

АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР  
ОРДЕНА ЛЕНИНА ИНСТИТУТ КИБЕРНЕТИКИ

А. Г. ИВАХНЕНКО

---

ИНДУКТИВНЫЙ  
МЕТОД  
САМООРГАНИЗАЦИИ  
МОДЕЛЕЙ  
СЛОЖНЫХ  
СИСТЕМ

КИЕВ «НАУКОВА ДУМКА» 1982

**Индуктивный метод самоорганизации моделей сложных систем / Ивахненко А. Г. — Киев: Наук. думка, 1981 — 296 с.**

Математические модели разнообразных сложных систем находятся по экспериментальным данным наблюдений при помощи рационализированного перебора на ЭВМ многих вариантов, по методу группового учета аргументов (МГУА). Принцип самоорганизации моделей, лежащий в основе МГУА, утверждает, что оптимальная модель соответствует минимуму внешнего критерия или целого ансамбля критериев» выбираемых автором модели. Другими основаниями метода являются теорема неполноты А. Геделя и принцип сохранения свободы выбора Д. Габора. Завершает теорию новый принцип многоуровневого моделирования на нескольких языках, отличающихся по уровню детализации. Принцип позволяет решить проблему долгосрочного количественного прогноза.

Рассчитана на инженеров и специалистов различных областей науки и техники, работающих в области математического моделирования.

Ил. 86. Табл. 60. Библиогр.: с. 290—294 (112 назв).

Ответственный редактор

*Г. Ф. Зайцев*

Программы и статьи по МГУА: <http://www.GMDH.net>

E-mail\_автора: [Ivakhnenko@gmdh.net](mailto:Ivakhnenko@gmdh.net)

Редакция физико-математической литературы

И 1502000000-029 133-82.  
М221(04)-82

© Издательство «Наукова думка», 1982

Идея нахождения математического описания (модели) данного сложного объекта или процесса при помощи перебора многих вариантов по некоторому критерию сначала кажется неосуществимой. Необозримое множество моделей в равной степени удовлетворяет небольшому числу данных, представленных в исходной таблице наблюдений (множественность решения).

Теория самоорганизации моделей направлена на рационализацию перебора в такой степени, чтобы он стал однозначным и реально осуществимым на современной ЭВМ. Она устранила много заблуждений, препятствующих успеху перебора. Прежде всего в основу был положен так называемый геделевский подход: только внешние критерии, основанные на новой информации, позволяют найти истинную модель объекта, скрытую в зашумленных данных. Второй основой теории самоорганизации явился принцип неокончательных решений Д. Габора. Согласно этому принципу всякая однорядная процедура может быть заменена многорядной (требующей меньшего времени счета) только при условии сохранения достаточной «свободы выбора» нескольких лучших решений каждого предыдущего ряда. При геделевском подходе и сохранении «свободы выбора» принцип самоорганизации позволяет найти единственную модель оптимальной сложности по минимуму внешнего критерия селекции.

Методы самоорганизации моделей на ЭВМ расширяют возможности решения задач прогнозирования, распознавания образов, идентификации и многокритериального управления. Это достигается в первую очередь целесообразным выбором внешних дополнений — критериев перебора моделей.

Выбор критерия не является критическим: подобно тому как данное изображение можно правильно отнести к тому или иному классу (образу) по многим признакам, истинную модель оптимальной сложности можно распознать по многим критериям почти с равным успехом. Однако в условиях наличия помех «ансамбль» критериев действует более эффективно, чем каждый отдельный критерий, что способствует однозначности выбора. Каждый из критериев обеспечивает определенное, нужное нам свойство модели. Особенно важным является искусство владения критериями минимума смещения и баланса переменных, позволяющими максимально отодвинуть предел предсказуемости процессов по опытным данным. Самоорганизация показала, что применение господствующего сейчас в науке детерминистического подхода, основанного на анализе причинно-следственных связей, следует ограничить областью сравнительно простых задач моделирования. Решение

действительно сложных задач нужно предоставить ЭВМ, снабженной программами рационализированного перебора моделей.

Таким образом, распространенное сейчас мнение о том, что в диалоге человек — машина ведущую роль занимает человек, а машине предоставляется пассивная роль «большого арифмометра», в теории самоорганизации моделей решительно отвергается. Человек (автор модели) указывает только общие критерии выбора и список возможных переменных, взятый с большим запасом. Машина сама выберет наиболее эффективное множество выходных и системных переменных и подберет класс уравнений и адекватную опорную функцию.

В частности, при открытии законов, действующих в объекте, при помощи перебора моделей удастся выяснить, какие переменные должны участвовать в модели (т. е. установить среду моделирования и границы действия моделей), какие переменные следует считать выходными или внутренними (системными) переменными, а какие — эффективными регулирующими воздействиями. Все это машина выясняет сама при помощи сравнения (перебора) вариантов по заданному ансамблю внешних критериев, используя небольшую таблицу опытных данных.

При самоорганизации моделей можно поручить машине как выбор вида опорных функций (линейные или степенные полиномы, гармонические разложения и др.), так и выбор класса уравнений модели (алгебраические, дифференциальные, интегральные или интегро-дифференциальные уравнения). При этом, однако, объем перебора будет слишком велик. Поэтому, основываясь на априорной информации, желательно ограничиться опробыванием только одного или двух классов и видов. В первую очередь используются полиномы в классе разностных аналогов линейных дифференциальных уравнений.

Принятие решения по минимуму критерия означает, что в отличие от других существующих методов моделирования (детерминистический подход изучения причин и следствий, различные виды имитационного моделирования и др.) методы самоорганизации являются объективными: результат моделирования не зависит от априорного представления автора модели об объекте. Они могут выступать в роли арбитра для решения научных споров, коль скоро исходные критерии выбора модели согласованы со всеми участниками дискуссии. Методы самоорганизации следует рассматривать как естественное дополнение к существующим другим методам — именно там, где интуиция человека оказывается недостаточно продуктивной, т. е. в наиболее сложных задачах. Будущее моделирования принадлежит комбинированным методам.

Наиболее драматическим явилось развитие теории самоорганизации в последнее время. Выяснилось, что любые математические модели, использующие какой-либо один математический язык (например, алгебраические или дифференциальные уравнения при одном, заданном, усреднении переменных во времени), пригодны только для краткосрочного прогноза. Для долгосрочных и сверхдолгосрочных детальных прогнозов требуется многоуровневая самоорганизация, при которой для каждого прогноза на более «размытом» языке верхнего уровня (имеющем большое время упреждения) подбираются более детальные прогнозы следующего уровня. В частности,

среднегодовые прогнозы корректируются по вероятностным, а среднесезонные — по годовым, среднемесячные — по среднесезонным и т. п. Только алгоритмы самоорганизации, основанные на рационализированном переборе, позволяют решить задачу согласования указанных прогнозов.

В многомерных задачах количественного прогноза организуется «соревнование» одномерных алгоритмов МГУА, причем победителем обычно оказывается гармонический или эквивалентный ему разностный алгоритм, с симметрией оценок коэффициентов (с. 267). По корреляционным функциям или по критериям устойчивости вероятностных характеристик удастся выбрать ведущую переменную, при ведущем интервале ее усреднения во времени или пространстве. Критерий баланса-прогнозов позволяет подобрать прогнозы ведущей переменной при других усреднениях и найти уравнения для прогноза всех других выходных переменных, в том числе и тех, которые плохо прогнозируются по одномерным алгоритмам.

Принцип многоуровневого моделирования на нескольких языках, отличающихся по уровню детализации прогноза, решает проблему долгосрочного детального прогноза, причем используется весь аппарат теории самоорганизации: геделевский подход, сохранение «свободы выбора» Д. Габора и принцип самоорганизации моделей (поиск минимума критерия). Все эти вопросы подробно освещены в предлагаемой читателям книге.

САМООРГАНИЗАЦИЯ МОДЕЛЕЙ  
ПО ОПЫТНЫМ ДАННЫМ

$N$  — число точек в таблице опытных данных

$$N = N_A + N_B + N_C + N_D;$$

$N_A$  — число точек в обучающей части таблицы;

$N_B$  — число точек в проверочной части таблицы;

$N_C$  — число точек в первой экзаменационной части таблицы;

$N_D$  — число точек во второй экзаменационной части таблицы;

$\Delta^2(N)$  — среднеквадратическая ошибка на всех данных;

$\Delta^2(B)$  — среднеквадратическая ошибка на проверочной части таблицы;

$\Delta^2(C)$  — среднеквадратическая ошибка на первой экзаменационной части таблицы;

$\Delta^2(D)$  — среднеквадратическая ошибка на второй экзаменационной части таблицы;

$I^2(3) = i^2(N)$  — сумма квадратов отклонений кривой пошагового интегрирования от кривой процесса на интервале интерполяции;  $q_1, q_2, \dots, q_i, \dots, q_s$  — выходные величины уравнений модели;  $q_i = f(v_r, u_s, \lambda_j, t)$  или  $\Delta q = f(v_s, u_s, \lambda_j t)$ ;

$v_1, v_2, \dots, v_j, \dots, v_r$  — внутренние переменные системы, в том числе запаздывающие значения  $q_i$ ;

$u_1, u_2, \dots, u_3, \dots, u_m$  — регулирующие воздействия;

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_l$  — внешние возмущающие воздействия;

$x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$  — общие обозначения всех аргументов  $v, u$  и  $\lambda$ ;

$s$  — число выходных величин;  $r$  — число внутренних переменных системы;  $m$  — число регулирующих воздействий;

$l$  — число внешних возмущающих воздействий;  $n$  — общее число аргументов системы (входные величины);

$t$  — время; при дискретном отсчете времени  $t = k\Delta t$ ; где  $k$  — номер текущего интервала наблюдения;  $T$  — номер года, месяца, декады или недели прогноза; при двумерном отсчете времени;

$T_y$  — время упреждения прогноза;

$x, y, z$  — координаты пространства;

$\Delta^2(B) \rightarrow \min$  — критерий регулярности;

$n_{\text{см}}^2 \rightarrow \min$  — критерий минимума смещения;

$b^2 \rightarrow \min$  — критерий баланса переменных;

$$\rho_1 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(B)} \rightarrow \min$$

$$\rho_2 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + b^2} \rightarrow \min$$

$$\rho_3 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + i^2(N)} \rightarrow \min$$

$$\rho_4 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + b^2 + i^2(N)} \rightarrow \min$$

} комбинированные критерии;

$\tau = 0, -1, -2, -3, \dots$  — величина запаздывания измерений аргументов;

$S_1$  — число частных описаний первого ряда селекции  $S_1 = C^2$ ;  $S_h$  — число

частных описаний  $h$ -го ряда селекции  $S_h = C_{F_{h-1}}^2$ ;  $F_h$  — свобода выбора (число

описаний, пропускаемых в следующий ряд) на  $h$ -м ряду селекции;  $r$  — число рядов селекции.

## Метод наименьших квадратов

Двести лет тому назад молодой немецкий математик Карл Фридрих Гаусс в возрасте 21 года решил задачу восстановления параметров эллиптических орбит планет по опытным данным неточных измерений. Эллипс помещался среди точек наблюдения так, чтобы сумма квадратов отклонений данных от него была минимальной. Так был создан метод обработки данных со случайными отклонениями, получивший название метода наименьших квадратов. В дальнейшем было установлено, что в случае нормального распределения отклонений орбита, получаемая по методу наименьших квадратов, является наиболее вероятной.

Линией регрессии называется линия, получаемая по методу наименьших квадратов. Исследованием линий регрессии занимается регрессионный анализ.

## Линия регрессии на плоскости

Покажем метод наименьших квадратов на примере синтеза линии регрессии по ряду заданных на плоскости точек.

**З а д а ч а.** В трехмерном пространстве задан ряд экспериментальных точек:

	$x_1$	$x_2$	$q$
1	$x_{11}$	$x_{21}$	$q_1$
2	$x_{12}$	$x_{22}$	$q_2$
...	...	...	...
$N$	$x_{1N}$	$x_{2N}$	$q_n$

Требуется найти линию регрессии  $q = f(x)$  по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

**Пример 1.** Линейное уравнение регрессии. Выберем уравнение линии регрессии в следующем виде\*:

$$q = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2.$$

Для каждой точки экспериментальных данных можно подсчитать величину квадрата отклонения (ошибки):

$$\delta^2 = (q - q_0)^2 = (a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 - q_0)^2 =$$

\* Линией регрессии принято называть геометрическую фигуру, которая по сути является поверхностью.



$$= q_0^2 + a_0^2 + a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 - 2a_0 q_0 - 2a_1 q_0 x_1 - \\ - 2a_2 q_0 x_2 + 2a_0 a_1 x_1 + 2a_0 a_2 x_2 + 2a_1 a_2 x_1 x_2.$$

Суммируя уравнения такого вида для всех  $N$  экспериментальных точек, получим выражение для средней квадратической ошибки:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^N \delta_i^2 = \bar{q}_0^2 + a_0^2 + a_1^2 + a_1^2 x_1^2 + a_2^2 x_2^2 - 2a_0 \bar{q}_0 - \\ - 2a_1 \bar{q}_0 x_1 - 2a_2 \bar{q}_0 x_2 + 2a_0 a_1 \bar{x}_1 + 2a_1 a_2 \bar{x}_2 + 2a_1 a_2 \bar{x}_1 x_2,$$

где  $\bar{q}_0^2$  — среднее значение квадрата функции  $q_0$ .

Здесь черточки над переменными показывают усреднение по всем точкам интерполяции. Для вычисления минимума среднеквадратической ошибки находим выражения для трех частных производных (по числу определяемых коэффициентов уравнения регрессии) и приравниваем их нулю:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_0} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_2} = 0.$$

Отсюда получим систему так называемых нормальных уравнений Гаусса для уравнения регрессии первого порядка

$$a_0 + a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 = \bar{q}_0, \\ a_0 \bar{x}_1 + a_1 \bar{x}_1^2 + a_2 \bar{x}_1 \bar{x}_2 = \bar{q}_0 \bar{x}_1, \\ a_0 \bar{x}_2 + a_1 \bar{x}_1 \bar{x}_2 + a_2 \bar{x}_2^2 = \bar{q}_0 \bar{x}_2.$$

Решая эти уравнения, находим оценки коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$  и  $a_2$ , наилучшие в смысле минимума суммы квадратических отклонений.

Уравнения первой степени вида (уравнение плоскости)

$$a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 = q,$$

составленные для всех  $N$  точек таблицы экспериментальных данных, образуют так называемую систему условных уравнений Гаусса. Система условных уравнений обычно переопределена, т. е. уравнений в ней значительно больше, чем число определяемых коэффициентов.

Переход от системы условных уравнений к системе нормальных уравнений (в которой уже число уравнений равно числу определяемых коэффициентов) можно выполнить, пользуясь следующими правилами:

1. Для получения первого уравнения системы совместных нормальных уравнений каждое условное уравнение умножается на коэффициент при первом неизвестном и все условные уравнения суммируются.

2. Для получения второго уравнения системы нормальных уравнений каждое условное уравнение умножается на коэффициент при втором члене и все условные уравнения суммируются и т. д.

Применяя эти правила, получаем указанные выше нормальные уравнения Гаусса.

Отметим важное ограничение: при выводе нормальных уравнений принимается, что среднее значение функции  $q_0$  равно

среднему из наблюдаемых во всех точках интерполяции (т. е. что систематическая ошибка измерений равна нулю).

Систематическая ошибка не устраняется. Другими словами, если все точки сдвинуть в каком-то направлении, то и линия регрессии сместится так же и на ту же величину.

**Пример 2. Задача Гаусса.** Выбор вида опорной функции для уравнения регрессии выполняется двумя способами:

а) на основании априорной информации о физических свойствах процесса или б) при помощи последовательного опробывания (перебора) ряда опорных функций по некоторому внешнему критерию, например по величине ошибки, определяемой на отдельной группе точек. (Об этом критерии, называемом критерием регулярности, будет сказано подробнее ниже.)

Исходя из законов Кеплера известно, что планеты вращаются по эллиптическим орбитам. Поэтому в качестве уравнения регрессии Гаусс принял уравнение эллипса

$$a_0 y^2 + a_1 x^2 = 1,$$

где  $a_0 = \frac{1}{a^2}$ ,  $a_1 = \frac{1}{b^2}$ ,  $a$  и  $b$  — полуоси эллипса (рис. 1).

Допустим, имеются следующие неточные данные о координатах центра планеты:

$y$	1,5	2,0	0,0	-2,0	-1,0	0,0	2,0	1,5
$x$	1,0	3,5	3,5	0,0	-2,5	-4,5	-3,5	-2,0

Пользуясь исходными данными для восьми точек, можно составить восемь условных уравнений:

$$a_0 1,5^2 + a_1 1,0^2 = 1, \\ a_0 2,5^2 + a_1 3,5^2 = 1, \\ a_0 0,0^2 + a_1 3,5^2 = 1, \\ a_0 (-2,0)^2 + a_1 0,0^2 = 1, \\ a_0 (-1,0)^2 + a_1 (-2,5)^2 = 1, \\ a_0 (0,0)^2 + a_1 (-4,5)^2 = 1, \\ a_0 (2,0)^2 + a_1 (-3,5)^2 = 1, \\ a_0 (1,5)^2 + a_1 (-2,0)^2 = 1.$$

Система условных уравнений несовместна, так как уравнений больше, чем неизвестных (уравнений — восемь, неизвестных — два).

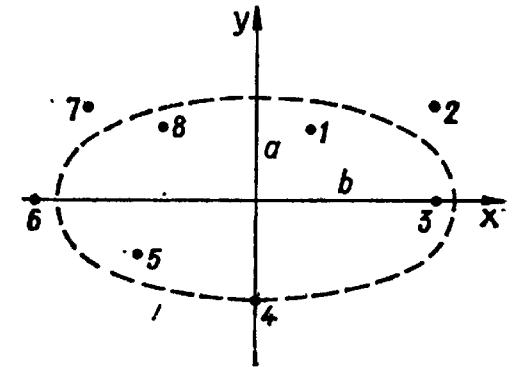


Рис. 1. Пример определения параметров орбиты.

Применяя указанные выше правила, находим совместную систему нормальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 a_0 1,5^2 \cdot 1,5^2 + a_1 1^2 \cdot 1,5^2 &= 1,5^2, & a_0 1,5^2 \cdot 1,0^2 + a_1 1,0^2 \cdot 1,0^2 &= \\
 &= 1,0^2, \\
 a_0 2,0^2 + a_1 3,5^2 \cdot 2,0 &= 2,0^2, & a_0 2,0^2 \cdot 3,5^2 + a_1 3,5^2 \cdot 3,5^2 &= \\
 &= 3,5^2, \\
 a_0 0^2 \cdot 0^2 + a_1 3,5^2 \cdot 0^2 &= 0^2, & a_0 0^2 \cdot 3,5^2 + a_1 3,5^2 \cdot 3,5^2 &= 3,5^2, \\
 a_0 (-2)^2 \cdot (-2)^2 + a_1 0^2 \cdot 0^2 &= \\
 &= (-2)^2, & a_0 (-2)^2 \cdot 0^2 + a_1 0^2 \cdot 0^2 &= 0^2, \\
 a_0 (-1)^2 \cdot (-1)^2 + a_1 (-2,5)^2 \times \\
 &\times 1^2 = 1^2, & a_0 (-1)^2 \cdot (2,5) + a_1 (-2,5)^2 \times \\
 &\times (2,5)^2 = (-2,5)^2, \\
 a_0 0^2 \cdot 0^2 + a_1 (-4,5)^2 \cdot 0^2 &= 0^2, & a_0 0^2 \cdot (-4,5)^2 + a_1 (-4,5)^2 \times \\
 &\times (-4,5)^2 = (-4,5)^2, \\
 a_0 2^2 \cdot 2^2 + a_1 (-3,5)^2 \cdot 2^2 &= 2^2, & a_0 2^2 \cdot (-3,5)^2 + a_1 (-3,5)^2 \times \\
 &\times (-3,5)^2 = (-3,5)^2, \\
 a_0 1,5^2 \cdot 1,5^2 + a_1 (-2)^2 \cdot 1,5^2 \times \\
 &\times 1,5^2. & a_0 1,5^2 \cdot (-2)^2 + a_1 (-2)^2 \times \\
 &\times (-2)^2 = (-2)^2.
 \end{aligned}$$

$$59,1a_0 + 120a_1 = 17,5 \quad (I) \quad | \quad 120a_0 + 915,3a_1 = 68,25 \quad (II)$$

Обратим внимание на равенство коэффициентов при втором члене первого уравнения и первом члене второго уравнения. Его можно использовать для контроля как показатель правильности вычислений. В общем случае матрица системы нормальных уравнений является симметричной относительно главной диагонали.

Решая систему из двух нормальных уравнений (I) и (II), находим уравнение эллипса, относительно которого квадрат отклонений всех точек наименьший:

$$a_0 = 0,19; \quad a_1 = 0,05;$$

полуоси  $a = 2,28; \quad b = 4,45$ .

Чем больше неточность измерений точек (шум), тем больше требуется измерений. Ошибка пропорциональна  $1/N$ .

Как указывалось, систематическая ошибка измерений (смещение) не учитывается. Говоря «минимум среднеквадратической ошибки», мы понимаем минимум всех ее составляющих, кроме постоянного смещения экспериментальных точек.

#### Геометрический смысл метода наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов относится к проекционным методам и имеет наглядную геометрическую интерпретацию в пространстве векторов наблюдений.

$N$	$q_{табл}$	$x_1$	$x_2$
1	1	3	1
2	1	1	3
3	3	2	2

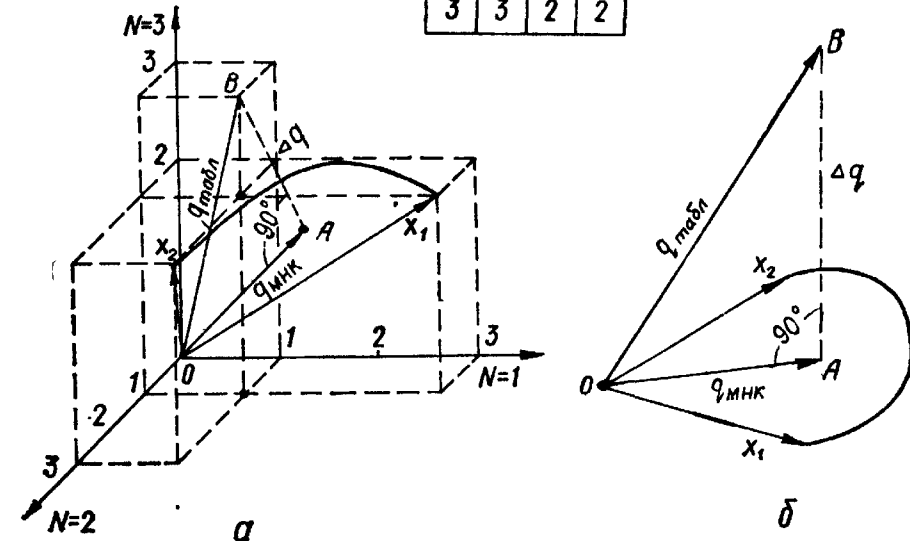


Рис. 2. Геометрическое пояснение метода наименьших квадратов: а — для случая двух измерений № 2; б — для случая трех измерений № 3.

Число измерений пространства, в котором происходит проектирование вектора  $q_{табл}$  на плоскость (или пространство при  $n > 2$ ), проходящую через векторы отдельных измерений, равно числу измерений  $N$ . Результат метода наименьших квадратов равен проекции  $N$ -мерного вектора  $q_{табл}$  на указанную плоскость. Если уравнение регрессии содержит свободный член, то нужно учитывать также вектор  $x_0$ . Проекция  $q_{мнк}$  вектора  $q_{табл}$  отвечает решению системы нормальных уравнений. Ошибка метода наименьших квадратов  $\Delta q$  равна расстоянию между концами векторов  $q_{табл}$  и  $q_{мнк}$ :

$$\Delta q_i = \|q_{табл} - q_{мнк}\|_i.$$

На рис. 2, а и б показан простой пример проектирования вектора  $q_{табл}$  на плоскость векторов  $x_1$  и  $x_2$ , при числе измерений  $N = 3$ . Ошибка метода наименьших квадратов  $\Delta q$  равна длине катета  $AB$  прямоугольного треугольника  $OAB$  (угол  $BAO$  — прямой).

При большем числе измерений проектирование будет показано ниже (рис. 27).

#### Идентификация характеристики экстремального объекта

Пример 3. Исходные данные отвечают уравнению статики некоторого объекта, находящегося под действием двух величин (рис. 3):

$$Q = a_0 + a_1\mu + a_2\lambda + a_3\mu^2 + a_4\lambda^2 + a_5\lambda\mu.$$

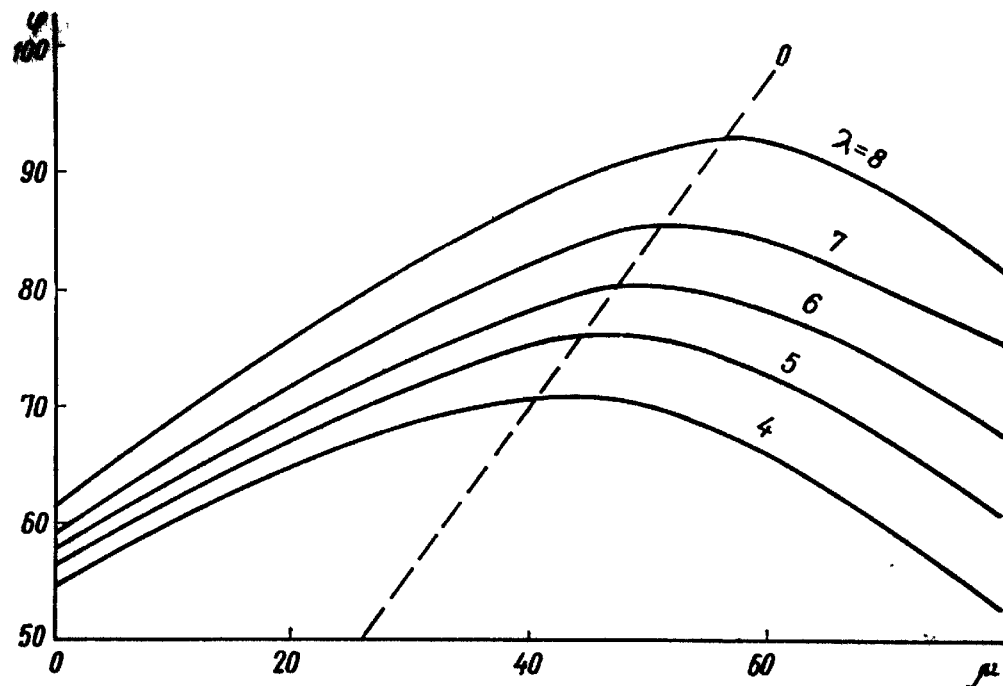


Рис. 3. Статическая характеристика экстремального объекта управления  $\Phi = f(\mu)$ .

Например, для гидротурбины с поворотными лопастями:  $Q$  — КПД;  $\mu$  — угол поворота лопастей;  $\lambda$  — уровень воды; для парового котла:  $Q$  — КПД;  $\mu$  — коэффициент избытка воздуха;  $\lambda$  — нагрузка котла и др.

Допустим, что после нормирования матрица исходных данных принимает вид:

$m$	$x_1 = \frac{\mu}{\lambda}$	$x_2 = \frac{\lambda}{\lambda}$	$x_3 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$	$x_4 = \frac{\lambda^2}{\lambda^2}$	$x_5 = \frac{\mu\lambda}{\lambda^2}$	$q = \frac{Q}{Q}$
1	0,42	1,05	0,17	1,11	0,44	0,95
2	0,63	0,05	0,39	1,11	0,66	1,00
3	0,94	0,88	0,88	0,77	0,82	0,99
4	1,04	0,70	1,08	0,49	0,73	0,91
5	0,83	0,70	0,69	0,49	0,58	0,92
6	1,25	0,88	1,56	0,77	1,10	0,96
7	1,04	0,88	1,08	1,77	0,91	1,00
8	1,46	1,05	2,13	1,11	1,54	1,00
9	1,46	1,40	2,13	1,97	2,03	1,16
10	0,83	1,40	0,69	1,97	1,17	1,15

Уравнение для нормированных переменных принимает вид линейного уравнения

$$q = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 + b_5x_5,$$

где

$$b_0 = \frac{a_0}{Q}; \quad b_1 = \frac{a_1\mu}{Q}; \quad b_2 = \frac{a_2\lambda}{Q}; \quad b_3 = \frac{a_3\mu^2}{Q}; \quad b_4 = \frac{a_4\lambda^2}{Q}; \quad b_5 = \frac{a_5\mu\lambda}{Q}.$$

Метод наименьших квадратов позволяет получить оценки коэффициентов  $b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5$ , а следовательно, и  $a_1, a_2, a_3, a_4$  и  $a_5$ , при которых сред-

неквадратическая ошибка (измеренная на всех точках таблицы) минимальна:

$$\Delta_i^2 = (q_i - \bar{q})^2 = (q_i - b_0 - b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 - b_4x_4 - b_5x_5)^2 \rightarrow \min.$$

Уравнения для ошибки записываем десять раз ( $m = 10$ ) и суммируем и делим на десять. Получим

$$\Delta^2 = \bar{q}_0^2 + b_0^2 + b_1^2\bar{x}_1^2 + b_2^2\bar{x}_2^2 + b_3^2\bar{x}_3^2 + b_4^2\bar{x}_4^2 + b_5^2\bar{x}_5^2 - 2b_0\bar{q}_0 - 2b_1\bar{x}_1\bar{q}_0 - 2b_2\bar{x}_2\bar{q}_0 - 2b_3\bar{x}_3\bar{q}_0 - 2b_4\bar{x}_4\bar{q}_0 - 2b_5\bar{x}_5\bar{q}_0 + 2b_0b_1\bar{x}_1 + 2b_0b_2\bar{x}_2 + 2b_0b_3\bar{x}_3 + 2b_0b_4\bar{x}_4 + 2b_0b_5\bar{x}_5 + 2b_1b_2\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2b_1b_3\bar{x}_1\bar{x}_3 + 2b_1b_4\bar{x}_1\bar{x}_4 + 2b_1b_5\bar{x}_1\bar{x}_5 + 2b_2b_3\bar{x}_2\bar{x}_3 + 2b_2b_4\bar{x}_2\bar{x}_4 + 2b_2b_5\bar{x}_2\bar{x}_5 + 2b_3b_4\bar{x}_3\bar{x}_4 + 2b_3b_5\bar{x}_3\bar{x}_5 + 2b_4b_5\bar{x}_4\bar{x}_5.$$

Взяв частные производные и приравняв их нулю

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial b_0} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_1} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_2} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_3} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_4} = 0, \quad \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_5} = 0,$$

получим систему из шести нормальных уравнений, где неизвестными являются коэффициенты

$$\begin{aligned} b_0 + b_1\bar{x}_1 + b_2\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_3 + b_4\bar{x}_4 + b_5\bar{x}_5 &= \bar{q}_0, \\ b_0\bar{x}_1 + b_1\bar{x}_1^2 + b_2\bar{x}_1\bar{x}_2 + b_3\bar{x}_1\bar{x}_3 + b_4\bar{x}_1\bar{x}_4 + b_5\bar{x}_1\bar{x}_5 &= \bar{x}_1\bar{q}_0, \\ b_0\bar{x}_2 + b_1\bar{x}_1\bar{x}_2 + b_2\bar{x}_2^2 + b_3\bar{x}_2\bar{x}_3 + b_4\bar{x}_2\bar{x}_4 + b_5\bar{x}_2\bar{x}_5 &= \bar{x}_2\bar{q}_0, \\ b_0\bar{x}_3 + b_1\bar{x}_1\bar{x}_3 + b_2\bar{x}_2\bar{x}_3 + b_3\bar{x}_3^2 + b_4\bar{x}_3\bar{x}_4 + b_5\bar{x}_3\bar{x}_5 &= \bar{x}_3\bar{q}_0, \\ b_0\bar{x}_4 + b_1\bar{x}_1\bar{x}_4 + b_2\bar{x}_2\bar{x}_4 + b_3\bar{x}_3\bar{x}_4 + b_4\bar{x}_4^2 + b_5\bar{x}_4\bar{x}_5 &= \bar{x}_4\bar{q}_0, \\ b_0\bar{x}_5 + b_1\bar{x}_1\bar{x}_5 + b_2\bar{x}_2\bar{x}_5 + b_3\bar{x}_3\bar{x}_5 + b_4\bar{x}_4\bar{x}_5 + b_5\bar{x}_5^2 &= \bar{x}_5\bar{q}_0. \end{aligned}$$

Рассчитываем величины, необходимые для данной системы: линейные слагаемые

$$\bar{x}_1 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_1^i = \frac{1}{10} (0,42 + 0,63 + \dots + 0,83) = 0,99;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_2^i = 1,00; \quad \bar{x}_3 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_3^i = 1,08; \quad \bar{x}_4 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_4^i = 1,06;$$

$$\bar{x}_5 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m x_5^i = 1,00; \quad \bar{q}_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m q_0^i = 1,00;$$

квадраты

$$\bar{x}_1^2 = \overline{x_1x_1} = \sum_{i=1}^m (x_1^i)^2 = 1,08;$$

$$\bar{x}_2^2 = 1,06; \quad \bar{x}_3^2 = 1,58; \quad \bar{x}_4^2 = 1,37; \quad \bar{x}_5^2 = 1,21;$$

ковариации

$$\overline{x_1x_2} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_1^i x_2^i) = 1,00; \quad \overline{x_1x_3} = 1,27; \quad \overline{x_1x_4} = 1,07;$$

$$\overline{x_1x_5} = 1,11; \quad \overline{x_2x_3} = 1,11; \quad \overline{x_2x_4} = 1,17; \quad \overline{x_2x_5} = 1,07;$$

$$\overline{x_3x_4} = 1,21; \quad \overline{x_3x_5} = 1,34; \quad \overline{x_4x_5} = 1,21;$$

$$\overline{x_1q_0} = 1,00; \quad \overline{x_2q_0} = 1,02; \quad \overline{x_3q_0} = 1,10; \quad \overline{x_4q_0} = 1,10; \quad \overline{x_5q_0} = 1,03.$$

Подставив полученные значения коэффициентов, находим систему нормальных уравнений в цифровой форме:

$$\begin{aligned} b_0 1,00 + b_1 0,99 + b_2 1,00 + b_3 1,08 + b_4 1,06 + b_5 1,00 &= 1,00, \\ b_0 0,99 + b_1 1,08 + b_2 1,00 + b_3 1,27 + b_4 1,07 + b_5 1,12 &= 1,00, \\ b_0 1,00 + b_1 1,00 + b_2 1,06 + b_3 1,11 + b_4 1,17 + b_5 1,07 &= 1,02, \\ b_0 1,08 + b_1 1,27 + b_2 1,11 + b_3 1,58 + b_4 1,21 + b_5 1,34 &= 1,10, \\ b_0 1,06 + b_1 1,07 + b_2 1,17 + b_3 1,27 + b_4 1,37 + b_5 1,21 &= 1,10, \\ b_0 1,00 + b_1 1,11 + b_2 1,07 + b_3 1,34 + b_4 1,21 + b_5 1,21 &= 1,03. \end{aligned}$$

Решая уравнения по методу Гаусса (методом выбора главного элемента [50]), получим решение

$$\begin{aligned} b_0 &= 0,59, & b_1 &= 0,32, & b_2 &= 0,19, \\ b_3 &= -0,29, & b_4 &= -0,04, & b_5 &= 0,25, \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 \bar{Q} = 0,59 \cdot 76 = 44,52, & a_3 &= b_3 \frac{\bar{Q}}{\mu^2} = -0,01, \\ a_1 &= b_1 \frac{\bar{Q}}{\mu} = 0,33 \frac{76}{48} = 0,52, & a_4 &= b_4 \frac{\bar{Q}}{\lambda^2} = -0,09, \\ a_2 &= b_2 \frac{\bar{Q}}{\lambda} = 2,34, & a_5 &= b_5 \frac{\bar{Q}}{\lambda \mu} = 0,07. \end{aligned}$$

Искомое уравнение статической характеристики экстремального объекта получено в виде  $Q = 44,52 + 0,52\mu + 2,54\lambda - 0,01\mu^2 - 0,09\lambda^2 + 0,07\lambda\mu$ .

Рассмотренная выше схема вычислений характерна для так называемого ручного счета. На ЭВМ требуется уменьшить число операций и объем памяти. Это достигается применением матричной формы записи уравнений.

#### Краткие сведения из алгебры матриц

« $N$  на  $n$  матрицей» называется прямоугольная форма записи коэффициентов системы линейных уравнений, имеющей  $N$  строк и  $n$  столбцов:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n &= q_1, \\ \vdots \\ a_{N1}x_1 + \dots + a_{Nn}x_n &= q_N, \end{aligned}$$

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix}.$$

В матричной записи  $AX = Q$ . Матрицы можно умножить на постоянное число, а одинакового размера суммировать:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1} & b_{N2} & \dots & b_{Nn} \end{vmatrix} &= \\ = \begin{vmatrix} (a_{11} + b_{11}) & (a_{12} + b_{12}) & \dots & (a_{1n} + b_{1n}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (a_{N1} + b_{N1}) & (a_{N2} + b_{N2}) & \dots & (a_{Nn} + b_{Nn}) \end{vmatrix}, \\ C \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \dots & a_{Nn} \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} Ca_{11} & Ca_{12} & \dots & Ca_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Ca_{N1} & Ca_{N2} & \dots & Ca_{Nn} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Произведение двух матриц  $A$  и  $B$  существует, если число столбцов первой равно числу строк второй. В этом случае его можно посчитать по формуле

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Элемент  $c_{ij}$  произведения является произведением  $i$ -й строки матрицы  $A$  на  $j$ -й столбец матрицы  $B$ .

Пример:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} &= \\ = \begin{vmatrix} [1 \cdot 2 + (-1) \cdot 2] & [1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0] & [1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1)] \\ [2 \cdot 2 + 0 \cdot 2] & [2 \cdot 1 + 0 \cdot 0] & [2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1)] \end{vmatrix} &= \\ = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Единичной называется  $n \times n$  матрица  $E$ , состоящая из единиц по главной диагонали и нулей вне ее:

$$E = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

Матрица  $A$ , умноженная на единичную, равна исходной:

$$EA = AE = A.$$

Обратная матрица  $A^{-1}$  определяется равенством

$$A^{-1}A = E \text{ или } AA^{-1} = E.$$

Обратная матрица нужна для записи решения исходной системы линейных уравнений

$$X = A^{-1}Q.$$

Ниже нам еще понадобится определение так называемой транспонированной матрицы.

Транспонированная матрица получается из исходной заменой строк ее столбцами

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix} \rightarrow A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow A^T = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Для вычисления обратных матриц  $A^{-1}$  существуют формулы.

В случае, когда  $n = 2$ , формула для вычисления  $A^{-1}$  имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix},$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc.$$

В случае  $n = 3$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad \det(A) = (aei + bfg + dhc) - (ceg + fha + bdi),$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} ei - fh & ch - ai & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ gh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}.$$

Такого типа формулы могут быть выведены для произвольного  $n$ . Но, к сожалению, область применения этих формул на практике сильно ограничена из-за большого количества арифметических операций, необходимых для вычисления.

При большом числе уравнений, образующих систему, применяется правило Крамера или (что более экономно) метод исключения промежуточных переменных Гаусса.

### Решение системы линейных уравнений с использованием формулы для вычисления обратных матриц

Рассмотрим числовой пример нахождения решения системы линейных уравнений.

Допустим, задана система уравнений

$$2b_1 + 3b_2 + 2b_3 = 14,$$

$$10b_1 + 3b_2 + 4b_3 = 28,$$

$$3b_1 + 6b_2 + 1b_3 = 18,$$

т. е. матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \text{ и } g = \begin{vmatrix} 14 \\ 28 \\ 18 \end{vmatrix}.$$

Находим определитель

$$\Delta = \det(A) = |A| = (2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 10 \cdot 6 \cdot 2) - (2 \cdot 3 \cdot 3 + 4 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 10 \cdot 1) = 66$$

и обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 21 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & 12 \\ 51 & -3 & -24 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{21}{66} & \frac{9}{66} & \frac{6}{66} \\ \frac{2}{66} & -\frac{14}{66} & \frac{12}{66} \\ \frac{51}{66} & -\frac{3}{66} & -\frac{24}{66} \end{vmatrix}.$$

Проверяем (должно быть  $AA^{-1} = E$ )

$$AA^{-1} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{21}{66} & \frac{9}{66} & \frac{6}{66} \\ \frac{2}{66} & -\frac{14}{66} & \frac{12}{66} \\ \frac{51}{66} & -\frac{3}{66} & -\frac{24}{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-42+6+102}{66} & \frac{18-12-6}{66} & \frac{12-36+48}{66} \\ \frac{-210+6+204}{66} & \frac{90-12-12}{66} & \frac{60+36-96}{66} \\ \frac{-63+12+51}{66} & \frac{27-24-3}{66} & \frac{18+72-24}{66} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = E.$$

Решение системы уравнений:

$$X = A^{-1}q = \begin{vmatrix} -\frac{21}{66} \cdot 14 + \frac{9}{66} \cdot 28 + \frac{6}{66} \cdot 18 \\ \frac{2}{66} \cdot 14 + \frac{4}{66} \cdot 28 + \frac{12}{66} \cdot 18 \\ \frac{51}{66} \cdot 14 + \frac{3}{66} \cdot 28 + \frac{24}{66} \cdot 18 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{vmatrix},$$

т. е.  $b_1 = 1$ ;  $b_2 = 2$ ;  $b_3 = 3$ .

Постановка полученных значений в исходную модель показывает, что вычисления выполнены без ошибок.

**Пример 4.** Метод наименьших квадратов при матричной форме записи уравнений. Систему условных уравнений Гаусса для объекта, подлежащего идентификации, можно записать так:

$$Ax = q,$$

где

$$A = \begin{vmatrix} a_{01} & a_{11} & \dots & a_{0N} \\ a_{02} & a_{12} & \dots & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{0N} & a_{1N} & \dots & a_{nN} \end{vmatrix}; x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}, q = \begin{vmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{vmatrix},$$

$A$  —  $N \times n$ -прямоугольная матрица условных уравнений; обычно  $N \gg n$ ,  $n$  — число опытов;  $N$  — число аргументов (факторов);  $x$  — столбец факторов;  $q$  — столбец наблюдений выходной величины.

Для получения системы нормальных уравнений Гаусса надо умножить (слева) матрицу  $A$  на транспонированную

$$A^T A \cdot x = A^T q.$$

Произведение матриц  $A^T A$  есть квадратная  $n \times n$  нормальная матрица. Чем больше норма этой матрицы, тем лучше поставлен активный эксперимент при получении данных. Умножив обе части матричного уравнения на обратную матрицу

$$(A^T A)^{-1} A^T A x = (A^T A)^{-1} A^T q, \text{ где } (A^T A)^{-1} A^T A = E,$$

получим решение системы нормальных уравнений

$$x = (A^T A)^{-1} A^T q.$$

Вернемся к примеру идентификации экстремального объекта, где участвуют шесть факторов  $x_0 = 1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$ . Первый фактор, равный единице, вводится для получения свободного члена  $b_0$ .

Нормальная матрица получается так:

$$\begin{matrix} A^T (6 \times 10) & A (10 \times 6) \\ \begin{vmatrix} 1,00 & 1,00 & \dots & 1,00 \\ 0,42 & 0,63 & \dots & . \\ 0,63 & 0,05 & \dots & . \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0,44 & 0,64 & & 1,17 \end{vmatrix} & \times \begin{vmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,63 & \dots & 0,44 \\ 1,00 & 0,63 & 0,05 & \dots & 0,06 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1,00 & 0,83 & \dots & & 1,17 \end{vmatrix} \end{matrix} =$$

$A^T A (6 \times 6)$

$$= \begin{vmatrix} 1,00 & 0,99 & 1,00 & 1,01 & 1,061 & 0,0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1,00 & 1,11 & 1,07 & 1,34 & 1,21 & 1,21 \end{vmatrix}.$$

Каждый элемент нормальной матрицы  $A^T A$  является произведением  $i$ -й строки матрицы  $A^T$  на  $j$ -й столбец матрицы, например

$$C_{11} = \frac{1}{10} (1,00 + 1,00 + 1,00 + \dots + 1,00) = 1,00 \text{ и т. д.,}$$

где десять — число условных уравнений (число строк матрицы  $A$ ).

Полученную таким образом систему нормальных уравнений

$$(A^T A) x = q$$

можно решать способом исключения промежуточных переменных (принадлежащим также Гауссу) либо по правилу Крамера. Способ Гаусса имеет преимущества в смысле числа вычислительных операций. В соответствии с правилом Крамера по очереди заменяем в информационной матрице столбцы соответствующим вектором-столбцом  $Q$ , находим искомые коэффициенты

$$b_0 (A^T A)^{-1} A^T q = \frac{\begin{vmatrix} 0,95 & 0,99 & 1,00 & 1,08 & 1,06 & 1,00 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1,15 & 1,41 & 4,07 & 1,34 & 1,21 & 1,21 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1,00 & 0,99 & 1,00 & 1,01 & 1,06 & 1,00 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1,00 & 1,11 & 1,07 & 1,34 & 1,21 & 1,21 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1,00 & 0,99 & 1,00 & 1,01 & 1,06 & 1,00 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1,00 & 1,11 & 1,07 & 1,34 & 1,21 & 1,21 \end{vmatrix}} = 0,59,$$

$$b_1 = 0,32, b_2 = 0,19, b_3 = 0,29, b_4 = 0,04, b_5 = 0,25.$$

Конечно, результаты алгебраического и матричного решений совпадают (сравнить примеры 3 и 4).

### Собственные значения матрицы

Пусть дана квадратная  $(n \times n)$ -матрица:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть далее  $E$  — единичная  $(n \times n)$  — матрица, а  $\lambda$  — некоторая переменная, принимающая действительное или комплексное значение. Тогда можем рассмотреть матрицу:

$$\begin{aligned} A - \lambda E &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Определитель этой матрицы будет, очевидно, некоторым многочленом степени  $n$  от переменной  $\lambda$ :

$$P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E).$$

Как известно, многочлен  $n$ -й степени имеет в точности  $n$  корней (не обязательно различных, в общем случае комплексных).

Корни уравнения  $P_n(\lambda) = 0$  называются собственными значениями матрицы  $A$ .

В курсе алгебры доказывается, что если  $A$  симметрическая матрица, т. е.  $a_{ij} = a_{ji}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , то все собственные числа  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  будут действительными и неотрицательными. В настоящей главе мы рассматриваем собственные числа матрицы вида  $A^T A$ . Такая матрица называется нормальной и всегда является симметрической.

### Норма вектора и норма матрицы

Норма есть обобщение понятия абсолютной величины, модуля. Определение нормы вектора дается обычно аксиоматически, т. е. не задается посредством формулы, а описывается перечислением ее свойств:

1) если два вектора  $x$  и  $y$  равны, то и нормы их равны

$$\|x\| = \|y\|;$$

2) для любого вектора  $x$   $\|x\| \geq 0$  и из  $x = 0$  следует  $\|x\| = 0$ ;

3)  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  — неравенство треугольника.

Непосредственно проверяется, что, например, обычная длина вектора, определяемая по формуле

$$\Gamma = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_m^2},$$

где  $\|X\| = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ , является нормой вектора  $X$ . Понятие нормы можно расширить и ввести понятие нормы матрицы, определение которой дано в следующем разделе.

### Определение числа обусловленности матрицы по Дж. Форсайту и К. Молеру

Необусловленность системы линейных уравнений возникает тогда, когда норма обратной матрицы принимает слишком большие значения.

Предложено много показателей обусловленности [74]. По Дж. Форсайту и К. Молеру число обусловленности определяется выражением

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1.$$

Ограничимся рассмотрением случая квадратной невырожденной матрицы  $A$ . Если использовать норму вектора, определяемую

равенством

$$\|x\| = (x^T x)^{\frac{1}{2}},$$

а норму матрицы  $A$  как

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|},$$

то для вычисления числа обусловленности матрицы  $A$  можно использовать формулу [74]

$$\text{cond}(A) = \frac{\mu_1}{\mu_n},$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_n$  — квадратный корень из соответственно наибольшего и наименьшего собственных значений матрицы  $A^T A$ .

Число обусловленности имеет следующую физическую интерпретацию. Пусть имеется система линейных уравнений

$$Ax = b,$$

где  $x$  и  $b$  —  $(n \times 1)$  — векторы, и пусть вектор  $b$  измерен с некоторой погрешностью  $\delta_b$ . Тогда справедливо

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\delta_b\|}{\|b\|},$$

причем для любой невырожденной квадратной матрицы  $A$  найдется такой вектор  $b$ , что в этой оценке будет достигнут знак равенства.

**Пример 5.** Определение числа обусловленности. Пусть задана система уравнений:

$$x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 1,$$

$$0 \cdot x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 = -2,$$

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 2x_3 = -2.$$

Запишем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Произведение матрицы  $A$  на транспонированную  $A^T$  (слева)

$$A^T A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение для нахождения собственных значений матрицы  $A^T A$

$$|A^T A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 (4-\lambda) = 0,$$

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4.$$

Следовательно,  $\mu_1 = 2$ ;  $\mu = 1$ ,  $\text{cond}(A) = \frac{\mu_1}{\mu} = 2$ .

Чем больше  $\text{cond}(A)$ , тем больше трудности решения системы и меньше точность решения, хотя малость определителя  $\det(A)$  не всегда является причиной плохой обусловленности матрицы  $A$ . Обычно рекомендуется использовать только те аргументы, которые приводят к достаточно обусловленным матрицам.

### Регрессионный анализ и планирование эксперимента

Регрессионный анализ включает в себя вопросы применения метода наименьших квадратов для моделирования сравнительно простых объектов (линейные, квадратичные и др.). Практическая часть регрессионного анализа, имеющая цель отыскания экстремумов выходных величин, получила название планирования эксперимента [57]. Основными задачами планирования эксперимента являются: 1) выбор выходных переменных (параметров оптимизации); 2) выбор входных переменных (факторов или аргументов); 3) выбор структуры модели; 4) исследование алгоритмов использования модели для нахождения экстремумов выходных величин (симплекс-метод и др.). В отличие от излагаемого в данной книге метода группового учета аргументов (МГУА) все указанные задачи решаются субъективно с привлечением большого объема априорной информации, требуемой от автора модели.

