

НАГЛЯДНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЯХ

Г.А.ВЛАДИМИРСКИЙ

НАГЛЯДНЫЕ
ИЗОБРАЖЕНИЯ
В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
ПРОЕКЦИЯХ



УЧПЕДГИЗ · 1960

Г. А. ВЛАДИМИРСКИЙ

НАГЛЯДНЫЕ
ИЗОБРАЖЕНИЯ
В ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ
ПРОЕКЦИЯХ

ПОСОБИЕ ДЛЯ УЧИТЕЛЕЙ

*Рекомендовано Учебно-методическим советом
Министерства просвещения РСФСР*

ГОСУДАРСТВЕННОЕ
УЧЕБНО-ПЕДАГОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР

Москва 1960

Григорий Алексеевич Владимирский

Наглядные изображения в параллельных проекциях

Редактор *Э. А. Родионова*

Художник *А. М. Левкин*

Обложка художника *Г. В. Смеловой*

Художественный редактор *Б. Л. Николаев*

Технический редактор *В. Л. Коваленко*

Корректор *К. А. Иванова*

* * *

Сдано в набор 10/V 1960 г. Подписано к печати 10/VIII 1960 г.

60×92¹/₁₆. Печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 7,72.

Тираж 19 000 экз. А08713.

Учпедгиз. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41

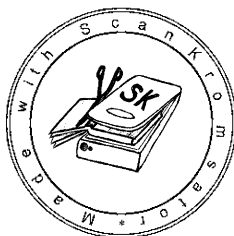
Полиграфкомбинат Саратовского совнархоза

г. Саратов, ул. Чернышевского, 59.

* * *

Цена без переплета 1 р. 95 к., переплет 80 к.

Заказ № 1528



Scan AAW

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге изложены сведения о способах построения наглядных изображений пространственных фигур в параллельных проекциях. Графические наглядные пособия имеют особенно важное значение на уроках черчения. Составление таких пособий самим учителем и широкое, полноценное в педагогическом отношении использование наглядного графического материала на уроках возможно только при достаточно углубленном знакомстве учителя черчения с теорией параллельных проекций и со способами ее практического применения в учебной работе.

Теоретические и практические сведения о способах построения наглядных изображений распределяются в книге таким образом.

Первая глава содержит сведения об основных свойствах параллельных проекций и об их применении к изображению пространственных фигур.

Во второй главе дается понятие о полноте изображения и рассматриваются способы решения позиционных задач на полном изображении. Указанный материал излагается на основе положений, развитых проф. Н. Ф. Четверухиным в его книге «Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии».

Третья глава содержит сведения о способах построения метрически определенных наглядных изображений.

Предлагаемый в книге материал, базируясь на сведениях, составляющих содержание курса черчения средней школы, расширяет и углубляет эти сведения. Овладение кругом изложенных сведений даст возможность учителю с большей полнотой и свободой дополнять иллюстрации учебника самостоятельно составленными наглядными изображениями и тем самым повысить уровень преподавания своего предмета. Вместе с тем учитель может без особой дополнительной переработки и не без пользы для учебного дела включить некоторую часть содержания данного пособия в тематику кружковой работы учащихся. В результате этой работы могут быть созданы силами учащихся наглядные пособия (плакаты) по программе курса черчения и других учебных предметов.

Из соображений полноты и методической последовательности изложения автор счел целесообразным внести в предлагаемое пособие (преимущественно в первую и вторую главы) некоторую часть материала, изложенного им в книге В л а д м и р с к и й Г. А. и К а л е ц к и й С. Ю., Черчение, Учпедгиз, 1954.

ВВЕДЕНИЕ

Наглядные графические изображения широко применяются в школьном преподавании курса черчения.

Наглядные изображения необходимы прежде всего для того, чтобы помогать учащимся возможно полнее и точнее представлять форму и конструкцию тел (изделий и их деталей), изображенных на чертежах в системе прямоугольных проекций. Это умение «читать» чертеж технического содержания является необходимым условием подготовки учащихся к изучению учебных предметов политехнического цикла и к прохождению производственной практики.

Наряду с этим учитель черчения сопровождает наглядными изображениями свои пояснения, рассказывая учащимся о процессе проектирования на две (или на три) плоскости проекций с последующим получением эпюра, а также сопоставляя в пространстве и на чертеже построения, при помощи которых определяются, например, натуральная величина отрезка, истинный вид плоской фигуры, линия перехода на поверхности взаимно пересекающихся тел и т. п.

В процессе преподавания учителю черчения нельзя не считаться с тем, что некоторые разделы программы (например, основы проекционного черчения) изучаются на уроках черчения ранее, чем учащиеся получают на уроках стереометрии систематические сведения об основных свойствах и соотношениях пространственных фигур и их элементов. На учителя черчения в силу необходимости возлагается наряду с основной задачей обучения способам построения и чтения чертежей также и обязанность впервые знакомить учащихся с простейшими геометрическими телами, давать первоначальные сведения о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей в пространстве и др. Для сообщения указанных сведений учитель черчения должен в широкой мере использовать наряду с объемными моделями также и наглядный графический материал.

Весьма эффективным является привлечение наглядных изображений к решению одной из основных задач преподавания черчения — задачи развития пространственных представлений учащихся. Умение учащихся с должной ясностью и полнотой представлять по заданному чертежу форму изображенного тела и выпол-

нять на чертеже различные конструктивные преобразования обусловливается прежде всего тем запасом пространственных представлений, который накоплен учащимися на уроках черчения. Наглядные изображения, помещаемые в учебниках, нельзя признать достаточными для успешного развития пространственных представлений учащихся, так как обычно они иллюстрируют каждый вопрос изучаемой темы лишь одним (единичным) чертежом; вследствие этого изучаемая фигура, соотношения ее элементов, конструктивные преобразования нередко усваиваются учащимися недостаточно обобщенно. Необходимое обобщение успешно достигается показом ряда чертежей-вариантов на данную тему. Такие дополнительные иллюстрации наиболее удобно и целесообразно иметь в виде стенных таблиц (плакатов), предоставляя учащимся рассматривать их не только на уроке, но и в течение более длительного срока. Составление таких плакатов является одним из видов методической подготовки учителя к урокам черчения. Графическое выполнение плакатов может быть организовано под руководством учителя на кружковых занятиях учащихся.

В практике преподавания значение наглядных изображений и возможности, которые содержит в себе этот вид подсобного материала для усвоения курса черчения и для развития пространственных представлений, нередко недооцениваются учителем. Необходимо иметь в виду, что эти возможности выявляются учителю полностью лишь при условии достаточно глубокого овладения теорией построения наглядных изображений, при надлежащем выборе приемов построения и при умелом, продуманном использовании наглядного материала на уроках.

ГЛАВА I

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ И ИХ СВОЙСТВА

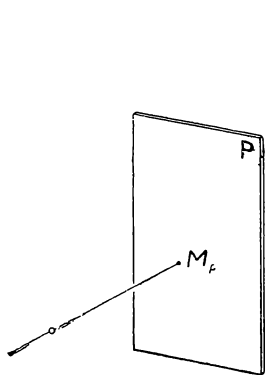
§ 1. Общие сведения о методе проекций

Графическое наглядное изображение какой-нибудь пространственной фигуры, выполняемое обычно на плоскости (на листе бумаги, на классной доске), представляет собой по внешнему виду плоскую фигуру, составленную из сочетания точек и линий, определенным образом расположенных между собой. Для получения изображения некоторого предмета необходимо сгруппировать на листе бумаги линии и точки так, чтобы при рассматривании они вызывали представление данного предмета. Сходство зрительных образов, получаемых при рассматривании изображения и его оригинала, обуславливается требованием, чтобы в обоих случаях очертания световых пятен, образуемых на сетчатке глаза падающими на нее световыми лучами, были в должной мере сходны между собой.

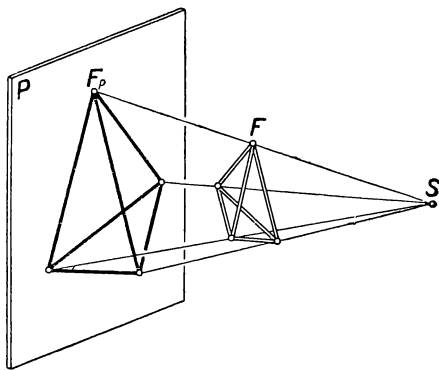
В соответствии с этим требованием в основу способов построения на плоскости наглядных изображений пространственных фигур положен метод проекций.

*Проекцией какой-нибудь точки M на плоскость P называется точка M_P пересечения с плоскостью P некоторой прямой, проведенной через заданную точку M (черт. 1). Если точка M принимается за изображаемый объект, то точка M_P является изображением данного объекта. Прямая MM_P , посредством которой получена проекция M_P точки M , называется *проектирующей прямой* (или *проектирующим лучом*), плоскость P , на которой построено изображение, — *плоскостью проекций* (а также *плоскостью изображений* или *картинной плоскостью*), а самый процесс получения изображения — *проектированием* объекта M на плоскость проекций P . Изображение какой-нибудь пространственной фигуры может быть получено, если спроектировать на плоскость проекций некоторые точки, принадлежащие данной фигуре, выбрав эти точки так, чтобы построенное по ним очертание фигуры давало возможность узнать и правильно представить изображенный объект.*

Проектирующие лучи, при помощи которых строится указанным методом изображение пространственной фигуры, должны иметь направление, отвечающее одному из следующих двух требований: 1) все проектирующие лучи должны проходить через одну и ту же произвольно выбранную точку S пространства, не лежащую на

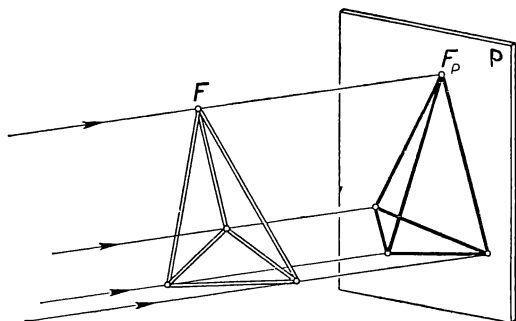


Черт. 1



Черт. 2

плоскости проекций (черт. 2), или 2) все проектирующие лучи должны быть параллельны между собой; при этом последнем условии



Черт. 3

направление проектирующих лучей может быть произвольным, исключая случай их параллельности плоскости проекций (черт. 3).

Метод построения изображений при первом способе выбора проектирующих лучей называется методом *центральных проекций*, а точка S , общая для всех проектирующих лучей, — *центром проекций*. Изображение, построенное по методу центральных проекций, весьма близко соответствует изображению, получаемому на сетчат-

ке человеческого глаза; поэтому в центральной проекции можно наилучшим образом достигнуть сходства изображения с оригиналом. В практике применения этого метода принято называть центр проекций *точкой зрения*, проектирующие прямые — *лучами зрения*, плоскость проекций — *картиной*, а изображение, получаемое на картине, — *перспективной* заданного оригинала. Этот метод применяется в живописи, где требованию наибольшего сходства изображения с натурой придается весьма большое значение, а также в некоторых разделах технического черчения (например, в архитектурном черчении) в тех случаях, когда требуется изобразить предметы, имеющие в натуре значительное протяжение в глубину пространства. Применение метода центральных проекций в школьной учебной работе на уроках черчения, геометрии, физики и др. является неудобным вследствие значительной сложности для учащихся как теории, так и техники построения изображений.

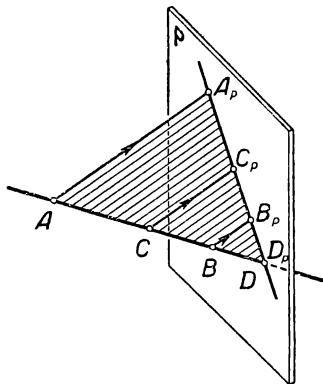
Построение изображений посредством произвольно направленного пучка параллельных проектирующих лучей называется методом *параллельных проекций*. Параллельные проекции можно рассматривать как предельный случай центральных проекций, получаемый при отнесении центра проекций на бесконечно удаленное расстояние от изображаемого предмета и от плоскости проекций.

В зависимости от наклона проектирующих лучей к плоскости проекций проекция называется *косоугольной* при произвольном направлении проектирования и *прямоугольной*, если проектирующие лучи перпендикулярны к плоскости проекций. Параллельные проекции имеют широкое применение для построения изображений пространственных фигур в стереометрии, в проекционном и техническом черчении, в некоторых разделах физики и др. Изображения пространственных фигур, получаемые в параллельной проекции, обладают достаточной наглядностью и вместе с тем теория построения чертежей по своей простоте вполне доступна учащимся IX—X классов, а практика выполнения изображений легко осваивается учащимися VII и VIII классов на основе непосредственного зрительного восприятия пространственной формы предметов.

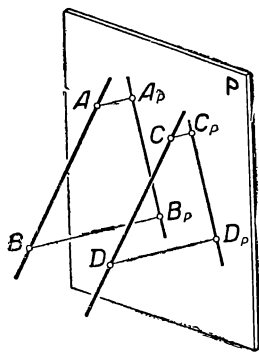
Заметим, что если при параллельном проектировании перемещать изображаемую фигуру параллельно самой себе, располагая отдельные точки, ей принадлежащие, как по одну, так и по другую сторону плоскости проекций, то очертания изображения на плоскости проекций не изменяются, — плоская фигура остается равной самой себе. Стрелки, поставленные при проектирующих прямых на чертеже 3 (и на некоторых дальнейших чертежах), указывают в условной форме на роль этих прямых в процессе получения отдельных точек искомого изображения; они позволяют судить, какая сторона плоскости чертежа является лицевой и какие точки изображенной фигуры нужно принимать за «видимые» или «перекрытые» другими, впереди лежащими точками (см., например, черт. 10).

§ 2. Основные свойства параллельных проекций

Пусть на плоскости P (черт. 4) требуется построить проекцию* некоторой прямой, заданной точками A и B . В соответствии с описанным выше методом проектирования мы должны провести через точки заданной прямой параллельные между собой проектирующие лучи и отметить точки пересечения этих лучей с плоскостью P . Полученное геометрическое место точек — линия $A_P B_P$ представит проекцию данной прямой AB на плоскости P . Из построения видно, что при любом заданном направлении проектирования, не параллельном направлению заданной прямой, все проектирующие лучи,



Черт. 4



Черт. 5

проходящие через точки прямой AB , расположатся в одной плоскости — проектирующей плоскости, которая пересечет плоскость проекций по некоторой прямой. Отсюда следует, что

проекция прямой есть прямая. (I)

Проекция прямой может быть получена на плоскости проекций, если найдены проекции A_P и B_P каких-нибудь двух точек A и B проектируемой прямой.

Из чертежа 4 легко усмотреть, что каждой точке (C), взятой на проектируемой прямой (AB), соответствует точка (C_P) на проекции ($A_P B_P$) этой прямой. (II)

В частности, точка D , в которой прямая AB пересекается с плоскостью проекций, совпадает со своей проекцией D_P ; в этой точке прямая AB и ее проекция $A_P B_P$ пересекаются между собой**.

Если прямые AB и CD параллельны между собой и не параллельны направлению проектирования (черт. 5), то проектирующие

* В дальнейшем изложении, говоря о проекциях, мы будем подразумевать параллельные проекции.

** Точка D пересечения прямой AB с плоскостью P называется *следом* прямой AB на плоскости P .

плоскости, посредством которых получаются проекции $A_P B_P$ и $C_P D_P$ данных прямых, также параллельны между собой, так как содержат углы $A_P A B$ и $C_P C D$, составленные соответственно параллельными сторонами ($AB \parallel CD$ и $AA_P \parallel CC_P$). Вследствие этого параллельны между собой и прямые $A_P B_P$ и $C_P D_P$, как линии пересечения параллельных (проектирующих) плоскостей с плоскостью проекций P . Отсюда следует, что

проекции параллельных прямых являются прямыми параллельными. (III)

Из чертежа 4 легко видеть, что проектирующие лучи AA_P , CC_P и BB_P отсекают на прямых AD и $A_P D_P$ пропорциональные между собой отрезки:

$$\frac{A_P C_P}{C_P B_P} = \frac{AC}{CB}.$$

Это означает, что *отношение отрезков, лежащих на проектируемой прямой, при параллельном проектировании не изменяется.* (IV)

Если в написанной выше пропорции переместить между собой крайние члены, то получим равенство $\frac{A_P C_P}{AC} = \frac{C_P B_P}{CB}$; справедливость

полученного равенства не зависит от выбора точек A , B и C на проектируемой прямой. Это равенство показывает, что отношение проекции отрезка к самому отрезку одинаково для всех отрезков, принадлежащих одной прямой. Величину k этого отношения, характеризующую изменение («искажение») длины отрезка при его проектировании, называют *коэффициентом искажения* или *показателем искажения*. Таким образом,

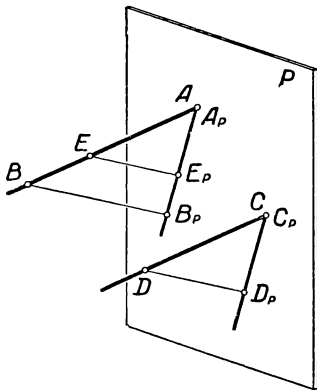
отрезки, лежащие на одной прямой, имеют равные коэффициенты искажения. (V)

Возьмем два параллельных отрезка AB и CD и построим их проекции $A_P B_P$ и $C_P D_P$ на плоскости P

при произвольном направлении проектирования (черт. 6). На прямой AB отложим отрезок AE , равный CD , и построим его проекцию $A_P E_P$. Из чертежа 6 легко усмотреть, что $A_P E_P = C_P D_P$; принимая во внимание равенство коэффициентов искажения отрезков, лежащих на одной прямой, мы можем написать:

$$\frac{A_P B_P}{AB} = \frac{A_P E_P}{AE};$$

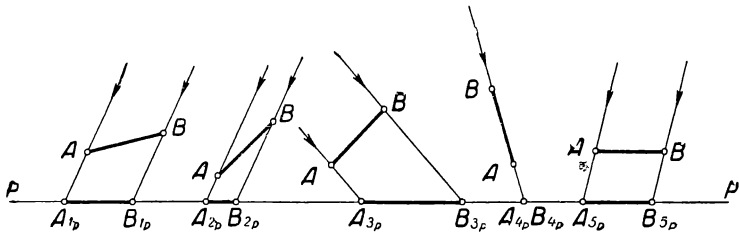
подставляя вместо $A_P E_P$ и AE равные им $C_P D_P$ и CD , получим $\frac{A_P B_P}{AB} = \frac{C_P D_P}{CD}$; это значит, что



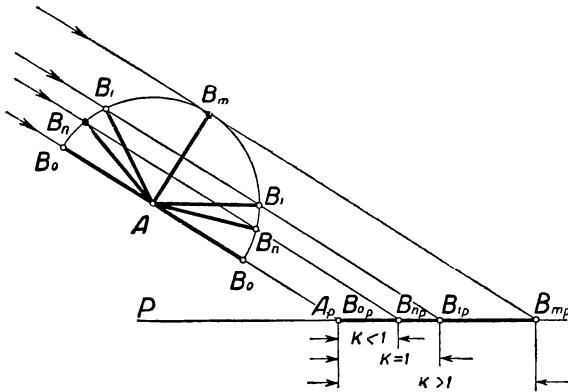
Черт. 6

коэффициенты искажения параллельных между собой отрезков одинаковы. (VI)

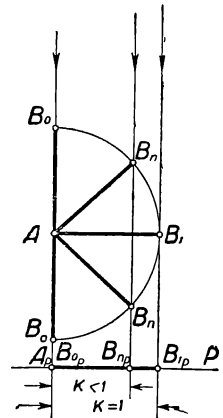
На чертежах 7, 8 и 9 изображены некоторые случаи проектирования одного и того же отрезка AB на плоскость проекций P при различном положении отрезка AB и проектирующих его лучей по отношению к плоскости P . Для упрощения данных чертежей плоскость P расположена перпендикулярно к плоскости листа бумаги и потому изображена на нем в виде прямой линии PP , а отрезок



Черт. 7



Черт. 8



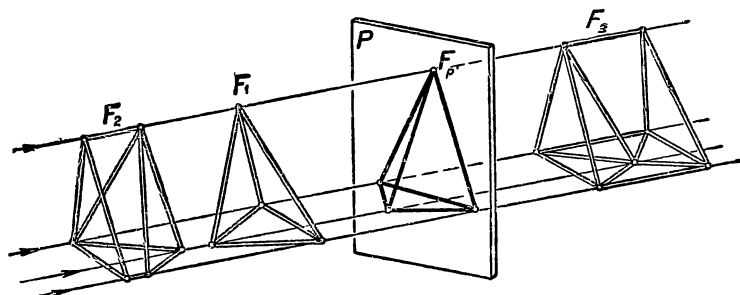
Черт. 9

AB и проектирующие его лучи во всех случаях взяты параллельными плоскости того же листа. Из чертежа 7 видно, что коэффициент искажения данного отрезка AB может принимать любые значения в зависимости от наклона отрезка и проектирующих лучей к плоскости проекций P и между собой. В частности, если направление отрезка совпадает с направлением проектирования, то проекция обращается в точку $A_{4P} B_{4P}$ и коэффициент искажения равен нулю. При параллельности отрезка плоскости проекций величина проекции $A_{5P} B_{5P}$ равна натуральной величине проектируемого отрезка и коэффициент искажения равен единице.

В косоугольных проекциях (черт. 8) коэффициент искажения принимает любые численные значения; в прямоугольном проектировании (черт. 9) величина коэффициента искажения не может превышать единицы.

Мы изложили основные положения метода проекций и показали, каким образом возможно применить этот метод к построению изображений пространственных фигур. В связи с этим уместно в качестве примеров указать на некоторые явления природы, в которых определенную роль играет принцип проекций.

Мы указывали на роль светового пятна, получающегося на сетчатке глаза при зрительном восприятии предмета. Это световое пятно (изображение предмета) в силу известных законов оптики получается по принципу центральных проекций в результате опре-



Черт. 10

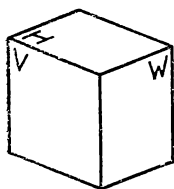
деленного хода световых лучей, играющих в данном случае роль проектирующих лучей. Принцип центральных проекций лежит и в основе фотографического изображения, получение которого обуславливается оптическими и фотохимическими законами природы. Тень, падающая от освещенного предмета, также является примером изображения предмета по принципу проекций. При небольших расстояниях между источником света, предметом и поверхностью, на которую падает тень от предмета, мы имеем пример центральной проекции (считая, что светящаяся поверхность источника света весьма невелика); тень от весьма далеко отстоящего источника света (например, солнечное освещение) представляет пример параллельного проектирования.

Изложенные сопоставления позволяют отметить, что метод проекций, положенный в основу графического способа построения изображений пространственных фигур, естественным образом связан с закономерностями природы и опирается на них.

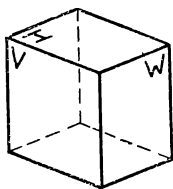
В связи со свойствами параллельных проекций полезно отметить одну особенность изображений, построенных по методу проекций. При выбранном направлении проектирования всякой фигуре F , заданной в пространстве (черт. 3), соответствует на плоскости проекций P единственная фигура F_P , являющаяся, согласно наше-

му определению, проекцией фигуры F . Однако, как показывает чертёж 10, фигуру F_P на плоскости P при неизменном направлении проектирования можно считать проекцией неограниченного числа различных по форме и величине фигур F_1, F_2, F_3, \dots . Другими словами, между изображаемой пространственной фигурой и ее изображением не существует взаимно однозначного соответствия. Вследствие этого правильное представление об изображенной фигуре по чертежу может быть достигнуто лишь в том случае, когда изображение фигуры сопровождается различного рода условными пояснениями — словесными, буквенными или графическими.

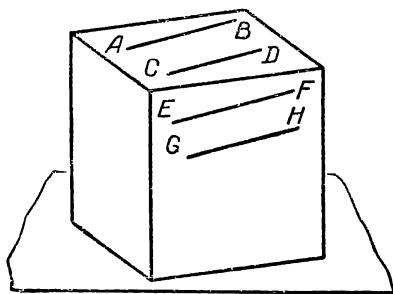
Так, например, фигура, изображенная на чертеже 11, в числе различных толкований может быть понята или как параллелепипед, или как трехгранный угол, обращенный к зрителю внешними поверхностями своих граней H, V и W и рассматриваемый свер-



Черт. 11



Черт. 12



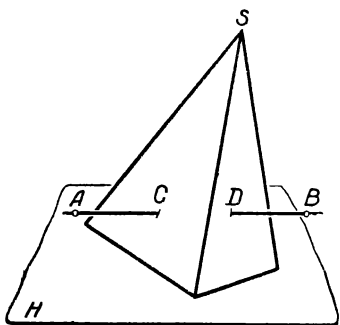
Черт. 13

ху, или, наконец, как трехгранный угол, обращенный к зрителю внутренними поверхностями граней и рассматриваемый снизу. Если провести на данном изображении три штриховые линии (черт. 12), придавая им условное значение ребер, закрытых от глаза гранями H, V и W , то изображение получает более определенное значение, как изображение параллелепипеда, однако и в этом случае его форма (прямоугольный, прямой, наклонный) и величина (натуральные размеры и относительная длина ребер) могут быть установлены только новыми дополнительными пояснениями.

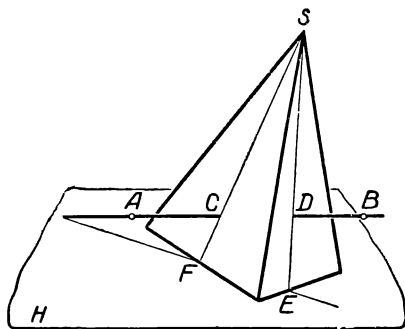
Из сказанного следует, что суждение о форме изображенной фигуры нельзя основывать только на зрительном впечатлении, полученном при рассмотрении чертежа. Для правильного представления формы бывает недостаточно и дополнительных условных пояснений, так как они отмечают обычно только основные структурные черты изображенной фигуры. Большую роль в процессе «чтения» чертежа, т. е. в правильном понимании пространственной формы фигуры по ее изображению, играет логический анализ чертежа, опирающийся на знание законов геометрии и основных свойств проекций.

Пусть, например, на чертеже 13 изображен куб с проведенными на верхней и передней гранях прямыми. Было бы ошибочным, пола-

гаясь на зрительное впечатление, утверждать, что прямые CD и EF параллельны между собой; геометрический анализ говорит, что в силу своего расположения в разных (пересекающихся между собой) плоскостях эти прямые могли бы быть параллельными только в случае их одновременной параллельности ребру куба, по которому пересекаются грани, содержащие эти прямые; опираясь на свойства проекций, легко объяснить параллельность проекций этих прямых на чертеже расположением этих прямых в двух параллельных между собой проектирующих плоскостях. Вместе с тем, ограничиваясь глазомерной оценкой, мы вправе считать попарно параллельными прямые AB и CD и прямые EF и GH .



Черт. 14



Черт. 15

В другом примере на чертеже 14 дана пирамида, поставленная на плоскость H , и прямая AB , проникающая грани пирамиды в точках C и D . По первому зрительному впечатлению можно подумать, что прямая AB параллельна плоскости H . Однако графический анализ (черт. 15) обнаруживает неправильность такого предположения, так как прямая AB пересекается с прямой EF , лежащей в плоскости H и принадлежащей плоскости CSD , проведенной через прямую AB и вершину пирамиды S .

§ 3. Изображение плоских многоугольников

Покажем, как можно на основе рассмотренных свойств параллельных проекций строить изображения пространственных фигур на плоскости. Изображение, построенное по принципу проекций, носит название *проекционного чертежа*. Проекционный чертеж может передавать двоякого рода свойства изображенной фигуры: во-первых, свойства формы, связанные с взаимным расположением частей фигуры, так называемые *позиционные* свойства, и, во-вторых, свойства, отображающие размеры фигуры и ее частей, — *метрические* свойства.

В учебной работе в ряде случаев назначение чертежа может ограничиваться отображением только позиционных свойств простран-

ственных фигур. Таковы, например, чертежи, служащие для наглядного ознакомления с основными видами геометрических тел: призмой, пирамидой, цилиндром и конусом. Равным образом необходимость в таких наглядных чертежах встречается на уроках черчения при решении задач о взаимном расположении (в частности, взаимном пересечении поверхностей) фигур, заданных на чертеже.

В техническом черчении чертеж изображает обычно какой-нибудь конкретный предмет, отдельные детали некоторого изделия (изготовленного или задуманного для изготовления). Поэтому проекционный чертеж технического назначения должен с надлежащей определенностью передавать как позиционные свойства, так и размеры (метрические свойства) изображенного предмета. Это последнее требование обуславливает применение в техническом черчении особого способа изображения предмета посредством нескольких его проекций, расположенных на чертеже в определенной условной системе*.

На проекционном чертеже плоскость проекций считается совмещенной с плоскостью бумаги (или классной доски), на которой строится изображение. При таком условии всякий проектирующий луч изобразится в виде точки, совпадающей с изображением точки, которую он проектирует. Это освобождает чертеж (в отличие от вышеприведенных чертежей 1—10), от линий, не относящихся непосредственно к очертанию изображаемой фигуры**.

Обычно при построении наглядного изображения предполагается, что в процессе проектирования плоскость проекций расположена вертикально; в соответствии с этим при рассматривании наглядного изображения на листе бумаги, лежащем в горизонтальном положении на столе, а также при его построении мы мысленно относим изображаемую фигуру в такое положение в пространстве, которое соответствует вертикальному (фронтальному) положению рассматриваемого чертежа.

В практике нередко встречается необходимость получить изображение предмета, настолько значительного по своим размерам, что проекция его не может быть помещена на листе бумаги. В таких случаях вместо проекции заданного предмета строят проекцию предмета, подобного ему по форме, подбирая коэффициент подобия так, чтобы чертеж мог быть выполнен на выбранном формате бумаги. Равным образом в случае весьма малых размеров предмета практически удобно пользоваться в качестве его изображения проекцией предмета, увеличенного по методу подобия в несколько раз.

* Основные сведения о таком чертеже, называемом *комплексным чертежом* или *эпюром*, входят в курс черчения средней школы.

** Чертежи 1 — 10 не представляют отступления от указанного способа; каждый из этих чертежей есть проекция на плоскость бумаги так называемого *проектирующего аппарата*, поясняющего метод параллельных проекций, причем плоскость проекций этого проектирующего аппарата не совпадает с плоскостью бумаги, на которой изображен чертеж.

По свойству проекций, полученное таким образом изображение представляет фигуру, подобную проекции данного предмета. Коэффициент подобия называют в этом случае масштабом чертежа и выражают в виде числового отношения линейных размеров чертежа, заменяющего проекцию, и чертежа, представляющего подлинную проекцию предмета. Так, например, обозначение $M 1 : 2$ показывает, что данное на чертеже изображение представляет уменьшенную в два раза проекцию предмета.

В учебном, равно как и в техническом, проекционном чертеже для изображения фигур принято пользоваться только линиями и точками; поэтому части фигур, заключающие в себе поверхности, изображаются лишь контурами этих поверхностей. В частности, изображение многогранника состоит из сочетания многоугольников, стороны которых представляют проекции ребер многогранника и изображают контуры его граней. Таким образом, построение изображения многогранника приводится к последовательному изображению плоских многоугольников — граней многогранника, определенным образом расположенных между собой в пространстве.

Рассмотрим несколько примеров.

1. *Треугольник*. Проекцией треугольника является треугольник (за исключением случая, когда плоскость треугольника параллельна направлению проектирования).

Обратим внимание, что при надлежащем выборе положения плоскости проекций и направления проектирования проекцией всякого заданного треугольника может служить треугольник любой формы*. Например, расположив треугольник ABC так (черт. 16), чтобы его сторона AB совместилась с плоскостью проекций P , а вершина C заняла какое-нибудь положение в пространстве, мы можем задать на плоскости P произвольной формы треугольник $A_P B_P C_P$ со стороной $A_P B_P$, совмещенной с AB , и принять его за проекцию треугольника ABC при направлении проектирования CC_P .

2. *Четырехугольник*. Проекцией четырехугольника в общем случае проектирования является четырехугольник. Форма проекции $A_P B_P C_P D_P$ (черт. 17) связана с натуральной формой проектируемого четырехугольника $ABCD$ условием равенства отношений отрезков, на которые взаимно делятся диагонали AC и BD проектируемого четырехугольника и диагонали $A_P C_P$ и $B_P D_P$ четырех-

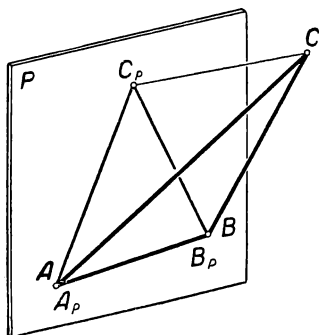
угольника-проекции $\left(\frac{AE}{EC} = \frac{A_P E_P}{E_P C_P} ; \frac{BE}{ED} = \frac{B_P E_P}{E_P D_P} \right)$. В силу сказанного, изображая на чертеже 17 процесс проектирования четырехугольника $ABCD$ на плоскость P , мы можем произвольно задать на проектирующих лучах проекции трех вершин четырехугольника, например A_P , B_P и C_P (определив тем самым в пространстве взаимное положение плоскости проекций P и плоскости че-

* См. Н. Ф. Четверухин и др., Курс начертательной геометрии гл. I, изд. 1956 г.

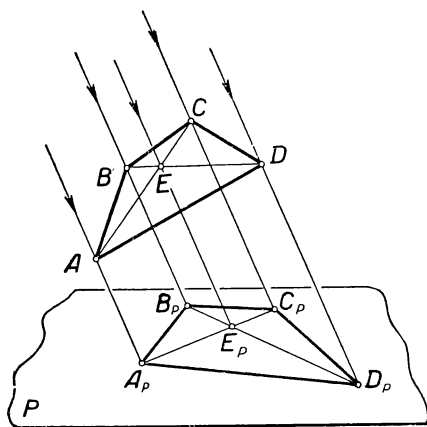
тырехугольника $ABCD$). Чтобы найти теперь положение точки D_p , необходимо сначала при помощи проектирующего луча EE_p определить на отрезке A_pC_p положение точки E_p , как проекции точки пересечения диагоналей AC и BD ; проводя после этого прямую B_pE_p до пересечения с проектирующим лучом DD_p , мы найдем в точке D_p проекцию четвертой вершины в соответствии с требуемым соотношением между отрезками диагоналей заданного четырехугольника.

Если проектируемый четырехугольник является *трапецией*, то на форму его проекции налагается дополнительное требование параллельности двух сторон, соответствующих параллельным сторонам в натуре.

При проектировании *параллелограмма* сохраняется равенство и параллельность противоположных сторон и равенство отрезков, получаемых при взаимном пересечении диагоналей. Поэтому проекция параллелограмма есть также параллелограмм. Вместе с тем,



Черт. 16



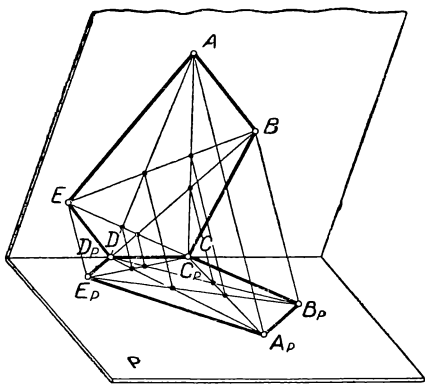
Черт. 17

вследствие изменения относительных размеров непараллельных сторон, диагоналей и величины углов, форма проекции параллелограмма может быть произвольно изменена сравнительно с заданной формой при надлежащем выборе направления проектирования.

Ромб, *прямоугольник* и *квадрат* при проектировании теряют свои частные признаки (равенство диагоналей в прямоугольнике; равенство всех сторон в ромбе; равенство всех сторон и равенство диагоналей в квадрате), сохраняя лишь общие свойства параллелограмма. Поэтому проекцией ромба, прямоугольника и квадрата является параллелограмм, форма которого в соответствии с выбором направления проектирования может быть произвольна.

3. *Многоугольник*. Пусть проекцией многоугольника $ABCDE$ служит многоугольник $A_pB_pC_pD_pE_p$ (черт. 18). Из чертежа видно, что в силу основных свойств параллельных проекций форма мно-

гоугольника $A_p B_p C_p D_p E_p$ обусловливается требованием, чтобы отношения отрезков, на которые делится каждая диагональ и ее проекция при пересечении с другими диагоналями, были соответственно равны между собой. В пределах указанного требования форма проекции многоугольника



Черт. 18

может изменяться в соответствии с изменением направления проектирования и с изменением положения проектируемого многоугольника в пространстве относительно плоскости проекций.

В виде общего замечания к проектированию плоских фигур следует отметить: 1) проекция имеет натуральную форму оригинала, если плоскость проектируемой фигуры расположена параллельно плоскости проекций; 2) проекцией плоской фигуры служит прямолинейный отрезок,

если плоскость фигуры параллельна направлению проектирования.

§ 4. Изображение многогранников

При изображении пространственных фигур мы будем, как указано выше, считать плоскость проекций совмещенной с плоскостью чертежа. Вместе с тем мы будем применять некоторые условности графического характера, помогающие правильно «читать» чертеж, т. е. понимать значение каждой линии в общей структуре изображенной фигуры. Для этого мы используем в дальнейших построениях общепринятые в техническом черчении типы линий* для вычерчивания линий видимого и невидимого контура фигуры, осевых и центровых линий, размерных и выносных линий и вспомогательных линий.

В соответствии с изложенными выше свойствами параллельных проекций изображение *призмы* (включая прямую и правильную призму) представится на чертеже как сочетание нескольких параллелограммов (по числу боковых граней призмы), примыкающих друг к другу своими равными сторонами, и двух многоугольников (проекции оснований призмы) с соответственно параллельными и равными попарно сторонами. Чертеж 19 представляет изображение треугольной призмы.

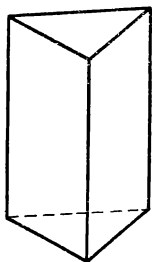
Параллелепипед (включая прямой и прямоугольный параллеле-

* См. ГОСТ 3456 — 59.

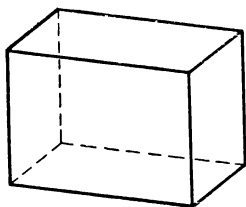
пипеды, а также *куб*) изобразится на чертеже в виде сочетания шести параллелограммов, попарно равных между собой (черт. 20).

Изображение *пирамиды* представит на чертеже сочетание многоугольника с несколькими треугольниками, имеющими общую вершину (черт. 21).

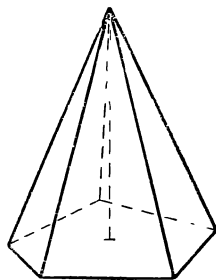
В учебной работе весьма важно при построении чертежа пространственной фигуры обращать внимание на наглядность получае-



Черт. 19



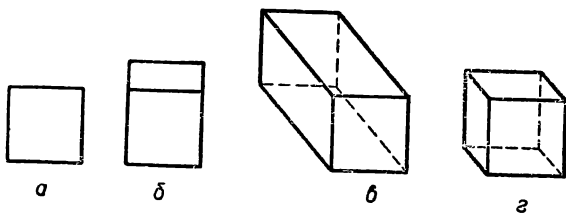
Черт. 20



Черт. 21

мого изображения. Изображение можно назвать наглядным, если при рассматривании его легко возникает ясное представление пространственной фигуры, являющейся оригиналом изображения.

