вековой и т. п. с существительными корень, число и значение были использованы в литературе для наименования того, что мы называем собственным значением. Важно ясно понимать смысл определения: λ есть собственное значение оператора A, если существует ненулевой вектор x, для которого $Ax = \lambda x$, а ненулевой вектор x есть собственный вектор оператора A, если существует скаляр λ, для которого $Ax = \lambda x$.

Пусть λ — собственное значение линейного оператора A и $\mathcal{M}$ — семейство всех векторов x, являющихся собственными векторами оператора A, принадлежащими этому собственному значению, т. е. для которых $Ax = \lambda x$. Поскольку 0, по нашему определению, не является собственным вектором, $\mathcal{M}$ не содержит 0; если, однако, расширить $\mathcal{M}$, присоединив к нему начало, то $\mathcal{M}$

станет подпространством. *Кратностью* собственного значения λ назовем размерность этого подпространства $\mathcal{M}$; собственное значение назовем *простым*, если его кратность равна 1. Путем очевидного расширения этой терминологии можно выразить тот факт, что скаляр λ вовсе не является собственным значением оператора A, сказав, что λ есть собственное значение нулевой кратности. Множество всех собственных значений оператора A иногда называют *спектром* этого оператора. Заметим, что спектр оператора A есть не что иное как множество всех скаляров λ, для которых $A-\lambda$ не обратим.

Если размерность рассматриваемого нами пространства равна n, то скаляр 0 является собственным значением кратности n линейного оператора 0 и, аналогично, скаляр 1 — собственным значением кратности n линейного оператора 1. Поскольку $Ax=\lambda x$ тогда и только тогда, когда $(A-\lambda)x=0$, т. е. тогда и только тогда, когда x принадлежит нуль-пространству оператора $A-\lambda$, заключаем, что кратность λ как собственного значения оператора A совпадает с дефектом линейного оператора $A-\lambda$. Отсюда в свою очередь следует (см. теорему 1 § 50), что собственные значения оператора A' вместе с соответствующими им кратностями—точно те же, что и у оператора A.

Заметим, что если B—любой обратимый оператор, то

$$BAB^{-1}-\lambda=B(A-\lambda)B^{-1},$$

так что $(A-\lambda)x=0$ тогда и только тогда, когда $(BAB^{-1}-\lambda)x=0$. Отсюда следует, что все спектральные понятия (например, спектр и кратности собственных значений) инвариантны относительно замены A на BAB^{-1}. Отметим также, что если $Ax=\lambda x$, то

$$A^2x=A(Ax)=A(\lambda x)=\lambda(Ax)=\lambda(\lambda x)=\lambda^2 x.$$

Более общим образом, каков бы ни был полином p, всегда $p(A)x=p(\lambda)x$, так что каждый собственный вектор оператора A, принадлежащий собственному значению λ, служит также собственным вектором для $p(A)$, принадлежащим собственному значению $p(\lambda)$. Следовательно, если оператор A удовлетворяет некоторому уравнению вида $p(A) = 0$, то $p(\lambda) = 0$ для каждого собственного значения λ этого оператора.

Поскольку оператор $A - \lambda$ имеет нетривиальное нуль-пространство тогда и только тогда, когда он вырожден, т. е. когда $\det(A - \lambda) = 0$, заключаем, что число λ является собственным значением оператора A тогда и только тогда, когда оно является характеристическим корнем этого оператора. На этом факте и основывается важность определителей для линейной алгебры. Понятие собственного значения является полезным геометрическим понятием. Однако геометрия вопроса не дает возможности доказать существование хотя бы одного собственного значения. С помощью определителей мы сводим задачу к алгебраической; оказывается, что собственные значения — это не что иное как корни некоторого алгебраического уравнения. Трудность доказательства того, что собственные значения всегда существуют, теперь неудивительна: алгебраические уравнения не всегда имеют корни, и в соответствии с этим существуют простые примеры линейных операторов, не имеющих собственных значений.

§ 55. Кратность

Рассмотрения предыдущего параграфа указывают одну из причин, побуждающих нас к изучению комплексных векторных пространств. По так называемой основной теореме алгебры алгебраическое уравнение над полем комплексных чисел всегда имеет по крайней мере один корень; значит, линейный оператор на комплексном векторном пространстве всегда имеет по крайней мере одно собственное значение. Кроме поля комплексных чисел, существуют и другие поля, над которыми каждое алгебраическое уравнение разрешимо; они называются *алгебраически замкнутыми* полями. Наиболее общий результат интересующего нас рода заключается в том, что каждый линейный оператор на конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем имеет по крайней мере одно собственное значение. Во всей остающейся части этой главы (т. е. на протяжении ближайших четырех параграфов) мы будем предполагать, что наше поле скаляров алгебраически замкнуто. Польза, которую можно извлечь из этого предположения, была только что отмечена, а именно, при нем можно утверждать, что собственные значения всегда существуют.

Алгебраическая точка зрения на собственные значения подсказывает другое возможное определение кратности. Пусть A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве и λ — собственное значение этого оператора. Можно было бы счесть желательным рассмотрение кратности λ как корня характеристического уравнения оператора A. Это — полезное понятие; мы будем называть его *алгебраической* кратностью λ, в отличие от прежнего *геометрического* понятия кратности.

Как показывает следующий пример, эти два понятия кратности не совпадают. Пусть D — оператор дифференцирования на пространстве $\mathcal{P}_n$ всех полиномов степени $\leqslant n-1$; вектор x из $\mathcal{P}_n$ будет собственным вектором оператора D тогда и только тогда, когда $\frac{dx}{dt} = \lambda x(t)$ для некоторого комплексного числа λ. Позаимствуем из элементарной теории дифференциальных уравнений тот факт, что каждое решение этого уравнения отличается от $e^{\lambda t}$ лишь постоянным множителем. Поскольку при $\lambda \neq 0$ лишь нулевое кратное функции $e^{\lambda t}$ является полиномом (каковым оно должно быть, чтобы принадлежать $\mathcal{P}_n$), мы должны иметь $\lambda = 0$ и $x(t) = 1$. Другими словами, этот специальный оператор имеет только одно собственное значение (которое должно поэтому обладать алгебраической кратностью n), а именно $\lambda = 0$; но — и это как раз озадачивает — размерность линейного многообразия решений равна точно единице. Значит, при $n > 1$ два определения кратности дают различные значения. (В этом рассуждении мы использовали тот простой факт, что алгебраическое уравнение n-й степени над алгебраически замкнутым полем имеет ровно n корней, если засчитывать каждый соответственно его кратности. Отсюда следует, что линейный оператор на n-мерном векторном пространстве над таким полем имеет ровно n собственных значений с учетом их алгебраических кратностей.)

Совсем нетрудно видеть, что геометрическая кратность собственного значения λ никогда не превосходит его алгебраической кратности. Действительно, если A —

любой линейный оператор, λ_0 — любое его собственное значение и $\mathcal{M}$ — подпространство решений уравнения $Ax = \lambda_0 x$, то ясно, что $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A. Пусть A_0 — линейный оператор A, рассматриваемый только на $\mathcal{M}$; тогда ясно, что $\det(A_0 - \lambda)$ входит множителем в $\det(A - \lambda)$. Если размерность $\mathcal{M}$ ($=$ геометрическая кратность λ_0) равна m, то $\det(A_0 - \lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$, и утверждаемый результат следует из определения алгебраической кратности. Отсюда вытекает также, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — *различные* собственные значения оператора A с соответствующими геометрическими кратностями $m_1, \ldots, m_p$ и если $\sum_{i=1}^{p} m_i = n$, то m_i равно алгебраической кратности значения λ_i для каждого $i = 1, \ldots, p$.

С помощью собственных значений и их алгебраических кратностей можно охарактеризовать две интересные функции от линейных операторов; одна из них — определитель, а другая — нечто новое. (Предупреждение: эти характеризации справедливы только при принятом нами здесь предположении, что поле скаляров алгебраически замкнуто.)

Пусть A — произвольный линейный оператор на n-мерном векторном пространстве, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — его различные собственные значения. Обозначим через m_j алгебраическую кратность λ_j, $j = 1, \ldots, p$, так что $m_1 + \ldots + m_p = n$. Для любого алгебраического уравнения

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda + \ldots + \alpha_n \lambda^n = 0$$

произведение корней равно $(-1)^n \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$, а их сумма равна $-\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$. Так как старшим коэффициентом ($= \alpha_n$) характеристического полинома $\det(A - \lambda)$ служит $(-1)^n$, а свободным членом ($= \alpha_0$) служит $\det(A - 0) = \det A$, то имеем

$$\det A = \prod_{j=1}^{p} \lambda_j^{m_j}.$$

Эта характеризация определителя оператора мотивирует определение

$$\operatorname{tr} A = \sum_{j=1}^{p} m_j \lambda_j;$$

так определенная функция называется *следом* оператора A. В дальнейшем мы не будем иметь случая использовать понятие следа; вывод его основных свойств предоставим интересующемуся читателю.

Упражнения

1. Найти все (комплексные) собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Пусть π — перестановка целых чисел $\{1, \ldots, n\}$; для каждого вектора $x=(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ из $\mathscr{C}^n$ положим

$$Ax=(\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)}).$$

Найти спектр оператора A.

3. Доказать, что каждое собственное значение проектора равно 0 или 1 и что каждое собственное значение инволюции равно $+1$ или -1. (Этот результат не зависит от конечномерности векторного пространства.)

4. Пусть A — линейный оператор и p — полином. Как мы знаем, если λ есть собственное значение оператора A, то $p(\lambda)$ есть собственное значение оператора $p(A)$. Что можно сказать об обратном утверждении?

5. Доказать, что оператор дифференцирования D на пространстве $\mathscr{P}_n$ $(n>1)$ неприводим (т. е. не приводится никакой нетривиальной парой взаимно дополнительных подпространств $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$).

6. Если A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве и λ — собственное значение этого оператора, то алгебраическая кратность λ равна его алгебраической кратности как собственного значения оператора BAB^{-1}. (Здесь B — произвольный обратимый линейный оператор.)

7. Всегда ли AB и BA имеют одинаковый спектр?

8. Пусть A и B — линейные операторы на конечномерном векторном пространстве.

a) $\operatorname{tr}(A \oplus B)=\operatorname{tr} A+\operatorname{tr} B$.

b) $\operatorname{tr}(A \otimes B)=(\operatorname{tr} A)(\operatorname{tr} B)$.

c) Спектр $A \oplus B$ есть объединение спектров A и B.

d) Спектр $A \otimes B$ состоит из всех скаляров вида $\alpha\beta$, где α и β принадлежат соответственно спектрам A и B.

§ 56. Треугольный вид

Теперь совсем нетрудно доказать наиболее легкую из так называемых теорем о приведении к каноническому виду. Наше предположение относительно поля скаляров (а именно, что оно алгебраически замкнуто) все еще в силе.

Т е о р е м а 1. *Для любого линейного оператора A на n-мерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ существуют $n+1$ подпространств $\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_{n-1}, \mathscr{M}_n$ со следующими свойствами:*

(I) *каждое $\mathscr{M}_j$ $(j=0, 1, \ldots, n-1, n)$ инвариантно относительно A,*

(II) *размерность $\mathscr{M}_j$ равна j,*

(III) $(\mathcal{O}=)\ \mathscr{M}_0 \subset \mathscr{M}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{M}_{n-1} \subset \mathscr{M}_n\ (=\mathscr{V})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n=0$ и $n=1$ результат тривиален; применим индукцию, приняв, что утверждение верно для $n-1$. Рассмотрим сопряженный оператор A' на $\mathscr{V}'$; поскольку у него есть по крайней мере один собственный вектор, скажем, x', существует одномерное подпространство $\mathscr{M}$, инвариантное относительно A', а именно множество всех кратных этого вектора x'. Обозначим через $\mathscr{M}_{n-1}$ аннулятор (в $\mathscr{V}''=\mathscr{V}$) подпространства $\mathscr{M}$, $\mathscr{M}_{n-1}=\mathscr{M}^\circ$; тогда $\mathscr{M}_{n-1}$ есть $(n-1)$-мерное подпространство пространства $\mathscr{V}$, инвариантное относительно A. Следовательно, можно рассматривать A и как линейный оператор только на $\mathscr{M}_{n-1}$ и найти $\mathscr{M}_0, \mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_{n-2}, \mathscr{M}_{n-1}$, удовлетворяющие условиям (I), (II) и (III). Положив еще $\mathscr{M}_n=\mathscr{V}$, получим все, что нам было нужно.

Эта теорема интересна главным образом своей матричной интерпретацией. Так как $\mathscr{M}_1$ одномерно, в нем можно найти вектор $x_1 \neq 0$. Так как $\mathscr{M}_1 \subset \mathscr{M}_2$, то x_1 принадлежит также $\mathscr{M}_2$, и поскольку $\mathscr{M}_2$ двумерно, можно найти в нем вектор x_2, вместе с x_1 порождающий $\mathscr{M}_2$. Продолжим этот процесс по индукции, выбирая векторы x_j для $j=1, \ldots, n$ так, чтобы $x_1, \ldots, x_j$ принадлежали подпространству $\mathscr{M}_j$ и порождали его. В итоге мы получим базис $\mathscr{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ пространства $\mathscr{V}$; вычислим матрицу оператора A в этой координатной системе. Так как x_j принадлежит $\mathscr{M}_j$, а $\mathscr{M}_j$ инвариантно относительно A, то Ax_j должно быть линейной комбинацией векторов

$x_1, \ldots, x_j$. Значит, в выражении

$$Ax_j = \sum_i \alpha_{ij} x_i$$

коэффициент при x_i должен быть равен нулю для всех $i > j$; другими словами, $i > j$ влечет $\alpha_{ij} = 0$. Следовательно, матрица оператора A имеет *треугольный вид*

$$[A] = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \ldots & \alpha_{1n} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{n-1,\,n} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}.$$

Из этого представления ясно, что $\det(A - \alpha_{ii}) = 0$ для $i = 1, \ldots, n$, так что α_{ii} являются собственными значениями оператора A, и каждое из них встречается на главной диагонали матрицы $[A]$ столько раз, какова его кратность. Мы подытожим сказанное следующим образом.

Теорема 2. *Если A — линейный оператор на n-мерном векторном пространстве $\mathcal{V}$, то в $\mathcal{V}$ существует базис $\mathcal{X}$ такой, что матрица $[A; \mathcal{X}]$ треугольна; или, что равносильно этому, для любой матрицы $[A]$ существует невырожденная матрица $[B]$ такая, что $[B]^{-1}[A][B]$ треугольна.*

Треугольный вид полезен при доказательстве многих результатов относительно линейных операторов. Например, из него следует, что для любого полинома p собственные значения оператора $p(A)$, с учетом их алгебраической кратности, совпадают с числами $p(\lambda)$, где λ пробегает собственные значения оператора A.

Значительная часть теории линейных операторов посвящена усовершенствованию только что полученного результата о приведении к треугольному виду (триангуляризации). Наилучший возможный вид, который может иметь матрица,— не треугольный, а *диагональный* (т. е. $\alpha_{ij} = 0$, если $i \neq j$); линейный оператор, имеющий в надлежащей координатной системе диагональную матрицу, мы будем называть *диагонализируемым*.

Упражнения

1. Рассматривая следующие матрицы как линейные операторы на $\mathscr{C}^2$, в каждом случае найти в $\mathscr{C}^2$ базис, в котором матрица этого оператора треугольна.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Два перестановочных линейных оператора на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ над алгебраически замкнутым полем могут быть одновременно триангуляризированы. Другими словами, если $AB = BA$, то существует такой базис $\mathscr{X}$, что и $[A; \mathscr{X}]$, и $[B; \mathscr{X}]$ — треугольные. (Указание: чтобы следовать ходу доказательства, проведенного в § 56, желательно найти подпространство $\mathscr{M}$ пространства $\mathscr{V}$, инвариантное относительно и A и B. Имея это в виду, рассмотреть произвольное собственное значение λ оператора A и испробовать в роли $\mathscr{M}$ множество всех решений уравнения $Ax = \lambda x$.)

3. Сформулировать и доказать аналоги результатов § 56 для треугольных матриц, в которых нули стоят над главной диагональю (а не под ней).

4. Пусть A — линейный оператор на n-мерном векторном пространстве. Для каждой знакопеременной n-линейной формы w обозначим через $\bar{A}w$ функцию, определенную формулой

$$(\bar{A}w)(x_1, \ldots, x_n) = w(Ax_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + w(x_1, Ax_2, \ldots, x_n) + \ldots + w(x_1, x_2, \ldots, Ax_n).$$

Так как $\bar{A}w$ — знакопеременная n-линейная форма, причем в действительности $\bar{A}$ есть линейный оператор на (одномерном) пространстве таких форм, то $\bar{A}w = \tau(A) \cdot w$, где $\tau(A)$ — скаляр.

a) $\tau(0) = 0$.

b) $\tau(1) = n$.

c) $\tau(A + B) = \tau(A) + \tau(B)$.

d) $\tau(\alpha A) = \alpha\tau(A)$.

e) Если поле скаляров имеет характеристику 0 и A — проектор, то $\tau(A) = \varrho(A)$.

f) Если (α_{ij}) — матрица оператора A в некоторой координатной системе, то $\tau(A) = \sum_i \alpha_{ii}$.

g) $\tau(A')=\tau(A)$.

h) $\tau(AB)=\tau(BA)$.

i) Для каких перестановок π целых чисел $1, \ldots, k$ справедливо, что $\tau(A_1 \ldots A_k)=\tau(A_{\pi(1)} \ldots A_{\pi(k)})$ для всех упорядоченных наборов $(A_1, \ldots, A_k)$ из k линейных операторов?

j) Если поле скаляров алгебраически замкнуто, то $\tau(A)=\operatorname{tr} A$. (По этой причине под следом обычно понимают τ; наиболее распространенным способом является использование f) в качестве определения.)

5. a) Предположим, что поле скаляров имеет характеристику 0. Доказать, что если $E_1, \ldots, E_k$ и $E_1+\ldots+E_k$ — проекторы, то $E_iE_j=0$ всякий раз как $i \neq j$. (Указание: из того, что $\operatorname{tr}(E_1+\ldots+E_k)=\operatorname{tr}(E_1)+\ldots+\operatorname{tr}(E_k)$, заключить, что область значений проектора $E_1+\ldots+E_k$ равна прямой сумме областей значений проекторов $E_1, \ldots, E_k$.)

b) Если $A_1, \ldots, A_k$ — линейные операторы на n-мерном векторном пространстве, $A_1+\ldots+A_k=1$ и $\rho(A_1)+\ldots+\rho(A_k)\leqslant n$, то каждый оператор A_i является проектором и $A_iA_j=0$ всякий раз как $i\neq j$. (Провести индукцию, начиная с $k=2$; использовать рассмотрение прямой суммы, как в а).)

6. a) Если A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве над полем характеристики 0 и $\operatorname{tr} A=0$, то существует такой базис $\mathscr{X}$, что в матрице $[A;\ \mathscr{X}]=(\alpha_{ij})$ все $\alpha_{ii}=0$. (Указание: используя то, что A не есть скаляр, доказать сначала существование такого вектора x, что x и Ax линейно независимы. Отсюда будет следовать, что α_{11} можно сделать равным нулю; далее по индукции.)

b) Показать, что если характеристика поля скаляров не равна нулю, то заключение а) неверно. (Указание: если характеристика равна 2, вычислить $BC-CB$, где $B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$ и $C=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$.)

§ 57. Нильпотентность

В качестве вспомогательного средства для получения теоремы представления более содержательной, чем теорема о приведении к треугольному виду, мы введем и изучим, хотя и весьма специальный, но полезный класс операторов. Линейный оператор A называют *нильпотентным*, если существует строго положительное целое q, для которого $A^q=0$; наименьшее такое целое q называется *индексом* нильпотентности.

Т е о р е м а 1. *Если A — нильпотентный линейный оператор индекса q на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ и x_0 — вектор, для которого $A^{q-1}x_0\neq 0$, то векторы $x_0, Ax_0, \ldots, A^{q-1}x_0$ линейно независимы. Подпро-*

странство $\mathcal{H}$, натянутое на эти векторы, обладает дополнительным подпространством $\mathcal{K}$, таким, что пара $(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ приводит A.

Доказательство. Для доказательства утверждаемой линейной независимости предположим, что $\sum_{i=0}^{q-1} \alpha_i A^i x_0 = 0$, и пусть j — наименьший индекс, для которого $\alpha_j \neq 0$. (Мы не исключаем возможности $j = 0$.) Деля на $-\alpha_j$ и изменяя очевидным образом обозначения, получаем соотношение вида

$$A^j x_0 = \sum_{i=j+1}^{q-1} \alpha_i A^i x_0 = A^{j+1} \Big(\sum_{i=j+1}^{q-1} \alpha_i A^{i-j-1} x_0 \Big) = A^{j+1} y.$$

Из определения q следует, что

$$A^{q-1} x_0 = A^{q-j-1} A^j x_0 = A^{q-j-1} A^{j+1} y = A^q y = 0;$$

поскольку это противоречит выбору x_0, мы должны иметь $\alpha_j = 0$ для каждого j.

Очевидно, $\mathcal{H}$ инвариантно относительно A; построение $\mathcal{K}$ мы проведем индукцией по индексу нильпотентности q. При $q = 1$ результат тривиален; предположим теперь, что утверждение теоремы верно для $q-1$. Область значений $\mathcal{R}$ оператора A есть подпространство, инвариантное относительно A; сужение A на $\mathcal{R}$ является нильпотентным оператором индекса $q-1$. Положим $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \cap \mathcal{R}$ и $y_0 = Ax_0$; тогда $\mathcal{H}_0$ порождается линейно независимыми векторами $y_0, Ay_0, \ldots, A^{q-2} y_0$. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции и заключить, что $\mathcal{R}$ есть прямая сумма $\mathcal{H}_0$ и некоторого другого инвариантного подпространства $\mathcal{K}_0$.

Обозначим через $\mathcal{K}_1$ множество всех векторов x, для которых Ax принадлежит $\mathcal{K}_0$; очевидно, что $\mathcal{K}_1$ — подпространство. Возникает большой соблазн положить $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1$ и попытаться доказать, что $\mathcal{K}$ обладает требуемыми свойствами. К сожалению, это не всегда верно: $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}_1$ не обязательно дизъюнктны. (Можно показать, что пересечение $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}_1$ содержится в нуль-пространстве оператора A, но мы не будем пользоваться этим фактом.) То, что, несмотря на это, $\mathcal{K}_1$ окажется полезным, основывается на том обстоятельстве, что $\mathcal{H} + \mathcal{K}_1 = \mathcal{V}$. Для доказательства этого заметим, что Ax принадлежит $\mathfrak{R}$ для каждого x и, следовательно, $Ax=y+z$ с y из $\mathcal{H}_0$ и z из $\mathcal{K}_0$. Так как всякий элемент подпространства $\mathcal{H}_0$ является линейной комбинацией векторов $Ax_0, \ldots, A^{q-1}x_0$, то имеем

$$y=\sum_{i=1}^{q-1}\alpha_i A^i x_0 = A\left(\sum_{i=0}^{q-2}\alpha_{i+1}A^i x_0\right)=Ay_1,$$

где y_1—элемент из $\mathcal{H}$. Следовательно, $Ax=Ay_1+z$ или $A(x-y_1)=z$, так что $A(x-y_1)$ принадлежит $\mathcal{K}_0$. Это означает, что $x-y_1$ принадлежит $\mathcal{K}_1$, так что x есть сумма элемента (а именно y_1) из $\mathcal{H}$ и элемента (а именно $x-y_1$) из $\mathcal{K}_1$.

Что же касается дизъюнктности, то можно во всяком случае утверждать, что $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_0=\mathcal{O}$. Для доказательства предположим, что x принадлежит $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_0$, и заметим сначала, что Ax принадлежит $\mathcal{H}_0$ (так как x принадлежит $\mathcal{H}$). Поскольку $\mathcal{K}_0$ также инвариантно относительно A, вектор Ax принадлежит $\mathcal{K}_0$ вместе с x, и потому $Ax=0$. Но отсюда вытекает, что x принадлежит $\mathcal{H}_0$. (Поскольку x принадлежит $\mathcal{H}$, имеем $x=\sum_{i=0}^{q-1}\alpha_i A^i x_0$, а потому $0=Ax=$ $=\sum_{i=1}^{q-1}\alpha_{i-1}A^i x_0$, но тогда из линейной независимости векторов $A^i x_0$ следует, что $\alpha_0=\ldots=\alpha_{q-2}=0$, так что $x=\alpha_{q-1}A^{q-1}x_0$.) Мы доказали, что если x принадлежит $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_0$, то он принадлежит также $\mathcal{H}_0\cap\mathcal{K}_0$, а значит $x=0$.

Теперь положение таково: $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}_1$ вместе порождают $\mathcal{V}$, а $\mathcal{K}_1$ содержит два дизъюнктных подпространства $\mathcal{K}_0$ и $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_1$. Пусть $\mathcal{K}_0'$—произвольное дополнение к $\mathcal{K}_0\oplus(\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_1)$ в $\mathcal{K}_1$, т. е.

$$\mathcal{K}_0'\oplus\mathcal{K}_0\oplus(\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_1)=\mathcal{K}_1.$$

Положим $\mathcal{K}=\mathcal{K}_0'\oplus\mathcal{K}_0$; мы утверждаем, что это $\mathcal{K}$ обладает требуемыми свойствами. Во-первых, $\mathcal{K}$ содержится в $\mathcal{K}_1$ и $\mathcal{K}$ дизъюнктно с $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}_1$; значит, $\mathcal{H}\cap\mathcal{K}=\mathcal{O}$. Во-вторых, $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}$ содержит и $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}_1$, так что $\mathcal{H}\oplus\mathcal{K}=\mathcal{V}$. Наконец, $\mathcal{K}$ инвариантно относительно A, поскольку из того, что $\mathcal{K}\subset\mathcal{K}_1$, следует, что $A\mathcal{K}\subset$ $\subset\mathcal{K}_0\subset\mathcal{K}$. Доказательство теоремы закончено.

Позже нам понадобится следующее замечание. Если $\tilde{x}_0$ — любой другой вектор, для которого $A^{q-1}\tilde{x}_0 \neq 0$, далее $\tilde{\mathscr{H}}$ — подпространство, натянутое на векторы $\tilde{x}_0$, $A\tilde{x}_0, \ldots$ $\ldots, A^{q-1}\tilde{x}_0$, и, наконец, $\tilde{\mathscr{K}}$ — любое подпространство, вместе с $\tilde{\mathscr{H}}$ приводящее A, то поведение A на $\tilde{\mathscr{H}}$ и $\tilde{\mathscr{K}}$ точно такое, как, соответственно, на $\mathscr{H}$ и $\mathscr{K}$. (Другими словами, несмотря на кажущуюся неединственность в формулировке теоремы 1, на самом деле всё однозначно определено с точностью до изоморфизма.) Справедливость этого замечания следует из того, что индекс нильпотентности оператора A на $\mathscr{K}$ (скажем, r) таков же, как индекс нильпотентности A на $\tilde{\mathscr{K}}$ (скажем, $\tilde{r}$). Этот факт в свою очередь доказывается следующим образом. Так как $A^r\mathscr{V} = A^r\mathscr{H} \oplus A^r\mathscr{K}$ и также $A^r\mathscr{V} = A^r\tilde{\mathscr{H}} \oplus A^r\tilde{\mathscr{K}}$ (справедливость этих результатов следует из инвариантности всех входящих в них подпространств), то размерности правых частей этих соотношений равны и, значит, $(q-r)+0=(q-r)+(\tilde{r}-r)$.

С помощью теоремы 1 можно получить полную геометрическую характеристику нильпотентных операторов.

Теорема 2. *Если A — нильпотентный линейный оператор индекса q на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$, то существуют положительные целые числа $r, q_1, \ldots, q_r$ и векторы $x_1, \ldots, x_r$ такие, что* (I) $q_1 \geqslant \ldots \geqslant q_r$, (II) *векторы*

$$\begin{array}{llll} x_1, & Ax_1, & \ldots, & A^{q_1-1}x_1, \\ x_2, & Ax_2, & \ldots, & A^{q_2-1}x_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_r, & Ax_r, & \ldots, & A^{q_r-1}x_r \end{array}$$

образуют базис пространства $\mathscr{V}$ и (III) $A^{q_1}x_1=A^{q_2}x_2=\ldots=A^{q_r}x_r=0$. *Целые числа $r, q_1, \ldots, q_r$ образуют полную систему инвариантов оператора A относительно изоморфизмов пространства $\mathscr{V}$. Другими словами, если B — какой-нибудь нильпотентный линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{W}$, то для существования изоморфизма T между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{W}$, такого, что $TAT^{-1}=B$, необходимо и достаточно, чтобы целые числа*

r, $q_1, \ldots, q_r$, соответствующие оператору B, были теми же, что и целые числа, соответствующие оператору A.

Доказательство. Положим $q_1 = q$, и примем за x_1 любой вектор, для которого $A^{q_1-1}x_1 \neq 0$. Подпространство, натянутое на $x_1, Ax_1, \ldots, A^{q_1-1}x_1$, инвариантно относительно A, и, по теореме 1, обладает инвариантным дополнением, размерность которого, естественно, строго меньше размерности пространства $\mathscr{V}$. На этом дополнительном подпространстве A нильпотентен, с индексом, равным, скажем, q_2; применим к этому подпространству тот же способ приведения (начиная с вектора x_2, для которого $A^{q_2-1}x_2 \neq 0$). Продолжая так по индукции, мы, наконец, исчерпаем пространство. Это доказывает часть теоремы, содержащую утверждение существования; остающаяся часть следует из единственности (с точностью до изоморфизма) разложения, установленного теоремой 1.

В базисе $\{A^i x_j\}$, описанном в теореме 2, матрица оператора A принимает особенно простой вид. Все элементы, не лежащие непосредственно под главной диагональю, равны нулю (т. е. $\alpha_{ij} \neq 0$ влечет $j = i - 1$), а диагональ, лежащая непосредственно под главной, начинается (если смотреть сверху) с цепочки единиц, заканчивающейся единственным нулем, затем идет новая цепочка единиц, заканчивающаяся нулем, и так до конца, причем длины этих цепочек монотонно убывают (или, во всяком случае, не возрастают).

Заметим, что в этом параграфе наше постоянное предположение об алгебраической замкнутости поля скаляров не использовалось.

Упражнения

1. Существует ли на двумерном пространстве нильпотентный оператор индекса 3?

2. a) Доказать, что нильпотентный линейный оператор на конечномерном векторном пространстве имеет нулевой след.

b) Доказать, что если A и B — линейные операторы (на одном и том же конечномерном векторном пространстве) и $C = AB - BA$, то оператор $1 - C$ не нильпотентен.

3. Доказать, что если A — нильпотентный линейный оператор индекса q на конечномерном векторном пространстве, то

$$\nu(A^{k+1}) + \nu(A^{k-1}) \leqslant 2\nu(A^k)$$

для $k = 1, \ldots, q - 1$.

4. Пусть A — линейный оператор (на конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем). Доказать существование линейных операторов B и C таких, что $A=B+C$, где B диагонализируем, C нильпотентен и $BC=CB$; операторы B и C однозначно определяются этими условиями.

§ 58. Жорданова форма

Здравая геометрическая интуиция побуждает большинство из нас предполагать, что для линейного оператора быть обратимым и быть, в некотором смысле, нулем — совершенно противоположные понятия. Наше разочарование при обнаружении того, что область значений и нуль-пространство не обязательно дизъюнктны, связано с этим предположением. Положение может быть выправлено ослаблением смысла, в котором понимается выражение «быть нулем»; для большинства практических случаев линейный оператор, некоторая степень которого равна нулю (т. е. нильпотентный оператор) является настолько нулеобразным, насколько можно этого от него ожидать. И хотя нельзя утверждать, что линейный оператор либо обратим, либо есть «нуль» даже в этом расширенном смысле, мы можем сказать, что любой оператор составлен из операторов этих двух крайних типов.