Для решения используются следующие методы.

1. *Корреляционный анализ.* Коэффициент парной корреляции переменных  $y_1$  и  $y_2$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (y_1 - \bar{y}_1)(y_2 - \bar{y}_2)_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (y_1 - \bar{y}_1)^2 \sum_{i=1}^N (y_2 - \bar{y}_2)^2}},$$

где

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{1i}, \quad \bar{y}_2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_{2i}.$$

Пороговое значение  $r \leq 0,6$ . При двух сильно корреляционных переменных из числа аргументов одна исключается (по указанию автора модели).

2. *Дисперсионный анализ.* Вклад каждой переменной (фактора) оценивается по его влиянию на среднеквадратическую оценку (дисперсию), рассчитанную на всех точках таблицы

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (y - y_m)_i^2}{N - n - 1},$$

где  $(N - n - 1)$  — число степеней свободы;  $N$  — число точек таблицы;  $n$  — число переменных (единица связана с использованием в модели свободного члена  $a_0$ ).

Переменная, исключение которой вызывает достаточно малое изменение дисперсии, считается не существенной и исключается из рассмотрения. Например,  $\Delta\delta^2 \leq 0,1$ .

3. *Факторный анализ.* Вклад каждой переменной оценивается по ее влиянию на среднее значение выходной величины.

Рассмотрим некоторый фактор, участвующий в модели:

$$y = \dots + b_i x_i + \dots$$

При наличии и отсутствии данного фактора определяется значение выходной величины для всех точек таблицы. Далее определяется вызванная исключением данного фактора дисперсия

$$S_{bi}^2 = \frac{1}{N} S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_1^N (y_{\text{«без»}x_i} - y_{\text{«с»}x_i})^2.$$

Ориентировочно (при  $t = 2$ )  $\Delta b_i = \pm 2S_{bi}$ , т. е. оценка коэффициентов  $b_i$  не должна попасть в интервал (лежащий вокруг нуля) от  $-\Delta b_i$  до  $+\Delta b_i$ ; члены с малыми коэффициентами таким образом исключаются.

4. *Анализ показателей существенности переменных.* Значимость факторов определяется чаще всего по критерию существенности Стьюдента  $t$  (об этом будет сказано ниже).

Чтобы как-то обосновать (т. е. сделать объективным) выбор пороговых значений всех критериев, используются таблицы доверительных интервалов: рассмотренные выше показатели существенности факторов и структур должны отличаться от нуля меньше, чем на двухсигмовый интервал. Ясно, что применение доверительных интервалов ничуть не уменьшает субъективного характера решения задач.

5. *Объективный характер моделирования по алгоритмам самоорганизации.* Алгоритмы МГУА, применяемые для системного анализа взаимодействий в системе, позволяют найти систему уравнений оптимальной сложности. Алгоритмы для идентификации дают единственную модель оптимальной сложности. В том и другом случае они позволяют узнать «правду и только правду» об объекте.

Объективность достигается тем, что диалог человека (автора модели) и машины ведется не на языке детальных указаний, как при имитационных методах моделирования, а на языке постановки критериев весьма общего вида: критерия регулярности, точности краткосрочного прогноза, минимума смещения, точности пошагового прогноза, устойчивости вероятностных характеристик, баланса прогнозов и многих других критериев. В спорных случаях стороны договариваются о критериях и больше в процесс моделирования не вмешиваются, что и обеспечивает объективность выбора модели. Ясно, что никаких оценок коэффициентов в выражениях критериев задавать без потери объективности нельзя.



Минимум критерия или свертки критериев определяет структуру системы уравнений или одного уравнения, называемого моделью оптимальной сложности. Глубина минимума характеризует достоверность результата моделирования. Если данные не представительные или слишком зашумлены, минимум получается неглубоким: машина как бы требует новые данные.

В отличие от этого имитационные модели являются субъективными или представленческими, так как являются математической записью представлений автора модели о способе действия объекта. Сколько будет авторов, столько будет и различных имитационных моделей одного и того же объекта.

### Измерение переменных в отклонениях и нормирование

При решении нормальных уравнений на вычислительных машинах рекомендуется применить измерение переменных в отклонениях и нормирование — приведение переменных к безразмерному виду. Четыре способа нормирования, рекомендуемые различными авторами, приведены в табл. 1. Нормирование (особенно до дисперсии ( $\delta$ )) повышает обусловленность матриц нормальных уравнений. Однако при выборе способа нормирования следует требовать, чтобы ренормированное уравнение регрессии совпадало с исходным ненормированным. Примеры, приведенные в таблице, показывают действие этого критерия. Рассмотрение примеров позволяет сделать следующий вывод: если в уравнении регрессии отсутствует свободный член, то все способы измерения переменных в отклонениях приводят к ошибкам. При таких уравнениях можно только изменять масштаб измерения переменных, т. е. пользоваться первыми двумя способами, указанными в табл. 1.

### Идентификация статической характеристики экстремального объекта

Одним из способов повышения обусловленности матрицы являются применение отсчета переменных в отклонениях от среднего и нормирование по среднему значению или по дисперсии.

Пример 6. Идентификация характеристики по методу наименьших квадратов. На рис. 3 представлена статическая характеристика некоторого экстремального объекта, где  $\Phi$  — показатель экстремума (выходная величина);  $M$  — регулирующее воздействие;  $L$  — возмущающее воздействие.

Исходные данные представлены в табл. 2. Требуется найти аналитическое уравнение статической характеристики. Покажем решение этой задачи при модели второго, а затем первого порядков.

От абсолютных величин (табл. 2) переходим к относительному отсчету в отклонениях (табл. 3). На основании табл. 3 составим десять условных уравнений вида

$$a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = y.$$

Таблица 1. Проверка допустимости различных способов нормирования переменных для двух видов уравнений регрессии

Способ нормирования	Исходные данные					Нормированное уравнение регрессии	Ренормированное уравнение регрессии (должно совпадать с нормированным по способу $y = \Phi$ )	Оценка допустимости нормирования
	1	2	3	4	5			
$\Phi = \Phi$	3,3	4,8	1,2	0	-1,1	$\Phi = 4,22 - 1,06$	$\Phi = 4,22 - 1,06$	Допустимо
$\Phi = \frac{\Phi}{\Phi_{\max}}$	1	0,54545	0,36363	0	0,33333	$\Phi = 0,9090$ $\Phi = 1,2788 - 0,32121$	$\Phi = 4,22 - 1,06$	Допустимо
$\Phi_{\max} = 3,3$						$\Phi = 0,02754$	$\Phi = 0,09088$	Допустимо
$\Phi = \frac{\Phi - \Phi_{\min}}{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}$	1	0,65909	0,52272	0,25	0	$\Phi = 1,2091 - 0,24091$	$\Phi = 4,22 - 1,06$	Допустимо
$\Phi_{\min} = -1,1$						$\Phi = 0,08824$	$\Phi = -1,1 + 0,39089$	Недопустимо
$\Phi = \frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\bar{\Phi}}$	2,17307	0,73076	0,15334	-1	-2,06764	$\Phi = 3,0577 - 1,0192$	$\Phi = 4,22 - 1,06$	Допустимо
$\bar{\Phi} = 1,04$						$\Phi = 0,18531$	$\Phi = 1,04 + 0,19272$	Недопустимо
$\Phi = \frac{\Phi - \bar{\Phi}}{\sigma}$	1,49856	0,50394	0,10609	-0,68980	-1,41899	$\Phi = 2,1086 - 0,70287$	$\Phi = 4,22 - 1,06$	Допустимо
где $\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum (\Phi - \bar{\Phi})^2}$						$\Phi = 0,12779$	$\Phi = 1,04 + 0,19272$	Недопустимо

Таблица 2. Исходные данные

Номер точки	$x_1 = M$	$x_2 = L$	$x_3 = M^2$	$x_4 = L^2$	$x_5 = ML$	$y = \Phi$
1	10	2	97,022	4	19,7	55,3
2	20	6	401,2	36	120,18	64,0
3	30	6	906,61	36	180,66	64,85
4	40	8	1599,2	64	319,92	66,99
5	50	4	2502	16	200,08	56,00
6	60	5	3596,4	25	299,85	52,9
7	70	6	4918,2	36	420,78	48,00
8	80	6	6433,6	36	481,26	38,7
9	90	7	8080,2	49	629,23	29,87
10	100	8	10 044	64	801,76	18,6
Сред- ние зна- чения	$\bar{x}_1 = 55,000$	$\bar{x}_2 = 5,8$	$\bar{x}_3 = 3857,7$	$\bar{x}_4 = 36,6$	$\bar{x}_5 = 347,31$	$\bar{y} = 49,491$

Получим

$$1) a_0 + a_1(-0,818) + a_2(-0,655) + a_3(-0,975) + \\ + a_4(-0,891) + a_5(-0,943) = 0,111,$$

$$10) a_0 + a_1(0,818) + a_2(0,379) + a_3(1,604) + a_4(0,749) + a_5(1,308) = -0,624.$$

По указанным выше правилам систему из десяти условных уравнений преобразуем в систему из шести переменных уравнений Гаусса, решая которую совместно, получим

$$a_0 = 0,63 \cdot 10^{-3}, \quad a_1 = 0,58, \quad a_2 = 0,17, \quad a_3 = 0,73, \quad a_4 = 0,02, \\ a_5 = -1,40 \cdot 10^{-7}.$$

Используя выражения для подсчета средних значений (указанные в табл. 3), окончательно находим

$$\Phi^* = Y^* = 47,5 + 0,5M + 1,5L - 0,01M^2 + 0,03L^2.$$

Таблица 3. Исходные данные при относительном отсчете переменных в отклонениях от среднего

$x_1 = \frac{x_1 - \bar{x}_1}{\bar{x}_1}$	$x_2 = \frac{x_2 - \bar{x}_2}{\bar{x}_2}$	$x_3 = \frac{x_3 - \bar{x}_3}{\bar{x}_3}$	$x_4 = \frac{x_4 - \bar{x}_4}{\bar{x}_4}$	$x_5 = \frac{x_5 - \bar{x}_5}{\bar{x}_5}$	$y = \frac{y - \bar{y}}{\bar{y}}$
-0,81818	-0,65517	-0,97485	-0,89071	-0,94327	0,111313
-0,63636	0,034482	-0,89600	-0,01639	-0,65396	0,29316
-0,45454	0,034482	-0,76498	-0,01639	-0,47983	0,31033
-0,090909	-0,31034	-0,35142	-0,56284	-0,42391	0,311518
-0,090909	-0,137931	-0,067734	-0,31693	-0,13665	0,068881
0,27272	0,034482	0,27490	-0,01639	0,21154	-0,030126
0,45454	0,034482	0,66772	-0,01639	0,38567	-0,21803
0,63636	0,20689	1,09456	0,33879	0,81172	-0,39645
0,81818	0,37931	1,60380	0,74863	1,30848	-0,62417

Для получения модели первого порядка вида

$$\Phi^* = Y^* = a_0 + a_1 \cdot M + a_2 L + a_3 ML$$

воспользуемся данными табл. 3.

Составим систему условных уравнений:

$$1) a_0 + a_1(-0,818) + a_2(-0,655) + a_3(-0,943) = 0,111,$$

$$2) a_0 + a_1(-0,636) + a_2(0,0345) + a_3(-0,654) = 0,293,$$

$$10) a_0 + a_1(0,818) + a_2(0,379) + a_3(1,308) = -0,624.$$

Преобразуем эту систему в систему нормальных уравнений Гаусса, решая которую, определим

$$a_0 = 6,273 \cdot 10^{-7}, \quad a_1 = 0,32, \quad a_2 = 0,75, \quad a_3 = -0,892.$$

Используя выражение для подсчета средних значений (указанные в табл. 3), находим

$$\Phi^* = Y^* = 40,8 + 0,3M + 64L - 0,13ML.$$

Как указывалось выше, статической характеристикой объекта называется алгебраическое уравнение, связывающее установившиеся значения его выходной величины, ( $\Phi$ ) с установившимися значениями регулирующих ( $M$ ) и возмущающих ( $L$ ) воздействий. Эта характеристика в ряде объектов имеет максимум или минимум (т. е. экстремум). Задача управления состоит в том, чтобы удерживать состояние объекта в точке, лежащей вблизи экстремума.

#### Малая помехоустойчивость метода наименьших квадратов при решении задач идентификации

Метод наименьших квадратов, основанный на «внутреннем» критерии (среднеквадратичная ошибка на всех точках), не пригоден для нахождения модели оптимальной сложности из-за слабой помехоустойчивости внутренних критериев, к которым он относится. Чтобы показать это, сделаем следующий опыт: пользуясь уравнением третьей степени

$$y = 1 + x + x^2 + x^3,$$

заполним таблицу исходных данных  $y = f(x)$ .

Теперь «забудем» исходный полином и попробуем найти его при помощи метода наименьших квадратов. Для этого последовательно опробуем полиномы при нарастающей сложности:

$$y = a_0 + a_1 x,$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2,$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3,$$

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4,$$

.....

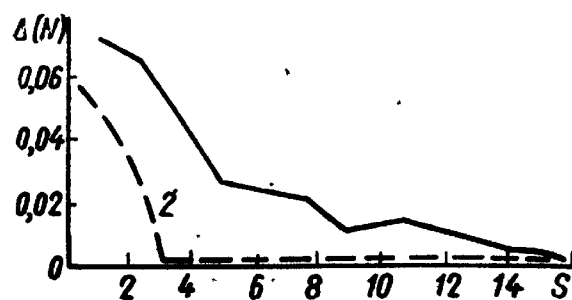


Рис. 4. Изменение квадратичной ошибки при постепенном увеличении сложности модели (числа и степени членов полинома): 1 — при наличии помех; 2 — без помех.

показанная сплошной линией (рис. 4). Кривая подтверждает правило «чем сложнее модель, тем она точнее».

При наличии даже очень малых неточностей измерений (помех) с помощью критерия  $\Delta^2(N)$  нельзя отличить слишком сложные (переусложненные) модели от модели оптимальной сложности, отвечающей действительному процессу. Задачу открытия единственной модели оптимальной сложности решают методы самоорганизации моделей, основанные на помехоустойчивых, «внешних» критериях. Как увидим ниже, для экстраполяции (прогнозирования) метод наименьших квадратов тоже не пригоден.

Это не исключает эффективности метода наименьших квадратов при решении задачи приближенной аппроксимации функций внутри области интерполяции, где достаточно густо заданы опытные точки (см. пример 1). Собственно говоря, метод и был задуман Гауссом для решения задачи интерполяции.

### Теория множественности моделей

Теория множественности моделей утверждает, что по экспериментальным данным принципиально нельзя найти единственную модель. Например, в качестве полинома регрессии можно взять полином любого вида и любой степени, и для каждого из них регрессионный анализ укажет значения коэффициентов. В любом достаточно сложном уравнении подбираются оценки коэффициентов так, чтобы ошибка на интервале наблюдения (интерполяции) была мала или даже равна нулю. Например, если задано пять экспериментальных точек, то уравнение, имеющее пять коэффициентов (или параметров), дает кривую, точно проходящую через все заданные точки. В этом и состоит теория множественности моделей. Отсюда следует, что для каждого объекта, рассматриваемого как некоторый «черный ящик», можно составить не одну единственную, а бесконечное множество моделей, имеющих одинаковые или почти одинаковые внешние проявления. Так, ясно, что не раскрыв электрический выключатель, мы ника-

ким способом не можем установить, сколько разрывов электрической цепи он выполняет: один, два или три.

По этому поводу У. Р. Эшби пишет: «Время простых моделей прошло... С тех пор, как было доказано (Шенноном в 1938 г. для релейных сетей и Мак-Каллоком и Питтсом в 1943 г. для сетей из простых нейроноподобных элементов), что любое поведение машины, поддающейся описанию, может быть реализовано не одной машиной, а бесконечным рядом их, разработка новой модели показывает только, что ее автор не усвоил значения работ Шеннона, Мак-Каллока и Питтса» [89, 90].

Во многих научных работах еще до сих пор авторы указывают, что их теория или формула дала кривую, которая весьма близко прошла через экспериментальные точки. Такого рода «доказательства» правильности теорий нельзя принимать серьезно.

Решение вопроса о выборе единственного уравнения регрессии оптимальной сложности дает принцип внешнего дополнения.

Только внешнее дополнение может служить арбитром при сравнении противоречащих теорий. Ошибка, измеренная на всех экспериментальных точках, не является внешним дополнением.

### Принцип внешнего дополнения («геделевский подход»)

Тут мы подошли к выяснению важного понятия теории самоорганизации, называемого внешним дополнением.

Внешнее дополнение — это требование, предъявляемое одной частью неоднородной системы к другой ее части. Если вторая часть обладает достаточной изменчивостью, то она преобразуется согласно этому требованию, в чем и состоит процесс ее самоорганизации.

Связь неоднородных частей системы часто бывает детектирующей, т. е. направленной в одну сторону. Так, Солнце определяет собой жизнь планет, в то же время влияние планет на процессы на Солнце мало и т. п.

Понятие внешнего дополнения получило свое развитие в математической логике в связи с появлением теоремы неполноты Геделя. Согласно этой теореме оказывается, что никакая система аксиом не может быть логически замкнутой: всегда можно найти такую теорему, для доказательства которой потребуется внешнее дополнение — расширение исходной системы аксиом [55].

В системах автоматического регулирования внешним дополнением служит уставка — требуемое значение регулируемой величины. Система регулирования сохраняет постоянство всех переменных контура обратной связи, кроме уставки. Чтобы получить постоянство уставки, требуется добавочный контур стабилизации, в котором также необходимо новое внешнее пополнение — новая уставка и т. д. Так называемые иерархические (много-

уровневые) системы стабилизации используют ряд уставок — внешних дополнений.

Прошло более 50 лет со времени появления теоремы неполноты Геделя, совершившей переворот в области математической логики. Однако революция, вызванная теоремой, еще до сих пор не привела к перестройке математического моделирования. Согласно теореме критерии выбора моделей следует разделить на внутренние и внешние.

Критерий называется внутренним, если его определение основано на использовании той же информации, тех же данных, что и для получения самой модели.

Критерий называется внешним, если его определение основано на новой информации, «свежих» точках, не использованных при синтезе модели. Структура оптимальной сложности соответствует минимуму внешнего критерия.

Модель называется *недоусложненной*, если сложность ее структуры (оцениваемая, например, по числу членов и степени уравнения регрессии) меньше оптимальной. Модель называется *переусложненной*, если сложность ее структуры больше оптимальной.

Примерами внутренних критериев могут служить величины, определяемые по методу наибольшего правдоподобия или методу наименьших квадратов, в случае, если отсутствует разделение точек на так называемые обучающую и проверочную последовательности, с целью получения внешних критериев.

При пользовании внутренними критериями исследователь попадает в положение *«чем сложнее модель, тем она точнее»*, что не соответствует истине. Поэтому для выбора модели следует применять только внешние критерии.

Внешний критерий всегда приводит к единственной модели оптимальной сложности. Переусложнение модели так же вредно, как и ее недоусложнение.

К сожалению, современный системный анализ, вся теория идентификации объектов управления и регрессионный анализ построены на использовании внутренних критериев, т. е. не учитывают указаний теоремы Геделя либо применяют нецелесообразно случайно выбранные внешние критерии. Максимум правдоподобия и среднеквадратическая ошибка, подсчитанная на всех экспериментальных точках, являются внутренними критериями. Согласно идеям Геделя, синтез моделей должен быть основан на применении внешних критериев, на что в математическом моделировании до сих пор не обращали внимания.

При постепенном усложнении модели внешний критерий проходит через минимум, что дает возможность найти единственную для данного критерия оптимальную модель. Глубина минимума служит мерой достоверности найденной модели.

В алгоритмах самоорганизации моделей применяется разделение таблицы исходных данных на две части, называемые обучающей и проверочной последовательностью, причем среднеквадра-

тическая ошибка  $\Delta^2(B)$ , определяемая на проверочной последовательности («критерий регулярности»), является критерием для выбора структуры модели, синтезируемой по данным обучающей последовательности. Так создается первое внешнее дополнение.

Если ставится задача оптимизации разделения данных на обучающую и проверочную части, то требуется еще одно (второе) внешнее дополнение. Таблицу данных приходится делить на три части: обучающую, проверочную и экзаменационную. Ошибка  $\Delta^2(C)$ , определяемая на экзаменационных данных, служит вторым внешним дополнением.

Чтобы оптимизировать разделение данных на три последовательности, требуется еще одно (третье) внешнее дополнение  $\Delta^2(D)$  и т. д. в точном соблюдении основной идеи теоремы Геделя.

#### *Замкнутые логические системы негеделевского типа*

Утверждение о том, что в условиях наличия хотя бы небольшого шума критерии селекции, основанные на внутренней информации, при увеличении сложности моделей не проходят через минимум (или максимум), строго говоря, относится только к алгебраическим и гармоническим моделям, в которых выполняются все ограничения области применения теоремы Геделя.

Что касается разностных моделей, где результат действия модели находится при помощи пошагового интегрирования ее уравнения, то среди них оказываются неудовлетворительными как слишком простые, так и переусложненные (обычно плохо сходящиеся, неустойчивые) модели, т. е. имеется явно выраженный минимум. Это можно объяснить тем, что благодаря операции интегрирования реализуется логическая система негеделевского типа, к которой теорема Геделя просто не относится. Критерий сходимости пошагового прогноза  $i^2(N) \rightarrow \min$  не требует разделения таблицы данных на части. Для определения его величины можно использовать те же точки, что и для получения оценок коэффициентов.

Теорема неполноты Геделя доказывается для логических систем определенного вида, т. е. вовсе не для всех систем. Существуют замкнутые автономные логические структуры, к которым она не имеет отношения. Поясним это.

Примером замкнутой структуры геделевского типа может быть автоматический регулятор, в котором имеется внешний задатчик значения регулируемой величины. Кольцо обратной связи регулятора стабилизирует все переменные, кроме колебаний самого задатчика. Чтобы стабилизировать задание, нужно добавить еще одно кольцо обратной связи, где понадобится еще один внешний задатчик и т. д. в полном соответствии с теоремой. Автономная система совместных уравнений, в которой число знаков равенства

равно числу переменных, например

$$x_1 = f_1(x_3), \quad x_2 = f_2(x_1), \quad x_3 = f_3(x_2),$$

является непротиворечивой, т. е. негеделевской. В ней каждое из уравнений может быть получено из двух других уравнений при помощи обращения функций.

Неавтономная система совместных уравнений, например

$$x_1 = f_1(x_3, \varphi), \quad x_2 = f_2(x_1), \quad x_3 = f_3(x_2),$$

является геделевской, противоречивой, потому что ни одно из уравнений нельзя получить из остальных двух уравнений.

Примером логической структуры, к которой теорема Геделя не относится, могут служить так называемые автоматические модераторы, в которых нет внешнего опорного задания. В них для стабилизации состояния системы используются нелинейные характеристики ее собственных элементов. Примером модератора может служить, например, известный гомеостат Эшби, не требующий для своего действия опоры во внешней среде.

Другим примером могут быть нелинейные системы так называемого функционального управления, описываемые, например, уравнениями статики вида

$$x_1^2 + x_3^2 = 0, \quad x_2 = \alpha_1 x_1, \quad x_3 = \alpha_2 x_2.$$

Для сравнения приведем обычную систему геделевского типа, решающую ту же задачу стабилизации выходной величины  $x_3$ :

$$x_1 = \varphi - x_3, \quad x_2 = \alpha_1 x_1, \quad x_3 = \alpha_2 x_2.$$

Здесь участвует внешнее дополнение — задание  $\varphi$ , которое также в свою очередь нужно стабилизировать

Области действия теоремы Геделя, по-видимому, не подходят системы стабилизации величины  $x_3$ , действующие по интегралу отклонения, например система

$$x_1 = \int_0^1 x_3 dt, \quad x_2 = \alpha_1 x_1, \quad x_3 = \alpha_2 x_2.$$

Интегральные системы, реализующие определенную логическую последовательность действия, не требуют опоры на внешнюю среду, т. е. «внешнего дополнения».

#### *Основные недостатки современного математического моделирования*

Ограничимся рассмотрением задачи самоорганизации математических моделей по небольшому набору (таблице) исходных эмпирических данных точек (15—20 точек в таблице). Ясно, что основным недостатком всех известных методов математического моделирования, решающих эту задачу, является то, что можно назвать «нецелесообразным выбором внешнего дополнения». В соответ-

ствии с указанной выше теоремой неполноты Геделя принципиально нельзя найти единственную модель некоторого объекта, синтезируемую по эмпирическим данным, не привлекая для этого некоторого «внешнего дополнения». Определение этого понятия дано в известной книге Стаффорда Бира [4].

Методы регуляризации решений некорректных задач А. Н. Тихонова, по сути, также основаны на теореме Геделя [55, 70]. Таким образом, «внешнее дополнение» и «регуляризация» являются синонимами и выражают одно и то же понятие. Там, где нет внешнего дополнения, господствует теория множественности моделей (Шеннон, Мак-Каллок и Питтс, Эшби и др.). Примером может быть регрессионный анализ. Среднеквадратичная ошибка, определяемая на всех экспериментальных точках, монотонно снижается при постепенном повышении сложности модели, и как только число коэффициентов уравнения модели становится равным числу экспериментальных точек, ошибка падает до нуля. Точной моделью является каждое выражение, имеющее  $n$  независимых коэффициентов. Это, собственно, и породило указанную теорию множественности моделей, утверждающую, что по конечному числу экспериментальных данных принципиально нельзя найти единственную модель.

Тем не менее единственную модель в самых различных работах все же находят, причем авторы не всегда отдают себе отчет, целесообразно ли используемое при этом (сознательно или подсознательно) внешнее дополнение, принципиально необходимое для нахождения единственной модели. Приведем примеры обычно используемых внешних дополнений.

#### *Обычно применяемые внешние дополнения*

Если в какой-либо работе получена одна единственная модель по данным наблюдений, то это означает, что автор использовал некоторое внешнее дополнение для единственности выбора модели.

Рассмотрим примеры наиболее часто применяемых внешних дополнений.

#### *Указание структуры уравнения модели*

Исходя из физических соображений (законов) иногда можно указать вид уравнения модели (опорную функцию, ее степень, число членов и др.). Чаще всего задают линейное или квадратичное полиномиальное уравнение регрессии. Например, при двух аргументах можно записать:

уравнения статики

$$\varphi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2,$$

$$\varphi = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1^2 + a_4 x_2^2 + a_5 x_1 x_2,$$

уравнения динамики

$$\Delta\varphi = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2,$$

$$\Delta\varphi = a_0 + a_1x + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2.$$

Указание вида уравнения модели чаще всего встречается в работах инженерного характера [52].

При двух аргументах для идентификации линейных уравнений алгебраический минимум точек наблюдения объекта — три, для квадратичных уравнений — шесть. В общем случае число точек равно числу членов степенного полинома Колмогорова — Габора:  $C_{N+n}^M = 3, 6, 20, 70$  и т. д.

В случае наличия помех при измерениях число точек следует увеличить в пять — десять раз. Именно необходимость большого числа наблюдений заставляет принимать простые линейные или квадратичные уравнения регрессии.

*Выбор модели по минимуму нормы решения  
системы условных уравнений  
(метод псевдообратных матриц)*

При повышении сложности уравнения регрессии вскоре наступает момент, когда система условных уравнений становится недоопределенной, т. е. системой, у которой число уравнений (равное числу экспериментальных точек) меньше числа неизвестных коэффициентов. Запишем систему условных линейных алгебраических уравнений в следующем виде:

$$a_1x_{11} + a_2x_{12} + a_3x_{13} + \dots + a_Lx_{1L} = R_1,$$

$$a_1x_{21} + a_2x_{22} + a_3x_{23} + \dots + a_Lx_{2L} = R_2,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$a_1x_{\mu 1} + a_2x_{\mu 2} + a_3x_{\mu 3} + \dots + a_Lx_{\mu L} = R_\mu.$$

Предполагается, что экспериментальные точки не повторяют друг друга и, следовательно, уравнения линейно независимы (неколинеарны).

В матричной форме эту систему можно записать так:

$$Xa = r,$$

где  $X$  — матрица исходных данных;  $a$  — вектор-столбец переменных (искомых коэффициентов);  $r$  — вектор-столбец правых частей (наблюдаемых выходов системы).

При  $\mu < L$  система имеет бесчисленное множество решений, так как любым  $(\mu - L)$  переменным (коэффициентам) можно задать произвольные значения.

Согласно методу псевдообратных матриц из множества решений выбирается одно, обладающее минимальной нормой. Авторы метода не поясняют, где и кому такой выбор требуется.

Для вычисления частного решения, обладающего минимальной нормой, т. е. доставляющего минимум величине  $\sqrt{a^T a}$ , где « $T$ » означает операцию транспонирования, используется формула  $a = X^+ r$ , где  $X^+$  — псевдообратная к  $X$  матрица размера  $L \times \mu$ .

Для вычисления  $X^+$ , в свою очередь, применяется формула

$$X^+ = V^T (VV^T)^{-1} (U^T U)^{-1} U^T,$$

где  $X^+ = UV$  — так называемое скелетное разложение матрицы  $X$  размера  $\mu \times L$  на произведение двух матриц  $U$  размера  $\mu \times \text{rang}$  и  $V$  размера  $\text{rang} \times L$ , где  $\text{rang}$  — ранг матрицы  $X$ . Но по предположению  $X$  — матрица полного ранга, т. е.  $\text{rang} = \mu$ , поэтому матрицы  $U$  и  $V$  имеют размеры  $\mu \times \mu$  и  $\mu \times L$  соответственно.

Для простоты в качестве матрицы  $U$  выбирают матрицу, состоящую из  $\mu$  первых линейно независимых столбцов матрицы  $X$ , а матрицу  $V$  находят из условия

$$X = UV.$$

**Пример 7.** Определение коэффициентов условных уравнений по методу псевдообратных матриц. Заданы три условных уравнения

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 3, \\ -a_1 \quad \quad -a_3 \quad \quad \quad = -2, \\ \quad \quad a_2 \quad \quad + a_4 \quad \quad = 0. \end{cases}$$

Матрицы

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$U^T U = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(U^T U)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$VV^T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(VV^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$



$$X^+ = V^T (VV^T)^{-1} (U^T U)^{-1} U^T = \begin{pmatrix} 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & -0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\bar{a} = X^+ \bar{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Единственная модель найдена в виде линейного уравнения

$$y = x_1 + x_3 + x_5.$$

### Выбор модели по доверительному интервалу

Напомним, что доверительным интервалом называется диапазон изменения случайной величины, при котором получается вероятность ее появления не ниже заданного уровня доверия. Уровень доверия  $F = 0,683$  означает, что в пределах от  $-\tau$  до  $+\tau$  попадает 68,3% всех значений величины, имеющей нормальное распределение вероятности:

$$f(y) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} (y - y_a)^2},$$

где  $y_a$  — центр распределения;  $\sigma$  — квадратичная ошибка (стандарт);

$$\tau = \frac{y - y_a}{\sigma} = \frac{y - y_k}{\frac{\sigma}{\sqrt{a}}}.$$

Выбор модели по доверительному интервалу состоит в определении этого уровня для ряда моделей. Модели постепенно усложняются до тех пор, пока не будет достигнут требуемый уровень доверия. Покажем выбор на примере.

**Пример 8.** Выбор модели экстремального объекта. Пользуясь регрессионным анализом, по данным табл. 3 были идентифицированы две модели:

а) модель первого порядка

$$\Phi^* = Y^* = 40,82 + 0,28778M + 6,3793L - 0,127253ML;$$

б) модель квадратичная

$$\Phi^* = Y^* = 47,512 + 0,51974M + 1,486L - 0,0094293M^2 + 0,28704L^2 - 1,99515 \cdot 10^{-8}LM.$$

Значения  $Y^* = \Phi^*$ , полученные из уравнения объекта, такие:

$$\Phi[\cdot] = \begin{matrix} 53,91, & 69,58, & 64,624, & 62,64, \\ 55,276, & 51,807, & 45,794, & 41,05. \\ 31,21, & 18,83. \end{matrix}$$

Зная значения выходной величины во всех десяти точках табл. 3, можно определить ряд значений ошибки  $\delta = \Phi - \Phi^*$ :

$$\begin{aligned} \text{а) } \delta_1 &= \begin{matrix} 1,09, & -5,58, & 0,027, & 4,39, \\ 0,724, & 1,093, & 2,206, & -2,33, \\ -1,34, & -0,23; \end{matrix} \\ \text{а) } \delta_2 &= \begin{matrix} 0,147, & -0,084, & 0,283, & 0,05, \\ -0,329, & 0,002, & 0,361, & 0,007, \\ 0,15, & -0,31. \end{matrix} \end{aligned}$$

Будем рассматривать эти ряды как выборки значений случайной величины. Тогда, задавшись некоторым уровнем доверия  $F = 0,954$ , можно определить доверительные интервалы ошибки для обеих сравниваемых моделей. Для модели первого порядка находим

$$\bar{\delta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} \delta_{1i}}{10} = 0,001;$$

$$\delta_1 - \bar{\delta}_1 [1,089 - 5,581, 0,026, 4,349, 0,723, 1,092, 2,205, -2,331, -1,341, -0,231].$$

Выборочная дисперсия

$$D_1 = \frac{\sum_{i=1}^{10} (\delta_{1i} - \bar{\delta}_1)^2}{10 - 1} = 5,511038.$$

По таблицам находим  $\tau_{\text{табл}} = \pm 2$  (при  $F = 0,954$ ).

Доверительный интервал  $-\tau_{\text{табл}} \leq \tau \leq \tau_{\text{табл}}$ , т. е.

$$\left( \bar{\delta}_1 - \tau_{\text{табл}} \frac{D_1}{\sqrt{10}} \right) \leq \delta_1 \leq \left( \bar{\delta}_1 + \tau_{\text{табл}} \frac{D_1}{\sqrt{10}} \right).$$

Подставив все значения, получаем

$$-3,48448 \leq \delta_1 \leq 3,486486.$$

Этот диапазон значений ошибки перекрывает 95,4% всех ее случайных значений.

Для квадратичной модели находим

$$\bar{\delta}_2 = \frac{\sum_{i=1}^{10} \delta_{2i}}{10} = 0,3528,$$

$$\delta_2 - \bar{\delta}_2 [-0,2056, -0,4366, -0,0696, -0,3026, -0,6816, -0,3506, 3,2574, -0,3456, -0,2026, -0,6626],$$

$$D_2 = 0,212698,$$

$$0,2180779 \leq \delta_2 \leq 0,487122.$$

Мы оценили доверительные интервалы ошибки для двух моделей. Аналогично можно оценить интервал ошибки для любой третьей модели и выбрать ту из них, которая дает более узкий интервал, включающий нулевую линию. При этом не учитывается, что целью является получение самой регулярной, а не самой достоверной модели.

Итак, мы познакомились с тремя часто применяемыми видами внешнего дополнения. Очевидно, что ни один из них не является целесообразным, т. е. не отвечает цели задачи аппроксимации прогнозирования или открытия закономерностей.

Целесообразно применить другие внешние критерии селекции модели.

### Дедуктивный, индуктивный и комбинированный подходы к решению задачи моделирования

Моделированием условимся называть разработку алгоритмов и вычислительных программ для получения математического описания сложного процесса или системы с целью долгосрочного прогнозирования, идентификации и принятия решений в системах управления.

Задача моделирования состоит в получении математического описания процесса или объекта. Она может быть решена при помощи двух подходов: а) дедуктивного, при котором человек — автор модели — указывает физические законы элементов системы, а ЭВМ только исследует их взаимодействие и б) индуктивного, при котором используется некоторая таблица исходных экспериментальных данных и при помощи перебора (последовательного опробывания) большого числа моделей электронно-вычислительной машиной находится модель оптимальной сложности, с применением того или иного указанного ей внешнего критерия селекции, что и называется самоорганизацией моделей на ЭВМ.

В логике различают два метода логических построений: дедукции и индукции.

**Дедукция** — метод рассуждений, ведущий от общего суждения к его частностям. Математика является в основном наукой дедуктивной, так как использует способ исследования и изложения, при котором частные положения (выводы, доказательства) логически выводятся из общих положений (из аксиом, правил или законов).

**Индукцией** называется метод рассуждений, который приводит от частных примеров к некоторому общему выводу. Индукция обычно реализуется при помощи перебора вариантов или изучения общих законов такого перебора с целью экстраполяции.

**Полная индукция** соответствует полному (в пределах заданной опорной функции) перебору всех вариантов. Она может включать и перебор опорных функций.

Например, пусть требуется доказать, что в пределах  $1 \leq n \leq 5$  действует правило «сумма первых  $n$  нечетных натуральных чисел равна квадрату числа слагаемых:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ ».

Полный перебор такой:

$$n = 1 \quad 1 = 1^2,$$

$$n = 2 \quad 1 + 3 = 2^2,$$

$$n = 3 \quad 1 + 3 + 5 = 3^2,$$

$$n = 4 \quad 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2,$$

$$n = 5 \quad 1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2.$$

Полный перебор подтвердил приведенное уравнение в указанном диапазоне. Комбинаторный алгоритм МГУА основан на методе полной индукции, так как реализует полный перебор всех частных моделей.

**Неполная индукция** соответствует неполному перебору всех возможных вариантов. Например, при очень больших значениях  $n$  доказательство указанного соотношения перебором вариантов практически невозможно.

Многорядный (пороговый) алгоритм МГУА реализует метод неполной индукции, так как часть моделей исключается из перебора благодаря наличию порогов.

**Метод математической индукции** — специальный математический метод, имеющий целью получение результата полного перебора в общем (буквенном) виде.

Например, в указанном выше примере легко заметить, что при увеличении числа слагаемых  $n$  на единицу левая и правая части уравнения (по сравнению с предыдущим уравнением) имеют равные приращения, причем легко выразить их аналитически:

$$\Delta_1 = 2n + 1 \text{ и } \Delta_2 = 2n + 1, \text{ т. е. } \Delta_1 = \Delta_2.$$

Найдена общая математическая формула, показывающая, что при любом  $n$  равенство левой и правой частей сохранится.

Принципиально возможно применить метод математической индукции к решению задачи самоорганизации моделей, т. е. получить результат полного перебора моделей в общем, аналитическом, виде без осуществления перебора или при очень сокращенном переборе.

Попытки реализовать этот метод приводят к задаче аналитического определения глобального минимума кривой изменения критерия выбора модели в функции сложности или к экстраполяционным алгоритмам его поиска.

В современном состоянии метод самоорганизации моделей основан либо на полной (комбинаторные алгоритмы МГУА), либо на неполной индукции (многорядные алгоритмы МГУА).



Дедуктивный подход (характерный для математики) остается в качестве наилучшего аппарата моделирования простых и «понятных» объектов с однокритериальной оценкой. Для сложных «непонятных» процессов и систем и при учете нескольких противоречивых критериев приходится переходить к индуктивному подходу, при котором модель оптимальной сложности находится с помощью перебора большого числа моделей по принципу самоорганизации.

При самоорганизации моделей априорная информация, необходимая для моделирования, сводится к минимуму: задаются «среда моделирования» (таблица данных) и критерий. Все, что достоверно известно об объекте (например, структура системы), также не скрывается от ЭВМ — это уменьшает объем перебора моделей.

Перебору вариантов подлежат только те вопросы, теория которых априори достоверно не известна. В этом и состоит комбинированный дедуктивно-индуктивный подход в моделировании.

### Принцип самоорганизации моделей

Принцип самоорганизации моделей можно сформулировать так: при постепенном увеличении сложности моделей (например, модели линейные, квадратичные, третьей степени и т. д.) значение внутренних критериев (при наличии шума) монотонно падает. В тех же условиях все внешние критерии проходят через свои минимумы (экстремумы), что и дает возможность определить модель оптимальной сложности, единственную для каждого внешнего критерия. Всегда можно запрограммировать ЭВМ так, чтобы найти такой порядок усложнения структуры модели, при котором минимум внешнего критерия получается единственным.

В табл. 4—7 (табл. 7 см. на вклейке между с. 48—49) представлены примеры постепенного усложнения моделей полиномиального и дробно-полиномиального типов при двух и трех аргументах.

Модели в таблицах расположены (ранжированы) так, чтобы среднеквадратическая ошибка, рассчитанная на всех точках таблицы данных, монотонно убывала (рис. 4).

Перебирая модели от самой простой к более сложным (или, наоборот, от заведомо переусложненной к более простым), машина находит модель оптимальной сложности, единственную для каждого внешнего критерия. Для успеха решения задачи моделирования важно выбрать внешний критерий соответственно типу решаемой задачи моделирования.

Характерный ход изменения величины внешнего, смешанного и внутреннего критериев при постепенном увеличении сложности модели показан на рис. 5. В качестве примера на рисунке представлены внешний критерий — критерий регулярности  $\Delta^2(B) \rightarrow$

Таблица 4. Постепенное усложнение полинома (для одной переменной)

$t$	$t^2$	$t^3$	$t^4$	$t^5$
$y_1 = a_0 + a_1 t$	$y_2 = a_0 + a_1 t^2$	$y_4 = a_0 + a_1 t^3$	$y_8 = a_0 + a_1 t^4$	$y_{16} = a_0 + a_1 t^5$
$y_3 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$	$y_5 = a_0 + a_1 t + a_2 t^3$	$y_9 = a_0 + a_1 t + a_2 t^4$	$y_{17} = a_0 + a_1 t + a_2 t^5$	$y_{18} = a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^5$
	$y_6 = a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^3$	$y_{10} = a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^4$	$y_{11} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^4$	$y_{19} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^5$
	$y_7 = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$	$y_{12} = a_0 + a_1 t^3 + a_2 t^4$	$y_{13} = a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^4$	$y_{20} = a_0 + a_1 t^3 + a_2 t^5$
		$y_{14} = a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^4$	$y_{21} = a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^5$	$y_{22} = a_0 + a_1 t^2 + a_2 t^3 + a_3 t^5$
		$y_{15} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4$	$y_{23} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^5$	$y_{24} = a_0 + a_1 t^4 + a_2 t^5$
			$y_{25} = a_0 + a_1 t + a_2 t^4 + a_3 t^5$	$y_{26} = a_0 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5$
			$y_{27} = a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5$	$y_{28} = a_0 + a_1 t^3 + a_2 t^4 + a_3 t^5$
			$y_{29} = a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^4 + a_4 t^5$	$y_{30} = a_0 + a_1 t^3 + a_2 t^3 + a_3 t^3 + a_4 t^5$
			$y_{31} = a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^3 + a_4 t^5$	$y_{32} = a_0 + a_1 t + a_2 t^3 + a_3 t^3 + a_4 t^5$

Т а б л и ц а 5. Постепенное усложнение полинома (для двух переменных)

Члены полного степенного полинома Колмогорова — Габора				
$x_1$	$x_1^2$	$x_2$	$x_1 x_2$	$x_2^2$
$y_1 = a_0 + a_1 x_1$	$y_2 = a_0 + a_1 x_1^2$ $y_3 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2$	$y_4 = a_0 + a_1 x_2$ $y_5 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$ $y_6 = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2$ $y_7 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2$	$y_8 = a_0 + a_1 x_1 x_2$ $y_9 = a_0 a_1 x_1 + a_2 x_1^2 x_2$ $y_{10} = a_0 a_1 x_1^2 + a_2 x_1^2 x_2^2$ $y_{11} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2$ $y_{12} = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_1 x_2$ $y_{13} = a_0 a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$ $y_{14} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$ $y_{15} = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2^2 + a_3 x_2 a_4 x_1 x_2$	$y_{16} = a_0 + a_1 x_2^2$ $y_{17} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2^2$ $y_{18} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2$ $y_{19} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2^2$ $y_{20} = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2$ $y_{21} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_2^2$ $y_{22} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_2^2$ $y_{23} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2 + a_4 x_2^2$ $y_{24} = a_0 + a_1 x_1 x_2 + a_2 x_2^2$ $y_{25} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2$ $y_{26} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2$ $y_{27} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x_2^2$ $y_{28} = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_1 x_2 + a_3 x_2^2$ $y_{29} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x$ $y_{30} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + a_4 x$ $y_{31} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2 + a_4 x_1 + a_3 x_2^2$

Т а б л и ц а 6. Постепенное усложнение полинома для трех переменных

Общий вид полинома: $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2 + a_6 x_3 + a_7 x_1 x_3 + a_8 x_2 x_3 + a_9 x_3^2$					
$x_1$	$x_1^2$	$x_2$	$x_1 x_2$	$\dots$	$x_3^2$
$y_1 = a_0 + a_1 x_1$	$y_2 = a_0 + a_1 x_1^2$	$y_4 = a_0 + a_1 x_2$	$y_8 = a_0 + a_1 x_1 x_2$		$y_{256} = a_0 + a_1 x_3^2$
	$y_3 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$	$y_5 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$	$y_9 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1 x_2$		$y_{257} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_3^2$
		$y_6 = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2$	$y_{10} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2$		$y_{258} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_3^2$
			$y_{11} = a_0 + a_1 x_1^2 + a_2 x_2$		$y_{259} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_3^2$
		$y_7 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2$	$y_{12} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2$	$\dots$	$y_{260} = \dots$
			$y_{13} = \dots$		$y_{511} = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_2 + a_4 x_1 x_2 + a_5 x_2^2 + a_6 x_3 + a_7 x_1 x_3 + a_8 x_2 x_3 + a_9 x_3^2$
			$y_{14} = \dots$		
			$y_{15} = \dots$		

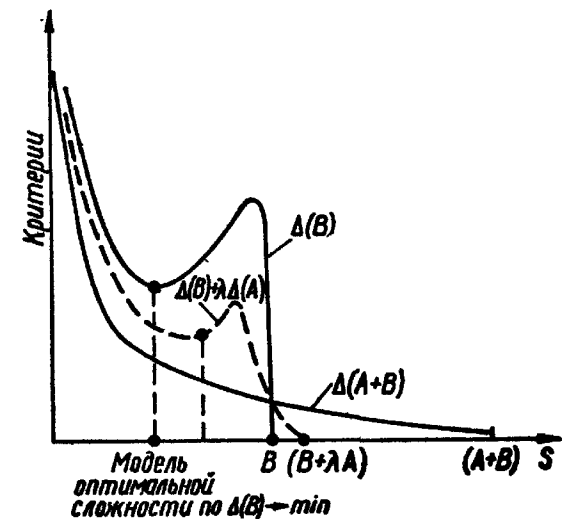
→ min (a); внутренний критерий — среднеквадратическая ошибка, определяемая по методу наименьших квадратов  $\Delta^2 (A) \rightarrow \min (b)$ .

При числе членов полинома, равном числу точек в таблице исходных данных,  $\Delta^2 (A) = 0$  (ошибка равна нулю).

Пунктиром показан некоторый суммарный, смешанный критерий  $\Delta^2 (M) = \lambda \Delta^2 (B) + (1 - \lambda) \Delta^2 (A)$  при  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

Как видно, смешанный критерий дает возможность указать единственную модель, но произвол выбора коэффициента  $\lambda$

Рис. 5. Характерные кривые изменения внешнего, смешанного и внутреннего критериев при нарастании сложности структуры модели (числа членов  $N$  и степени полинома  $S$ ).



делает такой выбор бессмысленным. Сложность модели по смешанному критерию больше, чем по внешнему критерию. Суммировать внешние и внутренние критерии не следует.

### Основные виды критериев селекции модели

Для каждого вида задач рекомендуется выбрать соответствующий ему критерий селекции.

В качестве целесообразных внешних дополнений в теории самоорганизации моделей используются следующие критерии.

**Критерий регулярности** — среднеквадратическая ошибка, рассчитанная на новых точках, не использованных для получения оценок коэффициентов модели:

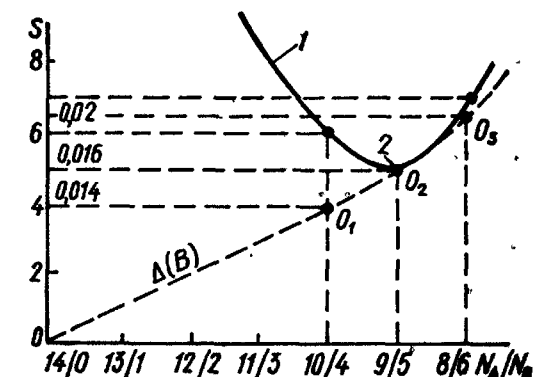


Рис. 6. Определение оптимального разделения данных на обучающую и проверочную последовательности («парабола Тодуа»):

1 — число рядов селекции  $\alpha$ ; 2 — самая простая модель.

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (q_{\text{табл}} - q_m)_i^2}{\sum_{i=1}^{N_B} q_{\text{табл}}^2} \rightarrow \min,$$

где  $N_B$  — число точек отдельной проверочной последовательности данных  $N = N_A + N_B$ ;  $q_{\text{табл}}$  — табличные значения выходной переменной;  $q_m$  — значения, рассчитанные по данной модели.

Критерий регулярности основан на разделении имеющихся

экспериментальных данных на две части: обучающую  $N_A$  и проверочную  $N_B$  последовательности точек. Согласно так называемому третьему способу регуляризации [24], все опытные точки располагаются в ряд по величине их дисперсии от среднего значения, и этот ряд делится на две указанные последовательности.

При ранжировке точек по дисперсии было экспериментально обнаружено существование оптимума числа рядов многорядного селекционного алгоритма МГУА при варьировании соотношения числа точек обучающей последовательности  $N_A$  и числа точек проверочной последовательности  $N_B$ .

Определение оптимального разделения таблицы данных на обучающую и проверочную последовательности («парабола Тодуа») изображено на рис. 6. Точки ранжируются по дисперсии выходной величины в один ряд, а затем строится парабола. Минимум числа рядов селекции указывает оптимальное разделение, т. е. чем меньше рядов, тем проще и достовернее модели.

В качестве внешнего дополнения второго уровня можно

использовать такую величину, как число рядов селекции. Сказанное относится только к разделению точек для определения величины критерия регулярности  $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ .