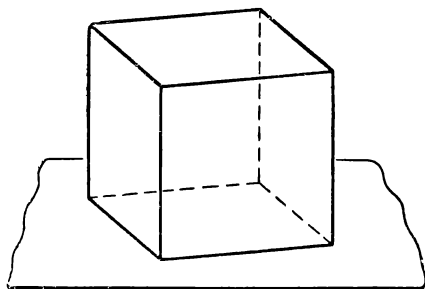
Наглядность изображения достигается надлежащим выбором по отношению к плоскости проекций: 1) положения изображаемой



Черт. 22

фигуры и 2) направления проектирующих лучей. Оба указанных фактора следует использовать так, чтобы возможно полнее выявить пространственную структуру фигуры и чтобы придать изображению фигуры такие очертания, которые соответствуют наиболее привычному виду фигуры при непосредственном ее рассматривании в натуре. Так, например, на чертеже 22 даны четыре изображения, полученные при проектировании одного и того же куба, расположенного перед плоскостью проекций так, что передняя грань его параллельна плоскости проекций. Различие представленных изображений зависит от различного направления проектирующих лучей в каждом из рассматриваемых случаев. Изображение *a* представ-

ляет собой прямоугольную проекцию заданного куба; проекции всех граней и ребер куба сливаются на чертеже с контуром передней грани; изображение лишено наглядности. Изображения b , v и g являются косоугольными проекциями заданного куба. Из них изображение b , полученное при помощи проектирующих лучей, парал-

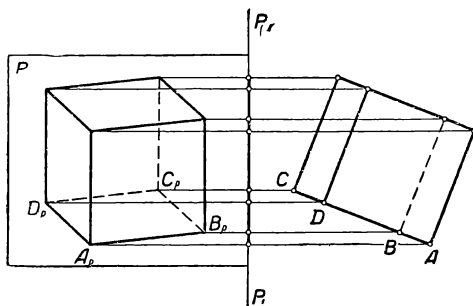


Черт. 23

лельных боковым вертикальным граням куба, также не удовлетворяет требованиям наглядности, так как недостаточно выявляет пространственную структуру куба. Изображение v , хотя и отображает трехмерную форму фигуры, однако очертания изображения не соответствуют обычному виду куба: ребра куба, перпендикулярные к плоскости проекций, изображены отрезками, длина кото-

рых больше натуральной величины ребер*.

Наконец, фигура g представляет пример наглядного изображения куба; в таком виде представляется куб, если он помещен справа перед зрителем, ниже уровня глаз.



Черт. 24

Во многих случаях при надлежащем расположении объекта перед плоскостью проекций весьма наглядными являются прямоугольные проекции пространственных фигур. Пример прямоугольной проекции куба представлен на чертеже 23. Необходимо иметь в виду, что в этом случае при вертикальном положении плоскости проекций (как мы условились считать) плоскость основания куба не является горизонтальной, равно как боковые ребра имеют не вертикальное направление, а наклонены к плоскости проекций под

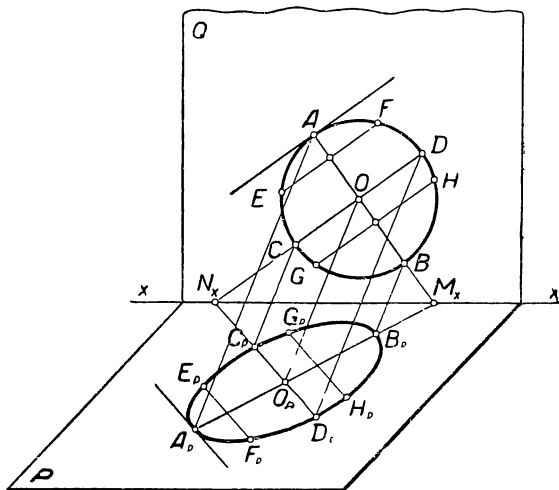
* Такая проекция куба возможна при наклоне проектирующих прямых к плоскости проекций на угол, не превышающий 45° .

некоторым углом; вследствие этого натуральная форма всех граней и длина всех ребер искажены на изображении. На чертеже 24 справа от линии P_1P_1 дан боковой вид («вид слева») проектирующего аппарата, соответствующего описанному способу прямоугольного проектирования куба $ABCD$ на плоскость P ; плоскость проекций P изобразится на этом боковом виде как прямая линия P_1P_1 ; слева от линии P_1P_1 представлено изображение куба, соответствующее этому случаю*.

§ 5. Изображение окружности

1. *Эллипс как проекция окружности.* Проекция окружности может быть получена как линия пересечения с плоскостью проекций поверхности цилиндра, образованного проектирующими лучами, проходящими через точки окружности. Эта линия называется *эллипсом*.

Пусть O (черт. 25) есть центр окружности, плоскость которой произвольно наклонена к плоскости проекций P и пересекается с



Черт. 25

ней по прямой xx . Приняв в плоскости P произвольную точку O_p за проекцию точки O , мы установим направление проектирования OO_p . Тогда проекция $A_p B_p$ любого диаметра AB данной окружности может быть построена, если продолжить AB до пересечения с

* Более подробные сведения о построении в прямоугольных проекциях наглядных изображений метрически заданных фигур (в частности, куба) изложены ниже (см. гл. III).

прямой x_x (в точке M_x), провести прямую через точки M_x и O_p и отметить на построенной прямой при помощи проектирующих лучей AA_p и BB_p точки A_p и B_p — проекции концов диаметра AB . Повторяя описанное построение для любого числа диаметров окружности, мы найдем на плоскости P достаточное число точек, чтобы, соединяя их плавной линией, получить искомую проекцию окружности.

Исходя из свойств параллельных проекций, мы можем установить основные свойства эллипса как проекции окружности.

а) Так как центр окружности O является серединой каждого из ее диаметров, то мы можем сказать, что точка O_p , как проекция точки O , делит пополам любой проходящий через нее отрезок A_pB_p , являющийся проекцией одного из диаметров окружности O . В соответствии с этим точка O_p называется *центром* эллипса, а проходящие через нее отрезки прямых, заключенные между точками эллипса, — *диаметрами* эллипса. Очевидно, что свойство равенства диаметров окружности при проектировании не сохраняется.

б) Диаметры эллипса, попарно соответствующие взаимно перпендикулярным диаметрам окружности, называются *сопряженными* диаметрами эллипса.

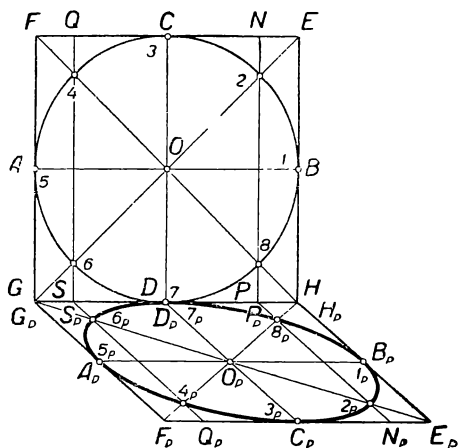
Мы знаем, что в окружности (черт. 25) хорды (EF , GH), параллельные одному из взаимно перпендикулярных диаметров ($EF \parallel GH \parallel CD$), делятся другим из этих диаметров ($AB \perp CD$) пополам. Легко убедиться в силу основных свойств параллельных проекций, что указанная связь между взаимно перпендикулярными диаметрами и параллельными им хордами окружности сохраняется также и в отношении сопряженных диаметров эллипса, т. е. *хорды эллипса, параллельные одному из сопряженных диаметров, делятся другим из этих диаметров пополам.*

в) В силу известного из геометрии соотношения между касательной к окружности и диаметром, проведенным в точку касания, мы можем утверждать, что *касательная к эллипсу в конце одного из сопряженных диаметров параллельна другому из этих диаметров* (черт. 25).

2. *Построение эллипса как проекции окружности.* Применим рассмотренные свойства эллипса к его построению. Построение эллипса выполняется путем нахождения достаточного числа принадлежащих ему отдельных точек и проведения через найденные точки плавной линии. В зависимости от условий, посредством которых задается форма и величина фигуры эллипса, существуют различные способы его построения. Мы дадим обоснование двум способам построения эллипса, вытекающим из свойств эллипса как проекции окружности.

1-й способ. Покажем способ построения эллипса по заданным сопряженным диаметрам A_pB_p и C_pD_p . Будем рассматривать эллипс O_p (черт. 26) как проекцию некоторой окружности O , вписанной в квадрат $EFGH$. Тогда параллелограмм $E_pF_pG_pH_p$, построенный на заданных сопряженных диаметрах A_pB_p и C_pD_p , мы мо-

жем считать проекцией квадрата $EFGH$. Найдем точки, принадлежащие эллипсу и соответствующие: 1) точкам касания окружности к сторонам квадрата и 2) точкам пересечения окружности с диагоналями квадрата. Первые четыре точки ($1_P, 3_P, 5_P$ и 7_P) мы отметим на концах заданных сопряженных диаметров; в этих точках эллипс касается сторон параллелограмма, построенного на сопряженных диаметрах. Остальные четыре точки ($2_P, 4_P, 6_P$ и 8_P), расположенные на диагоналях того же параллелограмма, должны де-



Черт. 26

лить его полудиagonали в таком же отношении, в каком окружность делит соответствующие полудиagonали описанного около нее квадрата.

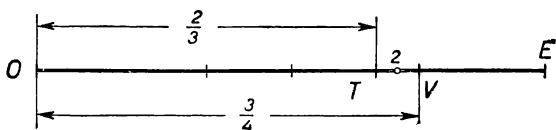
На чертеже 26 показан способ получения точек $2_P, 4_P, 6_P$ и 8_P при помощи прямых $N_P P_P$ и $Q_P S_P$, параллельных сторонам $E_P H_P$ и $F_P G_P$ и соответствующих прямым NP и QS , проведенным через соответствующие точки 2, 4, 6 и 8 в квадрате $EFGH$.

При построении чертежа от руки на глаз (например, на классной доске) эллипс можно достаточно точно вписать в параллелограмм по указанным восьми точкам, не прибегая к вычерчиванию квадрата $EFGH$ и окружности O , если принять во внимание следующие соображения. Из прямоугольного треугольника ECO видно, что $\frac{O2}{OE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$. Отношение отрезков $\frac{O2}{OE}$

сопоставлено для сравнения на отдельном чертеже (черт. 27) с отношением отрезков $\frac{OT}{OE} = \frac{2}{3} \approx 0,67$ и $\frac{OV}{OE} = \frac{3}{4} = 0,75$. Из сопоставления видно, что точка 2 лежит на отрезке OE приблизительно на середине между точками T и V , делящими этот отрезок в отношении $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$ ($\frac{0,67 + 0,75}{2} = 0,71$).

По свойству параллельных проекций такое же положение сохраняется за точкой 2_P на отрезке $O_P E_P$. Следовательно, разделив (на глаз) отрезок $O_P E_P$ (черт. 26) на три и на четыре равные части и отметив точки T_P и V_P , соответ-

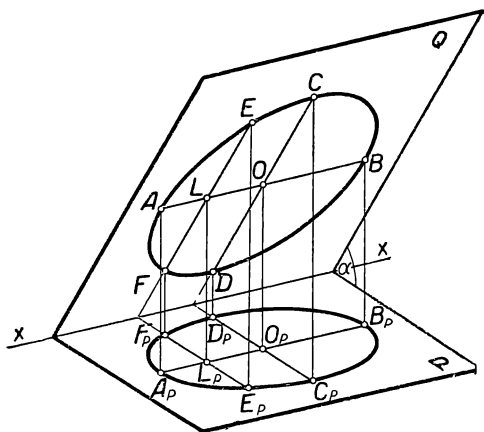
ствующие точкам T и V чертежа 27 (точки T_P и V_P на чертеже 26 не показаны), мы найдем на середине между этими точками искомую точку 2_P . Точки 4_P , 6_P и 8_P удобно перенести на отрезки $O_P F_P$, $O_P H_P$ и $O_P G_P$ при помощи прямых* 2_P-4_P , 4_P-6_P и 2_P-8_P , проведенных параллельно сторонам параллелограмма.



Черт. 27

При вычерчивании эллипса по найденным точкам следует помнить, что кривизна эллипса должна изменяться плавно и эллипс должен касаться сторон параллелограмма в точках 1_P , 3_P , 5_P и 7_P .

2-й способ. Пусть эллипс O_P на плоскости проекций P (черт. 28) получен как прямоугольная проекция окружности O . Диа-

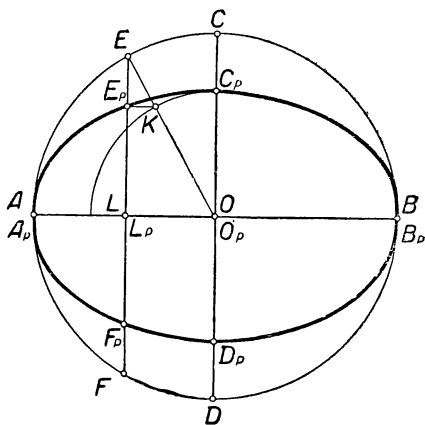


Черт. 28

метр AB окружности O , параллельный плоскости P , проектируется в натуральную величину ($A_P B_P = AB$). Проектирующая плоскость $CDD_P C_P$, проведенная через центр окружности O перпендикулярно к ребру xx' двугранного угла QP , пройдет через диаметр CD , перпендикулярный к диаметру AB , и даст в проекции диаметр эллипса $C_P D_P$, сопряженный $A_P B_P$ и перпендикулярный к нему. Эти два взаимно перпендикулярных сопряженных диаметра эллипса называются *осями* эллипса.

Угол, образуемый прямыми CD и $C_P D_P$, является по построению линейным углом α двугранного угла PQ . Соотношение между диаметром CD и его проекцией $C_P D_P$ можно выразить равенством $C_P D_P =$

$= CD \cos \alpha$. Нетрудно усмотреть, что всякий другой угол φ между любым диаметром MN окружности O и его проекцией $M_P N_P$ меньше угла α (на чертеже MN и $M_P N_P$ не изображены). Сопоставляя равенства $C_P D_P = CD \cos \alpha$ и $M_P N_P = MN \cos \varphi$, найдем, что при всяком угле φ $M_P N_P > C_P D_P$; в частности, при $\varphi=0$ $M_P N_P$ получает наибольшее значение: $M_P N_P = A_P B_P = AB$. Таким образом, оси эллипса $A_P B_P$ и $C_P D_P$ представляют пару сопряженных диаметров, из которых $A_P B_P$ является наибольшим (*большая ось эллипса*), а $C_P D_P$ — наименьшим (*малая ось эллипса*) диаметрами данного эллипса O_P . Из построения видно, что большая ось эллипса всегда параллельна линии пересечения плоскости проекций (P) с плоскостью (Q) проектируемой окружности.



Черт. 29

Проведем в окружности O (черт. 28) хорду EF , параллельную диаметру CD , и построим ее проекцию $E_P F_P$, после чего совместим плоскости Q и P вместе с начерченными на них фигурами так, чтобы диаметры AB и $A_P B_P$ совпали (черт. 29). Соединим точки O и E и проведем $E_P K \parallel A_P B_P$. Тогда будем иметь: $\frac{E_P L_P}{EL} = \frac{K O_P}{EO}$. Вместе с тем по свойству параллельных проекций можем написать $\frac{E_P L_P}{EL} = \frac{C_P O_P}{CO}$. Сопоставляя последние два равенства, получим: $\frac{K O_P}{EO} = \frac{C_P O_P}{CO}$. Заметим, что $EO = CO$ (как радиусы окружности), откуда следует, что $K O_P = C_P O_P$. Последнее равенство показывает, что отрезок $K O_P$, изменяя свое направление относительно осей эллипса в зависимости от выбора хорды EF (при условии ее параллельности CD), сохраняет неизменной свою величину, оставаясь равным малой оси $C_P O_P$ данного эллипса. Следовательно, в зависимости от выбора EF , точка K перемещается по дуге окружности

радиуса $C_P O_P$, а прямая KE_P , параллельная $A_P B_P$, определяет в пересечении с прямой EF одну из точек E_P эллипса, осями которого являются $A_P B_P$ и $C_P D_P$.

Мы рассмотрели зависимость между точками эллипса, построенного на осях $A_P B_P$ и $C_P D_P$, и точками двух concentрических с эллипсом окружностей, диаметрами которых являются соответственно большая и малая оси эллипса. Эта зависимость является обо-

снованием известного в черчении способа построения эллипса по заданным его осям (черт. 30). Построение можно выполнить следующим образом.

1) Построим на заданных осях эллипса (на черт. 30 AB и CD) как на диаметрах малую и затем большую окружности, разделим большую окружность на 12 равных частей и проведем через полученные точки деления диаметры большой и (одновременно) малой окружностей.

2) Через концы диаметров большой окружности проведем хорды

большой окружности параллельно малой оси эллипса (на черт. 30 — EF), а через концы диаметров малой окружности — хорды большой окружности параллельно большой оси эллипса (на черт. 30 — KE).

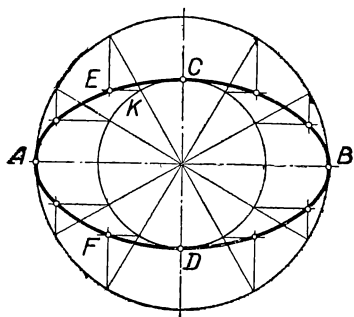
3) В пересечении между собой проведенных хорд отметим точки, принадлежащие эллипсу и проведем через них плавную линию очертания эллипса (черт. 30).

Заметим (черт. 29), что $CD = AB = A_P B_P$; поэтому в соответствии с выведенным ранее равенством $C_P D_P = CD \cos \alpha$ можно написать: $C_P D_P = A_P B_P \cos \alpha$, откуда $\frac{C_P D_P}{A_P B_P} = \cos \alpha$. Таким образом, если на чертеже некоторый эллипс представляет прямоугольную проекцию окружности, то большая ось этого эллипса равна диаметру проектируемой окружности, а отношение осей эллипса определяет угол наклона плоскости окружности к плоскости проекций. При этом, как показывает чертеж 28, большая ось эллипса направлена параллельно линии пересечения указанных плоскостей.

Если эллипс задан на чертеже, то мы можем, пользуясь рассмотренными его свойствами, решить следующие задачи.

а) *Найти центр эллипса.* Проведя произвольные хорды $KL \parallel MN$, найдем середины E и F этих хорд (черт. 31). Хорда CD , проведенная через точки E и F , есть диаметр эллипса, а середина O диаметра CD — центр эллипса.

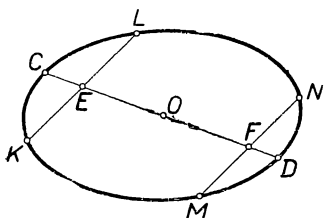
б) *Построить два сопряженных диаметра эллипса.* Проведем произвольный диаметр AB и хорду $KL \parallel AB$; найдем середину E



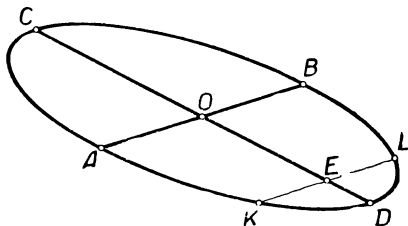
Черт. 30

хорды KL (черт. 32). Диаметр CD , проведенный через середину хорды, параллельной диаметру AB , есть диаметр, ему сопряженный.

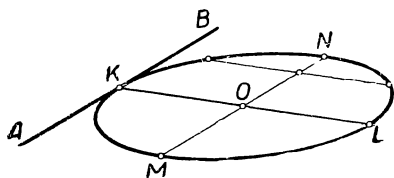
в) Провести касательную к эллипсу в данной его точке. Через заданную точку K эллипса проведем диаметр KL и построим со-



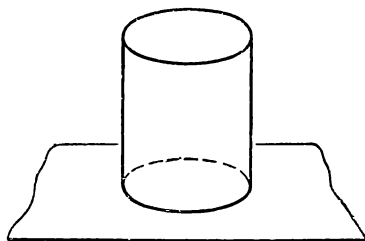
Черт. 31



Черт. 32



Черт. 33



Черт. 34

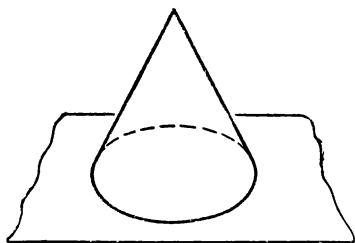
пряженный ему диаметр MN (черт. 33). Тогда прямая AB , проведенная через точку K параллельно MN , есть касательная к эллипсу в точке K .

§ 6. Изображение цилиндра и конуса

*Цилиндр и конус** изображаются посредством линий, представляющих проекции окружностей оснований и проекций контурных образующих, в точках которых проектирующие лучи касаются боковой поверхности цилиндра и конуса. Очертания оснований и контурных образующих, соединяясь между собой в точках взаимного касания, образуют общее очертание цилиндра (черт. 34) и конуса (черт. 35).

* Применительно к курсу средней школы мы рассмотрим изображение прямого кругового цилиндра и прямого кругового конуса.

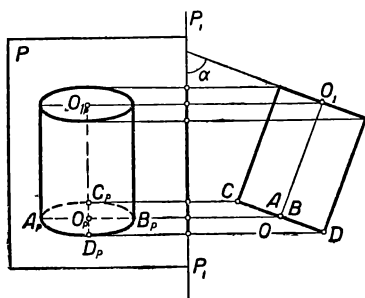
Изображения, представленные на чертежах 34 и 35, могут быть получены посредством прямоугольного проектирования цилиндра и конуса. В этом случае ось проектируемого тела должна быть наклонена к плоскости проекций под некоторым острым углом (черт. 36 и 37)*, вследствие чего ее длина на изображении будет искажена. Прямоугольные проекции цилиндра и конуса применяются в технических чертежах.



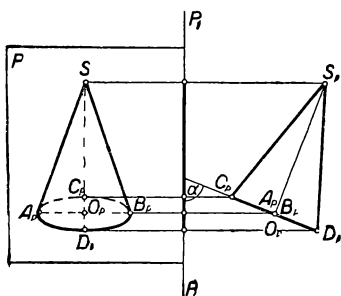
Черт. 35

В школьном курсе геометрии при решении задач принято представлять в пространстве цилиндр и конус так, чтобы ось каждого из них была направлена вертикально. Такому положению данных тел также могут соответствовать изображения, представленные на чертежах 34 и 35, если выбрать направление проектирования так, чтобы проектирующая плоскость, проходящая через ось каждого из этих тел, была

перпендикулярна к плоскости проекций и чтобы проектирующие лучи были направлены сверху вниз под некоторым углом к плоскости проекций, отличным от прямого.



Черт. 36



Черт. 37

На чертеже 38** справа от линии P_1P_1 дан боковой вид описанного способа проектирования цилиндра OO_1 на плоскость P , а слева от линии P_1P_1 представлено полученное на плоскости изображение. Из чертежа 38 видно, что высота цилиндра проектируется в натуральную величину; большая ось эллипса, изображающего основание цилиндра, перпендикулярна к оси и равна диаметру проектируемой окружности.

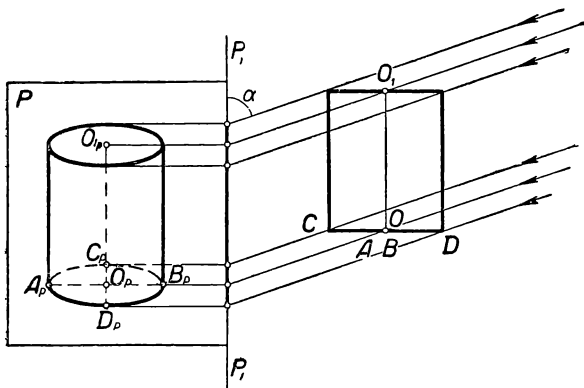
Чертеж 39 представляет иллюстрацию такого же способа проектирования конуса.

Из соображений наглядности не рекомендуется изображать цилиндр и конус в произвольно выбранной косоугольной проекции, так как такое изображение (за исключением случая, рассмотренного на чертежах 38 и 39) не соответствует привычному зрительному образу прямого кругового цилиндра (черт. 40) и прямого кругового конуса (черт. 41).

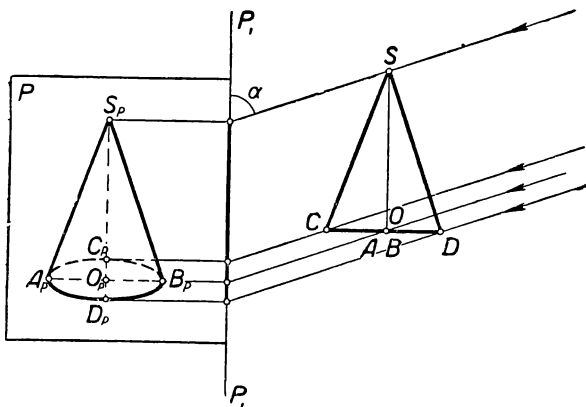
* См. пояснения к чертежу 24.

** См. пояснения к чертежу 24.

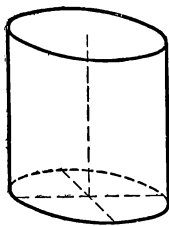
Для предупреждения часто встречающейся в чертежах учащихся ошибки заметим, что плоскость осевого сечения, проходящая через одну из контурных образующих конуса, не может проходить и через другую контурную



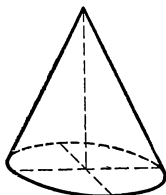
Черт. 38



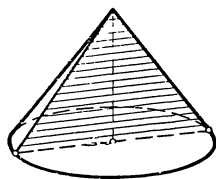
Черт. 39



Черт. 40



Черт. 41

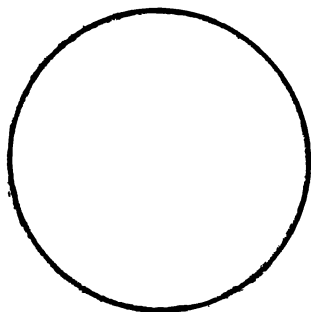


Черт. 42

образующую, так как на чертеже концы этих образующих, как точки касания к эллипсу прямых, проведенных через общую точку (вершину конуса), не могут лежать на одном диаметре эллипса (черт. 42).

§ 7. Изображение шара

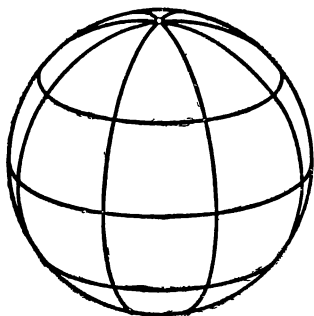
Шар не имеет на своей поверхности каких-либо характерных линий, обусловленных его структурой, посредством которых можно было бы придать отличительные черты его изображению. Изображение шара (черт. 43), содержащее только очертание контурной линии, недостаточно выразительно; чтобы придать такому изображению большую наглядность, его следует дополнить посредством других линий, определенным образом нанесенных на поверхность



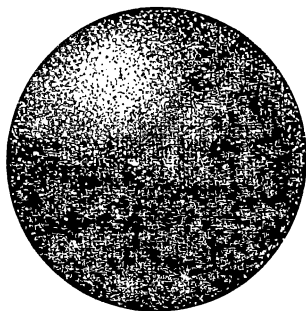
Черт. 43

шара и выявляющих строение или принцип образования шаровой поверхности. Так, например, пересекая шар плоскостями, мы получим на шаровой поверхности окружности, которые выявляют рельеф шаровой поверхности и сообщают наглядность изображению (черт. 44). Наглядное изображение шара можно также получить, принимая, что поверхность шара образована вращением окружности вокруг диаметра; тогда мы можем отметить на поверхности шара (и на изображении) концы оси вращения, несколько поло-

жений окружности, образующей поверхность, и линии, описанные движением некоторых точек, принадлежащих вращающейся окружности (черт. 44). В некоторых случаях форму поверхности шара можно передавать посредством светотеней, наносимых в



Черт. 44



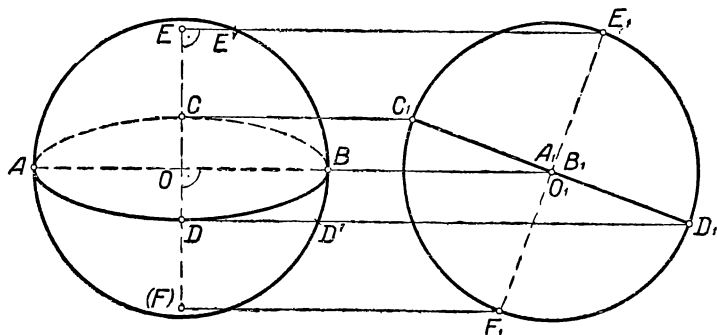
Черт. 45

определенной закономерности на изображение в виде пятен, штрихов или точек (черт. 45*).

Наглядное изображение шара можно строить только в прямо-

* Н. А. Г л а г о л е в, Элементарная геометрия, ч. II, Учпедгиз, 1945.

угольной проекции, так как только в этом случае линия очертания шара имеет форму окружности. В самом деле, проектирующие лучи, касающиеся поверхности шара, образуют цилиндрическую поверхность вращения; эта поверхность в пересечении с плоскостью проекций дает линию очертания шара. При произвольном (не равном прямому) угле наклона проектирующих лучей к плоскости проекций линия пересечения проектирующего цилиндра с



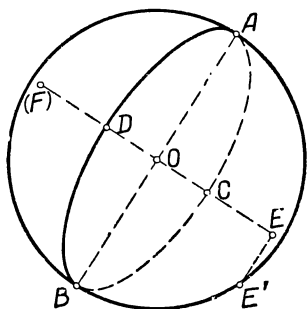
Черт. 46

плоскостью проекций имеет форму эллипса; такой вид очертания шара не соответствует зрительному образу шара.

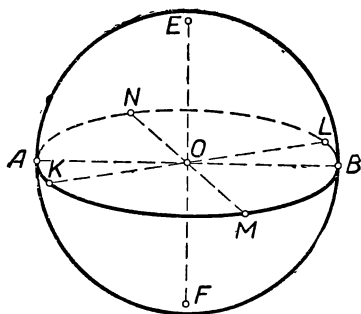
Построение наглядного изображения шара можно выполнить на основании следующих соображений.

В определении формы шара содержится метрическое условие — равноудаленность всех точек поверхности от центра шара. Это условие и вытекающие из него метрические свойства шара должны быть приняты во внимание при построении наглядного изображения. Размер шара выявляется на его изображении диаметром окружности очертания; эта окружность представляет проекцию окружности большого круга, параллельного плоскости проекций и потому проектирующегося без искажения (черт. 43). Для наглядного выявления формы шара мы воспользуемся линиями окружностей, полученными, в пересечении поверхности шара с тремя взаимно перпендикулярными плоскостями, проходящими через его центр (черт. 50). Назвав одну из этих окружностей экватором шара, а две другие — меридианами, заметим, что точки взаимного пересечения меридианов представят полюсы шара, а прямая, соединяющая полюсы, — ось шара. Начертив заданным радиусом шара его очертание, мы можем изобразить одну из названных окружностей (например, экватор) в виде эллипса с произвольным отношением размеров его осей; при этом примем во внимание, что большая ось эллипса должна быть равна натуральной величине диаметра экватора, или, что то же, диаметра шара, а величина малой оси обусловлена наклоном (произвольным в данном случае) плоскости экватора к плоскости проекций (см. § 5, черт. 28). Для

построения оси и полюсов шара обратимся к чертежу 46, изображающему шар в двух видах (в двух проекциях на две взаимно-перпендикулярные плоскости): левое изображение представляет главный вид шара (вид спереди), а правое — вид слева. На главном виде вместе с линией очертания представлена в виде эллипса проекция экватора ($ACBD$) и два взаимно перпендикулярных диаметра экватора AB и CD . На виде слева линия экватора изобразится в виде прямолинейного отрезка (C_1D_1), диаметр AB спроек-

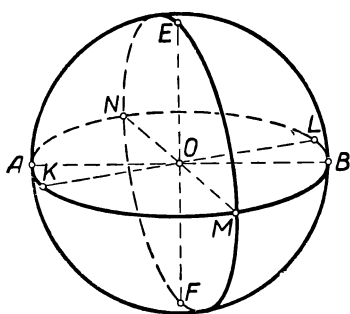


Черт. 47

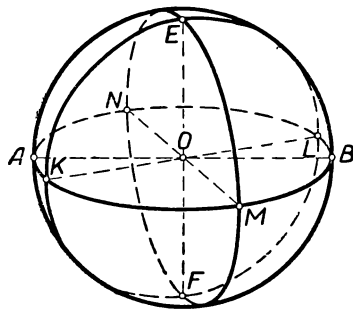


Черт. 48

тируется в точку (O_1), а диаметр CD — в прямую, концы C_1 и D_1 которой определяются на очертании шара линиями связи CC_1 и DD_1 . Принимая во внимание, что ось шара перпендикулярна к плоскости экватора, проведем на виде слева проекцию оси ($E_1F_1 \perp C_1D_1$) и отметим на окружности очертания проекции концов



Черт. 49

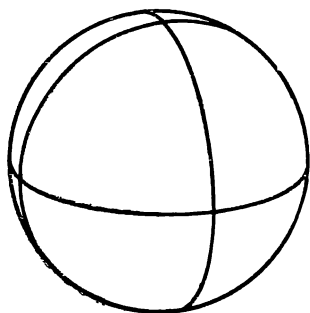


Черт. 50

этой оси, т. е. полюсов (E_1 и F_1). Возвращаясь теперь к главному виду и пользуясь линиями связи, мы легко отметим проекции полюсов E и F на проекции оси шара (EF), проведенной перпендикулярно к AB .

Обратим внимание на два соотношения в левой фигуре чертежа 46, полезные для дальнейших построений. Соединим (мысленно)

точки O и E' и точки O и D' ; из равенства получившихся прямоугольных треугольников OEE' и ODD' , в которых $OE' = OD'$, $\angle EOE' = \angle BOD'$, найдем, что $OE = DD'$ и $EE' = OD (=OC)$. Найденные соотношения весьма упрощают построение наглядного изображения шара. Если на чертеже изображены очертание шара и экватор, то, не вычерчивая вида слева, можно провести прямую $DD' \parallel AB$ и полученный отрезок DD' отложить по обе стороны от точки O на прямой EF , проведенной на чертеже через O перпендикулярно к AB ; тогда точки E и F представят полюсы шара. Можно задать на чертеже очертание шара и проекцию любого его диаметра EF (черт. 47); тогда, проведя через точки O и E перпендикулярно к EF прямые AB и EE' , отложим на прямой EF отрезки $OC = OD = EE'$ и на полученных большой (AB) и малой (CD) осях построим эллипс, изображающий проекцию большого круга в плоскости, перпендикулярной к заданному диаметру EF .



Черт. 51

Применим теперь описанные приемы, чтобы построить изображение шара с нанесенными на его поверхности окружностями больших кругов, расположенных в трех взаимно перпендикулярных плоскостях. Для этого изобразим (черт. 48), как указано, первую окружность (экватор), построим ось EF и полюсы E и F и проведем произвольную пару взаимно перпендикулярных (на чертеже сопряженных) диаметров экватора KL и MN (§4, черт. 32). После этого вышеуказанным приемом изобразим последовательно окружности двух других больших кругов (меридианов), из которых плоскость одного перпендикулярна к диаметру KL (черт. 49), а плоскость другого перпендикулярна к диаметру MN (черт. 50). Чертеж 50 является искомым изображением шара; на чертеже 51 изображена видимая сторона поверхности шара.

Заметим, что из трех взаимно перпендикулярных диаметров шара (EF , KL и MN) каждые два являются диаметрами окружности, плоскость которой перпендикулярна к третьему диаметру шара. Поэтому вычерчивание второго и третьего эллипсов уточняется наличием дополнительных четырех точек — концов упомянутых диаметров.

Примечание. При выполнении чертежей 47–51 не следует целиком проводить те вспомогательные линии, при помощи которых засекаются необходимые для построения точки; в таких случаях нужно, приложив должным образом сторону угольника, сделать вдоль нее карандашом засечки в тех местах, где лежат искомые точки. Это указание относится (например, на чертеже 47) к прямым EE' , AB в предположении, что построение перпендикулярных и параллельных прямых выполняется при помощи угольника и линейки.

Г Л А В А II

ПОЛНЫЕ ИЗОБРАЖЕНИЯ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ В ЧЕРТЕЖАХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР

§ 8. Полнота изображения

Мы описали основные свойства параллельных проекций и рассмотрели примеры применения этих проекций к изображению пространственных геометрических фигур. Приведенные примеры позволяют отметить, что метод параллельных проекций дает возможность получать изображения, удовлетворяющие существенным требованиям, предъявляемым к чертежу в учебной работе и в технике: 1) обеспечивается верность изображения со стороны передачи геометрических свойств изображенной фигуры; 2) может быть достигнута наглядность изображения в смысле соответствия образа, возникающего при рассматривании чертежа, с объектом, изображенным на чертеже; 3) осуществляется простота и доступность способов построения на базе элементарных геометрических знаний.

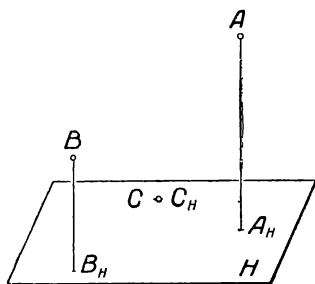
Наглядное изображение пространственной фигуры, построенное по методу параллельных проекций, во многих случаях заменяет собой объемную модель, позволяя непосредственно на изображении графически решать вопросы о позиционных и метрических свойствах заданной фигуры.

В настоящем параграфе мы рассмотрим способы отображения на чертеже позиционных свойств пространственных фигур.

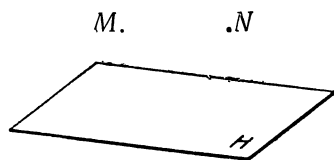
Условимся при изображении геометрических элементов пространства (точки, прямой, плоскости), а также при изображении пространственных фигур связывать их определенным образом с некоторой произвольно выбранной плоскостью, которую назовем *основной плоскостью* (H). Чтобы изобразить некоторую точку пространства, мы свяжем ее с основной плоскостью посредством прямой, проектирующей эту точку на основную плоскость, и отметим на последней проекцию этой точки, называемую иначе *основанием* данной точки. Тогда на чертеже изображение всякой точки A будет сопровождаться изображением A_H ее основания (черт. 52). Установленная таким образом связь каждой точки с основной пло-

скостью позволит по изображению нескольких точек и их оснований судить о взаимном расположении этих точек в пространстве. Так, например, из чертежа 52 видно (на глаз), что точка B в пространстве находится ближе к основной плоскости, чем точка A , а точка C лежит на основной плоскости.

Вместе с тем условимся, что основная плоскость (если не сделано надлежащего указания) задается в пространстве в положении, близком к горизонтальному, и обращена к зрителю верхней своей стороной, вследствие чего на чертеже нижняя линия очерта-ния плоскости* изображает ближайший к зрителю край этой плоскости. Тогда по расположению на чертеже проекций A_H , B_H и C_H заданных точек легко видеть, что точка B в пространстве ближе к зри-телю, а точка C наиболее удалена



Черт. 52



Черт. 53

от зрителя. Очевидно также, что на чертеже 53 не имеется доста-точных данных, чтобы судить о взаимном расположении в простран-стве точек M и N относительно плоскости H .

Изображение всякой точки пространства называется *вполне за-данным изображением относительно основной плоскости*, если на чертеже изображено основание этой точки.

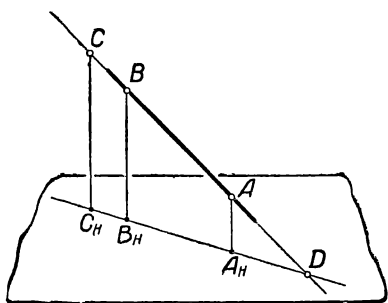
Прямая является вполне заданной на изображении, если на чертеже заданы две точки (A , A_H) и (B , B_H), ей принадлежащие: в таком случае по принципу проекций мы можем изобразить про-екцию $A_H B_H$ нашей прямой на основную плоскость (черт. 54) и после этого определить положение любой точки C заданной пря-мой AB относительно основной плоскости; в частности, продол-жив прямую AB и ее проекцию $A_H B_H$ до взаимного пересечения, мы найдем точку D пересечения прямой с основной плоскостью.

