У. Росс Эшби

Введение в кибернетику

И * Л

Издательство
иностранной
литературы

*

AN INTRODUCTION TO

CYBERNETICS

by

W. ROSS ASHBY

M.A., M.D.(Cantab.), D.P.M.

Director of Research

Barnwood House, Gloucester

LONDON

CHAPMAN & HALL LTD

1956

У. Росс Эшби

Введение в кибернетику

перевод с английского
Д. Г. Лахути

под редакцией
В. А. Успенского

с предисловием
А. Н. Колмогорова

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва, 1959

АННОТАЦИЯ

В книге излагаются основные понятия кибернетики — «науки об управлении и связи в животном и машине». Автор, биолог по специальности, обсуждает возможность широкого применения идей кибернетики в самых различных областях человеческой деятельности.

Изложение сопровождается большим числом специально подобранных примеров и упражнений. Книга рассчитана на научных работников, интересующихся вопросами кибернетики.

Редакция литературы по математическим наукам.

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

С давних пор известны аналогии между:

а) сознательной целесообразной деятельностью человека;

б) работой созданных человеком машин;

в) различнейшими видами деятельности живых организмов, которые воспринимаются как целесообразные, несмотря на отсутствие управляющего ими сознания.

Человеческая мысль искала веками объяснения этих аналогий как на путях положительного знания, так и на путях религиозных и философских спекуляций. Твердая основа для научного их изучения и рационального философского уяснения была создана, когда:

1) Дарвин предложил последовательно разработанную теорию естественного происхождения целесообразного устройства живых организмов и, в частности, происхождения сложного аппарата, позволяющего живым организмам передавать свое целесообразное устройство по наследству потомкам;

2) Павлов установил возможность объективного изучения поведения животных и человека и регулирующих это поведение мозговых процессов без всяких субъективных гипотез, выраженных в психологических терминах.

В течение последних десятилетий быстрое развитие техники связи (радио, телевидение), автоматики и вычислительной техники привело к значительному расширению самого фактического материала для сопоставлений работы машин с деятельностью живых организмов и с сознательной деятельностью человека. При этом в мышление инженеров все более стало проникать использование аналогий между работой создаваемых ими машин и работой человеческого сознания. Например, средства связи воспринимают «информацию» и передают ее точно или с «ошибками»; на автоматы возлагается задача следовать той или иной «стратегии» или «тактике» и даже «обучаться» у противника усвоенной им тактике, с тем чтобы выработать целесообразную ответную тактику; вычислительные машины имеют «запоминающие устройства» («память»); программирующие машины сами «разрабатывают программу» сложных вычислений, пользуясь более или менее совершенной «логикой», и т. д. В этой практике инженеров трудно усмотреть какую-либо философски окрашенную преднамеренность: просто указанные аналогии слишком естественны и явным образом помогают инженерам думать и изобретать.

Вполне понятно, что «целесообразная» работа машин не имеет никакой самостоятельности и является лишь техническим придатком к целесообразной деятельности человека. Однако богатый опыт, накопленный при конструировании автоматов и вычислительных машин, в настоящее время уже представляет большой интерес в качестве запаса моделей, помогающих представить себе возможные естественные управляющие и регулирующие механизмы. Процессы формирования условных рефлексов успешно изучаются при помощи моделирующих эти процессы машин [1]. Существенно опираются на аналогии со сложными электронными машинами современные работы, анализирующие деятельность мозга [2]. В современных работах по теории наследственности значительное применение находят представления о способах «кодирования» информации, разработанные в технической теории связи.

Для понимания причин возникновения новой науки — кибернетики — более существенно другое следствие новей-

---

[1] См. переводимую на русский язык книгу Р. Р. Буша и Ф. Мостеллера «Стохастическая модель обучения». [См. также опубликованную в журнале «Успехи математических наук» статью Вычислительной лаборатории Гарвардского университета «Обучение цифровой вычислительной машины». — *Прим. ред.*]

[2] См. специальную книгу У. Р. Эшби «Устройство мозга».

шего развития указанных выше разделов техники. Их развитие не только дает новый материал для философского анализа понятий «управления», «регулирования», «целесообразности» в применении к машинам и живым организмам, но, кроме того, привело к возникновению некоторых вспомогательных специальных дисциплин нефилософского характера.

Эти дисциплины возникли непосредственно из практических потребностей под названиями «теория информации» [1], «теория алгоритмов» [2], «теория автоматов» [3]. Конкретные результаты, полученные в их пределах, сейчас уже довольно многочисленны. Например, они позволяют: 1) оценить «количество информации», которое может быть надежно передано данным передающим устройством или сохранено данным запоминающим устройством; 2) оценить наименьшее количество простых звеньев с заданной схемой действия, которое необходимо, чтобы из них могло быть составлено управляющее устройство, выполняющее те или иные заданные функции. В обоих примерах результаты выражаются некоторыми математическими формулами, применимы же эти результаты совершенно одинаково и при конструировании машин, и при анализе деятельности живых организмов.

Заслугой Н. Винера является установление того факта, что совокупность этих дисциплин (в создании некоторых из них Винер принимал значительное участие) естественно объединяется в новую науку с достаточно определенным собственным предметом исследования. Сейчас уже поздно спорить о степени удачи Винера, когда он в своей известной книге в 1948 году выбрал для

---

[1] См. доклад А. Н. Колмогорова «Теория передачи информации», сделанный 16 октября 1956 г. на пленарном заседании сессии Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, и доклад Р. Л. Добрушина «Теория передачи информации», сделанный 22 апреля 1958 г. на конференции в Московском доме научно-технической пропаганды. — *Прим. ред.*

[2] См. 26-й выпуск серии «Популярные лекции по математике»: Трахтенброт Б. А., «Алгоритмы и машинное решение задач»; в предисловии к этому выпуску приведена дальнейшая библиография. — *Прим. ред.*

[3] См. выпущенный Издательством иностранной литературы сборник «Автоматы». — *Прим. ред.*

новой науки название «кибернетика». Это название достаточно установилось и воспринимается как новый термин, мало связанный со своей греческой этимологией. Кибернетика занимается изучением систем любой природы, способных воспринимать, хранить и перерабатывать информацию и использовать ее для управления и регулирования. При этом кибернетика широко пользуется математическим методом и стремится к получению конкретных специальных результатов, позволяющих как анализировать такого рода системы (восстанавливать их устройство на основании опыта обращения с ними), так и синтезировать их (рассчитывать схемы систем, способных осуществлять заданные действия). Благодаря этому своему конкретному характеру кибернетика ни в какой мере не сводится к философскому обсуждению природы «целесообразности» в машинах и в живых организмах, не заменяя также собой общего философского анализа изучаемого ею круга явлений[1].

Положение автора книги — У. Р. Эшби — как биолога, достаточно основательно изучившего отвлеченную, математическую сторону дела, весьма выигрышно для популяризации общих идей кибернетики среди лиц, для которых математический аппарат представляет большие трудности, а чрезмерно детальное вхождение в вопросы технической кибернетики тоже было бы затруднительно. При этом У. Р. Эшби достаточно осторожен в своих выводах и далек от нередко встречающегося рекламного стиля прославления кибернетики. Однако читатель должен критически относиться к высказываниям автора методологического и философского характера. Следует также иметь в виду, что некоторые выводы автора являются дискуссионными.

А. Колмогоров

[1] В этом ее отличие, например, от всеобщей организационной науки «тектологии», которую пытался в свое время создать А. А. Богданов.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Многие работники биологических наук — физиологи, психологи, социологи — интересуются кибернетикой и хотели бы применять ее методы и аппарат в своей собственной специальности. Однако многим из них мешает убеждение, что этому должно предшествовать длительное изучение электроники и высших разделов чистой математики; у них сложилось впечатление, что кибернетика неотделима от этих предметов.

Автор, однако, убежден, что это впечатление ложно. Основные идеи кибернетики по существу просты и не требуют ссылок на электронику. Для более сложных приложений может потребоваться более сложный аппарат, однако многое можно сделать, особенно в биологических науках, с помощью весьма простого аппарата; надо только применять его с ясным и глубоким пониманием затрагиваемых принципов. Если обосновать предмет общепринятыми, легко доступными положениями и затем излагать его постепенно, шаг за шагом, то, по мнению автора, нет никаких оснований ожидать, что даже работник с элементарными математическими знаниями не сможет достичь полного понимания основных принципов предмета. А такое понимание позволит ему точно решить, каким аппаратом он должен еще овладеть для дальнейшей работы и — что особенно важно — каким аппаратом он может спокойно пренебречь, как не имеющим отношения к его задачам.

Настоящая книга должна служить такого рода введением. Она начинает с общих, легко доступных понятий и шаг за шагом показывает, каким образом эти понятия могут быть уточнены и развиты, пока они не приведут к таким вопросам кибернетики, как обратная связь, устойчивость, регулирование, ультраустойчивость, информация, кодирование, шум и т. д. Нигде в книге не требуется знания математики сверх элементарной алгебры. В частности, доказательства нигде не основаны на исчислении бесконечно малых (немногими ссылками на него можно безо всякого вреда пренебречь; они приведены лишь с целью показать, каким образом исчисление бесконечно малых может применяться к рассматриваемым вопросам). Иллюстрации и примеры берутся в основном из биологических, реже из физических наук. Совпадение с книгой «Устройство мозга» невелико, так что эти две книги почти не зависят друг от друга. Однако они тесно связаны между собой, и лучше всего рассматривать их как взаимно дополнительные: одна помогает понять другую[1].

Книга делится на три части.

В части I рассматриваются основные черты механизмов; в ней обсуждаются такие вопросы, как представление механизмов посредством преобразований, понятие «устойчивости», понятие «обратной связи», различные формы независимости, которые могут существовать внутри механизмов, и соединение механизмов друг с другом. В этой части излагаются принципы, которыми следует руководствоваться, когда система столь велика и сложна (например, мозг или общество), что может рассматриваться лишь статистически. В ней обсуждается также случай системы, не вполне доступной непосредственному наблюдению, — так называемая «теория черного ящика».

---

[1] Явные и молчаливые ссылки на книгу автора «Устройство мозга» довольно часты в настоящей главе. Для удобства читателей в конце настоящего перевода помещены два приложения, составленные по книге «Устройство мозга». Эти приложения не устраняют, конечно, необходимости в более близком знакомстве с «Устройством мозга» для тех, кто желает более детально изучить предмет. — *Прим. ред.*

В части II методы, развитые в части I, применяются к исследованию понятия «информации» и к исследованию кодирования информации при ее прохождении через механизмы. В этой части рассматривается применение указанных методов к различным проблемам биологии и делается попытка показать хотя бы часть всего обилия их возможных применений. Это приводит к теории Шеннона, так что, прочитав эту часть, читатель сможет без затруднений перейти к изучению работ самого Шеннона.

В части III понятия механизма и информации применяются к биологическим системам регулирования и управления — как к врожденным, изучаемым физиологией, так и к приобретенным, изучаемым психологией. В ней показывается, как могут строиться иерархии таких систем регулирования и управления и как посредством этого становится возможным усиление регулирования. В ней дается новое и в общем более простое изложение принципа ультраустойчивости. Эта часть закладывает основы общей теории сложных систем регулирования, развивая дальше идеи книги «Устройство мозга». Таким образом, она дает, с одной стороны, объяснение исключительной способности регулирования, присущей мозгу, а с другой стороны — принципы, на основе которых проектировщик может строить машины, обладающие подобной способностью.

Хотя книга задумана как легкое введение, она не является просто болтовней о кибернетике — она написана для тех, кто хочет путем самостоятельной работы войти в эту область, для тех, кто хочет на деле, практически овладеть предметом. Поэтому она содержит много легких упражнений, тщательно подобранных по степени сложности, с указаниями и подробными ответами, так что читатель по мере продвижения может проверять усвоение прочитанного и упражнять свои новые интеллектуальные мускулы. Немногие упражнения, требующие специального аппарата, отмечены звездочкой: «*Упр.». Их пропуск не затруднит продвижения читателя.

Для удобства ссылок материал разделен на параграфы; при всех ссылках приводятся номера параграфов, и поскольку эти номера стоят на каждой странице сверху, найти параграф так же легко и просто, как найти страницу. Параграфы обозначаются так: «§ 9/14», что указывает на § 14 гл. 9. Рисунки, таблицы и упражнения нумеруются внутри каждого параграфа; так, рис. 9/14/2 есть второй рисунок в § 9/14. Простые ссылки, например «Упр. 4», обозначают ссылку на материал внутри данного параграфа. Там, где слово формально определяется, оно напечатано полужирным шрифтом.

Я хотел бы выразить мою признательность Майклу Б. Спорну, проверившему все ответы к упражнениям. Я хотел бы также воспользоваться случаем, чтобы выразить глубокую благодарность управляющим больницы «Барнвуд Хаус»[1] и д-ру Дж. У. Т. Х. Флемингу за широкую поддержку, которая сделала возможными эти исследования. Хотя книга затрагивает многие вопросы, они служат лишь средством; целью всей книги было выяснить, каким принципам нужно следовать, пытаясь восстановить нормальную деятельность больного организма, потрясающе сложного, если речь идет о человеке. Я верю, что новое понимание может привести к новым и действенным методам, ибо потребность в них велика.

У. Росс Эшби.

«Барнвуд Хаус»
Глостер

[1] «Барнвуд Хаус» (Barnwood House) — психиатрическая больница в Глостере (Gloucester). Автор является заведующим исследовательским отделом (Director of Research) этой больницы — *Прим. ред.*

ГЛАВА 1

Новое

1/1. Винер определил кибернетику как «науку об управлении и связи в животном и машине», или, говоря короче, как искусство *кормчего*. Именно этим вопросам посвящена настоящая книга. Ее темами будут координация, регулирование и управление, представляющие величайший биологический и практический интерес.

Мы должны поэтому исследовать понятие механизма. Однако предварительно полезно дать некоторое введение, ибо кибернетика рассматривает это понятие под новым и, следовательно, необычным углом. Без такого введения гл. 2 может показаться содержащей серьезные ошибки. Следует ясно понять новую точку зрения, так как всякое неосознанное колебание между старой и новой точками зрения может привести к путанице.

1/2. *Особенности кибернетики.* Многие книги носят заглавие «Теория машин», но обычно они содержат сведения о *механических* вещах, о рычагах и зубчатых колесах. Кибернетика тоже является «теорией машин», но она говорит не о вещах, а о *способах поведения*. Она спрашивает не *«что это такое?»*, а *«что оно делает?»*. Например, она очень интересуется такими высказываниями, как высказывание: «эта переменная испытывает простое гармоническое колебание»; гораздо меньше ее занимает вопрос, чем является эта переменная величина:

положением точки на колесе или потенциалом электрической цепи. Таким образом, она по существу функциональна и бихевиористична.

Сначала кибернетика была тесно связана по многим линиям с физикой; но она не зависит существенным образом от законов физики или свойств материи [1]. Кибернетика занимается всеми формами поведения постольку, поскольку они являются регулярными, или детерминированными, или воспроизводимыми. Материальность не имеет для нее значения, равно как и соблюдение или несоблюдение обычных законов физики (пример, приведенный в § 4/15, пояснит эту мысль). *Истины кибернетики не нуждаются в выведении из какой-либо другой отрасли науки.* Кибернетика имеет свои собственные основания. Одна из целей данной книги — ясно показать эти основания.

1/3. Кибернетика примерно так же относится к реальным машинам — электронным, механическим, нервным и экономическим, — как геометрия к реальным объектам в нашем земном пространстве. Было время, когда под «геометрией» понимали отношения, которые можно наглядно представить на трехмерных телах или двумерных чертежах. Формы, существовавшие на Земле у животных, растений, минералов, были многочисленнее и богаче свойствами, чем формы, существовавшие в элементарной геометрии. В те дни форма, подсказанная геометрией, но не допускавшая наглядного представления в обычном пространстве, была сомнительной или неприемлемой. Обычное пространство *господствовало* над геометрией.

Сейчас положение совершенно другое. Геометрия существует по собственному праву, благодаря собственным силам. Она теперь может точно и последовательно рассматривать многообразие форм и пространств, далеко превосходящее все, что может дать земное пространство. Сейчас геометрия содержит земные формы, а не наоборот, ибо земные формы суть лишь частные случаи во всеобьемлющей геометрии.

---

[1] Законы кибернетики действительно не зависят от законов физики, но зависят, конечно, от свойств материи. Более того, они, как и законы всякой науки, *выводятся* из этих свойств. — *Прим. ред.*

Вряд ли нужно указывать на тот выигрыш, который принесло с собой развитие геометрии. Геометрия теперь служит остовом, на котором все земные формы могут найти свое естественное место, благодаря чему становятся прозрачными отношения между различными формами. Соответственно этому растущему пониманию растет и способность управления.

Кибернетика находится в аналогичном отношении к существующим машинам. Ее предметом является область «всех возможных машин», и лишь во вторую очередь она интересуется тем, что некоторые из этих машин еще не созданы ни человеком, ни природой. Кибернетика дает общий остов, на котором могут быть расположены, соотнесены и поняты все индивидуальные машины.
1/4. Поэтому кибернетика не боится возражений, что некоторые из рассматриваемых ею машин не представлены среди машин, существующих вокруг нас. В этом отношении она следует по тому пути, по которому с таким успехом идет математическая физика. Эта последняя наука долгое время изучала преимущественно системы, которые, как хорошо известно, не существуют: пружины, не имеющие массы; частицы, имеющие массу, но не имеющие объема; идеальные газы и т. д. Верно, что таких вещей не существует; но это не значит, что математическая физика есть просто фантазия, и это не заставляет физика отбросить свой трактат по теории пружин без массы, ибо названная теория оказывает ему неоценимые услуги в практической работе. Хотя пружина без массы не представима физически, она обладает некоторыми свойствами, придающими ей величайшую важность для физика, если он хочет понять хотя бы такую простую систему, как часы.

Биолог знает и применяет тот же самый принцип, когда он подвергает ланцетника (Amphioxus) или какую-либо исчезнувшую форму детальному изучению, совершенно непропорциональному ее сегодняшнему экологическому или экономическому значению.

Кибернетика точно так же выделяет некоторые типы механизмов (§ 3/3), представляющие особый интерес для общей теории; и она делает это безотносительно к тому, насколько эта форма обычна для земных машин.

Лишь после достаточно полного изучения *возможных* отношений между машинами кибернетика переходит к рассмотрению форм, действительно обнаруживаемых в какой-либо конкретной отрасли науки.

1/5. Ввиду такого метода, требующего прежде всего полноты и общности, в кибернетике при рассмотрении любой данной, конкретной машины типичен не вопрос: «какое индивидуальное действие совершит она здесь и сейчас?» — а вопрос: «каковы *все* возможные формы поведения этой машины?»

Благодаря этому обстоятельству теория информации играет большую роль в проблемах кибернетики. Ведь теория информации характеризуется по существу тем, что она всегда имеет дело с некоторым *множеством* возможностей; как ее исходные данные, так и ее окончательные выводы относятся всегда к множеству как таковому, а не к какому-либо отдельному элементу в нем.

Эта новая точка зрения приводит к рассмотрению задач нового типа. Со старой точки зрения, видя, скажем, что из яйцеклетки вырастает кролик, спрашивали: «почему это происходит? почему яйцеклетка не остается просто яйцеклеткой?» Попытки ответить на этот вопрос вели к изучению энергетики явлений и к открытию различных причин, вызывающих изменение яйцеклетки. Например, устанавливалось, что ее жиры могут окисляться, выделяя свободную энергию; что она имеет фосфорилирующие энзимы и вследствие этого ее метаболиты могут включать эту энергию в цикл Кребса и т. д. В этих исследованиях основным является понятие энергии.

Совершенно отлична, хотя столь же основательна точка зрения кибернетики. Она принимает как данное, что яйцеклетка обладает достаточным количеством свободной энергии и что она метаболически столь тонко уравновешена, что является как бы взрывчатой. А когда из яйцеклетки разовьется некоторая форма, то кибернетика спросит: «почему результатом изменений явилась форма кролика, а не форма собаки, форма рыбы или даже форма тератомы?» Кибернетика рассматривает гораздо больше возможностей, чем их существует фактически, а затем спрашивает, почему конкретный случай подчиняется обычным конкретным ограничениям. При этом вопросы энергетики не играют почти никакой роли — энергия просто принимается как нечто данное. Часто не имеет значения даже замкнутость или открытость системы в энергетическом отношении — важна *лишь* та степень, в которой система подчиняется детерминирующим и управляющим факторам. Никакая информация, или сигнал, или детерминирующий фактор не могут пройти из одной части системы в другую, не будучи отмечены как значимое событие. Фактически можно определить кибернетику как *исследование систем, открытых для энергии, но замкнутых для информации и управления,* — систем, «непроницаемых для информации» (§ 9).

1/6. *Применения кибернетики.* После такого общего обзора кибернетики мы можем перейти к рассмотрению некоторых путей ее возможного применения. Я ограничусь теми приложениями кибернетики, которые обещают оказаться наиболее полезными для биологических наук. Это рассмотрение может быть только очень кратким и общим. Многие приложения уже осуществлены и слишком хорошо известны, чтобы описывать их здесь; еще большее число, несомненно, будет осуществлено в будущем. Однако два особых научных достоинства кибернетики заслуживают специального упоминания.

Одно из них состоит в том, что кибернетика предлагает единую терминологию и единый комплекс понятий для представления систем самых различных типов. До недавнего времени любая попытка сопоставить, например, многочисленные факты о следящих системах с данными о мозжечке излишне усложнялась тем обстоятельством, что свойства следящих систем описывались в терминах, напоминающих об автопилотах, или радиоприемниках, или гидравлических тормозах, тогда как свойства мозжечка описывались в терминах, напоминающих об анатомическом театре и кровати больного; но эти стороны вещей не имеют никакого отношения к *аналогиям* между следящей системой и мозжечковыми рефлексами. Кибернетика предлагает единый комплекс понятий, который благодаря своему точному соответствию с каждой отраслью науки может привести все отрасли науки в точное соответствие друг с другом.

2 Зак. 3346. У. Росс Эшби

Не раз отмечалось в истории науки, что после открытия соответствия между двумя отраслями науки каждая отрасль начинает способствовать развитию другой (см. § 6/8). Результатом часто является заметное ускорение роста обеих отраслей. Приходят на ум такие примеры, как исчисление бесконечно малых и астрономия, вирусы и протеиновые молекулы, хромосомы и наследственность. Конечно, ни одна отрасль ничего не *доказывает* о законах другой, но она может выдвигать предположения, в высшей степени полезные и плодотворные. Этот вопрос рассматривается в § 6/8. Здесь я должен упомянуть лишь о том, что кибернетика, по-видимому, обнаруживает большое число интересных и многообещающих параллелей между машиной, мозгом и обществом. И она может создать общий язык, с помощью которого открытия в одной отрасли науки легко могут быть использованы в других отраслях.

1/7. *Сложная система.* Второе достоинство кибернетики состоит в том, что она предлагает метод научного исследования систем, сложность которых слишком велика и существенна, чтобы ее можно было игнорировать. Мы хорошо знаем, что такие системы даже слишком обычны в биологическом мире!

При исследовании более простых систем методы кибернетики иногда не обнаруживают очевидных преимуществ по сравнению с давно известными методами. Новые методы показывают свою силу главным образом тогда, когда системы становятся сложными.

Наука стоит сегодня как бы на водоразделе. В течение двух столетий она исследовала системы, которые либо внутренне просты, либо могут быть разложены на простые составляющие. Тот факт, что в течение столетий могли принимать такую догму, как: «изменяйте факторы по одному», показывает, что ученые занимались в основном исследованием систем, *допускающих* этот метод; ибо в сложных системах он часто не применим по существу. Лишь после работ сэра Рональда Фишера в 20-х годах по поводу экспериментов, проведенных с сельскохозяйственными почвами, стали отчетливо сознавать существование сложных систем, которые не допускают изменения только одного фактора за один раз, ибо эти системы столь динамичны и внутренне связаны, что изменение одного фактора служит непосредственной причиной изменения других, иногда очень многих факторов. До недавнего времени наука стремилась избегать исследования таких систем, сосредоточивая свое внимание на системах простых и особенно на приводимых (§ 4/14).

Однако при исследовании некоторых систем невозможно полностью обойти их сложность. Кора головного мозга свободно живущего организма, муравейник как функционирующее общество и человеческая экономическая система выделялись среди других систем как своей практической важностью, так и своей недоступностью для старых методов исследования. И вот сегодня мы видим, что психозы остаются неизлеченными, общества переживают упадок, экономические системы колеблются, а ученый не может сделать ничего, кроме как признать всю сложность исследуемого объекта. Но наука уже предпринимает новые шаги к исследованию «сложности» как самостоятельного явления.

Выдающееся место среди методов исследования сложности занимает кибернетика. Она отвергает смутные интуитивные идеи, извлекаемые из обращения с такими простыми системами, как будильник или велосипед, и приступает к созданию строгой науки о сложности. Поначалу (как покажут первые несколько глав этой книги) можно подумать, что она занимается плоскими, тривиальными истинами; но все дело в том, что ее основания должны быть широкими и прочными. Они закладываются так, чтобы кибернетика могла развиваться строго, без той изначальной смутности и расплывчатости, которая была свойственна большинству прошлых попыток преодолеть сложности, связанные, в частности, с работой мозга.

Кибернетика дает нам надежду на создание эффективных методов для изучения систем чрезвычайной внутренней сложности и управления ими. Эта задача будет решена кибернетикой, когда она выделит то, что достижимо (ибо, вероятно, большинство из исследований прошлого стремилось достичь невозможного), и затем создаст обобщенные стратегические приемы, достаточно обоснованные и допускающие единообразное применение к разнообразным частным случаям. Тем самым кибернетика дает нам надежду на создание фундаментальных методов, которые позволят атаковать психологические, социальные и экономические недуги, побивающие нас в настоящее время своей внутренней сложностью. Третья часть этой книги не претендует на окончательную разработку таких методов, но пытается предложить основания, на которых такие методы могут быть построены, и начать продвижение в правильном направлении.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

МЕХАНИЗМ

Свойства, приписываемые обычно любому объекту, являются в конечном счете названиями его поведения.

Херрик

ГЛАВА 2

Изменения

2/1. Самым фундаментальным понятием кибернетики является понятие «различия», означающее, что либо две вещи ощутимо различны, либо одна вещь изменилась с течением времени. Нет нужды описывать здесь область применения этого понятия, ибо последующие главы достаточно проиллюстрируют ее. Понятие это включает, естественно, все изменения, которые могут произойти с течением времени. Ведь когда растения растут, планеты стареют и машины движутся, всегда налицо некоторое изменение одного состояния в другое. Первой нашей задачей будет развить это понятие «изменения», не только уточняя, но и обогащая его, придавая ему такую форму, которая, как показал опыт, необходима для углубленного исследования.

Часто изменение происходит непрерывно, т. е. бесконечно малыми шагами: например, когда Земля движется в пространстве или кожа загорающего темнеет под действием солнечных лучей. Однако рассмотрение бесконечно малых шагов порождает множество чисто математических трудностей, так что мы полностью откажемся от такого рассмотрения. Вместо этого мы примем во всех случаях, что изменения происходят конечными шагами во времени и что всякое различие также конечно. Мы примем, что изменение происходит измеримым скачком, подобно тому как деньги на банковском счете изменяются самое меньшее на пенни. Хотя это предположение может показаться искусственным в мире, где обычна непрерывность, оно имеет серьезные преимущества для введения в предмет и не так искусственно, как кажется. Когда различия конечны, все важные вопросы, как мы увидим позже, могут быть решены простым счетом, так что нетрудно быть вполне уверенным в том, правы ли мы или нет. При рассмотрении же непрерывных изменений нам часто пришлось бы сравнивать бесконечно малое с бесконечно малым или определять, что получится при сложении бесконечно большого числа бесконечно малых, — вопросы, отнюдь не легкие для ответа.

Во многих случаях дискретное можно довольно просто перевести в непрерывное с достаточной для практических целей точностью, построив график дискретного, на котором значения были бы показаны как отдельные точки. Тогда легко увидеть, какую форму примут изменения, если точки будут бесконечно увеличиваться в числе и сближаться.

Однако в действительности мы ничего не теряем, ограничиваясь рассмотрением конечных различий. Ибо установив с достоверностью, что происходит в случае, когда различия имеют данную величину, мы можем рассмотреть случай, когда они значительно меньше. Зная с достоверностью, что произойдет в этом случае, мы можем рассмотреть, что произойдет, когда они будут еще меньше. Мы можем действовать так и дальше, твердо устанавливая каждый шаг, пока не уловим общей тенденции; тогда мы сможем сказать, каким будет предел при различии, стремящемся к нулю. Фактически математик пользуется этим методом всегда, когда он хочет действительно знать, что происходит при непрерывных изменениях.

Таким образом, мы ничего не теряем при рассмотрении случая только конечных изменений. Такое рассмотрение дает ясную и простую основу, и при желании его всегда можно перевести в непрерывную форму.

Этот вопрос рассматривается еще раз в § 3/3.

2/2. А теперь введем несколько терминов, которые будут употребляться постоянно. Рассмотрим простой пример, когда под действием солнечных лучей бледная кожа превращается в темную кожу. Итак, нечто (бледная кожа) подвергается действию некоторого фактора (солнечных лучей) и превращается в темную кожу. То, что испытывает действие (бледную кожу), мы будем называть **операндом**; действующий фактор будем называть **оператором**; а то, во что превратился операнд, будем называть **образом**. Происходящее при этом изменение можно однозначно изобразить формулой:

бледная кожа ⟶ темная кожа.

Мы будем называть его **переходом**.

Переход определяется двумя состояниями и указанием, какое из них изменяется в другое состояние.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

2/3. Одиночный переход, однако, слишком прост. Чтобы понятие изменения было полезным, это понятие, как показал опыт, следует расширить. Оно должно быть распространено на случай, когда оператор может действовать более чем на один операнд, вызывая специфический переход в каждом из них. Так, оператор «действие солнечных лучей» вызовет ряд переходов, в том числе:

холодная почва ⟶ теплая почва,
незасвеченная фотопластинка ⟶ засвеченная фотопластинка,
цветной пигмент ⟶ выцветший пигмент.

Такое множество переходов для некоторого множества операндов есть **преобразование**.

Другим примером преобразования служит простое кодирование, превращающее каждую букву сообщения в следующую за ней по алфавиту, причем Z превращается в A; так, CAT превратится в DBU. Это преобразование определяется таблицей:

$$A \longrightarrow B,$$
$$B \longrightarrow C,$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$
$$Y \longrightarrow Z,$$
$$Z \longrightarrow A.$$

Заметим, что преобразование определяется не какой-либо ссылкой на то, чем оно «действительно» является, и не ссылкой на какую-либо физическую причину изменения, а заданием множества операндов и указанием, во *что* превращается каждый из них. Преобразование относится к тому, что происходит, а не к тому, *почему* это происходит. Аналогично, мы иногда можем знать что-нибудь об операторе как о вещи в себе (как мы знаем кое-что о солнечном свете), но часто это знание несущественно. Мы *должны* знать только то, как он действует на операнды; иными словами, мы должны знать преобразование, которое он производит.

Для типографского удобства данное преобразование можно записать и так:

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \ldots & Y & Z \\ B & C & \ldots & Z & A \end{matrix}.$$

Мы будем употреблять эту форму как стандартную.

2/4. *Замкнутость.* Когда оператор действует на множество операндов, может случиться, что полученное множество образов не содержит ни одного элемента, который не входил бы уже в множество операндов; таким образом, преобразование не порождает новых элементов. Например, в преобразовании

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \ldots & Y & Z \\ B & C & \ldots & Z & A \end{matrix}$$

каждый элемент нижней строки встречается также и в верхней. Когда это имеет место, множество операндов **замкнуто** относительно данного преобразования. Свойство «замкнутости» есть отношение между преобразованием и данным множеством операндов; если то или другое меняется, может измениться и замкнутость.

Следует заметить, что проверка на замкнутость осуществляется не ссылкой на какую-либо возможную причину преобразования, а ссылкой на детали самого преобразования. Поэтому она может производиться даже тогда, когда мы ничего не знаем о причине изменений.

Упр. 1. Если операнды — положительные числа 1, 2, 3 и 4 и действует оператор «прибавить к данному числу три», то преобразование имеет вид

$$\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix}.$$

Замкнуто ли оно?

Упр. 2. Операнды — английские буквы, имеющие греческие эквиваленты (т. е. все буквы, кроме j, q и т. д.); действует оператор «превратить каждую английскую букву в ее греческий эквивалент». Замкнуто ли преобразование?

Упр. 3. Замкнуты ли следующие преобразования:

$$A:\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ a & a & a & a \end{matrix};\qquad B:\downarrow\begin{matrix} f & g & p & q \\ g & f & q & p \end{matrix};$$

$$C:\downarrow\begin{matrix} f & g & p \\ g & f & q \end{matrix};\qquad D:\downarrow\begin{matrix} f & g \\ g & f \end{matrix}?$$

Упр. 4. Напишите, по образцу упр. 3, преобразование, которое имеет только один операнд и замкнуто.

Упр. 5. Мистер C из Шахматного Клуба Чудаков разработал систему игры, которая строго предписывает в каждой возможной позиции, каков лучший следующий ход игрока как для белых, так и для черных, за исключением тех позиций, в которых игрок уже получил мат[1]. Таким образом, эта теория определяет некоторое преобразование позиции в позицию. Будучи уверен в том, что это преобразование замкнуто и что C всегда играет по своей системе, мистер D сразу же предложил мистеру C сыграть в шахматы на большую ставку. Умно ли поступил D?

2/5. Преобразование может иметь бесконечное число дискретных операндов: таково преобразование

$$\downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots \end{matrix},$$

где точки просто означают, что перечень продолжается подобным образом без конца. Бесконечные множества могут привести к затруднениям, но в этой книге мы будем рассматривать только простые и ясные случаи. Замкнутость или незамкнутость такого преобразования определяется соответственно невозможностью или возможностью назвать новый конкретный, имеющий

[1] То же самое, очевидно, относится и к патовым позициям. — *Прим. перев.*

индивидуальное название образ, который не встречался бы среди операндов. В приведенном выше примере каждый отдельный образ, например 142 857, наверняка можно найти среди операндов. Следовательно, данное бесконечное преобразование замкнуто.

Упр. 1. В преобразовании A операнды суть четные числа от 2 и далее, а образы суть их квадраты:

$$A: \downarrow \begin{matrix} 2 & 4 & 6 & \ldots \\ 4 & 16 & 36 & \ldots \end{matrix} .$$

Замкнуто ли A?

Упр. 2. В преобразовании B операнды суть все положительные числа 1, 2, 3, ..., а образом каждого из них служит его правая цифра; так, например, $127 \to 7$, $6493 \to 3$. Замкнуто ли B?

2/6. *Обозначения.* Многие преобразования становятся до неудобства длинными, если выписывать их *in extenso*. В § 2/3 нам уже пришлось использовать точки «. . .» для изображения тех операндов, которые не задавались индивидуально. По чисто практическим причинам мы должны будем разработать более компактный способ записи наших преобразований, хотя следует иметь в виду, что при любых сокращениях преобразование задается по существу так же, как в § 2/3. Сейчас мы опишем некоторые сокращения. Надо иметь в виду, что они являются просто стенографической записью и не включают ничего сверх того, что было явно сформулировано в последних параграфах.

Часто задание преобразования упрощается благодаря какому-либо простому соотношению, связывающему каждый операнд с соответствующим ему образом. Так, преобразование из упр. 2/4/1 может быть заменено единственной строкой:

$$\text{операнд} \longrightarrow \text{операнд плюс три.}$$

Все преобразование может быть, таким образом, задано общим правилом, записанным более компактно:

$$\text{Оп.} \longrightarrow \text{Оп.} + 3,$$

вместе с указанием, что операнды суть числа 1, 2, 3 и 4. Обычно запись можно еще более сократить сведением двух букв к одной:

$$n \longrightarrow n+3 \quad (n = 1, 2, 3, 4).$$

Слово «операнд» в приведенной выше формуле или буква n (обозначающая *в точности* то же самое) могут показаться несколько двусмысленными. Когда мы думаем о том, во что, скажем, преобразуется число 2, буква n означает число 2 и ничего больше, а все выражение говорит нам, что оно превратится в 5. Однако то же самое выражение может использоваться и тогда, когда n не получает никакого конкретного значения. В этом случае оно изображает все преобразование. Мы увидим, что эта двусмысленность не ведет на практике ни к какой путанице, ибо контекст всегда указывает, какое из этих двух значений имеется в виду.

Упр. 1. Сведите к одной строке преобразование

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 11 & 12 & 13 \end{matrix}.$$

Упр. 2. Сведите к одной строке каждое из преобразований:

$$a:\begin{cases} 1 \longrightarrow 7 \\ 2 \longrightarrow 14, \\ 3 \longrightarrow 21 \end{cases} \quad b:\begin{cases} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 4, \\ 3 \longrightarrow 9 \end{cases} \quad c:\begin{cases} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 1/2, \\ 3 \longrightarrow 1/3 \end{cases}$$

$$d:\begin{cases} 1 \longrightarrow 10 \\ 2 \longrightarrow 9, \\ 3 \longrightarrow 8 \end{cases} \quad e:\begin{cases} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 1, \\ 3 \longrightarrow 1 \end{cases} \quad f:\begin{cases} 1 \longrightarrow 1 \\ 2 \longrightarrow 2. \\ 3 \longrightarrow 3 \end{cases}$$

Нам часто будет требоваться символ, обозначающий образ такого символа, как n. Удобно получить его, прибавляя к операнду штрих; тогда при любом n будет справедливо соотношение $n \to n'$. Так, если операнды упр. 1 суть n, то преобразование может быть записано в виде $n' = n + 10$ $(n = 1, 2, 3)$.

Упр. 3. Выпишите полностью преобразование, операнды которого суть три числа 5, 6 и 7 и в котором $n' = n - 3$. Замкнуто ли оно?

Упр. 4. Выпишите полностью преобразования, в которых:

$$\text{(I)}\ n' = 5n \qquad (n = 5, 6, 7),$$
$$\text{(II)}\ n' = 2n^2 \qquad (n = -1, 0, 1).$$

Упр. 5. Если операнды суть все числа (включая дроби) между 0 и 1 и $n' = \frac{1}{2}n$, то замкнуто ли преобразование? (Указание: попробуйте некоторые характерные значения n: $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$;

$\frac{1}{4}$; 0,01; 0,99; пробуйте, пока не станете уверены в ответе.)

Упр. 6. (Продолжение.) Замкнуто ли при тех же операндах преобразование $n' = \frac{1}{n+1}$?

2/7. Все упомянутые до сих пор преобразования характеризовались «однозначностью». Преобразование **однозначно,** если оно обращает каждый операнд только в один образ (другие типы преобразований также возможны и важны, как будет видно в §§ 9/2 и 12/8). Так, преобразование

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & A & A & D \end{matrix}$$

однозначно, но преобразование

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ B \text{ или } D & A & B \text{ или } C & D \end{matrix}$$

неоднозначно.

2/8. Из однозначных преобразований особое значение в ряде случаев имеют **взаимно однозначные**[1] преобразования. Во взаимно однозначном преобразовании все образы отличаются друг от друга. Следовательно, не только каждый операнд дает единственный образ (согласно условию однозначности), но и каждый образ указывает (обратно) на единственный операнд. Таково преобразование

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ F & H & K & L & G & J & E & M \end{matrix}.$$

Это пример взаимно однозначного, но не замкнутого преобразования. С другой стороны, преобразование из упр. 2/6/2(е) **не является** взаимно однозначным, ибо образ «1» не указывает единственного операнда. Однозначное, но не взаимно однозначное преобразование будет называться **однозначным лишь в одну сторону.**

[1] Однозначность преобразования часто в дальнейшем молчаливо предполагается. Так, например, лишь в предположении однозначности справедливы ответы к упражнениям 5/4/5 и 5/5/3. — *Прим. ред.*

Упр. 1. Операнды — десять цифр 0, 1, ..., 9; образ — третий десятичный разряд числа $\lg (n+4)$. Например, если операндом служит 3, то последовательно находим: 7, lg 7, 0,8451 и 5; следовательно, $3 \to 5$. Является ли это преобразование взаимно однозначным или однозначным лишь в одну сторону? (Указание: найдите последовательно образы для 0, 1 и т. д., употребляя четырехзначные таблицы логарифмов.)

2/9. *Тождество.* Важным преобразованием, которое, впрочем, начинающий может не признать за преобразование, является **тождественное** преобразование; при этом преобразовании не происходит никаких изменений и каждый образ совпадает со своим операндом. Если все операнды различны, это преобразование необходимо является взаимно однозначным. Примером может служить преобразование f в упр. 2/6/2. В сокращенной записи $n' = n$.

Упр. 1. В некоторых автоматических кассовых аппаратах преобразование, которое при вскрытии их должно быть произведено с содержащимися в них деньгами, показывается особым сигналом. Какой сигнал показывает тождественное преобразование?

Упр. 2. В крикете перебежки, сделанные в течение одной партии, преобразуют число очков у команды из одного значения в другое. Каждое отдельное число перебежек определяет отдельное преобразование. Так, если в партии засчитано восемь перебежек, преобразование определяется формулой $n' = n + 8$. Как назовет крикетист тождественное преобразование?

2/10. *Матричное представление.* Все эти преобразования могут быть представлены в единой схеме, ясно показывающей их взаимоотношения (этот метод будет особенно полезен в гл. 9 и дальше).

Выпишем операнды в горизонтальную строку, а возможные образы — в столбец слева вниз, так, чтобы образовать две стороны прямого угла. Пусть нам дано некоторое преобразование. Поставим «+» на пересечении строки и столбца, если операнд, стоящий вверху столбца, преобразуется в элемент, стоящий слева в строке; в противном случае поставим нуль. Например, преобразование

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ A & C & C \end{matrix}$$

будет иметь вид

↓	A	B	C
A	+	0	0
B	0	0	0
C	0	+	+

Стрелка в левом верхнем углу указывает направление переходов. Таким образом, *каждое преобразование может быть представлено в виде матрицы.*

Если преобразование велико, в матрице можно использовать точки; надо только, чтобы их значение не было двусмысленным. Так, возьмем преобразование, при котором $n' = n + 2$, а операнды суть целые положительные числа начиная с 1. Его матрица может быть представлена в следующем виде:

↓	1	2	3	4	5	...
1	**0**	0	0	0	0	...
2	0	**0**	0	0	0	...
3	+	0	**0**	0	0	...
4	0	+	0	**0**	0	...
5	0	0	+	0	**0**	...
...	...	...	...	...	...	...

(Символы на **главной диагонали**, идущей от левого верхнего угла, напечатаны полужирным шрифтом для большей ясности позиционных отношений.)

Упр. 1. Как распределены плюсы в матрице тождественного преобразования?

Упр. 2. Какое из трех указанных преобразований: а) взаимно однозначно; b) однозначно, но не взаимно однозначно; с) не однозначно?

(I)

↓	A	B	C	D
A	+	0	0	+
B	0	0	+	0
C	+	0	0	0
D	0	+	0	+

(II)

↓	A	B	C	D
A	0	+	0	0
B	0	0	0	+
C	+	0	0	0
D	0	0	+	0

(III)

↓	A	B	C	D
A	0	0	0	0
B	+	0	0	+
C	0	+	0	0
D	0	0	+	0

Упр. 3. Может ли замкнутое преобразование иметь матрицу, содержащую: а) строку из одних нулей; b) столбец из нулей?

Упр. 4. Постройте матрицу преобразования $n' = 2n$ с целыми числами в качестве операндов, делая ясным распределение плюсов. Лежат ли они на прямой линии? Начертите график $y = 2x$; имеют ли эти линии какое-либо сходство?

Упр. 5. Возьмите колоду карт, перетасуйте ее и разложите 16 карт лицевой стороной кверху в квадрат четыре на четыре. В матрицу четыре на четыре ставьте знак +, если на соответствующем месте лежит карта черной масти, и ставьте знак 0, если на соответствующем месте лежит карта красной масти. Проделайте это несколько раз, определяя тип каждого преобразования, как в упр. 2.

Упр. 6. Если имеется два операнда и преобразование замкнуто, то сколько существует различных матриц?

Упр. 7. (Продолжение.) Сколько из них однозначны?

ПОВТОРНЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ

2/11. *Степень.* Итак, мы исследовали основные свойства замкнутого однозначного преобразования, поскольку речь идет о его однократном действии. Однако такое преобразование может применяться не один раз, а многократно, порождая серию изменений. Эта серия аналогична серии изменений, через которую проходит действующая динамическая система. Теперь мы рассмотрим генезис и свойства такой серии.

Предположим, что второе преобразование из § 2/3 (назовем его преобразованием «альфа») было использовано для кодирования английского сообщения. Предположим, что закодированное сообщение снова кодируется с помощью преобразования «альфа». Каков будет результат? Результат может быть прослежен буква за буквой. Так, при первом кодировании A превратилось в B, которое при втором кодировании превращается в C; следовательно, после двойной процедуры A превратится в C, или в обычной записи: $A \longrightarrow C$. Аналогично $B \longrightarrow D$ и так далее вплоть до $Y \longrightarrow A$ и $Z \longrightarrow B$. Таким образом, *двукратное* применение преобразования «альфа» вызывает в точности те же изменения, что и *однократное* применение преобразования

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & \ldots & Y & Z \\ C & D & \ldots & A & B \end{matrix}.$$

Таким образом, из каждого замкнутого преобразования мы можем получить другое замкнутое преобразование, результат которого при однократном применении тождествен результату первого преобразования, примененного дважды. Второе преобразование называется «квадратом» первого и одной из его «степеней» (§ 2/14). Если первое преобразование обозначено через T, то второе будет обозначаться через T^2. Это обозначение пока следует рассматривать просто как ясный и удобный символ нового преобразования.

Упр. 1. Если $A: \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ c & c & a \end{matrix}$, то каково A^2?

Упр. 2. Напишите какое-нибудь тождественное преобразование; каков его квадрат?

Упр. 3. (См. упр. 2/4/3.) Каково A^2?

Упр. 4. Какое преобразование получится, если преобразование $n' = n + 1$ применить дважды к положительным целым числам? Ответ напишите в сокращенной форме: $n' = \ldots$ (Указание: попробуйте выписать преобразование полностью, как в § 2/4.)

Упр. 5. Какое преобразование получится, если преобразование $n' = 7n$ применить дважды к положительным целым числам?

Упр. 6. Если K есть преобразование

↓	A	B	C
A	0	+	+
B	0	0	0
C	+	0	0

то каково K^2? Представьте результат в матричной форме. (Указание: попробуйте переписать K в какой-нибудь другой форме, а затем вернуться обратно.)

Упр. 7. Попробуйте применить дважды преобразование

$$W: \downarrow \begin{matrix} f & g & h \\ g & h & k \end{matrix}.$$

2/12. Предыдущее упражнение поможет уяснить значение замкнутости. Незамкнутое преобразование, такое как W, не может быть применено дважды. В самом деле, хотя оно изменяет h в k, его действие на k не определено, так что оно не может действовать дальше. Незамкнутое преобразование, таким образом, подобно машине, которая делает один шаг, а затем останавливается.

2/13. *Исключение символов.* Если преобразование задано в сокращенной форме, например формулой $n' = n + 1$, то результат его двукратного применения можно также найти с помощью описанных методов. Для этого надо записать преобразование заново, показывая все операнды, осуществить его двукратное применение и затем снова сократить запись. Существует, однако, более быстрый метод. Чтобы показать и объяснить его, выпишем полностью преобразование $T: n' = n + 1$ для положительных целых чисел, а внизу запишем результаты его двойного применения и поставим общий символ выполненных операций:

$$\begin{array}{cl} T\!: \downarrow & 1\ 2\ 3\ \ldots\ n\ \ \ldots \\ & 2\ 3\ 4\ \ldots\ n'\ \ \ldots\ . \\ T\!: \downarrow & 3\ 4\ 5\ \ldots\ n''\ \ldots \end{array}$$

Здесь n'' используется как естественный символ для образа от n', так же как n' есть образ от n.

Итак, нам дано, что $n' = n + 1$. Так как мы применяем то же самое преобразование снова, то n'' должно быть на 1 больше, чем n'. Следовательно, $n'' = n' + 1$.

Чтобы определить однократное преобразование T^2, нам нужно уравнение, выражающее образ n'' непосредственно через операнд n. Нахождение этого уравнения есть просто вопрос алгебраического исключения символов: из двух уравнений $n'' = n' + 1$ и $n' = n + 1$ нужно исключить n'. Подставляя $n + 1$ вместо n' в первое уравнение, получим (скобки указывают процесс подстановки) $n'' = (n + 1) + 1$, т. е. $n'' = n + 2$.

Это уравнение задает точную зависимость между операндом (n) и образом (n'') при T^2 и тем самым определяет T^2. Для унификации обозначений это уравнение можно переписать в виде $m' = m + 2$. Так выглядит в стандартной записи преобразование, однократное применение которого (отсюда один штрих у m) вызывает те же самые изменения, что и двукратное применение T (замена n на m означает простую перемену названия во избежание путаницы).

Мы высказали вполне общее правило. Так, если дано преобразование $n' = 2n - 3$, то второе применение его даст вторые образы n'', связанные с первыми формулой $n'' = 2n' - 3$. Производя подстановку вместо n' и свободно используя скобки, получим

$$n'' = 2(2n - 3) - 3 = 4n - 9.$$

Следовательно, двукратное применение преобразования $n' = 2n - 3$ вызывает те же изменения, что и одно применение преобразования $m' = 4m - 9$.

2/14. *Высшие степени.* Высшие степени находятся простым добавлением символов для высших образов (n''' и т. д.) и исключением символов промежуточных образов. Так, найдем преобразование, вызываемое трехкратным применением преобразования $n' = 2n - 3$. Выпишем уравнения шаг за шагом:

$$n' = 2n - 3,$$
$$n'' = 2n' - 3,$$
$$n''' = 2n'' - 3.$$

Возьмем последнее уравнение и, подставив $2n' - 3$ вместо n'', получим

$$n''' = 2(2n' - 3) - 3 = 4n' - 9.$$

Теперь подставим вместо n':

$$n''' = 4(2n - 3) - 9 = 8n - 21.$$

Следовательно, трехкратное применение вызывает те же самые изменения, какие вызвало бы одно применение преобразования $m' = 8m - 21$. Если первоначальное преобразование было T, то трехкратное преобразование есть T^3.

Упр. 1. Исключите n' из $n'' = 3n'$ и $n' = 3n$.
Постройте соответствующее преобразование и проверьте, что два применения преобразования $n' = 3n$ дают тот же результат.

Упр. 2. Исключите a' из $a'' = a' + 8$ и $a' = a + 8$.

Упр. 3. Исключите a'' и a' из $a''' = 7a''$, $a'' = 7a'$, $a' = 7a$.

Упр. 4. Исключите k' из $k'' = -3k' + 2$, $k' = -3k + 2$. Проверьте, как в упр. 1.

Упр. 5. Исключите m' из $m'' = \log m'$, $m' = \log m$.

Упр. 6. Исключите p' из $p'' = (p')^2$, $p' = p^2$.

Упр. 7. Найдите преобразования, эквивалентные двукратным применениям (ко всем положительным целым числам, большим 1) преобразований:

$$\text{(I)}\ n' = 2n + 3;$$
$$\text{(II)}\ n' = n^2 + n;$$
$$\text{(III)}\ n' = 1 + 2\log n.$$

Упр. 8. Найдите преобразование, эквивалентное трехкратному применению преобразования $n' = -3n - 1$ к положительным и отрицательным целым числам и нулю. Проверьте, как в упр. 1.

Упр. 9. Найдите преобразования, эквивалентные второму, третьему и дальнейшим применениям преобразования $n' = \frac{1}{n+1}$.

(Замечание: здесь используется ряд, открытый Фибоначчи в XII веке: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...; в ряде Фибоначчи каждый следующий член равен сумме двух предшествующих: так, $3+5=8$, $5+8=13$, $8+13=\ldots$ и т. д.)

Упр. 10. Каков результат двукратного применения преобразования $n' = 1/n$, если операнды суть все положительные рациональные числа (т. е. все дроби)?

Упр. 11. Геометрическое преобразование. Нарисуйте на бумаге отрезок и обозначьте его концы через A и B. Этот отрезок, определяемый длиной и положением, есть операнд. Получите его образ с концами A' и B' следующим преобразованием R: A' есть середина AB, а B' находится поворотом отрезка $A'B$ вокруг A' на прямой угол против часовой стрелки. Проведите $A'B'$; затем применяйте R повторно и выясните, как себя будет вести система.

* *Упр.* 12. (Продолжение.) Если вы знакомы с аналитической геометрией, примите за A точку (0,0) и за B точку (0,1); найдите предельное положение. (Указание: определите окончательную абсциссу точки A как ряд и просуммируйте его; то же проделайте и для ординаты точки A.)

2/15. *Обозначения.* Способ записи, при котором образ обозначается прибавлением штриха, удобен, если рассматривается только одно преобразование; но если на n может действовать несколько преобразований, то символ n' не указывает, какое из них действовало. Поэтому иногда употребляется другой символ: если n — операнд и применяется преобразование T, то образ обозначается через $T(n)$. Четыре печатных знака — две буквы и две скобки — изображают *одну* величину; это обстоятельство может спутать того, кто еще не привык к нему. Выражение $T(n)$, которое на самом деле является переиначенным n', может быть снова преобразовано, и тогда его следовало бы записать в виде $T(T(n))$, если запись единообразна; практически внешние скобки обычно опускаются и повторяющиеся T объединяются, так что n'' пишется как $T^2(n)$. Приводимые ниже упражнения должны приучить читателя к этому способу записи (ибо изменяется здесь только способ записи).

Упр. 1. Если $f\colon \downarrow\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{matrix}$, то каково $f(3)$, $f(1)$, $f^2(3)$?

Упр. 2. Выпишите полностью преобразование g для операндов 6, 7, 8, если $g(6)=8$, $g(7)=7$, $g(8)=8$.

Упр. 3. Выпишите полностью преобразование h для операндов α, β, γ, δ, если $h(\alpha)=\gamma$, $h^2(\alpha)=\beta$, $h^3(\alpha)=\delta$, $h^4(\alpha)=\alpha$.

Упр. 4. Если $A(n)$ есть $n+2$, то каково $A(15)$?

Упр. 5. Если $f(n)$ есть $-n^2+4$, то каково $f(2)$?

Упр. 6. Если $T(n)$ есть $3n$, то каково $T^2(n)$? (Указание: если вы не уверены в ответе, выпишите T *полностью*.)

Упр. 7. Если I есть тождественное преобразование, а t — один из его операндов, то каково $I(t)$?

2/16. *Произведение.* Как мы только что видели, после применения преобразования T к операнду n образ $T(n)$ может рассматриваться как новый операнд для T, что дает образ $T(T(n))$, обозначенный через $T^2(n)$. Точно так же $T(n)$ может стать операндом преобразования U, что даст образ $U(T(n))$. Так, если имеются преобразования

$$T\colon \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & d & a & b \end{matrix} \quad \text{и} \quad U\colon \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix},$$

то $T(b)$ есть d, а $U(T(b))$ есть $U(d)$, т. е. b. Преобразования T и U, примененные в таком порядке, определяют новое преобразование V, которое легко обнаружить:

$$V\colon \downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ c & b & d & c \end{matrix}.$$

Преобразование V называется **произведением**, или **композицией**, преобразований T и U. Оно дает просто результат последовательного применения T и U в данном порядке, каждого по одному разу.

Если сначала применяется U, то $U(b)$ в приведенном примере есть c, а $T(c)$ есть a; отсюда $T(U(b))$ есть a, т. е. не то же самое, что $U(T(b))$. Когда U и T применяются во втором порядке, их произведением служит преобразование

$$W: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & b & d \end{matrix}.$$

Для удобства V может записываться как UT, а W— как TU. Всегда надо помнить, что изменение порядка в произведении может изменить преобразование.

(Заметим, что произведение V может быть невозможным, т. е. не существовать, если некоторые из образов преобразования T не являются операндами для U.)

Упр. 1. Выпишите преобразование U^2T.

Упр. 2. Выпишите полностью UTU.

* *Упр.* 3. Представьте T и U посредством матриц, а затем перемножьте эти две матрицы обычным образом (строки на столбцы), принимая, что произведение и сумма знаков $+$ есть $+$; назовите полученную матрицу M_1. Представьте V матрицей; назовите ее M_2. Сравните M_1 и M_2.

2/17. *Кинематический график.* До сих пор мы изучали каждое преобразование главным образом путем наблюдения за результатом его однократного действия на все его возможные операнды (см., например, § 2/3). Другой метод (применимый только к замкнутым преобразованиям) состоит в изучении действия преобразования на отдельный операнд при многих повторных применениях. Этот метод соответствует при изучении динамических систем тому, что систему приводят в некоторое начальное состояние, а затем предоставляют ей без дальнейшего вмешательства проходить серию изменений, определяемых ее внутренней природой. Так, в автоматической телефонной системе мы можем наблюдать все изменения, которые следуют за набором номера; в муравейнике мы можем наблюдать все изменения, которые последуют, если положить поблизости кусочек мяса.

Предположим для определенности, что мы имеем преобразование

$$U: \downarrow \begin{matrix} A & B & C & D & E \\ D & A & E & D & D \end{matrix}.$$

Если U применяется к C, затем к $U(C)$, затем к $U^2(C)$, затем к $U^3(C)$ и т. д., то образуется ряд

C, E, D, D, D, ... и т. д., где D повторяется без конца. Если U применять таким же образом к A, то образуется ряд A, D, D, D, ..., где D повторяется опять.

Эти результаты можно изобразить графически, получая тем самым возможность обнаруживать с первого же взгляда соотношения, которые в противном случае могли бы быть обнаружены только после тщательного изучения. Чтобы построить **кинематический график** преобразования, выписывается множество всех операндов, каждый на любом удобном месте, и затем они соединяются стрелками согласно правилу, что стрелка идет от A к B тогда и только тогда, когда A за один шаг преобразуется в B. Так, U дает кинематический график

$$C \to E \to D \leftarrow A \leftarrow B.$$

(К D можно и не приписывать «возвратную» стрелку, если от этого не возникает никакого недоразумения.)

Если бы график состоял из пуговиц (операндов), связанных нитями (переходами), он мог бы, подобно какой-нибудь сети, принимать различные формы:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] C \arrow[r] & E \arrow[dr] & \\ & & D \\ B \arrow[r] & A \arrow[ur] & \end{tikzcd} \quad \textit{или} \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r] & A \arrow[d] & \\ & D & E \arrow[l] & C \arrow[l] \end{tikzcd}$$

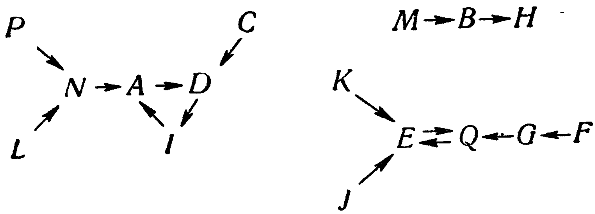
и т. д. Эти различные формы не рассматриваются как различные графики, если только внутренние связи в них тождественны.

Элементы, получаемые при последовательных преобразованиях элемента C посредством U (ряд C, E, D, D, ...), находятся в постоянном очевидном соответствии с состояниями, проходимыми на кинематическом графике точкой, которая начинает движение в C и проходит по одной стрелке за шаг, двигаясь всегда по направлению стрелки. Так как проследить движение точки по линии обычно гораздо легче, чем вычислить $U(C)$, $U^2(C)$ и т. д., особенно при сложном преобразовании, то график часто является самым удобным представлением преобразования в изобразительной форме. Движущаяся точка будет называться **представляющей точкой.**

Когда преобразование становится более сложным, выступает одна его важная черта. Возьмем, например, преобразование

$$T: \downarrow \begin{array}{l} A\,B\,C\,D\,E\,F\,G\,H\,I\,J\,K\,L\,M\,N\,P\,Q \\ D\,H\,D\,I\,Q\,G\,Q\,H\,A\,E\,E\,N\,B\,A\,N\,E \end{array}.$$

Его кинематический график имеет вид



Начиная движение из любого состояния и следуя по цепи стрелок, мы можем убедиться, что при повторных преобразованиях представляющая точка приходит всегда либо к некоторому положению, в котором она останавливается, либо к некоторому циклу, в котором циркулирует до бесконечности. Такой график напоминает карту дренажной системы, показывающую, в какой район попадет в конце концов капля воды (т. е. представляющая точка), начавшая свой путь в любом месте. Эти обособленные друг от друга районы называются **бассейнами** графика. Очевидно, это имеет некоторое отношение к тому, что понимается под «устойчивостью», к которой мы перейдем в гл. 5.

Упр. 1. Начертите кинематический график преобразований A и B в упр. 2/4/3.

Упр. 2. Как можно с первого взгляда узнать график тождественного преобразования?

Упр. 3. Начертите графики каких-нибудь простых замкнутых и взаимно однозначных преобразований. Что является их отличительным признаком?

Упр. 4. Начертите график преобразования V, в котором n' есть третья десятичная цифра числа $\lg(n+20)$, а операнды — десять цифр 0, 1, ..., 9.

Упр. 5. (Продолжение.) По графику V определите сразу, каковы $V(8)$, $V^2(4)$, $V^4(6)$, $V^{84}(5)$.

Упр. 6. Если преобразование взаимно однозначно, то могут ли две стрелки приводить в одну точку?

Упр. 7. Если преобразование однозначно лишь в одну сторону, то могут ли две стрелки приводить в одну точку?

Упр. 8. Постройте какие-нибудь замкнутые однозначные преобразования, подобные T, начертите их кинематические графики и отметьте их характерные признаки.

Упр. 9. Если преобразование однозначно, то может ли один бассейн содержать два цикла?

ГЛАВА 3

Детерминированные машины

3/1. Установив ясные понятия о преобразованиях, мы можем перейти к их первому применению — к установлению точного параллелизма между описанными здесь свойствами преобразований и свойствами реально существующих машин и динамических систем.

О наилучшем определении «машины» можно, конечно, много спорить. **Детерминированная машина** определяется как машина, которая ведет себя так же, как замкнутое однозначное преобразование. Это определение оправдывается просто тем, что оно «работает»; оно дает нам то, что нам нужно, и нигде не противоречит грубо тому, что мы интуитивно считаем разумным.

Действительное оправдание заключается не столько в соображениях, высказанных в этом параграфе, сколько в дальнейшем содержании книги и, может быть, в дальнейших новых исследованиях.

Заметим, что наше определение говорит о способе поведения, а не о материальной вещи. В этой книге мы занимаемся теми особенностями систем, которые являются детерминированными, т. е. в своем изменении следуют регулярным и воспроизводимым путям. Мы будем изучать детерминированность, а не материальную субстанцию (этот вопрос затрагивался выше, в гл. 1).

В части I мы будем рассматривать детерминированные машины, и все соотносимые с ними преобразования будут однозначны. Лишь начиная с § 9/2 мы будем рассматривать более общий тип, детерминированный лишь в статистическом смысле.

Второе ограничение относится к этой главе. Здесь будут рассматриваться только изолированные машины, т. е. машины, на которые ничто активно не воздействует.

Простым и типичным примером детерминированной машины может служить тяжелая железная рама со множеством тяжелых шаров, соединенных друг с другом и с рамой пружинами. Если при неизменных условиях повторно приводить шары в некоторое определенное положение, а затем освобождать, то их движения будут каждый раз теми же самыми, т. е. будут следовать тому же самому пути. Вся система, приведенная в данное начальное «состояние», будет повторно проходить одну и ту же последовательность состояний.

Под **состоянием** системы понимается точно определенное условие или свойство, которое может быть опознано, если повторится снова. Каждая система, естественно, имеет много возможных состояний.

Когда шары освобождаются, их положения (P) претерпевают ряд изменений: P_0, P_1, P_2, ...; эта точка зрения сразу же соотносит систему с преобразованием

$$\downarrow \begin{matrix} P_0 & P_1 & P_2 & P_3 & \dots \\ P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & \dots \end{matrix}.$$

Ясно, что *операнды* преобразования соответствуют *состояниям* системы.

Последовательность положений, принимаемых системой *во времени*, соответствует последовательности элементов, порождаемых последовательными степенями преобразования (§ 2/14). Такая последовательность состояний определяет **траекторию**, или **линию поведения**.

То обстоятельство, что детерминированная машина из одного состояния не может перейти сразу в два других состояния, соответствует требованию однозначности преобразования.

Рассмотрим теперь для начала еще несколько примеров, учитывая усложнения по мере их появления.

«Число наличных организмов» в только что привитой бактериологической культуре возрастает от часа к часу. Если сначала это число удваивается через каждый час, то в этот начальный период оно будет изменяться от часа к часу так же, как изменяется n при последовательных степенях преобразования $n' = 2n$.

Если рост организма до некоторой степени непостоянен, то поведение системы, т. е. выбор состояния, которое должно последовать за данным состоянием, становится более или менее неопределенным. Таким образом, «детерминированность» реальной системы соответствует однозначности образа данного операнда при преобразовании.

Рассмотрим, далее, часы, исправные и заведенные; сейчас их стрелки указывают на какое-то место на циферблате, а через заданное время эти стрелки будут указывать на другое определенное место. Положения стрелок соответствуют элементам преобразования. Однократное преобразование соответствует прохождению единицы времени; оно, очевидно, будет иметь вид $n' = n + k$.

В этом случае действующий «оператор» по существу не определим, ибо оно не имеет ясных или естественных границ. Он включает все, что заставляет часы идти: часовую пружину (или силу тяжести), твердость металла, из которого изготовлены колеса, смазку осей, свойства стали, взаимодействие атомов железа и т. д. — определенной границы здесь нет. Как было сказано в § 2/3, «оператор» часто определяется неточно и до некоторой степени произволен. Это понятие мало пригодно к использованию в науке. Однако *преобразование* определяется вполне точно, ибо оно относится только к *фактам* изменений, а не к их более или менее гипотетическим причинам.

В биологическом мире не так легко найти столь же регулярную последовательность изменений, как в случае с часами, но регулярное протекание некоторых болезней обнаруживает некоторые аналогичные черты. Так, во времена, когда еще не применялись сульфонамиды, легкое при долевой пневмонии в типичном случае проходило следующий ряд состояний: заражение —

внедрение (consolidation) — красное опеченение — серое опеченение — разрешение — выздоровление[1]. Такая последовательность состояний соответствует точно определенному преобразованию, хотя и не числовому.

Далее, рассмотрим чугунную отливку, нагретую таким образом, что различные ее части имеют различную, но определенную температуру. Если условия не изменяются, то эти температуры будут изменяться во времени определенным образом. Состоянием отливки в каждый данный момент будет некоторое множество температур (вектор, § 3/5), а переход из одного состояния в другое ($S_0 \to S_1 \to S_2 \ldots$) будет соответствовать действию преобразования, превращающего операнд S_0 последовательно в $T(S_0)$, $T^2(S_0)$, $T^3(S_0)$ и т. д.

Более сложный пример, наглядно показывающий, что точно определенное преобразование не обязательно должно быть числовым, представляют некоторые формы рефлекторного поведения животных. Так, самец и самка трехиглой колюшки вместе с некоторыми частями окружающей среды образуют детерминированную динамическую систему. Тинберген (в своем «Исследовании инстинкта») следующим образом описывает последовательные состояния этой системы: «Каждая реакция как самца, так и самки вызывается предшествующей реакцией партнера. Каждая стрелка на приводимой ниже диаграмме соответствует причинному отношению, существование которого было доказано в опытах с манекенами. Первая реакция самца, зигзагообразный танец, вызывается зрительным стимулом от самки, в котором играют роль знаковые возбудители: «вздувшееся брюшко» и особые движения. Самка реагирует на красный цвет самца и его зигзагообразный танец тем, что плывет прямо к нему. Это движение заставляет самца повернуться и быстро плыть к гнезду. Это, в свою очередь, побуждает самку плыть за ним, тем самым побуждая самца указать головой вход в гнездо. Его по-

[1] В настоящее время установлено, что красное опеченение и серое опеченение являются не двумя последовательными стадиями, а двумя различными формами протекания болезни. Ср. Мясников А. Л., Пропедевтика внутренних болезней, М., 1957. — *Прим. перев.*

ведение вызывает следующую реакцию самки: она заплывает в гнездо... Это опять-таки возбуждает у самца реакцию в виде дрожи, что вызывает метание икры самкой. Присутствие свежих икринок заставляет самца оплодотворить их».

Тинберген следующим образом суммирует смену состояний:

Самка	Самец
Появляется	
	Зигзагообразный танец
Ухаживает	
	Ведет
Следует	
	Показывает вход в гнездо
Заплывает в гнездо	
	Дрожит
Мечет икру	
	Оплодотворяет

Мы видим, что он дает описание типичной траектории. Вряд ли нужны дальнейшие примеры, ибо различные отрасли науки, к которым применяется кибернетика, дают изобилие примеров, и каждый читатель сможет подобрать примеры, близкие к его собственной специальности.

Соотнося машину и преобразование, мы вступаем в ту дисциплину, которая соотносит поведение реальных физических систем со свойствами символических выражений, написанных пером на бумаге. Весь предмет «математической физики» есть часть этой дисциплины. Однако методы, используемые в этой книге, несколько шире по охвату, ибо математическая физика тяготеет к преимущественному рассмотрению непрерывных и линейных систем (§ 3/7). Это ограничение делает ее методы почти неприменимыми к биологическим вопросам, ибо в биологии системы почти всегда нелинейны, часто разрывны и во многих случаях даже не являются измеримыми, т. е. выразимыми в числах. Приводимые ниже упражнения (§ 3/4), расположенные в определенной последовательности, показывают постепенный переход от наиболее общих методов, используемых в этой книге, к тем, которые обычно используются в математической физике. Эти упражнения важны также как иллюстрации соответствия между преобразованиями и реальными системами.

Подведем итоги. Каждая машина или динамическая система имеет много различимых состояний. Если это — детерминированная машина, то фиксация влияющих на нее условий и состояний, в которых она находится, определит, т. е. сделает единственным, следующее состояние, в которое она перейдет. Эти переходы состояний соответствуют переходам операндов при преобразовании. Каждое состояние соответствует некоторому операнду, и каждое следующее состояние, в которое переходит машина, соответствует образу этого операнда. Последовательные степени преобразования соответствуют в машине протеканию двух, трех и т. д. единиц времени перед записью очередного состояния. А поскольку детерминированная машина не может переходить сразу в два состояния, соответствующее преобразование должно быть однозначным.

Упр. Назовите два состояния, относящиеся друг к другу как операнд и образ, рассматривая как оператор время и выбирая динамическую систему из области: a) приготовления пищи; b) разжигания огня; c) бензиновых двигателей; d) эмбриологического развития; e) метеорологии; f) эндокринологии; g) экономики; h) поведения животных; i) космологии. (Точности в мелочах не требуется.)

3/2. *Замкнутость.* Теперь мы можем отметить еще одну причину большого значения замкнутости. Типичная машина всегда может поработать еще некоторое время, хотя бы просто потому, что экспериментатор сейчас ничего не делает! Это означает, что степень преобразования не имеет никаких конкретных границ. Только замкнутые преобразования допускают, вообще говоря, *любую* степень. Так, преобразование T

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ e & b & m & f & g & c & f \end{matrix}$$

незамкнуто. $T^4(a)$ есть c, и $T^5(a)$ есть m. Но $T(m)$ не определено, а следовательно, не определено $T^6(a)$. При начальном состоянии a это преобразование не определяет, что случится после пяти шагов. Таким образом, *преобразование, представляющее машину, должно быть замкнутым.* Все значение этого обнаружится в § 10/4.

3/3. *Дискретная машина.* Здесь можно возразить, что большинство машин — как построенных человеком, так и естественных — работает плавно, тогда как рассматриваемые до сих пор преобразования характеризуются дискретными скачками. Однако эти дискретные преобразования служат наилучшим введением в наш предмет. Величайшим преимуществом их является абсолютная свобода от неясности и неопределенности, ибо каждое из их свойств всегда либо определенно присутствует, либо определенно отсутствует. Такая простота обеспечивает дедукции точность, столь важную для надежности дальнейших построений. Этот вопрос затрагивался в § 2/1.

Во всяком случае, это несоответствие не носит серьезного характера. Нужно лишь сделать скачки дискретного изменения достаточно малыми, чтобы приблизить его сколь угодно близко к непрерывному изменению. В то же время следует помнить, что наблюдения природных явлений производятся почти неизменно через дискретные интервалы; «непрерывность», приписываемая природным событиям, вносится в них воображением наблюдателя, а не фактическим наблюдением каждой из бесконечного числа точек. Таким образом, действительная истина заключается в том, что *естественная система наблюдается в дискретных точках.* Наше преобразование также представляет ее в дискретных точках. Следовательно, эти вещи не могут быть действительно несовместимыми.

3/4. *Машина и преобразование.* Параллелизм между машиной и преобразованием выступает всего яснее, когда мы сравниваем поведение машины, где состояние сменяет состояние, с кинематическим графиком (§ 2/17), где стрелки ведут от элемента к элементу. Если данная машина и данный график обнаруживают полное соответствие, то нетрудно видеть, что:

1) Каждое возможное состояние машины однозначно соответствует некоторому элементу на графике и обратно. Соответствие здесь взаимно однозначно.

4 Зак. 3346. У. Росс Эшби

2) Каждая последовательность состояний, проходимая машиной в силу ее внутренней динамической природы, соответствует непрерывной цепи стрелок, соединяющих соответствующие элементы.

3) Если машина, придя в некоторое состояние, остается в нем (состояние равновесия, § 5/3), то этому состоянию будет соответствовать элемент без выходящей из него стрелки (или с возвратной стрелкой, § 2/17).

4) Если машина вступает в регулярно повторяющийся цикл состояний, то стрелки, проходящие через соответствующие элементы на графике, образуют кольцо.

5) Остановка машины экспериментатором и возобновление работы из нового, произвольно выбранного состояния соответствуют на графике перемещению представляющей точки из одного элемента в другой, если это перемещение осуществляется произвольным действием математика, а не согласно указаниям стрелок.

Когда существует такое соответствие между реальной машиной и преобразованием, преобразование называется **каноническим представлением** машины, а о машине говорят, что она **воплощает** преобразование.

Упр. 1. В питательную среду помещена тысяча бактерий; число их n удваивается каждые полчаса. Напишите соответствующее преобразование.

Упр. 2. (Продолжение.) Найдите n после 1-го, 2-го, 3-го, ..., 6-го шагов.

Упр. 3. (Продолжение.) (I) Начертите обычный график с двумя осями, показывающий изменение числа бактерий во времени. (II) Начертите кинематический график изменения состояний системы.

Упр. 4. Питательная среда содержит 10^9 бактерий и дезинфицирующее средство, которое в каждую минуту убивает 20% оставшихся бактерий. Выразите изменение числа оставшихся бактерий через преобразование.

Упр. 5. (Продолжение.) (I) Найдите число оставшихся бактерий после 1, 2, 3, 4, 5 минут. (II) К какому пределу стремится число бактерий с неограниченным течением времени?

Упр. 6. Начертите кинематический график преобразования, в котором n' есть округленная правая цифра $\lg(n+70)$ в четырехзначной таблице логарифмов. Как будет вести себя соответствующая машина?

Упр. 7. (Продолжение: пусть 70 заменено на 90.)

Упр. 8. (Продолжение: пусть 70 заменено на 10). Сколько бассейнов в этом графике?

Упр. 9. Каждые 10 лет население страны уменьшается на 10%, но за это же время прибавляется миллион эмигрантов. Выразите изменение от десятилетия к десятилетию через преобразование, принимая, что изменения совершаются конечными шагами.

Упр. 10. (Продолжение.) Если страна имеет двадцать миллионов жителей, каково будет ее население через каждое из трех последующих десятилетий?

Упр. 11. (Продолжение.) Найдите любым способом, при какой величине население будет постоянным. (Указание: когда население «стационарно», каково отношение между численностью его в начале и в конце десятилетия? Каково соотношение между операндом и образом?)

Упр. 12. Растущий головастик увеличивается в длину каждый день на 1,2 *мм*. Выразите это через преобразование.

Упр. 13. Примем, что бактерии в культуре растут посредством простого превращения пищи в бактерии; например, если сначала было достаточно пищи для 10^8 бактерий, а теперь число бактерий равно n, то остающаяся пища пропорциональна $10^8 - n$. Если сохраняется закон массового действия, то число бактерий будет возрастать за каждый интервал пропорционально произведению: (число бактерий) $\times$ (количество оставшейся пищи). В рассматриваемой культуре число бактерий увеличивается каждый час в $10^{-8}n\ (10^8 - n)$ раз. Выразите изменение от часа к часу через преобразование.

Упр. 14. (Продолжение.) Пусть культура содержит в данный момент 10 000 000 бактерий; найдите число их через 1, 2, ..., 5 часов.

Упр. 15. (Продолжение.) Начертите обычный график с двумя осями, показывающий изменение числа бактерий во времени.

ВЕКТОРЫ

3/5. В предшествующих параграфах «состояние» машины рассматривалось как нечто известное в целом и не требующее более детального определения. Состояния такого типа особенно обычны для биологических систем, где, например, характерные позы, или выражения, или формы могут с уверенностью опознаваться без всякого анализа их компонентов. К этому типу относятся состояния, описанные Тинбергеном (§ 3/1). Таковы же и типы облаков, опознаваемые метеорологом. Первые параграфы этой главы ясно показывают, что *теория таких неанализируемых состояний может быть строгой.*

Тем не менее системы часто имеют состояния, определение которых требует (по различным причинам) дальнейшего анализа. Так, предположим, что радиопередача должна дать нам отчет о «состоянии» (в определенный момент времени) проходящего сейчас марафонского бега. Для этого она должна сообщить положение каждого бегуна в данный момент времени. Множество этих положений определит «состояние» бега. Итак, состояние бега в целом задается различными состояниями (положениями) различных бегунов, взятыми одновременно. Такие «составные» состояния весьма обычны, и в дальнейшей части книги мы будем много ими заниматься. Следует заметить, что мы теперь начинаем рассматривать отношение между целым и его частями, особенно важное в теории машин. Итак, часто случается, что состояние целого задается перечнем состояний, принимаемых в этот момент его частями.

Такое состояние есть **вектор**, т. е. составной объект, имеющий определенное число **компонентов**, или **составляющих.** Удобно записывать его в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; это означает, что первая составляющая имеет значение a_1, вторая — значение a_2 и т. д.

Вектор есть по существу род переменной, но более сложный, чем обычные числовые переменные, встречающиеся в элементарной математике. Он представляет собой естественное обобщение «переменной» и обладает исключительной важностью, особенно для вопросов, рассматриваемых в этой книге. Советуем читателю как можно больше освоиться с этим понятием, постоянно применяя его в повседневной жизни, пока оно не станет столь же привычным и понятным, как понятие переменной. Не будет преувеличением сказать, что от усвоения векторов во многом будет зависеть успешное овладение дальнейшим материалом книги.

Приведем некоторые общеизвестные примеры:

1) «Положение» корабля в любой момент не может быть описано одним числом; необходимы два числа: широта и долгота. Таким образом, «положение» есть вектор с двумя составляющими. Например, одно положение корабля может задаваться вектором: (58° с. ш., 17° з. д.). А через 24 часа это положение может претерпеть переход: (58° с. ш., 17° з. д.) $\to$ (59° с. ш., 20° з. д.).

2) «Погоду в Кью» нельзя определить одним числом, но ее можно определить с любой желаемой полнотой, если брать достаточное число составляющих. Некоторым приближением будет вектор: (высота барометра, температура, облачность, влажность воздуха); конкретное состояние может быть (998 миллибар, 56°,2 F, 8, 72%). Прогноз погоды точен, если мы можем правильно предсказать, каким состоянием сменится текущее состояние.

3) Большинство заполняемых нами административных «форм» в действительности определяют некоторый вектор. Так, форма, заполняемая автомобилистом, имеет вид:

Возраст машины	. . . .
Мощность в л. с.	. . . .
Цвет	. . . .

Это есть попросту вертикально написанный вектор.

Два вектора считаются **равными** только в том случае, когда каждая составляющая одного равна соответствующей составляющей другого. Так, если имеется вектор (w, x, y, z), в котором каждая составляющая есть некоторое число, и если два конкретных вектора суть (4, 3, 8, 2) и (4, 3, 8, 1), то эти два вектора не равны, так как в четвертой составляющей 2 не равно 1. [Если векторы имеют различное число составляющих, как например векторы (4, 3, 8, 2) и $(Г, Р)$, то они просто несравнимы.]

Преобразование вектора ничем не отличается от всякого другого преобразования; надо только помнить, что операндом здесь является вектор в целом, а не его индивидуальные составляющие (хотя описание изменений составляющих является, конечно, существенной частью определения преобразования вектора). Положим, например, что «система» состоит из двух монет, каждая из которых может показывать либо герб, либо решетку. Эта система имеет четыре состояния, а именно:

$$(Г, Г),\ (Г, Р),\ (Р, Г) \text{ и } (Р, Р).$$

Предположим теперь, что моя маленькая племянница не любит видеть рядом два герба и всегда меняет их на $(P, Г)$, а также имеет ряд других предпочтений. Может получиться, что она действует всегда подобно преобразованию

$$N: \downarrow \begin{matrix} (Г, Г) & (Г, P) & (P, Г) & (P, P) \\ (P, Г) & (P, P) & (P, Г) & (Г, Г) \end{matrix}.$$

Как преобразование с четырьмя элементами, N ничем не отличается от рассмотренных в предыдущих параграфах.

Нет никаких причин, почему бы преобразование множеств векторов не было совершенно произвольным; но в естественных науках преобразования нередко отличаются значительной простотой. Часто составляющие изменяются так, что их изменение может быть описано более или менее простым правилом. Так, преобразование

$$M: \downarrow \begin{matrix} (Г, Г) & (Г, P) & (P, Г) & (P, P) \\ (P, Г) & (P, P) & (Г, Г) & (Г, P) \end{matrix}$$

можно описать, сказав, что первая составляющая всегда изменяется, тогда как вторая остается неизменной.

Наконец, ничто из сказанного не исключает возможности, чтобы некоторые или все составляющие вектора сами были векторы! (См., например, § 6/3.) Но мы будем стараться избегать таких усложнений.

Упр. 1. Используя последовательность трех букв ABC в качестве первого операнда, найдите преобразование, порождаемое повторным применением оператора «сдвинуть левую букву направо» (например, $ABC \to BCA$).

Упр. 2. (Продолжение.) Выразите преобразование через кинематический график.

Упр. 3. Используя вектор $(1, -1)$ в качестве первого операнда, найдите остальные элементы, порождаемые повторным применением оператора «поменять местами оба числа и оказавшееся слева помножить на минус единицу».

Упр. 4. (Продолжение.) Выразите преобразование через кинематический график.

Упр. 5. Первый операнд x есть вектор $(0, 1, 1)$; оператор F определяется следующим образом:

I) левое число образа равно среднему числу операнда;

II) среднее число образа равно правому числу операнда;

III) правое число образа равно сумме среднего и правого чисел операнда.

Таким образом, $F(x)$ есть (1,1,2), $F^2(x)$ есть (1,2,3). Найдите $F^3(x)$, $F^4(x)$, $F^5(x)$.

(Указание: см. упр. 2/14/9.)

3/6. *Обозначения.* Последнее упражнение показывает, насколько громоздкими могут стать описания, если пользоваться только словами. Преобразование F в действительности состоит из трех подпреобразований, применяемых одновременно, т. е. всегда вместе. Например, первое подпреобразование действует на левое число, изменяя его последовательно: $0 \to 1 \to 1 \to 2 \to 3 \to 5$ и т. д. Обозначим эти три составляющие через a, b и c. Тогда можно сказать, что преобразование F, действующее на вектор (a, b, c), эквивалентно одновременному действию трех подпреобразований, каждое из которых действует только на одну составляющую, а именно:

$$F: \begin{cases} a' = b, \\ b' = c, \\ c' = b + c. \end{cases}$$

Здесь $a' = b$ означает, что новое значение a, т. е. левого числа образа, равно среднему числу операнда и т. д. Приведем несколько иллюстраций этого нового метода; он не включает никаких новых идей, а только новые манипуляции с символами. (Советуем читателю проделать все упражнения, так как в них выступают многие важные черты, не упоминаемые в других местах.)

Упр. 1. Пусть операнды имеют вид (a, b) и один из них есть $(\frac{1}{2}, 2)$; найдите векторы, образуемые повторным применением к нему преобразования

$$T: \begin{cases} a' = b, \\ b' = -a. \end{cases}$$

[Указание: найдите $T(\frac{1}{2}, 2)$, $T^2(\frac{1}{2}, 2)$ и т. д.]

Упр. 2. Пусть операнды суть векторы вида (v, w, x, y, z) и U есть

$$U:\begin{cases} v' = w, \\ w' = v, \\ x' = x, \\ y' = z, \\ z' = y. \end{cases}$$

Найдите $U(a)$, где $a = (2,1,0,2,2)$.

Упр. 3. (Продолжение.) Начертите кинематический график преобразования U, если единственные его операнды суть a, $U(a)$, $U^2(a)$ и т. д.

Упр. 4. (Продолжение.) Как изменится график, если добавить другие операнды?

Упр. 5. Найдите образ от (3,—2, 1) для A, если дан общий вид векторов (g, h, j) и преобразование

$$A:\begin{cases} g' = 2g - h, \\ h' = h - j, \\ j' = g + h. \end{cases}$$

Упр. 6. Артур и Билл решили сыграть в азартную игру. Каждый делит свои деньги пополам и по сигналу судьи передает одну половину другому игроку. Затем каждый снова делит все имеющиеся у него теперь деньги пополам и по сигналу передает половину другому и т. д. Артур начал с 8 шиллингами, а Билл — с 4 шиллингами. Представьте начальный операнд вектором (8, 4). Найдите любым доступным вам способом все последующие образы.

Упр. 7. (Продолжение.) Выразите преобразование уравнениями, как выше, в упр. 5.

Упр. 8. (Продолжение.) Чарлз и Давид решили сыграть в такую же игру, но с тем, чтобы передавать партнеру половину того, что *партнер* имеет. Если они начали соответственно с 30 шиллингами и 34 шиллингами, что произойдет с этими числами?

Упр. 9. (Продолжение.) Выразите преобразования уравнениями, как в упр. 5.

Упр. 10. Если в упр. 8 начать с других сумм денег, кто в общем случае должен выиграть?

Упр. 11. В аквариуме два вида микроорганизмов: хищники и их жертвы. Каждый день каждый хищник уничтожает одну жертву и делится на двух хищников. Сегодня в аквариуме m жертв и n хищников. Выразите изменение их численности с помощью преобразования.

Упр. 12. (Продолжение.) Что является операндом этого преобразования?

Упр. 13. (Продолжение.) Допустим, что начальное состояние было (150, 10); найдите, как оно изменялось за первые четыре дня.

Упр. 14. Некий маятник качается приблизительно в соответствии с преобразованием $x' = \frac{1}{2}(x - y)$, $y' = \frac{1}{2}(x + y)$, где x — угол его отклонения от вертикали; y — его угловая скорость; x' и y' — их значения через 1 сек. Начальное состояние (10, 10); найдите изменение угла отклонения через каждую секунду за первые 8 сек. (Указание: найдите x', x'', x''' и т. д.; можно ли найти их, не вычисляя y', y'' и т. д.?)

Упр. 15. (Продолжение.) Начертите обычный график (с осями x и t), показывающий изменение x во времени. Имеется ли трение в этом маятнике?

Упр. 16. В некоторой экономической системе вводится новый закон, согласно которому заработная плата повышается ежегодно на столько шиллингов, на сколько процентов индекс цен превышает 100%. Экономическое влияние заработной платы на индекс таково, что в конце каждого года индекс цен равняется уровню заработной платы в начале года. Выразите изменение уровня заработной платы и индекса цен за год с помощью преобразования.

Упр. 17. (Продолжение.) Если нынешний год начался с заработной платы 110 шиллингов и с индексом цен 110%, найдите их значения за следующие 10 лет.

Упр. 18. (Продолжение.) Начертите обычный график изменения цен и заработной платы. Удовлетворителен ли данный закон?

Упр. 19. (Продолжение.) Система затем меняется так, что ее преобразование будет $x' = \frac{1}{2}(x + y)$, $y' = \frac{1}{2}(x - y) + 100$.

Новая система начинает действовать при заработной плате и ценах, равных 110. Рассчитайте, что произойдет за ближайшие 10 лет.

Упр. 20. (Продолжение.) Начертите обычный график изменения заработной платы и цен.

Упр. 21. Сравните графики упр. 18 и упр. 20. Как можно описать их различие в терминах экономики?

Упр. 22. Если система из упр. 19 будет внезапно нарушена, так что заработная плата упадет до 80, а цены вырастут до 120, а затем вмешательство прекратится, что произойдет в ближайшие 10 лет? [Указание: примите (80, 120) за операнд.]

Упр. 23. (Продолжение.) Начертите обычный график, показывающий изменение заработной платы и цен после нарушения.

Упр. 24. Является ли взаимно однозначным преобразование T между векторами (x_1, x_2) и (x_1', x_2')?

$$T: \begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, \\ x_2' = x_1 + x_2. \end{cases}$$

[Указание: если дан вектор (x_1, x_2), то однозначно ли определяется вектор $(x_1', x_2'$ и наоборот?]

* *Упр.* 25. Начертите кинематический график системы с 9 состояниями, в которой составляющими являются вычеты

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + y \\ y' &= y + 2 \end{aligned}\right\} \pmod 3.$$

Сколько бассейнов в этом графике?

3/7. (Этот параграф может быть опущен.) Предыдущий параграф имеет фундаментальное значение, ибо он является введением в методы математической физики, в том виде, как они применяются к динамическим системам. Поэтому мы настоятельно советуем читателю проработать *все* упражнения: только таким путем можно действительно усвоить излагаемые принципы. Проделав это, он будет лучше подготовлен к усвоению настоящего параграфа, в котором подытоживается описываемый метод.

Физик начинает с наименования своих переменных: $x_1, x_2, \ldots, x_n$. После этого основные уравнения преобразования всегда могут быть получены следующим основным методом:

1) Взять первую переменную x_1 и рассмотреть, каково будет ее следующее состояние. Если она изменяется конечными шагами, то ее следующее состояние будет x_1', а если она изменяется непрерывно, то следующее состояние будет $x_1 + dx_1$ (вместо этого в последнем случае мы можем рассмотреть значение dx_1/dt).

2) Используя все, что известно о данной системе, а также законы физики, выразить значение x_1' или dx_1/dt (т. е. *нового состояния* переменной x_1) через значения, которые $x_1, \ldots, x_n$ (и любые другие необходимые факторы) имеют сейчас. Таким путем получаются такие уравнения, как

$$x_1' = 2\alpha x_1 - x_3 \quad \text{или} \quad dx_1/dt = 4k \sin x_3.$$

3) Повторять этот процесс поочередно для каждой переменной, пока не будет выписано все преобразование.

Полученное таким образом множество уравнений (задающее для каждой переменной в системе следующее состояние этой переменной, выраженное в виде функции от нынешних значений переменных и от любых других необходимых факторов) есть **каноническое представление** системы. *Это — стандартная форма, к которой могут быть приведены все описания детерминированной динамической системы.*

Если все функции в каноническом представлении линейны, то система называется **линейной.**

При заданном начальном состоянии траектория, или линия поведения, может быть вычислена нахождением степеней преобразования, как в § 3/9.