Коэффициенты сравниваемых между собой моделей определяются на обучающей последовательности по методу наименьших квадратов, а все модели селектируются по величине среднеквадратической ошибки, измеренной на точках проверочной последовательности. Точки этой последовательности не участвуют в получении оценок коэффициентов, и потому критерий регулярности является внешним дополнением, позволяющим выбрать однозначно оптимальную модель.

После нахождения структуры модели оптимальной сложности коэффициенты ее следует уточнить по всем заданным точкам. Это уже на выбор структуры не повлияет.

Физический смысл критерия регулярности состоит в том, что он ориентирован на выбор модели, которая будет наиболее точной на множестве точек, которых еще нет в таблице, но они появятся там в ближайшем будущем. Поэтому критерий регулярности рекомендуется для краткосрочных прогнозов на один-два шага вперед.

При наличии помех результат синтеза по критерию регулярности не совпадает с физической моделью объекта. Оптимальная прогнозирующая модель иногда является «бессмысленной» с точки зрения человеческой логики. В отличие от этого, модели по критерию минимума смещения обычно соответствуют теории процесса. Одни называются нефизическими моделями, а другие — физическими.

**Критерий минимума смещения** требует максимального совпадения значений выходной величины двух моделей, полученных на двух различных частях таблицы исходных данных

$$n_{\text{см}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha N} (q_A - q_B)^2}{\alpha \sum_{i=1}^N q_{\text{табл}}^2} \rightarrow \min,$$

где  $A$  — точки с большим значением дисперсии выходной величины;  $B$  — точки с меньшим ее значением;  $\alpha$  — коэффициент экстраполяции,  $\alpha = 1,5 \div 3,0$ ;  $N$  — все точки таблицы исходных данных.

Критерий минимума смещения позволяет выбрать модель, наименее чувствительную к изменению множества опытных точек, по которым она получена. Он требует, чтобы модель давала одинаковые результаты на последовательных опытных данных  $A$  и  $B$ . Этот критерий позволяет решать задачу восстановления закона, скрытого в зашумленных экспериментальных данных, а потому рекомендуется для решения задачи идентификации.

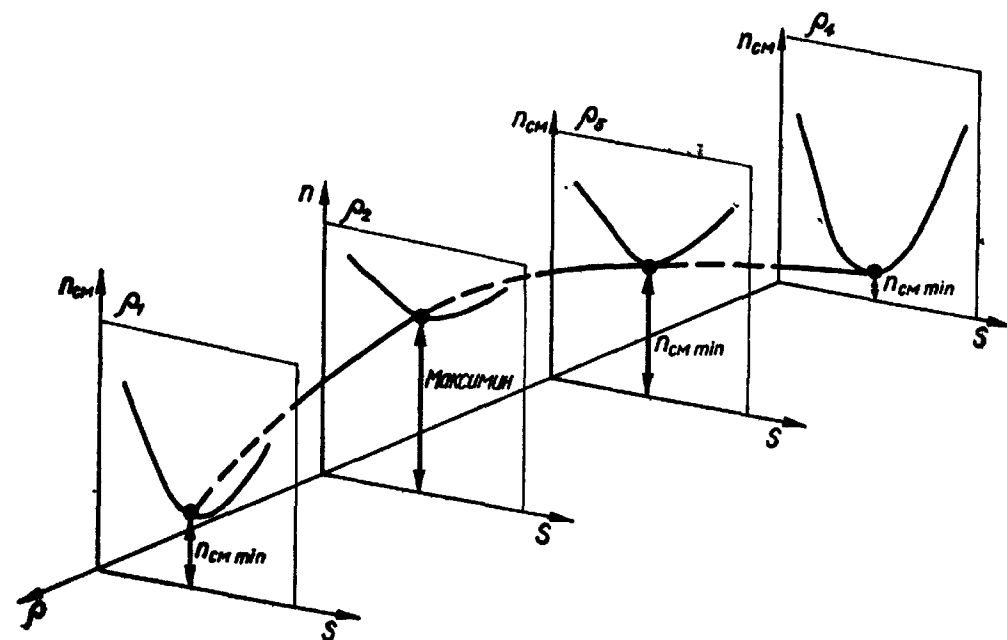


Рис. 7. Пример выбора оптимального разделения четырех точек на «две последовательности A и B по «правилу максимина»:  $n_{cm}$  — критерий минимума смещения;  $S$  — сложность моделей;  $\rho_1 = A(1, 2) B(3, 4)$ ;  $\rho_2 = A(1, 3) B(2, 4)$ ;  $\rho_3 = A(1, 4) B(2, 3)$ ;  $\rho_4 = A(2, 3) B(1, 4)$ .

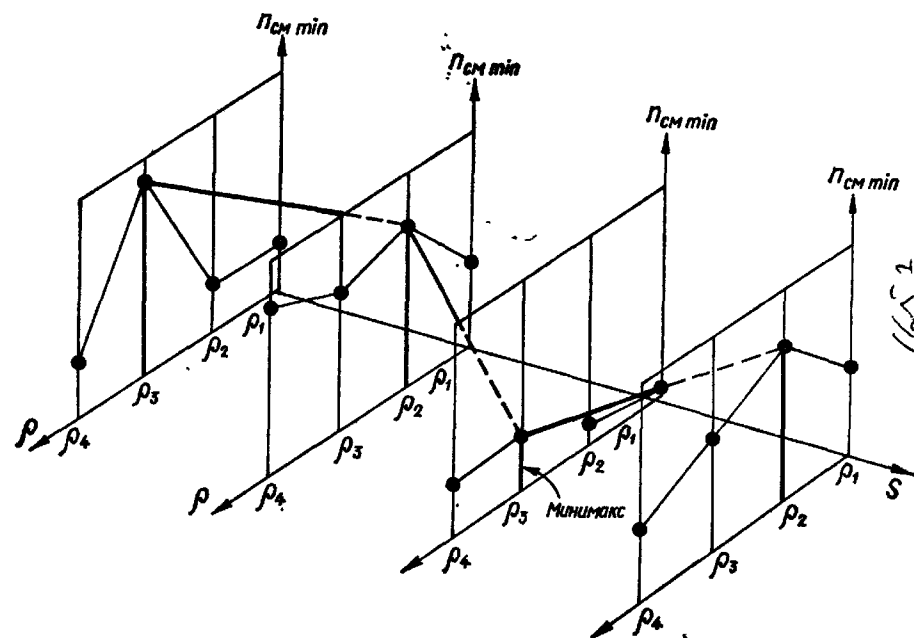


Рис. 8. Пример выбора оптимального разделения четырех точек на две равные последовательности A и B по «правилу минимакса».

Глубина минимума критерия минимума смещения измеряется по величине  $\frac{n_{cm}^2}{n_{cm}^2(\max)}$ . Чем ближе это отношение к нулю, тем глубже минимум и тем более достоверной является модель.

Обратим внимание на то, что при расчете критерия регулярности составляется и решается одна система нормальных уравнений Гаусса, а при расчете критерия минимума смещения — две системы.

Критерий минимума смещения имеет несколько форм: «по решениям», «по коэффициентам», «в относительной форме» и др.

Известная теорема Уидроу [112] утверждает, что наибольшая информация (и достоверность классификации) достигается, если при замене непрерывных данных двоичными (бинарными) числами половине данных будет присвоен знак плюс, а половине — знак минус. Так выбирается порог бинаризации непрерывного сигнала.

Для определения величины критерия минимума смещения, согласно теореме Уидроу, таблицы опытных данных делятся на две равные части  $N_A = \frac{N}{2}$  и

$N_B = \frac{N}{2}$ , каждая из которых может содержать по нашему желанию различный состав точек. В. Н. Высоцкий показал, что оптимальное разделение множества точек (с точки зрения помехоустойчивости выбора модели) можно найти по «правилу максимина» (рис. 7): наилучшее разделение  $\rho$  точек на два различных множества соответствует наиболее глубокому минимуму критерия, выбранному из всех максимальных значений минимумов.

Тот же результат можно получить и по «правилу минимакса» (рис. 8): наилучшее разделение точек  $\rho$  соответствует максимальному значению из всех минимумов критерия минимума смещения. На рисунке показаны четыре варианта разделения четырех точек. Третье разделение  $A(1, 3), B(2, 4)$  является наилучшим, отвечающим минимаксу.

Другие способы оптимального разделения таблицы опытных данных на части будут рассмотрены во второй главе.

Критерий сходимости (или точности) пошагового интегрирования конечно-разностных моделей имеет вид

$$I(3) = \frac{\sum_{i=1}^N (q_m - q_{\text{табл.}})_i^2}{\sum_{i=1}^N q_{\text{табл.}}^2} \rightarrow \min.$$

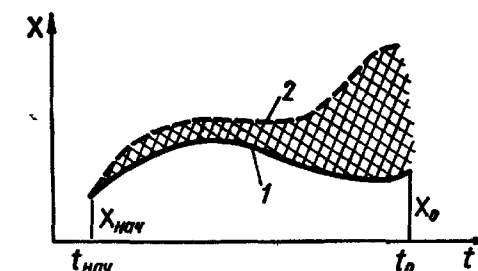


Рис. 9. Пояснение критерия сходимости пошагового (дифференциального) прогноза действительного процесса:

$t_0$  — интервал интерполяции; 1 — интеграл непрерывного дифференциального уравнения; 2 — результат пошагового интегрирования конечно-разностного аналога.

Критерий представляет собой среднеквадратическую ошибку пошагового интегрирования на интервале интерполяции (т. е. там, где заданы опытные точности, рис. 9). Критерий рекомендуется для конечно-разностных прогнозирующих моделей авторегрессионного типа

$$Y_{+1} = a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_{-1} + a_3 y_{-2} + \dots$$

Он интересен тем, что не требует разделения данных на обучающую и проверочную последовательности: проверку точности пошагового интегрирования конечно-разностных моделей можно выполнить на тех же точках, по которым синтезирована сама модель (множество точек  $N = N_A + N_B$ ). Объясняется это линейной независимостью друг от друга интеграла и его аргументов. Интеграл (а также производные) можно рассматривать как новую информацию. Поэтому критерий  $i^2(N)$  рассчитывается на участке интерполяции, т. е. в области, где заданы точки опытных данных.

**Критерий баланса переменных.** Восстановление функции по ряду заданных опытных точек сводится к решению двух весьма различных между собой задач: аппроксимации и экстраполяции.

В задаче аппроксимации (или интерполяции в узком смысле этого слова) требуется восстановить функцию по опытным точкам на интервале (области) интерполяции, т. е. там, где заданы точки.

В задаче экстраполяции необходимо найти продолжение функции в области, где уже нет опытных точек. Если участвует ось времени, задача экстраполяции называется задачей прогнозирования функции.

Известно, что задача интерполяции решается значительно более точно, чем задача экстраполяции. Любая достаточно сложная функция при почти любом методе подбора оценок коэффициентов дает весьма точный результат.

Погрешность решения задачи экстраполяции обычно возрастает с ростом времени упреждения.

Критерий баланса переменных является попыткой свести задачу экстраполяции к задаче интерполяции. Наиболее просто построить критерий баланса можно в том случае, когда значение экстраполируемой (прогнозируемой) величины в некоторой не слишком удаленной точке достоверно известно. Например, при экстраполяции полезных ископаемых всегда можно указать область, лежащую за пределами экстраполяции, где ископаемых уже заведомо нет. Тогда из большого числа (например, тысячи) прогнозирующих конечно-разностных уравнений (отобранных по критерию минимума смещения) можно выбрать одно, у которого кривая пошагового интегрирования (прогноз) в данной удаленной области точнее других показывает отсутствие ископаемых. Способ не применим для слишком удаленных опорных точек, когда ни одно из отобранных по критерию минимума смещения уравнений уже не удовлетворяет балансу.

Иногда используются другие способы образования «точки опоры в будущем», однако они все применимы только тогда, когда прогнозируется несколько переменных одновременно. Отсюда и возникло название «критерий баланса переменных». Известны следующие способы построения критерия баланса.

1. **Физический баланс.** Иногда прогнозируемые переменные связаны какой-либо физической зависимостью, которая, конечно, выполняется (с небольшими погрешностями) на интервале интерполяции. Критерий баланса требует, чтобы эта зависимость выполнялась и в будущем.

Например, при прогнозировании населения города всегда прирост населения равен

$$\Delta N = (N_p + N_n) - (N_{ум} + N_y),$$

где  $N_p$  — число родившихся в данном году;  $N_n$  — приехавших;  $N_{ум}$  — умерших;  $N_y$  — уехавших из города.

Критерий баланса для подобных демографических прогнозов

$$b = \{\Delta N - [(N_p + N_n) - (N_{ум} + N_y)]\} \rightarrow \min$$

позволяет выбрать из малосмещенных прогнозов один долгосрочный прогноз [29].

2. **Кольцо разностей «прямых» и «обратных» функций.** Может быть задан закон, связывающий прогнозируемые переменные. Если такой закон не задан, его можно открыть по минимуму критерия смещения

$$n_{см} \rightarrow \min.$$

Необходимо, чтобы он действительно существовал. Допустим, что при прогнозировании двух переменных  $x_1$  и  $x_2$  существуют зависимости («прямые» функции)

$$x_1 = f_{1-1}(x_2), \quad x_2 = f_{2-2}(x_1),$$

например,

$$x_1 = \sqrt{x_2}, \quad x_2 = x_1^2.$$

Первый индекс показывает номер уравнения, а второй — выходную переменную.

Допустим, что можно однозначно найти аналитически «обратные» функции для двух переменных

$$x_2 = f_{1-2}(x_1), \quad x_1 = f_{2-1}(x_2),$$

например,

$$x_2 = x_1^2, \quad x_1 = \sqrt{x_2}.$$

Тогда кольцо разностей имеет вид

$$b_1 = (f_{1-1} - f_{2-1}) = (x_1 - \sqrt{x_2}) = 0,$$

$$b_2 = (f_{2-2} - f_{1-2}) = (x_2 - x_1^2) = 0.$$

Критерий баланса запишется так:

$$B = \sum_{i=1}^{N_{\text{пр}}} [(f_{1-1} - f_{2-1})^2 + (f_{2-2} - f_{1-2})^2]_i \rightarrow \min,$$

где  $N_{\text{пр}}$  — точки будущего, в которых проверяется прогноз. Например, пусть  $N_{\text{пр}} = 3$ , координаты точек прогноза:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, 2, 3; & x_2 &= 1, 4, 9; \\ x_1 &= \sqrt{x_2}; & x_2 &= x_1^2. \end{aligned}$$

Критерий баланса для данного случая имеет вид

$$\begin{aligned} B &= \sum_{i=1}^3 [(x_1 - \sqrt{x_2})^2 + (x_2 - x_1^2)]_i = [(1 - \sqrt{1})^2 + (1 - 1^2)^2] + \\ &+ [(2 - \sqrt{4})^2 + (4 - 2^2)^2] + [(3 - \sqrt{9})^2 + (9 - 3^2)^2] = 0. \end{aligned}$$

В данном тестовом примере прогноз абсолютно точный.

В области экстраполяции (прогноза) критерий может отличаться от нуля, но все же в наилучшей модели он меньше, чем у других моделей.

Примеры баланса прогнозов для трех переменных будут рассмотрены во второй главе.

**Б а л а н с п р о г н о з о в.** Прогнозы можно выполнить при разном шаге дискретизации переменных. Например, экстраполировать поле месторождения ископаемых можно при клетках размером  $100 \times 100$  и  $1000 \times 1000$  м. В области интерполяции, очевидно, действует (т. е. точно выполняется) соотношение

$$V_{(1000)} = \frac{1}{100} [V_{1(100)} + V_{2(100)} + \dots + V_{100(100)}],$$

т. е. среднее по большому квадрату равно сумме средних по мелким квадратам, входящим в его площадь, деленной на число малых квадратов.

Критерий баланса прогнозов требует, чтобы это соотношение выполнялось и в области экстраполяции

$$b = \left[ V_{(1000)} - \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} V_{i(100)} \right] \rightarrow \min.$$

Этот критерий позволяет выбрать из самых малосмещенных моделей (с мелкой клеткой) один прогноз, в наибольшей степени совпадающий с прогнозом по модели с крупной клеткой.

Аналогично критерий баланса прогнозов можно использовать и для прогнозирования хода процессов во времени.

Здесь критерий баланса используется для того, чтобы, например, среднемесячный прогноз корректировать по среднегодовому. Более эффективна рекуррентная процедура, при которой оба прогноза корректируются несколько раз по очереди: сначала среднемесячный по среднегодовому, затем среднегодовой по среднемесячному и т. д.

Заметим, что, прежде чем находить «кольцо разностей», следует найти множество взаимосвязанных выходных переменных данного объекта, пользуясь алгоритмами объективной самоорганизации систем уравнений. Поиск «кольца» в случае отсутствия физической связи выходных переменных всегда будет безуспешным.

### Неформальный, «сценарный» критерий

Если цель моделирования может быть сформулирована только приближенно (например, так «нужно, чтобы все было хорошо»), то при переборе моделей применяется так называемый сценарный критерий, не требующий точной формализации задачи.

Выходным устройством при этом обычно является дисплей, на котором высвечиваются прогнозы будущего изменения всех выходных (фазовых) переменных исследуемой системы. Если требуется, чтобы «хорошо» было через время упреждения прогноза, равное  $T_y$ , то на экран выводятся прогнозы хода процесса в течение, например,  $10T_y$ , т. е. при времени, значительно большем времени упреждения. Экспериментально показано, что если в течение  $10T_y$  процесс имеет правдоподобный характер (в частности, не уходит на бесконечность и не падает до нуля), то модель, дающая такой долгосрочный прогноз, точно прогнозирует ход кривых при времени упреждения, равном  $T_y$ . Таким образом, общий вид долгосрочного прогноза может быть острым критерием выбора модели для менее долгосрочного прогноза.

Сценарный критерий не следует применять для краткосрочного прогноза, так как для него самыми точными могут быть неустойчивые (на большом интервале) прогнозы.

Выбор критерия не является критическим: подобно тому как данное изображение можно правильно отнести к тому или иному классу (образу) по многим признакам, истинную модель оптимальной сложности можно распознать по многим критериям почти с равным успехом.

### Комбинированные критерии селекции

Множеству критериев селекции отвечает множество моделей, каждому критерию селекции — одна единственная модель. Однако человек-заказчик идентификации модели часто не знает точно, какая из моделей ему в действительности нужна. После опробования модели может оказаться, что критерий селекции выбран неточно. Уточнение критерия часто приводит к образованию так называемых комбинированных критериев, объединяющих в себе несколько требований, предъявляемых к выбору модели.

Опыт решения задач моделирования показывает, что наиболее эффективными являются так называемые комбинированные критерии, объединяющие в себе два или несколько из указанных



выше критериев на одном уровне выбора. Известны следующие виды комбинированных критериев:

1. Для алгебраических (полиномиальных) моделей, используемых для идентификации объекта, не содержащих аргумент времени, рекомендуется комбинированный критерий «минимум смещения плюс регулярность»:

$$\rho_1 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(B)} \rightarrow \min.$$

2. Для гармонических и алгебраических моделей, предназначенных для долгосрочного прогноза, содержащих аргумент времени, рекомендуется комбинированный критерий «минимум смещения плюс баланс переменных»:

$$\rho_2 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + B^2} \rightarrow \min.$$

3. Для дифференциальных (конечно-разностных) моделей, где долгосрочный прогноз получается при помощи многошагового интегрирования, рекомендуется комбинированный критерий «минимум смещения плюс сходимость процедуры пошагового прогноза»:

$$\rho_3 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + i^2(N)} \rightarrow \min.$$

Комбинированные критерии не только обеспечивают устойчивый и единственный прогноз, но и делают выбор его более «острым». Индивидуальные критерии часто не дают достаточно острого минимума. Введением коэффициентов веса  $\lambda$  и  $(2 - \lambda)$  перед слагаемыми комбинированных критериев можно реализовать идеи Парето о многокритериальном выборе решений. Выше мы приняли  $\lambda = 1$ . Но основная цель применения комбинированных критериев — предотвращение многозначности выбора модели. Если перебор по одному критерию может «застыть» где-то в локальном минимуме одного, индивидуального критерия, то при двух критериях такое событие менее вероятно: комбинированные критерии обеспечивают однозначность результата перебора.

Другое положительное качество комбинированных критериев — их повышенная помехоустойчивость (см. гл. 3).

Как известно, спектральный анализ позволяет разделить объекты исследования на характерные группы по собственным частотам колебаний атомов газа. Нечто похожее получается при оценке моделей на плоскости «критерий минимума смещения — критерий регулярности» или «критерий минимума смещения — критерий баланса переменных». Каждой модели здесь отвечает точка. Особенность картины расположения точек состоит в том, что они образуют вертикально расположенные группы, отличающиеся по величине критерия регулярности (т. е. по точности на новых данных). В каждой группе моделей самая нижняя точка определяет наилучшую модель данной группы. Остается выбрать одну модель из нескольких самых нижних (несмещенных) моделей (рис. 35, 57).

В каждую группу (столбец) входят модели, имеющие почти одинаковый состав аргументов [34, 35]. При увеличении неточности исходных данных группы уклоняются друг от друга (расходятся по оси  $\Delta(B)$ ).

Наиболее эффективными являются модели, отвечающие самым нижним точкам каждого столбца.

#### *Последовательное применение различных критериев*

Перебор моделей по комбинированным критериям занимает значительное время счета в программе. Для ускорения счета часто можно заменить перебор по комбинированным критериям последовательным применением ряда критериев.

Для сокращения объема перебора моделей при всех указанных критериях полезно воспользоваться критерием физической реализуемости прогноза как вспомогательным, т. е. сразу исключить из перебора модели, дающие явно несуразные прогнозы (например, отрицательное число для величины, которая не может быть отрицательной).

Последовательное применение критериев удобно еще потому, что при нем не нужно нормировать значения критериев-слагаемых.

*Таблицы постепенного усложнения модели.* Замечено, что минимум критерия селекции получается единственным, если в процессе перебора по внешним критериям усложнение модели выполняется так, что с каждой новой моделью постепенно уменьшается величина некоторых внутренних критериев, например среднеквадратической ошибки, рассчитанной на всех опытных данных, или статистического критерия существенности Стьюдента.

Табл. 4—7 показывают примеры постепенного усложнения моделей при разных видах опорных функций, отличающихся по числу аргументов и характеру нелинейности.

#### **Основные виды структур организации перебора моделей с целью выбора единственной модели оптимальной сложности**

Очевидно, недостаточно указать способ реализации индуктивного подхода — перебор моделей по внешним критериям. Кроме указания этой общей идеи, нужно разработать конкретные алгоритмы организации перебора и довести их до практических удобных вычислительных программ.

В методе, получившем название метода группового учета аргументов (МГУА), применяются две основные структуры генерации множества моделей («частных описаний»), оцениваемых затем по критерию селекции:

- а) комбинаторные (непороговые) алгоритмы МГУА с занулением коэффициентов (при  $n \leq N$ );
- б) многорядные, пороговые алгоритмы МГУА (при  $n \geq N$ ).

В комбинаторных алгоритмах (рис. 10) задается некоторое «полное описание», например полином высокой степени. Частные описания получаются из полного при помощи приравнивания нулю (зануления) тех или иных коэффициентов полного описания. Оставшиеся коэффициенты оцениваются с использованием всех точек таблицы исходных данных по методу наименьших квадратов. Лучшая структура модели определяется по тому или иному внешнему критерию.

Пусть, например, полное описание принято в виде полинома

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2.$$

Тогда, приравнявая те или иные коэффициенты нулю, кроме  $a_0$  («зануление» коэффициентов), можем получить  $S = 2^n - 1 = 31$  частных полиномов, где  $n = 5$  — число коэффициентов полного описания (кроме  $a_0$ ). Среди частных описаний будут, например, такие:

$$y = a_0 + a_1x_2,$$

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 \text{ и т. д.}$$

Указанные полиномы оцениваются по величине критерия селекции (например, по критерию регулярности или минимума смещения) и из них выбирается единственный полином — модель оптимальной сложности. Комбинаторные, непороговые алгоритмы рекомендуются при  $n \leq N$  и числе членов полного описания не больше двадцати. При более сложных задачах моделирования при  $n > N$  применяются многорядные, селекционные, пороговые алгоритмы МГУА. Некоторые из многорядных алгоритмов МГУА (например, «алгоритм со случайным выбором партнеров») могут решать задачи моделирования при числе входных переменных до  $n = 1000$  [28].

В многорядном (пороговом) алгоритме МГУА (рис. 11) на вход подается некоторый вектор входных переменных  $x = x_1x_2 \dots x_n$ . На первом ряду селекции образуются «частные описания», объединяющие входные переменные по две:

$$y_1 = f_{11}(x_1, x_2), y_2 = f_{12}(x_1, x_3), \dots, y_s = f_{1s}(x_{n-1}, x_n).$$

Из них выбирается  $F_1$  наиболее удовлетворяющих внешнему критерию селекции.

На втором ряду образуются «частные описания» второго ряда

$$z_1 = f_{21}(y_1, y_2), z_2 = f_{22}(y_1, y_3), \dots, z_p = f_{2p}(y_{s-1}, y_s).$$

Из них выбирается  $F_2$  наилучших для использования в следующем, третьем ряду и т. д. Для каждого ряда находится наилучшая (по критерию селекции) модель. Ряды селекции наращиваются, пока оценка критерия уменьшается («правило останова»).

Различные виды многорядных пороговых алгоритмов МГУА описаны подробно в данной книге.

Гипотеза селекции указывает на то, что описанный выше процесс селекции модели является математической аналогией процесса, применяемого садоводом при селективном выращивании сортов для получения гибридной разновидности, имеющей некоторые желаемые свойства.

Займствование алгоритмов переработки информации у природы является одной из основных идей кибернетики. «Гипотеза селекции» утверждает, что алгоритм массовой селекции растений или животных является оптимальным алгоритмом переработки информации в сложных задачах. При массовой селекции высевается некоторое количество семян. В результате опыления образуются сложные наследственные комбинации. Селекционеры выбирают некоторую часть растений, у которых интересное их свойство выражено боль-

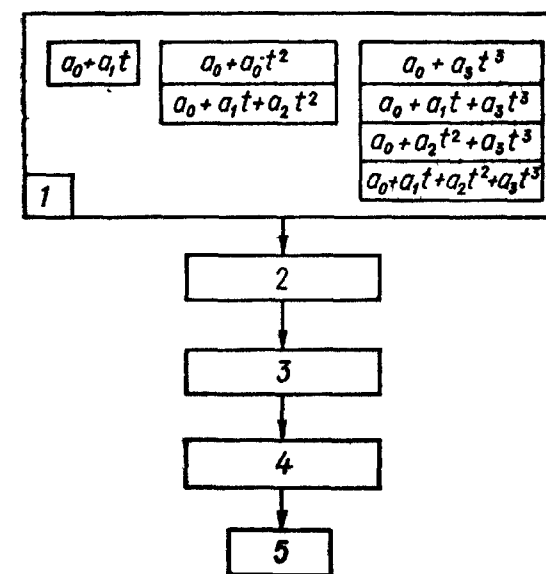


Рис. 10. Первая структура: «комбинаторный алгоритм МГУА» для числа переменных  $n \leq N$  (при числе членов полного описания  $n$  не более 20) 1 — таблица постепенного усложнения модели; 2 — оценка коэффициентов по данным обучающей последовательности; 3 — выбор модели по комбинированному критерию; 4 — пересчет оценки коэффициентов модели по всем точкам; 5 — выход.

зуются сложные наследственные комбинации. Селекционеры выбирают некоторую часть растений, у которых интересное их свойство выражено боль-

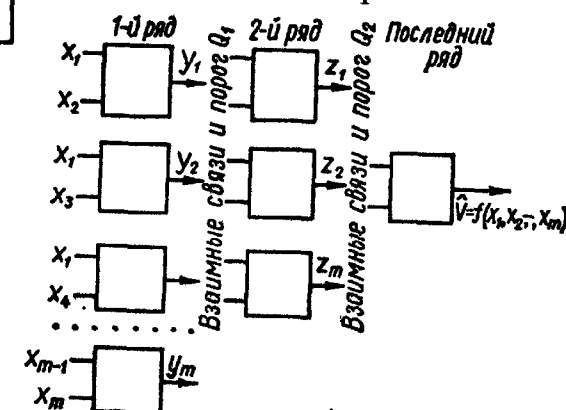


Рис. 11. Вторая пороговая структура: многорядный селекционный алгоритм МГУА для большого числа переменных (до 1000).

ше всего (эвристический критерий). Семена этих растений собирают и снова высевают для образования новых, еще более сложных комбинаций. Через несколько поколений селекция останавливается, и ее резуль-

тат является оптимальным. Если чрезмерно продолжать селекцию, то наступит «инцухт» — вырождение растений. Существуют оптимальное число поколений и оптимальное количество семян, отбираемых в каждом из них.

Селекционер начинает, скажем, с группы растущих цветов. Он скрещивает каждый цветок с каждым другим цветком из этой группы, собирает получаемые семена и высевает их. Затем изучает новое поколение цветов и отбрасывает те образцы, которые, как он чувствует, не являются в некотором смысле «улучшением» сортов (этот процесс эквивалентен одному ряду в алгоритме МГУА). Затем итеративно повторяет этот процесс, скрещивая всякий раз новые растения. Если селекционер установил свой порог надлежащим образом (отбрасывает цветы правильно), у получающихся поколений все в большей степени должна прояв-



ляться тенденция к наличию все большего и большего количества желательных свойств. В конце концов получается один цветок. Он является наилучшим из полученных при том числе поколений, которое было выращено. Обратим внимание на то, что решение принимается не по одному цветку, а по качеству целого поколения лучших растений. Это правило усреднения используется и при селекции моделей.

*Непараметрические или нефизические модели.* В качестве примера, поясняющего смысл терминов «непараметрическая» или «нефизическая» модели, рассмотрим две модели, выражающие зависимость вращающего момента от угла поворота физического маятника вокруг его оси:

$$1) M = M_{\max} \sin \theta,$$

$$2) M = M_{\max} \left( \theta - \frac{1}{6} \theta^3 + \frac{1}{120} \theta^5 \right).$$

Вторая модель получена по первой при помощи разложения гармонической функции в ряд Маклорена. Обе модели обладают сравнимой точностью. Первую следует назвать физической, так как она содержит минимальное число постоянных (параметры:  $M_{\max}$  — максимальный момент и  $\theta$  — угол отклонения маятника от горизонтали). Вторую обычно называют нефизической, поскольку число ее постоянных не минимизировано и они не поддаются простой физической интерпретации.

В алгоритмах МГУА полное описание является нефизической моделью, а модель, полученная из него в конце селекции (в случае успешной селекции по критерию минимума смещения), будет физической моделью (с. 240).

### Многорядные алгоритмы МГУА

*Алгоритм с линейными полиномами.* Различные алгоритмы МГУА отличаются друг от друга по виду опорной функции. В алгоритмах с линейными полиномами используются частные описания вида

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 y_j, \quad 0 < i < n,$$

где  $n$  — число входных аргументов.

Усложнение модели происходит только за счет увеличения числа учитываемых аргументов: на первом ряду селекции синтезируются модели, содержащие по два аргумента, на втором — по три и четыре аргумента, на третьем — до восьми аргументов и т. д. Число рядов можно наращивать до  $n - 1$  рядов, где все аргументы уже исчерпываются. Дальнейшее продолжение селекции не имеет смысла. В результате применения алгоритма получим линейные алгебраические уравнения регрессии с учетом требуемого числа запаздывающих аргументов (всего до 1000 аргументов).

Селекцию наиболее регулярных или наиболее несмещенных пар можно выполнить с «протекцией переменным» или без нее.

Поясним, что это такое. Как известно, в алгоритмах МГУА перебираются частные полиномы, составленные для всех возможных пар аргументов. Например, при четырех аргументах перебору подлежат следующие пары:

	$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_4$
$x_1$		$x_1, x_2$	$x_1, x_3$	$x_1, x_4$
$x_2$			$x_2, x_3$	$x_2, x_4$
$x_3$				$x_3, x_4$
$x_4$				

Если выбрать лучшие (по критерию селекции) пары из всех, то некоторые аргументы могут быть «выброшены» алгоритмом самоорганизации и не попадут в выходной полином. Если «насилно» оставить какой-нибудь аргумент, то нужно обязательно выбрать хотя бы одну пару, лучшую в строке данного аргумента. Последняя комбинация  $x_3, x_4$  при этом обязательно проходит селекцию, причем наблюдается снижение точности, связанное с уменьшением свободы выбора.

В алгоритмах МГУА с протекцией переменный выбор способа нормирования последних не влияет на результат. В алгоритмах без протекции результаты могут быть различными в зависимости от способа центрирования и нормирования. Поэтому без протекции переменным следует применять «знакопостоянное» нормирование по формулам вида  $x_i = \frac{x_i - x_{i\min}}{x_{i\max} - x_{i\min}}$  или сохранить абсолютный отсчет переменных (если обусловленность матриц достаточна).

*Алгоритм с ковариациями и с квадратичными частными описаниями.* В этом алгоритме используются следующие частные описания:

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j,$$

$$y_k = a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j + a_4 x_i^2 + a_5 x_j^2.$$

Сложность модели увеличивается от ряда к ряду селекции как по числу учитываемых аргументов, так и по степени. Степень полного описания быстро растет: на первом ряду — квадратичные описания, на втором — четвертой степени, на третьем — восьмой и т. д. В связи с этим минимум критерия селекции находится быстро, но не совсем точно. Кроме того, имеется опасность потери существенного аргумента, особенно на первых рядах селекции (в случае отсутствия протекции). Специальные теоремы теории МГУА устанавливают условия, при которых результат селекции не отличается от результата полного перебора моделей. Ошибка

многорядности равна нулю, если на каждом ряду селекции допускается участие исходных данных [29].

*Алгоритм со случайным выбором партнеров.* Рассмотренные алгоритмы МГУА предполагают полный перебор всех пар (комбинаций) аргументов или промежуточных переменных предыдущего ряда. В случае малой обусловленности матриц перебор расширяется и включает в себя пары переменных разных рядов, поэтому в задачах большой размерности для этого требуется слишком много времени счета. В работе [28] было показано, что число выбранных случайным образом пар не следует увеличивать более чем до двадцати. Именно при использовании такого случайного подхода к селекции (что соответствует селекции, наблюдаемой в природе) становится возможным решать задачи с числом аргументов до 1000 (включая запаздывающие аргументы).

*Алгоритм с последовательным выделением трендов.* Этот алгоритм представляет собой развитие идеи остаточного метода экстраполяции, применяемого в метеорологии. Обычно трендом называют кривую регрессии с одним аргументом — временем  $y = y(t)$ . В данном алгоритме и алгоритмах, рассматриваемых ниже, это понятие расширяется. Трендами называются уравнения регрессии по любому одному аргументу

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n).$$

Описываемый алгоритм использует частные описания в классе сумм отдельных трендов:

$$y = a_0 + a_1 f_1(x_1) + a_2 f_2(x_2) + \dots + a_m f_m(x_m).$$

Каждый из трендов может быть полиномом любой степени от одного аргумента.

При построении алгоритма МГУА сначала выделяется первый тренд и вычисляется разность (первый остаток) истинных значений функции и тренда. Затем этот остаток аппроксимируется вторым трендом и находится вторая разность (второй остаток) и т. д. Практически удается выделить до пяти-шести трендов, причем этот процесс продолжают до тех пор, пока снижается критерий селекции (внешнее дополнение). При переборе трендов с целью нахождения наиболее эффективного в список кандидатов в переменные  $x_1, x_2, \dots, x_m$  всегда следует включить время (текущее значение), даже если выделяется отдельный временный тренд  $f(t)$ . Измерять время с запаздываниями (как другие переменные) не нужно.

*Алгоритм МГУА с мультипликативными моделями.* В этом алгоритме используются частные описания в классе произведений отдельных трендов:

$$y = a_0 f(x_1) f_2(x_2) \dots f_m(x_m).$$

Сначала выделяется первый тренд и вычисляется первое частное (первый поправочный коэффициент), затем вычисляется второй тренд, второй поправочный коэффициент и т. д. Деление и выделе-

ние сомножителей продолжают до тех пор, пока это способствует снижению критерия селекции.

*Обобщенные алгоритмы МГУА.* Обобщенный алгоритм МГУА является оптимальным в классе сумм элементарных функций (например, степенных полиномов).

Обобщенный алгоритм использует опорную функцию, включающую в себя как произведения, так и суммы трендов. Поэтому он действительно является обобщенным и дает самые точные модели. В алгоритмах многоуровневого досрочного количественного прогноза он используется для получения так называемого «ведущего» или «опорного» прогноза. При прогнозе динамики аналогичную роль играет гармонический алгоритм МГУА. Рассмотрим две основные разновидности обобщенного алгоритма МГУА.

*Обобщенный алгоритм МГУА с полным перебором всех комбинаций трендов.* При полном переборе вариантов результирующее значение критерия селекции тем меньше, чем больше соответствует опорная функция выражению искомого закона. Пользуясь этим правилом, можно подобрать оптимальную опорную функцию в классе сумм или произведений трендов. Расширенный перебор возможных комбинаций элементарных опорных функций практически осуществим только при сравнительно небольшом числе входных аргументов. Поэтому первым этапом обобщенного алгоритма является применение уже известного алгоритма последовательного выделения трендов, в результате чего число аргументов снижается до трех — пяти.

Допустим, что в результате применения алгоритма МГУА с последовательным выделением трендов получено всего четыре тренда (кроме тренда по времени):

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4).$$

Тогда обобщенный алгоритм МГУА должен предусматривать перебор двенадцати комбинаций, реализующих класс сумм:

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_2) + f_3(x_3) + f_4(x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2; x_3, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_1, x_3, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_3) + f_2(x_1, x_2, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_4) + f_2(x_1, x_2, x_3);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_2) + f_3(x_3, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_3) + f_3(x_2, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1) + f_2(x_4) + f_3(x_2, x_3);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_3) + f_3(x_1, x_4);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_2) + f_2(x_4) + f_3(x_1, x_3);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_3) + f_2(x_4) + f_3(x_1, x_2);$$

$$\varphi_{+1} = f(t) + f_1(x_1, x_2, x_3, x_4).$$

В результате перебора указывается комбинация, дающая наиболее регулярное решение (минимум  $\Delta^2(B) \%$ ). В качестве критерия регулярности используется величина среднеквадратической ошибки, измеряемой на отдельной проверочной последовательности данных. Первое слагаемое (функция времени) называется трендом, а остальные слагаемые — остатком.

Разделение точек (узлов интерполяции) на обучающую и проверочную последовательности рекомендуется выполнять по комбинированному способу регуляризации [24].

Обобщенный алгоритм МГУА позволяет найти оптимальное разделение процесса на составляющие, имеющие различные аргументы.

Практические примеры успешного прогнозирования случайных процессов показывают, что низкочастотные составляющие этих процессов следует рассматривать как функции одних аргументов, а высокочастотные — как функции других. При этом число аргументов, достаточно точно определяющих собой низкочастотные составляющие, мало (один-два), а число аргументов для высокочастотных составляющих обычно велико.

Обобщенный алгоритм МГУА с многорядной селекцией проекторов. В предыдущем варианте обобщенного алгоритма МГУА выбор основывался на полном переборе всех возможных комбинаций аргументов. Такой перебор возможен только для малого числа аргументов (не более четырех — семи).

Принцип многорядной селекции комбинаций (самоорганизации) используется для сокращения перебора.

Известно, что метод наименьших квадратов можно рассматривать как операцию проектирования вектора выходной величины на плоскость аргументов. Теория проекторов рассматривает все алгоритмы МГУА как варианты применения последовательного проектирования векторов на каждом ряду селекции. Рассмотрим с этой точки зрения описанные выше алгоритмы МГУА и покажем, какое место занимает среди них обобщенный алгоритм МГУА с селекцией проекторов.

В основном алгоритме МГУА на каждом  $r$ -м ряду селекции выходная величина  $\varphi$  проектируется на гиперплоскости пар переменных  $[y_2^{ik} y_r^i]$ . При этом происходит отбор (селекция) по критерию минимума среднеквадратической ошибки на проверочной последовательности наиболее регулярных значений  $y_{r+1}^{ie}$ . Полное описание получают в виде полиномиального уравнения регрессии

$$\varphi = f(x_1, x_2, \dots, x_m),$$

исключая промежуточные переменные из частных описаний вида

$$y_{r+1}^{ie} = f_{iz}(y_r^{ik}, y_r^{iv}).$$

В алгоритме МГУА с последовательным выделением трендов выходная величина  $\varphi$  проектируется только на первом ряду. На втором и на последующих рядах селекции проектируется уже

остаток  $\Delta r = \varphi - f_r$  на ось наиболее эффективной переменной. Описание, приближающее функцию, имеет вид

$$f_{n+1} = P_j 0\varphi + P_j 1\Delta 1 + \dots + P_j n\Delta n,$$

где  $P_{ji} r\Delta r$  — частное описание в виде полинома степени  $l$  ( $0 \leq l \leq m$ ) по одной из наиболее эффективных переменных  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq S_1$ , отбираемых по коэффициенту корреляции;  $P_{ji}$  — оператор ортогонального проектирования (проектор) на подпространство  $L_j = \{x_i^0, x_i^1, \dots, x_i^m\}$  при ( $1 \leq j \leq (m+1) S_1$ ),  $j = (1, l)$ .

Выбирая оператор  $P_{ji}$  различными способами, можно получить все известные алгоритмы МГУА, отличные как от основного алгоритма, так и от алгоритма с последовательным выделением трендов. Например,  $P_{ji}$  можно представить в виде суперпозиции проекторов, отвечающих выбранному дереву МГУА. Следовательно, выражение для  $f_{n+1}$  задает множество алгоритмов МГУА, отличающихся по способу проектирования остатка.

Перебор алгоритмов по заданному критерию селекции позволяет найти оптимальный, обобщенный алгоритм МГУА. Вместо полного перебора проекторов для уменьшения размерности задачи рекомендуется применять поиск, основанный на принципах самоорганизации (селекции).

Процесс селекции алгоритмов может быть представлен в виде дерева (рис. 12), в котором на каждом ряду  $r$  ( $r > 1$ ) имеется  $(m+j) S_1 F$  вершин  $k_r^i$ , где  $m$  — максимальная степень частного полинома;  $S_1$  — число эффективных переменных;  $F$  — число остатков, отобранных в  $r$ -м ряду. При  $r = 1$  дерево имеет  $S_1 (m+1)$  узлов, а при  $r = 0$  — один (пустой) узел  $k_0$ .

Из каждого узла  $k_r^j$ -го ряда выходит  $S_1 (m+1)$  ветвей, тогда как в произвольный узел входит только одна ветвь. Фиксируя узел  $k_r^j$ , можно однозначно определить уравнение для  $f_{n+1}$ , которое ему соответствует.

Процесс селекции (отбора) в каждом ряду осуществляется в два этапа:

- 1) выделяется  $F$  остатков по критерию минимума среднеквадратической ошибки на отдельной проверочной последовательности;
- 2) каждый из остатков проектируется только на часть подпространства  $L_j$  ( $1 \leq j \leq S (m+1)$ ) из переменных  $x_i$  ( $1 \leq i \leq S_1$ ).

В общем случае в зависимости от хода процесса селекции дерево может быть произвольным. Целесообразность перебора различных способов проектирования оправдывается тем, что имеется

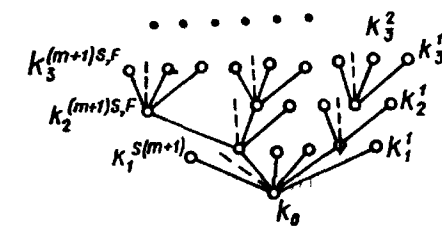


Рис. 12. Дерево алгоритма МГУА с последовательным выделением трендов (для  $F = 3$ ).

возможность получить уравнения регрессии произвольной сложности, тогда как последовательное выделение трендов приводит к уравнению только одного вида класса сумм

$$f_{n+1} = f(x_{11}) + \dots + f_m(x_{im}),$$

в котором отсутствуют ковариации аргументов.

Если в уравнении регрессии для  $f_{n+1}$  ограничиться только первым слагаемым, где  $P_{j,0}$  — оператор проектирования на все пространство, то алгоритм не отличается от обычного регрессионного анализа; если  $P_{j,0}$  — суперпозиция операторов, отвечающая дереву МГУА, то получится основной алгоритм МГУА; если  $P_{j,i}$  — проектор на подпространство  $L_j = \{x_1^0, x_1^1, \dots, x_1^n\}$  одной переменной, получим алгоритм с последовательным выделением трендов.

Сравнение и селекция по заданному критерию как этих двух крайних случаев, так и всех промежуточных используются для выбора модели оптимальной сложности. Оптимальный вид полного уравнения регрессии и соответствует обобщенному алгоритму МГУА.

Примеры показывают, что обобщенный алгоритм МГУА приводит к наиболее глубокому минимуму критерия селекции по сравнению с другими алгоритмами МГУА и, следовательно, обеспечивает наиболее достоверные и точные результаты моделирования. Недостатком обобщенного алгоритма является большой объем вычислительной программы, особенно при большом числе аргументов.

#### *Многорядный алгоритм МГУА с изменением свободы выбора по рядам селекции F-var*

Во всех описанных выше многорядных алгоритмах МГУА свободы выбора  $F$  (равная числу переменных, пропускаемых из одного ряда в следующий) назначалась постоянной ( $F = \text{const}$ ) или задавался закон ее изменения в функции номера ряда  $S_j$  (например,  $F = F_1 - \alpha S$ ). Величины  $F_1$  и  $\alpha$  подбираются при помощи проб.

В работе [72] предложен алгоритм, в котором свобода выбора определяется при помощи оценочного шага на один ряд вперед следующим образом.

Вектор переменных данного ряда обозначим через

$$y = y_1 y_2 y_3 \dots y_s.$$

Образует частные описания данного ряда:

$$z_1 = f(y_1, y_2), \quad z_2 = f_2(y_1, y_2), \dots,$$

$$z_p = f_p(y_{p+1}), \quad y_p, \quad \text{где } p = C_s^2.$$

Найдем значения критерия для каждого частного описания  $\delta_1^j$ ,  $\delta_2^j$ ,  $\delta_j^j$  и выберем наименьшее из них  $\delta_{\min}^j$ . Далее делаем оценочный шаг: временно пропускаем все переменные в следующий ряд и образуем частные описания вида

$$V_1 = f_1(z_1, z_2), \quad V_2 = f_2(z_1, z_3), \dots, \quad V_q = f_q(z_{q-1}, z_q),$$

где  $q = C_p^2$ .

Найдем значения критерия для каждого из них:  $\delta_1^{j+1}$ ,  $\delta_2^{j+1}$ ,  $\delta_q^{j+1}$ . Частные описания, для которых значение критерия последующего ряда меньше, чем наименьшее значение исходного ряда, т. е.  $\delta^{j+1} < \delta_{\min}^j$ , являются «перспективными», и только переменные, требующиеся для их образования, поступают в следующий ряд селекции. Таким образом, перспективные частные описания определяют свободы выбора  $F$  для каждого ряда.

В работе [28] подробно описана вероятностная форма алгоритмов МГУА (многорядная теория статистических решений).

#### *Многорядный алгоритм МГУА без применения пороговых самоотборов*

Организация поиска единственной модели оптимальной сложности может быть также реализована при помощи многорядного алгоритма, где вместо пороговых самоотборов применяется приравнивание нулю коэффициентов некоторого полинома на каждом ряду селекции. Из ряда в ряд пропускаются все переменные без пороговых самоотборов.

Получаемая при этом структура напоминает нейронную сеть. Такая сеть была разработана американской фирмой «Адаптроникс» для быстродействующей вычислительной системы «Гиперкомп-80» [46]. Сеть с элементами вида

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2$$

представлена на рис. 13. Структура может быть применена, когда в задаче содержится не более ста исходных переменных.