Плоскость является вполне заданной на изображении, если три точки A , B и C , ее определяющие, заданы на изображении (черт. 55). Чтобы сделать изображение плоскости более наглядным, можно изобразить ограниченную, например в форме треугольника, часть этой плоскости прямыми, проходящими через заданные точ-ки A , B и C (черт. 56). Всякая точка K , принадлежащая заданной на чертеже плоскости, может быть изображена как вполне задан-ная точка, т. е. для этой точки может быть найдено ее основание K_H .

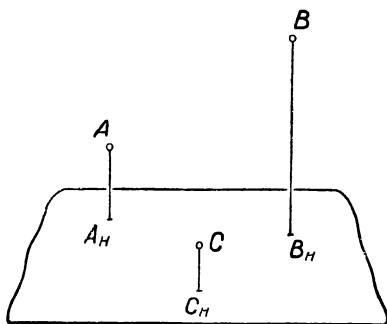
* Подразумевается некоторая ограниченная часть плоскости.

Так, например, на чертеже 56 через точку K , взятую внутри контура треугольника, проведена прямая AL , по точкам A и L построена проекция $A_H L_H$ прямой AL , после чего на прямой $A_H L_H$ найдена точка K_H — основание точки K .

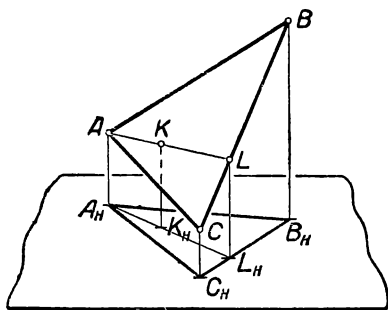
На чертеже 57 по заданным точкам (A, A_H) , (B, B_H) и (C, C_H) , принадлежащим плоскости P построена линия MN пересечения плоскости P с основной плоскостью. Для этого в плоскости P проведены прямые BA и BC до пересечения их с основной плоскостью; полученные точки M и N , принадлежащие одновременно плоскости P и основной плоскости, являются точками искомой линии пересечения рассматриваемых плоскостей; эта прямая называется *следом* заданной плоскости P на основной плоскости.



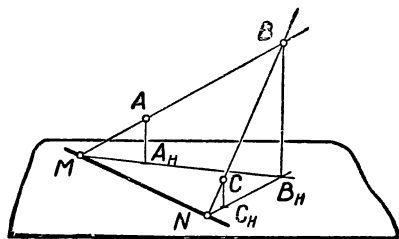
Черт. 54



Черт. 55



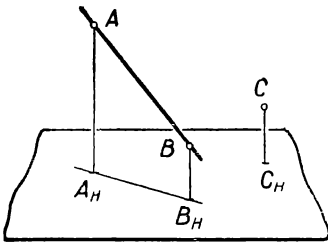
Черт. 56



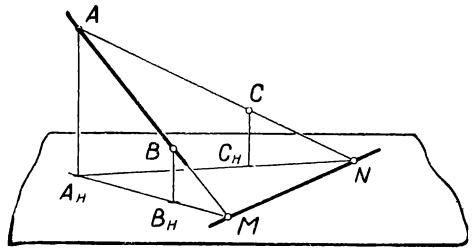
Черт. 57

Изображение плоскости может быть задано также посредством: 1) прямой и точки (не лежащей на данной прямой), 2) двух пересекающихся прямых и 3) двух параллельных прямых. На чертежах 58, 60 и 62 изображены плоскости, заданные указанным образом, и показано (черт. 59, 61 и 63) построение следа плоскости в каждом из перечисленных случаев.

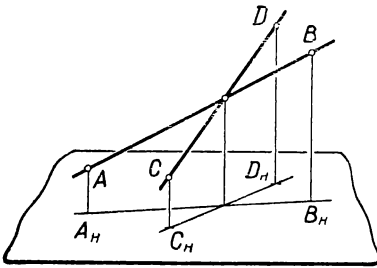
Отметим случай, когда связь какого-нибудь элемента с основной плоскостью не показана на чертеже непосредственно, но этот элемент связан с другими элементами, вполне заданными на черте-



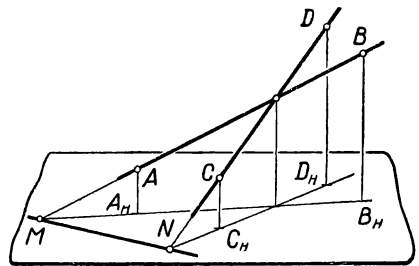
Черт. 58



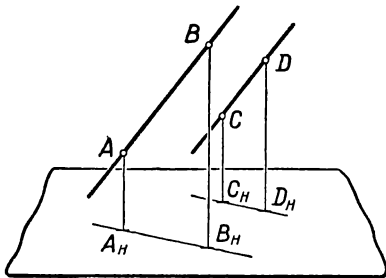
Черт. 59



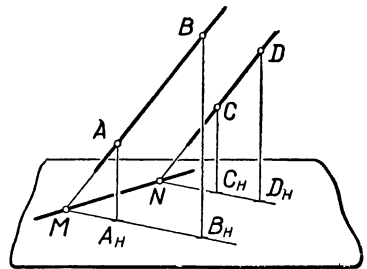
Черт. 60



Черт. 61



Черт. 62



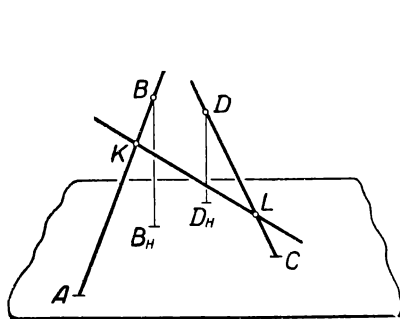
Черт. 63

же. Такой случай представлен на чертеже 64, где изображен отрезок KL , пересекающий в точках K и L две вполне заданные прямые AB и CD .

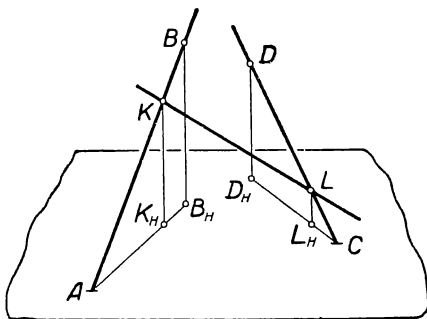
Нетрудно убедиться, что такой отрезок всегда можно связать непосредственно с основной плоскостью, т. е. представить на изображении как вполне заданный, определяемый точками (K, K_H) и (L, L_H) (черт. 65).

Мы познакомились с условиями, при которых геометрические элементы пространства — точка, прямая и плоскость — являются вполне заданными элементами на изображении. Изображение всякой пространственной геометрической фигуры представляет совокупность изображений отдельных точек и линий, принадлежащих этой фигуре; если все элементы фигуры (точки, линии) вполне заданы на изображении, то изображение называется *полным*. Покажем, что изображения основных геометрических фигур — призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара — всегда являются полными.

Пусть дано изображение призмы с высотой KL (черт. 66). Примем плоскость основания $ABCD$ за основную плоскость. Тогда



Черт. 64

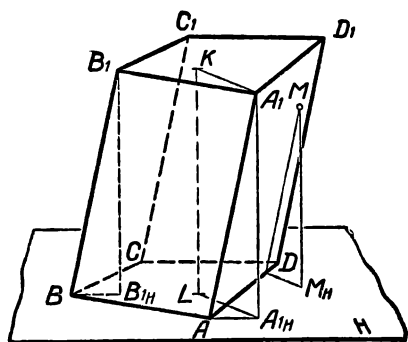


Черт. 65

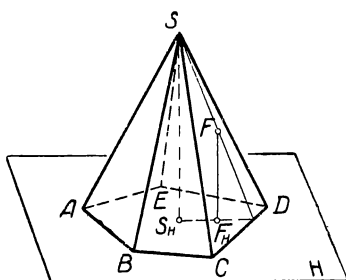
вершины и ребра нижнего основания призмы, как лежащие в основной плоскости, будут вполне заданными элементами изображения. Проекция (A_{1H}) на плоскость основания любой вершины (A_1) верхнего основания призмы может быть найдена при помощи проектирующей плоскости, проведенной через эту вершину и высоту призмы; проекции остальных вершин легко найти, помня, что боковые ребра призмы параллельны и что проекции параллельных прямых параллельны между собой; поэтому, проведя $BB_{1H} \parallel AA_{1H}$ и $B_1B_{1H} \parallel KL$, найдем точку B_{1H} и затем таким же способом точки C_{1H} и D_{1H} . После этого убедимся, что боковые ребра призмы будут иметь на изображении по две, а плоскости боковых граней по три вполне заданные точки и потому также представят вполне заданные элементы. Любая точка M поверхности призмы может быть связана с основной плоскостью своей проекцией M_H , как показано на чертеже 66. Таким образом, изображение призмы соответствует определению полного изображения.

Чтобы убедиться, что изображение всякой пирамиды (черт. 67) также всегда является полным, возьмем за основную плоскость плоскость основания пирамиды и примем направление проектиро-

вания параллельным высоте SS_H пирамиды. Тогда все вершины и ребра основания пирамиды представляются на изображении вполне заданными элементами, являясь точками и прямолинейными отрезками, принадлежащими основной плоскости. Вершина S пирамиды, не лежащая в основной плоскости, будет иметь своей проекцией точку S_H и потому представит вполне заданную точку изображения. Следовательно, каждое боковое ребро пирамиды будет задано на изображении двумя точками, а каждая боковая грань — тремя точками и потому представят вполне заданные элементы изображения пирамиды. Проекция F_H какой-нибудь точки F , лежащей на одной из граней, например CSD , пирамиды, может быть получена на изображении, если провести проектирующую плос-



Черт. 66

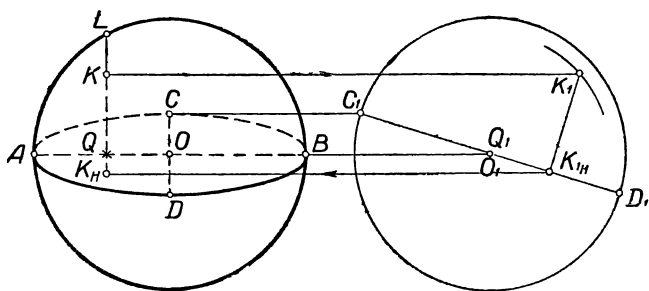


Черт. 67

кость через высоту SS_H и точку F , построить след этой плоскости и отметить на этом следе точку F_H пересечения с проектирующей прямой FF_H , проведенной параллельно SS_H . Таким образом, изображение пирамиды удовлетворяет требованию, обуславливающему полноту изображения. Полнота изображения цилиндра и конуса вытекает из соображений, аналогичных изложенным относительно призмы и пирамиды. В случае цилиндра направление проектирования на основную плоскость (плоскость одного из оснований цилиндра) выбирают параллельным образующим цилиндра. Нетрудно убедиться, что при таком условии каждая точка окружности основания, совмещенного с основной плоскостью, будет вполне заданной в силу своего положения. Каждая точка окружности основания, не лежащего в основной плоскости, будет иметь свою проекцию на окружности другого основания. Связь между указанными точками и их проекциями легко устанавливается на изображении путем проведения соответствующих образующих. Наконец, для любой точки поверхности цилиндра на изображении может быть найдена ее проекция на основную плоскость при помощи построения, аналогичного тому, которое показано на чертеже 66 для точки M .

В случае конуса за основную плоскость удобно принять плоскость основания конуса, а направление проектирования взять параллельным оси конуса. Тогда, применив к изображению конуса рассуждения, аналогичные тем, которые мы провели относительно изображения пирамиды, можно убедиться, что каждая точка поверхности конуса представится на изображении вполне заданной точкой. Следовательно, изображение конуса является полным изображением.

Покажем, наконец, что изображение шара, представленное в виде его очертания (в виде окружности), также является полным изображением. Для этого изобразим шар в двух видах (черт. 68): главный вид (левое изображение) мы будем считать заданным наглядным изображением, а вид слева (правое изображение) используем как вспомогательный чертеж. За плоскость основания, к которой мы отнесем элементы изображения, примем плоскость, проходящую через центр шара; линия пересечения этой плоскости с поверхностью шара представится на главном виде как эллипс $ABCD$, а на виде слева — как прямолинейный отрезок C_1D_1 . В соответствии с поставленной задачей отметим на главном виде внутри очертания шара произвольную точку K и будем считать ее точкой, лежащей на видимой стороне поверхности шара. Проведем через точку K плоскость, проектирующую эту точку одновременно на плоскость оснований и на плоскость чертежа; эта

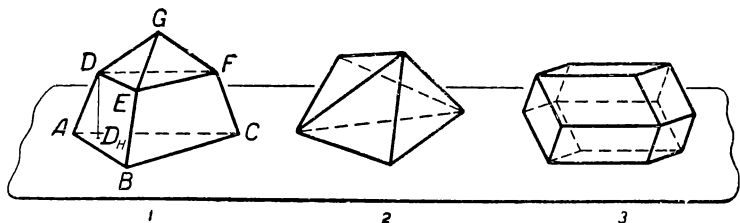


Черт. 68

плоскость пересечет поверхность шара по дуге окружности, центр которой Q лежит на прямой AB , а радиус равен отрезку QL . На главном виде эта дуга спроектируется в виде прямолинейного отрезка KL , а на виде слева изобразится в натуральную величину. Проведем эту дугу из центра Q_1 (O_1) радиусом QL , мы отметим на ней в пересечении с линией связи (KK_1) точку K_1 — проекцию заданной точки шара на виде слева. Проведем K_1K_{1H} перпендикулярно к плоскости большого круга C_1D_1 и отметим точку K_{1H} — изображение проекции заданной точки шара на плоскость оснований (на виде слева). Тогда посредством линии связи $K_{1H}K_H$ получим

искомую точку K_H — изображение проекции на плоскость основной точки K на заданном наглядном изображении, показав тем самым, что изображение шара, заданное его очертанием, является полным изображением.

Рассматривая чертеж 69, можно убедиться, что изображение произвольного многогранника, хотя бы и составленного из призматических и пирамидальных форм, не всегда является полным. Приняв, например, в фигуре 1 плоскость ABC за основную пло-



Черт. 69

скость и направление DD_H — за направление проектирования, мы увидим, что положение других вершин останется неопределенным на изображении относительно основной плоскости. Фигуры 2 и 3 также представляют примеры неполных изображений.

§ 9. Основные позиционные задачи и их решение на полном изображении

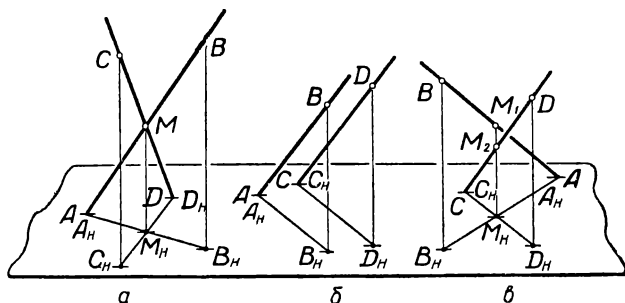
Мы познакомились на примерах простейших геометрических фигур с наиболее существенными положениями, принятыми в учебной работе и в технике за основу построения проекционных чертежей пространственных фигур.

Обычно предметы, изображаемые в технических чертежах (машины, их детали и узлы, архитектурные и инженерные сооружения и т. п.), представляют по своей форме более или менее сложные сочетания простейших геометрических фигур — призм, пирамид, цилиндра, конуса, шара, тора. Задача составления чертежа (изображения) всякого предмета прежде всего заключается в анализе его формы, т. е., во-первых, в выявлении тех простейших геометрических фигур, которые составляют форму данного предмета в целом, и, во-вторых, в определении взаимного расположения этих составных частей общей формы предмета. Этот анализ позволяет выбрать соответствующие приемы построения для наглядного отображения на проекционном чертеже характерных особенностей формы изображаемого предмета. Таким образом, процесс построения изображения всегда связан с решением ряда позиционных задач. Основными позиционными задачами являются задачи о взаимном расположении в пространстве точек, прямых и плоскостей.

Рассмотрим на примерах приемы решения основных позиционных задач на полном изображении.

Пример 1. Построение двух пересекающихся прямых.

Пусть на чертеже 70, а требуется изобразить две прямые AB и CD , пересекающиеся между собой в пространстве в некоторой точке M ; так как точка M является общей для прямых AB и CD , то ее проекция M_H должна быть общей точкой проекций AB_H и DC_H этих прямых. Отсюда следует, что изображение двух пересекающихся прямых нужно строить так, чтобы точка M_H пересечения проекций данных прямых лежала на проектирующей прямой, проведенной через точку M пересечения данных прямых.



Черт. 70

Пример 2. Построение параллельных прямых.

В случае параллельности двух прямых AB и CD в пространстве проекции их на основную плоскость также параллельны между собой. Это соотношение между параллельными прямыми и их проекциями сохраняется и на изображении и служит обоснованием построения параллельных прямых на чертеже 70, б.

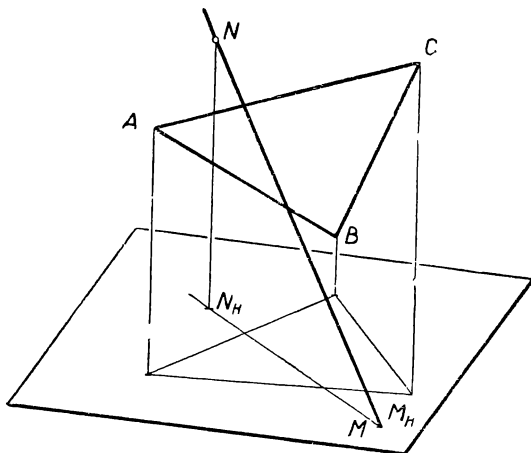
Пример 3. Построение скрещивающихся прямых.

Если на чертеже 70, в требуется изобразить две скрещивающиеся прямые AB и CD , т. е. прямые, не имеющие общей точки и не параллельные между собой, то нужно принять во внимание, что точка M_H пересечения проекций этих прямых является проекцией двух различных точек M_1 и M_2 этих прямых. Отсюда следует, что изображение двух скрещивающихся прямых нужно строить так, чтобы проектирующая прямая, проведенная из точки M_H , встретила прямые AB и CD в двух разных точках M_1 и M_2 .

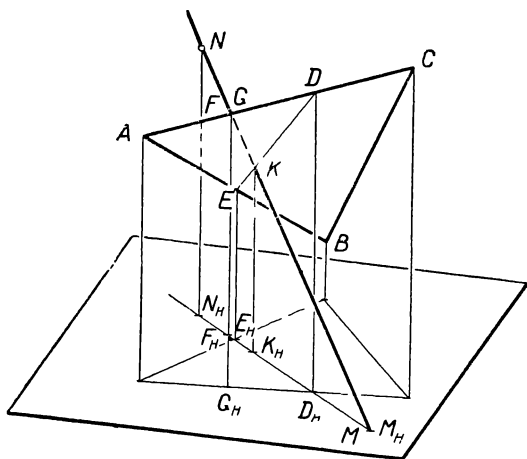
Пример 4. Построение точки пересечения прямой с плоскостью.

На чертеже 71 задана треугольная пластинка ABC и прямая MN . Требуется определить точку, в которой прямая пересекает заданную пластинку, и выделить часть прямой, закрытую пластинкой.

Проведем через прямую MN проектирующую плоскость $MN_H N$ и отметим точки D_H и E_H (черт. 72) пересечения этой плоскости с проекциями сторон заданной пластинки; затем, пользуясь точками D_H и E_H , определим точки D и E и прямую DE пересечения проектирующей плоскости с заданной пластинкой ABC . Эта пря-



Черт. 71



Черт. 72

мая в пересечении с MN позволит отметить искомую точку K встречи прямой MN с пластинкой ABC .

Чтобы выделить невидимую часть прямой MN , исследуем взаимное положение в пространстве двух слившихся на изображении точек: точки F , принадлежащей прямой MN , и точки G , лежащей

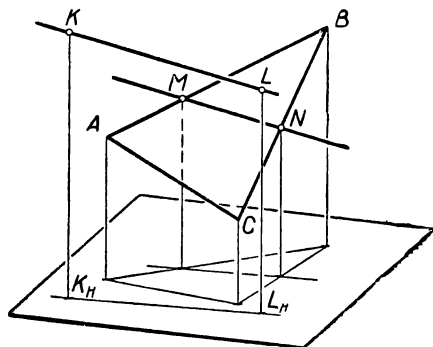
на стороне AC . По положению проекций F_H и G_H этих точек видно (см. § 8, черт. 52), что точка G расположена ближе к зрителю и потому закрывает точку F . Отсюда следует, что отрезок прямой MN между точками F и K закрыт от зрителя поверхностью пластинки.

Пример 5. Построение прямой, лежащей в заданной плоскости.

Если плоскость задана на изображении в виде треугольника ABC (черт. 73), то прямую MN , принадлежащую этой плоскости, можно провести через любые две точки M и N , взятые на двух сторонах заданного треугольника.

Пример 6. Построение прямой, параллельной заданной плоскости.

Чтобы построить прямую, удовлетворяющую заданному условию (прямая должна быть параллельна плоскости P), нужно выбрать в пространстве какую-нибудь точку K (черт. 73), через ко-



Черт. 73

торую проходила бы искомая прямая, и указать при помощи прямой MN , проведенной в плоскости P , одно из возможных направлений, которое может принять прямая. Проведя на чертеже $KL \parallel MN$ и $K_H L_H \parallel M_H N_H$, мы получим изображение одной из прямых, параллельных плоскости ABC .

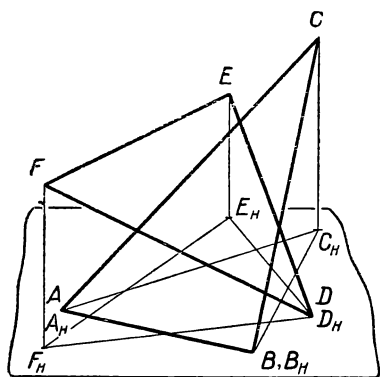
Пример 7. Построение линии пересечения двух плоскостей.

На чертеже 74 заданы две треугольные пластинки. Требуется построить линию взаимного пересечения этих пластинок и выделить на каждой из них части, закрытые другой пластинкой.

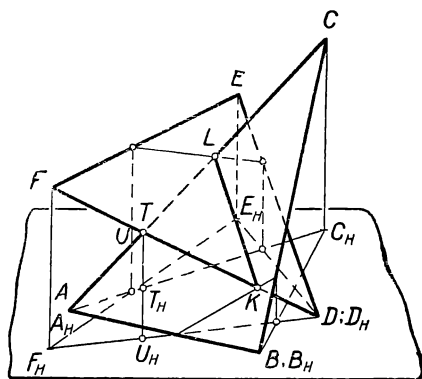
Для построения линии пересечения заданных пластинок найдем какие-нибудь две общие точки этих пластинок. Такими точками могут служить точки K и L (черт. 75) в пересечении прямой DF с плоскостью ABC и прямой AC с плоскостью DEF . Соединив найденные точки, получим KL — искомую линию пересечения заданных пластинок.

Чтобы определить невидимые части пластинок, рассмотрим взаимное расположение в пространстве каких-нибудь двух прямых, например AC и DF , принадлежащих соответственно пластин-

кам ABC и DEF , имеющих слившиеся на изображении точки (T и U). Положение проекций T_H и U_H этих точек по отношению к переднему краю основной плоскости показывает, что точка T отстоит от зрителя дальше точки U . Отсюда следует, что отрезок TL стороны AC закрыт от зрителя поверхностью DEF .



Черт. 74



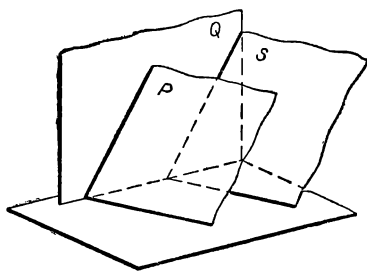
Черт. 75

Пример 8. Построение двух плоскостей, параллельных между собой.

Если плоскости P и S параллельны, то должны быть параллельны между собой линии их пересечения с любой плоскостью. Поэтому, задав на чертеже 76 плоскость P следами на основной плоскости и на некоторой плоскости Q , мы можем изобразить параллельную ей плоскость S , проведя ее следы параллельно соответственным следам плоскости P .

Пример 9. Построение точки, принадлежащей заданной плоскости.

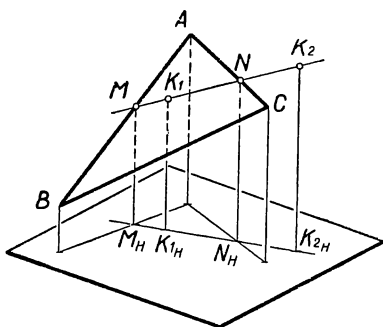
Если произвольная плоскость P задана контуром треугольника ABC (черт. 77), то взята на плоскости P (внутри или вне контура) точка K_1 (или K_2) может быть связана с основной плоскостью, если провести в плоскости P через точку K_1 (или K_2) произвольную прямую MN , отметить точки M и N пересечения этой прямой со сторонами треугольника ABC и построить проекцию $M_H N_H$ этой прямой на основной плоскости. Тогда проекция K_{1H} (или K_{2H}) точки K_1 (или K_2) на основной плоскости будет легко определена.



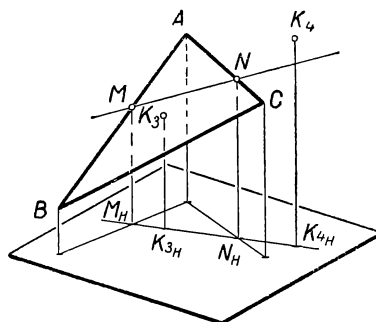
Черт. 76

Пример 10. Построение точки, расположенной вне заданной плоскости.

В соответствии с предыдущим примером из чертежа 78 видно, что точки K_3 и K_4 расположены в пространстве вне плоскости, заданной на изображении треугольником ABC .



Черт. 77



Черт. 78

§ 10. Пересечение поверхности тела плоскостью

Рассмотренные в примерах 1 — 10 (§ 9) приемы применяются при построении изображений пространственных фигур, форма которых представляет некоторое сочетание простейших геометрических форм; сюда относятся задачи на построение: 1) линии пересечения поверхности тела плоскостью, 2) точек пересечения прямой с поверхностью тела и 3) линии пересечения поверхностей двух или нескольких тел.

Пример 1. Построение линии пересечения поверхности тела плоскостью.

1. Сечение призмы плоскостью. Плоскость, пересекающая призму, задана точками K , L и M , лежащими на поверхности призмы.

1-й способ. 1) По заданным точкам K , L и M (черт. 79) находим след PQ секущей плоскости на плоскости основания.

2) Продолжив след EA плоскости EAK до встречи с прямой PQ , найдем точку R , общую для грани EAK и для секущей плоскости; проведем линию пересечения RK этих двух плоскостей и выделим на ней отрезок A_1E_1 , принадлежащий искомому сечению.

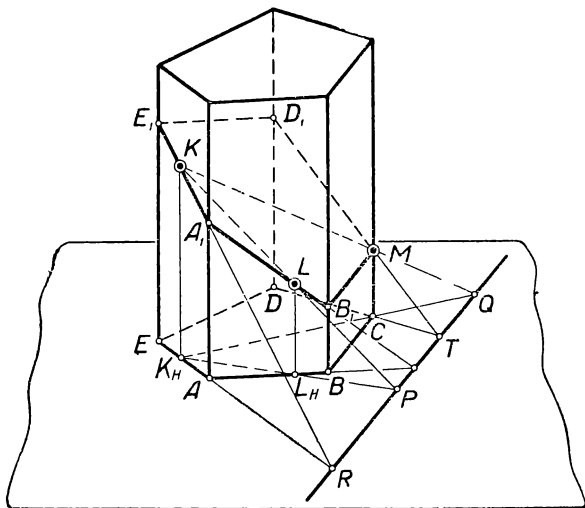
3) Через точки A_1 и L проведем прямую A_1B_1 пересечения грани A_1AB с секущей плоскостью.

4) Соединив точки B_1 и M , получим линию пересечения грани B_1BCM с секущей плоскостью.

5) Продолжив след DC плоскости DCM до пересечения с прямой PQ , найдем точку T , общую для грани DCM и секущей плоскости; проведем линию пересечения TM этих двух плоскостей и выделим на ней отрезок MD , принадлежащий искомому сечению.

6) Соединив точки D_1 и E_1 , получим многоугольник $A_1B_1MD_1E_1A_1$, представляющий искомое сечение поверхности призмы.

2-й способ. 1) Через точки K и L (черт. 80) и через точку M и ребро AA_1 проведем две взаимно пересекающиеся проектирующие плоскости (параллельные боковым ребрам призмы), изо-

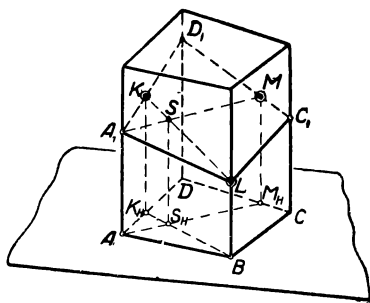


Черт. 79

бразим их следы K_HB и M_HA на основной плоскости и отметим точку S_H пересечения прямых K_HB и M_HA ; построим линию пересечения проектирующих плоскостей ($S_HS \parallel MM_H$) и отметим в пересечении прямых S_HS и KL точку S , принадлежащую секущей плоскости.

2) Проведем в секущей плоскости прямую MS . Эта прямая при встрече с ребром AA_1 , определит точку A_1 , принадлежащую искомой линии сечения.

3) Проведем последовательно линии сечения граней призмы: а) A_1D_1 — через K , б) D_1C_1 — через M , в) CL и г) LA_1 ; в результате чего получим искомый многоугольник сечения $A_1D_1C_1L A_1$.

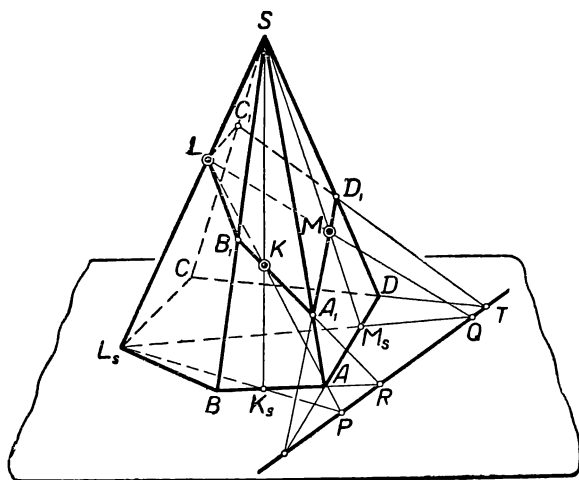


Черт. 80

Если призма имеет более четырех боковых граней, то для определения всех сторон линии сечения нужно повторить описанные построения достаточное число раз. Каждый раз нужно брать на

трех ребрах призмы принадлежащие сечению точки и определять новую точку на одном из боковых ребер, пересечение которого плоскостью еще не найдено.

2. *Сечение пирамиды плоскостью.* Плоскость, пересекающая пирамиду, задана точками K , L и M , лежащими на поверхности пирамиды.



Черт. 81

На чертеже 81 для построения линии $A_1B_1LC_1D_1A_1$ сечения поверхности пирамиды использован след PQ секущей плоскости и применен принцип центральных проекций с центром в вершине S . Построение выполнено в следующем порядке.

1) В проектирующей плоскости LSK проведена прямая LK и ее проекция L_sK_s и найдена точка их встречи P , принадлежащая следу секущей плоскости. Таким же образом найдена точка Q пересечения прямой LM с ее проекцией L_sM_s , после чего проведен след PQ секущей плоскости.

2) Продолжен след BA плоскости BSA до встречи с прямой PQ и отмечена точка R , общая для грани BSA и для секущей плоскости; проведена линия пересечения RK этих двух плоскостей и выделен на ней отрезок A_1B_1 , принадлежащий искомому сечению.

3) Через точки B_1 и L проведена прямая B_1L пересечения грани BSL_s с секущей плоскостью.

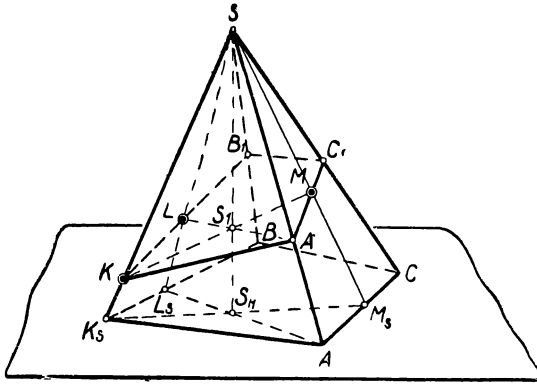
4) Через точки A_1 и M проведена прямая A_1D_1 пересечения грани ASD с секущей плоскостью.

5) Продолжен след CD плоскости CSD до пересечения с прямой PQ и отмечена точка T , общая для грани CSD и для секущей плоскости; проведена линия пересечения TD_1 этих двух пло-

скостей и выделен на ней отрезок D_1C_1 , принадлежащий искомому сечению.

С) Соединены точки C_1 и L ; получен многоугольник $A_1B_1LC_1D_1A_1$, представляющий искомое сечение поверхности пирамиды.

На чертеже 82 для построения линии $A_1KB_1C_1A_1$ сечения применен способ взаимно пересекающихся проектирующих плоскостей $K_S SM_S$ и ASL_S , которые проведены по методу центральных проекций через вершину S пирамиды (S — центр проекций).



Черт. 82

3. Сечение цилиндра плоскостью. Плоскость, пересекающая цилиндр, задана точками K , L и M , лежащими на поверхности цилиндра.

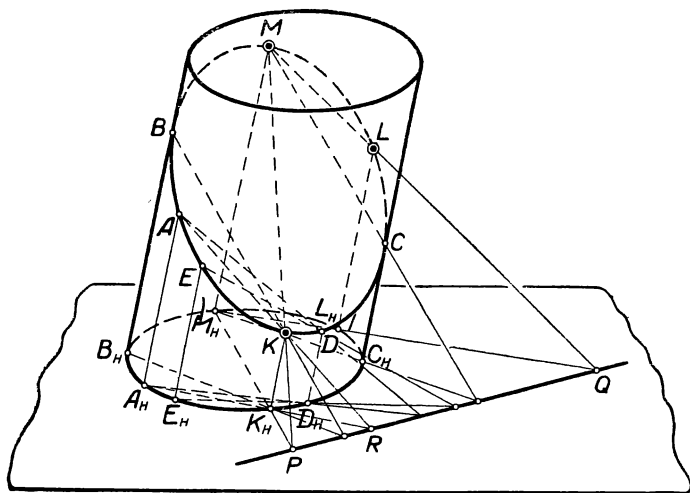
Линия сечения строится по точкам, находимым на поверхности цилиндра; по своему расположению и числу точки должны быть подобраны так, чтобы через них нетрудно было провести (от руки или по лекалу) плавную линию сечения — эллипс, не искажая его формы.

На чертеже 83 применен способ построения точек A , B , C , ..., принадлежащих линии сечения, при помощи следа PQ ; прямая PQ найдена по заданным точкам K , L и M . Каждая точка (A , B , C , D , ...), принадлежащая линии сечения поверхности цилиндра секущей плоскостью, например точка A , определяется при помощи следующего построения.

Проведем через образующую, проходящую через одну из заданных точек (например, точку K), произвольную вспомогательную плоскость и отметим точки пересечения следа этой плоскости с основанием цилиндра (в точке A_H) и со следом PQ секущей плоскости (в точке R). Построим линию пересечения вспомогательной плоскости с секущей плоскостью (прямая RK) и с поверхностью цилиндра (образующая $A_H A$ цилиндра). Тогда точка A , полученная в пересечении проведенных прямых, представит одну из точек

искомой линии сечения. В числе точек, определяющих линию сечения, должны быть найдены две точки (B и C), лежащие на контурных образующих цилиндра; эти точки, называемые точками видимости, разделяют линию сечения на две части, расположенные одна на видимой, а другая на скрытой сторонах поверхности цилиндра.

На чертеже 84 сечение цилиндра найдено при помощи взаимно пересекающихся проектирующих плоскостей (параллельных об-



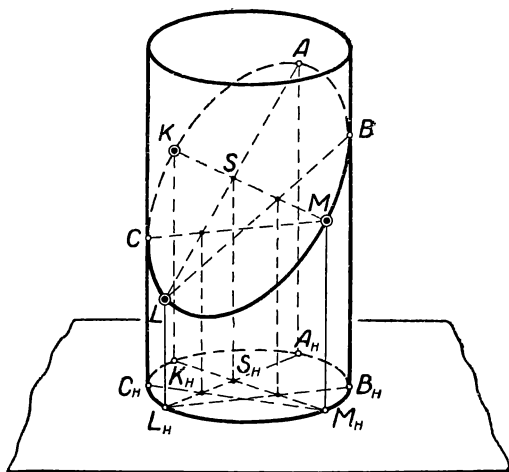
Черт. 83

разующим цилиндра), из которых одна плоскость проводится через две заданные (или найденные) точки, например, K и M , а другая содержит одну известную точку линии сечения, например L , и описанным выше (для призмы) способом дает возможность определить на поверхности цилиндра новую точку A линии сечения.

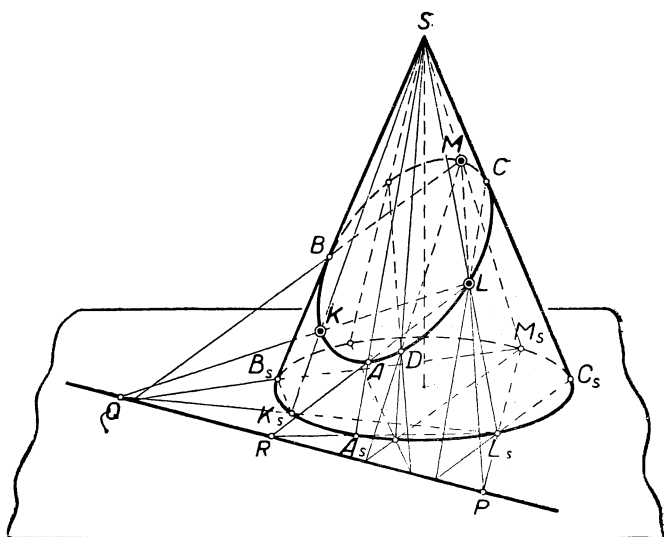
4. *Сечение конуса плоскостью.* В результате пересечения поверхности конуса плоскостью могут быть получены различные между собой по форме кривые — эллипс, парабола и гипербола, в зависимости от положения секущей плоскости относительно образующих конуса.

Эллипс получается как сечение плоскостью, пересекающей все образующие конуса.