* *Упр.* 1. Переведите данное преобразование из канонической формы

$$\left.\begin{aligned} dx/dt &= y \\ dy/dt &= z \\ dz/dt &= z + 2xy - x^2 \end{aligned}\right\}$$

в дифференциальное уравнение третьего порядка с одной переменной x. (Указание: исключите y и z и их производные.)

* *Упр.* 2. Уравнение простого гармонического колебания часто записывается в виде

$$\frac{d^2x}{dt^2} + ax = 0.$$

Переведите его в каноническую форму с двумя независимыми переменными. (Указание: обратите процесс, использованный в упр. 1.)

* *Упр.* 3. Переведите уравнение

$$x\frac{d^2x}{dt^2} - (1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \frac{2}{1 + x^2} = 0$$

в каноническую форму с двумя переменными.

3/8. После этого рассмотрения дифференциальных уравнений привыкшему к ним читателю может показаться, что теперь он пришел к «правильному» способу представления действий времени, тогда как произвольная и дискретная табличная форма из § 2/3 выглядит на первый взгляд довольно искусственной. Он должен, однако, заметить, что алгебраический способ ограничен, ибо применим только к явлениям, обнаруживающим специальное свойство непрерывности (§ 7/20). С другой стороны, табличная форма может использоваться *везде,* ибо *табличная форма включает алгебраическую.* Это обстоятельство имеет большое значение для биолога, которому часто приходится иметь дело с явлениями, непосредственно не приспособленными к алгебраической форме. Встретив такие явления, он должен помнить, что табличная форма всегда может обеспечить общность и строгость, в которых он нуждается. Дальнейший материал этой книги содержит разнообразные примеры того, как легко и естественно можно использовать табличную форму для представления биологических систем.

3/9. *«Неразрешимые» уравнения.* Упражнения § 3/6 с несомненностью показывают, что если дано замкнутое однозначное преобразование, а также некоторое начальное состояние, то траектория, начинающаяся из этого состояния, является вполне определенной (т. е. однозначной) и может быть вычислена. В самом деле, пусть x — начальное состояние, а T — преобразование; тогда последовательные значения (траектория) x образуют ряд

$$x,\ T(x),\ T^2(x),\ T^3(x),\ T^4(x) \ \text{и т. д.}$$

Этот процесс определения траектории по заданному преобразованию и заданному начальному состоянию называется «интегрированием» преобразования. (Этот термин особенно употребляется в том случае, когда преобразование есть множество дифференциальных уравнений, как в § 3/7; весь процесс называется тогда также «решением» уравнений.)

Если читатель проработал весь § 3/6, то, вероятно, он уже убедился в том, что, имея преобразование и начальное состояние, можно *всегда* получить траекторию. Поэтому он не будет обескуражен, услышав, что некоторые уравнения называются «неинтегрируемыми» или «неразрешимыми». Эти слова имеют чисто технический смысл и означают только, что траектория не может быть определена, если мы ограничены некоторыми определенными математическими операциями. В своем труде «Механизм экономических систем» Тастин[1] ясно показывает, как экономист может стремиться изучить системы и уравнения, принадлежащие к типу «неразрешимых»; и он показывает, как экономист может на практике добиться желаемого.

[1] Арнольд Тастин (род. 1899) — английский ученый, специалист в области автоматики и электронной техники. — *Прим. перев.*

3/10. *Фазовое пространство.* Если составляющими вектора служат числовые переменные, то преобразование можно представить в геометрической форме; и иногда эта форма обнаруживает некоторые свойства гораздо более ясно и очевидно, чем рассмотренные до сих пор алгебраические формы.

В качестве примера рассмотрим преобразование

$$x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y,$$
$$y' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y$$

из упр. 3/6/7. Выбрав оси x и y, мы можем представить любой данный вектор, например $(8, 4)$, точкой, у которой абсцисса равна 8, а ордината 4. Таким образом, начальное состояние системы может быть представлено точкой P на рис. 3/10/1 (I).

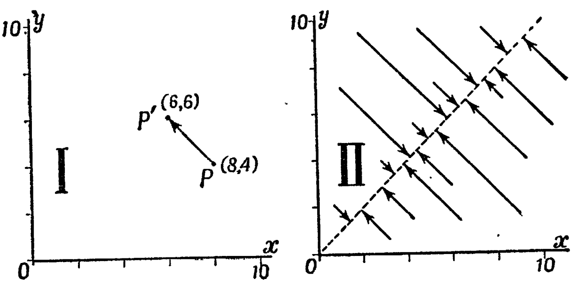


Рис. 3/10/1.

Преобразование превращает этот вектор в $(6, 6)$ и тем самым превращает состояние системы в состояние, отвечающее точке P'. Конечно, это движение есть не что иное, как изменение, изображенное на кинематическом графике в § 2/17; только теперь оно изображено на плоскости с прямоугольными осями и числовым масштабом. Это двумерное пространство, в котором операнды и образы можно изобразить точками, называется **фазовым пространством** системы. (Свобода «пуговиц и ниток», о которой говорилось в § 2/17, здесь уже невозможна.)

На том же рисунке под цифрой II показано достаточно стрелок, чтобы определить в общем виде, что происходит, когда преобразуется *любая* точка. Здесь стрелки показывают другие изменения, которые произошли бы при выборе других состояний в качестве операндов. Легко увидеть и легко доказать геометрически, что все стрелки в этом случае задаются одним правилом: какая бы точка ни была выбрана в качестве операнда, проводите из нее стрелку под углом в 45° влево вверх (или вправо вниз) до пересечения с диагональю, представленной линией $y = x$.

Теперь ясна польза фазового пространства (II): оно позволяет с первого же взгляда обозреть все траектории системы, как бы застывшие в единой картине. Благодаря этому часто бывает очень легко обнаружить какое-нибудь свойство или доказать какой-нибудь тезис там, где алгебраическая форма была бы неясной.

Представление на плоскости возможно только в том случае, когда вектор имеет две составляющие. При трех составляющих часто может оказаться полезным представление на трехмерной модели или на перспективном чертеже. Когда число составляющих больше трех, действительное представление уже невозможно, но принцип сохраняется, и схема, изображающая такую многомерную структуру, все еще может быть в высшей степени полезной, особенно когда нас интересуют не столько частные, сколько общие, топологические свойства.

[Словами «фазовое пространство» иногда обозначается пустое пространство, в которое еще не внесены стрелки (т. е. пространство, в которое может быть внесено *любое* множество стрелок); иногда этими словами обозначается диаграмма, содержащая множество стрелок, свойственное данному преобразованию, подобно приведенной выше диаграмме II. Обычно из контекста ясно, какое значение имеется в виду.]

Упр. Набросайте схемы фазовых пространств, достаточно подробные, чтобы показать основные черты некоторых систем из §§ 3/4 и 6.

3/11. *Что такое «система»?* В § 3/1 было сказано, что каждая реальная детерминированная машина или динамическая система соответствует замкнутому однозначному преобразованию; последующие параграфы иллюстрировали это положение многочисленными примерами. Отсюда, однако, не следует, что такое соответствие всегда очевидно; напротив, любая попытка применить это положение в общем виде столкнется очень скоро с определенными трудностями, которые мы сейчас рассмотрим.

Предположим, что мы имеем перед собой определенную реальную динамическую систему — качающийся маятник, или растущую культуру бактерий, или автопилот, или туземную деревню, или сердечно-легочный препарат. Предположим, что мы хотим найти соответствующее преобразование, начиная с самого начала и исходя лишь из основных принципов. Пусть, например, наша система — простой маятник длиной в 40 *см*. Выбрав подходящее записывающее устройство, мы отводим маятник на 30° в сторону, отпускаем его и каждые четверть секунды записываем его положение. Мы находим последовательные отклонения: 30°, 10° и —24° (по другую сторону). Поэтому первой нашей оценкой преобразования при данных условиях будет

$$\downarrow \begin{matrix} 30^\circ & 10^\circ \\ 10^\circ & -24^\circ \end{matrix}.$$

Затем, как хорошие ученые, мы исследуем переход от 10°: отводим маятник в сторону на 10°, отпускаем и обнаруживаем, что через четверть секунды отклонение равно +3°! Очевидно, что изменение **от 10°** неоднозначно — система сама себе противоречит. Что же нам теперь делать?

Наше затруднение типично для научных исследований и носит принципиальный характер: мы хотим, чтобы преобразование было однозначным, но это не получается. Мы не можем отказаться от требования однозначности, ибо это значило бы отказаться от надежды делать однозначные предсказания. К счастью, опыт давно уже показал, что надо делать: надо переопределить систему.

Здесь мы должны ясно представить себе, как должна определяться «система». Первое наше побуждение — показать на маятник и сказать: «Система есть вот эта вещь». Этот метод имеет, однако, принципиальный недостаток: *каждый материальный объект содержит не менее чем бесконечное число переменных и, следовательно, не менее чем бесконечное число возможных систем.* Например, реальный маятник имеет не только длину и положение — он имеет также массу, температуру, электропроводность, кристаллическую структуру, химические примеси, некоторую радиоактивность, скорость, отражательную способность, прочность на разрыв, пленку влаги на поверхности, зараженность бактериями, оптическое поглощение, упругость, контур, удельный вес и т. д. Требование изучить «все» эти факты не осуществимо, и в действительности никто никогда не предпринимал таких попыток. Нам необходимо выбрать и изучить лишь факты, представляющие для нас интерес с точки зрения определенной, заранее указанной цели.

Истина состоит в том, что в окружающем нас мире лишь некоторые множества фактов могут давать замкнутые однозначные преобразования. Обнаружить такие множества иногда легко, иногда трудно. История науки и даже история любого отдельного исследования изобилуют примерами этого. Обычно обнаружение таких множеств связано с другим методом определения системы — с методом *перечисления переменных, которые должны приниматься в расчет.* Система теперь означает не вещь, а перечень переменных. Этот перечень может изменяться, и обычнейшая задача экспериментатора состоит в том, чтобы изменять перечень («принимать в расчет другие переменные»), пока не будет найдено множество переменных, обеспечивающее требуемую однозначность. Так, мы сначала рассматривали маятник, как если бы он состоял только из одной переменной «угловое отклонение от вертикали»; мы обнаружили, что определенная таким образом система не обладает однозначностью. Если бы мы хотели продолжать, мы попробовали бы ввести другие определения, например вектор:

(угловое отклонение, масса маятника),

который также оказался бы неподходящим. В конце концов мы попробовали бы вектор:

(угловое отклонение, угловая скорость)

и нашли бы, что определенные по *такому* способу состояния дадут нам желаемую однозначность (см. упр. 3/6/14).

Некоторые из таких открытий отсутствующих переменных имели величайшее научное значение, например когда Ньютон открыл значение количества движения или когда Гоулэнд Гопкинс[1] открыл значение витаминов (поведение крыс при диете не было однозначным, пока витамины не были опознаны). Иногда такое открытие в научном отношении тривиально, например когда однозначные результаты получаются после того, как из водоснабжения устраняется примесь или завинчивается недостающий винт; но однозначность всегда существенна.

[Иногда требуется лишь однозначность некоторых *вероятностей*. Это более тонкое требование затрагивается в § 7/4 и 9/2. Но оно не противоречит сказанному выше; оно просто означает, что интересующей нас переменной является сама *вероятность*, а не переменная, задающая вероятность. Так, если я научно изучаю рулетку, меня может интересовать переменная «вероятность того, что в следующий раз выпадет красное», которая имеет числовые значения в интервале от 0 до 1, а не переменная «*цвет*, который выпадет в следующий раз», которая имеет только два значения: «красное» и «черное». Система, включающая последнюю переменную, почти наверное непредсказуема, тогда как система, включающая первую переменную (вероятность), может быть вполне предсказуемой, ибо указанная вероятность имеет *постоянное* значение, приблизительно равное 1/2.]

«Абсолютная» система, описанная и использованная в книге «Устройство мозга», является именно таким множеством переменных.

Теперь ясно, почему мы можем сказать, что *каждая* детерминированная динамическая система соответствует однозначному преобразованию (хотя мы отнюдь не осмеливаемся выставлять какие-либо догмы о том, что́

---

[1] Фредерик Гоулэнд Гопкинс (1861—1947) — английский биохимик; одним из первых исследовал витамины (в 1906—1912 гг.). — *Прим. перев.*

5 Зак. 3346. У. Росс Эшби

содержит в себе реальный мир, ибо он полон неожиданностей). Мы можем сказать это просто потому, что наука отказывается изучать другие типы, вроде упомянутого маятника с одной переменной, отвергая их как «хаотические» и «бессмысленные». *Мы и только мы* окончательно решаем, что нам признавать за «похожее на машину» и что не признавать (этот вопрос резюмируется в § 6/3).

ГЛАВА 4

Машины со входом

4/1. В предыдущей главе мы исследовали отношение между преобразованием и машиной, рассматривая последнюю как нечто единое. Теперь мы попытаемся найти в области преобразований эквивалент присущей каждой обычной машине способности находиться в различных условиях и в зависимости от этого изменять свое поведение, подобно подъемному крану, управляемому водителем, или мышце, управляемой нервом. Для этого необходимо правильно понять, что подразумевается под «параметром».

До сих пор каждое преобразование рассматривалось само по себе; теперь же мы должны включить в наше рассмотрение отношение между преобразованиями. Опыт показал, что для этого достаточно воспользоваться тем же самым методом, что в § 2/3. В самом деле, изменение преобразования A в преобразование B есть не что иное, как переход $A \to B$ (согласно § 2/3, элементом преобразования может быть все, что поддается ясному определению; поэтому нет никакой причины, чтобы элементы сами не были преобразованиями). Так, если T_1, T_2, T_3 — три преобразования, то нет никакой причины, почему бы не определить преобразование

$$U: \downarrow \begin{matrix} T_1 & T_2 & T_3 \\ T_2 & T_2 & T_1 \end{matrix}.$$

Во избежание путаницы необходимо только не смешивать изменений, вызываемых преобразованием T_1, с изменениями, вызываемыми преобразованием U; любым подходящим в данном конкретном случае способом эти два множества изменений должны мысленно различаться.

Вот обыденный пример преобразования такого же рода, как U. У мальчика имеется игрушечная машина T_1, построенная из частей, которые можно менять местами. Эту машину T_1 он затем разбирает, чтобы сделать новую игрушечную машину T_2. [В этом случае изменения, происходящие, когда машина T_1 переходит от одного состояния к другому (т. е. когда T_1 «работает»), ясно отличаются от изменений, происходящих, когда машина T_1 превращается в машину T_2.]

Изменения преобразования в преобразование могут быть, вообще говоря, совершенно произвольными. Нас, однако, будет занимать главным образом тот случай, когда несколько преобразований действуют на одно и то же множество операндов. Так, при четырех общих операндах a, b, c и d можно рассмотреть три преобразования R_1, R_2 и R_3:

$$R_1: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & d & b \end{matrix}, \quad R_2: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \end{matrix}, \quad R_3: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & d & b \end{matrix}.$$

Более компактно их можно записать в виде

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

Такую форму записи мы будем использовать как стандартную. (В этой главе мы по-прежнему ограничиваемся рассмотрением лишь замкнутых и однозначных преобразований.) Отдельное преобразование соответствует машине с характерным для нее способом поведения (§ 3/1); поэтому совокупность трех преобразований

R_1, R_2 и R_3, воплощенная в одном и том же физическом теле, должна соответствовать машине с тремя способами поведения. Может ли машина иметь три способа поведения?

Может, так как условия ее работы могут меняться. Многие машины имеют переключатель или рычаг, который можно установить в любом из трех положений, определяя тем самым, какой из трех способов поведения будет иметь место. Так, если буквы a, b, c, d обозначают состояния машины и если R_1 соответствует положению 1 такого переключателя, а R_2 соответствует положению 2 переключателя, то изменение индекса буквы R с 1 на 2 соответствует переводу переключателя из положения 1 в положение 2, а это соответствует переходу машины от одного способа поведения к другому.

Мы видим, что слово «изменение» в применении к такой машине может означать две совершенно различные вещи. Существует изменение состояния в состояние, скажем a в b, которое относится к поведению машины и управляется ее собственной внутренней природой; и существует изменение преобразования в преобразование, скажем R_1 в R_2, которое представляет собой *изменение способа поведения машины* и происходит по воле экспериментатора или под действием какого-либо другого внешнего фактора. Это различие носит принципиальный характер, и его ни в коем случае нельзя упускать из виду.

Индекс при R или любой другой символ, значение которого определяет, какое преобразование должно применяться к основным состояниям, будет называться **параметром.** Если параметр является числовым, то его следует тщательно отличать от любых чисел, которые могут быть использованы для определения операндов как векторов.

Реальная машина, поведение которой может быть представлено таким множеством замкнутых однозначных преобразований, будет называться **преобразователем**, или **машиной со входом** (в зависимости от удобства в контексте). Это множество преобразований есть ее каноническое представление. Параметр как нечто, способное изменяться, есть ее **вход.**

Упр. 1. Пусть S есть преобразование $\downarrow\begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}$.
Сколько других замкнутых и однозначных преобразований можно построить для этих же двух операндов?

Упр. 2. Начертите кинематические графики преобразований R_1, R_2 и R_3 (см. выше). Изменится ли график при изменении значения параметра?

Упр. 3. R (см. выше) есть R_1; представляющая точка начинает движение в c и делает два шага [до $R_1^2(c)$], затем, когда представляющая точка находится в этом новом состоянии, преобразование изменяется в R_2 и точка делает еще два шага. Где она окажется?

Упр. 4. Найдите последовательность преобразований R, которая переместила бы представляющую точку: (I) от d к a; (II) от c к a.

Упр. 5. Какое изменение в преобразовании соответствует фиксации одной из переменных в машине? Какое преобразование получится, если в системе

$$x' = -x + 2y,$$
$$y' = x - y$$

переменную x закрепить в значении 4?

Упр. 6. Постройте подходящую таблицу преобразований, на которые действует параметр, и покажите на ее примере, что параметр, даже если он присутствует, может фактически не оказывать никакого воздействия на преобразование.

4/2. Мы можем теперь рассмотреть алгебраический способ представления преобразователя.

Три преобразования

$$R_1 : n' = n + 1, \quad R_2 : n' = n + 2, \quad R_3 : n' = n + 3$$

можно, очевидно, записать более компактно в виде

$$R_a : n' = n + a,$$

и это показывает нам, как поступить. Следует отметить, что в этом выражении отношения n и a к преобразователю совершенно различны, и это различие никоим образом нельзя терять из виду. Здесь n — операнд, он изменяется преобразованием; то, что это операнд, показывает наличие n'. Но a — параметр; он определяет, какое преобразование должно применяться к n. Следовательно, значение a должно быть установлено прежде, чем может быть найдено изменение n.

Когда выражения в каноническом представлении станут более сложными, различать переменную и параметр можно, помня, что символы, представляющие операнды, в той или иной форме появятся на левой стороне равенства, как, например, x' или $\frac{dx}{dt}$; ибо преобразование должно показать, во что они превратятся. Так что все выражения, встречающиеся справа, но не слева, должны быть параметрами. Приводимые ниже примеры пояснят это.

Упр. 1. Какие три преобразования получатся, если задать значения -1, 0 и $+1$ параметру a в T_a, где

$$T_a : \begin{cases} g' = (1-a)\,g + (a-1)\,h, \\ h' = 2g + 2ah. \end{cases}$$

Упр. 2. Какие два преобразования получатся, если параметр α будет принимать значения 0 или 1 в S?

$$S : \begin{cases} h' = (1-\alpha)\,j + \log(1+\alpha+\sin\alpha h), \\ j' = (1+\sin\alpha j)\,e^{(\alpha-1)h}. \end{cases}$$

Упр. 3. Преобразователь $n' = n + a^2$, в котором a и n могут принимать только целые положительные значения, начинает работу с $n = 10$. (I) Какое значение должно иметь a, чтобы, несмотря на повторные преобразования, n оставалось в 10? (II) Какое значение должно сохранять a, чтобы n изменялось шагами по 4 за один раз (10, 14, 18, ...)? (III) Какие значения a, выбираемые заново при каждом шаге, заставят n пройти ряд 10, 11, 15, 16, 20, 21, 25, 26, ..., в котором разность составляет либо 1, либо 4? (IV) Какие значения a заставят n продвинуться шагами по 1 до 100, а затем одним скачком до 200?

Упр. 4. Пусть преобразователь имеет n операндов, и пусть параметр может принимать также n значений. Будем говорить, что преобразователь дает **триединое** соответствие между значениями операнда, образа и параметра, если: (1) для данного значения параметра преобразование, осуществляемое преобразователем, является взаимно однозначным; (2) для данного операнда соответствие между значением параметра и образом также является взаимно однозначным. Таков, например, преобразователь

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	a	b
R_2	b	a	c	d
R_3	d	c	b	a
R_4	a	b	d	c

Покажите, что образы должны составить латинский квадрат, т. е. такой квадрат, в котором каждая строка (и каждый столбец) содержит каждый образ один и только один раз.

Упр. 5. Система с одной переменной V ведет себя согласно правилу

$$V' = \frac{1}{10}\left(V + \frac{90}{P}\right),$$

где P — параметр. Задайте P некоторое значение P_1, например 10, и найдите предел, к которому стремится V при неограниченном повторении преобразования; назовите этот предел V_1. Затем задайте P другое значение P_2, например 3, и найдите соответствующий предел V_2. Найдя несколько таких пар значений (P и предельное значение V), посмотрите, не связаны ли они каким-либо законом. Не ведет ли себя V как объем газа под давлением P?

Упр. 6. Какое преобразование, имеющее параметр a, даст для n три ряда значений:

$$a = 1: 0, \longrightarrow 1, \longrightarrow 2, \longrightarrow 3, \longrightarrow 4, \ldots,$$
$$a = 2: 0, \longrightarrow 4, \longrightarrow 8, \longrightarrow 12, \longrightarrow 16, \ldots,$$
$$a = 3: 0, \longrightarrow 9, \longrightarrow 18, \longrightarrow 27, \longrightarrow 36, \ldots.$$

(Указание: испробуйте несколько подходящих выражений, таких как $n' = n + a$, $n' = a^2 n$ и т. д.)

Упр. 7. Если $n' = n + 3a$, то определяет ли значение a величину скачка n при каждом шаге?

4/3. Когда выражение для преобразователя содержит более чем один параметр, число различных преобразований может равняться числу возможных комбинаций значений параметров (ибо каждая комбинация может определять отдельное преобразование), но не может превышать его.

Упр. 1. Найдите все преобразования в преобразователе U_{ab}, если a может принимать значения 0, 1 или 2, а b — значения 0 или 1 и если

$$U_{ab}: \begin{cases} s' = (1 - a)\,s + abt, \\ t' = (1 + b)\,t + (b - 1)\,a. \end{cases}$$

Сколько преобразований содержит это множество?

Упр. 2. (Продолжение.) Если вектор $(a,\ b)$ может принимать только значения (0,1), (1,1) и (2,0), то сколько преобразований содержит данный преобразователь?

Упр. 3. Преобразователь T_{ab} с переменными $p,\ q$

$$T_{ab}: \begin{cases} p' = ap + bq, \\ q' = bp + aq \end{cases}$$

начинает работу с (3, 5). Какие значения должны иметь параметры a и b, чтобы (p, q) передвинулось за один шаг в (4, 6). (Указание: выражение для T_{ab} может рассматриваться как система совместных уравнений.)

Упр. 4. (Продолжение.) Найдите затем значение (a, b), которое передвинет систему за один шаг обратно из (4, 6) в (3, 5).

Упр. 5. Преобразователь $n' = abn$ имеет параметры a и b, каждый из которых может принимать значения 0, 1 или 2. Сколько здесь различных преобразований? (Такие неразличимые случаи называются «вырожденными»; правило, приведенное в начале этого параграфа, относится к максимальному числу возможных преобразований; но это максимальное число не всегда достигается.)

4/4. *Вход и выход.* Физик и особенно инженер-электрик употребляют слово «преобразователь» для описания любой детерминированной физической системы, имеющей некоторые определенные места входа, в которых экспериментатор может вызывать изменения, влияющие на поведение системы, и некоторые определенные места выхода, в которых экспериментатор наблюдает изменения определенных переменных непосредственно или с помощью соответствующих приборов. Теперь ясно, что математическая система, описанная в § 4/1, является естественным представлением такой материальной системы. Ясно также, что «вход» машины соответствует множеству состояний, принимаемых ее параметрами; ибо изменение параметров (или входа) воздействует на поведение машины (преобразователя).

В электрической системе вход обычно виден сразу же и сводится к нескольким зажимам. В биологических системах, однако, число параметров обычно очень велико и все множество параметров видно отнюдь не сразу. Оно фактически совпадает со множеством «всех переменных, изменение которых непосредственно влияет на организм». Таким образом, параметры включают условия, в которых живет организм. Поэтому читатель должен быть готов к тому, что в дальнейших главах слово «вход» будет означать то небольшое число параметров простого механизма, то многочисленные параметры свободно живущего организма в сложной среде. (Рост числа параметров не обязательно приводит к снижению строгости рассуждений, ибо все входящие в рассмотрение величины могут быть измерены с точностью, ограничиваемой лишь средствами и временем, которыми располагает экспериментатор.)

Упр. 1. На два входных зажима электрической машины подается напряжение. Соединим эти зажимы постоянным проводом. Какому изменению в T_{ba} соответствует это изменение в машине, если последняя представлена теми же соотношениями, как в упр. 4/3/3?

Упр. 2. «Когда организм взаимодействует со средой, его мышцы являются входом среды, а его органы чувств — выходом среды». Вы согласны с этим?

4/5. *Переходные процессы.* Инженер-электрик и биолог склонны изучать свои системы довольно разными методами. Инженер часто исследует природу какой-либо неизвестной системы подвергая ее непрерывному регулярному изменению на входе и наблюдая ее выход. Так, при гармоническом анализе инженер подвергает систему продолжительному воздействию периодического синусоидального напряжения выбранной частоты и снимает определенные характеристики на выходе; затем он повторяет испытание с другой частотой и т. д.; в конце концов, из соотношений между входными частотами и соответствующими выходными характеристиками он заключает что-либо о свойствах системы. В течение этого испытания машина подвергается непрекращающемуся воздействию.

Биолог часто использует метод, при котором после задания начальных условий система не испытывает никакого воздействия. Например, он может положить кусок мяса около муравейника, а затем не производить никаких изменений, сохраняя условия, т. е. параметры, постоянными, и наблюдать все последующее развитие сложных образцов поведения, индивидуального и социального.

В противоположность тому, что наблюдается в живых системах, поведение механических и электрических систем часто приобретает некоторое единообразие вскоре после прекращения изменений на входе. Реакция машины после какого-либо воздействия, протекающая при поддерживаемом затем постоянстве входа, называется переходным процессом. Важно понять, что для инженера сложная последовательность событий в муравейнике есть переходный процесс. В более общих терминах переходный процесс можно определить как последовательность состояний, проходимую преобразователем при постоянных условиях до того, как она начинает повторяться.

Говоря о переходном процессе, отличном от следующей за ним повторяющейся части, желательно иметь возможность однозначного опознания его конца. Для дискретных преобразований следующий метод дает точную длину переходного процесса.

Продолжим последовательность состояний до тех пор, пока повторение не станет явным; пусть, например, мы получим

$$ABCDCDCDC \ldots \quad \text{или} \quad HEFGGGGGG \ldots .$$

Затем, двигаясь справа, поставим значок «1» там, где последовательность отклоняется от цикла:

$$AB^1CDCDCDC \ldots \quad \text{или} \quad HEF^1GGGGGG \ldots .$$

Затем справа от 1, отступив на один цикл, поставим значок «2»:

$$AB^1CD^2CDCDC \ldots \quad \text{или} \quad HEF^1G^2GGGGG \ldots .$$

Тогда **переходный процесс** определяется как последовательность состояний от начального состояния до значка 2, т. е. $ABCD$ или $HEFG$.

Теперь можно придать строгую форму интуитивному впечатлению, что сложная система может обнаруживать при неизменных условиях более сложные формы поведения, чем простая система. Начертив произвольный кинематический график для N состояний, легко убедиться, что при повторных применениях замкнутого однозначного преобразования с N операндами *длина переходного процесса не может превышать N состояний.*

Упр. 1. Каким свойством должен обладать график, чтобы повторение начиналось как можно позже?

Упр. 2. Каков переходный процесс системы из упр. 3/6/6 с начальным состоянием (8, 4)?

СОЕДИНЕНИЕ СИСТЕМ

4/6. Существенным свойством машин является их способность к соединению друг с другом. Две и более машины можно соединить в одну новую машину. С другой стороны, любая машина может рассматриваться как образованная соединением ее частей, которые, в свою очередь, могут рассматриваться как малые машины, или подмашины. Такое соединение систем имеет фундаментальное значение в науке, ибо, проводя эксперимент, ученый временно соединяет себя с изучаемой им системой. Чему же в символике преобразований соответствует этот процесс соединения машины с машиной и части с частью? Из чего состоит *операция* соединения?

Прежде чем отвечать на вопрос, заметим, что он допускает не один ответ. Во-первых, машины можно резко столкнуть друг с другом, чтобы они «соединились», как «соединяются» два автомобиля, сцепившиеся при катастрофе. Эта форма, однако, не представляет для нас интереса, ибо автомобили слишком сильно изменяются подобным процессом. Нам нужен такой способ соединения, при котором не нарушалась бы внутренняя работа каждой машины; тогда после объединения каждая машина останется той же самой машиной, что и раньше.

Но при таком соединении, вообще говоря, необходимо, чтобы каждая машина воздействовала на другую машину лишь посредством воздействия на ее *условия*, т. е. на ее вход. Следовательно, если машины должны сохранять свою индивидуальную природу после соединения в одно целое, то соединять между собой можно только (данные) входы и выходы, не затрагивая остальных частей, какими бы доступными те ни были.

4/7. Проследим теперь операцию соединения подробно. Предположим, что машину (преобразователь) P требуется соединить с другой машиной R. Пусть для простоты машины P должна действовать на R, не вызывая обратного действия R на P; примером может послужить соединение микрофона с усилителем или прорастание двигательного нерва для иннервации эмбриональной мышцы. Мы должны соединить выход из P со входом в R. Очевидно, что поведение R, или, точнее, преобразование, описывающее изменение состояний R, будет зависеть от состояния P и изменяться вместе с ним. Отсюда следует, что машина R должна иметь параметры в качестве входа и что значения этих параметров в каждый момент должны быть некоторой функцией состояния P. Положим для определенности, что машина, или преобразователь, R имеет три преобразования, перечисленные в § 4/1, т. е.

$\downarrow$	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

Положим также, что P имеет преобразование для трех состояний i, j, k:

$$P: \downarrow \begin{matrix} i & j & k \\ k & i & i \end{matrix}.$$

Мы должны теперь соединить машины P и R, указав, какое значение должен принимать параметр машины R (назовем его α), когда P находится в любом из своих состояний. Положим, что мы связали их соотношением Z (однозначным, но не замкнутым преобразованием):

$$Z: \begin{cases} \text{состояние } P: & \downarrow \begin{matrix} i & j & k \end{matrix} \\ \text{значение } \alpha: & \begin{matrix} 2 & 3 & 2 \end{matrix} \end{cases}.$$

(Соотношение между P и α сделано несколько нерегулярным, чтобы подчеркнуть, что детали здесь совершенно произвольны и полностью определяются тем, кто производит соединение.) Положим далее (это существенно для упорядоченности соединения), что две наши машины P и R работают по общей временнóй шкале, так что изменения в них идут шаг в шаг.

Теперь нетрудно видеть, что две наши машины образуют *одну новую машину с вполне детерминированным поведением*. Так, предположим, что вся система начинает работу, когда R находится в состоянии a, а P — в состоянии i. Поскольку P находится в состоянии i, то в машине R будет осуществляться преобразование R_2 (согласно соотношению Z). Это изменит a в b; в то же время i в P перейдет в k, так что состояния a и i детерминированно перейдут в b и k. Теперь повторяем рассуждение. Поскольку P находится в состоянии k, то в машине R опять (согласно соотношению Z) будет осуществляться преобразование R_2; поэтому b перейдет (при R_2) в a, а k перейдет (при P) в i. Это приведет всю систему в целом в начальное состояние (a, i), после чего система, очевидно, будет двигаться неограниченно долго по этому циклу.

Поведение всей машины станет более очевидным, если мы применим метод § 3/5 и увидим, что состояние целой машины есть просто вектор с двумя составляющими (x, y), где x — одно из состояний a, b, c, d, а y — одно из состояний i, j, k. Таким образом, вся машина имеет двенадцать состояний, а выше было показано, что состояние (a, i) испытывает переходы $(a, i) \to (b, k) \to \to (a, i) \to$ и т. д.

Упр. 1. Пусть Q — преобразование нашей целой машины с двенадцатью состояниями (x, y); выпишите Q полностью.

Упр. 2. (Продолжение.) Начертите кинематический график Q. Сколько в нем бассейнов?

Упр. 3. Соедините P и R, используя преобразование Y:

$$Y:\left\{\begin{array}{ll|lll} \text{состояние } P: & \downarrow & i & j & k \\ \text{значение } \alpha: & & 1 & 2 & 3 \end{array}\right..$$

Что случится, если машина начнет работу с состояния (a, i)?

Упр. 4. Если две машины соединены в одну систему, то зависит ли поведение всей системы от способа соединения? (Указание: используйте предыдущее упражнение.)

Упр. 5. Если две машины с числом состояний n_1 и n_2 соединены вместе, то какова максимальная длина переходного процесса, который может возникнуть во всей системе?

Упр. 6. Если максимальная длина переходного процесса в машине M равна n состояниям, то какова максимальная длина переходного процесса в машине, образованной соединением трех машин M вместе?

Упр. 7. Возьмите много частей $(A, B, C, \ldots)$, каждую с преобразованием

$\downarrow$	0	1	2
α	0	2	0
β	1	1	1
γ	2	2	2

,

и соедините их в одну длинную цепь.

вход $\to \boxed{A} \to \boxed{B} \to \boxed{C} \to$ и т. д.

Пусть в этой цепи часть A действует на B, B — на C и т. д. согласно

$$Z: \downarrow \begin{matrix} 0 & 1 & 2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{matrix}.$$

Если вход в A имеет значение α, что случится с состояниями дальше по цепи?

Упр. 8. (Продолжение.) Что случится, если вход изменит через один шаг свое значение с α на β, а затем вернется опять в α, где и останется?

4/8. *Соединение с обратной связью.* В предыдущем параграфе P соединялось с R так, что изменения P некоторым образом влияли на изменения R или определяли их, но изменения P не зависели от того, в каком состоянии было R. Однако две машины можно соединить и так, чтобы обе они воздействовали друг на друга.

Для этого каждая машина должна иметь вход, т. е. параметры. Машина P не имеет параметров, и, следовательно, такое двойное соединение непосредственно не осуществимо для машин предыдущего параграфа. Поэтому предположим, что мы собираемся соединить машину R (такую же, как выше) с машиной S, заданной ниже:

↓	a	b	c	d
R_1	c	d	d	b
R_2	b	a	d	c
R_3	d	c	d	b

,

↓	e	f
S_1	f	f
S_2	e	f
S_3	f	f
S_4	f	e

.

Пусть S при соединении воздействует на R согласно соотношению Y (где α есть параметр машины R):

$$Y: \begin{cases} \text{состояние } S: & \downarrow \begin{matrix} e & f \\ 3 & 1 \end{matrix}, \\ \text{значение } \alpha: & \end{cases}$$

а R воздействует на S согласно соотношению X (где β есть параметр машины S):

$$X: \begin{cases} \text{состояние } R: & \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ 3 & 1 & 1 & 2 \end{matrix}. \\ \text{значение } \beta: & \end{cases}$$

Чтобы проследить изменения, испытываемые всей этой новой машиной (назовем ее T), предположим, что она начинает работу с состояния-вектора (a, e). Согласно соотношениям Y и X, преобразования, применяемые на первом шаге, суть R_3 и S_3. Действуя соответственно на a и e, они дадут d и f; таким образом, новое состояние всей машины T будет (d, f). Следующие два преобразования будут R_1 и S_2, и потому машина T перейдет в состояние (b, f) и т. д.

Упр 1. Постройте кинематический график T.

Упр. 2. Соедините S и R каким-либо другим способом.

Упр. 3. Соедините S и R так, чтобы S воздействовало на R, но R не воздействовало на S. (Указание: рассмотрите, каков будет результат, если в X все значения β сделать одинаковыми.)

4/9. *Алгебраическое соединение.* Описанный в предыдущих параграфах процесс, при котором изменения, претерпеваемые каждым состоянием и параметром, рассматривались индивидуально, показывает со всей ясностью и общностью возникающие при соединении зависимости. Ничуть не теряя этой ясности, можно придумать различные его модификации.

Так, положим, что машины определяются, как обычно, через векторы с числовыми составляющими. Правило же соединения остается без изменения: каждая машина должна иметь один или несколько параметров, и соединение осуществляется указанием того, *какой функцией других переменных машины должны быть эти параметры.* Так, машины M и N:

$$M: \begin{cases} a' = a^2 + pb \\ b' = -qa \end{cases}, \qquad N: \begin{cases} c' = rsc + ud^2 \\ d' = 2tue \\ e' = uce \end{cases}$$

могут быть соединены преобразованиями U и V:

$$U: \begin{cases} p = 2c \\ q = de^2 \end{cases}, \qquad V: \begin{cases} r = a + b \\ s = a - b \\ t = -a \\ u = b^2 \end{cases}.$$

Здесь соотношения U суть сокращенный способ записи целого множества переходов от значения (c, d, e) к значению (p, q); например,

$$U:\downarrow\begin{matrix}(0,0,0) & (0,0,1) & (1,3,5) & (2,2,4)\\ (0,0) & (0,0) & (2,75) & (4,32)\end{matrix}.$$

Аналогично соотношения V определяют преобразование от (a, b) к (r, s, t, u), включающее, например, переход $(5, 7) \rightarrow (12, -2, -5, 49)$ (ср. с P в § 6/9).

Результатом соединения является система с пятью переменными, алгебраическое представление которой имеет вид:

$$\begin{aligned}a' &= a^2 + 2bc,\\ b' &= -ade^2,\\ c' &= (a^2 - b^2)c + b^2d^2,\\ d' &= -2ab^2e,\\ e' &= b^2ce.\end{aligned}$$

(Примеры этого же процесса при наличии дифференциальных уравнений даны в «Устройстве мозга», § 21/6.)

Упр. 1. Что является параметрами в M? Что в N?

Упр. 2. Соедините M и N посредством W и X и найдите, во что перейдет состояние (1, 0, 0, 1, 0), являющееся одним из значений (a, b, c, d, e); здесь

$$W:\begin{cases}p = d\\ q = c\end{cases}, \qquad X:\begin{cases}r = a\\ s = ab\\ t = a\\ u = a\end{cases}.$$

4/10. Уже упр. 4/7/4 показало, что части, вообще говоря, могут соединяться в единое целое различными способами. *Определение составных частей не определяет способа соединения.*

Отсюда следует важный вывод: то обстоятельство, что вся машина строится из частей, обладающих заданным поведением, еще недостаточно для определения ее поведения в целом; лишь после уточнения деталей соединения поведение всей машины становится вполне определенным.

ОБРАТНАЯ СВЯЗЬ

4/11. В § 4/7 P и R соединялись так, что P воздействовало на R, но R не воздействовало на P. В этом случае говорится, что P **доминирует** над R; такое отношение частей мы можем изобразить (предвосхищая § 4/12) диаграммой

$$\boxed{P} \to \boxed{R}\,.$$

[Эту стрелку нельзя смешивать с той, которая обозначает переход (§ 2/2), ибо последняя всегда связывает два состояния, тогда как первая связывает две части. В дальнейших диаграммах части всегда будут изображаться в квадратиках.]

Однако кибернетику особенно интересует случай из § 4/8, при котором обе части воздействуют друг на друга. Это отношение частей можно изобразить диаграммой

$$\boxed{P} \rightleftarrows \boxed{R}\,.$$

Если действие между частями динамической системы имеет этот круговой характер, то мы говорим, что в ней имеется **обратная связь.**

Такое определение обратной связи наиболее согласуется с духом этой книги, посвященной в основном принципиальным вопросам.

Однако возможны и другие определения, и имели место споры о том, какое из них является лучшим. Поэтому несколько слов в объяснение могут быть полезны. Существуют две основные точки зрения, которые нам следует рассмотреть.

Одной из них придерживаются те, кто следует по пути, избранному в этой книге, т. е. те, чья цель — понять *принципы*, стоящие за многочисленными частными механизмами, демонстрирующими эти принципы. Для таких работников «обратная связь» существует между двумя частями, когда обе они воздействуют друг на друга, как например в системе

$$x' = 2xy,$$
$$y' = x - y^2.$$

В самом деле, значения y в этой системе воздействуют на то, как будет изменяться x, а значения x воздействуют на y. Напротив, обратная связь не может считаться присутствующей в системе

$$x' = 2x,$$
$$y' = x - y^2,$$

ибо изменение x здесь не зависит от значения y; x доминирует над y, и действие происходит только в одном направлении.

Другой точки зрения придерживаются практики — экспериментаторы и конструкторы. Они хотят использовать термин «обратная связь» (в тех случаях, когда некоторое прямое действие P на R можно принять как нечто данное) для обозначения преднамеренной передачи некоторого обратного воздействия R на P посредством некоторой связи, которая физически или материально очевидна. Они возражают против определения, предлагаемого математиками, указывая, что оно заставляло бы признавать наличие обратной связи в обычном маятнике между его положением и количеством движения (см. упр. 3/6/14); с практической точки зрения такая «обратная связь» есть нечто мистическое. На это математик отвечает, что если обратная связь должна считаться присутствующей только там, где ее представляет действительный провод или нерв, то теория становится хаотической и полной несущественных оговорок.

На самом деле эти споры не нужны, так как точное определение «обратной связи» не имеет никакой важности. Дело заключается в том, что понятие «обратной связи», такое простое и естественное в некоторых элементарных случаях, становится искусственным и малополезным, когда взаимосвязь частей становится более сложной. Там, где имеются только две части, соединенные так, что каждая из них воздействует на другую, свойства обратной связи дают важную и полезную информацию о свойствах целого. Но если число частей возрастает хотя бы до четырех и каждая часть воздействует на три остальные части, то через них можно провести двадцать замкнутых петель, однако знание свойств всех этих двадцати петель еще не дает полной информации о системе. Такие сложные системы не могут рассматриваться как переплетающееся множество более или менее независимых петель обратной связи — их можно рассматривать лишь как целое.

Следовательно, для понимания общих принципов динамических систем понятие обратной связи само по себе недостаточно. Важно лишь то, что сложные системы, богатые внутренними перекрестными связями, имеют сложное поведение и что это поведение может быть целесообразным в сложных ситуациях.

Упр. 1. Проследите двадцать петель обратной связи в диаграмме рис. 4/11/1.

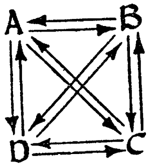


Рис. 4/11/1.

Упр. 2. Машина со входом α имеет преобразование

$$T: \begin{cases} x' = y - \alpha z \\ y' = 2z \\ z' = x + \alpha \end{cases}.$$

Какая машина (какое преобразование) получится, если вход α объединить с выходом z согласно $\alpha = -z$?

Упр. 3. (Продолжение.) Будет ли поведение этой второй машины отличаться от поведения первой, когда α имеет постоянное значение, равное -1?

Упр. 4. Одним из входов машины служит фотоэлемент, а одним из выходов — лампа переменной яркости. При условии 1 от лампы к фотоэлементу нет никакой связи: ни электрической, ни оптической. В нашем распоряжении имеется также зеркало, которое при условии 2 помещается так, что колебания яркости лампы вызывают колебания потенциала фотоэлемента (т. е. так, что машина может «видеть себя»). Считаете ли вы, что поведение машины при условиях 1 и 2 будет различным? (Указание: сравните с упр. 3.)

НЕЗАВИСИМОСТЬ ВНУТРИ ЦЕЛОГО

4/12. В последних параграфах мы неоднократно говорили о «воздействии» одной машины, или части, или переменной на другую машину, или часть, или переменную. Это понятие следует уточнить, ибо оно крайне важно. Что означает оно в терминах действительных операций данной машины? Этот процесс протекает следующим образом.

Предположим, что мы исследуем, оказывает ли часть или переменная i непосредственное воздействие на часть или переменную j. Грубо говоря, мы предоставляем системе обнаруживать свое поведение и отмечаем, изменяется ли поведение части j с изменением значения части i. Если поведение части j не меняется при любых значениях части i, то мы говорим в общем случае, что i не оказывает воздействия на j.

Говоря точнее, мы сначала выбираем некоторое состояние S (всей системы). При данном значении i мы отмечаем переход, происходящий в части j (игнорируя переходы других переменных). Мы сравниваем этот переход с теми, которые происходят при использовании состояний S_1, S_2 и т. д., отличающихся от S *только значением i-й составляющей.* Если при S_1, S_2 и т. д. в части j происходит тот же самый переход, что и при S, то мы говорим, что *i не оказывает непосредственного воздействия на j*; в противном же случае мы говорим, что *i оказывает непосредственное воздействие на j*. («Непосредственным» такое воздействие называется потому, что мы рассматриваем лишь значения части j, принимаемые ею на протяжении одного шага во времени.)

Рассмотрим теперь, что означает для преобразования понятие воздействия. Предположим, что элементами преобразования являются векторы с четырьмя составляющими (u, x, y, z) и что третье из канонических уравнений имеет вид

$$y' = 2uy - z.$$

Иными словами, если y имеет сейчас некоторое значение, то значение, которое эта составляющая примет через один шаг, будет зависеть от значений u и z, но не будет зависеть от значения x. Тогда мы скажем, что переменные u и z оказывают **непосредственное воздействие на** y.

Для соблюдения строгости следует заметить, что утверждение о наличии или отсутствии непосредственного воздействия, например u на y, относится, собственно, лишь к *двум данным состояниям,* которые должны совпадать по значениям составляющих x, y, и z и отличаться значениями составляющей u. Действительно, наличие непосредственного воздействия в одной паре состояний не влияет, вообще говоря, на его наличие или отсутствие в других парах состояний. Так, упомянутое выше преобразование дает переходы:

$$
\begin{aligned}
(0, 0, 0, 0) &\longrightarrow (\ ,\ , 0\ ,),\\
(1, 0, 0, 0) &\longrightarrow (\ ,\ , 0\ ,),\\
(0, 0, 1, 0) &\longrightarrow (\ ,\ , 0\ ,),\\
(1, 0, 1, 0) &\longrightarrow (\ ,\ , 2\ ,).
\end{aligned}
$$

(Ненужные нам значения здесь опущены.) Первые два перехода показывают, что в одной области пространства переменная u не оказывает непосредственного воздействия на переменную y, а вторые два перехода показывают, что в другой области переменная u оказывает непосредственное воздействие на переменную y. Итак, строго говоря, на вопрос: «каково непосредственное воздействие u на y?» — можно ответить только для данной пары состояний. В простых системах часто один и тот же ответ дается для всего фазового пространства; в этом случае мы можем дать безотносительное описание непосредственного воздействия u на y. Так, в разобранном примере *u оказывает* непосредственное воздействие на y во всех точках, кроме некоторых особых точек.

Такая проверка непосредственного воздействия u на y есть просто символический эквивалент того, что делает экспериментатор, когда хочет проверить, оказывает ли одна переменная непосредственное воздействие на другую. А именно, экспериментатор фиксирует все переменные, кроме данной пары, и затем сравнивает поведение первой переменной в случае, когда вторая переменная имеет значение u_1, и в случае, когда вторая переменная имеет значение u_2.

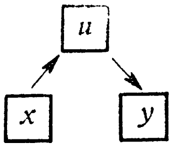
Тот же метод фактически широко используется в повседневной жизни. Представим себе, например, что мы входим в незнакомую комнату, хотим зажечь свет и обнаруживаем существование в ней трех выключателей. Мы должны установить, какие из них оказывают непосредственное воздействие на поведение света, а какие — нет. Мы *изменяем* положение одного из выключателей и смотрим, *изменяется* ли после этого поведение света. Так мы обнаружим, от какого выключателя зависит свет. Мы видим, что описанный метод проверки согласуется со здравым смыслом. С другой стороны, он имеет то преимущество, что он применим и понятен в тех даже случаях, когда мы ничего не знаем о реальных физических или других факторах, действующих при этом. Следует заметить, что этот метод не требует знания внешних факторов; результат выводится непосредственно из наблюдаемого поведения системы и зависит от того, *что* система делает, а не от того, *почему* она это делает.

Выше уже отмечалось, что преобразователь может обладать сколь угодно произвольным распределением непосредственных воздействий по фазовому пространству. Часто, однако, распределение это обнаруживает непрерывность, так что на всем протяжении некоторой достаточно заметной области переменная u оказывает, например, непосредственное воздействие на y, тогда как x в той же самой области такого воздействия не оказывает. В таких случаях часто бывают полезны диаграммы, с помощью которых изображаются эти отношения между переменными, справедливые во всей данной области (последняя может иногда совпадать со всем фазовым пространством). Стрелка проводится от u к y тогда и только тогда, когда u оказывает непосредственное воздействие на y. Диаграмма, полученная описанным способом, будет называться **диаграммой непосредственных воздействий.**

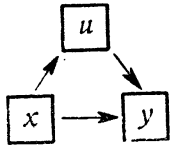
Такие диаграммы уже вошли в общее употребление. Они часто используются в физиологии, чтобы показать, как некоторые взаимозависимые переменные (например, кровяное давление, частота пульса, секреция адреналина и активность каротидного синуса) действуют друг на друга. В проектировании вычислительных машин и следящих систем они известны под названием «структурных схем». Они используются также в некоторых больших деловых предприятиях, чтобы показывать отношения управления и информации между различными отделами.

Стрелка в такой диаграмме, конечно, совершенно отлична от той, которая изображает изменение при переходе (§ 2/2). В последнем случае она означает просто, что одно состояние переходит в другое; но стрелка на диаграмме непосредственных воздействий имеет гораздо более сложное значение. В этом случае стрелка, идущая от A к B, означает, что если в ряде испытаний наше A принимает множество различных значений, а B и все другие условия каждый раз перед испытанием имеют одно и то же начальное значение, то значения, принимаемые B при последовательных испытаниях, также обнаруживают разнообразие. Как мы увидим позже (в § 8/11), это лишь другой способ сказать, что от A к B идет *канал связи*.

Если дан преобразователь в алгебраической или в реальной материальной форме, то мы можем исследовать непосредственные воздействия внутри системы и затем сделать некоторые выводы о ее внутренней организации и природе. При этом мы должны тщательно различать «непосредственные» и «отдаленные» воздействия. В приведенном выше примере испытания действие x на y рассматривалось только в течение одного шага, и это ограничение было необходимо при изложении основ теории. Мы обнаружили, что x не оказывает непосредственного воздействия на y; однако может случиться, что x оказывает непосредственное воздействие на u, а u оказывает непосредственное воздействие на y; тогда x оказывает некоторое воздействие на y, хотя и с запозданием в один лишний шаг. Такие воздействия, а также те, которые идут через еще более длинные цепи переменных с еще большим запозданием, будут называться **отдаленными** воздействиями. Можно построить **диаграмму отдаленных воздействий**, проводя стрелку от A к B тогда и только тогда, когда A оказывает отдаленное воздействие на B. Эти две диаграммы связаны друг с другом очень просто. А именно, если на диаграмме непосредственных воздействий в каждом месте, где острие одной стрелки соединено с хвостом другой, добавлять новую стрелку, превращая



в



,

и продолжать этот процесс, пока возможно, то из диаграммы непосредственных воздействий получится диаграмма отдаленных воздействий.

Если некоторая переменная или часть не оказывает отдаленного воздействия на другую, то вторая называется **независимой** от первой.

Обе диаграммы, как покажут дальнейшие примеры, имеют признаки, соответствующие важным, хорошо знакомым признакам системы, которую они изображают.

Упр. 1. Начертите диаграммы непосредственных воздействий следующих абсолютных систем и укажите особенности каждой диаграммы:

I) $x' = xy, \quad y' = 2y;$

II) $x' = y, \quad y' = z + 3, \quad z' = x^2;$

III) $u' = 2 + ux, \quad v' = v - y, \quad x' = u + x, \quad y' = y + v^2;$

IV) $u' = 4u - 1, \quad x' = ux, \quad y' = xy + 1, \quad z' = yz;$

V) $u' = u + y, \quad x' = 1 - y, \quad y' = \log y, \quad z' = z + yz;$

VI) $u' = \sin 2u, \quad x' = x^2, \quad y' = y + 1, \quad z' = xy + u.$

Упр. 2. Если $y' = 2uy - z$, то при каких условиях u не оказывает непосредственного воздействия на y?

Упр. 3. Подберите примеры реальных машин, части которых относятся друг к другу как на диаграммах непосредственных воздействий в упр. 1.

Упр. 4. (Продолжение.) Подберите аналогичные примеры из области социальных и экономических систем.

Упр. 5. Начертите таблицу, показывающую все возможные отличия кинематического графика от диаграммы непосредственных воздействий.

4/13. В предыдущем параграфе система задавалась ее алгебраическим представлением; при таком задании системы получить диаграмму непосредственных воздействий легко. Следует заметить, однако, что эта диаграмма может быть получена и непосредственно из преобразования, даже если оно задано просто как множество переходов.

Предположим, например, что система имеет две переменные x и y, каждая из которых может принимать значения 0, 1 и 2, и что состояния (x, y) системы ведут себя следующим образом (скобки опускаются для краткости):

$$\downarrow \begin{array}{ccccccccc} 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22 \\ 01 & 00 & 11 & 11 & 00 & 21 & 11 & 20 & 11 \end{array}.$$

Что можно сказать о переходах переменной y? Мы можем переклассифицировать их, рассматривая x как параметр; для этого мы представляем, например, переход «00 → 01» в виде соотношения: «если $x = 0$, то y переходит из 0 в 1». Это даст таблицу

↓		y: 0	1	2
	0	1	0	1
x	1	1	0	1
	2	1	0	1

Она сразу показывает, что переходы переменной y не зависят от значения x. Следовательно, x не оказывает непосредственного воздействия на y. Расклассифицируем теперь аналогично переходы переменной x. Мы получим

↓		x: 0	1	2
	0	1	1	1
y	1	0	0	2
	2	1	2	1

Поведение (т. е. переход) x *зависит* от значения y, так что y оказывает непосредственное воздействие на x.

Таким образом, диаграмма непосредственных воздействий может быть получена из описания первичных переходов. В рассматриваемом случае диаграмма непосредственных воздействий имеет вид

$$\boxed{y} \rightarrow \boxed{x} \; .$$

Тем самым *доказано*, что y доминирует над x.

Упр. Система имеет три переменные x, y и z, каждая из которых может принимать только значения 0 и 1. Дано преобразование

$$\downarrow\begin{matrix} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ 110 & 111 & 100 & 101 & 110 & 011 & 100 & 001 \end{matrix} \; .$$

Какова диаграмма непосредственных воздействий? (Указание: найдите сначала, как зависят переходы z от значений остальных переменных.)

4/14. *Приводимость.* В § 4/11 мы отметили, что целая система может состоять из двух частей, оказывающих непосредственное воздействие друг на друга:

$$\boxed{P} \rightleftarrows \boxed{Q} \; .$$

Мы видели также, что иногда действие бывает направлено только в одну сторону и одна часть доминирует над другой:

$$\boxed{P} \rightarrow \boxed{Q} \; .$$

В этом случае система уже менее богата внутренними связями, ибо одно из действий (один из каналов) теперь отсутствует.

Это сокращение внутренних связей может продолжаться. Мы можем обнаружить, что диаграмма непосредственных воздействий имеет просто вид

$$\boxed{P} \quad \boxed{Q} \; .$$

В этом случае система состоит в действительности из двух функционально независимых частей. Такая система называется **приводимой**. Важность этого понятия раскроется позже (§ 13/21).

Упр. Какие из систем упр. 4/12/1 приводимы?

4/15. *Материальность.* Читатель может теперь попытаться применить методы этой главы к решению проблемы, поставленной в нижеследующем письме. Она оправдывает высказанное в § 1/2 утверждение, что кибернетика не ограничена свойствами, обнаруженными в земной материи, и не выводит свои законы из них[1]. Для кибернетики важно лишь, в какой степени наблюдаемое поведение регулярно и воспроизводимо.

«Замогилье»

Дом с привидениями

Дорогой друг!

Некоторое время назад я купил этот старый дом, но обнаружил, что он посещается двумя призрачными звуками: непристойным Пением и сардоническим Смехом. В результате он мало подходит для жилья. Однако я не отчаиваюсь, ибо я установил путем практической проверки, что их поведение подчиняется определенным законам, непонятным, но непререкаемым, и что я могу воздействовать на них, играя на орга́не или сжигая ладан.

В течение каждой минуты каждый из этих звуков либо звучит, либо молчит; никаких переходов они не обнаруживают. Поведение же их в последующую минуту зависит только от событий предыдущей минуты, и эта зависимость такова:

Пение в последующую минуту ведет себя так же, как и в предыдущую (звучит или молчит), если только в эту предыдущую минуту не было игры на органе при молчащем Смехе. В последнем случае оно меняет свое по-

---

[1] Здесь речь идет о праве кибернетики на «мысленный эксперимент». Кибернетика может иметь дело с «кибернетическими абстракциями» без учета их реальной осуществимости, подобно тому, как, например, лингвистика — с предложениями без учета того, выражают они какую-либо действительную ситуацию или нет. — *Прим. ред.*

ведение на противоположное (звучание на молчание и наоборот).

Что касается Смеха, то если в предыдущую минуту горел ладан, Смех будет звучать или молчать в зависимости от того, звучало или молчало Пение (так что Смех копирует Пение минутой позже). Если, однако, ладан не горел, Смех будет делать противоположное *тому, что делало Пение.*

В ту минуту, когда я пишу Вам это, Смех и Пение оба звучат. Прошу Вас сообщить мне, какие действия с ладаном и органом должен я совершить, чтобы установить и поддерживать тишину в доме.

(Указание: сравните с упр. 4/1/4.)

Упр. 2. (Продолжение.) Оказывает ли Пение непосредственное воздействие на Смех?

Упр. 3. (Продолжение.) Оказывает ли ладан непосредственное воздействие на Пение?

Упр. 4. (Продолжение.) Выведите диаграмму непосредственных воздействий этой машины со входом (с двумя параметрами и двумя переменными).

ОЧЕНЬ БОЛЬШАЯ СИСТЕМА

4/16. Все рассмотренные до сих пор системы выглядели весьма просто, и мы полагали, что понимаем их каждый раз во всех подробностях. Кибернетика, однако, предусматривает возможность работы с системами значительно большей сложности — вычислительными машинами, нервными системами, обществами. Посмотрим же, как применять или видоизменять изложенные выше методы, когда система очень велика.

4/17. Нужно объяснить, что мы понимаем под «размерами» системы, ибо мы не интересуемся здесь простой массой. Солнце и Земля образуют для нас лишь «маленькую» систему, ибо астрономически у них только двенадцать степеней свободы. Мы имеем в виду скорее сложность системы. Но что здесь означает сложность? Если нашей динамической системой является туземная семья из пяти человек, то рассматривать ли нам ее как состоящую из 5 частей и, следовательно, простую или как состоящую из 10^{25} атомов и, следовательно, весьма сложную?

В кибернетике «размеры» системы связываются с числом устанавливаемых *различий*; при этом имеется в виду либо число состояний системы, либо, если состояния системы определяются векторами, число составляющих вектора (т. е. число переменных системы или число ее степеней свободы, § 7/13). Эти две меры сложности взаимозависимы, ибо при прочих равных условиях введение новых, дополнительных переменных делает возможными новые, дополнительные состояния. С нашей функциональной точки зрения, можно также увеличить систему, если при неизменном числе переменных измерять каждую из них более точно, обнаруживая тем самым у переменной больше различимых состояний. Однако мы не будем слишком интересоваться точным измерением сложности на основе того или иного частного определения, а вместо этого будем понимать сложность как отношение между системой и каким-либо определенным, заданным наблюдателем, собирающимся изучить систему и управлять ею. Слова «очень большая система», которые я буду употреблять в этой книге, будут означать следующее: дан какой-то определенный наблюдатель, с определенными средствами и методикой, и система, которая в чем-либо практически слишком велика для него; например, он не может наблюдать ее полностью, или управлять ею полностью, или выполнить все вычисления, необходимые для предсказания ее поведения. Другими словами, наблюдатель говорит, что система «очень большая», если она в чем-либо побивает *его* своим богатством и сложностью.

Такие системы совсем не редки, как показывает классический пример попыток физика-теоретика XIX века применить ньютоновскую механику к расчету поведения газа. Число частиц в обычном объеме газа оказалось столь большим, что никакие практические наблюдения не смогли бы зафиксировать состояние системы и никакие практические вычисления не смогли бы предсказать ее будущее. Такая система была «очень большой» по отношению к физику XIX века.

Животновод встречается с «очень большой» системой в генах, которые он старается перестроить по новому образцу. Число генов и сложность их взаимодействия делают для него практически невозможным *детальное* управление ими.

Такие системы, слишком большие по отношению к нашим современным средствам наблюдения и управления, весьма обычны в биологическом мире и его социально-экономических параллелях. Обычны они, конечно, и в головном мозгу, хотя в течение многих лет эта существенная сложность его поведения признавалась лишь неохотно. Теперь, однако, подходят к признанию того, что эту сложность нельзя более игнорировать. «Даже простейший элемент поведения, — говорит Лэшли [1], — требует совместного действия миллионов нейронов... Я пришел к убеждению, что почти каждая нервная клетка в коре головного мозга может возбуждаться в каждой деятельности... Те же самые нейроны, которые поддерживают следы в памяти и участвуют в оживлении какого-либо воспоминания, включаются также в различных комбинациях в тысячи других воспоминаний и действий». И Нейман [2]: «Число нейронов в центральной нервной системе имеет примерно порядок 10^{10}. У нас нет абсолютно никакого опыта в обращении с системами такой степени сложности. Во всех созданных человеком искусственных автоматах число частей, по любому более или менее схематическому подсчету, имеет порядок от 10^3 до 10^6» («Головномозговые механизмы в поведении»).

4/18. Следует заметить, что большие размеры системы сами по себе никоим образом не нарушают справедливости принципов, доказательств и теорем предшествующих глав. Хотя *примеры* сводились к системам с небольшим числом состояний или с немногими переменными, это ограничение имело целью исключительно удобство для автора и читателя: доказательства сохраняют свою силу без каких-либо ограничений на число состояний или переменных в системе. Особое преимущество

---

[1] Карл Спенсер Лэшли (род. 1890) — известный американский психолог и генетик. — *Прим. перев.*

[2] Джон Нейман (1903—1957) — известный американский математик, родился в Будапеште. Был профессором Института высших исследований в Принстоне. — *Прим. перев.*

метода, использующего состояния, а не более обычные переменные, состоит в том, что он не требует явного упоминания о числе частей системы. Благодаря этому доказанные однажды теоремы справедливы для систем любого размера (если, конечно, системы удовлетворяют предположениям, принятым при доказательстве).

При этом остаются достоверными, конечно, только математические дедукции о *математически определенных* вещах. Применимость этих теорем к какой-либо реальной материальной системе может изменяться по мере того, как система становится очень большой. Однако о применимости можно говорить только по отношению к частным, конкретным случаям. Таким образом, мы пока можем отметить, что размеры систем сами по себе не лишают силы использованные до сих пор рассуждения.

4/19. *Случайные соединения.* Предположим теперь, что наблюдатель встречается с системой, которая для него очень велика. Как должен он поступить? Возникает много вопросов, слишком много, чтобы рассматривать их здесь подробно; поэтому я выберу только несколько вопросов, которые будут служить образцами для остальных (см. § 6/19 и гл. 13). Прежде всего, как описать такую систему?

По определению, наблюдатель может описать ее только частично. Это ограничение — лишь другой способ сказать, что наблюдатель должен описывать систему «статистически». Ведь статистика — искусство говорить вещи, относящиеся лишь к некоторой стороне или части целого, когда вся истина слишком громоздка для прямого употребления. Если в системе слишком много частей, чтобы описывать их индивидуально, то их надо описывать с помощью приемлемого числа правил, каждое из которых применимо ко многим частям. Части, описываемые одним и тем же правилом, не обязательно должны быть тождественными; общность же можно сохранить, условившись, что каждое правило задает множество частей статистически. Это означает, что правило описывает распределение частей и способ, которым они должны выбираться. Таким образом, конкретные подробности индивидуального исхода определяются теперь не наблюдателем, а процессом выбора (как в случае, когда два человека предоставляют решение какого-либо вопроса жребию).

Этот же метод должен применяться и при описании соединений. Неполное описание соединения следует дополнить как-либо так, чтобы в конечном счете можно было соединить части индивидуальным, единственным способом. Поэтому соединение должно содержать «случайный» элемент. Что это означает?

Предположим для определенности, что экспериментатор имеет перед собой большое число одинаковых электрических аппаратов. Каждый аппарат снабжен тремя входными и тремя выходными зажимами. Экспериментатор хочет образовать сложную электрическую сеть со «случайными», выбранными «наугад» соединениями, чтобы посмотреть, каковы ее свойства. Он берет несколько соединительных проводов и внезапно начинает понимать, что сказать: «Соедините их наугад!» — совершенно недостаточно для определения способа соединения; возможны самые различные виды «соединения наугад». Так, если имеется n аппаратов, то экспериментатор может пометить $6n$ карт числами от 1 до $6n$, аналогично пометить зажимы, перетасовать карты и затем вытащить две карты из этой колоды; они и будут обозначать два зажима, которые следует соединить первым проводом. Вторая пара карт обозначит зажимы, соединяемые вторым проводом, и т. д. Нужно решить, следует ли перед очередной перетасовкой откладывать вытащенные карты в сторону или возвращать их в колоду. Это важно, ибо если возвращать вытащенные карты в колоду, то некоторые зажимы могут остаться без проводов, а некоторые будут иметь по нескольку проводов; если же вытащенные карты откладывать в сторону, то каждый зажим будет иметь один и только один провод. Это различие, вероятно, отразится на характеристиках сети, и поэтому оно должно быть указано в описании способа соединения. Предложенный метод имеет, далее, ту особенность, что допускает соединение выхода с выходом. Если это нежелательно, необходимо сформулировать новый метод, например такой: «Пометь входы числами от 1 до 3 n; пометь также выходы числами от 1 до 3 n; пометь 3 n карт числами от 1 до 3 n; присоедини провод ко входу 1 и вытащи карту, чтобы определить, какой к нему присоединить выход; проделай то же для входов 2, ..., 3 n». Здесь возвращение вынутых карт в колоду опять означает, что один выход может быть соединен с несколькими входами или ни с одним; в случае же невозвращения каждый вход будет соединен с одним выходом.

Сказанного, вероятно, достаточно, чтобы показать, насколько существенным может быть точное определение способа выбора. Иногда, например в том случае, когда экспериментатор берет пробу кислорода, чтобы на этом материале исследовать законы газов, в описании метода выборки нет необходимости, так как почти все пробы будут иметь одинаковые свойства (хотя даже здесь точное определение может стать очень важным, что и обнаружили, например, Рэлей и Рамзай, когда у них некоторые пробы азота постоянно давали атомные веса, отличные от полученных для других проб).

Этот «статистический» метод описания системы — путем описания распределений вместе с методами выбора — не следует считать принципиально отличным от других методов. Он включает и тот случай, когда система описывается *точно*. В самом деле, точное описание есть не что иное, как описание, при котором каждое распределение сжимается настолько, что его разброс становится равным нулю и благодаря этому «выбор» ведет к одному неизбежному результату. Действительно *новой* чертой статистической системы является то, что статистическое описание задает не машину, а целый ряд нетождественных машин. Статистическую «машину» следует поэтому рассматривать скорее как множество машин, чем как одну машину. Однако в настоящей главе такая точка зрения не будет приниматься во внимание (полностью она проводится в гл. 7).

Итак, мы видим теперь, что в некотором смысле наблюдатель все же может описать систему, которая слишком велика для того, чтобы он мог ее описать! Эта проблема в принципе решается просто: наблюдатель описывает систему в общих чертах и описывает *общий* метод, с помощью которого описание недостающих подробностей можно получить из какого-либо другого источника, отличного от самого наблюдателя. В приведенных выше примерах этим источником была колода карт, которой принадлежало окончательное решение. Итак, сделанное наблюдателем неполное описание позволяет находить окончательную, единственную систему, если это описание *дополнено*. (Этот вопрос рассматривается более глубоко в § 13/18.)

Упр. 1. Сформулируйте какой-нибудь метод (основанный на использовании костей, карт, таблиц случайных чисел и т. д.), который приводил бы замкнутое однозначное преобразование T:

$$T: \downarrow \begin{matrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 & S_6 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix}$$

к какой-либо конкретной форме; последняя, однако, должна вытекать из этого метода, а не просто выбираться читателем.

Упр. 2. (Продолжение.) Сформулируйте этот метод так, чтобы преобразование было взаимно однозначным, но не было ограниченным в других отношениях.

Упр. 3. (Продолжение.) Сформулируйте этот метод так, чтобы никакое состояние с четным номером не переходило в состояние с нечетным номером.

Упр. 4. (Продолжение.) Сформулируйте этот метод так, чтобы каждое состояние переходило только в соседнее по номеру состояние.

Упр. 5. Сформулируйте какой-нибудь метод для воспроизведения сети, получающейся при соединении частей по такому правилу: части располагаются в виде правильной двумерной решетки

$$\begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0, \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

которая продолжается неограниченно по всем направлениям плоскости; каждая часть с одинаковой вероятностью либо оказывает, либо не оказывает непосредственное воздействие на соседнюю сверху часть, и так же обстоит дело с воздействием на три соседние части, находящиеся справа, слева и внизу. Постройте образчик сети.

4/20. *Богатство связей.* Простейшей системой заданных размеров является система, где все части тождественны, т. е. просто повторяют друг друга, и где все соединения между частями имеют нулевую степень (см., например, упр. 4/1/6). Такие части фактически независимы друг от друга. В силу этого они составляют «систему» лишь номинально, поскольку такая «система» полностью приводима. Тем не менее системы этого типа заслуживают серьезного рассмотрения, как важная исходная форма, допускающая разнообразные модификации. Приблизительными примерами систем этого типа могут служить: газ, атомы которого сталкиваются лишь изредка; нейроны коры головного мозга при глубоком наркозе (если можно считать, что они приблизительно подобны друг другу); вид животных со столь низкой плотностью популяции, что его особи почти совсем не встречаются и не соперничают. В большинстве случаев свойства системы этого основного типа выводятся очень легко.

Первая модификация, которую мы рассмотрим, вполне очевидна и состоит в допущении небольшого количества соединений между частями, благодаря чему система получает некоторую связность. Положим теперь, что в диаграмму непосредственных воздействий системы внесены новые действия, — т. е. новые стрелки, — но лишь в количестве, достаточном для связывания всех ее частей. Если система имеет n частей, то наименьшее возможное число стрелок, обеспечивающее связывание всех x частей, равно $n-1$; однако такая система есть лишь простая длинная цепь. Небольшое количество соединений, очевидно, соответствует тому случаю, когда стрелок больше чем $n-1$, но меньше чем n^2-n (ибо n^2-n стрелок позволяют каждой части непосредственно воздействовать на каждую другую часть).

Таким образом, ограничение взаимодействия частей может быть достигнуто ограничением числа непосредственных воздействий. Другой способ, обычный и поэтому важный, состоит в том, что одна часть, или переменная, воздействует на другую лишь при определенных условиях и благодаря этому непосредственное воздействие бо́льшую часть времени наличествует лишь номинально. Такие вре́менные и условные соединения мы встречаем, когда переменная по какой-либо причине остается значительную часть времени без изменений («частично постоянная функция»). Одной из обычных причин этого является существование порога, означающего, что переменная не обнаруживает никаких изменений, кроме как в случаях, когда воздействие на нее превышает некоторое определенное значение. Таково напряжение, ниже которого электрическая дуга не пробивает данный промежуток; таков убыток, который согласится потерпеть человек, прежде чем он сочтет, что ему стоит обратиться в суд. В нервной системе явление порога встречается, разумеется, повсеместно.

Существование порога приводит к такому положению вещей, что можно говорить о разделении системы на временно изолированные подсистемы. В самом деле, переменная, пока она остается постоянной, не может, согласно § 4/12, оказывать воздействие на другую переменную; не может она и испытывать воздействие со стороны другой переменной. На диаграмме непосредственных воздействий она потеряет как те стрелки, которые исходят от нее, так и те стрелки, которые ведут к ней. Это влияние порога изображено тремя диаграммами на рис. 4/20/1.

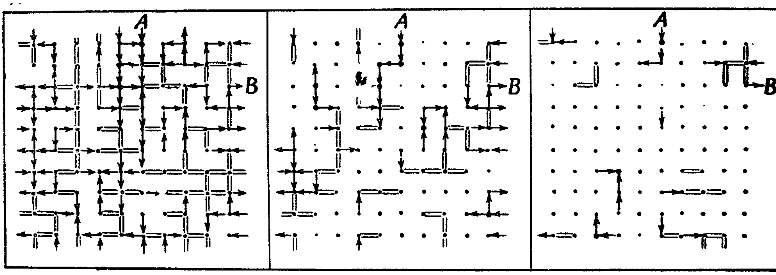


Рис. 4/20/1.

На левом квадрате показана в качестве основной сети диаграмма непосредственных воздействий, какая может быть получена по методу упр. 4/19/5. На среднем квадрате показано, что́ сохранится, если тридцать процентов переменных будут оставаться постоянными (в силу того, что воздействия на них не превышают порога). На правом квадрате показано, что́ сохранится, если доля постоянных поднимется до 50%. Эти последовательные изменения слева направо могут быть вызваны постепенным повышением порога. Мы видим, что взаимодействующие подсистемы постепенно становятся все меньше и меньше; повышающийся порог функционально рассекает систему на все меньшие и меньшие части. Мы видим, что некоторые факторы, как, например, «высота порога» или «процент постоянных переменных», способны непрерывно изменять большую систему, проводя ее через целый ряд состояний, на одном конце которого находится совершенно связная форма, где каждая переменная оказывает непосредственное воздействие на каждую другую переменную, а на другом конце — совершенно несвязная форма, где каждая переменная независима от каждой другой. Таким образом, системы обнаруживают бóльшую или меньшую «целостность». Степень этой целостности можно описывать статистически, даже если система слишком велика для индивидуального описания подробностей.

Упр. Может ли изменение *A* (рис. 4/20/1) воздействовать на *B* в крайней левой системе? В двух остальных?

4/21. *Локальные свойства.* В больших системах, со многими повторяющимися частями, немногочисленными непосредственными воздействиями и ограниченным количеством соединений, свойства обычно проявляются в *локализированной* форме. Иными словами, свойство возникает лишь у немногих переменных, и наличие (или отсутствие) его у этих переменных не определяет наличия или отсутствия этого свойства у других небольших множеств переменных. Такие локализируемые свойства обычно бывают очень важны в больших системах, и дальнейшая часть этой главы будет посвящена их рассмотрению. Вот некоторые примеры локализируемых свойств.

В простой химической реакции, например в реакции между раствором азотнокислого серебра и хлористого натрия, участвует приблизительно 10^{22} составных частей, образующих, таким образом, очень большую систему. Части эти (атомы, ионы и т. д.) в основном повторяются, ибо их всего каких-нибудь 10—12 типов. Кроме того, каждая часть оказывает непосредственное воздействие лишь на весьма немногие части по сравнению со всей совокупностью частей. Поэтому соединение или несоединение одного иона серебра с ионом хлора не оказывает никакого воздействия на огромное большинство остальных пар ионов. В результате свойство частей «быть соединенными в AgCl» может существовать в распознаваемой форме в различных точках системы. Сравните эту возможность повторения с тем, что происходит в совершенно связной системе, например в термостате. В термостате такое локализированное свойство вряд ли может существовать и уж, конечно, не может независимо повторяться повсюду в системе, так как существование любого свойства в одной точке решающим образом определяет, что произойдет в других точках.

Переход от химии раствора в лабораторной пробирке к химии протоплазмы, вероятно, носит такой же характер, ибо протоплазма как химическая динамическая система слишком богата внутренними связями частей, чтобы допускать значительную локальную независимость проявления какого-либо свойства.

Другим примером служит весь биологический мир, рассматриваемый как состоящая из многих частей система. Эта система, образованная в конечном счете из атомов земной поверхности, делится на повторяющиеся в значительной мере части — как на низшем уровне (все атомы углерода химически одинаковы), так и на высшем (все особи одного вида более или менее одинаковы). В этой системе различные свойства, существующие в одном месте, могут существовать также и в других местах. Отсюда вытекает, что основные свойства биологического мира будут подобны свойствам систем, описываемым в нижеследующих параграфах.

4/22. *Самозакрепляющиеся свойства.* Эти системы обладают следующей общей чертой. Их поведение во времени во многом зависит от того, могут ли в них развиваться свойства, которые, образовавшись однажды, становятся затем недоступными для «разобразующих» (т. е. разрушающих) факторов. Рассмотрим, например, колонию устриц. Каждая устрица может свободно принимать сигналы опасности и может закрыться; но, однажды закрывшись, она уже не может принимать сигналы безопасности, которые открыли бы ее. Если бы названные сигналы были единственными действующими факторами, то мы могли бы предсказать, что со временем устричная колония полностью перейдет в закрытое состояние, — важный факт в ее истории!

Во многих других системах этот принцип может быть прослежен более серьезно — и почти во всех он важен. Рассмотрим, например, раствор взаимодействующих молекул, которые могут образовывать различные соединения. Некоторые из этих соединений могут снова вступать в реакции; но одно соединение, допустим, является нерастворимым, так что его молекулы вступать в реакцию неспособны. Свойство «быть нерастворимым соединением» может приобретаться одной частью за другой, но после того как нерастворимость выделила вещество из раствора, это свойство уже не может быть обращено. Существование этого свойства является решающим в истории системы — обстоятельство, хорошо известное в химии, где оно находит бесчисленные применения.

Мы слишком мало знаем о динамике коры головного мозга, чтобы много говорить о том, что там происходит. Но если существует лишь несколько типов нервных клеток и если непосредственные взаимодействия между нервными клетками редки, то мы можем считать, что при появлении у них какого-либо «самозакрепляющегося» свойства это свойство почти наверняка будет играть главную роль в определении поведения коры, особенно ее долговременного поведения. Например, так случилось бы, если бы клетки имели некоторые шансы включаться в замкнутые цепи, циркуляция в которых слишком сильна для того, чтобы ее могло подавить торможение. Другие возможности также, несомненно, заслуживают рассмотрения. Здесь мы можем лишь бегло упомянуть о них.

Тот же самый принцип действовал бы в экономических системах, если бы рабочие какой-нибудь неприятной отрасли промышленности время от времени становились безработными и обнаруживали бы тогда, что они могут заняться более приятной работой. То, что они охотно переходили бы от неприятной работы к приятной, но отказывались бы вернуться, было бы, конечно, обстоятельством первостепенной важности для будущего данной отрасли промышленности.

Итак, можно сказать в общем, что самозакрепляющиеся изменения обычно оказывают исключительно важное влияние на окончательное состояние системы.

4/23. *Свойства, которые размножаются.* Следует заметить, что в предыдущем параграфе мы рассматривали в каждом примере две различные системы. Действительно, хотя каждый пример основывался только на одном материальном объекте, он давал два множества переменных, а эти множества образуют, согласно § 3/11, две системы. Первой системой было очевидное, очень большое по количеству множество частей; второй была система с одной переменной, которая называлась *«число* частей, обнаруживающих данное свойство». Приведенные примеры иллюстрировали случаи, когда эта переменная не могла уменьшаться со временем. Другими словами, она вела себя (если обозначить ее через n) согласно преобразованию

$$n' \geqslant n.$$

Это преобразование — лишь одно из многих, которые можно найти, рассматривая изменения второй системы (числа частей, обнаруживающих данное свойство). Часто бывает, что наличие свойства в одном месте в системе влияет на вероятность появления этого свойства через данный промежуток времени в другом месте. Так, если основная система состоит из пороха, насыпанного в линию длиной в 12 дюймов, то наличие свойства «быть в огне» в данный момент на четвертом дюйме делает весьма вероятным, что через некоторый промежуток времени то же самое свойство появится и на третьем, и на пятом дюймах. Далее, если автомобиль имеет привлекательный вид, то его продажа в один дом, по-видимому, увеличит шансы продажи его в соседние дома. И если некоторому виду нехватает пищи, то существование одного его представителя уменьшает шансы на продолжение существования другого представителя.

Иногда эти влияния очень сложны; зато в других случаях изменение переменной «число частей, имеющих данное свойство» может быть достаточно точно выражено простым преобразованием $n' = kn$, где k положительно и не зависит от n.

Когда это имеет место, история системы часто в значительной мере зависит от значения k, а особенно от его отношения к числу $+1$. Если t — число промежутков времени, прошедших со времени $t = 0$, и если n_0 — начальное значение, то уравнение $n' = kn$ имеет следующее решение [1]:

$$n = n_0 e^{(k-1)t}. \tag{1}$$

Здесь можно различить три случая:

(1) $k < 1$. В этом случае число частей, обнаруживающих данное свойство, постоянно уменьшается, а их плотность убывает. Так, например, обстоит дело с числом атомов радия в куске смоляной обманки. Так обстоит дело и с числом особей вымирающего вида.

(2) $k = 1$. В этом случае число частей, обнаруживающих данное свойство, стремится оставаться постоянным. Примером может служить число диссоциированных молекул, когда степень диссоциации достигла равновесного значения для данных условий. (Поскольку при малейшем отклонении k от 1 настоящий случай переходит в один из двух других случаев, он не представляет большого интереса.)

(3) $k > 1$. Этот случай весьма интересен и важен. Здесь мы имеем дело со свойством, наличие которого

---

[1] Вывод этой формулы представляется не вполне ясным. Решением уравнения $n' = kn$ служит, очевидно, выражение $n = n_0 k^t$. Лишь при k, близких к 1, это решение приближенно равно значению, получаемому по формуле (1); именно, отношение $\frac{n_0 e^{(k-1)t} - n_0 k^t}{k-1}$ стремится к 0 при k, стремящемся к 1. Что же касается формулы (1), то она дает решение дифференциального уравнения $n + \frac{dn}{dt} = kn$. — *Прим. ред.*

в одном месте увеличивает вероятность его последующего появления в других местах. Свойство «размножается», и система в этом отношении является потенциально взрывчатой — либо драматически, как в атомной бомбе, либо скрытно, как при распространении эпидемии. Хорошо известным примером «размножения» свойств является аутокатализ. Так, если уксусноэтиловый эфир смешан с водой, то вероятность того, что данная молекула уксусноэтилового эфира в следующий промежуток времени превратится в воду и уксусную кислоту, зависит от того, сколько молекул эфира уже имеют свойство быть в кислотной форме. Другими популярными примерами служат горение, распространение моды, рост лавины и разведение кроликов.

Именно здесь величественная картина развития жизни в ходе дарвиновской эволюции обнаруживает свое родство с изложенной нами теорией динамических систем. Биологический мир, как отмечалось в § 4/21, является системой, которая в какой-то мере обладает рассмотренными в этой главе качествами: однородностью своего строения и ограниченностью непосредственных воздействий. На ранней стадии существования биологического мира имелись различные свойства с различными k. Некоторые свойства имели k меньше 1 — они постепенно исчезли. Некоторые свойства имели k, равное 1, — они должны были сохраниться. Наконец, некоторые имели k больше 1 — они разрослись, как лавина, пришли в столкновение друг с другом, начали взаимодействие, которое мы называем «конкуренцией», и породили процесс, который доминировал над всеми другими событиями в мире и который продолжается до сих пор.

Нам неизвестно, существуют ли и могут ли существовать такие свойства с $k > 1$ в коре головного мозга. Однако мы можем быть уверены, что если они существуют, то они имеют большое значение и накладывают существенный отпечаток на поведение коры. Важно отметить, что это предсказание может быть сделано без каких-либо ссылок на конкретные детали процессов, происходящих в мозгу млекопитающего, ибо оно верно для всех систем описанного типа.

4/24. Сделанные в последних параграфах замечания могут лишь бегло иллюстрировать основные свойства очень больших систем. Сказанного, однако, достаточно для того, чтобы показать, что очень большая система не отличается полностью от систем, рассмотренных в предшествующих главах, и что построение действительно адекватной теории систем вообще есть скорее вопрос времени и труда, чем какой-либо серьезной или особой трудности.

Проблема очень больших систем рассматривается также в § 6/14.

ГЛАВА 5

Устойчивость

5/1. Слово «устойчивость» часто встречается в работах, посвященных машинам, но не всегда употребляется точно. Беллман характеризует его как «слово с большой перегрузкой и неустоявшимся определением». Поскольку идеи, стоящие за этим словом, имеют огромное практическое значение, мы рассмотрим их с большой тщательностью, выделяя различные типы устойчивости, которые нам будут встречаться.

Современная терминология неудовлетворительна и запутанна; я не буду пытаться установить лучшую. Вместо этого я сосредоточу внимание на действительных фактах, к которым применяются различные слова; лучше, чтобы читатель думал не столько о словах, сколько о фактах. Что касается используемых слов, то я буду стараться лишь не нарушать установленного употребления и быть последовательным в пределах книги. Каждое употребляемое слово будет тщательно определено, и я буду придерживаться данного в определении смысла.

5/2. *Инварианты.* Через все значения слова «устойчивость» проходит основная идея «инвариантности». Эта идея состоит в том, что хотя система в целом претерпевает последовательные изменения, некоторые ее свойства («инварианты») сохраняются неизменными. Таким образом, некоторое высказывание о системе, несмотря на беспрерывное изменение, будет неизменно истинным. Например, если взять куб, покоящийся на одной из граней, и наклонить его на 5°, а затем отпустить, то последует целый ряд изменений положения. Такое высказывание, как: «Наклон куба равен 1°», — может быть истинно в один момент времени и ложно в другой. С другой стороны, высказывание: «Наклон куба не превышает 6°», — все время остается истинным. Эта истина инвариантна для данной системы. Рассмотрим теперь конус, стоящий на своей вершине, и отпущенный, как и куб, при наклоне в 5°. Высказывание: «Наклон конуса не превышает 6°», — скоро окажется ложным, и (если не делать ссылок на другие обстоятельства) окажутся ложными и высказывания с более широкими границами. Это отсутствие границы для состояний, проходимых системой при движении вдоль некоторой траектории, соответствует «неустойчивости».

Таковы основные идеи. Чтобы исключить в них всякую двусмысленность, мы должны вернуться к исходным принципам.

5/3. *Состояния равновесия.* Простейший случай имеет место тогда, когда состояние и преобразование связаны между собой так, что преобразование не заставляет состояние изменяться. Алгебраически это означает, что $T(x)=x$. Так, если T имеет вид

$$T\colon \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ d & b & h & a & e & f & b & e \end{matrix},$$

то $T(b)=b$ и состояние b есть **состояние равновесия** для T. Так же обстоит дело с состояниями e и f.

Если состояния определяются векторами, то, чтобы вектор не изменялся, каждая составляющая должна оставаться неизменной (согласно § 3/5). Так, если состояние есть вектор (x, y), а преобразование имеет вид

$$U\colon \begin{cases} x' = 2x - y + 2 \\ y' = x + y + 3 \end{cases},$$

то в состоянии равновесия вектор (x', y') должен равняться вектору (x, y) и значения x и y должны удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} x = 2x - y + 2 \\ y = x + y + 3 \end{cases},$$

т. е.

$$\begin{cases} x - y = -2, \\ x = -3. \end{cases}$$

Следовательно, эта система имеет только одно состояние равновесия, а именно (—3, —1). Если бы уравнения не были линейными, состояний равновесия могло бы быть больше.

Точно то же состояние (—3, —1), конечно, можно было бы получить, используя то обстоятельство, что в состоянии равновесия изменение каждой составляющей должно равняться нулю. Это условие дает $x' - x = 0$, $y' - y = 0$, что ведет к тем же самым уравнениям, как и раньше.

В случае дифференциальных уравнений требование, чтобы x не изменялось со временем, равносильно требованию, чтобы $\frac{dx}{dt}$ равнялось нулю. Например, в системе

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x - y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = xy - \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

состояние ($1/2$, 1) есть состояние равновесия, так как при этих значениях переменных x и y все производные равны нулю и, следовательно, система перестает двигаться.

Упр. 1. Докажите, что U изменяет (—3, —1) в (—3, —1).

Упр. 2. Имеет ли система из последнего абзаца другие состояния равновесия, кроме $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$?

Упр. 3. Найдите все состояния равновесия преобразования

$$x' = e^{-y} \sin x, \qquad y' = x^2.$$

Упр. 4. Найдите все состояния равновесия преобразования

$$\frac{dx}{dt} = e^{-y} \sin x, \qquad \frac{dy}{dt} = x^2.$$

Упр. 5. Пусть $x' = 2x - y + j$, $y' = x + y + k$; найдите значения j и k, дающие состояние равновесия при (1,1). (Указание: сначала запишите уравнения в таком виде, чтобы они изображали состояние равновесия.)

Упр. 6. Если $T(b) = b$, то должны ли $T^2(b)$, $T^3(b)$ и т. д. также равняться b?

Упр. 7. Может ли абсолютная система иметь больше состояний равновесия, чем она имеет бассейнов?

Упр. 8. Как выглядит кинематический график при преобразовании, у которого все состояния являются состояниями равновесия?

Упр. 9. (Продолжение.) Какое особое название было дано такому преобразованию в одной из предшествующих глав?

Упр. 10. Если преобразование изменится (а множество операндов останется прежним), то изменятся ли состояния равновесия?

Упр. 11. Если изменится вход машины, то изменятся ли ее состояния равновесия? (Указание: см. упр. 5.)

5/4. *Цикл.* К понятию состояния равновесия близко понятие цикла. **Циклом** называется такая последовательность состояний, что повторное применение преобразования заставляет представляющую точку пробегать повторно эту последовательность. Так, если T имеет вид

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ c & h & b & h & a & c & c & g \end{matrix},$$

то, начав с a, T породит траекторию

$$a\ c\ b\ h\ g\ c\ b\ h\ g\ c\ b \ldots$$

и представляющая точка будет повторно описывать цикл

$$\begin{tikzcd} c \arrow[r] & b \arrow[d] \\ g \arrow[u] & h \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Упр. 1. Напишите преобразование, содержащее два различных цикла и три состояния равновесия.

Упр. 2. (Продолжение.) Начертите его кинематический график.

Упр. 3. Может ли состояние равновесия встретиться в цикле?

Упр. 4. Может ли абсолютная система иметь больше циклов, чем бассейнов?

Упр. 5. Может ли один бассейн содержать два цикла?[1]

* *Упр.* 6. Имеет ли цикл система $\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x$?

Упр. 7. Если замкнутое однозначное преобразование имеет конечное число состояний, то может ли траектория кончиться иначе, чем состоянием равновесия или циклом?

5/5. *Устойчивые области.* Если a есть состояние равновесия, то $T(a)$, как мы видели в § 5/3, есть просто a.

[1] См. подстрочное примечание на стр. 30. — *Прим. ред.*

Таким образом, преобразование T не породило из a никакого *нового* состояния.

То же самое явление может иметь место и для *множества* состояний. Так, предположим, что T есть (незамкнутое) преобразование

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ p & g & b & f & a & a & b & m \end{matrix}.$$

Оно не имеет состояний равновесия, но множество, состоящее из b и g, преобразуется по-особенному, а именно

$$T: \downarrow \begin{matrix} b & g \\ g & b \end{matrix}.$$

Другими словами, применение T к этому множеству не порождает *новых* состояний. Такое множество **устойчиво** относительно T.