Теорема 1. *Каждый линейный оператор A на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ является прямой суммой нильпотентного и обратимого операторов.*

Доказательство. Рассмотрим нуль-пространство k-й степени A; это — некоторое подпространство $\mathscr{N}_k=\mathscr{N}(A^k)$. Очевидно, $\mathscr{N}_1\subset\mathscr{N}_2\subset\ldots$ Мы утверждаем сначала, что если где-нибудь $\mathscr{N}_k=\mathscr{N}_{k+1}$, то $\mathscr{N}_k=\mathscr{N}_{k+j}$ для всех положительных целых j. Действительно, если $A^{k+j}x=0$, то $A^{k+1}A^{j-1}x=0$, откуда (поскольку $\mathscr{N}_k=\mathscr{N}_{k+1}$) следует, что $A^kA^{j-1}x=0$, т. е. $A^{k+j-1}x=0$. Другими словами, $\mathscr{N}_{k+j}$ содержится в (и потому равняется) $\mathscr{N}_{k+j-1}$; справедливость нашего утверждения устанавливается теперь индукцией по j.

Поскольку $\mathscr{V}$ конечномерно, подпространства $\mathscr{N}_k$ не могут неограниченно возрастать; пусть q — наименьшее положительное целое число, для которого $\mathscr{N}_q=\mathscr{N}_{q+1}$. Ясно, что $\mathscr{N}_q$ инвариантно относительно A (на самом деле каждое $\mathscr{N}_k$ таково). Обозначим через $\mathscr{R}_k=\mathscr{R}(A^k)$ область значений оператора A^k (так что снова ясно, что $\mathscr{R}_q$ инвариантно относительно A); мы докажем, что $\mathscr{V}=\mathscr{N}_q\oplus\mathscr{R}_q$ и что A на $\mathscr{N}_q$ нильпотентен, а на $\mathscr{R}_q$ обратим.

Если x — общий вектор подпространств $\mathscr{N}_q$ и $\mathscr{R}_q$, то $A^q x=0$ и $x=A^q y$ для некоторого y. Отсюда $A^{2q}y=0$ и значит, по определению q, $x=A^q y=0$. Тем самым мы показали, что область значений и нуль-пространство оператора A^q дизъюнктны; из размерностных соображений (см. теорему 1 § 50) следует, что они порождают $\mathscr{V}$, так что $\mathscr{V}$ есть их прямая сумма. Из определений q и $\mathscr{N}_q$ следует, что A на $\mathscr{N}_q$ нильпотентен индекса q. Наконец, если x принадлежит $\mathscr{R}_q$ (так что $x=A^q y$ для некоторого y) и $Ax=0$, то $A^{q+1}y=0$, откуда $x=A^q y=0$; это показывает, что A на $\mathscr{R}_q$ обратим.

Теорема полностью доказана.

Разложение A на нильпотентную и обратимую части однозначно. Действительно, предположим, что $\mathscr{V}=\mathscr{H}\oplus\mathscr{K}$ и A на $\mathscr{H}$ нильпотентен, а на $\mathscr{K}$ обратим. Из того, что $\mathscr{H}\subset\mathscr{N}(A^k)$ для некоторого k, следует, что $\mathscr{H}\subset\mathscr{N}_q$, а из того, что $\mathscr{K}\subset\mathscr{R}(A^k)$ для всех k, следует, что $\mathscr{K}\subset\mathscr{R}_q$; но вместе эти факты могут иметь место, лишь если $\mathscr{H}=\mathscr{N}_q$ и $\mathscr{K}$ $\mathscr{R}_q$.

А теперь мы можем воспользоваться нашими результатами о нильпотентных операторах для изучения структуры произвольных линейных операторов. Метод получения нильпотентного оператора из произвольного может показаться похожим на фокус, но это полезный фокус, который часто применяется. Важно, чтобы было обеспечено существование собственных значений; по этой причине мы продолжаем предполагать, что поле скаляров алгебраически замкнуто (см. § 55).

Т е о р е м а 2. *Если A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $\mathscr{V}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — его различные собственные значения с алгебраическими кратностями соответственно $m_1, \ldots, m_p$, то $\mathscr{V}$ есть прямая сумма p подпространств $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_p$ размерностей соответственно $m_1, \ldots, m_p$, где каждое $\mathscr{M}_j$ инвариантно относительно A и $A-\lambda_j$ нильпотентен на $\mathscr{M}_j$.*

Доказательство. Возьмем любое фиксированное $j=1, \ldots, p$ и рассмотрим линейный оператор $A_j=A-\lambda_j$. К A_j можно применить разложение теоремы 1 и получить подпространства $\mathcal{M}_j$ и $\mathcal{N}_j$ такие, что A_j нильпотентен на $\mathcal{M}_j$ и обратим на $\mathcal{N}_j$. Поскольку $\mathcal{M}_j$ инвариантно относительно A_j, оно инвариантно также относительно $A_j+\lambda_j=A$. Следовательно, определитель оператора $A-\lambda_j$ для каждого λ_j есть произведение соответствующих определителей для тех двух линейных операторов, в которые превращается A, если рассматривать его отдельно на $\mathcal{M}_j$ и $\mathcal{N}_j$. Поскольку единственным собственным значением A на $\mathcal{M}_j$ является λ_j и оно не является собственным значением A на $\mathcal{N}_j$ (т. е. $A-\lambda_j$ обратим на $\mathcal{N}_j$), заключаем, что размерность $\mathcal{M}_j$ равна точно m_j и каждое из подпространств $\mathcal{M}_j$ дизъюнктно с линейной оболочкой всех других. Из размерностных соображений следует тогда, что $\mathcal{M}_1 \oplus \ldots \oplus \mathcal{M}_p=\mathcal{V}$, что и завершает доказательство теоремы.

Перейдем к описанию основных результатов этого и предыдущего параграфов на языке матриц. Пусть A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве $\mathcal{V}$; при надлежащем выборе базиса в $\mathcal{V}$ матрица оператора A принимает следующий вид. Все элементы, не стоящие на главной диагонали или непосредственно под ней, равны нулю. На главной диагонали находятся различные собственные значения оператора A, каждое столько раз, какова его алгебраическая кратность. Ниже каждого отдельного собственного значения стоят только единицы и нули и именно следующим образом: это цепочки из единиц, заканчивающиеся единственным нулем, причем длины цепочек убывают, если читать сверху вниз. Эта матрица есть *жорданова форма* или *классический канонический вид* оператора A; при этом $B=TAT^{-1}$ тогда и только тогда, когда A и B имеют одинаковую жорданову форму, с точностью до порядка следования собственных значений. (Так, в частности, линейный оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда его классический канонический вид уже диагонален, т. е. когда каждая цепочка из единиц имеет нулевую длину.)

Введем некоторые обозначения. Пусть A имеет p различных собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, как прежде, с алгебраическими кратностями $m_1, \ldots, m_p$; пусть число цепочек из единиц под λ_j есть r_j, а длины этих цепочек будут $q_{j1}-1,\ q_{j2}-1, \ldots, q_{jr_j}-1$. Полином e_{ji}, определяемый равенством $e_{ji}(\lambda) = (\lambda - \lambda_j)^{q_{ji}}$, называется *элементарным делителем* кратности q_{ji} оператора A принадлежащим собственному значению λ_j. Элементарный делитель называется *простым*, если его кратность равна 1 (так что соответствующая цепочка имеет нулевую длину); мы видим, что линейный оператор диагонализируем тогда и только тогда, когда все его элементарные делители простые.

Для иллюстрации силы теоремы 2 приведем одно ее применение. Тот факт, что оператор $A-\lambda_j$ на $\mathscr{M}_j$ нильпотентен индекса q_{j1}, можно выразить, сказав, что A на $\mathscr{M}_j$ аннулируется полиномом e_{j1}. Отсюда следует, что A на $\mathscr{V}$ аннулируется произведением этих полиномов (т. е. произведением элементарных делителей высших кратностей); это произведение называют *минимальным полиномом* оператора A. Совсем легко видеть (поскольку индекс нильпотентности $A-\lambda_j$ на $\mathscr{M}_j$ равен точно q_{j1}), что этот полином однозначно определен (с точностью до числового множителя) как полином наименьшей степени, аннулирующий A. Поскольку характеристический полином оператора A есть произведение всех элементарных делителей и, значит, кратен минимальному полиному, мы получили *уравнение Гамильтона — Кели*: каждый линейный оператор аннулируется своим характеристическим полиномом.

Упражнения

1. Найти жорданову форму матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Каково максимальное число попарно не подобных линейных операторов на трехмерном векторном пространстве, каждый из которых имеет характеристический полином $(\lambda-1)^3$?

3. Каждый ли обратимый линейный оператор обладает квадратным корнем? (Под утверждением, что A есть квадратный корень из B, конечно, понимается, что $A^2=B$.)

4. a) Доказать, что если ω есть кубичный корень из 1 $(\omega \neq 1)$, то матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 \\ 0 & 0 & \omega^2 \end{pmatrix}$$

подобны.

b) Найти и доказать обобщение a) на матрицы высших порядков.

5. a) Доказать, что матрицы $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ подобны.

b) Найти и доказать обобщение a) на матрицы высших порядков.

6. a) Показать, что матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

подобны (скажем, над полем комплексных чисел).

b) Найти и доказать обобщение a) на матрицы высших порядков.

7. Если две вещественные матрицы подобны над $\mathscr{C}$, то они подобны над $\mathscr{R}$.

8. Доказать, что каждая матрица подобна своей транспонированной.

9. Если A и B — квадратные матрицы n-го порядка такие, что квадратные матрицы $2n$-го порядка $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ подобны, то A и B подобны.

10. Какие из нижеследующих матриц диагонализируемы (над полем комплексных чисел)?

a) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

А над полем вещественных чисел?

11. Показать, что матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

диагонализируема над полем комплексных чисел, но не диагонализируема над полем вещественных чисел.

12. Пусть π — перестановка целых чисел $\{1, \ldots, n\}$; для каждого вектора $x = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ из $\mathscr{C}^n$ положим $Ax = (\xi_{\pi(1)}, \ldots, \xi_{\pi(n)})$. Доказать, что оператор A диагонализируем, и найти базис, в котором матрица этого оператора диагональна.

13. Пусть A — линейный оператор и $\mathscr{M}$ — подпространство, инвариантное относительно A. Доказать, что если A диагонализируем, то то же верно и для его сужения на $\mathscr{M}$.

14. Каким условиям должны удовлетворять комплексные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, чтобы матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & \ldots & \alpha_2 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

была диагонализируема (над полем комплексных чисел)?

15. Верны или нет следующие утверждения?

a) Вещественная квадратная матрица второго порядка с отрицательным определителем подобна диагональной матрице.

b) Линейный оператор A на комплексном векторном пространстве, удовлетворяющий условию $A^k = 1$ для некоторого положительного целого k, диагонализируем.

c) Нильпотентный линейный оператор на конечномерном векторном пространстве диагонализируем.

16. Если A — линейный оператор на конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем и алгебраическая кратность каждого собственного значения оператора A равна 1, то A диагонализируем.

17. Если минимальный полином линейного оператора A на n-мерном векторном пространстве имеет степень n, то A диагонализируем.

18. Найти минимальные полиномы всех проекторов и инволюций.

19. Каков минимальный полином матрицы

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}?$$

20. a) Каков минимальный полином оператора дифференцирования на $\mathscr{P}_n$?

b) Каков минимальный полином оператора A на $\mathscr{P}_n$, определенного равенством $(Ax)(t) = x(t+1)$?

21. Если A — линейный оператор с минимальным полиномом p, то всякий полином q, для которого $q(A) = 0$, делится на p.

22. a) Если A и B — линейные операторы, p — такой полином, что $p(AB) = 0$, и $q(t) = tp(t)$, то $q(BA) = 0$.

b) Что можно вывести из a) относительно связи между минимальными полиномами произведений AB и BA?

23. Линейный оператор обратим тогда и только тогда, когда свободный член его минимального полинома отличен от нуля.

ГЛАВА III

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ

§ 59. Скалярные произведения

Обратимся вновь к исходному пункту наших рассмотрений. В начале главы I мы указали, что хотим обобщить некоторые элементарные свойства некоторых элементарных пространств, как $\mathscr{R}^2$. Во всем предшествующем мы это и делали, но притом совсем исключили из рассмотрения один аспект $\mathscr{R}^2$. Изучив качественное понятие линейности, мы совершенно игнорировали обычные количественные понятия угла и длины. В настоящей главе этот пробел будет восполнен; мы наложим на изучаемые векторные пространства некоторые числовые функции, соответствующие обычным понятиям угла и длины, и исследуем полученную так новую структуру (векторное пространство плюс данная числовая функция). За выигрываемое таким путем углубление в геометрию пространства придется пожертвовать некоторой степенью общности; во всем последующем тексте книги мы должны будем предполагать, что основным полем скаляров служит либо поле $\mathscr{R}$ вещественных чисел, либо поле $\mathscr{C}$ комплексных чисел.

Для получения ключа к дальнейшему рассмотрим сначала $\mathscr{R}^2$. Пусть $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$ — любые две точки из $\mathscr{R}^2$; расстояние между x и y, или длина отрезка, соединяющего x и y, выражается обычной формулой $\sqrt{(\xi_1 - \eta_1)^2 + (\xi_2 - \eta_2)^2}$. Для расстояния от x до начала $0 = (0, 0)$ удобно ввести обозначение

$$\|x\| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2};$$

с помощью этого обозначения расстояние между x и y запишется в виде $\|x-y\|$.

Сказанного про длины и расстояния пока достаточно; а как насчет углов? Оказывается, в общем случае вместо какой-нибудь обычной меры углов гораздо удобнее рассматривать их косинусы. (Грубо говоря, причина этого заключается в том, что угол, при обычном изображении с помощью единичной окружности,— это длина некоторой дуги окружности, тогда как косинус угла — это длина прямолинейного отрезка; последнюю гораздо легче связать с нашим предшествующим изучением линейных функций.) Пусть теперь α есть угол между отрезком, соединяющим 0 с x, и положительной осью ξ_1, а β — угол между отрезком, соединяющим 0 с y, и той же осью; углом между векторами x и y будет $\alpha-\beta$, так что его косинусом служит

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2}{\|x\|\cdot\|y\|}.$$

Рассмотрим выражение $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$; с его помощью можно выразить очень простыми формулами и угол, и длину. Мы уже видели, что если для всех x известно расстояние между 0 и x, то можно вычислить расстояние между любыми x и y; мы утверждаем теперь, что если для каждой пары векторов x и y нам задано значение $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$, то в терминах этого значения можно вычислять все расстояния и все углы. Действительно, если взять $x=y$, то $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$ превращается в $\xi_1^2+\xi_2^2=\|x\|^2$, и это решает вопрос о длинах, а приведенная выше формула косинуса дает нам угол в терминах $\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2$ и двух длин $\|x\|$ и $\|y\|$. Чтобы иметь сжатое обозначение, положим для $x=(\xi_1, \xi_2)$ и $y=(\eta_1, \eta_2)$

$$\xi_1\eta_1+\xi_2\eta_2=(x, y).$$

Сказанное выше подытоживается следующими соотношениями:

расстояние от 0 до x равно $\|x\|=\sqrt{(x, x)}$,
расстояние от x до y равно $\|x-y\|$,
косинус угла между x и y равен $\dfrac{(x, y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$.

Вот важнейшие свойства (x, y), рассматриваемого как числовая функция пары векторов x и y: она симметрична относительно x и y, линейно зависит от каждого из своих двух аргументов и значение (x, x) (за исключением случая $x = 0$) всегда строго положительно. (Противоречие в обозначениях, возникающее при использовании круглых скобок в (x, y) и в (ξ_1, ξ_2), только кажущееся. Оно может появиться лишь в двумерном случае, и даже здесь легко избежать путаницы.)

Представим себе на минуту наиболее тривиальный случай пространства $\mathcal{R}^1$. Для $x = (\xi_1)$ и $y = (\eta_1)$ будем иметь в этом случае $(x, y) = \xi_1\eta_1$ (по этой именно причине (x, y) и называют *скалярным* или *внутренним произведением* x и y.) Угол между любыми двумя векторами равен 0 или π, так что его косинус есть $+1$ или -1. Это подчеркивает значительно бо́льшую чувствительность функции (x, y), принимающей всевозможные числовые значения.

§ 60. Комплексные скалярные произведения

Что будет, если вместо $\mathcal{R}^2$ мы захотим рассматривать $\mathcal{C}^2$? Обобщение как будто напрашивается само собой: для $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$ (где ξ и η — теперь комплексные числа) положим $(x, y) = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2$ в надежде, что выражения $\|x\| = (x, x)$ и $\|x - y\|$ могут быть использованы как разумные меры расстояний. Отметим, однако, следующее странное явление (здесь $i = \sqrt{-1}$):

$$\|ix\|^2 = (ix, ix) = i(x, ix) = i^2(x, x) = -\|x\|^2.$$

Это означает, что если $\|x\|$ положительно, т. е. если x находится на положительном расстоянии от начала, то для ix это уже неверно, а именно, расстояние от 0 до ix отрицательно. Это очень неприятно; несомненно, разумно требовать, чтобы, каково бы ни было то, что должно играть роль (x, y) в этом случае, оно никогда не становилось бы отрицательным при $x = y$. Формальное средство излечения у нас под рукой: можно попытаться положить

$$(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1 + \xi_2\bar{\eta}_2$$

(где черточка означает переход к сопряженному комплексному числу). При этом определении выражение (x, y) теряет значительную часть своего былого изящества; оно больше не симметрично относительно x и y и не линейно по каждому из своих аргументов. Но — и это-то побуждает нас ввести новое определение,—

$$(x, x) = \xi_1\bar{\xi}_1 + \xi_2\bar{\xi}_2 = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2$$

действительно никогда не отрицательно. На первый взгляд сомнительно, можно ли построить полезную и изящную теорию на основе функции, у которой отсутствуют столь многие из свойств, рекомендовавших ее нашему вниманию вначале; кажущееся неизящество будет оправдано достигающимся в дальнейшем успехом. Вот обнадеживающее предзнаменование. Рассмотрим пространство $\mathscr{C}^1$ (т. е. множество всех комплексных чисел). Невозможно представить себе какую-нибудь конфигурацию в этом пространстве, о которой можно было бы говорить не как о конфигурации в $\mathscr{R}^2$, однако по идее это, очевидно, другое пространство. Аналогом (x, y) в этом пространстве, при $x = (\xi_1)$ и $y = (\eta_1)$, служит $(x, y) = \xi_1\bar{\eta}_1$, и это выражение действительно допускает простое геометрическое истолкование. Если соединить x и y с началом прямолинейными отрезками, (x, y) не будет, конечно, косинусом угла между ними; но оказывается, что при $\|x\| = \|y\| = 1$ вещественной частью этого выражения служит как раз указанный косинус.

Комплексная сопряженность, которую мы вынуждены были ввести, еще не раз будет досаждать нам; а теперь мы от этого эвристического введения обратимся к формальной работе, сделав еще одно замечание относительно обозначений. Сходство символов (,) и [,], первый из которых использован здесь для обозначения скалярного произведения, а второй, ранее, для обозначения линейных функционалов, не случайно. Действительно, позже будет показано, что только наличие комплексной сопряженности в (,) делает необходимым употребление для него символа, отличного от [,]. Однако пока мы не можем позволить себе роскошь смешивать эти два символа.

§ 61. Пространства со скалярным произведением

Определение. *Скалярным произведением* в (вещественном или комплексном) векторном пространстве называется (соответственно вещественная или комплексная) числовая функция упорядоченной пары векторов x и y такая, что

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \tag{1}$$

$$(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 (x_1, y) + \alpha_2 (x_2, y), \tag{2}$$

$$(x, x) \geqslant 0; \ (x, x) = 0 \text{ лишь когда } x = 0. \tag{3}$$

Векторное пространство, в котором задана такая функция, называется *пространством со скалярным произведением.*

Заметим, что в случае вещественного векторного пространства черточку в (1) можно игнорировать. Однако, в любом случае, вещественном или комплексном, (1) означает, что (x, x) всегда вещественно, так что неравенство в (3) имеет смысл. В пространстве со скалярным произведением мы будем пользоваться обозначением

$$\sqrt{(x, x)} = \| x \|;$$

число $\| x \|$ называется *нормой* или *длиной* вектора x. Вещественное пространство со скалярным произведением иногда называют *евклидовым* пространством, а его комплексный аналог — *унитарным* пространством.

Примерами унитарных пространств могут служить $\mathscr{C}^n$ или $\mathscr{P}$; в первом случае для $x = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $y = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ полагаем

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\eta}_i,$$

а во втором, т. е. в $\mathscr{P}$,

$$(x, y) = \int_0^1 x(t) \overline{y(t)}\, dt.$$

Модификации, превращающие эти примеры в евклидовы пространства (т. е. вещественные пространства со скалярным произведением), очевидны.

В унитарном пространстве мы имеем

$$(x,\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \bar{\alpha}_1 (x,\ y_1) + \bar{\alpha}_2 (x,\ y_2). \qquad (2')$$

(Для преобразования левой части формулы (2′) в правую используем (1), раскрываем полученное выражение согласно формуле (2) и снова применяем (1).) Это свойство вместе с определением скалярного произведения оправдывает терминологию, употребляемую иногда для описания свойств (1), (2), (3) (и их следствия (2′)). Согласно этой терминологии, (x, y) есть *эрмитово симметричная* ((1)), *сопряженно билинейная* ((2) и (2′)) и *положительно определенная* ((3)) форма. В евклидовом пространстве знаки сопряженности в (2′), как и в (1), можно игнорировать; в этом случае (x, y) называется симметричной, билинейной и положительно определенной формой. Заметим, что в обоих случаях условия, наложенные на (x, y), влекут для $\|x\|$ свойство однородности

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|.$$

(Доказательство: $\|\alpha x\|^2 = (\alpha x,\ \alpha x) = \alpha\bar{\alpha}\,(x,\ x)$.)

§ 62. Ортогональность

Наиболее важным отношением между векторами пространства со скалярным произведением является ортогональность. По определению, векторы x и y называются *ортогональными*, если $(x, y) = 0$. Заметим, что это отношение симметрично: из того, что $(x, y) = \overline{(y, x)}$, следует, что (x, y) и (y, x) обращаются в нуль одновременно. Если вспомнить мотивы, руководившие нами при введении (x, y), эта терминология объяснится сама собой; два вектора ортогональны (или перпендикулярны), если угол между ними равен 90°, т. е. если косинус угла между ними равен 0. Два подпространства называются ортогональными, если всякий вектор каждого из этих подпространств ортогонален ко всякому вектору другого.

Множество $\mathscr{X}$ векторов называется *ортонормальным*, если, каковы бы ни были x и y из $\mathscr{X}$, $(x, y) = 0$ или $(x, y) = 1$ соответственно тому, будет ли $x \neq y$ или $x = y$. (Если $\mathscr{X}$ конечно, скажем, $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, имеем $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$.) Мы называем ортонормальное множество *полным*, если оно не содержится ни в каком большем ортонормальном множестве.

Прежде чем сформулировать наше последнее в этом ряду определение, заметим, что ортонормальное множество линейно независимо. Действительно, пусть $\{x_1, \ldots$ $\ldots, x_k\}$ — любое конечное подмножество ортонормального множества $\mathscr{X}$; тогда равенство $\sum_i \alpha_i x_i = 0$ влечет равенства

$$0 = \left(\sum_i \alpha_i x_i,\ x_j\right) = \sum_i \alpha_i (x_i,\ x_j) = \sum_i \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j;$$

другими словами, линейная комбинация векторов x может обращаться в нуль, только когда все коэффициенты равны нулю. Отсюда заключаем, что в конечномерном пространстве со скалярным произведением число векторов ортонормального множества всегда конечно и притом не превышает линейной размерности пространства. В этом случае мы определим *ортогональную размерность* пространства как наибольшее число векторов, которое может содержать ортонормальное множество.

Предупреждение: на данной ступени наших знаний понятия ортогональности и ортонормальных множеств еще висят в воздухе. С помощью тривиальных примеров можно показать, что все же дело обстоит не столь уж плохо; так, например, вектор 0 всегда ортогонален к любому вектору; если пространство содержит ненулевой вектор x, то множество, состоящее только из $\frac{x}{\|x\|}$, ортонормально. Мы согласны, что это — не очень вдохновляющие примеры. Однако пока мы удовольствуемся ими; вскоре мы увидим, что всегда существует «достаточно» ортогональных векторов для свободного оперирования ими.

Заметим также, что мы не вправе полагать, что число элементов всякого полного ортонормального множества равно ортогональной размерности. Конечно, ортонормальное множество, содержащее такое количество элементов, очевидно было бы полным; однако мыслимо, что некоторое другое множество содержит меньше элементов и все же полно из-за своего скверного устройства, предотвращающего возможность его расширения. Эти трудности — чисто умозрительные; они исчезнут, как только мы перейдем к доказательствам; они возникли только потому, что среди нескольких возможных определений полноты нам надо было выбрать какое-то одно, и мы должны доказать его равносильность другим.

Нам понадобятся некоторые обозначения. Для всякого множества $\mathcal{E}$ векторов пространства $\mathcal{V}$ со скалярным произведением мы будем обозначать через $\mathcal{E}^{\perp}$ множество всех векторов из $\mathcal{V}$, ортогональных к каждому вектору из $\mathcal{E}$. Ясно, что $\mathcal{E}^{\perp}$ есть подпространство пространства $\mathcal{V}$ (независимо от того, является ли таковым само $\mathcal{E}$) и что $\mathcal{E}$ содержится в $\mathcal{E}^{\perp\perp} = (\mathcal{E}^{\perp})^{\perp}$. Отсюда следует, что подпространство, натянутое на $\mathcal{E}$, содержится в $\mathcal{E}^{\perp\perp}$. В случае, когда $\mathcal{E}$ — подпространство, мы будем называть $\mathcal{E}^{\perp}$ *ортогональным дополнением* к $\mathcal{E}$. Мы употребляем значок $\perp$ для напоминания об ортогональности (или перпендикулярности). (В непринужденных обсуждениях $\mathcal{E}^{\perp}$ можно было бы произносить «$\mathcal{E}$ перп.».)

Упражнения

1. Задавшись четырьмя комплексными числами α, β, γ и δ, попробуем определить скалярное произведение в $\mathcal{C}^2$, положив

$$(x, y) = \alpha\xi_1\overline{\eta_1} + \beta\xi_2\overline{\eta_1} + \gamma\xi_1\overline{\eta_2} + \delta\xi_2\overline{\eta_2}$$

для любых $x = (\xi_1, \xi_2)$ и $y = (\eta_1, \eta_2)$. Каким условиям должны удовлетворять скаляры α, β, γ и δ, чтобы это равенство действительно определяло скалярное произведение?

2. Доказать, что если x и y — векторы унитарного пространства, то

$$4(x, y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2.$$

3. Пусть скалярное произведение в $\mathcal{P}_{n+1}$ определено формулой $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$ и $x_j(t) = t^j$, $j = 0, \ldots, n-1$; найти полином степени n, ортогональный к $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$.

4. а) Два вектора x и y вещественного пространства со скалярным произведением ортогональны тогда и только тогда, когда $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

b) Показать, что а) становится неверным при замене «вещественного» на «комплексного».

с) Два вектора x и y комплексного пространства со скалярным произведением ортогональны тогда и только тогда, когда $\|\alpha x+\beta y\|=\|\alpha x\|^2+\|\beta y\|^2$ для всех пар скаляров α и β.

d) Пусть x и y — векторы вещественного пространства со скалярным произведением; если $\|x\|=\|y\|$, то $x-y$ и $x+y$ ортогональны. (Геометрический смысл?). Обсудить соответствующее утверждение для комплексных пространств.

е) Если x и y — векторы пространства со скалярным произведением, то

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2.$$

Геометрический смысл?

§ 63. Полнота

Т е о р е м а 1. *Пусть $\mathscr{X}=\{x_1, \ldots, x_n\}$ — любое конечное ортонормальное множество в пространстве со скалярным произведением, x — любой вектор и $\alpha_i=(x, x_i)$. Тогда (неравенство Бесселя)*

$$\sum_i |\alpha_i|^2 \leqslant \|x\|^2.$$

Вектор $x'=x-\sum_i \alpha_i x_i$ ортогонален к каждому x_j и, следовательно, к подпространству, натянутому на $\mathscr{X}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для первого утверждения:

$$0\leqslant \|x'\|^2=(x', x')=\Bigl(x-\sum_i \alpha_i x_i,\ x-\sum_j \alpha_j x_j\Bigr)=$$
$$=(x, x)-\sum_i \alpha_i (x_i, x)-\sum_j \bar{\alpha}_j (x, x_j)+\sum_i\sum_j \alpha_i\bar{\alpha}_j (x_i, x_j)=$$
$$=\|x\|^2-\sum_i |\alpha_i|^2-\sum_i |\alpha_i|^2+\sum_i |\alpha_i|^2=\|x\|^2-\sum_i |\alpha_i|^2;$$

для второго утверждения:

$$(x', x_j)=(x, x_j)-\sum_i \alpha_i (x_i, x_j)=\alpha_j-\alpha_j=0.$$

Т е о р е м а 2. *Пусть $\mathscr{X}$ — любое конечное ортонормальное множество в пространстве со скалярным произ-*

ведением. Следующие шесть условий относительно $\mathscr{X}$ *равносильны:*

1) *Ортонормальное множество* $\mathscr{X}$ *полно.*

2) *Если* $(x, x_i) = 0$ для $i = 1, \ldots, n$, то $x = 0$.

3) *Подпространством, натянутым на* $\mathscr{X}$, *служит всё* $\mathscr{V}$.

4) $x = \sum_i (x, x_i)\, x_i$ *для всякого* x *из* $\mathscr{V}$.

5) *Каковы бы ни были* x *и* y *из* $\mathscr{V}$,

$$(x, y) = \sum_i (x, x_i)(x_i, y)$$

(*неравенство Парсеваля*).

6) *Каково бы ни было* x *из* $\mathscr{V}$,

$$\| x \|^2 = \sum_i |(x, x_i)|^2.$$

Доказательство. Мы докажем импликации 1) $\Longrightarrow$ 2) $\Longrightarrow$ 3) $\Longrightarrow$ 4) $\Longrightarrow$ 5) $\Longrightarrow$ 6) $\Longrightarrow$ 1). Т. е., предполагая сначала 1), докажем 2), затем, предполагая 2), докажем 3), и так далее, пока, наконец, не докажем 1), предполагая 6).

1) $\Longrightarrow$ 2). Если $(x, x_i) = 0$ для всех i и $x \neq 0$, то к $\mathscr{X}$ можно присоединить $\dfrac{x}{\| x \|}$, получив тем самым ортонормальное множество, большее, чем $\mathscr{X}$.

2) $\Longrightarrow$ 3). Если существует x, не являющееся линейной комбинацией векторов x_i, то, по второй части теоремы 1, $x' = x - \sum_i (x, x_i)\, x_i$ отлично от 0 и ортогонально к каждому x_i.

3) $\Longrightarrow$ 4). Если каждое x имеет вид $x = \sum_j \alpha_j x_j$, то

$$(x, x_i) = \sum_j \alpha_j (x_j, x_i) = \alpha_i.$$

4) $\Longrightarrow$ 5). Если $x = \sum_i \alpha_i x_i$ и $y = \sum_j \beta_j x_j$, где $\alpha_i = (x, x_i)$ и $\beta_j = (y, x_j)$, то

$$(x, y) = \Big(\sum_i \alpha_i x_i, \sum_j \beta_j x_j\Big) = \sum_i \alpha_i \overline{\beta}_j (x_i, x_j) = \sum_i \alpha_i \overline{\beta}_i.$$

5) $\Longrightarrow$ 6). Положить $x = y$.