**Пример 9.** Адаптация трехрядной нейроподобной сети. Рассмотрим процесс адаптации (настройки) трехрядной сети. В каждом ряду имеется по три элемента. Входных переменных шесть:  $x_1, x_2, \dots, x_6$ . Уравнения элементов сети следующие:

$$y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2; \quad y_2 = b_0 + b_1 x_3 + b_2 x_4 + b_3 x_3 x_4;$$

$$y_3 = c_0 + c_1 x_5 + c_2 x_6 + c_3 x_5 x_6;$$

$$z_1 = a_0 + a_1' y_1 + a_2' y_2 + a_3' y_1 y_2; \quad z_2 = b_0 + b_1' y_2 + b_2' y_3 + b_3' y_2 y_3;$$

$$z_3 = c_0 + c_1' y_1 + c_2' y_3 + c_3' y_1 y_3;$$

$$V_1 = a_0'' + a_1'' z_1 + a_2'' z_2 + a_3'' z_1 z_2; \quad V_2 = b_0'' + b_1'' z_2 + b_2'' z_3 + b_3'' z_1 z_3;$$

$$V_3 = c_0'' + c_1'' z_1 + c_2'' z_3 + c_3'' z_1 z_3.$$

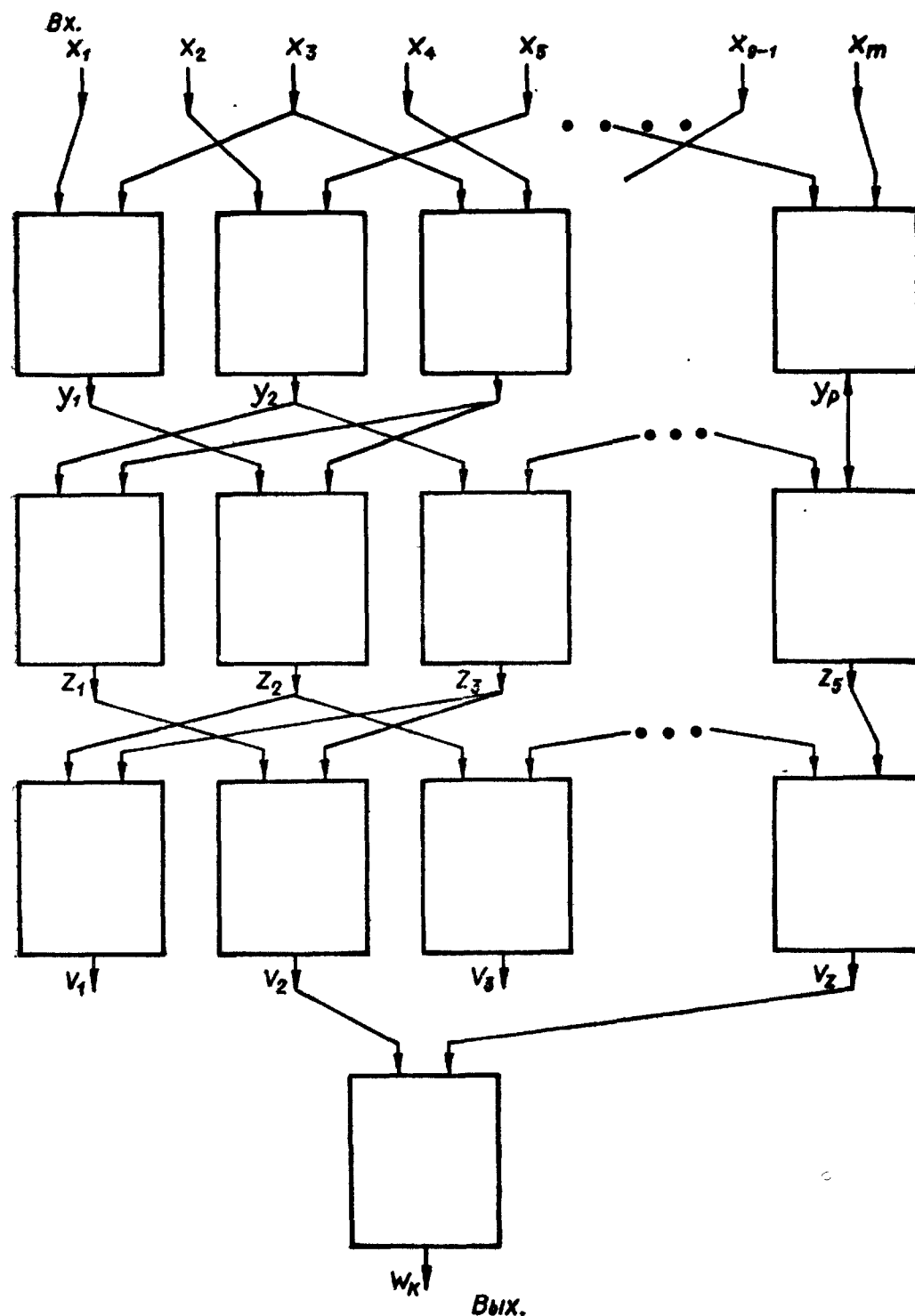


Рис. 13. Третья структура МГУА (нейроподобная сеть с приравниванием нулю коэффициентов).

Исходные данные (экспериментальные точки) удовлетворяют уравнению

$$V = 7 + 2(x_1 + x_2) + x_3 + x_4 + x_5 + x_6.$$

Требуется найти комбинацию значений коэффициентов уравнений всех элементов, при которой хотя бы один из выходов сети наиболее точно воспроизводит эту функцию.

В отличие от идеи «перебора нулей» в каждом ряду сети предположим, что коэффициенты частных описаний могут принимать три значения:  $a_i = -1$ ,  $a_i = 0$ ,  $a_i = +1$ . Переборы с большим числом дискретных значений коэффициентов требуют наличия вспомогательной вычислительной машины (процессора).

При трех уровнях полный перебор комбинаций (по критерию регулярности или несмещенности) дает следующий результат:

$$\begin{array}{cccc|cccc} a_0 = 1 & a_1 = 1 & a_2 = 0 & a_3 = 0 & b_0 = 1 & b_1 = 1 & b_2 = 1 & b_3 = 0 \\ a'_0 = 1 & a'_1 = 1 & a'_2 = 1 & a'_3 = 0 & b'_0 = 1 & b'_1 = 1 & b'_2 = 1 & b'_3 = 0 \\ a''_0 = 0 & a''_1 = 0 & a''_2 = 0 & a''_3 = 0 & b''_0 = 0 & b''_1 = 1 & b''_2 = 1 & b''_3 = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} c_0 = 1 & c_1 = 1 & c_2 = 1 & c_3 = 0 \\ c'_0 = 1 & c'_1 = 1 & c'_2 = 1 & c'_3 = 0 \\ c''_0 = 1 & c''_1 = 1 & c''_2 = 1 & c''_3 = 0. \end{array}$$

Полный перебор можно заменить случайным поиском оптимальных значений в пространстве коэффициентов.

*Многорядный пороговый алгоритм МГУА с занулением коэффициентов в каждом частном описании [43]*

Описываемый алгоритм объединяет в себе многорядный и комбинаторный алгоритмы МГУА.

Опишем алгоритм для случая  $n$  входных переменных:  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

На первом ряду селекции образуются  $C_n^2$  следующих множеств частных полиномов:

$$\begin{aligned} q_1^{(1)} &= a_0 + a_1 x_i, & q_1^{(2)} &= a_0 + a_2 x_j, \\ q_1^{(3)} &= a_0 + a_3 x_i x_j, & q_1^{(4)} &= a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j, \\ q_1^{(5)} &= a_0 + a_1 x_i + a_3 x_i x_j, & q_1^{(6)} &= a_0 + a_2 x_j + a_3 x_i x_j, \\ q_1^{(7)} &= a_0 + a_1 x_i + a_2 x_j + a_3 x_i x_j & \text{при } i &= 1, 2, 3, \dots, n, \\ & & & j = 1, 2, 3, \dots, n. \end{aligned}$$

Всего  $7 C_n^2$  полиномов. Из них (с протекцией отдельным переменным или без нее) выбирается  $F_1$  самых лучших по принятому критерию селекции. Если бы не применялось зануление коэффициентов, то сравнению подлежало бы всего  $C_n^2$  полиномов.

На втором ряду образуются  $C_{F_1}^2$  частных описаний второго ряда вида

$$q_2^{(k)} = a_0 + a_1 q_1^{(i)} + a_2 q_1^{(j)} + a_3 q_1^{(i)} q_1^{(j)} \quad \text{при} \quad \begin{cases} k = 1, 2, 3, \dots, 7, \\ i = 1, 2, 3, \dots, F_1, \\ j = 1, 2, 3, \dots, F_1. \end{cases}$$

Из них выбирается  $F_2$  лучших по критерию (обычно  $F_1 = F_2 = n$ ) и т. д.

**Правило останова.** Нарращивание рядов продолжается до тех пор, пока глубина минимума лучшего частного описания увеличивается. На последнем ряду выбирается единственное описание. Модель оптимальной сложности найдена.

*Алгоритм МГУА с предварительным  
ранжированием членов полного полинома  
по существенности*

Данный алгоритм можно пояснить так. Для перебора всегда, во всех алгоритмах МГУА, модели ранжируются по тому или другому внутреннему критерию. Напомним, что таблицы постепенного усложнения моделей

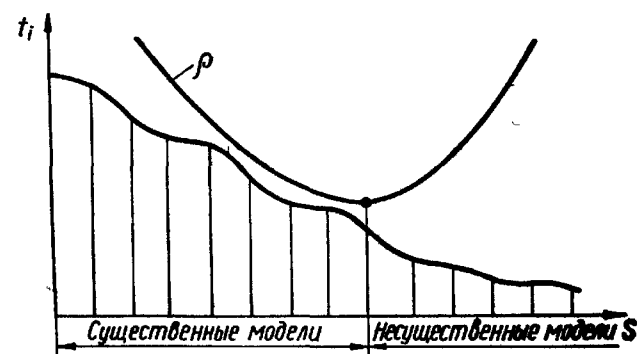


Рис. 14. Положение минимума комбинированного критерия определяет множество слагаемых полного полинома.

внешнего комбинированного критерия селекции.

После того как члены полного полинома ранжированы по критерию существенности в ряд

$$x_1 x_2 \dots x_n,$$

образуется ряд моделей с постепенно нарастающей сложностью:

$$y_1 = a_{0,-1} + a_{1,-1}x_1,$$

$$y_2 = a_{0,-2} + a_{1,-2}x_1 + a_{2,-2}x_2,$$

$$y_3 = a_{0,-3} + a_{1,-3}x_1 + a_{2,-3}x_2 + a_{3,-3}x_3,$$

$$\dots$$

$$y_n = a_{0,-n} + a_{1,-n}x_1 + \dots + a_{n,-n}x_n.$$

Для каждой модели определяется комбинированный критерий селекции. Ряд моделей наращивают, пока этот критерий снижается (рис. 14). Если модель, отвечающая минимуму критерия селекции, содержит не более двадцати слагаемых, применяют комбинаторный алгоритм МГУА. Если слагаемых больше, приходится перейти к многорядным селекционным алгоритмам МГУА.

**Пример 10.** Определение показателя существенности членов уравнения регрессии. Исходные данные приведены в табл. 8. Уравнение регрессии задано в виде

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2.$$

Требуется определить существенность всех трех членов правой части уравнения.

Согласно формуле

$$t_i = \frac{b_i}{\sqrt{d_i \hat{\sigma}^2}}$$

Таблица 8. Исходные данные для определения показателя существенности

	$y$	$x_1$	$x_2$
1	10	1	0
2	17	4	6
3	13	2	4
4	14	2	3
5	12	1	1
6	15	3	5

для определения показателя существенности  $t_i$  нужно рассчитать три величины:  $b_i$  — коэффициент  $i$ -го члена по методу наименьших квадратов;  $\hat{\sigma}^2$  — среднеквадратическая ошибка уравнения регрессии (отнесенная к числу степеней свободы);  $d_i$  — диагональный элемент матрицы, обратной к матрице уравнений Гаусса.

Вычисляем  $b_i$ .

Система условных уравнений имеет вид

$$10 = b_0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 0,$$

$$17 = b_0 + b_1 \cdot 4 + b_2 \cdot 6,$$

$$13 = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 4,$$

$$14 = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 3,$$

$$12 = b_0 + b_1 \cdot 1 + b_2 \cdot 1,$$

$$15 = b_0 + b_1 \cdot 3 + b_2 \cdot 5.$$

Система нормальных уравнений Гаусса (коэффициенты определяются по известным правилам) записывается так:

$$81 = b_0 \cdot 6 + b_1 \cdot 13 + b_2 \cdot 14$$

$$184 = b_0 \cdot 13 + b_1 \cdot 35 + b_2 \cdot 54$$

$$283 = b_0 \cdot 14 + b_1 \cdot 54 + b_2 \cdot 87$$

$$b_0 = \frac{1075}{112}; \quad b_1 = \frac{133}{112}; \quad b_2 = \frac{47}{112}.$$

Определим  $\sigma^2$  и  $\hat{\sigma}^2$ :

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^6 (y_i - y_{\text{табл}})^2 = \frac{263}{112}$$

(число переменных  $k = 2$ , число точек данных  $n = 6$ , число степеней свободы  $n - k - 1 = 3$ );

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sigma^2}{n - k - 1} = \frac{263}{3 \cdot 112}.$$

Находим  $d_i$ .

Матрица, обратная к матрице нормальных уравнений Гаусса, вычисляется так:

$$\begin{bmatrix} 6 & 13 & 19 \\ 13 & 35 & 54 \\ 19 & 54 & 87 \end{bmatrix} = \frac{1}{112} \begin{bmatrix} 129 & -105 & 37 \\ -105 & 161 & -77 \\ 37 & -77 & 41 \end{bmatrix},$$

$$\text{откуда } d_0 = \frac{129}{112}; \quad d_1 = \frac{161}{112}; \quad d_2 = \frac{41}{112}.$$



Определим показатели существенности:  
первого члена

$$t_0 = \frac{b_0}{\sqrt{d_0 \sigma^2}} = \frac{\frac{1075}{112}}{\sqrt{\left(\frac{129}{112}\right)\left(\frac{263}{3 \cdot 112}\right)}} = \frac{1075 \sqrt{3}}{\sqrt{129 \cdot 263}} \approx 10,13;$$

второго члена

$$t_1 = \frac{b_1}{\sqrt{d_1 \sigma^2}} = \frac{\frac{1075}{112}}{\sqrt{\left(\frac{129}{112}\right)\left(\frac{263}{3 \cdot 112}\right)}} = \frac{135 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{101 \cdot 263}} \approx 1,12;$$

третьего члена

$$t_2 = \frac{b_2}{\sqrt{d_2 \sigma^2}} = \frac{\frac{47}{112}}{\sqrt{\left(\frac{41}{112}\right)\left(\frac{265}{3 \cdot 112}\right)}} = \frac{47 \sqrt{3}}{\sqrt{41 \cdot 243}} = 0,8.$$

Чем больше  $t_i$ , тем более существенным является данное слагаемое полинома. Полученными показателями можно пользоваться непосредственно для сравнения существенности членов либо использовать таблицы доверительных интервалов для принятия или отбрасывания гипотезы о наличии данного члена в уравнении регрессии [1, 66]. Существенность полинома оценивается по наименьшему показателю из показателей всех его слагаемых.

*Выделение множества существенных членов полного полинома как средство уменьшения размерности и повышения обусловленности матриц.* Если объект моделирования таков, что глубокий минимум критерия удается найти до третьего-четвертого ряда селекции многорядного (порогового) алгоритма МГУА, то обычно никаких затруднений, связанных с обусловленностью матриц, не возникает. Однако с каждым новым рядом обусловленность ухудшается, и где-то после пятого ряда метод наименьших квадратов из-за плохой обусловленности дает неточные оценки коэффициентов. Доходит иногда до того, что добавление небольшого шума может улучшить точность моделирования, так как шум увеличивает обусловленность.

Эффективным средством повышения обусловленности является сокращение размерности матриц за счет устранения второстепенных (несущественных) членов полинома. Также эффективно разделение условных уравнений по правилу «параболы Тодуа» (см. рис. 6). Парабола обеспечивает минимальное число рядов селекции оптимальной модели. Для критерия минимума смещения парабола еще не строилась.

## Глубина минимума критерия селекции как показатель достоверности модели

Опыт моделирования сложных процессов и объектов по алгоритмам МГУА показал, что глубина минимума основного критерия селекции (критерия регулярности, минимума смещения или баланса переменных) является показателем успешности синтеза модели. Все параметры вычислительных алгоритмов МГУА, а также структура этих алгоритмов выбираются при помощи перебора ряда вариантов так, чтобы получить наиболее глубокий минимум.

Если при решении конкретной задачи достаточно глубокий минимум не получен, то это означает, что задача моделирования не решена. Необходимо принять ряд мер: вернуться к постановке задачи, изменить среду моделирования (список возможных переменных), снизить уровень шумов измерений, ввести новые виды опорных функций, всячески расширить область перебора моделей (увеличить свободу выбора по рядам селекции) и т. д. Только при достижении достаточно глубокого минимума основного критерия селекции можно быть уверенным, что задача моделирования решена.

Допустимый минимум зависит от интенсивности помех. Практически при обычно встречающейся точности измерения переменных, равной 5—10%, допустимая ордината минимума также не должна быть больше 0,05 (при отсчете переменных, нормированном по среднему). В случае, когда основным является критерий баланса переменных, указанная цифра должна быть достигнута при времени упреждения не менее пяти тактов.

Итак, требуется показать, что глубина минимума критерия селекции может служить мерой достоверности модели. Было бы желательно показать это в возможно более общем виде, хотя бы для моделей, достоверность которых можно было бы оценить при помощи методов математической статистики. Это в полном объеме еще не сделано, хотя имеется ряд конкретных примеров, подтверждающих прямую связь глубины минимума и показателей достоверности.

Приведем один из таких примеров, который показывает связь глубины минимума критерия регулярности и достоверности модели по дисперсионному критерию.

**Пример 11.** Связь дисперсионного критерия достоверности Фишера и глубины минимума критерия регулярности [27]. Покажем наличие прямой связи между дисперсионной оценкой достоверности модели по Фишеру и глубиной минимума среднеквадратической ошибки, измеряемой на отдельной проверочной последовательности точек (критерий регулярности).

Для этой цели возьмем процесс, описываемый суммой полиномиального тренда и случайного шума с нормальным распределением при нулевом среднем значении

$$y = f(x) + \eta,$$

Таблица 9. Исходные данные

$x$	$y$ при различной интенсивности шума			
	0%	5%	15%	35%
$6,0536 \cdot 10^{-3}$	1,0061	1,0132	1,1475	1,1224
8,9175	$5,6245 \cdot 10^3$	$5,4169 \cdot 10^3$	$5,3315 \cdot 10^3$	$4,9377 \cdot 10^3$
7,1556	$2,2655 \cdot 10^3$	$2,2515 \cdot 10^3$	$2,2420 \cdot 10^3$	$1,9761 \cdot 10^3$
1,2976	2,9479	2,9936	2,9589	2,7097
5,0814	$5,4158 \cdot 10^2$	$5,3903 \cdot 10^2$	$4,8819 \cdot 10^2$	$6,2789 \cdot 10^2$
9,3782	$6,9208 \cdot 10^3$	$7,0681 \cdot 10^3$	$7,6268 \cdot 10^3$	$7,5828 \cdot 10^3$
6,8838	$1,8753 \cdot 10^3$	$1,9270 \cdot 10^3$	$2,0314 \cdot 10^3$	$2,1845 \cdot 10^3$
1,1080	2,2549	2,3048	2,2961	2,3847
2,5442	$2,8974 \cdot 10^1$	$2,8583 \cdot 10^1$	$2,5826 \cdot 10^1$	$3,0326 \cdot 10^1$
$5,5227 \cdot 10^{-1}$	1,4769	1,4493	1,5629	1,2985
5,8548	$9,8120 \cdot 10^2$	$1,0033 \cdot 10^3$	$1,0278 \cdot 10^3$	$1,2398 \cdot 10^3$
6,3056	$1,3375 \cdot 10^3$	$1,3656 \cdot 10^3$	$1,3546 \cdot 10^3$	$1,3833 \cdot 10^3$
4,8620	$4,4975 \cdot 10^2$	$4,3920 \cdot 10^2$	$4,3913 \cdot 10^2$	$3,9957 \cdot 10^2$
3,8503	$1,6754 \cdot 10^2$	$1,6501 \cdot 10^2$	$1,7962 \cdot 10^2$	$1,8103 \cdot 10^2$
2,0865	$1,2956 \cdot 10^1$	$1,2736 \cdot 10^1$	$1,3955 \cdot 10^1$	$1,6327 \cdot 10^1$
$2,9784 \cdot 10^{-1}$	1,2793	1,2446	1,2708	1,3280
$7,6238 \cdot 10^{-1}$	1,6571	1,7096	1,6716	1,1130
2,4503	$2,4785 \cdot 10^1$	$2,5391 \cdot 10^1$	$2,6000 \cdot 10^1$	$2,6562 \cdot 10^1$
7,0981	$2,1889 \cdot 10^3$	$2,0996 \cdot 10^3$	$2,5924 \cdot 10^3$	$1,8473 \cdot 10^3$
1,6194	5,2501	5,1702	5,3030	5,3472
$7,0117 \cdot 10^{-1}$	1,5982	1,5391	1,6835	1,6940
1,1417	2,3526	2,3444	2,6751	2,0943
7,8544	$3,3302 \cdot 10^3$	$3,3358 \cdot 10^3$	$3,2649 \cdot 10^3$	$2,7987 \cdot 10^3$
5,0255	$5,1697 \cdot 10^2$	$5,2286 \cdot 10^2$	$5,6783 \cdot 10^2$	$5,4025 \cdot 10^2$
4,8316	$4,3399 \cdot 10^2$	$4,4646 \cdot 10^2$	$4,9666 \cdot 10^2$	$3,5380 \cdot 10^2$
8,6691	$5,0062 \cdot 10^3$	$4,6732 \cdot 10^3$	$5,3654 \cdot 10^3$	$4,6627 \cdot 10^3$
$8,3923 \cdot 10^{-1}$	1,8889	1,8583	2,0298	1,7967
5,0859	$5,4361 \cdot 10^2$	$5,4397 \cdot 10^2$	$5,2823 \cdot 10^2$	$4,3962 \cdot 10^2$
3,4728	$1,0804 \cdot 10^2$	$1,0641 \cdot 10^2$	$1,1803 \cdot 10^2$	$1,3391 \cdot 10^2$
2,5758	$3,0504 \cdot 10^1$	$2,9933 \cdot 10^1$	$3,1367 \cdot 10^1$	$3,0327 \cdot 10^1$
9,2743	$6,6108 \cdot 10^3$	$6,5441 \cdot 10^3$	$5,9524 \cdot 10^3$	$7,7676 \cdot 10^3$
2,2784	$1,8399 \cdot 10^1$	$1,7542 \cdot 10^1$	$1,9093 \cdot 10^1$	$2,0109 \cdot 10^1$
$7,8895 \cdot 10^{-2}$	$1,0784 \cdot 10^0$	1,0615	1,1356	0,8755
6,5478	$1,5648 \cdot 10^3$	$1,5603 \cdot 10^3$	$1,3198 \cdot 10^3$	$1,8760 \cdot 10^3$

где  $f(x) = 1 + x - x^3 + x^4$ ;  $\eta$  — шум (с регулируемой интенсивностью)

Указанные особенности необходимы для применения дисперсионного анализа, при котором ошибки измерения величины статистически независимы, а систематическая ошибка отсутствует.

Для ряда значений аргумента была составлена таблица исходных данных (табл. 9), содержащая 28 точек обучающей и 6 точек проверочной последовательностей. Способ разделения точек на последовательности случайный, соответственно таблице равномерно распределенных чисел. После заполнения таблицы исходных данных приведенный выше полином был «спрятан» и задача сводилась к его восстановлению по точкам.

Восстановление полинома проводилось по комбинаторному алгоритму МГУА. Напомним, что в этом алгоритме организуется полный перебор всех полиномов, которые получают из заданного степенного полинома, полагая некоторую часть его членов равными нулю. Каждый вариант укороченного полинома оценивается по критерию регулярности, чтобы найти наиболее регулярный из них.

Таблица 10. Результаты дисперсионного анализа

Дисперсия шума (% от средней выходной величины $y$ )	Среднеквадратическая ошибка на проверочной последовательности $\delta_{\min}^2$	Досто- верность модели $\hat{F}$	Недосто- верность $\hat{F}_1$	Довери- тельная вероят- ность $P$	Досто- верность модели $D$
0	$3,6462 \cdot 10^{12}$	—	—	—	—
5	$9,7785 \cdot 10^3$	0,9853	—	0,99	0,99
10	$4,1499 \cdot 10^4$	0,9827	—	0,99	0,99
15	$9,0629 \cdot 10^4$	0,9934	—	0,99	0,99
20	$1,3049 \cdot 10^5$	0,9676	—	0,99	0,99
25	$2,1202 \cdot 10^5$	0,8742	1,1461	0,50	0,50
30	$4,0538 \cdot 10^5$	0,8677	1,1536	0,50	0,50
35	$9,6251 \cdot 10^5$	0,7931	1,2628	0,75	0,25
40	$1,0429 \cdot 10^6$	0,7156	1,3972	0,90	0,10
45	$3,7836 \cdot 10^6$	0,6975	1,4338	0,95	0,05
50	$7,2674 \cdot 10^6$	0,6932	1,4416	0,95	0,05

Зависимости среднеквадратической ошибки  $\Delta^2(A)$  на проверочной последовательности от сложности модели при разных дисперсиях шума показаны графически на рис. 15. Точки каждого графика получены при разных реализациях случайного шума как наиболее вероятные значения. По абсциссе указан порядковый номер комбинации, т. е. наращивание сложности, а по ординате — величина среднеквадратической ошибки. Порядковый номер для выбранной нами исходной модели соответствует степени  $S = 13$ .

Из рис. 15 видно, что с увеличением интенсивности (дисперсии) шума глубина минимума критерия селекции уменьшается, а сам минимум сдвигается вправо: при увеличении шума алгоритм МГУА, действующий по критерию регулярности, выбирает все более простые модели.

Для исходной модели был проведен дисперсионный анализ, вычислена

оценка  $F = \frac{S_r^2}{S_e^2}$  и результаты показаны в табл. 10. С увеличением дисперсии

шума оценка достоверности  $F$  имеет тенденцию к уменьшению. Из таблицы видно, что при малых шумах она изменяется незначительно (примерно до 20%). В соответствующей таблице для  $F$ -распределения при числе степеней свободы  $\nu_1 = 44 - 4 = 40$  и  $\nu_2 = 44 \cdot 5 - 44 = 176$  при уровне значимости  $\alpha = 0,01$  и после соответствующей интерполяции для  $\nu_2$  находим  $F_{\text{табл}} =$

$= 1,6831$  и, следовательно, выполняется условие  $\hat{F} < F_{\text{табл}}$ . С вероятностью  $P = 0,99$  можно утверждать, что данная модель достоверна.

При дисперсии шума около 25% оценка Фишера  $\hat{F} = 0,8742$ . Если взять обратную величину  $\hat{F}_1 = \frac{1}{\hat{F}} = 1,1461$  и в таблице  $F$ -распределений найти табличное значение  $F'_{\text{табл}}$ , то оказывается, что с вероятностью  $P = 0,5$  можно считать, что правдоподобная альтернативная гипотеза  $S_l^2 > S_r^2$  или что остаточная дисперсия  $S_r^2$  и дисперсия, связанная с ошибкой измерения  $S_e^2$ , уже различаются и достоверность модели уменьшилась на 0,50. Величину  $\hat{F}_1$  можно условно назвать оценкой «недостоверности» модели. Рассуждая аналогично, при дисперсии шума 40% получаем  $\hat{F}_1 = \frac{1}{\hat{F}} = 1,2736$ , соответствующее ему  $F'_{\text{табл}} = 1,1678$  и доверительная вероятность того, что



$S_e^2 > S_r^2$  («недоверенность» модели)  $P = 0,75$ , т. е. достоверность модели  $D = 1 - 0,75 = 0,25$ . Все эти результаты показаны в табл. 10.

Достоверность исходной модели с увеличением дисперсии шума уменьшается. Модель как будто бы становится слишком сложной для описания исходных данных. Если провести дисперсионный анализ для более простых

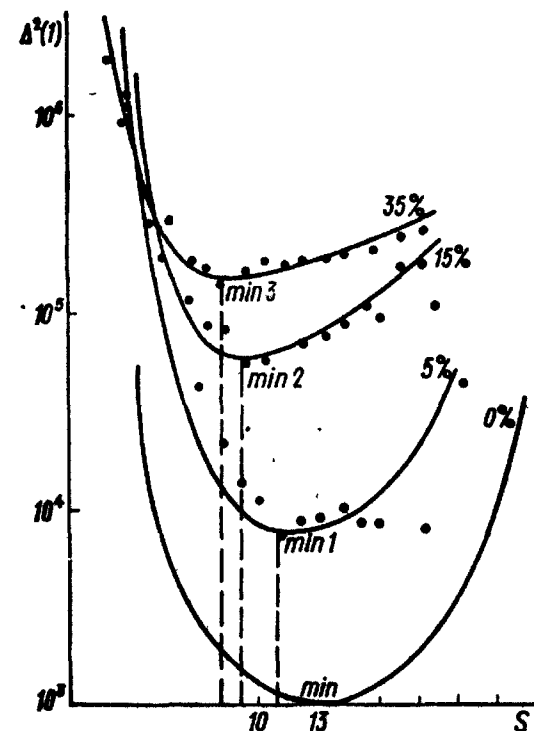


Рис. 15. Связь минимума критерия регулярности  $\Delta^2(B)$  и оценки достоверности Фишера.

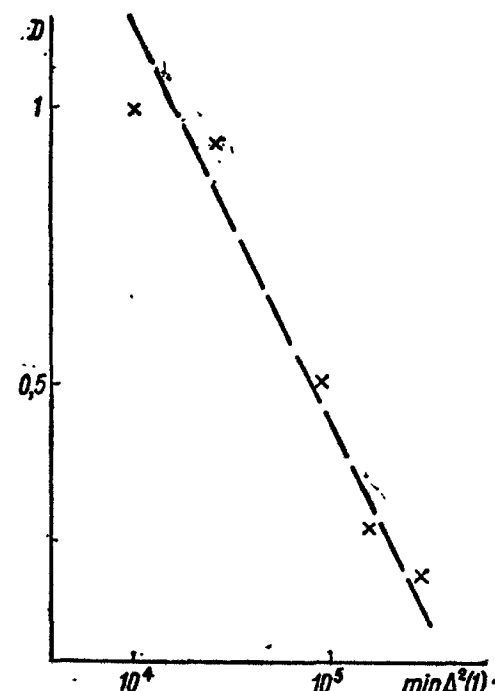


Рис. 16. Изменение среднеквадратической ошибки на проверочной последовательности ( $\Delta^2(B)$ ) при постепенном усложнении полиномиальной модели ( $S$ ).

моделей (соответствующих меньшей степени сложности  $S$ ), их оценки дисперсии  $F' = \frac{S_r^2}{S_e^2}$  при малых шумах отвечают очень маленькой достоверности.

С увеличением шума более достоверными становятся модели меньшей степени сложности, и грубые модели адекватно описывают исходные данные. Как указывалось выше, при исследовании изменения величины ошибки по проверочной последовательности в зависимости от степени сложности модели тоже заметна тенденция сдвига минимума ошибки к упрощению модели. Таким образом, подтверждается связь между достоверностью модели и величиной (глубиной) минимума среднеквадратической ошибки: чем больше достоверность, тем меньше глубина минимума критерия регулярности (см. рис. 15, 16).

### Оценки достоверности моделей МГУА

Многорядные алгоритмы МГУА позволяют получить модель в виде системы частных уравнений (моделей), у каждого из которых число коэффициентов значительно меньше числа заданных опытных данных. Следовательно, для каждого частного уравнения

легко определить число степеней свободы (равное разности числа точек и числа коэффициентов) и рассчитать оценки достоверности [20].

Исключая промежуточные переменные из системы частных описаний, рассматриваемых совместно, можно получить общую модель, в которой обычно число оцениваемых коэффициентов значительно больше числа опытных точек. Для общей модели показателем достоверности является глубина минимума критерия селекции. Этот показатель находится в обратной зависимости с критерием достоверности Фишера (см. рис. 15).

Алгоритм МГУА не исключает применения статистических критериев, хотя при этом теряется объективность метода: приходится назначать уровень значимости, выбирать доверительные интервалы, т. е. использовать те или другие субъективные пороги.

Многорядный алгоритм МГУА по своей структуре не имеет аналогов среди методов, известных в математической статистике, хотя получить статистические методы со структурой многорядного алгоритма МГУА можно, просто применив статистический критерий, что позволило бы пользоваться сравнительно малыми выборками данных, но при этом были бы потеряны целесообразность и объективный способ введения критериев. Кроме того, полученный таким образом многорядный статистический метод требовал бы (как и все статистические методы) нормального распределения помех и наличия стационарной генеральной совокупности данных.

Однорядный, комбинаторный алгоритм МГУА отличается от известных в математической статистике метода шаговой регрессии и метода всех возможных регрессий [20] тем, что в нем используются более целесообразные внешние критерии, непосредственно связанные с целью моделирования, причем благодаря поиску минимума не требуется субъективное назначение указанных порогов.

Алгоритм МГУА с предварительным ранжированием членов полного описания по существу отличается от метода включения и метода исключения [20] также более целесообразным выбором и менее субъективным способом использования критериев.

Напомним, что выбор критериев (а следовательно, и выбор метода моделирования) является прерогативой заказчика: одному нужна статистическая достоверность при априорно заданных ее границах, а другому — точность прогнозов и идентификации уравнений при максимальном обеспечении объективности выбора модели. Разные критерии и разные способы их применения приводят к выбору отличающихся друг от друга моделей.

Программы МГУА опубликованы в справочниках [62, 69]. Новые программы описаны в журнале «Автоматика».

Доказательства сходимости алгоритмов содержатся в работах П. И. Ковальчука и Ю. П. Юраковского (см. [24] и журнал «Автоматика», 1981 г., № 3).

**Определение терминов «точечная»  
и «пространственная» модели**

Во второй главе продолжается рассмотрение задач самоорганизации математической модели оптимальной сложности по небольшому числу опытных данных. Рассматривается самоорганизация точечных, гармонических и полиномиальных моделей по указанным выше критериям.

Если модель синтезируется по данным, в которых нет указаний о размещении измерителей (датчиков) в пространстве, то она называется точечной. В этом случае следует принять, что все измерения относятся к одной и той же точке пространства, что и поясняет термин «точечная модель». В точке измерений могут быть измерены как одна, так и несколько переменных процессов.

Если же в таблице опытных данных есть информация о расположении контрольно-измерительных пунктов (станций) в пространстве, то тогда можно синтезировать пространственную модель некоторого поля, характеризуемого единой или несколькими переменными.

Пространственные модели рассматриваются в последней, третьей, главе книги.

*Точечные гармонические модели.* При организации перебора моделей приходится выбрать вид опорной (базисной) функции.

Вопрос о выборе опорной функции для моделирования процесса, заданного в виде последовательности точек в таблице исходных данных, в сложных случаях решается по достигаемой глубине минимума критерия селекции: тот вид функции лучше, при котором достигается более глубокий минимум.

Однако практически во многих задачах вид кривой процесса априори подсказывает вид опорной функции (например, для гладких монотонных кривых следует применить алгебраические полиномиальные модели). Для колебательных процессов с нулевым средним значением рекомендуется применять гармонические модели. Если же колебательный процесс имеет установившиеся тенденции к росту или падению, то можно формировать модель, представляющую собой сумму полиномиального тренда и гармонического остатка.

В последующем разделе рассматриваются модели колебательных процессов, в которых не наблюдаются периодические повто-

рения. Как известно, такие процессы представляются в виде конечной суммы гармоник с некратными периодами  $w_i = w_{i-1} + \Delta w_i$ ,  $i = 2, 3, 4, \dots$ . Для колебательных процессов с повторяющимися циклами больше подходит разложение в гармонический ряд с кратными частотами (ряд Фурье), где  $w_i = iw_1$ ,  $i = 2, 3, 4$ .

Гармоническому анализу колебательных процессов при некратных частотах гармоник в прикладной математике уделялось недостаточно внимания.

**Алгоритм МГУА для выделения  
гармонического тренда оптимальной сложности  
по комбинированному критерию  
«минимум смещения плюс регулярность»**

Гармонический ряд с некратными частотами, используемый в качестве базисной функции, имеет вид

$$f(k) = A_0 + \sum_{j=1}^m [A_j \sin(k\omega_j) + B_j(k\omega_j)],$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$

Для того чтобы по наблюдениям процесса можно было оценить параметры базисной функции, необходимо выполнение неравенства  $N \geq 3m + 1$ ,  $N$  — такты отсчета времени  $t = k\Delta t$ .

Условимся называть гармоническим трендом оптимальной сложности сумму нескольких гармоник тригонометрического ряда, в которых коэффициенты  $A_j$  и  $B_j$  определены по методу наименьших квадратов, а число гармоник  $m$  и их частоты выбраны так, чтобы получить минимум некоторого внешнего критерия селекции.

В процессе разработки гармонических моделей сначала (до 1975 г.) использовался критерий регулярности либо комбинированный критерий «минимум смещения плюс регулярность»:

$$\rho_3 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(B)} \rightarrow \min.$$

Для определения  $n_{\text{см}}^2$  и  $\Delta^2(B)$  таблица исходных данных делится на две части:  $N = N_A + N_B$ , как описано выше. Число гармоник  $m$  постепенно увеличивалось, пока это приводило к снижению значения критерия:

первый ряд селекции  $m = 1$  (одна гармоника),  
второй  $m = 2$  (две гармоники),  
третий  $m = 3$  (три гармоники) и т. д.

Оптимизация частот  $\omega_1$  выполнялась также при помощи перебора (поочередного опробывания) дискретного ряда значений частот. В программе [24, 39] предусмотрено опробывание 10 000 значений частоты, начиная от  $\omega_{\min} = \frac{2\pi}{N}$ , по закону  $\omega_j = \omega_{\min} + k\Delta\omega$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots 10000$ .

Перебор частот и количества гармоник по комбинированному критерию приводит к значительной продолжительности счета (порядка пяти часов на машине БЭСМ-6). Поэтому был разработан другой алгоритм МГУА, основанный на аналитическом вычислении оптимальной частоты по критерию баланса ординат, дающем точное аналитическое определение частоты. Этот критерий требует, чтобы в любой момент времени выполнялось определенное соотношение между опережающими и запаздывающими ординатами полигармонического процесса. Продолжительность расчета прогноза на машине БЭСМ-6 при этом сокращается с пяти часов до пяти минут, причем точность прогнозирования (в данном случае среднегодового стока р. Днепр) несколько повысилась, что подтвердилось в течение шести лет наблюдений.

**Критерий баланса ординат  
для гармонического анализа  
колебательных процессов  
с некратными частотами [10, 69]**

При решении задачи прогнозирования обычно различают интервал интерполяции, на котором заданы экспериментальные точки, и интервал экстраполяции, где собственно и требуется прогноз.

Как указывалось, основная идея критерия баланса состоит в том, что эвристически устанавливается некоторое свойство процесса, точно выполняющееся на всем участке интерполяции. Критерий баланса выражает собой требование всемерного сохранения этого свойства как на отрезке интерполяции, так и на отрезке экстраполяции (прогноза).

Можно установить некоторое свойство гармонических функций, точно выполняющееся на интервале интерполяции и, следовательно, удобное для построения критерия баланса, требующего, чтобы это свойство было сохранено и на интервале экстраполяции (прогнозирования). В связи с этим в качестве критерия селекции с 1975 г. используется особый критерий, получивший название критерия баланса ординат гармоник.

На рис. 17 показан пример определения частот при выделении одной и двух гармоник\*. Зная частоты, легко по методу наименьших квадратов определить их амплитуды и значение критерия для каждого варианта гармонического тренда.

Пусть некоторая функция  $f(k)$  представляет собой сумму  $m$  гармонических составляющих с некратными частотами и задана своими значениями на интервале длиной  $N$  ( $1 \leq k \leq N$ ).

Используя известные тригонометрические представления синуса и косинуса суммы аргументов и проводя преобразования для

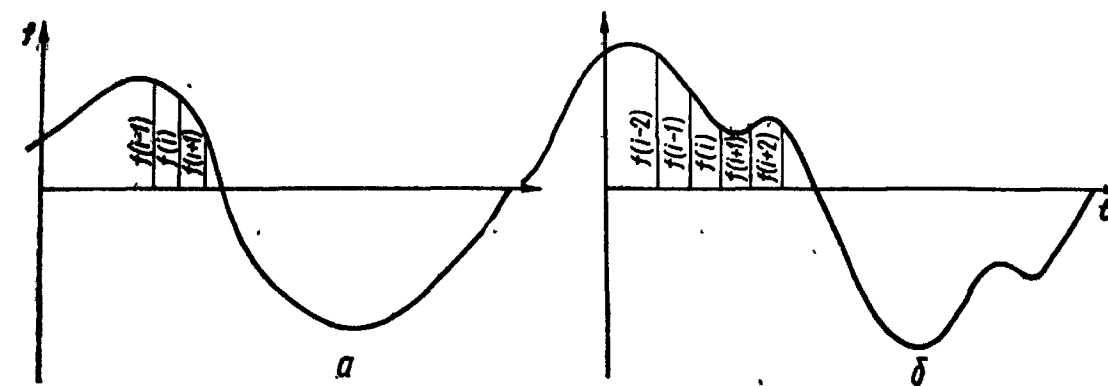


Рис. 17. Определение частот гармоник по критерию баланса ординат:

$a$  — одна гармоника  $2 \cos w = \frac{f(i+1) + f(i-1)}{f(i)}$ ;  $\omega = ?$   
 $\delta$  — две гармоники:  $a_1 = a_2 \cos \omega_1 = \cos 2\omega_1$ ;  $a_1 + a_2 \cos \omega_2 = \cos 2\omega_2$ ;  $\frac{f(i+2)}{\cos \omega_2} = \frac{2f(i) + f(i-2)}{\cos \omega_2}$

некоторой фиксированной точки  $i$  и произвольного  $p$ , запишем

$$f(i+p) + f(i-p) = 2 \sum_{k=1}^m \cos(p\omega_k) [A_k \sin(\omega_k i) + B_k \cos(\omega_k i)].$$

Суммируя эти зависимости по всем  $p = 0, 1, \dots, m-1$  с некоторыми весами  $a_p$ , получим

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p [f(i+p) + f(i-p)] = 2 \sum_{p=0}^{m-1} a_p \sum_{k=1}^m \cos(p\omega_k) [A_k \sin(\omega_k i) + B_k \cos(\omega_k i)].$$

Меняя в правой части порядок суммирования, перепишем сумму в виде

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p [f(i+p) + f(i-p)] = \sum_{k=1}^m [A_k \sin(\omega_k i) + B_k \cos(\omega_k i)] \left[ 2a_0 + 2 \sum_{p=1}^{m-1} a_p \cos(p\omega_k) \right].$$

Поскольку по предположению частоты  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$  различны, матрица

$$M = \begin{bmatrix} 1 \cos \omega_1 & \cos 2\omega_1 & \dots & \cos ((m-1)\omega_1) \\ 1 \cos \omega_2 & \cos 2\omega_2 & \dots & \cos ((m-1)\omega_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 \cos \omega_m & \cos 2\omega_m & \dots & \cos ((m-1)\omega_m) \end{bmatrix}$$

\* Аналогичные формулы приведены в справочнике [50, с. 693].

[illegible]
$$a_0 + \sum_{p=1}^{m+1} a_p \cos(p\omega_k) = \cos(m\omega_k), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$
$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p [f(i+p) + f(i-p)] =$$

$$= \sum_{k=1}^m [A_k \sin(\omega_{ki}) + B_k \cos(\omega_{ki})] 2 \cos(m\omega_k) = f(i+m) + f(i-m).$$

$$b_i = f(i+m) - \sum_{p=0}^{m-1} a_p [f(i+p) + f(i-p)] + f(i-m).$$

Например, для аппроксимации процесса одной гармоникой получим (рис. 17, а)

$$f(i) = \frac{f(i+1) + f(i-1)}{2 \cos \omega},$$

$$\begin{aligned} f(i+2) &= a_1 [2f(i)] + a_2 [f(i-1) + f(i+1)] - f(i-2), \\ \begin{cases} a_1 + a_2 \cos \omega_1 = \cos 2 \omega_1, \\ a_2 + a_2 \cos \omega_2 = \cos 2 \omega_2 \end{cases} \end{aligned}$$

### Уравнение для произвольной частоты

$$a_0 + \sum_{p=1}^{m-1} a_p \cos (p\omega) = \cos (m\omega)$$

где коэффициенты  $p_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, m - 1$ , являются функциями параметров  $a_p$ ,  $p = 0, 1, \dots, m - 1$ . Это уравнение  $m$  корней, которые однозначно определяют  $m$  частот  $\omega_k$ . Алгоритм с перебором частот остается необходимым, если часть данных в таблице отсутствует.

Пусть данные экспериментальных или натуральных наблюдений представлены в виде дискретного ряда значений процесса. Некоторая часть таблицы, содержащая обычно первые или последние во времени точки наблюдения, выделяется в так называемую вторую проверочную (или экзаменационную) последовательность данных  $N_C$ . Остальные точки разбивают на две части: первая (обучающая) содержит  $N_A$  последовательных значений таблицы исходных данных, вторая составляет проверочную последовательность  $N_B$ . Всего точек  $N = N_A + N_B + N_C$ . По точкам последовательности  $A + B$  с помощью критерия баланса  $B_{A+B} \rightarrow \rightarrow \min$  определяются оценки коэффициентов уравнения баланса

$a_p$ . Благодаря линейному вхождению параметров  $a_p$  здесь применима стандартная процедура метода наименьших квадратов. Система условных уравнений имеет вид

$$\sum_{p=0}^{m-1} a_p [\tilde{f}(i+p) + \tilde{f}(i-p)] = \tilde{f}(i+m) + \tilde{f}(i-m),$$

$$i = m+1, \dots, N_A + N_B - m.$$

На первом ряду селекции по всем заданным точкам выделяются всевозможные тренды с одной, двумя, тремя и т. д. гармониками: максимальное число гармоник  $m_{\max} \leq \frac{N}{3}$ . Из них выбирается не единственный тренд, а  $F$  трендов, в наибольшей степени удовлетворяющих критерию баланса ординат или дающих наибольшую точность прогноза на проверочной последовательности. После этого вычисляются  $F$  остатков (остатком называется разность ординат процесса и каждого из трендов первого ряда).

На втором ряду селекции из каждого остатка снова по всем заданным точкам выделяется  $m_{\max}$  трендов второго ряда селекции с числом частот от единицы до  $m_{\max}$  соответственно. Из всего множества  $Fm_{\max}$  полученных трендов второго ряда по тому же критерию селекции выбирается  $F$  лучших трендов этого ряда. Величину «свободы выбора»  $F$  следует подобрать при помощи ряда проб. Тренды выделяются по всем точкам, а выбор лучших трендов выполняется по точкам отдельной проверочной последовательности.

Описанная процедура повторяется и во всех последующих рядах селекции. Сложность модели (число рядов селекции) увеличивается до тех пор, пока уменьшается величина разбаланса в уравнениях баланса ординат на проверочной последовательности точек.

На последнем ряду выбирается единственное решение, отвечающее минимуму отклонений от критерия баланса ординат. Таким образом, в результате селекции оптимизируется как число гармоник, так и число выделяемых остатков.

*Повышение помехоустойчивости многорядного алгоритма МГУА для выделения гармонического тренда по критерию баланса ординат*

Примеры показали, что алгоритм МГУА с критерием баланса ординат является весьма эффективным в случае сравнительно малых помех, наложенных на временный ряд. Однако в случае значительных помех непосредственное применение описанного алгоритма наталкивается на некоторые трудности. Среди корней уравнения степени  $m$  относительно  $\cos \omega$

$$\alpha_0 + \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j \cos j\omega = \cos m\omega$$

не все корни удовлетворяют естественному ограничению  $|\cos \omega| \leq 1$ , что приводит к уменьшению количества искомых частот  $\omega_j$  и нарушению условий работы алгоритма.

Для устранения указанного эффекта, вызываемого большой интенсивностью помех, в работе [12] предложено находить оценки балансных коэффициентов  $\alpha_j$  по скользящим средним  $\bar{Y}_k$ , вычисляемым по исходному временному ряду

$$\bar{y}_k = \frac{1}{l} \sum_{t=1}^m y_{k+t-1}.$$

Это преобразование, являясь по существу фильтром помех, изменяет соотношение амплитуд гармонических составляющих, но оставляет неизменными частоты полигармонического тренда. Действительно,

$$\begin{aligned} \bar{y}_k &= \frac{1}{l} \sum_{t=1}^l y_{k+t-1} = \\ &= A_0 + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^m [A_j \sin((k+t-1)\omega_j) + B_j \cos((k+t-1)\omega_j)] = \\ &= A_0 + \sum_{j=1}^m [\bar{A}_j \sin(k\omega_j) + \bar{B}_j \cos(k\omega_j)]. \end{aligned}$$

Балансовые коэффициенты  $\alpha_j$  находятся из условия минимизации невязки  $B = \sum_{k=m}^{N-m-1} b_k^2$  уравнений баланса ординат

$$\sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j (\bar{y}_{k+j} + \bar{y}_{k-j}) - (\bar{y}_{k+m} + \bar{y}_{k-m}) = \bar{b}_k,$$

$$k = m, m+1, \dots, N-m-2l.$$

Наиболее эффективные прогнозы колебательных процессов по зашумленным данным получаются по усредненным (за три — пять тактов) данным при использовании комбинированного критерия

$$\rho_2 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + B^2} \rightarrow \min.$$

Для сокращения программы можно заменить комбинированный критерий  $\rho_2$  последовательным применением критериев  $n_{\text{см}}^2 \rightarrow \min$ ,  $B^2 \rightarrow \min$  по очереди. От сглаженных значений можно вернуться к годовым двумя способами: 1) пересчетом по формуле сглаживания или 2) подбором по критерию баланса прогнозов, годовых значений и сглаженного. В первом случае выигрыш по точности полностью теряется, а во втором — нет.

Пример 12. Восстановление суммы шести гармоник по алгоритму МГУА. Описанные выше алгоритмы проверялись на тестовом примере. Значения  $f(n)$  на интервале  $n = 1, 2, \dots$

..., 27 были рассчитаны как сумма шести гармонических составляющих (рис. 18) с параметрами, приведенными в табл. 11. Параметры процесса  $\omega_k, A_k, B_k$ , восстановленные по  $f(n)$ , отличались от исходных лишь в седьмой значащей цифре. Абсолютная среднеквадратическая ошибка восстановления  $\delta = 10^{-7}$ .

Пример 13. Самоорганизация модели, прогнозирующей среднегодовой сток р. Днепр на десять лет вперед.

Одно из главных применений рассматриваемых гармонических моделей — моделирование изменения стока рек во времени.

Принцип самоорганизации при помощи перебора моделей с постепенным их усложнением позволяет найти модели для прогноза речного стока в виде суммы гармонического ряда и полинома.

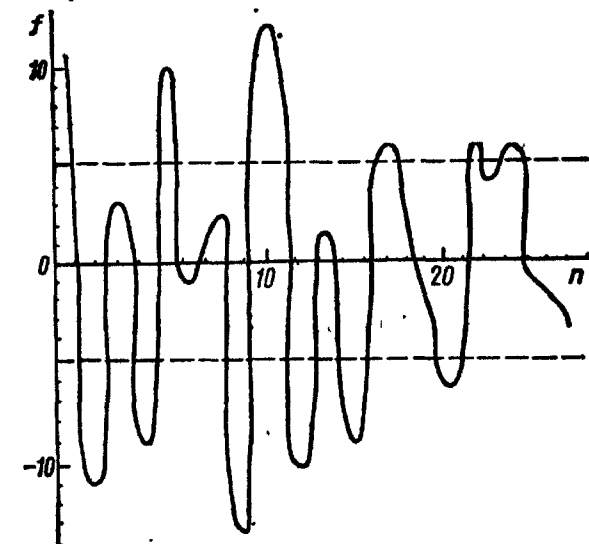


Рис. 18. График колебательного процесса, содержащего шесть гармоник, восстановленных по алгоритму МГУА.