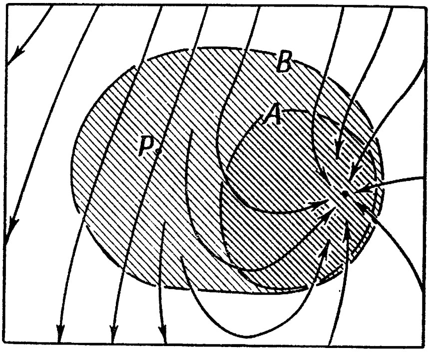


Рис. 5/5/1.

Это отношение между множеством состояний и преобразованием, конечно, тождественно описанному выше (§ 2/4) отношению «замкнутости». (Слова «устойчивое множество» могли бы употребляться еще с тех пор, но они могли внести путаницу, пока не было введено понятие устойчивости; а этого нельзя было сделать раньше, чем были разъяснены другие вопросы.)

Если преобразование непрерывно, устойчивое множество преобразований может лежать в связной области. Так, на рис. 5/5/1 область внутри границы A устойчива; область же внутри B неустойчива, ибо внутри этой области есть точки, такие как P, из которых можно выйти за пределы области.

Понятие замкнутости, или устойчивого множества состояний, имеет фундаментальное значение для наших исследований. Некоторые причины этого приводились в § 3/2, где указывалось, что только в том случае, когда множество устойчиво, преобразование может иметь все свои высшие степени.

Другая причина более подробно рассматривается в § 10/4, где показывается, что такая устойчивость тесно связана с понятием объекта, «выживающего» после некоторой операции.

Упр. 1. Какие еще множества устойчивы относительно T?
Упр. 2. Всегда ли устойчиво множество состояний в бассейне?
Упр. 3. Всегда ли устойчиво множество состояний в цикле? [1]
Упр. 4. Если множество состояний устойчиво относительно T и относительно U, то обязательно ли оно устойчиво относительно UT?

ВОЗМУЩЕНИЯ

5/6. В рассмотренных до сих пор случаях равновесие или устойчивость исследовались только для некоторого выбранного состояния или состояний. Ничего не говорилось и не подразумевалось относительно поведения в *соседних* состояниях.

Возьмем элементарные примеры равновесия: куб, покоящийся на своей грани; бильярдный шар на столе; конус, точно уравновешенный на вершине. Все они обнаруживают некоторое состояние равновесия. Однако равновесие конуса, очевидно, отличается, и существенным образом, от равновесия куба. Различие это обнаруживается, как только эти две системы *смещаются* внешним возмущающим воздействием из состояния равновесия в какое-нибудь соседнее состояние. Как должно в об-

[1] См. подстрочное примечание на стр. 30. — *Прим. ред.*

щем виде представляться это смещение и его результат?

«Возмущение» есть просто то, что смещает, что передвигает систему из одного состояния в другое. Поэтому, определяемое точно, оно должно быть представлено преобразованием, операндами которого служат состояния системы. Предположим теперь, что наша динамическая система содержит преобразование T, что a есть состояние равновесия для T и что D есть данный оператор смещения. На обычном языке мы говорим: «Сместим систему из ее состояния равновесия, предоставим ей некоторое время следовать ее собственным законам и посмотрим, вернется ли она в то же самое состояние или нет». В алгебраической форме мы скажем: «Возьмем состояние равновесия a, сместим систему в состояние $D(a)$, а затем найдем $TD(a)$, $T^2D(a)$, $T^3D(a)$ и т. д. и отметим, будет ли эта последовательность состояний иметь окончание $a, a, a\ldots$ или нет». Говоря короче, состояние равновесия a в системе с преобразованием T **устойчиво относительно смещения** D тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} T^nD(a) = a.$$

Проверим эту формулировку на трех упомянутых примерах. В случае куба начальное состояние a соответствует наклону в 0°. Оператор D смещает куб, скажем, до 5°, а T в конце концов возвращает его обратно к 0°. В случае с конусом (имеющим, скажем, преобразование U) D может быть тем же самым смещением, но, конечно, предел $U^nD(a)$, каков бы этот предел ни был, не есть наклон в 0°; равновесие **неустойчиво**. Что касается бильярдного шара в положении a, то законы динамики не вернут его в a после перемещения, так что, по данному определению, шар неустойчив. Однако он имеет ту особенность, что пределом здесь является $D(a)$; таким образом, шар сохраняет перемещение, ни уничтожая, ни увеличивая его. Это случай **безразличного** равновесия.

(Заметим, что исследовать, как ведет себя система после смещения из a, имеет смысл только в том случае, когда a есть состояние равновесия.)

Упр. 1. Устойчиво ли относительно возмущения D состояние равновесия c при преобразовании T, если T и D имеют следующий вид:

$$T: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ c & d & c & a & e \end{matrix},$$
$$D: \quad b \; a \; d \; e \; d?$$

Упр. 2. (Продолжение.) Устойчиво ли состояние равновесия e?

Упр. 3. Область, состоящая из множества состояний b, c и d, устойчива относительно преобразования U:

$$U: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ d & c & b & b & c & a \end{matrix},$$
$$E: \quad b \; e \; f \; f \; f \; d.$$

Каков будет результат возмущения E, сопровождаемого повторным применением U? (Указание: рассмотрите все три возможности.)

5/7. Обычно динамическая система, изменяющаяся непрерывно, практически все время подвергается небольшим возмущениям. Электронные системы возмущаются тепловым возбуждением, механические системы — вибрацией, биологические системы — разнообразнейшими мелкими воздействиями. Поэтому на практике могут сохраняться только те состояния равновесия, которые устойчивы в смысле предыдущего параграфа. Состояния неустойчивого равновесия не имеют большого значения в непрерывных системах (хотя они могут иметь значение в системах, изменяющихся только дискретными скачками).

Понятие неустойчивого равновесия имеет, однако, некоторую теоретическую важность. Действительно, если мы разрабатываем *теорию* некоторого механизма, то алгебраические операции (§ 5/3) дадут нам все состояния равновесия — устойчивые, безразличные и неустойчивые — и может оказаться необходимым исключить многие из них, чтобы свести это множество к множеству состояний, имеющих реальные шансы на сохранение.

Упр. Постройте преобразование с двумя состояниями равновесия a и b и двумя возмущениями D и E, такое, чтобы a было устойчиво относительно D, но не относительно E, а b было устойчиво относительно E, но не относительно D.

5/8. Вообще говоря, результаты повторного применения преобразования к некоторому состоянию зависят от того, каково это состояние. Поэтому результат поисков предела

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x)$$

будет зависеть, вообще говоря, от того, каково состояние x. Например, пусть даны два возмущения D и E и пусть возмущение D переводит a в b, а возмущение E переводит a в c (причем между a, b и c не предполагается никакой зависимости). В этом случае пределы для $T^n D(a)$ и $T^n E(a)$ могут быть различными.

Таким образом, проверка на устойчивость, проведенная согласно § 5/6, может дать различные результаты в зависимости от того, действовало ли смещение D или E. Это различие отнюдь не лишено физического смысла. Например, карандаш, уравновешенный на своем квадратном основании, может быть устойчивым относительно D, если D есть смещение на 1° от вертикали, но неустойчивым относительно E, если E есть смещение на 5°.

Таким образом, понятия, введенные в § 5/6, согласуются с обычной практикой. Сказать о системе, что она находится в состоянии устойчивого равновесия, можно только в том случае, если указано некоторое достаточно определенное множество смещений D. Если они указаны явно, D определено полностью. Часто D не дается явно, но подразумевается; так, называя радиоконтур устойчивым, подразумевают, что D включает все обычные флюктуации напряжения, но, как правило, не подразумевают, что D включает удар молнии. Часто система считается устойчивой в предположении, что возмущения лежат внутри определенной области. Важно лишь помнить, что в необычных случаях, например в биологических системах, точное указание возмущений D и рассматриваемого состояния равновесия a может быть необходимо для точности исследований.

5/9. *Непрерывная система.* В предшествующих параграфах рассматриваемые состояния были обычно произвольными. Реальные системы, однако, часто обнаруживают некоторую непрерывность в том смысле, что между состояниями существует естественная взаимосвязь (совершенно не зависящая от любого преобразования, обусловленного их принадлежностью к системе); благодаря такой взаимосвязи два состояния могут быть «близки» или «далеки» друг от друга.

В случае таких систем оператор D обычно определяется как смещение из состояния равновесия a в одно из состояний, находящихся «вблизи» a. Если состояния определяются векторами с числовыми составляющими, т. е. основаны на измерениях, то D часто равносильно прибавлению к составляющим небольших числовых величин $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, так что вектор $(x_1, \ldots, x_n)$ переходит в вектор $(x_1+\delta_1, \ldots, x_n+\delta_n)$.

В этой форме становятся возможными более специализированные методы проверки на устойчивость. Введение в эти методы дано в книге «Устройство мозга». Рассмотрения такого рода скоро принимают математический характер; здесь достаточно отметить, что на эти вопросы *всегда* можно ответить, по крайней мере в принципе, прослеживая фактически все изменения, которые имеют место при последовательном прохождении системы через состояния $D(a)$, $TD(a)$, $T^2D(a)$ и т. д. (ср. § 3/9). Единственное возражение против этого простого, фундаментального и надежного метода состоит в том, что в сложных случаях он становится чрезмерно трудоемким. Однако он способен давать ответы в тех случаях, где неприменимы более специализированные методы. В области биологии метод, описанный в настоящей главе, по-видимому, является более надежным, чем специализированные методы; ибо последние часто применимы лишь к непрерывным и линейным системам, тогда как данный метод применим везде.

Особенно простым и хорошо известным является случай, когда система состоит из частей, между которыми существует обратная связь, имеющая весьма простую форму одиночной петли. Простым методом проверки на устойчивость такой системы (для исследуемого состояния равновесия) служит рассмотрение последовательности состояний, следующей за небольшим смещением, когда оно распространяется по этой петле. Если смещение в конце концов возвращается обратно с такой величиной и знаком, что при алгебраическом прибавлении его к исходному смещению исходное смещение уменьшается и тем самым система подходит ближе к состоянию равновесия, то около этого состояния равновесия система (обычно) устойчива. Обратная связь в этом случае называется «отрицательной» (ибо она в конечном счете приводит к *вычитанию* некоторой доли из исходного смещения).

Проверка по этому методу проста и удобна и часто может производиться в уме. Однако при наличии каких-либо усложнений она становится ненадежной, если производится в описанной выше простой форме. В следующих параграфах приводится пример того, как это правило может дать осечку, если применять его неаккуратно.

Упр. 1. Найдите a, D и T в упр. 3/6/17. Устойчива ли эта система относительно данного смещения?

Упр. 2. (Продолжение.) Сравните с упр. 3/6/19.

Упр. 3. Найдите a и T в упр. 2/14/11. Устойчива ли система, если D есть любое смещение из a?

Упр. 4. Возьмите игрушечный поезд (который катится по полу, а не по рельсам) и слегка отклоните линию вагонов от прямой. Пусть M — множество состояний, в которых отклонения от прямой нигде не превышают 5°, и пусть T — операция, состоящая в том, что паровоз тянет поезд за собой. Устойчиво ли M относительно T?

Упр. 5. (Продолжение.) Пусть U — операция, состоящая в том, что паровоз толкает поезд назад. Устойчиво ли M относительно U?

Упр. 6. Почему паровозы ставятся впереди поездов?

Упр. 7. Автобусное движение начинается, когда автобусы равномерно распределены вдоль маршрута. Если автобус задерживается, на остановках собираются лишние пассажиры, вследствие чего он должен принять больше пассажиров, чем обычно. Следующий за ним автобус, идя ближе, чем обычно, будет принимать меньше пассажиров и задерживаться меньше, чем обычно. Являются ли неравномерности в расположении автобусов самоисправляющимися или самовозрастающими?

Упр. 8. Что случилось бы, если бы повышение количества углекислоты в крови делало дыхательный центр менее активным?

Упр. 9. Устойчива ли система $x' = \frac{1}{2}y$, $y' = \frac{1}{2}x$ в состоянии $(0, 0)$?

5/10. *Положительная обратная связь.* Система, описанная в последнем упражнении, заслуживает более пристального внимания:

от (10, 10) она переходит к (5, 5),

от (10, 12) — к (6, 5),

так что возрастание y (от 10 до 12) ведет к возрастанию x (от 5 до 6) (ср. § 4/13). Аналогично

от (10, 10) она переходит к (5, 5),

от (12, 10) — к (5, 6),

так что возрастание x (от 10 до 12) приводит к возрастанию y (от 5 до 6). Таким образом, каждая переменная оказывает *положительное* воздействие на другую, и если бы система обсуждалась лишь словесно, то эти факты могли бы быть использованы для «доказательства» ее неустойчивости, ибо может показаться, что здесь действует порочный круг.

Поведение системы, возвращающее ее обратно к (0, 0), неопровержимо доказывает, что система устойчива в этом состоянии равновесия. Это ясно показывает, что доказательства, основанные на каком-либо обрывочном материале, например на том, что обратная связь положительна, не могут быть надежными. (Это показывает также, что даже при положительной обратной связи система может быть устойчивой, — еще один пример того, сколь несовершенным является понятие обратной связи вне обычной области его применения.)

5/11. *Нежелательная устойчивость.* Устойчивость обычно считается желательной, ибо наличие ее позволяет сочетать некоторую гибкость и активность действия с некоторым постоянством. Целенаправленное поведение является примером поведения, устойчивого около некоторого состояния равновесия. Тем не менее устойчивость не всегда хороша, ибо система может упорствовать в возвращении к такому состоянию, которое по другим причинам считается нежелательным. Зажженный бензин остается в состоянии горения, возвращаясь к нему и после того, как внешнее воздействие (возмущение) переведет его в «полупотухшее» состояние, — устойчивость, в высшей степени нежелательная для пожарного.

Другим примером служит предположение, что более интеллектуальные члены общества не воспроизводят свой род так же свободно, как менее интеллектуальные, и что по этой причине «коэффициент интеллектуальности» общества будет падать. Конечно, он не может упасть слишком низко, ибо слабоумный более способен к воспроизведению, чем идиот. Ввиду этого, если бы не было других факторов в данной ситуации, то «коэффициент интеллектуальности»[1] был бы устойчивым при значении примерно около 90. Большинство людей сочло бы нежелательной устойчивость этой цифры.

Интересным примером устойчивости служит так называемая «каузалгия», при которой острая боль, без какой-либо видимой причины, ощущается в нерве, который предварительно был частично разделен. Гранит[2] показал, что это почти наверное вызывается прохождением в пункте повреждения нерва импульсов от двигательных (эфферентных) к чувствительным (афферентным) нервам, которое приводит к образованию цепи с обратной связью через рефлекторные центры спинного мозга. Такая цепь имеет два состояния равновесия, каждое из которых устойчиво: пропускающее немного импульсов и пропускающее максимум их. Она напоминает качание на доске с тяжелым грузом на одном конце. Такая доска останавливается в любом из двух крайних положений, но не между ними. Больной хорошо знает, что «устойчивость» может быть либо хорошей, либо плохой, ибо одно из двух состояний удобно, а другое чрезвычайно болезненно.

---

[1] В сборнике «Автоматы» (М., 1956) термин intelligence quotient переводится как «частное интеллектуальности». Приводим из подстрочного примечания на стр. 282 этого сборника определение частного интеллектуальности по Уэкслеру: «Частное интеллектуальности есть отношение того числа очков, которое индивидуум набирает при данном умственном тесте, к числу очков, которое, как можно предполагать, средний индивидуум его возраста набрал бы при том же самом тесте; оба числа очков выражаются в одинаковых единицах (например, в месяцах и годах)... Частное интеллектуальности колеблется от $\approx 0{,}4$ до $\approx 1{,}5$; для удобства его умножают обычно на 100». — *Прим. перев.*

[2] Р. Гранит — шведский физиолог, руководитель лаборатории в Нобелевском институте в Стокгольме. — *Прим. перев.*

РАВНОВЕСИЕ В ЧАСТИ И В ЦЕЛОМ

5/12. Мы можем теперь установить соотношение между соединением и равновесием, которое понадобится нам позже (§ 12/14 и 13/19), так как оно имеет важные приложения.

Предположим, что некоторая система состоит из двух частей: A и B, соединенных вместе:

$$\boxed{A} \rightleftarrows \boxed{B}.$$

Предположим далее, что система в целом находится в состоянии равновесия.

Это означает, что состояние всей системы не изменяется во времени. Но состояние системы есть вектор с двумя составляющими: состоянием части A и состоянием части B. Отсюда следует, что A, рассматриваемая как подсистема, также не изменяется; то же самое и B.

Не только состояние части A не изменяется, но не изменяется и значение входа A; ибо это значение определяется состоянием части B (§ 4/7), которое не изменяется. Следовательно, A находится в состоянии равновесия в условиях, определяемых частью B (ср. упр. 5/3/11). Аналогично обстоит дело и с B. Таким образом, *если вся система находится в состоянии равновесия, то каждая часть должна находиться в состоянии равновесия в условиях, определяемых другой частью.*

Ход рассуждения можно обратить. Предположим, что части A и B находятся в состоянии равновесия и что каждое состояние части определяет для другой части входное значение, делающее состояние последней состоянием равновесия. Тогда ни одна из них не может измениться, не может измениться и вся система. Следовательно, вся система должна находиться в состоянии равновесия.

Итак, одно влечет другое. Формально это можно выразить так: *вся система находится в состоянии равновесия тогда и только тогда, когда каждая часть находится в состоянии равновесия в условиях, определяемых другой частью.* (Если имеется несколько частей, то вместо последних двух слов подставляются слова «другими частями».)

5/13. *Право вето.* Этот же тезис можно высказать более наглядно, раскрывая его общую идею. Предположим, что части *A* и *B* соединены в некоторую систему и что нас интересуют только состояния равновесия (а не циклы). Когда вся система начинает свое движение из какого-то начального состояния и движется по некоторой траектории, части *A* и *B* проходят через различные состояния. Предположим, что в некоторый момент состояние части *B* создает условия, делающие состояние части *A* состоянием равновесия. *A* не будет изменяться в течение следующего шага. Если *B* само не находится в состоянии равновесия в условиях, создаваемых *A*, оно перейдет в новое состояние. Благодаря этому условия, в которых находится *A*, изменятся. Вероятно, изменится также состояние равновесия *A*, и состояние, в котором находится *A*, вероятно, уже не будет состоянием равновесия. Тогда *A* снова начнет двигаться.

Образно выражаясь, мы можем сказать, что *A* предложило состояние равновесия, ибо *A* хотело остановиться, но *B* отказалось принять предложение, т. е. наложило вето на данное состояние. Таким образом, мы можем считать, что каждая часть имеет как бы право вето для состояний равновесия всей системы. Никакое состояние (всей системы) не может быть состоянием равновесия, если оно неприемлемо для каждой из составных частей, действующих в условиях, создаваемых другими частями.

Упр.: Даны три системы, каждая с одной переменной, с параметрами, обозначенными греческими буквами:

$$x' = -x + \alpha, \qquad y' = 2\beta y + 3, \qquad z' = -\gamma z + \delta.$$

Можно ли их соединить так, чтобы получить состояние равновесия в $(0, 0, 0)$? (Указание: какое значение при этом должно иметь β?)

5/14. *Гомеостат.* Из этого принципа можно вывести простой способ рассмотрения гомеостата и объяснения его работы. Гомеостат может рассматриваться как часть *A*, соединенная с частью *B* (рис. 5/14/1).

Часть *A* состоит в основном из четырех стрелок (со вспомогательными катушками, потенциометрами и т. д.), действующих друг на друга; они образуют систему четырех переменных, входом которой являются значения *B*. Состояние *A* определяется положением четырех стрелок. В зависимости от условия и от входа, состояниям равновесия части *A* может соответствовать либо центральное, либо какое-нибудь крайнее положение стрелок.

Часть *B* состоит в основном из одного реле, которое может быть либо возбуждено, либо нет, и четырех шаговых переключателей, каждый из которых может быть в одном из 25 положений (на рисунке показаны неточно). С каждым положением связано сопротивление определенной величины. Таким образом, *B* имеет $2 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25$, т. е. 781 250 состояний. Входом

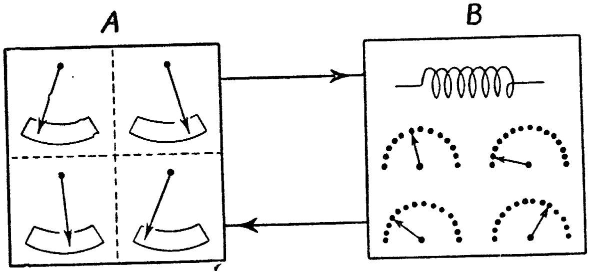


Рис. 5/14/1.

в часть *B* служит часть *A*; часть *B* построена так, что при возбужденном реле *ни одно* из состояний *B* не является состоянием равновесия (т. е. переключатели продолжают двигаться), тогда как при невозбужденном реле *все* состояния *B* являются состояниями равновесия (т. е. все переключатели останавливаются там, где находились).

Наконец, *B* соединено с *A* так, что реле не возбуждено тогда и только тогда, когда *A* устойчиво при *центральных* положениях стрелок.

Когда гомеостату поставлена задача (посредством изменения значения особого входа в *A*, не показанного формально на рисунке), часть *A* получает определенное множество возможных состояний равновесия, включающее некоторые состояния со стрелками в центральных положениях и некоторые состояния с полностью отклоненными стрелками. Вся система будет стремиться к состоянию равновесия в целом. Равновесие же всей системы означает, что *B* должно находиться в равновесии, согласно принципу, сформулированному в предыдущем параграфе. Но *B* устроено так, что это случится лишь тогда, когда реле не возбуждено. С другой стороны, *B* так соединено с *A*, что реле не возбуждено только тогда, когда стрелки *A* находятся в центре или поблизости от центра. Таким образом, присоединение *B* накладывает вето на все состояния равновесия *A*, кроме тех, в которых стрелки находятся в центре.

Теперь видно, что все графики, приведенные в книге «Устройство мозга», можно кратко описать одним понятием: «траектория системы, движущейся к состоянию равновесия». Гомеостат в некотором смысле не делает ничего, кроме того, что движется к состоянию равновесия. И в книге «Устройство мозга» было показано, что за этой простой фразой может скрываться много запутанных и интересных способов поведения, которые часто представляют большой интерес в физиологии и психологии.

(Вопрос об «устойчивости» рассматривается еще неоднократно, особенно в §§ 9/6, 10/4, 12/11; гомеостат рассматривается также в § 12/15.)

5/15. Теперь можно *подытожить* весь комплекс идей, связанных с понятием «устойчивости».

Во-первых, существует состояние равновесия — состояние, не изменяемое преобразованием. Далее, это состояние может стать множественным, и тогда мы получаем устойчивое множество состояний, примерами которого являются цикл и бассейн.

Если дано такое состояние или множество таких состояний и дано какое-нибудь конкретное возмущение, то мы можем спросить, вернется ли после смещения система в свою исходную область. Если система непрерывна, то мы можем далее спросить, устойчива ли она против всех возмущений внутри определенной области значений.

Ясно, что понятие устойчивости является по существу составным. Лишь когда указан каждый его аспект, оно может применяться к конкретным случаям. Но если употребление его требует такой осмотрительности, то зачем вообще употреблять это понятие? Его преимущество заключается в том, что в подходящих случаях оно может *кратко* подытожить различные более или менее запутанные возможности. В качестве сокращений в тех случаях, когда явления достаточно просты, такие слова, как «равновесие» и «устойчивость», очень ценны и удобны. Тем не менее следует всегда иметь в виду, что это всего лишь сокращения и что явления не всегда так просты, как предполагается этими словами. Употребляя их, надо всегда быть готовым вычеркнуть их и подставить вместо них — в терминах состояний, преобразований и траекторий — самые факты, которые они обозначали.

Интересно отметить, предвосхищая § 6/19, что попытка отвечать на вопросы о системе, ссылаясь на ее устойчивость, является примером «топологического» метода описания больших систем. Вопрос: «Как поведет себя система?» — в применении, скажем, к экономической системе *может* потребовать полного описания каждой детали ее будущего поведения; но *может* случиться, что адекватным ответом на него послужит гораздо более простое высказывание: «Она вернется в свое обычное состояние» (или, может быть, высказывание: «Она обнаружит еще большее отклонение»). Таким образом, метод рассмотрения, использованный в настоящей главе, принадлежит к тому типу, который требуется при работе с очень большими системами.

ГЛАВА 6

Черный ящик

6.1. Методы, развитые в предыдущих главах, дают нам теперь возможность исследовать проблему «черного ящика», и это исследование явится прекрасным примером применения указанных методов.

Проблема «черного ящика» возникает в электротехнике. Инженеру дается опечатанный ящик с входными зажимами, к которым он может подводить любые напряжения, импульсы и прочие воздействия по своему желанию, и с выходными зажимами, на которых ему предоставляется наблюдать все, что он может. Он должен вывести относительно содержания ящика все, что сможет.

Иногда эта проблема возникает в буквальной постановке, например когда плохо работает секретный опечатанный прицел для бомбометания и следует решить, не открывая ящика, стоит ли возвращать его для ремонта или лучше его выбросить. Иногда эта проблема возникает по практическим причинам, например когда инженер-телефонист, находящийся среди массы действующей аппаратуры, которая не должна разбираться без достаточных причин, рассматривает сложную картину соотношений между производимыми проверками и наблюдаемыми результатами.

Хотя проблема эта возникает в чисто электрической форме, область ее приложения значительно шире. Врач, исследующий больного с повреждением мозга и афазией, может пытаться, предлагая пациенту некоторые тесты и наблюдая ответную речь, вывести из этого что-нибудь относительно механизма заболевания. И психолог, изучающий крысу в лабиринте, может действовать на нее с помощью различных возбудителей и наблюдать ее различные реакции; сопоставляя факты, он может пытаться вывести что-нибудь относительно нервных механизмов, недоступных его наблюдению. Нет нужды приводить дальнейшие примеры, так как их можно найти повсюду (см. § 6/17).

Однако применение теории «черного ящика» выходит за пределы этих профессиональных исследований. Ребенок, пытающийся открыть дверь, должен манипулировать с ручкой (входом) так, чтобы вызвать желаемое движение задвижки (выхода); он должен научиться управлять задвижкой с помощью ручки, не имея возможности увидеть связывающий их внутренний механизм. В нашей повседневной жизни мы на каждом шагу сталкиваемся с системами, внутренний механизм которых не открыт полностью для наблюдения и в обращении с которыми приходится применять методы, соответствующие «черному ящику».

Экспериментатор, не интересующийся теорией «черного ящика», обычно рассматривает любой футляр просто как помеху, которая мешает ему ответить на вопрос: «Что находится в *этом* ящике?» Мы, однако, будем рассматривать более общие вопросы, например:

«Как должен поступать экспериментатор, столкнувшийся с „черным ящиком"?»

«Какие свойства того, что содержится в „ящике", могут быть обнаружены и какие принципиально не могут быть обнаружены?»

«Какие методы должны использоваться для действенного исследования „ящика"?»

Этим вопросам будет уделено должное внимание только в том случае, если мы примем наличие — хотя бы временное — какого-нибудь футляра и будем поступать соответственно этому. Тогда и только тогда мы сможем построить научную эпистемологию.

6/2. Для начала мы не будем делать вообще никаких предположений о природе «ящика» и его содержимого; пусть он, например, только что упал с «летающей тарелки». Однако мы принимаем, что экспериментатор располагает некоторыми определенными средствами воздействия на «ящик» (например, может его толкать или освещать) и некоторыми определенными средствами наблюдения за его поведением (например, может фотографировать его или записывать его температуру). Действуя на «ящик» и позволяя «ящику» воздействовать на себя и на свои регистрирующие приборы, экспериментатор соединяет себя с «ящиком», так что они вместе образуют систему с обратной связью:

$$\boxed{\text{Ящик}} \rightleftarrows \boxed{\text{Экспериментатор}}$$

Чтобы это соединение выполнялось определенным и воспроизводимым образом, необходимо точно указать, что́ принимается за «вход» ящика — хотя бы лишь произвольно и временно. Каждая реальная система имеет неограниченно большое число возможных входов — соответственно тем средствам, с помощью которых экспериментатор может воздействовать на «ящик». Равным образом она имеет неограниченно большое число возможных выходов — соответственно тем способам, которыми она может воздействовать на экспериментатора, включая воздействие через регистрирующие приборы. Поэтому при аккуратном исследовании необходимо выбрать, по крайней мере на время, определенное множество используемых входов и наблюдаемых выходов. Мы допустим, что это уже сделано.

Рассматриваемая нами (автором и читателем) ситуация станет яснее, если ввести два безвредных соглашения. Примем, что входы, какова бы ни была их действительная природа, заменены или представлены набором рычагов или указательных стрелок — набором, который можно уподобить кранам кухонной газовой плиты. Теперь нам будет совершенно ясно, что́ понимать под словами: «Вход находится в некотором состоянии»; в них идет речь о состоянии, которое было бы показано на моментальном фотоснимке этих рычагов. Примем также, что выход состоит из множества циферблатов, присоединенных к «ящику» и испытывающих воздействие его внутреннего механизма; положение стрелок на циферблатах в каждый момент показывает состояние выхода.

Теперь наш экспериментатор очень напоминает инженера, сидящего в корабельной рубке перед набором рычагов и корабельных телеграфов, с помощью которых он может воздействовать на машины, и наблюдающего за результатами по показаниям ряда циферблатов. Эта модель может показаться неестественной, но в действительности она, бесспорно, способна представлять огромное большинство естественных систем, включая даже биологические и экономические системы.

6/3. *Исследование.* Человек не может дважды вступить в один и тот же поток; так же не может он дважды произвести один и тот же эксперимент. Он может лишь предпринять другой эксперимент, отличающийся от первого только тем, чем по общему признанию можно пренебречь.

Это относится и к исследованию «черного ящика». Основные данные всегда будут иметь форму ведомости

Время	Состояния входа и выхода	
↓ ...	...	...
...	...	...

,

в которой записаны в порядке следования во времени наблюдаемые состояния различных частей «ящика» (его входа и выхода). Так, о «ящике», упавшем с «летающей тарелки», может быть составлен следующий протокол:

Время	Состояние
11 час. 18 мин. (утра)	Я ничего не делал — ящик испустил ровное жужжание частотой 240 герц.
11 час. 19 мин.	Я нажал на переключатель, помеченный буквой *К*, — звук поднялся до 480 герц и остался на этом уровне.
11 час. 20 мин.	Я случайно нажал кнопку, помеченную знаком „!“, — температура ящика поднялась на 20° С.
...	И т. д.

(В дальнейшем мы сохраним слово **«протокол»** для обозначения ведомости этой формы, заполняемой в аналогичной последовательности.)

Таким образом, каждая система исследуется в принципе путем постепенного изготовления длинного протокола, составленного в хронологическом порядке и показывающего последовательность состояний входа и выхода. Например, если некоторая система имеет возможные входные состояния α и β и возможные выходные состояния f, g, h и j, то типичный протокол может быть таким (и он будет представлять собой еще одно преобразование!):

Время	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Состояние	αg	αj	αf	αf	αf	βf	βh	βh	αh	αj	βf	αh	βj	βf	αh	βj	αf

(Скобки опущены для краткости.)

Эта форма, хотя она может показаться искусственной и неестественной, на самом деле является типичной и общей. Она может представлять все что угодно, начиная от исследования электрической сети, при котором на вход подают синусоидальное напряжение и наблюдают выход, и кончая психиатрическим собеседованием, при котором задают вопросы α, β и получают ответы f, g, h, j.

Таким образом, первичные данные всякого исследования «черного ящика» состоят из последовательности значений вектора с двумя составляющими:

(*входное состояние, выходное состояние*).

[Не исключена возможность, что каждая составляющая в свою очередь является вектором (§ 3/5)].

Отсюда следует фундаментальный вывод: *все, что можно узнать путем исследования «черного ящика» (с данными входом и выходом), можно узнать путем перекодирования протокола* — все это и ничего больше.

Упр. Составьте таблицу переходов, наблюдаемых в системе, начиная с αg. Найдите в них какие-либо закономерности.

6/4. Заметим, что мы ничего не говорили об искусстве экспериментатора в выборе воздействий на вход. Это умолчание было намеренным, ибо никакого искусства не требуется! Вспомним, что, согласно нашему допущению, о «ящике» не известно *ничего*; но в таком случае метод чисто случайных изменений входных переключателей (т. е. изменений, определяемых жребием) ничуть не хуже любого другого метода, ибо у нас еще нет никаких фактов, которые могли бы служить оправданием для предпочтения того или иного конкретного метода. Когда дело касается реальных механизмов — промышленных, биологических, нервных, — экспериментатор часто располагает предшествующим опытом обращения с «ящиками» того же класса. В этом случае может оказаться, что один метод позволит исследовать *не известные* экспериментатору свойства «ящика» более эффективно, чем другой метод. (Исследование частично известной системы приводит к вопросам гораздо более сложного типа и поэтому должно рассматриваться позже; кое-что сказано об этом в § 13/5 и далее.)

6/5. *Абсолютность*. Получив достаточно длинные записи, экспериментатор приступает к поискам закономерностей в поведении, к поискам *повторяемости* в поведении (§ 7/19). Например, в упр. 6/3/1 он может заметить, что за αj всегда следует либо αf, либо βf; следовательно, хотя переход от α неоднозначен, переход от j однозначен.

Итак, экспериментатор исследует записи. Обычно первая его задача — установить, является ли «ящик» абсолютным при данном входном состоянии. Для этого экспериментатор должен:

(I) выписать все переходы, следующие за входным состоянием α, и рассортировать их на переходы от g, переходы от h и т. д. по всем выходным состояниям;

(II) сделать то же самое для входа β;

(III) и т. д. по всем наблюдаемым входным состояниям.

Иными словами, он старается найти такое множество преобразований, как в § 4/1, и исследует полученное им множество, чтобы установить, однозначны ли эти преобразования.

Так, пусть рассматривается приведенный выше протокол (упр. 6/3/1). Если записать каждый из 16 образов, то получится таблица

↓	f	g	h	j
α	fff	j	jjj	ff
β	hhh	.	hh	ff

(Переход от g при входе β не наблюдался.) Все буквы в каждой клетке одинаковы, так что таблица упрощается:

$\downarrow$	f	g	h	j
α	f	j	j	f
β	h	.	h	f

;

отсюда вывод, что на протяжении всего протокола наблюдалось это замкнутое однозначное преобразование.

Таким образом, прямым перекодированием протокола экспериментатор может показать, что данное поведение машиноподобно, и *может вывести его каноническое представление.*

Следует отметить, что он вывел каноническое представление из прямого наблюдения над действительным поведением «ящика». Экспериментатор не опирался ни на какое «заимствованное» знание. Чего бы он ни ожидал и как бы он ни был уверен в своих ожиданиях, окончательный вывод зависит только от того, что действительно случилось. Таким образом, в любом конфликте между тем, чего ожидал экспериментатор или другие лица, и тем, что было обнаружено, эти эмпирические результаты являются решающими, составляя проявление природы «ящика».

Если система не детерминированна, т. е. преобразование не однозначно, экспериментатор может пойти по одному из двух следующих путей.

Первый путь — изменить множество входов и выходов, приняв во внимание большее количество переменных, а затем посмотреть, не является ли *новая* система (эквивалентная новому «ящику», см. § 3/11) детерминированной. Так, химик может обнаружить, что поведение системы, сначала недетерминированное, становится детерминированным, если принять во внимание присутствие следов хлорида. Значительное число исследований состоит из таких поисков подходящего множества переменных.

Другой путь состоит в том, чтобы отказаться от поисков строгой детерминированности и попытаться отыскать *статистическую* детерминированность, т. е.

детерминированность в среднем и т. д. Если подробности не являются предсказуемыми от шага к шагу, то экспериментатор, собрав обширные записи, разбивает их на большие отрезки и исследует, не являются ли *средние значения* (или аналогичные статистические характеристики) предсказуемыми от отрезка к отрезку. Он может установить, что записи обнаруживают статистическую детерминированность, соответствующую марковской цепи. (Однако рассмотрение этого случая будет отложено до гл. 9, а до тех пор мы будем заниматься только машинами, детерминированными от шага к шагу.)

Подведем итог: получив протокол, можно испытать систему на детерминированность и (если детерминированность установлена) вывести каноническое представление системы.

Упр. 1. Выведите кинематический график для входа α непосредственно из протокола системы § 6/3.

Упр. 2. (Продолжение.) То же для входа β.

Упр. 3. Система с одним входным состоянием дает следующую последовательность состояний на выходе:

$$D\ G\ A\ H\ C\ L\ H\ C\ L\ H\ C\ F\ C\ \ldots .$$

Абсолютна ли эта система?

Упр. 4. Система имеет две переменные x и y, каждая из которых может принимать значения 0, 1 и 2. Вход может принимать два значения: α и β. Дан протокол:

Время	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Вход	α	α	α	α	α	β	α	α	α	α	α	α	α
x	1	0	0	0	0	0	1	2	2	1	0	0	0
y	1	0	1	0	1	0	2	1	0	1	0	1	0

Время	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
Вход	β	α	α	β	β	β	α	β	β	β	α	β
x	0	0	1	0	1	1	1	1	1	2	2	1
y	1	2	1	0	2	1	0	1	0	0	2	1

Является ли эта система машиной со входом?

Упр. 5. (Продолжение.) Каково будет ее преобразование при входе α?

Упр. 6. Если машина имеет m входных и n выходных состояний, то каково наименьшее число шагов наблюдения, достаточное для ее полного изучения?

Упр. 7. Два «черных ящика» имеют одинаковый внешний вид, и каждый имеет по одному входу α и одному выходу x, которые являются числовыми переменными. «Ящики» были обозначены знаками I и II, и были найдены их канонические представления:

$$\text{I)}\ x' = x + 1 - \alpha;$$

$$\text{II)}\ x' = (1 + \alpha)\, x - 2 + \alpha.$$

К несчастью, знаки I и II были затем перепутаны, так что теперь неизвестно, какой из них относится к какой формуле. Предложите простейший способ установить их место.

6/6. *Недоступные состояния.* Исследование преобразования

$\downarrow$	f	g	h	j
α	f	j	j	f
β	h	f	h	f

показывает, что после того как состояние g однажды появилось в протоколе, никакие воздействия на вход не могут заставить его появиться вновь. Поэтому переходы от g не могут быть изучены далее или проверены повторно. Тот факт, что к некоторым состояниям «ящика» нельзя возвращаться по желанию, весьма обычен в практике. Такие состояния будут называться **недоступными.**

Наиболее драматическую форму недоступность состояний принимает в случае, когда исследование нового типа вражеской мины приводит к взрыву. Этот взрыв можно описать более абстрактно, сказав, что система прошла некоторое состояние, вернуться в которое ее не могут заставить никакие воздействия на вход. По существу то же самое явление имеет место при экспериментах на обучающемся организме, ибо со временем он оставляет свое «невинное», «неискушенное» начальное состояние и никакие простые манипуляции не вернут его в это состояние. Однако в таких экспериментах психолог обычно интересуется не данным индивидом, а данным видом, так что он может восстановить первоначальное состояние с помощью простой операции — взяв новый индивид.

Таким образом, в случае детерминированной системы экспериментатор должен либо ограничиться исследованием множества состояний, которое одновременно и замкнуто, и вполне доступно, как f, h, j в приведенном выше примере, либо добавить новые состояния ко входу, чтобы иметь в своем распоряжении большее число преобразований и благодаря этому, быть может, получить переход к g.

6/7. *Вывод связей.* Теперь ясно, что путем дедукции можно вывести некоторые заключения о связях внутри «черного ящика». Ибо непосредственные манипуляции и наблюдения дают протокол, который (если система детерминированна) дает каноническое представление, а оно дает диаграмму непосредственных воздействий (одну для каждого входного состояния) (§ 4/3). Но мы должны двигаться осторожно.

Следует заметить, что в реальной системе «диаграмма внутренних связей» *не единственна.* Например, радиоприемник, рассматриваемый электрически, имеет одну диаграмму связей, а рассматриваемый механически — другую. Действительно, любой изолятор является ведь компонентом, дающим прочную механическую связь, но не дающим никакой электрической связи. *Какова будет картина связей — зависит от того, какое множество входов и выходов используется.*

Даже если диаграмма непосредственных воздействий единственна, она не указывает единственной картины связей внутри «ящика». Так, пусть «черный ящик» имеет выход в виде двух циферблатов x и y, и пусть мы обнаружили, что x доминирует над y. Тогда диаграмма непосредственных воздействий будет иметь вид

$$\boxed{x} \rightarrow \boxed{y}$$

(где два квадрата суть части целого «ящика»). Эта зависимость может быть осуществлена бесчисленным множеством возможных внутренних механизмов. Конкретным примером может служить случай, когда несколько реле замыкают или размыкают контакты, чтобы образовать определенную сеть связей. Шеннон показал, что любое данное поведение может быть осуществлено бесконечно большим числом возможных сетей. Так, пусть x обозначает контакт, замкнутый, когда реле X возбуждено, а $\bar{x}$ — контакт, разомкнутый при возбужденном X. Предположим также, что другое реле Y несет подобные контакты y и $\bar{y}$. Предположим, что сеть должна проводить ток от p к q тогда и только тогда, когда включены оба реле X и Y.

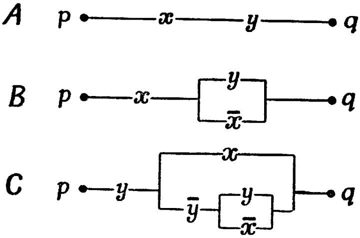


Рис. 6/7/1.

Сеть A на рис. 6/7/1, в которой x и y соединены последовательно, обнаружит требуемое поведение, но так же будет вести себя сеть B, и сеть C, и бесконечное число других сетей.

Поведение не определяет однозначно связей.

Упр. (Упр. 6/5/4, продолжение.) Выведите диаграмму непосредственных воздействий при входе, зафиксированном в α. (Указание: см. § 4/13.)

ИЗОМОРФНЫЕ МАШИНЫ

6/8. Исследование «черного ящика», таким образом, может дать экспериментатору информацию лишь до определенного предела; превысить этот предел при заданных входах и выходах невозможно. Сколько именно информации может быть получено, будет рассмотрено в § 13/15 (особенно в последнем упражнении). Здесь достаточно отметить, что каноническое представление определяет или задает механизм с «точностью до изоморфизма».

«Изоморфный», грубо говоря, означает «подобный по форме». Это весьма широкое понятие, имеющее первостепенную важность для всякого, кто хочет точно исследовать вопросы, в которых играет роль «форма». Рассмотрим сначала несколько примеров просто для того, чтобы проиллюстрировать основные идеи.

Фотографический негатив и отпечаток с него изоморфны, поскольку речь идет о форме рисунка. Квадраты на негативе выглядят квадратами на отпечатке, круги выглядят кругами, параллельные линии остаются параллельными линиями. Таким образом, некоторые *отношения* между частями, существующие на негативе, появляются на отпечатке в виде тех же самых *отношений,* хотя в том, что касается освещенности, они выглядят теперь иначе и, более того, прямо противоположно. Таким образом, операция изменения негатива в отпечаток оставляет эти отношения без изменения (ср. § 5/2).

Карта и местность, которую она изображает, изоморфны (если карта точна!). Отношения на местности, например то, что города A, B и C образуют равносторонний треугольник, остаются неизменными на карте, где точки, изображающие A, B и C, также образуют равносторонний треугольник.

Форма не обязательно должна восприниматься зрительно. Если бросить камень вертикально вверх с начальной скоростью 15 *м/сек*, то будет существовать изоморфизм между множеством точек в воздухе, проходимых камнем, который в момент t находится на высоте h, и множеством точек на графике, удовлетворяющих уравнению

$$y = 15x - 4{,}9x^2.$$

Линии, по которым воздух (на дозвуковых скоростях) обтекает профиль крыла, имеют форму, тождественную с формой линий, по которым электрический ток в проводящей жидкости обтекает непроводник того же контура, что и крыло. Две эти формы одинаковы, хотя их физические основы различны.

Другой пример изоморфизма стоит рассмотреть подробнее. На рис. 6/8/1 изображены две динамические системы, каждая со входом и выходом. В верхней системе входом является левая ось I; она может быть повернута в любое положение, показанное на циферблате u. Пружиной S она связана с маховиком M, жестко связанным с выходным валом O. Степень поворота O показывается на циферблате v, который является выходом вала. Маховик M погружен в корытце с жидкостью F, благодаря чему к колесу прикладывается сила трения, пропорциональная скорости колеса. Если теперь при заданных начальных условиях вход *u* будет проходить определенную последовательность значений, то выход *v* также пройдет определенную последовательность значений, зависящую от начального состояния выхода *v*, от скорости изменения выхода *v* в начальный момент и от последовательности состояний входа *u*.

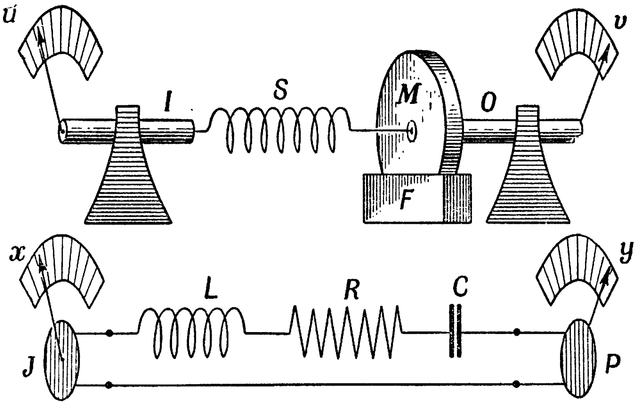


Рис. 6/8/1.

Нижняя система — электрическая. Входом ее служит потенциометр или другой прибор *J*, создающий напряжение, показанное на шкале *x*. К нему последовательно присоединена индуктивность *L*, сопротивление *R* и емкость *C*. Через *P* обозначен электрический счетчик (какой устанавливается в жилых квартирах), отмечающий общее количество прошедшего по нему тока. Это количество показывается на шкале *y*, которая является выходом счетчика.

Если теперь подобрать значения *L*, *R* и *C* так, чтобы они соответствовали упругости пружины, инерции маховика и трению в *F* (хотя и не в этом порядке), то обе системы могут обнаружить замечательное функциональное тождество. Пусть сначала они обе находятся в состоянии покоя. Приложим к *u* любую входную последовательность значений, сколь угодно длинную и произвольную, и получим в v выходную последовательность равной длины; если та же самая последовательность значений задана в x, то выход в y в течение всей своей длительности будет тождествен выходу в v. Попробуем приложить к u другую последовательность значений и запишем то, что появится в v; тот же самый вход, приложенный к x, даст в y копию выхода в v. Закроем центральные части механизмов — и обе машины невозможно будет различить даже при бесконечном числе испытаний. Таким образом, машины могут обнаруживать глубочайшее сходство в поведении, будучи с других точек зрения совершенно различны.

Но это еще не все. Математикам хорошо известны уравнения типа

$$a\frac{d^2z}{dt^2}+b\frac{dz}{dt}+cz=w,$$

с помощью которых — если дан график, показывающий изменение w со временем (t), — можно найти изменения z, вызываемые изменениями w. Ясно, что w можно рассматривать как «вход» уравнения, а z — как его «выход». Если теперь коэффициентам a, b и c дать значения, подходящим образом связанные с L, R, S и т. д., то зависимость между w и z становится тождественной зависимости между u и v, как и зависимости между x и y. Все три системы изоморфны.

Теперь становится очевидным огромное практическое значение изоморфизма. Предположим, что возникла задача: как будет вести себя описанная выше механическая система при определенных условиях? Дан вход u, требуется определить поведение v. Реальная механическая система может оказаться неудобной для непосредственного исследования: она, скажем, слишком массивна, или малодоступна, или даже еще не изготовлена. Но если под рукой имеется математик, то ответ дается легко и быстро: математик находит выход z приведенного выше дифференциального уравнения при входе w. В этом случае принято говорить о решении задачи из математической физики. Однако следует заметить, что рассматриваемый процесс по существу является не чем иным, как использованием карты — использованием удобного изоморфного представления вместо неудобной реальности.

Может случиться так, что под рукой нет математика, но есть электрик. И в этом случае можно применить тот же самый принцип. Собирается электрическая система, задается вход в *x* и читается выход на *y*. Это обычно называется «построением электрической модели».

Ясно, что ни одна из этих трех систем не имеет особых преимуществ; любая из них может заменить две другие. Так, если инженер хочет решить дифференциальное уравнение, то иногда он может найти ответ быстрее, построив электрическую систему и читая решение на *y*. В этом случае говорят, что он «построил аналоговую вычислительную машину». В других случаях более удобной формой вычислительной машины может оказаться механическая система. Большая универсальная цифровая вычислительная машина замечательна именно тем, что при соответствующем программировании она может стать изоморфной любой динамической системе.

Таким образом, использование изоморфных систем — обычное и важное явление. Оно важно потому, что большинство систем имеет как трудные, так и легкие для изучения участки. Когда экспериментатор доходит до трудного участка исследуемой системы, то при наличии изоморфной формы может случиться, что соответствующий участок в этой новой форме будет гораздо легче для понимания, или управления, или изучения. И опыт показал, что возможность перейти к изоморфной форме хотя и не дает абсолютно надежных результатов (ибо изоморфизм может сохраняться лишь в пределах определенной области), но тем не менее оказывает в высшей степени полезную и практическую помощь экспериментатору. В науке она используется повсеместно.

6/9. Теперь следует показать, что это понятие изоморфизма, при всей широте его применения, может получить точное и объективное определение. Наиболее фундаментальное определение было дано Бурбаки; нам оно нужно лишь в форме, подходящей для динамических систем. Она может применяться непосредственно, коль скоро две машины сведены к каноническим представлениям.

Рассмотрим, например, две простые машины M и N с каноническими представлениями:

$$M:\ \begin{array}{c|cccc} \downarrow & a & b & c & d \\ \hline \alpha & a & c & d & c \\ \beta & b & a & d & c \end{array}, \qquad N:\ \begin{array}{c|cccc} \downarrow & g & h & j & k \\ \hline \delta & k & j & h & g \\ \varepsilon & k & h & g & g \end{array}.$$

Они не обнаруживают никакой очевидной связи между собой. Начертим, однако, их кинематические графики.

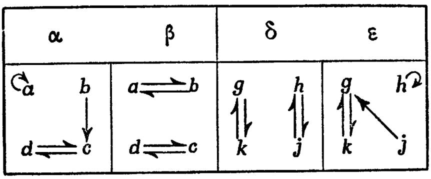


Рис. 6/9/1.

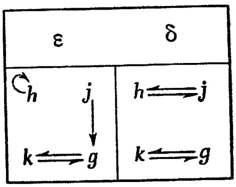


Рис. 6/9/2.

Эти графики имеют форму, показанную на рис. 6/9/1, и обнаруживают на вид глубокое сходство. И, действительно, простым перемещением *точек* в N, не разрывая ни одной стрелки (ср. § 2/17), мы можем получить для графиков N форму, показанную на рис. 6/9/2. Эти графики тождественны графикам M, за исключением обозначений.

Скажем точнее: канонические представления двух машин **изоморфны**, если взаимно однозначное преобразование состояний (входных и выходных) одной машины в состояния другой может превратить одно представление в другое.

Так, в случае приведенного примера применим к таблице N взаимно однозначное преобразование

$$P:\ \downarrow \begin{array}{cccccc} \delta & \varepsilon & g & h & j & k \\ \beta & \alpha & c & a & b & d \end{array},$$

применяя его как к обрамлению по краям, так и к внутренней части таблицы. Получим

↓	c	a	b	d
β	d	b	a	c
α	d	a	c	c

Это по существу то же самое, что и M. Так, в обоих таблицах c и β, стоящие по краям, дадут d. Таким образом, здесь налицо изоморфизм в смысле нашего определения. (Изоморфизм станет очевиднее, если сначала переставить строки:

↓	c	a	b	d
α	d	a	c	c
β	d	b	a	c

а затем переставить столбцы:

↓	a	b	c	d
α	a	c	d	c
β	b	a	d	c

однако эта перестановка столбцов служит лишь для наглядности.)

Если состояния определяются векторами, процесс по существу не изменяется. Предположим, что R и S — две абсолютные системы:

$$R: \begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}, \qquad S: \begin{cases} u' = -u - v \\ v' = -u + v \end{cases}.$$

Преобразование P

$$P: \downarrow \begin{matrix} u & v \\ y & -x \end{matrix}$$

есть сокращенное описание взаимно однозначного преобразования, соотносящего состояния S и R следующим образом:

(2, 3)	в	S	соответствует	(—3, 2)	в	R
(1, 0)	»	»	»	(0, 1)	»	»
(4, 5)	»	»	»	(—5, 4)	»	»
(—3, 0)	»	»	»	(0, —3)	»	»
т. е. (u, v)	»	»	»	$(-v, u)$	»	»

(ср. с U в § 4/9). Применив P ко всему описанию S, получим

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ -x' = -y - x \end{cases},$$

что алгебраически тождественно с R. Следовательно, R и S изоморфны.

Упр. 1. Какое взаимно однозначное преобразование покажет изоморфизм следующих абсолютных систем:

$$Y: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ c & c & d & d & b \end{matrix}, \qquad Z: \downarrow \begin{matrix} p & q & r & s & t \\ r & q & q & p & r \end{matrix}?$$

(Указание: попытайтесь установить некоторые характерные особенности, такие как состояния равновесия.)

Упр. 2. Сколько существует взаимно однозначных преобразований, которые покажут изоморфизм следующих абсолютных систем:

$$A: \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ b & c & a \end{matrix}, \qquad B: \downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ r & p & q \end{matrix}?$$

**Упр.* 3. Напишите канонические уравнения двух систем, изображенных на рис. 6/8/1, и покажите их изоморфизм. (Указание: сколько переменных необходимо, чтобы система была машиной со входом?)

Упр. 4. Найдите такой способ переименования переменных, который обнаружит изоморфизм абсолютных систем A и B:

$$A: \begin{cases} x' = -x^2 + y \\ y' = -x^2 - y \\ z' = y^2 + z \end{cases}, \qquad B: \begin{cases} u' = w^2 + u \\ v' = -v^2 + w \\ w' = -v^2 - w \end{cases}.$$

(Указание: на правой стороне уравнения A одна переменная встречается только один раз; то же самое и в B. Далее, в A только одна переменная находится в квадратической зависимости от самой себя, т. е. имеет вид $a' = \pm a^2 \ldots$; и то же самое в B.)

6/10. В предыдущем параграфе показано, что две машины изоморфны, если простым переименованием можно сделать одну тождественной другой. Однако, как мы сейчас увидим, это «переименование» может иметь различную степень сложности.

Система, заданная только состояниями, как в предыдущем параграфе, не содержит непосредственных ссылок на части или переменные. В этом случае «переименование» может означать лишь «переименование состояний». Однако в системе с частями или переменными могут быть переименованы и переменные, а это далеко не одно и то же. Переименование переменных в конечном счете есть переименование состояний, но подчиненное значительным ограничениям разнообразия (§ 7/8), тогда как переименование состояний может быть сколь угодно произвольным. Таким образом, переименование состояний является более общим, чем переименование переменных.

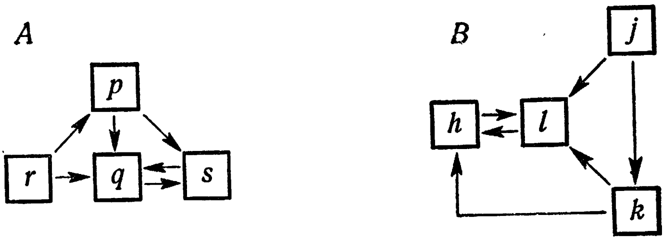
Например, предположим, что система имеет девять состояний; произвольное переименование восьми из них нисколько не ограничивает выбор названия, которое должно быть дано девятому. Теперь предположим, что система содержит две переменные, каждая из которых может принимать три значения: x_1, x_2, x_3 и y_1, y_2, y_3. Всего возможно девять состояний, два из которых суть (x_2, y_3) и (x_3, y_1). Предположим, что *переменные* системы переименованы следующим образом:

$$\downarrow \begin{matrix} x & y \\ \xi & \eta \end{matrix}.$$

Если теперь (x_2, y_3) преобразуется в какое-то состояние (α, β), а (x_3, y_1) преобразуется в (γ, δ), то, во избежание противоречий, состояние (x_2, y_1) должно переходить в (α, δ). (Начертите фазовые пространства и укажите соответствующие значения на осях ξ и η.) Таким образом, в рассматриваемом случае девять состояний не могут быть преобразованы произвольно и независимо. *Переименование переменных оставляет меньше простора для изменения, чем переименование состояний.*

Вследствие этого некоторые черты, уничтожаемые при переименовании состояний, сохраняются при переименовании переменных; в частности, так обстоит дело с диаграммой непосредственных воздействий.

Система, описываемая состояниями, не может, конечно, иметь диаграмму непосредственных воздействий, ибо фактически у нее только одна переменная. Напротив, система с переменными имеет диаграмму непосредственных воздействий. Фазовое пространство теперь имеет оси; и легко видеть, после немногих проб, что взаимно однозначное преобразование, переименовывающее переменные, изменяет диаграмму непосредственных воздействий по типу изменения «пуговиц и нитей» (§ 2/17), превращая, например, A в B:



Упр. 1. (Продолжение упр. 6/9/4.) Сравните диаграммы непосредственных воздействий A и B.

Упр. 2. Отметьте, какие из следующих свойств системы изменяются при переименовании ее состояний, а какие нет: (I) число бассейнов в фазовом пространстве; (II) приводимость системы; (III) число ее состояний равновесия; (IV) наличие обратной связи; (V) число циклов в ее фазовом пространстве.

Упр. 3. (Продолжение.) Как отразится на этих свойствах переименование переменных?

6/11. Вопрос об изоморфизме весьма широк и может обсуждаться здесь лишь в порядке введения. Прежде чем оставить его, заметим, что если преобразование более сложно, чем простое переименование переменных, то оно может изменить диаграмму непосредственных воздействий. Так, системы

$$A: \begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+y \\ y' = \frac{1}{2}(x^2+y^2)+xy+x \end{cases}, \qquad B: \begin{cases} u' = -u \\ v' = v+v^2 \end{cases}$$

изоморфны относительно взаимно однозначного преобразования

$$P: \begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases}.$$

Но диаграмма A имеет вид

$$\boxed{x} \rightleftarrows \boxed{y}\ ,$$

тогда как диаграмма B имеет вид

$$\boxed{u} \quad \boxed{v}\ ,$$

т. е. состоит из двух несвязанных переменных.

«Метод нормальных координат», широко используемый в математической физике, как раз и состоит в применении преобразований, переводящих систему из первоначальной формы в такую изоморфную форму, где все переменные независимы. При таком преобразовании диаграмма непосредственных воздействий резко изменяется, но сохраняется совокупность нормальных характеристик, т. е. специфический способ поведения.

Такое преобразование (как приведенное выше P), с помощью которого образуется некоторая функция данных переменных (например, функция $x - y$), представляет для экспериментатора нечто большее, нежели простое переименование выходных циферблатов x, y. Оно означает, что выходы «ящика» x и y должны быть соединены с некоторым физическим аппаратом, который будет принимать x и y на входе и выдавать новые выходы $x - y$ и $x + y$. Это соединение соответствует более сложной операции, чем рассмотренная в § 6/10.

Упр. Покажите, что A и B изоморфны. [Указание: $(x - y)' = x' - y'$; почему?]

ГОМОМОРФНЫЕ МАШИНЫ

6/12. Данное выше определение изоморфизма определяет «равенство» в самом строгом смысле. Согласно этому определению, две машины (или два «черных ящика») «равны» только в том случае, когда они столь схожи, что невозможно обнаружить случайную замену одной из них на другую, по крайней мере любым способом проверки их поведения.

Существуют, однако, и меньшие степени сходства. Так, два маятника, один из которых отбивает секунды, а другой — полусекунды, очевидно, сходны, хотя и не изоморфны в строгом смысле слова. Об их сходстве говорит тот факт, что они будут изоморфны при использовании для них отдельных шкал времени, значения одной из которых равны половине значений другой.

Две машины могут быть также связаны «гомоморфизмом». Это имеет место, когда однозначное лишь в одну сторону преобразование, приложенное к более сложной машине, может свести ее к форме, которая будет изоморфна более простой машине. Так, две машины M и N

$$M:\ \begin{array}{c|ccccc} \downarrow & a & b & c & d & e \\ \hline i & b & a & b & c & a \\ j & a & b & c & b & c \\ k & a & b & b & e & d \\ l & b & c & a & e & e \end{array}\ , \qquad N:\ \begin{array}{c|cc} \downarrow & g & h \\ \hline \alpha & g & h \\ \beta & h & h \end{array}$$

могут показаться на первый взгляд мало в чем сходными. Однако сходство между ними существует, и глубокое. (Читателю будет очень полезно, прежде чем читать дальше, попытаться обнаружить — хотя бы смутно, — в чем заключается это сходство. Обратите внимание на особенность таблицы N, в которой три элемента одинаковы, а один элемент отличается от других. Можно ли обнаружить что-либо подобное в таблице M, если разбить ее на квадраты?)

Преобразуем M посредством однозначного лишь в одну сторону преобразования T

$$T:\ \downarrow\begin{array}{ccccccccc} a & b & c & d & e & i & j & k & l \\ h & h & h & g & g & \beta & \beta & \alpha & \alpha \end{array}$$

(которое однозначно, но не взаимно однозначно, как в § 6/9) и получим

↓	h	h	h	g	g
β	h	h	h	h	h
β	h	h	h	h	h
α	h	h	h	g	g
α	h	h	h	g	g

.

Мы увидим, что повторения не противоречат друг другу, а потому таблицу можно записать в виде

↓	h	g
β	h	h
α	h	g

,

что изоморфно с N.

Исследование M покажет теперь, в чем заключается ее сходство с N. Внутри M переходы происходят по блокам; так, a, b и c всегда переходят только в a, или b, или c. А *блоки* в M испытывают те же переходы, что и *состояния* в N. Таким образом, *N эквивалентно упрощенному варианту M.*

Это соотношение между машинами M и N можно обнаружить и по-другому. Предположим сначала, что обе машины рассматривает некто, способный различать все пять состояний M; он скажет просто, что M отлично от N (т. е. не изоморфно с N) и более сложно, чем N. Предположим, что машины рассматривает также наблюдатель с меньшей способностью различения, который не может различить a, b и c и смешивает их в одно состояние, скажем в A. Равным образом он смешивает d и e, скажем, в B, i и j — в Γ, а k и l — в Δ. Этот новый наблюдатель, видя упрощенный вариант M, скажет, что M изоморфно с N. Таким образом, две машины гомоморфны, если они становятся одинаковыми при упрощении одной из них, т. е. при наблюдении ее с неполным различением состояний.

Формально мы скажем: если две машины находятся в таком отношении друг к другу, что некоторое однозначное лишь в одну сторону преобразование, приложенное к одной из них, даст машину, изоморфную другой машине, то эта вторая (более простая) машина есть **гомоморфный образ** первой машины.

Упр. Является ли изоморфизм лишь крайним случаем гомоморфизма?
Задача. Какие еще типы гомоморфизма существуют между машинами?

6/13. Чтобы применять методы настоящей книги к биологическим системам, надо не только усложнить эти методы в достаточной мере, чтобы они соответствовали системам, — надо также значительно упростить системы, чтобы изучение их стало осуществимым на практике. До сих пор ни одна биологическая система не изучалась во всей ее сложности, и так, по-видимому, будет еще в течение долгого времени. На практике биолог, прежде чем начать работу, всегда вводит огромные упрощения. Действительно, наблюдая птицу, строящую гнездо, он не видит в подробностях всей запутанной картины нервной деятельности в мозгу птицы; изучая, как ящерица спасается от своих врагов, он не видит конкретных молекулярных и ионных изменений в ее мускулах; изучая племя, собравшееся на совет, он не видит всех бесчисленных частных процессов, которые происходят в отдельных членах племени. Таким образом, биолог изучает лишь небольшую часть находящейся перед ним системы. Любое его высказывание — только половинная истина, только упрощение. До какой границы упрощение системы может быть оправданным? Может ли ученый успешно работать с половинными истинами?

Конечно, человек практики никогда не усомнится в этом. Посмотрим, можно ли внести в эту ситуацию ясность и точность.

Разумеется, знание может быть частичным и все-таки оставаться полным в себе. Наиболее яркий пример, пожалуй, дает обыкновенное умножение. Полная истина об умножении, конечно, очень обширна; она включает факты о всех возможных парах сомножителей, например тот факт, что

$$14\,792 \times 4\,183\,584 = 61\,883\,574\,528.$$

Однако об умножении можно высказать и гораздо меньшую истину, состоящую всего лишь из четырех фактов:

четное число $\times$ четное число = четное число,
четное число $\times$ нечетное число = четное число,
нечетное число $\times$ четное число = четное число,
нечетное число $\times$ нечетное число = нечетное число.

Очень важно, что хотя знание этих четырех фактов есть лишь бесконечно малая часть всего знания об умножении, оно полно *внутри себя*. (Это был в действительности первый гомоморфизм, рассмотренный в математике.) Сравните эту полноту знания в отношении умножения четных и нечетных чисел с неполнотой, свойственной тому случаю, когда сообщается, что

$$\begin{aligned} 2 \times 2 &= 4, \\ 2 \times 4 &= 8, \\ 4 \times 2 &= 8, \\ 4 \times 4 &= 16, \end{aligned}$$

но не упоминается, сколько будет 4×8 и т. д. Таким образом, вполне возможно, чтобы некоторое знание, частичное по отношению к более обширной системе, было полным внутри себя, полным в том, что к нему относится.

Как мы видим, гомоморфизмы могут существовать между двумя различными машинами. Гомоморфизмы могут существовать и внутри одной машины — между различными возможными упрощениями ее, *сохраняющими, однако, характерное свойство машиноподобности* (§ 3/1). Пусть, например, дана машина A

$$A: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ e & b & a & b & e \end{matrix}.$$

Так видит машину первый наблюдатель. Предположим теперь, что второй наблюдатель не может различать состояния a и d, а также b и e. Для ясности дадим состояниям новые названия:

$$\underbrace{a\ \ d}_{K}\quad \underbrace{c}_{L}\quad \underbrace{b\ \ e}_{M}.$$

Второй наблюдатель, наблюдая состояния K, L и M, обнаружит, что поведение машины детерминированно. Так, из K (в действительности из a или d) она всегда перейдет в M (либо в b, либо в e) и т. д. Он скажет, что машина ведет себя согласно замкнутому преобразованию

$$\downarrow\begin{matrix} K & L & M \\ M & K & M \end{matrix}$$

которое однозначно и, следовательно, детерминированно.

Эта новая система была получена объединением в определенные группы некоторых различных до того состояний; но отсюда не следует, что любая произвольная группировка дает гомоморфизм. Так, предположим, что еще один, третий, наблюдатель может различать только два состояния:

$$\downarrow\ \underbrace{a\ b\ c}_{P}\quad \underbrace{d\ \ e}_{Q}.$$

Он обнаружит, что P переходит иногда в Q (когда в действительности состояние P было состоянием a), а иногда в P (когда состояние P в действительности было состоянием b или c). Таким образом, изменение P не однозначно, и третий наблюдатель скажет, что машина (с состояниями P и Q) не детерминированна. Он не будет удовлетворен измерениями, приведшими к различению между P и Q, и будет стремиться к более точному различению, чтобы устранить непредсказуемость.

Итак, машина может принять новую, более простую форму, если объединить ее состояния подходящим образом. Научное исследование сложной системы не требует установления всех возможных различий.

Упр. 1. Какой гомоморфизм сочетает четные и нечетные числа в случае операции сложения?

Упр. 2. Дана система с четырьмя состояниями:

$$\downarrow\begin{matrix} a & b & c & d \\ b & b & d & c \end{matrix}.$$

Найдите все ее возможные упрощения, которые оставляли бы машину детерминированной.

Упр. 3. Какое упрощение возможно в системе

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = x^2 + y \end{cases},$$

если результат должен оставаться детерминированной машиной?

6/14. Сознательный отказ от установления всех мыслимых различий и сознательное ограничение изучения системы некоторыми гомоморфными образами целого становится оправданным и в действительности почти неизбежным, когда экспериментатор имеет дело с системой биологического происхождения.

В предыдущих главах мы обычно принимали, что наблюдатель в каждый момент точно знает, в каком состоянии находится система. Другими словами, мы принимали, что в каждый момент его информация о системе является полной. Если, однако, система становится все больше и больше, то наступает момент, когда восприятие всей информации становится невозможным по причине ее чрезмерного объема: либо записывающие каналы не могут пропустить всю информацию, либо, получая всю информацию, наблюдатель утопает в ней. Что ему делать в подобном случае? Ответ ясен: он должен оставить всякие претензии на знание *всей* системы. Целью его должно быть получение частичного знания, которое, будучи частичным по отношению к целому, было бы тем не менее полным в себе и достаточным для решения данной практической задачи.

Эти обстоятельства подчеркивают одну важную, принципиальную особенность в исследовании очень большой системы. Имея дело с такой системой, наблюдатель должен быть очень осторожен при употреблении слов: «Система, с которой я имею дело», — ибо слова эти, вероятно, будут двусмысленными, и, возможно, даже в очень значительной степени. Слова: «Система, *с которой я имею дело*», — могут обозначать всю систему, взятую независимо от любого изучающего ее наблюдателя, — вещь, как она существует сама по себе. С другой стороны, слова: «Система, *с которой я имею дело*», — могут обозначать то множество переменных (или состояний), которым занимается данный наблюдатель. Хотя первое звучит более внушительно в философском отношении, практический работник неизбежно признает более важным второе. Но и второе значение может быть двусмысленным, если не указан конкретный наблюдатель; ибо изучаемая наблюдателем система может быть любой из многих подмашин, образующих гомоморфные образы данной машины. Все эти значения должны различаться нами, потому что различные подмашины могут иметь различные свойства. Может случиться, что хотя обе подмашины абстрагированы от одной и той же реальной «вещи», высказывание, истинное для одной подмашины, будет ложным для другой.

Отсюда следует, что не существует такой вещи, как (единственное) поведение очень большой системы, взятое *само по себе*, независимо от данного наблюдателя. Ибо сколько наблюдателей, столько подмашин и столько же картин поведения, которые могут разниться вплоть до несовместимости в одной системе. Так, система с пятью состояниями, задаваемая кинематическим графиком

$$h \rightleftarrows k, \quad m \longrightarrow l \rightleftarrows j,$$

имеет два бассейна и всегда кончается циклом. Гомоморфная ей подмашина (с состояниями r и s), задаваемая преобразованием

$$\downarrow \underbrace{h\ j\ k\ l}_{r} \quad \underbrace{m}_{s},$$

имеет график $s \rightarrow r$, с одним бассейном и без всяких циклов. Оба эти высказывания одинаково истинны, и они не противоречат друг другу, поскольку относятся к разным системам (понимаемым как в § 3/11).

Принимаемая здесь точка зрения заключается в том, что наука (представленная открытиями нашего наблюдателя) занимается непосредственно не открытием того, какова система «в действительности», но согласованием открытий различных наблюдателей, каждое из которых является лишь частью или аспектом всей истины.

Если бы инженеру при строительстве моста пришлось рассматривать отдельно каждый атом, то он нашел бы эту задачу невыполнимой уже в силу ее величины. Поэтому он игнорирует тот факт, что балки и блоки в действительности сложны и состоят из атомов, и рассматривает их как неделимые единицы. Оказывается, что природа балок допускает это упрощение, и работа инженера становится практически возможной. Отсюда видно, что метод изучения очень больших систем посредством изучения отдельных, специально выбранных их аспектов есть попросту то, что всегда делается на практике. Теперь мы намерены проследить этот процесс более строго и сознательно.

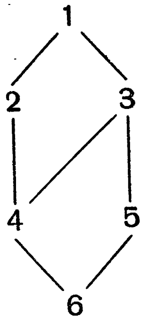
6/15. *Структура.* Различные упрощения одной и той же машины находятся в точно определенных отношениях друг к другу. Так, шесть форм системы из упр. 6/13/2 суть:

$$\begin{array}{lccccccc}
(1) & a & , & b & , & c & , & d; \\
(2) & a & + & b & , & c & , & d; \\
(3) & a & , & b & , & c & + & d; \\
(4) & a & + & b & , & c & + & d; \\
(5) & a & , & b & + & c & + & d; \\
(6) & a & + & b & + & c & + & d.
\end{array}$$

Здесь, например, «$a+b$» означает, что a и b больше не различаются. Нетрудно видеть, что форма (4) может быть получена из формы (3) путем слияния состояний a и b. Но форма (5) не может быть получена из формы (4) простым слиянием, ибо в (5) используется различие между a и b, утерянное в (4). Таким образом, легко проверить, что упрощения могут дать:

из (1) — все остальные пять форм,
из (2) — формы (4) и (6),
из (3) — формы (4), (5) и (6),
из (4) — форму (6),
из (5) — форму (6),
из (6) — ничего.

Таким образом, упрощения находятся друг к другу в таких отношениях, как изображено на приводимой ниже диаграмме, где линии, идущие вниз, соединяют более простую форму (внизу) с той формой (вверху), из которой она может быть непосредственно получена:



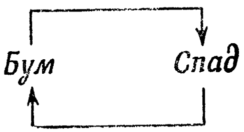
Диаграммы этого типа известны под названием *структур*, и их изучению уделяется много внимания в современной математике. Для нашего введения в кибернетику важно отметить, что это упорядочение форм делает точными многие идеи относительно систем, идеи, которые до этого рассматривались только интуитивно.

Каждая структура имеет один самый верхний элемент (элемент 1 на приведенной диаграмме) и один самый нижний элемент (элемент 6 на приведенной диаграмме). Когда структура изображает возможные упрощения некоторой машины, то самый верхний элемент соответствует машине, в которой различаются все состояния; это соответствует знаниям экспериментатора, отмечающего все возможные различия между состояниями машины. Самый нижний элемент соответствует машине, в которой все состояния слиты в одно состояние; если это состояние обозначить через Z, то единственным преобразованием машины будет

$$\downarrow \begin{matrix} Z \\ Z \end{matrix}.$$

Это преобразование замкнуто, так что *нечто* продолжает существовать (§ 10/4). Наблюдатель, обладающий лишь такой способностью различения, может сказать о машине: «Она продолжает существовать», — но не более. Такое продолжение существования является, конечно, наиболее рудиментарным свойством машины, отличающим ее от того, что мгновенно исчезает. (Теперь мы можем оценить значение «замкнутости», подчеркивавшееся в предшествующих главах. Замкнутость соответствует интуитивному пониманию того, что всякий объект, рассматриваемый как машина, должен, по крайней мере, продолжать существовать.)

Между двумя этими крайностями размещаются в естественном и строгом порядке разные другие упрощения. Ближе к вершине расположены те, которые лишь незначительно отличаются от полной истины. Ближе к самому нижнему элементу расположены упрощения наиболее грубого типа. К последним относится, например, упрощение, посредством которого целая экономическая система, проходящая через промышленный цикл и включающая огромное количество взаимодействующих частей, сводится к простой форме с двумя состояниями:



Таким образом, *различные упрощения динамической системы могут быть упорядочены и соотнесены.*

6/16. *Модели.* Теперь мы можем яснее видеть, что понимается под «моделью». Об этом уже говорилось в § 6/8, где был установлен изоморфизм трех рассмотренных нами систем и вытекающая отсюда способность их изображать друг друга. Указанный вопрос имеет немалое значение для тех, кто работает с биологическими системами, ибо во многих случаях использование модели может принести пользу: модель помогает исследователю думать о данном предмете либо действует в качестве аналогового вычислительного устройства.

Модель редко бывает изоморфна биологической системе; обычно она лишь гомоморфна ей. Но и сама модель редко рассматривается во всех своих практических деталях: обычно лишь некоторые *аспекты* модели соотносятся с биологической системой. Например, оловянная мышь может быть удовлетворительной моделью живой мыши, если только не обращать внимания на то, что одна состоит из олова, а другая — из белка. Таким образом, обычно получается, что две системы — биологическая и модель — связаны между собой так, что некоторый гомоморфный образ одной из них изоморфен некоторому гомоморфному образу другой. (Это отношение симметрично, так что каждая из обеих систем может быть названа «моделью» другой.) Чем выше расположены гомоморфные образы в структурах своих систем, тем лучше и реалистичнее будет модель.

Здесь наше введение в кибернетику должно закончить рассмотрение гомоморфизмов. Было сказано достаточно, чтобы показать основные положения этого раздела и наметить линии его развития. Но само это развитие принадлежит будущему.

Упр. 1. Что это за случай, когда изоморфны самые верхние элементы двух структур?

Упр. 2. До какой степени Гибралтарская скала является моделью мозга?

Упр. 3. Какие модели для системы из упр. 6/13/2 может дать машина

$$\downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ q & r & r \end{matrix} ?$$

ОЧЕНЬ БОЛЬШОЙ «ЯЩИК»

6/17. В предшествующих параграфах было показано, что свойства, обычно приписываемые машинам, могут приписываться и «черным ящикам». Фактически в повседневной жизни мы гораздо чаще имеем дело с «черными ящиками», чем это кажется. Поначалу мы склонны думать, например, что велосипед не является «черным ящиком», поскольку мы можем видеть в нем каждое связующее звено. Однако мы заблуждаемся. Последними промежуточными звеньями между педалью и колесом являются атомные силы, удерживающие вместе частицы металла; их мы вовсе не видим, и ребенку, который учится ездить на велосипеде, достаточно просто знать, что нажим на педали заставляет колеса вращаться.

Чтобы подчеркнуть, что теория «черных ящиков» практически совпадает с теорией повседневной жизни, заметим, что если наблюдатель изучил некоторое множество «черных ящиков», то он может соединять их друг с другом в *заранее запроектированные* машины. Метод, которым он должен руководствоваться, очень прост: когда изучение каждого «ящика» дало его каноническое представление (§ 6/5), их можно соединить входами к выходам и образовать новые системы в точности так, как описано в § 4/8.

Мы хотим сказать здесь не то, что «черные ящики» ведут себя до некоторой степени подобно реальным объектам, но что все реальные объекты фактически являются «черными ящиками» и что мы фактически всю нашу жизнь оперируем с «черными ящиками». Теория «черного ящика» есть просто теория реальных объектов или систем, в которой уделяется особое внимание вопросу о взаимосвязи объекта и наблюдателя, вопросу о том, какая информация исходит от объекта и как она получается наблюдателем. Таким образом, теория «черного ящика» есть попросту изучение отношения между экспериментатором и окружающей его средой, когда особое внимание уделяется потоку информации. «Таким образом, изучение реального мира сводится к изучению преобразователей» (Голдман, «Теория информации»).

6/18. Прежде чем двигаться дальше, следует выяснить вопрос о так называемых «эмерджентных» свойствах.

Прежде всего установим следующий факт. Если дано некоторое количество «черных ящиков» и каждый из них изучается отдельно до тех пор, пока не будет получено его каноническое представление, а затем они соединяются известными связями по известному образцу, то отсюда вытекает (§ 4/8), что поведение целого детерминированно и может быть предсказано. Следовательно, в этих условиях совокупность «черных ящиков» не обнаружит никаких «эмерджентных» свойств, т. е. свойств, которые не могут быть предсказаны на основе знания частей и способа их соединения.

Понятие «эмерджентности» никогда не определялось точно, но следующие примеры, вероятно, могут послужить основой обсуждения:

(1) Аммиак есть газ, и хлористый водород — тоже газ. Когда эти газы соединяются, образуется твердое тело. Твердость является свойством, которым не обладал ни один из реагентов.

(2) Углерод, водород и кислород все практически не имеют вкуса, но некоторое их соединение — «сахар» — имеет характерный вкус, которым не обладает ни один из них.

(3) Двадцать (или около того) аминокислот в бактерии по отдельности не обладают свойством «самовоспроизведения», однако их совокупность — с добавлением некоторых других веществ — имеет это свойство.

Если детально сравнить эти примеры с процессами изучения и соединения «черных ящиков», то нетрудно видеть, что в указанных примерах предполагается значительно меньшее знание о частях систем, чем в случае «черных ящиков». Так, предсказание относительно аммиака и хлористого водорода основывается лишь на знании того, что каждое из этих веществ — газ. Аналогично относительно каждой из двадцати аминокислот спрашивается только: «Является ли она самовоспроизводящейся?» Если бы каждая аминокислота рассматривалась как «черный ящик», то исследование ее было бы гораздо более подробным. Входом молекулы является множество электрических и механических сил, взятых во всех сочетаниях и комбинациях, в которых они могут воздействовать на нее; выходом молекулы является множество всех состояний, электрических и механических, в которых она может находиться. Если бы это полное знание было доступным, то метод § 4/8 показал бы, как может быть предсказано поведение группы соединенных аминокислот. При этом в числе предсказанных процессов поведения было бы и самовоспроизведение целого.

Мы увидим, что предсказание поведения целого может быть основано на полном или неполном знании частей. Если это знание полно, то мы имеем случай «черного ящика», каноническое представление которого известно; при этом все его входы или условия являются такими, которые могут быть даны другими «ящиками», соединенными с ним. Когда знание частей столь полно, предсказание тоже может быть полным и никакие свойства сверх предсказанных не могут внезапно возникнуть («эмерджировать»).

Часто, однако, наше знание по различным причинам не является полным. Тогда предсказание должно делаться на основе неполного знания и может оказаться ошибочным. Иногда о частях известно только, что каждая из них имеет некоторую одинаковую характеристику. Тогда может случиться, что единственным способом предсказания будет простая экстраполяция — предсказание, что целое также будет иметь эту характеристику. Иногда такая экстраполяция оправдывается; например, если целое состоит из трех частей, каждая из чистой меди, то мы будем правы, предсказав, что целое также состоит из чистой меди. Но часто этот метод оказывается неудачным. И тогда мы можем, если хотим, назвать новое свойство «эмерджентным». Когда система становится большой и различие в размерах между частью и целым делается значительным, очень часто действительно случается, что свойства целого сильно отличаются от свойств частей. Особенно резко это различие проявляется в биологических системах. Поэтому мы не должны ожидать, что свойства целого будут всегда воспроизводить свойства частей, и наоборот.

Упомянутые примеры с хлористым аммонием и сахаром просты, но встречаются и более сложные случаи. Рассмотрим, например, понятие «локализации» некоторой функции в системе. Легко может случиться, что исследование в крупном масштабе даст совсем иной ответ, чем исследование в мелком масштабе. Пусть, например, спрашивается, локализованна ли английская пивоваренная промышленность. Акцизный сборщик, знающий каждое здание в своем районе, независимо от того, относится ли оно к пивоваренному делу или нет, скажет, что пивоварение, несомненно, «локализованно». С другой стороны, картограф, изготовляющий карту Англии, не имеет возможности отметить какое-либо отдельное графство как область пивоварения и потому скажет, что пивоварение не локализованно. Конечно, каждый из них прав. Противоречие возникает потому, что когда различие размеров велико, то́, что истинно на одном конце масштаба, может быть ложным на другом конце.

Другим примером того, сколь противоречивыми могут быть свойства, взятые в разных масштабах, может служить обыкновенный кусок резины. Специалисты по физической химии годами старались отыскать, что же заставляет молекулу всегда сжиматься после растяжения. Затем они обнаружили, что совершали именно ту ошибку, от которой должен предостеречь настоящий параграф. Теперь известно, что молекула каучука не обладает никакой внутренне присущей ей сжимаемостью; растяните одну молекулу и отпустите — ничего не произойдет! Почему же резина сжимается? Суть в том, что «растягивать резину» не значит «растягивать *одну* молекулу»; молекулы, когда их больше чем одна, сталкиваются друг с другом и тем самым заставляют большинство принимать длину меньше максимальной. Результатом является сокращение, точно так же, как на переполненном пляже концы протянутой по земле веревки в 50 футов длины через несколько минут будут гораздо ближе друг от друга, чем на 50 футов.

Вряд ли необходимы дальнейшие примеры, ибо наша цель здесь чисто отрицательная — показать, что в случае большой системы не существует никакой априорной необходимости в том, чтобы свойства целого были простой копией свойств отдельных частей. (В § 7/3 приводятся некоторые другие примеры.)

6/19. С увеличением системы основной метод ее изучения (§ 6/3) становится все более трудным для применения. В конце концов количество необходимого труда становится необъятным. Что тогда должен делать наблюдатель? Этот вопрос имеет огромную важность в биологических науках — как в зоологических, так и в социологических, — ибо величина и сложность изучаемых в них систем действительно очень велика.

Та же самая трудность встречается и в других науках. Так, хотя ньютоновская теория в принципе решила все проблемы тяготения, применение ее к трем телам весьма сложно, а к шести телам — чересчур трудоемко для практического осуществления. Однако астрофизики хотели бы задавать вопросы о поведении звездных скоплений с 20 000 членов! Что тут можно сделать?

Опыт показал, что в подобных случаях ученый должен быть очень осторожен в отношении задаваемых им вопросов. Он должен спрашивать о том, что ему *действительно* нужно знать, а не о том, что ему кажется нужным знать. Так, начинающий скажет просто, что ему нужно знать, как будет вести себя скопление, т. е. знать траектории всех его членов. Однако, если бы эти сведения действительно были ему даны, они имели бы форму многих томов, заполненных числовыми таблицами, и тогда бы он понял, что на самом деле ему вовсе не нужно всего этого. Осмысленный вопрос в действительности обычно бывает довольно простым, например: «Сожмется ли это скопление в шар или вытянется в диск?»

Физики, начиная с Пуанкаре, достаточно развили метод решения таких вопросов — метод топологии. С его помощью можно давать точные ответы на простые вопросы, избегая сложностей, которые бы просто захлестнули наблюдателя.

Аналогичный метод в применении к сложным дифференциальным уравнениям дает возможность выводить наиболее важные свойства решений, когда получение полных решений было бы чрезмерно сложным. Это так называемая теория «устойчивости» дифференциальных уравнений.

Здесь для нас важно лишь отметить, что подобные методы существуют. Этим предполагается, что если «черный ящик» (такой, как мозг) содержит слишком много переменных для практического исследования его во всех подробностях, то кибернетически настроенный психолог может придумать «топологический» подход, с помощью которого он, не утопая в бесполезных деталях, сумеет получить ту информацию, которая ему действительно нужна (а не ту, о которой он думает, что она ему нужна!). Левин [1] пытался создать такую психологию, но в 30-х годах топология была еще недостаточно развита, чтобы служить полезным орудием. Однако в 50-х годах она стала значительно более развитой, особенно в той форме, в которой она излагалась в работах французской школы, выходящих под псевдонимом «Николя Бурбаки». По крайней мере перед нами открылась возможность существования психологии одновременно строгой и практической.

---

[1] Курт Левин (род. 1890) — немецкий психолог, один из основателей гештальтпсихологии. — *Прим. перев.*

НЕПОЛНОСТЬЮ НАБЛЮДАЕМЫЙ «ЯЩИК»

6/20. До сих пор в этой главе мы принимали, что наблюдатель «черного ящика» обеспечен необходимыми средствами для наблюдения всего, что относится к состоянию «ящика», напоминая этим инженера в корабельной рубке (§ 6/2), имеющего перед собой полный набор циферблатов. Однако часто дело обстоит не так: часть циферблатов спрятана или отсутствует. Поэтому важный раздел теории «черного ящика» занимается выяснением тех особенностей, которые возникают, когда наблюдатель может наблюдать лишь некоторые компоненты всего состояния.

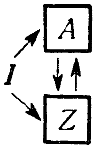
Связанные с этим теоретические проблемы велики и мало исследованы. Разработка их почти наверняка будет иметь большое значение для психологии. Ведь для психолога индивидуальный субъект, будет ли это больной с неврозом или крыса в лабиринте, остается большей частью неполностью наблюдаемой системой, так как происходящее в мозгу субъекта недоступно непосредственному наблюдению в клинических или экспериментальных условиях.

Следует отметить, что коль скоро некоторые из переменных становятся ненаблюдаемыми, «система», представленная оставшимися переменными, может обнаруживать замечательные и даже чудесные свойства. Общеизвестным примером этого являются фокусы, которые (по видимости) приближаются к чуду, просто потому, что не все существенные переменные наблюдаемы. Возможно, что некоторые из «чудесных» свойств мозга — способность «предвидеть», «разумность» и т. д. — чудесны лишь постольку, поскольку мы пока еще не можем наблюдать все его существенные переменные.

6/21. Рассмотрим следующий пример серьезного изменения во мнении наблюдателя относительно некоторого объекта после того, как часть объекта стала недоступной непосредственному наблюдению.

Предположим, что наблюдатель изучает «черный ящик», состоящий из двух взаимодействующих частей A

и Z. На обе части воздействует общий вход I (отметим, что входами A являются I и Z).



Предположим, что вопрос заключается в том, обнаруживает ли часть A некоторое характерное поведение B (т. е. следует ли A траектории B). Предположим, что это происходит только при одновременном выполнении двух условий:

1) I находится в состоянии α;
2) Z находится в состоянии y.

Предположим, что Z находится в состоянии y только *после того, как* I имело особое значение μ.

Мы (автор и читатель) всеведущи, ибо мы знаем все относительно данной системы. Посмотрим, используя это полное знание, каким образом два наблюдателя (первый и второй) могут прийти к различным мнениям, если они имеют различные возможности наблюдения.

Подобно нам, первый наблюдатель может видеть значения как A, так и Z. Он изучает различные комбинации, которые могут вызвать появление B, и делает вывод, что B появляется тогда, когда Z находится в состоянии y, а I — в состоянии α. Таким образом, когда вход находится в состоянии α, наблюдатель связывает появление B с тем, находится ли Z в данный момент в состоянии y.

Второй наблюдатель находится в менее выгодном положении: он может видеть только I и A, но не Z. Он обнаружит, что знания состояний A и I недостаточно, чтобы позволить ему предсказать с уверенностью, будет ли иметь место B (ибо Z иногда будет в y, а иногда в другом состоянии). Если, однако, второй наблюдатель обратит внимание на *более ранние* состояния I, то он обнаружит, что может точно предсказать появление B. Ибо появление B возможно в том и только в том случае, когда I последовательно принимало значения μ, α, Таким образом, когда вход находится в состоянии α, наблюдатель связывает появление B с тем, имело ли раньше I значение μ.

Таким образом, второй наблюдатель, не будучи способен наблюдать Z непосредственно, может тем не менее сделать всю систему предсказуемой, *приняв во внимание более ранние значения того, что он* может *наблюдать*. Причиной этого является существование соответствия:

$$I \text{ в } \mu \text{ раньше} \longleftrightarrow Z \text{ в } y \text{ теперь},$$

$$I \text{ не в } \mu \text{ раньше} \longleftrightarrow Z \text{ не в } y \text{ теперь}.$$

Поскольку это соответствие взаимно однозначно, информация о состоянии I на шаг раньше и информация о текущем состоянии Z *эквивалентны* и каждая может быть подставлена вместо другой, ибо знать одно значит знать другое.

Если первый и второй наблюдатель обладают сварливым характером, они теперь могут поспорить. Первый наблюдатель может утверждать, что система не обнаруживает никакой «памяти», т. е. что ее поведение не требует никаких ссылок на прошлое, ибо появление поведения B полностью объясняется *текущим* состоянием системы (I, A и Z). Второй наблюдатель может отрицать это, указывая, что система, состоящая из I и A, может считаться детерминированной только в том случае, если принять во внимание прошлые значения I, т. е. если использовать некоторую форму «памяти».