На чертеже 85 показано построение эллипса, получившегося в пересечении поверхности конуса плоскостью, заданной тремя точками K , L и M ; положение этих точек на поверхности конуса выбрано так, чтобы плоскость пересекла все образующие конуса. Для построения линии сечения использован след секущей плоско-



Черт. 84

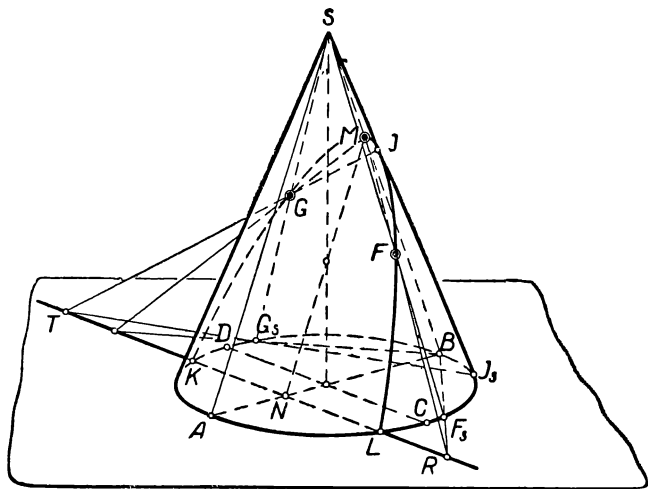


Черт. 85

сти, найденный на плоскости основания конуса по заданным точкам K , L и M , и применен метод центрального проектирования из вершины конуса.

Каждая точка линии сечения, например точка A , на произвольной образующей SA_S может быть найдена следующим построением.

Проведем вспомогательную плоскость через образующие SA_S и SL_S (образующая SL_S проведена через заданную точку L) и отметим точку R пересечения следа $L_S A_S$ этой плоскос-



Черт. 86

ти со следом PQ секущей плоскости. Построим линию RL пересечения вспомогательной плоскости с секущей плоскостью; тогда точка встречи прямой RL с образующей SA_S определит точку A , принадлежащую искомой линии сечения. На чертеже 85 в числе точек, определяющих линию сечения, найдены точки видимости B и C .

Парабола получается в пересечении поверхности конуса плоскостью, параллельной одной из образующих конуса.

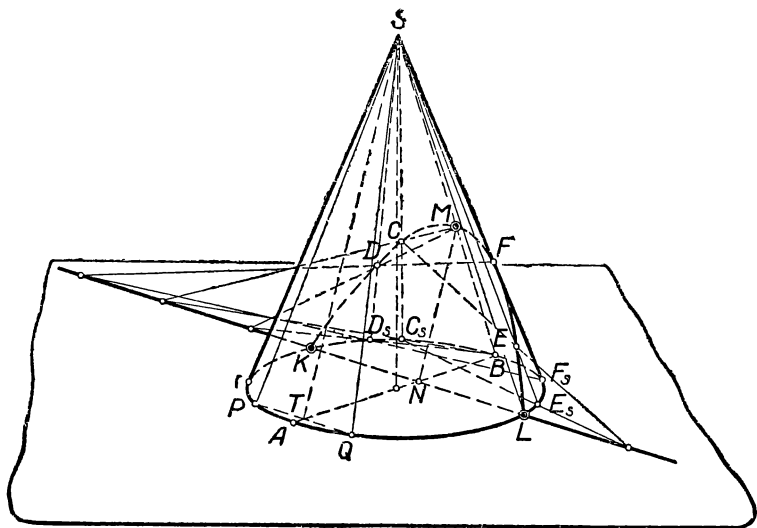
Проведем в окружности основания конуса два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD (на чертеже 86 — два сопряженных диаметра эллипса) и изобразим при помощи образующих SA и SB плоскость осевого сечения, проходящего через диаметр AB . Направим секущую плоскость параллельно образующей SA и зададим ее следом KL , параллельным CD , и прямой NM пересечения секущей плоскости с плоскостью осевого сечения. Очевидно, что прямая NM параллельна образующей SA и определяет на образующей SB точку M , принадлежащую искомой параболе.

Пользуясь следом KL и точкой M , можно найти на поверхнос-

ти конуса любое число точек F, G, \dots , принадлежащих искомой параболе, включая и точку видимости (I) на контурной образующей SI_S .

Гипербола получается в пересечении поверхности конуса плоскостью, параллельной двум образующим конуса.

Чтобы задать на чертеже секущую плоскость, параллельную каким-нибудь двум образующим SP и SQ (черт. 87), проведем пло-



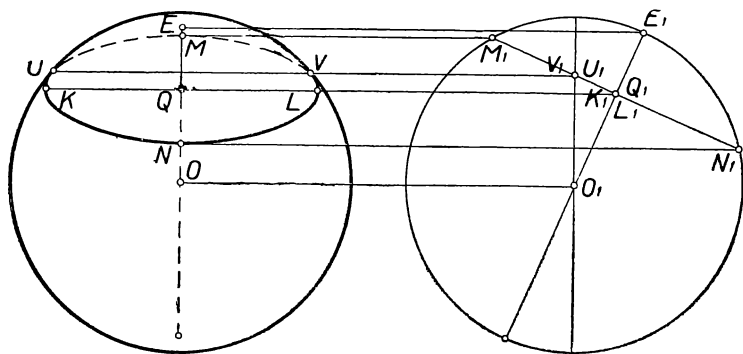
Черт. 87.

скость осевого сечения конуса через диаметр AB , сопряженный хорде PQ ($PT=TQ$), и изобразим секущую плоскость следом KL , параллельным PQ , и линией NM пересечения секущей плоскости с плоскостью осевого сечения, направив NM параллельно ST . Тогда точка M , полученная в пересечении прямой NM с образующей SB , представит одну из точек искомой гиперболы и вместе со следом KL позволит найти на поверхности конуса достаточное число точек, чтобы изобразить искомую линию сечения.

5. *Сечение шара плоскостью.* Линия пересечения поверхности шара плоскостью есть окружность, причем диаметр шара, проведенный в центр окружности сечения, перпендикулярен к плоскости сечения. Поэтому положение секущей плоскости относительно шара и величина радиуса окружности сечения становятся определенными, если указать на заданном диаметре шара положение центра окружности сечения.

Чтобы построить по этим данным наглядное изображение шара с линией плоского сечения на его поверхности, мы воспользуемся, как и в предыдущих примерах (черт. 46 и 68), чертежом, изобра-

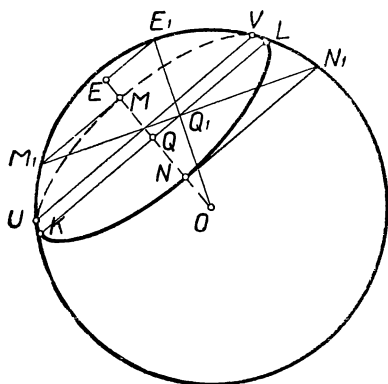
жающим шар в двух видах (черт. 88). Наглядное изображение шара мы получим на главном виде, а вид слева (правая фигура на чертеже 88) будет служить вспомогательным чертежом. Зададим на главном виде окружность очертаия и изображение какого-нибудь радиуса (OE) шара; отметим на этом радиусе произвольную (или делящую радиус в заданном отношении) точку (Q) — центр окружности сечения. Построенная по этим данным проекция окружности сечения на виде слева изобразится в виде прямолинейного отрезка M_1N_1 , перпендикулярного на чертеже к



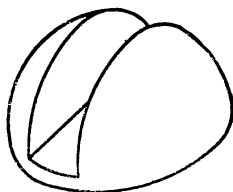
Черт. 88

радиусу O_1E_1 . Длина отрезка M_1N_1 определит диаметр окружности сечения и, следовательно, большую ось KL эллипса, изображающего эту окружность на главном виде ($KL = M_1N_1$); концы M и N малой оси эллипса $KMLN$ определяются посредством линий связи M_1M и N_1N . Кроме того, можно отметить точки U_1 и V_1 в пересечении окружности сечения с окружностью большого круга,

служащей на наглядном изображении очертанием шара; найденные посредством линии связи точки U и V являются точками видимости, отделяющими видимую часть окружности сечения от ее части, закры-



Черт. 89



Черт. 90

той поверхностью шара. По найденным большой (KL) и малой (MN) осям может быть построен эллипс, изображающий окружность сечения шара плоскостью, перпендикулярной к заданному радиусу (OE) шара и проходящей через заданную на радиусе точку (Q).

На чертеже 89, представляющем решение той же задачи на пересечение шара плоскостью, вид слева с целью упрощения построений наложен на наглядное изображение, и соответствующие этому виду построения выполнены тонкими линиями, как вспомогательные; укажем, что фактическое проведение этих линий обязательно: можно, устанавливая вдоль этих линий ребро чертежного угольника, опираемого на линейку, вычерчивать лишь концы линий для засекания нужных точек; таковы прямые EE_1 , M_1M , N_1N , UV и E_1O .

На чертеже 90 изображен полушар с вырезом, симметричным оси тела, сделанным плоскостью, параллельной плоскости экватора, и двумя другими плоскостями к ней перпендикулярными.

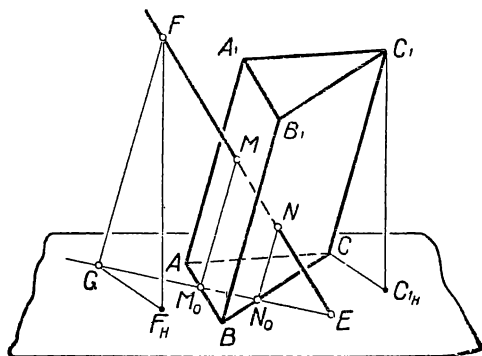
§ 11. Пересечение поверхности тела прямой линией

Для построения искомых точек пересечения прямой с поверхностью тела проводят через прямую некоторую вспомогательную плоскость и находят линию пересечения поверхности данного тела с этой плоскостью; тогда точки пересечения заданной прямой с найденной линией сечения представят искомые точки проникания поверхности тела заданной прямой.

1. Точки пересечения прямой с поверхностью *призмы* удобно построить, если провести через прямую *плоскость, параллельную ребрам призмы*.

Пусть на чертеже 91 изображены наклонная призма $ABCA_1B_1C_1$, высота которой задана отрезком C_1C_{1H} , и прямая EF , определяемая точкой E на основной плоскости и точкой F с ее основанием F_H .

Построение выполняется следующим образом (черт. 91).



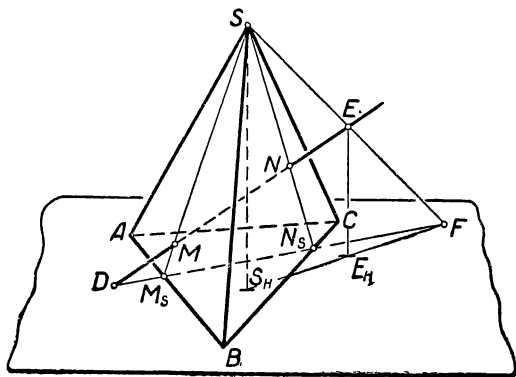
Черт. 91

1) Проведем через F прямую FG параллельно ребру CC_1 и найдем точку G пересечения этой прямой с основной плоскостью, проведя $F_HG \parallel C_1\bar{H}C$ (F_HG и $C_1\bar{H}C$ — проекции параллельных между собой прямых FG и C_1C).

2) Проведя через прямые EF и FG вспомогательную плоскость (параллельную ребрам призмы), изобразим ее след EG и отметим точки M_0 и N_0 пересечения этого следа со следами граней призмы.

3) Проведем линии пересечения вспомогательной плоскости с гранями призмы; такими линиями являются прямые M_0M и N_0N , параллельные ребрам призмы.

4) Отметим точки M и N встречи прямых M_0M и N_0N с прямой EF . Точки M и N представляют искомые точки проникания поверхности призмы заданной прямой EF .



Черт. 92

2. Точки пересечения прямой с поверхностью пирамиды можно построить, проведя вспомогательную плоскость через заданную прямую и через вершину пирамиды.

Пусть на чертеже 92 заданы: пирамида $SABC$ с высотой SS_H и прямая DE , определяемая точками D и E .

Выполним построение в следующем порядке.

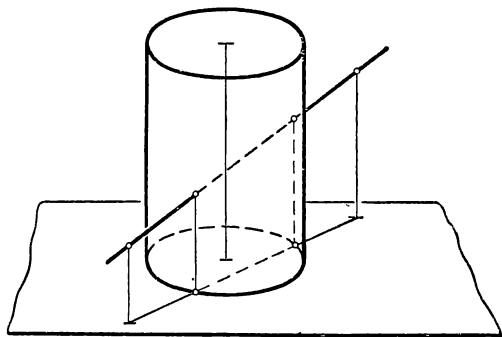
1) Через вершину пирамиды и через какую-нибудь точку (например, E) данной прямой проведем прямую SE и найдем точку F ее пересечения с плоскостью основания пирамиды (черт. 92).

2) Проведем след DF вспомогательной плоскости, проходящей через прямые DF и SF , и отметим точки M_S и N_S пересечения этого следа со следами граней пирамиды.

3) Проведем прямые $M_S S$ и $N_S S$, по которым вспомогательная плоскость пересекается с гранями пирамиды, и отметим точки встречи этих прямых с заданной прямой DE . Полученные точки M и N являются искомыми точками пересечения заданной прямой с поверхностью пирамиды.

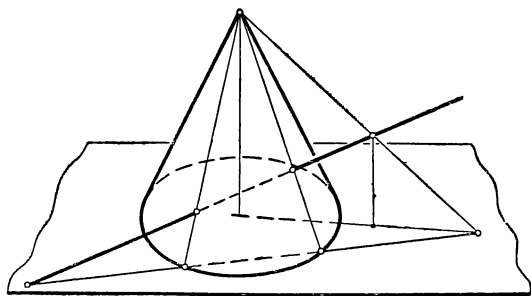
3. Точки пересечения прямой с поверхностью *цилиндра* и с поверхностью *конуса* (черт. 93 и 94) определяются приемами, аналогичными тем, которые были соответственно применены к призме и пирамиде.

4. Рассмотрим способ построения точек пересечения прямой линии с поверхностью *шара*. Зададим очертания шара и изобразим на



Черт. 93

нем одну из окружностей ($ACBD$) большого круга, плоскость которого примем за основную плоскость изображения (черт. 95). Зададим прямую SK , связав ее с шаром посредством точки S , произ-



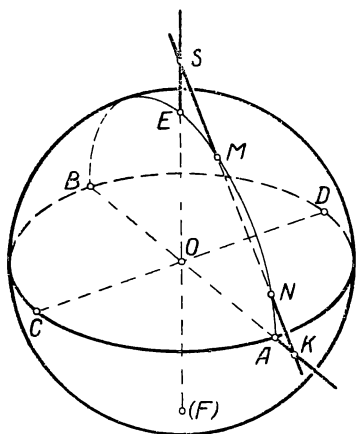
Черт. 94

вольно взятой на продолжении диаметра FE , перпендикулярного к плоскости $ACBD$, и точки K , лежащей в плоскости $ACBD$ на продолжении какого-либо диаметра AB .

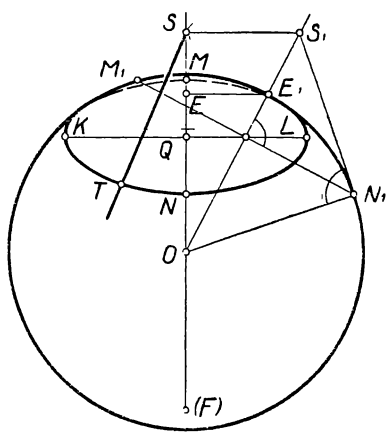
Для построения точек пересечения прямой SK с поверхностью шара воспользуемся вспомогательной плоскостью, проведенной через прямую SK и через диаметр EF . Эта плоскость пересечется с поверхностью шара по дуге окружности AEB , изображение которой может быть построено (см. черт. 47), если принять во вни

мание, что плоскость окружности AEB перпендикулярна к диаметру CD , составляющему прямой угол с AB в плоскости $ACBD$. Тогда точки встречи дуги AEB с прямой SK представят искомые точки (M и N) пересечения прямой SK с поверхностью шара.

Следует, однако, заметить, что в применении к шару описанный способ вспомогательной плоскости не обладает графической точностью вследствие неизбежных погрешностей, связанных с вычерчиванием дуги AEB (эллипс) и с определением общих точек двух линий (SK и AEB), образующих на чертеже весьма острые углы.



Черт. 95



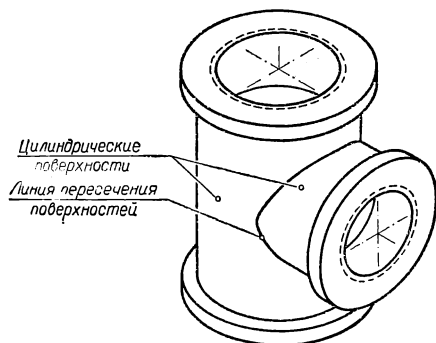
Черт. 96

Практический интерес представляет построение прямой, касательной к поверхности шара. Зададим очертание шара и произвольно выбранную на продолжении одного из его диаметров (EF) точку S , принадлежащую искомой касательной (черт. 96). Примем диаметр EF за ось шара и заметим, что через точку S может быть проведен пучок прямых, касающихся поверхности шара по некоторой окружности, плоскость которой перпендикулярна к оси EF ; вместе с тем каждая касательная этого пучка касается меридиана шара, расположенного в одной плоскости с этой касательной и осью EF .

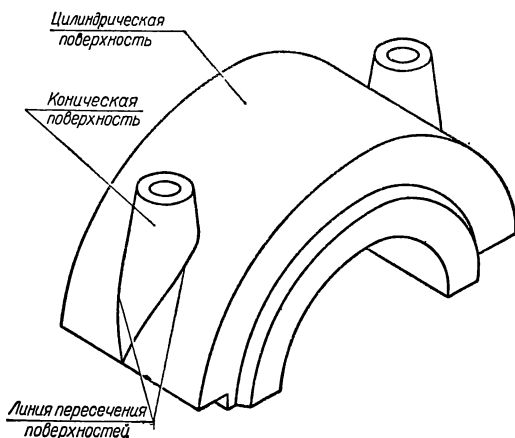
Воспользуемся чертежом 96, представляющим наложенные друг на друга главный вид (наглядное изображение) и вид слева. Построим касательную S_1N_1 к контурному меридиану на виде слева; тогда отрезок N_1M_1 , перпендикулярный к OE_1 , представит на виде слева изображение окружности, на которой расположатся точки касания прямых упомянутого выше пучка. Построив эту окружность на наглядном изображении описанным ранее способом (см. черт. 88), мы можем выбрать на этой окружности любую точку T ; прямая ST представит собой проведенную через точку S касательную к поверхности шара в точке T .

§ 12. Взаимное пересечение тел

Форма многих изделий (машин и их деталей, сооружений, предметов обихода) представляет собой сочетание простых геометрических тел. Задача построения наглядного изображения какого-либо предмета приводится к построению видимых очертаний и линий взаимного пересечения составных геометрических поверхностей, ограничивающих форму данного предмета.



Черт. 97

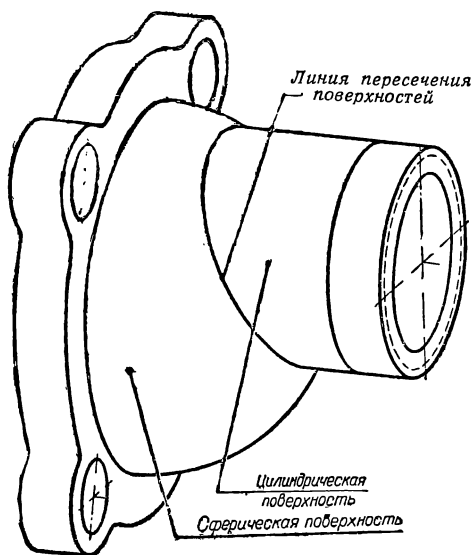


Черт. 98

На чертежах 97, 98, 99 приведены некоторые примеры сочетания геометрических поверхностей в технических формах.

1. В пересечении двух *многогранников* получается ломаная линия (или несколько ломаных), стороны которых представляют линии пересечения граней одного многогранника с гранями другого,

а вершины — точки пересечения ребер каждого из многогранников с гранями другого. Таким образом, на чертеже построение линии пересечения поверхностей многогранников приводится к последовательному решению задач на построение сторон ломаной линии как отрезков прямых, по которым *пересекаются плоскости граней* (см. § 9, пример 7) или на построение вершин ломаной линии, причем каждая вершина строится как *точка пересечения прямой с плоскостью* (§ 9, пример 4). В последнем случае, чтобы построить по найденным вершинам стороны ломаной линии, нужно



Черт. 99

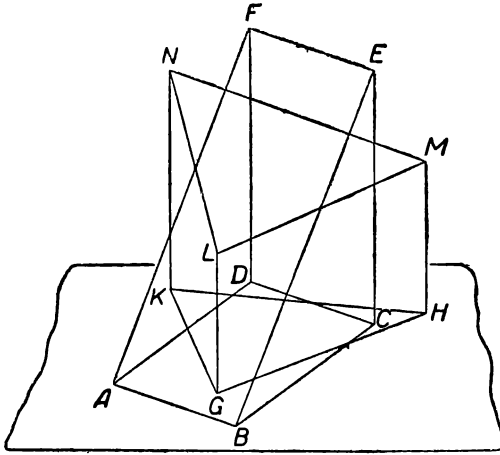
принять во внимание, что каждая сторона содержит точки, общие двум каким-нибудь граням данных многогранников; следовательно, концы этой стороны (вершины ломаной) должны принадлежать этим же двум граням многогранников. Поэтому, определив все вершины ломаной, следует соединять между собой каждые такие две точки, которые окажутся лежащими в одной грани первого и в одной грани второго многогранника.

На чертеже 100 дано изображение двух прямых треугольных призм $ABCDEF$ и $GHKLMN$ с совмещенными в основной плоскости гранями $ABCD$ и GHK . В призме $ABCDEF$ двугранный угол при ребре DC прямой; призма $GHKLMN$ усечена наклонной плоскостью LMN .

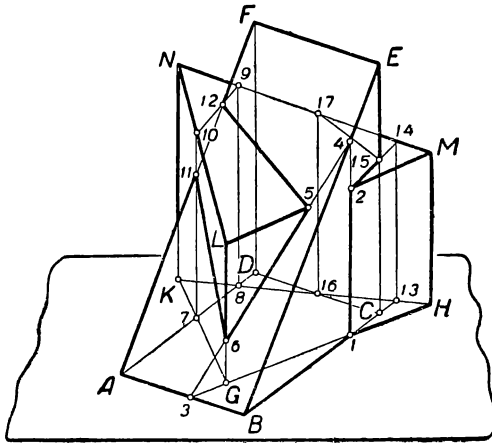
Требуется построить изображение многогранника, полученного в сочетании данных призм.

Выполняем следующие построения.

1) Найдем точку пересечения ребра ML с гранью BCE (черт.101), для чего примем грань $MLGH$ за вспомогательную плоскость, проведенную через прямую ML : а) отметим точку I пере-



Черт. 100



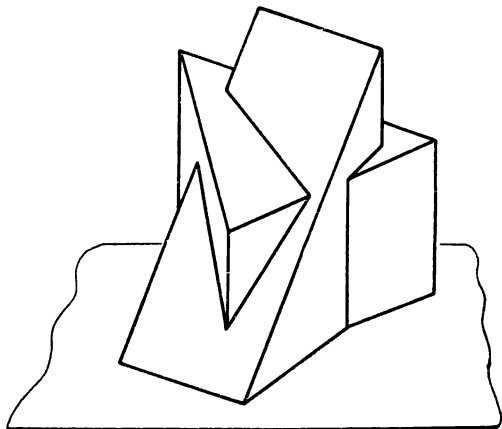
Черт. 101

сечения следов грани BCE и указанной вспомогательной плоскости; б) проведем параллельно ребру CE прямую $1-2$ и отметим на ней искомую точку 2 пересечения ребра LM с плоскостью BCE .

2) Определим точки пересечения ребер LM и LG с гранью $ABEF$, применяя грань $LMHG$ как вспомогательную плоскость, проходящую через указанные ребра: а) продолжив след HG вспомога-

тельной плоскости, отметим точку 3 , общую для этой плоскости и для грани $ABEF$; б) продолжив прямую $1-2$, принадлежащую вспомогательной плоскости, отметим в пересечении с ребром BE точку 4 , общую для вспомогательной плоскости и для грани $ABEF$; в) проведем линию пересечения ($3-4$) указанных плоскостей; г) отметим на прямой $3-4$ искомые точки 5 и 6 пересечения ребер LM и LG с гранью $ABEF$.

3) Таким же способом находим: а) точку входа (11) и точку выхода (12) ребра AF , пользуясь вспомогательной плоскостью AFD ;



Черт. 102

б) точку пересечения (15) ребра CE с гранью LMN , пользуясь плоскостью BCE ; в) точки входа (9) и выхода (17) ребра NM при помощи плоскости NMK .

4) Строим линию пересечения заданных призм; для этого соединяем последовательно. а) точки 2 и 15 , 15 и 17 , 17 и 16 ; б) точки 7 и 11 , 11 и 6 , 6 и 5 , 5 и 12 , 12 и 9 , 9 и 8 . Таким образом, находим, что линия пересечения данных призм состоит из двух ломаных: а) $1-2-15-17-16$ и б) $7-11-6-5-12-9-8$.

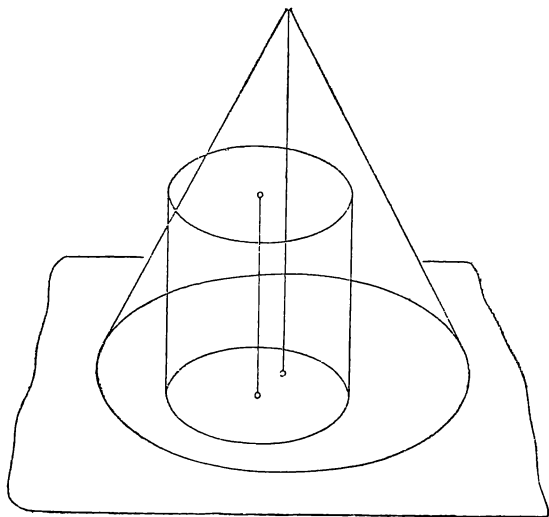
5) Выделяем утолщенными линиями видимые части ребер и линий взаимного пересечения призм.

Полученный в результате пересечения заданных призм многогранник изображен на чертеже 102.

2. Линия пересечения двух тел вращения есть в общем случае некоторая пространственная кривая. Точки этой кривой определяются при помощи вспомогательных плоскостей, которыми надлежащим образом пересекают данные два тела. Линии пересечения каждой плоскости с данными телами, пересекаясь между собой, определяют точки, которые являются общими для данных поверхностей, т. е. точками, принадлежащими искомой линии пере-

сечения поверхностей. Вспомогательные секущие плоскости выбирают так, чтобы они в пересечении с каждым из данных тел давали простые для вычерчивания линии, т. е. прямую или в некоторых случаях окружность, если последняя изображается на чертеже или в виде окружности (может быть фактически вычерчена циркулем), или в виде прямолинейного отрезка.

Рассмотрим пример пересечения двух тел вращения. На чертеже 103 изображены цилиндр и конус, имеющие общую плоскость



Черт. 103.

оснований и параллельно направленные оси. Если проводить вспомогательные секущие плоскости через ось конуса, то каждая из плоскостей пересечет конус и цилиндр по их образующим. Построение линии пересечения данных тел выполним в следующем порядке.

1) Найдем точку S_1 (черт. 104) пересечения высоты конуса с плоскостью верхнего основания цилиндра ($S_H S_1 = O O_1$).

2) Изобразим след на плоскости оснований какой-нибудь из вспомогательных секущих плоскостей и отметим точки пересечения этого следа с окружностью основания цилиндра (I_C) и с окружностью основания конуса (I_K).

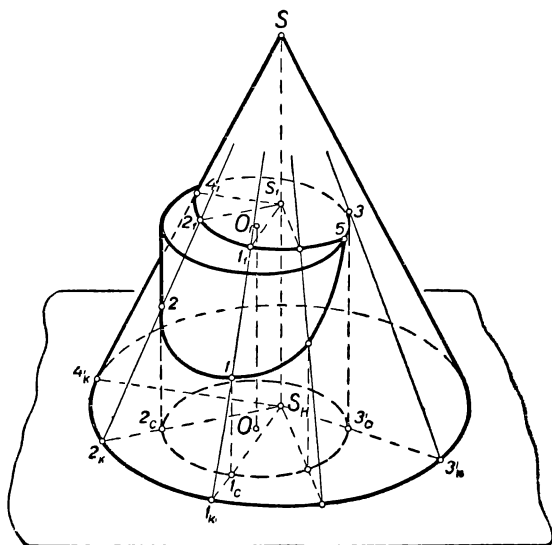
3) Через точки I_C и I_K проведем образующую цилиндра ($I_C I \parallel O O_1$) и образующую конуса ($I_K S$), по которым вспомогательная плоскость пересекает поверхности цилиндра и конуса; отметим точку I встречи этих образующих как точку искомой линии пересечения данных тел.

4) Построив линию пересечения верхнего основания цилиндра с вспомогательной плоскостью ($S_1 I_1 \parallel S_H I_C$) и отметив точку встре-

чи этой линии с образующей $1_k S$, получим точку 1_1 , также принадлежащую искомой линии пересечения.

5) Повторим описанные построения для определения достаточного числа точек искомой линии и среди них точек видимости на поверхности цилиндра (точки 2 и 3) и точек видимости на поверхности конуса (точка 4₁).

Из построения видно, что точка 3 не принадлежит искомой линии пересечения данных тел, но может служить для более точного



Черт. 104

определения точки 5, как точки пересечения окружности верхнего основания цилиндра с продолженной до точки 3 кривой 2-1-...-3.

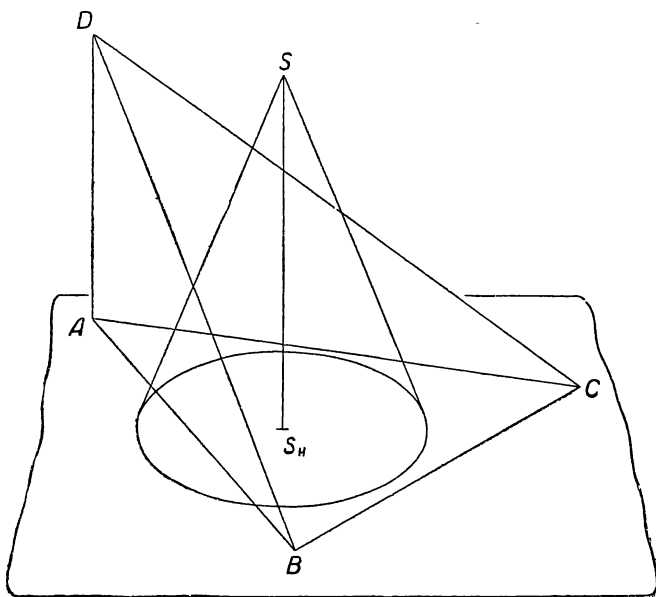
3. Построение линии пересечения *тела вращения с многогранником* приводится к построению нескольких плоских кривых, получаемых в пересечении поверхности данного тела вращения гранями многогранника.

На чертеже 105 даны конус и пирамида, поставленные на общую плоскость. Ребро AD пирамиды параллельно оси SS_H конуса.

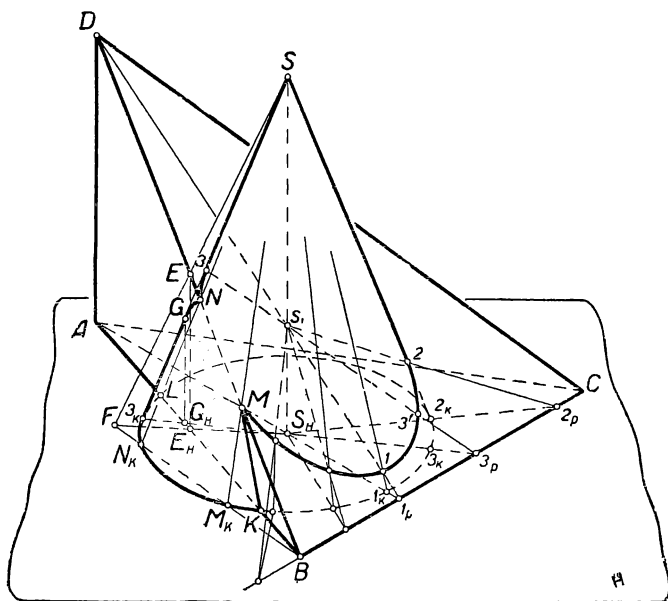
Построение линии пересечения показано на чертеже 106.

1) Определим точки M и N пересечения ребра BD с поверхностью конуса, применив для этого вспомогательную плоскость, проведенную через это ребро и через некоторую прямую SF , имеющую с ребром BD общую точку E . В найденных точках M и N линия пересечения переходит с одной грани пирамиды на другую ее грань.

Рассматривая чертеж, убеждаемся, что ребро CD не пересекает поверхности конуса.



Черт. 105



Черт. 106

2) Построим линию пересечения грани BCD с поверхностью конуса (эллипс). Для этого применим секущие плоскости, проводимые через ось конуса.

Плоскость, проходящая через ось конуса SS_H и ребро пирамиды AD , отметит своим следом AS_H точки I_K и I_P на окружности основания конуса и на ребре BC . Проведя через точки I_K и I_P линии пересечения вспомогательной плоскости с поверхностью конуса и с гранью BCD пирамиды (I_KS и I_PS), мы найдем в пересечении этих прямых точку I искомой линии пересечения данных тел. Вместе с тем отметим точку S_1 пересечения оси SS_H с гранью BCD и воспользуемся этой точкой для построения линий пересечения всех других вспомогательных плоскостей с гранью BCD ; таким образом, найдем необходимое число точек 2, 3, ... для построения искомой кривой на грани BCD .

3) Для построения линии пересечения поверхности конуса с гранью ABD (гипербола) мы имеем точки K, L, M и N . Точку видимости G , а также любое число других точек искомой кривой мы можем найти при помощи вспомогательных плоскостей, проводимых через ось SS_H . Все эти плоскости пересекут грань ABD по прямым, параллельным ребру AD (так как по условию $AD \parallel SS_H$), а эти прямые в пересечении с соответствующими образующими конуса определяют точки искомой кривой.

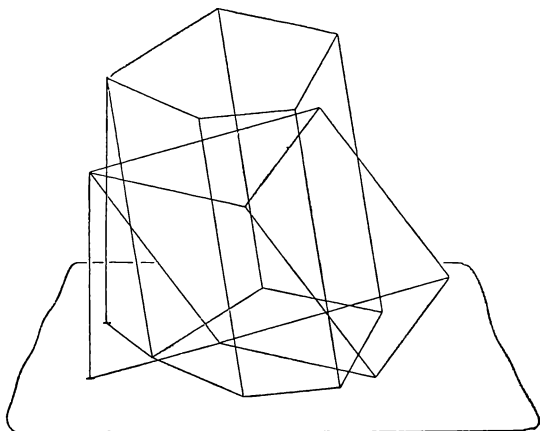
На чертеже 106 скрытые части линии сечения не изображены.

В рассмотренных трех примерах взаимного пересечения поверхностей двух тел мы руководствовались соображениями наибольшей простоты решения задачи применительно к каждому данному частному случаю. Укажем некоторые общие приемы решения задач на взаимное пересечение поверхностей при помощи вспомогательных секущих плоскостей. Выбор этих плоскостей обуславливается требованием, чтобы линии пересечения каждой из них с поверхностями пересекающихся тел наиболее просто определялись и вычерчивались на чертеже; для поверхностей призмы, пирамиды, цилиндра и конуса такими линиями могут служить их образующие (образующими призмы мы будем называть прямые в ее боковых гранях, параллельные боковым ребрам, а образующими пирамиды — прямые в ее боковых гранях, проходящие через общую вершину граней). Покажем на примерах, как используются такие вспомогательные плоскости.

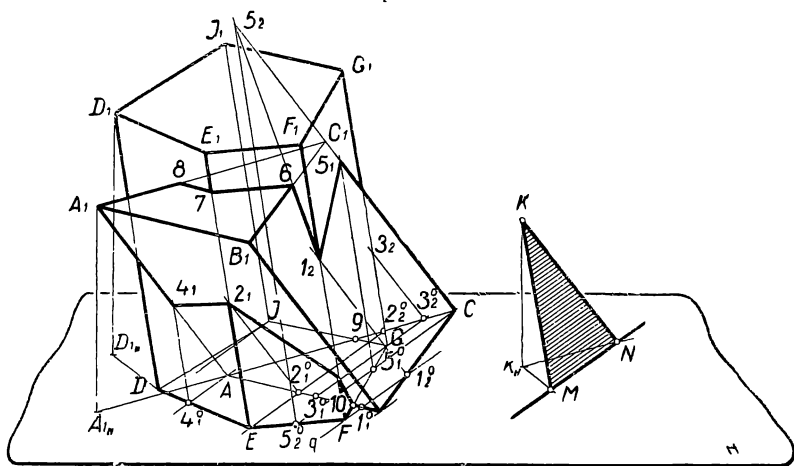
В случае *взаимного пересечения поверхностей двух призм* указанному требованию удовлетворяют плоскости, одновременно параллельные боковым ребрам обеих призм и, следовательно, параллельные между собой.

На чертеже 107 даны очертания двух призм, поставленных на общую плоскость основания. Построение линии взаимного пересечения поверхностей этих призм показано на чертеже 108. Через произвольную точку K (черт. 108) проведены прямые KM и KN , соответственно параллельные ребрам призмы ABC и призмы $DEFGH$, и найдены точки M и N пересечения этих прямых с плоскостью

оснований. Из построения вытекает, что плоскость KMN параллельна боковым ребрам обеих заданных призм и, следовательно, определяет положение вспомогательных секущих плоскостей, необходимых для решения данной задачи. Заметим, что следы на основ-



Черт. 107

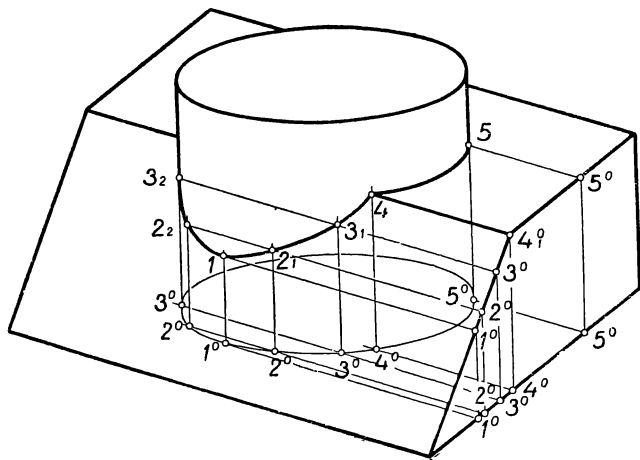


Черт. 108

ной плоскости всех вспомогательных плоскостей параллельны следу MN плоскости KMN .