Для этой задачи были синтезированы модели, которые можно представить суммой так называемых тренда и остатка:

$$Q = f_1(t) + f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где  $f_1(t)$  — тренд, сумма оптимального числа гармоник с некратными периодами;  $f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  — остаток, степенной полином оптимальной сложности, учитывающий влияние на сток различных факторов среды.

Например, в результате моделирования стока рек Днепр и Северский Донец оказалось, что значение остатка невелико. Машина учит нас: сток рек в основном определяется в функции времени и для его анализа и прогнозирования можно применить выделение гармонического тренда при некратных частотах.

Исходные данные, приведенные в табл. 12, были использованы для прогнозирования среднегодового стока р. Днепр на интервале экстраполяции  $T_y = 10$  лет (с 1971 по 1980 г. включительно) с использованием критерия баланса ординат. Данные о стоке р. Днепр за сто лет (с 1871 по 1970 г. включительно) были использованы для обучающей (95 точек) и проверочной (5 точек) последовательностей. В качестве второй проверочной (экспериментальной) последовательности использовалась часть интервала прогнозирования: данные за 1971—1976 гг. (шесть точек последовательности с).

Результаты прогноза приведены в табл. 13.

По алгоритму с перебором дискретных значений частот (разработанному Н. Н. Тодуа [24, 39]) ошибка прогноза  $\Delta^2(C) = 17,2\%$ . По алгоритму с аналитическим определением частот (по критерию баланса ординат, разработанному В. Н. Высоцким [10]) ошибка прогноза равна:

при  $F = 1$   $\Delta^2(C) = 20,2\%$ ,

при  $F = 5$   $\Delta^2(C) = 11\%$ .

Эффективность прогноза показана на рис. 19, где изображены прогнозы стока р. Днепр со временем упреждения  $T_y = 10$  лет при определении частот с помощью перебора [24] и аналитического расчета по формулам из работ [10, 50].

Как видно, действительно алгоритм с вычислением частот не уступает в точности алгоритму с перебором частот, а время счета во много раз меньше.

Таблица 11. Данные для тестового примера восстановления суммы шести гармоник по алгоритму МГУА

Номер гармоник	$\omega_i$	$A_i$	$B_i$	Номер гармоник	$\omega_i$	$A_i$	$B_i$
1	0,6813443	1	1	4	1,760017	4	2
2	1,076440	2	1,414214	5	2,204802	5	2,236068
3	1,162214	3	1,732051	6	2,233384	6	2,440490

Таблица 12. Среднегодовой сток р. Днепр возле Киева

Год	Сток	Год	Сток	Год	Сток
1871	1740	1909	1440	1947	1340
1872	1500	1910	1070	1948	1490
1873	970	1911	1120	1949	1080
1874	700	1912	1640	1950	933
1875	790	1913	1610	1951	1300
1876	1840	1914	1440	1952	1010
1877	2400	1915	1900	1953	1540
1878	1700	1916	1800	1954	842
1879	2290	1917	1960	1955	1350
1880	1400	1918	1140	1956	1590
1881	1320	1919	1670	1957	1360
1882	964	1920	1220	1958	2160
1883	1690	1921	1595	1959	1300
1884	1210	1922	1460	1960	1080
1885	1060	1923	1420	1961	1150
1886	1310	1924	1510	1962	1700
1887	1190	1925	768	1963	1250
1888	1670	1926	1600	1964	992
1889	1600	1927	1580	1965	1100
1890	1160	1928	1580	1966	1580
1891	1260	1929	1550	1967	1400
1892	949	1930	984	1968	1200
1893	1480	1931	2080	1969	1340
1894	1300	1932	2100	1970	2490
1895	1960	1933	2270	1971	1830
1896	1630	1934	1640	1972	1030
1897	1350	1935	1430	1973	1060
1898	1030	1936	1290	1974	1360
1899	1120	1937	1270	1975	1550
1900	1400	1938	1310	1976	1300
1901	1080	1939	905	1977	1100
1902	1580	1940	1460	1978	1000
1903	1400	1941	1890	1979	1450
1904	943	1942	1910	1980	1300
1905	1510	1943	882		
1906	1740	1944	1270		
1907	1690	1945	1230		
1908	1840	1946	1160		



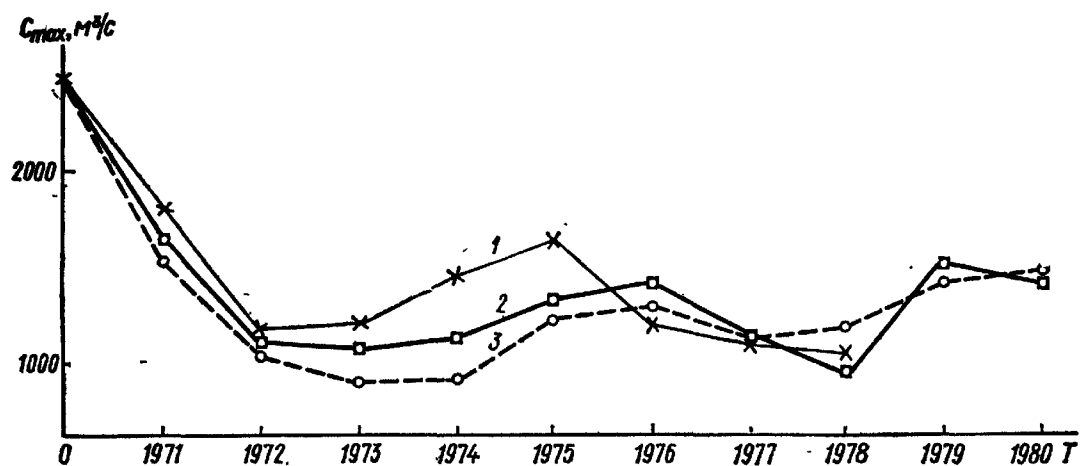


Рис. 19. Проверка долгосрочного прогноза стока Днепра (возле Киева): 1 — наблюдения (с учетом изъятия); 2 — прогноз с перебором частот; 3 — прогноз с аналитическими определениями частот.

В табл. 14 приведены параметры гармонического тренда оптимальной сложности, давшего наименьшее значение  $\Delta^2(C)$  на экзаменационной последовательности.

Колебательные процессы выражаются суммой гармонических составляющих с кратными или некратными частотами.

Эти суммы являются решениями (интегралами) некоторых дифференциальных уравнений, которые можно представить в виде их разностных аналогов. Идентификация разностных уравнений представляет вторую возможность применения МГУА для моделирования колебательных процессов, например для прогнозирования стока рек. Поэтому мы продолжим рассмотрение задач прогноза колебательных процессов в последующих разделах данной главы, однако уже на уровне использования разностных уравнений и критерия баланса прогнозов.

#### Точечные алгебраические и разностные модели

Как указывалось, точечными можно назвать модели, построенные при помощи МГУА по таблице опытных данных, в которой не указано размещение датчиков (или контрольно-измерительных станций) в пространстве.

Точечная модель называется полиномиальной, если ее опорная функция является полиномом. Одномерная точечная полиномиальная модель содержит полином от одной переменной, а многомерная — от многих.

В таблице опытных данных заданы так называемые точки — результаты одновременного замера ряда переменных объекта. Если в таблице отображен процесс (изменение переменных во времени), то обычно измерения следуют одно за другим через равные промежутки времени, называемые тактами или шагами:  $t = k\Delta t$ .

Таблица 13. Результаты прогнозов стока р. Днепр (возле Киева), вычисленные по данным за 1971—1980 гг. по алгоритмам

Год	Прогноз по гармоническому тренду в зависимости от критерия селекции и свободы выбора			Действитель- ные значения стока
	Критерий регулярно- сти $\Delta(B)$	Критерий баланса переменных		
1971	1635	1560	1600	1830
1972	1061	1266	1095	1030
1973	909	795	1128	1060
1974	925	1018	1156	1300
1975	1218	1326	1344	1550
1976	1328	1284	1580	1300
1977	1145	1219	1132	1100
1978	1197	1480	1973	1000
1979	1413	1787	1586	1450
1980	1500	1641	1435	—
Ошибка прогноза $\Delta^2(c)$ , %				
за шесть лет	17,2%	20,2%	11,0%	—

Таблица 14. Структура оптимального гармонического тренда

Номер ряда	Количество гармонических составляющих	Период, лет	Коэффициент	
			$A_j$	$B_j$
1	4	14,48	26,9	2,8
		5,80	34,3	2,7
		3,33	—72,6	—11,7
		2,18	6,6	48,5
		17,90	5,8	—79,3
		7,16	0,8	45,4
2	5	4,25	—48,2	—46,9
		2,96	6,3	46,1
		2,28	—93,7	6,9
		28,69	95,7	—10,4
		10,12	—72,9	—8,4
		6,93	35,9	5,5
3	8	4,86	—90,1	45,6
		3,60	—100,1	3,0
		2,92	28,9	1,2
		2,43	50,3	—69,5
		2,15	—7,8	—19,0
		23,45	—51,4	—9,6
4	7	9,32	—132,2	45,1
		5,48	92,8	—40,4
		4,17	53,3	31,7
		3,13	—3,0	22,9
		2,54	—1,7	—22,6
		2,18	—13,2	46,0



Нетрудно при помощи суммирования и вычитания цифр отдельных столбцов получить значения табличных сумм и табличных разностей для каждого такта времени  $k$  и для каждой переменной  $x_i$ :

$$\dots \sum_1^k \sum_1^k x_i, \sum_1^k x_i, x_i, \Delta x_i, \Delta^2 x_i \dots$$

Все эти новые переменные, полученные таким образом, не зависят друг от друга (связаны через операцию, аналогичную интегрированию или дифференцированию). Каждая таблица процесса содержит в себе достаточную информацию для построения самых разнообразных интегро-дифференциальных, дифференциальных и алгебраических моделей \*. Наибольшее применение нашли два типа моделей: алгебраические (статические) и разностные (динамические).

В зависимости от порядка считывания данных можно синтезировать алгебраическую модель, например  $q = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + t^m$ , или разностную модель, например  $q_{+1} = a_0 + a_1 q_0 + a_2 q_{-1} + a_3 q_{-2} + \dots + a_m q_{-m}$ .

В случае, когда модель содержит алгебраическую и разностную части, обычно оказывается, что они имеют разные и не зависящие друг от друга аргументы. Аргументами алгебраической части служат координаты пространства и времени, остальные аргументы учитываются в разностной части.

Модели, содержащие алгебраическую и разностную части, представим так:

одномерная модель

$$q_{+1} = f_1(t_{+1}) + f_2(q_0 q_{-1} q_{-2} \dots q_{-\tau}),$$

двумерная модель

$$q_{+1} = f_1(t_{+1}) + f_2(q_0 q_{-1} q_{-2} \dots q_{-\tau} x_0 x_{-1} x_{-2} \dots x_{-\tau}),$$

многомерная модель

$$q_{+1} = f_1(t_{+1}) + f_2[q_0 q_{-1} q_{-2} \dots q_{-\tau}$$

$$x_{+ (0)} x_{1(-1)} x_{1(-2)} \dots x_{1(-\tau)}$$

$$x_{2(0)} x_{2(-1)} x_{2(-2)} \dots x_{2(-\tau)}$$

$$x_{n(0)} x_{n(-1)} x_{n(-2)} \dots x_{n(-\tau)}],$$

где  $f_1(t_{+1})$  — функция источника (остаток) (обычно — полином не выше второй степени);  $f_2$  — степенной полином степени  $\tau$ ;  $x_1 x_2 \dots x_n$  — вспомогательные переменные, коррелированные с выходной переменной  $q$ .

\* Строго говоря, разностные уравнения также представляют собой алгебраические уравнения, но эти уравнения связывают табличные разности, т. е. являются специфическими алгебраическими уравнениями.

Интересная особенность синтеза разностных моделей состоит в следующем: в таблице исходных данных можно определить не только «передние», но и «средние» и «задние» разности (рис. 20):

$$\Delta q_{\text{пер}} = (q_{+1}) - (q_0),$$

$$\Delta q_{\text{сред}} = \frac{1}{2} [(q_{+2}) - (q_{-1})],$$

$$\Delta q_{\text{задн}} = (q_0) - (q_{-1}).$$

Уравнения остаются действительными для любого типа разностей. В число аргументов уравнений вводить производные

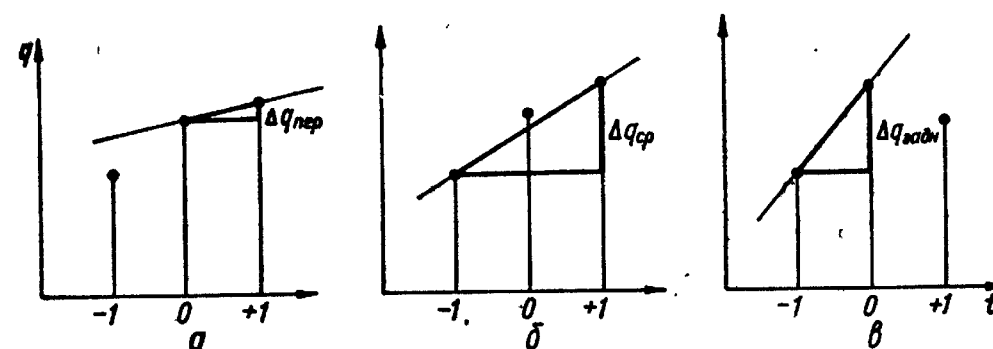


Рис. 20. «Передняя» (а), «средняя» (б) и «задняя» (в) разности.

(разности) отдельно не следует, так как они легко выражаются через ординаты исходных переменных, которые уже используются в качестве аргументов в указанном выше уравнении.

Кроме того, действует так называемое правило переиндексации: изменение индексов всех переменных на одно и то же число тактов не нарушает действия уравнения. Например, если  $y_{+1} = 0,1 + 0,2y_0$ , то будет действительным уравнение вида  $y_{+1+k} = 0,1 + 0,2y_{0+k}$ , где  $k$  — любое целое число,  $k = 1, 2, 3, \dots, n$ .

*Конечно-разностные уравнения  
авторегрессионного типа  
и их линейные шаблоны*

Точечным моделям соответствует дифференциальное уравнение с аргументом-временем, которое имеет аналоги в виде так называемых уравнений авторегрессии:

$$q_{+1} = a_0 + a_1 q_0 + a_2 q_{-1} + a_3 q_{-2} + \dots + a_{\tau+1} q_{-\tau}.$$

Например, уравнение диффузии в заданной точке пространства (при  $x = \text{const}$ )

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial q}{\partial t} + a_2 q = A$$

после замены производных конечными разностями

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = (q_{+1} - q_0) - (q_0 - q_{-1}),$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} = (q_{+1} - q_0), \quad q = q_0$$

можно привести к указанному виду

$$[(q_{+1} - q_0) - (q_0 - q_{-1})] + a_1(q_{+1} - q_0) + a_2 q_0 = A$$

или

$$q_{+1} = \frac{A}{1 + a_1} + \left[ \frac{2 + a_1 + a_2}{1 + a_1} \right] q_0 + q_{-1}.$$

Теория авторегрессионных конечно-разностных уравнений дана в работе [5].

Шаблон называется геометрическая фигура, показывающая связь выходной величины  $y_{+1}$  с аргументами  $y_0, y_{-1}$ . Для уравнений с одним аргументом шаблон имеет форму линейки.

Например, для указанного уравнения диффузии шаблон будет таким:

$$\leftarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_{+1} & y_0 & y_{-1} \\ \hline \end{array}.$$

Шаблон действителен для составления всех условных уравнений. Последние отличаются только положением шаблона на оси опытных данных.

Условные уравнения получаются при сдвиге шаблона вдоль оси  $t$  на одну клетку. Кратко говорят: обучение шаблона происходит при помощи его перемещения вдоль оси опытных данных.

Пусть, например, задан ряд опытных данных

$$q = 3 \ 4 \ 1 \ 2 \ 6 \ \begin{array}{|c|c|c|} \hline 8 & 9 & 10 \\ \hline \end{array}.$$

Тогда первое положение шаблона даст условное уравнение

$$10 = a_0 + a_1 9 + a_2 8,$$

второе —

$$9 = a_0 + a_1 8 + a_2 6,$$

третье —

$$8 = a_0 + a_1 6 + a_2 2.$$

Составление трех нормальных уравнений Гаусса позволяет определить оценки коэффициентов  $a_0, a_1, a_2$ .

*Алгебраический минимум точек для многорядных алгоритмов МГУА.* Как известно, МГУА позволяет получить оценки коэффициентов полного полинома при числе его членов  $n$ , значительно превосходящем число точек таблицы опытных данных  $N$ . Этот

эффект достигается за счет зависимости между коэффициентами. Таким же свойством обладают и некоторые другие методы, основанные на регуляризации, например псевдообращение матриц.

Зададимся вопросом: при каком минимуме точек таблицы возможно для многорядных алгоритмов МГУА это «чудо»?

Ясно, что частные описания многорядного алгоритма МГУА (или хотя бы значительная их часть) должны содержать по меньшей мере два аргумента, иначе нарастания сложности описания из ряда к ряду селекции, принципиально необходимого для действия алгоритма, не получается. Следовательно, алгебраический минимум равен трем точкам: две точки — для оценивания коэффициентов, одна точка — для проверки.

Наиболее простым частным описанием, содержащим два коэффициента и две переменные, является полином без свободного члена:

$$y = a_1 x_i + a_2 x_j, \quad i = 0, 1, \dots, n-1, \quad j = i+1, \dots, n,$$

где  $x_0 = 1$ .

Такое множество частных описаний содержит либо по две переменные и не содержит свободного члена ( $i \geq 1$ ), либо одну переменную и свободный член, если  $i = 0$ .

При числе переменных равном  $n$  по трем точкам может быть обучено и подвергнуто селекции по величине одной из разновидностей критерия регулярности  $\frac{(n+1)n}{2}$  частных описаний.

Сказанное относится к алгебраическим и разностным полиномиальным моделям.

### Самоорганизация точечных моделей по критерию регулярности

Как указывалось, величина критерия регулярности вычисляется по данным отдельной проверочной последовательности.

Проверочная последовательность используется в МГУА для выбора состава и числа членов и степени уравнения регрессии. Это позволяет получить наиболее регулярное решение (оптимальной сложности), которое дает небольшую ошибку на новых точках, не участвовавших в синтезе модели.

Для получения наиболее регулярного математического описания (модели) в качестве критерия селекции используется величина среднеквадратичной ошибки, измеренной на «свежих» точках отдельной проверочной последовательности данных  $N_B$ :

$$\Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} (q_i - q_{i\text{табл}})^2}{\sum_{i=1}^{N_B} q_i} \cdot 100 \rightarrow \min,$$

где  $\Delta^2(B)$  — относительная ошибка на множестве точек  $N_B$ ;  $q_i$  — значение выходной величины в  $i$ -м точке ( $i = 1, 2, \dots, N_B$ ) по модели;  $q_{i\text{табл}}$  — действительное ее значение в тех же точках по таблице опытных данных.

Чем меньше ошибка, тем более регулярной является модель.

В качестве критериев регулярности используется также коэффициент корреляции (для отклонения от среднего):

$$k_{qq\text{табл}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_B} q_i q_{i\text{табл}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N_B} (q_{i\text{табл}})^2 \sum_{i=1}^{N_B} (q_i)^2}} \rightarrow 1.$$

Чем ближе величина коэффициента корреляции к единице, тем модель более регулярна. Для нелинейных моделей вместо коэффициента используется индекс корреляции [61]. Величина коэффициента корреляции и индекса корреляции в значительно меньшей степени зависит от конкретного процесса и более подходит для сравнения результатов моделирования различных процессов.

Разделение исходной выборки на две последовательности — обучающую и проверочную — выполняется при помощи одного из следующих приемов:

1. Точки опытных данных ранжируются (перестраиваются) по дисперсии — квадрату расстояния от среднего значения выходной величины:

$$D_j^2 = \sum_{i=1}^N (q_{ij} - \bar{q}_i)^2,$$

где  $j = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  — число опытных точек в таблице данных:

$$\bar{q}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N q_{ij}.$$

В этом случае для определения оценок коэффициентов частных описаний используются точки с большей дисперсией, а для определения критерия регулярности — точки с меньшим ее значением. Разделение ранжированного по дисперсии ряда точек  $N = N_A + N_B$  опытных данных на два множества  $N_A$  и  $N_B$  можно выполнить при помощи построения «параболы Тодуа» (см. рис. 6) или по величине ошибки на третьей последовательности  $N_C$  (при этом  $N = N_A + N_B + N_C$ ).

2. Если исходные данные снимаются в строгой временной последовательности (например, данные технологического процесса), то ранжировка может быть произведена по принципу: нечетные точки — в обучающую, четные — в проверочную последовательность. Наиболее эффективным разделением исходной выборки данных является такое разделение, при котором минимум критерия больше, чем при других разделениях (минимаксный и максиминный критерии регулярности; см. рис. 7 и 8).

### Применение критерия регулярности для выбора вида опорной функции

Глубина минимума критерия регулярности будет наибольшей, если опорная функция выбрана оптимальным образом. Оптимальная модель находится при помощи перебора опорных функций. Та опорная функция лучше, которая обеспечивает получение более глубокого минимума критерия селекции. Даже ограничившись только классом полиномиальных функций, можно значительно увеличить глубину минимума критерия регулярности при помощи перебора различных структур этих функций. Покажем это на конкретном примере выбора оптимальной опорной функции в задаче моделирования экономической системы.

Пример 14. Самоорганизация модели для валовой продукции по трем алгоритмам МГУА\*. Рассмотрим пример применения алгоритмов МГУА для решения задачи идентификации экономической системы штата Южная Каролина (США), поставленной проф. Биллом Латомом. Соответствующая экономическая информация за 1955—1968 гг. представлена в табл. 15:  $v_1$  — не работающие по найму;  $v_2$  — «белые воротнички», служащие мужчины;  $v_3$  — то же, женщины;  $v_4$  — вложения в капитальное оборудование по нормированным стандартизованным ценам;  $v_5$  — расходы на научную работу и новую технику по тем же ценам;  $q$  — стоимость валовой продукции, произведенной в штате Южная Каролина.

Предполагается, что  $q = f(t, v_1, v_2, \dots, v_5)$ , т. е. синтезируется алгебраическая точечная модель. Самоорганизация модели была выполнена по трем алгоритмам МГУА:

1) с последовательным выделением трендов, где

$$q_1 = A + f_1(v_1) + f_2(v_2) + f_3(v_3) + f_4(v_4) + f_5(v_5) + f_6(t);$$

2) для синтеза мультипликативных моделей, где

$$q_2 = A f_7(v_1) f_8(v_2) f_9(v_3) f_{10}(v_4) f_{11}(v_5) f_{12}(t);$$

3) по обобщенному алгоритму МГУА, где

$$q = f_{13}(v_1 v_2 v_3 v_4 v_5, t),$$

$f_1, f_2, \dots, f_{13}$  — степенные полиномы, учитывающие запаздывающие аргументы

\* Пример разработан А. И. Еременко.

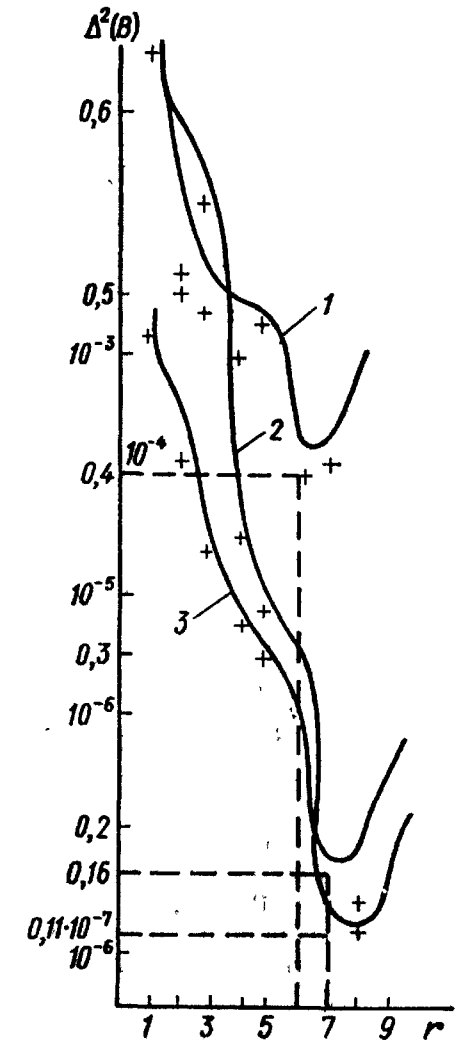


Рис. 21. Зависимость относительной среднеквадратичной ошибки от количества рядов селекции  $r$ .

Т а б л и ц а 15. Данные об экономике штата Южная Каролина (США)

Год	$v_1$	$v_2$	$v_3$	$v_4$	$v_5$	$q$
1955	100,00	100,00	100,00	100,00	100,00	3,30
1956	103,36	104,55	114,07	95,21	106,85	3,26
1957	103,46	112,39	118,92	96,27	116,80	3,27
1958	99,91	116,73	124,87	100,47	123,07	3,30
1959	101,11	123,10	132,15	106,07	133,51	3,56
1960	106,34	128,64	137,92	111,40	141,93	3,70
1961	106,94	136,64	141,17	121,86	178,54	3,78
1962	112,68	141,35	156,01	127,85	199,41	4,14
1963	117,66	147,84	164,18	132,85	214,46	4,38
1964	122,59	150,36	171,40	148,17	241,54	4,60
1965	128,16	169,11	192,81	147,66	265,89	5,14
1966	137,17	181,69	202,42	158,10	281,49	5,69
1967	140,95	185,04	202,10	174,91	294,30	5,90
1968	142,60	192,60	215,71	195,71	234,85	6,40

Таким образом, был осуществлен перебор трех видов опорной функции — аддитивной, мультипликативной и смешанной, с тем чтобы выбрать из них ту, которая обеспечивает более глубокий минимум критерия регулярности  $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ .

Все три алгоритма сравнивались в одинаковых условиях.

Таблица данных была разделена (по дисперсии  $q_i$ ) на две части:  $N_A = 6$  точек,  $N_B = 3$  точки. В каждый последующий ряд селекции пропускались три лучшие (по критерию регулярности) переменные предыдущего ряда  $F = 3$ . Использовались шестичленные частные описания. Каждый аргумент учитывался с пятью запаздываниями

$$v_i(0)^{v_i}(-1)^{v_i}(-2)^{v_i}(-3)^{v_i}(-4)^{v_i}(-5)^{v_i}, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5.$$

Изменение критерия  $\Delta^2(B)$  по рядам селекции показано на рис. 21. Лучшим оказался обобщенный алгоритм МГУА с синтезом проекторов, так как он дал более глубокий минимум критерия регулярности. Для первого алгоритма  $\Delta^2(B) \min = 0,4\%$ ; для второго —  $\Delta^2(B) \min = 0,18\%$ ; для третьего —  $\Delta^2(B) \min = 0,11\%$ .

Окончательное решение, соответствующее обобщенному алгоритму МГУА с синтезом проекторов (полученное на седьмом ряду селекции), имеет такой вид:

$$\begin{aligned} q &= 0,3707q_1 + 0,629297q_{18}, \\ q_1 &= -1,489798p_{19} + 2,489786p_{20}, \\ q_{18} &= -2,419216p_7 + 3,419207p_{18}, \\ w_1 &= 0,086117z_{19} + 0,914089z_{20}, \\ w_{11} &= 0,0996654z_5 + 1,099149z_{20}, \\ w_{13} &= -0,00002 + 0,104407z_9 + 0,896904z_{20}, \\ w_{14} &= 0,02891z_{16} + 0,971362z_{20}, \\ w_{16} &= -0,00003z + 0,185967z_4 + 0,816232z_{20}, \\ w_{20} &= -0,000135 + 0,419734z_9 + 0,588933z_{18}, \\ p_7 &= -0,134526q_8 + 1,134524q_{18}, \\ p_{18} &= -0,147508q_8 + 0,852495q_{20}, \\ p_{19} &= 0,159103q_8 + 0,840901q_{20}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{20} &= 0,237576q_4 + 0,76243q_{20}, \\ q_4 &= -0,828695v_{17} + 1,8269v_{18}, \\ q_8 &= -0,209536v_{14} + 1,209533v_{18}, \\ q_6 &= -0,272415v_{15} + 1,272411v_{18}, \\ q_{18} &= -0,395627v_{15} + 1,395618v_{20}, \\ q_{20} &= -1,288205v_{17} + 2,283188v_{20}, \\ v_{14} &= 0,039303w_1 + 0,960734w_{20}, \\ v_{15} &= 0,050447w_{14} + 0,949602w_{20}, \\ v_{17} &= 0,107032w_{13} + 0,893062w_{20}, \\ v_{18} &= 0,167514w_{16} + 0,832576w_{20}, \\ v_{20} &= 0,154879w_{11} + 0,845288w_{20}, \\ z_4 &= -0,000476 + 0,510454t_2 + 1,07177t_{(-4)}, \\ z_5 &= 0,001459 + 1,038204t_{-1} + 0,413292v_{1,-4}, \\ z_9 &= 0,002233 + 1,200245t_{-2} + 0,056163v_{1,0}, \\ z_{16} &= 0,001903 + 0,649404t_{1,0} + 0,794519v_{1,-4}, \\ z_{18} &= -0,00191 + 0,885017t_{-1} + 0,477441v_{3,-4}, \\ z_{19} &= 0,000241 + 0,472304t_0 + 0,205904v_{3,0}, \\ z_{20} &= 0,001435 + 0,39142t_0 + 0,533082v_{1,-3}. \end{aligned}$$

В общем виде

$$q = f(t_0 t_{-1} t_{-2} t_{-1}^{v_1} (0)^{v_1} (-3)^{v_1} (-4)^{v_3} (0)^{v_3} (-1)).$$

*Применение критерия регулярности для конструирования оптических систем [82, 83]*

В основе методов расчета и конструирования оптических систем лежит теория абберации, которая исследует соотношение двух совокупностей прямых входных и выходных лучей. Эти соотношения устанавливаются с помощью функций, называемых эйконалами, и выражают зависимость координат лучей. В качестве параметров, определяющих луч, можно взять направляющие косинуса  $|\mu|$ ,  $|\nu|$  падающего и  $|\mu'|$ ,  $|\nu'|$  преломленного лучей. Третий косинус и  $\lambda'$  определяются из известных соотношений

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \quad \lambda'^2 + \mu'^2 + \nu'^2 = 1.$$

Монохроматический (одночастотный) луч света описывается уравнением эйконала

$$E = a(r) e^{i[\omega t - k_0 \Phi(r)]}, \quad \text{где } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

В этом уравнении величину  $\Phi(r)$  Клаузиус назвал *эйконалом*. Угловым эйконалом называется оптический путь между точками пересечения луча с перпендикулярами к нему, опущенными из

точек, в которых плоскости предмета и изображения пересекают оптическую ось системы [67].

Функция эйконала

$$W(\mu\nu\mu'\nu'L) = 0,$$

где  $L$  — конструктивные и оптические данные системы, физический закон которой можно установить с помощью методов эвристической самоорганизации.

Теория эйконала базируется на допущении, что каждому лучу в пространстве предмета соответствует луч в пространстве изображения. При этом всегда имеется в виду наличие взаимнооднозначного функционального соответствия между входным и выходным лучами. Именно это положение позволяет произвести интерполяцию с помощью методов эвристической самоорганизации. Специальные приемы регуляции решения позволяют найти единственное оптимальное уравнение регрессии, коэффициенты которого можно рассматривать как коэффициенты веса соответствующих переменных.

Благоприятным оказалось то, что функция эйконала достаточно точно выражается степенным полиномом. Итак, перебор различных опорных функций, применяемый при установлении физических законов, не требуется. Достаточно использовать полиномиальную теорию. Исходные данные получаются путем расчета или в эксперименте.

Ниже приводятся примеры математических описаний, адекватных физическим законам, для некоторых оптических систем.

Значения параметров, вычисленные по найденным функциям и установленные традиционными методами оптики, совпали с высокой степенью точности (до пятого знака).

**Пример 15.** Зависимость абберации от радиуса кривизны линзы в триплете. Исследовалась оптическая система — триплет [67, 82], которая обыкновенно служит для проверки новых идей и методов расчета.

Данные триплета следующие (рис. 22):

$r_1 = 22,100;$	$d_1 = 0,005;$	$n_1 = 1,0;$	$\alpha_1 = 0;$
$r_2 = (145,736) \sim \text{var};$	$d_2 = 0,021;$	$n_2 = 1,6126;$	$\alpha_2 = 1,7212;$
$r_3 = 116,848;$	$d_3 = 0,02;$	$n_3 = 1,0;$	$\alpha_3 = 2,4064;$
$r_4 = 22,406;$	$d_4 = 0,059;$	$n_4 = 1,625;$	$\alpha_4 = 1,2062;$
$r_5 = 146,408;$	$d_5 = 0,05;$	$n_5 = 1,0;$	$\alpha_5 = 0,0072;$
$r_6 = 51,021;$		$n_6 = 1,6126;$	$\alpha_6 = 0,3911;$
		$n_7 = 1,0;$	$\alpha_7 = 1.$

Варьируется радиус кривизны  $r_2$  и фиксируется значение абберации (сферической). Высота падения луча  $H = \text{const}: r_2 = 300,003 \div 128,571;$   
 $\rho = \frac{1}{r}; \rho_2 = 0,00033333 \div 0,007778; \Delta\rho_2 = 0,0002222.$

Полагаем  $\rho = 100\rho_2, \Delta\rho_2 = 100\Delta\rho_2.$

Таким образом,

$$\rho = 0,33333 \div 0,7778; \Delta\rho = 0,02222;$$

$$y = 0,3206 \div 11,592.$$

Исходные экспериментальные данные содержали 21 точку, из них 14 обучающих и 7 проверочных ранжировались по убыванию дисперсии. В качестве проверочных точек были выбраны: а) каждая третья, б) каждая вторая, в) каждая первая от трех смежных точек (узлов интерполяции).

В качестве аргументов использовались параметры:  $r, p, p^2, p^3, p^4, p^5, p^6$ . Из ряда в ряд селекции отбирались и пропускались по восемнадцать лучших комбинаций  $F = 18$ . Использовалась (с небольшими изменениями) программа, опубликованная в работе [25].

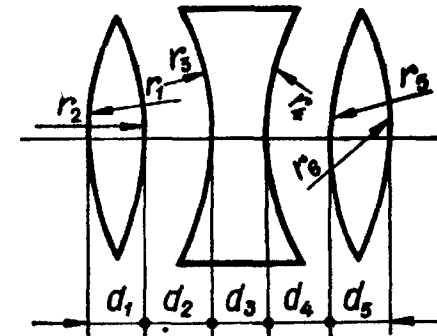


Рис. 22. Одиночная линза.

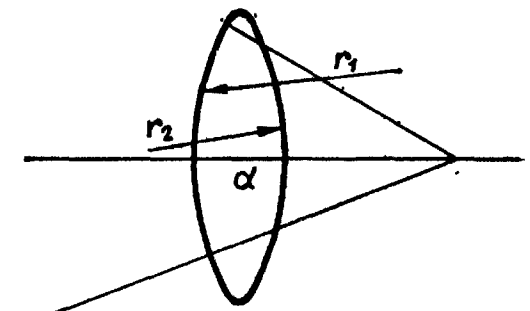


Рис. 23. Триплет.

Результаты селекции следующие.

Для массива а:  $\delta_{\Sigma\min}^2 = 0,00000222456$ , полином:  $\varphi = -4,0452576 + 9,8380769\rho + 9,461247\rho^2 + 0,4227707\rho^4 + 7,3999126\rho^5.$

Для массива б:  $\delta_{\Sigma\min}^2 = 0,000001690930$ , полином (наилучший результат):  $-\varphi = -4,0687619 + 9,9789009\rho + 9,221296\rho^2 + 0,718194\rho^4 + 7,230350\rho^5.$

Для массива в:  $\delta_{\Sigma\min}^2 = 0,00000292245$ , полином:  $\varphi = -4,079267 + 10,0441603\rho + 9,1014992\rho^2 + 0,91264\rho^4 + 7,093924\rho^5.$

Попытка ввести в качестве аргументов величины  $p^7$  и  $p^8$  оказалась безуспешной: алгоритм самоорганизации «не воспринял» их. Окончательные математические модели триплета остались без изменения. Радиусы  $r_2, r_3$  и т. д. не использовались как входные аргументы, поскольку предварительные исследования показали, что их значения не влияют на величину сферической абберации данной системы (априорная информация).

Таблица 16. Точки обучающей последовательности

Но- мер точ- ки	$y$	$x$	Но- мер точ- ки	$y$	$x$	Но- мер точ- ки	$y$	$x$
1	20	0	14	6,750	11,6991	28	3,750	5,6329
3	13,4349	13,4349	15	13,00	0,0	29	6,00	0,0
4	17,8691	4,7878	17	8,4852	8,4852	32	4,34655	1,1646
5	4,6584	17,3862	19	2,8452	10,6249	33	1,0352	3,8636
7	8,5	14,7322	20	9,0993	5,250	34	3,0331	1,750
9	0	16	23	0,0	9,00	37	0,0	2,0
11	14,4885	3,8820	24	6,01035	6,01035	38	1,060065	1,06065
13	12,1324	7,00	25	7,7272	2,0704	39	0,9659	0,2588

Таблица 17. Точки проверочной последовательности

Но- мер точки	$y$	$x$	Но- мер точки	$y$	$x$	Но- мер точки	$y$	$x$
2	0,0	19,50	18	11,1079	2,9762	31	3,5355	3,5355
6	15,1655	8,750	21	5,0	8,666	35	1,50	2,5998
8	16,50	0,0	22	9,50	0,0	36	2,50	0,0
10	10,9601	10,9601	26	1,941	7,24425	40	0,1294	0,48295
12	3,7526	14,0056	27	6,0662	3,50			
16	0,0	12,50	30	0,0	5,50			

Пример 16. Определение функции эйконала для одиночной линзы и триплета. Отыскивалась функция эйконала и устанавливалось влияние на ее вид изменения радиуса кривизны линзы. Поскольку эта функция симметрична относительно осей абсцисс и ординат (априорная информация), для исследования достаточно ограничиться точками первого квадранта.

Была взята одиночная линза (рис. 23) с такими параметрами:  $r_1 = \text{var}$ ;  $r_2 = \text{var}$ ;  $d = 12$  мм;  $n_1 = 1$ ;  $n_2 = 1,5$ ;  $n_3 = 1$ ;  $s_0 = -200$  мм;  $x_1 = 0$ ;  $l = 0$ ;  $m = 0$ ;  $f' = 4,210526 = \text{const}$ .

Диаметр входного зрачка 40 мм. На нем (в первом квадранте) были отобраны сорок точек — координаты входных лучей, для каждого из которых установлены входные ( $\mu$  и  $\nu$ ) и выходные ( $\mu'$  и  $\nu'$ ) параметры при соответствующих сочетаниях радиусов.

В области первого квадранта, разбитой в полярной системе координат на сетку  $\Delta\rho = 5$  мм,  $\Delta\varphi = 15^\circ$ , выбирались узловые точки и распределялись на обучающую и проверочную последовательности таким образом, как это показано в табл. 16 и 17 (нумерация точек идет в порядке убывания полярного радиуса  $\rho$ ).

Для получения функции эйконала методом МГУА в качестве входных аргументов были использованы такие переменные:

$$(\mu^2 + \nu^2); (\mu^{12} + \nu^{12}); (\mu^2 + \nu^2)^2; (\mu^{12} + \nu^{12})^2; (\mu^2 + \nu^2)(\mu^{12} + \nu^{12}).$$

Итак, функция эйконала имеет вид

$$w = a_0 + a_1(\mu^2 + \nu^2) + a_2(\mu^{12} + \nu^{12}) + a_3(\mu^2 + \nu^2)(\mu^{12} + \nu^{12}).$$

Коэффициенты  $a_1, a_2, a_3$  представлены как функция от радиуса  $R_1$ , полинома четвертой степени, т. е.

$$a_i = b_{i0} + b_{i1}R_1 + b_{i2}R_1^2 + b_{i3}R_1^3 + b_{i4}R_1^4,$$

где  $i = 1, 2, 3$ .

Таблица 18. Результаты расчета коэффициентов

Коэффициент	$a_1$	$a_2$	$a_3$
$b_0$	-28003,70065	-39,45337	-1756,96826
$b_1$	3464,22293	4,813765	81,643728
$b_2$	-166,04316	-0,272012	0,796823
$b_3$	3,49194	0,0058496	-0,085067
$b_4$	0,026984	0,000044312	0,00099205
$\delta_{\text{max}}, \%$	2,602	0,1015	0,8526

Коэффициенты  $b_{ik}$  ( $k = 0 \div 4$ ) были найдены на основании данных, полученных по методу наименьших квадратов. Результаты помещены в табл. 18.

Исследовался также триплет с параметрами:

$$\begin{aligned} r_1 &= 22,07084; & \rho_1 &= 0,0453086; & n_1 &= 1,0; \\ r_2 &= 55,08213; & \rho_2 &= 0,0181547; & n_2 &= 1,6126; \\ r_3 &= 66,93636; & \rho_3 &= 0,0149394; & n_3 &= 1,0; \\ r_4 &= 310,05554; & \rho_4 &= 0,032252; & n_4 &= 1,6259; \\ r_5 &= 53,42067; & \rho_5 &= 0,0187193; & n_5 &= 1,0; \\ r_6 &= 142,46379; & \rho_6 &= 0,0070193; & n_6 &= 1,6126; \\ & & n_7 &= 1,0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_1 &= 5,9; & d_5 &= 2,1; & d_3 &= 2,0; \\ d_4 &= 5,9; & d_6 &= 5,0; & s &= -200; & s_1 &= 100. \end{aligned}$$

Функция эйконала для данного триплета (исследования проводились аналогично примеру 15) имеет вид

$$w = 0,0157924 + 1591,7109(\mu^2 + \nu^2) - 5,92216(\mu^{12} + \nu^{12}) - 750,9953(\mu^3 + \nu^3) \times (\mu^{12} + \nu^{12}).$$

Суммарная квадратичная ошибка по проверочным точкам

$$\Sigma\delta^2(B) = 0,330982 \cdot 10^{-6}.$$

Пример 17. Оптический закон двухлинзового конденсатора. Рассматривался двухлинзовый конденсатор (рис. 24) с такими параметрами:  $r = 54,0$ ;  $129,0$ ;  $21,425$ ;  $24,567$ ;  $\alpha = 4,0$ ;  $n = 2,5$ .

Определялась зависимость между косинусом угла преломленного луча и высотой его падения (лучи направлены параллельно оси конденсатора).

Экспериментальным путем найден ряд точек (табл. 19), по которым методом группового учета аргументов получена устойчивая физическая модель данного конденсатора  $\lambda = 1,00000 - 0,00056h^2$ .

Из оптики известно [67], что если функция эйконала  $w(\mu, \nu, \mu', \nu')$  получена в явном виде, то, дифференцируя ее по  $\mu, \nu, \mu', \nu'$  по одной из переменных, от которой она зависит, и подставляя в выражение этой производной численные значения параметров рассматриваемого луча, можно получить координаты точки пересечения луча с плоскостью изображения. Отклонения координат можно рассматривать как показатель смещения модели. Был рассчитан ряд лучей, которые выходят из заданной точки плоскости предмета, и вычислены соответствующие им производные:

Таблица 19. Сравнение расчетных и экспериментальных данных

Величина аберрации		$\delta, \%$
вычисленная	действительная	
-21,4061	-20,6536	3,5
-10,3772	-9,9159	4,4
-12,0847	-11,4088	5,2
-2,7638	-2,5977	6,0
-4,0001	-3,6911	7,6

$$\frac{\partial w}{\partial \mu_1} = [4a_2(\mu^{12} + \nu^{12}) + 2a_3(\mu^2 + \nu^2)]\mu'.$$

Значения координат на плоскости изображения (в данном случае сферической аберрации), вычисленные по этим формулам, совпали с высокой степенью точности со значениями, полученными по элементарным формулам тригонометрического расчета хода лучей. Это дает основание сделать вывод о том, что найденная функция эйконала является истинной.

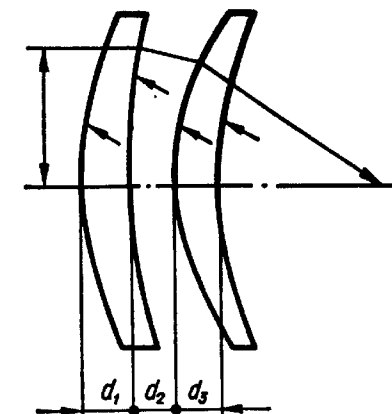


Рис. 24. Двухлинзовый конденсор.



*Применение критерия регулярности  
для приближенного решения систем  
нелинейных уравнений [83]*

Рассмотрим применение критерия регулярности в алгоритмах МГУА для определения корней нелинейных систем уравнений по небольшому количеству расчетных данных.

Пусть дана исходная нелинейная система из  $n$  уравнений, содержащих  $n$  независимых переменных:

$$\begin{aligned} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_n(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим один из вариантов сведения данной нелинейной системы к нелинейному уравнению с одним независимым переменным. Например, в качестве независимого переменного выберем  $x_1$ . Проведем эксперимент, который заключается в выборе ряда произвольных значений независимых параметров  $x_2, x_3, \dots, x_n$  и определении значения независимого параметра  $x_1$  из первого уравнения системы. По результатам эксперимента по алгоритмам МГУА находим «физическую» модель взаимодействия (локальный «физический» закон) между  $x_1$  и остальными переменными первого уравнения исходной системы. Математическое описание полученной «физической» модели взаимодействия и есть так называемая обратная функция системы нелинейных уравнений

$$x_1 = F_1(x_2, x_3, \dots, x_n).$$

Подставив  $F$  в  $n - 1$  оставшихся уравнений исходной системы и проделав подстановку, получим

$$\begin{aligned} f_{11}(x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ f_{21}(x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{n-1,1}(x_2, x_3, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Взяв полученную таким образом систему за исходную, аналогично предыдущему определяем следующую обратную функцию:

$$x_2 = F_2(x_3, \dots, x_n).$$

Подставив функцию  $F_2$  в  $n - 2$  оставшихся уравнений исходной системы, проведя необходимые подстановки и преобразования, получим

$$\begin{aligned} f_{12}(x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ f_{22}(x_3, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{n-2,2}(x_3, \dots, x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Аналогично продолжая процедуру приведения, получим все остальные промежуточные системы

$$\begin{aligned} f_{13}(x_4, \dots, x_n) &= 0, \\ f_{23}(x_4, \dots, x_n) &= 0, \\ &\dots \dots \dots \\ f_{n-2,3}(x_{n-1}, x_n) &= 0, \\ f_{n-3,3}(x_n, \dots, x_n) &= 0, \\ f_{2,n-2}(x_{n-1}, x_n) &= 0, \\ f_{1,n-1}(x_n) &= 0. \end{aligned}$$

Далее выбирается интервал изменения  $x_n$ , на котором нелинейное уравнение ( $F_2$ ) решается одним из известных способов [50]. Корни этого уравнения могут быть перенесены в исходную систему. Они определяют область возможных решений этой системы, проверка которых может быть осуществлена одним из известных локальных методов исследования нелинейных систем.

Чем выше точность определения весовых коэффициентов частных «физических» моделей обратных функций, тем больше точность определения коэффициентов нелинейного уравнения одного переменного, которое, в свою очередь, более точно указывает число возможных областей решений исходной системы.

Рассмотрим примеры применения критерия регулярности в алгоритмах МГУА для приближенного решения нелинейных систем уравнений.

**Пример 18.** Решение нелинейной системы уравнений. Пусть задана исходная система уравнений

$$\begin{aligned} x^3 + 2y^2z - xyz^2 + 4x^2y - 32 &= 0, \\ x^2y^2z - z^3 + xyz - 16 &= 0, \\ zy^3x - 5x^2yz + 2xz + 8 &= 0. \end{aligned}$$

Был проведен эксперимент: задаваясь произвольно рядом значений  $y$  и  $z$  из первого уравнения исходной системы, определяли значения  $x$  (табл. 20).

При помощи линейного алгоритма МГУА по данным табл. 20 находим обратную функцию для

$$x = 6,143 - 1,103y + 0,79z + 0,09y^2 - 0,01z^2 - 4,17y^2.$$

В качестве исходных признаков были взяты  $y; y^2; y^3; z; z^2; z^3; y^2$ . Эта функция подставлялась в исходную систему. После подстановки был проделан второй эксперимент и аналогично процедуре получения обратной функции получена вторая обратная функция

$$z = 3,06 + 1,77y + 5,075y^2 - 413y^3 + 1,05y^4.$$

В качестве исходных признаков были взяты:  $y; y^2; y^3; y^4; y^5; y^6; y^7$ . Подставив  $x$  и  $z$  в исходную нелинейную систему, получим нелинейное уравнение для

$$\begin{aligned} &- 5,58y^{18} + 88,1y^{17} - 629y^{16} + 2507y^{15} - 5418y^{14} + 3060y^{13} + \\ &+ 15\,460y^{12} - 43\,260y^{11} + 39\,950y^{10} + 13\,996y^9 - 54\,245y^8 + 20\,940y^7 + \\ &+ 23\,670y^6 - 13\,400y^5 - 5998y^4 + 2021y^3 + 1027y^2 - 199,5 + 8 = 0. \end{aligned}$$



Таблица 20. Ряд решений первого уравнения

$y$	0	1	2	3	4
$z$	1	5	4	3	10
$x$	3,17	-21,13	-32,97	-36,75	-162,47
$y$	5	6	7	8	9
$z$	0	8	9	2	7
$x$	3,17	-194	-254,24	-64,55	-253,75

Пусть задан интервал изменения переменного  $y = \pm 100$ . Решая нелинейные уравнения на интервале  $[-100; +100]$  методом, изложенным в работе [51], получаем два корня уравнения:  $y_1 = 1,05$ ,  $y_2 = 0,86$ .

Проведя обратную процедуру, получим два начальных приближения:

$$x_1 = 42,12; \quad y_1 = -1,052; \quad z_1 = 6,788;$$

$$x_2 = 4,75; \quad y_2 = 0,863; \quad z_2 = 0,0179.$$

Используя эти приближения как исходные условия уточнения возможных решений исходной системы методом Ньютона, получаем точные значения двух корней этой системы:

$$x = 3,370; \quad y = -6,980; \quad z = 0,0289;$$

$$x = 3,406; \quad y = 0,061; \quad z = -2,457.$$

Пример 19. Решение нелинейной системы уравнений, описывающей триплет. Найдём корни нелинейной алгебраической системы из трех уравнений, связывающей коэффициенты аббераций  $S_I$ ,  $S_{II}$ ,  $S_{III}$  фотографического триплета независимыми переменными  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$ .