Ясно, что нам не приходится примыкать ни к одной из сторон. Первый и второй наблюдатели говорят о разных системах (об $I+A+Z$ и об $I+A$), и потому не удивительно, что они могут высказывать различные утверждения. Здесь мы должны отметить лишь то, что второй наблюдатель использует обращение к «памяти» как возмещение своей неспособности наблюдать Z.

Таким образом, мы получаем общее правило: *если детерминированная система наблюдаема лишь частично и потому становится (для данного наблюдателя) непредсказуемой, то наблюдатель может оказаться способным восстановить предсказуемость, приняв во внимание прошлую историю системы, т. е. допустив существование в ней некоторого рода «памяти».*

Это рассуждение, разумеется, является общим и может с таким же успехом применяться и там, где особое, более раннее событие μ случилось не на один, а на несколько шагов раньше. Вообще, если ранние события E_1, E_2, . . ., E_k оставили соответственно следы T_1, T_2, . . ., T_k, которые продолжают сохраняться, и если поведение остальной части системы принимает затем формы B_1, B_2, . . ., B_k в зависимости от значений T, то различные формы поведения могут быть объяснены либо

1) *текущим* состоянием T, когда нет никакой нужды в обращении к «памяти» любого рода, либо

2) *прошлым* значением E, когда наблюдателю приходится постулировать в системе некоторую форму «памяти».

Таким образом, *наличие «памяти» не является вполне объективным свойством системы;* это свойство есть отношение между системой и наблюдателем и изменяется с изменением канала связи между ними.

Таким образом, обращение к «памяти» в системе как к объяснению поведения системы равносильно признанию невозможности наблюдать систему полностью. Свойства «памяти» являются свойствами не простой «вещи», а более тонкого понятия — «кодирования».

**Упр.* 1. Докажите утверждение («Устройства мозга», § 19/22), что в абсолютной системе мы можем избежать прямых ссылок на некоторые из переменных, если вместо них мы используем производные остальных переменных.

**Упр.* 2. Докажите то же самое относительно уравнений в конечных разностях.

**Упр.* 3. Покажите, что если система имеет n степеней свободы, то, вообще говоря, мы должны иметь по крайней мере n наблюдений типа «в момент t_i переменная x_i имела значение X_i», чтобы можно было предсказать последующее поведение.

6/22. Наглядным примером того, как наличие «памяти» связано с наблюдаемостью частей, служит цифровая вычислительная машина с магнитной лентой. Предположим для простоты, что в определенный момент машина выдает 1 или 2 в зависимости от того, намагничена ли лента в определенной точке соответственно положительно или отрицательно; процесс намагничивания произошел, скажем, десять минут назад, и знак намагничивания

(+ или —) зависит соответственно от того, замкнул ли обслуживающий машину оператор некоторый переключатель или нет. Таким образом, существует соответствие:

$$\text{переключатель замкнут} \longleftrightarrow + \longleftrightarrow 1,$$
$$\text{переключатель разомкнут} \longleftrightarrow - \longleftrightarrow 2.$$

Наблюдатель, который видит магнитную ленту в настоящий момент, может сказать, что любая ссылка на прошлое излишня, ибо он может объяснить поведение машины (выдаст она 1 или 2) ее теперешним состоянием, установив, что несет лента *теперь*. Например, знать, что лента несет теперь +, достаточно для предсказания, что следующее состояние машины будет 1.

С другой стороны, наблюдатель, который не может видеть ленту, может предсказать поведение машины только сославшись на то, что произошло с контактом десять минут назад. Он будет настаивать на том, что машина имеет «память».

Эти два наблюдателя в действительности не противоречат друг другу, в чем мы сразу убедимся, когда поймем, что они говорят о двух не тождественных «машинах». Первый наблюдатель понимает под «машиной» систему «вычислительное устройство + лента + переключатель», второй наблюдатель — систему «вычислительное устройство + переключатель». *Они говорят о разных системах.* (Еще раз подчеркнем, что в сложных системах простого указания на материальный объект недостаточно для точного определения рассматриваемой системы.) (Ср. § 6/14, 12/9.)

По существу то же самое различие может иметь место и в биологической системе. Так, предположим, что я нахожусь в доме своего знакомого. Когда мимо дома проезжает автомобиль, собака моего знакомого забивается в угол комнаты и съеживается. Для меня ее поведение беспричинно и необъяснимо. Но вот мой знакомый говорит: «Шесть месяцев назад ее переехал автомобиль». Теперь ее поведение объясняется ссылкой на происшествие шестимесячной давности. Если мы скажем, что собака обнаруживает «память», мы просто сошлемся на тот же самый факт, что ее поведение может быть объяснено не ее текущим состоянием, а ее состоянием шесть месяцев тому назад. Человек, невнимательный к выбору слов, скажет, что собака «имеет» память, и будет думать о собаке как об *имеющей* некую *вещь*, подобно тому как она могла бы иметь клок черной шерсти. А затем он может попытаться найти эту вещь, и тогда вдруг обнаружится, что эта «вещь» имеет весьма любопытные свойства.

Итак, «память» не является чем-то объективным, чтó система может иметь или не иметь; это всего лишь понятие, которое *наблюдатель* вводит, чтобы заполнить пустоту, образующуюся, когда часть системы недоступна наблюдению. Чем меньше наблюдаемых переменных, тем больше вынужден наблюдатель привлекать прошлые события для объяснения поведения системы. Таким образом, «память» в мозгу объективна лишь отчасти. Неудивительно, что ее свойства иногда оказываются необычными или даже парадоксальными. Ясно, что этот вопрос требует повторного тщательного рассмотрения, начиная с исходных принципов.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

РАЗНООБРАЗИЕ

Тогда солдат понял, что за чудодейственное у него огниво. Ударишь по кремню раз — является собака, что сидела на сундуке с медными деньгами; ударишь два — является та, что сидела на серебре; ударишь три — прибегает та, что сидела на золоте.

Андерсен, „Огниво"

ГЛАВА 7

Количество разнообразия

7/1. Обсуждая в первой части основные свойства машины, мы обычно рассматривали ее как действительную вещь, о которой можно делать определенные утверждения, со ссылкой на то, что она делает здесь и сейчас. Однако, чтобы продвигаться вперед в кибернетике, мы должны расширить область нашего рассмотрения. На основные вопросы, касающиеся регулирования и управления, мы сможем ответить только тогда, когда мы будем рассматривать также и все то, что машина *могла бы* делать; при этом выражение «могла бы» должно получить некоторое точное определение.

Таким образом, всюду во второй части мы будем рассматривать *некоторое множество* возможностей. Это исследование приведет нас к вопросам об информации и связи и о том, как информация кодируется, проходя через механизмы. Это исследование весьма существенно для полного понимания вопросов регулирования и управления. Мы начнем с простейших, самых начальных соображений.

7/2. Другая причина рассмотрения *множества* возможностей заключается в том, что науку мало интересуют факты, которые достоверны только для данного отдельного эксперимента, выполненного в данный отдельный день; она ищет обобщений, ищет высказываний, которые были бы истинны для каждого из целого множества экспериментов, проводимых в различных лабораториях при различных условиях. Открытие Галилеем закона движения маятника представляло бы мало интереса, если бы оно было достоверно только для того самого маятника в тот самый день. Своим огромным значением это открытие обязано именно тому, что оно истинно для обширной области времени, пространства и материалов. Наука ищет повторяющееся (§ 7/15).

7/3. Тот факт, что в науке речь идет всегда о *множестве*, часто затемняется манерой выражаться. «Ион хлора...» — говорит лектор, явно имея в виду, что его высказывание приложимо ко всем ионам хлора. Точно так же мы слышим высказывания о бензиновом двигателе, о растущем ребенке, о хроническом пьянице и о других предметах в единственном числе, когда на самом деле речь идет о множестве всех подобных объектов.

Иногда случается, что некоторое высказывание одинаково истинно и в применении к индивиду, и в применении к множеству, например: «Слон ест с помощью хобота». Но привычный характер такой двойной применимости не должен заслонять от нас того факта, что некоторые типы высказываний применимы только к множеству (или только к индивиду) и становятся источником заблуждений и путаницы, если применяются к индивиду (соответственно к множеству). Так, грамм газа — йодистого водорода — вполне может в некоторый данный момент быть ионизированным на 37%. Но это высказывание не должно относиться к отдельным молекулам, которые либо полностью ионизированы, либо совсем не ионизированы; то, что истинно относительно множества, ложно относительно индивидов. Далее, депутаты от консервативной партии имеют в данный момент большинство в парламенте; в применении же к индивидуальному депутату это высказывание бессмысленно. Далее, автомобильная шина, рассматриваемая как целое, вполне может двигаться на запад со скоростью 8 *км/час*; но часть ее, соприкасающаяся с дорогой, неподвижна, тогда как верхушка ее движется на запад со скоростью 160 *км/час*. В действительности ни одна часть шины не ведет себя так, как шина в целом.

Далее, двадцать миллионов женщин вполне могут иметь тридцать миллионов детей, но лишь с помощью опасного искажения языка можем мы сказать, что у средней женщины полтора ребенка. Так можно иногда говорить, не опасаясь путаницы, только потому, что те, кто должен действовать, например строить школы для детей, хорошо знают, что полребенка — это не какой-то чудовищный урод, а миллионное множество детей.

Примем поэтому за основу, что высказывание о **множестве** может быть как истинно, так и ложно (или даже бессмысленно) в применении к **элементам** множества.

Упр. Следующие высказывания относятся к «коту», и притом либо к виду Felis domestica, либо к соседскому коту. Рассмотрите применимость каждого из этих высказываний, во-первых, к виду и, во-вторых, к индивиду:

1. Ему миллион лет.
2. Он самец.
3. В настоящее время он имеется на всех континентах.
4. Он дерется со своими братьями.
5. Около половины его — самки.
6. Он близок к Ursidae.

7/4. *Вероятность.* Приведенное упражнение показывает, какие нелепости и путаница могут получиться, если понятия, относящиеся к множеству (к индивиду), неправильно применяются к индивиду (к множеству). Ярким примером этого является случай, когда из целого множества данным свойством обладает только некоторая доля элементов. Так, из 100 мужчин в деревне 82 могут быть женаты. Дробь 0,82, конечно, относится к множеству, но не имеет никакого смысла в применении к каждому индивиду, ибо каждый индивид либо женат, либо нет. Исследуйте как можно внимательнее любого мужчину, и вы не найдете в нем ничего похожего на «0,82»; и если он перейдет в соседнюю деревню, это число может измениться, хотя сам человек вовсе не изменится. Очевидно, что «0,82» — это свойство деревни, а не индивида.

Тем не менее иногда оказывается удобным принять, что эта дробь имеет значение и для индивида; тогда можно сказать, что любое отдельное лицо имеет «вероятность» 0,82 быть женатым. Такое словоупотребление безвредно, если только не забывать, что это высказывание, хотя в нем явно идет речь об индивиде, в действительности является высказыванием о деревне. Стоит лишь забыть об этом, как появится множество парадоксов, столь же бессмысленных и глупых, как и попытка обучать «полребенка». Позднее (в гл. 9) мы будем употреблять понятие вероятности совместно с понятием машины; происхождение и действительная природа этого понятия должны постоянно иметься в виду.

7/5. *Связь.* Понятие *множества* играет существенную роль также и в области «связи», особенно в теории, развитой Шенноном и Винером. Первоначально, когда мы думаем, например, о получении телеграммы, мы замечаем только единственность этой *одной* телеграммы. Тем не менее акт «связи» необходимо предполагает наличие *множества* возможностей, т. е. более чем одной возможности, как мы убедимся на следующем примере.

Заключенного должна посетить жена, однако ей не разрешается передавать ему никаких сообщений, даже самых простых. Можно подозревать, что они заранее, еще до ареста, договорились о каком-то простом коде. При посещении она просит разрешения послать мужу чашку кофе. Если передача напитков не запрещена, как может тюремщик добиться того, что с помощью этой чашки не будет передано никакого закодированного сообщения? Он знает, что жена хочет сообщить мужу, захвачен ли или нет один из его сообщников.

Тюремщик будет рассуждать примерно следующим образом: «Может быть, она условилась сообщить ему об этом, послав либо сладкий, либо несладкий кофе, — тогда я могу помешать им, добавив в кофе побольше сахару и сказав об этом заключенному. Может быть, она условилась сообщить ему об этом, послав или не послав ложку, — тогда я могу помешать им, изъявши ложку и сообщив ему, что передача ложек воспрещается правилами. Она может сообщить ему об этом, послав чай вместо кофе... — нет, не может! Они знают, что в это время дня в столовой выдается только кофе». Так он рассуждает и дальше; здесь примечательно то, что интуитивно он стремится пресечь всякую возможность связи, сводя все возможности к одной — всегда с сахаром, всегда без ложки, только кофе и т. д. Коль скоро все возможности сведены к одной, связь прервана и посылаемый напиток лишен способности передавать информацию. Таким образом, передача (и хранение) информации существенно связаны с наличием некоторого *множества* возможностей. Наш пример как будто делает это утверждение правдоподобным. В действительности оно обосновывается всей работой в области современной теории связи; эта работа достаточно ясно показала, сколь существенно и сколь плодотворно понятие о множестве возможностей.

Таким образом, связь необходимо требует множества сообщений. Более того, информация, передаваемая отдельным сообщением, зависит от того множества, из которого оно выбрано. *Передаваемая информация не является внутренним свойством индивидуального сообщения.* В этом можно убедиться на следующем примере. Два солдата находятся в плену в двух вражеских странах: один в стране A, другой в стране B; их жены получают каждая по краткому сообщению: «Я здоров». Однако известно, что в стране A пленный может выбирать между сообщениями:

Я здоров,
Я слегка болен,
Я серьезно болен;

в стране же B разрешается отправлять только сообщение:

Я здоров,

означающее: «Я жив». (В множество возможностей входит также возможность «отсутствия сообщений».) Обе женщины будут, конечно, понимать, что хотя каждая из них получила одинаковую фразу, полученная ими информация отнюдь не тождественна.

Из этих соображений следует, что в данной книге мы не должны думать (как мы это делаем в качестве отдельных лиц) об «этом сообщении». Мы должны стать учеными, обособиться и думать о «людях, получающих сообщения». А это значит, что мы должны перенести наше внимание с любого отдельного сообщения на множество всех возможностей.

РАЗНООБРАЗИЕ

7/6. Во всей второй части мы будем много заниматься таким вопросом: «Дано множество; сколько различимых элементов оно содержит?» Так, если порядок, в котором расположены элементы, игнорируется, то множество

$$c, b, c, a, c, c, a, b, c, b, b, a,$$

содержащее двенадцать элементов, содержит только три *различных* элемента: a, b и c. О таком множестве будет говориться, что оно имеет **разнообразие** в три элемента. (Относительно этого понятия см. следующий параграф.)

Хотя такой подсчет может показаться простым, необходимо соблюдать осторожность. Например, в семафоре с двумя крыльями каждое крыло может занимать, независимо от другого, одно из восьми положений; следовательно, два крыла обеспечивают 64 комбинации. Однако на некотором расстоянии крылья не различаются: нельзя отличить случай «крыло A поднято, а крыло B опущено» от случая «крыло A опущено, а крыло B поднято». Поэтому удаленный наблюдатель может различать только 36 положений, и разнообразие равно не 64, а 36. Следует отметить, что разнообразие множества не является его внутренним свойством: бывает, что для точного определения разнообразия нужно указать наблюдателя и его способность различения.

Упр. 1. Сколько трехбуквенных комбинаций для автомобильных номеров можно получить, имея в распоряжении 26 букв английского алфавита?

Упр. 2. Фермер может различать 8 выводков цыплят, но не может разделить их по полу. Его жена различает пол цыплят, но ничего не знает о выводках. Сколько различных классов цыплят могут они различить вместе?

Упр. 3. Шпион находится в доме с четырьмя окнами, расположенными в форме прямоугольника. Он должен сигнализировать ночью в море, зажигая или не зажигая свет в каждом окне. Сколько он может подавать различных сигналов, если в темноте нельзя воспринять положение огня относительно дома?

Упр. 4. Бактерии различных видов различаются по способности разрушать различные вещества; например, лактозу разрушает Enterobium coli, но не Enterobium typhi. Пусть бактериолог имеет десять веществ, каждое из которых либо может, либо не может быть разрушено данным видом бактерий. Какое максимальное число видов может он различить?

Упр. 5. Пусть каждая процедура установления личности позволяет различить пять степеней той характеристики, которая устанавливается этой процедурой. Каково наименьшее число таких процедур, необходимое для различения 2 миллиардов человек, составляющих население земного шара?

Упр. 6. В общеизвестном карточном фокусе фокусник следующим образом отгадывает карту: он показывает 21 карту зрителю, который задумывает одну из карт, не говоря фокуснику о своем выборе. Затем фокусник делит карты на три равные части, раскладывает их перед зрителем лицевой стороной вверх, чтобы зритель мог их видеть, и просит его указать, в какой части находится задуманная им карта. Затем фокусник собирает карты, снова раскладывает их на три равные части и спрашивает, в какой из них находится задуманная карта; и то же самое в третий раз. Затем фокусник называет задуманную карту. Каково разнообразие: (I) в указаниях зрителя; (II) в окончательном выборе фокусника?

Упр. 7. (Продолжение.) В этом фокусе можно брать больше чем 21 карту. Каково их максимальное число, если прочие условия не изменяются?

Упр. 8. (Продолжение.) Сколько раз должен зритель показывать, в какой части находится задуманная карта, чтобы фокусник мог выбрать ее из всей колоды в 52 карты?

Упр. 9. Если группа крови ребенка О и группа крови его матери О, каково разнообразие групп крови его возможных отцов?

7/7. Следует отметить, что многие упражнения включали нахождение произведений и степеней. Такие вычисления часто облегчаются использованием логарифмов. Предполагается, что читателю известны их основные свойства; но одну формулу мы приведем для ссылок. Если у нас имеются только таблицы логарифмов по основанию a, а мы хотим найти логарифм какого-нибудь числа N по основанию b, то

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

В частности, $\log_2 N = 3{,}322 \log_{10} N$.

Слово **разнообразие**, в применении к множеству различимых элементов, будет употребляться в двух смыслах: 1) как число различных элементов; 2) как логарифм этого числа по основанию 2. Контекст каждый раз будет указывать предполагаемый смысл. Когда разнообразие измеряется в логарифмической форме, единицей ее является «бит» («bit») — сокращение от «BInary digiT» («двоичный разряд»). Так, разнообразие полов равно 1 биту, а разнообразие 52 игральных карт равно 5,7 бита, так как $\log_2 52 = 3{,}322 \cdot \log_{10} 52 = 3{,}322 \cdot 1{,}7160 = 5{,}7$. Основным преимуществом этого способа подсчета является то, что операции с умножением могут теперь выполняться простым сложением. Так, в упр. 7/6/2 фермер может различать разнообразие в 3 бита, его жена — разнообразие в 1 бит, а вместе они различают разнообразие в $3+1$ бит, т. е. в 4 бита.

Сказать, что множество не имеет «никакого» разнообразия, что все его элементы — одного типа, значит по существу измерить его логарифмически; ведь логарифм единицы есть нуль.

Упр. 1. Какое разнообразие бактерий в битах отличает каждое вещество в упр. 7/6/4?

Упр. 2. В упр. 7/6/5: (I) какое разнообразие в битах различается каждой процедурой? (II) чему равно в битах разнообразие двух миллиардов различимых индивидов?

Упр. 3. Чему равно в битах разнообразие 26 букв английского алфавита?

Упр. 4 (Продолжение.) Чему равно в битах разнообразие комбинаций из пяти английских букв (не обязательно образующих слово)? Проверьте ответ, найдя сначала число таких комбинаций и только затем их разнообразие.

Упр. 5. На вопрос можно ответить только «да» или «нет». Найдите: (I) каково разнообразие ответа; (II) двадцати таких ответов, независимых друг от друга.

Упр. 6. (Продолжение.) Сколько объектов может быть различено двадцатью вопросами, если на каждый можно отвечать только «да» или «нет»?

Упр. 7. Рассматривается замкнутое однозначное преобразование шести состояний

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{matrix},$$

где каждый вопросительный знак должен быть заменен буквой. Если в других отношениях замены не ограничены, каково разнообразие (логарифмическое) множества всех таких возможных преобразований?

Упр. 8. (Продолжение.) Каково разнообразие, если замкнутое преобразование имеет n состояний?

Упр. 9. Если английский язык имеет разнообразие в 10 битов на слово, то какую емкость запасания имеет 10-минутная речь в граммофонной записи? Скорость речи принимается равной 120 словам в минуту.

Упр. 10. (Продолжение.) Сравните эту емкость с емкостью печатной страницы газеты (приблизительно).

Упр. 11. (Продолжение.) Чтение брошюры вслух занимает 10 минут. Сравните ее разнообразие с разнообразием упомянутой граммофонной записи.

Упр. 12. Какое множество имеется в виду в предыдущем упражнении?

Упр. 13. Может ли чисто отрицательное событие — незажигание света, невозбуждение нейрона, неполучение телеграммы — использоваться для увеличения разнообразия?

ОГРАНИЧЕНИЯ РАЗНООБРАЗИЯ

7/8. В высшей степени важным понятием, которым мы позже будем много заниматься, является понятие ограничения разнообразия. **Ограничение разнообразия** есть *отношение* между двумя множествами, которое возникает, когда разнообразие, существующее при одном условии, меньше, чем разнообразие, существующее при другом условии. Например, разнообразие человеческих полов равно 1 биту. Но если в данную школу принимаются только мальчики, то разнообразие полов внутри школы равно нулю; так как 0 меньше 1, налицо ограничение разнообразия.

Другим общеизвестным примером могут служить огни английских светофоров, которые имеют по три лампы и проходят последовательность состояний (где «+» означает «горит», а «0» означает «не горит»):

	(1)	(2)	(3)	(4)	(1)	...,
Красный	+	+	0	0	+	...,
Желтый	0	+	0	+	0	...,
Зеленый	0	0	+	0	0	... .

Здесь используются четыре комбинации. Следует заметить, что в различные моменты времени красный свет может как гореть, так и не гореть; так же и желтый, и зеленый. Следовательно, если три лампы изменяют свои состояния независимо, то может появиться восемь комбинаций. В действительности же используется только четыре; поскольку четыре меньше восьми, налицо ограничение разнообразия.

7/9. Ограничение разнообразия может быть слабым или сильным. Пусть, например, взвод солдат должен быть выстроен в одну шеренгу, и пусть «независимость» означает, что они могут выстроиться в любом порядке. На разнообразие порядков построения могут быть наложены различные ограничения, отличающиеся по степени вызываемого ими уменьшения возможностей. Так, если отдан приказ, согласно которому не должны стоять рядом два человека, день рождения которых приходится на одно и то же число, то ограничение разнообразия будет слабым, ибо из всех возможных построений исключаются лишь немногие. Если, однако, отдается приказ, запрещающий становиться слева от более высокого человека, то ограничение разнообразия будет сильным: оно фактически определит единственный порядок построения (если только два человека не окажутся совершенно одинакового роста). Таким образом, интенсивность ограничения разнообразия проявляется в том, насколько оно уменьшает число возможных расположений.

7/10. По-видимому, невозможно расклассифицировать ограничения разнообразия каким-либо простым способом, ибо они включают все случаи, в которых некоторое множество, по какой бы то ни было причине, оказывается меньшим, чем оно могло бы быть. Здесь я хочу рассмотреть лишь некоторые особенно распространенные и важные типы, предоставляя читателю добавлять другие типы, если его особые интересы приведут его к ним.

7/11. *Ограничения разнообразия в векторах.* Иногда элементы множества являются векторами и имеют составляющие. Так, сигнал светофора из § 7/8 был вектором с тремя составляющими, каждая из которых могла принимать два значения. В этих случаях обычное и важное ограничение разнообразия состоит в том, что фактическое число векторов, имеющихся при данных условиях, меньше числа векторов, возможных без каких-либо условий (т. е. когда каждая составляющая принимает все значения независимо от значений других составляющих).

Так, возьмем пример с сигналами светофора. Когда красный и желтый свет оба горят, зеленый свет не может гореть, и, следовательно, вектор с горящим зеленым светом в этом случае отсутствует.

Следует заметить, что в множестве векторов имеются различные разнообразия, которые должны устанавливаться отдельно, во избежание путаницы. Рассмотрим, например, вектор из § 3/5:

(возраст автомобиля, лошадиные силы, цвет).

Первая составляющая имеет некоторое определенное разнообразие, так же как и вторая, и третья. Эти три разнообразия могут быть не равны. В свою очередь разнообразие множества векторов будет отлично от них всех.

Разнообразие множества векторов, однако, связано одним неизменным соотношением с разнообразиями составляющих; а именно, оно не может превышать их суммы (если речь идет о логарифмической мере, более удобной здесь). Так, если автомобиль может иметь один из 10 возрастов, одну из 8 мощностей и один из 12 цветов, то разнообразие типов автомобилей не может превысить $(3{,}3 + 3{,}0 + 3{,}6)$ бита, т. е. 9,9 бита.

7/12. Составляющие **независимы**, если разнообразие данного множества векторов в целом равняется сумме (логарифмических) разнообразий отдельных составляющих. Если обнаружено, например, что среди некоторого определенного множества автомобилей можно наблюдать все 960 типов автомобилей, то три составляющие будут называться «независимыми», или «изменяющимися независимо», внутри этого определенного множества.

Такое высказывание относится по существу к тому, что наблюдается внутри множества; оно не должно содержать непременно какие-либо ссылки на предполагаемую причину независимости (или ограничения разнообразия).

Упр. 1. Когда Пантагрюэль и его кружок обсуждали, не пришло ли Панургу время жениться, они обратились к советчикам, о которых было сказано следующее: «Рондибилис сейчас женат, а прежде не был женат; Гиппофадей не был женат и сейчас не женат; Бридуа был женат, а сейчас нет; а Трульоган был женат и сейчас женат». Обнаруживает ли это множество векторов ограничение разнообразия?

Упр. 2. Если каждая составляющая может быть гербом ($Г$) или решеткой ($Р$), то обнаруживает ли ограничение разнообразия множество четырех векторов $(Г, Г, Г)$, $(Р, Р, Г)$, $(Г, Р, Р)$, $(Р, Г, Р)$ по отношению к множеству, обнаруживающему независимость?

7/13. *Степени свободы.* Если некоторое множество векторов не охватывает всех возможных значений (§ 7/11), то остающуюся еще свободной область иногда можно успешно измерить, указав, сколько независимых составляющих дали бы такое же разнообразие. Это число составляющих называется **степенями свободы** данного множества векторов. Так, огни светофора (§ 7/8) имеют разнообразие, равное четырем. Если составляющие по-прежнему будут принимать каждая по два значения, то *две* составляющие смогут дать то же самое разнообразие (четыре). Таким образом, можно выразить ограничение разнообразия светофора, сказав, что три взаимозависимые составляющие дают такое же разнообразие, какое давали бы две независимые составляющие; т. е. три огня имеют две степени свободы.

Если возможны все комбинации, то число степеней свободы равно числу составляющих. Если возможна только одна комбинация, то число степеней свободы равно нулю.

Необходимо иметь в виду следующее обстоятельство. Этот способ измерения того, что остается свободным от ограничений разнообразия, применим лишь в некоторых благоприятных случаях. Так, если бы огни светофора допускали три или пять комбинаций, то эквивалент не выражался бы так просто — целым числом. Это понятие имеет значение главным образом тогда, когда составляющие изменяются непрерывно, так что каждая может иметь бесконечное число значений. Подсчет с помощью степеней свободы нередко возможен и в этом случае, хотя состояния не могут быть сосчитаны.

Упр. 1. Если торговец подержанными автомобилями хвастает, что его запас покрывает область 10 возрастов, 8 мощностей и 12 цветов во всех возможных комбинациях, то сколько степеней свободы имеет его запас?

Упр. 2. Двумя составляющими вектора являются угловые положения двух стрелок на часах. Имеет ли множество векторов (на интервале в 12 часов) ограничение разнообразия, если углы измеряются точно?

Упр. 3. (Продолжение.) Сколько степеней свободы имеет этот вектор? (Указание: вызовет ли отсутствие минутной стрелки существенную потерю?)

Упр. 4. Изменение направления осей двух движущихся глаз определяет вектор с четырьмя составляющими: верхнее и боковое отклонения правого и левого глаза. Человек обладает бинокулярным зрением; хамелеон двигает глазами независимо, причем каждый глаз отыскивает пищу на своей стороне тела. Сколько степеней свободы имеют глаза хамелеона? Глаза человека?

Упр. 5. Стрела заданной длины, лежащая на плоскости, имеет три степени свободы (две координаты определяют, скажем, положение ее центра, а один угол определяет ее направление). Сколько степеней свободы будет у нее, если добавить ограничение, что она должна всегда указывать в направлении данной точки P?

Упр. 6. T есть некоторое замкнутое однозначное преобразование, а a — любой из его операндов. Рассмотрим множество векторов, имеющих каждый по три составляющие

$$(a, T(a), T^2(a)),$$

где a принимает поочередно все свои возможные значения. Сколько степеней свободы имеет это множество?

Упр. 7. Каким образом обычный график зависимости y от x обнаруживает ограничение разнообразия?

Упр. 8. Сколько степеней свободы имеет обычное тело, например стул, в трехмерном пространстве?

ЗНАЧЕНИЕ ОГРАНИЧЕНИЙ РАЗНООБРАЗИЯ

7/14. Ограничения разнообразия имеют большое значение в кибернетике, и им будет отведено значительное место в оставшейся части книги, ибо *из наличия ограничения разнообразия обычно можно извлечь пользу.*

Работа Шеннона, обсуждаемая в основном в гл. 9, явственно демонстрирует этот тезис. Бо́льшая часть этой работы посвящена оценке разнообразия, которое имелось бы при полной независимости, выявлению ограничений разнообразия (называемых там «избыточностью») и показу того, как их наличие делает возможным более эффективное использование канала.

В следующих нескольких параграфах будут изложены некоторые примеры, свидетельствующие о широкой применимости и огромной важности этого понятия.

7/15. *Законы природы.* Прежде всего мы можем отметить, что существование любого инварианта в некотором множестве явлений подразумевает наличие ограничения разнообразия. В самом деле, существование инварианта означает ведь, что осуществляется не вся область разнообразия. Следовательно, вся теория инвариантов есть часть теории ограничений разнообразия.

Далее, так как любой закон природы подразумевает наличие некоторого инварианта, то *всякий закон природы есть ограничение разнообразия.* Так, закон Ньютона говорит, что из всего множества возможных (например, написанных на бумаге) векторов положений и скоростей планет (большее множество) в действительности встречается в небесах лишь некоторое меньшее множество; и закон указывает, какие значения будут приниматься этими величинами. С нашей точки зрения здесь важно то, что закон *исключает* многие положения и скорости планет, предсказывая, что они никогда не будут встречаться.

Наука ищет законы; поэтому она много занимается поисками ограничений разнообразия. (Здесь большее множество состоит из того, что *могло бы* случиться, если бы поведение было свободным и хаотическим, а меньшее множество состоит из того, что случается в действительности.)

Эта точка зрения, заметим, совпадает с тем, что было сказано в § 1/5. Кибернетика рассматривает всю совокупность явлений, во всей ее возможной полноте, а затем спрашивает, почему действительные события ограничиваются некоторой долей всех возможностей.

Упр. 1. Почему химический закон кратных отношений является ограничением разнообразия?

Упр. 2. Почему закон сохранения энергии является ограничением разнообразия?

7/16. *Предметы как ограничения разнообразия.* Ограничения разнообразия весьма обычны в окружающем нас мире, и многие из наших основных понятий используют их существенным образом. Рассмотрим в качестве примера фундаментальное понятие «вещи» или «предмета», как чего-то такого, с чем мы имеем дело в повседневной жизни. Стул есть вещь в силу своей связности, в силу того, что мы можем поставить его по ту или по эту сторону стола, что мы можем носить его или сидеть на нем. В то же время стул есть собрание частей.

Но любой свободный предмет в нашем трехмерном пространстве имеет шесть степеней свободы. Если бы части стула не были связаны друг с другом, то каждая из них имела бы шесть собственных степеней свободы; и фактически так и обстоит дело с частями стула на фабрике, пока он еще не собран. Следовательно, четыре ножки, взятые самостоятельно, имеют вместе 24 степени свободы. Однако, соединенные, они имеют только шесть степеней свободы, присущие единичному предмету. *Наличие* ограничения разнообразия становится очевидным, как только мы уясним себе, что если известны положения трех ножек готового стула, то из них с необходимостью вытекает положение четвертой ножки — она не имеет свободы.

Таким образом, переход от четырех отдельных и свободных ножек к одному стулу в точности соответствует переходу от наличия у множества 24 степеней свободы к наличию у него только шести степеней свободы. Таким образом, сущность того, что стул является «вещью», единством, а не собранием независимых частей, соответствует наличию ограничения разнообразия.

7/17. Рассматриваемый с этой точки зрения, мир вокруг нас оказывается чрезвычайно богат ограничениями разнообразия. Мы настолько знакомы с ними, что принимаем большинство из них как должное и часто даже не замечаем, что они существуют. Чтобы представить себе мир, лишенный своих обычных ограничений разнообразия, нам пришлось бы обратиться к волшебным сказкам или к «сумасшедшему» фильму, а ведь даже в них отсутствует лишь некоторая часть всех ограничений.

Мир без ограничений разнообразия был бы полностью хаотическим. Возможно, таким миром является бушующая река под Ниагарским водопадом, хотя физик и там обнаружил бы некоторые ограничения. Наш земной мир, к которому приспосабливаются живые организмы, отнюдь не представляет собой такого хаоса. Ниже (в § 13/5) будет предположено, что живой организм способен приспособляться лишь постольку, поскольку действительный мир ограничен в разнообразии, и не более того.

Упр. Попробуйте сосчитать в течение одной последующей минуты все ограничения разнообразия, действующие в вашем окружении.

7/18. *Предсказание и ограничения разнообразия.* Тот факт, что нечто «предсказуемо», подразумевает наличие ограничения разнообразия. Если бы, например, самолет мог в каждую секунду передвигаться из любой точки неба в любую другую его точку, то наилучшие расчеты огня зенитной артиллерии были бы бесполезными и беспомощными. Расчеты эти могут давать полезную информацию лишь постольку, поскольку самолет не может двигаться так, как сказано выше; на самом деле его движение подчинено сильным ограничениям разнообразия. Некоторые из них связаны с непрерывностью: самолет не может совершать внезапных скачков — ни в положении, ни в скорости, ни в направлении. Некоторые из ограничений связаны с особенностями типа самолета, благодаря которым один самолет ведет себя как А-10, а другой — как Z-20. Существуют ограничения разнообразия, связанные с индивидуальными особенностями пилота и т. д. Будущее положение самолета, таким образом, всегда подчинено некоторому ограничению разнообразия, и лишь до этой степени оно может быть успешно предвычислено.

7/19. *Машины как ограничения разнообразия.* Теперь можно видеть, что понятие «машины», выведенной из наблюдения некоторого протокола (§ 6/5), исходит из признания того, что *последовательность в протоколе обнаруживает в некоторой форме ограничение разнообразия*; если бы протокол не обнаруживал никакого ограничения разнообразия, то наблюдатель мог бы сказать, что протокол хаотичен и непредсказуем, как рулетка.

Если же протокол обнаруживает характерную форму ограничения разнообразия, то наблюдатель может это использовать. Он использует это, перекодируя весь протокол в более компактную форму, содержащую только:

1) формулировку преобразования и
2) формулировку фактически данного входа.

После этого рассуждение можно вести не в терминах длинного протокола, а в терминах сжатого преобразования, как мы делали это на протяжении всей первой части.

Таким образом, использование преобразования является одним из примеров того, как можно извлечь пользу из характерного ограничения разнообразия, накладываемого на поведение его «машиноподобностью».

Упр. Если протокол обнаруживает ограничение разнообразия, характерное для машины, то что исключается этим ограничением?

7/20. Внутри множества детерминированных машин могут применяться дальнейшие ограничения разнообразия. Так, множество может ограничиваться машинами, имеющими в качестве операндов определенное множество состояний; или машинами, имеющими только один бассейн; или машинами, которые неприводимы (§ 4/14).

Обычным и весьма мощным ограничением разнообразия является непрерывность. Она представляет собой ограничение разнообразия, ибо произвольно изменяющаяся функция может испытывать любые изменения, тогда как непрерывная функция может переходить за каждый шаг только в соседнее значение.

Упражнение 4 дает лишь слабое представление о силе этого ограничения разнообразия.

Упр. 1. Множество замкнутых однозначных преобразований (абсолютных систем) с тремя состояниями a, b, c имеет 27 элементов (ср. упр. 7/7/7). Сколько элементов останется, если прибавить ограничение, что абсолютная система не должна иметь состояний равновесия?

Упр. 2. (Продолжение.) То же, но ограничение состоит в том, что системы должны иметь только по одному бассейну.

Упр. 3. (Продолжение). То же, но ограничение состоит в том, что исключаются переходы $a \to b$ и $b \to c$.

Упр. 4. Вектор имеет десять составляющих, каждая из которых может принимать одно из значений 1, 2, 3, 4. Каково разнообразие этого множества векторов, если: (I) составляющие изменяются независимо (§ 7/12); (II) значения любых двух соседних составляющих могут различаться не более чем на единицу?

7/21. *Обучение и ограничение разнообразия.* Для психолога важный пример ограничения разнообразия дают процессы обучения. Павлов, например, применял в одном эксперименте тепловой и тактильный раздражители, с подкреплением мясным порошком, в следующих комбинациях:

	Тепловой	Тактильный	Подкрепление
1	+	+	+
2	+	—	—
3	—	+	+
4	—	—	—

(Четвертая комбинация, разумеется, имела место в промежутках между опытами.) Всех возможных комбинаций восемь; Павлов применял только четыре. То, что давалось не все множество возможных комбинаций, было существенной частью эксперимента, ибо в противном случае животное не имело бы никакого конкретного материала для обучения. Ограничение разнообразия было существенной особенностью эксперимента.

Более просто тот же принцип обнаруживается при обучении по ассоциации. Предположим, мы хотим, чтобы обучающийся, получая некоторую букву, отвечал некоторым числом по правилу:

дано *A* — ответ 2,
дано *B* — ответ 5,
дано *C* — ответ 3.

Для этого обучаемому можно дать такую последовательность, как, например, *A2, B5, C3, B5, C3, A2, A2, C3* и т. д.

Но эта последовательность, рассматриваемая как последовательность векторов с двумя составляющими, обнаруживает ограничение разнообразия. Это ограничение разнообразия необходимо для обучения, ибо при его отсутствии за *A* одинаково могли бы следовать и 2, и 3, и 5, так что обучаемый не мог бы образовать никаких специфических ассоциаций. Таким образом, *обучение возможно лишь постольку, поскольку последовательность обнаруживает ограничение разнообразия.*

То же самое верно и для обучения в лабиринте. В этом случае лабиринт должен изо дня в день, в течение всего периода обучения, сохранять одну и ту же форму. Если бы лабиринт не обнаруживал ограничения разнообразия, животное не могло бы выработать определенный (и подходящий) способ поведения. Таким образом, *обучение стоит труда только в том случае, если среда обнаруживает ограничение разнообразия.* (Этот вопрос снова рассматривается в § 13/7.)

РАЗНООБРАЗИЕ В МАШИНАХ

7/22. Теперь мы в состоянии рассмотреть, как влияет на разнообразие деятельность машины. Тем самым мы подойдем ближе к пониманию того, что происходит с информацией при прохождении через машину. Прежде всего отметим основную особенность однозначного преобразования в его отношении к разнообразию.

Рассмотрим для примера однозначное преобразование

$$Z: \downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ B & C & C \end{matrix}$$

и применим его к некоторому множеству операндов, например

BBACCCAABA.

Результатом будет множество *CCBCCCBBCB*. Здесь важно, что разнообразие множества упало с 3 до 2. Дальнейшее применение преобразования Z приводит к сплошным C, с разнообразием, равным 1.

Читатель легко убедится в том, что разнообразие множества, подвергнутого однозначному преобразованию, никогда не может возрасти, а обычно падает. Причину этого установить нетрудно. На графике может иметь место схождение стрелок $\searrow\!\!\!\nearrow$, но расхождение $\nwarrow\!\!\!\swarrow$ невозможно. Везде, где преобразование приводит к слиянию двух состояний в одно, разнообразие уменьшается; и нет никакого обратного процесса, который мог бы возместить это уменьшение.

Преобразование не обязательно должно быть замкнутым. Так, если то же самое множество десяти букв подвергается преобразованию Y

$$Y: \downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ p & q & p \end{matrix},$$

давая *qqpppppрqp*, то разнообразие опять-таки уменьшается. Легко видеть, что разнообразие множества не изменяется только тогда, когда преобразование взаимно однозначно (относительно букв, фактически входящих в преобразуемое множество); а это весьма специальный тип преобразования.

Упр. 1. Выпишите в строчку все буквы алфавита; ниже, буква под буквой, выпишите первые буквы какой-нибудь общеизвестной фразы. Переход от верхней строчки к нижней определит некоторое однозначное преобразование (u). Напишите полностью свое имя, найдите разнообразие составляющих его букв, преобразуйте его посредством u (т. е. закодируйте его) и найдите разнообразие полученного множества букв. Как изменилось разнообразие? Применяйте u повторно; покажите на графике, как шаг за шагом изменяется разнообразие.

Упр. 2. Пусть каждый вид некоторого рода паразитов паразитирует только на одном определенном виде-хозяине. Если разнообразия (в нашем смысле) видов-паразитов и видов-хозяев неодинаковы, то какое из них больше?

Упр. 3. «Несколько генотипов могут обнаруживать один и тот же фенотипический признак». Если переход от каждого генотипа к соответствующему фенотипу есть преобразование V, то какое изменение разнообразия вызывает V?

Упр. 4. Когда дегустатор пробует чашку чая, он осуществляет преобразование Y, превращающее «образчик чайного листа» (операнд) в «оценку» (образ). Если дегустатор безупречен, то Y будет взаимно однозначно. Что можно сказать о дегустаторе, когда преобразование Y однозначно лишь в одну сторону?

Упр. 5. Семь параллельных измерений (с точностью до градуса) температур комнаты и термостатически управляемой ванны дали значения:

Комната	65	62	68	63	62	59	61.
Ванна	97	97	98	97	97	97	97.

Какое разнообразие обнаруживается: (I) температурой комнаты; (II) температурой ванны? Что мы сказали бы, если бы разнообразие в случае (II) превышало разнообразие в случае (I)?

**Упр.* 6. Пусть преобразование состоит в том, что каждое состояние переходит в некоторое состояние, случайно выбранное из всех состояний (являющихся равновероятными). Покажите, что при большом числе состояний разнообразие на первом шаге упадет в отношении 1 к $1—1/e$, т. е. примерно на одну треть. [Указание: Эта задача (для одного шага) эквивалентна следующей задаче. n охотников неожиданно наткнулись на стадо из n оленей. Каждый стреляет один раз по выбранному наугад оленю. Каждая пуля убивает одного и только одного оленя. Сколько в среднем оленей будет убито? И к чему стремится среднее значение, если n стремится к бесконечности?]

7/23. *Множество и машина.* Теперь мы должны выяснить, каким образом *множество* состояний может ассоциироваться с машиной, ибо никакая реальная машина не может в одно и то же время находиться более чем в одном состоянии. Множество состояний машины может рассматриваться по различным причинам.

Говоря о машине в единственном числе, мы можем на самом деле рассматривать не одну машину (§ 7/3), а множество одинаковых экземпляров (копий), как в случае, когда мы говорим об общих свойствах автомобиля «Форд» модели Т, или клетки переднего рога спинного мозга, или белой крысы. В этом случае мы можем рассматривать вместе все экземпляры, взятые в различных состояниях; и мы получим некоторое *множество* состояний, на которые действует одно преобразование.

Множество состояний может возникнуть и для одной единственной машины. Ведь мы можем стремиться рассмотреть не только то, что́ машина может делать в данное время при данном состоянии, но и то, что́ она может делать в другое время при другом состоянии. И различные формы ее поведения, возможные в некоторое *множество* моментов времени, естественно соотносятся с некоторым *множеством* состояний, рассматриваемых как операнды.

Наконец, множество может возникать *по воле* теоретика, который не знает, в каком состоянии находится данная машина, и хочет проследить последствия *всех* возможностей. Это множество — уже не множество того, что *действительно* существует, но множество того, что *может* существовать (поскольку дело касается теоретика). Этот метод типичен для кибернетики, ибо он рассматривает фактическое в его отношении к более широкому множеству возможного или мыслимого (§ 1/3).

7/24. *Уменьшение разнообразия.* Имея в силу одной из перечисленных причин некоторое множество состояний и взаимно однозначное преобразование и используя результат § 7/22, мы можем теперь предсказать, что *с течением времени разнообразие этого множества не может увеличиваться, но обычно будет уменьшаться.*

Этот факт можно рассматривать с различных точек зрения.

Во-первых, этот факт уточняет часто высказываемое замечание, что любая система, предоставленная самой себе, движется к состоянию равновесия. Обычно это замечание основывается на неопределенном обращении к опыту, но этого недостаточно, так как условия здесь точно не определены. Иногда обращаются ко второму закону термодинамики, но подобная ссылка часто не имеет отношения к рассматриваемым здесь системам (§ 1/2). Наша новая формулировка показывает самое существо дела.

Во-вторых, этот факт показывает, что если наблюдатель имеет перед собой абсолютную систему, преобразование которой ему известно, но состояние которой он по тем или иным причинам не может наблюдать, то с течением времени его *неуверенность относительно состояния системы может только уменьшаться.* Ибо первоначально система могла быть в любом из своих состояний, но с течением времени число возможных состояний уменьшится. Таким образом, в предельном случае, когда система имеет только один бассейн и одно состояние равновесия, первоначально не осведомленный наблюдатель сможет в конце концов с уверенностью сказать, в каком состоянии находится система.

Уменьшение разнообразия можно рассмотреть и с другой точки зрения. Если разнообразие возможных состояний ассоциируется с информацией, так что определенное состояние машины несет определенное сообщение, то с течением времени количество информации, содержащейся в этом состоянии, может только уменьшаться.

Так, с помощью чашки кофе заключенному можно передать одно из трех сообщений в зависимости от того, будет ли кофе горячим, теплым или холодным. Этот метод будет действовать удовлетворительно, только если время между отправкой и получением кофе достаточно короткое; ибо какое бы из трех состояний ни было первоначально выбрано, через некоторое время будут возможны только состояния «теплое» или «холодное», а еще через некоторое время — только «холодное». Итак, чем больше прошло времени между отправкой и получением, тем меньше способность системы передавать информацию, поскольку это зависит от пребывания системы в определенном состоянии.

Упр. 1. Если шарик может остановиться в одном из трех разноцветных гнезд, какое здесь имеется разнообразие?

Упр. 2. (Продолжение.) Если прибавить еще шарик другого цвета, насколько увеличится разнообразие?

Упр. 3. То обстоятельство, что взаимно однозначное преобразование не вызывает потери разнообразия, иногда используется в салонном фокусе. Одного из присутствующих просят загадать два одноразрядных числа. Затем его просят умножить одно из них на 5, прибавить 7, удвоить полученный результат и прибавить второе задуманное число. Результат сообщается фокуснику, который затем называет задуманные числа. Покажите, что это преобразование сохраняет первоначальное количество разнообразия. (Указание: вычтите из окончательного числа 14.)

Упр. 4. (Продолжение). Для какого множества производится первое измерение разнообразия?

Упр. 5. (Другой фокус.) Один из присутствующих пишет двухразрядное число, разряды которого разнятся по крайней мере на 2. Он находит разность между этим числом и числом, полученным из первого путем перестановки разрядов. К этой разности он прибавляет число, полученное путем перестановки разрядов разности. Какое разнообразие сохраняется после этого преобразования?

Упр. 6. Если цепь нейронов может запоминать информацию посредством того, что цепь либо возбуждена, либо нет, то какое разнообразие может она нести? Что является здесь *множеством*, имеющим это разнообразие?

Упр. 7. Десять машин, тождественных по структуре, прошли свои переходные процессы (§ 4/5) и имеют теперь постоянное разнообразие, равное нулю. Находятся ли они с необходимостью в состоянии равновесия?

7/25. *Закон накопления опыта.* В предыдущем параграфе было показано, что разнообразие в машине (когда дано некоторое множество) не может увеличиваться и обычно уменьшается. При этом принималось, что машина изолирована и вследствие этого изменение состояний происходит только в силу внутренней деятельности машины. Теперь мы рассмотрим, что происходит с разнообразием, когда система является машиной со входом.

Рассмотрим для начала простейший случай, когда машина имеет один параметр P, изменяющийся через большие промежутки времени. Положим для ясности, что машина имеет множество копий, тождественных по своим преобразованиям, но различающихся состояниями, в которых они находятся. Предположим, что мы наблюдаем множество состояний, обнаруживаемых в каждый момент множеством машин. Пусть P имеет одно и то же значение для всех машин и сохраняет его, в то время как машины изменяются шаг за шагом. Условия здесь те же самые, что и в предшествующем параграфе; и если мы измерим разнообразие состояний для множества копий и будем наблюдать, как оно изменяется со временем, то мы увидим, что оно упадет до определенного минимума. Когда разнообразие достигнет своего минимума при данном входном значении P_1, пусть P примет некоторое новое значение P_2 одновременно и одинаково для всего множества копий. Изменение входного значения переведет график машины из одной формы в другую, например (если машина имеет состояния $A, B, \ldots, F$),

из
$$\begin{tikzcd} A \arrow[d] & B \arrow[dl] & C \arrow[d] \\ D & E & F \arrow[l] \end{tikzcd}$$
(P_1)

в
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] & B & C \\ D \arrow[r] & E \arrow[u] & F \arrow[u] \end{tikzcd}.$$
(P_2)

При P_1 все машины, находившиеся в A, B или D, перейдут в D, а находившиеся вначале в C, E или F перейдут в E. Через некоторое время при P_1 разнообразие упадет до двух состояний. Когда P примет значение P_2, все те системы, которые находятся в состоянии D, перейдут за первый шаг в E (поскольку преобразование однозначно), а все те, которые находятся в E, перейдут в B. Легко видеть, что когда изменение одинаково для всех систем, *изменение значения параметра во всем множестве не может увеличить разнообразия этого множества.* Это, конечно, истинно независимо от того, являются ли D и E состояниями равновесия. Пусть теперь система продолжает действовать при P_2. Обе группы систем, первоначально (после первого шага) находившиеся в различных состояних (D и E), перейдут в B; теперь они все будут находиться в одном и том же состоянии и разнообразие упадет до нуля. Таким образом, *изменение значения параметра делает возможным уменьшение разнообразия до нового, более низкого минимума.*

Очевидно, что переход $P_1 \to P_2$ может привести к дальнейшему уменьшению разнообразия при том условии, что два или более состояния равновесия для P_1 лежат в одном и том же бассейне P_2. Поскольку это случается часто, мы можем высказать менее строгое, но более наглядное положение: *единообразное измене-*

ние входов некоторого множества преобразователей имеет тенденцию уменьшать разнообразие этого множества.

По мере уменьшения разнообразия множество изменяется так, что все его элементы имеют тенденцию в каждый момент находиться в одном и том же состоянии. Другими словами, изменения входа некоторого преобразователя имеют тенденцию ослаблять зависимость состояния системы (в данный момент) от индивидуального начального состояния преобразователя и усиливать зависимость состояния системы от той последовательности значений параметра, которая применялась на входе.

Этот же самый факт можно рассмотреть и с другой точки зрения. В изложенном выше рассуждении за «множество» принималось, для ясности, множество одновременно действующих копий одного и того же преобразователя. Но наша теорема одинаково применима и к одному преобразователю, взятому в различных случаях, если различные начальные моменты приведены в должное соответствие. Эта точка зрения была бы более подходящей, если бы мы исследовали какой-нибудь очень сложный преобразователь, предпринимая на нем ежедневно новые эксперименты. Если бы он содержал большое количество практически недоступных частей, то было бы, возможно, трудно возвращать его каждое утро в некоторое стандартное состояние, готовое для следующего эксперимента. Наша теорема утверждает: если вход преобразователя рано утром проводить через некоторую *стандартную* последовательность значений, то чем длиннее эта последовательность, тем более уверенно можно сказать, что машина будет приведена в некоторое стандартное состояние, готовое для эксперимента. Экспериментатор, может быть, не сумеет назвать это состояние, но он может быть уверен, что оно имеет тенденцию быть воспроизводимым.

Следует отметить, что недостаточно простого равенства значений параметра на каждом шаге данной последовательности. Чтобы результат был не просто номинальным (т. е. недействительным), параметры должны испытать фактическое, т. е. ненулевое изменение.

Истинность этой теоремы ни в коей мере не зависит от размеров системы. Очень большие системы подчиняются ей так же, как и малые, и часто можно даже ожидать, что они обнаружат соответствующее поведение более плавно и регулярно (в силу статистического эффекта больших размеров). Поэтому теорему можно с успехом применять к мозгу и к социально-экономическим системам.

Примеры, соответствующие этому процессу, весьма обычны. Возможно, нечто в этом роде имеет место, когда мальчики, обладающие явно выраженной индивидуальностью, приобретают по окончании одной и той же школы привычки, более характерные для школы, которую они посещали, чем для их собственных первоначальных индивидуальностей. Выяснение того, до какой степени эта тенденция к однообразию поведения связана с рассмотренным свойством преобразователей, следует предоставить дальнейшим исследованиям.

Необходимо дать этому явлению имя, на которое мы могли бы впоследствии ссылаться. Я буду называть его **законом накопления опыта.** Более наглядно его можно было бы описать, сказав, что информация, связанная с изменением параметра, имеет тенденцию разрушать и замещать информацию о начальном состоянии системы.

ГЛАВА 8

Передача разнообразия

8/1. В предыдущей главе было введено понятие «разнообразия», неотделимое от понятия «информации», и было показано, как важно для некоторых проблем сознавать, что мы имеем дело с некоторым *множеством* возможностей.

В настоящей главе мы займемся изучением того, как такие возможности передаются через машину, т. е. изучением отношения между множеством на входе и последующим, обычно как-либо закодированным множеством на выходе. Мы увидим, что если машина детерминированна, то передача эта вполне регулярна и допускает вполне строгое рассмотрение. Нашей целью будет выработать понимание, достаточное для того, чтобы служить основой при рассмотрении крайне сложных форм кодирования, применяющихся в мозгу.

8/2. *Повсеместность кодирования.* Чтобы получить представление о том, как часто производится кодирование при обычном взаимодействии организма со средой, рассмотрим — с соответствующими подробностями — сравнительно простую последовательность событий, происходящих при передаче по радио предупреждения о шторме. Это предупреждение возникает первоначально в форме определенного процесса в нервных клетках метеоролога, а затем переходит в форму мышечных движений и, по мере того как метеоролог пишет или печатает, превращается в чернильные знаки на бумаге. Затем оно принимает форму светлых и темных участков на сетчатке диктора, затем форму возбуждения сетчатки, затем форму нервных импульсов в зрительном нерве и т. д. через всю нервную систему. Когда диктор читает предупреждение, оно выступает в форме движений губ и языка, а затем движется в виде колебаний воздуха. Достигнув микрофона, оно переходит в форму изменений электрического напряжения, а затем претерпевает дальнейшие изменения по мере того, как оно усиливается, модулируется и передается по радио. Теперь оно имеет форму волн в эфире, а далее — форму состояния приемника. Вернувшись в форму звуковых волн, оно принимает затем форму колебаний, проходящих барабанные перепонки, слуховые косточки и улитки слушателя, и далее форму нервных импульсов, движущихся по слуховому нерву. Здесь мы можем оставить его, заметив только, что уже в этом кратком обзоре упоминается не менее шестнадцати основных преобразований, причем нечто сохраняется, проходя через все эти преобразования, хотя внешняя видимость его изменяется почти до неузнаваемости.

8/3. *Сложность кодирования.* Рассматривая такие повторные кодирования, наблюдатель легко может переоценить степень вносимой ими сложности. Довольно часто случается, что эта степень сложности вовсе не так велика, как это кажется на первый взгляд.

Простой пример того, что сложное кодирование может обладать скрытой простотой, можно наблюдать, когда простое взаимно однозначное кодирование алфавита применяется сначала к какому-то сообщению, затем к первой закодированной форме, образуя вторую (дважды) закодированную форму, затем ко второй закодированной форме и так далее много раз. Может показаться, что окончательная форма очень запутанна и требует для декодирования стольких же операций, сколько их было применено для кодирования. Однако, как легко убедиться, она на самом деле отличается от первоначального сообщения лишь настолько, что все это отличие может быть получено *однократным* применением некоторого взаимно однозначного кодирования. Окончательное сообщение может быть, таким образом, переведено обратно в первоначальное сообщение посредством одной операции.

Упр. Расположите карты в колоде в некотором порядке и положите ее на стол лицевой стороной вниз. Снимите колоду. Еще раз снимите. Снимайте снова и снова, пока не будете уверены в том, что первоначальный порядок окончательно потерян. После этого соберите колоду и исследуйте ее порядок; сколько порядка было потеряно?

8/4. *Декодирование.* Общее изучение кодирования лучше всего начать с рассмотрения некоторых свойств военного кодирования.

С самого начала мы должны остерегаться слишком узкого понимания «кода». Сначала мы склонны думать только о тех методах кодирования, которые переводят каждую букву сообщения в некоторую другую букву; но этот класс слишком ограничен, ибо имеется много других методов. Так, код «Плэйфэйр» (Playfair) оперирует с парами букв, превращая каждую пару (вектор с двумя составляющими) в какую-нибудь другую пару. Есть коды, изменяющие расположение букв, тогда как другие коды совершенно произвольны и превращают, например, фразу: «Прибудут две дивизии», — в условное слово «Артур». Эти соображения ясно показывают, что если кодирование есть преобразование, то операндом его является не буква, а скорее все сообщение (хотя не исключена и первая возможность). Следовательно, это преобразование имеет по существу вид

$$U: \downarrow \begin{matrix} M_1 & M_2 & M_3 & \ldots \\ C_1 & C_2 & C_3 & \ldots \end{matrix},$$

где M_1, M_2,...—различные сообщения, а C_1, C_2,...—их кодированные формы. Таким образом, кодирование задается некоторым преобразованием.

Часто при кодировании используется «ключевое слово» или какой-нибудь другой фактор, способный перевести код из одной формы в другую. Такой фактор, разумеется, соответствует параметру, давая столько конкретных кодирований (или преобразований) U_1, U_2, ..., сколько значений может принимать фактор.

«Декодирование» означает применение к закодированному сообщению C_i такого преобразования, которое восстановило бы первоначальное сообщение M_i:

$$V: \downarrow \begin{matrix} C_1 & C_2 & C_3 & \dots \\ M_1 & M_2 & M_3 & \dots \end{matrix}.$$

Такое преобразование V называется обратным к U, или **обращением** преобразования U; поэтому его можно обозначить через U^{-1}. Вообще говоря, только взаимно однозначные преобразования имеют однозначные обращения.

Если первоначальное сообщение M_i должно восстанавливаться из кодированной формы C_i при любом значении i, то как U, так и U^{-1} должны быть взаимно однозначными. Ведь если бы и сообщение M_i, и сообщение M_j могли преобразовываться в одну и ту же форму C_k, то получатель сообщения C_k не мог бы сказать, какое из сообщений M было первоначально послано, и C_k не могло бы быть декодировано с уверенностью.

Предположим, далее, что некоторое множество сообщений, имеющее разнообразие v, кодируется посредством взаимно однозначного преобразования U. Разнообразие множества кодированных форм также будет v. Итак, *при кодировании посредством взаимно однозначного преобразования разнообразие не изменяется.*

Отсюда следует, что если сообщения с разнообразием v должны проходить через различные коды и если их первоначальные формы должны однозначно восстанавливаться, то *процесс должен на каждой стадии сохранять разнообразие множества.*

Упр. 1. Является ли взаимно однозначным кодированием преобразование $x' = \log_{10} x$, применяемое к положительным числам?

Упр. 2. Является ли взаимно однозначным кодированием преобразование $x' = \sin x$, применяемое к положительным числам?

Упр. 3. Какое преобразование будет результатом применения сначала некоторого взаимно однозначного преобразования, а затем его обращения?

Упр. 4. Какое преобразование является обратным к $n' = n + 7$?

Упр. 5. Какое преобразование является обратным к $x' = 2x + y$, $y' = x + y$?

Упр. 6. Если кодированная форма состоит из трех английских букв, например JNB, то чему равно разнообразие возможных кодированных форм (измеренное логарифмически)?

Упр. 7. (Продолжение.) Сколько различных сообщений можно послать посредством такого кода за один раз?

Упр. 8. В скачке участвует восемь лошадей, и телеграмма должна сообщить мистеру А., какая из них пришла первой, а какая — второй. Чему равно разнообразие множества возможных сообщений?

Упр. 9. (Продолжение.) Может ли это сообщение быть закодировано в форме одной буквы, напечатанной либо как заглавная, либо как строчная буква?

Упр. 10. «Высокая» или «низкая» концентрация полового гормона в крови данного животного определяет, совершит ли оно обычный ритуал «ухаживания». Если половой гормон очень сложен химически, а процесс «ухаживания» очень сложен «этнологически» и если переменная «поведение» рассматривается как закодированная форма переменной «концентрация», то как велико разнообразие множества сообщений?

8/5. *Кодирование посредством машин.* Теперь мы рассмотрим, что происходит с сообщением, когда оно кодируется пропусканием через машину.

Важность этих вопросов для изучения мозга не требует особых доказательств. Важны они также и для «техники приборов» — методики получения наблюдателем информации о более или менее недоступных переменных или местах, таких, например, как внутренность печи или работающего сердца. Передача такой информации почти всегда включает некоторую промежуточную стадию кодирования, которое должно выбираться подходящим образом. До недавнего времени каждый такой прибор проектировался просто лишь на основе специфических принципов данной отрасли науки, но теперь, после пионерских работ Шеннона и Винера, известно, что существуют некоторые законы, общие для всех таких приборов. Что это за законы, будет описано ниже.

«Машина» была определена в § 3/4 как любое множество состояний, изменения которых во времени соответствуют замкнутому однозначному преобразованию. Это определение относится к машине, которая полностью изолирована, т. е. находится в постоянных условиях; она тождественна абсолютной системе, определенной в книге «Устройство мозга». В § 4/1 машина со входом была определена как система, имеющая некоторое замкнутое однозначное преобразование для каждого из возможных состояний некоторого множества параметров. Она тождественна «преобразователю» Шеннона, определяемому как система, ближайшее следующее состояние которой определяется ее текущим состоянием и текущими значениями ее параметров. (Шеннон принимает также, что преобразователь может иметь конечную внутреннюю память, но мы отвлечемся от этого в данное время и вернемся к вопросу о внутренней памяти в § 9/8.)

Допустим, что нам дан преобразователь M, который может находиться в одном из состояний $S_1, S_2, \ldots, S_n$; их число предполагается конечным. Он имеет один или несколько параметров, которые в каждый момент могут принимать одно из множества значений $P_1, P_2, \ldots, P_k$. Каждое из этих значений определит некоторое преобразование состояний S. Мы видим теперь, что такая система может воспринять сообщение, закодировать его и выдать его кодированную форму. Под «сообщением» я буду понимать просто некоторую последовательность состояний, которая благодаря соединению двух систем является одновременно выходом одной и входом другой системы. Часто состояние будет представлять собой вектор. Я опускаю рассмотрение любых «смыслов», которые могут приписываться сообщению, и буду рассматривать просто то, что происходит в этих детерминированных системах.

Для простоты примера предположим, что M может принимать любое из четырех состояний A, B, C и D, а параметры имеют три состояния Q, R и S; эти предположения можно представить в табличной форме, показывающей основные черты «преобразователя» (как в § 4/1):

↓	A	B	C	D
Q	C	C	A	B
R	A	C	B	B
S	B	D	C	D

Если дано начальное состояние и последовательность состояний параметра, то выход преобразователя можно найти без труда, как в § 4/1. Например, предположим, что преобразователь начинает работу в состоянии B, в то время как вход находится в R. Тогда преобразователь перейдет в состояние C. Если вход перейдет затем в состояние Q, то преобразователь из C перейдет в A. Полученные результаты можно изобразить в табличной форме:

Входное состояние	$R\ Q$
Состояние преобразователя	$B\ C\ A$

Теперь легко проверить, что если начальным состоянием является B, а вход проходит последовательность $R\ Q\ R\ S\ S\ Q\ R\ R\ Q\ S\ R$, то выход пройдет последовательность состояний $B\ C\ A\ A\ B\ D\ B\ C\ B\ C\ C\ B$.

Таким образом, если дан преобразователь, его начальное состояние и входная последовательность, то нетрудно вывести траекторию. Хотя этот пример с его произвольными скачками может показаться неестественным, на самом деле он вполне может служить представлением интересующего нас процесса, и требуется лишь большее число состояний, а возможно и переход к предельной непрерывности, чтобы он стал вполне естественным представлением. Однако в данной форме различные количественные свойства более очевидны и легче вычислимы, тогда как в непрерывной форме приходится применять сложный аппарат теории меры.

Упр. 1. Пропустите то же самое сообщение ($R\,Q\,R\,S\,S\,Q\,R\,R\,Q\,S\,R$) через тот же преобразователь, начинающий на этот раз работу с A.

Упр. 2. Пропустите сообщение «R_1, R_2, R_3, R_1, R_2, R_3» через преобразователь из § 4/1, начинающий работу с a.

Упр. 3. (Продолжение.) Закодируйте то же самое сообщение тем же самым преобразователем, начинающим работу с b.

Упр. 4. (Продолжение.) Зависит ли выход преобразователя от начального состояния преобразователя, если вход задан?

Упр. 5. Какова будет траектория преобразователя $n' = n - a$, где a — параметр, если этот преобразователь начнет работу с $n = 10$, а входной последовательностью будет 2, 1,—3,—1, 2, 1?

Упр. 6. Пропустите сообщение «314159...» (разряды числа π) через преобразователь $n' = n + a - 5$, начиная с $n = 10$.

Упр. 7. Пусть a и b — параметры, так что вектор (a, b) определяет параметрическое состояние, и пусть состояния преобразователя определяются вектором (x, y) и преобразованием

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = x + (a - b)\,y \end{cases};$$

дополните траекторию в таблице

a	1	—2	0	—1	2	5	—2
b	—1	1	1	0	1	—2	0
x	2	1	2	?	?	?	?
y	1	4	—11	?	?	?	?

*Упр. 8. Преобразователь с параметром u имеет преобразование $dx/dt = -(u+4)x$; при начальном состоянии $x=1$ ему дается вход $u=\cos t$; найдите выходное значение x.

*Упр. 9. Пусть a — вход преобразователя

$$dx/dt = y,$$
$$dy/dt = -x - 2y + a$$

с диаграммой непосредственных воздействий

$$a \longrightarrow y \rightleftarrows x.$$

Каков будет выход x, если преобразователь начинает работу с (0, 0) при входе $a = \sin t$? (Указание: используйте преобразование Лапласа.)

*Упр. 10. Если a есть вход, а преобразователь есть

$$dx/dt = k(a - x),$$

то чем характеризуется поведение x при положительном и все возрастающем k?

ОБРАЩЕНИЕ КОДИРОВАННОГО СООБЩЕНИЯ

8/6. В § 8/14 подчеркивалось, что код может служить переносчиком сообщений только в том случае, если существует возможность его обращения. Попробуем применить этот критерий к преобразователю U из § 8/5, рассматриваемому как кодирующее устройство.

В этом преобразователе используются два преобразования, которые должны тщательно различаться. Первое из них соответствует преобразованию U из § 8/4, и его операндами являются индивидуальные сообщения; вторым преобразованием преобразуется сам преобразователь. Предположим, что преобразователю из § 8/5 должно быть дано «сообщение», состоящее из двух букв, каждая из которых может быть Q, R или S. Возможны девять сообщений:

$$QQ, QR, QS, RQ, RR, RS, SQ, SR, SS,$$

соответствующих операндам M_1, M_2, ..., M_9 преобразования U. Предположим, что преобразователь всегда начинает работу с A; легко проверить, что соответствующие девять выходов будут (если не считать начального и неизменяющегося A):

$$CA, CB, CC, AC, AA, AB, BC, BC, BB.$$

Эти выходы соответствуют образам C_1, C_2, ... C_9 преобразования U. Ясно, что кодирование, осуществляемое преобразователем из § 8/5, не является взаимно однозначным. Следовательно, происходит некоторая потеря разнообразия, ибо теперь имеется только восемь различимых элементов; в самом деле, BC повторяется дважды. Следовательно, этот преобразователь не обеспечивает возможности полного и точного декодирования, поскольку при получении BC невозможно сказать, было ли первоначальное сообщение SQ или SR.

В этой связи следует понять, что невозможность декодирования может вытекать из двух совершенно различных причин. Она может вытекать просто из того, что под рукой нет декодирующего средства, *которое, однако, существует.* Это случается, когда военное сообщение попадает к сигнальщику, у которого нет кодовой книги, или когда у слушателя есть граммофонная пластинка (как закодированная форма голоса), но нет граммофона. Совершенно отлична от нее невозможность декодирования, вытекающая из того, что два различных сообщения могут дать один и тот же выход, подобно выходу BC описанного выше преобразователя. Можно определить только то, что первоначальное сообщение было либо SQ, либо SR; но *не существует* такого декодирующего средства, которое могло бы различить их.

Легко видеть, что если бы в каждом столбце таблицы все состояния были различными, то каждый переход указывал бы единственное значение параметра; тогда мы могли бы декодировать любую последовательность состояний, выдаваемую преобразователем. Справедливо обратное: если мы можем декодировать *любую* последовательность состояний, то каждый переход должен определять единственное значение параметра, а потому в каждом столбце все состояния должны быть различными.

Таким образом, мы нашли *характеристику преобразователя, наличие которой соответствует тому, что он является совершенным кодирующим средством.*

Упр. 1. В преобразователе, имеющем 100 состояний, параметры могут принимать 108 комбинаций значений; всегда ли может быть декодирован его выход? (Указание: попробуйте простые примеры, в которых число преобразований превышает число состояний.)

Упр. 2. (Чтобы подчеркнуть различие между двумя типами преобразований.) Если вход преобразователя имеет 5 состояний, а его выход имеет 7 состояний и если сообщение состоит из последовательности 12 элементов, то: (I) сколько операндов имеет преобразование преобразователя; (II) сколько операндов имеет кодирующее преобразование U?

Упр. 3. Если машина непрерывна, то что означает с точки зрения техники приборов «наблюдение перехода»?

**Упр.* 4. Преобразователь имеет преобразование $dx/dt = ax$, где через a обозначен вход; всегда ли может быть декодирован его выход? (Указание: решите уравнение относительно a.)

8/7. *Проектирование обратного преобразователя.* В предыдущем параграфе было показано, что если преобразователь при передаче от входа к выходу не теряет никаких различий, то получаемое на выходе закодированное сообщение всегда можно декодировать. В настоящем параграфе мы покажем, что этот процесс может выполняться автоматически, т. е. что если дана машина, не теряющая никаких различий, то всегда возможно построить другую машину, которая, принимая на входе выход первой машины, *выдаст на своем выходе первоначальное сообщение.*

Здесь, по сравнению с предыдущим параграфом, мы становимся на существенно новую точку зрения. Там нас интересовала возможность декодирования сообщения и то, можно или нет осуществить это декодирование, безразлично с чьей помощью. Теперь мы переходим к вопросу о том, как можем мы построить такой механизм, который осуществлял бы декодирование *автоматически.* Мы ищем теперь не восстановленное сообщение, а машину, которая могла бы его восстановить. Как должна строиться такая машина? Для описания ее нам потребуется, конечно, обычное множество преобразований (§ 4/1).

Один из возможных методов, который мы и будем здесь использовать, состоит в следующем: процедуру предыдущего параграфа переводят в механическую форму, используя то обстоятельство, что *каждый переход дает информацию о том значении параметра, при котором он совершался.* Для этого нам нужна машина, которая принимала бы на входе некоторый переход и выдавала на выходе соответствующее значение параметра. Но ясно, что знание того, какой произошел переход, т. е. каковы значения i и j в выражении $X_i \to X_j$, равносильно знанию того, какое значение имеет вектор (i, j). Ведь переход тоже можно рассматривать как вектор с двумя составляющими. Поэтому мы можем вводить переходы в обратный преобразователь, коль скоро вход последнего состоит из двух параметров, первый из которых принимает значение предшествующего состояния в переходе, а второй — значение последующего состояния.

Остается только одна трудность: переход включает два состояния, существующих не в один и тот же момент времени, так что один из входов обратного преобразователя должен вести себя *сейчас* так же, как вел себя выход прямого преобразователя *раньше*. Однако эту трудность можно преодолеть с помощью простого средства. Рассмотрим преобразователь

$\downarrow$	q	r	s
Q	q	q	q
R	r	r	r
S	s	s	s

.

Предположим, что он начинает работу с состояния r и что ему дается вход $Q\ S\ S\ R\ Q\ S\ R\ R\ Q$; тогда его выходом будет $r\ q\ s\ s\ r\ q\ s\ r\ r\ q$, т. е. после первой буквы он просто повторяет вход, но на один шаг позже. Два таких преобразователя, соединенных последовательно, повторят сообщение на два шага позже и т. д. Ясно, что в принципе получить задержку нетрудно.

Предположим, что первый, кодирующий преобразователь задается таблицей

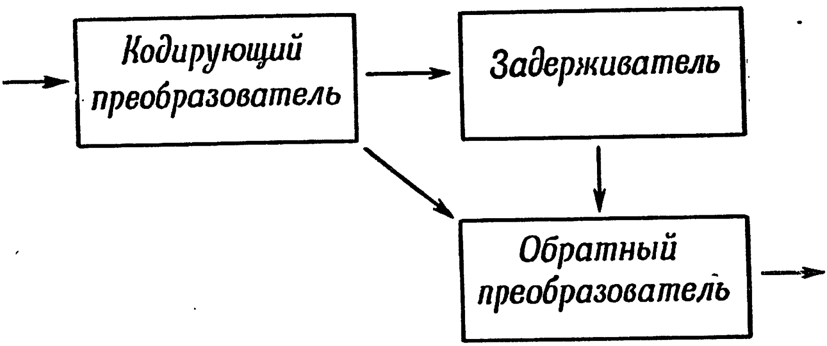
↓	A	B	C	D
Q	D	A	D	B
R	B	B	B	C
S	A	C	A	D

.

Нам требуется, например, машина, которая:

при входе A, A будет выдавать S
» » A, B » » R
» » A, D » » Q
» » B, A » » Q
и т. д.

(Вход A,C для этой машины исключается, ибо кодирующий преобразователь никогда не выдаст такого перехода.) Наши три машины соединяются следующим образом:



Задерживатель имеет простую форму

↓	a	b	c	d
A	a	a	a	a
B	b	b	b	b
C	c	c	c	c
D	d	d	d	d

,

а обратный преобразователь — форму

$\downarrow$	Q	R	S
(a, A)	S	S	S
(a, B)	R	R	R
(a, C)		(не встретится)	
(a, D)	Q	Q	Q
(b, A)	Q	Q	Q
и т. д.		и т. д.	

,

входом в которую служит вектор:

(состояние задерживателя, состояние кодирующего преобразователя).

В этом случае обратный преобразователь выдает ту же самую последовательность, которая была введена в кодирующий преобразователь. Так, предположим, что в кодирующий преобразователь было введено Q, вызвавшее в нем переход $A \to D$. Это означает, что обратный преобразователь получит D непосредственно из кодирующего преобразователя (ибо кодирующий преобразователь *находится* в состоянии D), а из задерживателя получит a (ибо кодирующий преобразователь *был* в A на предыдущем шаге). Со входом (a, D) обратный преобразователь перейдет в состояние Q, с которого мы и начали. И то же самое для всех остальных состояний, которые могут вводиться в кодирующий преобразователь.

Таким образом, если дан преобразователь, не теряющий никаких различий, *то всегда можно построить автоматический обратный преобразователь*. Изложенное выше доказательство важно тем, что оно не содержит никаких ссылок на действительную природу преобразователя. Неважно, будет ли он механическим, или электронным, или нервным, или гидравлическим, — все равно возможность обращения существует. Для этого необходимо *только*, чтобы действия кодирующего устройства были детерминированны и чтобы оно сохраняло все различия.

Упр. 1. Почему нельзя использовать в качестве примера кодирующий преобразователь из § 8/5?

Упр. 2. Закончите построение приведенного выше обратного преобразователя.

Упр. 3. Постройте в табличной форме двухшаговый задерживатель.

8/8. (Этот параграф может быть опущен при первом чтении.) Теперь, когда конструкция обратного преобразователя была описана в самой общей форме, мы можем исследовать его конструкцию и для случая менее общих преобразователей, более напоминающих машины повседневной жизни. Нашим ближайшим шагом будет исследование конструкции обратного преобразователя, когда преобразования задаются не в абстрактной табличной форме, а в виде некоторой математической функции.

Для начала рассмотрим построение обратного преобразователя для прямого преобразователя со входом a, переменной n и преобразованием $n' = n + a$. Подходящим задерживателем будет здесь преобразователь с параметром n, переменной p и преобразованием $p' = n$. Пусть вход a изменяется так, как показано ниже; нетрудно видеть, что тогда n (начиная с 3) и p (начиная с 1) будут изменяться следующим образом:

a:	4	−2	−1	0	2	−1	−1	3
n:	3	7	5	4	4	6	5	4.
p:	1	3	7	5	4	4	6	5

Теперь очевидно, что если обратный преобразователь с переменной m должен получать n и p на входе как вектор (n, p) и выдавать обратно a на выходе, то преобразование M, осуществляемое обратным преобразователем, должно включать такие, например, переходы:

$$M: \downarrow \begin{matrix} (7,3) & (5,7) & (4,5) & (4,4) & \ldots \\ 4 & -2 & -1 & 0 & \ldots \end{matrix}.$$

Детальное исследование этих переходов с целью найти, как образы получаются из своих операндов, покажет, что во всех случаях

$$m' = n - p.$$

Легко проверить, что вся система будет теперь выдавать значения, которые первоначальный вход имел двумя шагами раньше.

[Читателю может показаться, что поскольку $n' = n + a$, то, следовательно, $a = n' - n$ и код раскрыт. Это верно, но это не решает *нашей* задачи, которая состоит в построении машины (см. второй абзац § 8/7). Это дает *нам* возможность декодировать сообщение, но не определяет никакой машины. Построение или задание машины требует усложнений, описанных в предыдущем параграфе, что приводит к $m' = n - p$, т. е. к заданию машины со входом.]

Теперь ясно общее правило. Мы начинаем с уравнения преобразователя $n' = n + a$ и решаем его относительно параметра: $a = n' - n$.

Задерживающее устройство имеет преобразование $p' = n$. Преобразование для обратного преобразователя строится по следующим правилам, применяемым к уравнению $a = n' - n$:

1) заменить a символом нового преобразователя m';
2) заменить n' параметром c;
3) заменить n параметром d.

Тогда, если обратный преобразователь присоединяется к прямому преобразователю посредством $d = n$ и к задерживателю посредством $c = p$, то он будет иметь требуемые свойства.

Если прямой преобразователь имеет более чем одну переменную, то изложенный процесс нуждается только в соответствующем расширении. Достаточно будет одного примера без всяких разъяснений. Предположим, что прямой преобразователь имеет параметры a_1 и a_2, переменные x_1 и x_2 и преобразование

$$\begin{cases} x_1' = 2x_1 + a_1 x_2 \\ x_2' = 2x_2 + a_1 a_2 \end{cases}.$$

Решая уравнения относительно параметров, получим

$$\begin{cases} a_1 = (x_1' - 2x_1)/x_2 \\ a_2 = x_2 (x_2' - 2x_2) / (x_1' - 2x_1) \end{cases}.$$

Задерживателем для x_1 будет $p_1' = x_1$, а для x_2 задерживателем будет $p_2' = x_2$. Уравнения обратного преобразователя получаются из уравнений для a_1 и a_2 с помощью правил:

1) заменить каждое a_i новым символом: $a_1 = m_1'$, $a_2 = m_2'$;
2) заменить каждое x_i' параметром c_i: $x_1' = c_1$, $x_2' = c_2$;
3) заменить каждое x_i параметром d_i: $x_1 = d_1$, $x_2 = d_2$.

Получим преобразователь

$$m_1' = (c_1 - 2d_1)/d_2,$$
$$m_2' = d_2(c_2 - 2d_2)/(c_1 - 2d_1).$$

Если теперь присоединить этот преобразователь к прямому преобразователю посредством $d_1 = x_1$, $d_2 = x_2$ и к задерживателям посредством $c_1 = p_1$, $c_2 = p_2$, то m_1 и m_2 дадут соответственно значения, которые a_1 и a_2 имели двумя шагами раньше.

Упр. 1. Постройте обратный преобразователь для преобразователя $n' = an$.

Упр. 2. То же самое для $n' = n - 2a + 4$.

Упр. 3. То же самое для $x' = ax - by$, $y' = ax + by$.

Упр. 4. Попробуйте построить обратный преобразователь для преобразователя $n' = n + a + b$; почему этого нельзя сделать?

**Упр.* 5. Постройте обратный преобразователь для преобразователя

$$dx_1/dt = a_1x_1x_2 + a_2,$$
$$dx_2/dt = (a_1 - 1)x_1 + a_2x_2.$$

Упр. 6. Почему в настоящем параграфе M преобразует (7,3) в 4, а не в -2, как можно было бы предположить, исходя из таблицы, помещенной несколькими строками выше?

8/9. *Размеры обратного преобразователя.* Основываясь на предыдущем параграфе, мы можем теперь как-то оценить размеры машин, необходимые для обращения выхода некоторого данного преобразователя. В § 8/7 было выяснено, что если прямой преобразователь не должен терять никаких различий, то он должен иметь по крайней мере столько выходных значений, сколько различных значений имеет его вход. Обратный преобразователь тоже будет иметь по крайней мере столько же значений, но не обязательно должен иметь их больше. Задерживатели требуют немногого, ибо они весьма просты. Отсюда, по-видимому, следует, что если обратный преобразователь изготовляется из компонентов, сходных с компонентами прямого преобразователя, то, какова бы ни была сложность и величина прямого преобразователя, *обратный будет иметь сложность и величину того же порядка.*

Значение этого вывода таково. Когда думаешь о сложности коры головного мозга или какой-либо экологической системы, то иногда кажется, что всякое воздействие, переданное через такую систему, почти всегда сразу же настолько запутывается, что его уже никак невозможно распутать. Но это, конечно, не так: усложнения кодирования, вносимые одним преобразователем, часто или даже обычно не превосходят декодирующих возможностей другого преобразователя, имеющего такие же размеры.

ПЕРЕДАЧА ОТ СИСТЕМЫ К СИСТЕМЕ

8/10. *«Передаваемое» разнообразие.* Здесь не мешает разъяснить один вопрос, который оставался у нас несколько неясным. Соблазнительно думать о разнообразии (или информации), проходящем через преобразователь, или о разнообразии, переходящем от одного преобразователя к другому; однако эти фразы могут привести к серьезным недоразумениям. Хотя конверт может содержать сообщение, это сообщение, будучи единственным, не может обнаруживать разнообразия. Таким образом, конверт может содержать сообщение, но не может содержать разнообразия — его может содержать только *множество* конвертов. Аналогично разнообразие не может существовать в преобразователе (в любой данный момент), ибо конкретный преобразователь в любой момент находится в одном и только одном состоянии. Следовательно, преобразователь не может «содержать» разнообразия. Речь *может* идти лишь о том, что несколько преобразователей (возможно, одинаковой конструкции), взятых в некоторый данный момент времени, могут обнаруживать разнообразие занимаемых ими состояний. Аналогично один преобразователь может обнаруживать разнообразие состояний, занимаемых им в различных случаях.

(Сказанное здесь повторяет отчасти то, что было сказано в § 7/5; но вопрос этот настолько важен, что возвращение к нему вряд ли может быть лишним.)

Всегда следует помнить, что понятие «разнообразие», употребляемое в этой книге, и понятие «информация», употребляемое в теории связи, подразумевают ссылку не на индивидуальный предмет, а на некоторое множество. Всякая попытка трактовать информацию как вещь, которая может содержаться в другой вещи, обычно ведет к трудным «проблемам», которые никогда не должны были бы возникать.

8/11. *Передача за один шаг.* Рассмотрев, каким образом изменяется разнообразие в отдельном преобразователе, мы можем теперь рассмотреть, как оно передается от одной системы к другой, скажем от T к U, где T — абсолютная система, а U — преобразователь:

$$\boxed{T} \rightarrow \boxed{U} \ .$$

Как уже говорилось, мы принимаем, что существует множество копий, тождественных по конструкции (т. е. по преобразованию), но могущих быть в различных состояниях независимо друг от друга. Пусть в данный момент копии T обладают некоторым разнообразием, и мы хотим знать, как скоро это разнообразие распространится на копии U. Предположим, что в данный момент копии T занимают n_T разных состояний и копии U занимают n_U различных состояний. (Читателю будет легче усвоить нижеследующее доказательство, если он подберет какие-нибудь простые и удобные примеры системы T и U, на которых ему можно будет проследить ход рассуждений.)

Система T действует как параметр на U, и каждому состоянию системы T будет соответствовать некоторый график системы U. Следовательно, множество копий U будет иметь столько графиков, сколько значений имеют копии T, т. е. их будет n_T. Это означает, что каждое U-состояние может дать до n_T различных переходов (представленных n_T различными графиками); т. е. из некоторого U-состояния представляющая точка может перейти в любое из не более чем n_T U-состояний. Таким образом, множество копий U, все представляющие точки которого находятся в одном и том же состоянии, может под воздействием разнообразия копий T превратиться в множество, представляющие точки которого разбросаны не более чем по n_T состояниям. Существует

n_U таких множеств копий U, и каждое из этих множеств может быть разбросано не более чем по n_T состояниям, так что общее рассеяние после одного шага не может превышать $n_T n_U$ состояний. Если разнообразия измеряются логарифмически, то разнообразие в U после одного шага не может превышать суммы первоначальных разнообразий в U и в T. Другими словами, *разнообразие копий U не может возрасти за один шаг больше, чем на величину разнообразия, существующего в копиях T.*

Таков основной закон передачи разнообразия от системы к системе. Он будет часто использоваться в дальнейшей части книги.

Упр. 1. Система имеет состояния (t, u) и преобразование $t' = 2t$, $u' = u + t$, так что t доминирует над u. Восемь таких систем начинают работу соответственно с состояний (0,9), (2,5), (0,5), (1,9), (1,5), (2,5), (0,9), (1,9). Каково разнообразие множества t? Множества u?

Упр. 2. (Продолжение.) Найдите состояния после ближайшего следующего шага. Какое разнообразие имеют теперь t? Предскажите верхнюю границу разнообразия u. Каково разнообразие u теперь?

Упр. 3. В другой системе подсистема T имеет две переменные t_1 и t_2 и подсистема U имеет две переменные u_1 и u_2. Вся система имеет состояния (t_1, t_2, u_1, u_2) и преобразование $t'_1 = t_1 t_2$, $t'_2 = t_1$, $u'_1 = u_1 + t_2 u_2$, $u'_2 = t_1 u_2$, так что T доминирует над U. Три копии начинают с начальных состояний (0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1) и (1, 0, 0, 1). Каково разнообразие копий T? Каково разнообразие копий U?

Упр. 4. (Продолжение.) Найдите все три состояния через один шаг. Каково теперь разнообразие копий U?

8/12. *Передача за второй шаг.* Итак, мы видели, что за один шаг разнообразие в U может увеличиться не больше чем на количество разнообразия в T. Но что произойдет на втором шаге? T может все еще иметь некоторое разнообразие; не перейдет ли и оно в U, еще более увеличивая его разнообразие?

Возьмем простой пример. Предположим, что каждый элемент всего множества копий находится в одном из шести состояний (T_i, U_k), (T_i, U_l), (T_i, U_m), (T_j, U_k), (T_j, U_l), (T_j, U_m), так что все T находятся либо в T_i, либо в T_j, а все U находятся либо в U_k, либо в U_l, либо в U_m. Система как целое — абсолютна. Поэтому все копии, находящиеся, скажем, в (T_i, U_k), будут при переходах от состояния к состоянию изменяться одинаково, принимая различные состояния совместно. То же самое относится и к копиям, находящимся в остальных пяти состояниях. Отсюда следует, что разнообразие состояний множества не может превышать 6, и это независимо от количества копий, входящих во множество; независимо от числа состояний в T и U; независимо от того, как долго могут продолжаться изменения. А отсюда следует, что разнообразие копий U никогда не может превышать шести U-состояний. Таким образом, коль скоро разнообразие в U возросло на количество разнообразия в T, всякое дальнейшее возрастание должно прекратиться. Если все возрастание произошло за один шаг (как выше), то на втором шаге разнообразие больше не возрастает, хотя T и может еще иметь некоторое разнообразие [1].

Следует отметить, какую важную роль в этом доказательстве играет *спаривание* состояний системы U с состояниями системы T, т. е. выяснение того, какое значение T и какое значение U встречаются в одной и той же машине. Очевидно, что простого знания количества разнообразия в T и в U недостаточно для предсказания того, как они будут изменяться.

8/13. *Передача по каналу.* Теперь мы можем рассмотреть, каким образом разнообразие, или информация, пере-

---

[1] Важно подчеркнуть следующий общий принцип: если после первого шага разнообразие в U достигло максимально возможного значения (не превосходящего в логарифмической мере суммы начальных разнообразий T и U), то оно не может увеличиться после второго шага; если же оно не достигло максимума, то после второго шага оно еще может увеличиться. То, что после второго шага разнообразие может увеличиться, показывает следующий пример. Пусть система как целое имеет состояния (t, u) и преобразование

$$t' = t + 1,\quad u' = \begin{cases} 0, & \text{если } t \text{ не делится на 3 и чётно,} \\ 1, & \text{если } t \text{ не делится на 3 и нечётно,} \\ \text{остатку от деления } t/3 \text{ на 3,} & \text{если } t \text{ делится на 3,} \end{cases}$$

так что t доминирует над u. Пусть эта система начинает с состояний $(2, —)$, $(5, —)$, $(8, —)$, $(11, —)$, $(14, —)$. Черточки показывают, что нам безразличны начальные значения u. После первого шага состояния системы будут таковы:

$$(3, 0)\ (6, 1)\ (9, 0)\ (12, 1)\ (15, 0);$$

после второго шага —

$$(4, 1)\ (7, 2)\ (10, 0)\ (13, 1)\ (16, 2).$$

Таким образом, разнообразие u после первого шага равно двум состояниям, а после второго шага — трем состояниям. — *Прим. ред.*

дается через малый промежуточный преобразователь — «канал»; слово «малый» относится здесь к числу его возможных состояний. Предположим, что два больших преобразователя Q и S связаны посредством малого преобразователя R, так что Q доминирует над R, а R доминирует над S:

$$\boxed{Q} \to \boxed{R} \to \boxed{S}\,.$$

Как обычно, мы исходим из наличия множества копий всей этой тройной системы. Пусть r — число возможных состояний R. Пусть $\log_2 r$ равен ρ. Допустим, что в начальном состоянии копии Q имеют разнообразие, значительно превышающее r состояний, и что копии R и S для простоты вообще не имеют разнообразия. (Если бы они имели какое-то разнообразие, то, как показано в § 8/11, новое разнообразие, получаемое ими от Q, просто прибавлялось бы логарифмически к тому, что они уже имели.)