6) $\Longrightarrow$ 1). Если бы $\mathscr{X}$ содержалось в большем ортонормальном множестве, скажем, x_0 было ортогонально к каждому x_i, то мы имели бы

$$\| x_0 \|^2 = \sum_i |(x_0, x_i)|^2 = 0,$$

откуда $x_0 = 0$.

§ 64. Неравенство Шварца

Теорема. *Для любых двух векторов x и y пространства со скалярным произведением справедливо неравенство*

$$|(x, y)| \leqslant \| x \| \cdot \| y \|$$

(*неравенство Шварца*).

Доказательство. При $y = 0$ обе части равны нулю. Если $y \neq 0$, то множество, состоящее из вектора $\frac{y}{\| y \|}$, ортонормально, и, следовательно, по неравенству Бесселя,

$$\left| \left(x, \frac{y}{\| y \|} \right) \right|^2 \leqslant \| x \|^2.$$

Неравенство Шварца влечет важные арифметические, геометрические и аналитические следствия.

1) Определим расстояние между векторами x и y в любом пространстве со скалярным произведением формулой

$$\delta(x, y) = \| x - y \| = \sqrt{(x - y, x - y)}.$$

Чтобы δ заслуженно называлось расстоянием, оно должно обладать следующими тремя свойствами:

(I) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$,

(II) $\delta(x, y) \geqslant 0$; $\delta(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$,

(III) $\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) + \delta(z, y)$.

(В векторном пространстве приятно также быть уверенным в том, что расстояние инвариантно относительно переносов:

(IV) $\delta(x, y) = \delta(x + z, y + z)$.)

Определенное нами δ очевидным образом обладает свойствами (I), (II) и (IV); под знаком вопроса стоит только справедливость «неравенства треугольника» (III). Чтобы доказать (III), заметим, что

$$\|x+y\|^2=(x+y,\ x+y)=\|x\|^2+(x,\ y)+(y,\ x)+\|y\|^2=$$
$$=\|x\|^2+(x,\ y)+\overline{(x,\ y)}+\|y\|^2=$$
$$=\|x\|^2+2\operatorname{Re}(x,\ y)+\|y\|^2\leqslant\|x\|^2+2\,|(x,\ y)|+\|y\|^2\leqslant$$
$$\leqslant\|x\|^2+2\,\|x\|\cdot\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2;$$

заменяя x на $x-z$ и y на $z-y$, получаем

$$\|x-y\|\leqslant\|x-z\|+\|z-y\|,$$

а это и есть (III). (Мы обозначаем через $\operatorname{Re}\zeta$ вещественную часть комплексного числа ζ; если $\zeta=\xi+i\eta$ с вещественными ξ и η, то $\operatorname{Re}\zeta=\xi$. Мнимая часть ζ, т. е. вещественное число η, обозначается $\operatorname{Im}\zeta$.)

2) В евклидовом пространстве $\mathcal{R}^n$ выражение

$$\frac{(x,\ y)}{\|x\|\cdot\|y\|}$$

дает косинус угла между x и y. Неравенство Шварца в этом случае просто равносильно утверждению, что косинус вещественного угла по абсолютной величине $\leqslant 1$.

3) В унитарном пространстве $\mathcal{C}^n$ неравенство Шварца превращается в так называемое неравенство Коши; оно утверждает, что для любых двух последовательностей $(\xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)$ и $(\eta_1,\ \ldots,\ \eta_n)$ комплексных чисел

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i\overline{\eta}_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2.$$

4) В пространстве $\mathcal{P}$ неравенство Шварца превращается в неравенство *)

$$\left|\int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,dt\right|^2\leqslant\int_0^1|x(t)|^2\,dt\cdot\int_0^1|y(t)|^2\,dt.$$

Полезно заметить, что соотношения, упомянутые выше в 1)—4), являются не только аналогами общего

---

*) Впервые установленное в вещественном случае (и не только для полиномов) В. Я. Буняковским.—*Перев.*

неравенства Шварца, но и действительно его следствиями или частными случаями.

5) Упомянем попутно, что между двумя понятиями (общего векторного пространства и пространства со скалярным произведением) есть место для промежуточного понятия, представляющего немалый интерес. Это — понятие *нормированного* векторного пространства, т. е. векторного пространства, в котором есть приемлемое определение длины, но ничего не сказано об углах. Норма в (вещественном или комплексном) векторном пространстве есть числовая функция $\|x\|$ вектора x такая, что $\|x\|>0$ за исключением того случая, когда $x=0$, $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$ и $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$. Наше предшествующее рассмотрение показывает, что пространство со скалярным произведением есть нормированное векторное пространство; обратное вообще неверно. Другими словами, если всё, что нам задано, это норма, удовлетворяющая трём приведенным только что условиям, то может оказаться, что нельзя найти скалярное произведение, для которого бы (x, x) тождественно равнялось $\|x\|^2$. Пользуясь несколько неопределенным, но образным термином, можно сказать, что норма в пространстве со скалярным произведением носит существенно «квадратический» характер, которым нормы в общем случае не обладают.

§ 65. Полные ортонормальные множества

Теорема. *В n-мерном пространстве $\mathcal{V}$ со скалярным произведением существуют полные ортонормальные множества, и каждое полное ортонормальное множество в $\mathcal{V}$ содержит ровно n элементов. Ортогональная размерность пространства $\mathcal{V}$ совпадает с его линейной размерностью.*

Доказательство. Для тех, кого не может обеспокоить выбор элемента из, возможно, несчетного множества, существование полных ортонормальных множеств очевидно. Действительно, мы уже видели, что ортонормальные множества существуют, а потому выбираем одно из них; если оно не полно, мы можем расширить его, и если полученное ортонормальное множество всё еще не полно, мы снова расширим его и продолжим этот процесс по индукции. Так как ортонормальное множество может содержать самое большее n элементов, то самое большее на n-м шаге мы получим полное ортонормальное множество. Это множество порождает всё пространство (см. теорему 2 § 63, 1) $\Longrightarrow$ 3)) и, будучи к тому же линейно независимым, служит базисом, а потому содержит ровно n элементов. Этим доказано первое утверждение теоремы; второе очевидным образом следует теперь из определений.

Существует конструктивный метод обхода этой грубой индукции, и поскольку он проливает дополнительный свет на рассматриваемые понятия, мы воспроизведем его здесь в качестве другого доказательства теоремы.

Пусть $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_r\}$ — любой базис пространства $\mathscr{V}$. Мы построим полное ортонормальное множество $\mathscr{Y} = \{y_1, \ldots, y_r\}$, обладающее тем свойством, что каждое y_j есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_j$. Чтобы начать построение, заметим, что $x_1 \neq 0$ (поскольку $\mathscr{X}$ линейно независимо), и положим $y_1 = \frac{x_1}{\| x_1 \|}$. Предположим теперь, что уже найдены $y_1, \ldots, y_r$, образующие ортонормальное множество и такие, что каждое y_j $(j = 1, \ldots, r)$ есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_j$. Положим

$$z = x_{r+1} - (\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_r y_r),$$

где значения скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ еще должны быть определены. Так как

$$(z, y_j) = \Bigl(x_{r+1} - \sum_i \alpha_i y_i, y_j\Bigr) = (x_{r+1}, y_j) - \alpha_j$$

для $j = 1, \ldots, r$, то заключаем, что, выбрав $\alpha_j = (x_{r+1}, y_j)$, мы будем иметь $(z, y_j) = 0$ для $j = 1, \ldots, r$. Далее, будучи линейной комбинацией векторов x_{r+1} и $y_1, \ldots, y_r$, z есть также линейная комбинация векторов x_{r+1} и $x_1, \ldots, x_r$. Наконец, z отлично от нуля, поскольку $x_1, \ldots, x_r, x_{r+1}$ линейно независимы, а коэффициент при x_{r+1} в выражении для z отличен от нуля. Положим $y_{r+1} = \frac{z}{\| z \|}$; очевидно, $\{y_1, \ldots, y_r, y_{r+1}\}$ есть снова ортонормальное множество со всеми требуемыми свойствами, и этим индукция закончена. Нам потребуется тот факт, что не только каждое y_j есть линейная комбинация векторов $x_1, \ldots, x_j$, но и, обратно, каждое x_j есть линейная комбинация векторов $y_1, \ldots, y_j$. Только что описанный метод превращения линейного базиса в полное ортонормальное множество известен под названием *процесса ортогонализации Грама — Шмидта.*

В пространствах со скалярным произведением будет удобно и естественно работать исключительно с такими базисами, которые являются также полными ортонормальными множествами. Мы будем называть такой базис *ортонормальным базисом* или *ортонормальной координатной системой*; в дальнейшем, рассматривая базисы, не обязательно являющиеся ортонормальными, мы будем подчеркивать это, называя их линейными базисами.

Упражнения

1. Превратить $\mathscr{P}_2$ в пространство со скалярным произведением, положив $(x, y) = \int\limits_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$ для любых x и y из $\mathscr{P}_2$, и найти полное ортонормальное множество в этом пространстве.

2. Пусть x и y — ортогональные единичные векторы (т. е. $\{x, y\}$ — ортонормальное множество); чему равно расстояние между x и y?

3. Доказать, что если $|(x, y)| = \|x\| \cdot \|y\|$ (т. е. если неравенство Шварца превращается в равенство), то x и y линейно зависимы.

4. a) Доказать, что неравенство Шварца останется справедливым, если в определении скалярного произведения «строго положительно» заменить на «неотрицательно».

b) Доказать, что для упомянутого в a) «неотрицательного» скалярного произведения множество всех тех векторов x, для которых $(x, x) = 0$, есть подпространство.

c) Образовать факторпространство по указанному в b) подпространству и показать, что заданное «скалярное произведение» естественным образом индуцирует на этом факторпространстве настоящее (строго положительное) скалярное произведение.

d) Можно ли рассмотрения из a), b) и c) распространить на нормированные пространства (возможно без скалярного произведения)?

5. a) Задавшись строго положительным числом α, попытаемся определить норму в $\mathscr{R}^2$ формулой

$$\|x\| = (|\xi_1|^\alpha + |\xi_2|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

для любого $x = (\xi_1, \xi_2)$. Каким условиям должно удовлетворять α, чтобы это равенство действительно определяло норму?

b) Доказать, что формула

$$\|x\| = \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\}$$

определяет норму в $\mathcal{R}^2$.

c) Какой из норм, определенных в a), b), соответствует в $\mathcal{R}^2$ такое скалярное произведение, что $\|x\|^2 = (x, x)$ для всех x из $\mathcal{R}^2$?

6. a) Доказать, что для того чтобы в вещественном нормированном пространстве существовало скалярное произведение, удовлетворяющее равенству $\|x\|^2 = (x, x)$ для всех x, необходимо и достаточно, чтобы

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

для всех x и y.

b) Рассмотреть соответствующее утверждение для комплексных пространств.

c) Доказать, что для того чтобы в $\mathcal{R}^2$ существовало скалярное произведение, удовлетворяющее равенству $\|x\|^2 = (x, x)$ для всех x из $\mathcal{R}^2$, необходимо и достаточно, чтобы геометрическое место точек, удовлетворяющих уравнению $\|x\| = 1$, было эллипсом.

7. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — полное ортонормальное множество в пространстве со скалярным произведением и $y_j = \sum_{i=1}^{j} x_i$, $j = 1, \ldots, n$. Выразить векторы, получаемые в результате применения к векторам y процесса ортогонализации Грама — Шмидта, через векторы x.

§ 66. Теорема об ортогональном разложении

Поскольку подпространство пространства со скалярным произведением само может рассматриваться как пространство со скалярным произведением, к нему применима теорема предыдущего параграфа. Следующий результат, называемый *теоремой об ортогональном разложении*, является наиболее важным ее применением.

Теорема. *Если $\mathcal{M}$ есть подпространство конечномерного пространства $\mathcal{V}$ со скалярным произведением, то $\mathcal{V}$ есть прямая сумма $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{\perp}$, а $\mathcal{M}^{\perp\perp} = \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ — полное ортонормальное множество в $\mathcal{M}$ и z — любой вектор из $\mathcal{V}$. Положим $x = \sum_i \alpha_i x_i$, где $\alpha_i = (z, x_i)$; по теореме 1 § 63, $y = z - x$ принадлежит $\mathcal{M}^{\perp}$, так что z есть сумма двух векторов, $z = x + y$, с x из $\mathcal{M}$ и y из $\mathcal{M}^{\perp}$. Дизъюнктность $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{\perp}$ очевидна: если бы x принадлежало одновременно $\mathscr{M}$ и $\mathscr{M}^{\perp}$, то мы имели бы $\|x\|^2=(x, x)=0$. По теореме § 18, $\mathscr{V}=\mathscr{M}\oplus\mathscr{M}^{\perp}$.

Заметим, что в разложении $z=x+y$ мы имеем

$$(z, x)=(x+y, x)=\|x\|^2+(y, x)=\|x\|^2,$$

и аналогично

$$(z, y)=\|y\|^2.$$

Значит, если z принадлежит $\mathscr{M}^{\perp\perp}$, так что $(z, y)=0$, то $\|y\|^2=0$, и тем самым $z\ (=x)$ принадлежит $\mathscr{M}$; другими словами, $\mathscr{M}^{\perp\perp}$ содержится в $\mathscr{M}$. Поскольку мы уже знаем, что $\mathscr{M}$ содержится в $\mathscr{M}^{\perp\perp}$, теорема полностью доказана.

Этот вид разложения пространства со скалярным произведением в прямую сумму (а именно, на подпространство и его ортогональное дополнение) представляет значительный геометрический интерес. Связанные с ним проекторы мы изучим немного позже; окажется, что они образуют интересный и важный подкласс класса всех проекторов. А пока сделаем лишь замечание о связи с теоремой Пифагора; так как $(z, x)=\|x\|^2$ и $(z, y)=\|y\|^2$, то

$$\|z\|^2=(z, z)=(z, x)+(z, y)=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Другими словами, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов. Более общим образом, если $\mathscr{M}_1, \ldots, \mathscr{M}_k$ — попарно ортогональные подпространства пространства $\mathscr{V}$ со скалярным произведением и $x=x_1+\ldots+x_k$, где каждое x_j принадлежит $\mathscr{M}_j$ $(j=1, \ldots, k)$, то

$$\|x\|^2=\|x_1\|^2+\ldots+\|x_k\|^2.$$

§ 67. Линейные функционалы

Теперь мы в состоянии изучать линейные функционалы на пространствах со скалярным произведением. Для общего n-мерного пространства сопряженное пространство также n-мерно, а потому изоморфно первоначальному пространству. Однако, между ними не существует какого-либо очевидного естественного изоморфизма; а следовало бы еще ожидать, что переход ко второму сопряженному пространству должен возвращать к исходному пункту. Основной смысл теоремы, которую мы сейчас докажем, заключается в том, что для пространств со скалярным произведением существует «естественное» соответствие между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$; единственное, что омрачает горизонт — то, что в общем случае это вовсе не изоморфизм.

Теорема. *Каждому линейному функционалу y' на конечномерном пространстве $\mathscr{V}$ со скалярным произведением соответствует однозначно определенный вектор y из $\mathscr{V}$ такой, что $y'(x) = (x, y)$ для всех x.*

Доказательство. Если $y' = 0$, можно взять $y = 0$; будем предполагать далее, что $y'(x)$ не равно тождественно нулю. Пусть $\mathscr{M}$ — подпространство, состоящее из всех векторов x, для которых $y'(x) = 0$, и $\mathscr{N} = \mathscr{M}^{\perp}$ — его ортогональное дополнение. Подпространство $\mathscr{N}$ содержит ненулевой вектор y_0; умножая на надлежащую постоянную, можно добиться того, чтобы $\|y_0\| = 1$. Положим $y = \overline{y'(y_0)} \cdot y_0$. (Как обычно, черточка означает переход к сопряженному комплексному числу; в случае, когда $\mathscr{V}$ — вещественное пространство со скалярным произведением, а не унитарное, черточку можно опустить.) Тогда мы действительно имеем требуемое соотношение

$$y'(x) = (x, y) \tag{1}$$

по крайней мере для $x = y_0$ и всех x из $\mathscr{M}$. Для произвольного x из $\mathscr{V}$ положим $x_0 = x - \lambda y_0$, где

$$\lambda = \frac{y'(x)}{y'(y_0)};$$

тогда $y'(x_0) = 0$ и $x = x_0 + \lambda y_0$ есть линейная комбинация двух векторов, для каждого из которых верно соотношение (1). Из линейности обеих частей равенства (1) следует, что оно верно для x, что и требовалось доказать.

Для доказательства единственности предположим, что $(x, y_1) = (x, y_2)$ для всех x. Тогда $(x, y_1 - y_2) = 0$ для всех x и потому, в частности, для $x = y_1 - y_2$, откуда $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$ и $y_1 = y_2$.

Соответствие $y' \rightleftarrows y$ есть взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}'$, обладающее тем свойством, что сумме $y_1' + y_2'$ соответствует сумма $y_1 + y_2$, тогда как произведению $\alpha y'$ — произведение $\bar{\alpha} y$; по этой причине мы называем его *сопряженным изоморфизмом*. Несмотря на то, что сопряженный изоморфизм делает $\mathscr{V}'$ практически неотличимым от $\mathcal{V}$, есть смысл сохранять их теоретическое различие. Одним из оснований для этого является то, что нам было бы желательно, чтобы вместе с $\mathcal{V}$ также $\mathcal{V}'$ было пространством со скалярным произведением; однако, если последовать тому, что подсказывается сопряженным изоморфизмом между $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}''$, то сопряженность снова вызовет затруднение. Пусть y_1' и y_2' — любые два элемента из $\mathcal{V}'$; если $y_1'(x)=(x, y_1)$ и $y_2'(x)=(x, y_2)$, то возникает большой соблазн положить

$$(y_1', y_2')=(y_1, y_2).$$

Но минутное размышление показывает, что это выражение не может удовлетворять условию (2) § 61 и потому не годится для скалярного произведения. Это затруднение возникает только в комплексных (т. е. унитарных) пространствах; например, мы имеем

$$(\alpha y_1', y_2')=(\bar{\alpha} y_1, y_2)=\bar{\alpha}(y_1, y_2)=\bar{\alpha}(y_1', y_2').$$

Выход очевиден: полагаем

$$(y_1', y_2')=\overline{(y_1, y_2)}=(y_2, y_1); \tag{2}$$

предоставляем читателю проверить, что при таком определении $\mathcal{V}'$ становится пространством со скалярным произведением во всех случаях. Это пространство со скалярным произведением мы будем обозначать $\mathcal{V}^*$.

Заметим, что наши затруднения (если их можно так назвать) с комплексной сопряженностью проявлялись до сих пор больше в обозначениях, чем в понятиях; единственное различие между теорией евклидовых пространств и теорией унитарных пространств всё еще заключается в том, что в последней появляется какая-то случайная черточка. Более глубокие различия между двумя теориями проявятся, когда мы перейдем к изучению линейных операторов.

§ 68. Круглые скобки против квадратных

Возникает необходимость выяснить связь между общими векторными пространствами и пространствами со скалярным произведением. Теорема предыдущего параграфа показывает, что если аккуратно обращаться с комплексной сопряженностью, (x, y) может вполне заменить $[x, y]$. Могло бы показаться желательным построить всю теорию общих векторных пространств таким образом, чтобы понятие ортогональности в унитарном пространстве стало не просто аналогом, но и частным случаем какого-то предварительно рассмотренного общего отношения между векторами и функционалами. Например, один из способов избежания неприятностей с комплексной сопряженностью (или, скорее, перенесения их в менее бросающееся в глаза место) мог бы состоять в определении пространства, сопряженного к комплексному векторному пространству, как множества сопряженных линейных функционалов, т. е. множества числовых функций y, для которых

$$y(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \bar{\alpha}_1 y(x_1) + \bar{\alpha}_2 y(x_2).$$

Поскольку введение этого усложнения в общую теорию представляется нецелесообразным (и противоречащим общепринятому обычаю), мы выбрали окольный путь, которым только что шли. А так как с этого момента нам придется иметь дело только с пространствами со скалярным произведением, мы просим читателя мысленно исправить все предыдущее изложение, заменив всюду квадратные скобки $[x, y]$ круглыми (x, y). Посмотрим, как скажется эта замена на теоремах и определениях первых двух глав.

Замена $\mathscr{V}'$ на $\mathscr{V}^*$ есть просто изменение обозначения; имеется в виду, что новый символ должен напоминать нам, что к $\mathscr{V}'$ добавилось нечто новое (а именно скалярное произведение). Несколько более интересен (сопряженный) изоморфизм между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^*$; с его помощью теоремы § 15, утверждающие существование линейных функционалов с различными свойствами, могут быть теперь истолкованы как теоремы о существовании некоторых векторов в самом $\mathscr{V}$. Так, например, существование базиса, сопряженного к произвольно заданному базису $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, влечет теперь существование базиса $\mathscr{Y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$ (в $\mathscr{V}$), обладающего тем свойством, что $(x_i, y_j) = \delta_{ij}$.

Еще интересней напрашивающаяся замена аннулятора $\mathscr{M}^0$ подпространства $\mathscr{M}$ (который принадлежит $\mathscr{V}'$

или $\mathscr{V}^*$) ортогональным дополнением $\mathscr{M}^\perp$ (принадлежащим, как и $\mathscr{M}$, пространству $\mathscr{V}$). Однако, наиболее радикальное нововведение связано с сопряженным к линейному оператору. Так, мы можем написать аналог соотношения (1) § 44 и для каждого линейного оператора A на $\mathscr{V}$ определить линейный оператор A^*, положив

$$(Ax,\ y) = (x,\ A^*y)$$

для каждого x. Из этого определения следует, что A^* есть снова линейный оператор, определенный на том же векторном пространстве $\mathscr{V}$; но из-за эрмитовой симметрии $(x,\ y)$ отношение между A и A^* не совсем такое, как между A и A'. Наиболее значительное различие состоит в том, что (в унитарном пространстве) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha}A^*$ (а *не* $(\alpha A)^* = \alpha A^*$). С этим явлением связано то, что если матрица оператора A, в некотором фиксированном базисе, есть (α_{ij}), то матрицей оператора A^* в сопряженном базисе служит не (α_{ji}), а $(\overline{\alpha_{ji}})$. Для определителей вместо $\det A^* = \det A$ мы имеем $\det A^* = \overline{\det A}$, и, следовательно, собственные значения оператора A^* совпадают не с собственными значениями оператора A, а с числами, сопряженными к ним. Однако здесь различия кончаются. Все остальные результаты § 44 об антиизоморфном характере соответствия $A \rightleftarrows A^*$ сохраняются; тождество $A = A^{**}$ по-прежнему истинно и для своего истолкования не нуждается в помощи изоморфизма.

Вскоре мы рассмотрим линейные операторы на пространствах со скалярным произведением и увидим, что принципиально новые черты, отличающие их изучение от рассмотрений главы II, заключаются в возможности сравнения A и A^* как линейных операторов на одном и том же пространстве и в исследовании классов тех линейных операторов, которые находятся в особенно простом отношении со своим сопряженным.

§ 69. Естественные изоморфизмы

Теперь у читателя может (или во всяком случае должно) возникнуть еще только одно сомнение. Многие из наших предыдущих результатов были следствиями таких соотношений рефлексивности, как $A^{**}=A$; останутся ли они справедливыми при замене квадратных скобок круглыми? Ещё уместнее следующая форма постановки вопроса. Всё, что было сказано об унитарном пространстве $\mathscr{V}$, должно быть также верно для унитарного пространства $\mathscr{V}^*$; в частности, оно также находится в естественном сопряженном изоморфном отношении к своему сопряженному пространству $\mathscr{V}^{**}$. Если теперь каждому вектору из $\mathscr{V}$ поставить в соответствие вектор из $\mathscr{V}^{**}$, применив сначала естественный сопряженный изоморфизм между $\mathscr{V}$ и $\mathscr{V}^*$, а затем проделав тот же путь от $\mathscr{V}^*$ к $\mathscr{V}^{**}$, то это отображение будет претендентом на звание естественного отображения $\mathscr{V}$ на $\mathscr{V}^{**}$, — звание, уже присвоенное в главе I другому на вид соответствию. Какова связь между этими двумя естественными соответствиями? Наши утверждения о совпадении, с точностью до тривиальных модификаций, теорий круглых и квадратных скобок действительно оправдываются тем, что, как мы сейчас докажем, эти два отображения тождественно совпадают. (Поскольку $\bar{\bar{\alpha}}=\alpha$, едва ли следует удивляться, что после двух применений докучливая сопряженность исчезнет.) Доказательство короче, чем введение к нему.

Пусть y_0 — любой элемент из $\mathscr{V}$; ему соответствует линейный функционал y_0^* из $\mathscr{V}^*$, определяемый формулой $y_0^*(x)=(x, y_0)$, а этому y_0^*, в свою очередь, — линейный функционал y_0^{**} из $\mathscr{V}^{**}$, определяемый формулой $y_0^{**}(y^*)=(y^*, y_0^*)$. Оба эти соответствия задаются отображением, введенным в этой главе. Ранее (см. § 16) элемент y_0^{**} из $\mathscr{V}^{**}$, соответствующий элементу y_0, определялся формулой $y_0^{**}(y^*)=y^*(y_0)$ для всех y^* из $\mathscr{V}^*$; мы должны показать, что y_0^{**}, как оно было определено нами здесь, удовлетворяет этому тождеству. Пусть y^* — любой линейный функционал на $\mathscr{V}$ (т. е. любой элемент из $\mathscr{V}^*$); имеем

$$y_0^{**}(y^*)=(y^*, y_0^*)=(y_0, y)=y^*(y_0).$$

(Среднее равенство вытекает из определения скалярного произведения в $\mathscr{V}^*$.) Этим разрешены все наши вопросы.

Упражнения

1. Если $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ — подпространства конечномерного пространства со скалярным произведением, то

$$(\mathcal{M}+\mathcal{N})^{\perp}=\mathcal{M}^{\perp}\cap\mathcal{N}^{\perp}$$

и

$$(\mathcal{M}\cap\mathcal{N})^{\perp}=\mathcal{M}^{\perp}+\mathcal{N}^{\perp}.$$

2. Пусть $y'(x)=\frac{1}{3}(\xi_1+\xi_2+\xi_3)$ для каждого $x=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ из $\mathcal{C}^3$; найти вектор y в $\mathcal{C}^3$ такой, что $y'(x)=(x, y)$.

3. Если y — вектор пространства со скалярным произведением, A — линейный оператор на этом пространстве и $f(x)=(y, Ax)$ для всех векторов x, то f есть линейный функционал; найти такой вектор y^*, что $f(x)=(x, y^*)$ для каждого x.

4. a) Если A — линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением, то $\operatorname{tr}(A^*A)\geqslant 0$; $\operatorname{tr}(A^*A)=0$ тогда и только тогда, когда $A=0$. (Указание: перейти к матрицам.) Это свойство следов может часто использоваться для получения ускользающих от других способов алгебраических фактов о произведениях операторов и их сопряженных.

b) Доказать с помощью следов, а также непосредственно, что если $A_1, \ldots, A_k$ — линейные операторы на конечномерном пространстве со скалярным произведением такие, что

$$\sum_{j=1}^{k} A_j^*A_j=0, \text{ то } A_1=\ldots=A_k=0.$$

c) Если $A^*A=B^*B-BB^*$, то $A=0$.

d) Если A^* перестановочно с A и A перестановочно с B, то A^* перестановочно с B. (Указание: если $C=A^*B-BA^*$ и $D=AB-BA$, то $\operatorname{tr}(C^*C)=\operatorname{tr}(D^*D)+\operatorname{tr}[(A^*A-AA^*)(B^*B-BB^*)]$.)

5. a) Пусть $\mathcal{H}$ — унитарное пространство; образуем множество всех упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$ с x и y из $\mathcal{H}$ (т. е. прямую сумму пространства $\mathcal{H}$ с самим собою). Доказать, что равенство

$$(\langle x_1, y_1\rangle, \langle x_2, y_2\rangle)=(x_1, x_2)+(y_1, y_2)$$

определяет в прямой сумме $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$ скалярное произведение.

b) Если U определено формулой $U\langle x, y\rangle=\langle y, -x\rangle$, то $U^*U=1$.

c) *Графиком* линейного оператора A на $\mathcal{H}$ называется множество всех тех элементов $\langle x, y\rangle$ из $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$, для которых $y=Ax$. Доказать, что график любого линейного оператора на $\mathcal{H}$ есть подпространство пространства $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$.

d) Если A — линейный оператор на $\mathcal{H}$ с графиком $\mathcal{G}$, то графиком сопряженного оператора A^* служит ортогональное дополнение (в $\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$) к образу $\mathcal{G}$ относительно U (см. b)).

6. a) Положим для каждого линейного оператора A на конечномерном пространстве со скалярным произведением

$N(A)=\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$; показать, что N есть норма (в пространстве всех линейных операторов).

b) Индуцируется ли норма N скалярным произведением?

7. a) Два линейных оператора A и B на пространстве со скалярным произведением называются *конгруентными*, если существует такой обратимый линейный оператор P, что $B=P^*AP$. (Это понятие часто определяется не для самих линейных операторов, а для «квадратичных форм», ассоциированных с ними; в значительной степени это дело вкуса. Заметим, что если $\alpha(x)=(Ax, x)$ и $\beta(x)=(Bx, x)$, то $B=P^*AP$ влечет $\beta(x)=\alpha(Px)$.) Доказать, что конгруентность является отношением эквивалентности.

b) Если A и B конгруентны, то A^* и B^* также конгруентны.

c) Существует ли линейный оператор A, конгруентный скаляру α, но не равный ему?

d) Существуют ли конгруентные линейные операторы A и B, квадраты которых A^2 и B^2 не конгруентны?

e) Если два обратимых оператора конгруентны, то обратные к ним операторы также конгруентны.

§ 70. Самосопряженные операторы

Займемся теперь изучением алгебраической структуры класса всех линейных операторов на пространстве $\mathcal{V}$ со скалярным произведением. Во многих важных отношениях этот класс походит на класс всех комплексных чисел. В обеих системах определены понятия сложения, умножения, 0 и 1, обладающие похожими свойствами, и в обеих системах существует инволютивный антиавтоморфизм системы на себя (а именно, $A \longrightarrow A^*$ и $\zeta \longrightarrow \bar{\zeta}$). Используем эту аналогию как эвристический принцип и попытаемся перенести на линейные операторы некоторые общеизвестные понятия из комплексной области. Мы столкнемся при этом с двумя трудностями теории линейных операторов, из которых, как это, быть может, ни покажется неожиданным, вторая будет значительно серьезней первой: это — невозможность неограниченного деления и неперестановочность общих линейных операторов.

Наиболее важными подмножествами комплексной плоскости являются множество вещественных чисел, множество положительных вещественных чисел и множество чисел, равных по абсолютной величине единице. Приступая к систематическому проведению нашей эвристической аналогии между операторами и комплексными числами, попытаемся открыть в области операторов аналоги этих общеизвестных числовых понятий.