На чертеже 108 применены пять вспомогательных плоскостей. Проведем одну из этих плоскостей, например плоскость Q через боковое ребро FF_1 пятиугольной призмы. След q этой плоскости ($q \parallel MN$) пройдет через точку F и встретит ребра AB и BC осно-

вания треугольной призмы в точках 1_1° и 1_2° , а сама плоскость Q пересечет грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 по прямым $1_1^\circ-1_1$ и $1_2^\circ-1_2$, параллельным ребру BB_1 . Эти прямые определяют точки 1_1 и 1_2 , в которых ребро FF_1 пересекает грани ABB_1A_1 и BCC_1B_1 . Проведя таким же образом вспомогательные секущие плоскости через ребра EE_1 и GG_1 пятиугольной призмы, мы найдем точки 2_1 и 3_2 пересечения этих ребер соответственно с гранями ABB_1A_1 и CAA_1C_1 . Точки



Черт. 109

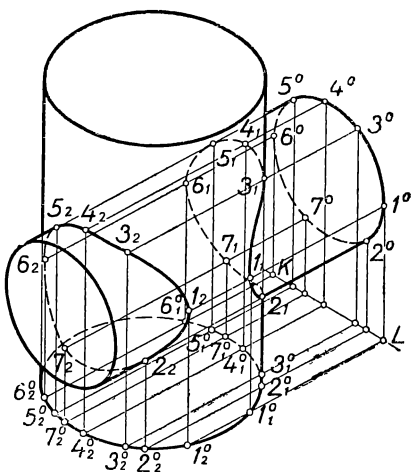
2_2 и 3_1 , в которых ребра EE_1 и GG_1 должны встречать плоскости соответствующих граней, лежат вне очертаний этих граней и для получения искомой линии не нужны. Ребра DD_1 и II_1 , как показывают следы вспомогательных плоскостей, не пересекаются с гранями призмы ABC . В свою очередь вспомогательные плоскости, проведенные через ребра AA_1 и CC_1 треугольной призмы, позволят определить точку 4_1 пересечения ребра AA_1 с гранью DEE_1D_1 и точки 5_1 и 5_2 пересечения ребра CC_1 с гранью FGG_1F_1 и с продолженной гранью EFF_1E_1 . Точка 5_2 вместе с точкой 1_2 , как принадлежащие одновременно плоскостям BCC_1B_1 и EFF_1E_1 , позволяют провести линию пересечения этих плоскостей и тем самым найти точку 6 , в которой ребро V_1C_1 встречает грань EFF_1E_1 . Построение точек 7 и 8 , а также последовательное проведение сторон линии взаимного пересечения поверхностей заданных тел не представляет затруднений. (Невидимые стороны 4_1-8 и 5_1-3_2-9 на чертеже 108 не показаны.)

Способ параллельных секущих плоскостей, примененный нами для построения линии пересечения поверхностей двух призм, может быть использован также для построения линии пересечения

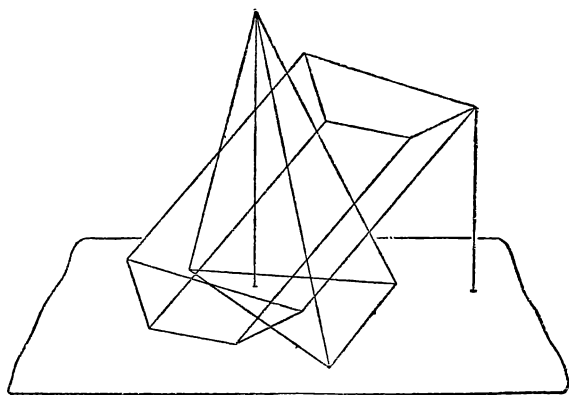
поверхностей призмы и цилиндра и поверхностей двух цилиндров. Заметим, что основания указанных пересекающихся тел могут быть расположены в разных плоскостях. В таком случае должна быть задана общая для обоих тел основная плоскость, по отношению к которой элементы пересекающихся фигур являлись бы вполне заданными. Чтобы иметь возможность строить на основаниях пересекающихся тел следы каждой проводимой секущей плоскости, необходимо предварительно построить линию взаимного пересечения плоскостей оснований этих тел.

На чертеже 109 построена линия пересечения поверхностей призмы и цилиндра. Основной плоскостью в рассматриваемом случае служит основание цилиндра, а линией пересечения оснований обоих тел является одна из сторон основания призмы.

На чертеже 110 показано построение линии пересечения поверхностей двух цилиндров с предварительным построением линии пересечения плоскостей оснований этих цилиндров.



Черт. 110

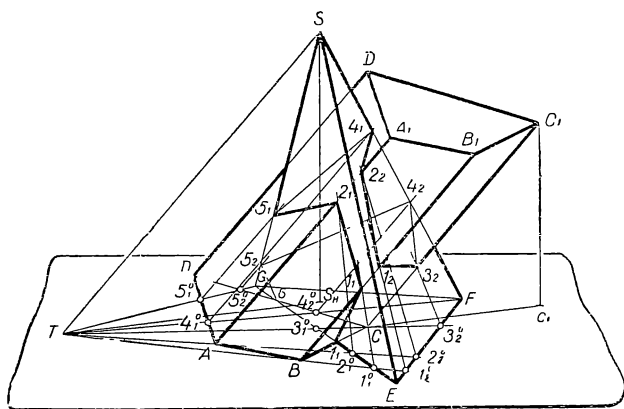


Черт. 111

В случае взаимного пересечения поверхностей призмы и пирамиды вспомогательные плоскости, пересекающие поверхности обоих тел

по образующим, могут быть построены на основании следующих соображений. Плоскость может пересечь по образующим поверхность пирамиды, если она проведена через вершину этой пирамиды; вместе с тем такая плоскость пересечет по образующим также и призму, если она параллельна ребрам призмы. Очевидно, что одновременно обоим требованиям могут удовлетворять плоскости, содержащие прямую, проведенную через вершину пирамиды параллельно боковым ребрам призмы.

На чертеже 111 даны очертания призмы и пирамиды, основания которых лежат в одной плоскости. Проведем через вершину пирамиды (черт. 112) прямую ST параллельно ребрам призмы ($ST \parallel AA_1 \parallel BB_1 \dots$) и найдем след T этой прямой на плоскости оснований. Точка T будет общей точкой следов вспомогательных секущих плоскостей. Эти плоскости целесообразно проводить через

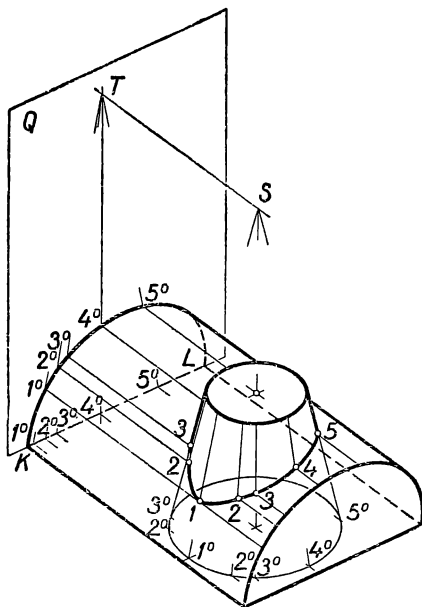


Черт. 112

ребра, а, следовательно, их следы — через вершины оснований каждого из многогранников. Дальнейшее выполнение построений аналогично изложенному выше для случая взаимного пересечения поверхностей двух призм (см. черт. 108).

Рассмотренный на чертеже 112 способ применим также в случае попарного пересечения поверхностей призмы и конуса, цилиндра и пирамиды, цилиндра и конуса. На чертеже 113 показано построение линии взаимного пересечения поверхностей цилиндра и конуса. Чертеж изображает часть прямого цилиндра, усеченного параллельно его оси; плоскость сечения цилиндра совмещена с плоскостью нижнего основания усеченного конуса, вследствие чего линия KL пересечения оснований цилиндра и конуса является заданной на чертеже. Вспомогательные секущие плоскости, необходимые для построения искомой линии пересечения заданных поверхностей, должны проходить через прямую (ST), проведенную

через вершину (S) конуса параллельно образующим цилиндра. Чтобы воспользоваться этими плоскостями, нужно предварительно: 1) найти вершину S (черт. 113) заданного конуса, 2) продолжить плоскость одного из оснований цилиндра (плоскость Q) и 3) определить точку T , в которой прямая ST пересекает плоскость Q ; точка T будет общей точкой следов вспомогательных плоскостей на плоскость Q . На чертеже 113 проведено пять вспомогательных плоскостей; из них первая плоскость касается поверхности конуса и определяет самую низкую точку линии пересечения; а третья и пятая плоскости проходят через образующие конуса, служащие контурными на изображении, и определяют точки видимости, ограничивающие видимую часть линии пересечения от части, скрытой поверхностью конуса; вторая и четвертая плоскости взяты произвольно и позволяют получить более точное очертание искомой линии пересечения.

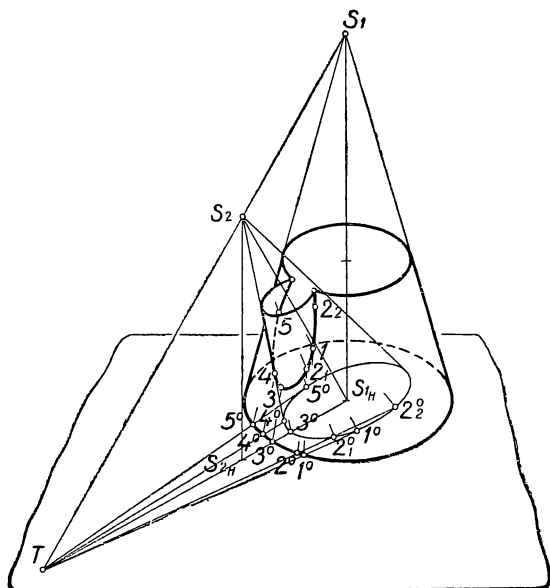


Черт. 113

В случае *взаимного пересечения поверхностей двух пирамид, двух конусов или пирамиды с конусом* вспомогательные плоскости, пересекающие поверхности обоих тел по образующим, должны проходить через вершины этих тел и, следовательно, через прямую, соединяющую вершины. Чертеж 114 поясняет построение линии пересечения поверхностей двух конусов, плоскости оснований которых совмещены. На чертеже найдена точка T — след на плоскости оснований прямой S_1S_2 , проведенной через вершины конусов. Следы всех вспомогательных плоскостей проходят через точку T , причем для построения нужны лишь такие плоскости, следы которых пересекают основания обоих конусов (или, пересекая основания одного, касаются линии основания другого конуса). По чертежу можно убедиться, что каждая из точек искомой линии пересечения является точкой встречи двух образующих, проведенных через точки, полученные на основаниях конусов в пересечении с каким-либо одним из следов вспомогательных плоскостей.

Способ вспомогательных секущих плоскостей используется также и в случае пересечения поверхности *шара* с каждым из тел, рас-

смотренных в предыдущих примерах. Само собой разумеется, что в этом случае графические построения отличаются большей трудоемкостью вследствие необходимости строить эллипсы, изображающие линии пересечения вспомогательных плоскостей с поверхностью шара; вместе с тем необходима значительно большая тщательность в выполнении построений, чтобы получить удовлетворительные по точности результаты.

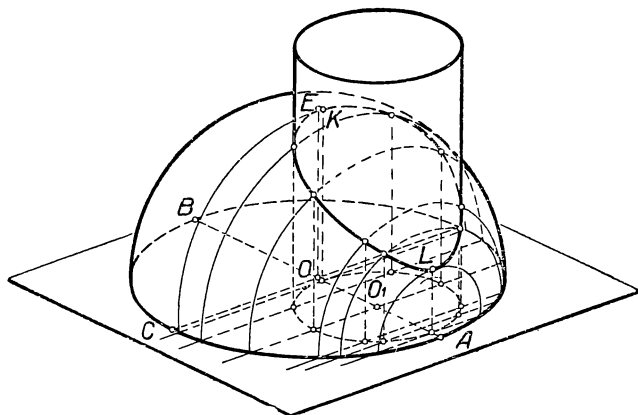


Черт. 114

На чертеже 115 дан пример построения линии пересечения поверхности полушара с прямым круговым цилиндром, основание которого совмещено с плоскостью основания полушара. Вспомогательные плоскости выбраны параллельными образующим цилиндра и вместе с тем перпендикулярными к общей плоскости симметрии данных двух тел; последнее обстоятельство дает возможность легко найти наивысшую (K) и наинизшую (L) точки (не имеющие себе симметричных) линии взаимного пересечения данных поверхностей. Линии пересечения поверхности шара вспомогательными плоскостями могут быть построены описанным выше способом (см. черт. 89). Однако в данном случае значительно удобнее применить способ построения эллипсов по двум сопряженным диаметрам (см. § 5, черт. 26), если принять во внимание, что вследствие параллельности секущих плоскостей получаемые на чертеже эллипсы должны быть подобны между собой и, следовательно, отношения соот-

ветственных сопряженных диаметров (или полу диаметров) этих эллипсов равны. Мы можем определить это отношение, построив на чертеже полу диаметры OC и OE эллипса, изображающего окружность большого круга, плоскость которого параллельна секущим плоскостям (эта окружность на чертеже не изображена). Затем, проведя в основной плоскости следы секущих плоскостей и выделяя в каждом случае полу диаметр, лежащий в основной плоскости, мы легко построим, пользуясь найденным отношением, соответствующий ему сопряженный полу диаметр и вычертим необходимую дугу эллипса.

Мы рассмотрели ряд вопросов о способах построения наглядных изображений пространственных фигур, сосредоточив внимание на задачах позиционного характера. Размерные соотношения элементов изображаемых фигур не имели основного значения в наших построениях и принимались в соображение лишь в том случае (окружность, шар), когда они являлись необходимым условием, определяющим форму фигуры.



Черт. 115

На изложенном материале легко убедиться, что такого рода наглядные изображения могут быть с большой пользой применяемы в педагогической работе. Отметим прежде всего такие положительные с педагогической точки зрения качества этих изображений, как теоретическая обоснованность способов построения (принцип параллельных проекций и принцип полноты изображения), простота и доступность (на основе элементарных геометрических знаний) понимания чертежей и способов их выполнения; весьма важной в педагогическом отношении является возможность использования наглядных изображений для обобщения излагаемого учебного материала. Примером такого обобщения может служить чертеж 108, иллюстрирующий способ построения линии пересечения поверхностей двух призм, каждая из которых может быть призмой любого вида (правильная, прямая, наклонная и т. п.). Учащийся, усвоивший показанный на чертеже 108 способ построения, сможет осуществить это построение при любом частном задании рассмотренных тел, т. е. сумеет применить изученные теоретические сведения на практике.

ГЛАВА III

СПОСОБЫ ПЕРЕДАЧИ МЕТРИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПРОЕКЦИОННОМ ЧЕРТЕЖЕ

§ 13. Общие сведения о метрически определенных чертежах

В техническом черчении чертеж всегда представляет изображение какого-нибудь конкретного предмета и потому должен передавать наряду с формой предмета также и его размеры. Из ранее сказанного (см. чертежи 11—15) мы могли убедиться, что правильные сведения о форме и размерах фигуры, представленной на изображении, можно получить только в том случае, когда изображение сопровождается некоторыми дополнительными условными данными. В предыдущем изложении мы познакомились с условностями, позволяющими передавать на чертеже позиционные свойства изображенной фигуры. Для чертежа, отображающего метрические свойства, такие условности должны быть пополнены некоторыми новыми требованиями, налагаемыми на чертеж.

Существует несколько методов построения метрически определенных изображений. Наиболее употребительными являются метод чертежей в системе прямоугольных проекций, метод аксонометрических проекций и применяемый в топографии метод проекций с числовыми отметками.

Метод чертежей в системе проекций весьма широко используется в техническом черчении, элементарное ознакомление с ним входит в программу курса черчения средней школы*. Изображения пространственных фигур, получаемые этим методом, практически удобно передают размеры фигур, но не обладают надлежащей наглядностью; вследствие этого навыки в чтении таких чертежей приобретаются в результате длительных упражнений и постепенного освоения теории, лежащей в основе этого метода. Освоению мето-

* В дальнейшем изложении мы будем считать, что читатель знаком с основными положениями метода чертежей в системе прямоугольных проекций.

да чертежей в системе проекций и прежде всего пониманию каждого заданного чертежа весьма способствуют наглядные изображения, иллюстрирующие эти чертежи. Понятно, что наглядное изображение, соответствующее заданному чертежу, имеющему техническое назначение, должно быть метрически определенным. Мы рассмотрим два метода построения метрически определенных наглядных изображений: координатный метод, который называется обычно методом аксонометрических проекций и имеет широкое применение в техническом черчении, и частный случай этого метода, основанный на условных положениях применительно к отдельно взятому чертежу, что в некоторых случаях бывает удобно в учебной работе на уроках черчения.

§ 14. Координатный метод; основные сведения

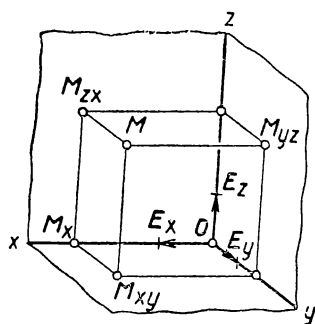
Возьмем в пространстве три взаимно перпендикулярные плоскости xOy , yOz и zOx и рассмотрим образованный плоскостями трехгранный угол (черт. 116); заметим, что ребра этого трехгранного угла попарно взаимно перпендикулярны и каждое из ребер перпендикулярно к грани, не содержащей этого ребра.

Нетрудно видеть, что положение всякой точки M пространства (черт. 116) вполне определяется относительно граней трехгранного угла тремя отрезками MM_{yz} , MM_{zx} , MM_{xy} , представляющими расстояния точки M от каждой из граней. Если для измерения указанных отрезков выбрана некоторая линейная единица масштаба, например отрезок OE , то положение точки M относительно трехгранного угла может быть установлено посредством трех чисел:

$$a = \frac{MM_{yz}}{OE}, \quad b = \frac{MM_{zx}}{OE}, \quad c = \frac{MM_{xy}}{OE},$$

выражающих величину отрезков MM_{yz} , MM_{zx} , MM_{xy} в заданной единице масштаба.

Описанный способ определения (или задания) тремя отрезками или тремя числами положения точки в пространстве называется координатным методом. Трехгранный угол ($Oxyz$), относительно которого определяется положение точки (M), носит название *координатного трехгранника*. Грани этого угла (xOy , yOz , zOx) называются *координатными плоскостями*, ребра (Ox , Oy , Oz) — *осями координат*, вершина O — *началом координат*. Отрезки MM_{yz} , MM_{zx} , MM_{xy} представляют *координатные отрезки*, а числа a , b , c , выражающие отношения координатных отрезков к отрезку, принятому за единицу линейного масштаба, называются *координатами*.

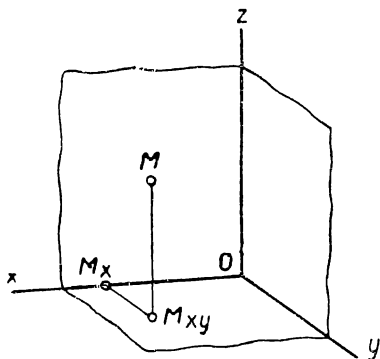


Черт. 116

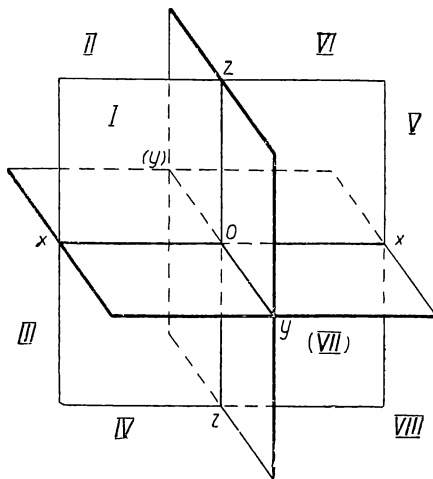
ми точки M . Как видно из чертежа 117, координаты точки M можно определять также по ломаной линии $OM_x M_{xy} M$; тогда $a = \frac{OM_x}{OE}$,

$$b = \frac{M_x M_{xy}}{OE}, \quad c = \frac{M_{xy} M}{OE}.$$

Три взаимно перпендикулярные плоскости xOy , yOz и zOx разделяют пространство на восемь трехгранных углов, называемых



Черт. 117



Черт. 118

координатными октантами (черт. 118). Координаты точек, расположенных в этих октантах, различаются между собой знаками $+$ и $-$ в зависимости от направления отсчета по осям, считая от начала координат. Занумеровав координатные октанты, например, в порядке, указанном на чертеже 118, и присвоив трем координатам точки, расположенной в одном из октантов, знак $+$, мы без труда определим знаки координат для точек любого из остальных семи октантов, как это показано в приведенной таблице:

| | I | II | III | IV | V | VI | VII | VIII |
|-----|---|----|-----|----|---|----|-----|------|
| a | + | + | + | + | - | - | - | - |
| b | + | - | - | + | + | - | - | + |
| c | + | + | - | - | + | + | - | - |

§ 15. Аксонометрическая проекция точки и фигуры; основные понятия

Условимся называть описанный в § 14 координатный трехгранник *натуральным координатным трехгранником* в отличие от его изображения, представленного на чертежах 116 и 117. В дальнейшем изложении при сопоставлении натурального координатного трехгранника с его изображением мы будем добавлять к буквенным обозначениям элементов натурального трехгранника значок «штрих» (').

Выясним, при каких условиях изображение этого трехгранника удовлетворяет требованиям наглядности. Обычно для этой цели пользуются изображением только осей трехгранника, не показывая очертания граней. Задача проектирования приводится к тому, чтобы расположить подходящим образом натуральные оси координат перед плоскостью проекций* и выбрать по отношению к этой плоскости надлежащее направление проектирующих лучей.

Принято располагать натуральную ось $O'z'$ так, чтобы ее проекция Oz была перпендикулярна к нижнему краю рамки чертежа. При этом натуральные оси $O'x'$ и $O'y'$ располагают в пространстве так, чтобы они находились по разные стороны проектирующей плоскости, проходящей через ось $O'z'$. К направлению проектирующих лучей предъявляются требования, чтобы координатный трехгранник был изображен с внутренней своей стороны, чтобы проекции двух осей не располагались на одной прямой и ни одна из осей не проектировалась бы в точку. Заметим, что в общем случае при указанных условиях все три оси проектируемого координатного трехгранника будут пересекаться с плоскостью проекций; в частных случаях возможно такое расположение натурального трехгранника, при котором одна из его осей или две оси параллельны плоскости проекций. На чертеже 117 представлено одно из изображений натуральной системы осей координат, полученное при соблюдении указанных выше условий.

Если принять координатную плоскость $x'O'y'$ за основную плоскость, а направление оси $O'z'$ — за направление проектирования на основную плоскость, то всякая точка M' может быть связана с основной плоскостью посредством проекции $M'_{x'y'}$. Следовательно, изображение M точки M' , представленное на чертеже 117 вместе с изображением $Oxyz$ системы осей координат $O'x'y'z'$ и связанное с этой системой указанным образом, будет вполне заданным изображением. На этом основании можно сказать, что изображение всякой фигуры, точки которой связаны таким же образом с заданной системой осей координат, будет удовлетворять требованиям полного изображения.

Однако если заданы координаты точки M' , например в виде отрезков $M'M'_{x'y'}$, $M'_{x'y'}M'_{x'}$, $M'_{x'}O'$, определяющих расстояния

* Предполагается, что в процессе проектирования плоскость проекций расположена вертикально (см. § 3).

точки M' от координатных плоскостей, то чертеж 117 может быть правильно построен только в том случае, если известны коэффициенты искажения указанных отрезков, что дает возможность определить проекции последних, т. е. отрезки MM_{xy} , $M_{xy}M_x$, M_xO для построения их на чертеже. Вместе с тем при задании коэффициентов искажения чертеж 117 дает возможность решить обратную задачу, т. е. определить натуральную величину отрезков MM_{xy} , $M_{xy}M_x$, M_xO , связывающих точку M с системой осей координат на изображении; следовательно, чертеж 117 представит собой метрически определенное изображение точки M' .

Таким образом, задание на чертеже 117 некоторой системы осей координат и численной величины p , q , r коэффициентов искажения отрезков, расположенных соответственно на осях координат $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ (или параллельно этим осям), является тем дополнительным условием, которое обеспечивает метрическую определенность изображения точки M .

Изображение системы осей координат, отвечающее указанному условию, называется *аксонометрической системой осей координат*. Равным образом чертеж, изображающий проекцию точки (или фигуры) вместе с проекцией системы осей координат, к которой эта точка (или фигура) отнесена в пространстве и для которой известны коэффициенты искажения по осям, называется *аксонометрической проекцией точки (или фигуры)*. Описанный координатный метод получения метрически определенных изображений называется *аксонометрией*.

Как было указано, величина коэффициентов искажения по осям и взаимное расположение аксонометрических осей на чертеже зависят от выбора направления проектирования и от расположения натуральных осей перед плоскостью проекций. Обусловленные этими факторами разнообразные аксонометрические системы осей координат подразделяются следующим образом.

По направлению проектирования различают *косоугольные и прямоугольные* аксонометрические проекции (см. § 1).

В зависимости от соотношения между коэффициентами искажения по осям аксонометрические проекции подразделяются на три вида: 1) проекции *триметрические* — все три коэффициента искажения по осям различны ($p \neq q \neq r$); 2) проекции *диметрические* — коэффициенты искажения по каким-нибудь двум осям одинаковы (например, $p = r \neq q$); проекции *изометрические* — все три коэффициента искажения равны между собой ($p = q = r$).

Из сказанного следует, что в тех случаях, когда при построении аксонометрической проекции какой-нибудь фигуры основной целью является наилучшая наглядность изображения, то для выполнения изображения предоставляется широкий выбор наиболее подходящей системы аксонометрических осей. Наряду с наглядностью изображения существенное значение имеет также простота его вы-

полнения и использования в практике. Поэтому в техническом (машиностроительном) черчении рекомендуются к применению* в качестве наиболее простых три частных вида системы аксонометрических осей. Описание этих систем изложено в следующих параграфах.

§ 16. Косоугольная аксонометрическая проекция

При надлежащем расположении прямоугольной системы натуральных осей координат относительно плоскости проекций при соответствующем выборе направления проектирования всегда можно получить наперед заданную на чертеже произвольную систему аксонометрических осей с произвольно выбранными коэффициентами искажения (p, q, r) по осям**. При произвольном выборе характеристических данных, определяющих аксонометрическую систему, мы получим в общем случае косоугольную триметрическую проекцию общего вида. Такую проекцию можно применять в педагогической работе, если иллюстрируемый учебный материал не имеет непосредственного отношения к техническому черчению. В качестве примеров косоугольной аксонометрической проекции общего вида в нашей книге можно указать изображения куба (черт. 13) и правильной треугольной призмы (черт. 19). Чертежи цилиндра и конуса (черт. 34 и 35), построенные по схемам, представленным на чертежах 38 и 39, и чертеж куба (черт. 22, *з*) являются примерами косоугольной диметрической проекции.

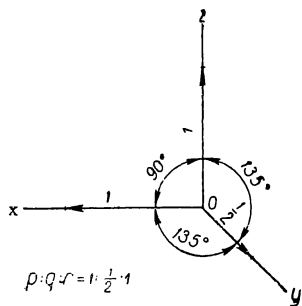
Один из частных видов косоугольной аксонометрической проекции, так называемая фронтальная диметрическая проекция, принят в техническом черчении и в школьной учебной работе на уроках черчения. Аксонометрическая проекция называется фронтальной, если одна из координатных плоскостей натурального трехгранника (обычно плоскость $x'O'z'$) параллельна плоскости проекций (последняя предполагается расположенной фронтально). Тогда натуральные масштабы, нанесенные на осях, принадлежащих фронтальной грани ($O'x'$ и $O'z'$), проектируются без искажения ($p = r = 1$), и аксонометрические оси (Ox и Oz), соответствующие указанным натуральным осям, образуют на чертеже прямой угол. В зависимости выбора направления проектирования третья аксонометрическая ось (Oy) может образовать с двумя другими (Ox и Oz) любые углы, а коэффициент искажения по этой оси может принимать любые значения. В техническом черчении с целью наибольшей простоты выполнения чертежей принята система аксонометрических осей, в которой ось Oy составляет равные углы (135°) с перпендикулярными между собой осями Ox и Oz ; коэффициент искажения по

* ГОСТ 3453 — 59.

** Изложенное положение доказывается в более общей форме в курсе начертательной геометрии. (См. Н. А. Г л а г о л е в, Начертательная геометрия, гл. III, § 1; Е. А. Г л а з у н о в и Н. Ф. Ч е т в е р у х и н, Аксонометрия, гл. I, § 8.)

оси Oy берется равным $\frac{1}{2}$. Описанный частный случай косоугольной фронтальной проекции известен под названием *кабинетной* проекции (черт. 119).

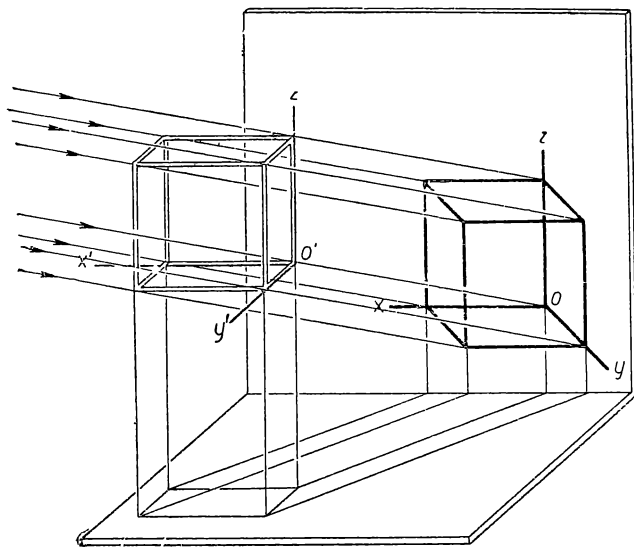
На чертеже 120 представлены в наглядном виде условия проектирования, при которых получается косоугольная фронтальная проекция куба (изображена проволочная модель куба), отнесенного к координатной системе осей $O'x'y'z'$.



Черт. 119

Необходимо отметить, что кабинетная проекция, как и вообще всякая косоугольная проекция, может быть удовлетворительно использована только для изображения плоскогранных тел. Проекции тел, имеющих в своих очертаниях окружности, обычно не удовлетворяют требованиям наглядности, так как изображение не соответствует привычному зрительному образу изображенного тела.

В этом легко убедиться, сравнивая между собой, например, чертежи 34 и 40, на первом из которых прямой круговой цилиндр изображен в прямоугольной проекции, а на втором такой же цилиндр представлен в косоугольной фронтальной проекции. Причина неудовлетворительной наглядности второго чертежа («перекошены»



Черт. 120

ражен в прямоугольной проекции, а на втором такой же цилиндр представлен в косоугольной фронтальной проекции. Причина неудовлетворительной наглядности второго чертежа («перекошены»

основания цилиндра) заключается в несоответствии способа косоугольного проектирования фактическому получению проекции на сетчатке нашего глаза при непосредственном рассматривании цилиндра, так как в последнем случае мы располагаем предмет перед глазами. Такое положение близко соответствует прямоугольному проектированию. Заметим, однако, что кабинетная проекция цилиндра получается наглядной, если основание цилиндра расположено фронтально.

Фронтальную косоугольную (кабинетную) проекцию рекомендуется применять, если на изображении целесообразно сохранить неискаженными очертания, расположенные в какой-либо плоскости (или в параллельных плоскостях) предмета; эта плоскость принимается параллельной плоскости $x'O'z'$.

§ 17. Прямоугольная аксонометрическая проекция. Свойство аксонометрических осей

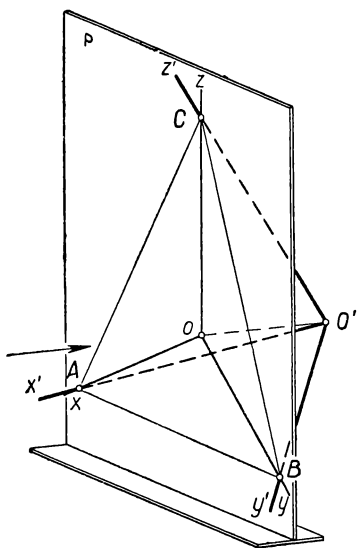
Как было отмечено, изображения, построенные в прямоугольной аксонометрической проекции, отличаются лучшей наглядностью по сравнению с проекцией косоугольной. Эта особенность прямоугольных аксонометрических проекций обуславливает преимущественное применение их в техническом черчении.

Рассмотрим основные свойства прямоугольных аксонометрических проекций и применение этих свойств в практике.

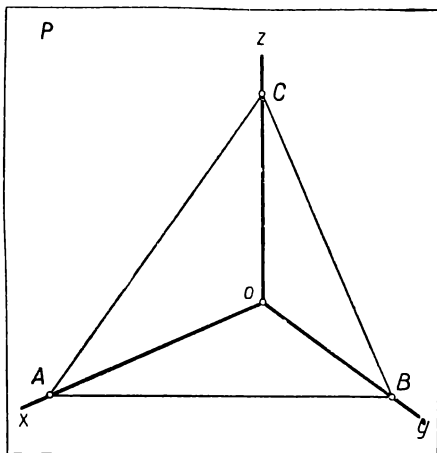
Расположим произвольно по отношению к плоскости проекций P натуральную систему осей координат $O'x'y'z'$ и спроектируем ее перпендикулярно (в направлении OO') на плоскость P ; тогда на плоскости P мы получим аксонометрические оси Ox , Oy и Oz (черт. 121). Вместе с тем координатные плоскости натурального трехгранника осей дадут в пересечении с плоскостью P следы AB , BC и CA , образующие некоторый треугольник с вершинами на аксонометрических осях. Треугольник ABC называется *треугольником следов*. На чертеже 122 плоскость проекций P с вычерченными на ней аксонометрическими осями и треугольником следов совмещена с плоскостью чертежа, на котором она изображена (в этом случае изображения натуральных осей сливаются с соответствующими им аксонометрическими осями). Заметим, что прямые, образующие треугольник следов, принадлежат одновременно как плоскости проекций, так и координатным плоскостям натурального трехгранника. Если мы передвинем вершину координатного трехгранника $O'x'y'z'$ вдоль проектирующего луча OO' при параллельном перемещении осей, то аксонометрические оси Ox , Oy , Oz не изменят своего положения на плоскости проекций P , но треугольник следов увеличится или уменьшится в своих размерах, оставаясь подобным прежнему.

Обратимся к чертежу 123, изображающему ту же фигуру, что и чертеж 121, и проведем через ось $O'z'$ и через прямую $O'O$ плоскость $CO'C_1$. Эта плоскость по построению перпендикулярна к ко-

ординатной плоскости $AO'B$ и к плоскости проекций P , так как проходит через ось $O'z'$, перпендикулярную к плоскости $AO'B$, и через отрезок $O'O$, перпендикулярный к плоскости P . Отсюда следует, что линия AB пересечения плоскости P с плоскостью $AO'B$ перпендикулярна к плоскости $CO'C_1$; поэтому $CC_1 \perp AB$ или, что то же, $Oz \perp AB$. По аналогии можно убедиться, что $Ox \perp BC$ и $Oy \perp AC$, т. е. каждая из аксонометрических осей перпендикулярна к одной из сторон треугольника следов*.



Черт. 121



Черт. 122

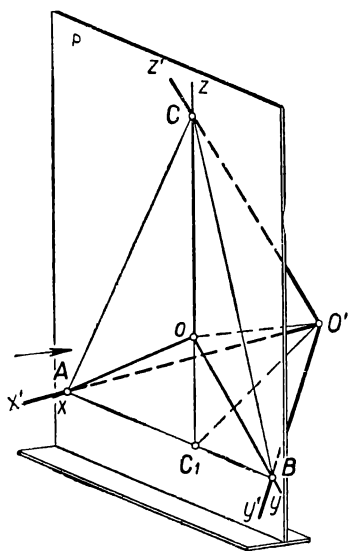
Установленная зависимость во взаимном расположении аксонометрических осей и сторон треугольника следов показывает, что каждому заданному на чертеже треугольнику следов соответствует определенная система аксонометрических осей, единственным образом расположенных между собой и при единственно возможном расположении натурального трехгранника относительно плоскости проекций. Наряду с этим для каждой заданной на чертеже системы аксонометрических осей форма треугольника следов определяется лишь с точностью до подобия; размеры подобных треугольников, соответствующих заданной системе аксонометрических осей, обуславливаются расстоянием вершины натурального трехгранника от плоскости проекций.

* Часто это свойство формулируется так: в прямоугольной проекции аксонометрические оси являются высотами треугольника следов.

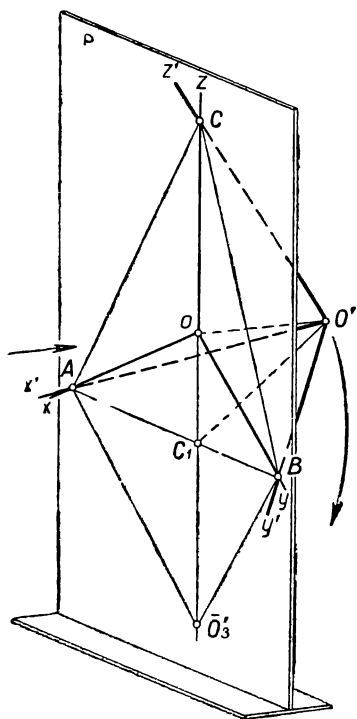
Построение аксонометрических осей по заданному треугольнику следов и обратная задача легко выполняются на чертеже при помощи угольника и линейки.

§ 18. Построение аксонометрических масштабов в прямоугольной проекции

Из предыдущего изложения следует, что три заданные на чертеже прямые Ox , Oy , Oz могут быть использованы как аксонометрические оси прямоугольной проекции только в том случае, если



Черт. 123

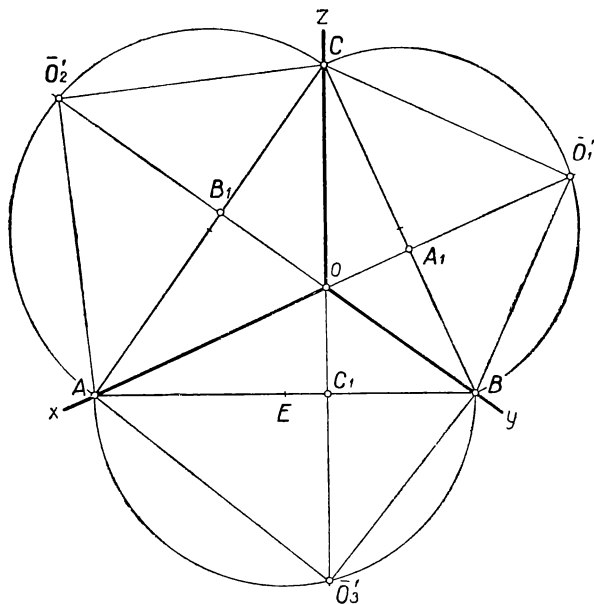


Черт. 124

для них известны аксонометрические масштабы или коэффициенты искажения по осям. Рассмотренная нами связь между аксонометрическими осями, сторонами треугольника следов и расположением натуральных осей относительно плоскости проекций позволяет выявить на чертеже посредством некоторых построений натуральные размеры отрезков координатных осей, опирающихся на плоскость проекций, и использовать их для получения искомых величин, характеризующих заданную аксонометрическую систему.

С этой целью обратимся к чертежу 124, где представлен процесс проектирования координатного трехгранника $O'x'y'z'$ и выполним следующие преобразования.

Повернем координатную плоскость $AO'B$ натурального трехгранника вокруг прямой AB до совмещения с плоскостью P . Точка O' опишет дугу окружности и упадет на плоскость P в некоторую точку \bar{O}'_3 . По построению $O'C_1 \perp AB$, следовательно, $O'C_1$ являет-



Черт. 125

ся радиусом вращения, а точка C_1 — центром вращения точки O' .

После совмещения с плоскостью P будем иметь $\bar{O}'_3 C_1 \perp AB$; это значит,

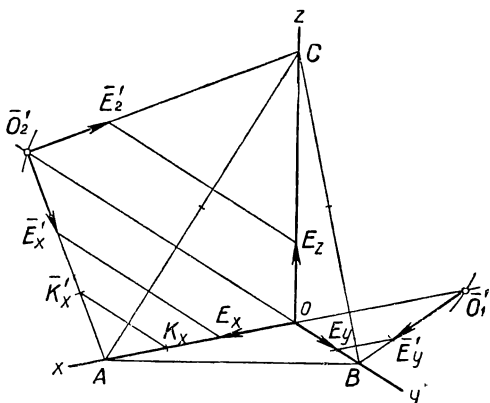
что точка \bar{O}'_3 лежит на продолжении прямой CC_1 (так как $CC_1 \perp AB$, см. черт. 123). Заметим, что координатный угол $AO'B$ прямой, поэтому точка \bar{O}'_3 должна расположиться на дуге полуокружности,

опирающейся на диаметр AB . Таким образом, точка \bar{O}'_3 определяется на плоскости P как точка пересечения указанной полуокружности с продолжением аксонометрической оси Oz . Соединив

точку \bar{O}'_3 с точками A и B , получим $\bar{O}'_3 A = O'A$ и $O'_3 B = O'B$. Таким образом, полученная на плоскости P фигура $A\bar{O}'_3 B$ представляет совмещенную с плоскостью P часть координатной плоскости $AO'B$ натурального трехгранника $O'x'y'z'$.