Применение § 8/11 к R и S показывает, что на первом шаге разнообразие копий S совсем не возрастает. Таким образом, если первоначально три разнообразия, измеренные логарифмически, равнялись N, 0 и 0, то после первого шага они будут самое большее N, ρ и 0.

На следующем шаге разнообразие R уже не может увеличиться (согласно § 8/12) [1], но разнообразие S может увеличиться за счет получаемого от R (что легко проверить на конкретном примере; см. упр. 2). Таким образом, после второго шага разнообразия могут возрасти до N, ρ, ρ. Аналогично после третьего шага они могут возрасти до N, ρ, 2ρ и т. д. Таким образом, разнообразие копий S может возрастать со временем столь же быстро, как и члены ряда 0, ρ, 2ρ, 3ρ, ... , но не быстрее. Теперь правило становится совсем очевидным: *преобразователь,*

---

[1] Ссылка на § 8/12 здесь не по существу. Если разнообразие в R уже достигло величины ρ, то оно не может увеличиться просто потому, что ему некуда больше увеличиваться. Если же разнообразие R еще не достигло после первого шага величины ρ, то после второго шага оно может еще возрасти. Ср. подстрочное примечание на стр. 218 — *Прим. ред.*

который может находиться не более чем в r состояниях, может передавать разнообразие не более чем по $\log_2 r$ битов за шаг. Когда говорят, что различные преобразователи обладают различной «пропускной способностью», по существу имеют в виду именно это соотношение.

С другой стороны, наблюдая, как шаг за шагом увеличивается разнообразие копий S, мы видим, что *количество разнообразия, которое может передавать преобразователь* (такой как R), *пропорционально произведению его пропускной способности в битах на число сделанных шагов.* Отсюда вытекает важное следствие, которое будет позже использоваться неоднократно: *действуя достаточно долго, любой преобразователь может передать любое количество разнообразия.*

Одной из важных черт этой теоремы является ее предельная общность. Здесь совершенно безразлично, какого рода машина действует в качестве промежуточного преобразователя или канала. Будет ли это переключатель, имеющий только два состояния («замкнуто» — «разомкнуто»), или электрическое напряжение, которое может иметь разные значения, или целый нервный узел, или газета, — все они подчиняются этой теореме. Она помогает придать количественную точность интуитивному ощущению, что при осуществлении связи через малый промежуточный преобразователь всегда имеет место некоторое ограничение скорости связи; возьмем, например, случаи, когда информация от сетчатки переходит в зрительную область коры через наружное коленчатое тело или когда информация о движениях хищника передается стаду через единственного сторожевого.

Упр. 1. Абсолютная система с тремя частями Q, R и S имеет состояния (q, r, s) и преобразование

$$\left\{\begin{array}{c|ccccccccc} q: & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ q': \downarrow & 4 & 6 & 6 & 5 & 6 & 5 & 8 & 8 & 8 \end{array}\right.,$$

$$r' = \begin{cases} 0 \text{ при четном } & q + r \\ 1 \text{ при нечетном } & q + r \end{cases},$$

$$s' = 2s - r.$$

Таким образом, Q доминирует над R, а R доминирует над S. Чему равна пропускная способность канала R?

Упр. 2. (Продолжение.) Девять копий начинают работу с начальных состояний $(1, 0, 0)$, $(2, 0, 0)$, $\ldots$, $(9, 0, 0)$, так что только Q имеет начальное разнообразие. (I) Как изменится разнообразие копий Q за первые 5 шагов? (II) Как изменится разнообразие копий R? (III) Разнообразие копий S?

Упр. 3. (Продолжение.) Если бы на упр. 2 (III) был дан ответ «$S : 1, 1, 4, 5, 5$», то почему он был бы явно неверен, даже без вычисления фактических траекторий?

8/14. Последнее упражнение показывает, что если Q, R и S образуют цепь, то разнообразие S может шаг за шагом возрастать за счет получаемого из R даже в том случае, когда разнообразие R после первого шага уже не будет возрастать (§ 8/12). Причиной этого является то, что выход R, если брать его шаг за шагом как последовательность, образует вектор (§ 9/9), а разнообразие вектора может превышать разнообразие одной из его составляющих. И если число составляющих вектора может неограниченно возрастать, то и разнообразие его может неограниченно возрастать, даже хотя разнообразие каждой составляющей и остается ограниченным. Так, *последовательность* из десяти бросаний монеты может иметь разнообразие до 1024 значений, хотя разнообразие каждой составляющей ограничено двумя значениями. Аналогично и значения R, хотя и ограничены в нашем упражнении двумя значениями, могут образовать последовательность, разнообразие которой будет больше двух. По мере того как продолжается процесс передачи, на S воздействует (и увеличивает его разнообразие) вся последовательность, *вектор в целом,* так что через R может проходить разнообразие гораздо больше двух значений. Таким образом, сокращение пропускной способности канала можно компенсировать (чтобы сохранять постоянным общее количество передаваемого разнообразия) увеличением длины последовательности. Это обстоятельство уже было отмечено в предыдущем параграфе и часто будет использоваться в дальнейшем.

Упр. 1. Абсолютная система T доминирует над цепью преобразователей A_1, A_2, A_3, A_4, $\ldots$:

$$\boxed{T} \rightarrow \boxed{A_1} \rightarrow \boxed{A_2} \rightarrow \boxed{A_3} \rightarrow \boxed{A_4} \rightarrow \quad \ldots$$

Множество копий начинает действовать при наличии разнообразия в T, но при отсутствии его в A_1, A_2 и т. д. ...Покажите, что после k шагов разнообразия $A_1, A_2, \ldots, A_k$ могут быть отличными от нуля, но что разнообразия A_{k+1}, $A_{k+2}, \ldots$ все еще будут равны нулю (т. е. разнообразие T «не может распространиться дальше A_k»).

Упр. 2. Известно, что одна из 27 одинаковых по внешнему виду монет фальшивая и весит меньше остальных. Имеются весы, и фальшивая монета должна быть обнаружена с помощью возможно меньшего числа взвешиваний. *Не придумывая какого-либо конкретного способа взвешивания*, а лишь рассматривая весы как преобразователь, несущий информацию от монет к наблюдателю, укажите границу, ниже которой число взвешиваний не может опуститься. (Указание: чему равно разнообразие отдельного взвешивания, если оно может иметь только следующие результаты: вес одинаков, левая чашка тяжелее, правая чашка тяжелее?)

8/15. *Задержка.* Комбинация систем из § 8/13

$$\boxed{Q} \to \boxed{R} \to \boxed{S}$$

может рассматриваться как комбинация

$$\boxed{T} \to \boxed{S},$$

где Q и R рассматриваются как образующие единую систему T, которая, конечно, является абсолютной. Если теперь наблюдатель будет изучать передачу разнообразия от T к S, причем фактически будут иметь место те же самые события, что и в § 8/13, то он обнаружит, что разнообразие передается маленькими порциями, шаг за шагом, в отличие от передачи его в § 8/11, которая совершалась полностью за один шаг.

Причина этого различия состоит попросту в том, что в § 8/11 вся доминирующая система (T) оказывала непосредственное воздействие на подчиненную систему (U), тогда как в случае системы из § 8/13 наше T содержит часть Q, не оказывающую никакого непосредственного воздействия на принимающую систему S. Воздействие со стороны Q должно было производиться через R и поэтому задерживалось.

Такая более медленная передача обычна в реальных системах просто потому, что многие из них построены из частей, которые не все оказывают непосредственное воздействие на воспринимающую систему. Так, если кора головного мозга, как воспринимающая система, испытывает воздействие среды (которая не оказывает на кору непосредственного воздействия), то это воздействие должно осуществляться через цепь систем: органы чувств, чувствительные нервы, ядра чувствительности и т. д.; тем самым создается известное замедление. Даже внутри одной такой части может происходить какая-нибудь передача от одной точки к другой, замедляющая передачу к следующей части.

Обратно, если при испытании такой системы, как T, обнаруживается, что она передает разнообразие другой системе только за определенное количество шагов, то можно предсказать, что при более подробном исследовании T окажется состоящей из подсистем, соединенных так, что не все переменные T оказывают непосредственное воздействие на S.

Упр. 1. Пусть T состоит из подсистем $A, \ldots, F$, соединенных друг с другом и с S согласно следующей диаграмме непосредственных воздействий:

$$\begin{tikzcd}
\boxed{A} \arrow[d] & \boxed{B} \arrow[l] \arrow[r, shift left] & \boxed{C} \arrow[l, shift left] \arrow[dl] \arrow[r] & \boxed{S} \\
\boxed{D} \arrow[r] & \boxed{E} \arrow[u] \arrow[r] & \boxed{F} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Сколько необходимо шагов для передачи в S всего разнообразия T?

Упр. 2. (Продолжение.) Сколько шагов потребует передача из T в S однозначного «сообщения» о состоянии T?

Упр. 3. Если система J с переменными w, x, y, z доминирует над системой K с переменной k и их связывает преобразование $w' = w - y$, $x' = w + xz$, $y' = 2wy - z$, $z' = yz^2$, $k' = x - 3k$, то сколько шагов необходимо для передачи в K всего разнообразия J?

Упр. 4. (Продолжение.) Сколько шагов займет в этой системе передача сообщения от w к z?

8.16. Чтобы углубить наше понимание этих вопросов, рассмотрим теперь случай двух систем, соединенных обратной связью:

$$\boxed{T} \rightleftarrows \boxed{U}\,.$$

В § 8/11 было показано, что T будет передавать разнообразие в U; но будет ли U, получив это разнообразие, передавать его обратно в T, еще более увеличивая тем самым разнообразие T?

Ответ снова дается непосредственным рассмотрением множества копий. Предположим, что первоначально разнообразием обладали только копии T, тогда как все копии U были в одном и том же состоянии. Разделим все множество на подмножества так, чтобы в каждом подмножестве все T были в каком-то одном состоянии; и пусть, скажем, подмножество i состоит из систем, в которых T находится в состоянии T_i. Внутри такого подмножества нет никакого разнообразия состояний, и разнообразию неоткуда возникнуть, поскольку вся (T,U)-система абсолютна. Поэтому первоначальное разнообразие T не увеличится ни на первом шаге, ни впоследствии. Итак, в детерминированной системе *обратная связь не приводит к самовозрастающему увеличению разнообразия.*

При рассмотрении обратной связи U с T важно следующее обстоятельство. Все, что U передает обратно в T, весьма сильно зависит от того, что имеется в T, ибо каждое U имеет обратную связь именно с тем T, которое воздействовало на него в предыдущем шаге, и ни с каким другим. Поэтому наше рассуждение требует точного рассмотрения соответствий между различными T и U.

Предшествующие параграфы показали, что хотя в простейших (только что рассмотренных) случаях подобные вопросы могут обсуждаться в словесной форме, в сложных случаях это может привести к недопустимым осложнениям. Здесь требуется символический аппарат, некоторая алгебра, которая позволила бы оперировать с соотношениями более или менее механически, чтобы сложности преодолевались применением правил оперирования с символами. По-видимому, подобный аппарат может представить теория множеств, особенно в форме, развитой Бурбаки и Риге[1]. Но здесь необходимы дальнейшие исследования.

---

[1] Жак Риге — современный французский математик, работает в области абстрактной алгебры; занимается также вопросами, связанными с быстродействующими цифровыми машинами. — *Прим. перев.*

8/17. *Взаимные помехи.* Если кислота и щелочь текут по одной и той же трубе, они разрушают друг друга; что произойдет, когда два сообщения проходят по одному и тому же каналу? Будут ли они мешать друг другу и разрушать друг друга?

Хватит и простых примеров, чтобы установить, что один и тот же физический канал может нести более чем одно сообщение без каких-либо взаимных помех, так что каждое сообщение будет двигаться, как если бы оно было единственным. Предположим, например, что некто хочет ежедневно сообщать своему корреспонденту об одном из 26 различных событий, используя для этого раздел персональных объявлений в газете; и предположим, что он решил в качестве кодированной формы печатать одну-единственную букву. Тот же самый канал «одной печатной буквы» может одновременно использоваться и для передачи других сообщений, с разнообразием 2, если буква может печататься либо как строчная, либо как заглавная. Два эти сообщения будут так же мало взаимодействовать, как если бы они были напечатаны на разных страницах. Так, если было послано десять последовательных сообщений, то последовательность NKeSztyZwm передала бы полностью как последовательность nkesztyzwm, так и последовательность 1101000100. Итак, два сообщения могут проходить через один и тот же физический предмет, не разрушая друг друга.

В качестве примера другого типа рассмотрим преобразование из упр. 2/14/11. Точку A''', например, можно рассматривать как закодированную форму точки A (и аналогично точку B''' — как закодированную форму точки B). Так, например, сокровища могли бы быть закопаны в A, оружие — в B, а памятные знаки поставлены в A''' и B'''. Но изменение положения B ведет к изменению A''', так что положение B играет существенную роль при закодировании A точкой A''' (и то же самое для A относительно B'''). Следовательно, два эти сообщения взаимодействуют. Тем не менее это взаимодействие не разрушает информации о том, где спрятаны сокровища и оружие, ибо если даны положения A''' и B''', то всегда могут быть восстановлены положения

A и B, т. е. сообщения все еще могут быть точно декодированы.

Условия, необходимые для того, чтобы два сообщения не действовали друг на друга разрушительно, можно найти следующим образом. Основной факт кодирования состоит в том, что *множество* сообщений преобразуется в множество образов (§ 8/4). С другой стороны, любые два сообщения различных типов можно поставить рядом и рассматривать их как составляющие одного и того же «векторного» сообщения, так же как две переменные всегда можно считать составляющими одного вектора. Так, если в рассмотренном выше случае с объявлениями в газете при помощи печатной буквы символ x изображает переменную «одно из 26 сообщений», а символ y изображает переменную «одно из двух сообщений», то напечатанная буква есть код единого сообщения (x, y).

Пусть нам дано, что два сообщения, x и y, не взаимодействуют разрушительным образом. Это означает, что значения как x, так и y могут быть восстановлены из формы, полученной на приемном конце канала. Отсюда следует, что если два первоначальных послания различны, то и их закодированные формы должны быть различны (ибо в противном случае однозначное декодирование было бы невозможно). А отсюда следует, что если взаимодействие сообщений должно быть неразрушительным, то *разнообразие получаемых форм должно быть не меньше разнообразия первоначальных форм.* Это условие выполняется в примере с напечатанной буквой, ибо как первоначальные сообщения, так и печатная форма имеют разнообразие 26×2.

То обстоятельство, что при встрече двух сообщений в одном и том же канале вовсе не обязательно возникает хаос, имеет огромную важность в нейрофизиологии, особенно в нейрофизиологии коры головного мозга. Здесь богатство связей столь велико, что неизбежно возникает значительное смешение сообщений, хотя бы только из-за отсутствия способа удерживать их разделенными. Так, поток импульсов, идущий от слухового центра и несущий информацию, относящуюся к некоторой реакции, может встретиться с потоком информации, идущим от зрительного центра и несущим информацию, относящуюся к какой-либо другой реакции. И это было серьезной проблемой в нейрофизиологии — установить, как в подобных случаях предотвращается разрушительное взаимодействие и хаос.

Однако настоящий параграф показывает, что проблема эта поставлена неправильно. Вовсе не обязательно возникает хаос, когда встречаются два сообщения, даже если оба они действуют на одно и то же множество физических переменных. Если только не теряется разнообразие и механизм детерминирован во всех деталях, то эти сообщения могут сохраняться во всех изменениях, переходя просто из одного кода в другой. Все, что необходимо для их восстановления, — это подходящий обратный преобразователь; а как мы видели в § 8/7, его построение всегда возможно.

Упр. 1. (См. упр. 2/14/11.) Пусть A''' находится в точке (0,0), а B''' — в (0, 1); восстановите положение A.

Упр. 2. Преобразователь имеет два параметра: α (который может принимать значение a и A) и β (который может принимать значения b и B). Его состояния W, X, Y, Z преобразуются согласно таблице

$\downarrow$	W	X	Y	Z
(a, b)	W	Y	Y	Y
(a, B)	X	X	W	W
(A, b)	Z	W	X	X
(A, B)	Y	Z	Z	Z

Два сообщения: серия значений α и серия значений β — начинают передаваться одновременно. Если адресат интересуется только α-сообщениями, то всегда ли он может восстановить их, независимо от того, что передается посредством β? (Указание: § 8/6.)

Упр. 3. Соедините стержни шарнирами, как показано на рис. 8/17/1. (Шарнирные соединения на рисунке разделены, чтобы показать конструкцию.) P — укрепленная на опоре ось, вокруг которой может вращаться стержень R; то же самое Q и S. Стержень M проходит над осью P, не будучи связан с ней; то же самое N и Q. Цилиндрическая направляющая C обеспечивает, чтобы все движения на небольшие углы были направлены только направо или налево (как показано на чертеже).

Движения A и B вызывают движения L и N и далее Y и Z, так что весь механизм может рассматриваться как средство для посылки сообщений «положение A» и «положение B» через L и N к выходам Y и Z. Можно установить, что при неподвижном B движения A вызывают движения

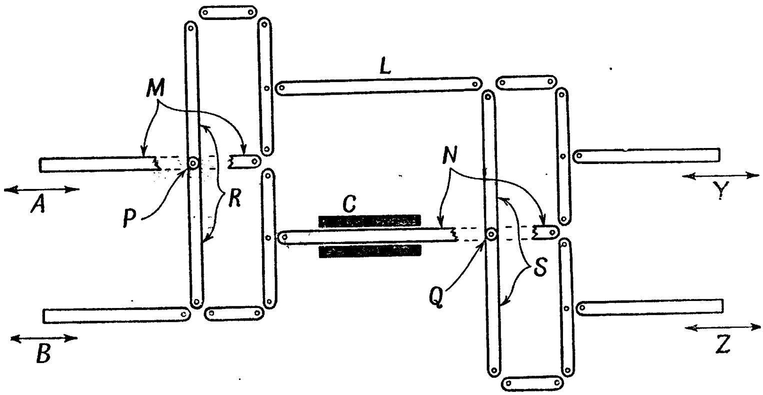


Рис. 8/17/1.

как L, *так и* N; и аналогично при неподвижном A движения B воздействуют и на L, и на N. Таким образом, одновременные сообщения из A и B проходят через L и N одновременно и, очевидно, встречаются там. Разрушаются ли они при взаимодействии? (Указание: как движется Y, если движется только A?)

***Упр.* 4.** (Продолжение.) Найдите алгебраическое соотношение между положениями A, B, Y и Z. Что означает «декодирование» в этой алгебраической форме?

ГЛАВА 9

Непрекращающаяся передача

9/1. В настоящей главе будет продолжена тема предыдущей главы. Мы будем рассматривать разнообразие и его передачу, но будем заниматься особым случаем — передачей, продолжающейся неопределенно долгое время. Так обстоит дело, например, в случае седалищного нерва или телефонного кабеля, которые беспрерывно несут сообщения, в отличие от передач, рассмотренных в предыдущей главе, где изучались лишь немногие шаги во времени.

Непрекращающаяся передача специально исследовалась Шенноном, и фактически эта глава будет в основном посвящена тому, чтобы ввести в круг идей его работы «Математическая теория связи», причем особое внимание будет уделяться отношению этой работы к другим темам нашего «Введения в кибернетику».

Однако настоящая глава представляет собой скорее ряд заметок, имеющих целью дополнить мастерскую работу Шеннона, чем ее законченное изложение. Книга Шеннона должна рассматриваться как основной источник, и с ней следует ознакомиться предварительно [1]. Я исхожу из того, что читатель имеет возможность использовать эту книгу.

---

[1] Рекомендуем читателю также следующую популярную книжку: Яглом А. М. и Яглом И. М., Вероятность и информация. — *Прим. ред.*

9/2. *Недетерминированное преобразование.* Если передача должна продолжаться в течение неопределенно долгого времени, то разнообразие должно беспрерывно поддерживаться и, следовательно, мы имеем случай, отличный от изученного в § 8/11, где передача разнообразия T останавливалась после первого шага[1]. Но никакая детерминированная система конечной величины не может иметь бесконечно длинной траектории (§ 4/5). Поэтому мы должны рассмотреть более общую форму машины и преобразования — недетерминированную.

До сих пор все наши преобразования были однозначными и изображали, таким образом, детерминированные машины. Некоторое расширение этого было указано в § 2/10, и мы можем теперь исследовать возможности, которые нам открываются в случае, когда операнд имеет более чем один образ. Здесь, однако, требуются дополнительные ограничения, чтобы удерживать эти возможности внутри определенных границ, подчиненными некоторому закону. Они не должны становиться совершенно хаотичными. Многочисленные применения находит случай, в котором каждый операнд, вместо того чтобы преобразовываться в определенное новое состояние, может перейти в одно из ряда возможных состояний, причем выбор конкретного состояния осуществляется некоторым способом или процессом, придающим каждому состоянию *постоянную вероятность* стать образом. Именно неизменность вероятности и обеспечивает ту закономерность или упорядоченность, на которой могут основываться точные высказывания.

Таково, например, преобразование $x' = x + a$, где значение a находится бросанием монеты по правилу: если герб, то $a = 1$; если решетка, то $a = 0$. Например, если начальное состояние x равно 4 и бросание монеты дает последовательность *РРГГГРГРРГ*, то траектория будет иметь вид 4, 4, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 8, 8, 9. А если бросание монеты даст *ГРГГРРРГРР*, то траектория будет иметь вид 4, 5, 5, 6, 7, 7, 7, 7, 8, 8, 8. Таким образом, недостаточно знать преобразование и начальное состояние, чтобы определить однозначно траекторию, как это было

[1] Ср. подстрочное примечание на стр. 219. — *Прим. ред.*

в § 2/17; они определяют только некоторое *множество* траекторий. Данное здесь определение *дополнено* указаниями, полученными при бросании монеты (ср. § 4/19), в результате чего мы и приходим к *единственной* траектории.

Это преобразование может быть представлено (по образцу ранее употреблявшихся представлений) в следующем виде:

$$\begin{array}{ccc} & 3 & \\ \frac{1}{2}\swarrow & & \searrow\frac{1}{2} \\ 3 & & 4 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 4 & \\ \frac{1}{2}\swarrow & & \searrow\frac{1}{2} \\ 4 & & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & 5 & \\ \frac{1}{2}\swarrow & & \searrow\frac{1}{2} \\ 5 & & 6 \end{array} \ \text{и т. д.,}$$

где $\frac{1}{2}$ означает, что из состояния 3 система перейдет

с вероятностью $\frac{1}{2}$ в состояние 3

и с вероятностью $\frac{1}{2}$ в состояние 4.

Такое преобразование, и особенно множество траекторий, которое оно может произвести, называют «стохастическим», чтобы отличить его от однозначного и детерминированного преобразования.

Если из каждого состояния возможно много переходов, такое представление скоро становится неудобным. Более удобным и в основном довольно подходящим представлением является матрица, подобная матрице из § 2/10. Матрица строится выписыванием возможных операндов в строку наверху и возможных образов в столбец слева; затем на пересечении столбца i со строкой j записывается вероятность того, что система из состояния i перейдет в состояние j.

В качестве примера рассмотрим только что описанное преобразование. Если система находилась в состоянии 4, а вероятность выпасть гербу при бросании монеты равна $\frac{1}{2}$, то вероятность перехода системы в состояние 5 равна $\frac{1}{2}$; и такова же будет вероятность того, что система останется в состоянии 4:

$$\begin{array}{c|ccccccc}
\downarrow & \ldots & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots \\
\hline
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
3 & \ldots & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
4 & \ldots & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \ldots \\
5 & \ldots & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \ldots \\
6 & \ldots & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

Все другие переходы имеют вероятность, равную нулю. Так, клетка за клеткой, и строится эта матрица.

Описанная матрица называется матрицей **переходных вероятностей,** т. е. вероятностей перехода. (Читателю следует иметь в виду, что в литературе более обычна транспонированная форма, при которой строки и столбцы меняются местами; но данная форма имеет существенные преимущества — см., например, упр. 12/8/4, — помимо того, что она соответствует принятым в нашей книге обозначениям.)

Здесь мы обязаны совершенно ясно представлять себе, чтó мы понимаем под «вероятностью» (см. также § 7/4). Мы не только должны ясно представлять себе смысл этого слова, но сам смысл должен быть сформулирован в виде *практического,* операционального критерия. (Субъективные ощущения «степени уверенности» здесь неприменимы.) Итак, если два наблюдателя несогласны в том, имеет ли нечто «постоянную вероятность», то какое испытание может разрешить эту трудность?

Вероятность есть частота[1]. «„Вероятное“ событие есть

---

[1] Такая формулировка является, конечно, грубым упрощением. При большом числе испытаний частота появления какого-либо события, имеющего заданную вероятность, лишь (и то только как правило) мало отличается от этой вероятности. См. по этому поводу статью А. Н. Колмогорова «Вероятность» в Большой Советской Энциклопедии. — *Прим. ред.*

частое событие» (Фишер). Дождь вероятен в Манчестере, потому что он часто идет в Манчестере; а десять «красных» подряд в рулетке «невероятно», поскольку это случается нечасто. (Благоразумный читатель будет крепко держаться за это определение, не давая вовлечь себя в такие чисто спекулятивные вопросы, как вопрос о численном значении «вероятности» жизни на Марсе, которая не может иметь никакой частоты.) Сюда относится и все то, что было сказано в § 7/4, ибо понятие вероятности, в его практических аспектах, имеет смысл лишь в применении к некоторому множеству, в котором различные события или возможности встречаются каждая с характерной для нее частотой.

Проверка наличия постоянной вероятности становится, таким образом, проверкой наличия постоянной частоты. Проверяющий предоставляет процессу продолжаться в течение некоторого времени, пока не обнаружится определенная частота данного события. Так, если он хочет узнать, имеет ли Манчестер постоянную, т. е. неизменную вероятность дождя (в соответствующим образом определенных условиях), то он будет регистрировать дожди, пока не получит первую оценку их частоты. Затем он начнет снова, соберет новые записи и получит вторую оценку. Он может продолжать собирать данные для третьей и четвертой оценки. Если эти несколько оценок обнаружат серьезное расхождение, то он скажет, что дождь в Манчестере не имеет постоянной вероятности. Если, однако, они сходятся, то при желании он может сказать, что та дробь, на которой они сходятся, и есть постоянная вероятность. Итак, некоторое событие *в очень длинной последовательности* имеет «постоянную» вероятность осуществления на каждом шаге, если в любом длинном отрезке последовательности оно осуществляется с приблизительно одинаковой относительной частотой.

Сказанное можно сформулировать более точно в математических терминах. Здесь важно лишь отметить, что во всей книге любые высказывания о «вероятности» имеют объективный смысл и их справедливость может быть экспериментально проверена. Они не зависят ни от какой субъективной оценки.

Упр. 1. Возьмите пять игральных карт: туз, двойку, тройку, четверку и пятерку. Перетасуйте их и разложите в ряд, замещая ими звездочки в преобразовании T:

$$T: \downarrow \begin{array}{ccccc} \text{Туз} & \text{Двойка} & \text{Тройка} & \text{Четверка} & \text{Пятерка} \\ * & * & * & * & * \end{array}$$

Является ли полученное таким образом конкретное преобразование детерминированным или нет?
(Указание: однозначно ли оно?)

Упр. 2. Какое правило должно соблюдаться для чисел, стоящих в каждом столбце матрицы переходных вероятностей?

Упр. 3. Соблюдается ли какое-нибудь правило, подобное правилу из упр. 2, в отношении чисел в каждой строке?

Упр. 4. Если преобразование, определенное в этом параграфе, начинает действовать с 4 и продолжается 10 шагов, то сколько траекторий содержит *множество*, определяемое таким способом?

Упр. 5. Чем кинематический график стохастического преобразования отличается от графика детерминированного преобразования?

9/3. Стохастическое преобразование есть просто обобщение детерминированного (или однозначного преобразования). Так, предположим, что матрица переходных вероятностей системы с тремя состояниями была сначала

↓	*A*	*B*	*C*
A	0	0,9	0,1
B	0,9	0	0
C	0,1	0,1	0,9

,

а затем

↓	*A*	*B*	*C*
A	0	1	0
B	1	0	0
C	0	0	1

.

Переход от первой матрицы ко второй, хотя он и невелик (и может быть сколь угодно уменьшен), переводит систему из явно стохастического типа в систему с однозначным преобразованием

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ B & A & C \end{matrix}$$

того типа, который рассматривался во всей предшествующей части книги. *Таким образом, однозначное детерми-*

нированное преобразование есть просто особый, предельный случай стохастического преобразования. Оно есть стохастическое преобразование, в котором все вероятности сделались равными 0 или 1. Эта принципиальная одинаковость не должна заслоняться тем обстоятельством, что иногда удобно говорить о детерминированном типе, а иногда — о типах, для которых важна дробность вероятностей. Во всей части III принципиальная одинаковость этих двух типов будет играть важную роль, обусловливая единство различных типов регулирования.

Слово «стохастическое» может употребляться в двух смыслах. Оно может означать: «все типы (с постоянной матрицей переходных вероятностей), включая детерминированные как особый случай»; или оно может означать: «все типы, кроме детерминированного». Могут употребляться оба значения, но поскольку они несовместимы, надо внимательно следить за тем, чтобы контекст указывал, какое из них имеется в виду.

ЦЕПЬ МАРКОВА

9/4. Теперь, после восьми глав, мы знаем кое-что о том, как изменяется система, если ее переходы соответствуют переходам однозначного преобразования. Но как обстоит дело с поведением системы, переходы которой соответствуют переходам стохастического преобразования? Как будет выглядеть такая система, когда она действительно работает?

Предположим, что какое-то насекомое живет в мелком пруду и около него: иногда оно находится в воде (W), иногда под камнями (P), иногда на берегу (B). Предположим, что для каждой единицы времени существует постоянная вероятность того, что, находясь под камнем, насекомое перейдет на берег; и то же самое для других возможных переходов. (Мы можем допустить, если хотим, что действительное поведение насекомого определяется более мелкими деталями и событиями в окружающей среде.) Таким образом, протокольная запись положений насекомого может гласить: *WBWB WPWBWBWBWPWBBWBWPWBWPWBWBWBBW*

BWBWBWPPWPWBWBBBW. Предположим для определенности, что вероятности переходов суть

↓	*B*	*W*	*P*
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
W	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
P	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

Эти вероятности можно найти, если наблюдать поведение насекомого за длинные промежутки времени, а затем найти частоту, скажем, для $B \to W$ и определить относительные частоты [1], которые и являются вероятностями [2]. Таблица этих вероятностей будет по существу *сводкой фактического прошлого поведения,* извлеченной из протокола.

Такая последовательность состояний, в которой для различных длинных интервалов вероятность каждого перехода одинакова, известна под названием **цепи Маркова,** по имени математика, который первый серьезно исследовал ее свойства [3]. (Огромное значение цепей Маркова стало признаваться лишь в течение последних десяти лет или около того. В математической литературе описываются различные типы цепей Маркова и излагаются различные их характеристики. Определенный выше тип дает все, что нам требуется, и не противоречит другим определениям; одно существенное дополнение упоминается в § 9/7.)

---

[1] Чтобы найти, скажем, относительную частоту перехода из *B* в *W*, надо разделить уже найденную (абсолютную) частоту перехода $B \to W$ на (абсолютную) частоту появления *B*. — *Прим. ред.*

[2] Ср. подстрочное примечание на стр. 232. — *Прим. ред.*

[3] См. статью А. А. Маркова «Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга», опубликованную в Известиях Физико-математического общества при Казанском университете и перепечатанную в «Избранных трудах» А. А. Маркова.

Элементарное введение в теорию цепей Маркова содержится в третьем разделе 6-го выпуска «Библиотеки математического кружка»: Дынкин Е. Б. и Успенский В. А., «Математические беседы».— *Прим. ред.*

Термин «цепь Маркова» иногда относится к конкретной траектории системы (например, к такой траектории, как в упр. 1), а иногда и к самой системе (определяемой ее матрицей), которая способна производить много траекторий. Употребление одного из этих смыслов должно определяться контекстом.

Упр. 1. Система с двумя состояниями дает протокол (50 переходов):

ABABBBABAABABABABBBBAB
AABABBAABABBABAAABABBA
ABBABBA.

Напишите оценку ее матрицы переходных вероятностей.

Упр. 2. Используйте способ § 9/2 (с бросанием монеты) для построения различных траекторий, чтобы показать, что *одна* матрица может произвести *много* различных траекторий.

Упр. 3. С помощью таблицы случайных чисел[1] постройте цепь Маркова для двух состояний *A* и *B* согласно правилу:

Если		То
нынешнее состояние	случайное число	следующее состояние
A	0 или 1	*A*
»	2, 3 ... 9	*B*
B	0, 1, 2, 3, 4	*A*
»	5, 6, 7, 8, 9	*B*

Упр. 4. (Продолжение.) Какова матрица переходных вероятностей этой цепи Маркова?

9/5. Упражнение 9/4/1 показывает, как поведение системы определяет ее матрицу. И, обратно, матрица содержит информацию о тенденциях изменения системы, хотя и не во всех подробностях. Так, предположим, что ученый (не первоначальный наблюдатель) видит матрицу переходных вероятностей насекомого

↓	*B*	*W*	*P*
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
W	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
P	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

[1] См. «Статистические таблицы» Фишера и Йейтса. — *Прим. ред.*

Он может сделать вывод, что, попав в воду, насекомое не остается там, ибо $W \to W$ имеет нулевую вероятность, но обычно выходит на берег, ибо $W \to B$ имеет наивысшую вероятность в соответствующем столбце. С берега оно, вероятно, перейдет в воду, а затем обратно на берег. Находясь под камнями, оно также стремится перейти в воду. Итак, очевидно, что оно проводит большую часть времени колеблясь между берегом и водой. Под камнями оно будет проводить незначительную часть времени. Приведенный выше протокол, который был построен с помощью таблицы случайных чисел, обнаруживает эти свойства.

Таким образом, матрица содержит информацию о вероятном поведении любой конкретной системы.

Упр. 1. Если бы в столбце P рассматриваемой матрицы стояла 1 в нижней клетке и нули в остальных, что можно было бы заключить об образе жизни этого насекомого?

Упр. 2. Муха летает по комнате между положениями A, B, C и D со следующими переходными вероятностями:

↓	A	B	C	D
A	$\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{4}$	1	0	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
D	0	0	$\frac{1}{2}$	0

Одно из положений — чересчур жаркая печка, другое — липкая бумага. Укажите эти положения.

Упр. 3. Если рассматривать протокол и матрицу в упр. 9/4/1 как взаимные кодирования, то при каком направлении кодирования теряется информация?

9/6. *Равновесие в цепи Маркова.* Предположим теперь, что большое число таких насекомых живет в одном пруду и что поведение каждого из них независимо от поведения других. Если мы отойдем от пруда, отдельные насекомые постепенно исчезнут из вида и мы будем видеть только три больших облака, три популяции — одну на берегу, другую в воде и третью под камнями. Эти три *популяции* становятся теперь тремя количествами, которые могут изменяться во времени. Если в данный момент они будут равны соответственно d_B, d_W и d_P, то можно найти их значения d'_B и т. д. через данный промежуток времени, рассмотрев поведение составляющих их отдельных насекомых. Так, три четверти насекомых, находившихся в воде, перейдут в B и их число прибавится в d_B, в то время как оставшаяся четверть прибавится к d_P. Следовательно, после этого перехода новая популяция на берегу d'_B будет равна $\frac{1}{4}d_B+\frac{3}{4}d_W+\frac{1}{8}\ d_P$. Следовательно, в общем три наши *популяции* будут изменяться в соответствии с преобразованием (вектора с тремя составляющими).

Следует отметить как обстоятельство первостепенной важности, что система

$$\begin{aligned}
d'_B &= \frac{1}{4}\,d_B+\frac{3}{4}\,d_W+\frac{1}{8}\,d_P,\\
d'_W &= \frac{3}{4}\,d_B+\frac{3}{4}\,d_P,\\
d'_P &= \frac{1}{4}\,d_W+\frac{1}{8}\,d_P,
\end{aligned}$$

образованная тремя популяциями, *детерминированна* (если она достаточно велика, чтобы быть свободной от случайностей выбора), хотя поведение отдельных насекомых определяется лишь с некоторой вероятностью.

Чтобы проследить этот процесс во всех деталях, предположим, что мы начинаем эксперимент, помещая 100 насекомых под камни и наблюдая, что произойдет затем. Начальный вектор трех популяций (d_B, d_W, d_P) будет, следовательно, равен $(0, 0, 100)$. Какими будут эти числа на следующем шаге, зависит от капризов случайного выбора, ибо отнюдь не *невозможно*, чтобы все сто насекомых остались под камнями. Однако в среднем (т. е. если выводится среднее из повторных опытов со всей сотней) под камнями будет оставаться только около 12,5 насекомых, в то время как остальные перейдут на берег (также 12,5) и в воду (75). Таким образом, после первого шага наши популяции обнаружат изменение (0, 0, 100) → → (12,5; 75; 12,5).

Этим способом можно шаг за шагом находить средние числа трех популяций, применяя процедуру из § 3/6. Следующим состоянием окажется (60,9; 18,8; 20,3); траектория этой системы (с тремя — а не со ста — степенями свободы) показана на рис. 9/6/1.

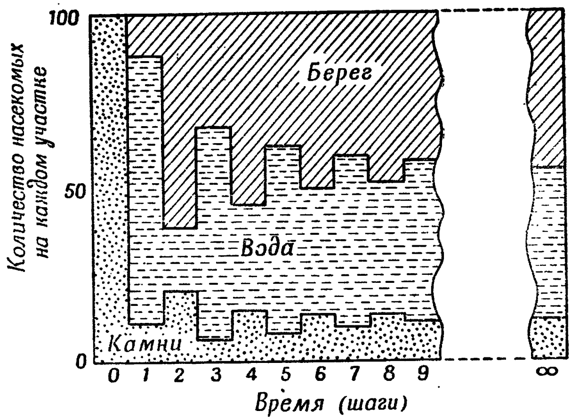


Рис. 9/6/1.

Мы видим, что наши популяции, испытывая затухающие колебания, стремятся к состоянию равновесия (44,9; 42,9; 12,2), в котором система будет оставаться неограниченно долго. Под «системой» здесь понимаются, конечно, эти три переменные.

Следует заметить, что когда система устоялась и практически пришла к окончательным популяциям, появляется резкий контраст между популяциями, которые не изменяются, и насекомыми, которые беспрерывно движутся. Таким образом, с одним и тем же прудом могут быть связаны два совершенно различных смысла одного и того же слова «система». («Равновесие» здесь соответствует тому, что физик называет «установившимся режимом».)

Легко вычислить равновесные значения цепи Маркова. При равновесии значения не изменяются, так что, скажем, d'_B равно d_B. Ввиду этого первая строка системы уравнений принимает вид

$$d_B = \frac{1}{4} d_B + \frac{3}{4} d_W + \frac{1}{8} d_P,$$

т. е.

$$0 = -\frac{3}{4} d_B + \frac{3}{4} d_W + \frac{1}{8} d_P.$$

Так же преобразуются остальные строки. Однако не все строки независимы, поскольку три популяции должны в этом примере давать в сумме 100; поэтому одна строка (любая) вычеркивается и заменяется строкой

$$d_B + d_W + d_P = 100.$$

Таким образом, система принимает, например, следующий вид:

$$\begin{aligned} -\frac{3}{4} d_B + \frac{3}{4} d_W + \frac{1}{8} d_P &= 0, \\ d_B + d_W + d_P &= 100, \\ \frac{1}{4} d_W - \frac{7}{8} d_P &= 0. \end{aligned}$$

Ее можно решить обычным путем. В этом примере равновесными значениями будут (44,9; 42,9; 12,2); как и было предсказано в § 9/5, каждое отдельное насекомое не проводит много времени под камнями.

Упр. 1. Найдите последующие популяции, если в начальном состоянии все насекомые находятся на берегу.

Упр. 2. Проверьте равновесные значения.

Упр. 3. На грани x шестигранной кости спрятан грузик. Если положить кость в ящик гранью f кверху и встряхнуть, то вероятность того, что она ляжет гранью g кверху, окажется после продолжительных испытаний следующей:

	↓	f: 1	2	3	4	5	6
	1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	2	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	3	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
g	4	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	5	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
	6	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

На какой грани спрятан грузик? (Указание: будьте осторожнее!) [1]

Упр. 4. Соединение AB растворяется в воде. В каждый небольшой промежуток времени каждая молекула имеет вероятность диссоциировать, равную 1%, и каждая диссоциированная молекула A имеет вероятность вновь вступить в соединение, равную 0,1%. Какова матрица переходных вероятностей молекулы с двумя состояниями: «диссоциирована» — «не диссоциирована»? (Указание: можно ли пренебречь числом диссоциированных молекул B?)

Упр. 5. (Продолжение.) Каково равновесное значение степени диссоциации?

Упр. 6. Выпишите преобразования: (I) переходов отдельного насекомого и (II) переходов популяций [2]. Как они относятся друг к другу?

Упр. 7. Сколько состояний обнаруживается в переходах насекомого? Сколько в системе популяций?

**Упр.* 8. Пусть D — записанный в виде столбца вектор, составляющими которого служат популяции в различных состояниях; D' — этот же вектор шагом позже; M — матрица переходных вероятностей. Покажите, что в обычной матричной алгебре

$$D' = MD, \qquad D'' = M^2D \quad \text{и} \quad D^{(n)} = M^nD.$$

(Это простое и естественное соотношение исчезает, если выписать матрицу в транспонированной форме.)

9/7. *Зависимость от предыдущих значений.* В определении цепи Маркова, данном в § 9/4, опущен один важный момент: *вероятности перехода не должны зависеть от состояний, предшествующих операнду.* Например, если насекомое ведет себя как цепь Маркова, то оно перейдет с берега в воду в 75% случаев, независимо от того, было ли оно перед этим на берегу, в воде или под камнями. Это можно проверить экспериментально, подсчитав процент перехода в каждом из трех возможных случаев и установив, что во всех случаях он равен 75%.

Вот протокол, в котором эта независимость не соблюдается:

AABBABBAABBABBABBABBAABBABBABABA.

---

[1] Предполагается, что противоположные грани занумерованы соседними цифрами. — *Прим. ред.*

[2] Здесь, как и в следующем упражнении, термин «популяция» означает вектор, составляющими которого служат три популяции (в обычном смысле) насекомых: на берегу, в воде, под камнями.— *Прим. ред.*

Прямой подсчет дает переходы

↓	A	B
A	3	10
B	10	8

В частности, мы видим, что A и B следуют за B почти с одинаковой частотой. Если же мы переклассифицируем эти 18 переходов от B в соответствии с тем, какая буква предшествовала B, то получим:

$$\text{за} \ldots AB \text{ следовало } \begin{cases} A:2 \text{ раза} \\ B:8 \quad » \end{cases}$$

$$\text{за} \ldots BB \text{ следовало } \begin{cases} A:8 \quad » \\ B:0 \quad » \end{cases}$$

Мы явно видим, что состояние, следующее за B, зависит от состояния, предшествовавшего B. Таким образом, эта последовательность не является цепью Маркова. Иногда этот факт можно описать метафорически, говоря, что «память» системы простирается более чем на один шаг назад (ср. § 6/21).

Эта зависимость вероятности от того, что было раньше, является характерной особенностью последовательностей букв в таких языках, как английский. Какова, например, вероятность того, что за *s* будет стоять *t*? Это во многом зависит от того, что стоит перед *s*; так, после сочетания *es* буква *t* встречается часто, а после сочетания *ds* — редко. Если бы буквы образовывали цепь Маркова, то *t* следовало бы за *s* с одинаковой частотой в обоих случаях.

Эти зависимости характерны для языка и обнаруживаются в нем в большом количестве, от простых связей только что упомянутого типа до связей большой протяженности, которые делают заключительные слова «...кантианского трансцендентализма» более вероятными в книге, начинающейся словами «Университет XVIII столетия...», чем в книге, начинающейся словами «Современные скаковые лошади...»

Упр. Как состояние, непосредственно предшествующее каждому операнду, влияет на частоту четырех переходов $C \to C$, $C \to D$, $D \to C$, $D \to D$ в протоколе

DDCCDCCDDCCDCCDDCCDCCDDCCDDDDCC
DDDDCCDDDCCDCCDC?

(Указание: классифицируйте наблюдаемые переходы.)

9/8. *Перекодирование в марковскую форму.* Если оказывается, что в траекториях системы переходные вероятности зависят некоторым *постоянным* образом от состояний, непосредственно предшествующих каждому операнду, то эту немарковскую систему можно сделать марковской, применяя метод, более существенный, чем может показаться на первый взгляд, а именно — переопределяя систему.

Пусть, например, в системе типа упр. 9/7/1 переходы таковы, что по окончании последовательности двух состояний ...*CC* система всегда переходит в *D*, независимо от того, что было раньше; после же ...*DC* она всегда переходит в *C*, а после ...*CD* она с одинаковой частотой (если взять достаточно длинный отрезок) переходит в *C* или *D* и то же самое после ...*DD*. Нам здесь нужно лишь определить новые состояния как векторы с двумя составляющими: предшествующим состоянием в качестве первой составляющей и последующим состоянием в качестве второй составляющей. Так, если первоначальная система прошла траекторию, оканчивающуюся на ...*DC*, мы скажем, что новая система находится в состоянии (D, C). Если первоначальная система перейдет затем в состояние *C*, так что траектория ее будет иметь вид ...*DCC*, то мы скажем, что новая система перешла в состояние (C, C). В целом же новая система совершила переход $(D, C) \to (C, C)$. Эти новые состояния уже *будут* образовывать цепь Маркова, ибо их вероятности (как мы допустили) не зависят от предшествующих состояний; и в самом деле матрица их будет иметь вид

$\downarrow$	(C, C)	(C, D)	(D, C)	(D, D)
(C, C)	0	0	1	0
(C, D)	1	0	0	0
(D, C)	0	$1/2$	0	$1/2$
(D, D)	0	$1/2$	0	$1/2$

[Заметим, что переход $(C, D) \to (C, D)$ невозможен, ибо любое состояние, оканчивающееся на $(—, D)$, может перейти только в состояние, начинающееся с $(D, —)$. Некоторые другие переходы также невозможны в новой системе.]

Если в другой системе вероятности перехода зависят от состояний, встречавшихся на n предыдущих шагах, то новые состояния должны определяться как векторы из n последовательных состояний.

Этот метод переопределения системы может показаться искусственным и бесцельным. В действительности же он имеет первостепенное значение, поскольку он переводит наше внимание от системы с недетерминированными состояниями к системе с детерминированными состояниями. Поведение новой системы более предсказуемо, ибо ее «состояния» учитывают прошлую историю первоначальной системы. Так, в первоначальной форме, зная, что система находится в состоянии C, можно было сказать только, что она может перейти либо в C, либо в D. Во второй форме знание того, что система находится в состоянии (D, C), позволяет предсказать ее поведение с такой же определенностью, с какой можно было бы предсказать поведение системы в первоначальной форме, зная, какие состояния имели место раньше. Здесь важно отметить следующее обстоятельство. Наш метод переопределения показывает, что два способа «знать» систему — по ее нынешнему состоянию или по ее прошлой истории — связаны друг с другом вполне определенной, точной зависимостью. В теории неполностью наблюдаемой системы (6/21) это обстоятельство использовалось по существу таким же образом. Итак, мы опять приходим к заключению, что наличие «памяти» в реальной системе не является внутренним свойством системы; мы предполагаем ее наличие, когда наши возможности наблюдения ограничены. Сказать: «Мне кажется, что эта система имеет память», — все равно что сказать: «Мои возможности наблюдения не позволяют мне делать достоверных предсказаний на основе одного наблюдения, но я могу делать достоверные предсказания после некоторой последовательности наблюдений».

9/9. *Последовательность как вектор.* В предшествующих главах мы часто использовали векторы, но до сих пор они всегда имели конечное и притом определенное число составляющих. Однако вектор может иметь бесконечное или неопределенно большое число составляющих. При достаточной внимательности это усложнение не представляет большой опасности.

Так, последовательность может рассматриваться как вектор, первой составляющей которого является первый член последовательности и так далее до *n*-й составляющей, которой является *n-й* член последовательности. Например, если я пять раз бросаю монету, то результат, взятый в целом, может быть вектором с пятью составляющими (*Г, Р, Р, Г, Р*). Такие векторы обычны в теории вероятностей, где они могут порождаться повторным выбором.

Если такой вектор образуется выбором с возвращением, он имеет только ту небольшую особенность, что каждая составляющая берется из одного и того же множества значений, тогда как более общий тип, как, например, в § 3/5, может иметь разные множества значений для разных составляющих.

9/10. *Ограничения разнообразия в множестве последовательностей.* Какое-либо множество таких последовательностей, так же как и какое-либо множество векторов (§ 7/11), может обнаруживать ограничение разнообразия, когда оно не охватывает всей области значений, которую могли бы образовать составляющие, если бы они были независимы. Если последовательность имеет конечную длину, как, например, последовательность пяти бросаний монеты, приведенная в предыдущем параграфе, то ограничение разнообразия можно выявить и исследовать точно так же, как в § 7/11. Если же она имеет неопределенную длину, как это часто бывает с последовательностями (протяженность которых часто произвольна и несущественна), то надо применять какой-нибудь другой метод, не меняя, однако, существа дела.

Такой метод можно найти, рассмотрев, каким образом может задаваться вектор неопределенной длины. Ясно, что составляющие и значения такого вектора не могут быть совершенно произвольными, как в § 3/5, ибо в этом случае потребовалось бы бесконечное количество времени и бумаги, чтобы его выписать. Обычно такие векторы неограниченной длины задаются некоторым процессом. Сначала задается исходная составляющая, а затем применяется некоторый определенный процесс (преобразование), порождающий последовательно остальные состояния (как «интегрирование» в § 3/9).

Отсюда можно вывести условия, которые необходимы для того, чтобы множество таких векторов не обнаруживало никакого ограничения разнообразия. Предположим, что мы строим множество «без всяких ограничений», переходя последовательно от состояния к состоянию. Согласно § 7/12, первая составляющая должна пробегать всю область своих значений; тогда *каждое* из этих значений должно комбинироваться с каждым из возможных значений второй составляющей, а каждая из этих пар должна комбинироваться с каждым из возможных значений третьей составляющей и т. д. Правило состоит в том, что при добавлении каждой новой составляющей должны допускаться *все* ее возможные значения.

Теперь мы видим, что *множество векторов, не обнаруживающее ограничения разнообразия, соответствует цепи Маркова, в которой на каждом этапе все переходы равновероятны*[1]. (Когда вероятность становится

[1] Здесь автор не совсем точен. Если даже не все переходы равновероятны, то (при условии, что все они возможны, т. е. соответствующие вероятности отличны от нуля) возможны все векторы (так, в упр. 9/4/3 возможно — хотя и маловероятно — появление вектора, все составляющие которого равны A), и потому ограничения разнообразия (если понимать его в смысле § 7/8 и 7/11) не обнаруживается. При неравновероятных переходах ограничение разнообразия (уже не в абсолютном смысле главы 7, а в новом, вероятностном смысле) обнаруживается в том, что некоторые векторы оказываются более, а другие менее вероятными; при повторениях опыта одни векторы будут получаться, как правило, чаще чем другие; некоторые векторы будут настолько редки, что могут считаться практически невозможными. Эти рассуждения не применимы прямо к бесконечным последовательностям: вероятность каждой такой отдельно взятой последовательности равна нулю. Разумеется, нельзя провести опыт с целью получения всей бесконечной последовательности. Из всего множества последовательностей можно, однако, выделить подмножество вероятности 1 (т. е. вероятность того, что случайно выбранная последовательность попадёт в это множество, равна 1), обнаруживающее сильное ограничение разнообразия в смысле § 7/9. Более того, если не все переходы равновероятны, то, задав произвольное $\varepsilon > 0$, для каждого n в множестве векторов длины n можно выделить

фактической частотой, то возникает много различных цепей, образуя таким образом *множество* последовательностей.) Например, если каждая составляющая может принимать три состояния, то при отсутствии ограничений разнообразия возможные последовательности образуют множество, порождаемое матрицей

↓	A	B	C
A	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
B	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
C	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Упр. 1. Экспоненциальный ряд определяет вектор бесконечной длины с составляющими

$$\left(1,\ x,\ \frac{x^2}{2},\ \frac{x^3}{2\cdot 3},\ \frac{x^4}{2\cdot 3\cdot 4},\ \ldots\right).$$

Какое преобразование порождает этот ряд, позволяя получать каждую составляющую из предыдущей? (Указание: назовите составляющие t_1, t_2, ... и т. д.; t'_i есть то же самое, что t_{i+1}.)

Упр. 2. Обнаруживает ли ограничение разнообразия ряд, образуемый бросанием нефальшивой кости?

Упр. 3. (Продолжение.) А ряд из упр. 9/4/3?

ЭНТРОПИЯ

9/11. В § 7/5 и в гл. 8 мы видели, что информация не может передаваться в большем количестве, чем это позволяет количество разнообразия. Мы видели, что ограничения могут уменьшить потенциальное количество разнообразия. И мы только что видели в предшествующем параграфе, что такой источник разнообразия, как цепь Маркова, имеет нулевое ограничение разнообразия, когда все его переходы равновероятны. Отсюда следует,

---

такое подмножество M_n, что: а) вероятность попадания вектора длины n в это подмножество M_n больше, чем $1-\varepsilon$; б) отношение числа векторов в M_n к общему числу векторов длины n стремится к нулю, когда n стремится к бесконечности. — *Прим. ред.*

что это условие (нулевого ограничения разнообразия) дает возможность источнику информации, если он ведет себя как цепь Маркова, передавать максимальное количество информации (в данное время).

Шеннон ввел меру количества разнообразия, обнаруживаемого на каждом шаге цепью Маркова. Эта мера, называемая энтропией, представляет, как выяснилось, огромную важность для многих вопросов, связанных с непрекращающейся передачей. Эта мера вводится следующим образом.

Если множество имеет некоторое разнообразие и мы выбираем из этого множества один элемент посредством некоторого определенного процесса выбора, то различные возможные результаты этого выбора будут связаны с различными соответствующими вероятностями. Так, пусть огни светофора имеют разнообразие в четыре элемента, обнаруживая комбинации:

1) красный;
2) красный и желтый;
3) зеленый;
4) желтый.

Пусть они горят соответственно в течение 25, 5, 25 и 5 сек. Тогда автомобилист, появляющийся неожиданно через нерегулярные промежутки времени, будет заставать светофор в различных состояниях с частотой примерно в 42, 8, 42 и 8%, соответственно. Взятые как вероятности, эти частоты будут иметь значения 0,42; 0,08; 0,42 и 0,08. Таким образом, состояние «зеленый свет» имеет (если применяется именно этот способ выбора) вероятность 0,42, и аналогично — другие состояния.

Обратно, любое множество вероятностей, т. е. положительных дробей, в сумме составляющих 1, может рассматриваться как соответствующее некоторому множеству, члены которого обнаруживают разнообразие. От вероятностей p_1, p_2, ..., p_n Шеннон переходит к вычислению величины

$$-p_1 \log p_1 - p_2 \log p_2 - \ldots - p_n \log p_n,$$

которую он называет **энтропией** множества вероятностей и обозначает символом H. Так, если взять десятичные

логарифмы, то энтропия множества, связанного с огнями светофора, будет равна
$-0{,}42 \log_{10} 0{,}42 - 0{,}08 \log_{10} 0{,}08 - 0{,}42 \log_{10} 0{,}42 - 0{,}08 \log_{10} 0{,}08$, что в свою очередь равняется 0,492. [Заметим, что $\log_{10} 0{,}42 = \bar{1}{,}6232 = -1{,}0000 + 0{,}6232 = -0{,}3768$; поэтому первый член равняется $(-0{,}42) \cdot (-0{,}3768)$, что дает $+0{,}158$; и аналогично для других членов.] Если бы логарифмы были взяты по основанию 2 (§ 7/7), то результат был бы равен 1,63 бита.

Слово «энтропия» будет применяться в этой книге лишь в том смысле, в каком оно употреблялось Шенноном; любое более широкое понятие будет называться «разнообразием» или как-нибудь иначе.

Упр. 1. Из 80 случаев, когда я проезжал определенный железнодорожный переезд, он был закрыт в 14 случаях. Чему равна энтропия множества вероятностей?

Упр. 2. Из перетасованной колоды вытаскивается карта. Различаются три случая:
E_1 — вытащен король треф;
E_2 — вытащена любая карта пик;
E_3 — вытащена любая другая карта.
Какова энтропия разнообразия различаемых случаев?

Упр. 3. Чему равна энтропия разнообразия одного бросания игральной кости?

Упр. 4. Чему равна энтропия разнообразия множества возможных исходов (с сохранением порядка) двух последовательных бросаний игральной кости?

Упр. 5. (Продолжение.) Чему равна энтропия n последовательных бросаний?

**Упр.* 6. Чему равен предел $-p \log p$, когда p стремится к нулю?

9/12. Вычисляемая таким образом энтропия имеет несколько важных свойств. Во-первых, она имеет максимальное значение для данного числа (n) вероятностей, когда все вероятности равны. Энтропия H в этом случае равна $\log n$, т. е. она в точности равна мере разнообразия, определенной в § 7/7. (Как отмечалось в § 9/10, равенство вероятностей в каждом столбце необходимо для того, чтобы ограничение разнообразия было минимальным и, следовательно, разнообразие — максимальным.) Во-вторых, различные величины H, выведенные из различных множеств, могут — с соответствующими дополнениями — комбинироваться для получения средней энтропии.

Такая комбинация используется для нахождения энтропии, которая соответствует цепи Маркова. Каждый столбец (или строка, если матрица написана в транспонированной форме) содержит множество вероятностей, дающих в сумме 1. Следовательно, каждый из них обладает энтропией. Шеннон определяет энтропию (одного шага в цепи) как среднее значение этих энтропий, причем каждая из них берется с весом, пропорциональным той относительной частоте, с которой состояние, соответствующее этому столбцу, будет встречаться, *когда последовательность пришла к равновесию* (§ 9/6). Так, переходным вероятностям в примере, рассмотренном в § 9/6, соответствуют следующие энтропии и равновесные относительные частоты (коэффициенты взвешивания):

↓	*B*	*W*	*P*
B	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
W	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{4}$
P	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
Энтропия	0,811	0,811	1,061
Равновесная относительная частота	0,449	0,429	0,122

Тогда средняя энтропия (для одного шага в последовательности) равняется

$$(0{,}449 \cdot 0{,}811 + 0{,}429 \cdot 0{,}811 + 0{,}122 \cdot 1{,}061) \text{ бита} = 0{,}842 \text{ бита}.$$

Монета, если ее бросать повторно, образует последовательность с энтропией для каждого бросания, равной 1 биту. Следовательно, последовательность положений, занимаемых одним из насекомых с течением времени, не является столь же изменчивой [1], как последовательность,

[1] Здесь можно сделать замечания, аналогичные тем, которые уже делались в связи с употреблением термина «ограничение разнообразия» в § 9/10. Термин «разнообразие» употребляется теперь автором не в абсолютном смысле главы 7, а в новом, вероятностном

образуемая бросаниями монеты, ибо 0,842 меньше, чем 1,00. Таким образом, введенная Шенноном мера позволяет сравнивать различные степени разнообразия.

Мы берем взвешенное среднее значение потому, что мы начинали с нахождения трех энтропий: 0,811, 0,811 и 1,061; из них нам нужно получить одну. Если бы они имели одно и то же значение, то мы, конечно, его бы и взяли; но они не одинаковы. Мы можем, однако, рассуждать так: когда система достигла равновесия, 45% насекомых находятся в состоянии *B*, 43% — в состоянии *W* и 12% — в состоянии *P*. Поскольку насекомые циркулируют между всеми тремя состояниями, такое распределение равносильно тому, что каждое насекомое проводит 45% своего времени в *B*, 43% в *W* и 12% в *P*. Другими словами, 45% его переходов будет из *B*, 43% — из *W* и 12% — из *P*. Поэтому 45% его переходов будут иметь энтропию, или разнообразие, в 0,811; 43% — также 0,811; наконец, 12% — энтропию 1,061. Таким образом, переходы с энтропией 0,811 будут частыми (и значение 0,811 будет «весить» больше), а переходы с энтропией 1,061 будут редкими (и значение 1,061 будет «весить» меньше). Поэтому среднее значение взвешивается: значению 0,811 придается вес 88%, значению 1,061 — вес

смысле. (В смысле главы 7 последовательности местоположений насекомого имеют даже большее разнообразие, чем последовательности, образуемые бросанием монеты.) Поясним, почему энтропия может действительно служить мерой разнообразия в вероятностном смысле. Обратимся для этого к заключительным строкам подстрочного примечания на стр. 248. Если для каждого n выбрать множество M_n, удовлетворяющее условию а), так чтобы оно содержало как можно меньше элементов, то, как можно убедиться путем некоторых расчетов, число m_n элементов в M_n растет так же, как 2^{Hn}, где H — энтропия рассматриваемой цепи Маркова (более точно, отношение $\frac{\log_2 m_n}{Hn}$ стремится к 1 при n, стремящемся к бесконечности).

Таким образом, Hn приблизительно равно логарифмической мере разнообразия (в абсолютном смысле главы 7) множества M_n. Так как с подавляющей вероятностью векторы длины n принадлежат к M_n, то Hn естественно называть логарифмической мерой разнообразия (в вероятностном смысле!) множества векторов длины n, а H — «средней мерой разнообразия на одну составляющую». — *Прим. ред.*

12%. Следовательно,

$$\begin{array}{c}\text{взвешенное}\\ \text{среднее значение}\end{array} = \frac{45 \cdot 0{,}811 + 43 \cdot 0{,}811 + 12 \cdot 1{,}061}{45 + 43 + 12},$$

и получается именно то, что было приведено выше.

Упр. 1. Покажите, что последовательность букв *Г* и *Р*, образуемая бросанием монеты, имеет среднюю энтропию в 1 бит на каждое бросание. (Указание: постройте матрицу переходных вероятностей.)

Упр. 2. (Продолжение.) Что случится, если монета погнута? (Указание: посмотрите, что получится, если изменить вероятности.)

9/13. Прежде чем двигаться дальше, следует отметить, что введенная Шенноном мера и различные важные теоремы, в которых она используется, основаны на определенных допущениях. Эти допущения обычно выполняются в технике телефонной связи, но их выполнение отнюдь не столь обычно в биологической работе и в областях, рассматриваемых в этой книге. Поэтому эта мера и эти теоремы должны применяться с осторожностью. Основные допущения Шеннона таковы:

1) Различные дроби, изображающие множество вероятностей, *должны в сумме давать 1;* энтропия не может быть вычислена для неполного множества возможностей.

2) Матрица переходных вероятностей, изображающая источник информации с несколькими множествами вероятностей, *должна быть марковской;* это значит, что вероятность каждого перехода должна зависеть только от состояния, *в котором* находится система (т. е. от операнда), а не от состояний, в которых она находилась раньше (§ 9/7). В случае необходимости надо предварительно переопределить состояния источника, как в § 9/8, чтобы матрица стала марковской.

3) Энтропия различных столбцов усредняется (§ 9/12) с помощью относительных частот при *установившемся равновесии* (§ 9/6). Тем самым в теоремах предполагается, что при любом начальном состоянии система может двигаться достаточно долго, чтобы ее состояния достигли своих равновесных плотностей.

Следовательно, результаты Шеннона должны применяться к биологическому материалу только после тщательной проверки их применимости.

Также следует предостеречь против любой попытки устанавливать слишком свободно и на чисто словесном уровне связь между энтропией Шеннона и энтропией статистической механики. Выводы в этих вопросах требуют большой осторожности, ибо самое незначительное изменение условий или допущений может превратить высказывание из строго истинного в абсурдно ложное. Движение в этих областях напоминает движение в джунглях, полных ловушек. Наиболее знакомые с этим предметом обычно наиболее осторожны в разговорах о нем.

Упр. 1. Определите в уме энтропию матрицы переходных вероятностей

↓	*A*	*B*	*C*
A	0,2	0	0,3
B	0,7	1,0	0,3
C	0,1	0	0,4

[Указание: Здесь надо не вычислять, а обнаружить скрытую простоту. Что означает 1 на главной диагонали (упр. 9/5/1)? Каково, следовательно, окончательное равновесие системы? Имеют ли значение столбцы *A* и *C*? И какова энтропия столбца *B* (упр. 9/11/6)?]

Упр. 2. (Продолжение.) Объясните следующий парадокс: «Когда система находится в *A*, *имеется* разнообразие или неопределенность в ближайшем последующем состоянии; значит, энтропия не может быть равна нулю».

9/14. Некоторая путаница возникает иногда из-за того, что шеннонова мера «энтропии», взятая для множества вероятностей $p_1, p_2, \ldots$, есть сумма членов $p_i \log p_i$, умноженная на —1, тогда как «количество информации», определенное Винером в его «Кибернетике», есть та же самая сумма членов $p_i \log p_i$, но без перемены знака (т. е. умноженная на $+1$). (Следует иметь в виду, что $p \log p$ всегда отрицательно, так что множитель «—1» превращает его в положительное число.)

Однако здесь не должно быть никакой путаницы, ибо основные идеи одинаковы. Оба автора рассматривают информацию как «то, что устраняет неопределенность», и оба измеряют ее количеством неопределенности, которую она устраняет. Далее, оба занимаются в основном *приростом* или увеличением информации, имеющим место при получении сообщения, в то время как абсолютные количества, наличествующие до или после этого, представляют меньший интерес.

Ясно, что когда вероятности распределены разбросанно, как в диаграмме A на рис. 9/14/1, неопределен-

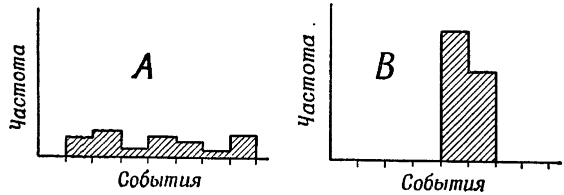


Рис. 9/14/1.

ность больше, чем когда они распределены компактно, как в диаграмме B. Получение сообщения, заставляющего получателя изменить от распределения A к распределению B свою оценку того, что должно произойти, содержит *положительное* количество информации.

Но выражение $\Sigma p \log p$ (где знак Σ означает сумму), примененное к A, дает более отрицательное число, чем в применении к B; оба значения суммы будут отрицательными, но первое будет больше по абсолютной величине. Так, распределение A может дать сумму, равную —20, а распределение B — сумму, равную —3. Согласимся в качестве количества информации, связанного с каждым распределением, т. е. с каждым множеством вероятностей, взять $\Sigma p \log p$, умноженное на +1. Так как, вообще говоря,

прирост (чего угодно) = **окончательному количеству** минус **начальное количество,**

то прирост информации в этом случае будет равен

$$(-3)-(-20),$$

т. е. +17. Следовательно, мы получим положительное число, как и хотели. Таким образом, рассматриваемая с этой винеровской точки зрения величина $\Sigma p \log p$

должна умножаться на $+1$, т. е. оставаться неизмененной; тогда мы вычислим *прирост*.

Шеннон же в своей книге занимается особым случаем, в котором получаемое сообщение известно с определенностью. В этом случае все вероятности равны нулю, за исключением единственной, равной 1. Для такого множества сумма $\Sigma p \log p$ равна нулю, так что окончательное количество равно нулю и *прирост* информации равен

$$0 - (\text{начальное количество}).$$

Другими словами, информация в сообщении, которая равна приросту информации, есть сумма $\Sigma p \log p$, вычисленная для начального распределения и умноженная на -1, что и дает шеннонову меру.

Таким образом, между двумя этими мерами существует не больше несоответствия, чем между двумя способами измерения того, «насколько точка Q расположена правее точки P» (см. рис. 9/14/2). Можно считать,

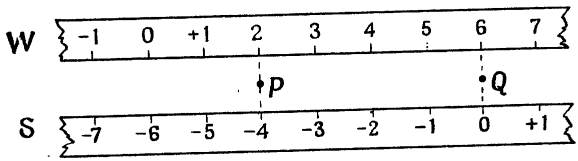


Рис. 9/14/2.

что P и Q здесь соответствуют двум степеням неопределенности, причем *большей* определенности отвечает точка *справа*, а сообщение перемещает получателя из P в Q.

Расстояние между P и Q может быть измерено двумя способами, которые, очевидно, эквивалентны. По способу Винера линейка прикладывается к P и Q (как линейка W на рисунке), и тогда расстояние, на которое Q лежит *правее* P, равно разности

$$(\text{отсчет для } Q) \text{ минус } (\text{отсчет для } P).$$

По способу Шеннона (линейка S на рисунке) нуль прикладывается к Q, и тогда расстояние, на которое Q лежит *правее* P, таково:

$$\text{минус } (\text{отсчет для } P).$$

Ясно, что между этими двумя способами нет на самом деле никакого несоответствия.

9/15. *Пропускная способность канала.* Необходимо различать два способа подсчета «энтропии» по отношению к цепи Маркова, даже после того как выбрана единица измерения (основание логарифмов). Цифра, вычисленная в § 9/12 из переходных вероятностей, дает энтропию, или ожидаемое разнообразие, для одного следующего шага цепи. Так, если бросание правильной, нефальшивой монеты дало уже *РРГГРГГГГ*, то неопределенность следующего исхода равна 1 биту. Символ, который появится затем, также будет иметь неопределенность в 1 бит и т. д. Ввиду этого цепь в целом имеет неопределенность, или энтропию, в 1 бит *на шаг.*

Значит, два шага должны иметь неопределенность, или разнообразие, в 2 бита; и так оно и есть, ибо следующие два шага могут быть *ГГ*, *ГР*, *РГ* или *РР* с вероятностями $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{4}$, что дает $H=2$ бита. Короче говоря, *энтропия некоторого участка цепи Маркова пропорциональна его длине* (все время предполагается, что цепь достигла равновесия).

Совершенно другой способ измерения энтропии цепи вводится при рассмотрении того, как быстро *во времени* цепь образуется каким-либо реальным физическим процессом. До сих пор эта сторона дела игнорировалась, и измерение производилось только в терминах шагов самой цепи. Введение новой шкалы требует только простого правила пропорций. Например, если (как в § 9/12) «единица времени» насекомого для одного шага равна 20 секундам, то каждые 20 секунд дают 0,84 бита, а 60 секунд дадут $\frac{60 \cdot 0{,}84}{20}$ бита. Таким образом, каждое насекомое создает разнообразие своего местоположения со скоростью 2,53 бита *в минуту.*

Такая скорость служит наиболее естественным способом измерения пропускной способности канала. Канал — это просто любая система, которая своим входом может приводиться в каждый момент в одно из некоторого разнообразия состояний и которая может передавать это состояние какому-то получателю. Скорость этой передачи зависит как от скорости, с которой шаги следуют друг за другом, так и от разнообразия, получаемого на каждом шаге.

Заметим, что понятие «канал» определяется в кибернетике исключительно в терминах наличия между двумя точками определенных *поведенческих* отношений; если между точками имеют место такие отношения, то между ними существует канал — совершенно независимо от того, можно ли усмотреть между ними какую бы то ни было материальную связь. (Рассмотрите, например, упр. 4/15/2, 6/7/1.) В силу этого каналы, которые видит кибернетик, могут значительно отличаться от каналов, которые видит специалист в другой области. В простейших случаях это достаточно очевидно. Никто не отрицает реальности некоторой функциональной связи магнита с магнитом, хотя ни один эксперимент не обнаружил до сих пор между ними никакой промежуточной структуры.

Иногда канал может идти по необычному пути. Так, мозгу требуется информация о том, что происходит после того, как он послал «команду» некоторому органу; обычно от органа к мозгу идет чувствительный нерв, который несет «контрольную» информацию. Так, контроль за голосовыми связками может осуществляться чувствительным нервом, идущим от связок в мозг. Эффективного контроля можно достичь и без помощи какого-либо нерва в шее, а лишь используя звуковые волны, идущие по воздуху и связывающие голосовые связки с мозгом через ухо. Для анатома это не будет каналом, а для инженера-связиста — будет. Здесь мы просто должны понять, что каждый из них прав внутри своей отрасли науки.

Существуют и более сложные применения этого принципа. Предположим, что мы спрашиваем кого-нибудь, будет ли 419×287 равняться 118 213; по-видимому, он ответит: «Я не могу сделать это в уме, дайте мне карандаш и бумагу». Используя в качестве параметров оба числа 419 и 287 вместе с операцией «умножения», он затем начнет процесс (переходный процесс, по терминологии § 4/5), который породит ряд импульсов, проходящих по нервам его руки, порождая ряд карандашных значков на бумаге; затем эти значки воздействуют на его сетчатку и так далее вплоть до его мозга, где осуществится взаимодействие со следом (что бы это ни было) числа 118 213; затем он даст окончательный ответ. Нам здесь нужно отметить, что этот процесс — от мозга через двигательную область коры, руку, карандаш, значки, световые лучи, сетчатку и зрительную область коры обратно к мозгу — для инженера-связиста есть типичный «канал», связывающий «передатчик» с «приемником». Следовательно, для кибернетика белое вещество и прочие волокна не являются единственными каналами связи в мозгу; *некоторые связи между частями могут осуществляться через окружающую среду.*

9/16. *Избыточность.* В § 7/14 было сказано, что из ограничений разнообразия всегда можно извлечь какую-нибудь пользу. Этот тезис можно иллюстрировать случаем непрекращающейся передачи.

Для простоты рассмотрим еще раз огни светофора — красный, зеленый и желтый, — допускающие только четыре комбинации:

1) красный;
2) красный и желтый;
3) зеленый;
4) желтый.

Каждая составляющая (лампа или цвет) может быть зажжена или не зажжена, так что при независимых составляющих общее возможное разнообразие состояло бы из 8 состояний. В действительности же используется только 4 комбинации, так что данное множество обнаруживает ограничение разнообразия.

Рассмотрим теперь эти факты снова, исходя из того, что нам необходимо множество из четырех следующих сигналов:

1) стой;
2) готовься ехать;
3) можно ехать;
4) готовься остановиться.

Если у нас имеются составляющие, каждая из которых может принимать два значения (+ или —), то мы можем спросить, *сколько* таких составляющих необходимо для того, чтобы обеспечить это разнообразие. Ясно, что две;

и при соответствующем перекодировании, таком, например, как

$$
\begin{aligned}
++ &= \text{стой,}\\
+- &= \text{готовься ехать,}\\
-- &= \text{можно ехать,}\\
-+ &= \text{готовься остановиться,}
\end{aligned}
$$

это разнообразие может быть получено при помощи вектора только с двумя составляющими. То обстоятельство, что число составляющих может быть сокращено (с трех до двух) без потери разнообразия, можно выразить, сказав, что множество векторов обнаруживает **избыточность**, в данном случае в одну лампу.

Ясно, что из такого ограничения разнообразия можно извлечь пользу. Например, если бы электрический свет был очень дорог, то расходы на светофоры, перекодированные в новую форму, сократились бы на одну треть [1].

Тот же самый светофор, рассматриваемый как генератор другого множества векторов, может обнаружить совершенно другую избыточность. Предположим, что светофор управляется не уличным движением, а часами, так что он проходит повторяющийся цикл состояний (перечисленных выше)

$$\dots 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 1,\ 2,\ 3 \dots .$$

---

[1] Если считать, что каждой составляющей соответствует своя лампочка и что + означает ее горение, то сокращение расхода до двух третей получится при способе кодирования, отличном от того, который здесь указан. Руководствуясь цифрами, приведенными в § 9/11, находим, что общая сумма времен горения лампочек в течение 60 сек. равна

$$(25 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 25 \cdot 1 + 5 \cdot 1)\ \text{сек.} = 65\ \text{сек.}$$

При указанном в § 9/16 способе кодирования сумма будет

$$(25 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 25 \cdot 0 + 5 \cdot 1)\ \text{сек.} = 60\ \text{сек.}$$

Чтобы получить. нужный выигрыш в две трети, надо перекодировать сигналы, например, следующим образом:

$$
\begin{aligned}
-\ - &= \text{стой,}\\
+\ + &= \text{готовься ехать,}\\
+\ - &= \text{можно ехать,}\\
-\ + &= \text{готовься остановиться.}
\end{aligned}
$$

Тогда сумма будет равна

$$(25 \cdot 0 + 5 \cdot 2 + 25 \cdot 1 + 5 \cdot 1)\ \text{сек.} = 40\ \text{сек.}$$ — *Прим. ред.*

Образуемая им последовательность (рассматриваемая как вектор, § 9/9) может быть только одним из четырех векторов:

$$\begin{aligned} &\text{I.}\ (1, 2, 3, 4, 1, 2 \ldots), \\ &\text{II.}\ (2, 3, 4, 1, 2, 3 \ldots), \\ &\text{III.}\ (3, 4, 1, 2, 3, 4 \ldots), \\ &\text{IV.}\ (4, 1, 2, 3, 4, 1 \ldots). \end{aligned}$$

Если бы имелось n составляющих и каждый шаг был независимым (что можно получить с помощью четырехгранной кости), то разнообразие было бы 4^n; в действительности же оно равно только 4. Чтобы вопрос стал совсем ясен, заметим, что такое же разнообразие может быть образовано векторами только с одной составляющей:

$$\begin{aligned} &\text{I.}\ (1), \\ &\text{II.}\ (2), \\ &\text{III.}\ (3), \\ &\text{IV.}\ (4). \end{aligned}$$

Здесь опущены все составляющие, кроме первой. Это значит, что все последующие (после первой) составляющие являются избыточными.

Таким образом, последовательность может обнаруживать избыточность, если на каждом шаге следующее значение не является полностью независимым от предшествующих шагов (ср. § 9/10). Если последовательность образует цепь Маркова, избыточность будет проявляться в том, что энтропия цепи будет меньше максимальной.

Тот факт, что одно и то же множество огней светофора образует два существенно различных множества векторов, еще раз показывает, какая осторожность необходима при применении этих понятий к какому-нибудь *объекту*, ибо объект часто обладает большим количеством множеств, подлежащих рассмотрению. Следовательно, вопрос: «Обнаруживают ли огни светофора избыточность?» — недопустим, ибо он не указывает, какое множество векторов рассматривается; и ответ на него может значительно измениться для разных множеств.

Этот запрет особенно необходим в книге, предназначенной для работников в области биологии, ибо здесь определение множеств векторов часто связано с определенными трудностями, которые преодолеваются, быть может, с некоторой произвольностью (ср. § 6/14). Поэтому всегда имеется искушение подменить точное и явное понимание рассматриваемого множества интуитивным и смутным. Читатель, вероятно, часто замечал, что то или иное неподатливое противоречие между двумя рассуждениями можно разрешить, если дать более точное определение рассматриваемому множеству; ибо это противоречие часто вытекает из того, что рассуждения относятся в действительности к двум различным множествам, тесно связанным с одним и тем же объектом или организмом.

Упр. 1. В таблице для опознания бактерий по их способности сбраживать сахары 62 вида отмечены как образующие «кислоту», «кислоту и газ» или «не образующие ничего» из каждого из 14 сахаров. Таким образом, каждый вид соответствует вектору с 14 составляющими, каждая из которых может принимать одно из трех значений. Избыточно ли это множество? К какому числу составляющих можно свести этот вектор?

Упр. 2. Если цепь Маркова не имеет избыточности, то как с первого взгляда узнать ее матрицу?

9/17. Теперь можно сформулировать теорему, быть может наиболее важную из выдвинутых Шенноном. Предположим, что мы хотим передавать сообщение со скоростью H битов за шаг; пусть, например, мы хотим сообщать о движениях отдельного насекомого в пруду. H здесь равняется 0,84 бита на шаг (§ 9/12), или на символ, как сказал бы телеграфист, имея в виду ряд вроде

$$PWBWBBBWPPPWBWPW \ldots .$$

Предположим для определенности, что между двумя шагами проходит 20 секунд. Поскольку теперь дана скорость этих событий, можно также сказать, что H равна 2,53 бита в минуту. Теорема Шеннона утверждает, что это сообщение может быть передано по любому каналу с пропускной способностью 2,53 бита в минуту и не может быть передано никаким каналом с меньшей пропускной способностью [1].

Быть может, и без того было достаточно очевидно, что каналы с высокой скоростью передачи могут сообщать больше, чем каналы с низкой скоростью. В этой теореме важен, во-первых, ее общий характер (ибо она не имеет в виду никаких особых механизмов и поэтому одинаково применима к телеграфной линии, к нервным волокнам и к разговору) и, во-вторых, ее количественная строгость. Так, если бы наш пруд с насекомыми был расположен далеко среди холмов, то мог бы возникнуть вопрос о возможности передачи сообщений с помощью дымовых сигналов. Предположим, что отдельный клуб дыма можно пускать или не пускать каждые четверть минуты, но не быстрее. Энтропия на символ равна здесь 1 биту, и пропускная способность канала равна поэтому 4 битам в минуту. Поскольку 4 больше, чем 2,53, канал *может* передавать сообщения о положении насекомого и можно найти код, который будет переводить положения в клубы дыма, несущие эту информацию.

Сам Шеннон построил пример, чрезвычайно ярко демонстрирующий точность этого количественного закона. Предположим, что некоторый источник выдает буквы A, B, C, D с частотами, относящимися друг к другу соответственно как 4 : 2 : 1 : 1, причем последовательные сим-

---

[1] Имеется в виду, конечно, передача без накопления задержки. В силу § 8/13 любая информация может быть передана по каналу, обладающему ненулевой пропускной способностью, но, возможно, со значительным замедлением. Так, в принципе мы могли бы передавать события о положении насекомого, даже если бы пускали или не пускали клуб дыма (см. пример ниже в этом параграфе) всего лишь раз в сутки; но при этом очередь из еще не переданных сообщений росла бы с катастрофической быстротой (хотя каждое отдельное сообщение рано или поздно было бы передано). Смысл теоремы Шеннона состоит именно в том, что она говорит о передачах с рассасывающейся очередью еще не переданных сообщений на приемном конце (более точно, имеется некоторая минимальная длина такой очереди и для каждого момента времени с вероятностью 1 наступит вслед за ним другой момент, когда длина очереди не будет превосходить своего минимального значения). — *Прим. ред.*

волы независимы. Типичным отрезком такой последовательности будет... $BAABDAAAABCABAADA\ldots$. В состоянии равновесия относительные частоты символов A, B, C и D суть соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, и энтропия равна $1\frac{3}{4}$ бита на шаг (т. е. на букву).

Канал, который может выдавать на каждом шаге любое из четырех состояний без ограничений, имел бы пропускную способность в 2 бита на шаг. Согласно теореме Шеннона, должен существовать такой код, который позволит этому последнему каналу (с пропускной способностью 2 бита на шаг) передавать указанную последовательность (с энтропией $1\frac{3}{4}$ бита на шаг) так, что сообщение любой длины потребует меньшего числа шагов, и притом в отношении 2 к $1\frac{3}{4}$, т. е. 8 к 7. Этот код, изобретенный Шенноном, сводится к следующему. Сначала сообщение кодируется посредством преобразования

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ 0 & 10 & 110 & 111 \end{matrix};$$

например, приведенное сообщение кодируется так:

$$\downarrow \begin{matrix} B.AAB.D..AAAAB.C..AB.AAD..A \\ 1\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,1\,0 \end{matrix}.$$

Теперь разделим нижнюю строку на пары и перекодируем их в другое множество букв:

$$\downarrow \begin{matrix} 00 & 01 & 10 & 11 \\ E & F & G & H \end{matrix}.$$

Эти коды однозначно переводят любое сообщение из букв от A до D в буквы от E до H и обратно. Теперь мы можем констатировать следующий замечательный факт. Если мы возьмем типичное множество из восьми первоначальных букв (где каждая будет представлена с характерной частотой), то окажется, что они могут быть переданы с помощью семи новых букв:

$$\begin{array}{l} A\,A\,A\,A\,B\,.\,B\,.\,C\,.\,.\,D\,.\,. \\ \downarrow 0\,0\,0\,0\,1\,0\,1\,0\,1\,1\,0\,1\,1\,1\,. \\ \cdot\,E\cdot E\cdot G\cdot G\cdot H\cdot F\cdot H \end{array}$$

Тем самым демонстрируется возможность того сокращения, которое было количественно предсказано энтропией первоначального сообщения!

Упр. 1. Покажите, что описанное кодирование устанавливает взаимно однозначное соответствие между посылаемым и получаемым сообщением (за исключением возможной неопределенности первой буквы).

Упр. 2. Печатный английский текст имеет энтропию примерно в 10 битов на слово. Мы можем читать примерно по 200 слов в минуту. Укажите нижнюю границу пропускной способности канала зрительного нерва.

Упр. 3. Пианист может каждым из десяти пальцев ударить одну из трех клавишей и может делать это 300 раз в минуту; найдите нижнюю границу пропускной способности канала нервов, идущих к рукам пианиста.

Упр. 4. Банковские записи, состоящие из бесконечной последовательности случайных по видимости цифр, имеющих значения от 0 до 9, должны для хранения кодироваться шрифтом Брайля. Если за 1 час в хранилище должно поступить 10 000 цифр, то с какой скоростью должны печататься символы Брайля при оптимальном кодировании? (Указание: в «алфавите» Брайля 64 символа.)

9/18. Приведем еще один пример, показывающий удивительную способность метода Шеннона проникать в самое существо проблем связи. Рассмотрим систему с состояниями a, b, c, d и с вероятностями переходов

$\downarrow$	a	b	c	d
a	0	0	0,3	0,3
b	0,6	0,6	0	0
c	0,4	0,4	0	0
d	0	0	0,7	0,7

Типичной последовательностью будет

$$\ldots bbbcabcabbcddacdabcacdddddabb \ldots .$$

Равновесные вероятности будут соответственно равны 6/35, 9/35, 6/35, 14/35. Легко определить, что энтропия равна 0,92 бита на букву. Теперь предположим, что различие между a и d утрачивается; другими словами, кодируем нашу последовательность посредством преобразования

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ X & b & c & X \end{matrix}.$$

Вы скажете, что какая-то информация должна быть потеряна? Посмотрим! Отныне у нас имеется только три состояния: X, b, c, где X означает «либо a, либо d». Так, приведенное выше сообщение будет теперь начинаться отрезком ...$bbbcXbcXbbcXXXc$... . Новые переходные вероятности будут равны

$\downarrow$	X	b	c
X	0,70	0	1
b	0,18	0,6	0
c	0,12	0,4	0

[$c \to X$ должно равняться 1, поскольку c всегда переходит либо в a, либо в d; переходы от a и от d должны быть взвешены (равновесными) вероятностями пребывания системы в данный момент в a или в d]. Новые состояния имеют следующие равновесные вероятности: состояние X — вероятность 20/35; состояние b — вероятность 9/35; состояние c — вероятность 6/35; отсюда находим энтропии: $H_X = 1{,}173$; $H_b = 0{,}971$; $H_c = 0$. Итак, энтропия нового ряда будет равна 0,92 — такое же значение, как и раньше!

Это обстоятельство недвусмысленно показывает, что при слиянии состояний d и a в одно состояние X не теряется никакой информации. Это значит, следовательно, что *должен существовать способ восстановления первоначального четырехбуквенного сообщения из трехбуквенного,* т. е. способ определения, какие состояния X раньше были состояниями a, а какие — состояниями d. Более внимательное исследование показывает, что такое восстановление действительно может быть сделано и тем самым полностью подтверждает это достаточно удивительное предсказание.

Упр. Как декодировать в первоначальную форму следующее сообщение:

$$bbbcXbcXbbcXXXcXXbcXcXXXXXXXbb?$$

ШУМЫ

9/19. Может случиться, что весь вход некоторого преобразователя разделен на две или более составляющие и что мы хотим рассматривать эти составляющие в отдельности. Так обстояло дело в упр. 8/17/3, где два сообщения посылались по одному и тому же преобразователю и на выходе восстанавливались отдельно. Иногда, однако, эти два входа не могут быть оба полностью восстановлены из выхода. Если мы интересуемся только одной из входных составляющих как источником разнообразия, рассматривая другую просто как неизбежную помеху, то эта ситуация обычно описывается как случай «сообщения, испорченного шумом».

Следует отметить, что *шум по существу неотличим от любой другой формы разнообразия.* Установить различие между сообщением и шумом можно только в том случае, когда имеется некоторый получатель, решающий, какая информация имеет для него значение. Так, предположим, что по проводу одновременно передается разговор и какие-то эффекты, обусловленные нерегулярной эмиссией катода. Для того, кто хочет услышать разговор, изменения на катоде являются «шумом»; но для инженера, старающегося точно измерить то, что происходит на катоде, «шумом» является разговор. Таким образом, «шум» определяется только относительно данного получателя, который должен сказать, какую информацию он намерен игнорировать.

Этот момент стоит подчеркнуть. Поскольку одним из обычнейших источников «неинтересного» разнообразия в электронных системах является тепловое (броуновское) движение молекул и электронов, в связи с этим инженеры по электронике склонны обозначать словом «шум» без дополнительных ограничений именно этот источник. В пределах своей специальности они будут, вероятно, продолжать употреблять это слово в том же смысле, но работники других наук не обязаны следовать в этом за ними. Особенно в биологии «шум» редко будет обозначать именно этот источник; чаще источником «шума» будет некоторая другая макроскопическая система, от которой изучаемая система не может быть полностью изолирована.

Понятие шума было бы не слишком полезным, если бы упомянутые два (или более) сообщения могли полностью и одновременно восстанавливаться посредством декодирования выхода. Оно требуется главным образом там, где два сообщения (одно желательное, другое нежелательное) взаимодействуют, до некоторой степени разрушая друг друга, что делает полное восстановление кодирования невозможным.

Чтобы увидеть, как это происходит, вернемся назад, к основным процессам. Необратимость должна означать, что разнообразие не сохраняется (§ 8/6) и что различные элементы на входе представлены одним и тем же элементом на выходе. Рассмотрим случай, когда входом является вектор с двумя составляющими; пусть возможные значения первой составляющей суть A, B или C, и пусть возможные значения второй составляющей суть E, F или G. Предположим, что выходом является переменная, могущая принимать значения 1,2,...,9, и что производилось следующее кодирование:

$$\downarrow \begin{array}{ccccccccc} AE & AF & AG & BE & BF & BG & CE & CF & CG \\ 6 & 4 & 2 & 2 & 9 & 1 & 3 & 7 & 5 \end{array}.$$

Если бы входным сообщением была последовательность $BACBACAABB$, а «шум» в то же время давал бы последовательность $GFFEEEGFGE$, то выход был бы

1,4,7,2,6,3,2,4,1,2

и декодирование могло бы дать для первой составляющей только приближение

$$B, A, C, \overline{A \text{ или } B}, A, C, \overline{A \text{ или } B}, A, B, \overline{A \text{ или } B}.$$

Таким образом, первоначальное сообщение на этом входе «испорчено» «шумом» на другом входе.

В этом примере канал вполне может передавать сообщение без какой-либо двусмысленности, если шум подавляется благодаря тому, что второй вход остается постоянным, скажем все время в состоянии E. Ибо в этом случае кодирование взаимно однозначно:

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ 6 & 2 & 3 \end{matrix}$$

и обратимо.

Следует отметить, что взаимодействие имело место потому, что использовались только восемь из девяти возможных выходных состояний. Благодаря этому постоянному ограничению пропускная способность канала была уменьшена.

Упр. 1. Какое получится кодирование от первого входа на выход, если второй вход остается постоянным: (I) все время в состоянии F; (II) в G?

Упр. 2. Система из трех состояний: P, Q, R — должна передавать изменения двух входов α и β, каждый из которых может принимать два состояния. Состояния входов и системы изменяются в такт друг с другом. Возможна ли передача, свободная от шума?