Когда комплексное число вещественно? Очевидно, необходимым и достаточным условием вещественности ζ является выполнение равенства $\zeta=\bar{\zeta}$. По аналогии с этим можно было бы (вспомнив, что аналогом комплексной сопряженности для линейных операторов является сопряженность) назвать линейный оператор A вещественным, если $A=A^*$. Но более принято линейный оператор A, для которого $A=A^*$, называть *самосопряженным*; в случае евклидовых пространств обычно говорят *симметричный*, а в случае унитарных пространств — *эрмитов.* Мы увидим, что самосопряженные операторы действительно играют такую же роль, как вещественные числа.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормальном базисе характеризуются очень просто. Пусть (α_{ij}) — матрица оператора A; как мы знаем, тогда матрицей сопряженного оператора A^* в сопряженном базисе будет (α^*_{ij}), где $\alpha^*_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}$; так как ортонормальный базис самосопряжен, то при $A=A^*$ получаем

$$\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}.$$

Предоставляем читателю проверить обратное: если A — линейный оператор, определенный с помощью матрицы (α_{ij}) и произвольной ортонормальной координатной системы обычными равенствами

$$A\left(\sum_j \xi_j x_j\right)=\sum_i x\eta_{ii},$$

$$\eta_i=\sum_j \alpha_{ij}\xi_j,$$

и если матрица (α_{ij}) такова, что $\alpha_{ij}=\overline{\alpha_{ji}}$, то A самосопряжен.

Алгебраические правила действий с самосопряженными операторами легко запомнить, если рассматривать такие операторы как аналоги вещественных чисел. Так, если A и B — самосопряженные, то и $A+B$ — самосопряженный; если A — самосопряженный оператор, отличный от 0, и α — ненулевой скаляр, то αA — самосопряженный оператор тогда и только тогда, когда α вещественно;

и если A обратим, то A и A^{-1} будут самосопряженными либо несамосопряженными одновременно. Но есть пункт, в котором всегда что-нибудь не так: умножение; произведение двух самосопряженных операторов может не быть самосопряженным оператором. Положительные факты о произведениях содержатся в следующих двух теоремах.

Теорема 1. *Если A и B — самосопряженные операторы, то AB (или BA) будет самосопряженным тогда и только тогда, когда $AB=BA$ (т. е. когда A и B перестановочны).*

Доказательство. Если $AB = BA$, то $(AB)^*= B^*A^*=BA=AB$. Если $(AB)^*=AB$, то $AB=(AB)^*= B^*A^*=BA$.

Теорема 2. *Если A — самосопряженный оператор, то B^*AB будет самосопряженным для любого B; если B обратим и B^*AB самосопряжен, то A самосопряжен.*

Доказательство. Если $A=A^*$, то $(B^*AB)^*= B^*A^*B^{**}=B^*AB$. Если B обратим и $B^*AB=(B^*AB)^*= B^*A^*B$, то (по умножении слева на B^{*-1} и справа на B^{-1}) $A = A^*$.

Комплексное число ζ чисто мнимо тогда и только тогда, когда $\bar{\zeta}=-\zeta$. Соответствующее понятие для линейных операторов описывается словом «*косой*»; если линейный оператор A на пространстве со скалярным произведением таков, что $A^* = -A$, то A называется *кососимметричным* или *косоэрмитовым* соответственно тому, вещественно пространство или комплексно. Вот одно из доказательств глубокого характера нашей аналогии между комплексными числами и линейными операторами; произвольный линейный оператор A может быть представлен, притом единственным способом, в виде $A=B+C$, где B — самосопряженный, а C — косой. (Представление A в таком виде иногда называется *декартовым разложением* оператора A.) Действительно, если положить

$$B=\frac{A+A^*}{2}, \tag{1}$$

$$C=\frac{A-A^*}{2}, \tag{2}$$

то $B^* = \frac{A^*+A}{2} = B$ и $C^* = \frac{A^*-A}{2} = -C$ и, конечно, $A = B + C$. Из этого доказательства существования декартова разложения ясна также единственность последнего; если $A = B + C$ — декартово разложение, то $A^* = B - C$, и, значит, A, B и C вновь связаны соотношениями (1) и (2).

В комплексном случае имеется простой способ получения косоэрмитовых операторов из эрмитовых и обратно, именно — умножение на $i (= \sqrt{-1})$. Отсюда следует, что, в комплексном случае, каждый линейный оператор A допускает однозначно определенное представление в виде $A = B + iC$, где B и C эрмитовы. Мы будем рассматривать B и C как вещественную и мнимую части оператора A.

Упражнения

1. Привести пример двух самосопряженных операторов, произведение которых не было бы самосопряженным.

2. Рассмотрим пространство $\mathcal{P}_n$ со скалярным произведением, задаваемым формулой $(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$.

a) Самосопряжен ли оператор умножения T (определенный формулой $(Tx)(t) = tx(t)$)?

b) Самосопряжен ли оператор дифференцирования D?

3. a) Доказать, что равенство $(x, y) = \sum_{j=0}^{n} x\left(\frac{j}{n}\right)\overline{y\left(\frac{j}{n}\right)}$ определяет в пространстве $\mathcal{P}_n$ скалярное произведение.

b) Самосопряжен ли оператор умножения T (определенный формулой $(Tx)(t) = tx(t)$) при определении скалярного произведения, данном в a)?

c) Самосопряжен ли оператор дифференцирования D?

4. Если A и B — такие линейные операторы, что A и AB — самосопряженные и $\mathcal{N}(A) \subset \mathcal{N}(B)$, то существует самосопряженный оператор C такой, что $CA = B$.

5. Пусть A и B конгруентны и A косой; следует ли отсюда, что B косой?

6. Если A косой, то влечет ли это, что A^2 косой? Как насчет A^3?

7. Если операторы A и B оба самосопряженные или оба косые, то $AB + BA$ — самосопряженный оператор, а $AB - BA$ косой. Что будет, если один из операторов, A или B, самосопряженный, а другой косой?

8. Если A — кососимметричный оператор на евклидовом пространстве, то $(Ax, x) = 0$ для каждого вектора x. Обратно?

9. Если A — самосопряженный или косой и $A^2x = 0$, то $Ax = 0$.

10. a) Если A — кососимметричный оператор на евклидовом пространстве нечетной размерности, то $\det A = 0$.

b) Если A — кососимметричный оператор на конечномерном евклидовом пространстве, то $\rho(A)$ четно.

§ 71. Поляризация

Прежде чем продолжить программу исследования аналогий между комплексными числами и линейными операторами, уделим время ознакомлению с некоторыми важными вспомогательными результатами, относящимися к пространствам со скалярным произведением.

Теорема 1. *Для того чтобы линейный оператор A на пространстве со скалярным произведением был равен* 0, *необходимо и достаточно, чтобы* $(Ax, y) = 0$ *для всех* x *и* y.

Доказательство. Необходимость условия очевидна; достаточность получим, взяв y равным Ax.

Теорема 2. *Для того чтобы самосопряженный линейный оператор A на пространстве со скалярным произведением был равен* 0, *необходимо и достаточно, чтобы* $(Ax, x) = 0$ *для всех* x.

Доказательство. Необходимость очевидна. Доказательство достаточности начнем с проверки тождества

$$(Ax, y) + (Ay, x) = (A(x+y), x+y) - (Ax, x) - (Ay, y). \quad (1)$$

(Разложить первый член правой части.) Поскольку A самосопряжен, левая часть этой формулы равна $2\operatorname{Re}(Ax, y)$. Из принятого нами условия следует, что правая часть равна нулю; значит, $\operatorname{Re}(Ax, y) = 0$. С этого места доказательство расщепляется на два случая. Если рассматриваемое пространство со скалярным произведением вещественное (так что оператор A симметричен), то (Ax, y) вещественно и потому $(Ax, y) = 0$. Если же пространство комплексное (т. е. A эрмитов), то находим комплексное число θ такое, что $|\theta| = 1$ и $\theta(Ax, y) = |(Ax, y)|$. (Здесь x и y временно зафиксированы.) Уже имеющийся у нас результат, примененный к θx вместо x, дает

$0 = \operatorname{Re}(A(\theta x), y) = \operatorname{Re}\theta(Ax, y) = \operatorname{Re}|(Ax, y)| = |(Ax, y)|$. Поэтому в любом случае $(Ax, y) = 0$ для всех x и y, и справедливость утверждения теоремы следует из теоремы 1.

Небесполезно задаться вопросом, насколько важна в теореме 2 самосопряженность оператора A; ответ заключается в том, что в комплексном случае она совсем не важна.

Теорема 3. *Для того чтобы линейный оператор A на унитарном пространстве был равен* 0, *необходимо и достаточно, чтобы* $(Ax, x) = 0$ *для всех* x.

Доказательство. Как и прежде, необходимость очевидна. Для доказательства достаточности используем так называемое *поляризационное* тождество:

$$\alpha\bar{\beta}(Ax, y) + \bar{\alpha}\beta(Ay, x) =$$
$$= (A(\alpha x + \beta y), \alpha x + \beta y) - |\alpha|^2(Ax, x) - |\beta|^2(Ay, y). \qquad (2)$$

(Так же как в случае формулы (1), доказательство состоит в разложении первого члена правой части.) Если (Ax, x) тождественно равно нулю, то, беря сначала $\alpha = \beta = 1$, а затем $\alpha = i\,(= \sqrt{-1})$, $\beta = 1$, получаем

$$(Ax, y) + (Ay, x) = 0,$$
$$i(Ax, y) - i(Ay, x) = 0.$$

Деля второе из этих равенств на i и затем образуя их среднее арифметическое, видим, что $(Ax, y) = 0$ для всех x и y, так что, по теореме 1, $A = 0$.

Этот процесс поляризации часто используется для получения информации о «билинейной форме» (Ax, y), когда предполагается лишь знание «квадратичной формы» (Ax, x).

Важно заметить, что, несмотря на кажущуюся простоту, в теореме 3 существенно используется система комплексных чисел; эта теорема и многие ее следствия оказываются уже неверными для вещественных пространств со скалярным произведением. Конечно, и доказательство отказывает в том месте, где мы берем $\alpha = \sqrt{-1}$. Для примера рассмотрим вращение плоскости на 90°; очевидно, оно обладает свойством переводить каждый вектор x в ортогональный к нему вектор.

Мы видели, что эрмитовы операторы играют такую же роль, как вещественные числа; следующая теорема показывает, что они связаны с понятием вещественности более глубоким образом, чем формальной аналогией, подсказавшей их определение.

Теорема 4. *Для того чтобы линейный оператор A на унитарном пространстве был эрмитовым, необходимо и достаточно, чтобы (Ax, x) было вещественно для всех x.*

Доказательство. Если $A = A^*$, то

$$(Ax, x) = (x, A^*x) = (x, Ax) = \overline{(Ax, x)},$$

так что (Ax, x), совпадая со своим сопряженным, вещественно. Обратно, если (Ax, x) всегда вещественно, то

$$(Ax, x) = \overline{(Ax, x)} = \overline{(x, A^*x)} = (A^*x, x),$$

так что $([A - A^*]x, x) = 0$ для всех x, и, по теореме 3, $A = A^*$.

Теорема 4 не верна для вещественных пространств со скалярным произведением. Это и следовало ожидать, поскольку, во-первых, ее доказательство опирается на теорему, справедливую только для унитарных пространств, и, во-вторых, в вещественном пространстве число (Ax, x) автоматически вещественное, в то время как тождество $(Ax, y) = (x, Ay)$ не всегда выполнено.

§ 72. Положительные операторы

Когда комплексное число ζ положительно (т. е. $\geqslant 0$)? Два, в равной степени естественных, необходимых и достаточных условия состоят в том, что ζ может быть записано или в виде $\zeta = \xi^2$ с некоторым вещественным ξ или в виде $\zeta = \bar{\sigma}\sigma$ с некоторым (вообще комплексным) σ. Вспомнив еще тот факт, что (по крайней мере для унитарных пространств), эрмитовость оператора A может быть описана в терминах скалярных произведений (Ax, x), можно попытаться использовать в качестве определения положительности операторов любое из следующих трех условий:

1) $A = B^2$ для некоторого самосопряженного B,
2) $A = C^*C$ для некоторого C,
3) A самосопряжен и $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех x.

Прежде чем решить, какое из этих трех условий использовать в качестве определения, заметим, что 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3). Действительно, если $A = B^2$ и $B = B^*$, то $A = BB = B^*B$, и если $A = C^*C$, то $A^* = C^*C = A$ и $(Ax, x) = (C^*Cx, x) = (Cx, Cx) = \|Cx\|^2 \geqslant 0$. В действительности верно и то, что 3) влечет 1), так что указанные три условия равносильны; но мы сможем доказать это лишь позже. Мы примем в качестве определения третье условие.

Определение. Линейный оператор A на пространстве со скалярным произведением назовем *положительным*, для обозначения чего будем писать $A \geqslant 0$, если он самосопряжен и $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех x.

Более общим образом, мы будем писать $A \geqslant B$ (или $B \leqslant A$), если $A - B \geqslant 0$. Хотя, конечно, вполне возможно, что разность двух даже несамосопряженных операторов может оказаться положительной, мы будем обычно писать неравенства только для самосопряженных операторов. Заметим, что в случае комплексного пространства со скалярным произведением часть определения положительности излишня: если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех x, то, в частности, (Ax, x) вещественно для всех x, и, по теореме 4 предыдущего параграфа, A должен быть положительным.

Положительные операторы принято называть также *неотрицательно полуопределенными*. Если $A \geqslant 0$ и $(Ax, x) = 0$ влечет $x = 0$, мы будем говорить, что A *строго положителен*; принятый термин — *положительно определенный*. Так как, по неравенству Шварца,

$$|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\|,$$

мы видим, что если A — строго положительный оператор и $Ax = 0$, то $x = 0$, так что в конечномерном пространстве со скалярным произведением строго положительный оператор обратим. Позже мы увидим, что верно и обратное: если $A \geqslant 0$ и A обратим, то A строго положителен. Иногда бывает удобно выражать факт строгой положительности оператора A записью $A > 0$; если $A - B > 0$, мы будем также писать $A > B$ (или $B < A$).

Можно дать и матричную характеризацию положительных операторов; но пока отложим это рассмотрение. Тем временем мы будем иметь случай говорить о положительных матрицах, понимая под этим эрмитово симметричные матрицы (α_{ij}) (т. е. такие, что $\alpha_{ij}=\overline{\alpha}_{ji}$), обладающие тем свойством, что $\sum\limits_i\sum\limits_j \alpha_{ij}\xi_i\overline{\xi}_j \geqslant 0$ для каждой последовательности n скаляров $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. (В вещественном случае черточки можно опустить; в комплексном случае второе условие уже влечет эрмитову симметрию.) Ясно, что эти условия равносильны условию, что (α_{ij}) есть матрица положительного оператора в некоторой ортогональной координатной системе.

Алгебраические правила действий над положительными операторами, в том, что касается сложения, умножения на скаляры и обращения, подобны правилам для самосопряженных операторов; даже теорема 2 § 70 сохраняет силу, если всюду заменить «самосопряженный» на «положительный». Верно также, что если A и B положительные, то для положительности их произведения AB (или BA) необходимо и достаточно, чтобы $AB = BA$ (т. е. чтобы A и B были перестановочны), но доказательство этого утверждения нам придется на время отложить.

Упражнения

1. Каким условиям должен удовлетворять линейный оператор A, чтобы функция (Ax, y) переменных x и y обладала свойствами скалярного произведения?

2. Какие из следующих матриц положительны?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. d) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$. e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Для каких значений α матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

положительна?

4. a) Если A — самосопряженный оператор, то число $\operatorname{tr} A$ вещественно.

b) Если $A \geqslant 0$, то $\operatorname{tr} A \geqslant 0$.

5. a) Привести пример положительной матрицы, некоторые элементы которой были бы отрицательны.

b) Привести пример неположительной матрицы, все элементы которой были бы положительны.

6. Квадратная матрица второго порядка $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ (рассматриваемая как линейный оператор на $\mathscr{C}^2$) положительна тогда и только тогда, когда она эрмитово симметрична (т. е. α и δ вещественны, а $\gamma = \bar{\beta}$), $\alpha \geqslant 0$, $\delta \geqslant 0$ и $\alpha\delta - \beta\gamma \geqslant 0$.

7. В пространстве со скалярным произведением с каждой последовательностью k векторов $(x_1, \ldots, x_k)$ ассоциируется квадратная матрица k-го порядка (не линейный оператор), называемая *грамианом* последовательности $(x_1, \ldots, x_k)$ и обозначаемая $G(x_1, \ldots, x_k)$; элементом, стоящим на пересечении i-й строки и j-го столбца в $G(x_1, \ldots, x_k)$, служит скалярное произведение (x_i, x_j). Доказать, что каждый грамиан является положительной матрицей.

8. Пусть x и y — ненулевые векторы (конечномерного пространства со скалярным произведением); для существования такого положительного оператора A, что $Ax = y$, необходимо и достаточно, чтобы $(x, y) > 0$.

9. a) Если матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ рассматривать как линейные операторы на $\mathscr{C}^2$ и C — эрмитова матрица (эрмитов линейный оператор на $\mathscr{C}^2$), такая, что $A \leqslant C$ и $B \leqslant C$, то

$$C = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon & \theta \\ \bar{\theta} & 1+\delta \end{pmatrix},$$

где ε и δ — положительные вещественные числа и $|\theta|^2 \leqslant \leqslant \min\{\varepsilon(1+\delta), \ \delta(1+\varepsilon)\}$.

b) Если, кроме того, $C \leqslant 1$, то $\varepsilon = \delta = \theta = 0$. В современной терминологии эти факты в совокупности показывают, что эрмитовы матрицы с упорядочением, индуцированным понятием положительности, не образуют *решетки* («структуры»). В вещественном случае, если трактовать матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$ как точку (α, β, γ) трехмерного пространства, упорядочение и его нерешеточность приобретают любопытный геометрический смысл.

§ 73. Изометрии

Продолжим нашу программу исследования аналогии между числами и операторами. Когда модуль комплексного числа равен единице? Очевидно, необходимое и достаточное условие состоит в том, чтобы $\bar{\zeta} = \frac{1}{\zeta}$; руководимые нашим эвристическим принципом, мы приходим к рассмотрению линейных операторов U, для которых $U^* = U^{-1}$ или, что равносильно этому, для которых $UU^* = U^*U = 1$. (Заметим, что в конечномерном векторном пространстве каждое из двух условий $UU^* = 1$ и $U^*U = 1$ влечет другое; см. теоремы 1 и 2 § 36.) Такие операторы называются *ортогональными* или *унитарными* соответственно тому, вещественно рассматриваемое пространство со скалярным произведением или комплексно. Перейдем к выводу пары других полезных характеризаций этих операторов.

Теорема. *Следующие три условия относительно линейного оператора U на пространстве со скалярным произведением равносильны:*

$$U^*U = 1, \tag{1}$$

$$(Ux,\ Uy) = (x,\ y) \quad \text{для всех } x \text{ и } y, \tag{2}$$

$$\|Ux\| = \|x\| \text{ для всех } x. \tag{3}$$

Доказательство. Если выполнено условие (1), то

$$(Ux,\ Uy) = (U^*Ux,\ y) = (x,\ y)$$

для всех x и y, и, в частности,

$$\|Ux\|^2 = \|x\|^2$$

для всех x; это доказывает сразу импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (2) $\Rightarrow$ (3). Для завершения доказательства покажем, что (3) влечет (1). Если выполнено условие (3), так что $(U^*Ux, x) = (x, x)$ для всех x, то к (самосопряженному) оператору $U^*U - 1$ применима теорема 2 § 71; в результате получаем, что $U^*U = 1$ (что и требовалось).

Поскольку (3) влечет

$$\|Ux - Uy\| = \|x - y\| \tag{4}$$

для всех x и y (обратная импликация (4) $\Rightarrow$ (3) также верна и тривиальна), мы видим, что операторы, рассматриваемые в теореме, характеризуются тем, что они сохраняют расстояния. По этой причине мы будем называть такой оператор *изометрией*. Поскольку, как уже было замечено, изометрия на конечномерном пространстве обязательно является ортогональным или унитарным оператором (соответственно тому, вещественно или комплексно рассматриваемое пространство), использование этой терминологии даст нам возможность трактовать вещественный и комплексный случаи одновременно. Отметим, что (в конечномерном пространстве) изометрия всегда обратима, причем $U^{-1}(=U^*)$ есть изометрия вместе с U.

В любой алгебраической системе, и, в частности, в общих векторных пространствах и пространствах со скалярным произведением, представляет интерес рассмотрение автоморфизмов этой системы, т. е. тех взаимно однозначных отображений системы на себя, которые сохраняют все структурные отношения между его элементами. Мы уже видели, что автоморфизмы общего векторного пространства — это обратимые линейные операторы. В пространстве со скалярным произведением от автоморфизма требуется большее, а именно, чтобы он сохранял также скалярные произведения (а следовательно, длины и расстояния). Последняя теорема показывает, что это требование равносильно условию, чтобы оператор, осуществляющий автоморфизм, являлся изометрией. (Здесь мы предполагаем конечномерность; в бесконечномерных пространствах область значений изометрии не обязательно совпадает со всем пространством. Эта несущественная для нас жертва в общности принесена ради терминологического удобства; в случае бесконечномерных пространств нет общепринятого термина, одновременно описывающего ортогональные и унитарные операторы.) Таким образом, на два вопроса: «Какие линейные операторы являются аналогами комплексных чисел, равных по абсолютной величине единице?» и «Каковы наиболее общие автоморфизмы конечномерного пространства со скалярным произведением?» — один ответ: изометрии. В следующем параграфе мы покажем, что изометрии дают ответ также на третий важный вопрос.

§ 74. Изменение ортогонального базиса

Мы видели, что теорию перехода от одного линейного базиса векторного пространства к другому лучше всего изучать с помощью ассоциированного линейного оператора A (§§ 46, 47); возникает вопрос, какими специальными свойствами обладает оператор A перехода от одного ортонормального базиса пространства со скалярным произведением к другому. На этот вопрос легко ответить.

Теорема 1. *Если $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ — ортонормальный базис n-мерного пространства $\mathcal{V}$ со скалярным произведением и U — изометрия на $\mathcal{V}$, то $U\mathcal{X} = \{Ux_1, \ldots, Ux_n\}$ — также ортонормальный базис пространства $\mathcal{V}$. Обратно, если U — линейный оператор и $\mathcal{X}$ — ортонормальный базис, обладающие тем свойством, что $U\mathcal{X}$ тоже есть ортонормальный базис, то U — изометрия.*

Доказательство. Так как $(Ux_i, Ux_j) = (x_i, x_j) = \delta_{ij}$, то $U\mathcal{X}$, как и $\mathcal{X}$, — ортонормальное множество; оно полно вместе с $\mathcal{X}$, поскольку $(x, Ux_i) = 0$ для $i = 1, \ldots, n$ влечет $(U^*x, x_i) = 0$, и, значит, $U^*x = x = 0$. Обратно, если $U\mathcal{X}$ есть вместе с $\mathcal{X}$ полное ортонормальное множество, то $(Ux, Uy) = (x, y)$ для любых x и y из $\mathcal{X}$, а отсюда по линейности очевидно следует, что $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех x и y.

Заметим, что матрица (u_{ij}) изометрии в произвольном ортонормальном базисе удовлетворяет условиям

$$\sum_k \bar{u}_{ki} u_{jk} = \delta_{ij},$$

и что, обратно, любая такая матрица, вместе с ортонормальным базисом, определяет изометрию. (Доказательство: $U^*U = 1$. В вещественном случае черточки можно опустить.) Для краткости мы будем матрицу, удовлетворяющую этим условиям, называть *изометрической матрицей.*

Одним из интересных и простых результатов наших рассмотрений, относящихся к изометриям, является такое следствие теоремы 1 § 56:

Теорема 2. *Для любого линейного оператора A на n-мерном пространстве $\mathcal{V}$ со скалярным произведением существует ортонормальный базис $\mathcal{X}$ в $\mathcal{V}$ такой, что матрица $[A; \mathcal{X}]$ треугольна; или, равносильно этому, для любой матрицы $[A]$ существует изометрическая матрица $[U]$ такая, что матрица $[U]^{-1}[A][U]$ треугольна.*

Доказательство. При выводе теоремы 2 § 56 из теоремы 1 был построен (линейный) базис $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$, обладающий тем свойством, что $x_1, \ldots, x_j$ принадлежат и порождают $\mathcal{M}_j$ для $j=1, \ldots, n$, и мы показали, что в этом базисе матрица оператора A треугольна. Если бы мы знали, что этот базис к тому же является ортонормальным, мы могли бы получить утверждаемый результат, применив теорему 1 этого параграфа. Если $\mathcal{X}$ не является ортонормальным базисом, легко превратить его в таковой; это как раз то, что можно делать с помощью процесса ортогонализации Грама — Шмидта (§ 65). Здесь мы используем специальное свойство процесса Грама — Шмидта, а именно то, что j-й элемент доставляемого им ортонормального базиса является линейной комбинацией векторов $x_1, \ldots, x_j$ и потому принадлежит $\mathcal{M}_j$.

Упражнения

1. Пусть $(Ax)(t)=x(-t)$ на $\mathcal{P}$ (со скалярным произведением, задаваемым формулой $(x, y)=\int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$). Будет ли линейный оператор A изометрическим? Самосопряженным?

2. При каких значениях α будут изометрическими следующие матрицы:

$$\text{a)}\quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad \text{b)}\quad \begin{pmatrix} \alpha & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \alpha \end{pmatrix}.$$

3. Найти изометрическую матрицу третьего порядка, первая строка которой кратна (1, 1, 1).

4. Если линейный оператор обладает любыми двумя из свойств быть самосопряженным, изометрическим или инволютивным, то он обладает и третьим. (Напомним, что инволюция — это линейный оператор A, для которого $A^2=1$.)

5. Если изометрическая матрица треугольна, то она диагональна.

6. Пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ — две последовательности векторов одного и того же пространства со скалярным произведением. Для существования изометрии U такой, что $Ux_i=y_i$, $i=1, \ldots, k$, необходимо и достаточно, чтобы $(x_1, \ldots, x_k)$ и $(y_1, \ldots, y_k)$ обладали одним и тем же грамианом.

7. Отображение $\xi \to \dfrac{\xi+1}{\xi-1}$ взаимно однозначно отображает мнимую ось комплексной плоскости на единичную окружность с удаленной точкой 1; обратное отображение (этой окружности без точки 1 на мнимую ось) задается той же формулой. Операторные аналоги этих геометрических фактов таковы:

a) Если оператор A — косой, то $A-1$ обратим.

b) $U=(A+1)(A-1)^{-1}$ — изометрия. (Указание: $\|(A+1)y\|^2=\|(A-1)y\|^2$ для каждого y.)

c) оператор $U-1$ обратим.

d) Если U — изометрия и оператор $U-1$ обратим, то $A=(U+1)(U-1)^{-1}$ — косой.

Каждый из операторов A и U называется *преобразованием Кели* другого.

8. Пусть U — оператор (не предполагаемый линейным), отображающий пространство $\mathcal{V}$ со скалярным произведением на себя (так что Ux принадлежит $\mathcal{V}$ для всех x из $\mathcal{V}$, и если y принадлежит $\mathcal{V}$, то $y=Ux$ для некоторого x из $\mathcal{V}$) и такой, что $(Ux, Uy)=(x, y)$ для всех x и y.

a) Доказать, что U взаимно однозначен и, если обозначить через U^{-1} обратный оператор, что $(U^{-1}x, U^{-1}y)=(x, y)$ и $(Ux, y)=(x, U^{-1}y)$ для всех x и y.

b) Доказать, что U линеен. (Указание: $(x, U^{-1}y)$ линейно зависит от x.)

9. Назовем *сопряжением* оператор J (не предполагаемый линейным), отображающий унитарное пространство на себя так, что $J^2=1$ и $(Jx, Jy)=(y, x)$ для всех x и y.

a) Дать пример сопряжения.

b) Доказать, что $(Jx, y)=(Jy, x)$.

c) Доказать, что $J(x+y)=Jx+Jy$.

d) Доказать, что $J(\alpha x)=\bar{\alpha}\cdot Jx$.

10. Назовем линейный оператор A *вещественным* относительно сопряжения J, если $AJ=JA$.

a) Дать пример эрмитова оператора, не являющегося вещественным, и вещественного оператора, не являющегося эрмитовым.

b) Спектр вещественного оператора симметричен относительно вещественной оси.

c) Если A — вещественный оператор, то и A^* — вещественный.

11. Теорема 2 § 74 показывает, что треугольная форма может быть достигнута с помощью ортонормального базиса; верно ли то же для жордановой формы?

12. Если $\operatorname{tr} A=0$, то существует изометрическая матрица U такая, что все диагональные элементы матрицы $[U]^{-1}[A][U]$ равны нулю. (Указание: см. упражнение 6 § 56.)

§ 75. Перпендикулярные проекторы

Теперь мы в состоянии выполнить данное нами ранее обещание исследовать проекторы, связанные со специальным разложением в прямую сумму $\mathcal{V}=\mathcal{M}\oplus\mathcal{M}^{\perp}$. Мы будем называть их *перпендикулярными проекторами*. Так как $\mathcal{M}^{\perp}$ однозначно определяется подпространством $\mathcal{M}$, нет необходимости указывать оба прямых слагаемых, ассоциированных с проектором, если уже известно, что он —

перпендикулярный. Мы будем называть (перпендикулярный) проектор E на $\mathscr{M}$ параллельно $\mathscr{M}^{\perp}$ просто проектором на $\mathscr{M}$ и писать $E = P_{\mathscr{M}}$.

Теорема 1. *Линейный оператор E есть перпендикулярный проектор тогда и только тогда, когда $E = E^2 = E^*$. Перпендикулярные проекторы являются положительными линейными операторами и обладают тем свойством, что $\|Ex\| \leqslant \|x\|$ для всех x.*

Доказательство. Если E — перпендикулярный проектор, то теорема 1 § 45 и теорема § 20 показывают (разумеется, после обычных замен, вроде замены $\mathscr{M}^{\circ}$ на $\mathscr{M}^{\perp}$ и A на A^*), что $E = E^*$. Обратно, если $E = E^2 = E^*$, то идемпотентность E обеспечивает, что E есть проектор на $\mathscr{R}$ параллельно $\mathscr{N}$, где, конечно, $\mathscr{R} = \mathscr{R}(E)$ и $\mathscr{N} = \mathscr{N}(E)$ — соответственно область значений и нуль-пространство оператора E. Следовательно, нам нужно только показать, что $\mathscr{R}$ и $\mathscr{N}$ ортогональны. Для этой цели пусть x — любой элемент из $\mathscr{R}$ и y — любой элемент из $\mathscr{N}$; требуемый результат следует из соотношений

$$(x, y) = (Ex, y) = (x, E^*y) = (x, Ey) = 0.$$

Положительность оператора E, удовлетворяющего равенствам $E = E^2 = E^*$, следует из соотношений

$$(Ex, x) = (E^2x, x) = (Ex, E^*x) = (Ex, Ex) = \|Ex\|^2 \geqslant 0.$$

Применяя этот результат к перпендикулярному проектору $1 - E$, видим, что

$$\|x\|^2 - \|Ex\|^2 = (x, x) - (Ex, x) = ([1 - E]\,x, x) \geqslant 0,$$

что и завершает доказательство теоремы.

Для некоторых обобщений нашей теории полезно знать, что идемпотентность и последнее свойство, упомянутое в теореме 1, также характеризуют перпендикулярные проекторы.