Результаты этого построения весьма просто получаются на чертеже 125, на котором произвольно задана система аксонометрических осей $Oxyz$. Построим соответствующий этой системе треугольник следов ($AB \perp Oz$, $BC \perp Ox$, $CA \perp Oy$); продолжим Oz и из середины E отрезка AB дугой радиуса EA отметим на прямой Oz положение точки \bar{O}'_3 ; соединив точку \bar{O}'_3 с точками A и B , получим искомые отрезки $\bar{O}'_3A = O'A$ и $\bar{O}'_3B = O'B$.

Описанный способ совмещения может быть применен к каждой из координатных плоскостей натурального трехгранника. Результаты такого преобразования отображены на чертеже 125. Рассмотренный способ графического определения натуральных размеров элементов проектируемого координатного трехгранника по заданной системе аксонометрических осей называется *реконструкцией координатного трехгранника*.

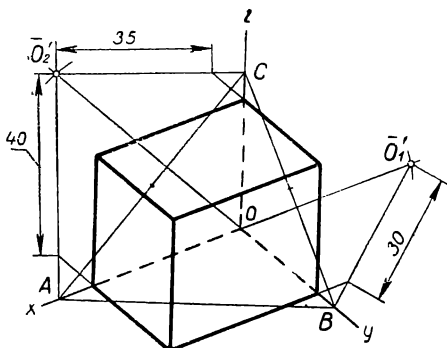


Черт. 126

Обратим внимание, что на чертеже 125 каждая натуральная ось координат воспроизводится два раза: $\bar{O}'_3A = \bar{O}'_2A$, $\bar{O}'_3B = \bar{O}'_1B$, $\bar{O}'_1C = \bar{O}'_2C$; это обстоятельство позволяет при определении искомым элементов натурального трехгранника ограничиваться реконструкцией только двух координатных плоскостей, например плоскости $AO'C$ и плоскости $BO'C$.

Обратимся теперь к задаче построения аксонометрических масштабов. Пусть на чертеже 126 задана некоторая система аксонометрических осей и выбрана натуральная единица масштаба. Построим на заданных осях треугольник следов и выполним реконструкцию двух граней ($AO'C$ и $BO'C$) натурального трехгранника. После этого отложим на совмещенных натуральных осях (\bar{O}'_2A , \bar{O}'_1B ,

\bar{O}'_2C) от точек совмещенного начала координат (\bar{O}'_1, \bar{O}'_2) отрезки $\bar{O}'_2\bar{E}'_x = \bar{O}'_1\bar{E}'_y = \bar{O}'_2\bar{E}'_z$, равные натуральной единице масштаба $O'E'$. По свойству параллельных проекций (см. § 2) отношение натуральных отрезков $O'E'$: $O'A$ равно отношению проекций этих отрезков OE_x : OA ; следовательно, на чертеже 126 отрезок OE_x может быть построен на оси Ox при помощи прямой \bar{E}'_xE_x , проведенной параллельно \bar{O}'_2O . На том же основании мы получим на осях Oy и Oz отрезки OE_y и OE_z , проведя прямые \bar{E}'_yE_y и \bar{E}'_zE_z соответственно параллельно \bar{O}'_1O и \bar{O}'_2O . Отрезки OE_x , OE_y , OE_z представят аксонометрические единицы масштаба по осям заданной аксонометрической системы. Из сказанного ясно, что описанным



Черт. 127

способом можно получить аксонометрическую проекцию любого отрезка $O'K'$, расположенного вдоль какой-нибудь из натуральных осей координат (или параллельно ей), если задана натуральная длина этого отрезка (черт. 126).

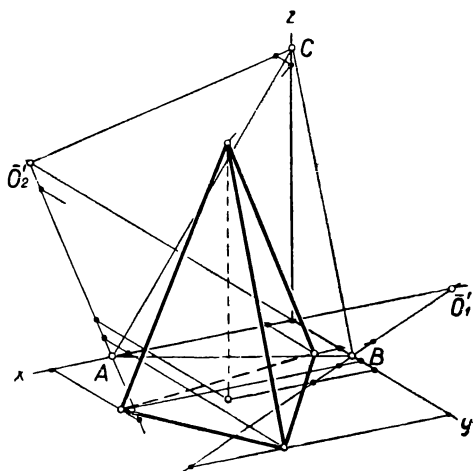
Заметим, что в этом случае фигура \bar{O}'_2AO (равно как \bar{O}'_1BO и \bar{O}'_2CO) представит своего рода угловой пропорциональный масштаб, примененный для графического определения отрезка OK_x , пропорционального отрезку $\bar{O}'_2\bar{K}'_x$ при заданном коэффициенте пропорциональности $\frac{OA}{\bar{O}'_2A}$.

Описанный способ может быть использован для построения аксонометрического изображения любой точки пространства по заданным ее координатам и любой пространственной фигуры по координатам ее точек.

Пример 1. Построение в произвольной прямоугольной аксонометрической проекции изображения прямоугольного параллелепипеда. Грани параллелепипеда расположены параллельно координатным плоскостям; ребра равны 40 мм, 30 мм, 35 мм.

Зададим на чертеже произвольную систему аксонометрических осей, построим треугольник следов и выполним реконструкцию двух координатных плоскостей натурального трехгранника (черт. 127). После этого отложим на совмещенных осях \bar{O}'_2A , \bar{O}'_1B , \bar{O}'_2C отрезки, соответственно равные ребрам параллелепипеда (40 мм, 30 мм, 35 мм) и построим их проекции на осях Ox , Oy , Oz . На полученных отрезках построим требуемое изображение параллелепипеда.

Пример 2. Построение в произвольной прямоугольной аксонометрической проекции изображения пирамиды. Даны координаты

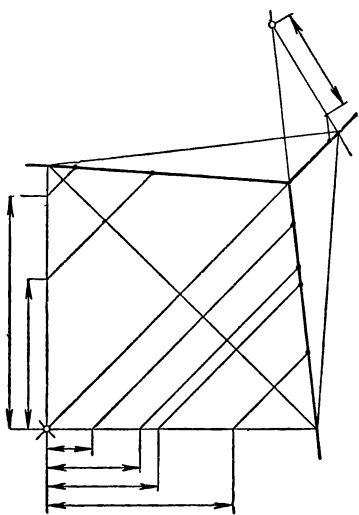


Черт. 128

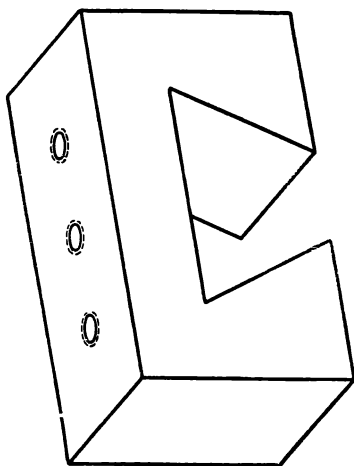
вершин пирамиды (6; 22; 0); (45; 76; 0); (66; 32; 0); (40; 40; 64). Единица масштаба равна 1 мм.

Для построения каждой вершины основания пирамиды отложим на совмещенных осях \bar{O}'_2A и \bar{O}'_1B в натуральном масштабе координатные отрезки, определяющие положение каждой вершины основания пирамиды (черт. 128). Затем найдем проекции этих отрезков на аксонометрических осях Ox и Oy , после чего на основе координатного метода определим искомые аксонометрические проекции вершин и вычертим основание пирамиды. Для построения аксонометрической проекции вершины пирамиды используем в такой же последовательности три заданных координатных отрезка, определяющих эту вершину, после чего вычертим боковые ребра пирамиды (черт. 128).

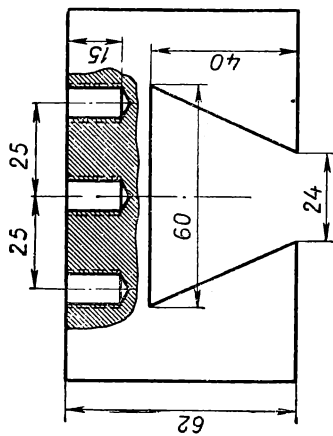
Пример 3. Построение в произвольной прямоугольной аксонометрической проекции изображения технической детали, заданной на чертеже 129 в системе двух проекций.



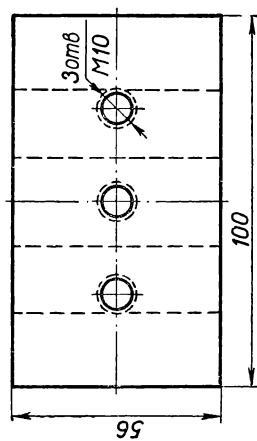
Черт. 130



Черт. 131



Черт. 129



Черт. 129

Проанализировав по чертежу форму детали, выберем надлежащее расположение натуральных плоскостей координат относительно граней детали и проведем на заданном чертеже проекции натуральных осей координат.

Зададим аксонометрические оси и выполним построения, необходимые для получения графической схемы пропорциональных масштабов (черт. 130).

Вычертив вновь отдельно от полученной схемы заданные на чертеже 130 аксонометрические оси, построим на них в прямоугольной аксонометрической проекции наглядное изображение детали (черт. 131), представленной на чертеже 129.

§ 19. Определение коэффициентов искажения по осям

Задачи на построение аксонометрического изображения, предложенные в примерах предыдущего параграфа, мы решали, не применяя коэффициентов искажения по осям и не зная их числового значения. Однако мы могли бы определить коэффициенты искажения для каждой системы аксонометрических осей, заданной на чертежах 124, 125, 127, 130, пользуясь для этого построенными графическими схемами. В самом деле, в каждом из указанных чертежей отрезки OA , OB , OC являются проекциями натуральных отрезков $O'A$, $O'B$, $O'C$; размеры натуральных отрезков представлены на указанных чертежах отрезками \bar{O}'_2A , \bar{O}'_1B , \bar{O}'_2C . Коэффициенты искажения (см. § 2) по осям Ox , Oy , Oz можно выразить отношениями $p = \frac{OA}{O'A}$, $q = \frac{OB}{O'B}$, $r = \frac{OC}{O'C}$ или, заменяя знаменатели: $p = \frac{OA}{\bar{O}'_2A}$, $q = \frac{OB}{\bar{O}'_1B}$, $r = \frac{OC}{\bar{O}'_2C}$.

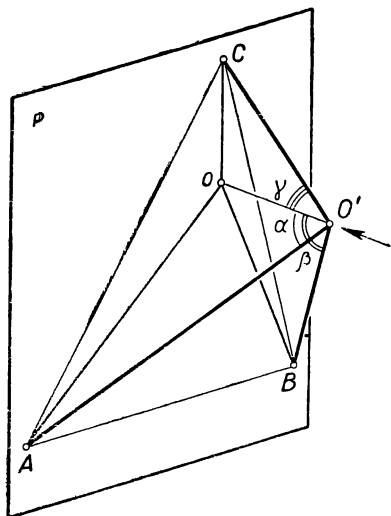
Измерив по чертежу (в миллиметрах) длину отрезков, входящих в написанные равенства, и найдя попарно их отношения, мы получим численные значения коэффициентов искажения p , q , r для каждой аксонометрической системы, примененной при решении примеров предыдущего параграфа.

Зная числовое значение u длины некоторого натурального отрезка, расположенного вдоль одной из осей (или параллельно ей), и пользуясь коэффициентами искажения p , q , r , мы можем определить длину аксонометрической проекции этого отрезка по одному из равенств (в соответствии с направлением отрезка): $u_x = u \cdot p$, $u_y = u \cdot q$, $u_z = u \cdot r$.

Очевидно, что в случае применения коэффициентов искажения по осям необходимость в использовании пропорциональных масштабов отпадает. Следует, однако, отметить, что пользование коэффициентами искажения при произвольно заданной системе аксонометрических осей не имеет каких-либо преимуществ со стороны упрощения и точности построения изображений по сравнению со способом пропорциональных масштабов.

Из практических соображений целесообразно пользоваться системами аксонометрических осей с наиболее простыми отношениями коэффициентов искажения, например: $p : q : r = 1 : 1 : 1$; $p : q : r = 1 : \frac{1}{2} : 1$ и т. п. Числовые значения коэффициентов p, q, r , удовлетворяющих указанным требованиям в прямоугольной аксонометрической проекции, определяются на основании общего соотношения, связывающего эти показатели.

Для установления указанной зависимости обратимся к чертежу 132, изображающему проектирующий аппарат аксонометрической проекции, в котором отмечены углы α, β, γ , образованные проектирующим лучом $O'O$ с осями натурального трехгранника.



Черт. 132

Из чертежа следует, что коэффициенты искажения p, q, r по осям могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} p &= \frac{OA}{O'A} = \sin \alpha, \\ q &= \frac{OB}{O'B} = \sin \beta, \\ r &= \frac{OC}{O'C} = \sin \gamma. \end{aligned} \quad (1)$$

Возведем в квадрат левые и правые части написанных равенств и сложим:

$$p^2 + q^2 + r^2 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma.$$

Преобразуем правую часть этого равенства по формулам тригонометрии:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= 1 - \cos^2 \alpha + 1 - \cos^2 \beta + 1 - \cos^2 \gamma = \\ &= 3 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma). \end{aligned} \quad (2)$$

Из аналитической геометрии известно, что в прямоугольном координатном трехграннике $O'x'y'z'$ между углами α , β , γ наклона некоторой прямой $O'O$ к осям существует следующая зависимость:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1, \quad (3)$$

поэтому на основании равенства (3) можно преобразовать равенство (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} p^2 + q^2 + r^2 &= 3 - (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) = 3 - 1, \text{ или} \\ p^2 + q^2 + r^2 &= 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Равенства (1) показывают, что ни один из коэффициентов искажения p , q , r по числовому значению не может быть больше единицы. Практически для построения наглядного изображения числовые значения коэффициентов искажения всегда должны быть меньше единицы и не равны нулю.

Вместе с тем из равенства (4) следует, что в указанных пределах лишь два коэффициента могут быть выбраны произвольно; третий коэффициент определяется вычислением.

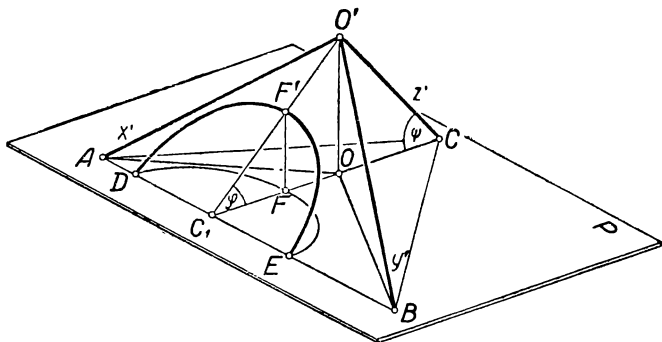
Примеры построения системы аксонометрических осей по заданным коэффициентам искажения и аксонометрических изображений пространственных фигур будут рассмотрены в дальнейшем изложении.

§ 20. Прямоугольная аксонометрическая проекция окружности

Предметы обихода и детали технических изделий часто содержат в своей форме очертание окружности, поэтому построение изображения окружности представляет одну из часто встречающихся задач технического черчения. Напомним, что в прямоугольной проекции большая ось эллипса, изображающего окружность, равна диаметру проектируемой окружности и направлена параллельно линии пересечения плоскости проектируемой окружности с плоскостью проекций (т. е. с плоскостью, в которой начерчен эллипс); величина малой оси эллипса зависит от угла взаимного наклона двух указанных плоскостей (см. § 5).

Применяя указанные положения к изображению окружности в прямоугольной аксонометрической проекции, мы рассмотрим случай, когда изображаемая окружность расположена в одной из координатных плоскостей натурального трехгранника. Обратимся к чертежу 133, где из соображений наглядности знакомый нам

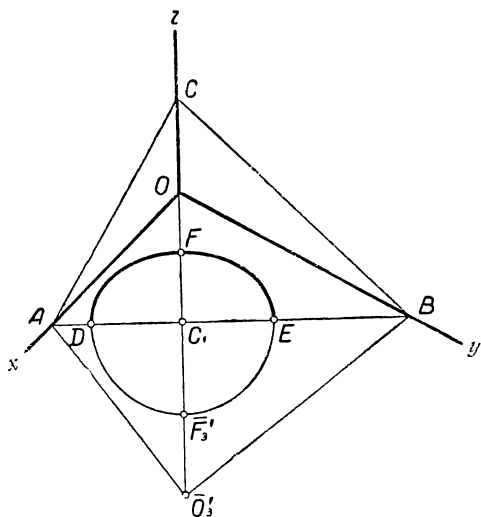
проектирующий аппарат аксонометрической проекции представлен так, что плоскость проекций P расположена горизонтально, а натуральные оси координат $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ помещены над пло-



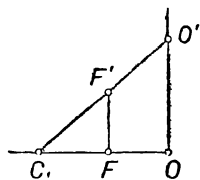
Черт. 133

скостью проекций. В плоскости $x'O'y'$ расположена дуга полуокружности $DF'E$, подлежащей проектированию, причем для простоты построений центр окружности взят на стороне AB треугольника следов в точке C_1 пересечения стороны AB с продолженной аксонометрической осью Oz . Дуга DFE изображает проекцию данной полуокружности и, следовательно, представляет дугу эллип-

са. Заметим, что по построению а) DE является большой осью эллипса DFE ; б) прямые OC_1 и $O'C_1$ перпендикулярны к AB , вследствие чего отрезок C_1F представляет половину малой оси этого эллипса; в) отрезок C_1F может быть найден из подобных между собой треугольников C_1OO' и C_1FF' как четвертая пропорциональная величина к отрезкам C_1F' , C_1O и C_1O' .



Черт. 134



Черт. 135

са. Заметим, что по построению а) DE является большой осью эллипса DFE ; б) прямые OC_1 и $O'C_1$ перпендикулярны к AB , вследствие чего отрезок C_1F представляет половину малой оси этого эллипса; в) отрезок C_1F может быть найден из подобных между собой треугольников C_1OO' и C_1FF' как четвертая пропорциональная величина к отрезкам C_1F' , C_1O и C_1O' .

Задав произвольно систему аксонометрических осей *Охуз* (черт. 134), выполним реконструкцию грани *АО'В*. Пользуясь данными чертежа, построим отдельно в натуральную величину подобные прямоугольные треугольники C_1OO' и C_1FF' (черт. 135). Для этого построим прямой угол *O*, отложим на одной его стороне катет, равный OC_1 , и отметим вершину O' с помощью отрезка $C_1\bar{O}'_3 = C_1O'$; после этого отложим на гипотенузе C_1O' отрезок $C_1F' = R$, где R — радиус проектируемой окружности, и, проведя $F'F \parallel O'O$, отметим точку F ; тогда отрезок C_1F' представит искомую величину малой полуоси эллипса, изображающего заданную окружность.

Из построения видно, что найденная величина малой оси эллипса останется неизменной, если проектируемая окружность заданного радиуса R будет перенесена в любое другое место плоскости $x'O'y'$ или в плоскость, ей параллельную. Аналогичный прием графического построения малой оси эллипса применим и в случае расположения окружности в каждой из двух других координатных плоскостей или параллельно им. В каждом из этих случаев большая ось искомого эллипса должна быть параллельна стороне треугольника следов, принадлежащей плоскости изображаемой окружности.

Выполненные на двух чертежах 134 и 135 построения, определяющие отрезок C_1F , можно объединить на одном чертеже 136, отложив на прямой $C_1\bar{O}'_3$ отрезок $C_1\bar{F}'_3 = R$ и проведя $\bar{F}'_3K \parallel O'_3A$, $KF \parallel AO$. Из построения видно, что полученный таким образом отрезок C_1F является четвертым пропорциональным к отрезкам C_1O , $C_1\bar{O}'_3$ и $C_1\bar{F}'_3$, т. е. фактически представляет ту же длину малой полуоси эллипса, что и отрезок C_1F на чертеже 135.

Определив, таким образом, величину осей и их положение на чертеже, мы можем вычертить эллипс, представляющий аксонометрическую проекцию заданной окружности. Наряду с ранее описанными способами построения эллипса (§ 5, черт. 26, 27 и 30) можно использовать для этой цели чертеж 136, позволяющий найти восемь точек, принадлежащих эллипсу. Четыре из этих точек являются концами осей эллипса и четыре другие точки представляют концы двух сопряженных диаметров, параллельных аксонометрическим осям; длина осей и диаметров определяется при помощи пропорциональных масштабов чертежа 136.

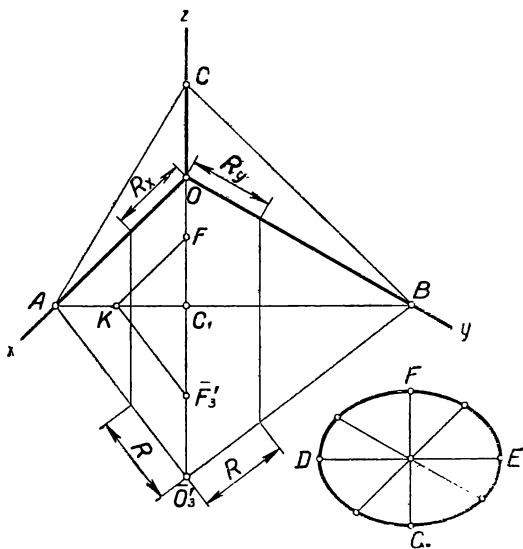
Если для построения аксонометрической проекции заданы коэффициенты искажения по осям (p, q, r), то малая ось эллипса, изображающего окружность, расположенную в одной из координатных плоскостей, может быть вычислена через посредство этих коэффициентов. Пусть проектируемая окружность лежит в плоскости $x'O'y'$ или в плоскости, ей параллельной (черт. 133). Обозначим через k_{xy} показатель искажения радиуса C_1F' , проектирующегося в малую полуось эллипса; из чертежа видно, что $k_{xy} = \frac{C_1F}{C_1F'} = \cos \varphi$.

Из того же чертежа можно выразить коэффициент искажения по

оси Oz равенством $r = \frac{OC}{O'C} = \cos \psi$. Так как $\varphi = (90^\circ - \psi)$, то

$\cos \varphi = \sin \psi = \sqrt{1 - \cos^2 \psi}$; отсюда следует, что $k_{xy} = \sqrt{1 - r^2}$.

По аналогии мы можем составить формулы для вычисления коэффициентов искажения радиуса, проецирующегося в малую полуось эллипса, для окружностей, расположенных в координатных плоскостях $y'O'z'$ и $z'O'x'$; получим соответственно: $k_{yz} = \sqrt{1 - p^2}$ и $k_{zx} = \sqrt{1 - q^2}$.

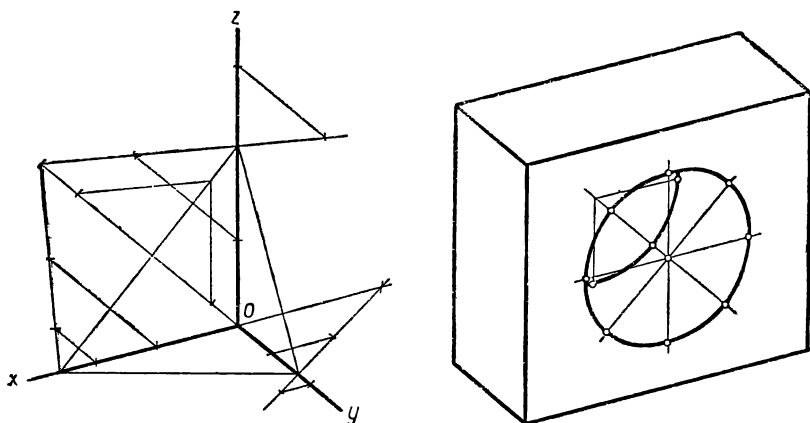


Черт. 136

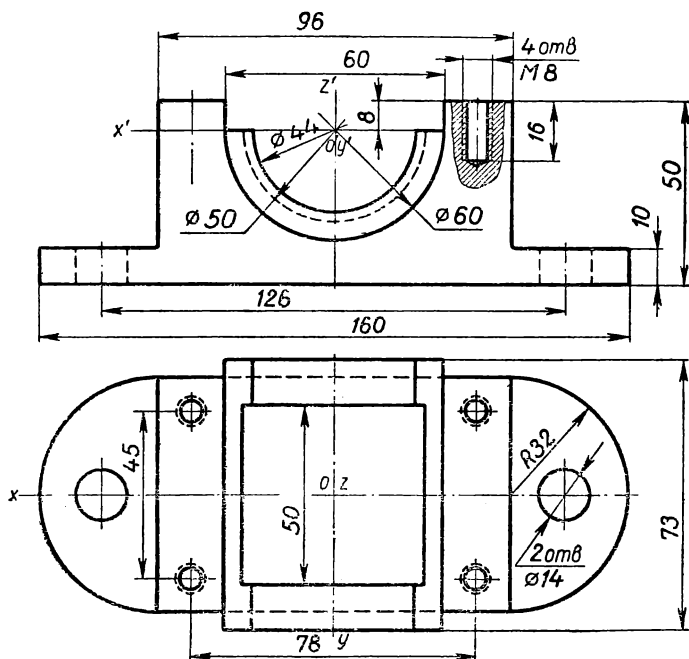
Пример 1. Построение в произвольной прямоугольной аксонометрической проекции прямоугольной плиты ($70 \times 30 \times 60$ мм³), имеющей цилиндрическое отверстие, проходящее сквозь наибольшие грани плиты. Ось отверстия совпадает с осью симметрии плиты; диаметр отверстия равен 40 мм (черт. 137).

После построения проекций прямолинейных контуров плиты (см. § 18, пример 1, черт. 124) задача приводится к построению двух эллипсов, служащих изображением окружностей, ограничивающих цилиндрическое отверстие на двух противоположных гранях плиты. Пусть эти грани параллельны плоскости $x'O'z'$ (черт. 137). Определив соответственно условию положение центров искоемых эллипсов, мы проведем через каждый из этих центров четыре прямые, определяющие направление большой и малой осей эллипса и направление двух сопряженных диаметров, параллельных аксонометрическим осям Ox и Oz (см. § 20, черт. 136). Пользуясь схемой пропорциональных масштабов, нанесем на проведенных прямых

размеры осей эллипса и указанных диаметров и вычертим дуги эллипсов.



Черт. 137



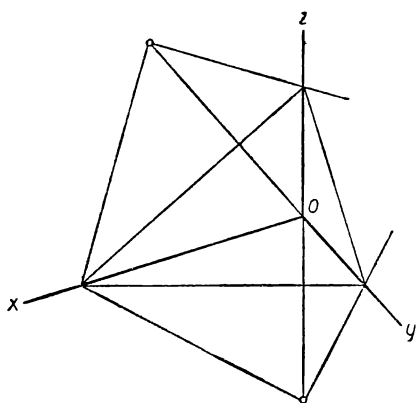
Черт. 138

Пример 2. Построение наглядного изображения технической детали, представленной на чертеже в системе двух проекций (черт 138).

Построение выполняется в соответствии с указаниями, данными в § 18 (пример 4, черт. 129—131) и в § 20 (пример 1, черт. 137).

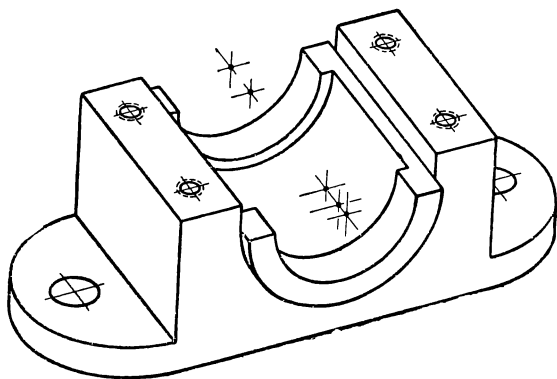
Практически удобно начинать построение с изображения окружностей. Выясняем по чертежу 138 число окружностей (или дуг

окружности), имеющих в очертаниях детали, их расположение относительно координатных плоскостей и положение центров окружностей. Определяем по чертежу координаты центра каждой окружности и строим на чертеже 140 в выбранной аксонометрической системе центры эллипсов, изображающих заданные окружности, пользуясь вычерченной предварительно схемой пропорциональных масштабов (черт. 139).



Черт. 139

После этого проводим на изображении через нанесенные центры эллипсов прямые в направлении большой и малой осей эллипса и в направлении сопряженных диаметров, параллельных главным



Черт. 140

направлениям плоскости каждой из изображаемых окружностей; целесообразно каждую группу параллельных между собой прямых (из числа указанных) проводить одновременно. Затем откладываем на проведенных прямых длину большой и малой осей и длину сопряженных диаметров каждого эллипса в соответствии с найденными по чертежу 139 значению этих отрезков. Далее вычерчи-

ваем по найденным точкам каждый из искомых эллипсов (или необходимую часть дуги эллипса), после чего завершаем построение очертаний заданной детали.

В дальнейшем изложении (§ 22) будут рассмотрены на примерах некоторые упрощения в способах построения аксонометрического изображения по заданному чертежу предмета.

§ 21. Выбор проектирующего аппарата в прямоугольной аксонометрической проекции

При ознакомлении с формой предмета путем непосредственного рассматривания самого предмета осмотр сопровождается поворачиванием предмета перед глазами или обходом его со всех сторон. В результате таких действий мы получаем всестороннее представление о форме и размерах предмета. В противоположность этому, при рассматривании изображения предмета суждение о форме предмета может складываться лишь на основании единственного зрительного образа, создаваемого через посредство изображения. В этом случае правильное представление формы предмета в значительной мере зависит от того, насколько его изображение удовлетворяет требованиям наглядности.

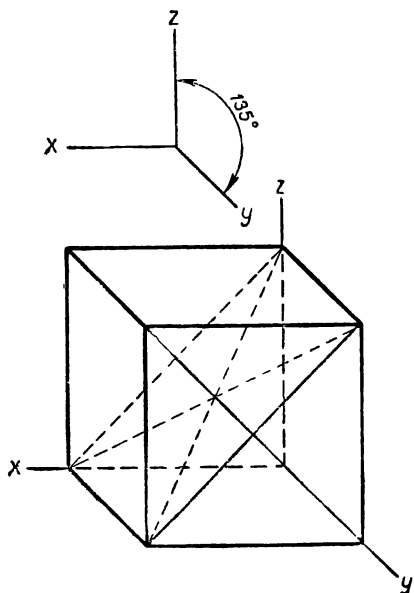
В § 4 было показано, что основными факторами, обуславливающими наглядность изображения, являются взаимное положение предмета и направление проектирующих лучей по отношению к плоскости проекций. Эффективность наглядного изображения, как учебного пособия, существенным образом зависит от умелого использования указанных факторов. Изображение выигрывает в наглядности, если на нем представлено для обозрения возможное наибольшее число деталей формы фигуры. Вместе с тем знакомая по форме фигура легче может быть узнана на изображении, если она представлена в привычном для глаза положении в пространстве. Принятые в техническом черчении виды аксонометрических проекций (см. § 16 и 22) не всегда обеспечивают желательную наглядность изображения. Так, например, в кабинетной проекции нельзя с должной отчетливостью изобразить в кубе все его диагонали и диагонали его фронтальных граней, если куб простейшим образом ориентирован относительно координатного трехгранника (черт. 141). Столь же неудачным является изображение в прямоугольной изометрии правильной четырехугольной пирамиды (черт. 142) и т. п.

Нетрудно усмотреть, что недостатки, подобные отмеченным в чертежах 141 и 142, имеются в том случае, если две или несколько прямых, определяющих очертания фигуры, располагаются в одной проектирующей плоскости и потому представляются на изображении слившимися в одну прямую. Устранить недостатки указанных чертежей можно различными способами:

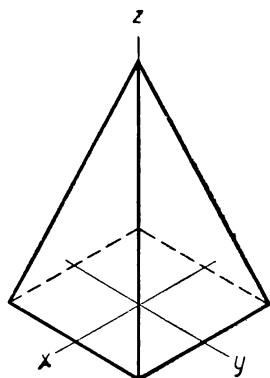
а) Можно изменить направление проектирующих лучей по отношению к плоскости проекций (черт. 143);

однако такой способ не всегда является целесообразным, так как, например, в случае чертежа 142 означает отказ от прямоугольной проекции, преимущества которой ранее отмечались.

б) Можно изменить положение изображаемой фигуры по отношению к координатному трехграннику (черт. 144). Такой прием не всегда может быть рекомендован; он неудобен в случае симметричной фигуры, симметрию которой обычно используют для простейшего расположения фигуры относи-



Черт. 141



Черт. 142

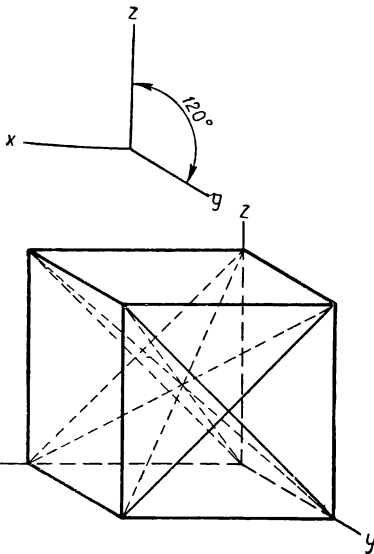
тельно координатных плоскостей; нарушение такого расположения усложняет построение изображения.

в) Можно заменить один общепринятый вид аксонометрической проекции другим из этих видов. Этот прием весьма прост и часто приводит к желаемому улучшению наглядности изображения, как это видно, например, из сравнения чертежа 142 с чертежом 145, построенным в прямоугольной диметрии.

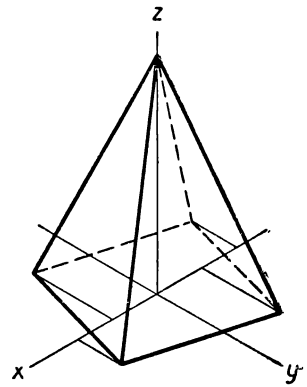
г) Можно наконец в случае прямоугольного проектирования изменить положение плоскости проекций по отношению к координатному трехграннику и отнесенной к нему фигуре, сохранив при этом неизменным перпендикулярное направление проектирующих лучей к плоскости проекций. Такой способ по существу означает переход от общепринятого вида к произвольно выбранному виду прямоугольной аксонометрической проекции (см. § 22). Решающую роль в выборе нового положения плоскости проекций играет направление, которое получают при этом проектирующие лучи относительно

изображаемого предмета; это направление должно наилучшим образом способствовать наглядности получаемого изображения. Такой способ приходится применять, если прием, указанный в п. в, окажется безуспешным. Изложим сущность этого способа.

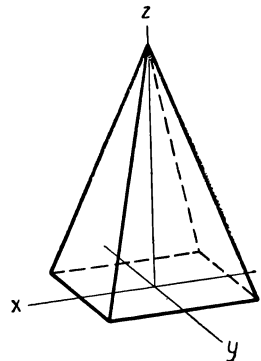
Рассмотрим в пространстве трехгранный координатный угол $O'x'y'z'$ (черт. 146) с расположенной в нем плоскостью проекций, ограниченной треугольником следов ABC . Прямую OO' , изображающую проектирующий луч, проходящий через



Черт. 143



Черт. 144

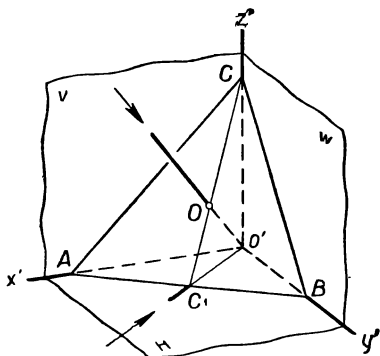


Черт. 145

начало координат O' , будем считать перпендикулярной к плоскости проекций и пересекающей ее в точке O . Построим проекцию на плоскость $x'O'y'$ луча OO' при помощи плоскости, проходящей через этот луч; эта плоскость пройдет через ось $O'z'$ и пересечет плоскость проекций по прямой CO , встречающей сторону AB в точке C_1 ; следовательно, проекцией луча OO' на плоскость $x'O'y'$ является прямая C_1O' . Ссылаясь на чертеж 120, отметим, что $C_1O' \perp AB$.

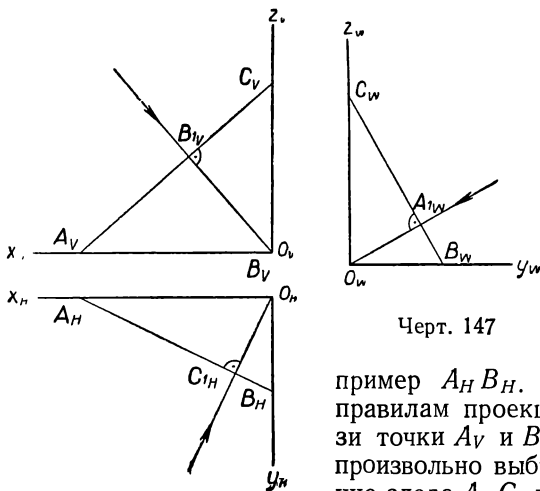
Выполнив такие же построения для получения проекций луча OO' на плоскости $y'O'z'$ и $z'O'x'$, мы установим, что в случае

прямоугольной аксонометрии *прямоугольные проекции проектирующего луча на координатные плоскости натурального трехгранника перпендикулярны к соответствующим сторонам треугольника следов.* На чертеже 147, построенном в системе трех проекций в соответствии с чертежом 146, показано взаимное расположение проекций проектирующего луча, проведенного через начало координат O' и стороны треугольника следов ABC на каждой из координатных плоскостей. Выбирая любое положение плоскости проекций внутри координатного трехгранника, мы можем произвольно задать на чертеже 147 один из следов этой плоскости, на-



Черт. 146

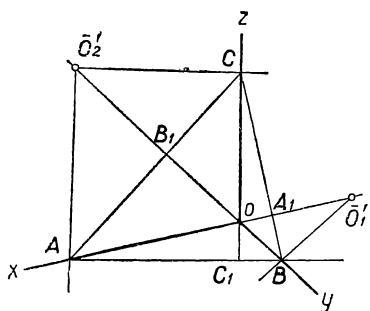
пример $A_H B_H$. Отметив по правилам проекционной связи точки A_V и B_W , мы можем произвольно выбрать положение следа $A_V C_V$ и в соответствии с этим построим след $B_W C_W$. Выбранное положение следов плоскости ABC определит на чертеже направление проекций $C_{1H} O_H$, $B_{1V} O_V$ и $A_{1W} O_W$ проектирующего луча OO' . Равным образом, начиная построение чертежа 147 с выбора направления проектирования, мы можем задать произвольно две проекции луча OO' , например $C_{1H} O_H$ и $B_{1V} O_V$. После этого проведем $A_H B_H \perp C_{1H} O_H$, (расстояние $C_{1H} O_H$ — произвольно) и, определив точки A_V и B_W , построим $A_V C_V \perp B_{1V} C_V$, а затем по найденным точкам B_W и C_W построим $A_{1W} O_W \perp B_W C_W$.