9/20. *Искажения.* Следует заметить, что деформация сообщения *не обязательно* является результатом воздействия шума. «Если данный переданный сигнал всегда создает тот же самый принятый сигнал, т. е. принятый сигнал является определенной функцией переданного сигнала, то такой эффект может быть назван искажением. Если эта функция имеет обратную — никакие два переданных сигнала не создают одинаковых принятых сигналов, — то искажения могут быть скорректированы, по крайней мере принципиально, просто путем выполнения обратного функционального преобразования принятого сигнала» (Шеннон) [1].

[1] Цитируется по сборнику «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех».

Автор отступает далее от терминологии Шеннона. Шеннон говорит об «искажении» (distortion) всякий раз, когда получаемый сигнал является однозначной функцией передаваемого.

Когда сигнал испытывает не всегда одинаковое изменение при передаче, то, согласно Шеннону, принятый сигнал E считается функцией переданного сигнала S и другой переменной — шумов N; т. е. $E = f(S, N)$.

Искажения можно подразделять на обратимые (когда разные передаваемые сигналы производят разные получаемые и, следовательно, существует обратная функция) и необратимые. Судя по дальнейшему контексту (см. упр. 9/20/1 — 9/20/3), автор называет обратимое искажение просто «искажением», а необратимое искажение — «порчей». — *Прим. ред.*

Упр. 1. Искажением или порчей является изменение, благодаря которому вертикальный предмет оказывается на сетчатке перевернутым?

Упр. 2. Напряжение, приложенное к мышце, возбуждает устойчивый поток импульсов, частота которых не пропорциональна напряжению. Является ли отклонение от пропорциональности искажением или порчей?

Упр. 3. (Продолжение.) Если нерв, несущий импульсы, подвергнуть достаточно сильному воздействию паров алкоголя, то он перестанет проводить импульсы для любых напряжений. Является это искажением или порчей?

9/21. *Ненадежность.* Насколько мне известно, для основных случаев пока еще не выработано подходящей меры *степени* порчи сообщения от шумов. Однако Шеннон ввел соответствующую меру для беспрерывно передающего канала.

Прежде всего делается допущение, что как первоначальные, так и принимаемые сигналы образуют цепи Маркова того типа, который определен в § 9/4. Сведения, содержащиеся в сообщениях, можно поэтому представить в форме, показывающей частоты (или вероятности) появления всех возможных комбинаций вектора: (посылаемый символ, принимаемый символ). Так, используя пример Шеннона, предположим, что посылаются нули и единицы и что вероятности (в данном случае относительные частоты) приема символов таковы:

Посылаемый символ	0	0	1	1
Принимаемый символ	0	1	0	1
Вероятность	0,495	0,005	0,005	0,495

Из каждой тысячи посылаемых символов десять приходят в неверной форме — ошибка в один процент.

На первый взгляд этот «один процент неточности» может показаться естественной мерой количества потерянной информации, но такое толкование приводит к бессмыслице. Так, если бы при этой же передаче линия была бы фактически прервана и получатель для получения сообщения просто бросал бы монету, то примерно половина символов оказалась бы правильной, хотя на самом деле не передавалось бы никакой информации. Шеннон убедительно показал, что естественной мерой является **ненадежность**, вычисляемая следующим образом.

Найдем сначала энтропию для всех возможных классов:

$$-0{,}495 \log 0{,}495 - 0{,}005 \log 0{,}005 -$$
$$-0{,}005 \log 0{,}005 - 0{,}495 \log 0{,}495.$$

Назовем ее H_1. Она равна 1,081 бита на символ. Затем соберем принимаемые сигналы и их вероятности; это дает таблицу:

Принимаемый символ	0	1
Вероятность	0,5	0,5

Найдем снова энтропию:

$$-0{,}5 \log 0{,}5 - 0{,}5 \log 0{,}5.$$

Назовем ее H_2. Она равна 1,000 бита на символ. Тогда ненадежность равна $H_1 - H_2$, т. е. 0,081 бита на символ. Действительная скорость передачи информации при наличии шума равна энтропии источника минус ненадежность. В данном случае энтропия источника равна 1,000 бита на символ, как вытекает из таблицы:

Посылаемый символ	0	1
Вероятность	0,5	0,5

Итак, первоначальное количество информации равно 1,000 бита на символ, и из этого количества 0,919 бита проходит по каналу, а 0,081 бита разрушается шумом.

Упр. 1. Чему равна ненадежность передачи в § 9/19, если все девять сочетаний букв встречаются в длинной последовательности с одинаковой частотой?

Упр. 2. (Продолжение.) Что произойдет с ненадежностью, если на первом входе используются только символы B и C, так что сочетания BE, BF, BG, CE, CF, CG встречаются с одинаковой частотой?

**Упр.* 3. Докажите следующие правила, которые могут оказаться полезными, если мы хотим определить значение $-p \log_a p$, когда p либо очень мало, либо очень близко к 1:

1) если $p = xy$, то $-p \log_a p = -xy(\log_a x + \log_a y)$;

2) если $p = 10^{-z}$, то $-p \log_a p = \dfrac{z \times 10^{-z}}{\log_{10} a}$;

3) если p очень близко к 1 и если положить $1 - p = q$, то $-p \log_a p = \dfrac{1}{\ln a}\left(q - \dfrac{q^2}{2} \dots\right)$.

Упр. 4. Найдите $-p \log_2 p$, если p равно 0,00025. [Указание: запишите p как $2{,}5 \times 10^{-4}$ и используйте (1).]

Упр. 5. При анализе крови гематолог рассматривает под микроскопом и различает лимфоциты и моноциты. Если он по ошибке принимает одного из каждой сотни лимфоцитов за моноцит и одного из двухсот моноцитов за лимфоцит и если эти клетки встречаются в крови в отношении 19 лимфоцитов на 1 моноцит, то чему равна ненадежность? (Указание: используйте результаты двух предыдущих упражнений.)

9/22. *Безошибочная передача.* Теперь мы подошли к основной теореме Шеннона о передаче информации при наличии шумов (т. е. при действии других, посторонних входов). Можно подумать, что если при передаче сообщений по некоторому каналу каждое сообщение имеет определенную вероятность случайного изменения, то прием достоверно правильного сообщения невозможен. Однако Шеннон убедительно показал, что этот взгляд, при всей своей правдоподобности, является ошибочным. Надежные сообщения могут передаваться по ненадежному каналу. Читатель, которому это покажется слишком парадоксальным, должен обратиться за доказательством к книге Шеннона; я здесь сформулирую только результат.

Пусть количество передаваемой информации равно H, и положим ненадежность равной E, так что количество принимаемой информации будет $H - E$. (При этом, как и во всей книге Шеннона, предполагается непрекращающаяся передача.) Теорема утверждает, что если увеличить пропускную способность канала не менее чем на E, например путем введения другого, параллельного канала, то будет можно так закодировать сообщение, чтобы остающийся процент ошибок был *сколь угодно близок к нулю.* (Это достигается ценой задержки передачи; ибо надо накопить достаточно символов сообщений, чтобы среднее значение накопленного материала приближалось к среднему значению за все время передачи.)

Обратно, можно и с меньшей задержкой передачи сколь угодно уменьшать ошибки, если увеличивать пропускную способность канала более чем на минимальное количество E[1].

Трудно переоценить значение этой теоремы для понимания того, каким образом система со столь запутанными связями, как кора головного мозга, может проводить сообщения без того, чтобы каждое сообщение

[1] Это утверждение не является вполне ясным и для читателя, знакомого с теорией Шеннона. — *Прим. ред.*

постепенно искажалось ошибками и помехами до полной бесполезности. Теорема утверждает, что избыток пропускной способности канала может свести ошибки до любого желаемого уровня. Но в мозгу и особенно в коре на пропускную способность каналов накладывается мало ограничений, ибо обычно ее можно увеличить путем простого увеличения числа используемых волокон; это увеличение числа волокон происходит либо в ходе эмбриогенеза, либо функционально в процессе обучения.

Всего воздействия этой теоремы на нейропсихологию еще нельзя предвидеть. Значение ее состоит не столько в ее способности разрешить проблему: каким образом мозг преодолевает все возрастающую порчу передаваемых внутри него сообщений? — сколько в показе того, что эта проблема вряд ли вообще возникает и, уж во всяком случае, не является главной.

Эта теорема иллюстрирует другого рода пользу, которую кибернетика может принести биологии. Методы кибернетики могут оказаться решающими при рассмотрении определенных сложных проблем не потому, что эти методы дают непосредственные ответы на проблемы, а потому, что они показывают неправомерность самих проблем. Методы кибернетики могут показать, что эти проблемы поставлены неправильно или основаны на ошибочном допущении.

Некоторые из основных проблем, встающих сегодня при изучении мозга и поведения, пришли к нам из средневековья или еще более ранних времен, когда основные допущения были совершенно другими и, по нашим сегодняшним представлениям, ошибочными до смешного. Некоторые из этих проблем, вероятно, неправильно поставлены и находятся на одном уровне с классической проблемой средневековой медицины: каковы отношения между четырьмя элементами и четырьмя гуморами? [1]

[1] Согласно средневековым представлениям, все существующее образовано сочетанием четырех элементов: огня, воздуха, воды и земли. В теле человека имеется четыре гумора (от латинского humor — жидкость): кровь, мокрота, желтая желчь и черная желчь. Болезни происходят от неправильного состава и соотношения гуморов. В соответствии с этим вопрос об отношении гуморов к элементам, т. е. о составе гуморов, был одним из основных вопросов средневековой медицины. — *Прим. перев.*

18 Зак. 3346. У. Росс Эшби

Надо отметить, что эта проблема никогда не была *решена*. Действительно, когда химики и патологи стали больше знать о нашем теле, они поняли, что ею надо просто пренебречь.

Вполне возможно, что некоторые из наших классических проблем, связанных с мозгом, — быть может, некоторые из проблем, относящихся к локализации, причинной обусловленности и обучению, — окажутся принадлежащими к этому же типу. По-видимому, новый подход, предлагаемый кибернетикой, может помочь нам достичь лучшего проникновения в суть явлений; если это случится, мы избавимся от некоторых вопросов, ясно показав, что их и не следовало задавать.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

РЕГУЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ

Основой всей физиологии должна быть физиология постоянства.

Дарлингтон

ГЛАВА **10**

Регулирование в биологических системах

10/1. В двух предшествующих частях мы рассматривали понятие механизма (и процессы, протекающие внутри систем) и понятие разнообразия (и процессы связи между системами). Эти две темы следовало рассмотреть в первую очередь, как имеющие фундаментальное значение. Теперь, используя их, мы перейдем в третьей части к рассмотрению центральной темы кибернетики — проблем регулирования и управления.

В этой главе рассматривается место регулирования в биологии и показывается вкратце, почему оно имеет фундаментальное значение; показывается глубокая взаимосвязь регулирования с потоком разнообразия. В следующей, 11-й главе эта взаимосвязь рассматривается более подробно и вскрывается количественный закон, согласно которому количество регулирования, которое может быть получено, ограничено количеством информации, которая может быть передана по определенному каналу. В дальнейшем, в гл. 12, поднимается вопрос о том, как должны осуществляться абстрактные принципы гл. 11 — какого рода машины могут выполнить то, что нам нужно. В этой главе вводится машина нового рода — марковская, которая расширяет возможности, рассмотренные в первой части. В остальных главах рассматривается осуществление регулирования и управления в условиях возрастающих трудностей, в особенности тех трудностей, которые возникают, когда система становится очень большой.

В начале третьей части мы будем принимать, что регулятор уже имеется, либо прирожденный, либо специально изготовленный фабричным или каким-либо другим способом. Вопрос о том, как должен строиться регулятор, делающий такие полезные вещи, и какие факторы приводят к его возникновению, будет рассмотрен в § 13/10.

10/2. Настоящая глава в основном имеет целью пробудить интерес читателя, показав, что вопросы, рассматриваемые в последующих главах (начиная с гл. 11), имеют фундаментальное значение для биологии. Вопрос о регулировании в биологии настолько широк, что не может быть охвачен никакой отдельной главой. В работе Кеннона «Мудрость тела» этот вопрос рассматривается лишь постольку, поскольку речь идет о внутренней, вегетативной деятельности; но еще остается написать книгу, значительно бо́льшую по размеру, которая покажет, что и вся направленная вовне деятельность организма — его «высшая» нервная деятельность — носит такой же регуляторный, т. е. гомеостатический, характер. В этой главе я вынужден предоставить многое воображению читателя, будучи убежден, что, как биолог, он, вероятно, уже достаточно знаком с этим тезисом. Во всяком случае, этот тезис уже до некоторой степени обсуждался в книге «Устройство мозга».

Главная задача настоящей главы — связать воедино понятия регулирования, информации и выживания, продемонстрировать, насколько они близки, и показать, что все эти три понятия можно рассматривать с помощью метода, который совершенно однороден с применявшимися до сих пор в этой книге и может быть сделан сколь угодно строгим, объективным и точным.

10/3. *Основания.* Начнем сначала. Исходным фактором биологии является то, что возраст Земли равен примерно двум миллиардам лет и что биолог изучает в основном то, что существует сегодня. Из этого следует хорошо известный вывод, который я перескажу в наших терминах.

В § 4/23 мы видели, что если некоторая динамическая система велика и состоит из многократно повторяющихся частей и если она содержит какое-либо аутокаталитическое свойство, т. е. такое свойство, наличие которого в одном месте увеличивает вероятность появления его в другом месте, то такая система является, поскольку речь идет об этом свойстве, существенно неустойчивой при его отсутствии. Наша Земля содержала углерод и другие необходимые элементы; и известно, что многие соединения углерода, азота и некоторых других элементов являются самовоспроизводящимися. Отсюда следует, что хотя состояние «быть безжизненной» является почти что состоянием равновесия, но это равновесие неустойчиво (§ 5/6) и любое отклонение от него может послужить началом траектории, все больше и больше отклоняющейся от «безжизненного» состояния. И вот сегодня мы видим в биологическом мире прежде всего эти самые «аутокаталитические» процессы, обнаруживающие все те специфические особенности, которые были наложены на них двумя миллиардами лет устранения форм, не способных к выживанию.

Те организмы, которые мы видим сегодня, носят на себе глубокую печать селективного действия этого отсева, продолжавшегося в течение двух миллиардов лет. Любая форма, которой в каком бы то ни было отношении нехватало способности выжить, устранялась; и сегодня почти всякая форма отмечена следами приспособления, долженствующего обеспечить ей *выживание*, в противовес любому другому возможному исходу. Глаза, корни, ресницы, панцири — все это устроено так, чтобы увеличить шансы на выживание. И когда мы исследуем мозг, мы опять-таки исследуем средство к выживанию.

ВЫЖИВАНИЕ

10/4. Все только что сказанное достаточно хорошо известно. Однако оно позволяет нам связать эти факты с идеями, развитыми в нашей книге, и точно показать эту связь.

В самом деле, рассмотрим, что вообще понимается под «выживанием». Предположим, мышь старается убежать от кошки и существование мыши находится под вопросом. Как динамическая система мышь может находиться в разнообразных состояниях. Так, она может принимать различные позы; голова ее может быть повернута в разные стороны; ее температура может иметь различную величину; у нее может быть два уха или одно. Все эти состояния могут появиться в то время, когда она убегает от кошки, и каждый раз можно будет сказать, что мышь еще жива. С другой стороны, если мышь перейдет в состояние, в котором она будет разделена на четыре куска, или лишится головы, или превратится в раствор аминокислот в крови кошки, то мы не будем считать, что переход ее в одно из этих состояний соответствует «выживанию».

Таким образом, понятие «выживание» может быть выражено во вполне строгих терминах, применявшихся во всей книге. Различные состояния (M обозначает мышь), в которых мышь могла быть до или после встречи с кошкой, образуют множество $M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots, M_n$. По мотивам практического удобства мы решаем, что слова «*живая* мышь» будут относиться только к мыши, находящейся в одном из состояний, входящих в некоторое подмножество данного множества, скажем в подмножество $M_1, \ldots, M_k$. Если теперь некоторая операция C (обозначающая кошку) действует на мышь в состоянии M_i и если $C(M_i)$ дает, скажем, M_2, то мы можем сказать, что M «выжила» после операции C, ибо M_2 входит в множество $M_1, \ldots, M_k$.

Если теперь какая-то очень ловкая мышь все время выживает после операции C, то все состояния $C(M_1)$, $C(M_2)$, ..., $C(M_k)$ содержатся в множестве $M_1, \ldots, M_k$. Мы видим, что это представление о выживании *тождественно* представлению об «устойчивости» некоторого множества (§ 5/5). Следовательно, понятия «выживание» и «устойчивость» могут быть приведены в точное соответствие, а факты и теоремы, относящиеся к одному из них, могут использоваться для другого, если сохраняется точность.

Состояния M часто определяются через переменные. Тогда состояния $M_1, \ldots, M_k$, соответствующие живому организму, являются теми состояниями, при которых определенные **существенные переменные** остаются внутри заданных («физиологических») границ.

Упр. 1. Если $n = 10$ и $k = 5$, то чему соответствует операция $C(M_7) = M_9$?

Упр. 2. (Продолжение.) Чему соответствует операция $C(M_8) = M_4$?

Упр. 3. Если бы нападение данного C было неизменно гибельным для M, то можно было бы сказать, что C «летально» («смертельно») для M. Как определить подходящим образом понятие «летальности»?

10/5. Что же именно выживает с течением веков? Не индивидуальный организм, но некоторые особенно хорошо подобранные наборы генов, в особенности те, которые ведут к воспроизводству индивида, несущего хорошо защищенный набор генов внутри себя и способного в течение жизни одного поколения самому о себе позаботиться.

Это означает, что особенно большие шансы выжить (и, следовательно, существовать сегодня) имеют те наборы генов, которые вызывают образование между ними самими и полным опасностей миром некоторого более или менее совершенного защитного механизма. Так, гены черепах (Testudo) вызывают рост панциря; гены человека (Homo) вызывают рост мозга. (Гены, не вызывающие роста подобных приспособлений, давным давно устранены в ходе эволюции.)

Будем теперь рассматривать нашу систему как одну из частей в системе связи. В предыдущем параграфе диаграмма непосредственных воздействий (кошки на мышь) имела (или могла рассматриваться как имеющая) вид

$$\boxed{C} \to \boxed{M}\ .$$

Теперь мы рассматриваем случай, в котором диаграмма будет иметь вид

$$\boxed{D} \to \boxed{F} \to \boxed{E}\ ,$$

где E есть множество существенных переменных; D — источник воздействий и опасностей (таких, как C), идущих от внешнего мира; а F — промежуточная часть (панцирь, мозг и т. д.), образованная набором генов для защиты E. [F может также включать и те части окружающей среды, которые могут использоваться для защиты E: нору — для кролика; раковину — для рака-отшельника; копье — для воина-копьеносца; меч (как средство защиты) — для воина-меченосца.]

Для удобства ссылок во всей третьей части книги мы будем делить состояния существенных переменных E на множество η, куда будут входить «хорошие» состояния, соответствующие «живым организмам», и множество не-η, куда будут входить «плохие» состояния, соответствующие «неживым организмам». (Часто такая простая классификация оказывается невозможной, но никаких принципиальных трудностей это не представляет: ничего из того, что будет сказано, не исключает возможности более подробной классификации.)

Чтобы пояснить наши допущения, приведем в качестве иллюстраций несколько простых примеров (для простоты сначала приводятся небиологические системы регулирования).

(1) *Ванна, регулируемая термостатом.* E — ее температура. Нужное нам множество состояний (η) — температурный интервал между, например, 36 и 37° С. D есть множество всех тех воздействий, которые могут вывести температуру за эти пределы; сюда входит добавление холодной воды, влияние холодного воздуха, погружение в ванну холодных предметов и т. д. F обозначает всю регулирующую аппаратуру. Действие F направлено на ослабление влияния D на E.

(2) *Автопилот.* E — вектор с тремя составляющими: горизонтальным, вертикальным и боковым отклонениями; η — множество тех положений, при которых все эти составляющие удерживаются в определенных пределах. D есть множество возмущений, способных изменить эти переменные, такие, как порывы ветра, движения пассажиров, нерегулярности в работе моторов. F обозначает всю аппаратуру (автопилот, элероны, хвостовое оперение и т. д.), действие которой определяет, каким будет влияние D на E.

(3) *Велосипедист.* E состоит в основном из его углового отклонения от вертикали, η есть множество небольших допустимых отклонений. D — множество возмущений,

угрожающих увеличить отклонение. F — все приспособления (механические, анатомические, нервные), которые определяют, каким будет влияние D на E.

В дальнейшем будет приведено много других примеров. Пока что мы можем подытожить все изложенное, сказав, что естественный отбор поощряет те наборы генов, которые каким бы то ни было способом ставят регулятор между возмущениями D и существенными переменными E. При прочих равных условиях, чем лучше F как регулятор, тем у организма больше шансов выжить.

Упр. Какие переменные удерживаются внутри определенных пределов следующими регулирующими механизмами: 1) установка для кондиционирования воздуха; 2) кислородная маска альпиниста; 3) автомобильный стеклоочиститель («дворник»); 4) автомобильные фары; 5) кухонный холодильник; 6) фототаксис растений; 7) темные очки; 8) сгибательный рефлекс (быстрое отдергивание ноги, наступившей на острый камень); 9) моргание при быстром приближении к глазу какого-нибудь предмета; 10) прибор управления артиллерийским зенитным огнем.

10/6. *Регулирование блокирует поток информации.* По какой шкале можно измерять эффективность любого конкретного механизма F как регулятора? Идеальным термостатом был бы такой, который, несмотря на все возмущения, удерживал бы температуру постоянной на любом желаемом уровне. Вообще говоря, здесь требуются две характеристики: удержание температуры в узких пределах и соответствие этих пределов желаемой области. В особенности следует отметить, что множество допустимых значений η имеет меньше разнообразия, чем множество всех возможных значений E, ибо η есть некоторое подмножество, выбранное из множества состояний E. Если F — регулятор, то введение F между D и E *уменьшает* разнообразие, передаваемое от D к E. Таким образом, существенной функцией механизма F как регулятора является то, что он блокирует передачу разнообразия от возмущения к существенной переменной.

Поскольку это означает, что в функции регулятора входит также блокировка потока информации, мы рассмотрим этот тезис подробнее, чтобы установить, разумен ли он.

Предположим, что мне предлагают на выбор две ванны и мне нужно решить, какую же из них покупать. Я подвергаю каждую ванну в течение дня одинаковым воздействиям и затем гляжу на графики температур. Эти графики выглядят, как на рис. 10/6/1. Нет сомнения, что модель *B* лучше; и я прихожу к такому решению именно потому, что график *B*, в отличие от графика *A*, не дает мне никакой информации о том, какие

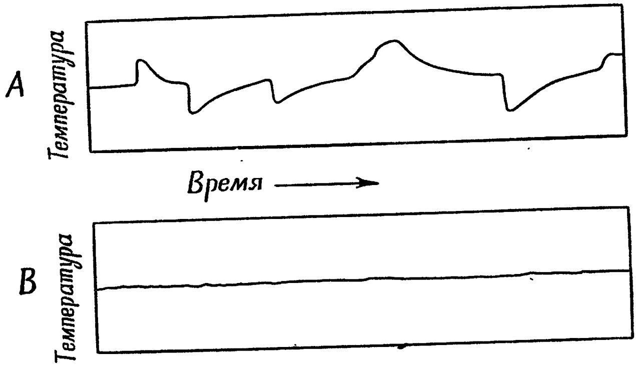


Рис. 10/6/1.

воздействия тепла или холода испытала ванна. Термометр и вода в ванне *B* были, так сказать, неспособны узнать что-либо о возмущениях *D*.

То же самое рассуждение, с соответствующими изменениями, можно отнести и к автопилоту. Если это хороший регулятор, то пассажиры будут ощущать плавный полет, независимо от ветра. Короче говоря, они будут *предохранены от знания* того, ветрено ли или нет. Хороший автопилот действует как барьер на пути передачи информации.

То же самое относится и к установке для кондиционирования воздуха. Если я живу в комнате с такой установкой и могу определить по температуре комнаты, что снаружи становится жарко, это значит, что установка работает (как регулятор) плохо. Если же она работает хорошо и если шторы опущены, то я, конечно, не буду иметь ни малейшего представления о том, какова погода снаружи. Хорошая кондиционирующая установка блокирует идущий вовнутрь поток информации о погоде.

То же самое относится и к регулированию высшего уровня, достигаемому в такой деятельности, как охота для добывания пищи или зарабатывание хлеба насущного. Так, в трудное время неискусный охотник или работник будет голодать и его печень и ткани его тела (существенные переменные) будут доходить до крайних и, возможно, физиологически недопустимых состояний, тогда как искусный охотник или работник переживет это тяжелое время, не доводя своей печени и тканей до крайнего состояния. Другими словами, регулирующая роль его мастерства проявляется, между прочим, в том, что оно не позволяет информации о трудных или легких временах дойти до существенных переменных. Подобно этому, человек, возглавляющий семью, может, если он достаточно искусен, пережить трудное время, не позволив своей семье даже заметить, что происходит нечто необычное. Семейство же менее искусного человека обнаружило бы это.

Итак, обобщим сказанное. Существенным признаком хорошего регулятора является то, что *он блокирует поток разнообразия от возмущений к существенным переменным.*

10/7. Эта блокировка информации может осуществляться разными способами, которые, однако, при ближайшем рассмотрении оказываются по существу одинаковыми. Диапазон их можно проиллюстрировать на примере двух крайних форм.

Один из способов блокировать поток информации (от источника возмущений D к существенным переменным E) заключается в том, что на пути потока ставится нечто, действующее просто как пассивная преграда. Таков, например, панцирь черепахи, сводящий разнообразные толчки, удары, укусы и т. д. к незначительным раздражениям чувствительных тканей под ним. К этому же классу относится древесная кора, слой жира у тюленя и человеческий череп.

Противоположна этой пассивной защите другая крайность — защита посредством искусного противодействия, защита, которая получает информацию об идущих возмущениях, готовится к приходу этих возмущений, которые могут быть сложными и подвижными, а затем встречает их столь же сложной и подвижной защитой. Такова защита фехтовальщика в поединке не на жизнь, а на смерть, если он не защищен латами и надеется лишь на свое уменье парировать удары. Такую защиту применяют большей частью высшие организмы, развившие нервную систему как раз для применения этого метода.

Рассматривая эту вторую форму, мы должны тщательно отмечать ту роль, которую играют в этом процессе информация и разнообразие. Фехтовальщик должен внимательно наблюдать за своим противником и всеми возможными способами получать информацию о его действиях, если этот фехтовальщик хочет выжить. Для этого фехтовальщик рождается с глазами и для этого учится употреблять их. Тем не менее конечный результат его искусства в случае успеха проявляется в том, что его существенные переменные, например количество крови, остаются внутри нормальных границ, как если бы никакого поединка вовсе не происходило. Информация свободно поступает к несущественным переменным, но разнообразие, связанное с различием между поединком и отсутствием поединка, не допускается до существенных переменных.

В оставшихся главах мы будем рассматривать этот тип активной защиты, задавая, например, такие вопросы: каким принципам она должна подчиняться, с помощью каких механизмов она может быть осуществлена и что надо делать в случае, когда регулирование очень затруднено?

ГЛАВА 11

Необходимое разнообразие

11/1. В предыдущей главе мы рассматривали регулирование с биологической точки зрения, принимая его как нечто достаточно понятное. В настоящей главе мы рассмотрим сам процесс регулирования с целью точно установить, что́ в него включается и что́ им подразумевается. В частности, мы изложим способы *измерения* количества, или степени, достигаемого регулирования и покажем, что это количество имеет верхнюю границу.

11/2. Применения регулирования очень обширны; они охватывают большинство видов деятельности в психологии, социологии, экологии, экономике и многие виды деятельности почти в каждой области науки и жизни. Кроме того, разнообразие типов существующих регуляторов обескураживающе велико. Одним из возможных подходов к такому материалу было бы последовательное рассмотрение различных типов; и эти типы действительно будут указаны в гл. 12. В настоящей же главе мы попытаемся проникнуть в самую суть вопроса — попытаемся найти то, что общо им всем.

Однако то, что является общим для всех регуляторов, на первый взгляд как будто не сводимо к какой-либо определенной форме. Поэтому в следующем параграфе мы начнем рассмотрение совершенно новых вопросов, не делая никаких явных ссылок на изложенное выше. Лишь когда эти новые вопросы будут достаточно выяснены, мы перейдем к рассмотрению того, какое отношение могут они иметь к регулированию.

11/3. *Игра и исход.* Забудем поэтому все, что мы знаем о регулировании, и предположим просто, что мы наблюдаем за двумя игроками R и D, участвующими в какой-то игре. Мы будем следить за успехами игрока R, который пытается выиграть некое a. Правила игры следующие. У игроков имеется таблица 11/3/1:

Таблица 11/3/1

		R		
		α	β	γ
	1	b	a	c
D	2	a	c	b
	3	c	b	a

которую могут видеть оба игрока. D начинает, выбирая цифру и тем самым некоторую строку таблицы. R, зная эту цифру, выбирает затем греческую букву и тем самым некоторый столбец. Курсивная латинская буква, стоящая на пересечении строки и столбца, является **исходом.** Если исходом будет a, то R выигрывает; если нет, то R проигрывает.

Рассмотрение таблицы быстро показывает, что при данной таблице игрок R всегда может выиграть. Какое бы значение игрок D ни выбрал сначала, игрок R всегда может выбрать такую греческую букву, которая даст ему желаемый исход. Так, если D выбирает 1, то R выбирает β; если D выбирает 2, то R выбирает α и т. д. В самом деле, если R действует в соответствии с преобразованием

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta & \alpha & \gamma \end{matrix},$$

то он всегда может получить исход a.

При такой таблице положение нашего R исключительно выгодно, ибо R не только может всегда получать исход a, но он может так же легко получать, если нужно, исходы b или c; R фактически полностью контролирует исход игры.

Упр. 1. Какое преобразование должен использовать R, чтобы получать всегда исход c?

Упр. 2. Пусть R и D — переменные, значениями которых служат целые числа, и пусть исход E также есть целое число, задаваемое соотношением

$$E = R - 2D.$$

Выразите R через D, если желаемый исход равен 37.

Упр. 3. Задние колеса какого-то автомобиля скользят. Пусть D — переменная, называемая «стороной, в которую движется задняя часть автомобиля», и принимающая два значения: «направо» и «налево». Пусть R — действие водителя, называемое «выбором направления, в котором он поворачивает рулевое колесо», и принимающее два значения: «направо» и «налево». Постройте таблицу размером 2×2 и проставьте исходы.

Упр. 4. Если игра R определяется игрой D в соответствии с преобразованием

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \gamma & \beta & \alpha \end{matrix}$$

и сыграно много партий, то каково будет разнообразие встречающихся исходов?

Упр. 5. Полностью ли R контролирует исходы, если таблица «триединая»? (см. упр. 4/2/4).

11/4. Приведенная выше таблица, конечно, исключительно благоприятна для R. Однако возможны и другие таблицы. Так, предположим, что D и R, играющие по тем же самым правилам, имеют теперь таблицу 11/4/1, где D должен выбирать из пяти, а R — из четырех возможных ходов.

Если целью является a, то R всегда может выиграть. В самом деле, если D выбирает 3, то R может выиграть даже несколькими способами. Поскольку a имеется в каждой строке, R всегда может получить его в качестве исхода. С другой стороны, если целью является b, то R не может выигрывать всегда. Ведь если D выберет 3, то никакой ход нашего R не даст ему исхода b. А если целью является c, то R совершенно беспомощен, ибо D всегда выигрывает.

Можно видеть, что различные расположения букв внутри таблицы и различные количества состояний, находящихся в распоряжении D и R, могут породить разнообразные ситуации с точки зрения R.

Таблица 11/4/1

		R			
		α	β	γ	δ
	1	b	d	a	a
	2	a	d	a	d
D	3	d	a	a	a
	4	d	b	a	b
	5	d	a	b	d

Упр. 1. Всегда ли выигрывает R с таблицей 11/4/1, если целью является d?

Упр. 2. (Продолжение.) Какое преобразование должен использовать R?

Упр. 3. (Продолжение.) Если целью является a и если D по некоторым причинам никогда не выбирает 5, то как может R упростить свой способ игры?

Упр. 4. К обеду ждут гостя, но дворецкий не знает, кто именно должен прийти. Он знает лишь, что это может быть мистер А., который пьет только херес или красное вино; или миссис В., которая пьет только джин или брэнди; или мистер С., который пьет только красное вино, брэнди или херес. Дворецкий обнаруживает, что в его винном погребе есть только джин, виски и херес. Может ли он найти что-нибудь приемлемое для ожидаемого гостя?

11/5. Можно ли вывести некоторый *общий* принцип для способов игры упомянутого R и его видов на успех?

Если в таблице допускается полная свобода расположений, то возможности станут столь многочисленны, произвольны и сложны, что вряд ли можно высказать о них что-либо общее. Однако имеется определенный тип таблиц, допускающий точную формулировку и вместе с тем достаточно общий, чтобы представлять интерес. (В то же время он является основным в теории регулирования.)

Исключим из всех возможных таблиц те, которые делают игру нашего R слишком легкой и поэтому неинтересной. Упр. 11/4/3 показывает, что если столбец в таблице содержит одинаковые исходы, то игра нашего R не обязательно должна быть «различающей», т. е. R не обязательно должен менять свой ход с каждым изменением хода игрока D. Будем, следовательно, рассматривать только такие таблицы, где *ни один столбец не со-*

держит двух одинаковых исходов. В этом случае R должен выбирать ход, полностью зная ход упомянутого D, т. е. любое изменение хода D необходимо требует изменения хода нашего R. (При этом не делается никаких допущений о соотношениях между исходами одного столбца и исходами другого столбца, так что на эти соотношения не накладывается никаких ограничений.) Такова, например, таблица 11/5/1. Пусть теперь задана некоторая цель и R выбирает, каким будет его ход в ответ на каждый ход игрока D.

Таблица 11/5/1

		R		
		α	β	γ
	1	f	f	k
	2	k	e	f
	3	m	k	a
	4	b	b	b
D	5	c	q	c
	6	h	h	m
	7	j	d	d
	8	a	p	j
	9	l	n	h

Очень важно, что, выигрывая или проигрывая, он должен выбрать один и только один ход в ответ на любой возможный ход игрока D. Его выбор ходов, или «стратегия», как это можно назвать, может выглядеть следующим образом:

если D выбирает 1, то я выберу γ;
» » » 2 » » » α;
» » » 3 » » » β;
. . . . . .
» » » 9 » » » α.

Тем самым он, конечно, определяет некоторое преобразование (которое должно быть однозначным, ибо R не может делать одновременно два хода):

$$\downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & 9 \\ \gamma & \alpha & \beta & \ldots & \alpha \end{matrix}$$

Это преобразование определяет единственным образом некоторое множество исходов. В это множество войдут исходы, которые бы встретились фактически, если бы D в некоторой последовательности игр делал каждый возможный шаг по крайней мере один раз. Ибо 1 и γ дают исход k, и 2 и α дают опять k и т. д., что приводит к преобразованию

$$\downarrow \begin{array}{ccccc} (1, \gamma) & (2, \alpha) & (3, \beta) & \ldots & (9, \alpha) \\ k & k & k & \ldots & l \end{array}.$$

Теперь можно высказать утверждение, что разнообразие этого множества исходов не может быть меньше, чем частное

$$\frac{\text{разнообразие ходов игрока } D}{\text{разнообразие ходов игрока } R},$$

т. е. в данном случае разнообразие множества исходов не может быть меньше $^9/_3$.

Это утверждение легко доказать. Предположим, что R отмечает один элемент в каждой строке и стремится просто к тому, чтобы удерживать разнообразие отмеченных элементов сколь возможно малым (оставляя пока в стороне всякое понятие о цели). Он отмечает некоторый элемент в первой строке. Во второй строке он должен перейти к новому столбцу, если он не хочет увеличить разнообразие отмеченных элементов добавлением к ним нового, отличного от них элемента. Ведь в первоначально выбранном столбце все элементы по предположению различны. Чтобы сохранять разнообразие в один элемент, R должен в каждой строке переходить к новому столбцу. (Это *лучшее*, что он может сделать. Иногда такого перехода от столбца к столбцу будет недостаточно, чтобы сохранить разнообразие в один элемент; но для нашего рассуждения это неважно: поскольку нас интересует лишь наименьшее возможное разнообразие, мы допускаем, что обстоятельства складываются как можно благоприятнее.) Если R имеет n возможных ходов (в нашем примере три) и на n-й строке все столбцы использованы, то для следующей строки один из столбцов нужно использовать снова, так что *придется* ввести новый исход в наше множество отмеченных исходов. Например, в таблице 11/5/1 выбор элемента k в первых трех строках позволит сохранять разнообразие в один элемент, но на четвертой строке *придется* ввести второй элемент в наше множество исходов.

Обобщаем. Если: а) никакие два элемента в одном и том же столбце не являются одинаковыми, б) R выбирает множество исходов, по одному из каждой строки, в) таблица содержит r строк и c столбцов, — то *разнообразие выбранного множества исходов не может быть меньше, чем r/c.*

ЗАКОН НЕОБХОДИМОГО РАЗНООБРАЗИЯ

11/6. Теперь мы можем взглянуть на эту игру (сохраняя все еще то ограничение, что никакой элемент не может встречаться дважды в одном и том же столбце) с несколько другой точки зрения. Если ход игрока R не изменяется, т. е. R делает один и тот же ход при любом ходе игрока D, то *разнообразие исходов будет равно разнообразию ходов этого D.* Теперь D, так сказать, полностью контролирует исходы.

Если же R использует или может использовать два хода, то разнообразие исходов может быть уменьшено вдвое (но не в большее число раз). Если R имеет три хода, то разнообразие исходов может быть уменьшено втрое (но не в большее число раз) и т. д. Таким образом, чтобы свести разнообразие исходов к некоторому заданному числу или к некоторой доле разнообразия ходов игрока D, разнообразие ходов игрока R *должно* быть увеличено по меньшей мере до соответствующего минимума. *Только разнообразие ходов игрока R может уменьшить разнообразие исходов.*

11/7. Если разнообразие измеряется логарифмически (что почти всегда удобно), то при тех же самых условиях теорема принимает очень простую форму. Пусть V_D — разнообразие ходов игрока D, V_R — разнообразие ходов игрока R и V_O — разнообразие исходов (причем все они измеряются логарифмически). Как доказано в предыдущем параграфе, численное значение V_O не может быть меньшим, чем $V_D - V_R$. Следовательно, минимальное значение V_O равно $V_D - V_R$.

Если V_D дано постоянное значение, то $V_D - V_R$ может быть уменьшено лишь за счет соответствующего роста V_R. Таким образом, *разнообразие исходов*, если оно минимально, *может быть еще более уменьшено лишь за счет соответствующего увеличения разнообразия, которым располагает R*. (Более общая формулировка дается в § 11/9.)

Это и есть закон необходимого разнообразия. Говоря более образно, *только разнообразие в R может уменьшить разнообразие, создаваемое D*; **только разнообразие может уничтожить разнообразие.**

Этот тезис настолько важен в общей теории регулирования, что я приведу еще несколько иллюстраций и доказательств его, прежде чем перейти к рассмотрению практических применений.

11/8. (При первом чтении этот параграф может быть опущен.) Этот закон имеет очень широкое применение и ни в коем случае не является просто тривиальным следствием табличной формы. Чтобы показать это, та же самая по существу теорема будет доказана для случая, когда разнообразие распределено во времени и ходы непрерывны. Этот случай специально рассматривался Шенноном. (Обозначения и понятия, встречающиеся в этом параграфе, взяты из книги Шеннона.)

Пусть D, R и E — три переменные, каждая из которых является источником информации, причем слово «источник» не означает здесь, что они действуют независимо. Безотносительно к тому, как они связаны причинно, может быть вычислен или эмпирически измерен целый ряд их энтропий. Сюда относятся: $H(D, R, E)$ — энтропия вектора, составляющими которого служат эти три переменные; $H_D(E)$ — неопределенность переменного E при известном состоянии D; $H_{ED}(R)$ — неопределенность R, когда известны и E, и D, и т. д.

Условие, введенное в § 11/5 (что никакой элемент не должен дважды встречаться в одном и том же столбце), соответствует здесь следующему условию: при данном, или фиксированном, R энтропия источника E (соответствующая энтропии исхода) не должна быть меньше, чем энтропия источника D, т. е.

$$H_R(E) \geqslant H_R(D).$$

Теперь, какие бы причинные или иные отношения ни соединяли D, R и E, их энтропии в силу алгебраической необходимости будут связаны формулой

$$H(D)+H_D(R)=H(R)+H_R(D),$$

ибо каждая сторона этого равенства равна $H(R, D)$. Подставляя $H_R(E)$ вместо $H_R(D)$, получим

$$H(D)+H_D(R) \leqslant H(R)+H_R(E) \leqslant H(R, E);$$

но в силу алгебраической необходимости

$$H(R, E) \leqslant H(R)+H(E),$$

так что

$$H(D)+H_D(R) \leqslant H(R)+H(E),$$

или

$$H(E) \geqslant H(D)+H_D(R)-H(R).$$

Таким образом, энтропия источника E имеет определенный минимум. Если взаимозависимость между источниками D и R должна влиять на этот минимум, он будет наименьшим при $H_D(R)=0$, т. е. *когда R есть однозначная функция от D*. Если это так, то минимум $H(E)$ равен $H(D)-H(R)$. Этот вывод аналогичен выводу предыдущего параграфа. Он просто утверждает, что минимальное значение энтропии источника E может быть уменьшено относительно энтропии источника D лишь за счет такого же *увеличения* энтропии источника R.

11/9. Небольшое видоизменение только что сформулированных теорем позволяет получить примечательное обобщение.

Рассмотрим тот случай, когда, даже если R ничего не делает (т. е. делает один и тот же ход при любом ходе своего противника D), разнообразие исходов меньше, чем разнообразие ходов D. Так именно обстоит дело при использовании таблицы 11/4/1. Если, скажем, R на все ходы партнера D дает ответ α, то исходами будут a, b или d — разнообразие в три элемента, тогда как D имеет разнообразие в пять элементов. Чтобы получить возможность точного вычисления, предположим, что каждый элемент повторяется теперь в каждом столбце k раз (вместо «только одного» раза в § 11/5). Точно такое же рассуждение, измененное лишь в том отношении, что теперь kn строк могут давать один и тот же исход, приводит нас к теореме о том, что

$$V_O \geqslant V_D - \log k - V_R,$$

где разнообразия измеряются логарифмически.

Совершенно аналогично можно модифицировать теорему об энтропиях, предполагая не

$$H_R(E) \geqslant H_R(D),$$

как в § 11/8, но

$$H_R(E) \geqslant H_R(D) - K.$$

Тогда минимум $H(E)$ будет равен

$$H(D) - K - H(R),$$

с аналогичной интерпретацией.

11/10. Наш закон утверждает, что некоторые события невозможны. Очень важно ясно представлять себе источник этой невозможности. Может ли, например, этот закон быть поколеблен экспериментом?

Наш закон не имеет никакого отношения к свойствам материи.

Если он формулируется так: «Никакая машина не может...», — то он не может быть опровергнут изобретением какого-нибудь нового прибора, или какой-нибудь новой электронной схемы, или открытием какого-нибудь нового элемента. Он не имеет даже никакого отношения к свойствам машины, понимаемой в общем смысле гл. 4; ведь он вытекает из *таблицы,* такой, как в § 11/4. В этой таблице просто говорится, что определенные сочетания ходов D и R ведут к определенным исходам; но она совершенно не зависит от того, кто или что определяет исход. Эксперименты могут лишь *доставить* нам такие таблицы.

Наша теорема есть прежде всего высказывание о возможных расположениях в прямоугольной таблице.

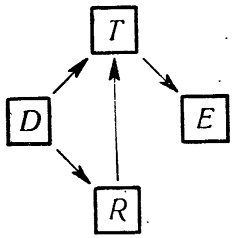
Она утверждает, что расположения определенного типа осуществить невозможно. Она зависит от особых свойств машины не более, чем, скажем, теорема о том, что четыре предмета можно расположить в форме квадрата, а три — нельзя. Следовательно, этот закон ничем не обязан эксперименту.

11/11. *Снова регулирование.* Теперь мы можем вновь заняться вопросом о регулировании, от которого мы отвлеклись в начале этой главы. Ибо закон необходимого разнообразия дает нам *меру* регулирования. Вернемся же обратно и посмотрим, что по существу понимается под «регулированием».

Прежде всего мы видим множество возмущений D, возникающих в мире, окружающем организм. Эти возмущения возникают часто довольно далеко от организма. Возникнув же, они затем угрожают в случае бездействия регулятора R вывести значения существенных переменных E из допустимых пределов. Значения E соответствуют «исходам» предыдущего параграфа. Из всех значений E лишь немногие (η) совместимы с жизнью организма, т. е. являются допустимыми. Поэтому регулятор R, чтобы работа его была успешной, должен принимать свои значения в таком соответствии со значениями D, чтобы исходы всегда по возможности оставались внутри допустимого множества η, т. е. в физиологических пределах. Таким образом, регулирование по существу связано с игрой из § 11/4. Проследим эту взаимосвязь подробнее.

Допустим сначала, что дана таблица T. Это — суровый внешний мир или же те внутренние явления, которые предполагаемый регулятор должен принимать как данные. Теперь начнем действие: D принимает произвольное значение; R — принимает значение, определяемое значением D; таблица определяет исход, который либо входит, либо не входит в η. Обычно этот процесс повторяется, как в случае с ванной, испытывающей в течение дня различные возмущения. Тогда D и R принимают другое значение; определяется новый исход, который также может либо входить, либо не входить в η. И так далее. Если R — хороший регулятор, т. е. работает успешно, то R представляет собой такое преобразование возмущений D, что все исходы входят в η. В *этом случае* R *и* T *совместно действуют в качестве барьера* F (§ 10/5).

Теперь мы можем изобразить эти отношения на диаграмме непосредственных воздействий:



Стрелки изображают фактические каналы связи. Ибо разнообразие в D определяет разнообразие в R, а разнообразие в T определяется разнообразиями в D и R. Если R и T являются действительными машинами, то R имеет вход от D, а T имеет два входа.

[Если R и T воплощены в реальных машинах, необходимо ясно представлять себе, что́ мы имеем в виду. Если какая-то машина служит основой для T, она будет иметь (согласно § 4/1) множество состояний, принимаемых шаг за шагом. Эти состояния и эти шаги существенно независимы от тех дискретных шагов, которые мы различали в действиях D, R и T в этой главе. Например, T дает исходы, и любой отдельный исход можно сравнить с другим исходом, как целое с целым. Однако в другом контексте каждый отдельный исход можно проанализировать более подробно. Так, организм, страдающий от жажды, может пойти по траектории 1 и утолить жажду или пойти по траектории 2 и умереть от жажды. По некоторым причинам эти два исхода могут браться как нерасчлененные, особенно когда их нужно противопоставить. Если же мы хотим исследовать поведение организма более детально, то мы должны рассматривать траекторию 1 как состоящую из последовательности состояний, разделенных во времени шагами совершенно другого порядка, чем шаги, которые разделяют последовательные акты регулирования, соответствующие последовательным возмущениям.]

Теперь мы можем дать интерпретацию общего явления регулирования в терминах теории связи. Если R ничего не делает, т. е. сохраняет одно и то же значение, то разнообразие в D угрожает пройти через T к E, что нежелательно. Может случиться, что T даже безо всякого изменения R заблокирует какую-то часть разнообразия D и что этого будет достаточно для поддержания в E постоянства, необходимого для выживания. Но обычно необходимо дальнейшее подавление разнообразия в E, и это подавление может быть достигнуто, как мы видели в § 11/6, лишь за счет увеличения разнообразия в R.

Теперь мы можем выделить часть нашей диаграммы и сосредоточить внимание на R, как на передатчике:

$$\boxed{D} \to \boxed{R} \to \boxed{T}\ .$$

Закон необходимого разнообразия утверждает, что *мощность R как регулятора не может превосходить пропускной способности R как канала связи.*

В этой форме закон необходимого разнообразия обнаруживает точное соответствие с теоремой 10 Шеннона, в которой говорится, что если в сообщении появляется шум, то количество шума, которое может быть устранено каналом коррекции, ограничено количеством информации, которая может быть передана по этому каналу.

Таким образом, «шум» Шеннона соответствует нашему «возмущению», его «канал коррекции» — нашему «регулятору» R, а его «сообщение с энтропией H» становится в нашем случае сообщением с нулевой энтропией, ибо «передаваться» должно на этот раз именно *постоянство.* Таким образом, использование регулятора для достижения гомеостазиса и использование канала коррекции для подавления шума гомологичны.

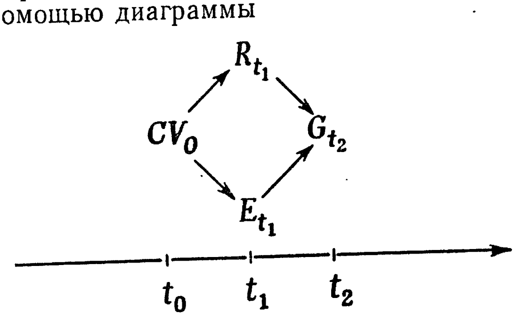
Упр. 1. Зрительный нерв насекомого состоит из ста волокон, каждое из которых может нести 20 битов в секунду; достаточно ли это, чтобы дать насекомому возможность защищаться от десяти опасностей, каждая из которых может присутствовать или не присутствовать каждую секунду, независимо от остальных?

Упр. 2. Корабельный телеграф, связывающий капитанский мостик с машинным отделением, определяет одну из девяти возможных скоростей, но передает не более одного сигнала за 5 секунд. С другой стороны, штурвал может каждую секунду определять одно из 50 положений руля. Поскольку опыт показал, что этих средств управления обычно достаточно для полного регулирования, оцените обычную верхнюю границу возмущений (порывов ветра, встречных кораблей, мелей и т. д.), угрожающих безопасности судна.

Упр. 3. Генерал имеет против себя армию в 10 дивизий, каждая из которых может маневрировать с разнообразием 10^6 битов за каждый день. Сведения о противнике он получает через 10 сигнальщиков, каждый из которых работает по 8 часов в день, передавая по 60 букв в минуту кодом, передающим 2 бита на букву. Достаточна ли пропускная способность этого канала для обеспечения полного регулирования?

Упр. 4. (Продолжение.) Генерал может диктовать приказы по 500 битов в минуту в течение 12 часов в день. Если его сведения о противнике были полными, то достаточна ли пропускная способность этого словесного канала для полного регулирования?

11/12. Диаграмма непосредственных воздействий, данная в предыдущем параграфе, очевидным образом связана с формулировкой «директивной корреляции» [1], которую Зоммергоф дает в своей книге «Аналитическая биология» с помощью диаграммы



[1] «Любое событие или положение вещей Rt_1, имеющее место в момент t_1, находится в директивной корреляции (is directively correlated) к данному одновременному с ним событию или положению вещей Et_1 относительно последующего наступления события или положения вещей Gt_2, если физическая система, частями которой все они являются, объективно находится в таких условиях, что существует событие или положение вещей CVt_0, предшествующее t_1, и множество возможных альтернативных значений CV_{t_0}, такие, что:

а) при данных обстоятельствах любое изменение значения CV_{t_0} в пределах этого множества влечет изменение как R_{t_1}, так и E_{t_1};

Если я правильно понимаю его, то вводимые им понятия равносильны следующим используемым здесь понятиям:

ценетическая переменная (CV_0) $\longleftrightarrow$ возмущение (D),
ответ (R_{t_1}) $\longleftrightarrow$ ответ (R),
окружающие обстоятельства (E_{t_1}) $\longleftrightarrow$ таблица (T),
последующие события (G_{t_2}) $\longleftrightarrow$ исход (E).

Таким образом, знакомство с его книгой помогает значительно расширить теорию, излагаемую в этой части, поскольку он широко обсуждает этот предмет.

11/13. Закон необходимого разнообразия дает нам возможность выяснить отношения, существующие между различными типами разнообразия и информации, воздействующими на живой организм.

Биологический вид продолжает существовать (§ 10/4) прежде всего благодаря тому, что его представители могут блокировать поток разнообразия (рассматриваемый как возмущение), идущий к набору генов (§ 10/6). Эта блокировка и является основной потребностью вида. Естественный отбор показал, какое преимущество достигается, если впустить большое количество разнообразия (как информацию) лишь в часть системы (так, чтобы оно не достигало набора генов), а затем использовать его так, чтобы поток разнообразия, идущий через R, блокировал поток, идущий сквозь окружающую среду T.

Эта точка зрения помогает нам понять то, что на первый взгляд может показаться парадоксом. Высшие организмы имеют чувствительную кожу, чуткую нервную систему и часто обладают инстинктом, побуждающим их, играя или из любопытства, привносить в систему больше разнообразия, чем это непосредственно необходимо.

б) любая такая пара измененных значений Rt_1, Et_1 (так же как и пара их фактических значений) есть пара соответствующих элементов двух соотнесенных множеств возможных значений R'_{t_1}, R''_{t_1}, ... и E'_{t_1}, E''_{t_1}, ... таких, что при данных условиях все пары соответствующих элементов, и только эти пары, вызывают последующее наступление G_{t_2}» (Зоммергоф, «Аналитическая биология», стр. 54—55).

CVt_0, «эту необходимую общую причину (causal determinant) Et_1 и Rt_1, мы будем называть ценетической переменной (coenetic variable) приспособления» (там же, стр. 52). — *Прим. перев.*

Разве устранение этого разнообразия не увеличило бы их шансы выжить?

В настоящей главе показано, что разнообразие (информация или возмущение) приходит в организм в двух формах. Одна из них, угрожающая выживанию набора генов, — прямая передача от D через T к E. Эта часть должна быть заблокирована любой ценой. Другая форма тоже угрожает набору генов, но она может быть преобразована (или перекодирована) посредством регулятора R и использована для блокировки остальной части разнообразия в T. Эта информация полезна и должна быть (если имеется регулятор) увеличена насколько возможно; ибо согласно закону необходимого разнообразия количество внешних воздействий, достигающих набора генов, может быть уменьшено лишь за счет увеличения передаваемой таким образом информации. Таково значение этого закона для биологии.

Он важен также и для *нас*, для нашего продвижения к последней главе. В своих элементарных формах закон этот интуитивно очевиден и вряд ли заслуживает особой формулировки. Если, например, фоторепортер имеет дело с двадцатью различными (в отношении выдержки и расстояния) объектами, то его аппарат, очевидно, должен иметь по крайней мере двадцать различных установок, чтобы можно было привести все негативы к одинаковой интенсивности и резкости. Вся сила этого закона в его количественной форме проявляется в тех случаях, когда мы начинаем рассматривать системы, где эти зависимости уже не столь очевидны, и особенно в тех случаях, когда система очень велика. Например, до какой степени диктатор может править страной? Обычно говорят, что Гитлер полностью правил Германией. Поскольку речь идет о силе регулирования (в смысле § 10/6), закон утверждает, что это управление не превышало 1 человеческой силы. (Будущее должно показать, истинно ли это утверждение; сейчас главное его достоинство состоит в том, что оно точно и недвусмысленно.) Таким образом, рассматриваемый закон, хотя и банальный в простых случаях, может оказать реальную помощь в тех случаях, которые слишком сложны, чтобы рассматривать их лишь с помощью ничем не подкрепленной интуиции.

УПРАВЛЕНИЕ

11/14. Приведенные в этой главе формулировки уже указывали на тесную связь между регулированием и управлением. Так, в § 11/3 таблица 11/3/1 давала R возможность не только получать исход a, несмотря на все изменения со стороны D, но и получать по желанию b или c.

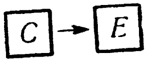
Можно и по-другому рассмотреть эту ситуацию. Предположим, что выбор определенного исхода в качестве желаемой цели осуществляется некоторым управляющим устройством C, которому R должен подчиняться. Решение C будет влиять на то, выберет ли R α, β или γ. Поэтому диаграмма непосредственных воздействий имеет вид

$$\begin{tikzcd}
\boxed{D} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\
\boxed{C} \arrow[r] & \boxed{R} \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

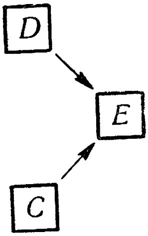
В целом она изображает систему с двумя независимыми входами C и D.

Предположим теперь, что R является совершенным регулятором. Если C выбирает в качестве цели a, то (через посредство R) E примет значение a, *какое бы значение ни приняло* D. Аналогично, если C выбирает в качестве цели b, исход b наступит при любом значении D. И так далее. Если теперь C выберет определенную последовательность — скажем, a, b, a, c, c, a — в качестве многоэтапной или составной цели, то эта последовательность будет осуществляться независимо от значений, принимаемых D на всем ее протяжении. (Для простоты мы принимаем, что все составляющие изменяются в такт друг другу.) Таким образом, то обстоятельство, что R является совершенным регулятором, позволяет C полностью управлять выходом, несмотря на наличие помех со стороны D. Следовательно, *совершенное* **регулирование** *исхода, осуществляемое R, дает возможность C полностью* **управлять** *исходом.*

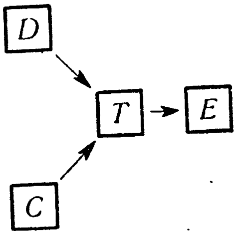
Эти же факты можно рассмотреть и с другой точки зрения. Если управление, которое C пытается осуществить над E:



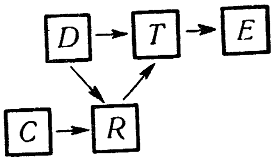
нарушается или искажается другим, независимым входом D так, что они связаны как



или



то можно построить подходящий регулятор R, получающий информацию как от C, так и от D и помещаемый между C и T:



и образовать из R и T канал, который *передает все от C к E, не передавая ничего от D к E.*

Следовательно, осуществление управления может необходимым образом зависеть от осуществления регулирования. Таким образом, они тесно связаны.

Упр. 1. Постройте по таблице 11/3/1 множество преобразований с параметром C, которые игрок R должен использовать, чтобы C полностью управляло исходом. (Указание: какие объекты служат здесь операндами?)

Упр. 2. Пусть в последней диаграмме этого параграфа C передает в E со скоростью 20 *бит/сек*, источник D производит шум в 5 *бит/сек* и T таково, что при постоянном R изменение E

достигает 2 *бит/сек*; какова должна быть минимальная пропускная способность канала, идущего от D к R, чтобы C полностью управляло E?

Упр. 3. (Продолжение.) Какова должна быть минимальная пропускная способность канала, идущего от C к R?

Упр. 4. (Продолжение.) Канала, идущего от R к T?

11/15. Рассматривая регулирование, мы делали основной упор на его свойство уменьшать разнообразие исходов: в отсутствие регулирования разнообразие велико, при наличии регулирования оно мало. В предельном случае мы получим регулирование, которое сохраняет исход строго постоянным. Эта точка зрения, несомненно, правильна, но на первый взгляд она может показаться резко противоположной наивному взгляду, согласно которому живые организмы обнаруживают все что угодно, только не неподвижность. Не мешает поэтому добавить несколько слов к тому, что было сказано в § 11/13.

Надо понимать, что различие между «постоянным» и «переменным» часто зависит от точного определения смысла этих слов. Так, если луч прожектора неотступно следует за самолетом, мы можем заметить либо то, что луч прошел большой диапазон углов (относительно земли), либо то, что угол, который он образует с самолетом, остается постоянно равным нулю. Обе точки зрения, конечно, правильны; в этом примере нет в действительности никакого противоречия между «большим диапазоном изменения» и «постоянством», поскольку они относятся к различным переменным.

Точно так же шофер, аккуратно ведущий машину из одного города в другой по извилистой дороге, может рассматриваться либо с той точки зрения, что он заставляет рулевое колесо активно действовать и изменять свое положение, либо с той точки зрения, что он в течение всей поездки сохраняет расстояние между машиной и обочиной дороги постоянным.

Значительная часть деятельности живых организмов допускает такое двоякое рассмотрение. С одной стороны, наблюдатель может отмечать, что фактически происходит значительное движение и изменение; а с другой стороны, он может замечать, что во всей этой деятельности, поскольку она координирована и гомеостатична, сохраняются определенные инварианты, показывающие степень осуществляемого регулирования.

Эта тема допускает различные вариации. Например, если переменная x всегда ведет себя так же, как переменная y, то величина $x - y$ постоянна и равна нулю. Следовательно, если значения y задаются некоторым внешним фактором, то любой регулятор, действующий на x так, чтобы $x - y$ оставалось постоянным и равным нулю, в действительности заставляет x изменяться и при этом копировать y. Аналогично «заставлять x делать противоположное тому, что делает y» соответствует тому, чтобы «удерживать $x + y$ при некотором постоянном значении». А «заставлять переменную w изменяться так, чтобы она всегда была вдвое больше (изменяющейся) скорости изменения v» соответствует тому, чтобы «сохранять величину $w - 2dv/dt$ постоянной».

Для изложения и развития общей теории очень удобно располагать возможностью рассматривать все «цели» как имеющие единую форму, а именно — «сохранять исход постоянным со значением a». Однако читатель не должен делать отсюда ошибочный вывод, будто эта теория рассматривает только неподвижность; он должен приучить себя свободно менять соответствующие понятия.

НЕКОТОРЫЕ ВАРИАЦИИ ТЕМЫ

11/16. В § 11/4 существенные факты из области регулирования были объяснены с помощью простой прямоугольной таблицы, применительно к игре между двумя партнерами D и R. Читателю может показаться, что эта формулировка слишком проста и что некоторые общеизвестные примеры регулирования не могут быть представлены с ее помощью. В действительности, однако, эта формулировка является значительно более общей, чем кажется, и в оставшихся параграфах этой главы мы рассмотрим различные усложнения, которые, как покажет более близкое рассмотрение, действительно подходят под основную формулировку § 11/4.

11/17. *Сложное возмущение.* Основная формулировка § 11/4 включала только один источник возмущений D, поэтому может показаться, что она не включает всех тех бесчисленных в биологическом мире случаев, когда регулироваться должны сразу несколько возмущений, идущих одновременно по нескольким каналам. Так, велосипедисту часто приходится справляться как с препятствиями, связанными с уличным движением, так и с нарушением равновесия, вызываемым порывами ветра.

На самом деле, однако, этот случай охватывается нашей формулировкой, ибо в этой главе отнюдь не исключается возможность того, чтобы D было вектором с любым числом составляющих. Векторное D всегда может изобразить все такие сложные возмущения в рамках общей формулировки.

11/18. *Шум.* Сюда относится и тот случай, когда в T присутствует шум, т. е. когда T имеет еще один вход, на который влияет некоторое возмущение, налагающееся на T. Таков, например, случай, когда T есть электрическая машина, которую возмущают изменения напряжения в питающей ее сети. На первый взгляд этот случай не охватывается основной формулировкой.

Надо понимать, что D, T, E и т. д. определялись в § 11/3 в чисто *функциональной* форме. Так, например, D есть «то, что возмущает». Когда дана любая реальная система, необходима некоторая осторожность при решении вопроса о том, что в ней соответствует D, что T и т. д. Кроме того, граница, временно проведенная между D и T (и все другие границы), может при повторном рассмотрении потребовать перемещения. Так, одно множество границ, проведенных в реальной системе, может дать систему, которая должна состоять из D, T и т. д., но которая не согласуется с основной формулировкой из § 11/4. Тогда может оказаться, что пересмотр границ, дающий *новые* D, T и т. д., даст нам систему, которая *будет* соответствовать основной формулировке.

Если предварительное проведение границ покажет, что данное (временное) T включает шум, то границы должны быть пересмотрены так, чтобы шум, воздействующий на T, вошел в D *как составляющая.* D будет теперь «тем, что возмущает», и T не будет иметь третьего входа.

Следовательно, рассматриваемая формулировка совпадает с формулировкой § 11/4.

При этом, конечно, мы совсем не думали, что можно магически справиться с шумом как с реальным возмущением, просто думая о нем по-другому. Здесь имеется в виду только, что если мы начнем сначала и переопределим D и T, то некоторое *новое* преобразование D сможет восстановить регулирование. Это новое преобразование, конечно, будет сложнее старого, ибо D будет иметь больше составляющих.

11/19. *Начальные состояния.* Сходный случай имеет место, когда T есть некоторая машина, поведение которой описывается определенной траекторией, причем исход E зависит от свойств траектории T. Исходы в этом случае будут в известной степени зависеть от того, какое из состояний T является начальным. Каким образом входит начальное состояние T в основную формулировку § 11/4?

Если можно управлять начальным состоянием так, чтобы траектория всегда могла начинаться с одного и того же стандартного состояния, то никаких трудностей не возникает. (В этой связи может пригодиться способ § 7/25.) Однако может случиться, особенно если система очень велика, что начальное состояние не может быть стандартизировано. Включается ли этот случай в формулировку?

Да, ибо D как вектор можно переопределить так, чтобы в D входило начальное состояние T. Тогда разнообразие, привносимое в E разнообразием начальных состояний T, получит соответствующее место в основной формулировке.

11/20. *Сложная цель.* Может случиться, что допустимые состояния η существенных переменных E будут иметь более одного условия. Так, от термостата может требоваться:

1) чтобы он поддерживал температуру между 36° и 37° C;

2) чтобы при изменении температуры в пределах $\pm 10°$ C он возвращал ее в допустимую область не позже чем через минуту.

С этой трудностью можно справиться так же, как в § 11/17, т. е. допуская, что E может быть вектором с несколькими составляющими и что допустимые значения (η) могут задаваться особыми условиями для каждой составляющей.

Таким образом, разрешая E быть вектором, в основную формулировку § 11/4 можно включить все случаи, когда цель является сложной, или условной, или ограниченной.

11/21. *Внутренняя сложность.* В качестве последнего примера, показывающего, насколько всеобъемлющей является в действительности основная формулировка, рассмотрим случай, в котором главной проблемой является, по-видимому, не столько регулирование, сколько взаимодействие между несколькими регулированиями. Так, диспетчер может иметь дело с несколькими поездами, одновременно прибывающими на его участок. Управиться с каждым в отдельности было бы просто, но задача здесь заключается в том, чтобы уметь управлять ими как целым сложным комплексом.

Этот случай фактически также покрывается нашей основной формулировкой. Ибо ничто в этой формулировке не препятствует тому, чтобы величины, или состояния, или элементы в D, R, T или E состояли сами из частей, связанных различными соотношениями. То обстоятельство, что «D» есть отдельная буква, вовсе не означает, что обозначаемое ею тоже должно быть внутренне простым или единым.

Для диспетчера «возмущением» D является определенное множество поездов, прибывающих на его участок в определенном пространственно-временном порядке. Другие расположения их дадут другие значения этого возмущения D, которое, конечно, должно быть вектором. Исходами E будут различные комплексы поездов, маневрирующих относительно друг друга или покидающих участок. Допустимое множество η, конечно, включает составляющую «отсутствие столкновений», а также, вероятно, и другие составляющие. Ответные действия диспетчера R включают разнообразные сочетания движений сигналов и стрелок. T есть все, что дано: основные факторы географии, механики, сигнализации и т. д., которые для сложившейся ситуации и предпринятых диспетчером ответных действий однозначно определяют исход событий.

Мы видим, следовательно, что в принципе основная формулировка может включать случаи любой степени внутренней сложности.

ГЛАВА 12

Регулятор, управляемый ошибками

12/1. В предыдущей главе мы исследовали природу регулирования и показали, что для его осуществления должны соблюдаться определенные соотношения и правила.

Каждый раз мы полагали, что регулирование уже осуществлено, и затем исследовали, какие при этом должны выполняться условия. Однако, хотя эта точка зрения и полезна, она вряд ли соответствует тому, что обычно происходит на практике. Перейдем поэтому к новой точке зрения.

На практике вопрос о регулировании обычно возникает следующим образом. Даны существенные переменные E, и дано множество состояний η, которыми они должны ограничиваться, чтобы организм мог жить (или промышленное предприятие — удовлетворительно работать). Эти два условия должны быть даны прежде всего прочего. *Прежде чем можно будет осуществить или даже говорить о каком-то регулировании, мы должны знать, что́ здесь существенно и что́ требуется.* Любой биологический вид имеет свои требования: кошка должна быть сухой, рыба должна быть мокрой. Следящие системы в технике имеют цели, определяемые другими соображениями: одна система должна поддерживать в инкубаторе тепло, другая — поддерживать в холодильнике холод. Во всей нашей книге принимается, что внешние соображения уже определили цель, т. е. допустимые состояния η. В этой книге нас занимает лишь проблема того, как достичь этой цели, несмотря на помехи и трудности.

Возмущения D угрожают вывести E из множества η. Если D действует через посредство некоторой динамической системы (окружающей среды) T, то первоначально диаграмма непосредственных воздействий имеет вид

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{T} \rightarrow \boxed{E} \ .$$

Организм (или вообще кто-то, заинтересованный в E) располагает, однако, возможностью образовать другую динамическую систему R (например, мозг или следящую систему), которая может соединяться с T и которая, если она правильно построена, образует вместе с T одно целое, которое мы обозначим буквой F. Тогда диаграмма непосредственных воздействий будет иметь вид

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{F} \rightarrow \boxed{E} \ ,$$

причем F будет блокировать поток разнообразия от D к E, так что E будет оставаться в пределах η.

T обычно дано. Это среда, окружающая организм, вместе с теми частями организма, которые при регулировании должны приниматься как данные. Ее обычно нельзя устранить, но с нею можно манипулировать. Следовательно, в общем виде проблема регулирования заключается в следующем: *даны E, η, T и D; требуется образовать такой механизм R, чтобы R и T, будучи соединены, удерживали E в пределах* η.

Начиная отсюда и до конца книги, мы будем исследовать, как различные типы наших *данных* (E, η, T и D) определяют форму машины со входом (R), осуществляющей регулирование. Мы хотим найти форму этой машины R.

Если бы ситуация всегда была столь же проста, как в таблице 11/3/1, то тема скоро бы исчерпалась. Однако на самом деле возможны многочисленные отклонения от этой простой формы. Мы будем исследовать эти отклонения, поскольку они создают различные трудности при проектировании или описании регулятора R.

При обсуждении конкретных случаев регулирования мы будем отныне полагать, что возможности переопределения (§ 11/16) использованы полностью и что вследствие этого формулировка задачи либо такова, как в § 11/3, где возможно полное (совершенное) регулирование и управление, либо такова, как в § 11/4, где совершенное регулирование невозможно. В дальнейшей части книги мы будем заниматься в основном теми случаями, где полное регулирование невозможно, но где мы хотим получить регулирование, как можно более полное в данных условиях.

12/2. *Сенсорные и моторные ограничения.* Простым введением в реальные трудности является случай, когда регулятор R, рассматриваемый как канал для передачи разнообразия или информации от D к T, обладает пропускной способностью, которая в силу закона необходимого разнообразия оказывается недостаточной для сведения разнообразия E к разнообразию η. В этом случае регулирование по необходимости будет неполным (несовершенным).

Примеры этого явления насчитываются мириадами. Сюда относятся прежде всего все случаи сенсорных ограничений, например случай глухоты или случай шофера, который не может ясно видеть через забрызганное дождем ветровое стекло. Другими примерами служат организмы, не способные видеть ультрафиолетовые лучи, и больной сухоткой спинного мозга, не чувствующий, где находятся его ноги. Таковы возможные ограничения канала, идущего от D к R.

Ограничения возможны и для канала, идущего от R к T, т. е. для эффекторной стороны R. Сюда относятся: человек, потерявший руку; насекомое, которое не может летать; слюнная железа, которая не может выделять слюну, и заклинившийся руль.

Если воздействие R на T является векторным, т. е. осуществляется через несколько каналов или составляющих, то аналогичное ограничение пропускной способности может иметь место в случаях, когда происходит какое-либо сокращение числа параметров системы T, доступных для R (ср. § 7/12). Так, порча одного из приборов управления может помешать водителю хорошо вести машину.

Случай, когда R не может получать полную информацию о начальном состоянии T (затронутый в § 11/19), фактически включается в упомянутые выше случаи. С такой трудностью сталкивается железнодорожный диспетчер в случае тумана. Он вполне информирован о появлении возмущения «туман», но часто ему бывает трудно установить текущее состояние системы, которой он управляет, т. е. положения (в данный момент) поездов на его участке. Из-за этого ограничения потока информации от T к R возникает трудность или даже невозможность осуществления полного (совершенного) регулирования.

12/3. В основной формулировке § 11/4 предполагалось, что процесс регулирования последовательно проходит следующие стадии:

1) некоторое возмущение угрожает со стороны D;

2) оно действует на R, которое преобразует его в ответное действие;

3) оба действия D и R *одновременно* действуют на T, вызывая исход в T;

4) исход представляет собой некоторое состояние в E или воздействует на E.

Таким образом, на стадии 3) предполагается, что если R представляет собой действительную материальную систему, то она выполняет всю свою работу прежде, чем T начинает двигаться. Другими словами, мы принимали, что регулятор R работает на более высокой скорости, чем T.

Эта последовательность действительно осуществляется во многих случаях. Например, при приближении кошки мышь может успеть ускользнуть в нору, прежде чем кошка успеет вцепиться в нее когтями. В этом случае мы говорим, что организм отреагировал на *угрозу* (в D), а не на само *разрушительное действие* (в E), чем и предупредил последнее. Таким образом, наша формулировка правильно представляет многие важные случаи регулирования.

С другой стороны, во многих важных случаях такое предвосхищение невозможно, т. е. R не может завершить свое действие до того, как начнет определяться исход (в T). (Пример такого случая приводится в следующем параграфе.) В этих случаях регулирование, описанное в § 11/3, невозможно. Что же остается делать?

Один способ, конечно, заключается в ускорении передачи информации от D к R, и во многих системах регулирования имеются приспособления, специально предназначенные для этой цели. Примитивные нервные волокна приобретают миэлиновые оболочки, чтобы ускорить передачу импульсов к мозгу. У некоторых организмов развивается чувство обоняния, позволяющее вовремя подготовить подходящий ответ на непосредственное телесное столкновение. А в экономических системах посылают сообщения по телеграфу, а не через посыльных, чтобы, скажем, можно было успеть приготовиться к прибытию в порт судна со скоропортящимся грузом.

Иногда, однако, имеющиеся ресурсы не позволяют ускорить передачу через R; реакция R не может достичь T прежде, чем начнет определяться исход. Тогда лучшее, что можно сделать, — это осуществлять неполное регулирование настолько хорошо, насколько позволяют обстоятельства. В последующих параграфах будет рассмотрено, как это можно сделать.

12/4. *Регулирование ошибками.* Общеизвестным примером регулятора, который не может непосредственно реагировать на первоначальное возмущение D, является термостатическая ванна, которая, конечно, не может сказать: «Я вижу, что кто-то приближается ко мне с холодной фляжкой, которую он собирается погрузить в меня, и потому я должна действовать немедленно». Напротив, этот регулятор получает информацию о воздействии только тогда, когда температура воды (E) фактически начинает падать. То же самое ограничение относится к другим возможным воздействиям, таким как приближение солнечных лучей, которые будут согревать воду, или открывание двери, откуда дует холодный воздух.

Это ограничение имеет место для многих важных типов регулятора. Сюда относится, например, механизм поддержания постоянного кислородного питания тканей: любая продолжительная нехватка кислорода вызывает в конце концов увеличение числа красных кровяных шариков. Поэтому у людей с определенными сердечными заболеваниями и у людей, живущих на большой высоте, где воздух разрежен, наблюдается постоянная тенденция к такому увеличению. Это регулирование получает информацию от самого́ вредного воздействия (отсутствия кислорода), а не от причины (D) сердечного заболевания или от решения жить на большой высоте.

С точки зрения теории связи легко соотнести эти новые явления с уже известными. Различие здесь состоит просто в том, что теперь информация от D к R (которая должна передаваться, если регулятор R вообще должен играть какую-то полезную роль) *проходит через* T.

Вместо

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] \arrow[dr] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \\ & \boxed{R} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

мы теперь имеем

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] & \boxed{T} \arrow[r] \arrow[d, shift left] & \boxed{E} \\ & \boxed{R} \arrow[u, shift left] & \end{tikzcd}.$$

Таким образом, R получает информацию о D через посредство T:

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{R} \arrow[r] & {} \end{tikzcd};$$

и информацией, пригодной для использования в целях регулирования, будет та, которая сохранится при кодировании, обусловленном прохождением через T (§ 8/5).

Иногда информация, поступающая в R, должна проходить еще более длинный путь, так что R испытывает влияние только осуществившегося уже воздействия на E. Диаграмма непосредственных воздействий в этом случае будет иметь вид

$$\begin{tikzcd} \boxed{D} \arrow[r] & \boxed{T} \arrow[r] & \boxed{E} \arrow[dl] \\ & \boxed{R} \arrow[u] & \end{tikzcd},$$

а это — не что иное, как основная форма простой «следящей системы, управляемой ошибками», или «регулятора с замкнутой петлей», с ее общеизвестной обратной связью от E к R. Читатель должен понимать, что эта форма отличается от описанной в основной формулировке (§ 11/4) только тем, что здесь информация о D приходит в R более длинным путем:

$$\boxed{D} \to \boxed{T} \to \boxed{E} \to \boxed{R} \to \ .$$

Также и здесь информацией, пригодной для использования в R, будет только та, которая сохраняется при передаче через T и E.

Эта форма имеет величайшее значение и широчайшее применение. Дальнейшая часть книги будет посвящена ее рассмотрению. (Остальные случаи существенно просты и не нуждаются в особом рассмотрении.)

12/5. Основным свойством регулятора, управляемого ошибками, является то, что *он не может быть совершенным* в смысле § 11/3.

Предположим, что мы хотим построить систему, управляемую ошибками, используя метод §§ 11/3 и 4. Мы берем таблицу с двойным входом, где D и R определяют исход в E. Разнообразие каждого столбца равно разнообразию D. Новым здесь будет некоторое видоизменение правил игры. Раньше она проходила так: сначала делал свой выбор партнер D, затем партнер R и затем определялось E. Теперь же она идет так, что после того как D сделал свой выбор, R должен принять значение, являющееся функцией исхода E (ибо R управляется *ошибками*). Легко показать, что при этих условиях *разнообразие E будет столь же велико, как разнообразие D*, т. е. R не сможет осуществить никакого регулирования, независимо от того, как он построен (т. е. независимо от того, какое преобразование переводит значения E в значение R).

Если не требовать формального доказательства, то упрощенным рассуждением можно показать, что так и должно быть. Как мы видели, R получает информацию через T и E. Предположим, что R каким-то образом все-таки осуществляет регулирование. Это означало бы, что разнообразие в E уменьшено по сравнению с разнообразием в D — возможно даже сведено к нулю. Самое это уменьшение сокращает пропускную способность канала

$$\boxed{D} \rightarrow \boxed{T} \rightarrow \boxed{E} \rightarrow .$$

Чтобы *E сохранялось совершенно постоянным, этот канал должен быть полностью заблокирован.* Таким образом, чем более успешно R сохраняет E постоянным, тем более R блокирует канал, по которому R получает необходимую информацию. Ясно, что любой успех R может быть в лучшем случае лишь частичным.

12/6. К счастью, во многих случаях полное регулирование не обязательно. До сих пор мы принимали, что состояния существенных переменных E резко разделяются на «нормальные» (η) и «летальные» и что ввиду этого появление «нежелательного» состояния полностью несовместимо с регулированием. Однако во многих случаях системы обнаруживают непрерывность, так что состояния существенных переменных распределяются вдоль некоторой шкалы нежелательности. Так, сухопутное животное может пройти целый ряд степеней обезвоживания, прежде чем умереть от жажды. Своевременное возвращение по этой шкале с полпути может с основанием быть названо «регулировочным», если оно спасает жизнь животного, хотя это может и не спасти его от неприятных ощущений.

Таким образом, наличие непрерывности делает возможным регулирование, хотя и неполное, но представляющее огромное практическое значение. Допускаются небольшие ошибки, а затем, передавая свою информацию в R, они делают возможным регулирование, предотвращающее более серьезные ошибки. Таковы в терминах теории связи основные положения теории регуляторов с простой обратной связью.

12/7. Читателю может показаться, что мы уделили излишнее внимание регулятору, управляемому ошибками, тщательно формулируя то, что уже давно известно. Однако точность формулировки в данном случае, вероятно, имеет смысл, поскольку мы теперь собираемся расширить понятие регулятора, управляемого ошибками, на область значительно более широкую, чем обычно.

Такой тип регулятора, воплощаемый детерминированной машиной, общеизвестен. Он включает следящую систему, термостат, механизм гомеостазиса в физиологии и т. д. Однако он может воплощаться и недетерминированной машиной, и в этом случае он включает класс явлений, пока еще не обычных для индустриальной техники, но весьма обычных и очень важных для биологических систем. Этот вопрос рассматривается вновь в § 12/11. А пока мы должны вернуться назад и посмотреть, что же включается в это понятие «недетерминированной машины».

МАРКОВСКАЯ МАШИНА

12/8. Теперь мы переходим к рассмотрению более общего класса машин, чем тот, который рассматривался в первой и второй частях. [Логически он должен был бы рассматриваться раньше, но в первых двух частях столько места занимала детерминированная машина (т. е. машина, преобразования которой однозначны), что рассмотрение более общего типа могло бы внести путаницу.]

«Машина» есть по существу система, поведение которой является достаточно закономерным или повторяющимся, чтобы мы могли делать определенные предсказания о ее будущих действиях (§ 7/19).

Такие предсказания могут иметь различные формы. Для одной машины мы можем предсказать ее следующее состояние; тогда мы говорим, что она «детерминированна» и относится к машинам, рассмотренным в части I. Для другой машины мы не сможем предсказать ее следующее состояние, но сможем предсказать, что при многократном повторении тех же условий *часто́ты* различных состояний будут иметь определенные значения. Это возможное постоянство частот уже было отмечено в § 9/2. Оно является характеристикой цепи Маркова.

Итак, мы можем рассмотреть новый класс абсолютных систем — систем, состояния которых изменяются во времени не в соответствии с однозначным преобразованием, но в соответствии с матрицей переходных вероятностей. Чтобы эта система оставалась одной и той же, значения *вероятностей* должны быть неизменными. В § 2/10 было показано, что однозначное преобразование может задаваться матрицей переходов, в клетках которой стоят 0 и 1 (там для простоты ставились 0 и +). В § 9/4 цепь Маркова задавалась аналогичной матрицей, содержащей дроби. Таким образом, детерминированная абсолютная система является особым случаем марковской машины; она является *предельной формой марковской машины, в которой все вероятности превратились либо в* 0, *либо в* 1 (ср. § 9/3).

«Машина со входом» была множеством абсолютных систем, различающихся параметром. По аналогии **марковская машина со входом** должна быть множеством марковских машин, определяемых *множеством матриц с параметром,* значения которого указывают, какая матрица должна использоваться на данном шаге.

Понятие марковской машины является естественным расширением понятия обычной детерминированной машины, рассматривавшейся в части I. Если все вероятности равны 0 или 1, то эти два типа тождественны. Если все вероятности очень близки к 0 или 1, то мы получаем машину, поведение которой почти детерминированно, но которая по временам допускает неожиданные отклонения. По мере того как вероятности все дальше отходят от 0 и 1, поведение машины становится все менее определенным и все более напоминающим поведение одного из насекомых из § 9/4.

Следует отметить, что это определение, хотя и допускает некоторую неопределенность, в других отношениях остается абсолютно строгим. Если машина из состояния x переходит в 90% случаев в состояние y и в 10% случаев в состояние z, то эти *проценты* должны быть постоянными (в том смысле, что с удлинением последовательности относительные частоты должны стремиться к этим процентам и что эти пределы должны оставаться неизменными для всех последовательностей). Практически это означает, что условия, определяющие процентное соотношение, должны оставаться постоянными.

Нижеследующие упражнения помогут читателю несколько освоиться с понятием марковской машины.

Упр. 1. Маятник метронома постоянно колеблется между двумя крайними состояниями R и L, но, находясь справа (R), он имеет вероятность в 1% остановиться там. Какова его матрица переходных вероятностей?

Упр. 2. Детерминированная машина α имеет преобразование

$$\downarrow \begin{matrix} A & B & C & D \\ B & D & D & D \end{matrix}.$$

Марковская машина β имеет матрицу переходных вероятностей

↓	A	B	C	D
A	0	0	0	0
B	0,9	0	0	0
C	0	0	0,2	0
D	0,1	1,0	0,8	1,0

Как различается их поведение? (Указание: начертите график α, а затем начертите график β, позволив вероятностям перейти в 0 и 1).

Упр. 3. Марковская машина со входом имеет параметр, принимающий три значения p, q, r, и имеет два состояния a и b; матрицы переходных вероятностей таковы:

$$(p)\;\begin{array}{c|cc} \downarrow & a & b \\ \hline a & \frac{1}{2} & 1 \\ b & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\;;\qquad (q)\;\begin{array}{c|cc} \downarrow & a & b \\ \hline a & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ b & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\;;\qquad (r)\;\begin{array}{c|cc} \downarrow & a & b \\ \hline a & \frac{1}{3} & \frac{3}{4} \\ b & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Машина начинает движение в состоянии b, делает один шаг со входом q, затем один шаг со входом r и затем один шаг со входом p. Каковы вероятности того, что она придет в a или в b?

**Упр.* 4. (Продолжение.) Какое общее правило, использующее умножение матриц, позволяет получить ответ алгебраически? (Указание: упр. 9/6/8.)

*Упр. 5. Соедините марковскую машину (с состояниями a, b, c и входными состояниями α, β)

$$\alpha:\ \begin{array}{c|ccc} \downarrow & a & b & c \\ \hline a & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}3 \\ b & \cdot & 0{,}7 & 0{,}2 \\ c & 0{,}8 & \cdot & 0{,}5 \end{array}, \qquad \beta:\ \begin{array}{c|ccc} \downarrow & a & b & c \\ \hline a & 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}5 \\ b & 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ c & 0{,}1 & \cdot & \cdot \end{array}$$

с марковской машиной (с состояниями e, f и входными состояниями δ, ε, θ)

$$\delta:\ \begin{array}{c|cc} \downarrow & e & f \\ \hline e & 0{,}7 & 0{,}5 \\ f & 0{,}3 & 0{,}5 \end{array}, \qquad \varepsilon:\ \begin{array}{c|cc} \downarrow & e & f \\ \hline e & 0{,}2 & 0{,}7 \\ f & 0{,}8 & 0{,}3 \end{array}, \qquad \theta:\ \begin{array}{c|cc} \downarrow & e & f \\ \hline e & 0{,}5 & 0{,}4 \\ f & 0{,}5 & 0{,}6 \end{array}$$

посредством преобразования

$$\downarrow\begin{matrix} a & b & c \\ \varepsilon & \delta & \theta \end{matrix}, \qquad \downarrow\begin{matrix} e & f \\ \beta & \alpha \end{matrix}.$$

Какая марковская машина (без входа) получится? (Указание: попробуйте изменить вероятности на 0 и 1, чтобы система стала детерминированной, и примените метод § 4/8; затем сделайте вероятности дробными и используйте тот же основной метод.)

*Упр. 6. (Продолжение.) Должна ли новая матрица оставаться марковской?

*Упр. 7. Если M — марковская машина, доминирующая над детерминированной машиной N, то покажите, что выходы N становятся цепью Маркова лишь после того, как M приходит к статистическому равновесию (в смысле § 9/6).

12/9. Выглядит ли данная реальная машина как марковская или как детерминированная, это иногда зависит от того, какая часть этой машины наблюдается (§ 3/11). Некоторые реальные машины таковы, что небольшого, казалось бы, изменения степени наблюдения может быть достаточно для того, чтобы перевести машину в ее видимых формах из одного класса в другой.

Так, предположим, что к цифровой вычислительной машине присоединена длинная лента со случайными числами, используемыми в некотором процессе, который осуществляет машина. Для наблюдателя, не видящего ленты, выход машины недетерминирован; но для наблюдателя, имеющего копию этой ленты, выход детерминирован. Таким образом, вопрос: «Является ли эта машина *в действительности* детерминированной?» — не имеет смысла и поставлен неправильно, если точно не определена наблюдаемая область. Другими словами, иногда различие между «марковской» и «детерминированной» машинами может быть проведено лишь после тщательного определения системы. (Это является еще одним примером того, насколько неадэкватно определение «данной системы» путем отождествления ее с реальным предметом.) Реальные предметы могут давать целое множество одинаково приемлемых «систем», которые могут сильно отличаться друг от друга по интересующим нас здесь свойствам; и ответ на какой-либо конкретный вопрос может существенно зависеть от того, к какой системе он относится (ср. § 6/22).

12/10. Тесная связь, существующая между марковской и детерминированной машинами, проявляется также и в существовании промежуточных форм. Так, предположим, что крыса частично изучила лабиринт из девяти клеток, показанный на рис. 12/10/1, где *G* является

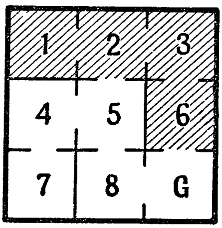


Рис. 12/10/1.

целью. По причинам, в подробном изложении которых нет необходимости, крыса не находит никаких чувственно воспринимаемых ориентиров в клетках 1, 2, 3 и 6 (заштрихованных), так что, находясь в одной из этих клеток, она переходит наугад в любую из тех клеток, в которые она имеет доступ. Например, если мы будем повторно сажать ее в клетку 3, то она с одинаковой вероятностью будет переходить в 2 или 6. (Равную вероятность я принимаю только для удобства.) Однако в клетках 4, 5, 7, 8 и *G* крыса имеет чувственно воспринимаемые ориентиры и движется прямо из клетки в клетку по направлению к G. Например, если сажать ее повторно в клетку 5, то она всегда будет переходить в 8 и оттуда в G. Такое поведение не является исключением в биологической работе.

Нетрудно найти матрицу ее переходов. Так, из 1 она может перейти только в 2 (в силу устройства лабиринта). Из 2 она переходит с одинаковой вероятностью в 1, 3 или 5. Из 4 она переходит только в 5. Из G она может перейти только в G. Так и строится эта матрица.

Упр. Постройте какую-нибудь возможную матрицу переходных вероятностей описанной системы.

12/11. *Устойчивость.* При рассмотрении марковской машины оказывается, что она имеет свойства, соответствующие описанным в части I, хотя часто очевидным образом видоизмененные. Например, можно построить кинематический график марковской машины. Однако, поскольку преобразование ее не однозначно, от каждого состояния может отходить не одна стрелка. Так, марковская машина

↓	a	b	c
a	0,2	0,3	0,1
b	0,8	0,7	0,5
c	.	.	0,4

имеет график, показанный на рис. 12/11/1, где при каждой стрелке имеется дробь, указывающая вероятность того, что представляющая точка пойдет по этой стрелке.

В данном частном случае можно видеть, что все системы, находящиеся в состоянии c, в конце концов покинут его, чтобы никогда в него не вернуться.

Марковская машина имеет различные формы устойчивости, соответствующие упомянутым в гл. 5. **Устойчивая область** есть множество таких состояний, что представляющая точка, войдя в одно из этих состояний, уже не сможет покинуть это множество. Так, a и b на рис. 12/11/1 образуют устойчивую область.

Состояние равновесия есть просто устойчивая область, сократившаяся до единственного состояния. Как и в случае детерминированной системы, все марковские машины, начинающие движение в пределах данного бассейна, придут к состоянию равновесия, если оно существует. Это состояние равновесия называется иногда

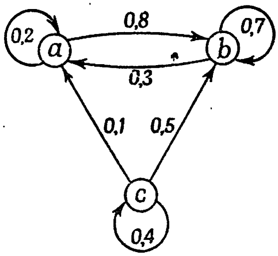


Рис. 12/11/1.