Теорема 2. *Если линейный оператор E таков, что $E = E^2$ и $\|Ex\| \leqslant \|x\|$ для всех x, то $E = E^*$.*

Доказательство. Нам нужно показать, что область значений $\mathscr{R}$ и нуль-пространство $\mathscr{N}$ оператора E ортогональны. Пусть x принадлежит $\mathscr{N}^{\perp}$; $y = Ex - x$ принадлежит $\mathcal{N}$, поскольку $Ey = E^2x - Ex = Ex - Ex = 0$. Поэтому $Ex = x + y$, причем $(x, y) = 0$, так что

$$\|x\|^2 \geqslant \|Ex\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \geqslant \|x\|^2,$$

и, значит, $y = 0$. Следовательно, $Ex = x$, так что x принадлежит $\mathcal{R}$; этим доказано, что $\mathcal{N}^{\perp} \subset \mathcal{R}$. Обратно, пусть z принадлежит $\mathcal{R}$, так что $Ez = z$. Имеем $z = x + y$ с x из $\mathcal{N}^{\perp}$ и y из $\mathcal{N}$. Тогда $z = Ez = Ex + Ey = Ex = x$. (Последнее равенство основывается на том, что x принадлежит $\mathcal{N}^{\perp}$, а значит, и $\mathcal{R}$.) Следовательно, z принадлежит $\mathcal{N}^{\perp}$, так что $\mathcal{R} \subset \mathcal{N}^{\perp}$ и, значит, $\mathcal{R} = \mathcal{N}^{\perp}$.

Нам нужен будет также тот факт, что теорема § 42 остается верной, если под словом «проектор» понимать всюду «перпендикулярный проектор». Это непосредственно следует из последней характеризации перпендикулярных проекторов и того факта, что суммы и разности самосопряженных операторов являются самосопряженными операторами, в то время как произведение двух самосопряженных операторов будет самосопряженным тогда и только тогда, когда они перестановочны. С помощью наших теперешних геометрических методов совсем нетрудно обобщить также часть указанной теоремы, относящуюся к суммам, с двух на любое конечное число слагаемых. Обобщение наиболее удобно формулируется в терминах понятия ортогональности проекторов; мы будем говорить, что два (перпендикулярных) проектора E и F *ортогональны* друг к другу, если $EF = 0$. (Рассмотрение сопряженных операторов показывает, что это равносильно требованию, чтобы $FE = 0$.) Следующая теорема оправдывает этот геометрический язык.

Теорема 3. *Два перпендикулярных проектора $E = P_{\mathcal{M}}$ и $F = P_{\mathcal{N}}$ ортогональны друг к другу тогда и только тогда, когда подпространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ (т. е. области значений проекторов E на F) ортогональны.*

Доказательство. Если $EF = 0$ и векторы x и y принадлежат соответственно областям значений проекторов E и F, то

$$(x, y) = (Ex, Fy) = (x, E^*Fy) = (x, EFy) = 0.$$

Обратно, если $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ ортогональны (так что $\mathscr{N} \subset \mathscr{M}^{\perp}$), то из того, что $Ex = 0$ для всех x из $\mathscr{M}^{\perp}$, следует. что $EFx = 0$ для всех x (поскольку Fx принадлежит $\mathscr{N}$ и тем самым $\mathscr{M}^{\perp}$).

§ 76. Комбинации перпендикулярных проекторов

Теперь легко доказать теорему о сумме перпендикулярных проекторов.

Теорема 1. *Если $E_1, \ldots, E_n$ — (перпендикулярные) проекторы, то для того, чтобы $E = E_1 + \ldots + E_n$ было (перпендикулярным) проектором, необходимо и достаточно, чтобы $E_iE_j = 0$ при $i \neq j$ (т. е. чтобы E_i были попарно ортогональны).*

Доказательство. Доказательство достаточности условия тривиально; требует доказательства лишь его необходимость, для чего мы предположим теперь, что E — перпендикулярный проектор. Если x принадлежит области значений некоторого E_i, то

$$\|x\|^2 \geqslant \|Ex\|^2 = (Ex, x) = \Big(\sum_j E_jx, x\Big) = \\ = \sum_j (E_jx, x) = \sum_j \|E_jx\|^2 \geqslant \|E_ix\|^2 = \|x\|^2,$$

так что всюду должно иметь место равенство. Так как, в частности, должно выполняться равенство

$$\sum \|E_jx\|^2 = \|E_ix\|^2,$$

то заключаем, что $E_jx = 0$ для всех $j \neq i$. Другими словами, каждый вектор x из области значений проектора E_i принадлежит нуль-пространству (и, следовательно, ортогонален к области значений) любого E_j с $j \neq i$; используя теорему 3 § 75, приходим к требуемому результату.

Заключим наше ознакомление с проекторами беглым рассмотрением отношений порядка. Соблазнительно писать $E \leqslant F$ для двух перпендикулярных проекторов $E = P_{\mathscr{M}}$ и $F = P_{\mathscr{N}}$, когда $\mathscr{M} \subset \mathscr{N}$. Однако ранее мы понимали знак $\leqslant$ в выражении, содержащем линейные операторы E и F (например, $E \leqslant F$), в том смысле, что $F - E$ есть положительный оператор. Существуют также другие возможные основания считать E меньшим, чем F: мы могли бы иметь $\|Ex\| \leqslant \|Fx\|$ для всех x, или $FE = EF = E$ (см. § 42, (II)). Ситуация разрешается следующей теоремой, играющей здесь роль, подобную роли теоремы 3 § 75, т. е. устанавливающей совпадение нескольких на вид различных понятий, касающихся проекторов, частью определенных алгебраически, а частью относящихся к основным геометрическим объектам.

Теорема 2. *Для перпендикулярных проекторов $E = P_{\mathcal{M}}$ и $F = P_{\mathcal{N}}$ следующие условия равносильны:*

(I) $E \leqslant F$.

(II) $\|Ex\| \leqslant \|Fx\|$ для всех x.

(III) $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$.

(IVa) $FE = E$.

(IVb) $EF = E$.

Доказательство. Мы докажем импликации (I) $\Rightarrow$ (II) $\Rightarrow$ (III) $\Rightarrow$ (IVa) $\Rightarrow$ (IVb) $\Rightarrow$ (I).

(I) $\Rightarrow$ (II). Если $E \leqslant F$, то, для всех x,

$$0 \leqslant ([F - E]\, x, x) = (Fx, x) - (Ex, x) = \|Fx\|^2 - \|Ex\|^2$$

(поскольку E и F — перпендикулярные проекторы).

(II) $\Rightarrow$ (III). Предположим, что $\|Ex\| \leqslant \|Fx\|$ для всех x. Возьмем теперь любое x из $\mathcal{M}$; тогда

$$\|x\| \geqslant \|Fx\| \geqslant \|Ex| = \|\|x\|,$$

так что $\|Fx\| = \|x\|$, или $(x, x) - (Fx, x) = 0$, откуда

$$([1 - F]\, x, x) = \|(1 - F)\, x\|^2 = 0,$$

и, следовательно, $x = Fx$. Другими словами, принадлежность x подпространству $\mathcal{M}$ влечет принадлежность x подпространству $\mathcal{N}$, что и требовалось.

(III) $\Rightarrow$ (IVa). Если $\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$, то Ex принадлежит $\mathcal{N}$ для всех x, так что $FEx = Ex$ для всех x, что и требовалось.

То, что (IVa) влечет (IVb) и даже равносильно ему, доказывается переходом к сопряженным операторам.

(IV) $\Rightarrow$ (I). Если $EF = FE = E$, то, для всех x,

$$(Fx, x) - (Ex, x) = (Fx, x) - (FEx, x) = (F\,[1 - E]\, x, x).$$

Поскольку E и F — перестановочные проекторы, то же верно для $1 - E$ и F, и, значит, $G = F(1 - E)$ есть проектор. Следовательно,

$$(Fx, x) - (Ex, x) = (Gx, x) = \| Gx \|^2 \geqslant 0,$$

и теорема 2 полностью доказана.

В терминах введенных к настоящему моменту понятий можно дать следующую интуитивно звучащую формулировку теоремы § 42 (поскольку она применяется к перпендикулярным проекторам). Если E и F — два перпендикулярных проектора, то их сумма, произведение или разность также является перпендикулярным проектором тогда и только тогда, когда F соответственно ортогонально к E, перестановочно с E или больше, чем E.

Упражнения

1. a) Привести пример не перпендикулярного проектора.

b) Привести пример двух проекторов E и F (они не могут быть оба перпендикулярными), таких, что $EF=0$, а $FE \neq 0$.

2. Найти (перпендикулярную) проекцию вектора (1, 1, 1) на одномерное подпространство пространства $\mathscr{C}^3$, порожденное вектором (1, —1, 1). (Другими словами, найти образ данного вектора относительно проектора на данное подпространство.)

3. Найти матрицы всех перпендикулярных проекторов в $\mathscr{C}^2$.

4. Пусть $U=2E-1$; для того, чтобы U был инволютивной изометрией, необходимо и достаточно, чтобы E был перпендикулярным проектором.

5. Линейный оператор U называется *частично изометрическим*, если существует такое подпространство $\mathscr{M}$, что $\|Ux\| = \|x\|$, когда x принадлежит $\mathscr{M}$, и $Ux=0$, когда x принадлежит $\mathscr{M}^{\perp}$.

a) Оператор, сопряженный к частично изометрическому, является частично изометрическим.

b) Если U — частично изометрический оператор и $\mathscr{M}$ — такое подпространство, что $\|Ux\| = \|x\|$ или 0 соответственно тому, принадлежит ли x ему или его ортогональному дополнению $\mathscr{M}^{\perp}$, то U^*U есть перпендикулярный проектор на $\mathscr{M}$.

c) Каждое из следующих четырех условий необходимо и достаточно для частичной изометричности линейного оператора U: (I) $UU^*U=U$, (II) U^*U есть проектор, (III) $U^*UU^*=U^*$, (IV) UU^* есть проектор.

d) Если λ есть собственное значение частично изометрического оператора, то $|\lambda| \leqslant 1$.

e) Привести пример частично изометрического оператора, имеющего собственное значение, равное $\frac{1}{2}$.

6. Пусть $\mathscr{M}$ — подпространство конечномерного векторного пространства $\mathscr{V}$ со скалярным произведением и A — линейный

оператор на $\mathscr{V}$. Доказать, что если $\dim \mathscr{M} \leqslant \dim \mathscr{M}^{\perp}$, то на $\mathscr{V}$ существуют линейные операторы B и C такие, что $Ax = (BC - CB)x$ для всех x из $\mathscr{M}$. (Указание: пусть B — частично изометрический оператор, такой, что $\|Bx\| = \|x\|$ или 0, смотря по тому, принадлежит ли x подпространству $\mathscr{M}$ или $\mathscr{M}^{\perp}$, и $\mathscr{R}(B) \subset \mathscr{M}^{\perp}$.)

§ 77. Комплексификация

В нескольких последних параграфах мы изучали вещественные и комплексные векторные пространства одновременно. Иногда это невозможно: система комплексных чисел богаче системы вещественных. Имеются теоремы, справедливые и для вещественного и для комплексного пространств, но доказательство которых гораздо легче в комплексном случае, и имеются теоремы, справедливые для комплексных пространств и несправедливые для вещественных. (Примером последнего рода теорем может служить утверждение, что каждый линейный оператор на конечномерном пространстве имеет собственное значение.) По этим причинам часто бывает удобным «комплексифицировать» вещественное векторное пространство, т. е. ассоциировать с ним комплексное векторное пространство с существенно теми же свойствами. Цель этого параграфа — описать такой процесс комплексификации.

Пусть $\mathscr{V}$ — вещественное векторное пространство и $\mathscr{V}^{+}$ — множество всех упорядоченных пар $\langle x, y\rangle$ элементов x и y из $\mathscr{V}$. Определим сумму двух элементов из $\mathscr{V}^{+}$ формулой

$$\langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1 + y_2\rangle,$$

а произведение элемента из $\mathscr{V}^{+}$ на комплексное число $\alpha + i\beta$ (α и β вещественны, $i = \sqrt{-1}$) формулой

$$(\alpha + i\beta)\langle x, y\rangle = \langle \alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y\rangle.$$

(Чтобы запомнить эти формулы, представьте себе, что $\langle x, y\rangle$ означает $x + iy$.) Прямое и не слишком трудоемкое вычисление показывает, что множество $\mathscr{V}^{+}$ при так определенных линейных операциях становится комплексным векторным пространством.

Множество тех элементов $\langle x, y\rangle$ из $\mathscr{V}^{+}$, для которых $y = 0$, находится в естественном взаимно однозначном соответствии с пространством $\mathscr{V}$. Будучи комплексным векторным пространством, $\mathscr{V}^+$ может также рассматриваться как вещественное векторное пространство; если отождествить каждый элемент x из $\mathscr{V}$ с его дубликатом $\langle x, 0\rangle$ в $\mathscr{V}^+$ (а сделать так чрезвычайно удобно), то можно сказать, что $\mathscr{V}^+$ (как вещественное векторное пространство) содержит $\mathscr{V}$. Поскольку $\langle 0, y\rangle = i\langle y, 0\rangle$, так что $\langle x, y\rangle = \langle x, 0\rangle + i\langle y, 0\rangle$, наше отождествительное соглашение позволяет нам сказать, что каждый вектор из $\mathscr{V}^+$ имеет вид $x+iy$ с x и y из $\mathscr{V}$. Так как $\mathscr{V}$ и $i\mathscr{V}$ (где $i\mathscr{V}$ означает множество всех элементов $\langle x, y\rangle$ из $\mathscr{V}^+$ с $x = 0$) являются подпространствами пространства $\mathscr{V}^+$ с единственным общим вектором 0 (т. е. $\langle 0, 0\rangle$), то отсюда следует, что представление вектора из $\mathscr{V}^+$ в виде $x+iy$ (с x и y из $\mathscr{V}$) единственно. Таким образом, мы построили комплексное векторное пространство $\mathscr{V}^+$, обладающее тем свойством, что, рассматриваемое как вещественное пространство, оно содержит $\mathscr{V}$ как подпространство, причем является прямой суммой $\mathscr{V}$ и $i\mathscr{V}$. (Здесь $i\mathscr{V}$ означает множество всех тех элементов из $\mathscr{V}^+$, которые имеют вид iy с некоторым y из $\mathscr{V}$.) Мы будем называть $\mathscr{V}^+$ *комплексификацией* пространства $\mathscr{V}$.

Если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — линейно независимое множество в $\mathscr{V}$ (вещественные коэффициенты), то оно также — линейно независимое множество в $\mathscr{V}^+$ (комплексные коэффициенты). Действительно, если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$ — такие вещественные числа, что $\sum\limits_j (\alpha_j + i\beta_j)x_j = 0$, то $\left(\sum\limits_j \alpha_j x_j\right) + i\left(\sum\limits_j \beta_j x_j\right) = 0$ и, следовательно, единственность представления векторов из $\mathscr{V}^+$ с помощью векторов из $\mathscr{V}$ влечет равенства $\sum\limits_j \alpha_j x_j = \sum\limits_j \beta_j x_j = 0$; требуемый результат вытекает теперь из предположенной (вещественной) линейной независимости множества $\{x_1, \ldots, x_n\}$ в $\mathscr{V}$. Более того, если $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — базис в $\mathscr{V}$ (вещественные коэффициенты), то $\{x_1, \ldots, x_n\}$ есть также базис в $\mathscr{V}^+$ (комплексные коэффициенты). Действительно, для любых векторов x и y из $\mathscr{V}$ существуют такие вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n$, что $x = \sum\limits_j \alpha_j x_j$ и $y = \sum\limits_j \beta_j x_j$; отсюда $x + iy = \sum\limits_j (\alpha_j + i\beta_j)x_j$, так что $\{x_1, \ldots, x_n\}$

порождает $\mathscr{V}^+$. Эти результаты показывают, что комплексное векторное пространство $\mathscr{V}^+$ имеет ту же размерность, что и вещественное векторное пространство $\mathscr{V}$.

Имеется естественный способ распространения любого линейного оператора A, действующего на $\mathscr{V}$, до линейного оператора A^+ на $\mathscr{V}^+$: полагаем

$$A^+(x+iy)=Ax+iAy,$$

каковы бы ни были x и y из $\mathscr{V}$. (Проверка того, что A^+ — действительно линейный оператор на $\mathscr{V}^+$, шаблонна.) Подобное же распространение годится для линейных и даже полилинейных функционалов. Например, если w — (вещественный) билинейный функционал на $\mathscr{V}$, то его распространением на $\mathscr{V}^+$ служит (комплексный) билинейный функционал, определяемый формулой

$$w^+(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=$$
$$=w(x_1,\ x_2)-w(y_1,\ y_2)+i(w(x_1,\ y_2)+w(y_1,\ x_2)).$$

При этом, если w — знакопеременная форма, то и w^+ — знакопеременная форма. Действительно, вещественной и мнимой частями $w^+(x+iy,\ x+iy)$ являются соответственно $w(x,\ x)-w(y,\ y)$ и $w(x,\ y)+w(y,\ x)$; если форма w знакопеременна, то она кососимметрична (теорема 1 § 30) и потому w^+ знакопеременна. Такое же доказательство устанавливает соответствующий результат и для k-линейных функционалов, при всех значениях k. Отсюда и из определения определителей следует, что $\det A=\det A^+$ для каждого линейного оператора A на $\mathscr{V}$.

Метод распространения билинейных функционалов годится и для сопряженных билинейных функционалов. А именно, если $\mathscr{V}$ есть (вещественное) пространство со скалярным произведением, то имеется естественный способ введения (комплексного) скалярного произведения в $\mathscr{V}^+$: полагаем по определению

$$(x_1+iy_1,\ x_2+iy_2)=(x_1,\ x_2)+(y_1,\ y_2)-i((x_1,\ y_2)-(y_1,\ x_2)).$$

Заметим, что если x и y — ортогональные векторы из $\mathscr{V}$, то

$$\|x+iy\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

Соответствие $A \to A^+$ сохраняет все алгебраические свойства операторов. Так, если $B = \alpha A$ (с вещественным α), то $B^+ = \alpha A^+$; если $C = A + B$, то $C^+ = A^+ + B^+$; и если $C = AB$, то $C^+ = A^+B^+$. Более того, если $\mathscr{V}$ — пространство со скалярным произведением и $B = A^*$, то $B^+ = (A^+)^*$. (Доказательство: вычислить скалярные произведения $(A^+(x_1 + iy_1), (x_2 + iy_2))$ и $(x_1 + iy_1, B^+(x_2 + iy_2))$.)

Если A — линейный оператор на $\mathscr{V}$ и A^+ имеет собственный вектор $x + iy$ с собственным значением $\alpha + i\beta$ (где x и y — векторы из $\mathscr{V}$, а α и β — вещественные числа), так что

$$Ax = \alpha x - \beta y,$$
$$Ay = \beta x + \alpha y,$$

то подпространство в $\mathscr{V}$, натянутое на векторы x и y, инвариантно относительно A. (Поскольку каждый линейный оператор на комплексном векторном пространстве имеет собственный вектор, заключаем, что каждый линейный оператор на вещественном векторном пространстве оставляет инвариантным подпространство размерности 1 или 2.) Если, в частности, случится, что A^+ имеет вещественное собственное значение (т. е. $\beta = 0$), то A имеет то же самое собственное значение (поскольку $Ax = \alpha x$, $Ay = \alpha y$ и оба вектора x и y не могут обратиться в нуль).

Мы уже видели, что каждый (вещественный) базис в $\mathscr{V}$ есть в то же время (комплексный) базис в $\mathscr{V}^+$. Отсюда следует, что матрица линейного оператора A, действующего на $\mathscr{V}$, в некотором базисе $\mathscr{X}$ пространства $\mathscr{V}$ совпадает с матрицей оператора A^+ (на $\mathscr{V}^+$) в том же базисе $\mathscr{X}$ в $\mathscr{V}^+$. Это замечание лежит в основе всей теории комплексификации; наивная точка зрения состоит в том, что вещественные матрицы составляют частный случай комплексных.

Упражнения

1. Что будет, если процесс комплексификации, описанный в § 77, применить к векторному пространству, уже являющемуся комплексным?

2. Доказать, что между комплексификациями, описанными в § 77 и в упражнении 5 § 25, существует однозначно определен-

ный изоморфизм, обладающий тем свойством, что каждый «вещественный» вектор (т. е. каждый вектор исходного вещественного векторного пространства) соответствует самому себе.

3. a) Какова комплексификация пространства $\mathscr{R}^1$?

b) Если $\mathscr{V}$ — n-мерное вещественное векторное пространство, то какова размерность его комплексификации $\mathscr{V}^+$, рассматриваемой как вещественное векторное пространство?

4. Пусть $\mathscr{V}^+$ — комплексное пространство со скалярным произведением, полученное путем комплексификации вещественного пространства $\mathscr{V}$ со скалярным произведением.

a) Доказать, что если $A(x+iy)=x-iy$ для любых x и y из $\mathscr{V}$, то A — линейный оператор на $\mathscr{V}^+$, рассматриваемом как вещественное векторное пространство.

b) Будет ли A самосопряженным? Изометрическим? Идемпотентным? Инволютивным?

c) А если рассматривать $\mathscr{V}^+$ как комплексное пространство?

5. Исследовать связь между сопряженностью и комплексификацией и, в частности, связь между сопряженным к линейному оператору на вещественном векторном пространстве и сопряженным к комплексификации того же оператора.

6. Если A — линейный оператор на вещественном векторном пространстве $\mathscr{V}$ и подпространство $\mathscr{M}$ комплексификации $\mathscr{V}^+$ последнего инвариантно относительно A^+, то $\mathscr{M}^\perp \cap \mathscr{V}$ инвариантно относительно A.

§ 78. Характеризация спектра

Следующие результаты более, чем все рассмотренное до сих пор, подкрепляют аналогию между числами и операторами; в них утверждается, что свойства, побудившие выделить рассматривавшиеся нами специальные классы операторов, отражаются на спектрах операторов этих классов.

Теорема 1. *Если A — самосопряженный оператор на пространстве со скалярным произведением, то каждое собственное значение этого оператора вещественно; если A положителен или строго положителен, то каждое его собственное значение соответственно положительно или строго положительно.*

Доказательство. Тривиальность первого утверждения в вещественном случае можно игнорировать; одно и то же доказательство годится для обоснования обоих утверждений и в вещественном, и в комплексном случае. Действительно, если $Ax=\lambda x$, где $x\neq 0$, то

$$\frac{(Ax, x)}{\|x\|^2}=\frac{\lambda(x, x)}{\|x\|^2}=\lambda;$$

следовательно, если (Ax, x) вещественно (см. теорему 4 § 71), то и λ вещественно, и если (Ax, x) положительно (или строго положительно), то и λ положительно (или строго положительно).

Т е о р е м а 2. *Все корни характеристического уравнения самосопряженного оператора на конечномерном пространстве со скалярным произведением вещественны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В комплексном случае корни характеристического уравнения совпадают с собственными значениями, так что утверждаемый результат следует из теоремы 1. Если A — симметричный оператор на евклидовом пространстве, то его комплексификация A^+ есть эрмитов оператор, и наш результат следует из того, что A и A^+ имеют одно и то же характеристическое уравнение.

Заметим, что из теоремы 2 непосредственно следует, что самосопряженный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением всегда имеет собственное значение.

Т е о р е м а 3. *Каждое собственное значение изометрии равно по абсолютной величине единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если U — изометрия и $Ux = \lambda x$, где $x \neq 0$, то $\|x\| = \|Ux\| = |\lambda| \cdot \|x\|$.

Т е о р е м а 4. *Если U — самосопряженный либо изометрический оператор, то его собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Ax_1 = \lambda_1 x_1$, $Ax_2 = \lambda_2 x_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Если A — самосопряженный оператор, то

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2). \qquad (1)$$

(В среднем шаге используется самосопряженность оператора A, а в последнем — вещественность λ_2.) В случае, когда A — изометрия, (1) заменяется на

$$(x_1, x_2) = (Ax_1, Ax_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (x_1, x_2); \qquad (2)$$

напомним, что здесь $\overline{\lambda}_2 = \frac{1}{\lambda_2}$. В обоих случаях $(x_1, x_2) \neq 0$ влекло бы $\lambda_1 = \lambda_2$, так что мы должны иметь $(x_1, x_2) = 0$.

Теорема 5. *Если подпространство $\mathcal{M}$ конечномерного пространства со скалярным произведением инвариантно относительно изометрии U, то и $\mathcal{M}^{\perp}$ инвариантно относительно U.*

Доказательство. Рассматриваемый на конечномерном подпространстве $\mathcal{M}$ оператор U по-прежнему является изометрией и, следовательно, обратим. Отсюда вытекает, что каждое x из $\mathcal{M}$ может быть записано в виде $x = Uy$ с y из $\mathcal{M}$; другими словами, если x принадлежит $\mathcal{M}$ и $y = U^{-1}x$, то y принадлежит $\mathcal{M}$. Значит, $\mathcal{M}$ инвариантно относительно $U^{-1} = U^*$. Из теоремы 2 § 45 вытекает, что тогда $\mathcal{M}^{\perp}$ инвариантно относительно $(U^*)^* = U$.

Заметим, что тот же результат для самосопряженных операторов (даже на необязательно конечномерных пространствах) тривиален, поскольку инвариантность $\mathcal{M}$ относительно A влечет инвариантность $\mathcal{M}^{\perp}$ относительно $A^* = A$.

Теорема 6. *Если A — самосопряженный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением, то алгебраическая кратность каждого собственного значения λ_0 этого оператора равна геометрической кратности, т. е. размерности подпространства $\mathcal{M}$ всех решений уравнения $Ax = \lambda_0 x$.*

Доказательство. Ясно, что $\mathcal{M}$, а значит и $\mathcal{M}^{\perp}$, инвариантно относительно A; обозначим через B и C линейный оператор A, рассматриваемый соответственно только на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}^{\perp}$. Имеем

$$\det(A - \lambda) = \det(B - \lambda) \cdot \det(C - \lambda)$$

для всех λ. Так как B — самосопряженный оператор на конечномерном пространстве, имеющий единственное собственное значение, а именно λ_0, то λ_0 должно иметь как собственное значение оператора B алгебраическую кратность, равную размерности подпространства $\mathcal{M}$. Если m — эта размерность, то $\det(B - \lambda) = (\lambda_0 - \lambda)^m$. С другой стороны, поскольку λ_0 не является уже собственным значением оператора C и, следовательно, $\det(C - \lambda_0) \neq 0$, мы видим, что $\det(A - \lambda)$ содержит $\lambda_0 - \lambda$ сомножителем точно m раз, что и требовалось доказать.

Это доказательство основывалось на инвариантности подпространства $\mathcal{M}^{\perp}$ и том факте, что каждый корень характеристического уравнения оператора A является собственным значением этого оператора. Последнее утверждение верно для любого линейного оператора на унитарном пространстве; следующий результат есть следствие этих замечаний и теоремы 5.

Теорема 7. *Алгебраическая кратность каждого собственного значения унитарного оператора на конечномерном унитарном пространстве равна геометрической кратности.*

Упражнения

1. Привести пример линейного оператора с двумя неортогональными собственными векторами, принадлежащими различным собственным значениям.

2. Привести пример неположительного линейного оператора (на конечномерном унитарном пространстве), все собственные значения которого положительны.

3. a) Если A — самосопряженный оператор, то $\det A$ вещественно.

b) Если A — унитарный оператор, то $|\det A|=1$.

c) Что можно сказать об определителе частично изометрического оператора?

§ 79. Спектральная теорема

Теперь мы подготовлены к доказательству основной теоремы этой книги, теоремы, непосредственными следствиями которой являются многие другие результаты настоящей главы. Всё, что мы делали до сих пор, представляло до некоторой степени спортивный интерес (способствуя, однако, обобщениям); мы хотели показать, как много полезного можно извлечь из спектральной теории, не доказывая спектральной теоремы. Между прочим, в комплексном случае спектральную теорему можно получить из уже описанного нами процесса триангулизации; учитывая важность этой теоремы, мы предпочитаем привести ниже ее (совсем легкое) прямое доказательство. Читателю, быть может, было бы полезно применить метод доказательства (не результат) теоремы 2 § 56, чтобы доказать то, что он сможет, из спектральной теоремы и ее следствий.

Теорема 1. *Каждому самосопряженному линейному оператору A на конечномерном пространстве со скалярным произведением соответствуют такие вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ и перпендикулярные проекторы $E_1, \ldots, E_r$ (где r — строго положительное целое, не превосходящее размерности пространства), что*

1) *α_j попарно различны,*
2) *E_j взаимно ортогональны и отличны от* 0,
3) $\sum\limits_j E_j = 1$,
4) $\sum\limits_j \alpha_j E_j = A$.

Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ — различные собственные значения оператора A и E_j — перпендикулярный проектор на подпространство, состоящее из всех решений уравнения $Ax = \alpha_j x$ $(j = 1, \ldots, r)$. Условие 1) тогда выполнено по определению; вещественность всех α следует из теоремы 1 § 78. Условие 2) вытекает из теоремы 4 § 78. Из ортогональности проекторов E_j заключаем, что $E = \sum\limits_j E_j$ есть перпендикулярный проектор. Размерность области значений этого проектора равна сумме размерностей областей значений проекторов E_j и, следовательно, по теореме 6 § 78, равна размерности всего пространства; это дает 3). (Другое доказательство: если $E \neq 1$, то A, рассматриваемое на области значений проектора $1 - E$, было бы самосопряженным оператором, не имеющим ни одного собственного значения.) Чтобы доказать 4), возьмем любой вектор x и положим $x_j = E_j x$; тогда $Ax_j = \alpha_j x_j$, откуда

$$Ax = A\Big(\sum_j E_j x\Big) = \sum_j Ax_j = \sum_j \alpha_j x_j = \sum_j \alpha_j E_j x.$$

Тем самым спектральная теорема полностью доказана.

Представление $A = \sum\limits_j \alpha_j E_j$ (где скаляры α и проекторы E удовлетворяют условиям 1)—3) теоремы 1) называется *спектральным разложением* оператора A; основная цель следующего результата — доказательство единственности спектрального разложения.

Теорема 2. *Если* $\sum_{j=1}^{r} \alpha_j E_j$ — *спектральное разложение самосопряженного оператора* A *на конечномерном пространстве со скалярным произведением, то коэффициенты* α — *это все различные собственные значения оператора* A. *Далее, существуют полиномы* p_k $(1 \leqslant k \leqslant r)$ *с вещественными коэффициентами такие, что* $p_k(\alpha_j) = 0$ *при* $j \neq k$ *и* $p_k(\alpha_k) = 1$; *для каждого такого полинома* $p_k(A) = E_k$.

Доказательство. Поскольку $E_j \neq 0$, существует вектор $x \neq 0$, принадлежащий области значений этого проектора. Так как $E_j x = x$ и $E_i x = 0$ для всех $i \neq j$, то

$$Ax = \sum_i \alpha_i E_i x = \alpha_j E_j x = \alpha_j x,$$

так что каждое α_j является собственным значением оператора A. Обратно, если λ — какое-нибудь собственное значение оператора A, скажем, $Ax = \lambda x$ с $x \neq 0$, то, положив $x_j = E_j x$, видим, что

$$Ax = \lambda x = \lambda \sum_j x_j$$

и

$$Ax = A \sum_j x_j = \sum_j \alpha_j x_j,$$

так что $\sum_j (\lambda - \alpha_j) x_j = 0$. Поскольку векторы x_j взаимно ортогональны, те из них, которые отличны от нуля, образуют линейно независимое множество. Отсюда следует, что, для каждого j, либо $x_j = 0$, либо $\lambda = \alpha_j$. Поскольку $x \neq 0$, мы должны иметь $x_j \neq 0$ для некоторого j, и, значит, λ действительно равно одному из коэффициентов α.