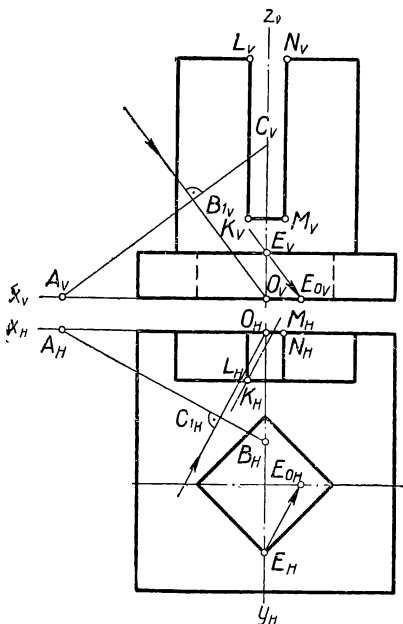
Черт. 147

Используем теперь данные чертежа 147 для построения аксонометрической системы осей, соответствующей выбранному направ-

лению проектирования. Для этого сопоставим чертеж 147 с чертежом 125; заметим, что треугольники $A_H O_H B_H$, $A_V O_V C_V$ и $B_W O_W C_W$ (черт. 147) изображают в натуральную величину части координатных плоскостей, отсеченные плоскостью проекций ABC ; на чертеже 125 такие же части координатных плоскостей представлены в натуральную величину в виде треугольников $\bar{A}\bar{O}'_3 B$, $\bar{A}\bar{O}'_2 C$ и $\bar{B}\bar{O}'_1 O$, совмещенных с плоскостью проекций. Вместе с тем прямые $\bar{O}'_3 C_1$ и $\bar{O}'_2 B_1$ на чертеже 125 можно рассматривать как совмещенные с плоскостью проекций горизонтальную и фронтальную проекции проектирующего луча, проходящего через начало координат (черт. 147). Эти соображения позволяют построить искомую систему аксонометрических осей по следующему плану.



Черт. 148



Черт. 149

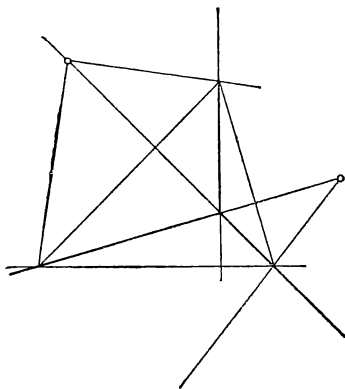
Примем плоскость чертежа (черт. 148) за плоскость проекций и проведем через произвольно взятую точку C_1 две взаимно перпендикулярные прямые, на одной из которых, расположенной горизонтально, отложим взятые в натуральную величину с чертежа 147 отрезки $C_1 A = C_{1H} A_H$ и $C_1 B = C_{1H} B_H$; получим сторону AB треугольника следов. Затем, взяв циркулем длину отрезка $A_V C_V$ (черт. 147), поставим ножку циркуля в точку A (черт. 148) и отметим конец (C) этого отрезка на вертикальной прямой; по точкам A и C вычертим сторону AC треугольника следов. Соединив точки C и B , получим треугольник следов ABC . Принимая во внимание, что высоты треугольника следов определяют положение аксонометрических осей (см. § 17), проведем на чертеже 148 через точки A и B прямые, соответственно перпендикулярные к сторонам BC и AC , и отметим точку O их взаимного пересечения с вертикальной пря-

мой; получим систему аксонометрических осей $Oxyz$ (черт. 148), соответствующую заданному направлению проектирования (черт. 147).

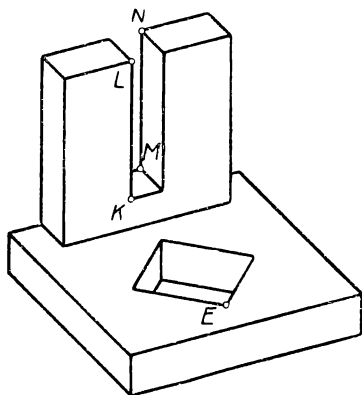
Пример 1. Построение наглядного изображения предмета, представленного на чертеже 149.

В данном случае аксонометрическое изображение удовлетворит требованиям наглядности, если на нем будут выявлены просвет между вертикальными брусками и сквозное отверстие в основании предмета.

Для осуществления первого условия необходимо, чтобы проектирующая плоскость, проведенная через ребро KL , проходила ле-



Черт. 150

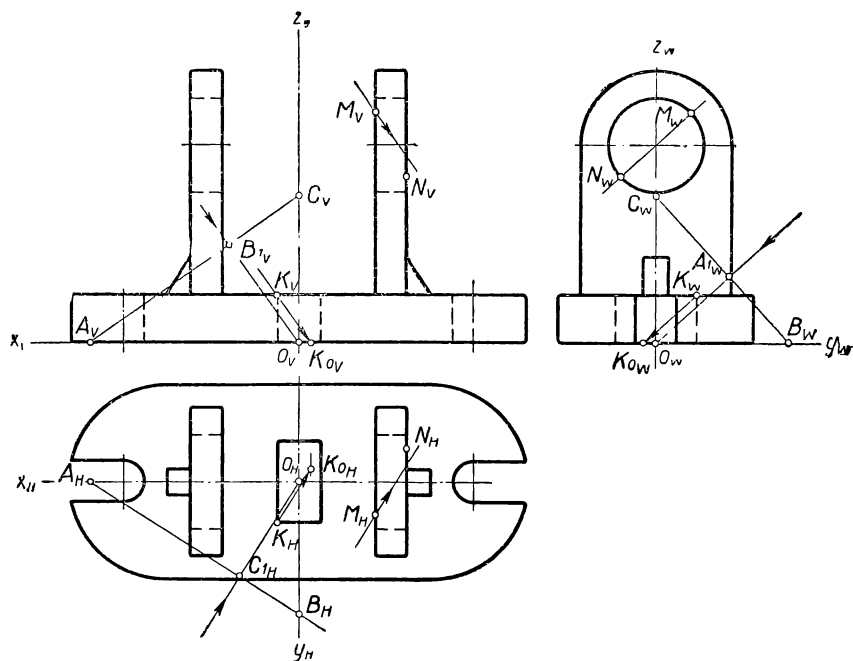


Черт. 151

вее ребра MN , иначе говоря, чтобы на чертеже горизонтальный след этой плоскости составлял с осью O_Hx_H угол больший, чем угол между осью O_Hx_H и прямой, проведенной через точки K_H и M_H . В соответствии с этим условием на чертеже 149 проведена горизонтальная проекция $C_{1H}O_H$ проектирующего луча, проходящего через начало координат, и построен горизонтальный след A_HB_H плоскости проекций ABC . Квадратное отверстие в основании предмета просматривается на изображении (черт. 151), в случае если примыкающая к точке E (E_H, E_V) часть очертания верхнего контура отверстия проектируется внутри очертания нижнего контура этого отверстия (полностью не показанного на чертеже 151). В этом случае на чертеже 149 горизонтальный след (E_{0H}, E_{0V}) луча, проектирующего точку E (E_H, E_V), должен лежать внутри очертания нижнего контура отверстия. Тогда, проведя $B_{1V}O_V \parallel E_V E_{0V}$, получим фронтальную проекцию проектирующего луча, проведенного через начало координат; построив $A_V C_V \perp B_{1V} O_V$, будем иметь фронтальный след плоскости проекций ABC .

На основании полученных данных построим систему аксонометрических осей (черт. 150), соответствующую выбранному направлению проектирования, и получим наглядное изображение (черт. 151), отвечающее намеченным требованиям наглядности.

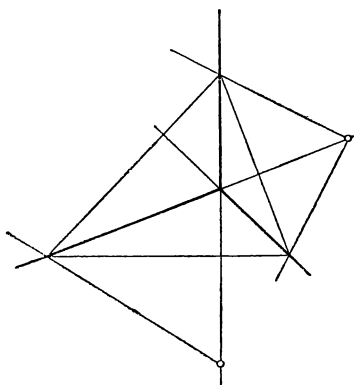
Пример 2. Построение наглядного изображения предмета, содержащего цилиндрические сквозные отверстия (черт. 152).



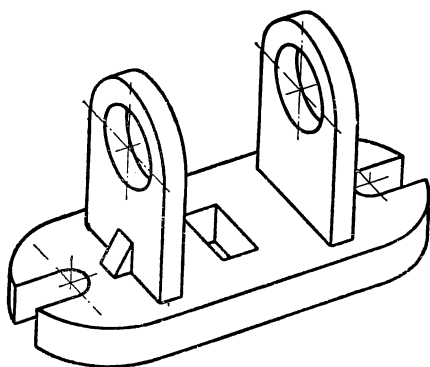
Черт. 152

При выборе направления проектирования мы будем руководствоваться требованием, чтобы на изображении просматривались насквозь призматическое отверстие в основании предмета и цилиндрические отверстия на боковых стенках. Так же, как и в предыдущем примере, для выполнения первого требования мы примем некоторую точку (K_{OH} , K_{OV}) на нижней плоскости основания предмета внутри нижнего контура призматического отверстия за горизонтальный след луча, проектирующего точку K (K_H , K_V) верхнего контура этого отверстия. Это условие определит горизонтальную и фронтальную проекции искомого луча, проходящего через точку K , и даст возможность построить следы плоскости проекций ABC (черт. 153). После этого необходимо проверить, удовлетворяет ли выбранное положение проектирующего аппарата второму требованию, т. е. будут ли на изображении видны насквозь цилиндрические отверстия. С этой целью проведем через ось одного из

отверстий плоскость, параллельную выбранному направлению проектирования; эта профильно проектирующая плоскость изобразится на виде слева в виде прямой $M_W N_W$, параллельной профильной проекции направления проектирования (черт. 152). Отметим

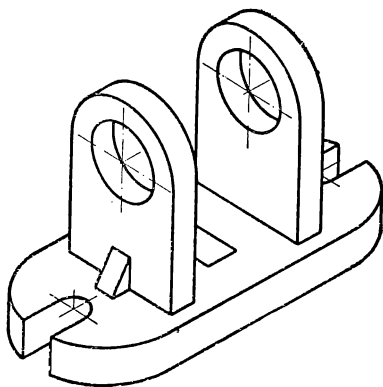


Черт. 153

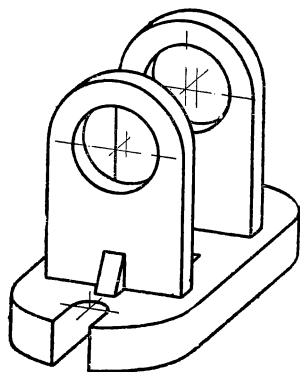


Черт. 154

на виде слева профильные проекции M_W и N_W двух точек M и N , в которых проведенная профильно проектирующая плоскость пересекает соответственно внутреннюю и внешнюю окружности ци-



Черт. 155



Черт. 156

линдрического отверстия; нанесем на чертёж фронтальные (M_V и N_V) и горизонтальные (M_H и N_H) проекции этих точек. Проведя теперь через точку M проектирующий луч в выбранном нами направлении, мы видим, что этот луч, проходя через отверстие, не встречает точку N . Отсюда можно заключить, что при выбранном направлении проектирования обеспечивается возможность видеть на изоб-

ражении просвет между точками M и N , а следовательно, и между другими близлежащими точками окружностей, ограничивающих цилиндрическое отверстие (черт. 154).

На чертежах 155 и 156 даны для сопоставления с чертежом 154 изображения того же предмета, построенные в изометрической и диметрической проекциях.

Вследствие сравнительной сложности построения изображений в произвольной аксонометрической проекции к этому способу целесообразно прибегать лишь в том случае, когда применение изометрической и диметрической проекций не приводит к удовлетворительным в отношении наглядности результатам. Испытывать пригодность указанных изометрической и диметрической проекций следует непосредственно на заданном в системе прямоугольных проекций чертеже предмета до выполнения аксонометрического изображения. Укажем (опуская теоретические обоснования), что для изометрической проекции $\angle C_{1H}O_H A_H = \angle B_{1V}O_V A_V = \angle A_{1W}O_W B_W = 45^\circ$; в диметрической проекции $\angle C_{1H}O_H A_H \approx 70^\circ$; $\angle B_{1V}O_V A_V = 45^\circ$; $\angle A_{1W}O_W B_W \approx 20^\circ$ (черт. 152).

§ 22. Изометрическая и диметрическая прямоугольные проекции и их применение в практике

Из различных видов прямоугольной аксонометрической проекции удобными и распространенными в практике являются проекция изометрическая и та диметрическая проекция, которая определяется одним из наиболее простых соотношений между коэффициентами искажения по осям, а именно

$$p : q : r = 1 : \frac{1}{2} : 1.$$

Рассмотрим характеристические данные указанных проекций.

1. Изометрическая прямоугольная проекция

Так как в изометрической проекции коэффициенты искажения по осям равны между собой, т. е. $p = q = r$, то указанная выше (см. § 19) общая зависимость между коэффициентами искажения $p^2 + q^2 + r^2 = 2$ принимает вид $3p^2 = 2$. Из последнего равенства определяем числовое значение коэффициента p , а вместе с тем и двух других коэффициентов q и r :

$$p = q = r = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0,82. \quad (1)$$

Пользуясь найденным значением коэффициентов искажения по осям, мы можем определить и числовое значение коэффициентов искажения радиуса окружности, проектирующегося в малую ось эллипса при изображении окружности, лежащей в грани натурального трехгранника осей или в плоскости, ей параллельной.

Очевидно, что искомые коэффициенты, определяемые из равенств, выведенных в § 19, равны между собой для всех трех указанных положений плоскости проектируемой окружности:

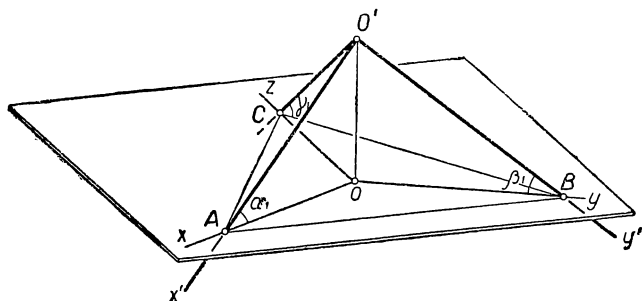
$$\kappa_{XY} = \kappa_{YZ} = \kappa_{ZX} = \sqrt{1 - \frac{2}{3}} \approx 0,58. \quad (2)$$

Для построения аксонометрических осей в изометрической прямоугольной проекции необходимо знать их взаимное расположение на чертеже. Обратимся к проектирующему аппарату прямоугольной аксонометрической проекции (черт. 157) и выразим коэффициенты искажения по осям в виде следующих равенств:

$$p = \frac{OA}{O'A} = \cos \alpha_1,$$

$$q = \frac{OB}{O'B} = \cos \beta_1,$$

$$r = \frac{OC}{O'C} = \cos \gamma_1.$$



Черт. 157

Принимая во внимание, что в случае изометрии левые части написанных равенств равны между собой, получим

$$\cos \alpha_1 = \cos \beta_1 = \cos \gamma_1$$

и
$$\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1.$$

Следовательно, в проектирующем аппарате прямоугольной изометрии оси натурального трехгранника одинаково наклонены к плоскости проекций.

Далее замечаем, что прямоугольные треугольники AOO' , BOO' и COO' , имеющие по равному острому углу ($\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1$) и общий катет (OO'), равны между собой, откуда следует, что

$$O'A = O'B = O'C \quad (3)$$

и
$$OA = OB = OC. \quad (4)$$

На основании соотношения (3) заключаем, что прямоугольные (при вершине O') треугольники $AO'B$, $BO'C$ и $CO'A$ равны между собой, вследствие чего

$$AB = BC = CA. \quad (5)$$

Соотношения (5) и (4) дают основания для заключения, что

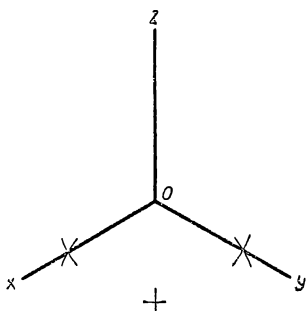
$$\triangle AOB = \triangle BOC = \triangle COA,$$

вследствие чего каждый из углов при вершине O равен 120° .

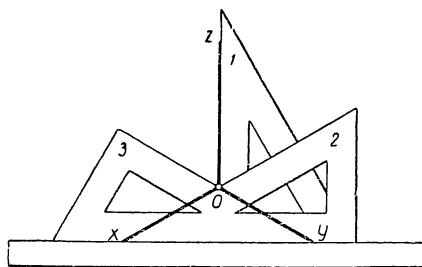
Таким образом, в *изометрической прямоугольной проекции* треугольник следов ABC — *равносторонний*, точка O — его центр и аксонометрические оси Ox , Oy , и Oz образуют между собой равные углы в 120° .

На основе полученного вывода покажем некоторые простые способы построения аксонометрических осей в изометрической проекции.

а) Через точку O проведем вверх вертикальную прямую — ось Oz и, не сдвигая линейку, сделаем на некотором расстоянии под точкой O небольшую черту на продолжении прямой Oz (черт. 158). Из точки O , как из центра, произвольным (неизменным) радиусом



Черт. 158



Черт. 159

засечем точку на черте (под точкой O) и проведем дуги по обе стороны черты. Из точки, отмеченной на черте, засечем тем же радиусом точки на проведенных дугах. Через последние две точки и через точку O проведем последовательно прямые — ось Ox и ось Oy изометрической проекции.

б) При помощи угольника (60° и 30°), опирающегося меньшим катетом на линейку, проведем через точку O вдоль большего катета вертикальную прямую — ось Oz (черт. 159).

Повернув угольник в плоскости чертежа вокруг вершины прямого угла и продвинув вдоль линейки, проведем через точку O прямую — ось Ox вдоль гипотенузы угольника.

Повернув угольник в плоскости чертежа вокруг вершины меньшего угла и опирая его гипотенузой на линейку, проведем вдоль большего катета через точку O прямую — ось Oy .

2. Диметрическая прямоугольная проекция

Мы знаем, что в диметрической проекции должны быть равны между собой какие-нибудь два коэффициента искажения по осям. Такое требование не является достаточным, чтобы определить однозначно числовые значения коэффициентов искажения p , q и r . Мы можем выбирать в различном сочетании из трех коэффициентов два равных между собой и задавать произвольные величины отношений между неравными коэффициентами.

В интересах наглядности изображения и простоты его построения целесообразно руководствоваться следующими соображениями. Удобно задавать коэффициенты искажения по осям Ox и Oy неравными между собой, а коэффициент искажения по оси Oz равным большему из выбранных, например $p > q$, $r = p$. При указанном выборе коэффициентов искажения одна из вертикально расположенных координатных плоскостей, именно плоскость xOz , будет наклонена под меньшим углом к плоскости проекций, чем другая (плоскость yOz). Расположив главный вид предмета, содержащий обычно наиболее характерные подробности в очертаниях его формы, параллельно плоскости xOz , мы получим изображение главного вида с меньшим искажением очертаний, чем изображение вида слева. Такое расположение видов на чертеже близко соответствует положению, которое мы придаем предмету перед глазами при непосредственном его рассмотрении. Вместе с тем числовое значение отношения между неравными коэффициентами целесообразно выбирать простым (например $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 0,6 и т. п.) с целью упрощения вычислений, связанных с искажением проектируемых отрезков. Указанным условиям наиболее соответствует диметрическая система осей, характеризуемая соотношением коэффициентов $p : q : r = 1 : \frac{1}{2} : 1$. Такой именно вид диметрической прямоугольной проекции принят для чертежей в машиностроении*.

Определим числовые значения коэффициентов искажения указанной диметрической проекции. Исходя из заданного соотношения коэффициентов искажения, напомним $r = p$, $q = \frac{1}{2}p$; подставляя эти значения в равенство, выражающее общую зависимость между коэффициентами искажения прямоугольной аксонометрической проекции (см. § 19), получим:

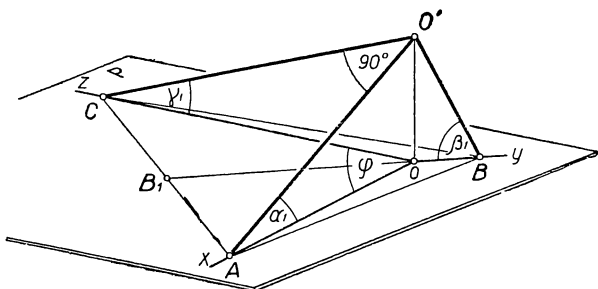
$$p^2 + \frac{1}{4}p^2 + p^2 = 2; \quad \frac{9}{4}p^2 = 2, \quad \text{откуда находим:}$$
$$p = r = \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad q = \frac{\sqrt{2}}{3}, \quad \text{или } p = r \approx 0,94;$$
$$q \approx 0,47. \quad (6)$$

* Чертежи в машиностроении, ГОСТ 3453 — 59.

В соответствии с полученными значениями коэффициентов искажения по осям найдем коэффициенты искажения для определения малой оси эллипса, изображающего окружность, плоскость которой параллельна одной из граней натурального координатного трехгранника:

$$\begin{aligned} \kappa_{XY} &= \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-\frac{8}{9}}, & \kappa_{XY} &= \frac{1}{3}; \\ \kappa_{YZ} &= \sqrt{1-p^2} = \sqrt{1-\frac{8}{9}}, & \kappa_{YZ} &= \frac{1}{3}; \\ \kappa_{ZX} &= \sqrt{1-q^2} = \sqrt{1-\frac{2}{9}}, & \kappa_{ZX} &= 0,88. \end{aligned} \quad (7)$$

Определим взаимное расположение аксонометрических осей в данной прямоугольной диметрии. Пусть чертеж 160 изображает



Черт. 160

проектирующий аппарат диметрической проекции. Искомыми величинами изображенной фигуры являются углы между аксонометрическими осями, из которых обозначим $\angle xOz = \varphi$.

По условию $p = r$, поэтому $\alpha_1 = \gamma_1$. Отсюда следует, что прямоугольные треугольники AOO' и COO' равны между собой, вследствие чего $AO' = CO'$ и $AO = CO$. Так как треугольник AOC равнобедренный, то высота OB_1 делит пополам сторону AC и угол AOC ; следовательно, $B_1C = \frac{AC}{2}$ и $B_1OC = \frac{\varphi}{2}$. Искомый угол φ можно определить из треугольника B_1OC , пользуясь соотношением:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{B_1C}{OC}. \quad (8)$$

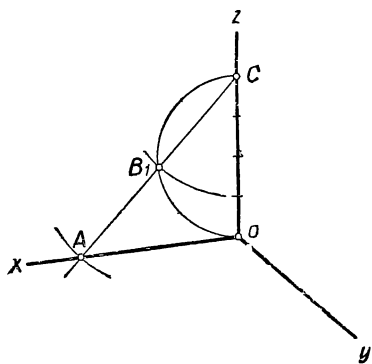
В самом деле, мы нашли, что $B_1C = \frac{AC}{2}$; из прямоугольного равнобедренного треугольника $OA'C$ получим $AC = AO' \sqrt{2}$ или, если принять $AO' = 1$, то $AC = \sqrt{2}$, поэтому $B_1C = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Из тре-

угольника COO' находим, что $OC = O'C \cdot r = 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Подставив найденные значения B_1C и CO в равенство (8), получим:

$$\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{B_1C}{OC} = \frac{\sqrt{2}}{2} : \frac{2\sqrt{2}}{3}; \quad \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}.$$

Угол $\frac{\varphi}{2}$, синус которого равен $\frac{3}{4}$, может быть легко получен в результате построения прямоугольного треугольника по заданному катету ($B_1C = 3$) и гипотенузе ($CO = 4$).

На этом основании аксонометрические оси прямоугольной диметрической проекции могут быть построены следующим образом:



Черт. 161

1) На вертикальной прямой (ось Oz) отложим отрезок OC , составленный из четырех равных отрезков (черт. 161).

2) Построим на отрезке OC полуокружность.

3) Отметим на полуокружности точку B_1 радиусом $CB_1 = \frac{3}{4} OC$ и тем же радиусом опишем дугу из центра B_1 .

4) На прямой CB_1 отметим точку A пересечения ее с последней описанной дугой.

5) Проведем прямые через точки O и A (ось Ox) и через точки B_1 и O (ось Oy).

Из построения и из сопоставления чертежей 160 и 161 видно, что взаимное расположение прямых Ox , Oy и Oz на чертеже 161 соответствует условиям взаимного расположения аксонометрических осей в прямоугольной диметрической проекции.

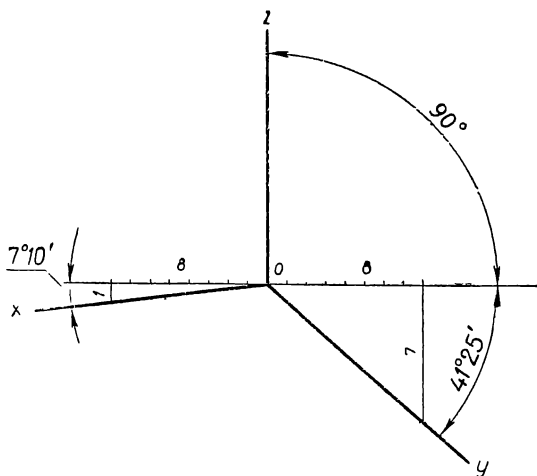
Из тригонометрических таблиц, пользуясь равенством $\sin \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}$, можно найти, что $\angle AOC = \angle xOz = 97^\circ 10'$, следовательно, $\angle xOy = \angle yOz = 131^\circ 25'$. Зная градусное выражение углов между аксонометрическими осями, можно использовать другой способ построения диметрических осей, основанный на применении транспортира (черт. 162); однако этот способ менее точен, чем описанный выше.

На том же чертеже 162 показан еще один приближенный способ построения диметрических осей, вытекающий из соотношений:

$$\operatorname{tg} 7^\circ 10' \approx \frac{1}{8} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} 41^\circ 25' \approx \frac{7}{8}.$$

В практику применения описанных двух простых видов прямоугольной аксонометрической проекции вносят ряд дополнительных упрощений.

Одно из таких упрощений состоит в замене проекции данной фигуры увеличенным изображением (см. § 3) с таким расчетом, чтобы длина отрезков, параллельных одной из осей, например оси Ox , была равна на изображении натуральной длине изображаемых отрезков. Такое условие освобождает от необходимости вычислять



Черт. 162

искаженную длину отрезков, откладываемых в направлении указанной оси. Коэффициент увеличения (n) изображения легко определить из следующих соображений.

Пусть отрезок OA на оси Ox есть проекция натурального отрезка $O'A'$ при показателе искажения p , а отрезок OA_1 представляет увеличенную в n раз проекцию OA этого же отрезка; тогда

$$\begin{aligned} OA &= O'A' \cdot p, \\ OA_1 &= OA \cdot n = O'A' \cdot p \cdot n. \end{aligned} \quad (9)$$

Так как по условию $OA_1 = O'A'$, то $p \cdot n = 1$; следовательно,

$$n = \frac{1}{p}. \quad (10)$$

Отрезки OB_1 на оси Oy и OC_1 на оси Oz представят собой на том же изображении соответственно увеличенные в n раз проекции отрезков $O'B'$ и $O'C'$, т. е.

$$\begin{aligned} OB_1 &= OB \cdot n = O'B' \cdot q \cdot n, \\ OC_1 &= OC \cdot n = O'C' \cdot r \cdot n. \end{aligned} \quad (11)$$

Если $p = q = r$, то будем иметь $OB_1 = O'B'$ и $OC_1 = O'C'$, т. е. в случае изометрии мы можем заменить проекцию фигуры увеличенным изображением, в котором отрезки, параллельные осям, изобразятся в натуральную величину; коэффициент увеличения такого изображения определяется из равенства (10):

$$n = \frac{1}{p} \approx \frac{1}{0,82} \approx 1,22. \quad (12)$$

Если $p = r$, $q = \frac{1}{2}p$, то мы будем иметь:

$$OA_1 = O'A', OC_1 = O'C', OB_1 = \frac{1}{2}O'B',$$

т. е. в случае диметрии замена подлинной проекции увеличенным изображением также весьма способствует упрощению построений, позволяя изображать без искажения отрезки, параллельные осям Ox и Oz , и с уменьшением в два раза отрезки, параллельные оси Oy . Из равенства (10) определяем коэффициент увеличения изображения для диметрии:

$$n = \frac{1}{p} \approx \frac{1}{0,94} \approx 1,06. \quad (13)$$

Увеличенное описанным способом аксонометрическое изображение называется *приведенным аксонометрическим изображением* или *практической аксонометрией*; подлинная аксонометрическая проекция фигуры носит название *точного аксонометрического изображения*. Множители (pn) , (qn) и (rn) , определяющие в равенствах (9) и (11) приведенную величину по заданной натуральной величине отрезков, называются *приведенными коэффициентами искажения* по осям. Обозначив $pn = p_1$, $qn = q_1$, $rn = r_1$, будем иметь, что для приведенной изометрии

$$p_1 = q_1 = r_1 = 1, \quad (14)$$

а для приведенной диметрии

$$p_1 = r_1 = 1, \quad q_1 = \frac{1}{2}. \quad (15)$$

Необходимо помнить, что в приведенном аксонометрическом изображении увеличиваются сравнительно с подлинной проекцией также и размеры большой и малой осей эллипса, изображающего окружность, лежащую в каждой из координатных плоскостей.

В случае приведенной изометрии большая (DE) и малая (FG) оси эллипса определяются из равенств:

$$DE = 2R \cdot 1,22; \quad FG = 2R \cdot 0,58 \cdot 1,22 = 2R \cdot 0,7. \quad (16)$$

Для приведенной диметрии получим:

в плоскости $x'O'y'$:

$$DE = 2R \cdot 1,06; FG = 2R \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,06 = 2R \cdot 0,35;$$

в плоскости $y'O'z'$:

$$DE = 2R \cdot 1,06; FG = 2R \cdot \frac{1}{3} \cdot 1,06 = 2R \cdot 0,35; \quad (17)$$

в плоскости $z'O'x'$:

$$DE = 2R \cdot 1,06; FG = 2R \cdot 0,88 \cdot 1,06 = 2R \cdot 0,9.$$

Упрощения в выполнении аксонометрических изображений дает также применение *пропорционального масштаба*. Такой масштаб удобно изготовить на миллиметровой бумаге, объединив в одном чертеже все случаи искажения отрезков в изометрической и диметрической проекциях как практической, так и точной (черт. 163). Устройство масштаба основано на свойстве пропорциональности сторон подобных треугольников, образуемых в ходе пользования масштабом. Взяв по миллиметровой линейке или непосредственно с заданного чертежа мерительным циркулем величину некоторого отрезка, отложим его на горизонтальной прямой масштаба от конца A до точки D (черт. 164); тогда искомую искаженную величину представит отрезок DE , отсеченный прямой AC на прямой DE , перпендикулярной к AB . Прямая AC проведена в конец C отрезка BC ($BC \perp AB$), составляющего с AB отношение $\frac{BC}{AB}$, равное заданному коэффициенту искажения. Отрезок DE может быть взят циркулем-измерителем непосредственно после откладывания отрезка AD , если, не снимая острия с точки D , повернуть циркуль вокруг этой точки.

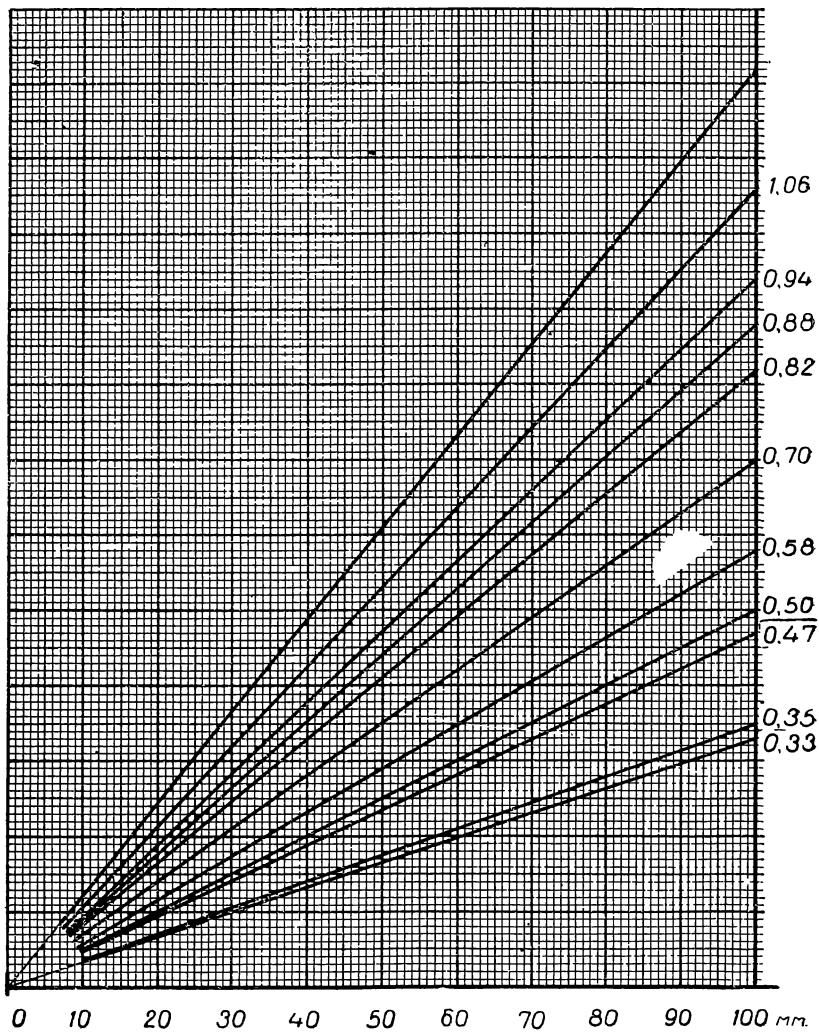
Существенным образом упрощается выполнение аксонометрического изображения при соблюдении определенной последовательности в построениях. Эта последовательность обуславливается строением формы изображаемой фигуры, условиями видимости отдельных частей фигуры и приемами вычерчивания.

Исходя из строения формы фигуры, наиболее целесообразно начинать построение изображения с основания фигуры, т. е. с той части ее поверхности, которая совмещена с плоскостью xOy , принимаемой в этом случае за основную плоскость (см. § 5). Если изображение строится по заданному чертежу в системе двух (трех) проекций, то вид сверху на этом чертеже используется для того, чтобы построить вторичную проекцию фигуры на плоскости xOy^* .

По найденной вторичной проекции мы можем, пользуясь методом координат, найти изображение каждой пространственной точки, необходимой для получения очертания фигуры**. Однако следует учитывать, что наглядное изображение фигуры составляет

* *Вторичной проекцией* называется аксонометрическое изображение проекции фигуры на каждую из координатных плоскостей.

** См. В. И. Каменев, Курс машиностроительного черчения, § 62, 64, Машгиз, 1951.



Черт. 163

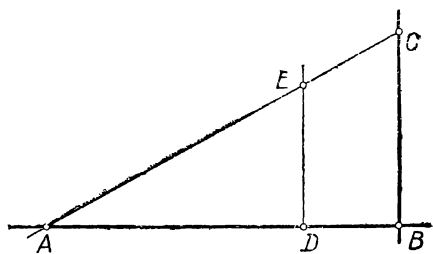
ся только из очертания видимых ее частей. Чтобы избежать проведения линий, подлежащих удалению при окончательной обводке изображения, следует в первую очередь строить видимые части фигуры и наряду с вторичной проекцией на плоскости xOy пользоваться связями изображаемых точек с другими, уже построенными видимыми точками фигуры. Такой способ построения удобен в случае изображения несложных плоскогранных форм, и при изображении разрезов и сечений, показанных на изображаемом теле.

Если форма тела наряду с плоскими гранями содержит кривые поверхности, то в очертание изображения могут входить так называемые *сопряжения* прямых и кривых линий. В таком случае построение изображения следует начинать с очертания кривых поверхностей и завершать проведением прямолинейных контуров. Такая последовательность в построении обеспечит возможность наиболее тщательного вычерчивания сопряженных между собой линий очертания.

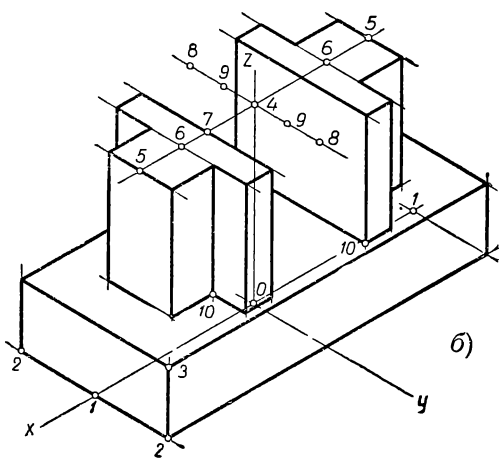
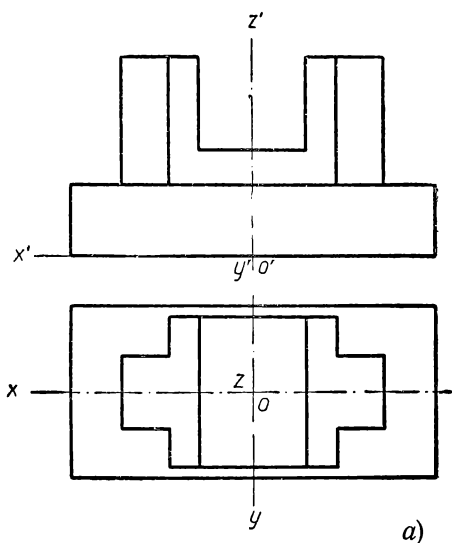
Рассмотрим примеры применения описанных упрощений в построении аксонометрических проекций.

Пример 1. Построение аксонометрической проекции плоскогранного тела по заданному чертежу (черт. 165, а).

Простота выполнения изображения осуществлена на чертеже 165, б путем использования практической изометрии ($p=q=r=1$) с применением определенной последовательности нанесения вершин и ребер изображаемого многогранника. Выбор практической изометрии полностью устраняет необходимость в перерасчете заданных чертежом натуральных размеров тела. Определенная последовательность нанесения вершин и ребер, указанная условно на чертеже 165, б цифрами, дала возможность уменьшить число

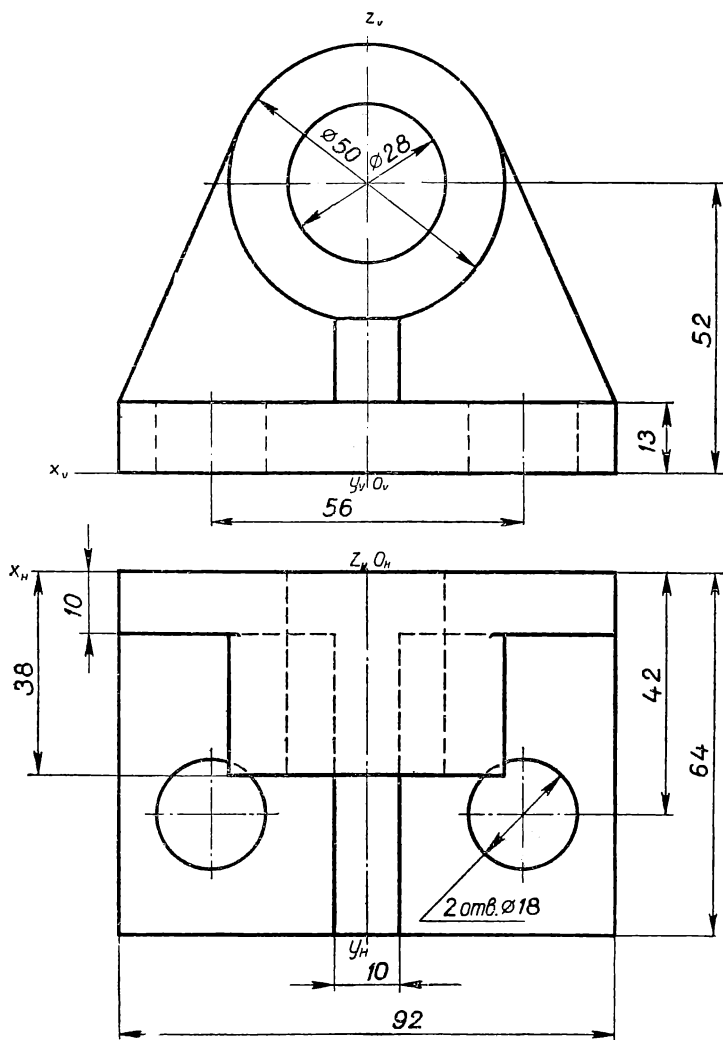


Черт. 164



Черт. 165

вспомогательных линий. Одинаковыми цифрами отмечены симметричные точки фигуры, одновременно отложенные циркулем от осевых линий; порядковые номера точек указывают на последовательность их откладывания на изображении по размерам заданного

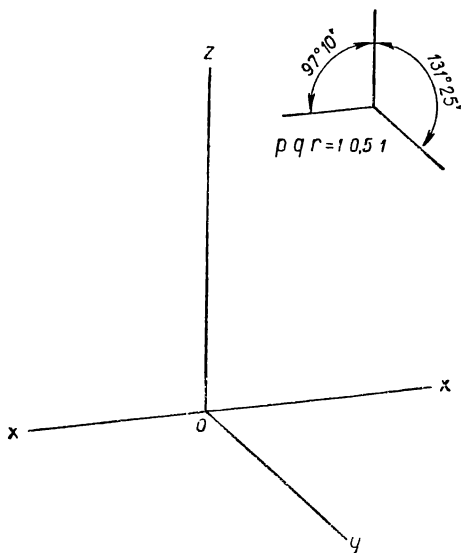


Черт. 166

чертежа. В той же последовательности проведены прямые, проходящие через занумерованные точки; незанумерованные вершины многогранника получены в пересечении прямых, проведенных через точки, отмеченные цифрами. Все вспомогательные линии,

понадобившиеся в ходе построения, сохранены на чертеже 165, б в тонкой обводке. Само собой разумеется, что указанная на чертеже 165 последовательность выполнения изображения является одним из вариантов возможного упрощения построений.