абсорбирующим, или **поглощающим**, состоянием. В примере из § 9/4 нет состояния равновесия. Оно появится, если прибавить четвертое положение «на липкой бумаге», что и объясняет термин «абсорбирующее состояние».

Вблизи состояния равновесия поведение марковской машины явно отличается от поведения детерминированной машины. Если система имеет конечное число состояний, то, находясь на траектории, ведущей к состоянию равновесия, каждая индивидуальная *детерминированная* система достигнет его, пройдя определенную траекторию, после вполне определенного числа шагов. Так, на первом графике § 2/17 система перейдет из C в D в точности за два шага. Однако для марковской системы это число шагов (от данного состояния до состояния равновесия) не является единственным и длина траектории может быть предсказана лишь в среднем. Так, предположим, что марковская машина имеет матрицу

↓	a	b
a	1	$\frac{1}{2}$
b	0	$\frac{1}{2}$

с состоянием равновесия a. Пусть большое число таких систем начинает движение в точке b. После первого шага половина их перейдет в a, а половина останется в b. После второго шага половина из тех, что остались в b, перейдет в a, а половина (т. е. четверть общего числа) все еще будет в b. Продолжая рассуждение, мы установим, что из всех систем, начавших движение в b,

$^1/_2$ достигнет a за 1 шаг
$^1/_4$ » a » 2 шага
$^1/_8$ » a » 3 »

и т. д. Таким образом, *средняя* длина траектории от b до a равна

$$\frac{\frac{1}{2}\cdot 1+\frac{1}{4}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3+\ldots}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots}\text{ шага}=2\text{ шагам.}$$

Некоторые из траекторий будут значительно длиннее 2 шагов.

Как теперь хорошо известно, вблизи состояния равновесия система ведет себя так, как если бы она «стремилась к цели», которой является состояние равновесия. Соответствующее явление имеет место и в марковском случае.

Однако здесь система не движется к цели твердо и определенно, а как бы неопределенно блуждает среди различных состояний, постоянно переходя в новое состояние, если только старое не было состоянием равновесия, и столь же постоянно останавливаясь, если ей случится попасть в состояние равновесия. Состояние равновесия все еще выступает по отношению к системе как «цель», но система движется к ней как бы путем опробывания случайной последовательности состояний, делая новый шаг или останавливаясь в зависимости от того, в каком состоянии она в данный момент находится. Таким образом, *движение марковской машины к состоянию равновесия обнаруживает объективные свойства метода достижения успеха посредством проб и ошибок.*

Здесь стоит сказать, что обычный термин «trial and error» [английское название метода проб и ошибок. —

Ред.] является в высшей степени неточным. Слово «trial» (проба) стоит в единственном числе, хотя суть метода в том, что попытки повторяются все вновь и вновь. Слово «error» (ошибка) также плохо выбрано, ибо существенным элементом является достижение успеха в конце. Слова «поиск и остановка» (hunt and stick), по-видимому, описывают этот процесс и более образно, и более точно. Я буду преимущественно употреблять это название.

Таким образом, движение к цели в процессе поиска и остановки *гомологично*, согласно § 12/8, движению по определенной траектории, ибо и то и другое есть движение машины к состоянию равновесия. Соблюдая осторожность, мы можем применять к обоим одни и те же принципы и доказательства.

Упр. 1. Какие состояния равновесия имеет система из упр. 12/10/1?

Упр. 2. Марковская машина имеет матрицу

$\downarrow$	a	b	c	d	e	f
a	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.
b	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.
c	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	.	.	.	.
d	.	.	1	.	.	.
e	.	.	.	1	.	.
f	.	.	.	.	1	1

Она начинает движение в большом числе случаев с *a*. Как описать ее поведение в терминах психологии крысы в лабиринте?

МАРКОВСКОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

12/12. Продвижение отдельной марковской машины к состоянию равновесия значительно менее упорядоченно, чем продвижение детерминированной машины, и потому марковский тип мало используется в технических регуляторах. По сравнению с плавным и прямым регулированием, осуществляемым обычными следящими системами, марковское регулирование действительно должно казаться беспомощным. Тем не менее в живых организмах этот более общий метод широко используется, ибо использующую его машину в общем значительно легче построить и поддерживать в действии. Фактически он часто используется для многих простых регулировок, где скорость и действенность не имеют очень большого значения.

В качестве первого примера возьмем человека, который хочет регулировать количество мух в комнате, удерживая его равным или близким к нулю. Помещая в подходящее место липкую бумагу, он не вызывает никакого *детерминированного* изменения в количестве мух. Тем не менее единственным состоянием равновесия для каждой мухи является теперь состояние «на бумаге», а состоянием равновесия для числа мух не на бумаге является 0. Этот метод примитивен, но имеет то большое достоинство, что не требует многого и достаточно хорошо работает на практике.

Аналогичный метод регулирования часто использует игрок в гольф, когда ищет потерянный мяч на некотором участке, где мяч непременно должен быть. Здесь состояниями являются положения игрока на участке, а правило, которым руководствуется игрок, гласит: для всех, кроме одного, положений — «продолжать бродить в поисках мяча», а для одного-единственного положения — «перестать бродить». Хотя этот метод, возможно, и не идеален, он тем не менее способен обеспечить простое регулирование.

Другим примером регулирования с низкой эффективностью может служить крыса с серьезным повреждением мозга, которая ничего не может запомнить о лабиринте, но может распознать пищу и, столкнувшись с ней, останавливается и начинает есть. (Сравните ее поведение с поведением крысы, которая не останавливается, увидев пищу.) Ее продвижение будет в значительной степени случайным, возможно с некоторыми повторяющимися ошибками; тем не менее оно обнаруживает рудиментарную форму регулирования, ибо, найдя пищу, крыса остановится, съест ее и выживет, тогда как другая крыса не остановится и умрет от голода.

Упр. 1. Муж и жена решили обзаводиться детьми, пока у них не будет мальчик, но не далее. (I) Является ли этот процесс регулируемым? (II) Какова матрица его переходных вероятностей?

Упр. 2. Является ли регулируемой игра: «Если выпадет герб, я выигрываю; если решетка, бросаем снова».

12/13. До сих пор мы рассматривали только путь, по которому марковская машина достигает своей цели. В принципе единственным отличием ее от детерминированной машины является то, что ее траектория не единственна. С учетом этого различия мы можем применять к регулированию, осуществляемому посредством марковской машины, все те понятия, которые мы ввели в предшествующих главах этой части.

[Следует учитывать предостережение, сделанное в § 11/11 (абз. 5). Шаги, которыми марковская машина движется по своей траектории, имеют величину меньшего порядка, чем шаги, отделяющие один акт регулирования (один «ход» в смысле § 11/3) от другого. Последние соответствуют изменению одной траектории в другую, что в корне отлично от перехода по траектории от одной точки к другой.]

Таким образом, основная формулировка § 11/4 совместима с использованием как детерминированных, так и марковских машин в качестве систем T и R, определяющих фактический исход. Никакой принципиальной разницы нет, хотя если мы опишем их поведение в психологических или антропоморфических терминах, то могут получиться весьма различные описания. Так, если требуется, чтобы R (для данного внешнего воздействия) проявляло свою регулирующую силу переходом в некоторое состояние, то детерминированное R прямо перейдет в это состояние, тогда как марковское R будет как бы искать его.

Марковская машина, как и детерминированная, может использоваться в качестве средства управления, ибо доказательства § 11/14 относятся к обоим типам (в этих доказательствах рассматривалось только, какие исходы были получены, а не *как* они были получены). При этом она имеет тот недостаток, что ее траектория неопределенна, но зато имеет то преимущество, что ее легко проектировать.

12/14. *Регулирование посредством вето.* Основная формулировка § 11/4 имеет чрезвычайно широкую применимость. Возможно, наиболее важным в этом отношении является случай, когда T и R оба суть машины (детерминированные или марковские) и когда значения E зависят от различных состояний равновесия, возможных для T, причем η является некоторым состоянием (или состояниями), имеющим подходящее или желательное свойство. Большинство физических регуляторов относится к этому типу.

Если T и R — марковские машины, то нетрудно добиться, чтобы под действием машины R машина T переходила в желаемое состояние равновесия η. Надо лишь использовать тот фундаментальный факт, что при соединении двух машин (какими принимаются в данном случае T и R) целое может находиться в состоянии равновесия только тогда, когда каждая часть сама находится в состоянии равновесия в условиях, определяемых другой частью. Этот тезис был высказан в § 5/13 для детерминированной машины, но он также справедлив и для марковской.

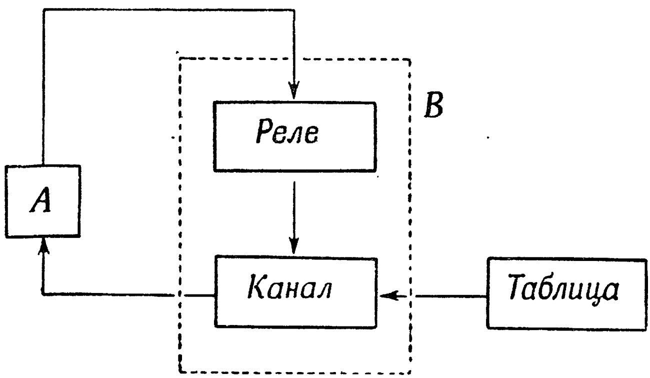
Пусть регулятор R построен следующим образом. Он имеет вход с двумя возможными значениями β и γ. Когда входом является β («плохой вход»), пусть *ни одно* состояние не будет состоянием равновесия; а когда входом является γ («хороший вход»), пусть все состояния будут равновесными. Присоединим теперь R к T так, чтобы все состояния, входящие в η, преобразовывались на входе регулятора R в значение γ, а все остальные состояния — в значение β. Пусть вся система движется по некоторой траектории. Единственными состояниями равновесия всей системы будут те, в которых R находится в состоянии равновесия (согласно § 5/13); но это означает, что вход R должен иметь значение γ, следовательно, состояние T должно входить в η. Таким образом, конструкция R заставляет его накладывать вето на все состояния равновесия T, кроме тех, которые входят в η. Это значит, что вся система в целом является регулирующей. Так как T и R здесь марковские, то система в целом будет как бы искать «желаемое» состояние и остановится, когда найдет его. Можно сказать, что регулятор *R* «направляет» поиски, проводимые машиной *T*.

[Возможность того, что *T* и *R* попадут в устойчивую область, состояния которой не входят в η, можно сделать сколь угодно малой, укрупняя *R* (т. е. придавая ему много состояний) и следя за тем, чтобы его β-матрица была достаточно богата связями и потому *R* имело ненулевую вероятность перейти из любого состояния в любое другое состояние.]

Упр. 1. Чем вкратце должна характеризоваться матрица γ и чем матрица β?

**Упр.* 2. Покажите, что тезис § 5/1 одинаково справедлив и для марковской машины.

12/15. *Гомеостат.* Теперь мы можем с новой точки зрения посмотреть на гомеостат. В § 5/14 (который мы рекомендуем перечитать) мы рассматривали его как целое, движущееся к равновесию, но там мы рассматривали сопротивления на шаговых переключателях как жестко припаянные, заданные и известные. Таким образом, поведение *B* было детерминированным. Мы можем, однако, переопределить гомеостат так, чтобы он содержал процесс, посредством которого числа из «Таблицы случайных чисел» Фишера и Йейтса действовали бы как детерминанты (как это и было на самом деле). Если мы теперь будем игнорировать (т. е. принимать как данные) сопротивления на переключателях, то мы можем рассматривать часть *B* (из § 5/14) как состоящую только из реле и канала, в который поступают значения из указанной «Таблицы». Итак, мы рассматриваем часть *B* как имеющую два входа:



Состояние B остается вектором с двумя составляющими: значением, получаемым из «Таблицы», и состоянием реле (возбужденного или нет). Для наблюдателя, который не может наблюдать «Таблицы», часть B является марковской (ср. § 12/9). Ее вход от A имеет два состояния β и γ, и она построена так, что при β ни одно состояние не является равновесным, а при γ все состояния равновесные. Наконец, она соединяется с A как в § 5/14.

Вся система является теперь марковской (поскольку «Таблица» не наблюдается). Она движется к равновесию (как в § 5/14), но данному наблюдателю будет казаться, что она делает это в процессе поиска и остановки, отыскивая желаемое явно наугад и сохраняя его, когда оно найдено.

Следует заметить, что когда вход реле находится в состоянии β, разнообразие «Таблицы» передается в A; но когда вход переходит в γ, передача прекращается. Таким образом, реле действует как кран для потока разнообразия, идущего от «Таблицы» к A. Вся система движется к состоянию равновесия, в котором приток разнообразия из «Таблицы» был бы заблокирован. Она приходит в такое состояние, что приток разнообразия из «Таблицы» (которое вывело бы систему из этого состояния) предотвращен. Таким образом, вся система в данных условиях является как бы самозакрепляющейся, самоблокирующейся. (Это может служить примером к тезису из § 4/22.)

12/16. В предыдущем параграфе приводился пример регулирования в системе, которая частично является детерминированной (взаимодействия между магнитами в A), а частично марковской (значения, принимаемые каналом в части B). Этот пример демонстрирует существенную однородность и общность используемых понятий. Позже мы будем свободно использовать эту общность, не проводя каждый раз различия между марковским и детерминированным случаями.

Другой пример регулирования посредством марковской системы стоит привести, поскольку он общеизвестен. Дети играют в игру, называемую «горячо или холодно». Одному из играющих (назовем его Томом, поскольку он выступает в качестве T) завязывают глаза. Остальные затем помещают какой-нибудь предмет в какое-нибудь место, вызывая тем самым возмущение D. Том может использовать руки для поисков спрятанного предмета, и он старается найти его, но исход скорее всего будет неудачным. Этот процесс обычно делается регулируемым благодаря участию Роба (выступающего в качестве R), который видит, где находится предмет (вход из D), и может давать Тому соответствующую информацию. Роб делает это с помощью условного соглашения, что предмет будто бы излучает тепло; Роб говорит то, что ощущал бы Том: «Теперь тебе холодно; все еще холодно; немножко теплее; нет, опять холодно...» И детям (если они маленькие) доставляет огромное удовольствие убедиться в том, что процесс действительно является регулируемым и что Том всегда в конце концов приходит к цели.

Здесь марковской частью является, конечно, Том, ибо он делает каждый следующий шаг в общем наугад. Поведение Роба более детерминированно, ибо он стремится давать точное кодирование относительных положений.

Следовательно, регулирование, использующее марковские машины, можно считать обычным и знакомым.

ДЕТЕРМИНИРОВАННОЕ РЕГУЛИРОВАНИЕ

12/17. Рассмотрев случай, в котором T и R были воплощены в машинах, и, в частности, тот, в котором машины были марковскими, мы теперь можем опять вернуться к § 12/7 и рассмотреть еще более частный случай, когда все вероятности становятся 0 или 1 (§ 12/8), так что машины становятся детерминированными. Мы по-прежнему имеем дело с регулятором, управляемым ошибками. Чтобы с биологической точки зрения достаточно полно исследовать наиболее примитивные формы регулирования, рассмотрим случай, в котором обратная связь имеет разнообразие только двух состояний.

Примером такой системы служит автоматическая телефонная станция, когда какой-нибудь искатель начинает разыскивать незанятую линию. Искатель пробует по очереди, в определенном порядке, каждую линию, получает от каждой информацию «занято» или «не занято» и прекращает движение (приходит в состояние равновесия) на первой же незанятой линии. Множеством возмущений является здесь множество возможных распределений состояний «занято» и «не занято» по линиям. Система является регулируемой, потому что, каково бы ни было возмущение, исходом является всегда соединение с незанятой линией.

Весь механизм следует считать управляемым ошибками, ибо информация, определяющая, будет ли он продолжать движение или остановится, идет от самой линии.

Этот случай настолько прост, что является в некотором смысле вырожденным. Если мы не уделяем никакого внимания внутренним взаимодействиям между R и T, так что они сливаются, образуя F из § 10/5, то этот случай становится просто случаем детерминированной системы, которая, когда дано начальное состояние, движется по определенной траектории к состоянию равновесия. Таким образом, можно считать, что каждый бассейн, имеющий состояние равновесия, входящее в η, обнаруживает простую форму регулирования, ибо он действует так, чтобы сводить разнообразие начальных состояний (как, например, возмущений D) к меньшему разнообразию окончательного состояния.

Почти то же самое можно сказать о крысе, которая знает дорогу в амбар. Ведь всегда, когда она входит в него, она может пробраться обратно в нору. То же самое можно сказать и о вычислительной машине, в которую введена программа для работы по способу последовательных приближений. С какого бы состояния она ни начинала работу, ее последовательные состояния движутся вполне определенно к цели, которой является единственное состояние равновесия машины.

Упр. Нужно найти карту в перетасованной колоде из 52 карт, просматривая их одну за другой. Сколько карт в среднем придется просмотреть при условии, что: (I) карты просматриваются по порядку; (II) если просмотренная карта окажется ненужной, то она возвращается в колоду, колода тасуется, затем вытаскивается карта и т. д.? (Систематический поиск *против* случайного.)

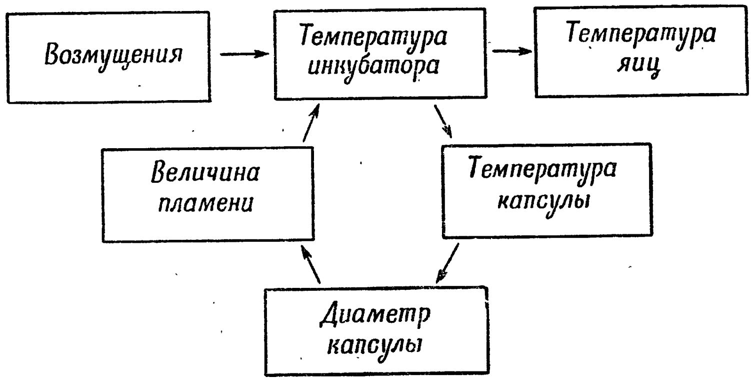
12/18. Когда все машины являются детерминированными, может возникнуть проблема § 12/14: как привести T в состояние равновесия, имеющее некоторое желаемое свойство? Разумеется, решение, данное для марковской машины, сохраняет силу и в этом случае. А именно, надо присоединить преобразователь, осуществляющий вето.

12/19. *Непрерывное изменение.* От этих примитивных форм мы переходим к регуляторам, переменные которых могут изменяться непрерывно. [Следует помнить, что непрерывное есть частный случай дискретного (см. § 2/1).] Из многочисленных существующих примеров я приведу только один или два, поскольку мы интересуемся здесь только общими принципами.

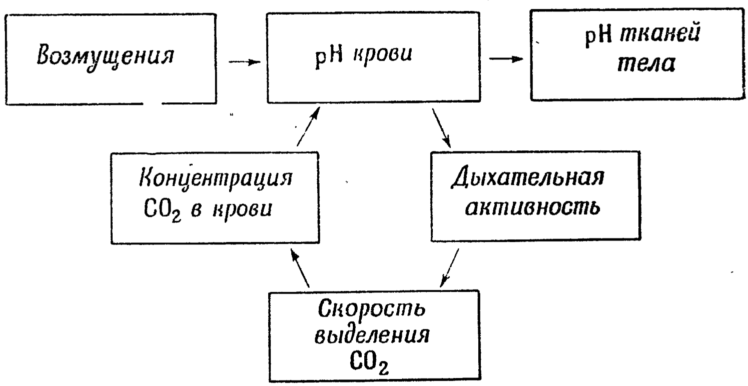
Типичным примером является инкубатор, обогреваемый газом. Он содержит капсулу, которая расширяется от повышения температуры. Механизм устроен так, что расширение капсулы уменьшает пламя (или количество горячего воздуха, поступающего в инкубатор); тем самым предотвращается чрезмерное повышение температуры.

Следует обратить особое внимание на диаграмму непосредственных воздействий в этом примере. Она имеет форму, которая приведена на первой схеме на стр. 336, или какую-нибудь эквивалентную форму. Здесь легко распознать D, T, R и E (хотя различие между T и R и их частями несколько произвольно). Все в целом действует так, чтобы заблокировать передачу разнообразия от возмущений (каковы бы они ни были) к яйцам. Если слегка переопределить цель регулятора, так чтобы ею было поддержание постоянной температуры в инкубаторе, то этот регулятор будет управляться ошибками, а не самими возмущениями. При такой форме регулятора система, конечно, должна быть устойчивой для любого данного возмущения, а желаемая температура должна быть состоянием равновесия системы. Обратная связь в этой схеме должна быть, как правило, отрицательна.

Многие регуляторы в живом теле имеют эту простую форму, и работа Кеннона сделала их общеизвестными



Типичным для них является тот, который регулирует pH крови[1] путем изменения содержания в ней углекислоты:



Система снова обнаруживает только что упомянутые черты.

[1] pH — показатель концентрации водородных ионов в крови.— *Прим. перев.*

Среди бесчисленных примеров таких механизмов следует упомянуть также экономические механизмы. Книга Тастина «Механизм экономических систем» показывает, как тесно связаны их свойства со свойствами, рассмотренными здесь.

Упр. 1. Начертите диаграмму непосредственных воздействий любого известного вам регулятора.

Упр. 2. (Продолжение.) Подумайте, изменение каких параметров воздействовало бы на работу этого регулятора; добавьте их к диаграмме.

12/20. Ради полноты следует упомянуть и о том варианте систем этого класса, когда регулирующий механизм приводится в действие лишь время от времени.

Например, уровень жидкости в резервуаре может поддерживаться между двумя заданными уровнями посредством сифона, внутреннее отверстие которого находится на нижнем уровне, а колено на верхнем. Если обычно подача жидкости превышает расход, то сифон, приходя в действие, когда жидкость достигает верхнего уровня, и прекращая свое действие, когда жидкость опускается до нижнего уровня, будет удерживать уровень жидкости в желаемых пределах.

Многие физиологические регуляторы действуют только время от времени. Так, сюда относится реакция дрожи на холод. Эта реакция имеет особый интерес для нас (ср. § 12/3), показывая, что деятельность регулятора может вызываться либо действительным понижением температуры тела (управление ошибками, осуществляемое со стороны E), либо — прежде чем тело успеет охладиться — видом вещей, вызывающих охлаждение (управление со стороны D).

УСИЛИТЕЛЬ МОЩНОСТИ

12/21. В настоящей главе выход E обычно рассматривался как *постоянный*, но такое допущение отнюдь не должно затемнять того обстоятельства, что эта форма включает большое число случаев, не содержащих, на первый взгляд, никакого элемента постоянства. Об этом упоминалось в § 11/15. Здесь мы рассмотрим один пример, который уже сейчас важен во многих отношениях

22 Зак. 3346. У. Росс Эшби

и который особенно понадобится нам в гл. 14. Я имею в виду те регулирующие и управляющие устройства, которые усиливают мощность.

Усилители мощности существуют во многих формах. Здесь я выберу лишь одну из них, простую и ясную (рис. 12/21/1).

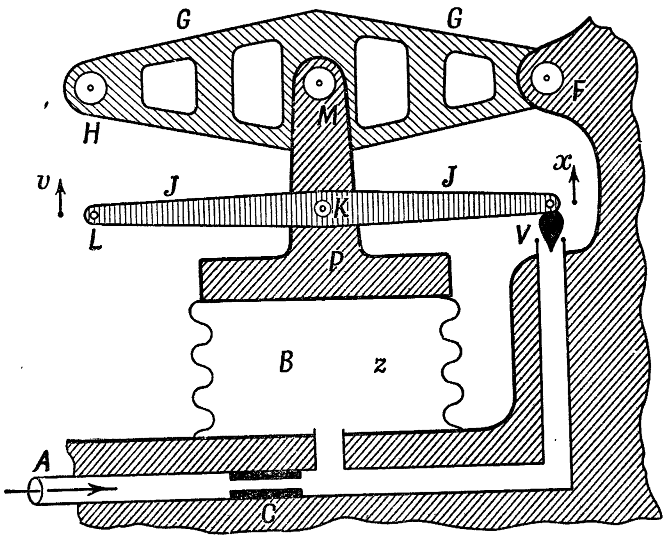


Рис. 12/21/1.

Сжатый воздух в изобилии подается в A и проходит через сужение C, после чего либо устремляется в мехи B, либо выходит в клапан V. Давление в A значительно выше обычного рабочего давления в B, а отверстие C мало, так что воздух, проходя C, движется с постоянной скоростью. После этого он должен либо выходить через V, либо собираться в B, повышая давление z. Скорость выхода воздуха в V, где отверстие частично закрыто конусом, зависит от вертикального перемещения (x) конуса. Последний прикреплен к одному из концов легкого жесткого стержня J, который может поворачиваться вокруг оси K. При неподвижной оси K опускание противоположного конца L стержня J поднимет конус, что откроет выход воздуху и вызовет падение давления z внутри B; обратно, поднятие L вызовет повышение z.

Давление воздуха в B противодействует тяжелому грузу P. Этот груз имеет вверху форму столба и может двигаться весь только вверх или вниз. На столбе укреплены две оси: K и M. M служит осью прочного бруса G, закрепленного в одном конце (F). Если P поднимается, то M также поднимается на ту же высоту, а свободный конец H бруса G поднимается на высоту, вдвое бóльшую.

Посмотрим теперь, что происходит при перемещении L. Положим, что оператор поднимает L на один дюйм. Другой конец (V) при этом опускается на один дюйм, и выходное отверстие клапана уменьшается, пропуская меньшее количество воздуха, так что воздух начинает скопляться в B и давление z повышается. Повысившееся давление поднимет P и тем самым M и H. Таким образом, *движения M стремятся просто повторять движения L*. [Мы можем заметить, что подъем P (если L после подъема на один дюйм фиксируется) заставит клапан V приоткрыться. Таким образом, реакция всей системы на перемещение L будет самоограничивающейся, ибо обратная связь здесь отрицательна. При соблюдении определенных количественных подробностей, требующих точного учета при каждом практическом осуществлении, система будет устойчива в некотором состоянии равновесия, положение которого определяется положением L.]

Можно также рассматривать весь механизм как устойчивую систему, действующую таким образом, что когда перемещение L, скажем, на один дюйм будет стремиться вызвать перемещение V также на один дюйм, реакция всей системы будет стремиться аннулировать это. Иными словами, систему можно рассматривать как такую, которая *стремится сохранить постоянным положение клапана V*.

Теперь нам видно, как превратить эту систему в усилитель мощности и использовать ее в качестве подъемного крана.

Конструктор должен позаботиться о том, чтобы рычаг J был легким. Далее, клапан V должен быть устроен так, чтобы выходящий воздух, или давление z, не оказывало большого влияния на силу, прилагаемую к L. Конструктор должен также позаботиться о том, чтобы мехи B имели большую площадь соприкосновения с P и чтобы среднее рабочее давление z было высоким (а давление в A — еще более высоким). Если это удастся, то небольшая сила, поднимающая L на один дюйм, сможет развить в H большую силу, способную поднять тяжелый груз на такую же высоту. Так, сила в 1 фунт, передвигающая L на 1 дюйм, может заставить H поднять на один дюйм груз в 1000 фунтов. Таким образом, система является усилителем работы (или мощности).

Пока что это был всего лишь простой и ясный пример применения описанных выше принципов регулирования и управления. Позже (в § 14/1) мы вернемся к этому случаю, чтобы уяснить себе, как может совмещаться с *усилителем* мощности закон, утверждающий, что энергия не может возникать из ничего.

Упр. 1. Сколько степеней свободы имеют три тела P, J, G?

Упр. 2. Измените устройство так, чтобы H, удерживая состояние равновесия, двигался в сторону, противоположную движению L.

Упр. 3. Измените устройство так, чтобы равновесие было неустойчивым.

ИГРЫ И СТРАТЕГИИ

12/22. Вопросы регулирования и управления чрезвычайно широки, и сказанное до сих пор лишь слегка обрисовывает их. Еще один большой раздел теории регулирования и управления возникает, когда D и R являются векторами и когда сочетания, вызывающие в конце концов исход в T или E, распределены во времени так, что составляющие этих векторов D и R появляются по очереди. Тогда все действующее возмущение есть последовательность подвозмущений, а вся вызываемая им реакция есть последовательность подреакций.

Такой случай может встретиться, например, в жизни диких животных, когда жертва пытается регулировать защиту от нападения хищника, причем вся борьба протекает в виде чередующихся этапов угрозы и защиты. Здесь нападение хищника в целом состоит из последовательности действий D_1, D_2, D_3, ..., каждое из которых вызывает ответ, так что весь ответ в целом есть также последовательность, которую можно обозначить через R_1, R_2, R_3, ... Вся борьба состоит, таким образом, из двойной последовательности

$$D_1, R_1, D_2, R_2, D_3, R_3, \ldots .$$

Исход определяется некоторым соотношением между всем нападением хищника и всем ответом жертвы.

Мы теперь рассматриваем еще более сложную интерпретацию основной формулировки из § 11/4. Однако она достаточно обычна в биологическом мире. В своей реальной форме — это Битва Жизни; в математической форме — это теория игр и стратегий. Так, в шахматах исход зависит от того, какой будет конкретная последовательность ходов черных и белых

$$Б_1, Ч_1, Б_2, Ч_2, Б_3, Ч_3, \ldots .$$

(Тому, что в § 11/4 называлось «ходом», здесь, конечно, соответствует целая игра.)

Эта теория, основанная Дж. Нейманом в 30-х годах, хотя еще не полностью развита, но уже настолько обширна, что нам придется ограничиться лишь упоминанием о ней. Однако нам следует отметить ее тесную связь и точное соответствие с предметом нашей книги. Она, несомненно, будет иметь огромное научное значение для биологии; ибо врожденные свойства живых организмов суть просто стратегии, оказавшиеся удовлетворительными в ходе многовековой конкуренции и «вделанные» в молодое животное так, чтобы быть готовыми к употреблению по первому требованию. Как многие шахматисты нашли, что ход «P — Q4» [1] является хорошим способом начинать игру в шахматы, точно так же многие виды нашли, что «отрастить зубы» является хорошим способом начать Битву Жизни.

---

[1] В «алгебраической» шахматной нотации этот ход запишется как d2 — d4. — *Прим. перев.*

Можно точно продемонстрировать соответствие между теорией игр и предметами, рассматриваемыми в этой книге.

Во-первых, отметим то обстоятельство, что основное понятие § 11/4 — таблица исходов, на которой была основана теория регулирования и управления, — *тождественно* «матрице выплат», основной в теории игр. Используя это общее понятие, легко показать точное соответствие этих теорий в частных случаях.

Во-вторых, отметим то обстоятельство, что теория игр, сформулированная Дж. Нейманом и О. Моргенштерном, изоморфна теории некоторых определенных машин со входом. Рассмотрим машину, эквивалентную

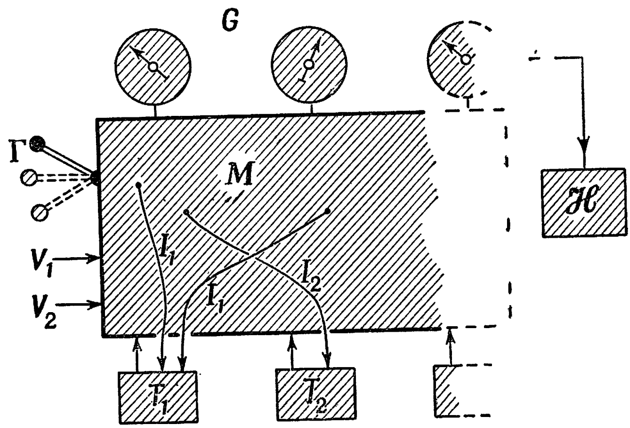


Рис. 12/22/1.

«обобщенной игре» Дж. Неймана (рис. 12/22/1). (Буквы на рисунке соответствуют тем, которые использовал Дж. Нейман в гл. 2 своей книги. С этой главой желательно ознакомиться. Однако его буквы *T* не соответствуют нашему употреблению.)

Итак, имеется машина *M* со входом. Ее внутренняя структура (ее преобразования) известна игрокам *T*. Машина имеет входы трех типов: Г, *V* и *T*. Параметр Г (скажем, какой-нибудь переключатель) определяет, какую структуру будет иметь машина, т. е. в какую игру придется играть. Входы V_i делают возможным производство случайных ходов (например, ввод воздействий от колеса рулетки или колоды перетасованных карт; ср. § 12/15). Каждый игрок T_i есть детерминированная динамическая система, соединенная с M двусторонней связью. Он получает информацию из M по особым каналам I_i и затем действует на M определенным образом. Места присоединений каналов I определяются входом Г. Воздействия от каждого T, вместе с воздействиями других T и V, полностью управляют через M циферблатами G. Когда игра, т. е. траектория, окончена, судья $\mathscr{H}$ читает показания G и выплачивает соответствующие суммы игрокам T.

Здесь мы, очевидно, имеем случай нескольких регуляторов, каждый из которых стремится достичь цели в G; они действуют одновременно и конкурируют внутри M. (Возможность конкуренции между регуляторами до сих пор еще не рассматривалась явно в этих главах.)

Если система ультраустойчива, то поведение каждого T будет определяться параметрами, ведущими себя как ступенчатые функции. Если данный игрок «удовлетворен» выплатой, которую производит $\mathscr{H}$, его параметры сохранят свои значения и его стратегия останется неизменной; но если он не удовлетворен (т. е. если выплата падает ниже некоторого критического значения), то ступенчатые функции изменят свое значение и в следующей игре проигравший будет использовать новую стратегию.

Близко примыкает к этому предмету теория военного шифрования и дешифрования. Шеннон в своей работе «Теория связи в системах засекречивания» показал, как тесно связаны эти различные области. Почти всякий успех в одной из них проливает свет на другую.

В настоящее время невозможно сказать больше, ибо рассматриваемые взаимосвязи должны еще изучаться и исследоваться. По-видимому, ясно, что теория регулирования (включающая многие из основных проблем организации в мозгу и обществе) и теория игр могут многому научиться друг от друга. Если читателю покажется, что эти исследования несколько абстрактны и лишены применений, пусть он подумает о том, что теория игр и кибернетика суть просто основания теории того, как проложить Ваш Собственный Путь. Немногие предметы могут быть богаче применениями, чем этот!

12/23. Мы пришли теперь к концу главы, и биолог может почувствовать себя несколько неудовлетворенным, ибо в этой главе рассматривались только достаточно простые и доступные для понимания системы. А что будет, может он спросить, если попытаться применить регулирование и управление к системам биологических размеров и сложности? Что будет, например, если попытаться применить теорию регулирования и управления к мозгу или к человеческому обществу?

Обсуждением этих вопросов мы займемся в оставшихся главах.

ГЛАВА 13

Регулирование очень большой системы

13/1. Регулирование и управление в очень больших системах представляют особый интерес для работника любой из биологических наук, ибо работник биологических наук имеет дело по большей части со сложными системами, состоящими из почти неисчислимого количества частей. Эколог может стремиться регулировать распространение инфекции в биологической системе большого размера и сложности, в которой играет существенную роль климат, почва, реакции организмов-хозяев, хищники, конкурирующие организмы и многие другие факторы. Экономист может стремиться путем регулирования противодействовать упадку системы, в которой цены, предложение труда, спрос потребителя, стоимость сырья суть лишь немногие из действующих факторов. Социолог сталкивается с аналогичной ситуацией. А психиатр пытается регулировать работу больного мозга, ужасающе сложного и имеющего такую же величину, как и его собственный. Эти процессы регулирования, очевидно, сильно отличаются от тех, которые рассматривались для простых механизмов в предшествующей главе. На первый взгляд это различие кажется столь большим, что можно задать вопрос: не будет ли сказанное до сих пор по существу неприменимо к этим большим системам?

13/2. Однако это не так. Как указывалось в § 4/18, многие из ранее установленных положений высказаны в такой форме, что не зависят от величины системы. (Иногда, правда, упоминалось число состояний или число переменных, но всегда таким образом, что высказывание остается истинным независимо от того, чему равно это число.)

Конечно, регулирование в биологии порождает трудные проблемы — с этим вполне можно согласиться. Но, соглашаясь с этим, следует быть осторожным в определении источника трудностей. Большие размеры системы сами по себе не являются этим источником; они выглядят источником трудностей отчасти потому, что слишком бросаются в глаза, а отчасти потому, что изменения размеров имеют тенденцию соответствовать изменениям источника действительных трудностей. Основным источником трудностей является *разнообразие возмущений, против которых направлено регулирование*.

Размеры динамической системы, воплощающей T, имеют тенденцию соответствовать разнообразию возмущений D по различным причинам. Если T состоит из многих частей и существует неопределенность в отношении начального состояния каждой части, то это разнообразие будет перенесено в D (см. § 11/19). При прочих равных условиях это, вообще говоря, означает, что чем больше число частей, тем больше разнообразие в D. Во-вторых, если каждая часть не полностью изолирована от окружающего мира, то вход каждой части будет вносить некоторое разнообразие, которое будет переноситься в D. Это, вообще говоря, означает, что чем больше число частей, тем больше составляющих в D и — если составляющие имеют определенную независимость — тем больше разнообразие D. (Возможны и другие причины, но и этих достаточно.)

Таким образом, когда эффекты размера отделяются от тех, которые воздействуют на разнообразие возмущений D, обычно обнаруживается, что первые сами по себе не имеют значения и что все дело в последних.

Отсюда следует, что когда система T очень велика, а регулятор R гораздо меньше ее (обычный случай в биологии), закон необходимого разнообразия, по-видимому, играет основную роль. Значение этого закона состоит в том, что когда пропускная способность R фиксирована, он ставит абсолютный предел количеству регулирования (или управления), которое может осуществлять *R*, независимо от того, как может быть внутренне переустроен *R* или как велики возможности *T*. Так, эколог, если пропускная способность его как канала неизменна, может в лучшем случае осуществить лишь какую-то долю того, что он хотел бы сделать. Этой долей он может распорядиться по-разному: он может решить управлять вспышками, а не распространением инфекции или вирусными инфекциями, а не бациллярными, — но *количество* управления, которое он способен осуществить, остается ограниченным. Так же и экономисту, возможно, придется решить, к каким явлениям приложить свои силы, и психиатру придется решить, какими симптомами следует пренебречь, а какие — контролировать.

Предлагаемое здесь изменение точки зрения напоминает то, которое ввел в статистику сэр Рональд Фишер. До него принималось как само собой разумеющееся, что как бы умен ни был статистик, более умный мог бы получить больше информации из имеющихся данных. Но сэр Рональд Фишер показал, что информация, которую можно извлечь из имеющихся данных, имеет максимум и что задача каждого статистика — лишь приближаться к этому максимуму, ибо выше него никто не может подняться. Аналогично до работ Шеннона считалось, что любой канал, если только приложить немного больше искусства, можно модифицировать так, чтобы он нес немного больше информации. Шеннон показал, что задача инженера — лишь разумно приближаться к максимуму, выше которого никто не может подняться. Закон необходимого разнообразия обусловливает такую же стратегию и для предполагаемых регулирующих и управляющих устройств: они должны стремиться приблизиться к своему максимуму — выше этого они не могут подняться. Будем поэтому подходить к очень большой системе без каких-либо экстравагантных идей о том, что может быть достигнуто.

13/3. Прежде чем идти дальше, следует отметить, что когда система очень велика, различие между *D* — источником воздействий и *T* — системой, определяющей исход, может быть несколько неопределенным в том смысле, что границу между ними можно проводить различными, но одинаково удовлетворительными способами.

Эта гибкость особенно заметна в системах, встречающихся на нашей Земле (ибо земные системы явно имеют тенденцию характеризоваться некоторыми общими признаками). На нашей Земле вся взятая в целом динамическая биолого-экологическая система имеет тенденцию состоять из многих подсистем, соединенных достаточно свободно (§ 4/20), а эти подсистемы сами имеют тенденцию состоять из еще меньших систем, опять-таки более богатых внутренними связями, но менее богатых связями между собой и т. д. Например, в стаде скота связь между отдельными животными значительно слабее, чем связи внутри каждого животного, между его отдельными частями (например, между его четырьмя конечностями). В свою очередь, и четыре конечности связаны между собой не так тесно, как молекулы внутри одной кости. Таким образом, если обозначить некоторую часть всей совокупности как T, то часто главным источником внешних воздействий D будут другие системы, свободно соединенные с T и нередко настолько сходные с системами, входящими в T, что их можно было бы с таким же успехом включить в T. При дальнейшем обсуждении вопроса следует все время иметь в виду это обстоятельство — возможность в некоторых случаях провести границу между T и D различными способами, не влияя существенно на окончательные выводы. Однако произвольно или нет, но *какая-то* граница всегда должна быть проведена, по крайней мере в практической научной работе, ибо в противном случае нельзя будет сделать никакого определенного высказывания.

13/4. Когда система T очень велика — когда организм противостоит очень большой и сложной окружающей среде как регулятор с ограниченными средствами, — различные способы могут *иногда* сделать регулирование возможным. (Если регулирование невозможно, организм погибнет — в высшей степени обычный исход, о котором не следует забывать. Но этот случай не требует детального рассмотрения.)

Иногда можно сделать регулирование возможным, переопределяя то, что считается допустимым, т. е. понижая уровень требований. Это несколько тривиальное решение, хотя о возможности его не следует забывать.

Другая возможность состоит в том, чтобы увеличивать размах и мощность R, пока пропускная способность R не сделается достаточной. Этот метод ни в коем случае не следует забывать; но мы его не будем подробно рассматривать. Рассмотрим более полно интересный случай, в котором регулирование, на первый взгляд в высшей степени трудное или даже невозможное, фактически оказывается возможным.

13/5. *Ограничения разнообразия.* Согласно закону необходимого разнообразия, это означает, что разнообразие воздействий в действительности не так велико, как кажется; другими словами, согласно § 7/8, возмущения обнаруживают ограничение разнообразия.

Таким образом, рассматриваемый нами случай имеет следующий характер. D обладает многими составляющими, каждая из которых обнаруживает разнообразие. Первая оценка разнообразия D слишком высока, и мы рискуем прийти к выводу (если дана пропускная способность регулятора), что до определенной степени регулирование E невозможно. Дальнейшее исследование D может, однако, показать, что составляющие не являются независимыми, что существует ограничение разнообразия и что действительное разнообразие возмущений D значительно ниже первой нашей оценки. Мы можем обнаружить, что при данной пропускной способности регулятора R это меньшее разнообразие *может* быть регулируемо и что осуществимо полное регулирование и управление в E. Таким образом, открытие ограничения разнообразия может превратить ситуацию «регулирование невозможно» в ситуацию «регулирование возможно». Если пропускная способность R фиксирована, то это — *единственный* путь.

Таким образом, мы снова убеждаемся в важности и полезности открытия ограничений разнообразия и в правильности тезиса, утверждающего, что из существования ограничения разнообразия всегда можно извлечь пользу (§ 7/14).

Рассмотрим теперь вопрос о том, какие ограничения разнообразия могут существовать в возмущениях, действующих на очень большие системы, и как они могут быть использованы. Этот вопрос имеет огромное практическое значение, ибо если пропускную способность R увеличить нелегко, а прочие методы невозможны, то закон необходимого разнообразия говорит, что открытие ограничения разнообразия является единственной надеждой предполагаемого регулятора.

13/6. Как было сказано в § 7/10, ограничения разнообразия отнюдь не распадаются на небольшое число достаточно просто описываемых классов. Указав в гл. 7 некоторые наиболее интересные возможности, я могу лишь продолжать отмечать те классы, которые представляют для нас сейчас особый интерес. С этим кратким замечанием я пройду мимо обширной области, включающей бо́льшую часть всей человеческой деятельности.

В соответствии с этим мы рассмотрим одну особую форму ограничения разнообразия. Она представляет сама по себе большой интерес, она иллюстрирует тезис последней главы, и, наконец, она имеет важное практическое значение для регулирования очень больших систем.

ПОВТОРЯЮЩИЕСЯ ВОЗМУЩЕНИЯ

13/7. Хотя в последних главах мало упоминалось об этом, но многие возмущения (и соответствующие ответы регулятора) являются повторяющимися, особенно если рассматривать систему в течение длительного времени. Кашлевый рефлекс является регулировочным и полезным не только потому, что он устраняет именно *эту* пылинку, но потому, что в течение жизни он устраняет пылинки все снова и снова — столько раз, сколько это необходимо. Большинство физиологических регуляторов действует все снова и снова — так часто, как это необходимо. И спасательная лодка спасает людей не однажды, а все снова и снова. И если в последних главах мы говорили об «ответе регулятора» в единственном числе, то лишь потому, что единичное действие является типичным для всего множества, а не потому, что это множество с необходимостью имеет только один элемент.

Столь много общеизвестных регулировок являются повторяющимися, что трудно найти регулирование, действующее лишь однажды. Возможно, примером может послужить обсерватория, планирующая работу так, чтобы все было готово к моменту появления сверхновой звезды; подобное событие вряд ли произойдет дважды при жизни директора. При этом приходится учитывать различные возможности: в какой части неба появится сверхновая; появится ли она днем или ночью; каковы спектральные и другие особенности, определяющие, какой именно тип фотопластинки и светофильтра следует использовать при фотографировании ее, и т. д. Разрабатывая план, директор фактически составит таблицу типа § 11/4; в ней будут показаны неопределенности (D), которых следует опасаться, имеющиеся средства (R) и возможные исходы (E). Изучение таблицы, как в упр. 11/4/4, даст директору возможность решить, сможет ли он во всех случаях получить то, что ему нужно.

Итак, случаи, когда регулирование должно осуществляться против неповторяющегося возмущения, действительно встречаются, но они не являются обычными.

Начиная с этого места, мы будем рассматривать случаи, в которых возмущение, как и ответ регулятора, повторяется более одного раза; ибо эти случаи обнаруживают ограничения разнообразия, из которых можно извлечь пользу.

13/8. Ограничение разнообразия появляется следующим образом.

В основной формулировке процесса регулирования упоминалось множество (совокупность) возмущений, но при этом принималось только, что отдельные элементы этого множества различны, и ничего больше. Как и всякая другая величина, возмущение может быть либо простым, либо векторным. В последнем случае можно различить по крайней мере два основных типа.

В § 11/17 рассматривался первый тип: различные составляющие возмущения действуют одновременно; например, установка для кондиционирования воздуха может регулировать одновременно и температуру, и влажность.

Примером второго типа служит термостатическая ванна; ее можно рассматривать как регулятор либо для коротких, либо для длинных промежутков времени. Для короткого промежутка времени «возмущение» означает такое событие, как «погружение этой фляжки», а «ответ на него» означает «то, что произойдет в следующую минуту». Поведение ванны может оцениваться как хорошее или плохое соответственно тому, что произошло за эту минуту. Но есть и длинные промежутки времени. После того как ванна проработала год, кто-нибудь может спросить меня, оказалась ли она за год хорошим регулятором. Обдумывая ответ, я рассматриваю все возмущения за год как некоторое Большое Возмущение (составленное из многих индивидуальных возмущений, обозначаемых маленьким d), на которое ванна дала Большой Ответ (составленный из многих индивидуальных ответов, обозначаемых маленьким r). Исходя из некоторой нормы поведения ванны за год (например: никогда не допускать резких отклонений температуры; иметь среднее отклонение меньше чем 0,5° и т. д.), я составляю себе мнение о Большом Исходе: является ли он Хорошим или Плохим — и соответственно отвечаю на вопрос.

Следует отметить, что «Хорошее» для Большого Исхода не вытекает с необходимостью из того, что хорошо (η) для отдельных исходов; оно должно определяться заново. Так, если я покупаю три лотерейных билета и один из них выигрывает (и соответственно на остальных двух я теряю), то это, естественно, считается «Хорошим» в Большом Исходе. Следовательно, 1 хороший исход + 2 плохих = Хорошему Исходу. С другой стороны, если меня трижды привлекают к суду за убийство и один раз признают невиновным, то отдельные результаты по-прежнему будут иметь вид: 1 хороший + + 2 плохих; но в этом случае Большой Исход, естественно, считается Плохим. В том случае, когда каждое из отдельных возмущений угрожает организму смертью, Хорошее в Большом Исходе, естественно, соответствует «хорошему во всех отдельных исходах».

Эти Большие Возмущения являются векторами, составляющими которых служат непрерывно идущие отдельные возмущения. Эти векторы обнаруживают ограничения разнообразия. Так, вернемся к самому первому примеру вектора (§ 3/5). Обозначим его через *A* и сравним с новым вектором *B*:

A	*B*
Возраст автомобиля . .	Возраст автомобиля Джека . . . .
Мощность в л. с. . . .	Возраст автомобиля Джилла . . . .
Цвет	Возраст автомобиля Тома

Очевидно, *B* ограничено в некотором отношении, в котором *A* не ограничено. Ибо разнообразие крайних левых слов равно в трех строках *A* трем, а в трех строках *B* — одному.

Векторы типа *B* обычны в теории вероятностей, где они встречаются под наименованием «выбор с возвращением». Так, бросание монеты может дать только два результата: *Г* или *Р*. Однако монета, брошенная шесть раз подряд, может дать такие результаты, как (*Г*, *Г*, *Р*, *Г*, *Р*, *Г*) или (*Р*, *Р*, *Г*, *Г*, *Р*, *Г*) и т. д. вплоть до 64 возможных результатов (ср. § 9/9).

Важно отметить, что в таком множестве векторов (все составляющие которых берутся из одного основного класса, как в случае вектора *B*) можно различать два разнообразия: 1) разнообразие внутри основного класса (два результата для монеты, число различных возрастов в *B*); 2) разнообразие, образованное использованием основного класса n раз подряд (если вектор имеет n составляющих). В случае с монетой два эти разнообразия равны 2 и 64. Вообще говоря, если разнообразие основного класса есть k, а вектор имеет n составляющих, каждая из которых является членом этого класса, то максимальная величина указанных двух разнообразий равна соответственно k и k^n. В частности, следует заметить, что если разнообразие основного класса имеет некоторый предел, то достаточно большое значение n может позволить второму разнообразию стать больше этого предельного значения.

13/9. Эти соображения применимы ко многим случаям регулирования. Положим для определенности, что каждую минуту ванна может испытывать одно из трех отдельных возмущений:

a) воздействие холодного воздуха,

b) воздействие солнечных лучей,

c) погружение холодного предмета.

Разнообразие равно трем, но это число вряд ли представляет разнообразие, которое фактически будет иметь место за длинный промежуток времени. За год, скажем, Большое Возмущение станет длинным вектором, быть может с несколькими сотнями составляющих. Например, одно из Больших Возмущений может быть вектором (т. е. последовательностью) с 400 составляющими

$$(a, b, a, b, b, a, c, b, b, c, c, b, b, \ldots, c, b, a, b).$$

И если отдельные правильные ответы будут соответственно α, β и γ, то Большой Ответ, соответствующий данному Большому Возмущению, будет вектором (т. е. последовательностью)

$$(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \beta, \alpha, \gamma, \beta, \beta, \gamma, \gamma, \beta, \beta, \ldots, \gamma, \beta, \alpha, \beta).$$

Если составляющие Большого Возмущения, взятые слева направо, не обнаруживают ограничения разнообразия, то все множество возможных Больших Возмущений имеет разнообразие 3^{400}; и Большой Ответ должен иметь по крайней мере такое же разнообразие, чтобы регулирование было полным.

Мы теперь подошли к следующему обстоятельству; приведенная двойная последовательность, рассматриваемая в том порядке, в каком она появляется во времени, обнаруживает *ограничение разнообразия, характерное для машины,* т. е. она определяет машину с точностью до изоморфизма. Так, в только что приведенном примере события протекали в следующем порядке, слева направо:

$$a\ b\ a\ b\ b\ a\ c\ b\ b\ c\ c \quad \text{и т. д.}$$
$$\alpha\ \beta\ \alpha\ \beta\ \beta\ \alpha\ \gamma\ \beta\ \beta\ \gamma\ \gamma \quad \text{и т. д.}$$

(Хотя и необязательно через равные промежутки времени.) Легко проверить, что эта последовательность, взятая как протокол, определяет машину со входом

$\downarrow$	α	β	γ
a	α	α	α
b	β	β	β
c	γ	γ	γ

Таким образом, когда Большое Возмущение является вектором, все составляющие которого взяты из некоторого основного класса воздействий, то Большой Ответ есть либо вектор с таким же разнообразием, либо выход соответствующей машины со входом.

13/10. Предположим, что регулирование, рассматриваемое в части III, является обязанностью какого-то Ω, например обладателя существенных переменных E. В предшествующих главах мы рассматривали, как должен вести себя регулятор R. Теперь мы видим, что в случае повторяющихся возмущений этому Ω представляется на выбор: либо быть регулятором (т. е. действовать как R), либо *построить машину,* которая, однажды построенная, будет действовать как R и будет осуществлять регулирование неограниченно долго без дальнейшего вмешательства Ω. Таким образом, мы пришли к вопросу: должно ли Ω осуществлять регулирование непосредственно, своими собственными действиями, или ему следует *построить машину,* которая выполняла бы эту работу?

Этот вопрос встает также и по другой причине. С самого начала части III мы принимали за данное, что регулятор существует, и спрашивали, какие свойства он должен иметь. Ничего не говорилось о том, *как* должен строиться регулятор, о факторах, приводящих к его возникновению. Например, обнаружив в § 10/5, сколь выгодно для организма наличие регулятора, мы не указали никаких средств, с помощью которых можно обеспечить эту выгоду.

По обеим причинам мы должны теперь рассмотреть, как в действительности должна проектироваться и строиться регулирующая машина. При этом мы будем иметь в виду не столько инженера за станком, сколько мозг, который, чтобы осуществить регулирование в своих приобретенных реакциях, должен каким-то способом обеспечить создание регулирующего механизма внутри имеющегося нервного материала; или социолога, который хочет создать регулирующую организацию, чтобы внести гармонию в общество.

Чтобы понять следствия такой постановки вопроса, мы должны более внимательно рассмотреть, что подразумевается в принципе под «проектированием» регулирующей машины.

ПРОЕКТИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА

13/11. *Проектирование как передача сообщений.* Забудем на время все, относящееся к «регулированию», и перейдем просто к вопросам, касающимся проектирования и построения машины, любой машины.

Наше рассмотрение этих вопросов должно, ничего не теряя в точности, быть в то же время очень широким, т. е. абстрактным, ибо мы, как биологи, хотим изучать машины значительно более общего типа, чем сделанные из стали и меди. Мы хотим, чтобы в формулу:

«Некто Ω проектирует машину M» —

включались, например, такие случаи:

1) гены, определяющие формирование сердца;
2) механик, делающий велосипед;
3) часть мозга, определяющая внутренние связи в какой-нибудь нервной сети;
4) предприниматель, строящий фабрику для выработки определенных видов продукции;
5) математик, программирующий работу автоматической вычислительной машины.

Придерживаясь кибернетической точки зрения, мы не должны здесь заниматься непосредственно воспринимаемыми процессами формирования и сборки материальных частей, но должны заниматься менее ясными вопросами о том, что́ *определяет* окончательную модель и как она *выбирается.* Мы хотим проследить длинные цепи причин и действий, позволяющих связать *множество* возможных начальных причин с *множеством* окончательных машин, возникающих как следствия. Подобно этому монтер телефонной станции, имея кабель из сотни проводов, соотносит каждый провод, входящий с одного конца, с некоторым проводом, выходящим из другого. Рассматривая вопрос в такой плоскости, мы обнаружим, что необходимо выполнение некоторых количественных соотношений; на них мы сможем основать идеи, излагаемые в последней главе. При этом мы все время будем иллюстрировать тезис Д. М. Мак-Кэя[1]), что количество информации, измеряемой логарифмически, всегда соответствует некоторому количеству, т. е. интенсивности, *выбора* — либо фактического, либо воображаемого.

Понятия выбора, отбора, селекции, проектирования, конструирования, построения — словом, какой-бы то ни было ответственности за окончательное появление действительной машины — становятся аналогичными, когда мы выявляем и измеряем *разнообразия,* фигурирующие в этих процессах. Если говорить о том, что́ может появиться, когда M имеет некоторое разнообразие, то, например, эмбрион может образовать любую из многочисленных форм мышечного кровяного насоса. Фактически же набор генов у Lumbricus ведет к образованию сердца червя, набор генов у Rana ведет к образованию лягушечьего сердца, а набор генов у Homo ведет к образованию человеческого сердца. Здесь очевидно, что набор генов управляет образованием сердца. Имеет здесь место и регулирование, ибо в каком бы состоянии ни были первоначально молекулы Lumbricus (возможные состояния имеют разнообразие), под воздействием набора генов разнообразие исчезает и возникает нормальное сердце червя.

Следует отметить, что понятия проектирования и конструирования применимы по существу к *множествам,* хотя обычно они употребляются в нашей речи в единственном числе (ср. § 7/3). Так, фраза «набор генов определяет форму сердца» — это просто сокращенный способ сказать, что элементы *множества* наборов генов, свойственных организмам различных видов, можно

[1] Дональд Макриммон Мак-Кэй (род. 1922) — английский физик, известный своими работами по теории информации и теории автоматов. — *Прим. перев.*

поставить в соответствие с элементами *множества* возможных сердец организмов различных видов, подобно проводам на двух концах телефонного кабеля. Таким образом, *акт «проектирования», или «делания», машины есть по существу акт связи делающего с делаемым*, и к нему применимы принципы теории связи. В частности, меры, выработанные для случая сведéния разнообразия возможных сообщений к одному сообщению, могут теперь применяться к случаю сведéния разнообразия возможных машин к *одной* машине.

Следующий прием может помочь выпятить эту сторону вопроса: вообразите, что акт проектирования должен осуществляться через телефон или какой-нибудь другой специфический канал. Тогда легко будет установить интересующие нас количества разнообразия, устанавливая количество разнообразия, которое действительно должно быть передано.

13/12. Проектировщик выбирает окончательную форму машины. Но что означает «выбирать машину» в переводе на общие понятия нашей книги? Рассмотрим несколько примеров, в которых окончательной машиной является радиоприемник.

В первом случае покупатель имеет перед собой три машины, из которых он выбирает одну. Во втором случае, который с абстрактной точки зрения эквивалентен первому, проектировщик радиоприемника, колеблющийся между тремя возможными контурами, в конце концов выбирает один из них. В третьем случае, который с абстрактной точки зрения эквивалентен двум первым, в радиоприемник вмонтированы три контура и владелец приемника ставит переключатель в одно из трех возможных положений, выбирая тем самым, какой из контуров будет действительно использоваться. Таким образом, с абстрактной точки зрения выбор одной машины из трех возможных эквивалентен выбору одного из трех значений некоторого параметра. Предположим, например, что нужно выбрать одну из трех машин α, β и γ (каждая с состояниями a и b):

$$\alpha: \downarrow \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix}; \quad \beta: \downarrow \begin{matrix} a & b \\ a & a \end{matrix}; \quad \gamma: \downarrow \begin{matrix} a & b \\ b & b \end{matrix}.$$

Предположим, что выбирается β и что выбирающий получает машину

$$\downarrow \begin{matrix} a & b \\ a & a \end{matrix}.$$

С абстрактной точки зрения это тождественно тому, что выбирающий сначала имел в своем распоряжении машину с трехзначным входом

↓	a	b
α	b	a
β	a	a
γ	b	b

,

а затем решил сделать вход постоянно фиксированным на значении β. (Эти процессы тождественны в том смысле, что если некоторый наблюдатель видит только их результаты, он не сможет сказать, какой из них имел место, не обращаясь к другим, не упомянутым критериям.)

В данном примере фиксация входа на значении β делает получающуюся машину абсолютной системой, без входа. Если результат выбора должен быть машиной со входом, то первоначальная машина должна обладать двумя или более входами, чтобы фиксация одного из них в акте выбора-проектирования оставляла остальные свободными для дальнейших изменений в качестве обычных входов.

Акт выбора проектировщиком одной модели из многих эквивалентен тому, что некоторый определяющий фактор фиксирует вход на постоянном значении.

13/13. (В этом параграфе рассматривается небольшое усложнение.)

В приведенных примерах проектировщик делал выбор между машинами, преобразования которых имели одно и то же множество операндов, т. е. одно и то же множество состояний машины. Но что будет, если выбор делается, например, между машинами

$$\downarrow \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix} \quad \text{и} \quad \begin{matrix} p & q & r \\ r & q & r \end{matrix}?$$

Можно ли представить такой выбор как фиксацию входного значения? Такой выбор может встретиться на ранних стадиях проектирования, когда, например, принимается решение, должны ли компоненты машины быть электронными или гидравлическими.

На самом деле этот случай содержится в предыдущем случае, что можно показать просто с помощью изменения обозначений. Так, только что упомянутый выбор можно представить как выбор между μ и ν в нижеследующей (приводимой) машине, состояниями которой служат пары:

$\downarrow$	(a, p)	(a, q)	(a, r)	(b, p)	(b, q)	(b, r)
μ	$(b\,.)$	$(b\,.)$	$(b\,.)$	$(a\,.)$	$(a\,.)$	$(a\,.)$
ν	$(.\,r)$	$(.\,q)$	$(.\,r)$	$(.\,r)$	$(.\,q)$	$(.\,r)$

(В этом преобразовании точками изображаются значения, не играющие никакой роли.) Если выбрать μ, то одна часть даст машину

$$\downarrow \begin{matrix} a & b \\ b & a \end{matrix},$$

где прочие составляющие отброшены; а если выбрать ν, то другая часть даст

$$\downarrow \begin{matrix} p & q & r \\ r & q & r \end{matrix}.$$

Таким образом, первоначальная формулировка действительно является вполне общей.

13/14. *Проектирование в «черном ящике».* Следует отметить, что операция «проектирования», как она понимается здесь, может осуществляться в применении к «черному ящику», если он имеет вход. Владелец радиоприемника (§ 13/12), если он ничего не знает о содержимом приемника, но знает, как переключатель действует на вход, фактически осуществляет акт «проектирования в черном ящике», устанавливая переключатель и получая желаемое поведение.

Другие примеры расширяют границы этой темы. Над «черным ящиком»-радиоприемником может доминировать другая машина, действия и значения которой определяют положение переключателя. Тогда мы можем сказать (в точности памятуя смысл употребляемых нами слов), что доминирующая машина, ставя переключатель в определенное положение, «проектирует» радиоприемник. Здесь важно то, что доминирующая машина обнаруживает по отношению к приемнику те же свойства, которые *объективно* проявляются в поведении проектировщика.

Ту же самую точку зрения можно применить и к мозгу. Мы можем видеть, что одна часть мозга может быть связана с другой его частью той же объективной зависимостью поведения, как проектировщик — с проектируемой машиной. Мы можем видеть, что одна часть, скажем, базальное образование, может действовать как «проектировщик» по отношению к части, над которой она доминирует, скажем по отношению к какой-либо нервной сети.

Таким образом, идею машины, проектирующей другую машину, можно высказать в точных и общих терминах — точных в том смысле, что можно с помощью эксперимента объективно показать, имеет или не имеет место это отношение.

КОЛИЧЕСТВО ВЫБОРА

13/15. Эта особенность проектирования — сведение многих начальных возможностей к одной или нескольким конечным — легко поддается измерению. Мы можем использовать здесь ту же меру, что для разнообразия и для информации, которые измерялись либо непосредственно, либо логарифмически (§ 7/7 и 9/11).

Эта мера удобна и, кроме того, определяет естественным образом ту пропускную способность, которую должен иметь канал *C* в системе

$$\boxed{\text{Проектировщик}} \xrightarrow[C]{} \boxed{\text{Машина}},$$

чтобы была возможна передача необходимого разнообразия или информации от проектировщика к машине.

Заметим, что этот метод не дает никакого ответа на вопрос: «Какое количество проектирования имеется *в данной* машине (без указания на то, чем она могла бы быть)?» Ведь наша мера существует лишь для множества возможностей. Она относится не к полученной вещи, а к *акту передачи сообщения* (§ 13/11).

Приводимые ниже упражнения помогут придать реальность этим несколько абстрактным рассуждениям и покажут, что наши рассуждения достаточно согласуются с тем, что интуитивно очевидно.

Упр. 1. На одном из этапов проектирования некоторой электрической машины надо определить значения трех различных омических сопротивлений. Каждое из них может независимо иметь одно из 7 значений: 10, 15, 22, 33, 47, 67 или 100 ом. Какое количество разнообразия должен обеспечить со своей стороны проектировщик (согласно закону необходимого разнообразия), чтобы свести все возможности к одной?

Упр. 2. (Продолжение.) Значения трех сопротивлений выбираются из множества: 10, 11, 12 ... 99, 100 ом. Какое разнообразие должен обеспечить со своей стороны проектировщик?

Упр. 3. Каждое из трех сопротивлений должно иметь значение 10, 20 или 30 ом. Если они соединяются параллельно, то какое разнообразие должен обеспечить со своей стороны проектировщик, чтобы свести разнообразие возможных электрических свойств к одному свойству?

Упр. 4. Сколько нужно проектирования для выбора между двумя машинами с состояниями a, b, c и d:

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ b & a & b & c \end{matrix} \quad \text{и} \quad \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & b & c & a \end{matrix}\,?$$

Упр. 5. Сколько проектирования требует изготовление монетного штампа для пенсов, если этот штамп рассматривается: (I) как состоящий из 15 000 точек, каждая из которых может иметь любую из 10 возможных интенсивностей; (II) как окончательная форма, выбираемая ее величеством королевой Англии из трех представленных форм? Объясните несовпадение ответов.

Упр. 6. Сколько разнообразия требуется для сведения к одной машине всех возможных машин с n данными состояниями? (Указание: упр. 7/7/8.)

Упр. 7. (Продолжение.) То же самое, но число состояний машины равно n, а число состояний входа после проектирования равно i.

13/16. Точно та же мера может применяться к проектированию марковской машины. Так, разнообразие двух марковских машин:

$$\begin{array}{c|ccc} \downarrow & & & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ & \frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{2} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array} \qquad \text{и} \qquad \begin{array}{c|ccc} \downarrow & & & \\ \hline & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

есть ровно 1 бит, ибо мы выбираем *между* двумя объектами, внутреннее содержание которых — различные дроби — в данном случае не имеет значения. [Эта величина в 1 бит, конечно, отлична от 1,58 бита, которые связывались бы с правой матрицей, рассматриваемой как источник информации, производящий в среднем 1,58 бита на каждом шаге (§ 9/12).]

13/17. *Выбор по этапам.* Процесс выбора может быть более или менее растянут во времени. В частности, он может производиться дискретными этапами.

Водитель, выбирающий себе новый автомобиль, часто поступает именно так. Сначала он говорит, например: «Машина должна стоить менее 1000 фунтов». Этот критерий вызывает некоторое ограничение числа возможностей. Затем он может добавить, что автомобиль должен вмещать пять человек и т. д. Каждый новый критерий уменьшает число оставшихся возможностей. Если он может купить только один автомобиль, то эти критерии в конце концов должны свести все возможности к одной. Это сведéние необходимо осуществить любым способом, даже если для окончательного выбора придется прибегнуть к бросанию монеты.

Абстрактный выбор (или проектирование) машины также может протекать по этапам. Итак, предположим, что машина имеет четыре состояния: a, b, c, d. Преобразование

$$T\colon \downarrow \begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ * & * & * & * \end{array},$$

в котором звездочки еще не заменены конкретными состояниями, оставляет все возможности открытыми, Изменение его в преобразование

$$U: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & * & b & * \end{matrix}$$

представляет собой частичный выбор. U также изображает *множество* преобразований, хотя и меньшее. Так же будет обстоять дело и с преобразованием

$$V: \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ \overbrace{b \text{ или } c} & * & * & * \end{matrix},$$

которое исключает все однозначные преобразования, содержащие переходы $a \to a$ или $a \to d$. Таким образом, машина может быть выбрана по этапам, а этапы могут определяться различным образом. С количественной точки зрения здесь существенно, что общее количество осуществляемого при этом выбора не может превосходить сумму (измеряемых логарифмически) отдельных выборов. (Выбор измеряется сокращением разнообразия.) Так, если взять колоду карт и произвести сначала 2-битовый отбор, а затем 3-битовый, то для однозначного указания карты потребуется дальнейший отбор по крайней мере в 0,7 бита, ибо $\log_2 52 = 5{,}7$. Это ограничение абсолютно и (если речь идет о выборе машины) совершенно не зависит от типа машины или от способа выбора.

Упр. 1. Сколько возможностей устраняется, если к замкнутому однозначному преобразованию с состояниями a, b, c и с 27 первоначально возможными формами прибавить ограничение: «Оно не должно иметь состояний равновесия»?

Упр. 2. (Продолжение.) Если прибавить ограничение: «Оно должно иметь три состояния равновесия»?

Упр. 3. Сколько выбора, в логарифмической мере, было в упр. 1?

**Упр.* 4. Чему равно количество выбора, если к абсолютной системе с n состояниями $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где первоначально возможны все преобразования, добавляется ограничение: «Она не должна иметь состояний равновесия»? (Указание: в какое число состояний, вместо первоначальных n состояний, может теперь перейти a_1?) (ср. упр. 1).

**Упр.* 5. (Продолжение.) К чему стремится это количество, когда n стремится к бесконечности? (Указание: вычислите его для $n = 10$, 100, 1000.) (Эта оценка может применяться к машине § 12/15.)

**Упр.* 6. Если, как описано в этом параграфе, карты в перетасованной колоде просматриваются (без дальнейшей тасовки) последовательно друг за другом в поисках одной определенной карты, то сколько информации приобретается в среднем при просмотре первой, второй, третьей и т. д. карты? (Систематический поиск.)

**Упр. 7.* (Продолжение.) Сколько информации приобретается, если после каждого неудачного просмотра карта возвращается в колоду и колода тасуется перед просмотром следующей карты? (Случайный поиск.)

13/18. *Дополнение выбора.* Из того, что выбор часто может осуществляться по этапам, следует, что полный выбор часто может осуществляться более чем одним выборщиком («селектором»). Тогда действие одного селектора будет *дополняться* (пополняться) действием других.

Примером может служить случай, когда муж, выбирая новый автомобиль из числа имеющихся моделей, сначала решает, что машина должна стоить меньше 1000 фунтов, а затем предоставляет жене произвести дальнейший выбор. Это повторится снова, если жена, сведя число возможностей к двум моделям, обратится за окончательным решением к бросанию монеты.

Другие примеры можно найти повсюду. (В приводимых ниже примерах дополнение выбора осуществляется случайными факторами, потому что они будут интересовать нас в следующей главе.) Так, при игре в бридж состояние игры в момент первого хода выбирается частично заявлениями игроков, а частично случаем — исходом статистически стандартизованного акта тасования, предопределяющим распределение карт. Правила игры в бридж устанавливают в действительности, что известная роль в определении всего хода игры должна предоставляться случаю, т. е. тасованию карт, выполняемому некоторым предписанным способом. Такое обращение к случаю часто использовалось в прошлом как метод для дополнения выбора. Например, римский полководец, приняв многие решения, часто предоставлял оставшийся выбор некоторому другому фактору, такому как полет первой увиденной стаи птиц или форма внутренностей только что убитой овцы. (Дополнение выбора использовалось в нашей книге выше, в § 4/19 и 12/15.)

В научной работе первое сознательное использование совершенно не связанных с экспериментом селекторов для получения «случайного» решения, дополняющего производимый экспериментатором выбор, было осуществлено, по-видимому, сэром Рональдом Фишером, ибо он первый признал его фундаментальное значение и полезность.

[Говоря, что фактор является **случайным**, я имею в виду не то, каким он является сам по себе, но в каком отношении он находится к главной системе. Так, последовательные цифры десятичного разложения π настолько детерминированны, насколько вообще могут быть детерминированными цифры; но последовательность в тысячу этих цифр вполне может служить в качестве случайных чисел для сельскохозяйственных опытов — не потому, что эти цифры *являются* случайными, но потому, что они, вероятно, *никак не связаны* с особенностями данного множества земельных участков. Таким образом, дополнение выбора «случаем» означает (отвлекаясь от менее важных специальных требований) дополнение выбора действием (или разнообразием) другой системы, поведение которой совершенно не связано с поведением главной системы. Пример этого приводился в § 12/15. Так, вчерашний курс золотых акций может служить в качестве случайной переменной, если главной изучаемой системой является крыса в лабиринте; но он не подойдет, если главной системой является некоторый участок финансово-экономической системы.]

ВЫБОР И МАШИНЫ

13/19. *Выбор посредством машины.* В предыдущих параграфах мы рассматривали вопросы передачи информации, связанные с выбором некоторой машины. Однако с точки зрения общих принципов кибернетики селектор, выбирающий машину, также следует рассматривать как механизм. Таким образом, рассмотрев систему

$$\boxed{L} \to \boxed{M},$$

где L своими действиями проектирует или выбирает машину M, мы должны теперь рассмотреть L как машину, действующую каким-либо образом в качестве проектировщика или селектора. Как может машина осуществлять выбор? Конечно, ответ на этот вопрос должен быть дан в терминах, совместимых с уже использованными в настоящей части книги.

Быть может, простейший процесс выбора происходит при движении машины по какой-нибудь траектории, поскольку, скажем, после состояния *i* она переходит всегда в состояние *j*, а не в какое-нибудь другое из своих состояний. Таков обычный выбор, который осуществляет машина, когда ее «сообщение» (ее протокол) говорит, что она выполняет *это* преобразование, а не какое-либо другое.

Другой процесс выбора, осуществляемый машиной, отмечался в § 7/24: каждая детерминированная машина осуществляет выбор, сводя разнообразие возможных состояний от первоначального максимума к окончательному числу бассейнов ее кинематического графика.

Еще один процесс выбора рассматривался в § 5/13, где одна часть целого могла выбирать некоторые из состояний равновесия другой части, накладывая «вето» на остальные состояния. Это, возможно, наиболее очевидная форма выбора, ибо воображаемый наблюдатель этих двух машин мог бы почти что слышать, как часть, накладывающая «вето», говорит: «...не годится, опять не годится, этого я не допущу, опять не годится... Стой! — да, вот так пусть и останется». Если требуется построить машину, работающую в качестве селектора (например, для выполнения программы, указываемой в заключительном параграфе книги), то, насколько я могу судить, она должна иметь именно такой принцип работы. Она должна работать как обратная связь второго порядка на рис. 5/14/1 (дополненном в § 12/15).

Несомненно, существуют и другие способы. Однако и этих достаточно для иллюстрации и для того, чтобы придать определенность понятию «выбирающей» машины (хотя специальное исследование здесь вряд ли необходимо, ибо в теории Шеннона каждый акт передачи сообщений есть в то же время акт выбора, вызывающий появление данного сообщения).

13/20. *Продолжительность выбора.* Следует сказать несколько слов о том, сколько времени может занять некоторый данный акт выбора, ибо при рассмотрении конкретных случаев занимаемое время может, при первой оценке, показаться слишком большим для практического осуществления. Этот вопрос становится особенно важным, когда надо создавать регулятор для регулирования очень большой системы. Приблизительный подсчет количества выбора, которое на первый взгляд кажется необходимым, может привести к мысли, что осуществление его потребует времени, значительно превосходящего космологические масштабы; и отсюда можно сделать вывод, что производство выбора действительно потребует такого же времени. Однако это совсем не так.

Основные принципы, определяющие продолжительность выбора, были выяснены Шенноном, особенно в его статье «Теория связи в системах засекречивания». Он показал, что если требуется выбрать один элемент из N и если выборщик может указать (или как-то иначе определить) только то, входит ли или нет требуемый элемент в некоторое данное множество, то методом, осуществляющим полный выбор при наименьшем числе шагов, будет выбор посредством последовательных дихотомий. Иными словами, выбор сначала должен производиться между группами, а не между элементами. Этот метод значительно быстрее метода последовательного просмотра одного за другим N элементов. А когда N становится очень большим, метод выбора по группам становится почти что несравненно более быстрым. Недостаток места не позволяет должным образом рассмотреть здесь этот важный предмет, но необходимо по крайней мере привести пример того, насколько более быстрым является метод дихотомий.

Рассмотрим пример по-настоящему большого выбора. Предположим, что где-то во Вселенной (т. е. в ее части, видимой астрономам) имеется определенный атом; выборщик должен его отыскать. Видимая Вселенная содержит около 100 000 000 галактик, каждая из которых содержит около 100 000 000 000 солнц и их систем; каждая солнечная система содержит около 300 000 тел, подобных Земле, а Земля содержит около 1 000 000 000 000 куб. миль. Кубическая миля содержит около 1 000 000 000 000 000 000 пылинок, каждая из которых содержит около 10 000 000 000 000 000 атомов. И выборщик хочет найти один определенный атом!

Примем это за единицу выбора очень большого масштаба и назовем ее 1 *мегапик*[1]; она равна примерно 1 из 10^{73}. Сколько времени займет отыскание одного определенного атома?

Стоит сравнить два способа. По первому способу атомы просматриваются по одному, причем быстродействующий электронный тестер просматривает их по миллиону в секунду. Простой расчет показывает, что число *столетий*, необходимых для отыскания одного атома, не поместилось бы на этой странице. Следовательно, применение этого метода обрекает выбор на неудачу (для всех практических целей).

Во втором случае используется (допустим, что это возможно) метод дихотомий. Сначала спрашивают: где находится атом — в этой или в той половине? Затем, взяв указанную половину, спрашивают: в какой из ее половин находится атом? И так далее. Предположим, что это может делаться со скоростью одного шага в секунду. Сколько времени потребует этот способ? Ответ: немногим более четырех минут! При использовании этого способа успех становится возможен.

Этот пример может сделать убедительным утверждение, что выбор по группам *гораздо быстрее* выбора путем последовательного просмотра. Более того, именно тогда, когда время, отнимаемое последовательным перебором одного элемента за другим, становится чересчур длинным, метод поиска по группам обнаруживает всю свою способность сокращать требуемое время.

13/21. *Выбор и приводимость.* Что это означает в случае, когда должна быть выбрана конкретная машина? Предположим для определенности, что машина имеет 50 входов, каждый из которых может принимать одно из 25 значений, и что задумана какая-то одна из возможных форм. Этот выбор равен примерно одному мегапику, а мы знаем, что в таком случае выбор последовательным просмотром безнадежен. Можно ли провести выбор

---

[1] «Pick» означает «выбор». — *Прим. ред.*

по группам? Да, если можно найти некоторый *практический* способ группировки состояний входа.

Один из таких случаев, очень важный в практическом отношении, имеет место, когда машина приводима (§ 4/14) и входы ведут раздельно к различным подсистемам. Тогда последовательность: выбрать нужное значение для части 1 по входу части 1; выбрать нужное значение для части 2 по входу части 2 и т. д. — соответствует осуществлению отбора более быстрым способом — по группам. Таким образом, *если машина приводима, то можно использовать более быстрый метод выбора.*

В действительности приводимость чрезвычайно обычна для наших земных систем. Она настолько обычна, что обыкновенно мы принимаем ее как должное; но тот, кто хочет узнать, как регулировать очень большую систему, должен учитывать приводимость сознательно.

Чтобы получить некоторое представление о том, насколько характерна приводимость для мира, в котором мы живем, сравните его обычное поведение с тем, что произошло, если бы приводимость неожиданно исчезла, т. е. если бы каждая переменная оказывала воздействие, непосредственное или замедленное, на каждую другую переменную. Поворот страницы этой книги, вместо того чтобы быть именно этим событием и ничем другим, мог бы изменить освещение, заставить стол двигаться, часы — изменить скорость хода и так далее по всей комнате. Если бы мир действительно был неприводимым, то регулирование было бы трудным, вплоть до невозможности, и не могла бы существовать никакая организованная форма жизни (§ 7/17).

Теперь мы должны оставить эту тему; но то, что было сказано в книге «Устройство мозга», в главе «Повторяющиеся системы» и в следующих за ней главах, развивает этот тезис. Пока же мы можем сделать вывод, что если какое-то Ω (§ 13/10) должно спроектировать (т. е. выбрать) машину для регулирования очень большой системы, так что сам регулятор является большим, то возможность осуществить необходимый выбор, по-видимому, весьма сильно зависит от возможности построить регулятор в приводимой форме.

13/22. *Откуда регулятор?* Теперь мы можем, наконец, ответить на вопрос, проходящий в скрытом виде через всю часть III: как должен создаваться желаемый регулятор? Вопрос этот был поставлен в § 13/10, и с тех пор мы рассматривали различные вопросы, которые надо было обсудить, чтобы собрать воедино различные нити. Посмотрим теперь, чего мы достигли.

Процесс окончательного получения определенной машины с желаемыми свойствами включает выбор, а это в свою очередь означает, что проектировщик Ω (§ 13/10) успешно достигает цели. Каким бы разнообразием ни обладали составляющие первоначально и какое бы разнообразие ни отличало проекты (т. е. значения входа) от окончательно выбранной формы, Ω действует так, чтобы достичь своей цели. Следовательно, он действует как регулятор. Таким образом, *изготовление машины с желаемыми свойствами* (в том смысле, что получается именно она, а не машина с нежелательными свойствами) *есть акт регулирования.*

Предположим теперь, что машина с желаемыми свойствами есть регулятор, рассматриваемый во всей части III; как он должен изготовляться? Ответ неизбежен: с помощью другого регулятора.

Не будет ли это приведением всей нашей позиции к абсурду? Не думаю. Ибо нетрудно ответить на очевидный вопрос: «С чего это все начинается?» Как биологи, мы исходим из того фундаментального факта (§ 10/3), что Земля существует уже долгое время, что все это время действовал отбор и что этот отбор поощрял возникновение регуляторов (§ 10/5). Одних этих фактов достаточно, чтобы объяснить существование на Земле в настоящее время многих хороших регуляторов. И *не требуется* никакого дальнейшего объяснения, если окажется, что целью некоторых из этих регуляторов является приведение некоторых механизмов к стандартной форме, даже в том случае, когда эта стандартная форма будет формой регулятора (конечно, имеющего уже *другую* цель). Ученый только слегка удивился бы тому, что нечто, выполнимое непосредственно за один этап, фактически выполняется опосредованно, за два этапа.

Таким образом, мы можем ответить на вопрос этого параграфа, сказав, что регулятор может быть выбран из некоторого общего множества механизмов (многие из которых не являются регуляторами) только двумя путями: либо через выживание в результате какого-либо процесса естественного отбора, либо через изготовление (тоже процесс отбора) другим регулятором.

13/23. Не является ли расточительным это двухэтапное изготовление желаемого регулятора? Ведь двухэтапное изготовление его как будто предполагает, что проблема получения регулятора должна быть решена прежде, чем за нее можно будет взяться! С другой стороны, спросим: что отсюда вытекает в том случае, когда регулируемой очень большой системой является весь социально-экономический мир, а проектировщиком Ω, ответственным за создание регулятора, является некоторое множество (например, множество социологов), пропускная способность которого как регулятора ограничена пропускной способностью представителей вида Homo? Означает ли это, что никакой прогресс в регулировании невозможен (ибо регулятор должен строиться представителями этого вида)?

Нет, не означает. Ибо когда регулирование осуществляется по этапам, когда регулятор R_1 действует так, чтобы создать регулятор R_2, *то мощность R_2 не ограничена мощностью R_1*. Появляется возможность, что R_2 будет иметь бóльшую мощность, чем R_1, и что, таким образом, произойдет *усиление* регулирования. Эта возможность рассматривается в следующей главе, где мы увидим, что метод поэтапного регулирования, отнюдь не будучи с необходимостью расточительным, открывает нам некоторые замечательные возможности.

ГЛАВА **14**

Усиление регулирования

14/1. *Что такое усилитель?* Усилитель, вообще говоря, есть устройство, которое, получив что-нибудь в небольшом количестве, выдает затем это же самое в большом количестве. Усилитель звука, получив слабый звук (в микрофон), выдает сильный звук. Усилитель мощности (например, тот, что описан в § 12/21), получив небольшую мощность (достаточную для перемещения L), выдает большую мощность (в H). А усилителем денег было бы устройство, которое, получив немного денег, выдавало бы их много.

Такие устройства работают следующим образом: имея обильный резервуар того, что должно выдаваться, они используют вход для управления потоком, идущим от этого резервуара. Лишь изредка работа усилителя основывается на простом увеличении входа, как в линзе кинопроектора; обычно она основана на пополняющем *дополнении.* Так, усилитель мощности имеет некоторый источник, в изобилии доставляющий мощность (сжатый воздух в A на рис. 12/21/1); и именно этот источник обеспечивает бóльшую часть мощности на выходе, тогда как вход не дает ничего или почти ничего. Аналогично усилие, прилагаемое машинистом подъемного крана к рукоятке управления, ничего не вкладывает непосредственно в поднятие основного груза, ибо все усилие машиниста тратится на передвижение электрического или другого переключателя.

Нетрудно видеть, что в усилителе мощности (изображенном на рис. 12/21/1) весь процесс — поднятие тяжелого груза в *H* посредством силы, приложенной к *L*, — осуществляется в два этапа, двумя соединенными системами. Именно это разделение на два этапа и делает возможным усиление мощности, ибо в противном случае, т. е. за один этап, закон сохранения энергии сделал бы невозможным любое простое и непосредственное усиление. На первом этапе оператор передвигает конец *L*, противодействуя трению в *K* и давлению в *V*; на этом этапе энергия или мощность строго сохраняется. Второй этап включает в себя движение сжатого воздуха в мехи *B* или из них и поднятие *P*, *G* и *H*. На этом этапе энергия также сохраняется, ибо энергия, используемая для поднятия груза в *H*, получается за счет расширения сжатого воздуха. Таким образом, всю систему можно рассматривать как состоящую из двух систем, внутри каждой из которых энергия строго сохраняется и которые соединены так, что силам в 0, 1, 2,... дины в *L* отвечают *соответственно* силы в 0, 1000, 2000,... дин (или с другим коэффициентом) в *H*. *Именно разделение на два этапа дает возможность построить усилитель мощности, несмотря на закон сохранения энергии,* и вся суть дела заключается в том, что энергия входа на первом этапе может дополняться (пополняться), давая выход на втором этапе.

Иногда пропорциональность является существенной, как в радиоусилителе. Тогда машина должна строиться так, чтобы коэффициент усиления был постоянным по всей шкале. В других случаях точное значение этого отношения не играет большой роли, как в случае подъемного крана, где главное требование состоит в том, чтобы все входные значения лежали внутри некоторых пределов (определяемых силой руки машиниста) и чтобы выход дополнялся (пополнялся) в изобилии, становясь тем самым намного больше входа.

Упр. Спроектируйте «усилитель воды», т. е. устройство, которое, если вода накачивается в него в количестве *x мл/сек*, выпускало бы на выходе воду в количестве 100 *x мл/сек.*

14/2. Таким образом, процесс усиления можно рассматривать с двух весьма различных точек зрения, которые могут привести к весьма различным мнениям по вопросу о наличии или отсутствии усиления.

С одной стороны, имеется теоретик, — например, конструктор подъемных кранов, — который должен понимать внутреннюю природу процесса, если он хочет, чтобы его краны действовали эффективно. Для него не существует действительного усиления: выдаваемая мощность не превосходит (всей совокупной) прикладываемой мощности. Он знает, что оператор, управляющий краном, достигает успеха просто потому, что может, так сказать, обкрадывать другие источники энергии (уголь, нефть и т. д.) для достижения своей цели. Если бы природа не предоставила ему уголь в качестве обильного источника дополнения, то он не смог бы поднимать тяжелые грузы. Оператор получает «усиление», попросту обращаясь за помощью к Королю Углю. Иными словами, основным типом усилителя является мальчик, который может поднимать большие грузы потому, что отец согласен поднимать эти грузы за него!

Все это верно; но, с другой стороны, имеется практик, который хочет *использовать* это обстоятельство, когда решает, например, какие машины поставить на причале для погрузки судов. Если он имеет доступ к обильному источнику мощности, то для него «усиление» становится весьма реальным и практическим. Оно означает для него разницу между быстрой и легкой погрузкой судна с помощью передвижений рукоятки управления и медленной и трудоемкой ручной погрузкой. Когда груз еще больше (например, локомотив), отсутствие усилителя мощности может означать, что работа вообще не может быть выполнена. Таким образом, для человека практики возможность такого явного усиления имеет большое значение.

Очевидно, обе точки зрения правильны. Конструкторы подъемных кранов должны хорошо понимать, что краны на самом деле не являются усилителями; но использователи кранов должны думать о них как о действительных усилителях.

14/3. Теперь нам будет ясно, как рассматривать вопрос об усилении регулирования. При проектировании (в этой главе) мы должны ясно понимать, что проектировщик на самом деле создает только *дополнение,* обкрадывая какой-нибудь легко доступный и обильный источник. Однако, начав использовать источник (это дело будущего), он забудет об этом обстоятельстве и будет знать только, что он, проектировщик, напоминает теперь рабочего, оснащенного орудиями, приводимыми в движение посторонней мощностью, и способного выполнять задачи, недоступные для неоснащенного рабочего.

14/4. *Регулирование и выбор.* В § 13/10 мы начали рассматривать, каким образом можно вызвать регулятор (первоначально принимавшийся за данный) к действительному существованию — либо в виде формулы поведения, содержащейся внутри организма (Ω), которому требуется регулирование; либо в виде материальной машины, которую организм строит, чтобы она действовала за него. Мы видели, что *количество* требуемого при этом проектирования может быть измерено (количеством необходимого выбора) и что этот выбор может в некотором смысле усиливаться (§ 13/18). Чтобы это стало яснее, рассмотрим более непосредственно отношение между регулированием и выбором, особенно в том, что касается количества информации или разнообразия. Диаграмма непосредственных воздействий имеет вид

$$\boxed{\text{Проектировщик}} \xrightarrow[C]{\qquad} \boxed{\text{Регулятор}}$$

и мы хотим знать, сколько разнообразия или информации должен передавать канал между проектировщиком и регулятором.

Существенным для изготовления регулятора является выбор. Вот три примера.

Для первого из рассмотренных нами регуляторов (§ 11/3) мы получили преобразование

$$R: \downarrow \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \beta & \alpha & \gamma \end{matrix},$$

и это конкретное (регулирующее) преобразование нужно было выбрать из множества всех возможных преобразований, которых в данном случае насчитывалось 27 (ср. упр. 7/7/8). Здесь «изготовить регулятор» означало точно задать его, т. е. выделить из остальных.

В § 13/12 мы использовали другой метод: машина, способная быть регулятором, была «спроектирована» путем выбора некоторого определенного значения из множества всех возможных входных значений.

Третий метод изготовления регулятора состоит в том, чтобы собрать его из металлических и прочих деталей, как механик изготовляет ванну с термостатом. Здесь также необходим выбор: детали должны выбираться (отличаться) из других возможных предметов и способ сборки и соединения должен выбираться из других, неправильных способов. Используемое при этом количество выбора можно измерить, и любой спор, касающийся этого измерения, может быть решен по способу § 13/11 (см. последний абзац).

Из § 13/18 следует, что если окончательный регулятор может быть получен по этапам (если весь выбор протекает по этапам), то существует возможность, что *получение маленького регулятора на первом этапе может повести к окончательному созданию значительно большего регулятора* (т. е. со значительно большей мощностью), так что весь процесс обнаружит усиление.

Именно в этом смысле следует понимать «усиление» регулирования. Закон необходимого разнообразия, как и закон сохранения энергии, абсолютно воспрещает какое бы то ни было непосредственное и простое увеличение, но он не воспрещает дополнения.

14/5. Рассмотрим некоторые примеры, в которых действительно обнаруживается такое усиление регулирования.

Предположим, что внешними воздействиями являются флюктуации напряжения сети, которые идут к аппарату, принадлежащему Ω, со скоростью сотен в секунду и угрожают испортить этот аппарат. Допустим, что разнообразие, обнаруживаемое этими воздействиями за секунду, значительно превосходит пропускную способность этого Ω как канала связи и вследствие этого для него невозможно регулировать их непосредственным личным действием. Однако у него имеется каталог некоей фирмы, содержащий три артикула:

1) телевизор,
2) стабилизатор напряжения,
3) преобразователь частоты.