Поскольку $E_i E_j = 0$ при $i \neq j$, а $E_j^2 = E_j$, имеем

$$A^2 = \Bigl(\sum_i \alpha_i E_i\Bigr)\Bigl(\sum_j \alpha_j E_j\Bigr) = \sum_i \sum_j \alpha_i \alpha_j E_i E_j = \sum_j \alpha_j^2 E_j.$$

Аналогично

$$A^n = \sum_j \alpha_j^n E_j$$

для каждого положительного целого n (в случае $n=0$ использовать 3)), откуда

$$p(A)=\sum_j p(\alpha_j)E_j$$

для каждого полинома p. Для завершения доказательства теоремы остается только указать (вещественный) полином p_k, для которого бы $p_k(\alpha_j)=0$ при всех $j\neq k$ и $p_k(\alpha_k)=1$. Этими свойствами обладает полином

$$p_k(t)=\prod_{j\neq k}\frac{t-\alpha_j}{\alpha_k-\alpha_j}.$$

Теорема 3. *Если* $\sum_{j=1}^{r}\alpha_jE_j$ — *спектральное разложение самосопряженного оператора A на конечномерном пространстве со скалярным произведением, то линейный оператор B перестановочен с A тогда и только тогда, когда он перестановочен с каждым из проекторов E_j.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна: если $A=\sum_j\alpha_jE_j$ и $E_jB=BE_j$ для всех j, то $AB=$ $=BA$. Необходимость следует из теоремы 2: если B перестановочен с A, то B перестановочен с каждым полиномом от A, а потому B перестановочен с каждым E_j.

Прежде чем продолжить эксплуатацию спектральной теоремы, сделаем замечание относительно матричной интерпретации этой теоремы. Если в области значений каждого E_j выбрать ортонормальный базис, то совокупность векторов этих частичных базисов составит базис всего пространства; выраженная в этом базисе матрица оператора A будет диагональной. Тот факт, что при надлежащем выборе ортонормального базиса матрица самосопряженного оператора может быть сделана диагональной, или, равносильно этому, что любая самосопряженная матрица может быть изометрично преобразована (т. е. заменена на $[U]^{-1}[A][U]$, где U — изометрия) в диагональную матрицу, следует уже (в комплексном случае) из теории треугольной формы. Мы дали алгебраический вариант по двум причинам. Во-первых, именно он легко обобщается на бесконечномерный случай, и, во-вторых, даже в конечномерном случае запись $\sum_j \alpha_j E_j$ часто имеет большие формальные и типографские преимущества перед записью в матричном виде.

Мы будем использовать тот факт, что, не обязательно самосопряженный, оператор A изометрично диагонализируем (т. е. имеет в надлежащем ортонормальном базисе диагональную матрицу) тогда и только тогда, когда для него выполнены условия 1)—4) теоремы 1. Действительно, если выполнены эти условия, то доказательство диагонализируемости, данное для самосопряженных операторов, применимо; обратное предоставляем в качестве упражнения читателю.

Упражнения

1. Пусть A — линейный оператор на комплексном пространстве со скалярным произведением. Доказать, что если A — эрмитов, то линейные сомножители его минимального полинома различны. Верно ли обратное?

2. a) Линейные операторы A и B на унитарном пространстве называют *унитарно эквивалентными*, если существует унитарный оператор U такой, что $A = U^{-1}BU$. (Соответствующее понятие в вещественном случае называют *ортогональной эквивалентностью*.) Доказать, что унитарная эквивалентность есть отношение эквивалентности.

b) Всегда ли A^*A и AA^* унитарно эквивалентны?

c) Всегда ли A и A^* унитарно эквивалентны?

3. Какие из следующих пар матриц унитарно эквивалентны?

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Если два линейных оператора унитарно эквивалентны, то они подобны и конгруентны; если два линейных оператора подобны или конгруентны, то они эквивалентны. Показать на примерах, что это — единственные отношения импликации, связывающие указанные понятия.

§ 80. Нормальные операторы

Наиболее легкие (и вместе с тем полезные) обобщения спектральной теоремы относятся к комплексным пространствам со скалярным произведением (т. е. унитарным пространствам). Чтобы избежать ненужных усложнений, исключим в этом параграфе вещественный случай и сосредоточим внимание на одних унитарных пространствах.

Мы уже видели, что каждый эрмитов оператор диагонализируем и что любой оператор A может быть записан в виде $B+iC$, где B и C эрмитовы; почему нельзя было бы диагонализировать A, диагонализируя по отдельности B и C? Разумеется, ответ состоит в том, что диагонализация включает выбор надлежащего ортонормального базиса, и нет оснований ожидать, что базис, диагонализирующий B, будет давать тот же эффект и для C. Весьма важно знать точно весь класс операторов, для которых справедлива спектральная теорема, и, к счастью, этот класс легко описать.

Мы будем называть линейный оператор A *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным, $A^*A = AA^*$. (Это определение имеет смысл и используется и в вещественных и в комплексных пространствах со скалярным произведением; однако мы будем продолжать пользоваться техникой, неразрывно связанной с комплексным случаем.) Покажем сначала, что A нормален тогда и только тогда, когда его вещественная и мнимая части перестановочны. Действительно, пусть A нормален и $A = B + iC$, где B и C эрмитовы; поскольку $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ и $C = \frac{1}{2i}(A - A^*)$, ясно, что тогда $BC = CB$. Обратно, если $BC = CB$, то из соотношений $A = B + iC$ и $A^* = B - iC$ следует, что A нормален. Заметим, что эрмитовы и унитарные операторы нормальны.

Класс операторов, обладающих спектральным разложением в смысле § 79, есть не что иное как класс нормальных операторов. Половина этого утверждения легко доказывается: если $A = \sum_j \alpha_j E_j$, то $A^* = \sum_j \bar{\alpha}_j E_j$, и простое вычисление показывает, что $A^*A = AA^* = \sum_j |\alpha_j|^2 E_j$. Для доказательства обратного, т. е. того, что нормальность влечет существование спектрального разложения, имеются две возможности. Мы могли бы получить этот результат из спектральной теоремы для эрмитовых операторов, используя вещественную и мнимую части оператора, или мы могли бы доказать, что основные подготовительные результаты § 78, на которые опирается доказательство для эрмитова случая, в такой же мере верны и для произвольных нормальных операторов. Из-за некоторого интереса, который представляют его методы, мы выберем второй путь. Заметим, что техника, необходимая для доказательства нижеследующих теорем, имелась в нашем распоряжении уже в § 78, так что можно было бы установить спектральную теорему сразу для нормальных операторов; мы пошли другим путем главным образом затем, чтобы мотивировать определение нормальности.

Теорема 1. *Если A — нормальный оператор, то x будет его собственным вектором тогда и только тогда, когда он является собственным вектором сопряженного оператора A^*; если $Ax = \lambda x$, то $A^*x = \bar{\lambda} x$.*

Доказательство. Заметим, что из нормальности оператора A следует, что

$$\|Ax\|^2 = (Ax, Ax) = (A^*Ax, x) = (AA^*x, x) =$$
$$= (A^*x, A^*x) = \|A^*x\|^2.$$

Поскольку оператор $A - \lambda$ нормален одновременно с A и $(A - \lambda)^* = A^* - \bar{\lambda}$, получаем соотношение

$$\|Ax - \lambda x\| = \|A^*x - \bar{\lambda} x\|,$$

из которого сразу следуют утверждения теоремы.

Теорема 2. *Если A нормален, то собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Если $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, то

$$\lambda_1 (x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, A^* x_2) = \lambda_2 (x_1, x_2).$$

Эта теорема обобщает теорему 4 § 78. При доказательстве спектральной теоремы для эрмитовых операторов нам понадобились также теоремы 5 и 6 § 78. Следующий результат заменяет первую из них.

Теорема 3. *Если A — нормальный оператор, λ — его собственное значение и $\mathcal{M}$ — множество всех решений уравнения $Ax = \lambda x$, то как $\mathcal{M}$, так и $\mathcal{M}^{\perp}$ инвариантно относительно A.*

Доказательство. То, что $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A, мы видели уже раньше; нормальность A не играет здесь никакой роли. Для доказательства того, что $\mathcal{M}^{\perp}$ также инвариантно относительно A, достаточно показать, что $\mathcal{M}$ инвариантно относительно A^*. Это нетрудно: если x принадлежит $\mathcal{M}$, то

$$A (A^* x) = A^* (Ax) = \lambda (A^* x),$$

так что и $A^* x$ принадлежит $\mathcal{M}$.

Эта теорема гораздо слабее соответствующей теоремы § 78. Однако важно заметить, что доказательство теоремы 6 § 78 опиралось только на соответственно ослабленный вариант теоремы 5; единственные подпространства, которые нам нужно рассматривать, это подпространства того типа, с какими имеет дело наша последняя теорема 3.

На этом заканчивается подготовительная работа; спектральная теорема для нормальных операторов получается теперь совершенно так же, как ранее для эрмитова случая. Если в теоремах § 79 заменить слово «самосопряженный» на «нормальный», убрать все ссылки на вещественность и потребовать комплексности рассматриваемого пространства со скалярным произведением, то оставшиеся части утверждений и все доказательства останутся теми же самыми.

Именно теория нормальных операторов представляет главный интерес при изучении унитарных пространств. Одним из наиболее полезных свойств нормальных операторов является то, что спектральные условия типа установленных в теоремах 1 и 3 § 78 необходимых условий самосопряженности, положительности и изометричности оператора, оказываются в случае нормальных операторов также достаточными.

Теорема 4. *Нормальный оператор на конечномерном унитарном пространстве является* 1) *эрмитовым*, 2) *положительным*, 3) *строго положительным*, 4) *унитарным*, 5) *обратимым*, 6) *идемпотентным тогда и только тогда, когда все его собственные значения* 1′) *вещественны*, 2′) *положительны*, 3′) *строго положительны*, 4′) *равны по абсолютной величине единице*, 5′) *отличны от нуля*, 6′) *равны нулю или единице*.

Доказательство. То, что 1), 2), 3) и 4) влекут соответственно 1′), 2′), 3′) и 4′), следует из § 78. Если A обратим и $Ax = \lambda x$ с $x \neq 0$, то $x = A^{-1}Ax = \lambda A^{-1}x$ и потому $\lambda \neq 0$; этим доказано, что 5) влечет 5′). Если A идемпотентен и $Ax = \lambda x$ с $x \neq 0$, то $\lambda x = Ax = A^2x = \lambda^2 x$, так что $(\lambda - \lambda^2)x = 0$ и потому $\lambda = \lambda^2$; этим доказано, что 6) влечет 6′). Заметим, что эти доказательства верны для произвольного пространства со скалярным произведением (даже не обязательно конечномерного) и что добавочное предположение нормальности оператора A также излишне.

Предположим теперь, что A имеет спектральное разложение $\sum_j \alpha_j E_j$. Поскольку $A^* = \sum_j \bar{\alpha}_j E_j$, мы видим, что 1′) влечет 1). Поскольку

$$(Ax, x) = \sum_j \alpha_j (E_j x, x) = \sum_j \alpha_j \| E_j x \|^2,$$

заключаем, что 2′) влечет 2). Если $\alpha_j > 0$ для всех j и $(Ax, x) = 0$, то мы должны иметь $E_j x = 0$ для всех j и потому $x = \sum_j E_j x = 0$; этим доказано, что 3′) влечет 3). Импликация 4′) $\Rightarrow$ 4) вытекает из соотношения

$$A^*A = \sum_j |\alpha_j|^2 E_j.$$

Если $\alpha_j \neq 0$ для всех j, то можно образовать линейный оператор $B = \sum_j \frac{1}{\alpha_j} E_j$; поскольку $AB = BA = 1$)

заключаем, что 5′) влечет 5). Наконец, $A^2=\sum_j \alpha_j^2 E_j$; отсюда заключаем, что 6′) влечет 6).

Отметим, что импликациями 5) $\Rightarrow$ 5′), 2) $\Rightarrow$ 2′) и 3′) $\Rightarrow$ 3) в совокупности выполнено обещание, данное в § 72: если оператор A положителен и обратим, то он строго положителен.

Упражнения

1. Привести пример нормального оператора, не являющегося ни эрмитовым, ни унитарным.

2. a) Если A — произвольный линейный оператор (на конечномерном унитарном пространстве), а α и β — комплексные числа, для которых $|\alpha|=|\beta|=1$, то $\alpha A+\beta A^*$ — нормальный оператор.

b) Если $\|Ax\|=\|A^*x\|$ для всех x, то A — нормальный оператор.

c) Всегда ли сумма двух нормальных операторов является нормальным оператором?

3. Если A — нормальный оператор на конечномерном унитарном пространстве и $\mathcal{M}$ — подпространство, инвариантное относительно A, то сужение A на $\mathcal{M}$ также является нормальным оператором.

4. Линейный оператор A на конечномерном унитарном пространстве $\mathcal{V}$ нормален тогда и только тогда, когда $A\mathcal{M}\subset\mathcal{M}$ влечет $A\mathcal{M}^{\perp}\subset\mathcal{M}^{\perp}$, каково бы ни было подпространство $\mathcal{M}$ пространства $\mathcal{V}$.

5. a) Идемпотентный нормальный оператор самосопряжен.

b) Нильпотентный нормальный оператор равен нулю.

c) Нормальный оператор A, для которого $A^3=A^2$, идемпотентен. Останется ли верным заключение, если опустить предположение нормальности?

d) Если A самосопряжен и $A^k=1$ для некоторого строго положительного целого k, то $A^2=1$.

6. Пусть A и B — нормальные операторы и $AB=0$; следует ли отсюда, что $BA=0$?

7. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения линейного оператора A на n-мерном унитарном пространстве (взятые каждое столько раз, какова его алгебраическая кратность). Доказать, что

$$\sum_i |\lambda_i|^2 \leqslant \operatorname{tr}(A^*A)$$

и что A нормален тогда и только тогда, когда имеет место равенство.

8. *Числовой областью значений* линейного оператора A на конечномерном унитарном пространстве назовем множество $W(A)$ всех комплексных чисел вида (Ax, x) с $\|x\|=1$.

a) Если A нормален, то $W(A)$ выпукло. (Это означает, что если ξ и η принадлежат $W(A)$ и $0\leqslant\alpha\leqslant 1$, то также $\alpha\xi+(1-\alpha)\eta$ принадлежит $W(A)$.)

b) Если A — нормальный оператор, то каждая экстремальная точка множества $W(A)$ является собственным значением этого оператора. (Экстремальная точка — это точка, не представимая в виде $\alpha\xi+(1-\alpha)\eta$ ни для каких ξ и η из $W(A)$ и α, заключенных строго между 0 и 1.)

c) Известно, что заключение пункта a) остается верным, если даже не предполагать нормальности. Этот факт можно выразить следующим образом: если A_1 и A_2 — эрмитовы операторы, то множество всех точек вида $((A_1x, x), (A_2x, x))$ в вещественной координатной плоскости (с $\|x\|=1$) выпукло. Показать, что обобщение этого утверждения на более чем два эрмитовых оператора неверно.

d) Доказать, что для операторов, не являющихся нормальными, заключение пункта b) может быть неверным.

§ 81. Ортогональные операторы

Поскольку унитарный оператор на унитарном пространстве нормален, результаты предыдущего параграфа включают теорию унитарных операторов как частный случай. Так как, однако, ортогональный оператор на вещественном пространстве со скалярным произведением может вовсе не иметь собственных значений, то спектральная теорема, в том виде, как мы пока ее знаем, не дает нам никакой информации об ортогональных операторах. Но добраться до фактов нетрудно; теория комплексификации и сделана на заказ для этой цели.

Пусть U — ортогональный оператор на конечномерном вещественном пространстве $\mathscr{V}$ со скалярным произведением и U^+ — распространение оператора U на комплексификацию $\mathscr{V}^+$ пространства $\mathscr{V}$. Из того, что $U^*U=1$ (на $\mathscr{V}$), следует, что $(U^+)^*U^+=1$ (на $\mathscr{V}^+$), т. е. U^+ — унитарный оператор.

Пусть $\lambda=\alpha+i\beta$ — комплексное число (α и β вещественны) и $\mathscr{M}$ — подпространство, состоящее из всех решений уравнения $U^+z=\lambda z$ в пространстве $\mathscr{V}^+$. (Если λ не является собственным значением оператора U^+, то $\mathscr{M}=\mathscr{O}$.) Пусть z — элемент из $\mathscr{M}$; запишем его в виде $z=x+iy$, где x и y принадлежат $\mathscr{V}$. Уравнение

$$Ux+iUy=(\alpha+i\beta)(x+iy)$$

влечет (см. § 77),

$$Ux=\alpha x-\beta y$$

и

$$Uy=\beta x+\alpha y.$$

Если мы умножим второе из этих двух уравнений на i и затем вычтем результат из первого, то получим

$$Ux - iUy = (\alpha - i\beta)(x - iy).$$

Это означает, что $U^+\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$, где образным и удобным символом $\bar{z}$ обозначен, конечно, вектор $x - iy$. Поскольку рассуждение (т. е. переход от $U^+z = \lambda z$ к $U^+\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$) обратимо, мы доказали, что отображение $z \to \bar{z}$ является взаимно однозначным соответствием между $\mathcal{M}$ и подпространством $\bar{\mathcal{M}}$, состоящим из всех решений $\bar{z}$ уравнения $U^+\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$. Из этого результата следует, среди прочего, что комплексные собственные значения оператора U^+ встречаются парами: если λ — собственное значение, то и $\bar{\lambda}$ — тоже. (Одно это замечание можно было бы быстрее вывести из того факта, что коэффициенты характеристического полинома оператора U^+ вещественны.)

Мы еще не использовали унитарность оператора U^+. Один из способов, каким можно сделать это, таков. Если λ — комплексное (и притом не вещественное) собственное значение оператора U^+, то $\lambda \neq \bar{\lambda}$; следовательно, если $U^+z = \lambda z$, так что $U^+\bar{z} = \bar{\lambda}\bar{z}$, то z и $\bar{z}$ ортогональны. Это означает, что

$$0 = (x + iy,\ x - iy) = \|x\|^2 - \|y\|^2 + i((x, y) + (y, x)),$$

откуда $\|x\|^2 = \|y\|^2$ и $(x, y) = -(y, x)$. Поскольку вещественное скалярное произведение симметрично ($(x, y) = (y, x)$), заключаем, что $(x, y) = 0$. В свою очередь, отсюда вытекает, что $\|z\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ и, следовательно,

$$\|x\| = \|y\| = \frac{1}{\sqrt{2}}\|z\|.$$

Если λ_1 и λ_2 — собственные значения оператора U^+, причем $\lambda_1 \neq \lambda_2$ и $\lambda_1 \neq \bar{\lambda}_2$, и если $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ — соответствующие собственные векторы (x_1, x_2, y_1, y_2 — векторы из $\mathcal{V}$), то z_1 и z_2 ортогональны и (поскольку $\bar{z}_2$ — собственный вектор, принадлежащий собственному значению $\bar{\lambda}_2$), также z_1 и $\bar{z}_2$ ортогональны. Используя снова выражение комплексного скалярного произведения в $\mathcal{V}^+$ через вещественное скалярное произведение в $\mathcal{V}$, видим, что

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, y_2) - (y_1, x_2) = 0$$

и

$$(x_1, x_2) - (y_1, y_2) = (x_1, y_2) + (y_1, x_2) = 0.$$

Значит, векторы x_1, x_2, y_1, y_2 попарно ортогональны. Унитарный оператор U^+ может иметь также вещественные собственные значения. Поскольку, однако, собственные значения оператора U^+, как мы знаем, равны по абсолютной величине единице, единственными возможными вещественными собственными значениями оператора U^+ являются $+1$ и -1. Если $U^+(x+iy) = \pm(x+iy)$, то $Ux = \pm x$ и $Uy = \pm y$, так что собственные векторы оператора U^+ с вещественными собственными значениями получаются путем очевидного комбинирования собственных векторов оператора U.

Мы теперь подготовлены к последнему шагу. При заданном U выберем ортонормальный базис, скажем, $\mathcal{X}_1$, в линейном многообразии решений уравнения $Ux = x$ (в $\mathcal{V}$) и, аналогично, ортонормальный базис, скажем, $\mathcal{X}_{-1}$, в линейном многообразии решений уравнения $Ux = -x$ (в $\mathcal{V}$). (Множества $\mathcal{X}_1$ и $\mathcal{X}_{-1}$ могут быть пустыми.) Далее, для каждой пары сопряженных комплексных собственных значений λ и $\bar{\lambda}$ оператора U^+ выберем ортонормальный базис $\{z_1, \ldots, z_r\}$ в линейном многообразии решений уравнения $U^+z = \lambda z$ (в $\mathcal{V}^+$). Если $z_j = x_j + iy_j$ (с x_j и y_j из $\mathcal{V}$), то пусть $\mathcal{X}_\lambda$ будет множество векторов $\{\sqrt{2}\,x_1, \sqrt{2}\,y_1, \ldots, \sqrt{2}\,x_r, \sqrt{2}\,y_r\}$ из $\mathcal{V}$. Из полученных результатов следует, что, объединив множества $\mathcal{X}_1$, $\mathcal{X}_{-1}$ и $\mathcal{X}_\lambda$ для всех собственных значений λ оператора U^+, мы получим ортонормальный базис пространства $\mathcal{V}$. В случае, когда $\mathcal{X}_1$ содержит три элемента, $\mathcal{X}_{-1}$ — четыре элемента и имеются две пары сопряженных комплексных собственных значений $(\lambda_1, \bar{\lambda}_1)$ и $(\lambda_2, \bar{\lambda}_2)$, матрица оператора U в построенном таким образом базисе выглядит так:

$$\begin{bmatrix} 1 &&&&&&&&&& \\ & 1 &&&&&&&&& \\ && 1 &&&&&&&& \\ &&& -1 &&&&&&& \\ &&&& -1 &&&&&& \\ &&&&& -1 &&&&& \\ &&&&&& -1 &&&& \\ &&&&&&& \alpha_1 & -\beta_1 && \\ &&&&&&& \beta_1 & \alpha_1 && \\ &&&&&&&&& \alpha_2 & -\beta_2 \\ &&&&&&&&& \beta_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}.$$

(Все не выписанные члены равны нулю.) В общем случае, на главной диагонали имеется цепочка плюс единиц, за ней следует цепочка минус единиц, а затем идет цепочка клеток размером два на два, каждая из которых имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha^2+\beta^2=1$. Из последнего равенства следует, что можно найти вещественное число θ такое, что $\alpha = \cos\theta$ и $\beta = \sin\theta$; при записи канонической формы матрицы ортогонального оператора принято пользоваться этим тригонометрическим представлением.

Упражнения

1. Каждое собственное значение ортогонального оператора равно по абсолютной величине 1.

2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; для скольких (вещественных) ортогональных матриц P матрица $P^{-1}AP$ диагональна?

3. Сформулировать и доказать разумный аналог спектральной теоремы для нормальных операторов на вещественном пространстве со скалярным произведением.

§ 82. Функции от операторов

Одним из наиболее полезных понятий теории нормальных операторов на унитарных пространствах является понятие функции от оператора. Если A — нормальный оператор со спектральным разложением $\sum_j \alpha_j E_j$ (в этом рассмотрении мы временно считаем наше векторное пространство унитарным) и f — произвольная комплексная функция, определенная по крайней мере в точках α_j, то мы определяем линейный оператор $f(A)$ формулой

$$f(A) = \sum_j f(\alpha_j) E_j.$$

Поскольку мы уже видели, что для полиномов p (и даже для рациональных функций) наше прежнее определение $p(A)$, в случае нормального A, дает $p(A) = \sum_j p(\alpha_j) E_j$, ясно, что наше новое понятие есть обобщение старого. Рассмотрение $f(A)$ для произвольных функций f имеет для нас, главным образом, формальное преимущество; оно не дает ничего идейно нового. Действительно, какова бы ни была функция f, можно положить $f(\alpha_j) = \beta_j$ и затем найти полином p, принимающий на конечном множестве различных комплексных чисел α_j соответственно значения β_j. Для такого полинома p имеем $f(A) = p(A)$, так что класс операторов, определенных путем образования произвольных функций, не представляет ничего существенно нового; он только избавляет от возни с построением полинома для каждого отдельного случая. Так, например, если для каждого комплексного числа λ положить

$$f_\lambda(\zeta) = 0, \quad \text{если } \zeta \neq \lambda,$$

и

$$f_\lambda(\lambda) = 1,$$

то $f_\lambda(A)$ будет ортогональным проектором на подпространство решений уравнения $Ax = \lambda x$.

Отметим, что если $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, то (предполагая, конечно, что f определено для всех α_j, т. е. что $\alpha_j \neq 0$) $f(A) = A^{-1}$, а если $f(\zeta) = \bar{\zeta}$, то $f(A) = A^*$. Из этих утверждений следует, что если f — произвольная рациональная функция от ζ и $\bar{\zeta}$, то для получения $f(A)$ нужно произвести замены $\zeta \to A$, $\bar{\zeta} \to A^*$ и $\frac{1}{\zeta} \to A^{-1}$. Однако символ

$f(A)$ определен для значительно более общих функций, и позже мы будем свободно пользоваться такими выражениями, как e^A и $\sqrt{A}$.

Особенно важной функцией является квадратный корень положительного оператора. Мы рассматриваем $f(\zeta)=\sqrt{\zeta}$, определенное для всех вещественных $\zeta \geqslant 0$, как положительный квадратный корень из ζ, и для каждого положительного $A=\sum_j \alpha_j E_j$ пишем

$$\sqrt{A}=\sum_j \sqrt{\alpha_j} E_j.$$

(Напомним, что $\alpha_j \geqslant 0$ для всех j. Дальнейшее рассмотрение применимо и к вещественным, и к комплексным пространствам со скалярным произведением.) Очевидно, что $\sqrt{A} \geqslant 0$ и $(\sqrt{A})^2=A$; было бы желательно исследовать, до какой степени эти свойства характеризуют $\sqrt{A}$. На первый взгляд может показаться безнадежным ожидать какой-либо единственности, поскольку, взяв $B=\sum_j \pm \sqrt{\alpha_j} E_j$ с произвольно выбранным знаком на каждом месте, мы снова получим $A=B^2$. Однако построенный нами оператор $\sqrt{A}$ был положительным, и можно показать, что это дополнительное свойство обеспечивает единственность. Другими словами, если $A=B^2$ и $B \geqslant 0$, то $B=\sqrt{A}$. Для доказательства, пусть $B=\sum_k \beta_k F_k$ — спектральное разложение оператора B; тогда

$$\sum_k \beta_k^2 F_k=B^2=A=\sum_j \alpha_j E_j.$$

Поскольку все числа β_k различны и положительны, то же верно и для их квадратов; из единственности спектрального разложения оператора A вытекает, что каждое β_k^2 равно некоторому α_j (и обратно), причем соответствующие E и F равны. Перестановкой индексов можно поэтому добиться, чтобы $\beta_j^2=\alpha_j$ для всех j, так что тогда $\beta_j=\sqrt{\alpha_j}$, что и требовалось.

Имеется несколько важных применений существования квадратного корня из положительного оператора; мы дадим сейчас два из них.

Во-первых, напомним, что в § 72 мы привели три возможных определения положительного оператора A и приняли самое слабое из них, а именно, что A самосопряжен и $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех x. Самым сильным из этих трех возможных определений было, что A можно записать в виде $A = B^2$ с некоторым самосопряженным B. Отмечаем, что из результата этого параграфа относительно квадратных корней следует, что слабейшее (на вид) из наших определений влечет сильнейшее и потому равносильно ему. (Действительно, мы можем даже получить единственный положительный квадратный корень.)

Во-вторых, в § 72 установлено также, что если A и B положительны и перестановочны, то AB тоже положительно; мы можем теперь дать этому утверждению простое доказательство. Поскольку $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$ являются функциями (полиномами) соответственно от A и B, перестановочность A и B влечет перестановочность $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$; следовательно,

$$AB = \sqrt{A}\sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{B} = \sqrt{A}\sqrt{B}\sqrt{A}\sqrt{B} = (\sqrt{A}\sqrt{B})^2.$$

Так как $\sqrt{A}$ и $\sqrt{B}$ — самосопряженные перестановочные операторы, их произведение будет самосопряженным и потому его квадрат положителен.

Спектральная теория позволяет также очень легко охарактеризовать матрицу (в произвольной ортонормальной координатной системе) положительного оператора A. Так как $\det A$ является произведением собственных значений оператора A, ясно, что $A \geqslant 0$ влечет $\det A \geqslant 0$. (Рассуждения § 55 применимы непосредственно только к комплексным пространствам со скалярным произведением; однако соответствующая модификация, которую необходимо сделать при переходе к самосопряженным операторам на, возможно, вещественных пространствах, не представляет труда.) Рассмотрение определяющего свойства положительности, выраженного в терминах матрицы (α_{ij}) оператора A, т. е. $\sum\limits_i \sum\limits_j \alpha_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j \geqslant 0$, показывает, что последнее выражение останется положительным, если потребовать, чтобы определенная часть координат

$(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ равнялась нулю. В матричных терминах это означает, что если вычеркнуть столбцы, скажем, с номерами $j_1, \ldots, j_k$, а также строки с теми же номерами, то оставшаяся частичная матрица опять будет положительной, а следовательно, положительным будет и ее определитель. Этот факт обычно выражают, говоря, что *главные миноры* определителя положительной матрицы положительны. Верно и обратное. Коэффициентом j-й степени λ в характеристическом полиноме $\det(A - \lambda)$ оператора A (с точностью до знака) служит сумма всех главных миноров $(n-j)$-го порядка. Эти коэффициенты имеют попеременно положительный и отрицательный знаки. Отсюда следует, что если A имеет положительные главные миноры и самосопряжен (а потому известно, что корни $\det(A - \lambda)$ вещественны), то собственные значения оператора A положительны. Поскольку самосопряженность матрицы устанавливается проверкой того, является она или нет (эрмитово) симметричной $(\alpha_{ij} = \bar{\alpha}_{ji})$, наши замечания сводят задачу выяснения тóго, положительна матрица или нет, к конечному числу элементарных вычислений.

Упражнения

1. Для каждого унитарного оператора U существует эрмитов оператор A такой, что $U = e^{iA}$.

2. Обсудить теорию функций от нормальных операторов на вещественном пространстве со скалярным произведением.

3. Если $A \leqslant B$ и C — положительный оператор, перестановочный с A и B, то $AC \leqslant BC$.

4. Самосопряженный оператор обладает единственным самосопряженным кубическим корнем.

5. Найти все эрмитовы кубические корни матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

6. a) Привести пример линейного оператора A на конечномер ном унитарном пространстве, не имеющего квадратного корня.

b) Доказать, что каждый эрмитов оператор на конечномерном унитарном пространстве имеет квадратный корень.

c) Каждый ли самосопряженный оператор на конечномерном евклидовом пространстве имеет квадратный корень?

7. a) Доказать, что если A — положительный линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением, то $\rho(\sqrt{A}) = \rho(A)$.

b) Пусть A — линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением; верно ли, что $\rho(A^*A) = \rho(A)$?

8. Если $A \geqslant 0$ и $(Ax, x) = 0$ для некоторого x, то $Ax = 0$.

9. Если $A \geqslant 0$, то $|(Ax, y)|^2 \leqslant (Ax, x)(Ay, y)$ для всех x и y.

10. Если векторы $x_1, \ldots, x_k$ линейно независимы, то их грамиан невырожден.

11. Каждая положительная матрица является грамианом.

12. Если A и B — линейные операторы на конечномерном пространстве со скалярным произведением и $0 \leqslant A \leqslant B$, то $\det A \leqslant \det B$. (Указание: при $\det B = 0$ утверждение тривиально; если же $\det B \neq 0$, то $\sqrt{B}$ — обратимый оператор.)

13. Если A — строго положительный линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением и $A \leqslant B$, то $B^{-1} \leqslant A^{-1}$. (Указание: рассмотреть сначала $A = 1$.)

14. a) Если B — эрмитов оператор на конечномерном унитарном пространстве, то оператор $1 + iB$ обратим.

b) Если A — положительный и обратимый оператор, а B — эрмитов оператор, то $A + iB$ обратим.