Пример 2. Построение аксонометрической проекции по заданному чертежу технической детали, содержащей поверхности вращения (черт. 166).

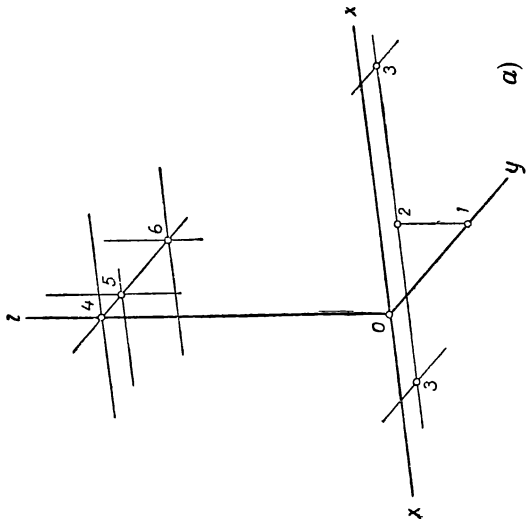
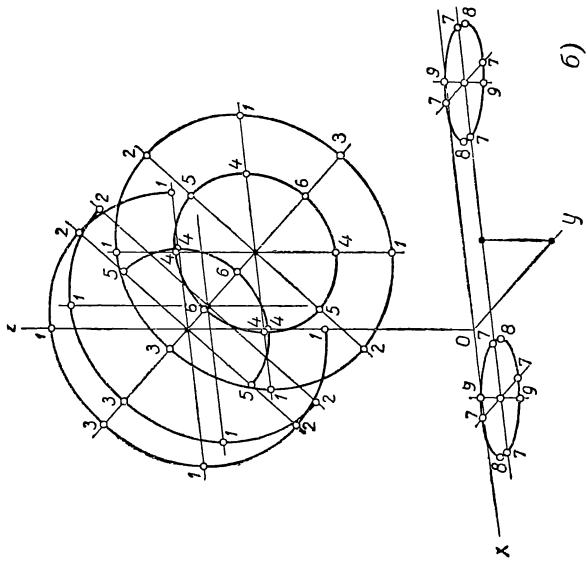


Черт. 167

Для построения используем практическую диметрию (черт. 167).

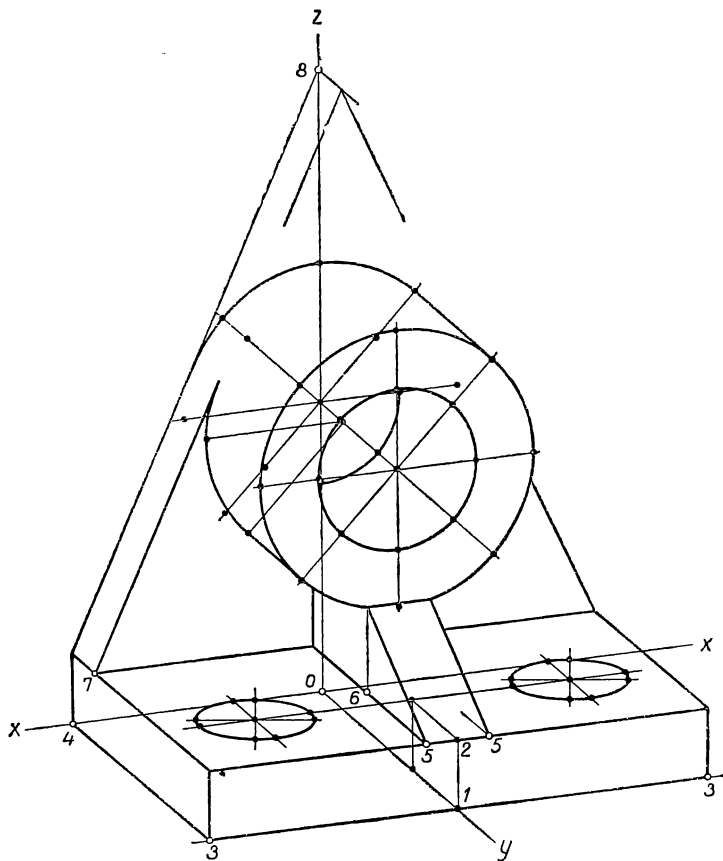
При изображении ребер, параллельных оси Oy ($q = \frac{1}{2}$), и окружностей, входящих в очертание поверхности фигуры ($k_{zx} = 0,9$), применим пропорциональные масштабы (черт. 163). Устанавливая последовательность в выполнении работы, изобразим в первую очередь окружности, ограничивающие поверхности вращения (черт. 168, а, б), и затем все прямолинейные очертания (черт. 169), придерживаясь в каждом случае порядка, указанного в предыдущем примере. Закончим построение обводкой необходимых условных линий — осевых и центровых (черт. 170). Значение цифр на чертежах 168 и 169 то же, что и на чертеже 165, б.

Пример 3. Построение по заданному чертежу аксонометрической проекции технической детали с вырезом передней четверти (черт. 171).



Черт. 168

Указанный на чертеже разрез детали принято передавать на наглядном изображении в виде выреза через ось симметрии одной четверти этой детали. Для построения изображения можно взять приведенную изометрическую проекцию. Из соображений простоты выполнения работы следует начинать построение с вычерчива-

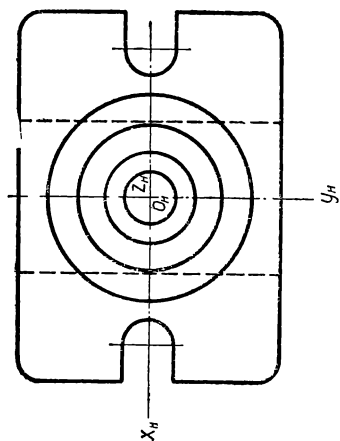
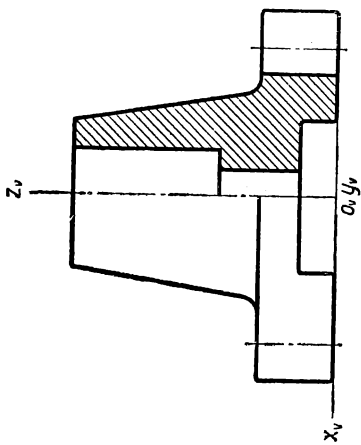


Черт. 169

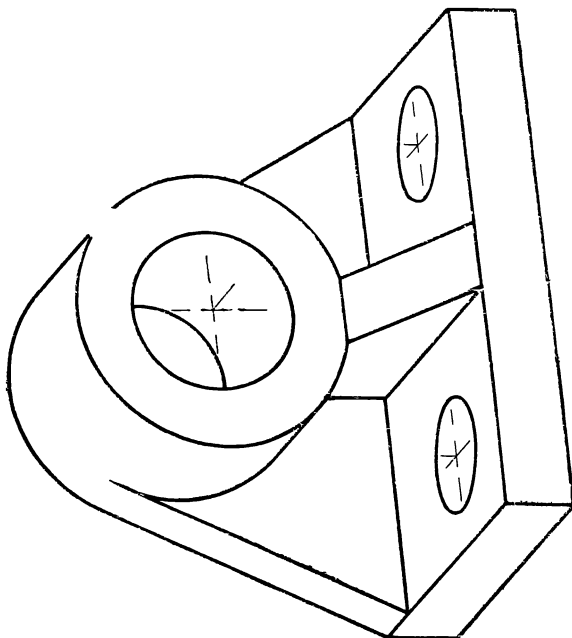
ния контуров ограничивающих вырез (черт. 172, а), затем построить изображения окружностей (черт. 172, б, в), вычертить прямолинейные очертания (черт. 172, г) и закончить обводкой всех видимых линий очертания, осевых, центровых линий и штриховкой* в сечениях (черт. 172, д).

Описанный в рассмотренных примерах рациональный порядок

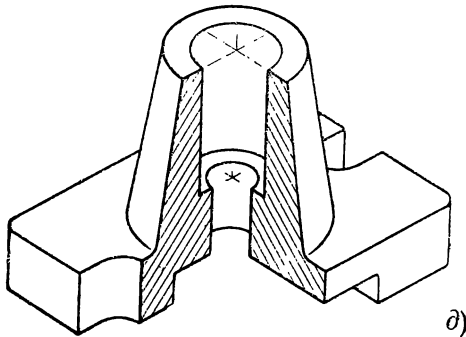
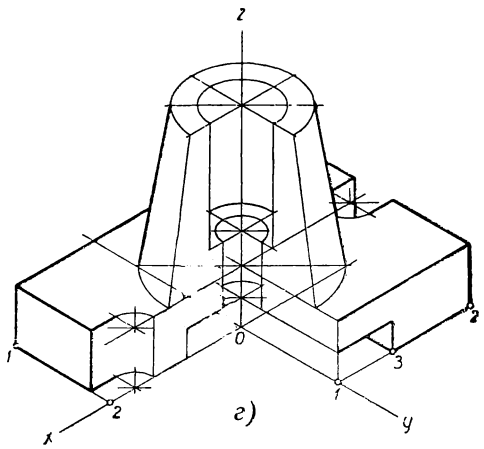
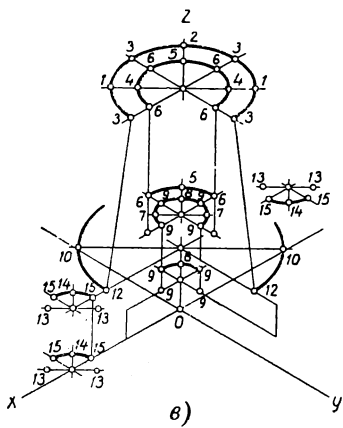
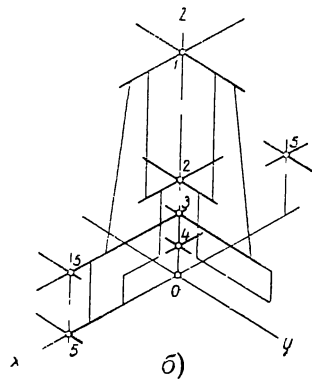
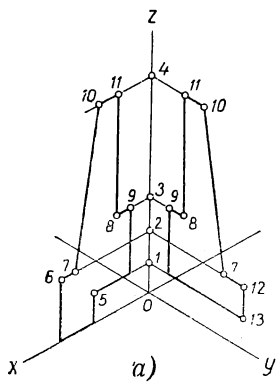
* См. ГОСТ 3453 — 59, Чертежи в машиностроении, стр. 16.



Черт. 171



Черт. 170



Черт. 172

построения аксонометрического изображения тела по заданному чертежу можно выразить в следующих положениях.

1. Представить мысленно по заданному чертежу (в двух-трех проекциях) форму изображаемого тела, отметить на заданном чертеже проекции координатных осей и выбрать вид аксонометрической проекции, обеспечивающей лучшую наглядность изображения.

За координатные плоскости следует принимать плоскости симметрии, если они есть, и плоскость основания тела.

2. Построить аксонометрические оси, поместив их в поле чертежа так, чтобы обеспечить удовлетворительное в композиционном отношении расположение общих габаритных очертаний тела внутри рамки чертежа.

3. Расчленить мысленно форму тела на простые составные части и построить последовательно (тонкими линиями) очертания этих частей в следующем порядке:

а) построить очертания тела в сечениях, если на чертеже указаны соответствующие разрезы;

б) определить положение центров окружностей, входящих в очертания поверхности тела; отметить каждый из центров как точку пересечения проекций двух прямых, проведенных в плоскости окружности параллельно координатным осям;

в) построить проекции окружностей, входящих в очертания тела. Для вычерчивания каждого эллипса, изображающего окружность, построить принадлежащие ему точки на концах осей эллипса и на концах его сопряженных диаметров, параллельных аксонометрическим осям;

г) построить все прямолинейные очертания тела.

4. Обвести (карандашом или тушью) линии видимых очертаний тела, придерживаясь следующего порядка:

а) обвести криволинейные очертания;

б) обвести прямолинейные очертания, начиная с прямых, имеющих сопряжение с кривыми линиями очертания. Обводку параллельных прямых следует группировать по общему их направлению и выполнять при помощи угольника, скользящего по линейке;

в) обвести осевые и центровые линии и выполнить штриховку (в сечениях);

г) выявить частичной штриховкой (или отмывкой) светотеневые отношения частей поверхности тела с целью сообщения изображению большей наглядности. Ниже указаны некоторые способы нанесения светотеней на изображение.

Для отображения формы предмета на его изображении существуют различные графические приемы.

Один из таких приемов был указан в § 7 при построении изображения шара. Он состоит в проведении на поверхности предмета дополнительных линий, отображающих структурные особенности данной поверхности и тем самым помогающих выявлению ее формы на чертеже; такими линиями могут быть, например, меридианы и параллели поверхностей вращения, образующие линейчатых поверхностей и др.

Весьма употребительными и эффективными являются приемы отображения светотеневых различий на его поверхности. Эти приемы могут быть правильно использованы лишь при условии знакомства с основными закономерностями в распределении светотеней на освещенной поверхности предмета и со способами их построения на изображении в зависимости от формы предмета. К числу таких приемов относятся штриховка, шрафировка, тональная отмывка тушью, одноцветная и многоцветная отмывка акварельными красками (от руки или при помощи распылительных приборов) и ряд других способов. Простейшим по технике выполнения и наиболее распространенным является способ штриховки (черт. 173).

Штриховка наносится на изображение предмета в зависимости от формы поверхности в виде прямых и кривых линий. Каждая линия штриховки соединяет на поверхности предмета точки, имеющие одинаковую (примерно) яркость освещения. Различие в степени освещенности отдельных частей поверхности предмета отмечается на изображении различием в расстоянии между нанесенными линиями штриховки и различной толщиной этих линий. При оценке сравнительной интенсивности освещения отдельных частей поверхности тела исходят из положения, что наиболее освещенными являются те части, на которые лучи света падают под прямым углом, и что *яркость освещения ослабевает с уменьшением угла наклона световых лучей к освещаемой поверхности*. Лучи освещающего пучка принято считать параллельными между собой и направленными сверху, с левой стороны на обращенную к наблюдателю сторону поверхности предмета. В техническом черчении обычно ограничиваются передачей только так называемых собственных теней, возникающих на поверхности самого предмета вследствие различной освещенности отдельных ее частей.

Приведем некоторые практические указания к изображению светотеней штриховкой.

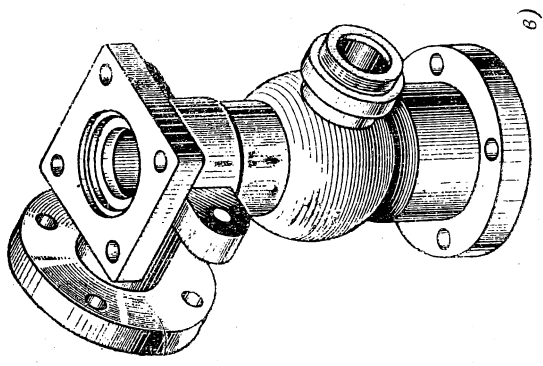
Приступая к нанесению штриховки, нужно мысленно задать направление световых лучей по отношению к предмету и примерно представить относительный наклон отдельных граней (или частей поверхности) к выбранному направлению освещения.

Каждая плоская грань тела заштриховывается параллельными прямыми линиями, равномерно отстоящими друг от друга (черт. 173, а); расстояние между линиями штриховки каждой грани обуславливается степенью ее освещенности; толщина линий штриховки одной плоской грани данного тела должна быть одинаковой. Если плоскость грани параллельна одной или двум из осей координат, то направление штриховки следует брать параллельным одной из этих осей; для грани, наклонной к одной из координатных плоскостей под острым углом, линии штриховки иногда целесообразно брать в направлении линии наибольшего уклона к этой координатной плоскости (черт. 173, а).

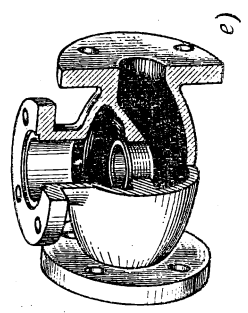
Следует иметь в виду, что в техническом черчении штриховка в виде параллельных прямых линий применяется также для выделения поверхности тела, образованной секущей плоскостью, и для обозначения материала в разрезах и сечениях. Нанесение штриховки в этих целях не имеет связи со степенью освещенности поверхности и выполняется по правилам ГОСТа (см. черт. 172, д и 173, б).

Поверхности кругового цилиндра и кругового конуса заштриховываются прямыми линиями по направлению образующих этих поверхностей (черт. 173, а и 173, в). Расстояния между линиями штриховки изменяются (по дуге окружности основания) с одновременным утолщением линий по мере перехода от освещенной к затененной части поверхности, при этом на небольшой части поверхности цилиндра и конуса, примерно противоположной наиболее освещенной, делается некоторая разрядка линий штриховки в соответствии с явлением рефлекса, обычно наблюдаемого в реальных условиях освещения.

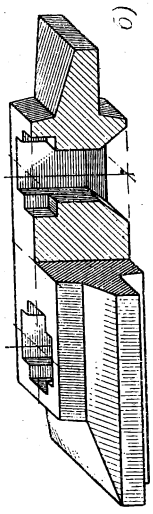
Светотеновой эффект на поверхности шара может быть получен при помощи постепенно сближающихся и утолщающихся к затененной части поверхности шара параллелей (черт. 173, д); эти параллели должны быть



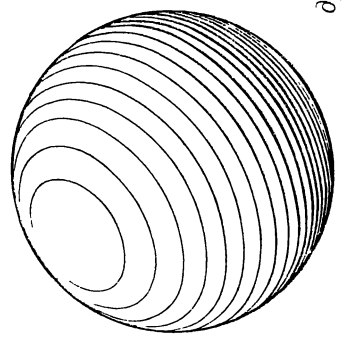
б)



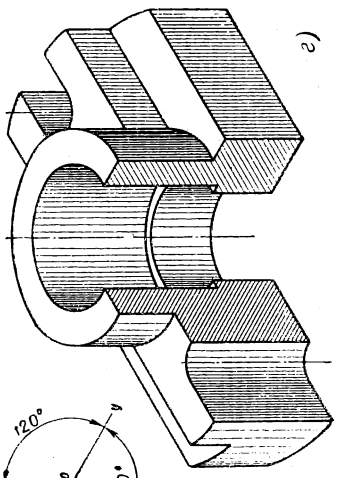
в)



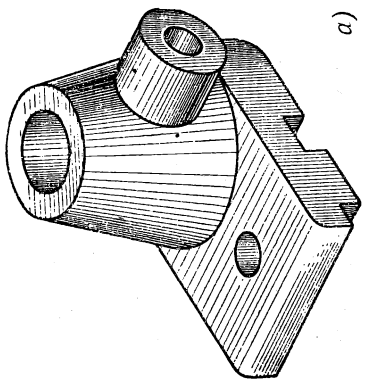
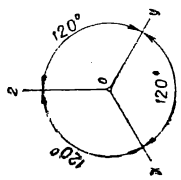
г)



д)



е)



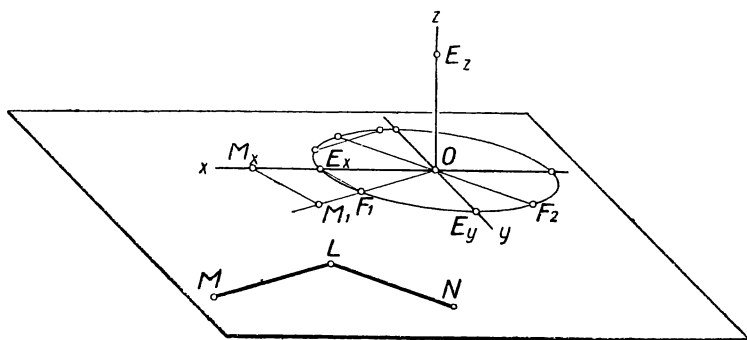
а)

ориентированы относительно диаметра, направленного вдоль освещающих лучей. Выполнение такой штриховки весьма трудоемко и на практике заменяется упрощенной штриховкой, приближенно передающей распределение тени на поверхности шара (черт. 173, в).

С такими же трудностями связано нанесение теней на другие, более сложные кривые поверхности (черт. 173, е).

§ 23. Масштабный эллипс. Условные метрически определенные изображения

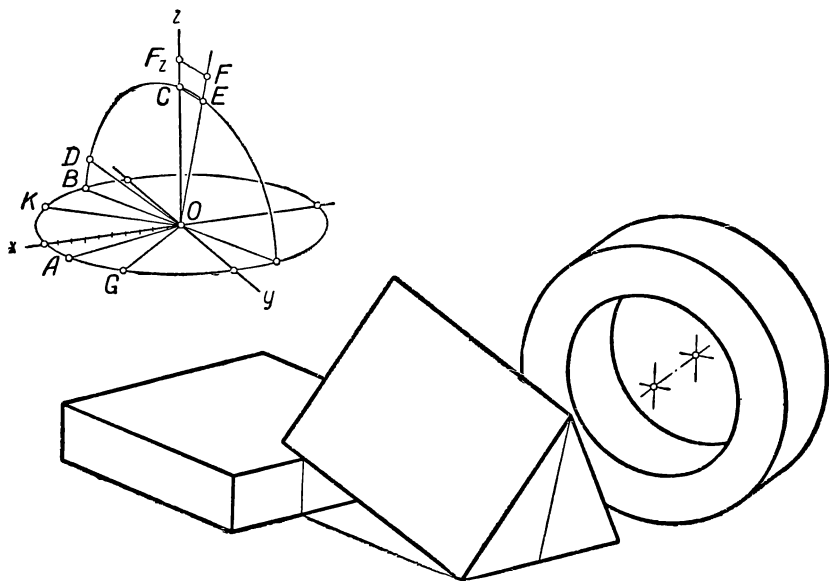
АксонOMETрический метод дает возможность легко строить на чертеже проекции отрезков заданной длины, направленных параллельно координатным осям. Так же просто строится прямой угол, если стороны его параллельны осям. Для всякого другого направления прямых решение указанных задач при помощи аксонометрической системы осей усложняется; приходится прибегать к чертежу в системе прямоугольных проекций, к реконструкции натурального трехгранника осей и к другим приемам. Одним из несложных вспомогательных способов является в этом случае *масштабный эллипс*. Масштабный эллипс представляет собой проекцию окружности, описанной радиусом, равным единице масштаба. Если задана система аксонометрических осей и, следовательно, известны аксонометрические единицы масштаба OE_x , OE_y и OE_z , то в каждой координатной плоскости, например в плоскости xOy (черт. 174), масштабный эллипс может быть построен по двум со-



Черт. 174

пряженным полу диаметрам (OE_x и OE_y). Всякий полу диаметр (OF_1) этого эллипса может служить единицей масштаба для отрезков, параллельных этому полу диаметру. Для определения натуральной длины отрезка LM , расположенного в плоскости xOy или в любой плоскости, ей параллельной, нужно провести полу диаметр $OF_1 \parallel LM$ и на его продолжении отложить отрезок OM_1 , равный отрезку LM . Проведя $M_1M_x \parallel F_1E_x$, получим два треуголь-

ника: F_1OE_X и M_1OM_X , в которых $OF_1 = OE_X$ как радиусы окружности, а $OM_1 = OM_X$ в силу подобия полученных треугольников. Определив натуральную величину отрезка OM_X по заданному на оси O_X аксонометрическому масштабу или по заданному для оси O_X коэффициенту искажения, получим искомую натуральную величину отрезка LM . Аналогично решается и обратная задача, т. е. строится в заданном на чертеже направлении LM отрезок, натуральная величина которого задана.



Черт. 175

Чтобы построить в плоскости xOy прямой угол при заданном направлении (LM) одной стороны, следует провести в масштабном эллипсе два сопряженных диаметра, один из которых (OF_1) параллелен заданной стороне угла; тогда направление второго (OF_2) из сопряженных диаметров определит направление другой стороны (LN) искомого прямого угла. Масштабный эллипс может быть построен не только в каждой из координатных плоскостей, но вообще в произвольной плоскости, требуемой условием поставленной задачи.

При пользовании масштабным эллипсом нельзя достигнуть большой точности построения, но применение его удобно при выполнении наглядных пособий иллюстративного характера, если на изображении должны быть отображены метрические свойства фигур.

Пример. На чертеже 175 масштабный эллипс применен к построению в аксонометрической проекции изображения группы тел:

1) прямоугольной плиты ($180 \times 180 \times 40$), 2) правильной треугольной призмы (ребро основания 140, боковое ребро 200), 3) цилиндрического кольца (диаметр основания 200, длина оси 70, диаметр отверстия 130). Взаимное положение этих тел произвольно.

Изображение выполнено в практической прямоугольной диметрии. Радиус окружности, представленной масштабным эллипсом, принят равным 100 единицам.

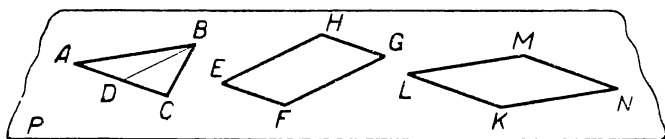
Для построения горизонтальных ребер прямоугольной плиты использованы сопряженные полу диаметры OA и OB , один из которых проведен в произвольном направлении; длина вертикального ребра плиты взята по масштабу OC оси Oz . Одно ребро основания призмы расположено в плоскости xOy параллельно ребру плиты на произвольном расстоянии от него; длина этого ребра отложена по масштабу полу диаметра OA . Призма опирается своей гранью на верхнее ребро плиты, поэтому боковое ребро призмы пересекается с этим ребром плиты. Из взаимного расположения плиты и призмы следует, что проекция на основную плоскость бокового ребра призмы перпендикулярна к нижнему ребру плиты и потому может быть проведена параллельно полу диаметру OB до точки встречи с нижним ребром плиты. Полученная точка встречи является проекцией искомой точки пересечения ребер призмы и плиты; она дает возможность найти эту искомую точку, как показано на чертеже вспомогательными линиями, и провести боковое ребро призмы. Длина бокового ребра призмы определяется по масштабу полу диаметра OD , принадлежащего масштабному эллипсу, построенному в плоскости BOC ; плоскость BOC параллельна плоскости симметрии призмы, проведенной через верхнее боковое ребро призмы. Направление высоты треугольника, представляющего основание призмы, определяется полу диаметром OE , сопряженным полу диаметру OD . Длина этой высоты в масштабе полу диаметра OE может быть определена, если найти ее натуральную длину в отдельно построенном равностороннем треугольнике (сторона треугольника 140), отложить эту длину (OFz) в натуральном масштабе на оси Oz и перенести на продолженный полу диаметр OE , как показано (OF) на чертеже. Направление и длина оси цилиндрического кольца определяется произвольно выбранным полу диаметром OG . Внешнее и внутреннее очертания оснований кольца построены по полу диаметрам OK и OC , сопряженным между собой и с полу диаметром OG .

Условное метрически определенное изображение. В учебной работе при использовании наглядных изображений передача метрических свойств предмета не всегда является обязательной (см. гл. II). В силу этого преподаватель при выполнении наглядных изображений в ряде случаев может быть освобожден от некоторых вспомогательных построений, связанных с выбором той или иной системы аксонометрических осей. Это обстоятельство значительно упрощает выполнение изображения и, что особенно важно в педагогическом отношении, внимание и мысль учащихся не отвлекаются от основного вопроса изучаемой темы построениями, не имею-

щими непосредственного отношения к данной теме. В этих случаях построение наглядного изображения пространственной фигуры должно сопровождаться лишь требованием полноты получаемого изображения.

Некоторые фигуры в самой своей структуре содержат определенные метрические свойства, например трехгранный угол с взаимно перпендикулярными гранями, куб, правильные призмы и пирамиды, прямые круговые цилиндр и конус, шар и др. Изображения таких фигур, не связанные с какой-либо аксонометрической системой должны сопровождаться словесным указанием, уточняющим форму изображенной фигуры (см. гл. I). Такие изображения называются *условными метрически определенными изображениями*.

Рассмотрим примеры построения условных метрически определенных изображений некоторых геометрических фигур.



Черт. 176

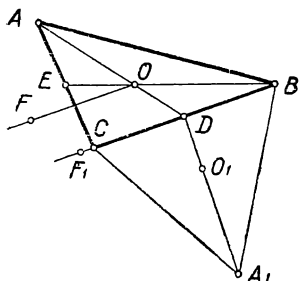
Равносторонний треугольник. В § 3 (черт. 16) мы показали, что проекцией некоторого заданного треугольника может быть треугольник любой формы. Это дает нам возможность, начертив произвольной формы треугольник ABC (черт. 176), принять его за изображение равностороннего треугольника $A'B'C'$, расположенного в какой-нибудь плоскости P' . В силу такого условия чертеж 176 становится метрически определенным; все дальнейшие построения на этом чертеже являются связанными заданным условием о форме треугольника ABC и также представляют метрически определенные изображения.

Так, например, найдя точку D — середину стороны AC , мы получим в плоскости P две прямые AC и BD , взаимно перпендикулярные между собой в натуре. Пользуясь этим, мы можем построить в плоскости P прямоугольник $EFGH$, если направим его стороны параллельно прямым AC и BD . Равным образом мы должны принять фигуру $KLMN$ за ромб, лежащий в плоскости P , если возьмем отрезки KL , LM , MN и NK попарно равными и параллельными отрезкам AB и AC .

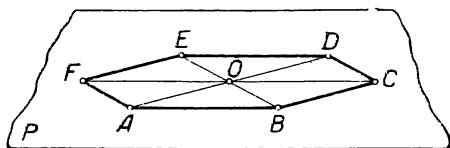
Найдя на изображении равностороннего треугольника ABC (черт. 177) при помощи медиан AD и BE центр O описанной окружности и приняв радиус OA этой окружности за единицу масштаба, мы можем построить единицу масштаба (OF) в направлении $OF \parallel BC$, сопряженном направлению OA . Для этого построим в плоскости чертежа (при отрезке BC или отдельно) равносторонний

треугольник A_1BC , найдем радиус A_1O_1 описанной около него окружности и отложим $DF_1 = O_1A_1$. Переходя к данному изображению ABC , мы можем на основании свойства параллельного проектирования утверждать, что отрезок OF , равный DF_1 , представит искомую единицу масштаба в направлении, сопряженном OA . Описанное построение делает чертеж 177 аксонометрическим и позволяет в случае надобности дополнить изображением эллипса, построенного на сопряженных полудиаметрах OA и OF .

Правильный шестиугольник. Примем произвольный треугольник AOB за равносторонний треугольник, лежащий в плоскости P (черт. 178), и будем считать сторону AB стороной правильного



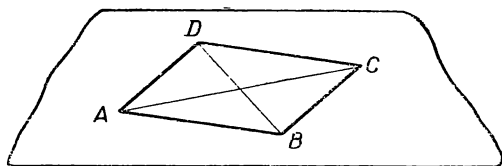
Черт. 177



Черт. 178

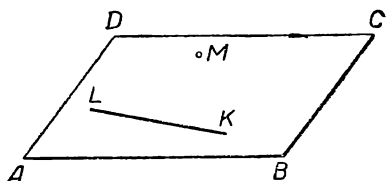
шестиугольника, а стороны AO и BO — радиусами круга, описанного около этого шестиугольника. Продолжив радиусы AO и BO на расстояния, равные их длине, за центр O , получим вершины D и E и сторону DE нашего шестиугольника. Вершины C и F находим как концы диаметра CF , параллельного стороне AB и равного удвоенной ее длине.

Квадрат. В силу основных свойств параллельных проекций проекция квадрата может отображать только два его геометрических свойства: параллельность противоположных сторон и попарное равенство этих сторон. Следовательно, проекцией квадрата в общем случае является параллелограмм. Форма этого параллелограмма при заданном положении квадрата относительно плоскости проекции зависит от направления проектирования.

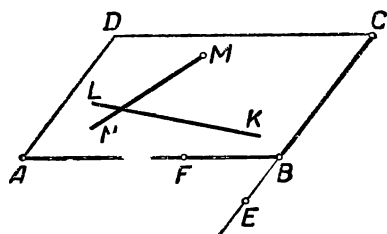


Черт. 179

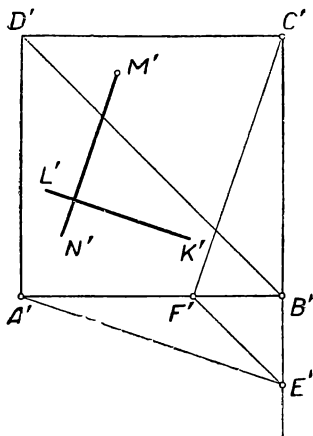
Примем параллелограмм $ABCD$ (черт. 179) за изображение некоторого квадрата $A'B'C'D'$, расположенного в произвольной плоскости P' . Форма квадрата как частного вида параллелограмма может быть обусловлена двумя независимыми метрическими требованиями. Мы можем, например, сопроводить чертёж 179 указаниями, что в изображении параллелограмма $ABCD$ угол между прямыми AB и AD и угол между прямыми AC и BD являются в натуре прямыми; в силу этих метрических условий чертёж 179 становится метрически определённым изображением*.



Черт. 180



Черт. 182



Черт. 181

Если на чертёж 179 наложить только одно метрическое условие, например, что в параллелограмме $ABCD$ угол BAD соответствует прямому углу оригинала, то метрическая неопределённость изображения не будет вполне устранена, вследствие того что угол между диагоналями остается неопределённым; параллелограмм $ABCD$ может служить изображением неограниченного числа различных по форме прямоугольников.

К указанным выше двум метрическим условиям ($AB \perp AD$ и $AC \perp BD$), определяющим форму квадрата на чертеже 179, не может быть добавлено какое-либо третье метрическое условие, не зависящее от двух заданных. Так, например, проведение на чертеже 179 третьей пары сопряженных прямых не может быть произвольным и выполняется на основании следующих соображений.

* С обоснованием метрической определённости изображений плоских фигур можно ознакомиться в книге Н. Ф. Четверухина «Чертежи пространственных фигур в курсе геометрии», § 24 — 25.

Пусть на чертеже 180 изображена квадратная пластинка $ABCD$, в плоскости которой требуется провести через заданную точку M перпендикуляр к заданной прямой KL .

Покажем предварительно решение заданной задачи на некотором квадрате $A'B'C'D'$, представленном в натуральную величину (черт. 181). Проведем $A'E' \parallel K'L'$ и повернем прямоугольный треугольник $A'B'E'$ вокруг вершины B' в положение $C'B'F'$. Нетрудно доказать, что в результате такого поворота новое положение $C'F'$ гипотенузы треугольника составляет с первоначальным положением $A'E'$ прямой угол. Проведем $M'N' \parallel C'F'$, получим $M'N' \perp K'L'$. Заметим, что точка F' может быть получена на стороне $A'B'$ в пересечении с прямой $E'F'$, параллельной $B'D'$. Описанный способ решения данной задачи может быть выполнен графически непосредственно на заданном проекционном чертеже (черт. 182) при помощи угольника и линейки: а) на прямой CB отмечаем точку E в направлении $AE \parallel KL$; б) на прямой AB отмечаем точку F в направлении $EF \parallel BD$; в) проводим $MN \parallel CF$.

Правильные призмы и пирамиды. При описании координатного метода (§ 16) было указано, что метрическая определенность изображения пространственной фигуры может быть обусловлена на чертеже заданием трех, связанных с фигурой попарно сопряженных (в пространстве — взаимно перпендикулярных) прямых с произвольно выбранными коэффициентами искажения по этим прямым. Это положение может быть использовано для построения изображений правильных призм и пирамид.

Построение всякой правильной призмы и пирамиды приводится к построению ее основания как проекции правильного многоугольника и к построению высоты. В основе этих построений лежат, во-первых, рассмотренные выше приемы построения метрически определенных изображений правильных многоугольников и, во-вторых, соображение о том, что построение высоты призмы и пирамиды метрически не зависит от построения основания. Используя эти данные, мы можем строить изображения фигур указанного вида.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| Предисловие | 3 |
| Введение | 4 |
| Глава I. Параллельные проекции и их свойства | |
| § 1. Общие сведения о методе проекций | 6 |
| § 2. Основные свойства параллельных проекций | 9 |
| § 3. Изображение плоских многоугольников | 14 |
| § 4. Изображение многогранников | 18 |
| § 5. Изображение окружности | 21 |
| § 6. Изображение цилиндра и конуса | 27 |
| § 7. Изображение шара | 30 |
| Глава II. Полные изображения и их применение в чертежах пространственных фигур | |
| § 8. Полнота изображения | 34 |
| § 9. Основные позиционные задачи и их решение на полном изображении | 41 |
| § 10. Пересечение поверхности тела плоскостью | 46 |
| § 11. Пересечение поверхности тела прямой линией | 55 |
| § 12. Взаимное пересечение тел | 59 |
| Глава III. Способы передачи метрических свойств пространственных фигур на проекционном чертеже | |
| § 13. Общие сведения о метрически определенных чертежах | 74 |
| § 14. Координатный метод; основные сведения | 75 |
| § 15. Аксонометрическая проекция точки и фигуры; основные понятия | 77 |
| § 16. Косоугольная аксонометрическая проекция | 79 |
| § 17. Прямоугольная аксонометрическая проекция. Свойства аксонометрических осей | 81 |
| § 18. Построение аксонометрических масштабов в прямоугольной проекции | 83 |
| § 19. Определение коэффициентов искажения по осям | 89 |
| § 20. Прямоугольная аксонометрическая проекция окружности | 91 |
| § 21. Выбор проектирующего аппарата в прямоугольной аксонометрической проекции | 97 |
| § 22. Изометрическая и диметрическая прямоугольные проекции и их применение в практике | 105 |
| § 23. Масштабный эллипс. Условные метрически определенные изображения | 125 |

Цена 2 р. 75 к.
С 1/1-1961 г. — 28 коп.