Исходная система уравнений имеет вид

$$S_I = 7,063 + 0,19\alpha_3^3 - 18,18\alpha_3^2\alpha_2 + 15,54\alpha_3\alpha_2^2 - 15,05\alpha_4^2\alpha_3 + \\ + 17,65\alpha_3^2 - 2,7\alpha_4 - 5,886\alpha_4^2,$$

$$S_{II} = 2,454 - 0,0057\alpha_3^3 + 0,55\alpha_3\alpha_2 - 0,472\alpha_3\alpha_2^2 + 0,45\alpha_4^2\alpha_3 - 0,53\alpha_4\alpha_3^2 + \\ + 1,7\alpha_4 + 0,179\alpha_4^2 + 0,04\alpha_4^2 - 4,3\alpha_3\alpha_2 + 4,2\alpha_4\alpha_3,$$

$$S_{III} = 0,845 + 0,0002\alpha_3^2 - 0,017\alpha_3\alpha_2 + 0,0143\alpha_3\alpha_2^2 - 0,014\alpha_4^2\alpha_3 + \\ + 0,016\alpha_4\alpha_3^2 - 0,01\alpha_4 - 0,005\alpha_4^2 - 0,014\alpha_4^2\alpha_3 + 0,016\alpha_4\alpha_3^2 - 0,01\alpha_4 - \\ - 0,005\alpha_4^2 - 0,0024\alpha_3^2 + 0,25\alpha_3\alpha_2 - 0,254\alpha_3\alpha_4$$

при заданных величинах  $S_I = 1,9 \pm 0,1$ ,  $S_{II} = 0,05$ ,  $S_{III} = 0,2 \pm 0,02$  и при заданных постоянных конструктивных параметрах

$$n_2 = n_6 = 1,6125, \quad n_4 = 1,6259,$$

$$d_1 = 0,05, \quad d_2 = 0,021, \quad d_3 = 0,02, \quad d_4 = 0,059, \quad d_5 = 0,05,$$

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_6 = -0,3911, \quad \alpha_5 = -0,0072.$$

Задаваясь произвольно рядом значений  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$  при фиксированном  $S_I = 1,9$ , из первого уравнения исходной системы определим значения  $\alpha_2$

Таблица 21. Расчет значений  $\alpha_2$ 

Номер	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_2$	Номер	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_2$
1	5	5	0,4616	29	-3	-3	-2,5370
2	5	3	2,1201	30	-3	-4	-3,5319
3	5	1	1,03210	31	-3	-5	-4,4730
4	5	-1	-0,9315	32	-5	5	-10,563
5	5	-3	-2,950	33	-5	3	-8,6937
6	5	-5	-4,9815	34	-5	1	-6,7785
7	3	5	-1,9168	35	-5	-1	-4,8124
8	3	3	0,1230	36	-5	-5	-4,4777
9	3	1	0,9777	37	4	4	0,2885
10	3	-1	0,9475	38	4	2	1,6696
11	3	-3	-3,0158	39	4	0	0,9603
12	3	-5	-5,0989	40	4	-2	-1,9553
13	1	5	-4,7830	41	4	-4	-4,0010
14	1	3	-2,4542	42	2	4	-2,1377
15	1	1	-0,0338	43	5	2	-0,0199
16	1	-1	-0,0339	44	2	0	0,0958
17	1	-3	-3,2892	45	2	-2	-2,0167
18	1	-5	-5,6190	46	2	-4	-4,1610
19	-1	5	-5,0810	47	-2	4	-5,9333
20	-1	3	-3,6508	48	-2	2	-4,1651
21	-1	1	-2,0729	49	-2	0	-2,388
22	-1	-1	-1,1233	50	-2	-2	-1,624
23	-1	-3	-2,3409	51	-2	4	-3,430
24	-1	-5	-3,8399	52	-4	4	-8,4505
25	-3	5	-8,1488	53	-4	2	-6,5654
26	-3	3	-6,3055	54	-4	0	-4,6553
27	-3	1	-4,4514	55	-4	-4	-3,4989
28	-3	-1	-2,5117	—	—	—	—

Таблица 22. Расчет значений  $\alpha_3$ 

$\alpha_4$	$\alpha_{31}$	$\alpha_{32}$	$\alpha_{33}$
5	-11,43387	-0,34796	13,86532
4,6	-11,94495	-0,34460	13,45099
4,0	-12,69205	-0,34259	12,81366
3,4	-13,41626	-0,34369	12,15784
3,0	-13,88655	-0,34625	11,71057
2,6	-14,34693	-0,35022	11,25549
2,0	-15,01901	-0,35901	10,55835
1,6	-15,45473	-0,36682	10,08422
1,0	-16,08974	-0,38147	9,35889
0,6	-16,50059	-0,39307	8,86572
0,0	-17,09787	-0,41260	8,11011
-0,4	-17,48318	-0,42480	7,59375
-1,0	-18,04137	-0,42676	6,78906
-1,4	-18,39996	-0,44765	6,20703
-2,0	-18,91688	—	—

Таблица 23. Сравнение модели и реального триплета

Физическая модель				Реальный триплет						
$\alpha_2$	$\alpha_3$	$\alpha_4$	$\alpha_5$	$\alpha_6$	$\alpha_7$	$S_I$	$S_{II}$	$S_{III}$		
-17,0648	-0,5790	-11,4766	—	—	—	—	—	—		
-30,2261	-0,1757	14,8828	2,3616	0,0422	-1,8312	1,9155	0,3034	-0,1997		
-105,2306	0,0323	28,4834	—	—	—	—	—	—		
-215,659	0,0129	-41,0785	-92,5785	98,5516	-222,687	1,9006	0,3000	-0,1999		
-29,2138	-24,3755	-17,0764	—	—	—	—	—	—		
-19,933	0,43702	12,3674	1,2300	-0,3280	-4,0241	1,889	0,3000	-0,1999		
-12,5929	24,8608	23,4300	-2,2556	-0,1061	0,5364	1,893	0,2997	-0,2000		
-24,8068	-20,1313	-16,5845	—	—	—	—	—	—		
0,0542	9,2881	0,9433	-3,2013	1,5202	-3,2114	1,899	0,3001	-0,1999		
-12,9095	24,0857	23,2798	-3,2014	1,5204	-3,2114	1,931	0,3028	-0,1998		
-22,063	-133,268	-20,6601	-1,7774	-2,4230	-2,0790	1,898	0,2998	-0,1999		
-18,1071	-114,460	-16,9839	—	—	—	—	—	—		
-6,3946	-57,743	-5,8975	—	—	—	—	—	—		
8,6217	17,6063	8,8310	—	—	—	—	—	—		
23,8551	97,4435	24,4368	—	—	—	—	—	—		
-162,303	-175,146	-38,1346	—	—	—	—	—	—		
-46,755	-38,579	-16,1031	—	—	—	—	—	—		
6,3163	-2,6972	5,8115	—	—	—	—	—	—		
6,5977	-0,2496	-6,7637	1,7335	2,4306	1,2180	1,888	0,3082	-0,1978		

(табл. 21). По линейному алгоритму МГУА, использующему критерий регулярности и данные табл. 21, находим обратную функцию

$$\alpha_2 = (-1,115 + 0,575\alpha_3 - 0,061\alpha_3^2) + (-0,024 + 0,142\alpha_3)\alpha_4 - 0,127\alpha_4^2.$$

В качестве исходных признаков были взяты  $\alpha_3$ ;  $\alpha_3^2$ ;  $\alpha_3^3$ ;  $\alpha_4$ ;  $\alpha_4^2$ ;  $\alpha_3\alpha_4$ ;  $\alpha_3^2\alpha_4$ ;  $\alpha_3\alpha_4^2$ .

Подставив  $\alpha_2$  во второе уравнение исходной системы при фиксированном  $S_{II} = 0,3$ , получим приведенную систему двух переменных  $\alpha_3$  и  $\alpha_4$ . По МГУА на основании эксперимента (табл. 22) на первом уравнении промежуточной системы получим обратную функцию, состоящую из трех ветвей:

$$a) \alpha_3 = -0,4034 + 0,0153\alpha_4;$$

$$б) \alpha_3 = -17,103 + 0,9677\alpha_4 + 0,0333\alpha_4^2;$$

$$в) \alpha_3 = 8,1037 + 1,2796\alpha_4 - 0,02556\alpha_4^2.$$

Подставив поочередно уравнения ветвей  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , получим три нелинейных уравнения одного переменного  $\alpha_4$ . Решив их и проделав обратную процедуру, находим начальные приближения (табл. 23, физическая модель).

С учетом адекватности физической модели триплета оптическим законам природы начальные приближения (табл. 23) были использованы как исходные условия для уточнения (методом Ньютона) уравнений реального фотографического триплета. Результаты уточнения сведены в табл. 23 (реальный триплет). Прочерки в табл. 23 указывают на то, что из данных начальных условий (приближений) корни с заданной точностью не были найдены.

В данном примере впервые показано, что поставленным требованиям  $S_I = 1,9 \pm 0,1$ ,  $S_{II} = 0,3 \pm 0,05$ ,  $S_{III} = 0,2 \pm 0,02$  может удовлетворять не единственное значение конструктивных параметров триплета  $\alpha_2 = 1,7212$ ,  $\alpha_3 = 2,4064$ ,  $\alpha_4 = 1,2062$ , а целый ряд их значений, что само по себе представляет очевидный интерес при расчете и конструировании оптических систем.

#### Самоорганизация точечных моделей по критерию минимума смещения

Критерий минимума смещения может быть временным, пространственным или пространственно-временным.

В первом случае он выражает требование: «модель, полученная по данным, снятым вчера, должна быть такой же, как и по данным, полученным позавчера», во втором случае: «модель по данным, снятым, например, в западной части объекта, должна быть такой же, как и по данным, полученным в восточной его части». В общем случае модель по данным в одной части  $A$  пространственно-временной сетки должна быть по возможности такой же, как и в другой части  $B$  той же сетки.

Теория самоорганизации моделей на ЭВМ появилась и вначале развивалась как индуктивная теория, использующая в качестве внешнего дополнения исключительно критерий регулярности

$$\Delta^2(B) \rightarrow \min.$$

Однако вскоре при решении практических задач было установлено, что не всегда результаты самоорганизации отвечают цели модели

рования. Модели, найденные по минимуму критерия регулярности, хорошо удовлетворяют желания тех, кто решает задачи краткосрочного прогноза. При неточных зашумленных исходных данных минимум критерия регулярности смещается влево, в сторону выбора более простых моделей. При большой интенсивности помех оптимальными оказываются линейные прогнозирующие модели.

Влияние помех (шумов) легко можно проследить (на примерах), добавляя в исходные данные аддитивный бинарный шум. В результате такого опыта получим качественную картину, изображенную на рис. 25. Увеличение амплитуды шума снижает сложность (степень) модели, синтезируемой по алгоритмам МГУА.

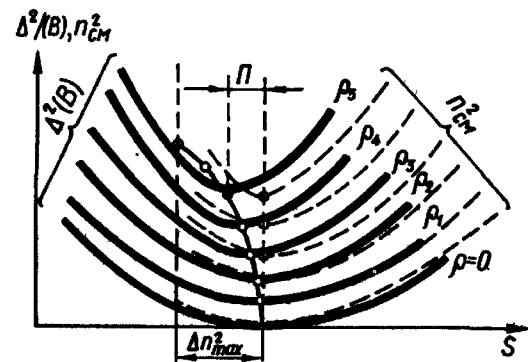


Рис. 25. Нефизические модели, получаемые по критерию регулярности при различных уровнях помех  $\lambda$ :  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4 < \lambda_5$ ;  $\Pi$  — область Парето, в которой критерий регулярности и минимума смещения противостоят друг другу.

Линейные уравнения регрессии оказываются наиболее точными для прогнозов при большом времени упреждения по зашумленным данным. Можно сделать вывод, что критерий регулярности целесообразен при однократном прогнозе, но для открытия законов его можно применять только при точных данных. При наличии даже небольшого шума селекция по критерию регулярности приводит нас

к самой точной прогнозирующей модели, хотя часто она является нефизической с точки зрения физики объекта.

Более устойчивым к помехам является критерий минимума смещения. Тут при увеличении помех кривые также «выползают», но минимумы сохраняют одну абсциссу. Это объясняет, почему мы рекомендуем критерий минимума смещения для решения задачи открытия законов. При малых шумах в исходных данных критерий регулярности и критерий минимума смещения равноценны и приводят обычно к одинаковому результату. При шумах критерии несмещенности имеют преимущество.

Вторым преимуществом критерия минимума смещения для восстановления или открытия законов является то, что ордината минимума смещения  $n_{см}$  мало чувствительна к выбору способа разделения исходных данных на обучающую и проверочную последовательности.

Как указывалось, описанные выше реализации критерия минимума смещения разрабатывались для многорядных селекционных алгоритмов МГУА.

В простых комбинаторных алгоритмах МГУА применение критерия минимума смещения весьма просто: значения критерия рассчитываются для всех моделей, заданных в таблице постепенного усложнения (табл. 4—7), и выбирается самая несмещенная модель.

Успех выбора модели оценивается по глубине минимума критерия. Минимальное значение критерия должно быть одного порядка с относительной дисперсией помех (обычно около 5%). Более точно об оценке достаточной глубины минимума будет сказано в третьей главе.

Изменение картины расположения моделей на плоскости  $n_{см}^2 - \Delta^2(B)$  при изменении интенсивности помех. При уменьшении интенсивности помех все точки, отвечающие моделям, группируются вдоль прямой (рис. 26)

$$n_{см}^2 = \Delta^2(B).$$

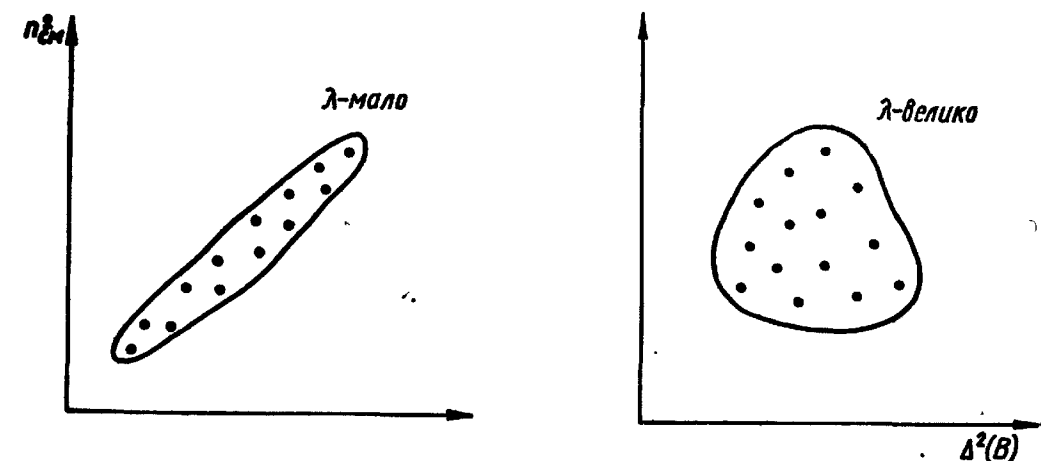


Рис. 26. Изменения положения точек, характеризующих модели на плоскости двух критериев при увеличении помех  $\lambda$ .

Противоречие критериев исчезает, так как при этом минимуму  $n_{см}$  и минимуму  $\Delta(B)$  отвечает одна и та же нижняя точка (модель).

При увеличении помех «облако» точек-моделей расширяется и заполняет собой весь первый квадрат указанной плоскости. При некоторой пороговой интенсивности шума модели, выбранные по критериям  $n_{см}^2 \rightarrow \min$  и  $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ , уже не совпадают. Критерии в определенном смысле противостоят друг другу. Только при этом требуется применять уже комбинированный критерий

$$\rho = \sqrt{n_{см}^{*2} + \Delta^{*2}(B)} \rightarrow \min,$$

где 
$$n_{см}^{*2} = \frac{n_{см}^2}{n_{см\max}^2}; \quad \Delta^{*2}(B)^2 = \frac{\Delta^2(B)}{\Delta^2(B)_{\max}}$$

В многорядном алгоритме МГУА часто вначале селекции модели применяют критерий минимума смещения и только в конце ее, на последнем ряду, применяется комбинированный критерий.

Самоорганизация моделей на ЭВМ основана на переборе множества моделей-претендентов по внешним критериям. Все вопросы, относящиеся к выбору структуры модели или улучшению алгоритма самоорганизации, должны решаться на основе исследования глубины минимума принятого критерия селекции: та модель или алгоритм лучше, которая обеспечивает более глубокий минимум.

Исключением являются вопросы оптимизации самих внешних критериев. Согласно теореме Геделя, решение этих вопросов тре-

бует привлечения внешних дополнений (критериев) второго уровня. Вопрос об оптимальном разделении таблицы опытных данных на части относится к вопросам оптимизации критериев, т. е. для его решения требуется привлечение вторичных критериев. Сколько будет указано вторичных критериев, столько можно получить оптимальных разделений таблицы опытных данных на части. В свою очередь для оптимального выбора критериев второго уровня следует назвать внешнее дополнение (критерий)

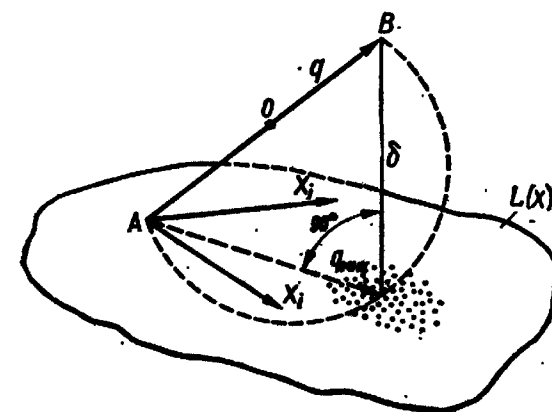


Рис. 27. «Облако» проекций  $q$  на линейное подпространство  $L(x)$ , образованное векторами  $X_i$  и  $X_j$ . Точки «облака» отвечают различным вариантам деления выборки на две части.

третьего уровня в полном соответствии с теоремой Геделя.

*Вторичный критерий простоты модели (минимума рядов селекции).* При использовании критерия регулярности рекомендуется ранжировать (расположить в ряд) точки по дисперсии выходной величины

$$q^2 = (q_i - q)^2, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

а затем перебором найти оптимальное деление этого ряда на части по дополнительному вторичному критерию. Таким дополнительным критерием может быть критерий минимума числа рядов селекции. Существование минимума показано Н. Н. Тодуа (парабола Тодуа, рис. 6).

*Вторичный критерий диаметра облака разброса проекций.* Метод наименьших квадратов дает вектор, который представляет собой ортогональную проекцию вектора выхода частной модели (см. рис. 2 и 27)

$$q = f(x_i x_j)$$

на линейное подпространство  $L(x)$ , образованное векторами аргументов модели  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . В зависимости от способа деления

множества опытных точек на части  $N_A$  и  $N_B$  конец выходного вектора  $q_{\min}$  может смещаться.

Геометрическое место точек на плоскости концов вектора образует «облако», которое является отображением гиперсферы на плоскость аргументов. Наилучший критерий минимума смещения должен сравнивать наибольший диаметр этого облака для названных моделей и выбрать ту модель, у которой он меньше, чем у других. Однако алгоритм определения такого критерия требует перебора всех возможных разделений таблицы исходных данных, что часто практически затруднительно из-за большого объема перебора.

Оптимальное разделение точек таблицы опытных данных на две равные последовательности A и B (необходимое для определения критерия минимума смещения) достигается по правилу минимакса (см. рис. 7):

$$n_{\text{см max}}^2 \rightarrow \min,$$

т. е. для каждой модели находятся  $n_{\text{см max}}^2$  при всевозможных разделениях. Затем из всех  $n_{\text{см max}}^2$  значений этой величины выбирается наименьшая. Она определяет собой оптимальное разделение.

Оптимальное разделение можно также найти по правилу максимина (см. рис. 8):

$$n_{\text{см min}}^2 \rightarrow \max.$$

При этом для каждого разделения точек из всех минимумов выбирается наибольший.

*Вторичный вероятностный критерий.* Весьма перспективный вероятностный критерий оптимальности и алгоритм его определения (действительный как для критерия минимума смещения, так и для критерия регулярности) предложены в работе [87]. Оптимальное разделение определяется как такое, которое минимизирует отклонение функции распределения вероятности критерия для истинной модели от единичной функции. По физическому смыслу критерий требует выбрать разделение, при котором зависимость критерия от сложности модели более острая и достигаемый минимум глубже, чем при других разделениях.

*Прямой перебор вариантов разделений таблицы на две равные части (при использовании критерия минимума смещения).* Согласно теореме Уидроу [112], оптимальным является разделение таблицы на две равные части. Следовательно, перебору (по глубине минимума или непосредственно точности прогноза) подлежат только варианты состава двух равных множеств.

# Определение термина «помехоустойчивый критерий минимума смещения»

Пусть заданы  $M$  математических моделей, представляемых некоторыми (алгебраическими), дифференциальными (или конечно-разностными) уравнениями в общем буквенном виде. Пусть также имеется небольшая таблица экспериментальных данных, все точки которой точно удовлетворяют уравнению одной из моделей. Задача состоит в том, чтобы, пользуясь такой информацией, узнать, какой именно из моделей соответствуют точки и тем самым найти истинную модель. Понятие «истинная модель» можно определить двумя способами:

а) истинной моделью называется модель, дающая минимум критерия селекции;

б) истинная модель есть модель, на выход которой аддитивно наложен сравнительно небольшой шум — высокочастотная помеха с нулевым средним значением.

Оба определения отвечают близким друг другу моделям. В основном применяем первый из них. Однако в данном разделе нам удобнее воспользоваться вторым определением или полагать, что модели совпадают.

Критерий, позволяющий оценить каждую из ряда моделей в смысле соответствия таблице экспериментальных данных, называется критерием селекции.

При точных данных (без помех измерений) задача поиска адекватной модели может быть решена при помощи очень многих критериев, в том числе и по критерию минимума среднеквадратической ошибки, определяемой на всех точках таблицы исходных данных (остаточная дисперсия в методе наименьших квадратов).

Обычно встречается значительно более сложная задача: в таблице исходных данных представлены не точные данные, а некоторая смесь точных данных и помех. Наложение помех может быть аддитивным, мультипликативным или смешанным: предполагается, что регулярная составляющая в помехе отсутствует. При постепенном увеличении интенсивности (амплитуды) помехи наступает момент, когда используемый критерий выбора модели начинает ошибаться, т. е. приписывать таблицу данных не модели, действительно ей соответствующей, а какой-нибудь иной.

Недостаточно придумать критерий, дающий минимум при увеличении сложности структуры модели. Нужно еще, чтобы критерий был помехоустойчивым, т. е. всегда открывал один и тот же физический закон, скрытый в представленных зашумленных данных.

Алгоритм самоорганизации называется помехоустойчивым, если потеря истинной модели наступает при значительном уровне интенсивности помех. Опыт применения алгоритмов МГУА свидетельствует о том, что наиболее помехоустойчивы алгоритмы со специальной формой критерия минимума смещения. Кроме того, эффективными средствами повышения помехоустойчивости

являются многокритериальный выбор моделей и дополнительный перебор ряда конкурирующих гипотез (например, о виде корней — для гармонического, или о взаимодействии переменных — для обобщенного алгоритма МГУА), а также текущее сглаживание переменных (с. 80). Здесь рассмотрим помехоустойчивые формы критерия минимума смещения.

Допустим, что сравнению подлежат  $r$  моделей и что среди этого множества моделей имеется одна «истинная», описывающая интересующий нас закон. Экспериментальные данные представлены в виде таблицы, содержащей  $N = N_A + N_B$  точек выходной величины  $q_{(i)}$  и  $x_{n(i)}$ , значения аргументов  $x_{1(i)}, x_{2(i)}, \dots, x_{n(i)}$ , где  $i = 1, 2, \dots, N$ . Каждое число в этой таблице состоит из двух частей: а) истинного значения, отвечающего неизвестному закону; б) аддитивно наложенного шума (помехи)  $q_i = q_i^{\text{ист}} + q_{(i)\text{ш}} x_{j(i)} = x_{j(i)}^{\text{ист}} + x_{i\text{ш}}^j, j = 1, 2, \dots, n$ .

Сумма помех во всех точках таблицы равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N q_{(i)\text{ш}} = 0, \quad \sum_{i=1}^N x_{(i)\text{ш}}^j = 0.$$

Именно это свойство помех (отсутствие регулярной составляющей) позволяет назвать их шумом.

Показателем интенсивности помех для переменных может быть

$$\lambda_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (x_{(i)\text{ш}}^j)^2}{\sum_{i=1}^N x_i^2(i)},$$

а для всей таблицы данных —

$$\lambda^2 = \max \{ \lambda_q^2, \max_j \lambda_j^2 \}.$$

Мерой помехоустойчивости критерия минимума смещения является значение интенсивности помех, при котором минимум критерия соответствует еще истинной модели. При дальнейшем увеличении интенсивности помех критерий минимума смещения «начинает ошибаться», т. е. теряет истинную модель и указывает на близкую к ней, обычно более простую.

Способы повышения помехоустойчивости критерия минимума смещения. Первой задачей улучшения критерия минимума смещения является устранение необходимости разделения таблицы исходных данных. Пользуясь первыми табличными разностями или первыми табличными суммами, можно определить критерий минимума смещения без деления таблицы исходных данных на части.

Второй задачей по улучшению критерия является повышение его помехоустойчивости. Можно дать несколько рекомендаций.

1. Расширение интервала суммирования (введение коэффициента помехоустойчи-

в о с т и  $\alpha$ ). В первых работах критерий минимума смещения рекомендован нами в следующей форме:

$$n_{см}^2 = \frac{\sum_1^N (q_A - q_B)^2}{\sum_1^N q_{табл}^2} \rightarrow \min,$$

где  $q_A$  — значения переменной  $q$ , рассчитанные по модели, оценки коэффициентов которой получены на части  $N_A$  таблицы;  $q_B$  — то же, на части  $N_B$  таблицы;  $q_{табл}$  — табличное значение переменной;  $N$  — полное число точек таблицы.

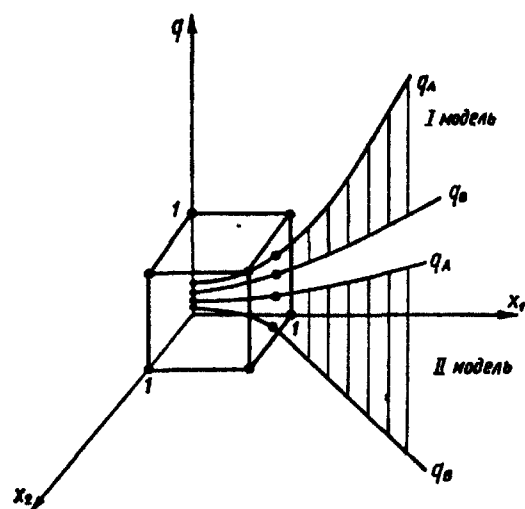


Рис. 28. Сравнение первой и второй моделей в областях экстраполяции и интерполяции.

Такой критерий обладает сравнительно слабой помехоустойчивостью, поскольку на интервале интерполяции все модели почти одинаковы по аппроксимирующим свойствам. Квадратичные ошибки малы, разность их также мала для моделей любых структур (кроме самых простых, линейных моделей).

За пределами интервала интерполяции решения расходятся, образуя так называемый веер. Здесь разность выходов моделей становится значительной, а следовательно, критерий, учитывающий ее, более помехоустойчивым.

На рис. 28 показан пример оценки смещения двух полиномиальных моделей. Площадь, заключенная между интегральными кривыми  $q_{(A)}^1$  и  $q_{(B)}^1$ , значительно больше площади, заключенной между кривыми  $q_{(A)}^2$  и  $q_{(B)}^2$ . Следовательно, оценка смещенности второго полинома будет значительно меньше:

$$n_{см2}^2 \ll n_{см1}^2.$$

Таким образом, если исходные данные зашумлены, то рекомендуется расширить интервал суммирования в формуле подсчета критерия несмещенности:

$$n_{см}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha N} (q_A - q_B)_i^2}{\alpha \sum_{i=1}^N q_{табл i}^2}.$$

Обратим внимание на то, что в случае линейности модели по аргументам расширение интервала суммирования не приводит к

увеличению помехоустойчивости критерия минимума смещения.

2. Выделение первой гармоники выходных переменных моделей  $A$  и  $B$  (рис. 29, б). Выходные величины моделей  $A$  и  $B$  можно разложить в гармонические ряды. Предполагается, что частотное разложение полезного сигнала при отсутствии помех лежит в другом спектральном диапазоне по сравнению с разложением помехи. Если такое пред-

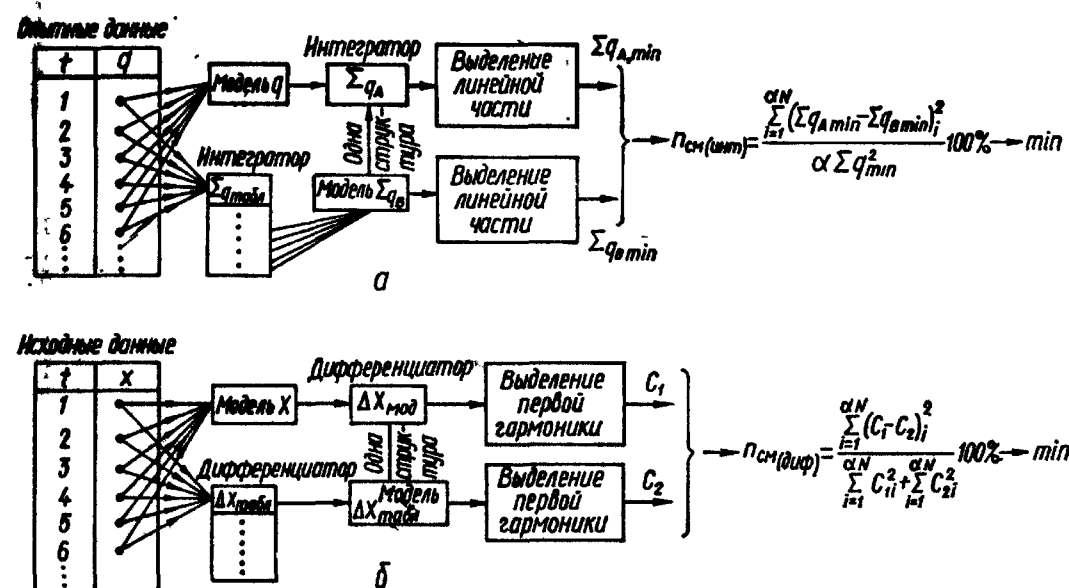


Рис. 29. Помехоустойчивые критерии минимума смещения, требующие разделения таблицы исходных данных:

а — интегральный критерий; б — дифференциальный.

положение оправдывается, то для повышения помехоустойчивости критерия минимума смещения можно применять предварительное выделение первой гармоники.

Для оценки структуры модели по минимуму смещения можно воспользоваться следующим правилом: первая гармоника разложения в тригонометрический ряд — функция на выходе модели  $A$  — должна как можно ближе совпадать с первой гармоникой разложения в ряд выходной величины модели  $B$ , т. е.

$$n_{см} = \frac{\sum_{i=1}^N \{ [a_0 + a_1 \sin(\omega_1 t + \theta)] - [b_0 + b_1 \sin(\omega_2 t + \theta_2)] \}_i^2}{\sum_{i=1}^N [a_0 + a_1 \sin(\omega_1 t + \theta)]_i^2 + \sum_{i=1}^{\alpha N} [b_0 + b_1 \sin(\omega_2 t + \theta_2)]_i^2} \rightarrow \min$$

Практически должны как можно ближе (в пределах заданного перебора структур) совпадать основные частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$ .

Если помеха по своему спектральному составу точно совпадает с сигналом, то ее невозможно отфильтровать никакими средствами.

3. Выделение линейной части выходных переменных моделей  $A$  и  $B$  (рис. 29). Если выходные



величины моделей гладкие и хорошо аппроксимируются при помощи степенных полиномов, то рекомендуется выделять не первые гармоники, а линейные части.

Для оценки структуры модели по критерию минимума смещения можно воспользоваться правилом: линейная составляющая выходной величины модели  $A$  возможно ближе должна совпадать с линейной составляющей выходной величиной модели  $B$ , т. е.

$$n_{\text{см}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha N} |q_{A(\min)} - q_{B(\min)}|^2}{\sum_{i=1}^{\alpha N} q_{A(\min)}^2 + \sum_{i=1}^{\alpha N} q_{B(\min)}^2} \rightarrow \min.$$

Для случая одного аргумента  $q(t)$  алгоритм подсчета критерия минимума смещения показан на рис. 30. Это способ повышения

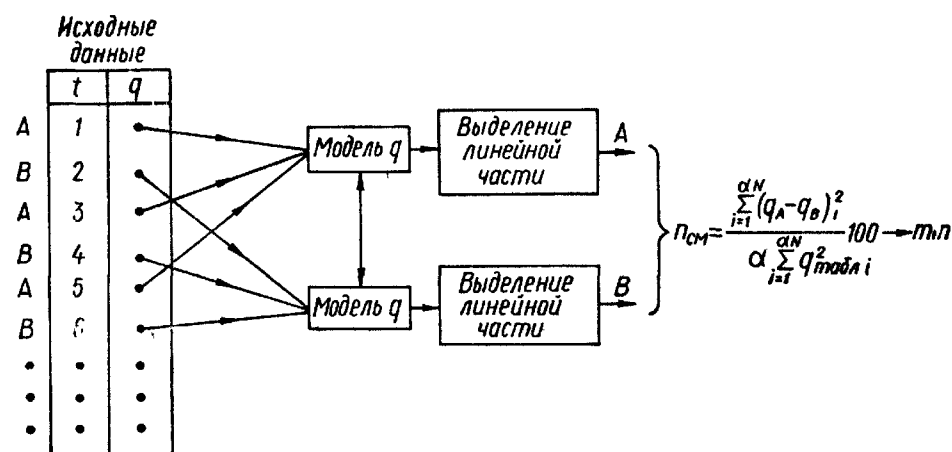


Рис. 30. Помехоустойчивый критерий минимума смещения с разделением таблицы исходных данных на две части.

помехоустойчивости в случае обычно принятого разделения таблицы исходных данных на две последовательности точек  $N_A$  и  $N_B$ . Идентификации подлежат две модели одной и той же структуры, для которой находится показатель несмещенности. Различие моделей только в том, что коэффициенты одной из них  $q_A$  оцениваются на последовательности точек  $N_A$ , а коэффициенты другой  $q_B$  — на последовательности точек  $N_B$ . При отсутствии смещения обе модели совпадают:  $n_{\text{см}}^2 = 0$ .

Линейные части моделей мало зависят от помех. Это дает основание подсчитывать критерий минимума смещения только по линейной части. В связи с указанной характеристикой помех такой критерий обладает повышенной помехоустойчивостью.

Описанные способы повышения помехоустойчивости можно применять как для интегральной, так и дифференциальной форм критерия минимума смещения.

4. Комбинированный критерий «минимум смещения плюс точность пошагового ин-

тегрирования на участке интерполяции». Можно значительно повысить помехоустойчивость выбора единственной модели оптимальной сложности, если вместо критерия минимума смещения использовать комбинированный критерий:

$$\rho_3 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + i^2(N)} \rightarrow \min,$$

где  $n_{\text{см}}$  — одна из реализаций критерия минимума смещения;  $i^2(N)$  — сумма квадратов отклонений кривой процесса от кривой его пошагового прогноза, начатого из первой точки интервала интерполяции:

$$i^2(N) = \frac{\sum_{i=1}^N (q_{\text{п}} - q_{\text{табл}})^2}{\sum_{i=1}^N q_{\text{табл}}^2} \rightarrow \min.$$

Критерий требует, чтобы модель была не только несмещенной, но и давала наилучшую сходимость пошагового прогноза.

Сравнение различных способов повышения помехоустойчивости критерия минимума смещения. Сравнить эффективность предложенных выше способов повышения помехоустойчивости можно двумя методами: дедуктивным (аналитически) или индуктивным, т. е. по результатам действия на конкретных примерах. Здесь мы избираем второй метод как более простой и убедительный.

Рассмотрим пример.

Пример 20. Восстановление закона в условиях постоянно возрастающей интенсивности помех. Выберем истинную модель (закон) в виде полинома

$$q = 2 - 0,1t^2.$$

Пусть будут известны только 12 значений функции  $q(t)$ , отвечающих значениям аргумента  $t = 1, 2, \dots, 12$ . Наложим шум (помеху). Далее «спрячем» модель, т. е. будем считать ее неизвестной, подлежащей восстановлению в классе моделей, формируемых комбинаторным алгоритмом МГУА с полным полиномом третьей степени относительно  $t$ . Интенсивность шума будем постепенно увеличивать.

Результаты эксперимента по восстановлению истинной модели представлены на рис. 31, где показаны кривые изменения предельно допустимой интенсивности шума, при которой критерий еще не теряет правильную (известную нам априори) структуру модели. Наиболее помехоустойчивым является интегральный критерий минимума смещения с выделением линейной части при значениях коэффициента помехоустойчивости  $\alpha = 2,0$  (кривая 6).

Отказ от выделения линейной части незначительно снижает помехоустойчивость (кривая 3).

Следующим по помехоустойчивости является критерий минимума смещения с предварительным ранжированием таблицы опытных данных по дисперсии (кривые 5 и 2).

Низкой помехоустойчивостью обладает критерий с делением точек таблицы на четные и нечетные (кривые 4 и 1).



Во всех случаях предварительное выделение линейной части и расширение интервала экстраполяции (коэффициента  $\alpha$ ) благоприятно влияют на повышение помехоустойчивости выбора модели. Оптимальные значения коэффициента помехоустойчивости лежат в пределах  $\alpha = 1,5 \div 3,0$ .

**Задачи, решаемые при помощи селекции моделей по критерию минимума смещения.** Итак, мы нашли критерий минимума смещения в такой форме, которую можно применять при значительных

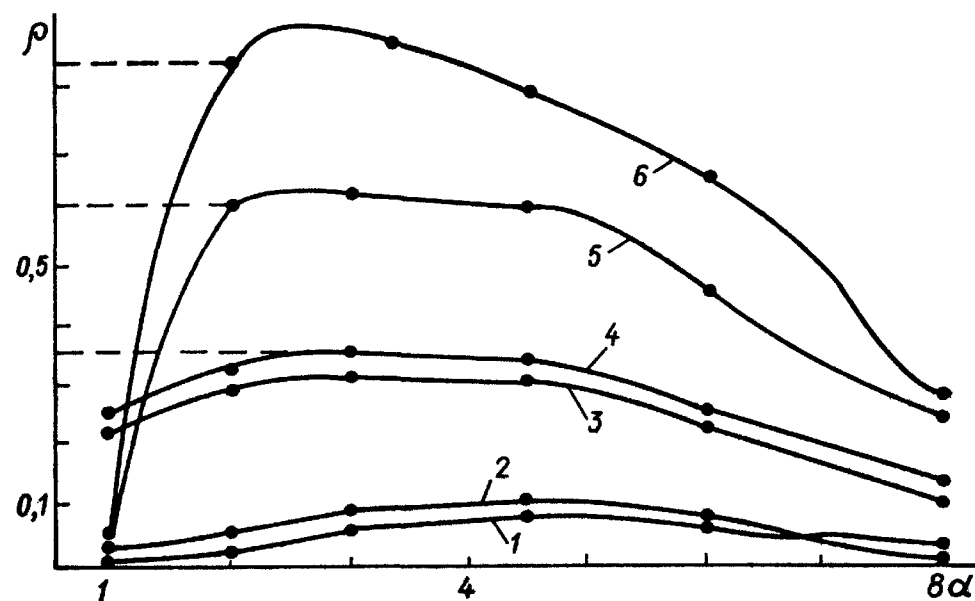


Рис. 31. Предельно допустимые уровни помех в функции коэффициента  $\alpha$  (результаты вычислительного эксперимента):

1 — при делении точек на  $A$  и  $B$  через одну, 2 — по дисперсии, 3 — интегральный критерий, 4—5, 6 — соответствуют условиям пп. 1—3, но получены при выделении линейной части.

помехах в исходных данных. Отметим задачи, которые можно решать, пользуясь помехоустойчивыми разновидностями критерия минимума смещения:

- 1) открытие или восстановление постоянного закона, скрытого в таблице исходных данных; выявление выходных и регулирующих переменных и воздействий, а также аргументов закона;
- 2) экстраполяция и получение прогнозов (в частности, «прогнозов Кассандры», т. е. при монотонно изменяющихся данных);
- 3) восстановление данных, пропущенных в таблице;
- 4) оптимизация длины учитываемой предыстории (длины таблицы исходных данных);
- 5) ранжировка аргументов по их важности, влиянию на результаты;
- 6) установление факта существования постоянного закона и решение вопроса, следует ли учитывать его изменения во времени и пространстве или нет.

## Применение критерия минимума смещения для синтеза моделей по опытным данным

Рассмотрим задачу синтеза математической модели некоторого объекта нашего исследования по данным наблюдений за изменением его переменных во времени (рис. 32). Эксперимент может быть пассивным или активным: в последнем случае вносятся специально выбранные изменения переменных (планирование эксперимента) с целью повышения точности измерений. Однако планирование эксперимента при современном состоянии возможно только для получения оценок небольшого числа коэффициентов (не более десяти) при известной структуре модели.

По методу МГУА получают более сложные модели и находится структура оптимальной сложности. При этом синтез модели можно представить в виде четырех последовательных этапов или фаз: 1) идентификации, 2) оценки параметров, 3) адаптации коэффициентов, причем этап адаптации коэффициентов дополняет собой оценку параметров и 4) синтеза оптимального управления.

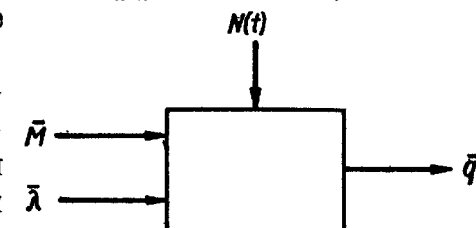


Рис. 32. Схема объекта, находящегося под действием векторов  $\mu$  — регулирующих воздействий;  $\lambda$  — внешних возмущающих воздействий (измеряемых);  $N$  — помех (не поддающихся измерению);  $q$  — выходная величина.

Идентификация имеет целью определение структуры модели оптимальной сложности по зашумленным данным наблюдений за входами и выходами объекта. Оптимальность понимается в смысле минимума некоторого целесообразно выбранного критерия, выбор которого принадлежит автору модели и учитывает ее назначение (прогноз, идентификация, управление и т. п.). Мы рекомендуем применять критерий несмещенности или так называемые комбинированные критерии.

Идентификация объекта по данным наблюдений не нужна, если процессы в объекте могут быть легко описаны математически из физических соображений.

Оценка параметров или коэффициентов модели является вторым этапом (фазой) синтеза модели. Обычно оценки получают по методу наименьших квадратов, т. е. по минимуму среднеквадратической ошибки, подсчитанной на всех точках таблицы исходных данных. Оценки могут быть улучшены, если более точно учесть распределение помех.

Этап адаптации коэффициентов представляется третьим дополнительным этапом (фазой) синтеза модели. На этом этапе структура модели не изменяется. Оценки коэффициентов, полученные по методу наименьших квадратов, принимаются за исходное первое приближение, и предпринимается попытка улучшить оценки в смысле достижения более глубокого минимума основного критерия выбора

модели, каким может быть принят критерий минимума смещения или комбинированный критерий. На этапе адаптации коэффициентов применяются случайный поиск в пространстве коэффициентов модели, градиентные методы или методы стохастической аппроксимации. Для однозначности выбора оценок коэффициентов поиск ведется по комбинированным критериям.

В работах [8, 11] показано, что при многошаговом прогнозе оптимальные оценки коэффициентов соответствуют так называемому ортогональному проектированию. Для улучшения оценок коэффициентов конечно-разностных уравнений предложена процедура последовательного проектирования с целью ортогонализации вектора помех.

После окончания идентификации, оценки параметров и этапа адаптации коэффициентов модель готова к применению для решения задач прогнозирования, распознавания образом или оптимального управления. В последнем случае решается еще и задача синтеза оптимального управления (которую можно рассматривать как некоторый четвертый этап алгоритма синтеза). В этом применении к модели предъявляются некоторые специфические требования, например наличие управляющих воздействий среди аргументов модели.

Особый случай задачи синтеза управления встречается тогда, когда приходится принимать решения по ряду противоречивых критериев, так, чтобы «и овцы были целы, и волки были сыты». Алгоритмы многокритериального оптимального управления представляют собой эффективное поле применения подхода самоорганизации.

Тестовая задача для оценки методов идентификации. Можно предложить тестовую задачу, которая, по нашему мнению, может быть пробным камнем для оценки практической ценности методов идентификации. Задача состоит в восстановлении закона, заданного в виде полинома, например  $y = +1 - t + t^2$ , скрытого в зашумленных данных. Исходной информацией для моделирования являются только зашумленные данные. Степень полинома не известна.

Если метод при числе точек около 10—20 и при амплитуде шума около 20—30% (распределение шума равномерное) сможет открыть исходный полином, то метод пригоден для практического использования в реальных задачах.

Следует сказать, что перебор (последовательное опробывание) моделей по критерию минимума смещения, т. е. самоорганизация моделей на ЭВМ, успешно решает эту задачу.

*Применение критерия минимума смещения  
для идентификации физической модели  
(или «открытие закона»)*

Под термином «физическая модель объекта» обычно понимают единственную модель, показывающую структуру причинно-следственных связей в исследуемом объекте и численные значения коэффициентов этих связей. Физическая модель называется еще законом или уравнением (системой уравнений), описывающим объект.

Ясно, что описанная выше процедура синтеза модели во многих случаях может быть названа «открытием закона».

Целью идентификации может быть выявление скрытых закономерностей объекта по зашумленным данным. Требуется наилучшим образом отфильтровать помехи и открыть законы, действующие в объекте. Эту задачу идентификации условимся называть задачей открытия или восстановления законов, действующих в объекте.

Для точной аппроксимации теория самоорганизации рекомендует использование в качестве критерия селекции критерия регулярности, для открытия законов — критерия минимума селекции, для долгосрочного прогнозирования — критерия баланса переменных. Эти критерии будут рассмотрены в следующей главе.

При открытии законов с помощью перебора можно исходить из трех предположений.

1. В объекте действуют не изменяющиеся во времени законы. Глубокий минимум критерия несмещенности является подтверждением этого предположения.

2. Закон, действующий в объекте, медленно изменяется во времени.

3. В объекте нет постоянно действующего закона. Примером может быть генератор случайных чисел.

Практически ограничиваются рассмотрением только первого случая: требуется открыть постоянно действующий закон по зашумленным опытным данным. Объекты с переменными во времени законами будут рассмотрены в третьей главе.

Под восстановлением закона понимается следующая процедура: сам закон известен и задан в виде аналитической формулы. Но этому закону рассчитывается ряд точек (около 15—20), после чего закон «прячется», считается до конца счета неизвестным. Затем по алгоритмам МГУА находится уравнение, отвечающее минимуму принятого внешнего дополнения — критерия селекции. Восстановленный закон сравнивается с исходным, и делается вывод о пригодности того или иного алгоритма МГУА для решения задачи восстановления и открытия законов.

Под «открытием закона» следует понимать ту же задачу, но в случае, когда исходный закон не известен, а исходную таблицу данных берут из экспериментов на реальных объектах. При этом, в отличие от задачи восстановления, данные могут быть зашумлены помехами, что, конечно, затрудняет открытие закона и может привести к недостаточной глубине минимума критерия или даже к ошибочному выбору модели.

В работе [59] получена математическая модель процесса обработки ковара резанием с помощью модифицированного упрощенного алгоритма МГУА, позволяющая определить количественную оценку влияния на процесс ряда исследуемых факторов.

Процесс обработки металлов резанием представляет собой сложную неоднородную систему, зависящую от множества факторов, количество, взаимосвязь и сложность которых позволяют сравнивать его с естественными процессами. Условно этот процесс может быть представлен как процесс сложного взаимодействия двух основных систем (рис. 33), связанных с обрабатываемой деталью и методом обработки. Эти системы в свою очередь подразделяются еще на целый ряд подсистем и т. д. Данный процесс относится к классу «плохо организованных», так как нельзя четко проследить причин последственных связей между входными и выходными параметрами.

При внедрении в производство нового инструментального материала (решение одной из частных задач процесса) — безвольфрамовых твердых сплавов — взамен дефицитных вольфрамсодержащих для обработки металлов резанием необходимо: 1) дать рекомендации по назначению режимов резания; 2) определить оптимальную геометрию инструмента (токарного проходного резца); 3) определить влияние режимов резания, диаметра обрабатываемой заготовки и габаритных размеров твердосплавной пластины на стойкость инструмента.

Для решения поставленных вопросов потребовалось: 1) построить математическую модель процесса обработки металлов резанием; 2) определить оптимальную геометрию инструмента; 3) исследовать процесс по модели и проанализировать степень влияния каждого из параметров при постановке контрольных опытов.

Задача построения математической модели процесса сводилась к отысканию по экспериментальным данным некоторой функции  $M(Y/X) = F(X, \Theta)$  при неизвестных  $F$ -операторах и  $\Theta = \|\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_m\|$ -векторе оценивающих коэффициентов, где  $M(Y/X)$  — среднее значение исследуемой величины;  $X = (x_1, x_2, \dots, x_{14})$  — вектор контролируемых параметров.

Исследуемой величиной  $Y$  явилось время работы инструмента при заданном критерии его затупления, определяемое как стойкость инструмента,  $T$  (мин).