15. Если $0 \leqslant A \leqslant B$, то $\sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}$. (Указание: вычислить $(\sqrt{B} + \sqrt{A} + \varepsilon)(\sqrt{B} - \sqrt{A} + \varepsilon)$ и доказать с помощью этого, что второй сомножитель обратим для каждого $\varepsilon > 0$.)

16. Пусть A — самосопряженный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением; положим

$$|A| = \sqrt{A^2}, \quad A_+ = \frac{1}{2}(|A| + A) \quad \text{и} \quad A_- = \frac{1}{2}(|A| - A).$$

a) Доказать, что $|A|$ есть наименьший эрмитов оператор, перестановочный с A и удовлетворяющий обоим неравенствам $A \leqslant |A|$ и $-A \leqslant |A|$. («Наименьший» относится, конечно, к упорядочению эрмитовых операторов.)

b) Доказать, что A_+ есть наименьший положительный оператор, перестановочный с A и удовлетворяющий неравенству $A \leqslant A_+$.

c) Доказать, что A_- есть наименьший положительный оператор, перестановочный с A и удовлетворяющий неравенству $-A \leqslant A_-$.

d) Доказать, что если A и B — перестановочные самосопряженные операторы, то существует наименьший самосопряженный оператор C, перестановочный с A и B и удовлетворяющий неравенствам $A \leqslant C$ и $B \leqslant C$.

17. a) Если A и B — положительные линейные операторы на конечномерном унитарном пространстве, причем A^2 и B^2 унитарно эквивалентны, то A и B унитарно эквивалентны.

b) Справедлив ли вещественный аналог утверждения a)?

§ 83. Полярное разложение

Имеется еще одно полезное следствие теории квадратных корней, а именно, аналог полярного представления $\zeta = \varrho e^{i\theta}$ комплексного числа.

Теорема 1. *Для произвольного линейного оператора A на конечномерном пространстве со скалярным произведением существуют (однозначно определенный) положительный оператор P и изометрия U такие, что $A = UP$. Если A обратим, то U также однозначно определяется оператором A.*

Доказательство. Хотя для этого и нет логической необходимости, мы дадим сначала доказательство для случая, когда A обратим; общее доказательство будет очевидной модификацией доказательства для этого специального случая, а последнее позволит лучше проникнуть в геометрическое строение оператора A.

Так как оператор A^*A положителен, можно найти его (единственный) положительный квадратный корень, $P = \sqrt{A^*A}$. Положим $V = PA^{-1}$; поскольку $VA = P$, теорема будет доказана, если мы сможем доказать, что V есть изометрия, так как тогда будет $U = V^{-1}$. Но так как

$$V^* = (A^{-1})^* P^* = (A^*)^{-1} P,$$

то мы видим, что

$$V^*V = (A^*)^{-1} PPA^{-1} = (A^*)^{-1} A^*AA^{-1} = 1,$$

так что V есть изометрия, что и было нам нужно.

Для доказательства единственности заметим, что $UP = U_0P_0$ влечет $PU^* = P_0U_0^*$, откуда

$$P^2 = PU^*UP = P_0U_0^*U_0P_0 = P_0^2.$$

Так как положительный оператор $P^2 = P_0^2$ имеет только один положительный квадратный корень, то $P = P_0$. (В этой части доказательства мы не использовали обратимости оператора A.) Если A обратим, то P тоже обратим (поскольку $P = U^{-1}A$), откуда получаем (умножая соотношение $UP = U_0P_0$ справа на $P^{-1} = P_0^{-1}$), что $U = U_0$.

Обратимся теперь к общему случаю, когда не предполагается, что A обратим. P строим точно так, как выше, так что $P^2 = A^*A$, а тогда замечаем, что для каждого вектора x

$$\| Px \|^2 = (Px,\ Px) = (P^2x,\ x) = (A^*Ax,\ x) = \| Ax \|^2.$$

Если для каждого вектора $y = Px$ из области значений $\mathcal{R}(P)$ оператора P положить $Uy = Ax$, то U всюду, где он определен, будет оператором, сохраняющим длины. Мы должны показать, что U определен однозначно, т. е. что $Px_1 = Px_2$ влечет $Ax_1 = Ax_2$. Но это верно, поскольку $P(x_1 - x_2) = 0$ означает $\| P(x_1 - x_2) \| = 0$, а последнее влечет $\| A(x_1 - x_2) \| = 0$. Областью значений оператора U, определенного пока лишь на подпространстве $\mathcal{R}(P)$, служит $\mathcal{R}(A)$. Так как U линеен, $\mathcal{R}(A)$ и $\mathcal{R}(P)$ имеют одинаковую размерность, а потому также $(\mathcal{R}(A))^{\perp}$ и $(\mathcal{R}(P))^{\perp}$ имеют одинаковую размерность. Если принять за U на $(\mathcal{R}(P))^{\perp}$ любое линейное и изометрическое отображение $(\mathcal{R}(P))^{\perp}$ на $(\mathcal{R}(A))^{\perp}$, то оператор U, определенный посредством этого на всем $\mathcal{V}$, будет изометрией, обладающей тем свойством, что $UPx = Ax$ для всех x. Тем самым всё доказано.

Применяя только что доказанную теорему к A^* вместо A и переходя к сопряженным, получаем также тот дуальный факт, что каждое A может быть записано в виде $A = PU$ с изометрическим U и положительным P. По контрасту с декартовым разложением (§ 70) мы назовем представление $A = UP$ *полярным разложением* оператора A.

В терминах полярных разложений мы получаем новую характеризацию нормальности.

Теорема 2. *Если $A = UP$ — полярное разложение линейного оператора A, то для нормальности этого оператора необходимо и достаточно, чтобы $PU = UP$.*

Доказательство. Поскольку U не обязательно однозначно определяется оператором A, утверждение нужно понимать следующим образом: если A — нормальный оператор, то P перестановочен с *каждым* U, а если P перестановочен с *некоторым* U, то оператор A — нормальный. Так как $AA^* = UP^2U^* = UP^2U^{-1}$ и $A^*A = P^2$, то ясно, что A нормален тогда и только тогда, когда U перестановочен с P^2. Поскольку, однако, P^2 есть функция от P и, обратно, P есть функция от $P^2\left(P=\sqrt{P^2}\right)$, перестановочность с P^2 равносильна перестановочности с P.

Упражнения

1. Линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением, имеющий только одно полярное разложение, обратим.

2. Использовать для получения полярного разложения нормального оператора функциональное исчисление.

3. a) Для произвольного линейного оператора A на конечномерном пространстве со скалярным произведением существуют частично изометрический оператор U и положительный оператор P такие, что $\mathcal{N}^{*}(U)=\mathcal{N}^{*}(P)$ и $A=UP$. Операторы U и P однозначно определяются этими условиями.

b) Оператор A нормален тогда и только тогда, когда операторы U и P, описанные в a), перестановочны.

§ 84. Перестановочность

Спектральная теорема для самосопряженных и для нормальных операторов и функциональное исчисление могут быть также использованы для решения некоторых проблем, относящихся к перестановочности операторов. Это — глубокая и обширная область; мы рассмотрим две теоремы из нее скорее для иллюстрации некоторых методов, чем для самих результатов.

Теорема 1. *Самосопряженные операторы A и B на конечномерном пространстве со скалярным произведением перестановочны тогда и только тогда, когда существуют самосопряженный оператор C и вещественные функции f и g вещественной переменной такие, что $A=f(C)$ и $B=g(C)$. Если такой оператор C существует, то его можно взять даже в форме $C=h(A,B)$, где h — надлежащим образом выбранная вещественная функция двух вещественных переменных.*

Доказательство. Достаточность условия очевидна; мы докажем только необходимость.

Пусть $A=\sum\limits_i \alpha_i E_i$ и $B=\sum\limits_j \beta_j F_j$ — спектральные разложения операторов A и B; поскольку A и B перестановочны, из теоремы 3 § 79 следует, что каждое E_i

перестановочно с каждым F_j. Пусть h — любая функция двух вещественных переменных такая, что числа $h(\alpha_i, \beta_j)=\gamma_{ij}$ попарно различны; положим

$$C = h(A, B) = \sum_i \sum_j h(\alpha_i, \beta_j) E_i F_j.$$

(Ясно, что в качестве h можно взять даже полином, и то же верно относительно функций f и g, которые мы сейчас опишем.) Пусть f и g таковы, что $f(\gamma_{ij}) = \alpha_i$ и $g(\gamma_{ij}) = \beta_j$ для всех i и j. Тогда $f(C) = A$ и $g(C) = B$, и всё доказано.

Теорема 2. *Если A — нормальный оператор на конечномерном унитарном пространстве, а B — произвольный оператор, перестановочный с A, то B перестановочен с A^*.*

Доказательство. Пусть $A = \sum_i \alpha_i E_i$ — спектральное разложение оператора A; тогда $A^* = \sum_i \bar{\alpha}_i E_i$. Пусть, далее, f — такая функция (полином) от комплексной переменной, что $f(\alpha_i) = \bar{\alpha}_i$ для всех i. Поскольку $A^* = f(A)$, теорема доказана.

Упражнения

1. a) Доказать следующее обобщение теоремы 2: если A_1 и A_2 — нормальные операторы (на конечномерном унитарном пространстве) и $A_1 B = B A_2$, то $A_1^* B = B A_2^*$.

b) Теорема 2 утверждает, что отношение перестановочности иногда транзитивно: если A^* перестановочен с A и A перестановочен с B, то A^* перестановочен с B. Останется ли верной эта формулировка, если заменить A^* произвольным оператором C?

2. a) Следует ли из перестановочности A с A^*A, что A нормален?

b) Следует ли из перестановочности A^*A с AA^*, что A нормален?

3. a) Линейный оператор A нормален тогда и только тогда, когда существует полином p такой, что $A^* = p(A)$.

b) Если A нормален и перестановочен с B, то A перестановочен с B^*.

c) Если A и B нормальны и перестановочны, то AB нормален.

4. Если A и B нормальны и подобны, то они унитарно эквивалентны.

5. a) Если A — эрмитов, каждое его собственное значение имеет кратность 1 и $AB = BA$, то существует полином p такой, что $B = p(A)$.

b) Если A — эрмитов, то для существования такого полинома p, что $B = p(A)$, необходимо и достаточно, чтобы B был перестановочен с каждым линейным оператором, перестановочным с A.

6. Показать, что множество попарно перестановочных нормальных операторов на конечномерном унитарном пространстве можно одновременно диагонализировать.

§ 85. Самосопряженные операторы ранга один

Мы уже видели (теорема 2 § 51), что каждый линейный оператор A ранга ϱ есть сумма ϱ линейных операторов ранга один. Легко видеть (используя спектральную теорему), что если A самосопряжен или положителен, то и все слагаемые можно взять соответственно самосопряженными или положительными. Нам известно (теорема 1 § 51), какой должна быть матрица оператора ранга один; что можно сказать дополнительно, если оператор самосопряжен или положителен?

Теорема 1. *Если A — самосопряженный (или положительный) оператор ранга один, то его матрица (α_{ij}) в каждой ортонормальной координатной системе задается формулой $\alpha_{ij} = \varkappa\beta_i\overline{\beta}_j$ с вещественным $\varkappa$ (или формулой $\alpha_{ij} = \gamma_i\overline{\gamma}_j$). Обратно, если $[A]$ имеет в некоторой ортонормальной координатной системе такой вид, то A — самосопряженный (или положительный) оператор ранга один.*

Доказательство. Как мы знаем, матрица (α_{ij}) оператора A ранга один в любой ортонормальной системе $\mathscr{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ задается формулой $\alpha_{ij} = \beta_i\gamma_j$. Если A самосопряжен, мы должны также иметь $\alpha_{ij} = \overline{\alpha}_{ji}$, откуда $\beta_i\gamma_j = \overline{\beta_j\gamma_i}$. Если $\beta_i = 0$ и $\gamma_i \neq 0$ для некоторого i, то $\overline{\beta}_j = \beta_i\gamma_j/\overline{\gamma}_i = 0$ для всех j, откуда $A = 0$. Поскольку мы предположили ранг оператора A равным единице (а не нулю), это невозможно. Аналогично, невозможно, чтобы $\beta_i \neq 0$ и $\gamma_i = 0$. Таким образом, можно найти i, для которого $\beta_i\gamma_i \neq 0$. Используя это i, получаем

$$\overline{\beta}_j = \frac{\beta_i}{\overline{\gamma}_i}\gamma_j = \varkappa\gamma_j$$

с некоторой ненулевой постоянной $\varkappa$, не зависящей от j. Поскольку диагональные элементы $\alpha_{jj} = (Ax_j, x_j) = \beta_j\gamma_j$

матрицы самосопряженного оператора вещественны, мы можем даже заключить, что $\alpha_{ij}=\varkappa\beta_i\overline{\beta}_j$ с вещественным $\varkappa$.

Если A, кроме того, положителен, то, как мы знаем, $\varkappa\beta_j\overline{\beta}_j=\alpha_{jj}=(Ax_j, x_j)$ тоже положительно, а потому и $\varkappa$ положительно. В этом случае положим $\lambda=\sqrt{\varkappa}$; соотношение $\varkappa\beta_i\overline{\beta}_j=(\lambda\beta_i)(\lambda\overline{\beta}_j)$ показывает, что α_{ij} задается формулой $\alpha_{ij}=\gamma_i\overline{\gamma}_j$.

Легко видеть, что эти необходимые условия также достаточны. Если $\alpha_{ij}=\varkappa\beta_i\overline{\beta}_j$, где $\varkappa$ вещественно, то A самосопряжен. Если $\alpha_{ij}=\gamma_i\overline{\gamma}_j$, то для любого $x=\sum_i \xi_i x_i$ имеем

$$(Ax, x)=\sum_i\sum_j \alpha_{ij}\overline{\xi}_i\xi_j=\sum_i\sum_j \gamma_i\overline{\gamma}_j\overline{\xi}_i\xi_j=$$

$$=\Big(\sum_i \gamma_i\overline{\xi}_i\Big)\overline{\Big(\sum_j \gamma_j\overline{\xi}_j\Big)}=\Big|\sum_i \gamma_i\overline{\xi}_i\Big|^2\geqslant 0,$$

так что A положителен.

В качестве следствия теоремы 1 весьма легко доказать замечательную теорему о положительных матрицах.

Теорема 2. *Если A и B — положительные линейные операторы, матрицами которых в некоторой ортонормальной координатной системе служат соответственно (α_{ij}) и (β_{ij}), то линейный оператор C, матрица которого (γ_{ij}) в той же координатной системе задается формулой $\gamma_{ij}=\alpha_{ij}\beta_{ij}$ для всех i и j, тоже положителен.*

Доказательство. Поскольку A и B можно записать в виде сумм положительных операторов ранга один, так что

$$\alpha_{ij}=\sum_p \alpha_i^p\overline{\alpha}_j^p$$

и

$$\beta_{ij}=\sum_q \beta_i^q\overline{\beta}_j^q,$$

то

$$\gamma_{ij}=\sum_p\sum_q \alpha_i^p\beta_i^q\,\overline{(\alpha_j^p\beta_j^q)}.$$

(Верхние индексы здесь — не показатели степеней.) Поскольку сумма положительных матриц положительна, достаточно будет доказать, что матрица $((\alpha_i^p \beta_i^q)\overline{(\alpha_j^p \beta_j^q)})$ при любых фиксированных p и q положительна, а это следует из теоремы 1.

Между прочим, из этого доказательства видно, что теорема 2 останется верной, если заменить как в условии, так и в заключении «положительный» на «самосопряженный»; однако в большинстве приложений применяется лишь данная нами редакция теоремы. Матрица (γ_{ij}), описанная в теореме 2, называется *адамаровским произведением* матриц (α_{ij}) и (β_{ij}).

Упражнения

1. Пусть $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ — конечномерные пространства со скалярным произведением (оба вещественные или оба комплексные).

а) На векторном пространстве всех билинейных форм на $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ существует единственное скалярное произведение такое, что если $w_1(x, y) = (x, x_1)(y, y_1)$ и $w_2(x, y) = (x, x_2)(y, y_2)$, то $(w_1, w_2) = (x_2, x_1)(y_2, y_1)$.

b) На тензорном произведении $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ существует единственное скалярное произведение такое, что если $z_1 = x_1 \otimes y_1$ и $z_2 = x_2 \otimes y_2$, то $(z_1, z_2) = (x_1, x_2)(y_1, y_2)$.

c) Если $\{x_i\}$ и $\{y_p\}$ — ортонормальные базисы соответственно в $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$, то векторы $x_i \otimes y_p$ образуют ортонормальный базис в $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$.

2. Всегда ли тензорное произведение двух эрмитовых операторов эрмитово? То же — для унитарных операторов? То же — для нормальных операторов?

ГЛАВА IV

АНАЛИЗ

§ 86. Сходимость векторов

До сих пор мы использовали существование скалярного произведения в пространстве по существу только для введения понятия нормального оператора с некоторыми его важными специальными случаями. Гораздо более очевидный круг идей заключен в изучении проблем сходимости, возникающих в пространстве со скалярным произведением.

Посмотрим, что можно понимать под утверждением, что последовательность векторов (x_n) из $\mathscr{V}$ сходится к вектору x из $\mathscr{V}$. Здесь сами собой напрашиваются две возможности:

(I) $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$;

(II) $(x_n - x, y) \to 0$ при $n \to \infty$ для каждого фиксированного y.

Если верно (I), то для каждого y имеем

$$|(x_n - x,\ y)| \leqslant \|x_n - x\| \cdot \|y\| \to 0,$$

так что верно и (II). В конечномерном пространстве справедлива обратная импликация: (II) $\Rightarrow$ (I). Докажем это. Пусть $\{z_1, \ldots, z_N\}$ — ортонормальный базис в $\mathscr{V}$. (В этой главе мы будем часто обозначать размерность конечномерного пространства буквой N, чтобы сохранить n для немой переменной в предельных процессах.) Если предположить (II) верным, то $(x_n - x, z_i) \to 0$ для каждого $i = 1, \ldots, N$. Поскольку (теорема 2 § 63)

$$\|x_n - x\|^2 = \sum_i |(x_n - x,\ z_i)|^2,$$

тогда $\|x_n - x\| \to 0$, что и требовалось доказать.

Мы будем пользоваться без доказательства следующими фактами относительно сходимости векторов (в том или другом из двух равносильных смыслов). (Все они легко вытекают из наших определений и свойств сходимости в обычной области комплексных чисел; мы предполагаем, что читатель имеет некоторое знакомство с этими понятиями.) Выражение $\alpha x+\beta y$ определяет непрерывную функцию от совокупности всех его аргументов, т. е. если (α_n) и (β_n) — последовательности чисел, а (x_n) и (y_n) — последовательности векторов, то соотношения $\alpha_n \to \alpha$, $\beta_n \to \beta$, $x_n \to x$, $y_n \to y$ влекут соотношение $\alpha_n x_n + \beta_n y_n \to \alpha x+\beta y$. Если $\{z_i\}$ — ортонормальный базис в $\mathscr{V}$ и $x_n = \sum_i \alpha_{in} z_i$, а $x = \sum_i \alpha_i z_i$, то $x_n \to x$ тогда и только тогда, когда $\alpha_{in} \to \alpha_i$ (при $n \to \infty$) для каждого $i = 1, \ldots, N$. (Таким образом, определенное здесь понятие сходимости совпадает с обычным понятием сходимости в N-мерном вещественном или комплексном координатном пространстве.) Наконец, мы будем считать известным тот факт, что конечномерное пространство со скалярным произведением, наделенное метрикой, определяемой нормой, полно; т. е. если (x_n) — последовательность векторов, для которой $\|x_n - x_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то существует (единственный) вектор x такой, что $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

§ 87. Норма

Из метрических свойств векторов вытекают некоторые важные метрические свойства линейных операторов, к изучению которых мы теперь приступаем.

Определение. Линейный оператор A на пространстве $\mathscr{V}$ со скалярным произведением называется *ограниченным*, если существует постоянная K такая, что $\|Ax\| \leqslant K\|x\|$ для каждого вектора x из $\mathscr{V}$. Нижняя грань множества всех постоянных K, обладающих этим свойством (*границ* оператора A), называется *нормой* оператора A и обозначается $\|A\|$.

Ясно, что если A ограничен, то $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|$ для всех x. Примерами могут служить случаи, когда A — (ненулевой) перпендикулярный проектор или изометрия; как следует из теоремы 1 § 75 или, соответственно, теоремы § 73, в обоих случаях $\|A\| = 1$. Рассмотрение векторов $x_n(t) = t^n$ из $\mathscr{P}$ показывает, что оператор дифференцирования на $\mathscr{P}$ не ограничен.

Так как в дальнейшем нам придется рассматривать немало верхних и нижних граней, подобных $\|A\|$, введем удобное обозначение. Если P — какое-нибудь возможное свойство вещественных чисел t, мы будем обозначать множество всех вещественных чисел t, обладающих свойством P, символом $\{t\colon P\}$; нижняя же и верхняя грани множества будут обозначаться соответственно inf (вместо infimum) и sup (вместо supremum). В этих обозначениях имеем, например,

$$\|A\| = \inf \{K\colon \|Ax\| \leqslant K\|x\| \text{ для всех } x\}.$$

Понятие ограниченности тесно связано с понятием непрерывности. Если A ограничен и ε — любое положительное число, то, положив $\delta = \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, мы будем обеспечены, что $\|x - y\| < \delta$ влечет

$$\|Ax - Ay\| = \|A(x - y)\| \leqslant \|A\| \cdot \|x - y\| < \varepsilon;$$

другими словами, ограниченность влечет (равномерную) непрерывность. (В этом доказательстве мы неявно предположили, что $\|A\| \neq 0$; случай $\|A\| = 0$ тривиален.) Принимая во внимание этот факт, можно приветствовать следующий результат.

Теорема. *Каждый линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением ограничен.*

Доказательство. Пусть A — линейный оператор на $\mathscr{V}$. Взяв какой-нибудь ортонормальный базис $\{x_1, \ldots, x_N\}$ в $\mathscr{V}$, положим

$$K_0 = \max\{\|Ax_1\|, \ldots, \|Ax_N\|\}.$$

Так как произвольный вектор x может быть записан в виде $x = \sum_i (x, x_i)\, x_i$, то, применяя неравенство Шварца и помня, что $\|x_i\| = 1$, получим

$$\|Ax\| = \|A\big(\sum_i (x, x_i)\, x_i\big)\| =$$

$$= \|\sum_i (x, x_i) Ax_i\| \leqslant \sum_i |(x, x_i)| \cdot \|Ax_i\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \|x\| \cdot \|x_i\| \cdot \|Ax_i\| \leqslant K_0 \sum_i \|x\| =$$

$$= NK_0 \|x\|.$$

Другими словами, $K = NK_0$ есть граница оператора A, и доказательство закончено.

То, что в нашу оценку вошла размерность N пространства $\mathscr{V}$, — не случайно: мы уже видели, что в бесконечномерных пространствах теорема не верна.

Упражнения

1. a) Доказать, что скалярное произведение (а потому и норма) является непрерывной функцией, т. е. если $x_n \to x$ и $y_n \to y$, то $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

b) Каждый ли линейный функционал непрерывен? А полилинейные формы?

2. Линейный оператор A на пространстве со скалярным произведением называют ограниченным снизу, если существует такая (строго) положительная постоянная K, что $\|Ax\| \geqslant K\|x\|$ для каждого x. Доказать, что (на конечномерном пространстве) оператор A ограничен снизу тогда и только тогда, когда он обратим.

3. Если линейный оператор на пространстве со скалярным произведением (не обязательно конечномерном) непрерывен в одной точке, то он ограничен (и, следовательно, непрерывен на всем пространстве).

4. Для каждого положительного целого n построить такой (не перпендикулярный) проектор E_n, что $\|E_n\| \geqslant n$.

5. a) Если U — ненулевой частично изометрический оператор, то $\|U\| = 1$.

b) Если U — изометрия, то $\|UA\| = \|AU\| = \|A\|$ для каждого линейного оператора A.

6. Если E и F — перпендикулярные проекторы соответственно с областями значений $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ и если $\|E - F\| < 1$, то $\dim \mathscr{M} = \dim \mathscr{N}$.

7. a) Если A — нормальный оператор, то $\|A^n\| = \|A\|^n$ для каждого положительного целого n.

b) Линейный оператор A на двумерном унитарном пространстве, такой, что $\|A^2\| = \|A\|^2$, нормален.

c) Верно ли утверждение пункта b) для операторов на трехмерном пространстве?

§ 88. Выражения для нормы

Для облегчения работы с нормой оператора, рассмотрим следующие четыре выражения:

$$p = \sup\{\|Ax\|/\|x\| : x \neq 0\},$$

$$q = \sup\{\|Ax\| : \|x\| = 1\},$$

$$r = \sup\{|(Ax, y)|/(\|x\| \cdot \|y\|) : x \neq 0, \ y \neq 0\},$$

$$s = \sup\{|(Ax, y)| : \|x\| = \|y\| = 1\}.$$

В соответствии с определением, принятым в предыдущем параграфе, выражение $\{\|Ax\|: \|x\| = 1\}$, например, означает множество всех вещественных чисел вида $\|Ax\|$, рассматриваемых для всех x с $\|x\| = 1$.

Поскольку при $x = 0$ неравенство $\|Ax\| \leqslant K\|x\|$ выполнено тривиальным образом с любым K, из определения верхней грани следует, что $p = \|A\|$; мы докажем, что на самом деле $p = q = r = s = \|A\|$. Так как верхняя грань в выражении для q берется по подмножеству соответствующего множества для p (если $\|x\| = 1$, то $\|Ax\|/\|x\| = \|Ax\|$), мы видим, что $q \leqslant p$; из аналогичных соображений $s \leqslant r$.

Для каждого $x \neq 0$ рассмотрим $y = \frac{x}{\|x\|}$ (так что $\|y\| = 1$); имеем $\|Ax\|/\|x\| = \|Ay\|$. Другими словами, каждое число из множества, верхней гранью которого служит p, содержится также в соответствующем множестве для q; значит, $p \leqslant q$, и, следовательно, $p = q = \|A\|$.

Аналогично, если $x \neq 0$ и $y \neq 0$, рассмотрим $x' = \frac{x}{\|x\|}$ и $y' = \frac{y}{\|y\|}$; имеем

$$|(Ax, y)|/(\|x\| \cdot \|y\|) = |(Ax', y')|,$$

и потому, на основании только что использованного соображения, $r \leqslant s$, так что $r = s$.

Чтобы закрепить достигнутое, отметим, что пока мы доказали равенства

$$p = q = \|A\| \ \text{и} \ r = s.$$

Поскольку

$$\frac{|(Ax, y)|}{\|x\|\cdot\|y\|} \leqslant \frac{\|Ax\|\cdot\|y\|}{\|x\|\cdot\|y\|} = \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

имеем $r \leqslant p$; для завершения доказательства остается показать, что $p \leqslant r$. Для этой цели рассмотрим любой вектор x, для которого $Ax \neq 0$ (так что $x \neq 0$); положив $y = Ax$ для этого x, будем иметь

$$\|Ax\|/\|x\| = |(Ax, y)|/(\|x\|\cdot\|y\|).$$

Другими словами, мы доказали, что каждое число, содержащееся в множестве, определяющем p, и отличное от нуля, входит также в множество, верхней гранью которого служит r; из этого очевидно следует требуемый результат.

Числовая функция $\|A\|$ оператора A удовлетворяет следующим четырем условиям:

$$\|A+B\| \leqslant \|A\| + \|B\|, \tag{1}$$

$$\|AB\| \leqslant \|A\|\cdot\|B\|, \tag{2}$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\cdot\|A\|, \tag{3}$$

$$\|A^*\| = \|A\|. \tag{4}$$

Доказательство первых трех из них непосредственно следует из определения нормы оператора; для доказательства условия (4) используем следующим образом равенство $\|A\| = r$. Поскольку

$$|(Ax, y)| = |(x, A^*y)| \leqslant \|x\|\cdot\|A^*y\| \leqslant \|A^*\|\cdot\|x\|\cdot\|y\|,$$

мы видим, что $\|A\| \leqslant \|A^*\|$; заменяя A на A^* и A^* на $A^{**} = A$, получаем обратное неравенство.

Упражнения

1. Если B — обратимый оператор, то $\|AB\| \geqslant \|A\|/\|B^{-1}\|$ для каждого A.

2. Верно ли, что $\|A^*A\| = \|AA^*\|$ для каждого линейного оператора A?

3. a) Если A — эрмитов и $\alpha \geqslant 0$, то $\|A\| \leqslant \alpha$ тогда и только тогда, когда $-\alpha \leqslant A \leqslant \alpha$.

b) Если A — эрмитов, $\alpha \leqslant A \leqslant \beta$ и p — полином такой, что $p(t) \geqslant 0$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $p(A) \geqslant 0$.

c) Если A — эрмитов, $\alpha \leqslant A \leqslant \beta$ и p — полином такой, что $p(t) \neq 0$ при $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, то $p(A)$ обратим.

§ 89. Нормы самосопряженных операторов

Как обычно, о частном случае самосопряженных операторов можно сказать несколько больше, чем в общем случае. Рассмотрим для любого самосопряженного оператора A множество вещественных чисел

$$\Phi = \{(Ax, x)/\|x\|^2 : x \neq 0\}$$

и

$$\Psi = \{(Ax, x) : \|x\| = 1\}.$$

Очевидно, $\Psi \subset \Phi$. С другой стороны, если для каждого $x \neq 0$ положить $y = \frac{x}{\|x\|}$, то $\|y\| = 1$ и $(Ax, x)/\|x\|^2 = (Ay, y)$, так что каждое число из Φ входит также в Ψ. Следовательно, $\Phi = \Psi$. Мы положим

$$\alpha = \inf \Phi = \inf \Psi,$$

$$\beta = \sup \Phi = \sup \Psi$$

и будем называть α *нижней границей*, а β — *верхней границей* самосопряженного оператора A. Вспоминая определение положительного оператора, видим, что α — наибольшее вещественное число, для которого $A - \alpha \geqslant 0$, а β — наименьшее вещественное число, для которого $\beta - A \geqslant 0$. Относительно этих чисел мы утверждаем, что

$$\gamma = \max\{|\alpha|, |\beta|\} = \|A\|.$$

Половина доказательства проста. Поскольку

$$|(Ax, x)| \leqslant \|Ax\| \cdot \|x\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\|^2,$$

ясно, что $|\alpha|$ и $|\beta|$ не превосходят $\|A\|$, так что $\gamma \leqslant \|A\|$ Чтобы доказать обратное неравенство, заметим, что из положительности линейных операторов $\gamma - A$ и $\gamma + A$ следует, что

$$(\gamma + A)^* (\gamma - A)(\gamma + A) = (\gamma + A)(\gamma - A)(\gamma + A)$$

и

$$(\gamma - A)^* (\gamma + A)(\gamma - A) = (\gamma - A)(\gamma + A)(\gamma - A)$$

положительны, а потому положительна и их сумма $2\gamma(\gamma^2 - A^2)$. Поскольку $\gamma = 0$ влечет $\|A\| = 0$, утверждение в этом случае тривиально; в любом другом случае можно поделить на 2γ и получить в результате, что $\gamma^2 - A^2 \geqslant 0$. Другими словами,

$$\gamma^2 \| x \|^2 = \gamma^2 (x, x) \geqslant (A^2 x, x) = \| Ax \|^2,$$

откуда $\gamma \geqslant \| A \|$, что и завершает доказательство.