Допустим, что пропускная способность данного Ω позволяет ему осуществить подходящий выбор одного из трех; тогда, если он произведет этот выбор, конечным результатом будет то, что напряжение сети, поступающее на его аппарат, будет стабилизировано. Таким образом, три его первоначально возможных выбора могут быть приведены в соответствие с тремя исходами, один из которых — «стабилизация напряжения сети».

Регулирование, создаваемое этой стабилизацией (скажем, в течение года), включает значительно большее количество выбора, чем выбор одного исхода из трех. Следовательно, в ходе всего процесса имело место несомненное усиление.

В этом примере дополнение столь очевидно и его зависимость от проектирующей способности фирмы, производящей стабилизаторы, является столь кричащей, что у читателя может появиться желание отвергнуть это «усиление», как не заслуживающее серьезного рассмотрения. (Однако указанная зависимость является ничуть не более кричащей, чем зависимость машиниста подъемного крана от соответствующего источника энергии.) Впрочем, это лишь предельный — в некотором смысле — случай (выбранный для того, чтобы показать один конец шкалы). Другие случаи расположены дальше по шкале и представляют более общий интерес. Принцип, однако, остается неизменным.

Рассмотрим теперь случай, в котором Ω требует, чтобы ванна возвращалась к определенной температуре; требуется 100 таких возвращений каждый день в течение целого года. Это означает, что в 36 500 случаев температура должна исправляться путем повышения или понижения, т. е., скажем, путем выбора в 1 бит. Все Большое Возмущение (§ 13/8) имеет, таким образом, разнообразие 2^{36500} возможностей. Вероятно, Ω *мог бы* передать за год все указанное разнообразие, но находит это неудобным. Если его ресурсы позволяют ему построить термостат за счет затраты, скажем, 1000 битов, то, с учетом повторений в Большом Возмущении (§ 13/9), акт подходящего выбора из 1000 битов будет иметь следствием правильный выбор из 36 500 битов. Таким образом, будет иметь место усиление примерно в 36 раз (в логарифмическом масштабе).

Этот второй пример более привычен, чем первый. Тот факт, что этот метод широко применяется на практике, показывает, в какой степени считают его заслуживающим внимания практические люди.

Конечно, усиление необходимо далеко не во всех случаях, и практический человек, прежде чем строить машину для выполнения какой-то работы, всегда подведет хотя бы интуитивный баланс:

Сколько будет **стоить** (в каком-либо смысле) изготовление машины, выполняющей эту работу.	Сколько будет **стоить** сделать это самому.

В этой главе рассматриваются как раз те действительные количества, с которыми мы имеем дело, когда наш интерес сосредоточен на подсчете требуемой связи и выбора.

В заключение рассмотрим пример, в котором возможность усиления очевидна и дает практическую пользу. Предположим, что двадцать человек получили задание поддерживать в двух тысячах комнат постоянную температуру и влажность воздуха. Если в каждой комнате имеются свои особые средства управления, эти двадцать человек могут обнаружить, что задача им не по силам, так как этим людям придется компенсировать все атмосферные изменения, непосредственно оперируя с приборами управления. Однако могут оказаться в наличии и такие машины, что если наши двадцать человек станут механиками и будут действовать по отношению к этим машинам как регуляторы, то эти машины можно будет применять как автоматические установки для кондиционирования воздуха. И далее может случиться, что количество регулирования, которое механики могут осуществлять для машин, достаточно для того, чтобы машины эффективно контролировали две тысячи комнат. Таким образом, регулирование, неосуществимое за один этап, может при соответствующих условиях оказаться осуществимым за два этапа.

Количества связи (пропускные способности каналов), встречающиеся в этих процессах регулирования, могут быть измерены с любой желаемой точностью, и можно установить точную степень любого усиления. Таким образом, если усиление действительно происходило, то реальность этого факта может быть продемонстрирована в форме, не вызывающей сомнений.

Откуда (в последнем примере) идет дополнение? Вообще говоря, от всех других входов. В приведенном примере такими входами служат все остальные факторы, участвовавшие в проектировании и изготовлении машин, а также сама окружающая среда, сообщающая машинам (а *не механикам*!), какова температура и влажность воздуха в каждый момент. В результате эти источники информации играют определенную роль в окончательном регулировании, не используя механиков в качестве канала.

В приведенном примере обнаруживаются два уровня регулирования, но нет никакой причины, чтобы их число ограничивалось двумя. Врач, наблюдающий за нашими механиками и заботящийся об их здоровье и работоспособности, может считать себя, поскольку речь идет о комнатах, регулятором третьего порядка. Не имеет смысла продолжать примеры, коль скоро принцип уже ясен, тем более что во многих случаях различные регуляторы, вероятно, не располагаются в простой иерархии.

14/6. *Усиление в мозгу.* Теперь мы можем с количественной стороны понять, почему этот косвенный метод оказался более совершенным, почему именно он используется теми организмами, которые обладают самыми мощными средствами регулирования. Дело в том, что он допускает усиление.

Набор генов, как хранилище или канал разнообразия, имеет ограниченную пропускную способность. Выживают преимущественно те виды, которые используют эту пропускную способность эффективно. Она может использоваться прямо или косвенно.

Прямое использование имеет место, когда набор генов непосредственно определяет регулятор. Регулятор изготовляется (еще в эмбрионе), и организм живет, отвечая на каждое возмущение так, как определил набор генов. Усиление здесь не имеет места [с нашей теперешней точки зрения; хотя такое регулирование все же дает некоторое преимущество (§ 13/9), если возмущения часто повторяются за время жизни организма].

Косвенное использование имеет место тогда, когда набор генов определяет построение некоторого регулятора R_1, действие которого должно привести к построению главного регулятора R_2, — особенно если этот процесс проходит через несколько порядков или уровней. При достижении окончательного регулирования по этапам появляется возможность дополнения в больших масштабах и тем самым возможность того, что окончательное регулирование будет значительно более мощным, чем регулирование, которое непосредственно могло быть обеспечено набором генов.

Ясный пример того, как один регулятор может своими действиями привести к возникновению другого регулятора, приводился в § 12/15. Строилась часть B гомеостата, которая становилась первоначальным регулятором R_1. Соединенная с частью A, она действовала так, чтобы часть A становилась устойчивой только при центральном положении ее стрелок. Когда это достигалось, A начинала действовать как регулятор R_2 по отношению к тем возмущениям, которые могли бы заставить стрелки отклониться. Хотя в этом примере регулятор R_2 исключительно прост, в принципе ничто не отделяет этот случай от тех случаев, когда регулятор R_2 имеет любую степень сложности.

Метод достижения регулирования за два этапа, когда набор генов создает R_1, а R_1 создает R_2, характерен для млекопитающих, у которых набор генов, действуя на мозг эмбриона, определяет развитие, к моменту рождения, некоторых основных регуляторов R_1, действие которых не приносит организму непосредственной выгоды. Однако с момента рождения они действуют на кору головного мозга так, чтобы развить в ней обширный регулирующий механизм R_2, который, ко времени наступления зрелости, будет гораздо лучшим регулятором (т. е. будет иметь бо́льшую мощность), чем тот, который мог бы быть создан прямым действием набора генов.

Откуда исходит дополнение? Из случайных источников, как в § 12/15, и из самой окружающей среды! Ибо именно окружающей среде приходится в значительной степени определять, как будет действовать организм. Таким образом, набор генов и окружающая среда вместе участвуют в формировании взрослого организма, и, следовательно, количество проектирования, идущего от набора генов, дополняется проектированием, идущим (в качестве разнообразия и информации) от окружающей среды. Вот почему взрослый организм в конечном счете обнаруживает бо́льшую способность регулирования, чем та, которая могла бы определяться одним набором генов. Таким образом, усиление регулирования не является чем-то новым, ибо высшие животные, которые приспосабливаются путем обучения, давно уже открыли этот метод.

Нельзя ли еще более увеличить это усиление? А если да, то не можем ли мы использовать имеющиеся у нас способности регулирования, чтобы создать более высоко развитый регулятор, значительно превосходящий человеческие способности? Регулятор, который бы регулировал различные несовершенства нашего общества, являющегося по отношению к нам очень большой системой?

14/7. *Усиление умственных способностей.* Эта книга задумана как введение, и на протяжении двенадцати глав этот замысел выдерживался. В последних двух главах, однако, предмет развивался несколько спекулятивно, отчасти для того, чтобы дать читателю попрактиковаться в применении ранее изложенных методов, отчасти же для того, чтобы показать открывающиеся впереди захватывающие перспективы.

В § 13/18 мы видели, что выбор можно усиливать. А «решение задач» в основном, если не всецело, есть вопрос надлежащего выбора. Возьмем, например, любой популярный сборник задач и загадок. Почти каждую из них можно свести к следующей форме: «Укажите один элемент из некоторого множества.» Так, из всех возможных количеств яблок, которые могут быть в сумке у Джона, мы должны выбрать одно определенное количество; или из всех возможных линий, которые можно провести карандашом через определенным образом расположенные точки, нужно выбрать одну; или из всех возможных распределений букв по данному множеству мест надо выбрать одно. В действительности трудно представить себе задачу — безразлично, шуточную или серьезную, — для решения которой в конечном счете не был бы необходим и достаточен некоторый подходящий выбор (отбор).

Ясно также, что многие из тестов, применяемых для измерения «умственных способностей», измеряют по существу способность испытуемого производить подходящий выбор. Например, при одном из тестов ребенку показывают какой-нибудь обычный предмет и спрашивают его название — из всех слов ребенок должен выбрать нужное. При другом тесте ребенка спрашивают, как бы он стал искать мячик на поле, — изо всех возможных путей ребенок должен отобрать один среди немногих подходящих. Таким образом, нельзя считать невозможным, что то, что обычно называют «умственными способностями», окажется эквивалентным «способности подходящего выбора». В самом деле, если бы «говорящий черный ящик» обнаруживал большую способность к подходящему выбору в таких делах — например, получая трудные задачи, всегда давал бы правильные ответы, — то мы вряд ли могли бы отрицать, что с точки зрения *поведения* он обнаруживает эквивалент «больших умственных способностей».

Если это так и поскольку мы знаем, что способность выбора может усиливаться, то отсюда, по-видимому, следует, что мощь интеллекта, подобно мощи физической, может усиливаться. Пусть никто не говорит, что этого нельзя сделать, ибо наборы генов делают это каждый раз, когда они формируют мозг; развиваясь, мозг становится более совершенным органом, чем это возможно при прямом определении всех его деталей набором генов. Нова здесь лишь мысль, что мы можем делать это синтетически, сознательно, намеренно.

Но на этом книга должна закончиться; это уже не предмет для нашего «Введения в кибернетику».

ПРИЛОЖЕНИЕ I

ОБЪЯСНЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ТЕРМИНОВ

В тексте «Введения в кибернетику» часто встречаются термины «абсолютная система», «гомеостазис», «ультраустойчивость». Предполагается, что они известны читателю из книги «Устройство мозга» того же автора. В настоящем приложении, составленном переводчиком, дается разъяснение этих терминов.

АБСОЛЮТНАЯ СИСТЕМА

Согласно «Устройству мозга», всякая система представляет собой некоторую совокупность переменных и изучается посредством применения к ней так называемой «основной операции» (primary operation). **Основная операция** состоит в том, что экспериментатор, используя свою способность управления, приводит переменные данной системы в некоторое **состояние** (определяемое как совокупность числовых значений, которые переменные системы имеют в данный момент) и затем одновременно освобождает их. Последовательность состояний, принимаемых после этого системой, называется ее **линией поведения.**

Если при повторных применениях основной операции к данной системе обнаруживается, что все линии поведения системы после некоторого состояния S одинаковы, независимо от того, каким путем система пришла в состояние S, и если то же самое справедливо и для линии поведения после каждого из состояний S', S'', ... системы, то система называется **абсолютной.**

Отсюда следует, что в абсолютной системе наличие некоторого состояния вполне определяет последующую линию поведения системы.

ГОМЕОСТАЗИС

Понятие **гомеостазиса,** введенное известным американским физиологом Кенноном, относится к деятельности прирожденных механизмов животных, характеризующейся следующими чертами:

1) каждый механизм «приспособлен» к своей цели;

2) целью его является поддержание значений некоторых существенных переменных внутри физиологически допустимых границ;

3) почти все поведение вегетативной нервной системы животного обусловлено этими механизмами.

Примерами могут служить механизмы поддержания в определенных пределах таких величин, как концентрация глюкозы в крови, внутренняя температура теплокровного животного, освещенность сетчатки и т. п.

УЛЬТРАУСТОЙЧИВОСТЬ

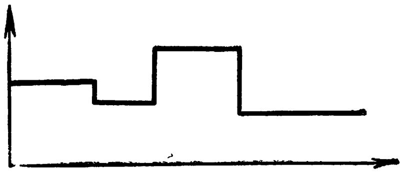
Если откладывать на осях координат значения переменных системы, то точка в образованном таким образом **фазовом пространстве**, координаты которой соответственно равны данным значениям переменных, будет соответствовать некоторому состоянию системы. Она называется **представляющей точкой**. Линия движения представляющей точки в фазовом пространстве будет соответствовать линии поведения системы. Система n переменных будет, очевидно, иметь n-мерное фазовое пространство. **Полем** системы называется область фазового пространства, содержащая все линии поведения, которые будут обнаружены, если освобождать систему из всех возможных начальных состояний.

Линия поведения называется **устойчивой** относительно данной области в фазовом пространстве, если, начавшись внутри этой области, она никогда не выйдет из нее. Поле устойчиво относительно данной области, если все образующие его линии поведения устойчивы относительно нее, т. е. если поле целиком содержится в этой области. Система устойчива относительно данной области, если ее поле устойчиво относительно этой области.

Очевидно, что для существования организма необходимо, чтобы его существенные переменные удерживались внутри физиологических границ (см. § 10/4 настоящей книги); т. е. система существенных переменных должна быть устойчива относительно области, образованной допустимыми значениями существенных переменных.

Переменные, не входящие в систему, называются **параметрами**. Изменение параметра может изменить поле системы, так что система, которая при одном значении параметра была устойчивой относительно данной области, при другом значении параметра может стать неустойчивой относительно этой области. В случае абсолютной системы изменение устойчивости может быть только результатом изменения параметра.

Ступенчатой функцией называется функция, изменения которой происходят скачками, в то время как между скачками ее значение постоянно. График ступенчатой функции имеет вид:



Примером ступенчатой функции может служить *сопротивление* движению пули, пробивающей последовательно различные препятствия (дерево, металл, стекло и т. д.).

Согласно определению абсолютной системы, поведение каждой переменной в каждый момент зависит от состояния системы, т. е. от значения самой упомянутой переменной и других переменных системы в данный момент. Если какая-то переменная ведет себя как ступенчатая функция, то все состояния системы распадаются на две группы: при одних состояниях значение этой ступенчатой функции не изменяется, при других — изменяется. Последние называются **критическими состояниями**. При достижении системой критического состояния значение одной из ее ступенчатых функций изменяется, и это изменение влияет на поведение всей системы.

Ультраустойчивой системой называется абсолютная система, содержащая достаточно большое число ступенчатых функций, чтобы можно было считать его практически неограниченным. Ее поведение отличается следующими особенностями. Назовем переменные рассматриваемой системы, не являющиеся ступенчатыми функциями, **главными переменными** системы; остальные переменные являются по отношению к системе главных переменных **параметрами**. Рассмотрим поле главных переменных, соответствующее каким-нибудь фиксированным значениям остальных переменных. Допустим, что данная линия поведения системы неустойчива относительно области всех некритических состояний, т. е. что она рано или поздно приведет к некоторому критическому состоянию. Тогда изменится значение какой-то из ступенчатых функций и соответственно изменится поле системы; если новое поле также будет неустойчиво, то представляющая точка придет к новому критическому состоянию [1]), поле снова изменится и т. д., пока не образуется поле, в котором представляющая точка никогда не придет в критическое состояние. Такое поле будет называться **окончательным**. Можно сказать, что в этом случае система *выбирала* нужное поле, отбрасывая неустойчивые поля и сохраняя устойчивое окончательное поле.

Принцип ультраустойчивости заключается в следующем: ультраустойчивая система действует селективно по отношению к полям главных переменных, отвергая те, которые ведут представляющую точку к критическому состоянию, и сохраняя те, которые этого не допускают.

---

[1]) Конечно, можно представить себе случай, когда поле в целом неустойчиво (т. е. не все его линии поведения устойчивы), но та линия поведения, по которой действительно идет представляющая точка, устойчива. В этом случае система, вообще говоря, не придет в критическое состояние. Если, однако, речь идет о реальных системах, то нужно учитывать, что они беспрерывно испытывают небольшие случайные возмущения, постоянно смещающие представляющую точку на соседние линии поведения. Поэтому можно считать, что в неустойчивом поле представляющая точка под влиянием возмущений в конце концов попадет на одну из его неустойчивых траекторий и придет к критическому состоянию.

Заметим, что ультраустойчивая система является абсолютной только в том случае, если в нее включаются как главные переменные, так и ступенчатые функции; система же, образованная одними главными переменными, не является абсолютной, поскольку линии поведения ее после одного и того же состояния могут быть различными, в зависимости от значения ступенчатых функций.

Если рассматриваемой системой является организм вместе с его средой, так что его существенные переменные входят в число главных переменных, и если критические состояния его ступенчатых функций лежат внутри физиологических границ, образуя барьер (так что, прежде чем прийти в физиологически недопустимое состояние, система должна пройти какое-то критическое состояние), то мы получим следующую картину: изменение некоторого параметра (соответствующее изменению внешних условий) делает систему неустойчивой, так что существенные переменные грозят выйти из физиологических границ; однако при этом система приходит в критическое состояние, изменяющее значение ее ступенчатых функций; начинается процесс отбора полей (соответственно способов поведения), который заканчивается нахождением устойчивого поля (т. е. способа поведения, обеспечивающего сохранность организма).

Таким образом, ультраустойчивость, грубо говоря, соответствует приспособляемости на высоком уровне, включая обучение (в этом случае изменение ступенчатых функций соответствует изменению уровня обучения).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

В своей книге «Устройство мозга» У. Росс Эшби дал описание сконструированного им прибора, так называемого «гомеостата». Поскольку гомеостат часто упоминается в кибернетической литературе, в том числе и в настоящем «Введении в кибернетику», редакция сочла целесообразным опубликовать приведенный ниже перевод § 8/8 из книги «Устройство мозга», содержащего описание гомеостата [1]). Нумерация рисунков по сравнению с оригиналом несколько изменена.

ГОМЕОСТАТ

До сих пор рассмотрение ступенчатых функций и ультраустойчивости было чисто логическим. Чтобы обеспечить объективную и независимую проверку приведенных выше рассуждений, была построена машина, удовлетворяющая определению ультраустойчивой системы. В настоящем параграфе мы опишем эту машину и покажем, насколько ее поведение соответствует предсказанию, сделанному в предыдущем параграфе.

Гомеостат (рис. П/1) состоит из четырех блоков, на каждом из которых сверху расположен поворачивающийся магнит (рис. П/2, *M* на рис. П/3). Угловые отклонения четырех магнитов от центральных положений представляют собой четыре главные переменные.

Конструкцию гомеостата мы опишем в несколько этапов. Начнем с того, что каждый блок дает на своем выходе постоянный ток, пропорциональный отклонению магнита этого блока от центрального положения. Выход управляется следующим образом. Перед каждым магнитом стоит сосуд с водой. По концам сосуда расположены электроды, которые создают в сосуде разность потенциалов. К магниту прикреплен провод, погруженный в воду, который снимает потенциал, зависящий от положения магнита, и передает

---

[1]) См. также статью Эшби в журнале «Electronic Engineering».

его на сетку триода. Источник J создает анодный потенциал в 150 *в*, а потенциал в точке H равен 180 *в*. Таким образом, через потенциометр E протекает постоянный ток определенной величины. Если сеточный потенциал позволяет протекать через лампу току в точности этой величины, то на выходе совсем не будет тока. Но если

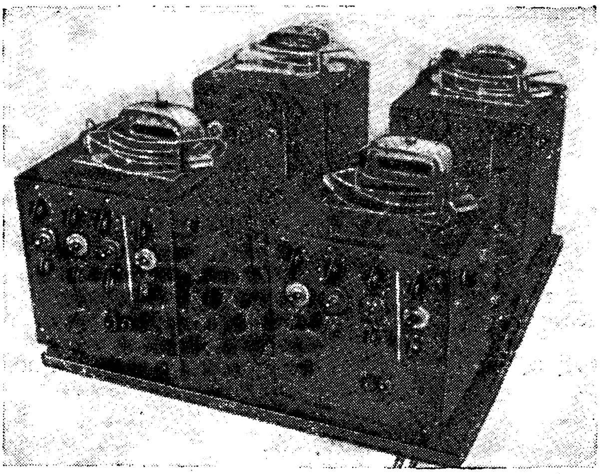


Рис. П/1. Гомеостат. На каждом блоке сверху расположены магнит и обмотка, показанные на рис. П/2.

Верхний ряд переключателей, расположенных на передней стенке, управляет потенциометрами, средний ряд — коммутаторами, и нижний ряд — переключателями S (см. рис. П/3).

лампа пропускает ток большей или меньшей величины, в выходной цепи будет течь соответствующая разность в одном направлении или в другом. Таким образом, при надлежащей регулировке E выходной ток будет приблизительно пропорционален отклонению магнита M от центрального положения.

Далее, блоки соединены между собой так, что выходной ток каждого блока подается на три других блока. Благодаря этому каждый блок получает через отдельный вход ток от каждого из трех остальных блоков.

Входы действуют на магнит блока через обмотки A, B и C так, что вращающий момент магнита приблизительно пропорционален алгебраической сумме токов в A, B и C. (D также действует на M, как внутренняя обратная связь.) Но прежде чем достичь своей обмотки, каждый входной ток проходит через коммутатор (X), который определяет полярность полюсов обмотки, и через потенциометр (P), который определяет, какая часть входного тока попадет в обмотку.

Как только включат систему, магниты начинают передвигаться благодаря токам от других блоков. Эти движения изменяют токи, которые в свою очередь изменяют движения, и т. д. Можно показать, что при наличии достаточной вязкости в сосудах наша система четырех переменных — положений магнитов — является приблизи-

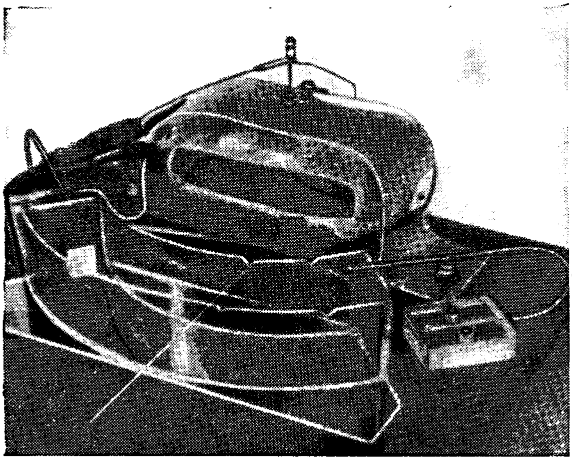


Рис. П/2. Типичный магнит (виден отчасти), обмотка, ось, движок и водяной потенциометр с электродами на каждом конце.

Обмотка четверная и состоит из частей A, B, C и D (рис. П/3).

тельно абсолютной. Коммутаторы и потенциометры играют роль параметров по отношению к этой системе.

Когда этим параметрам задается определенный набор значений, магниты ведут себя вполне определенным образом; ибо параметры определяют поле системы и тем самым ее линии поведения. Если это поле устойчиво, то четыре магнита передвигаются к центральному положению, где они активно сопротивляются любой попытке сместить их. Если они смещены, то согласованное действие возвращает их назад, к центру. Другие значения параметров могут, однако, давать неустойчивость; в этом случае происходит «бегство» (runaway) — магниты уходят от центральных положений с возрастающей скоростью.

Пока лишь было показано, что наша система четырех переменных является динамической, имеет диаграмму непосредственных воздействий, изображенную на рис. П/4, и является абсолютной.

Ее поле зависит от тридцати двух параметров X и P. Она еще не является ультраустойчивой. Однако вместо того, чтобы управлять входными токами блоков посредством регулируемых вручную параметров, можно при помощи переключателей S направлять эти токи через аналогичные компоненты, размещенные на вращательном искателе (другое название — «шаговый переключатель») U. Выбор значений компонентов в U преднамеренно сделан случайным: брались фактические числовые значения из «Таблицы случайных чисел»

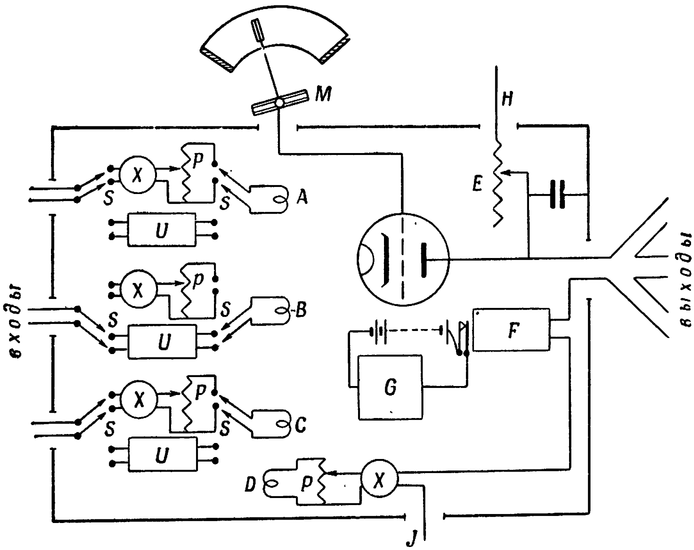


Рис. П/3. Принципиальная схема одного блока (значение букв объяснено в тексте).

Фишера и Йейтса. Вследствие того что компоненты подмонтированы к вращательным искателям, величины наших параметров определяются в любой момент времени положением вращательных искателей. Двадцать пять позиций на каждом из четырех вращательных искателей (по одному на каждый блок) обеспечивают 390 625 комбинаций значений параметров. Кроме того, обмотка G каждого вращательного искателя возбуждается тогда и только тогда, когда магнит M отходит далеко от центрального положения; ибо только при крайнем отклонении ток на выходе достигает величины, достаточной для возбуждения реле F, которое замыкает цепь обмотки G. Особое устройство, не показанное на рисунке, регулярно разрывает цепь обмотки G, заставляя вращательный искатель передвигаться от позиции к позиции все время, пока возбуждено реле F.

Теперь система является ультраустойчивой. Соответствие ее определению ультраустойчивости будет показано для каждого из трех требований. Во-первых, вся система, состоящая теперь из восьми переменных (четыре отклонения магнитов и четыре положения вращательных искателей), является абсолютной, поскольку значений восьми переменных достаточно для определения ее поведения. Во-вторых, переменные могут быть поделены на главные переменные (четыре отклонения магнитов) и ступенчатые функции (переменные, управляемые положениями вращательных искателей). В-третьих, так как вращательные искатели обеспечивают почти бесконечное количество значений ступенчатых функций (хотя не все из них различны), нам не приходится учитывать возможности того, что перебор изменений ступенчатых функций придет к концу. Вдобавок, критические состояния (отклонения магнитов, при которых реле возбуждено) расположены все около отклонения в 45°, так что в фазовом пространстве главных переменных они образуют «куб» вокруг начала координат.

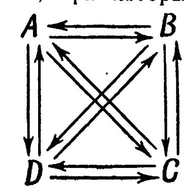


Рис. П/4.

Следует заметить, что если используются только один, два или три блока, то получаемая система все еще будет ультраустойчивой. Она будет иметь соответственно одну, две или три главные переменные, но положения критических состояний не изменятся.

Теперь мы можем продемонстрировать ультраустойчивость полученной системы. Для простоты возьмем сначала один блок с обратной связью на себя через единственную управляемую искателем обмотку, например через A (обмотка D закорачивается). В данном случае первая же отрицательная настройка искателя даст устойчивость. На рис. П/5 показана типичная осциллограмма. Сначала ступенчатые функции давали устойчивое поле для единственной главной переменной, и понижение в D_1, вызванное оператором, отклонившим магнит, сразу же корректировалась системой, так что магнит возвратился в центральное положение. В точке R_1 оператор переменил полярность соединения между входом и выходом, делая систему неустойчивой. При этом произошло «бегство», и магнит прошел критическое состояние (показанное линией точек). В результате вращательный искатель изменил значение. После этого первое же новое значение дало устойчивое поле, так что магнит возвратился в центральное положение. Смещение в D_2 показало, что система теперь устойчива (хотя возвращение после R_1 также показало это).

В R_2 полярность соединения между входом и выходом снова обращается. Значение вращательного искателя стало теперь непригодным, поле сделалось неустойчивым, и произошло «бегство». На этот раз три положения вращательного искателя дали три поля, оказавшиеся неустойчивыми; все они были отвергнуты. Но четвертое поле было устойчивым, магнит вернулся к центру, дальнейших изменений в положении искателя не произошло, и единственная главная переменная получила устойчивое поле. Устойчивость этого поля вновь была продемонстрирована в D_3, На рис. П/6 показан другой эксперимент, на этот раз с двумя взаимодействующими блоками. Диаграмма непосредственных воз-

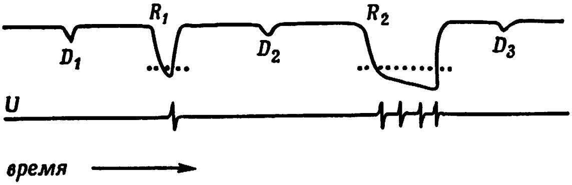


Рис. П/5. Поведение одного блока с обратной связью на себя через вращательный искатель.

Верхняя линия отмечает положение магнита, движения которого из стороны в сторону записываются как смещения вверх и вниз. Нижняя линия (U) показывает всплески всякий раз, когда вращательный искатель занимает новое положение. Первое движение в каждой точке D вызывается оператором, который толкает магнит в одну сторону, чтобы заставить его продемонстрировать ответ.

действий была $1 \rightleftarrows 2$; воздействие $1 \to 2$ производилось вручную, а воздействиве $2 \to 1$ управлялось вращательным искателем.

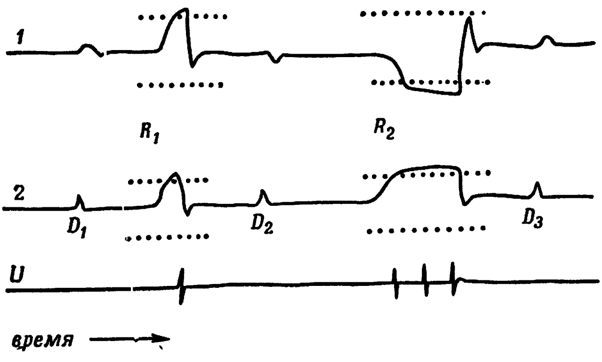


Рис. П/6. Взаимодействие двух блоков (1 и 2). (Подробности, как на рис. П/5.)

Сначала значения ступенчатых функций давали вместе устойчивость, как это показывают реакции на D_1. В точке R_1 изменение коммутатора вручную сделало систему неустойчивой, произошло «бегство», и переменные прошли критические состояния. Вращательный искатель в блоке 1 изменил положение и, как оказалось, при первой же последующей пробе дал устойчивое поле. Нужно отметить, что, в то время как до R_1 движение D_1 вверх в блоке 2 вызывает движение *вверх* в блоке 1, после R_1 оно же вызывает в блоке 1 движение *вниз,* показывая, что действие $2 \to 1$ перевернуто вращательным искателем. Это переворачивание компенсировало переворачивание $1 \to 2$, вызванное в точке R_1.

В точке R_2 весь процесс повторяется. На этот раз для восстановления устойчивости потребовалось три движения искателя. Сравнение результата действия D_3 на блок 1 с результатом действия D_2 показывает, что опять произошла компенсация.

Таким образом, гомеостат может демонстрировать элементарные факты, касающиеся «ультраустойчивости».

ЛИТЕРАТУРА

Беллман (Bellman R.)

Теория устойчивости дифференциальных уравнений (Stability theory of differential equations, McGrow-Hill Book Co, New York, 1953. (Русский перевод: Издатинлит, М., 1954.)

Бурбаки (Bourbaki Nicolas)

Теория множеств (Théorie des ensembles, fascicule de résultats, A. S. E. I., № 1141, Hermann & Cie, Paris, 2 éd. 1951).

— Алгебра, глава I (Algèbre, Chapire I, A. S. E. I., № 1144).

— Общая топология, глава I (Topologie générale, Charitre I, A. S. E. I., № 1142). (Русский перевод: Физматгиз, 1959).

Винер (Wiener Norbert)

Кибернетика (Cybernetics, John Wiley & Sons, New York, 1948). (Русский перевод: издательство «Советское радио», Москва, 1958.)

Голдман (Goldman Stanford).

Теория информации (Information theory. Constable & Co., London, 1953). (Русский перевод: ИЛ, Москва, 1957).

Гранит, Лекселл и Скоглунд (Granit R., Leksell L., Skoglund C. L.).

Взаимодействие волокон в поврежденном или сжатом участке нерва (Fibre interaction in injured or compressed region of nerve, «Brain», 67, 125—140, 1944).

Зоммергоф (Sommerhoff G.)

Аналитическая биология (Analytical biology, Oxford University Press, London, 1950).

Кеннон (Cannon Walter B.)

Мудрость тела (The wisdom of the body, London, 1932).

Левин (Lewin Kurt)

Принципы топологической психологии (Principles of topological psychology, McGraw-Hill Book Co., New York, 1936).

Лэшли (Lashley K. S.)

В книге «Головномозговые механизмы в поведении» (Cerebral mechanisms in behaviour, John Wiley & Sons, New York, 1951).

Мак-Кэй (MacKay D. M.)

Количественные аспекты научной информации [Quantal aspects of scientific information, Philosophical Magazine, **41**, 289—311 (1950)].

Нейман и Моргенштерн (von Neumann J. and Morgenstern O.)

Теория игр и экономическое поведение (Theory of games and economic behaviour, Princeton, 1947).

Павлов И. П.

Лекции о работе больших полушарий головного мозга, 1 изд., М.—Л., 1927. [Эшби ссылается на английский перевод этой книги — Pavlov I. P., Conditioned Reflexes, Oxford University Press, London, 1927, — выполненный бывшим сотрудником И. П. Павлова профессором Кембриджского университета Энрепом (Anrep G. V.); этот перевод несколько расширен по сравнению с русским текстом и снабжен специальным предисловием автора. — *Прим. перев.*]

Риге (Riguet J.)

Основы теории бинарных отношений (Fondements de la théorie des relations binaires, Thèse de Paris, 1951).

— О связи между понятиями многополюсной машины и алгебраической структуры [Sur les rapports entre les concepts de machine de multipole et de structure alrébrique, Comptes rendues de l'Académie des Sciences, **237**, 425—427 (1953)].

(Краткое изложение этой статьи см. в реферативном журнале Математика, 1955, № 5, реф. 2428.)

Тастин (Tustin Alfred)

Механизм экономических систем (The mechanism of economic systems, Heinemann, London, 1953);

Тинберген (Tinbergen N.)

Исследование инстинкта (The study of instinct, Oxford University Press, 1951).

Фишер и Йейтс (Fischer Sir Ronald, and Yates F.)

Статистические таблицы (Statistical tables, Oliver & Boyd, Edinburgh, 1943).

Шеннон (Shannon C. E.)

Теория связи в системах засекречивания [Communication theory of secrecy systems, Bell System Technical Journal, **28**, 656—715 (1949)].

— Синтез двухполюсных контактных схем [The synthesis of two-terminal switching circuits, Bell System. Technical Journal, **28**, 59—98 (1949)].

— Вычислительные машины и автоматы [Computers and automata, Proceedings of the Institute of Radio Engineers, **43**, 1235—1241 (1953)].

Шеннон и Уивер (Shannon C. E. and Weaver W.)

Математическая теория связи (The mathematical theory of communication, University of Illinois Press, Urbana, 1949).

(Книга состоит из двух частей: 1) Shannon, The mathematical theory of communication; 2) Weawer, Recent contributions to the mathematical theory of communication. Русский перевод первой части с пропуском § 3, приложения 7 и с другими сокращениями см. в сборнике переводов «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех» под редакцией Железнова Н. А., М., ИЛ, 1953 г., стр. 7—87. В этом переводе названная работа помещена под заглавием. Шеннон К., Статистическая теория передачи электрических сигналов. — *Прим. перев.*)

Эшби (Ashby W. Ross)

Устройство мозга (Design for a brain, Chapman & Hall, London, 2nd imp., 1954).

— Применение кибернетики к психиатрии [The application of cybernetics to psychiatry, Journal of Mental Sciences, **100**, 114—124 (1954)].

— Воздействие опыта на детерминированную динамическую систему [The effect of experience on a determinate dynamic system, Behavioral Science, **1**, 35—42 (1956)].

ЛИТЕРАТУРА, ДОБАВЛЕННАЯ ПРИ ПЕРЕВОДЕ

«Автоматы», сборник статей под редакцией Шеннона К. Э. и Маккарти Дж. Перевод с английского под редакцией Ляпунова А. А., Издательство иностранной литературы, М., 1956, 403 стр. В сборник входит статья Эшби У. Р. «Схема усилителя мыслительных способностей» (связанная по содержанию с гл. 14 настоящей книги).

Буш Р. и Мостеллер Ф. (Bush Robert R. and Mosteller Frederick), Стохастическая модель обучения (Stochastic Models for Learning, NY, John Wiley & Sons — London, Chapman & Hall, 1955, 365 p.).

Вычислительная лаборатория Гарвардского университета (The Computation Laboratory, Harvard University). «Обучение цифровой вычислительной машины» [перевод из Proc Assoc. Comput. Machinery, 50—55 (1953)]. Успехи математических наук, т. XI, вып. 5 (71), 153—160 (1956)

Доманский Б. И., Введение в автоматику и телемеханику, Госэнергоиздат, М. — Л., 1950.

Добрушин Р. Л., Теория передачи информации, Московский дом научно-технической пропаганды им. Ф. Э. Дзержинского, Конференция по теории информации, М., 1958.

Дынкин Е. Б. и Успенский В. А., Математические беседы, Гостехиздат, М. — Л., 1952.

Китов А. И., Электронные цифровые машины, издательство «Советское радио», М., 1956.

Колмогоров А. Н., Вероятность, Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд., т. 7, 1951, стр. 508—510.

— Кибернетика, Большая Советская Энциклопедия, 2-е изд., т. 51 (1958), стр. 149—151.

— Теория передачи информации, Сессия Академии наук СССР по научным проблемам автоматизации производства, 15—20 октября 1956 г. Пленарные заседания, Изд-во АН СССР, М., 1957, стр. 66—69.

Марков А. А., Распространение закона больших чисел на величины, зависящие друг от друга, Избранные труды. Теория чисел. Теория вероятностей, Изд. АН СССР, М., 1951, стр. 338—362.

Полетаев И. А., Сигнал, издательство «Советское радио», М., 1958.

Трахтенброт Б. А., Алгоритмы и машинное решение задач, Гостехиздат, М., 1957.

Харкевич А. А. Очерки общей теории связи, Гостехиздат, М., 1955.

Эшби (Asby W. Ross), Устройство мозга [Design for a brain, Electronic Engng, 20, 379 (1948)].

Яглом А. М. и Яглом И. М., Вероятность и информация, Гостехиздат, М., 1957.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

2/4: 1. Нет. 2. Нет. 3. A — да, B — да, C — нет, D — да.
4. Оно должно иметь вид $a \to a$. 5. Да; матовая позиция не может иметь образ, ибо правила не разрешают дальнейших ходов; если преобразование мистера C замкнуто, то каждая позиция, к которой приводит его ход, может смениться другой, так что его преобразование не может содержать ходов, ведущих к мату.

2/5: 1. Да. 2. Нет; некоторые операнды, например 40, кончаются на 0 и будут преобразованы в 0, который не входит в множество операндов.

2/6: 1. $n' = n + 10$ $(n = 1, 2, 3)$ 2. a) $n' = 7n$ $(n = 1, 2, 3$ для всех преобразований); b) $n' = n^2$; c) $n' = 1/n$; d) $n' = 11 - n$; e) $n' = 1$; f) $n' = n$.

3. $\downarrow\begin{matrix}5 & 6 & 7\\ 2 & 3 & 4\end{matrix}$; Нет. 4. (I) $\downarrow\begin{matrix}5 & 6 & 7\\ 25 & 30 & 35\end{matrix}$; (II) $\downarrow\begin{matrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{matrix}$.

5. Да. 6. Да.

2/8. 1. Однозначно лишь в одну сторону: и 1, и 8 переходят в 9.

2/9: 1. «Нет выручки». 2. Сухая игра.

2/10: 1. На главной диагонали стоят только +, на остальных местах — нули. 2. a) (II); b) (III); c) (I). 3. a) Да. b) Нет. 4. Распределения одинаковы; одно есть просто отражение другого. 6. 9 [1]). 7. 4.

---

[1]) Вот эти матрицы:

↓	A	B
A	+	+
B	+	+

↓	A	B
A	0	+
B	+	+

↓	A	B
A	+	0
B	+	+

↓	A	B
A	+	+
B	0	+

↓	A	B
A	+	+
B	+	0

↓	A	B
A	0	0
B	+	+

↓	A	B
A	0	+
B	+	0

↓	A	B
A	+	0
B	0	+

↓	A	B
A	+	+
B	0	0

В оригинале в качестве ответа ошибочно указано число 16. (Такое

2/11: **1.** $A^2 \colon \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ a & a & c \end{matrix}$. **2.** Таков, каково и само преобразование. **3.** A. **4.** $n' = n + 2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. **5.** $n' = 49n$ $(n = 1, 2 \ldots)$.

6. $\downarrow \begin{array}{|ccc} \hline + & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & + & + \end{array}$

2/14: **1.** $n'' = 9n$. **2.** $a'' = a + 16$. **3.** $a''' = 343\,a$. **4.** $k'' = 9k = 4$. **5.** $m'' = \log(\log m)$. **6.** $p'' = p^4$. **7.** (I) $n' = 4n + 9$; (II) $n' = n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n$; (III) $n' = 1 + 2\log(1 + 2\log n)$. **8.** $n' = -27n - 7$. **9.** $n' = \dfrac{1+n}{2+n}, \dfrac{2+n}{3+2n}, \dfrac{3+2n}{5+3n}, \dfrac{5+3n}{8+5n}$ и т. д. **10.** Тождественное преобразование. **12.** Пределом будет $\left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$.

2/15: **1.** 2, 3, 1. **2.** $g \colon \downarrow \begin{matrix} 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 8 \end{matrix}$. **3.** $h \colon \downarrow \begin{matrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \gamma & \delta & \beta & \alpha \end{matrix}$. **4.** 17. **5.** 0. **6.** $9n$. **7.** t.

2/16: **1.** $U^2T \colon \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ d & c & b & d \end{matrix}$. **2.** $UTU \colon \downarrow \begin{matrix} a & b & c & d \\ c & d & c & b \end{matrix}$.

3. Они тождественны; эта эквивалентность является главным оправданием того, что преобразования выписываются сверху вниз, а не слева направо (ср. упр. 9/6/8 и 12/8/4).

2/17: **1.** (I) $\begin{tikzcd} & c \arrow[d] & \\ b \arrow[r] & a & d \arrow[l] \end{tikzcd}$; (II) $f \rightleftarrows g \quad p \rightleftarrows q$.

2. В нем нет стрелок, а только изолированные точки. **3** Они состоят только из изолированных точек и (или) простых колец без разветвлений.

4.
$$\begin{tikzcd} & 9 \arrow[r] & 2 & 5 \arrow[d] & 6, \arrow[l] \\ 4 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 1 \arrow[u] & 7 \arrow[l] & 8 \arrow[l] \\ & & 3 \arrow[u] & & \end{tikzcd}$$

число действительно получится, если допускать столбцы, целиком заполненные нулями, т. е. «операнды, не имеющие образов»). — *Прим. ред.*

если используются 4-значные логарифмы. 5. 7, 1, 2, 2. 6. Нет. 7. Да. 9. Нет.

3/1: 1. Возможные ответы: (a) яйцо, сваренное всмятку $\to$ яйцо, сваренное вкрутую; (b) полено $\to$ зола; (c) цилиндр, полный смеси паров бензина и воздуха $\to$ цилиндр, полный пламени; (d) одноклеточное яйцо $\to$ двуклеточное; (e) кучевое облако $\to$ гроза; (f) течка $\to$ беременность; (g) низкие цены (при небольшом запасе товаров) $\to$ высокие цены; (h) кошка видит мышь $\to$ кошка преследует мышь; (i) близкие туманности $\to$ рассеянные туманности.

3/4: 1. $n' = 2n$. 2. 2, 4, 8, 16, 32, $64 \cdot 10^3$. 3. График (II): $1000 \to \to 2000 \to 4000 \to \ \ldots$. 4. $n' = 0{,}8n$. 5. (I) 800, 640, 510, 410, 330×10^6; (II) к нулю. 6. Она придет к состоянию 3, в котором и останется; 3 — единственное состояние, в котором она может остановиться. 7. Она придет к циклу из состояний 2 и 8, между которыми и будет без конца колебаться. 8. Четыре: два с состояниями равновесия и два с циклами. 9. $n' = 0{,}9n + 1\,000\,000$. 10. 20; 19; 18; 1; $17{,}3 \times 10^6$. 11. 10 000 000. 12. Если l — его длина, то *изменение* его длины за единицу времени будет равно $l' - l$; следовательно, $l' - l = 1{,}2$, и преобразование будет иметь вид $l' = l + 1{,}2$. 13. *Увеличение* числа бактерий (но не их новая численность!) равняется $n' - n$; следовательно, $n' = n + 10^{-8}\, n\, (10^8 - n)$, и преобразование имеет вид $n' = n + 10^{-8}\, n (10^8 - n)$. 14. 19, 34, 57, 81, $97 \cdot 10^6$.

3/5: 1.
$$\begin{array}{ccc} (ABC) & (BCA) & (CAB) \\ \multicolumn{3}{c}{\downarrow} \\ (BCA) & (CAB) & (ABC) \end{array}$$
2.
$$\begin{tikzcd} & (ABC) \arrow[dr] & \\ (CAB) \arrow[ur] & & (BCA) \arrow[ll] \end{tikzcd}$$
3. $(1, -1)$, $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$. 4. Цикл из четырех элементов.
5. $(2, 3, 5)$, $(3, 5, 8)$, $(5, 8, 13)$.

3/6: 1. $(\frac{1}{2}, 2)$, $(2, -\frac{1}{2})$; $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(-2, \frac{1}{2})$ $(\frac{1}{2}, 2)$ и т. д.
2. $(1, 2, 0, 2, 2)$. 3. $(2, 1, 0, 2, 2) \rightleftarrows (1, 2, 0, 2, 2)$. 4. Добавятся не связанные друг с другом новые циклы, из двух элементов каждый. 5. $(8, -3, 1)$. 6. $(8, 4)$ преобразуется в $(6, 6)$, и система остановится. 7. Если операнд обозначить через (a, b), то $a' = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$, $b' = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$.
8. $(30, 34) \to (28, 36) \to (24, 40) \to (16, 48) \to (0, 64) \to ?$. Нельзя определить, что произойдет дальше, если не решено, можно ли занимать деньги. 9. $a' = \frac{1}{2}(3a - b)$, $b' = \frac{1}{2}(3b - a)$. 10. Тот, кто начнет с бо́льшим количеством денег. 11. $m' = m - n$, $n' = 2n$. 12. Вектор (m, n). 13. $(150, 10) \to (140, 20) \to \ldots \to \to (0, 160)$, после чего алгебраические изменения более не соответствуют зоологическим. 14. $x = 10$, 0, -5, -5, $-2\frac{1}{2}$, 0; $1\frac{1}{4}$, $1\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$; нет. 15. Он сильно демпфирован. 16. Если

x — заработная плата, а y — индекс цен, то первое утверждение означает, что $x' - x = y - 100$, а второе означает, что $y' = x$; следовательно, преобразование будет иметь вид $x' = x + y - 100$, $y' = x$. **17.** $(110, 110) \to (120, 110) \to (130, 120) \to \ldots \to (1540, 990)$. **18.** Нет, система описывает «порочную спираль». **19.** $(110, 110) \to (110, 100) \to \ldots \to (100\frac{5}{16}, 100\frac{5}{16})$. **20.** Обе кривые сходятся к 100. **21.** Вторая система устойчива; первая обнаруживает самовозрастающую инфляцию. **22.** $(80, 120) \to (100, 80) \to (90, 110) \to \ldots \to \ldots \to (99\frac{3}{8}, 100\frac{5}{8})$. **24.** Да. **25.** 3.

3/7: **1.** $\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{d^2x}{dt^2} - 2x\frac{dx}{dt} + x^2 = 0$. **2.** $dx/dt = y$, $dy/dt = -ax$.

$$3.\ \frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = (1 - x^2)\frac{y}{x} - \frac{2}{x(1 + x^2)}.$$

4/1: **1.** Три. **2.** Да. **3.** Под действием R_1 она пройдет $c \to d \to b$; затем под действием R_2 она пройдет $b \to a \to b$; следовательно, она окажется в b. **4.** (I) R_1 и затем R_2; (II) R_1, R_3, R_2. **5.** Получится преобразование $x' = 4$, $y' = 4 - y$; заметим, что уравнение в первой строке, относящееся к x, стало теперь неверным: фиксация переменной заставляет машину изменить поведение. **6.** В каждом столбце все состояния должны быть одинаковыми.

4/2: **1.** (I) $g' = 2g - 2h$, $h' = 2g - 2h$; (II) $g' = g - h$, $h' = 2g$; (III) $g' = 0$, $h' = 2g + 2h$. **2.** (I) $h' = j$, $j' = e^{-h}$; (II) $h' = \log(2 + \sin h)$, $j' = 1 + \sin j$. **3.** (I) 0; (II) 2; (III) попеременно 1 или 2; (IV) $a = 1$ для 90 шагов, а затем $a = 10$. **5.** $PV = 10$; да, приблизительно. **6.** $n' = n + a^2$. **7.** Да; каждый скачок равен $n' - n$, а это равно $3a$.

4/3: **1.**

$ab = 00$	01	10	11	20	21
$s' = s$	s	0	t	$-s$	$-s + 2t$
$t' = t$	$2t$	$t - 1$	$2t$	$t - 2$	$2t$

2. 3. **3.** $a = 9/8$, $b = 1{,}8$. **4.** $a = 9/10$, $b = -1/10$. **5.** Четыре ($ab = 0$, 1, 2 или 4).

4/4: **1.** Это соответствует тому, что a и b становятся и остаются равными, т. е. тому, что преобразование принимает вид

$$p' = a(p + q), \quad q' = a(p + q).$$

4/5: **1.** График должен состоять из одной-единственной цепи, соединяющей все состояния. **2.** Последовательность (8, 4), (6, 6).

4/7: 1 и 2 (скобки опущены). График имеет вид

$$\begin{tikzcd} ai \arrow[r, shift left] & bk \arrow[l, shift left] & dj \arrow[r] & bj \arrow[r, shift left] & ak \arrow[l, shift left] & bj \arrow[r] & ci \arrow[r, shift left] & dk; \arrow[l, shift left] \\ & & aj \arrow[r] & di \arrow[r, shift left] & ck \arrow[l, shift left] & & & \\ & & & cj \arrow[u] & & & & \end{tikzcd}$$

он содержит четыре бассейна. **3.** $ai \to ck \to di \to bk \to ci \to dk \rightleftarrows bi$. **4.** Да. **5.** n_1n_2. **6.** n^3. **7.** Каждая часть последовательно перейдет в состояние 0. **8.** Изменение ... 0, 0, 1, 2, 0, 0 ... произойдет в каждой части по очереди, напоминая прохождение импульса по нерву.

4/8: **1.**

$$\begin{tikzcd} & ce \arrow[d] & & \\ ae \arrow[r] & df \arrow[r, shift left] & bf \arrow[l, shift left] & \\ af \arrow[r] & cf \arrow[u] & be \arrow[l] & de \arrow[l] \end{tikzcd}$$

3. Сделать в X все значения β одинаковыми.

4/9: **1.** $p, q; r, s, t, u$. **2.** (1, 0, 1, 0, 0).

4/11: **1.** 6 между шестью парами, такими, как AB; 8 в четырех тройках, таких, как ABC (в обоих направлениях); и 6 между всеми четырьмя ($ABCD$; $ABDC$; $ACBD$; $ACDB$; $ADBC$; $ADCB$). **2.** $x' = y + z^2$, $y' = 2z$, $z' = x - z$. **3.** Да; в этом случае преобразование будет иметь вид

$$x' = y + z,\ y' = 2z,\ z' = x - 1.$$

4. Да.

4/12: **1.** (Квадратики опущены для простоты): (I) $y \to x$ (y доминирует над x); (II) $\begin{tikzcd}[column sep=small] & y \arrow[dl] & \\ x \arrow[rr] & & z \arrow[ul] \end{tikzcd}$ (система с обратной связью); (III) $u \rightleftarrows x$ $v \rightleftarrows y$ («целое» фактически состоит из двух несвязанных частей); (IV) $u \to x \to y \to z$ (цепочка действий);

(V) $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & u \\ y \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & x \\ & z \end{tikzcd}$ (y доминирует над остальными тремя);

(VI) $\begin{tikzcd}[row sep=tiny] u \arrow[dr] & \\ x \arrow[r] & z \\ y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$ (три части доминируют над z).

2. Когда значение y равно нулю.

4/13: **1.** z доминирует над x, а y не зависит от обоих.

4/14: **1.** Только (III).

4/15: **1.** Если переменные суть: S = Пение, L = Смех, X = игра на органе, Y = сожжение ладана — и если каждая переменная принимает значения 0 или 1, обозначающие соответственно бездействие или действие, то легко найти машину со входом

	$\downarrow$	(S, L) 00	01	10	11
(X, Y)	00	01	01	10	10
	01	00	00	11	11
	10	11	01	00	10
	11	10	00	01	11

.

Один из путей к (0, 0) таков: прекратите ровно на одну минуту сжигать ладан; затем, не зажигая ладана, играйте на органе; затем перестаньте играть и зажгите ладан; в будущем все время жгите ладан и никогда не играйте на органе. **2.** Да, ибо значения S влияют на переходы L. **3.** Нет. **4.** $X \rightarrow S \rightleftarrows L \leftarrow Y$.

4/19: **1.** Один из возможных способов — бросать кость, чтобы выпадающие числа определяли последовательно образы для S_1, S_2 и т. д. **2.** Один из возможных способов — перенумеровать шесть карт от 1 до 6, перетасовать и расположить их в ряд, а затем в том же порядке вписать состояния в нижнюю строку преобразования. **5.** См. § 4/20.

4/20: **1.** Да, нет, нет.

5/3: **2.** Нет. **3.** Единственное состояние равновесия есть (0, 0). **4.** Все точки на оси y — равновесные. **5.** $j = 0$, $k = -1$. **6.** Да. **7.** Нет. **8.** Каждая стрелка возвращается в то же состояние, из которого вышла, так что представляющая точка неподвижна. **9.** Тождественное преобразование. **10.** Да. **11.** Да.

5/4: **1.** Таково, например, $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e & f & g \\ b & a & d & c & e & f & g \end{matrix}$. **3.** Нет. **4.** Нет. **5.** Нет. **6.** Каждая траектория есть цикл. **7.** Нет.

5/5: **1.** Только $b + c + g$. **2.** Да. **3.** Да. **4.** Да.

5/6: **1.** Да; последовательность $D(c)$, $TD(c)$, $T^2D(c)$, $T^3D(c)$, ... будет иметь вид $d, a, c, c, \ldots$ **2.** Нет; пределом является не e. **3.** Система, хотя и будет выведена из данного множества, всегда вернется в него.

5/7: **1.** Одно из возможных множеств преобразований

$\downarrow$	a	b	c	d
T	a	b	a	b
D	c	c	.	.
E	b	d	.	.

5/9: **1.** $a = (100, 100)$; D превращает его в (110, 110), т. е. $\delta_1 = 10$, $\delta_2 = 10$; T дано; система неустойчива. **2.** a и D таковы, как раньше, но T изменилось, и система стала устойчивой. **3.** Как правило, пределом будет не a, а какое-либо другое состояние; система неустойчива относительно таких D. **4.** Да; отклонения стремятся к нулю, который является состоянием равновесия. **5.** Нет; отклонения увеличиваются, причем это увеличение ограничено лишь посторонними факторами, такими, как форма соединительных звеньев. **6.** Чтобы отклонения уменьшались, а не возрастали. **7.** Самовозрастающими; и это постоянный источник головной боли для организаторов движения. **8.** Каждое отклонение от состояния равновесия увеличивалось бы, пока не вступил бы в действие какой-нибудь другой ограничивающий фактор. **9.** Да; для всех смещений D; так, если D перемещает состояние в (δ_1, δ_2), то последовательные значения x суть $\delta_1, \frac{1}{2}\delta_2, \frac{1}{4}\delta_1, \frac{1}{8}\delta_2, \ldots$, что, очевидно, сходится к 0; то же самое для y.

5/13: 1. Нет, ибо в этом случае y должен будет иметь состояние равновесия 0 при каком-то значении β, т. е. β должна удовлетворять уравнению $0 = 2\beta 0 + 3$, что невозможно.

6/3: 1. См. § 6/5.

6/5: 1. $\begin{tikzcd} g \arrow[dr] & & \\ & j \arrow[r] & f \\ h \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$. **2.** $j \longrightarrow f \longrightarrow h$ (протокол не дает никаких данных о переходах из g при входе β). **3.** Нет, так как переход от C не однозначен. **4.** Да, насколько можно судить по имеющимся данным **5.** $\begin{array}{c|ccccccccc} (x, y) \downarrow & 00 & 01 & 02 & 10 & 11 & 12 & 20 & 21 & 22. \\ (x', y') & 01 & 00 & 11 & 11 & 00 & 21 & 11 & 20 & 11 \end{array}$

6. Для каждого входного значения должны наблюдаться n переходов, что отнимет по крайней мере n шагов: следовательно, для наблюдения всего множества преобразований требуется по крайней мере mn шагов. **7.** Выберите любые два значения для x и α и посмотрите, каким будет значение x'. Так, равенства $\alpha = 1$, $x = 4$, $x' = 4$ покажут, что мы имеем дело с ящиком 1. Еще более простой способ — положить $\alpha = 0$ и посмотреть, будет ли значение x увеличиваться или уменьшаться.

6/7: 1. y доминирует над x.

6/9: 1. $\downarrow \begin{matrix} a & b & c & d & e \\ t & p & r & q & s \end{matrix}$. **2.** Три[1]). **3.** Необходимы две переменные: показание циферблата (v) и скорость изменения этих показаний ($\dot v$). Тогда для верхней системы получим $dv/dt = \dot v$, $d\dot v/dt = k(u - v) - f\dot v$, где k представляет упругость пружины и момент инерции массы, а f — коэффициент трения. Для нижней системы получим $dy/dt = \dot y$, $dy/dt = -R\dot y/L - y/CL + x$.

---

[1]) Вот эти преобразования:

$$\downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ p & r & q \end{matrix}, \quad \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ r & q & p \end{matrix}, \quad \downarrow \begin{matrix} a & b & c \\ q & p & r \end{matrix}$$

(в оригинале в ответе ошибочно написано: «шесть»). — *Прим. ред.*

Чтобы быть изоморфными в строгом смысле, определенном выше, системы должны иметь $f=R/L$ и $k=1/CL$. Если это так, то их изоморфизм может быть показан при помощи взаимного однозначного преобразования

$$\downarrow \begin{matrix} y & \dot{y} & x \\ v & \dot{v} & ku \end{matrix}. \qquad 4. \downarrow \begin{matrix} u & v & w \\ z & x & y \end{matrix}$$

6/10: **1.** Они тождественны: $p \rightleftarrows q \rightarrow r$. **2.** (II) и (IV) могут измениться; (I), (III) и (V) не изменятся. **3.** Они не изменятся.

6/11: **1.** Предположите, что x — цена масла, а y — цена сахара; их *разница* сегодня равна $x-y$; их *разница* завтра будет $(x-y)'$; а это есть то же самое, что завтрашняя цена масла минус завтрашняя цена сахара, т. е. $x'-y'$.

6/12: **1.** Да, если рассматривать взаимно однозначное преобразование просто как предельный случай преобразования, однозначного лишь в одну сторону.

6/13: **1.** Четное + четное = четное, $Ч+Н=Н$, $Н+Ч=Н$, $Н+Н=Ч$. **2.** (Пусть «$x+y$» означает: «слить x и y»). Имеем системы: (I) $a+b$; (II) $c+d$; (III) $a+b$ и $c+d$; (IV) $b+c+d$; (V) $a+b+c+d$; (VI) (для полноты картины) первоначальная система, где ничто не слито. **3.** Можно слить состояния (x, y) и $(-x, y)$, ибо изменение знака их не меняет следующего состояния (x', y'); следовательно, сказать, что настоящее состояние есть $(\pm 4, -2)$, без уточнения знака x, достаточно для того, чтобы показать, что следующее состояние будет единственно и равно $(+2, +14)$.

6/16: **1.** Система неотличима от модели. **2.** Она существует, как и мозг; они изоморфны на низшем уровне. **3.** (I) a, $b+c+d$ изоморфно p, $q+r$; (II) $a+b+c+d$ изоморфно $p+q+r$.

7/6: **1.** $26 \cdot 26 \cdot 26$, т. е. 17576. **2.** 16. **3.** 11. **4.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \ldots$ десять раз, т. е. 1024. **5.** 5^x должно быть не меньше $2 \cdot 10^9$, следовательно, беря логарифмы по любому удобному основанию (например, десятичные), получим

$x \lg 5 \geqslant \lg 2 + 9 \lg 10$, или

$$x \geqslant (\lg 2 + 9 \lg 10)/\lg 5 \geqslant 13,3;$$

это значит, что необходимо по крайней мере 14 таких процедур. **6.** (I) 27; (II) 21. **7.** 27. **8.** $3^3=27$ и $3^4=81$. Значит, чтобы отобрать 1 из 52, нужно четыре указания. **9.** 3, ибо группа отца может быть O, или A, или B[1]).

7/7: **1.** Один бит. **2.** (I) 2,32 бита; (II) 30,9 бита. **3.** 4,7 бита. **4.** $5 \cdot 4{,}7 = 23{,}5$ бита. **5.** (I) 1 бит, (II) 20 битов. **6.** 2^{20}, т. е. 1 048 576. **7.** Замещение каждого вопросительного знака имеет разнообразие $6 \log_2 6$ битов, так что целое имеет разнообразие $6 \log_2 6$ битов, т. е. 15,5 бита. **8.** $n \log_2 n$ битов. **9.** 12 000 битов. **10.** Страница в 5000 слов может нести около 50 000 битов — больше, чем запись. **11.** При прочих равных условиях разнообразия также равны. **12.** Множество «всех возможных

---

[1]) Ср. Hirszfeld L., Les groupes sanguins, Paris, 1938, p. 74. В оригинале в ответе ошибочно написано: «Нулевое многообразие». — *Прим. перев.*

брошюр, напечатанных на английском языке и занимающих при чтении 10 минут». Разнообразие принадлежит не брошюрам, а этому множеству. **13.** Конечно, оно должно только отличаться от других возможностей.

7/12: **1.** Нет, ибо исчерпаны все комбинации прошлых и нынешних семейных положений. **2.** Да; отсутствует 4 возможности.

7/13: **1.** Три, поскольку речь идет об упомянутых количествах. **2.** Да, если стрелки поставлены аккуратно; так, если часовая стрелка стоит точно посредине меж двух цифр, то минутная стрелка обязательно показывает «полчаса». **3.** Одну, ибо информация, даваемая минутной стрелкой, вытекает из информации, которую дает часовая стрелка. **4.** Глаза хамелеона — четыре, глаза человека — немногим больше двух, ибо могут двигаться с некоторой небольшой независимостью. **5.** Две. **6.** Одну, ибо его разнообразие не может превышать разнообразия a; это не зависит от числа составляющих вектора. **7.** До проведения графика переменная y могла для каждого значения x иметь любое из своих значений, но после проведения графика переменная y для каждого x может принимать только одно значение. **8.** Шесть.

7/15: **1.** Он говорит, что числа, выражающие отношения веществ в химических соединениях, образуют небольшое (имеющее, быть может, лишь несколько десятков членов) подмножество множества всех рациональных чисел (количество которых бесконечно). **2.** Из всех геометрически возможных траекторий, из всех тепловых изменений и пр. он допускает лишь немногие.

7/19: **1.** Из возможных переходов, например $a \to a$, $a \to b$, $a \to c$, исключаются все, кроме одного, ибо переход от a должен быть однозначным; аналогично для b и т. д.

7/20: **1.** 8. **2.** 17. **3.** 12. **4.** (I) 1 048 576; (II) 21 892.

7/22: **2.** Разнообразие паразитов: очевидно, что некоторый вид может служить хозяином нескольким видам паразитов. **3.** V однозначно в одну сторону и вызывает снижение разнообразия. **4.** Что ему не хватает способности различения. **5.** (I) 6 состояний; (II) 2 состояния. «Ванна не в порядке». **6.** Вероятность того, что данное состояние S_i будет образом состояния S_j, равна $1/n$. Вероятность того, что S_i не будет образом S_j, равна $1-1/n$. Вероятность того, что S_i не будет образом состояния S_k, также равна $1-1/n$. Следовательно, вероятность того, что S_i не будет образом никакого состояния, равна $(1-1/n)^n$. Это даст нам *долю* операндов, которые исчезнут после преобразования. Если n стремится к бесконечности, то эта доля стремится к $1/e$. Следовательно, остающаяся доля, которой принадлежит разнообразие, стремится к $1-1/e$.

7/24: **1.** 3 состояния = 1,58 бита. **2.** Еще на 1,58 бита. **3.** «a и b» становятся последовательно $5a$, $5a+7$, $10a+14$, $10a+b+14$. Если вычесть 14, то останется $10a+b$. Так, сто сочетаний a и b (если допускается 0 и 0) преобразуются взаимно однозначно после вычитания 14 в сто чисел от 0 до 99. Разнообразие равно 100 состояниям, или 6,64 бита. **4.** Для всех сочетаний двух одноразрядных чисел, которые предлагаются в подобных случаях. **5.** Нулевое. **6.** 2 состояния, 1 бит; либо разные цепи, либо одна и та же цепь в разные моменты времени. **7.** Нет. Они могут вместе проходить один и тот же цикл. Различайте: (I) тождественность состояний, занимаемых разными машинами в один и тот же момент, и (II) тождественность состояний одной машины в разные моменты времени.

8/3: **1.** Не больше, чем за одно снятие.

8/4: **1.** Да; «взять антилогарифм». **2.** Нет; различные значения x могут дать одно и то же значение x'. **3.** Тождественное преобразование. **4.** $n' = n - 7$. **5.** $x' = x - y$, $y' = -x + 2y$. **6.** $3 \log_2 26$ битов, т. е. 14,1 бита. **7.** $26^3 = 17\,576$. **8.** $\log_2 8 + \log_2 7 = 5{,}8$ бита. **9.** (Для английского алфавита) нет: разнообразие будет 5,7 бита, а этого недостаточно ($\log_2 52 < \log_2 56$). **10.** 1 бит; сообщений два: «ухаживает» и «не ухаживает». Сложность молекулы гормона и обряда «ухаживания» здесь не имеет значений.

8/5: **1.** $A\ A\ C\ B\ D\ D\ B\ C\ B\ C\ C\ B$. **2.** $a\ c\ d\ b\ d\ c\ d$. **3.** $b\ d\ c\ d\ b\ a\ d$. **4.** Да. **5.** 10, 8, 7, 10, 11, 9, 8. **6.** 10, 8, 4, 3, −1, −1, 3, 0, 1, 1, −1, ... **7.** $x = 2, 1, 2, -11, 11, -2, 16, \ldots$, а $y = 1, 4, -11, 13, -21, -13, -93, \ldots$. **8.** $x = \exp(-4t - \sin t)$. **9.** $x = \frac{1}{2}(e^{-t} + te^{-t} - \cos t)$. **10.** x преследует a и приближается к нему все ближе и ближе.

8/6: **1.** Нет, в таблице преобразований должно быть 108 строк, так что каждый столбец должен содержать 108 элементов; а их имеется всего 100, так что будут повторения. **2.** (I) 7, (II) 5^{12}. **3.** Присоединению прибора, такого, как спидометр или тахометр, который выдавал бы число, пропорциональное производной по времени. **4.** Нет; ибо если выход постоянно равен нулю (как будет в случае, если он начнет с нуля), то значение a нельзя вывести из переходов x, которые будут $0 \to 0$ для всех a.

8/7: **1.** Он не сохраняет всех различий, поэтому для него принципиально невозможно создать совершенный обратный преобразователь.

2.

(b, B)	$R\ R\ R$
(b, C)	$S\ S\ S$
(b, D)	(не встретится)
(c, A)	$S\ S\ S$
(c, B)	$R\ R\ R$
(c, C)	(не встретится)
(c, D)	$Q\ Q\ Q$
(d, A)	(не встретится)
(d, B)	$Q\ Q\ Q$
(d, C)	$R\ R\ R$
(d, D)	$S\ S\ S$

3. Его диаграмма непосредственных воздействий должна быть $u \to x \to y$, где y выдает значения u на два шага позже. x может иметь вид

$\downarrow$	x_1	x_2	x_3	...
u_1	x_1	x_1	x_1	
u_2	x_2	x_2	x_2	
u_3	x_3	x_3	x_3	
...	и т. д.			

Если теперь y имеет вид

$\downarrow$	U_1	U_2	U_3	...
x_1	U_1	U_1	U_1	
x_2	U_2	U_2	U_2	
x_3	U_3	U_3	U_3	
...	и т. д.			

то y будет выдавать заглавные буквы, соответствующие первоначальным значениям u.

Если рассматривать $(x + y)$ как одну машину с состояниями (x, y), то преобразование будет таким:

$\downarrow$	(x_1, U_1)	(x_1, U_2)	(x_1, U_3)	...	(x_2, U_1)	(x_2, U_2)	(x_2, U_3) ...
u_1	(x_1, U_1)	(x_1, U_1)	x_1U_1	...	x_1U_2	x_1U_2	x_1U_2
u_2	(x_2U_1)	x_2U_1	x_2U_1	...	x_2U_2	x_2U_2	x_2U_2
u_3	(x_3U_1)	x_3U_1	x_3U_1	...	x_3U_2	x_3U_2	x_3U_2
...	и т. д.						

Вообще, u_i переводит (x_j, U_k) в (x_i, U_j), которое переходит на следующем шаге в $(—, U_i)$, повторяя таким образом первоначальное u_i.

8/8: 1. $p' = n$, $m' = c/d$; соедините, положив $d = n$, $c = p$. 2. $p' = n$, $m' = \frac{1}{2}(d - c) + 2$; соедините, положив $d = n$, $c = p$. 3. $p_1' = x$, $p_2' = y$, $m_1' = (c_1 + c_2)/2d_1$, $m_2' = (c_2 - c_1)/2d_2$; соедините, положив $d_1 = x$, $d_2 = y$, $c_1 = p_1$, $c_2 = p_2$. 4. Уравнение не может быть решено отдельно для a и b; *другими словами*, a и b влияют на уравнение только в сочетании $a + b$; *другими словами*, их отдельные воздействия не проявляются раздельно на выходе и поэтому не могут быть прослежены в обратном направлении; все это разные способы выражения одной основной идеи. Заметим, что причина этой невозможности заключается не в отсутствии соответствующих приспособлений, но в том обстоятельстве, что выход не *определяет* входа; необходимая информация попросту отсутствует. **5.** Для обратного преобразователя требуются спидометры, дающие на выходе $\dot{x}_1$ и $\dot{x}_2$. Тогда любая машина, образующая функции

$$a_1 = \frac{\dot{x}_1 x_2 - \dot{x}_2 - x_1}{x_1\left(x_2^2 - 1\right)} \quad \text{и} \quad a_2 = \frac{-\dot{x}_1 + \dot{x}_2 x_2 + x_1 x_2}{x_2^2 - 1},$$

будет выдавать первоначальный вход. Если требуется конкретное преобразование, то [если обозначить функции от $\dot{x}$ и т. д. (см. выше) через A_1 и A_2] преобразование

$$a_1' = k\left(A_1 - a_1\right), \quad a_2' = k\left(A_2 - a_2\right)$$

обеспечит сколь угодно близкое приближение к требуемому поведению; надо только, чтобы k было положительно и достаточно велико (упр. 8/5/10). **6.** —2 не имеет определенного отношения к (7, 3), тогда как 4 имеет, как показало построение таблицы.

8/11: **1.** t имеет 3 состояния; u имеет два. **2.** t имеет 3 состояния; u не может иметь больше 6, а фактически имеет 5. **3.** T имеет 2 состояния, как и U. **4.** 3 состояния: (0, 0, 0, 0), (0. 0, 1, 0) и (0, 1, 0, 1).

8/13: **1.** 1 биту на шаг, ибо r имеет только два состояния. **2.** Число различных состояний, занимаемых последовательно, будет для Q: 9, 4, 3, 3, 3; для R: 1, 2, 2, 2, 2; для S: 1, 1, 2, 3, 5. **3.** В самом деле, скачок от 1 к 4 означает прирост информации, равный 3, тогда как R может обеспечить максимум 2.

8/14: **2.** Число взвешиваний при любом способе не может быть меньше трех, ибо передаваемое разнообразие равно $\log_2 27$ битов, а передатчик может нести только $\log_2 3$ битов за шаг.

8/15: **1.** Четыре; дольше всего идет передача из A.. **2.** Четырех (ответ *должен* быть таким же, как в упр 8/15/1, ибо эти вопросы по существу тождественны). **3.** Три; передача от y самая длинная. **4.** Два шага.

8/17: **1.** A было в (3,2). [Указание: A'' было в (—1, 0), а B'' было в (1, 0).] **2.** Да; выход позволяет вывести последовательность входных векторов, а последовательность их первых составляющих будет α-сообщением. **3.** Нет; движения Y суть просто движения A с половинной амплитудой. **4.** Если буквы a, b и т. д. обозначают соответствующие движения A, B и т. д. вправо и влево от каких-то нулей по общей шкале, то

$$l = \frac{1}{2}(a - b), n = \frac{1}{2}(a + b), y = \frac{1}{2}(l + n), \text{а } z = \frac{1}{2}(-l + n),$$

откуда легко исключить l и n. «Декодирование» соответствует решению этой системы уравнений для a и b как неизвестных через известные y и z.

9/2: **1.** Полученное таким образом преобразование детерминированно; как оно получено — не имеет значения. **2.** Поскольку каждое состояние должно перейти в какое-то состояние, вероятности и, следовательно, числа в каждом столбце должны в сумме давать 1. **3.** Нет. **4.** 2^{10}, т. е. 1024. **5.** От каждой точки отходит более чем одна стрелка.

9/4: **1.** Фактические частоты переходов равны

↓	*A*	*B*
A	6	17
B	17	10

Поскольку вероятности в каждом столбце должны в сумме давать 1, первый столбец надо разделить на 23, а второй — на 27. И оценка вероятностей будет

↓	*A*	*B*
A	0,26	0,63
B	0,74	0,37

4.

↓	*A*	*B*
A	0,2	0,5
B	0,8	0,5

. (Эта система фактически использовалась для порождения траектории в упр. 1.)

9/5: **1.** Попав под камень, оно бы там и осталось. **2.** *B* должно быть бумагой (где муха прилипает), а *D* — печкой (где она никогда не остается). **3.** От протокола к матрице; протокол дает единственную матрицу, но матрица может дать лишь некоторое множество протоколов. Иначе говоря, потерянная матрица может быть восстановлена по протоколу, но потерянный протокол не может быть восстановлен по матрице.

9/6: **1.** (100, 0, 0), (25, 75, 0), (62, 19, 19), (34, 61, 7) и т. д., с точностью до ближайшей единицы. **3.** Грань 3 преимущественно оказывается наверху, грань 4 — внизу; следовательно, грузик спрятан на грани 4. **4.** Рассмотрите 100 молекул, и пусть x из 100 молекул *A* диссоциировали. Игнорируйте молекулы *B*. Каждая *A* имеет два возможных состояния: «диссоциирована» или «нет» — и в каждый промежуток времени имеет следующую вероятность остаться в этом состоянии или измениться:

↓	Диссоциирована	Не диссоциирована
Диссоциирована	0,999	0,01
Не диссоциирована	0,001	0,99

5. Если x и y — числа соответственно диссоциированных и недиссоциированных молекул, то для равновесия необходимы равенства:

$$x = 0{,}999\ x + 0{,}01\ y,$$
$$100 = x + y.$$

Следовательно, $x = 90\frac{10}{11}$. 7. Каждое насекомое может быть в одном из 3 состояний; если имеется n насекомых, то число различных популяций равно

$$\frac{1}{2}(n+2)(n+1).$$

9/7: 1.

После C:

$\downarrow$	C	D
C	0	5
D	11	6

После D:

$\downarrow$	C	D
C	11	7
D	0	5

Таким образом, переходы из C явно зависят от того, что стоит перед C.

9/10: 1. $t_i' = \frac{x}{l} t_i$. 2. Нет. 3. Да[1]).

9/11: 1. Вероятности равны (судя по имеющимся данным) 0,175 и 0,825; следовательно, энтропия равна 0,67 бита. 2. Вероятности равны $\frac{1}{52}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{19}{26}$; следовательно, энтропия равна 0,94 бита. 3. 2,6 бита. 4. 5,2 бита. 5. 2,6 n битов. 6. 0.

9/12: 2. Она всегда будет меньше 1 бита.

9/13: 1. При окончательном равновесии все будут в B и любая последовательность в конце концов будет иметь вид ... $BBBB$... . Здесь нет разнообразия, так что энтропия должна быть равна нулю. 2. Энтропия вычисляется, когда целое находится в окончательном равновесии, а в данном случае окончательное равновесие не допускает предположения, что «система находится в A».

9/16: 1. Да, ибо 62 меньше чем 3^{14}; $3^4 = 81$, так что может случиться, что хватит 4 сахара, правильно подобранных[2]). 2. Все числа в ней одинаковы, как, например, в конце § 9/10.

9/17: 2. Она должна быть по крайней мере 2000 битов в минуту, если допущения правильны. 3. Каждый палец имеет разнообразие в $\log_2 3$ за $\frac{1}{300}$ минуты и $300 \log_2 3$ за 1 минуту, поэтому все 10 пальцев, будучи независимы, имеют $3000 \log_2 3$ битов в минуту; отсюда нижняя граница равна 4800 битам в минуту. 4. 5540 символов в час.

---

[1]) См. подстрочное примечание на стр. 247. — *Прим. ред.*

[2]) Однако может и не найтись таких 4 сахаров среди имеющихся 14. Обозначим значение «кислота» через *к* и значение «ничего» через *н*. Допустим, что среди наших 62 видов имеется 6 видов,

9/18: 1. b может следовать только за a или b, но не за d, поэтому Xb должно быть ab; аналогично Xc должно быть ac; наконец, XX должно быть dX.

9/19: 1. (I) $\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ 4 & 9 & 7 \end{matrix}$; (II) $\downarrow \begin{matrix} A & B & C \\ 2 & 1 & 5 \end{matrix}$.

2. Только если комбинации α и β ограничены некоторыми тремя из четырех возможных.

9/20: 1. Искажение, ибо второе обращение восстановит оригинал без потерь. 2. Искажение, если каждое напряжение возбуждает определенную частоту. 3. Порча, ибо различные напряжения определяют одинаковый (нулевой) выход.

9/21: 1. $H_1 = \log_2 9$. Энтропия H_2 находится из таблицы:

Принимаемый символ	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Вероятность	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{1}{9}$

Таким образом, $H_2 = 2{,}948$ и, следовательно, ненадежность равна 0,222 бита на символ. 2. Ненадежность $= 0$; действительно новые сообщения передаются безошибочно. 4. 0,00299. 5. Таблица событий и вероятностей такова:

Действительная клетка	L	L	M	M
Диагноз	L	M	L	M
Вероятность	0,9405	0,0095	0,00025	0,04975

(Проще всего найти вероятности следующим образом: разбить 20 000 клеток сначала на две группы: в 19 000 и в 1000 клеток; затем разбить клетки каждой группы на неправильно определенные клетки и все остальные и, наконец, разделить все количества на 20 000.) $H_1 = 0{,}365$ бит/клетка; $H_2 = 0{,}324$ бита на клетку. Следовательно, ненадежность равна 0,041 бита на клетку.

10/4: 1. Кошка что-то делает (возможно, играет) с мертвой мышью. 2. Если бы это было возможно, это значило бы, что кошка сделала что-то, в результате чего мертвая мышь ожила! 3. C летально (смертоносно) для M, если ни одно из $C(M_1), \ldots, C(M_k)$ не входит в $M_1, \ldots, M_k$.

соответствующие векторы которых таковы:

н н н н н н н н н н н н н н
к н н н н н н н н н н н н н
н к н н н н н н н н н н н н
н н к н н н н н н н н н н н
н н н к н н н н н н н н н н
н н н н к н н н н н н н н н

Тогда никаких 4 сахаров (из имеющихся 14) не хватит для различения уже этих 6 видов. — *Прим. ред.*

10/5: 1) Температура и влажность; 2) количество кислорода в крови альпиниста и все, что от этого зависит; 3) направление проходящих внутрь световых лучей; 4) освещенность объектов, которые в противном случае были бы невидимы после захода солнца; 5) температура пищи и, следовательно, степень ее зараженности бактериями; 6) освещенность листьев растения; 7) освещенность сетчатки; 8) давление (высокой интенсивности) на подошву; 9) давление при соприкосновении, удерживаемое равным нулю; 10) расстояние между снарядом и целью, которое сохраняется нулевым или маленьким.

11/3: 1. $\downarrow\begin{array}{ccc}1&2&3\\ \gamma&\beta&\alpha\end{array}$. 2. Если дано D, то R должно принимать значение, удовлетворяющее уравнению $37 = R - 2D$; следовательно, R должно принимать значение $37 + 2D$. 3. На главной диагонали (§ 2/10) стоят исходы «занос исправляется», а на остальных местах — «занос увеличивается». 4. Нулевое; они все будут c, независимо от разнообразия выборов D. 5. Да.

11/4: 1. Да.

2. $\downarrow\begin{array}{ccccc}1&2&3&4&5\\ \beta&\beta \text{ или } \delta&\alpha&\alpha&\alpha \text{ или } \delta\end{array}$.

3. R просто всегда будет выбирать γ, независимо от хода D.
4. Да, используя преобразование

↓	Мистер А.	Миссис В.	Мистер С.
	Херес	Джин	Херес

11/11: 1. Да. Разнообразие D равно 10 *бит/сек*, а зрительный нерв может передавать в 200 раз больше. 2. Пропускная способность, которую можно использовать для регулирования, равна 0,63 *бит/сек* для телеграфа и 5,64 *бит/сек* для штурвала. Таким образом, нетрудно видеть, что D выдает обычно не более 6,3 *бит/сек*. 3. Нет, совершенно недостаточна. D дает 10^7 битов каждый день, а разнообразие, передаваемое генералу, достигает самое большее одной семнадцатой этого. 4. Нет, он может обеспечить только $3{,}6 \cdot 10^5$ битов в день.

11/14: 1.

↓	1	2	3
a	β	α	γ
b	α	γ	β
c	γ	β	α

2. D угрожает передавать в E со скоростью 2 *бит/сек*. Чтобы свести это к нулю, канал $D \to R$ должен передавать по край-

ней мере с такой же скоростью. **3.** Канал $C \to E$ должен нести 20 *бит/сек*; следовательно, канал $C \to R$ должен нести по крайней мере столько же. **4.** Канал $R \to T$ должен нести 2 *бит/сек*, чтобы нейтрализовать D (из упр. 2), и 20 *бит/сек* от C; поскольку эти два источника независимы (значения D и C не связаны), пропускная способность канала $R \to T$ должна быть самое меньшее 22 *бит/сек*.

12/8: **1.**

$\downarrow$	L	R
L	0	0,99
R	1	0,01

2. Системы почти изоморфны; однако β иногда будет прямо перескакивать из A в D, а иногда оставаться на один шаг в C. **3.** Последовательные вероятности для a на каждом шаге равны $0, \frac{3}{4}, \frac{7}{16}$ и $\frac{25}{32}$; вероятности b равны дополнениям этих дробей до единицы. **4.** Ответ можно получить, умножая вектор-столбец $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ на произведение матриц pqr; ср. упр. 2/16/3. **5.** Состояния новой системы должны быть парами, такими, например, как (b, e); поэтому она должна иметь 6 состояний. Теперь найдем вероятности перехода. Чему равна, например, вероятность перехода $(b, e) \to (a, f)$? Чтобы это случилось, b должно перейти в a и при этом другая составляющая должна находиться в состоянии e, т. е. в состоянии β. Когда вход первой составляющей равен β, вероятность $b \to a$ равна 0,9. Аналогично при состоянии b (т. е. при δ) вероятность $e \to f$ равна 0,3; следовательно, вероятность всего перехода (для чего должны совершиться оба этих независимых события) равна 0,27. Остальные вероятности находятся совершенно так же, и искомая матрица будет иметь вид (скобки опущены для краткости)

$\downarrow$	ae	be	ce	af	bf	cf
ae	0,06	0,63	0,25	0,14	0,15	0,12
be	0,12	0,07	0,25	—	0,35	0,08
ce	0,02	—	—	0,56	—	0,20
af	0,24	0,27	0,25	0,06	0,15	0,18
bf	0,48	0,03	0,25	—	0,35	0,12
cf	0,08	—	—	0,24	—	0,30

6. Да.

12/10: 1. Возможна, например, такая матрица:

↓	1	2	3	4	5	6	7	8	G
1	—	$\frac{1}{3}$	—	—	—	—	—	—	—
2	1	—	$\frac{1}{2}$	—	—	—	—	—	—
3	—	$\frac{1}{3}$	—	—	—	$\frac{1}{2}$	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	1	—	—
5	—	$\frac{1}{3}$	—	1	—	—	—	—	—
6	—	—	$\frac{1}{2}$	—	—	—	—	—	—
7	—	—	—	—	—	—	—	—	—
8	—	—	—	—	1	—	—	—	—
G	—	—	—	—	—	$\frac{1}{2}$	—	1	1

12/11: 1. Только G. **2.** «Находясь в a или b, она, по-видимому, не знает, где она находится, и блуждает наугад; единственным отличным от a и b отделением, в которое она может пройти из A или B, является отделение c; попав в c, она, по-видимому, узнаёт, где она находится, ибо всегда бежит, не отклоняясь, через d и e в f, где и останавливается, — возможно, ее всегда там кормили».

12/12: 1. (I) Да; (II)

↓	M	D
M	—	$\frac{1}{2}$
D	—	$\frac{1}{2}$

. Из B нет переходов.

2. Да — для *многих* существенных переменных!

12/14: 1. γ должна быть единичной; в β на главной диагонали не должно быть 1.

12/17: 1. (I) $26\frac{1}{2}$; (II) 52. (См. «Устройство мозга» § 23/2; здесь $p=\frac{1}{52}$.)[1]

---

[1] $26\frac{1}{2}=\frac{1+2+3+4+\ldots+52}{52}$; в оригинале стоит 26. — *Прим. ред.*

12/21: **1.** Две; положения бруса G полностью определяются положениями столба P, который имеет одну степень свободы; угол поворота рычага J дает вторую. **2.** Один из способов — поставить V посредине между L и K. **3.** Один из способов — изменить направление движения воздуха, так чтобы он не выходил в V, а входил в него.

13/15: **1.** $3 \log_2 7$, т. е. 8,42 бита. **2.** $3 \log_2 91$, т. е. 19,52 бита. **3.** Минимум 3,3 бита, ибо только 10 комбинаций *различны*. **4.** 1 бит; число состояний и другие подробности не имеют значения. Чтобы понять, что ответ *должен* быть «1 бит», представьте себе, что наши две машины — единственно возможные (как это и дано), а затем представьте себе, что проектировщик должен послать свои указания по телеграфу; ясно, что ему не придется платить много, ибо простого различия в 1 бит достаточно, чтобы адресат получил все необходимые указания. **5.** (I) 49 800 битов; (II) 1,6 бита; никакого соответствия и нельзя ожидать, ибо эти два значения относятся не к одному штампу, а к двум различным множествам возможностей. **6.** $n \log_2 n$ битов. **7.** $in \log_2 n$ битов.

13/17: **1.** Устраняется 19 возможностей. **2.** Устраняется 26 возможностей. **3.** 4,75 бита уменьшились до 3,00 бита, так что было устранено 1,75 бита. **4.** Поскольку a_1 может перейти в любое из $n-1$ состояний, как и a_2, то новое число преобразований равно

$$(n-1)(n-1)\ldots(n-1) \;(n \text{ раз}),$$

т. е. $(n-1)^n$. Логарифмически разнообразие было равно $n \log_2 n$, а теперь оно равно $n \log_2 (n-1)$, так что разнообразие, устраненное ограничением, равно

$$n \log_2 n - n \log_2 (n-1).$$

5. 1,4 бита; точнее, оно равно $\left(1 + \frac{1}{2n} + \ldots\right) \log_2 e$. **6.** Просмотр k-й карты в колоде из n карт дает информацию (или имеет энтропию)

$$-\frac{1}{n-k+1} \log \frac{1}{n-k+1} - \frac{n-k}{n-k+1} \log \frac{n-k}{n-k+1},$$

если карта вытаскивается. Если успех достигнут раньше, энтропия равна 0. Вероятности этих двух событий (и их энтропий) равны $(n-k+1)/n$ и $(k-1)/n$; следовательно, взвешенная средняя энтропия равна

$$-\frac{1}{n}\left(\log \frac{1}{n-k+1} + (n-k) \log \frac{n-k}{n-k+1}\right),$$

или

$$\frac{1}{n}\left[(n-k+1) \log (n-k+1) - (n-k) \log (n-k)\right].$$

7. При каждом просмотре энтропия одинакова: она равна энтропии вероятностей $\frac{1}{n}$ и $\frac{n-1}{n}$; отсюда средняя информация равна

$$\frac{1}{n}\left[n \log n - (n-1) \log (n-1)\right].$$

14/1: 1. Конечно, необходим дополнительный вход с достаточным обилием воды. Выход идет от него через кран, управляемый основным входом. Один из возможных способов — использовать поршень или мехи, с тем чтобы давление воды, проходящей через узкое отверстие в количестве 0,1 или 2 *мл/сек*, ставило кран в нужное положение.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Жирным шрифтом выделены страницы, на которых приводится определение соответствующего термина

ОГЛАВЛЕНИЕ

У. Росс Эшби

ВВЕДЕНИЕ В КИБЕРНЕТИКУ

Редактор *Г. Н. ПОВАРЭВ* Художник *И. И. КАЛЕДИН*

Технический редактор *И. М. ЛАГУТИНА*

Сдано в производство 10/VII 1958 г. Подписано к печати 21/II 1959 г.
Бумага 84×108$^{1}/_{32}$=6,8 бум. л. 22,1 печ. л. Уч.-изд. л. 22. Изд. № 1/3844
Цена 17 р. 40 к. Зак. № 3346

ИЗДАТЕЛЬСТВО ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.
Москва, Ново-Алексеевская, 52.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой УПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

17р. 40к.