Вектор  $X$  характеризовался переменными, определяющими:

а) геометрию инструмента:  $x_1$  — передний угол,  $\gamma$  (град);  $x_2$  — угол наклона режущей кромки,  $\lambda_0$  (град);  $x_3$  — главный задний угол,  $\alpha_0$  (град);  $x_4$  — передний угол фаски на режущей кромке,  $f$  (град);  $x_5$  — ширина фаски на режущей кромке,  $\gamma f$  (мм);  $x_6$  — глубина стружкозавивающей канавки,  $h$  (мм);  $x_7$  — угол наклона основания лунки,  $\lambda_n$  (град);

б) режимы резания:  $x_8$  — скорость резания,  $v$  (м/мин);  $x_9$  — подача,  $s_0$  (мм/об);  $x_{10}$  — глубина резания,  $t$  (мм);

в) диаметр заготовки и габаритные размеры пластинки:  $x_{11}$  — диаметр заготовки,  $\alpha$  (мм);  $x_{12}$  — длина пластины,  $L$  (мм);  $x_{13}$  — ширина пластины,  $B$  (мм);  $x_{14}$  — толщина пластины,  $H$  (мм).

Определение математической модели включало: построение плана проведения опытов, получение математической модели процесса и установление адекватности модели и исследуемого про-

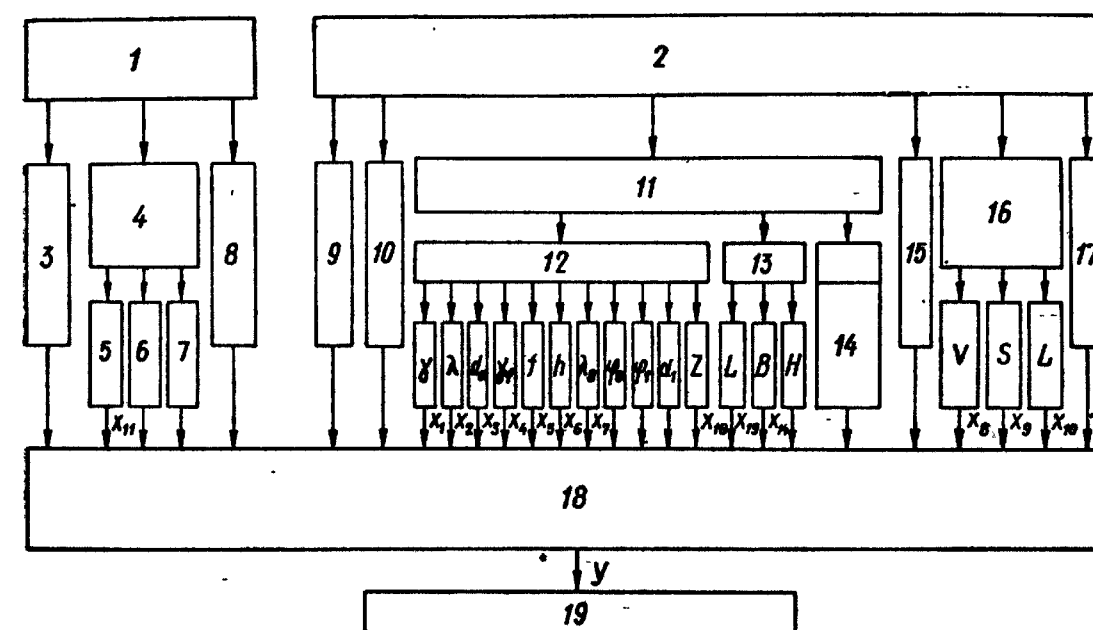


Рис. 33. Блок-схема процесса обработки металлов резанием:

1 — деталь; 2 — метод обработки; 3 — материал; 4 — форма и размеры; 5 — диаметр; 6 — длина; 7 — форма; 8 — точность изготовления; 9 — станок; 10 — приборы; 11 — инструменты; 12 — геометрия; 13 — размеры пластин; 14 — конструкция и технология изготовления; 15 — схема обработки; 16 — режим резания; 17 — масляно-охлаждающая жидкость; 18 — процесс резания; 19 — стойкость инструмента  $T$ .

цесса. При составлении плана экспериментов был охвачен весь диапазон изменения переменных. Были произведены все так называемые крайние\*. Остальные эксперименты были более или менее равномерно распределены по всей области функционирования.

План предусматривал проведение ста опытов для двадцати резцов при числе контролируемых параметров, равном четырнадцати. Каждый из резцов проходил пять переточек. Для реализации плана эксперимента были выбраны пределы изменения контролируемых параметров, представленные в табл. 24.

По своим предпосылкам данная задача может быть отнесена к системе моделей регрессионного анализа. Однако использование регрессионного анализа в качестве метода математического моделирования процесса с числом переменных, равным четырнадцати, заведомо приведет к аппроксимации полиномом малой степени (упрощению трактовки задачи) и соответственно неадекватной

\* «Крайние» (или тупиковые) опыты, при которых все переменные получают предельные значения.

Таблица 24. Границы изменения контролирующихся параметров

Параметр	$x_1$ , град	$x_2$ , град	$x_3$ , град	$x_4$ , град	$x_5$ , мм	$x_6$ , мм	$x_7$ , град
Верхняя граница	40	+3	18	+2	0,25	1,0	+4
Нижняя граница	20	-9	6	-6	0,05	0,2	-11
Параметр	$x_8$ , м/мин	$x_9$ , м/об	$x_{10}$ , мм	$x_{11}$ , мм	$x_{12}$ , мм	$x_{13}$ , мм	$x_{14}$ , мм
Верхняя граница	200	0,15	1,5	85	18	16	8
Нижняя граница	80	0,05	0,5	30	8	5	1

модели. Этот исход предопределен ограниченным объемом памяти во временных ЭВМ и отсутствием возможности постановки большого количества опытов для получения хорошо обусловленных информационных матриц. Сокращение количества переменных (что проводилось другими исследователями) значительно сузит задачу оптимизации и снизит ее практическую ценность.

Анализ математических методов, наиболее широко используемых для решения многомерных задач, позволил выбрать для данной задачи метод группового учета аргументов. Для моделирования процесса был применен модифицированный упрощенный алгоритм МГУА [59, 81], использующий критерий минимума смещения.

Областью, внутри которой осуществляется поиск математической модели, вначале служило пространство исходных признаков ( $X$ ), затем при получении неудовлетворительных математических моделей (с физической точки зрения) эта область была расширена включением дополнительных переменных ( $1/X$ ) и  $(\ln X)$ .

В результате работы алгоритма в области поиска получена наилучшая с точки зрения физического описания модель, которая после преобразования имеет вид

$$T = C(x) x_8^{\alpha(x)} x_9^{\beta(x)} x_{10}^{\gamma(x)},$$

где

$$C(x) = \exp \{a_0 + \ln x_{11} \ln x_{13} (d_2 + d_6 \ln x_6) + d_4 \ln x_1 \ln x_{12} + \\ + \ln x_7 [d_7 \ln x_4 + d_9 \ln x_2 + d_{12} \ln x_7 (\ln x_2)^4]\};$$

$$\alpha(x) = \ln x_8 \{d_1 + \ln x_2 \ln x_3 \ln x_8 \ln x_{11} \ln x_{13} (\ln x_9)^2 [d_{14} + \\ + d_{15} \ln x_{10} + d_{18} \ln x_{10} + d_{17} x_1 \ln x_7 (\ln x_4)^2]\};$$

$$\beta(x) = \ln x_2 \ln x_1 \ln x_{13} [d_3 + d_5 \ln x_7 \ln x_9 + \\ + d_{13} \ln x_3 \ln x_4 \ln x_9 \ln x_{14} (\ln x_7)^2 + d_{13} \ln x_4];$$

$$\gamma(x) = d_{10} + (\ln x_2 \ln x_7 \ln x_9) \ln x_4 \ln x_{11} \ln x_{13} (d_8 + d_{11} \ln x_3 + d_{16} \ln x_5).$$

Математическая модель была получена на двадцатом ряду селекции, так как, начиная с двадцать первого ряда, усложнение модели прекратилось. На следующих рядах селекции члены полинома (в логарифмическом виде) повторялись, но с коэффициентами, на два-три порядка меньше, чем у выбранных ранее. Таким образом, алгоритм нашел оптимальный вид уравнения на двадцатом ряду селекции (самоорганизации), а в дальнейшем лишь уточнялись числовые значения коэффициентов.

Точность модели на обучающей последовательности 16,2%, а на всей последовательности  $\Delta^2 = 14,8\%$ . Относительная смещенность коэффициентов  $n_{см}^2 = 14\%$ . Ошибка экспериментов при этом составляла 10%.

Данная математическая модель полностью совпадает с функциональной связью, широко применяемой на практике.

Мультипликативный характер модели еще раз подтверждает положение, существующее в науке о резании металлов, о том, что при постоянных обрабатываемом и инструментальном материалах показатели степени закономерно изменяются с изменением абсолютных значений переменных  $x_8$ ,  $x_9$ ,  $x_{10}$ .

Основной особенностью модели является ее способность хорошо объяснять кинематику процесса резания в комплексном влиянии друг на друга всех контролируемых переменных в принятом диапазоне их изменения, что позволяет дать количественную оценку этого влияния.

Оптимальная геометрия режущего инструмента и степень влияния каждого из параметров на изучаемый процесс определялись при 24 вариантах условий работы резца, характеризующих изменения диаметра заготовки и габаритных размеров твердосплавной пластины, с 28 комбинациями режимов резания в каждом из вариантов.

Оптимальная геометрия резца находилась методом случайного поиска. Найденная для каждого из вариантов и режимов резания геометрия показывает, что оптимальные значения  $x_1$ , измеренного в нормальной плоскости к режущей кромке у вершины резца,  $x_4$  и  $x_7$  не зависят от режимов резания, диаметра заготовки и размеров твердосплавной пластины.

Оптимальные значения геометрических параметров  $x_2$ ,  $x_3$ ,  $x_5$  и  $x_6$  главным образом зависят от режимов резания и определяются одновременным взаимным влиянием как режимов резания, так и величиной всех геометрических параметров. Зависимости изменения  $x_2$ ,  $x_5$ ,  $x_6$  от режимов резания при обработке ковара напайным проходным резцом из ТНМ-20 (диаметр заготовки  $d = 80$  мм, размеры пластины  $8 \times 6 \times 4$  мм) представлены на рис. 34. Эти зависимости могут быть объяснены сложными контактными и тепловыми явлениями в процессе резания металлов.

Установление зависимости изменения геометрических параметров от режимов резания позволяет решать прямую и обратную задачи при обработке металлов резанием (т. е. по режимам

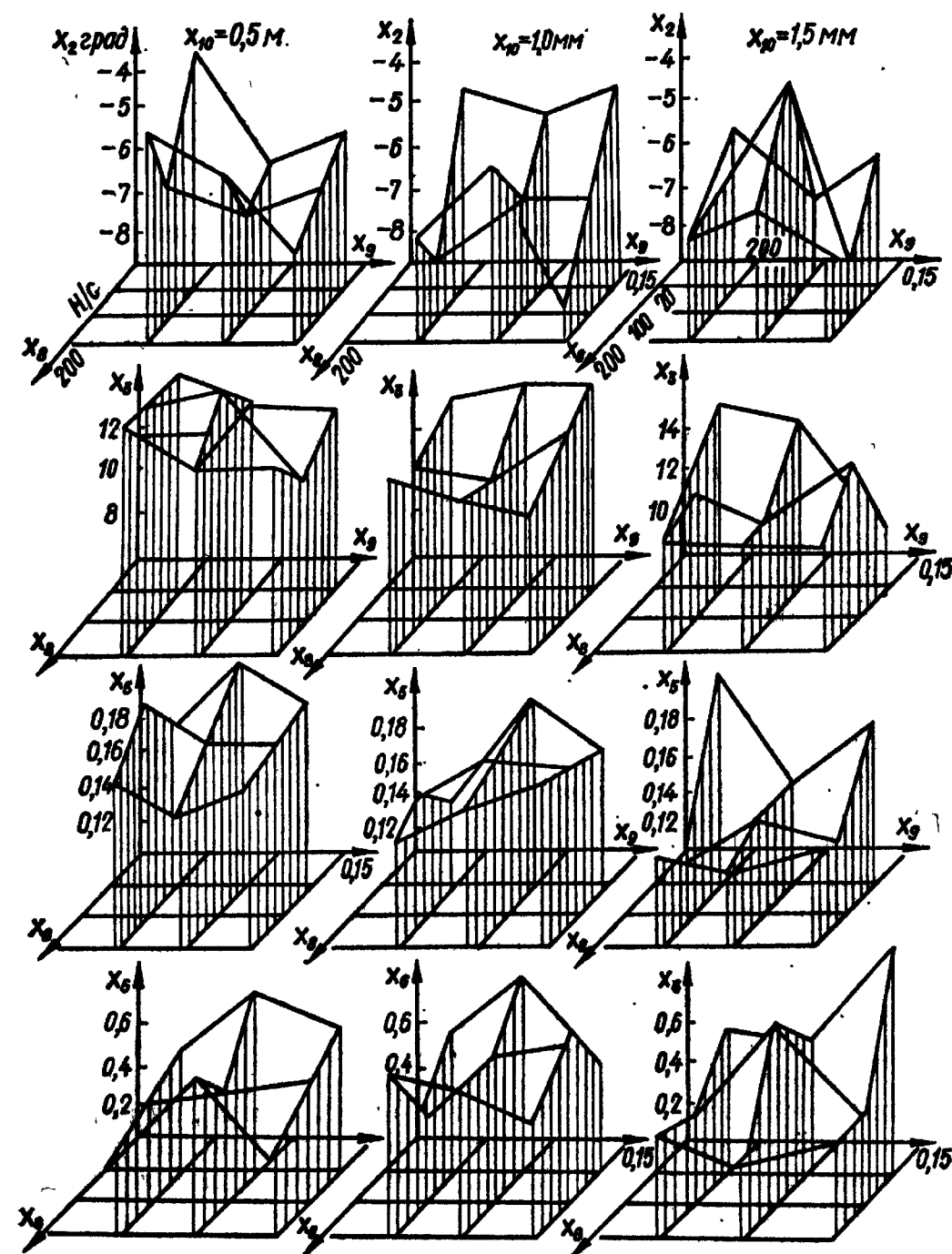


Рис. 34. Зависимость геометрических параметров реза от режима резания.

назначать геометрию инструмента и по его геометрии производить корректировку режимов) для достижения максимальной стойкости, что имеет большое практическое значение, особенно в условиях автоматизированного производства. Влияние диаметра и габаритных размеров пластин сказывается при резании с подачей 0,15 мм/об и глубиной свыше 1,0 мм. С изменением диаметра заготовки и размеров пластины наблюдаются уменьшение заднего угла на 1—1,5° и увеличение ширины фаски на 0,05—0,1 мм.

Исследование влияния на стойкость режущего инструмента изучаемых факторов показывает, что наибольшее влияние оказывают режимы резания в последовательности  $x_8$ ,  $x_9$ ,  $x_{10}$ .

С уменьшением диаметра заготовки стойкость инструмента падает. С увеличением ширины и толщины твердосплавной пластины стойкость повышается.

Анализ влияния режущего инструмента на его стойкость показывает, что за счет правильного выбора геометрических параметров ресурс инструмента можно повысить не менее чем в два раза. Полученные выводы подтверждены контрольными и производственными испытаниями [59].

### Самоорганизация моделей динамики роста сельскохозяйственных культур для управления орошаемым севооборотом по комбинированному критерию

Задача управления орошаемым севооборотом с целью повышения урожая требует применения моделей динамики роста основных сельскохозяйственных культур.

Работа [35] представляет собой первый опыт применения алгоритмов МГУА для синтеза моделей динамики яровой пшеницы, позволяющих прогнозировать его на одну или несколько декад вперед. Так как модели являются нормативными, т. е. содержат среди аргументов регулирующие воздействия, то они могут быть использованы для синтеза управления с оптимизацией прогноза урожая.

Опыт показал, что модели можно синтезировать по небольшому числу данных наблюдения, и позволил оценить точность подекадных прогнозов для основных переменных (биомасса растения, его высота и площадь листьев). Подобные модели должны быть получены для различных почвенных зон страны, для чего прежде всего нужно организовать соответствующие опыты.

Повышение точности прогноза может быть достигнуто при переходе от полиномов к более сложным базисным аргументам, например к дробно-полиномиальным с использованием многорядных алгоритмов МГУА.

### Задача управления орошаемым севооборотом

Орошение, особенно в засушливых районах, влияет на продуктивность растений больше, чем какие-либо иные агротехнические приемы. Оно изменяет почти все почвенные факторы, влияющие на рост растений, микроклимат и даже их биологические свойства, в частности строение корневой системы и соотношение вегетативных и репродуктивных органов. Эти изменения не всегда полезны, но их необходимо учитывать при управлении орошаемым хозяйством.



В условиях ограниченности водных ресурсов и высокой стоимости оросительной воды, являющейся функцией больших капитальных вложений в строительство ирригационных сооружений, целью управления орошением может быть получение максимального урожая на единицу оросительной нормы.

При исследовании влияния влаги на рост и урожай часто возникают недоразумения из-за того, что различные показатели роста растений по-разному реагируют на недостаток воды. Прирост по высоте более чувствителен к недостатку влаги, чем продукция сухого вещества, а урожай семян часто совсем не снижается при умеренном недостатке воды. Более того, концентрация в растении таких соединений, как каучук, сахар, никотин и другие, иногда даже повышается при умеренном недостатке влаги. Поэтому для однозначного ответа на вопрос, до какого уровня можно снижать запас доступной растениям почвенной влаги, необходимо иметь количественные характеристики зависимостей урожая от динамики почвенных влагозапасов орошаемого поля в каждую фазу развития сельскохозяйственной культуры. Такие характеристики особенно необходимы в условиях дефицита оросительной воды для принятия решений об очередности поливов отдельных полей севооборота, занятых различными сельскохозяйственными культурами. В связи с этим ставится задача построения моделей функционирования орошаемого севооборота и управления его продуктивностью при прогнозировании климатических факторов и оптимальном использовании оросительной воды.

*Продуктивность орошаемого севооборота и определяющие ее факторы.* Элементарным объектом управления ирригационной системой принято считать орошаемый севооборот.

В условиях орошения Юга севооборот осуществляется на массиве 400—600 га, обслуживаемом из одного водовыдела оросительной системы. Наиболее распространены зернокармливые севообороты, содержащие 6—10 полей. Продуктивность севооборота удобно оценивать в центнерах кормовых единиц, исключая пшеницу, овощи и картофель, плановые задания на которые могут меняться ежегодно. Существенным ограничением при планировании севооборота является необходимость чередования сельскохозяйственных культур, причем после одной культуры может следовать ограниченное число других культур.

Другими ограничениями являются водообеспеченность оросительной системы и направление хозяйственной деятельности сельскохозяйственного предприятия.

Продуктивность орошаемого севооборота определяется рядом природных (неуправляемых) факторов, которые разделяются на почвенные и климатические. Почвенные факторы — это механический состав и глубина профиля (определяющие механическую прочность, скорость инфильтрации, гидравлическую проводимость ненасыщенной почвы, характеристику водоудерживающих сил), аэрация, плодородие, засоленность (влияющие на структуру,

потенциал влаги, токсичность), температура, уровень грунтовых вод.

Климатическими факторами являются осадки, влажность воздуха, ветер, освещенность, температура воздуха, продолжительность дня и вегетационного периода. Некоторые из этих факторов независимы, изменение остальных приводит к изменениям многих других.

Климатические и почвенные факторы характеризуют конкретную почвенно-климатическую зону и определяют возможный набор культур в орошаемом севообороте.

Перечисленные факторы по-разному влияют на продуктивность орошаемых культур в зависимости от их периодов вегетации. Каждая культура имеет конкретное значение максимального урожая, который достигается при максимальном плодородии почвы и оптимальных уровнях всех остальных условий, определяющих урожай во все периоды вегетации. В связи с тем что условия развития культуры, как правило, на оптимальном уровне не выдерживаются, максимальный урожай достигается только в исключительных случаях. Естественным ввести понятие потенциального урожая  $y$  для каждой  $i$ -й фазы развития культуры. Очевидно, что

$$y_0 \geq y_1 \geq \dots \geq y_k,$$

где  $y_0$  — потенциальный урожай к началу сева, определяемый сортом культуры и плодородием почвы;  $y_i$  — потенциальный урожай в  $i$ -ю фазу развития культуры.

Физический смысл предыдущего условия состоит в том, что по мере развития культуры происходит непрерывное, необратимое уменьшение потенциального урожая.

Таким образом, формирование урожая можно представить в виде цепи отдельных блоков типа

$$y_i = f_i(y_{i-1}, \Phi_i), \quad i = 0, \dots, 1, 2,$$

где  $\Phi_i$  — вектор факторов, определяющих потенциальный урожай на конец  $i$ -го периода развития культуры.

Реальный урожай является функцией развития культуры во все периоды вегетации:

$$Y = \varphi(y_0, y_1, \dots, y_k).$$

*Модель формирования урожая.* Рассмотрим для примера цепь формирования урожая яровой пшеницы.

Потенциальный урожай к началу сева определяется в зависимости от предшественника, плодородия почвы и влагозапасов в почве:

$$y_0 = f_0(D, E, W_0),$$

где  $D$  — предшественник;  $E$  — плодородие почвы, характеризующееся объемным весом;  $W_0$  — влагозапасы.

Потенциальный урожай на конец первого периода вегетации от посева до полных всходов вычисляется по формуле

$$y_1 = f_1(y_0, \bar{\Phi}_1) = f_1(y_0, W_1, t_1, T_1, p_1, n_{p_1}),$$

где  $t_1$  — продолжительность периода в днях;  $T_1$  — сумма среднесуточных температур за период;  $p_1$  — сумма осадков за период;  $n_{p_1}$  — количество дней с осадками более 1 мм.

Потенциальный урожай на конец периода от полных всходов до начала кущения такой:

$$y_2 = f_2(y_1, W_2, t_2, T_2, p_2, N_{p_2}).$$

Потенциальный урожай к концу периода от начала кущения до полного колошения имеет вид

$$y_3 = f_3(y_2, W_3, t_3, T_3, p_3, m_3, l_3, n_{p_3}, n_l),$$

где  $m$  — сумма поливов;  $l = (m + p)/T$  — отношение суммарного поступления воды к сумме среднесуточных температур за период;  $n_l$  — количество дней с относительной влажностью воздуха менее 30%.

Потенциальный урожай к концу периода от полного колошения до восковой спелости запишется в виде

$$y_n = f_n(y_3, W_4, t_4, T_4, p_4, m_4, l_4, n_{p_4}, n_l).$$

Таким образом, для яровой пшеницы получена цепочка из четырех периодов. Общий вид модели формирования урожая пшеницы можно представить в следующем виде:

$$Y = \varphi(D, W_0, W_1, t_1, T_1, p_1, n_{p_1}, W_2, t_2, T_2, p_2, n_{p_2}, W_3, t_3, T_3, p_3, n_{p_3}, m, l_3, n_l, W_4, t_4, T_4, p_4, m_4, l_4, n_{p_4}, n_l).$$

В последнем выражении представлен достаточно полный набор факторов, определяющих урожай сельскохозяйственной культуры\*.

Реальный вид функции  $\varphi$  (...) может быть достаточно сложен и заранее не известен, поэтому применение обычного регрессионного анализа для ее получения невозможно. Таким образом, для идентификации статической модели урожая необходимо применять методы объективной структурной идентификации, т. е. методы самоорганизации моделей на ЭВМ. Аналогично можно представить зависимости формирования урожая других культур.

*Задача управления продуктивностью севооборота.* Статическую модель продуктивности севооборота можно представить в виде

\* В работе [79] показано, что эта общая модель с большим числом аргументов может быть заменена системой частных моделей с двумя-тремя аргументами. Однако при этом исходные данные должны удовлетворять правилам теории планирования эксперимента [81].

суммы уравнений для отдельных культур, участвующих в севообороте:

$$Y_{\Sigma} = \sum_{j=1}^n S_j Y_j,$$

где  $Y_{\Sigma}$  — общая продуктивность севооборота в кормовых единицах;  $S_j$  — площадь, занимаемая  $j$ -й культурой.

Цель управления состоит в максимизации  $Y_{\Sigma}$  при заданных ограничениях.

Управление продуктивностью севооборота, естественно, осуществляется в два этапа. Цель первого этапа состоит в оптимальном долгосрочном планировании на 6—10 лет, второго — в оперативном управлении водным режимом в условиях дефицита оросительной воды.

Оптимальное долгосрочное планирование осуществляется с учетом глобального прогноза возмущений климатических факторов (сухой или влажный год, солнечная активность, возможность заморозков и т. д.) и ограничений, определяемых специализацией хозяйства, например необходимостью получения определенного количества зерна пшеницы и овощей при непрерывном поступлении зеленой массы и т. д.

На протяжении цикла севооборота могут возникнуть дополнительные возмущения (гибель культур, изменение водообеспеченности, подъем грунтовых вод, необходимость увеличения выхода севооборота в зерне и др.). В этом случае необходимо вновь решать задачу оптимального планирования на весь цикл с целью обеспечения эффективного чередования культур. Решение такой задачи может понадобиться два раза в год — весной, после перезимовки озимых, и летом, перед посевом пожнивных культур.

Цель второго этапа управления, начинающегося весной после возобновления вегетации озимых культур и сева яровых, состоит в оперативном распределении ограниченных водных ресурсов между полями севооборота. Большинство оросительных систем Юга Украины имеют проектную водообеспеченность, достаточную для полной компенсации расходов воды на испарение орошаемыми полями только в начальный и конечный периоды вегетации культур, т. е. со середины июня и до середины августа, когда, как правило, возникает острый дефицит оросительной воды.

Таким образом, при планировании управления на очередной интервал необходимо прогнозировать климатические факторы, определяющие испарение с орошаемых полей, а также осадки. Если поступления оросительной воды и осадков достаточны для полной компенсации испарения сельскохозяйственных культур, то водоподача осуществляется на уровне, обеспечивающем максимальный урожай с единицы площади. Цель управления в условиях недостаточной водообеспеченности формулируется как максимум сельскохозяйственной продукции на единицу поливной нормы.



Идентификация моделей формирования урожая для всех орошаемых культур позволит определить степень влияния естественных возмущений на продуктивность севооборота, а также необходимую точность прогнозирования климатических факторов.

Решение задачи максимизации продуктивности орошаемого севооборота при заданных естественных и хозяйственных ограничениях позволит эффективно использовать имеющиеся почвенно-климатические ресурсы и получить максимум продукции на единицу оросительной нормы.

Для эффективного решения задачи оперативного распределения водных ресурсов оросительной системы между полями севооборота необходимы более подробные характеристики восприимчивости каждой культуры к водному режиму и климатическим факторам. Это приводит к необходимости построения моделей развития каждой культуры, т. е. моделей всех органов растения в их взаимосвязи.

#### *Задача моделирования динамики роста растений*

Метод самоорганизации математических моделей на ЭВМ позволяет определить структуру и оценить коэффициенты разностных уравнений, описывающих процесс роста растений, по сравнительно небольшому числу экспериментальных наблюдений. Пошаговое интегрирование уравнений дает так называемый нормативный прогноз, который показывает динамику роста растений в зависимости от значений некоторых аргументов — внешних воздействий. Очевидно, что модели динамики роста сельскохозяйственных культур должны быть существенной частью более общей модели формирования урожая с целью максимального его увеличения.

В данном разделе излагается общая методика структурной идентификации моделей для прогнозирования динамики роста яровой пшеницы. Методика поясняется примером, выполненным на основе экспериментальных данных, приведенных в работе [35].

На рост растений влияют в основном следующие группы факторов:

а) климатические: температура, влажность воздуха и почвы, интенсивность солнечной радиации, интенсивность осадков;

б) агротехнические: время внесения, количество и состав минеральных удобрений, интенсивность и объем искусственных поливов, густота посева;

в) почвенные: вид грунта, структура почвы, сорт предшествующей культуры и т. д.;

г) биологические: интенсивность жизненных процессов исследуемой культуры, взаимосвязь развития ее отдельных органов.

Почвенные факторы не всегда поддаются формализации, но их можно как бы исключить, рассматривая задачу построения моделей для одной, определенной почвенной зоны. Для другой зоны

потребуется другая модель. Ряд моделей можно объединить в единую межзональную модель.

То же можно сказать и об учете в динамической модели минерального питания, поскольку удобрения вносятся, как правило, лишь раз в год. Поэтому целесообразно построить ряд моделей для каждого стандартного набора минеральных удобрений, вносимых в рекомендуемый агрономией срок, а затем обобщить их в единую модель, учитывающую различные нормы удобрений.

Важным моментом моделирования динамики роста растений является разделение характеристических переменных на координаты состояния и на внешние возмущающие и регулирующие воздействия.

В рассматриваемой модели координатами состояний служат такие переменные:  $x_1 = v^H$  — надземная биомасса растений (в кг/м<sup>2</sup>);  $x_2 = v^K$  — биомасса корней (кг/м<sup>2</sup>);  $x_3 = H$  — высота растений (м);  $x_4 = \Pi$  — площадь зеленых листьев (м<sup>2</sup>);

Внешними воздействиями являются:  $u_1 = W$  — средняя за декаду влажность почвы, изменяемая в % ППВ (предельной поливной влагоемкости почвы);  $u_2 = Q$  — средняя за декаду интенсивность солнечной радиации;  $u_3 = T$  — средняя температура воздуха декады;  $u_4 = t$  — время, измеряемое в декадах, шаг дискретизации времени  $\Delta t = 1$  декада. Переменные  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$  измерялись в конце каждой декады, а остальные, усредненные, значения — за декаду. Указанное здесь множество переменных можно рассматривать как минимальное. Метод позволяет синтезировать модели и при более детальных наборах переменных и другой дискретизации времени. Имея целью показать методику моделирования, ограничимся указанным выше минимальным множеством переменных.

Общий вид уравнений модели роста для принятого множества переменных такой:

$$\begin{aligned} x_{1(+1)} &= f_1(x_{1(0)}, x_{1(-1)}, x_{2(-2)}, \dots, \\ &\quad x_{2(0)}, \dots, x_{2(-2)}, \dots, \\ &\quad x_{4(0)}, x_{4(-1)}, x_{4(-2)}, \dots, \\ &\quad u_{1(+1)}, u_{2(+1)}, u_{3(+1)}, u_{4(+1)}, \\ x_{2(+1)} &= f_2(\text{аргументы те же}), \\ x_{3(+1)} &= f_3(\text{аргументы те же}), \\ x_{4(+1)} &= f_4(\text{аргументы те же}). \end{aligned}$$

Индекс в скобках указывает запаздывание (в декадах), с которым измеряется данный аргумент: +1 — на декаду вперед, 0 — текущая декада, -1 — прошлая декада, -2 — две декады назад и т. д.

Значения переменных  $u_{1(+1)}, u_{2(+1)}, u_{3(+1)}$  находятся при помощи отдельного вспомогательного прогноза на декаду вперед.

Если такого прогноза нет, то эти переменные следует заменить на текущие значения. Число учитываемых декад запаздывания оптимизируется при помощи последовательного сравнения ряда вариантов. Следует учитывать такое число тактов предыстории, которое обеспечивает наиболее глубокий минимум критерия селекции уравнений.

В уравнениях  $f_1, f_2, f_3, f_4$  — полиномы, степень и структуру которых также нужно подобрать по глубине минимума критерия. Кроме системы уравнений понятие «модель» включает в себя начальные условия и ограничения на внешние воздействия:

$$u_i \min \leq u_i \leq u_i \max, \quad i = 1, 2, 3.$$

Без учета ограничений может, например, получиться, что солнце заменяет собой дождь и т. п. нелепости. Ограничения выбираются либо по априорным соображениям, либо на основании изучения таблицы наблюдений.

*Формальный прием учета ограничений в виде конечно-разностных уравнений.* Возможен следующий прием, при котором устраняется необходимость выбора ограничений. Среди внешних воздействий выбирается одно — ведущее, например интенсивность солнечной радиации  $u_2 \equiv Q$ . Формально рассмотрим  $u_1 = x_5$  и  $u_3 = 6$ , как зависимые переменные, определяемые значением  $u_2$ , т. е. так же, как рассматриваются переменные  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ . Для них получаются соответствующие конечно-разностные уравнения (модели). Общая модель принимает следующий матричный вид:

$$\begin{vmatrix} x_1(+1) \\ x_2(+1) \\ \vdots \\ x_6(+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{16} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} & \dots & \alpha_{66} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_6(0) \end{vmatrix} + \alpha u_2,$$

где  $\alpha_{11} - \alpha_{66}$  — функции, указанные ниже, а  $u_2 = f_7(t)$ .

#### Структурная идентификация модели по комбинаторному алгоритму МГУА

Согласно алгоритмам МГУА функции  $f_1, \dots, f_4$  заменяются полным степенным полиномом. При учете двух запаздываний и второй степени полинома число аргументов уравнений равно шестнадцати. Полином в этом случае содержит 16 линейных членов, 16 квадратов аргументов и 120 ковариаций по два члена, всего 156 членов. Только многорядные алгоритмы МГУА могут выполнить структурную идентификацию при столь большом числе членов.

Чтобы уменьшить объем задачи до объема, при котором можно было бы применить более простой комбинаторный алгоритм МГУА, допустим, что величины  $x_1, \dots, x_4$  между собой не взаимодействуют (взаимные корреляции разнородных аргументов равны нулю).

Тогда имеем

$$x_{1(+1)} = \alpha_{11}(x_1) + \alpha_{12}(x_2) + \dots + \alpha_{14}(x_4) + \alpha_{15}(u_1) + \dots + \alpha_{17}(u_3),$$

где функции влияния таковы, что при учете двух запаздываний и второй степени полинома

$$\alpha_{11}(x_1) = a_0 + a_1 x_{1(0)} + a_2 x_{1(-1)} + a_3 x_{1(-2)} + a_4 x_{1(0)}^2 + a_5 x_{1(-1)}^2 + a_6 x_{1(-2)}^2 + a_7 x_{1(0)} x_{1(-1)} + a_8 x_{1(0)} x_{1(-2)} + a_9 x_{1(-1)} x_{1(-2)}.$$

Аналогичный вид имеют функции  $\alpha_{12}, \alpha_{13}, \dots$ . Коэффициенты влияния возмущений постоянны:

$$\alpha_{15} = a_{15} = \text{const},$$

$$\alpha_{16} = a_{16} = \text{const},$$

$$\alpha_{17} = a_{17} = \text{const}.$$

Уравнения для остальных переменных имеют такой же вид. В матричном виде модель для всех четырех переменных можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x_{1(+1)} \\ x_{2(+1)} \\ x_{3(+1)} \\ x_{4(+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{11}(x_1) & \dots & \alpha_{14}(x_4) \\ \alpha_{21} & \dots & \alpha_{24} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{41}(x_1) & \dots & \alpha_{44}(x_4) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & a_{17} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{45} & a_{46} & a_{47} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{vmatrix},$$

где  $\alpha_{ij}$  — указанные выше функции влияния, образующие условную функциональную матрицу;  $a_{kl}$  — коэффициенты влияния, образующие обычную матрицу (см. стр. 136).

Коэффициенты  $\alpha_{ij}$  и  $a_{kl}$  подлежат определению по алгоритмам МГУА. При числе членов правой части до 20 возможно применение комбинаторного алгоритма МГУА. При большем числе членов применяются многорядные алгоритмы МГУА.

При учете только одного запаздывания каждая из моделей содержит в правой части  $1 + 16 + 3$  члена (свободные члены можно объединить в один). Комбинаторный алгоритм МГУА сравнивает между собой по некоторому критерию селекции уравнения, получаемые из полного уравнения при помощи приравнивания нулю тех или иных его членов. Всего следует сравнить в данном случае  $2^{20}$  уравнений для каждой из четырех переменных.

*Комбинированный критерий селекции.* Нам бы хотелось выбрать из указанного множества единственную оптимальную модель, которая удовлетворяла бы не одному, а ряду требований.

Во-первых, желательно, чтобы модель была несмещенной, т. е. чтобы она не зависела от выбора части таблицы, на которой она получена. Критерий минимума смещения имеет вид

$$n_{\text{см}}^i = \sqrt{\sum_1^{A+B} (x_{ij}^A - x_{ij}^B)^2 / \sum_1^{A+B} x_{i\text{табл}}^2} \rightarrow \min,$$

где  $x_{ji}^A, x_{ji}^B$  — результаты расчета по моделям, полученным соответственно на последовательностях  $A$  и  $B$ .

Во-вторых, модель должна быть регулярной, т. е. на новых точках измерения ошибка должна быть минимальной. Критерий

регулярности запишется в виде

$$\Delta^i(1) = \sqrt{\sum_1^{M_B} (x_{ij} - x_{ij\text{табл}})^2 / \sum_1^{M_B} x_{ij}^{\text{табл}}} \rightarrow \min,$$

где  $M_B$  — число точек отдельной проверочной последовательности.

В-третьих, модель должна удовлетворять некоторым очевидным балансовым соотношениям.

Суммарная биомасса растения  $V^Z$  связана с надземной и корневой биомассами следующим соотношением балансового типа:

$$V^Z = V^H - V^K.$$

Поскольку это равенство соблюдается во всех фазах развития растения, целесообразно ввести по аналогии с [33] следующий критерий баланса для синтеза оптимальной модели роста:

$$B^2 = \sum_{j=1}^M [V^Z - (\hat{x}_{1j} - \hat{x}_{2j})]^2 \rightarrow \min,$$

где  $M$  — число точек исходных данных;  $\hat{x}_{1j}$ ,  $\hat{x}_{2j}$  — оценки биомасс, полученные интегрированием системы уравнений при заданных начальных условиях (в данном случае, очевидно, все  $x_{i0} = 0, i = \overline{1, 4}$ );  $V^Z$  — измеренная общая биомасса (по таблице). Учитывая сказанное, можно составить следующий комбинированный критерий:

$$\rho_5 = \sqrt{\sum_{i=1}^4 (\Delta_i^2(B) + n_{icm}^2) + b^2} \rightarrow \min.$$

Однако, поскольку результаты синтеза по отдельным критериям близки друг к другу, общий суммарный комбинированный критерий можно заменить процедурой последовательного применения указанных критериев.

*Последовательное применение критериев селекции.* На первом этапе из всех уравнений, получаемых при помощи «зануления» тех или иных членов полного уравнения, выбираем  $F_1 = 100$  самых несмещенных уравнений, в наибольшей степени удовлетворяющих критерию  $n_{cm_i}^2 \rightarrow \min$ .

Коэффициенты каждой из отобранных моделей пересчитываются по методу наименьших квадратов на всех данных (на последовательностях  $A + B$ ). Из этих 100 моделей выбираем  $F = 10$  наиболее регулярных моделей:

$$\Delta_i^2(B) \rightarrow \min.$$

Последовательный выбор применяется для каждой из четырех выходных переменных  $x_1, x_2, x_3$  и  $x_4$ .

Критерий баланса позволяет оценить все четыре уравнения для четырех выходных переменных вместе. Систему из четырех

Таблица 25. Исходные данные для моделирования роста пшеницы (вариант полива в % ППВ: 1—0,2—60,3—70,4—80, без внесения удобрений)

Дата	Вариант полива	Биомасса, кг/м <sup>2</sup> посева		Средняя высота, м	Площадь зеленых листьев, м <sup>2</sup> /м <sup>2</sup>	Влажность почвы, % ППВ	Солнечная радиация, кал/м <sup>2</sup>	Температура воздуха, °С
		надземная	корней					
20.04	1	0	0	0	0	93		
	2	0	0	0	0	93	0,87	13
	3	0	0	0	0	93		
	4	0	0	0	0	93		
30.04	1	0,008	0,008	0,045	0,5	87		
	2	0,008	0,008	0,05	0,5	87	1,0	15
	3	0,008	0,008	0,06	0,3	87		
	4	0,008	0,008	0,07	0,4	87		
10.05	1	0,033	0,027	0,14	1,35	85		
	2	0,033	0,027	0,15	1,35	85	4,3	19
	3	0,033	0,027	0,17	1,0	85		
	4	0,033	0,027	0,21	1,2	85		
20.05	1	0,108	0,07	0,27	2,0	83		
	2	0,108	0,07	0,3	2,0	83	5,1	12
	3	0,108	0,07	0,33	2,1	83		
	4	0,117	0,07	0,38	2,1	83		
30.05	1	0,240	0,10	0,44	2,15	71		
	2	0,240	0,10	0,49	2,15	71	4,15	16
	3	0,240	0,10	0,55	2,5	92		
	4	0,240	0,10	0,62	2,65	92		
9.06	1	0,435	0,12	0,6	1,4	80		
	2	0,435	0,12	0,67	1,4	80	5,5	18
	3	0,46	0,12	0,73	2,15	86		
	4	0,492	0,125	0,8	2,55	97		
19.06	1	0,635	0,125	0,71	0,6	61		
	2	0,635	0,13	0,78	0,6	75	2,8	20
	3	0,7	0,13	0,88	1,55	88		
	4	0,747	0,14	0,92	2,05	94		
29.06	1	0,715	0,13	0,78	0,2	51		
	2	0,805	0,13	0,89	0,2	70	3,4	17
	3	0,9	0,135	0,97	0,85	80		
	4	0,945	0,14	0,98	1,3	95		

уравнений (с начальными условиями и ограничениями) можно назвать моделью динамики роста.

Для ее получения по критерию баланса сравниваются  $10^4$  различных систем по четыре уравнения (по одному из каждого полученного ранее набора), т. е. каждая система интегрируется и отбирается лучшая (оптимальная) по условию  $B^2 \rightarrow \min$ . Этот прием последовательного применения критериев селекции позволяет получить решение задачи за приемлемое время.

Пример 21. Модель роста яровой пшеницы. Изложенный выше метод был реализован на БЭСМ-6 (на основе комбинаторного алгоритма) и применен для моделирования роста яровой пшеницы на примере данных опытов, проведенных в 1973 г. с сортом Зерноградская-19

Е. П. Галямин и А. А. Семенов. Опыты были проведены при четырех вариантах Постоянного Водного Режима (1-й без полива, 2-й — 60%, 3-й — 70% и 4-й — 80% ППВ) и трех вариантах минерального питания (без удобрений) и при двух стандартных комбинациях азотных N, фосфорных P и калийных K удобрений: 80, 70, 30 и 158, 146, 60 кг/га — всего 12 опытов. Имеются данные за 8 декад о состоянии посева на конец каждой декады и среднедекадные значения влажности почвы, температуры воздуха и интенсивности солнечной радиации. Для примера в табл. 25 приведены результаты опытов без удобрений. Аналогично заполнены и остальные две таблицы, которые для краткости мы здесь не помещаем.

Поскольку удобрения вносились один раз в год (перед посевом), то сначала были получены модели роста для каждого набора удобрений в отдельности. Учет влияния удобрений в обобщенной модели рассматривается в конце работы. В результате последовательного отбора по трем указанным критериям селекции получены следующие оптимальные прогнозирующие модели роста пшеницы:

I вариант — без удобрения ( $N = P = K = 0$ ):

$$x_{1(+1)} = 0,5404x_{1(0)} + 0,9017x_{2(0)} + 0,4502x_{3(0)} - 1,577 \cdot 10^{-3}u_{2(+1)};$$

ошибка прогноза (пошагового интегрирования):

$$i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^M (x_{ij} - \hat{x}_{ij})^2}{\sum_{j=1}^M x_{ij}^2}} \cdot 100\% = 8,4\%;$$

$x_{ij}$  — табличные значения;  $\hat{x}_{ij}$  — оценки по модели;

$$x_{2(+1)} = 1,125x_{2(0)} - 0,0319x_{3(0)} + 1,837 \cdot 10^{-4}u_{1(+1)} + 7,593 \cdot 10^{-3}u_{2(+1)} - 1,311 \cdot 10^{-3}u_{3(+1)};$$

$$x_{3(+1)} = -4,077x_{1(0)} + 0,9954x_{2(0)} + 1,184x_{3(0)} + 1,497 \cdot 10^{-4}u_{1(+1)} + 0,00188u_{2(+1)}, \quad i = 10\%;$$

$$x_{4(+1)} = -10,06x_{2(0)} + 0,9484x_{4(0)} + 1,334 \cdot 10^{-3}u_{1(+1)} + 0,1768u_{2(-1)}, \quad i = 27,4\%;$$

II вариант ( $N = 80, P = 70, K = 30$ ):

$$x_{1(+1)} = 0,4936x_{1(0)} + 1,091x_{2(0)} + 0,5721x_{3(0)} + 1,917 \cdot 10^{-4}u_{1(+1)} - 7,873 \cdot 10^{-3}u_{2(+1)}, \quad i = 10,0\%;$$

$$x_{2(+1)} = -0,02x_{1(0)} + 1,088x_{2(0)} + 1,286 \cdot 10^{-4}u_{1(+1)} + 6,826 \cdot 10^{-3}u_{2(+1)} - 8,321 \cdot 10^{-4}u_{3(+1)}, \quad i = 5,3\%;$$

$$x_{3(+1)} = -0,3251x_{1(0)} + 0,7226x_{2(0)} + 1,193x_{3(0)} + 1,32 \cdot 10^{-4}u_{1(+1)} + 0,0237u_{2(+1)}, \quad i = 10,8\%;$$

$$x_{4(+1)} = -2,293x_{1(0)} + 1,072x_{4(0)} + 7,531 \cdot 10^{-3}u_{1(+1)}, \quad i_4 = 37,4\%;$$

III вариант ( $N = 158, P = 176, K = 60$ ):

$$x_{1(+1)} = 0,5068x_{1(0)} + 0,8277x_{2(0)} + 1,689 \cdot 10^{-4}u_{1(+1)} - 7,578 \cdot 10^{-3}u_{2(+1)}, \quad i_1 = 12,1\%;$$

$$x_{2(+1)} = -0,0398x_{1(0)} + 0,9001x_{2(0)} + 0,03504x_{3(0)} +$$

Таблица 26. Результаты прогнозов (пошагового интегрирования уравнений, вариант без внесения удобрений)

Декада	Вариант полива	$x_1 = V^4$	$x_2 = V^4$	$x_3 = H$	$x_4 = \Pi$
1	1	0,001	0,006	0,003	0,027
	2	0,001	0,006	0,003	0,027
	3	0,001	0,006	0,003	0,027
	4	0,001	0,006	0,003	0,027
2	1	0,017	0,010	0,074	0,489
	2	0,017	0,010	0,074	0,489
	3	0,017	0,010	0,074	0,489
	4	0,017	0,010	0,074	0,489
3	1	0,046	0,033	0,185	1,233
	2	0,046	0,033	0,185	1,233
	3	0,046	0,033	0,185	1,233
	4	0,046	0,033	0,185	1,233
4	1	0,129	0,069	0,340	1,852
	2	0,129	0,069	0,340	1,852
	3	0,129	0,069	0,340	1,852
	4	0,129	0,070	0,341	1,859
5	1	0,279	0,091	0,504	1,889
	2	0,279	0,091	0,504	1,889
	3	0,279	0,095	0,508	1,917
	4	0,280	0,094	0,508	1,901
6	1	0,451	0,119	0,686	1,959
	2	0,451	0,119	0,686	1,959
	3	0,456	0,124	0,694	1,955
	4	0,455	0,125	0,695	1,962
7	1	0,655	0,118	0,803	1,239
	2	0,655	0,121	0,806	1,258
	3	0,667	0,129	0,820	1,217
	4	0,668	0,131	0,823	1,222
8	1	0,817	0,120	0,868	1,657
	2	0,820	0,127	0,876	1,674
	3	0,840	0,137	0,899	1,567
	4	0,844	0,142	0,906	1,568

$$+ 1,622 \cdot 10^{-5}u_{1(+1)} + 7,402 \cdot 10^{-7}u_{2(+1)} - 6,222 \cdot 10^{-5}u_{3(+1)},$$

$$i_2 = 5,3\%;$$

$$x_{3(+1)} = -0,2928x_{1(0)} + 0,2651x_{2(0)} + 1,260x_{3(0)} + 0,02653u_{2(+1)},$$

$$i_3 = 11,7\%;$$

$$x_{4(+1)} = -2,48x_{1(0)} + 1,113x_{4(0)} + 8,178 \cdot 10^{-3}u_{1(+1)},$$

$$i_4 = 32,6\%.$$

Как видно, алгоритм МГУА оставил в уравнениях только линейные члены. Свободный член, квадратичные члены и ковариации во всех моделях отсутствуют\*.

\* Из этого не следует, что применение других базисных функций (например, дробно-полиномиальных описаний) не приведет к повышению точности прогноза.

Для оценки полученных моделей в табл. 26 приведены результаты пошагового прогноза — интегрирования модели роста (без удобрений) для четырех вариантов полива.

Сопоставление прогнозов табл. 26, вычисленных с упреждением на одну декаду, с исходными данными (табл. 25), а также анализ величин ошибок показывают, что в полученных моделях роста уравнения для надземной и корневой биомасс  $x_3 = V^4$  и  $x_2 = V^5$ , а также для высоты  $H = x_3$  дают хорошую точность ошибки порядка 5–10%, а для площади зеленых листьев  $x_4 = \Pi$  точность значительно ниже (ошибка 30%). По-видимому, из-за невысокой точности последнего уравнения параметр  $x_4 = \Pi$  не вошел в три первых уравнения, которые составляют самостоятельную систему. Но само уравнение для  $x_4$  включает другие параметры, так что для его интегрирования необходимо интегрировать всю систему из четырех уравнений (модели роста).

Обобщенная модель динамики роста яровой пшеницы, учитывающая количество удобрений при определенном их соотношении. Сравнивая структуры моделей, убеждаемся, что они очень близки между собой. Некоторые структуры просто совпадают, а отдельные отличаются на один или два члена. Поэтому можно выбрать обобщенную структуру единой модели, например, в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} x_{1(+1)} \\ x_{2(+1)} \\ x_{3(+1)} \\ x_{4(+1)} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & a_{44} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{1(0)} \\ x_{2(0)} \\ x_{3(0)} \\ x_{4(0)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} & 0 \\ a_{25} & a_{26} & a_{27} \\ a_{35} & a_{36} & 0 \\ a_{45} & a_{46} & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} u_{1(+1)} \\ u_{2(+1)} \\ u_{3(+1)} \end{vmatrix}.$$

Определив коэффициенты  $a_{ij}$  для каждого варианта минерального питания по методу наименьших квадратов, получим три системы уравнений, значения коэффициентов которых различны. Тогда естественно поставить задачу: определить зависимость каждого коэффициента модели от дозы удобрения, например, в виде уравнения регрессии:

$$Q_{ij}(N, P, K) = b_{0ij} + b_{1ij}N + b_{2ij}P + b_{3ij}K.$$

В каждом уравнении регрессии имеется четыре неизвестных коэффициента, а для их определения можно составить лишь три уравнения (по трем моделям).