Обращаем внимание читателя на то, что ядро доказательства можно было бы совершенно освободить от вычислений. Поскольку $\gamma - A$ и $\gamma + A$ положительны и перестановочны, можно сразу же заключить (§ 82), что их произведение $\gamma^2 - A^2$ положительно. Мы предпочли окольный путь в соответствии с принципом, что для целей обобщений теории лучше, когда это возможно, обойтись без использования спектральной теоремы. Наше доказательство того, что положительность и перестановочность операторов A и B влекут положительность оператора AB, основывалось на существовании у положительных операторов квадратных корней. Конечно, этот факт можно получить так называемыми «элементарными» методами, т. е. методами, не использующими спектральную теорему; но даже простейшее элементарное доказательство содержит усложнения чисто технического характера, не очень удобные для наших целей.

§ 90. Принцип минимакса

Весьма изящным и полезным фактом о самосопряженных операторах является следующий *принцип минимакса*.

Теорема. *Пусть A — самосопряженный оператор на n-мерном пространстве $\mathcal{V}$ со скалярным произведением и $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — его (не обязательно различные) собственные значения, занумерованные так, что $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Если для каждого подпространства $\mathcal{M}$ пространства $\mathcal{V}$*

$$\mu(\mathcal{M}) = \sup \{(Ax, x) \colon x \text{ из } \mathcal{M}, \ \| x \| = 1\}$$

и если, для $k = 1, \ldots, n$,

$$\mu_k = \inf \{\mu(\mathcal{M}) \colon \dim \mathcal{M} = n - k + 1\},$$

то $\mu_k = \lambda_k$ для $k = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Пусть $\{x_1, \ldots, x_n\}$ — ортонормальный базис в $\mathscr{V}$, для которого $Ax_i = \lambda_i x_i$, $i = 1, \ldots, n$ (§ 79); пусть $\mathscr{M}_k$ — подпространство, натянутое на $x_1, \ldots, x_k$ ($k = 1, \ldots, n$). Поскольку размерность $\mathscr{M}_k$ равна k, $\mathscr{M}_k$ не может быть дизъюнктно ни с каким $(n-k+1)$-мерным подпространством $\mathscr{M}$ пространства $\mathscr{V}$; для любого такого подпространства $\mathscr{M}$ можно найти вектор x, принадлежащий одновременно $\mathscr{M}_k$ и $\mathscr{M}$ и такой, что $\|x\| = 1$. Для этого $x = \sum_{i=1}^{k} \xi_i x_i$ имеем

$$(Ax, x) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i |\xi_i|^2 \geqslant \lambda_k \sum_{i=1}^{k} |\xi_i|^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k,$$

так что $\mu(\mathscr{M}) \geqslant \lambda_k$.

С другой стороны, если рассмотреть то $(n-k+1)$-мерное подпространство $\mathscr{M}_0$, которое натянуто на векторы $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$, то для каждого $x = \sum_{i=k}^{n} \xi_i x_i$ из этого подпространства имеем (предполагая $\|x\| = 1$)

$$(Ax, x) = \sum_{i=k}^{n} \lambda_i |\xi_i|^2 \leqslant \lambda_k \sum_{i=k}^{n} |\xi_i|^2 = \lambda_k \|x\|^2 = \lambda_k,$$

так что $\mu(\mathscr{M}_0) \leqslant \lambda_k$.

Другими словами, когда $\mathscr{M}$ пробегает все $(n-k+1)$-мерные подпространства, $\mu(\mathscr{M})$ всегда $\geqslant \lambda_k$ и по крайней мере один раз $\leqslant \lambda_k$; это показывает, что $\mu_k = \lambda_k$, как и утверждалось.

В частности, при $k = 1$, мы видим (используя результаты § 89), что если A — самосопряженный оператор, то $\|A\|$ равна максимуму модулей его собственных значений.

Упражнения

1. Если λ — собственное значение линейного оператора A на конечномерном пространстве со скалярным произведением, то $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

2. Если A и B — линейные операторы на конечномерном унитарном пространстве и $C = AB - BA$, то $\|1 - C\| \geqslant 1$. (Указание: рассмотреть собственные значения оператора C.)

3. Если A и B — линейные операторы на конечномерном унитарном пространстве и $C = AB - BA$ перестановочен с A, то C

не обратим. (Указание: если C обратим, то $2\|B\|\cdot\|A\|\cdot\|A^{k-1}\| \geqslant \geqslant k\|A^{k-1}\|/\|C^{-1}\|$.)

4. a) Если A — нормальный линейный оператор на конечномерном унитарном пространстве, то $\|A\|$ равна максимальному из модулей собственных значений оператора A.

b) Останется ли верным утверждение a), если опустить предположение нормальности?

5. *Спектральным радиусом* $r(A)$ линейного оператора A на конечномерном унитарном пространстве называется максимальный из модулей собственных значений этого оператора.

a) $f(\lambda) = ((1-\lambda A)^{-1}x, y)$ есть аналитическая функция от λ в круге $|\lambda| < \dfrac{1}{r(A)}$ (для любых фиксированных x и y).

b) Существует такая постоянная K, что $|\lambda|^n \|A^n\| \leqslant K$ при $|\lambda| < \dfrac{1}{r(A)}$ для $n=0, 1, 2, \ldots$ (Указание: для каждой пары векторов x, y существует постоянная K такая, что $|\lambda^n (A^n x, y)| \leqslant K$ для всех n.)

c) $\limsup\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leqslant r(A)$.

d) $(r(A))^n \leqslant r(A^n)$, $n=0, 1, 2, \ldots$

e) $r(A) = \lim\limits_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$.

6. Если A — линейный оператор на конечномерном унитарном пространстве, то $r(A) = \|A\|$ тогда и только тогда, когда $\|A^n\| = \|A\|^n$ для $n=0, 1, 2, \ldots$

7. a) Если A — положительный линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением и оператор AB самосопряжен, то

$$|(ABx, x)| \leqslant \|B\|\cdot(Ax, x)$$

для каждого вектора x.

b) Будет ли верным утверждение a), если заменить $\|B\|$ на $r(B)$?

§ 91. Сходимость линейных операторов

Возвратимся теперь к проблемам сходимости. Напрашиваются три смысла, в которых можно попытаться определить сходимость последовательности линейных операторов (A_n) к фиксированному линейному оператору A:

(I) $\|A_n - A\| \to 0$ при $n \to \infty$.

(II) $\|A_n x - Ax\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного x.

(III) $|(A_n x, y) - (Ax, y)| \to 0$ при $n \to \infty$ для любых фиксированных x и y.

Если верно (I), то для каждого x

$$\|A_n x - Ax\| = \|(A_n - A)x\| \leqslant \|A_n - A\| \cdot \|x\| \to 0,$$

так что (I) $\Rightarrow$ (II). Мы уже видели (§ 86), что (II) $\Rightarrow$ (III) и что в конечномерных пространствах (III) $\Rightarrow$ (II). Но в конечномерных пространствах верно и то, что (II) $\Rightarrow$ (I), так что все три условия равносильны. Докажем это. Пусть $\{x_1, \ldots, x_N\}$ — ортонормальный базис в $\mathscr{V}$. Если допустить, что (II) верно, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такое, что $\|A_n x_i - Ax_i\| < \varepsilon$ для $i = 1, \ldots, N$ и всех $n \geqslant n_0$. Значит, для произвольного $x = \sum_i (x, x_i) x_i$ имеем

$$\|(A_n - A)\, x\| = \Big\| \sum_i (x, x_i)\, (A_n - A)\, x_i \Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_i \|x\| \cdot \|(A_n - A)\, x_i\| \leqslant \varepsilon N \|x\|,$$

а это влечет (I).

Легко также доказать, что если с помощью нормы определить расстояние между операторами, то полученное метрическое пространство будет полным, т. е. если $\|A_n - A_m\| \to 0$ при $n, m \to \infty$, то существует оператор A такой, что $\|A_n - A\| \to 0$. Доказательство этого факта сводится к соответствующему факту для векторов. Если $\|A_n - A_m\| \to 0$, то $\|A_n x - A_m x\| \to 0$ для каждого x, так что каждому x отвечает такой вектор, — обозначим его, скажем, Ax, — что $\|A_n x - Ax\| \to 0$. Ясно, что оператор A, задающий переход от x к Ax, линеен; доказанная выше импликация (II) $\Rightarrow$ (I) завершает доказательство.

Теперь, когда мы знаем, что понимать под сходимостью линейных операторов, следует рассмотреть некоторые простые функции от этих операторов на предмет проверки их непрерывности. Мы утверждаем, что $\|A\|$, $\|Ax\|$, (Ax, y), Ax, $A + B$, αA, AB и A^* определяют непрерывные функции от совокупности их аргументов. (Заметим, что первые три — числовые функции, следующая — векторная, а последние четыре — операторные.) Доказательства всех этих утверждений очень просты и похожи друг на друга; чтобы дать представление о них, рассмотрим $\|A\|$, Ax и A^*.

1) Если $A_n \to A$, т. е. $\|A_n - A\| \to 0$, то, поскольку неравенства

$$\|A_n\| \leqslant \|A_n - A\| + \|A\|$$

и

$$\|A\| \leqslant \|A - A_n\| + \|A_n\|$$

влекут неравенство

$$|\,\|A_n\| - \|A\|\,| \leqslant \|A_n - A\|,$$

мы видим, что $\|A_n\| \to \|A\|$.

2) Если $A_n \to A$ и $x_n \to x$, то

$$\|A_n x_n - Ax\| \leqslant \|A_n x_n - Ax_n\| + \|Ax_n - Ax\| \to 0,$$

так что $A_n x_n \to Ax$.

3) Если $A_n \to A$, то для любых x и y

$$(A_n^* x, y) = (x, A_n y) = \overline{(A_n y, x)} \to \overline{(Ay, x)} = \overline{(y, A^* x)} = (A^* x, y),$$

откуда $A_n^* \to A^*$.

Упражнения

1. Последовательность линейных операторов (A_n) сходится к линейному оператору A тогда и только тогда, когда в любой координатной системе каждый элемент матрицы оператора A_n сходится при $n \to \infty$ к соответствующему элементу матрицы оператора A.

2. Для каждого линейного оператора A существует последовательность обратимых линейных операторов (A_n) такая, что $A_n \to A$.

3. Если E и F — перпендикулярные проекторы, то $(EFE)^n$ сходится при $n \to \infty$ к проектору, областью значений которого служит пересечение областей значений проекторов E и F.

4. Если A — линейный оператор на конечномерном унитарном пространстве, то для того чтобы $A^n \to 0$, необходимо и достаточно, чтобы все собственные значения оператора A были по абсолютной величине (строго) меньше 1.

5. Доказать, что если A — квадратная матрица n-го порядка

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} \end{bmatrix},$$

то A^k сходится при $k \to \infty$ к проектору с одномерной областью значений; найти последнюю.

6. Доказать, что $\det$ и tr непрерывны.

§ 92. Эргодическая теорема

Вся шаблонная работа позади; мы переходим к рассмотрению, в качестве иллюстраций общей теории, некоторых весьма специальных, но очень важных проблем сходимости.

Т е о р е м а. *Если U — изометрия на конечномерном пространстве со скалярным произведением и $\mathcal{M}$ — подпространство всех решений уравнения $Ux = x$, то последовательность операторов*

$$V_n = \frac{1}{n}(1 + U + \ldots + U^{n-1})$$

сходится при $n \to \infty$ к перпендикулярному проектору $E = P_{\mathcal{M}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathcal{N}$ — область значений линейного оператора $1 - U$. Если $x = y - Uy$, т. е. x принадлежит $\mathcal{N}$, то

$$V_n x = \frac{1}{n}(y - Uy + Uy - U^2 y + \ldots + U^{n-1}y - U^n y) = \frac{1}{n}(y - U^n y),$$

так что

$$\| V_n x \| = \frac{1}{n} \| y - U^n y \| \leqslant \frac{1}{n}(\| y \| + \| U^n y \|) = \frac{2}{n} \| y \|.$$

Это показывает, что $V_n x$ сходится к нулю, когда x принадлежит $\mathcal{N}$.

С другой стороны, если x принадлежит $\mathcal{M}$, т. е. $Ux = x$, то $V_n x = x$, так что в этом случае $V_n x$, разумеется, сходится к x.

Для завершения доказательства покажем, что $\mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{M}$. (Из этого будет следовать, что каждый вектор является суммой двух векторов, для которых (V_n) сходится, так что (V_n) сходится всюду. Доказанное уже нами относительно предела (V_n) на $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ покажет тогда, что $(V_n x)$ всегда сходится к проекции x на $\mathcal{M}$.) Чтобы показать, что $\mathcal{N}^{\perp} = \mathcal{M}$, заметим, что x принадлежит ортогональному дополнению к $\mathcal{N}$ тогда и только тогда, когда $(x, y - Uy) = 0$ для всех y. Из этого в свою очередь вытекает, что

$$0 = (x, y - Uy) = (x, y) - (x, Uy) = \\ = (x, y) - (U^* x, y) = (x - U^* x, y),$$

т. е. что $x-U^*x=x-U^{-1}x$ ортогонально к каждому вектору y, так что $x-U^{-1}x=0$, $x=U^{-1}x$, или $Ux=x$. Чтение последних выкладок справа налево показывает, что это необходимое условие также достаточно; теперь нужно лишь вспомнить определение $\mathscr{M}$, чтобы увидеть, что $\mathscr{M}=\mathscr{N}^{\perp}$.

Это очень остроумное доказательство, работающее, с весьма небольшими модификациями, в большинстве важных бесконечномерных случаев, принадлежит Ф. Риссу.

§ 93. Степенные ряды

Рассмотрим теперь так называемые ряды Неймана $\sum_{n=0}^{\infty} A^n$, где A — линейный оператор с нормой <1 на конечномерном векторном пространстве. Положим

$$S_p=\sum_{n=0}^{p} A^n,$$

тогда

$$(1-A)S_p=S_p-AS_p=1-A^{p+1}. \tag{1}$$

Для доказательства того, что S_p стремится к пределу при $p \to \infty$, рассмотрим (для любых двух индексов p и q с $p>q$) неравенства

$$\|S_p-S_q\| \leqslant \sum_{n=q+1}^{p} \|A^n\| \leqslant \sum_{n=q+1}^{p} \|A\|^n.$$

Поскольку $\|A\|<1$, последняя величина стремится к нулю при p, $q \to \infty$; значит, S_p стремится к некоторому пределу S при $p \to \infty$. Для вычисления этого предела заметим, что оператор $1-A$ обратим. (Доказательство: $(1-A)x=0$ влечет $Ax=x$, и при $x \neq 0$ это означало бы, что $\|Ax\|=\|x\|>\|A\|\cdot\|x\|$, в противоречие с определением $\|A\|$.) Следовательно, (1) можно записать в виде

$$S_p=(1-A^{p+1})(1-A)^{-1}=(1-A)^{-1}(1-A^{p+1}); \tag{2}$$

так как $A^{p+1}\to 0$ при $p\to\infty$, то заключаем, что $S=(1-A)^{-1}$.

В качестве другого примера бесконечного ряда операторов рассмотрим экспоненциальный ряд. Для произвольного линейного оператора A (не обязательно с $\|A\|<1$) положим

$$S_p=\sum_{n=0}^{p}\frac{1}{n!}A^n.$$

Так как

$$\|S_p-S_q\|\leqslant\sum_{n=q+1}^{p}\frac{1}{n!}\|A\|^n,$$

а правая часть этого неравенства, являясь отрезком степенного ряда для $\exp\|A\|=e^{\|A\|}$, сходится к 0 при $p, q\to\infty$, то мы видим, что существует линейный оператор S такой, что $S_p\to S$. Будем пользоваться обозначением $S=\exp A$; мы упомянем лишь некоторые элементарные свойства этой функции от A.

Рассмотрение треугольных форм операторов A и S_p показывает, что собственные значения оператора $\exp A$, вместе с их алгебраическими кратностями, равны экспоненциалам собственных значений оператора A. (Это доказательство, также, как и некоторые следующие, непосредственно применимо только к комплексному случаю; вывод для вещественного случая — посредством комплексификации.) Из рассмотрения треугольной формы следует также, что определитель оператора $\exp A$, т. е. $\prod\limits_{i=1}^{N}\exp\lambda_i$, где $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — (не обязательно различные) собственные значения оператора A, есть не что иное как $\exp(\lambda_1+\ldots+\lambda_N)=\exp(\operatorname{tr}A)$. Поскольку $\exp\zeta\neq 0$, это, попутно, показывает, что оператор $\exp A$ всегда обратим.

Рассматриваемый как функция линейных операторов, экспоненциал сохраняет многие простые свойства обыкновенной числовой показательной функции. Возьмем, например, любые два *перестановочных* линейных оператора A и B. Так как $\exp(A+B)-\exp A\exp B$ есть предел (при $p \to \infty$) выражения

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!}(A+B)^n - \sum_{m=0}^{p} \frac{1}{m!} A^m \cdot \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} B^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{p} \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} A^j B^{n-j} - \sum_{m=0}^{p} \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{m!k!} A^m B^k,$$

то мы докажем правило умножения для экспоненциалов, если докажем, что это выражение стремится к нулю. $\left(\text{Здесь } \binom{n}{j} \text{ означает биномиальный коэффициент } \frac{n!}{j!(n-j)!}.\right)$ Простая проверка показывает, что для $k+m \leqslant p$ произведение $A^m B^k$ встречается в обоих выражениях правой части с коэффициентами, отличающимися лишь знаком. Члены, не уничтожающиеся при вычитании, принадлежат все вычитаемому и составляют вместе

$$\sum_{m} \sum_{k} \frac{1}{m!k!} A^m B^k,$$

где суммирование распространяется на все те значения m и k, не превосходящие p, для которых $m+k>p$. Поскольку последнее неравенство влечет, что хотя бы одно из двух целых m и k больше целой части $\left[\frac{p}{2}\right]$ числа $\frac{p}{2}$, норма этого остатка не превосходит

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=\left[\frac{p}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{m!k!} \| A \|^m \| B \|^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=\left[\frac{p}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{m!k!} \| A \|^m \| B \|^k =$$

$$= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \| A \|^m \right) \left(\sum_{k=\left[\frac{p}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{k!} \| B \|^k \right) +$$

$$+ \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \| B \|^k \right) \left(\sum_{m=\left[\frac{p}{2}\right]}^{\infty} \frac{1}{m!} \| A \|^m \right) =$$

$$= (\exp \| A \|)\, \alpha_p + (\exp \| B \|)\, \beta_p,$$

где $\alpha_p \to 0$ и $\beta_p \to 0$ при $p \to \infty$.

Аналогичными методами изучается $f(A)$, где f — любая функция, представимая степенным рядом,

$$f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n,$$

а $\|A\|$ (строго) меньше радиуса сходимости этого ряда. Предоставляем читателю проверить, что намеченное здесь функциональное исчисление согласуется с функциональным исчислением для нормальных операторов. Так, например, оператор $\exp A$, как он определен в этом параграфе, есть тот же линейный оператор, что и определенный соответственно нашему прежнему пониманию функции $\exp A$ для случая нормального оператора A.

Упражнения

1. Дать другое доказательство эргодической теоремы, основанное на спектральной теореме для унитарных операторов.

2. Рассматривая формальное степенное разложение для $(1-(1-A))^{-1}$, доказать, что если $\|1-A\| < 1$, то A обратим.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ГИЛЬБЕРТОВО ПРОСТРАНСТВО

Вероятно, наиболее полезным и, во всяком случае, наиболее полно разработанным обобщением теории конечномерных пространств со скалярным произведением является теория гильбертова пространства. Не вдаваясь в детали и совершенно не приводя доказательств, мы попытаемся теперь описать, как строится это обобщение и каковы основные трудности, которые приходится преодолевать.

Определение гильбертова пространства просто: это пространство со скалярным произведением, удовлетворяющее одному дополнительному условию. То, что это условие (а именно полнота) автоматически выполняется в конечномерном случае, доказывается в элементарном анализе. В бесконечномерном случае оказывается возможным, что последовательность векторов (x_n) такова, что $\|x_n - x_m\| \to 0$ при n, $m \to \infty$, и тем не менее нет такого вектора x, для которого бы $\|x_n - x\| \to 0$; единственный эффективный способ исключения этой возможности состоит в явном принятии противоположного предположения. Другими словами, гильбертово пространство есть полное пространство со скалярным произведением. (Иногда понятие гильбертова пространства сужается дополнительными условиями, назначение которых — ограничить габариты пространства и снизу, и сверху. Наиболее распространенные среди этих условий требуют, чтобы пространство было бесконечномерным и сепарабельным. В последние годы, с тех пор как выяснилось, что такие дополнительные ограничения не окупаются результатами, стало принятым называть «гильбертовым пространством» определенное нами понятие.)

Легко видеть, что пространство $\mathcal{P}$ полиномов со скалярным произведением, определенным формулой $(x, y) = \int_0^1 x(t)\overline{y(t)}\,dt$, неполно. По вопросу о полноте тех или иных специальных гильбертовых пространств имеется довольно обширная математическая литература. Так, например, основное утверждение знаменитой теоремы Рисса — Фишера состоит в том, что гильбертово пространство, составленное из всех тех функций x, для которых $\int_0^1 |x(t)|^2 dt < \infty$ (в смысле лебеговского интегрирования), есть гильбертово пространство (с формально тем же определением скалярного произведения, как для полиномов). Другим популярным гильбертовым пространством, напоминающим по виду конечномерное координатное пространство, является пространство всех тех последовательностей (ξ_n) (смотря по надобности, вещественных или комплексных) чисел, для которых $\sum_n |\xi_n|^2$ сходится.

Используя полноту для разумного рассмотрения сходимости некоторых бесконечных сумм, можно в течение некоторого времени строить теорию гильбертова пространства, не сталкиваясь ни с какими трудностями, вызываемыми бесконечномерностью. Так, например, понятия ортогональности и полных ортонормальных множеств могут быть определены в общем случае совершенно так, как мы их определили. Наши доказательства неравенства Бесселя и равносильности различных возможных формулировок полноты ортонормального множества следует подвергнуть только небольшим изменениям словесного характера. (Сходимость различных встречающихся при этом бесконечных сумм автоматически следует из неравенства Бесселя.) Наше доказательство неравенства Шварца верно без изменений в наиболее общем случае. Наконец, доказательство существования полных ортонормальных множеств близко следует доказательству того же для конечного случая. При неконструктивном доказательстве обычная индукция заменяется леммой Цорна (или трансфинитной индукцией), и даже конструктивные шаги процесса Грама — Шмидта легко выполняются.

При рассмотрении многообразий, функционалов и операторов положение окажется затруднительным, если мы не пойдем на уступки топологии гильбертова пространства. Хорошие обобщения всех наших утверждений, сделанных в конечномерном случае, можно будет доказать, если рассматривать *замкнутые* линейные многообразия, *непрерывные* линейные функционалы и *ограниченные* линейные операторы. (В конечномерном случае каждое линейное многообразие замкнуто, каждый линейный функционал непрерывен и каждый линейный оператор ограничен.) Если, однако, мы согласимся пойти на эти уступки, то снова сможем воспользоваться нашими конечномерными доказательствами в основном без всяких изменений и лишь в некоторых случаях вводя ε. Так, мы снова получим, что $\mathscr{V} = \mathscr{M} \oplus \mathscr{M}^{\perp}$, что $\mathscr{M} = \mathscr{M}^{\perp\perp}$ и что каждый линейный функционал от x представи́м в виде (x, y); наши определения самосопряженных и положительных операторов по-прежнему имеют смысл, и все наши теоремы о перпендикулярных проекторах (как и их доказательства) переносятся без изменения.

Первый намек на возможные неблагополучия встречается при изучении ортогональных и унитарных операторов. Мы по-прежнему называем оператор U ортогональным или унитарным (соответственно тому, вещественно или комплексно пространство), если $UU^* = U^*U = 1$, и по-прежнему верно, что такой оператор является изометрией, т. е. $\|Ux\| = \|x\|$ для всех x, или, что равносильно этому, $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех x и y. Однако легко построить изометрический оператор, который не будет унитарным; ввиду важной роли, которую он играет при построении контрпримеров, мы опишем один такой оператор. Рассмотрим гильбертово пространство, содержащее счетное полное ортонормальное множество, скажем, $\{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$. Условия $Ux_n = x_{n+1}$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ однозначно определяют ограниченный линейный оператор U. Этот оператор U является изометрией ($U^*U = 1$), но, поскольку $UU^*x_0 = 0$, уже неверно, что $UU^* = 1$.

Но при переходе к спектральной теории радикально меняется весь ход развития теории. Определение собственного значения как числа λ, для которого уравнение $Ax = \lambda x$ имеет ненулевое решение, по-прежнему имеет смысл, и наша теорема о вещественности собственных значений самосопряженного оператора по-прежнему верна. Однако понятие собственного значения в значительной мере теряет свою ценность. Собственные значения столь полезны в конечномерном случае тем, что они дают удобный способ описания того, что что-то не в порядке с оператором, обратным к $A - \lambda$, а единственное, что может быть не в порядке, состоит в том, что этот обратный перестает существовать. В бесконечномерном случае могут происходить существенно другие вещи; только чтобы проиллюстрировать имеющиеся возможности, укажем, например, что оператор, обратный к $A - \lambda$, может существовать, но быть неограниченным. То, что не существует никакого полезного обобщения определителя, а следовательно, и характеристического уравнения, есть наименьшая из наших печалей. В самом деле, вся теория достигла своей полной красоты и законченности, лишь когда отказались от рабского подражания таким конечномерным методам.

После того, как мы почти примирились с мыслью, что бесконечномерный случай связан с преодолением больших трудностей, приятным сюрпризом является тот факт, что спектральная теорема для самосопряженных операторов (а в комплексном случае даже для нормальных) все же допускает весьма красивое и мощное обобщение. (Хотя при описании теоремы мы говорим только об ограниченных операторах, теорема справедлива и для широкого класса неограниченных операторов.) Чтобы быть в состоянии понять аналогию, переформулируем конечномерный случай.

Пусть A — самосопряженный линейный оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением и $A = \sum_j \lambda_j E_j$ — его спектральное разложение. Для каждого интервала M вещественной оси обозначим через $E(M)$ сумму всех тех F_j, для которых λ_j принадлежит M. Ясно, что $E(M)$ для каждого M есть перпендикулярный проектор. Решающее значение имеют следующие свойства проекторной функции интервала E: если M есть объединение счетного семейства $\{M_n\}$ дизъюнктных интервалов, то

$$E(M) = \sum_n E(M_n), \tag{1}$$

и если M — несобственный интервал, состоящий из всех вещественных чисел, то $E(M) = 1$. Связь между A и E описывается равенством

$$A = \sum_j \lambda_j E(\{\lambda_j\}),$$

где, разумеется, $\{\lambda_j\}$ — вырожденный интервал, состоящий из одного числа λ_j. Те, кто знаком с интегралом Лебега — Стилтьеса, узнает в последней сумме типичную интегральную сумму для интеграла вида $\int \lambda dE(\lambda)$ и потому усмотрит, в каком направлении следует ожидать обобщения. Алгебраическое понятие суммирования следует заменить аналитическим понятием интегрирования; обобщенная связь между A и E описывается равенством

$$A = \int \lambda\, dE(\lambda). \tag{2}$$

При этом формальном изменении спектральная теорема для самосопряженных операторов остается справедливой и в гильбертовом пространстве. Мы должны, конечно, правильно истолковывать предельные переходы, содержащиеся в формулах (1) и (2). И снова перед нами возникают три возможности, упомянутые в § 91. Они называются соответственно равномерной, сильной и слабой сходимостями. И оказывается, что и формула (1), и формула (2) могут быть интерпретированы в смысле сильной сходимости. (Читатель, конечно, понял из сказанного, что в бесконечномерном гильбертовом пространстве эти три возможности действительно различны.)

Мы видели, что проекторы F_j, входящие в спектральное разложение оператора A в конечномерном случае, являются очень простыми функциями от A (§ 82). Поскольку $E(M)$ получаются из F_j суммированием, они также являются функциями от A, и очень легко описать, какими функциями. Положим $g_M(\zeta) = 1$, если ζ принадлежит M, и $g_M(\zeta) = 0$ в противном случае; тогда $E(M) = g_M(A)$. Этот факт дает главный ключ к возможному доказательству общей спектральной теоремы. Обычный путь состоит в рассмотрении функционального исчисления для полиномов и распространения его с помощью предельных переходов на класс функций, включающий все функции g_M. Раз это сделано, мы можем определить функцию интервала E, положив $E(M) = g_M(A)$; не составляет особого труда установить, что E и A удовлетворяют соотношениям (1) и (2).

После того, как спектральная теорема доказана, легко вывести из нее обобщенные варианты наших теорем о квадратных корнях, функциональном исчислении, полярном разложении и свойствах перестановочности и, по существу, ответить практически на любой разумный вопрос об ограниченных нормальных операторах.

Остаются две основные трудности: рассмотрение не нормальных и рассмотрение неограниченных операторов. Что касается общих не нормальных операторов, состояние наших знаний здесь весьма легко описать: их не существует. Не имеется даже удовлетворительного обобщения треугольной формы или канонической жордановой формы и теории элементарных делителей. Совершенно иначе обстоит дело с нормальными (и особенно самосопряженными) неограниченными операторами. (Читателю будет понятно наше желание заниматься такими операторами, если он вспомнит, что первой и наиболее важной функциональной операцией, которую изучает большинство из нас, является дифференцирование.) В этой связи мы только едва наметим главные препятствия, стоящие на пути этой теории. Нетрудно показать, что самосопряженный линейный оператор, определенный для всех векторов гильбертова пространства, ограничен. Другими словами, первое требование, предъявляемое к операторам, от которого мы вынуждены отказаться, — это требование, чтобы они были определены всюду. Точное описание области, на которой может быть определен самосопряженный оператор, и границ, до которых эта область может быть расширена, — главная новая трудность, с которой сталкивается изучение неограниченных операторов.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Следующий очень краткий список не претендует на полноту; он просто содержит по два представителя каждого из нескольких направлений, которые, возможно, заинтересуют читателя.

В направлении общей (но обычно конечномерной) линейной и полилинейной алгебры:

1. N. Bourbaki, Algèbre, Chap. II (Algèbre linéaire), Paris, 1947, и Chap. III (Algèbre multilinéaire), Paris, 1948. [Выходит в свет русский перевод.]
2. B. L. van der Waerden, Modern algebra, New York, 1953. [Русский перевод немецкого издания: Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, часть I, М.—Л., 1947; часть II, М.—Л., 1947.]

В направлении связей с классическим и современным анализом:

1. S. Banach, Théorie des opérations linéaires, Warszawa, 1932. [Украинский перевод: С. С. Банах, Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.]
2. F. Riesz and B. Sz.-Nagy, Functional analysis, New York, 1955. [Русский перевод с венгерского издания: Ф. Рисс и Б. Секефальви-Надь, Лекции по функциональному анализу, Москва, 1954.]

В направлении геометрии гильбертова пространства и теории операторов на нем:

1. P. R. Halmos, Introduction to Hilbert space, New York, 1951.
2. M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space, New York, 1932.

В направлении связей с классической и современной физикой:

1. R. Courant and D. Hilbert, Methods of mathematical physics, New York, 1953. [Русский перевод с немецкого издания: Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, том I, М.—Л., 1951; том II, М.—Л., 1951.]
2. J. von Neumann, Mathematical foundation of quantum mechanics, Princeton, 1955.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Пауль Халмош

Конечномерные
векторные пространства

М., Физматгиз, 1963 г., 264 стр.

Редактор *И. Е. Морозова*
Техн. редактор *Е. А. Ермакова*
Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 3/IX 1962 г. Подписано к печати 4/I 1963 г. Бумага $84 \times 108/_{32}$. Физ. печ. л. 8,25. Условн. печ. л. 13,53. Уч.-изд. л. 13,81. Тираж 9000. Цена книги 89 коп. Заказ № 407.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Московская типография № 5
Мосгорсовнархоза.
Москва, Трехпрудный пер., 9.