Эту неполноту информации можно восполнить, воспользовавшись тем, что соотношения доз удобрений практически одинаковы:  $80 : 70 : 30 \approx 158 : 146 : 60$ , т. е. можно принять, что  $N : P : K = 8 : 7 : 3$  и соответственно  $N = \frac{8}{3} K$ ,  $P = \frac{7}{3} K$ .

Тогда уравнение принимает вид

$$a_{ij}(K) = b_{ij} + \left( b_{1ij} + \frac{7}{3} b_{2ij} + \frac{3}{8} b_{3ij} \right) K = b_{0ij} + \tilde{b}_{1ij} K,$$

а в более общем случае, когда зависимость коэффициентов от удобрений нелинейна (квадратична), получим

$$Q_{ij}(K) = \beta_{0ij} + \beta_{1ij}K + \beta_{2ij}K^2.$$

Коэффициенты уравнений определяются как параметры парабол, проходящих через три точки. При этом сразу же видно, что все

$$\beta_{0ij} \equiv Q_{ij}(K) / K=0.$$

Изложенный прием был применен к модели роста пшеницы. Для каждого не равного нулю коэффициента  $a_{ij}$  были построены интерполирующие параболы.

Таким образом, была получена обобщенная модель роста биомассы пшеницы с переменными параметрами, учитывающими минеральное питание растений. Эта модель позволяет промоделировать развитие растения при различных дозах удобрений (с учетом указанной пропорциональности между ними).

Обобщенная модель динамики роста яровой пшеницы (для заданного соотношения удобрений). Эту модель можно записать в виде

$$x_{1(+1)} = a_{11}(k)x_{1(0)} + a_{12}(k)x_{2(0)} + a_{13}(k)x_{3(0)} + a_{15}(k)u_{1(+1)} + a_{16}(k)u_{2(+1)}.$$

Интерполирующие параболы (функции влияния):

$$\begin{aligned} a_{11}(k) &= 0,5342 - 0,02395k + 0,00347k^2; \\ a_{12}(k) &= 0,9888 + 0,04661k^2; \\ a_{13}(k) &= 0,4430 + 0,03415k + 0,00296k^2; \\ a_{15}(k) &= (0,954 + 0,4728k + 0,0504k^2) \cdot 10^{-4}; \\ a_{16}(k) &= -(3,579 + 1,9815k - 0,1834k^2) \cdot 10^{-3}, \end{aligned}$$

где  $k$  — доза удобрений (в десятках кг/га);

$$\begin{aligned} x_{2(+1)} &= a_{21}(k)x_{1(0)} + a_{22}(k)x_{2(0)} + a_{23}(k)x_{3(0)} + a_{25}(k)u_{1(+1)} + a_{26}(k)u_{2(+1)} + a_{27}(k)u_{3(+1)}; \\ a_{21}(k) &= -0,04929 - 0,00161k + 0,61 \cdot 10^{-5}k^2; \\ a_{22}(k) &= 1,015 - 0,06578k + 0,00777k^2; \\ a_{23}(k) &= 1,015 - 0,06578k + 0,00206k^2; \\ a_{25}(k) &= (1,299 - 0,2349k + 0,00757k^2) \cdot 10^{-4}; \\ a_{26}(k) &= (6,474 - 0,088k + 0,04044k^2) \cdot 10^{-3}; \\ a_{27}(k) &= (-9,282 + 1,5554k + 0,01867k^2) \cdot 10^{-4}; \\ x_{3(+1)} &= a_{31}(k)x_{1(0)} + a_{32}(k)x_{2(0)} + a_{33}(k)x_{3(0)} + a_{35}(k)u_{1(+1)} + a_{36}(k)u_{2(+1)}; \\ a_{31}(k) &= -0,4077 + 0,3673k - 0,00306k^2; \\ a_{32}(k) &= 0,9554 - 0,0568k - 0,0070k^2; \\ a_{33}(k) &= 1,184 - 0,0045k + 0,0025k^2; \\ a_{35}(k) &= (1,497 - 0,0965k + 0,125k^2) \cdot 10^{-4}; \\ a_{36}(k) &= (1,883 + 0,245k - 0,02766k^2) \cdot 10^{-2}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_{4(+1)} &= a_{41}(k) x_{1(0)} + a_{42}(k) x_{2(0)} + a_{44}(k) x_{4(0)} + \\
&\quad + a_{45}(k) u_{1(+1)} + a_{46}(k) u_{2(+1)}; \\
a_{41}(k) &= 1,122 - 1,13361k + 0,1648k^2; \\
a_{42}(k) &= 16,56 + 6,3646k - 0,8893k^2; \\
a_{44}(k) &= 1,079 - 0,05166k + 0,00922k^2; \\
a_{45}(k) &= (1,035 + 0,5375k + 0,03438k^2) \cdot 10^{-3}; \\
a_{46}(k) &= 0,1855 + 0,00057k + 0,00032k^2.
\end{aligned}$$

Модели действительны только в пределах некоторых ограничений. Ограничения на изменения внешних воздействий во всех приведенных моделях такие, что не позволяют превышать приблизительно в два раза отклонения от среднего значения исходных данных:  $50 < u_1 < 100$ ;  $0,5 < u_2 < 6$ ;  $10 < u_3 < 30$ .

*О причине образования спектральных линий  
на плоскости несмещенность — регулярность [35]*

Результат вычислений, выполненных для выбора  $F_1 = 100$  лучших моделей по критериям несмещенности и регулярности, отра-

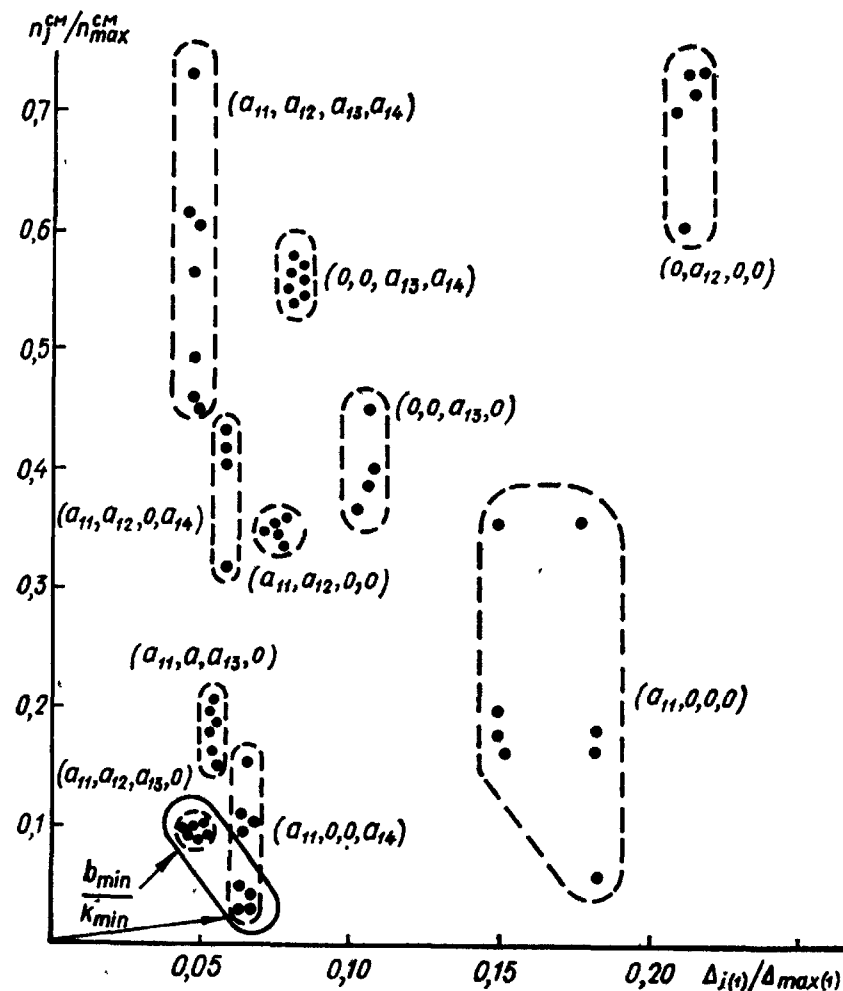


Рис. 35. «Спектр» моделей на плоскости двух критериев: регулярность — несмещенность (см. также рис. 57).

жен на плоскости двух критериев ( $n_{cm}^2, \Delta^2(B)$ ) на рис. 35. Каждая точка на рисунке характеризует одно частное описание уравнения — в данном случае для уравнения надземной биомассы в опыте без удобрений. Очевидно, что расстояние от начала координат до точки  $[n_{cm}^2, \Delta^2(B)]$  равно значению комбинированного критерия  $\rho_3 = \sqrt{n_{cm}^2 + \Delta^2(B)} \rightarrow \min$  для данной структуры модели.

Все точки на рисунке отчетливо сгруппированы в ряде компактных областей, отмеченных штриховыми замкнутыми линиями. Практически каждая область представляет собой совокупность моделей, весьма близких по точности и различающихся только по несмещенности. Этот своего рода «спектр» частных описаний объясняется наличием «доминирующих» аргументов в структурах моделей. Действительно, сопоставление структур частных описаний в каждой из выделенных областей показало, что первые четыре члена входят в них однообразно. На рисунке это показано при помощи комбинаций нулевых и ненулевых коэффициентов, которые остаются одинаковыми. Различаются описания между собой наличием (либо отсутствием) остальных трех коэффициентов  $a_{15}, a_{16}, a_{17}$ . Таким образом, «спектр» определяется первыми четырьмя «доминирующими» аргументами, которые сами по себе являются выходными величинами модели роста (параметрами состояния данного объекта — растения).

На рис. 35 сплошной линией выделены точки, соответствующие десяти лучшим по комбинированному критерию  $k_3 \rightarrow \min$  частным описаниям, прошедшим на третий этап работы алгоритма, где выбирается единственная модель по критерию баланса.

**Системный анализ динамики объекта  
на основе самоорганизации моделей,  
когда выходные переменные не указаны**

В сложных задачах моделирования человек — автор модели — часто не может уверенно указать множество выходных переменных, характеризующих интересующий его объект. Однако априори всегда известно, что модель остается одной и той же вчера, сегодня и завтра, т. е. на разных частях таблицы опытных данных. Этого указания достаточно, чтобы машина при помощи перебора всевозможных вариантов по критерию минимума смещения могла найти все системы, характеристические точки которых находятся вблизи минимума критерия. Среди отобранных машиной систем человек может выбрать ту, которая ему нужна для решения конкретных практических задач.

Разработаны программы самоорганизации систем разностных уравнений и, следовательно, определения множества выходных переменных. Заканчивается аналогичная разработка программы самоорганизации системы алгебраических уравнений [68].

Перебор моделей по критерию минимума смещения (или, что иногда лучше, по комбинированному критерию «минимум смещения



плюс точность экстраполяции») позволяет найти искомые законы: они соответствуют наиболее адекватным моделям. В задачах могут быть установлены выходные и входные переменные и определены оптимальные запаздывания их измерения (если они априорно не указаны).

В данном разделе описан алгоритм и вычислительная программа перебора моделей. Приведен пример открытия общих законов инфляции в экономике Англии. Полученные законы инфляции должны быть изучены экономистами и, возможно, использованы для прогнозирования или для сравнения «сценариев» будущего хода процесса при различных заданных условиях.

**Определение понятия «закон» и метод его открытия по опытным данным.** Вначале определим закон как математическое уравнение (или систему уравнений), которое связывает параметры данного сложного объекта и обладает свойством несмещенности: закон действителен для любой произвольно выбранной части таблицы входных данных. Это не означает, что закон удовлетворяет любое множество входных данных абсолютно точно. Благодаря ошибкам измерения (шуму) мы не можем получить несмещенность повсюду совершенно точно. Закон отличается от любых других соотношений только меньшими значениями невязок для любых начальных данных. Используя указанное определение понятия закон, легко предположить индуктивный метод самоорганизации законов для сложной системы: чтобы открыть закон, необходимо организовать перебор (поочередное опробывание) большого числа достаточно разнообразных уравнений и выбрать среди них наиболее несмещенное.

Несмещенность каждого уравнения может быть измерена по величине так называемого критерия минимума смещения, который широко используется в алгоритмах МГУА:

$$n_{\text{см}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{\alpha N} (q_A - q_B)_i^2}{\alpha \sum_{i=1}^{\alpha N} q_{\text{табл}i}^2} 100 \rightarrow \min,$$

где  $n_{\text{см}}$  — критерий минимума смещения;  $N = A + B$  — общее число точек в таблице опытных данных;  $\alpha$  — коэффициент экстраполяции,  $\alpha = 1,5 \div 3,0$ ;  $q_A$  — выходная величина первой модели, полученной на части  $A$  таблицы данных;  $q_B$  — выходная величина второй модели, полученной на части  $B$  таблицы данных;  $q_{\text{табл}}$  — действительные опытные данные, указанные в таблице.

От выбора одного уравнения к выбору системы уравнений (вариант алгоритма МГУА). Целью алгоритма МГУА является нахождение (при помощи перебора большого числа уравнений) одного уравнения оптимальной сложности, наилучшего по данному критерию селекции. Это единственное уравнение и называлось выше «моделью».

Действительно, сложные объекты (например, инфляция) могут быть описаны не только одним, но целой системой уравнений, которая указывает структуру соединения элементов. Получение структуры объекта можно рассматривать как самостоятельную цель моделирования, поскольку она очень важна для понимания способа действия объекта, т. е. для системного анализа.

Для этого необходимо сравнивать между собой целые системы уравнений по тому или иному критерию. Чтобы сравнивать системы уравнений, мы должны использовать «системный критерий минимума смещения», представляющий собой свертку критериев:

$$n_{\text{см}}^* = \sqrt{\frac{1}{s} (n_{\text{см}1}^2 + n_{\text{см}2}^2 + \dots + n_{\text{см}s}^2)}.$$

Систему уравнений, лучшую по этому критерию, назовем «моделью». Многорядный алгоритм МГУА выполняет сравнение всех возможных (в пределах заданной базисной функции) систем, содержащих одно уравнение ( $s = 1$ ), затем всех систем, содержащих два уравнения ( $s = 2$ ) и т. д., пока не будет оценена по критерию система, содержащая все переменные ( $s = m$ , где  $s$  — число уравнений в системе;  $m$  — число переменных в таблице исходных данных). Затем из всех имеющихся систем уравнений может быть выбрана одна лучшая модель. Основная черта описываемого здесь алгоритма МГУА состоит в том, что число уравнений в системах постепенно нарастает, пока не будет достигнут наиболее глубокий минимум критерия:  $s = 1, 2, 3, \dots, m$ .

Увеличение  $s$  можно реализовать по двум методикам: указать число выходных переменных, выбираемых из таблицы исходных данных, или априорно указать хотя бы одну выходную величину, заведомо характеризующую процесс. В последнем случае машина подбирает наиболее эффективный ансамбль переменных с обязательным участием в нем указанной величины. Обе методики показаны ниже в примере\*.

**Комбинированный критерий и последовательное использование критериев.** Теперь повысим наши требования в определении понятия «модель». Определим закон как модель, удовлетворяющую двум требованиям: она должна быть по возможности несмещенной и, кроме того, обеспечивать наиболее точное долгосрочное прогнозирование будущего хода процесса. Точность зависит от меры так называемой сходимости пошагового интегрирования конечно-разностных уравнений:

$$i^2(N) = \frac{\sum_{i=N_1}^{N_2} (q_{\text{табл}} - q)_i^2}{\sum_{i=N_1}^{N_2} q_{\text{табл}i}^2},$$

\* В последнее время в алгоритмах системного анализа динамики используется следующий порядок наращивания сложности систем разностных уравнений: 1-й ряд  $x_i u$ ; 2-й ряд  $x_i x_j u$ ; 3-й ряд  $x_i x_j x_k u$  и т. д., где  $i = 1, 2, 3, \dots$ ;  $j = 1, 2, 3, \dots$ ;  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $i \neq j \neq k$ .

где  $N$  — полное число точек (шагов времени) в таблице исходных данных;  $N_1$  — начало интервала пошагового интегрирования (прогноза);  $N_2$  — конец интервала;  $q_{\text{табл}}$  — выходная величина, стоящая в левой части уравнения (задана в таблице исходных данных);  $q$  — интеграл, полученный при помощи пошагового интегрирования.

Благодаря интегральному характеру среднеквадратическую ошибку  $i^2(N)$  можно рассчитать на всем множестве точек, заданных в таблице. Критерий  $i^2(N) \rightarrow \min$  в применении к разностным уравнениям не требует никакого деления таблицы на части. Однако его следует использовать только совместно с другими критериями. При расчете критерия  $\Delta C$  в качестве интервала  $C = N_2 - N_1$  можно выбрать только последние по времени точки.

Каждая модель отвечает определенной точке плоскости критериев  $n_{\text{см}}^* - i^2(N)$ . По комбинированному критерию «минимум смещения плюс сходимость пошагового интегрирования»

$$\rho = \sqrt{n_{\text{см}}^{*2} + i^2(N)} \rightarrow \min$$

можно выбрать единственную модель, расположенную ближе, чем другие модели, к началу координат, что соответствует минимуму указанного комбинированного критерия.

Практически в рассматриваемом ниже примере применяется последовательное использование критериев: каждая система разностных уравнений оценивается по системному критерию минимума смещения  $n_{\text{см}}^* \rightarrow \min$ , причем выбирается  $F$  лучших систем. Затем эти  $F$  систем оцениваются по критерию сходимости пошагового прогноза  $i^2(N) \rightarrow \min$ . В результате выбирается одна система с учетом указанных двух критериев. Число  $F$  зависит от числа уравнений  $S$  следующим образом: при  $S = 1, 2, 3, 4, 5, 6$  и  $7$  уравнений было взято  $F = 13, 11, 11, 7, 7, 7$  и  $7$  систем.

**Мера достоверности.** Абсолютную величину минимума критериев селекции можно рассматривать как меру успеха перебора моделей при помощи ЭВМ. В первой главе было показано, что интервал достоверности модели больше для более глубокого минимума. Если  $n_{\text{см}}^{*2} = 0$ ,  $i^2(N) = 0$  и  $\rho = 0$ , модель полностью несмещенная и абсолютно точна.

**Пример 22.** Системный анализ инфляции в экономической системе Англии. Решение задачи самоорганизации законов инфляции, действующих в экономической системе Англии и показывающих структуру этой системы, может служить хорошим примером для пояснения изложенной теории. Задача и исходные данные были поставлены Р. Стоуном — ведущим английским ученым в области моделирования экономических систем.

Описываемый здесь алгоритм можно применить для полиномов (стоящих в правой части конечно-разностных уравнений), которые содержат следующие

Таблица 27. Начальные данные (первая обучающая последовательность А)

Переменная	1970				1972				1974			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
$x_1$	586,9	597,8	606,8	667,5	906,1	876,9	847,7	789,4	572,9	579,4	621,2	677,0
$x_2$	103,0	100,5	99,5	97,0	88,0	86,0	85,0	83,0	72,0	68,0	66,5	63,5
$x_3$	97,1	99,5	100,6	102,7	113,9	116,0	118,0	120,8	138,8	147,0	150,7	157,5
$x_4$	98,6	99,1	99,5	99,1	102,1	104,8	107,3	109,2	109,8	107,3	111,0	111,6
$x_5$	86,2	95,3	92,3	91,7	124,0	146,6	139,5	144,2	102,7	104,3	108,7	95,7
$x_6$	99,4	99,6	100,3	100,6	97,6	103,6	103,4	106,0	104,4	107,9	108,3	104,8
$x_7$	194,2	189,1	183,1	174,3	124,2	133,4	147,1	176,2	286,3	310,7	306,1	283,0
$x_8$	101,6	105,0	108,3	111,4	126,4	130,5	135,0	141,8	159,1	170,1	185,5	200,3
$x_9$	99,2	99,7	99,8	101,4	105,6	106,1	109,4	115,0	212,5	213,7	212,9	222,1
$x_{10}$	100,4	99,4	94,6	105,6	104,5	108,7	94,5	118,6	126,7	132,7	134,3	126,6
$x_{11}$	95,5	101,6	98,4	104,3	112,2	113,1	110,6	128,8	134,7	137,1	135,4	134,4
$x_{12}$	+266	+141	+96	+232	+90	+138	+89	-11	-345	-948	-323	-1052
$x_{13}$	16 320	16 970	17 350	17 800	21 360	23 010	23 990	25 670	33 940	34 770	35 960	32 260
$x_{14}$	2100	2250	2300	2310	2548	2429	2480	2597	3320	3626	4116	4576
$x_{15}$	37,0	37,0	37,0	37,0	43,0	43,0	45,0	48,0	210,0	202,0	210,0	180,0

**Примечание.** Тут и в табл. 28, 29  $x_1$  — безработные,  $x_2$  — покупательная способность,  $x_3$  — индекс розничных цен,  $x_4$  — объем розничной торговли,  $x_5$  — регистрация новых автомашин,  $x_6$  — индекс промышленного производства,  $x_7$  — вакансии,  $x_8$  — средний заработок,  $x_9$  — оптовые цены на материалы и топливо,  $x_{10}$  — экспорт,  $x_{11}$  — импорт,  $x_{12}$  — текущий баланс,  $x_{13}$  — денежные запасы,  $x_{14}$  — налоги и доходы,  $x_{15}$  — цены на нефть.

Таблица 28. Начальные данные (вторая обучающая последовательность В)

Переменная	1971				1973				1975			
	I		II		III		IV		I		II	
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
$x_1$	666,7	748,7	814,0	879,4	702,5	636,2	584,4	520,7	733,3	849,7	1008,6	
$x_2$	95,0	91,5	90,0	89,0	81,5	79,0	77,5	75,0	60,0	54,5	52,5	
$x_3$	105,5	104,3	110,8	111,2	123,0	126,9	128,9	133,2	167,0	182,7	190,7	
$x_4$	97,8	99,7	100,5	102,1	111,8	108,3	110,6	112,0	111,5	108,7	105,3	
$x_5$	94,1	96,6	115,9	127,2	131,3	135,5	172,9	118,6	106,0	91,2	103,6	
$x_6$	100,0	101,0	100,7	100,1	110,5	110,0	110,8	110,8	104,8	100,2	100,0	
$x_7$	144,4	127,2	120,4	118,6	229,4	290,4	334,0	361,4	189,2	156,7	132,5	
$x_8$	114,9	117,1	120,4	122,3	144,0	144,0	154,7	159,8	209,6	218,1	234,5	
$x_9$	103,0	104,0	103,6	104,8	126,0	133,0	150,9	167,6	220,9	225,6	239,2	
$x_{10}$	99,3	110,4	110,3	106,4	117,2	120,2	124,6	125,4	130,9	123,9	121,9	
$x_{11}$	103,9	105,1	102,2	105,5	128,9	129,2	135,6	142,4	126,8	122,2	127,9	
$x_{12}$	+141	+278	+392	+287	-125	-63	-217	-430	-432	-343	-584	
$x_{13}$	18 330	18 740	19 180	20 010	27 140	28 560	30 790	33 050	37 600	38 240	39 860	
$x_{14}$	2314	2323	2328	2429	2820	2933	2974	3125	4896	5078	5700	
$x_{15}$	45,0	45,0	43,0	42,0	48,0	40,0	40,0	135,0	175,0	180,0	200,0	

Таблица 29. Исходные данные (экзаменационная последовательность С)

Переменная	1975	1976				1977		
	IV	I	II	III	IV	I	II	III
$x_1$	1083,3	1175,6	1195,5	1305,5	1313,8	1330,2	1330,4	1420,8
$x_2$	49,5	49,0	47,7	46,0	44,0	42,0	40,0	39,5
$x_3$	203,1	217,0	230,0	229,9	240,5	252,6	263,9	268,0
$x_4$	105,6	107,4	106,7	108,9	108,5	105,2	103,9	106,9
$x_5$	84,4	106,9	105,9	97,4	112,8	104,1	101,7	111,9
$x_6$	100,4	101,4	102,1	101,8	103,6	103,9	102,0	102,6
$x_7$	111,2	113,3	117,4	123,6	129,9	149,5	159,2	150,5
$x_8$	243,9	247,2	257,2	285,5	272,8	280,2	285,2	287,9
$x_9$	256,1	286,5	292,6	306,8	329,9	341,5	347,7	341,1
$x_{10}$	133,6	141,8	156,2	160,0	177,5	185,2	200,2	210,9
$x_{11}$	134,3	134,4	164,6	163,4	174,5	181,6	189	182,7
$x_{12}$	-303	-60	-196	-511	-414	-461	-204	-55
$x_{13}$	38 846	36 280	40 663	38 943	40 593	39 410	40 543	41 713
$x_{14}$	6050	6100	6300	6250	6250	6300	6330	6350
$x_{15}$	200	205	205	205	205	205	205	205

нелинейные члены:

$$\dots, \frac{1}{x_i^3}, \frac{1}{x_i^2}, \frac{1}{x_i}, x_i, x_i^2, x_i^3, \dots$$

$$\dots, \frac{1}{x_i^2 x_k}, \frac{1}{x_i x_k^2}, \frac{1}{x_i x_k}, x_i^2 x_k^2, x_i x_k, x_i^2 x_k, x_i x_k^2, \dots,$$

$$i = 1, 2, \dots, 13.$$

Отметим ограниченность области применения полиномиальных частных описаний в случае отказа от учета обратных зависимостей. Если, например, действительно действующий закон выражается уравнением  $q = \frac{1}{x}$ , то его нельзя открыть по МГУА, пользуясь полиномами  $q = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ . Следует применить более общую форму частных описаний, например вида

$$q = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n}{1 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_m x^m}.$$

Оценки коэффициентов дробно-полиномиальных описаний находятся при помощи простой рекуррентной процедуры [21, 44]. Другой способ состоит в использовании указанных нелинейных членов как отдельных переменных, что, однако, увеличивает объем перебора. Для краткости изложения мы все же ограничим пример рассмотрением только линейных полиномов.

Согласно теории самоорганизации [24], необходимое число переменных  $m \geq M - f$ , где  $m$  — число переменных, используемое для моделирования;  $M$  — действительное число переменных, действующих в объекте;  $f$  — число обратных связей в объекте (всегда значительное, но часто неизвестное). Имеется возможность выбрать любое множество, состоящее из  $m$  переменных ( $m \in M$ ), для самоорганизации модели.

Были использованы тринадцать системных переменных, указанных в табл. 27—29. Переменные  $x_{14}$  (подходящий аналог) и  $x_{15}$  (цена на нефть) были приняты в качестве внешних возмущающих воздействий.

Человек: какие модели могут быть получены по алгоритму МГУА, если разрешить использовать любую одну строку табл. 27 и 28? Вывести на печать лучшие модели, выбранные по критерию минимума смещения  $n_{см}^* \rightarrow \min$  и по комбинированному критерию  $\rho \rightarrow \min$ .

Машина: печатает минимальные значения критериев и соответствующие уравнения:

$$n_{см} = 2,166007 \cdot 10^{-5}, \quad x_{3(+1)} = -13,34 + 0,915x_{3(+1)} + 0,009x_{14(-2)} + 0,001x_{14(-3)} + 0,0027x_{15(0)} + 0,0075x_{15(-1)} + 0,002x_{15(-2)} - 0,0001x_{15(-3)};$$

$$\rho = 4,54697 \cdot 10^{-2}, \quad x_{9(+1)} = 9,641 + 0,932x_{9(0)} + 0,047x_{14(-3)} - 0,0154x_{15(0)}.$$

Человек: какие модели самоорганизуются при использовании любых двух строк таблиц? Печатать лучшие модели.

Машина:

$$n_{см}^* = 2,022 \cdot 10^{-4} \left\{ \begin{array}{l} x_{2(+1)} = 40,099 + 0,361x_{2(+1)} - 0,041x_{10(0)} - 0,034x_{10(-1)} - 0,002x_{14(0)} + 0,0002x_{15(-2)} - 0,002x_{15(-3)}, \\ x_{10(+1)} = 231,29 - 1,297x_{2(-1)} - 0,0287x_{10(-3)} + 0,0092x_{15(-1)} - 0,0608x_{15(-2)}; \\ x_{2(+1)} = 166,537 - 0,0022x_{2(-2)} - 0,002x_{3(0)} - 0,236x_{3(-1)} - 0,347x_{3(-2)}, \\ - 0,00001x_{15(-1)} - 0,00003x_{15(-2)}, \\ x_{3(+1)} = 19,738 + 0,587x_{3(0)} - 0,0132x_{14(-1)} + 0,001x_{15(-1)} + 0,003x_{15(-3)}. \end{array} \right.$$

$$\rho = 1,34469 \cdot 10^{-4}$$

Человек: какие модели являются лучшими, если мы разрешим использовать любые три строки таблиц?

Машина:

$$n_{см}^* = 3,933 \cdot 10^{-4} \left\{ \begin{array}{l} x_{10(+1)} = 34,091 + 0,158x_{10(0)} - 0,287x_{10(-2)} - 0,016x_{10(-3)} + 0,169x_{11(0)} + 0,661x_{11(-2)} - 0,000009x_{12(-1)} - 0,000006x_{15(-1)}, \\ x_{11(+1)} = 63,274 + 0,155x_{10(0)} - 0,53x_{10(-2)} - 0,23x_{10(-3)} + 0,489x_{11(0)} + 0,581x_{11(-2)} - 0,00002x_{12(-3)} - 0,000004x_{14(-3)}, \\ x_{12(+1)} = 3503,58 - 1,732x_{10(-1)} + 0,00001x_{10(-2)} + 0,011x_{10(-3)} - 15,791x_{11(0)} - 4,234x_{11(-2)} - 9,823x_{11(-3)} + 0,0042x_{14(0)} - 0,074x_{15(-1)}, \end{array} \right.$$

$$\rho = 2,742004 \cdot 10^{-1} \left\{ \begin{array}{l} x_{3(+1)} = 15,694 + 0,0097x_{10(0)} + 0,506x_{10(-1)} + 0,0506x_{10(-3)} + 0,061x_{11(-1)} + 0,0505x_{11(-2)} - 0,0001x_{11(-3)} - 0,031x_{14(-3)}, \\ x_{10(+1)} = 24,176 - 0,0171x_{3(0)} + 0,0725x_{10(-1)} + 0,214x_{11(0)} + 0,506x_{11(-1)}, \\ x_{11(+1)} = 65,559 - 0,313x_{10(-2)} - 0,515x_{10(-3)} + 0,563x_{11(0)} - 0,015x_{11(-1)} + 0,0472x_{11(-2)} + 0,614x_{11(-3)} + 0,0012x_{14(-1)} - 0,0013x_{15(-1)}. \end{array} \right.$$

Человек: Действуя аналогично предыдущему, найти лучшие модели при использовании четырех, пяти, шести, семи и восьми строк таблиц. Всего будет оценено 13 моделей для одной строки, 55 моделей для двух строк, 165 моделей для трех, 35 — для четырех, 21 — для пяти, 7 — для шести, 1 — для семи и 1 — для восьми строк. Следует оценить всего  $13 + 55 + 165 + 35 + 21 + 7 + 1 + 1 = 298$  систем уравнений.

Машина (из-за громоздкости ответа мы его пропускаем).

Человек: дать график, показывающий изменение минимальных значений критериев минимума смещения и комбинированного критерия для лучших моделей при возрастании их размерности от  $s = 1$  до  $s = 8$ . Выбрать лучшие модели оптимальной сложности. Машина: рис. 36 (кривые I и II)\*.

По критерию минимума смещения оптимальной является система, состоящая из четырех уравнений, в которых выходными переменными следует считать:  $x_2$  — покупательную способность

\* Существование минимума критерия  $n_{см}^* \rightarrow \min$  является основным результатом работы [68]. Именно этот критерий дает решение задачи системного анализа или структурной идентификации системы.

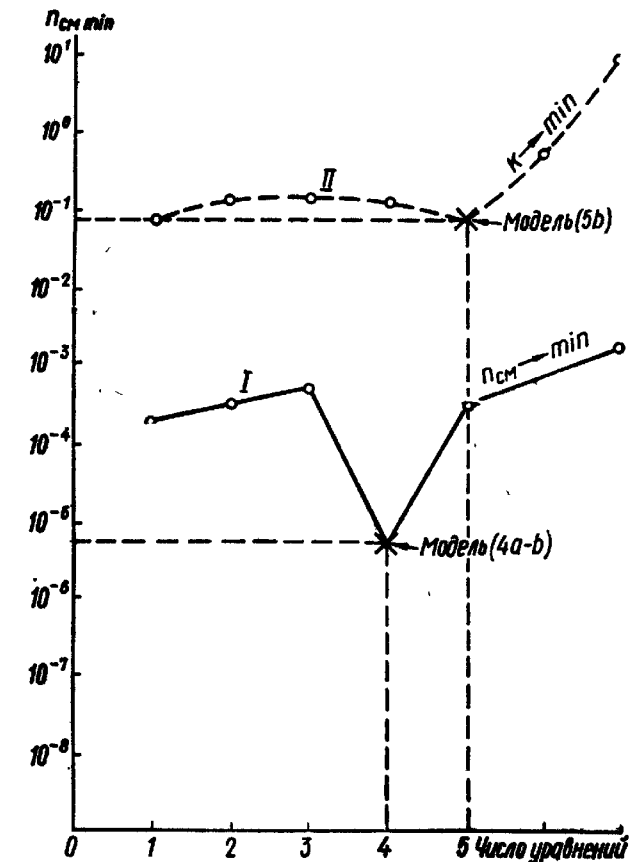


Рис. 36. Зависимость минимальных значений критерия минимума смещения и комбинированного критерия от размерности моделей (первая методика): I — критерий минимума смещения; II — комбинированный критерий.

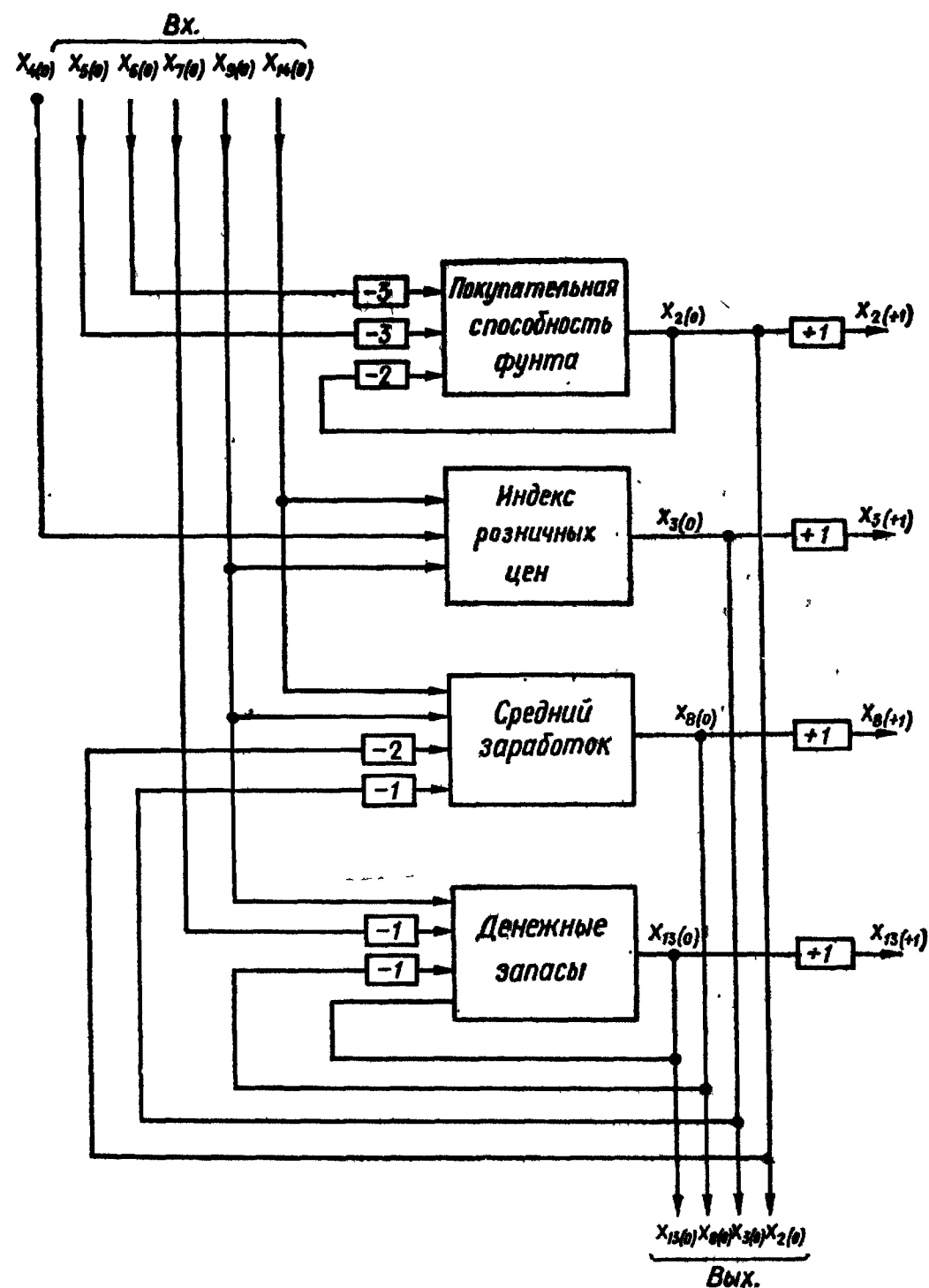


Рис. 37. Оптимальная (по  $n_{cm} \rightarrow \min$ ) неавтономная структура системы «инфляции» в Англии (модель 4а—в).

фунта;  $x_3$  — индекс розничных цен;  $x_8$  — средний заработок;  $x_{13}$  — денежные запасы (рис. 37).

По комбинированному критерию  $\rho \rightarrow \min$  оптимальной является система из пяти уравнений, в которой кроме указанных участвуют:  $x_{11}$  — импорт;  $x_{12}$  — текущий баланс (переменная  $x_2$  в этой

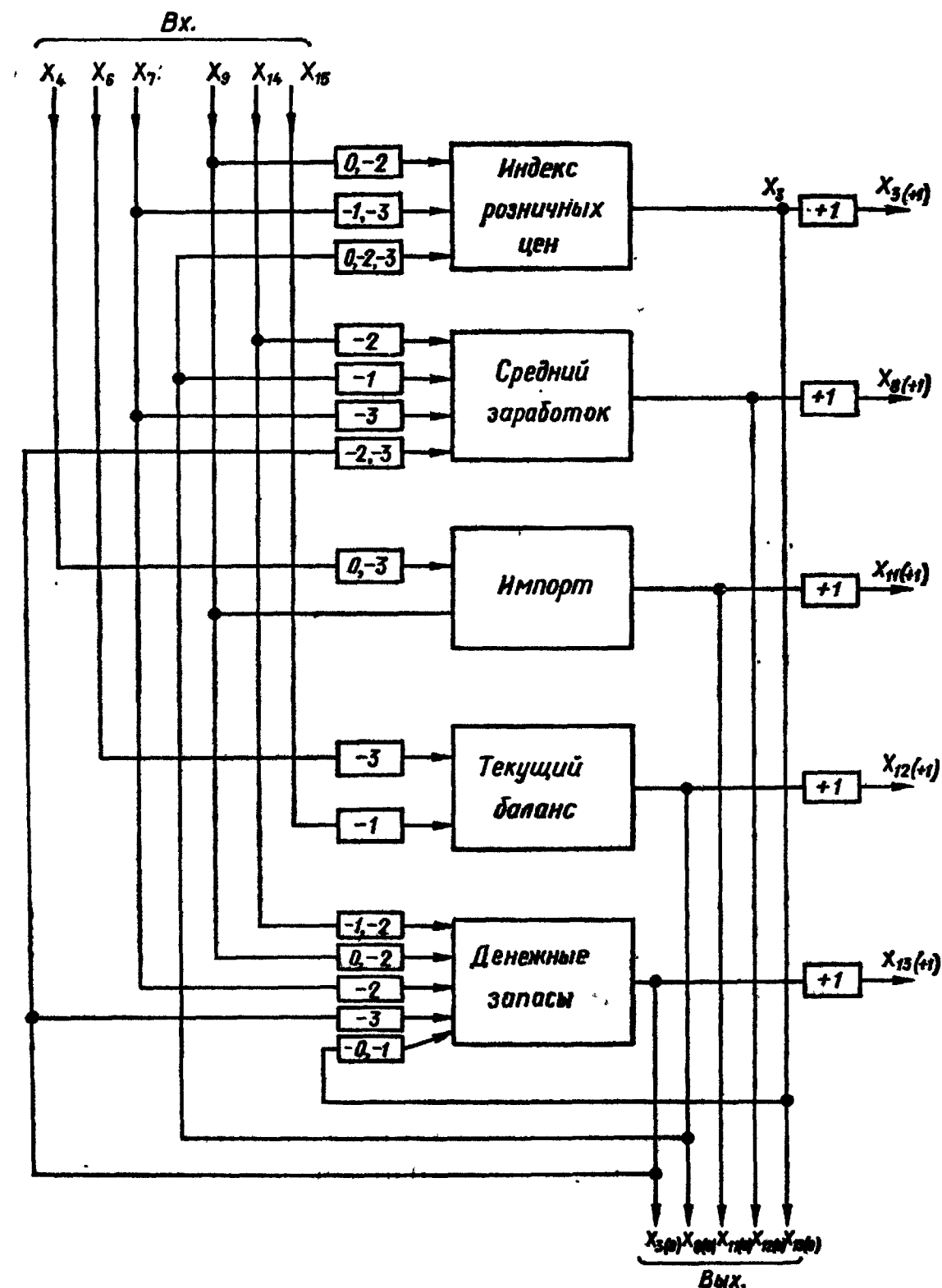


Рис. 38. Оптимальная (по  $\rho \rightarrow \min$ ) неавтономная структура системы инфляции в Англии (модель 5в).

модели не участвует (рис. 38), по-видимому, она хорошо выражается через  $x_{11}$  и  $x_{12}$ ).

**Человек:** для найденных выходных переменных, характеризующих процесс инфляции, получить модели, используя всю информацию, имеющуюся в таблицах исходных данных. Вывести на печать модели, отвечающие минимумам критериев.

**Машина:** в случае четырех указанных выходных величин оптимальной по обоим критериям является следующая одна система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} n_{\text{см}}^* &= 4,68 \cdot 10^{-6}, \\ \rho &= 2,929963 \cdot 10^{-1} \end{aligned} \right\} \begin{cases} x_{2(+1)} = -31,47 - 0,194x_{2(-1)} + 1,5027x_{2(-2)} + \\ + 0,007x_{5(-3)} - 0,0071x_{6(-3)}, \\ x_{3(+1)} = 51,078 + 0,00005x_{4(0)} + 0,0642x_{9(0)} + \\ + 0,024x_{14(0)}, \\ x_{8(+1)} = 117,246 + 0,259x_{2(-2)} + 1,9908x_{13(-1)} + \\ + 0,0029x_{9(0)} + 0,0007x_{14(0)}, \\ x_{13(+1)} = 1321,3155 + 11,1008x_{8(-1)} + \\ + 0,94x_{13(0)} - 0,0001x_{7(-1)} - 0,0877x_{9(0)}. \end{cases}$$

Результат исследования следующий:

вектор выходных переменных (он же — вектор состояний):

$x_2, x_3, x_8, x_{13}$ ;

вектор возмущающих воздействий («входов»):  $x_4, x_5, x_6, x_7,$

$x_9, x_{14}$ .

Остальные переменные, указанные в таблице исходных данных, в дальнейшем из рассмотрения исключаются как несущественные:  $x_1, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{15}$ .

Исключение ненужных переменных является важным результатом системного анализа на основе самоорганизации.

В случае пяти выходных переменных оптимальными являются следующие системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} n_{\text{см}}^* &= 2,69 \cdot 10^{-4} \end{aligned} \right\} \begin{cases} x_{2(+1)} = -2,643 + 1,025x_{2(0)} - 0,007x_{7(-1)} + \\ + 0,000002x_{9(-1)}, \\ x_{3(+1)} = -10,284 + 1,084x_{3(-1)} + 0,0107x_{7(-1)} + \\ + 0,0005x_{7(-2)} + 0,0123x_{9(-2)}, \\ x_{8(+1)} = -80,837 + 1,854x_{3(-1)} + 0,021x_{3(-2)} + \\ + 0,0001x_{13(-3)} - 0,0001x_{7(-2)}, \\ x_{12(+1)} = 951,56 - 94,43x_{8(-3)} + 0,37x_{15(-1)}, \\ x_{13(+1)} = 2796,899 + 0,0002x_{2(-2)} - 94,411x_{2(-3)} + \\ + 0,568x_{8(-3)} + 958x_{13(0)} - 0,022x_{13(-1)} - \\ - 0,00001x_{7(-3)} + 0,0002x_{9(-2)} + \\ + 0,316x_{14(-1)} - 0,000004x_{14(-2)}, \end{cases}$$

$$\rho = 2,721077 \cdot 10^{-1} \left\{ \begin{aligned} x_{3(+1)} &= 14,349 - 0,0041x_{8(0)} + 0,762x_{8(-2)} - \\ &- 0,0002x_{8(-3)} - 0,00009x_{7(-1)} + \\ &+ 0,0157x_{7(-3)} + 0,0001x_{9(0)} + 0,0427x_{9(-2)}, \\ x_{8(+1)} &= -79,467 + 1,862x_{3(-1)} + \\ &+ 0,0052x_{3(-2)} + 0,0001x_{8(-1)} + \\ &+ 0,0095x_{7(-5)} - 0,000001x_{14(-2)}, \\ x_{1(+1)} &= -71,672 + 1,917x_{4(-3)} - 0,0363x_{9(0)}, \\ x_{12(+1)} &= 9515,56 - 94,43x_{8(-3)} + 0,37x_{15(-1)}, \\ x_{13(+1)} &= 1714,203 - 0,356x_{3(-3)} + 0,962x_{13(0)} - \\ &- 0,0109x_{13(-1)} - 0,0001x_{7(-2)} - \\ &- 0,0041x_{9(0)} - 0,0952x_{9(-2)} + \\ &+ 0,314x_{14(-1)} + 0,0002x_{14(-2)}. \end{aligned} \right.$$

**Человек:** Показать структурные схемы системы инфляции в Англии, соответствующие полученным моделям.

**Машина:** рис. 37 и 38.

*Сокращение переборov в случае, когда одна из выходных величин достоверно известна (вторая методика)*

Часто в практике моделирования встречается случай, когда по крайней мере одна из выходных величин может быть достоверно указана. Так, при моделировании экологических систем рек основным показателем является содержание в воде кислорода. При моделировании системы озера часто указывается в качестве выходной величины минерализация воды и т. д.

В этих случаях перебор выходных переменных можно ограничить более простым подбором пар переменных с участием одной уже заданной переменной. Затем к наилучшей паре переменных подбирается третья переменная и т. д. Все полученные системы уравнений (с обязательным участием указанной основной переменной) сравниваются по комбинированному критерию и выбирается лучшая из них. Вторая методика отличается от первой только способом задания основной переменной.

*Диалог человек—машина при самоорганизации модели инфляции.* Полное уравнение, из которого могут быть получены все уравнения во всех указанных системах уравнений, представляет собой некоторую поверхность регрессии в пространстве, координатами которого являются все 13 переменных с тремя запаздывающими аргументами:

$$x_{i(+1)} = f(a_0, x_{1(0)}, x_{1(-1)}, x_{1(-2)}, x_{1(-3)},$$

$$x_{2(0)}, x_{2(-1)}, x_{2(-3)}, \dots, x_{13(0)},$$

$$x_{13(-1)}, x_{13(-2)}, x_{13(-3)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 13.$$



Всего это полное уравнение содержит  $4 \cdot 13 = 52$  члена и один постоянный член.

Если функция  $f$  — линейный полином, то согласно комбинаторному алгоритму МГУА при помощи приравнивания нулю тех или иных его членов во всевозможных комбинациях можно получить  $13 \cdot 2^{52}$  полиномов. Эти полиномы следовало бы оценить по критериям, чтобы выбрать 13 лучших. Однако такой перебор слишком велик для современных машин и, кроме того, требует не менее  $2 \cdot 52 = 104$  точек опытных данных (при критерии минимума смещения).

Выход состоит в применении многорядного алгоритма МГУА, для которого алгебраический минимум равен шести (при критерии минимума смещения) или даже трем точкам (при критерии сходимости пошагового прогноза). Многорядный алгоритм следует применить 13 раз.

Для того чтобы сравнить результаты по двум указанным методикам простейшим образом, ни комбинаторный, ни многорядный алгоритмы МГУА в примере не применялись. Перебор был сокращен априорно. В рассматриваемом примере самоорганизации модели инфляции перебору по критериям были подвергнуты только уравнения, входившие уже во все системы уравнений, участвовавшие при выводе моделей по первой методике. Всего было опробовано  $(13 \cdot 1) + (55 \cdot 2) + (165 \cdot 3) + (35 \cdot 4) + (21 \cdot 5) + (7 \cdot 6) + (1 \cdot 7) + (1 \cdot 13) = 1024$  уравнения. Указанное число уравнений было ранжировано (расположено в ряд) по величине комбинированного критерия с тем, чтобы выбрать 13 лучших (оптимальных) уравнений (по одному для каждой переменной).

При более полном переборе преимущества второй методики могут только возрасти.

**Человек:** оценить все 1024 уравнения, участвующих в указанных 298 системах уравнений, по комбинированному критерию. Ранжировать уравнения (расположить в ряд) по величине этого критерия. Выбрать систему уравнений с наименьшим значением минимума системного критерия  $\rho^*$ , включающую в себя уравнение для переменной  $x_3$  (розничные цены).

**Машина:** получился ряд уравнений, левая часть которых равна

$$x_{9(+1)}, x_{3(+1)}, x_{8(+1)}, x_{13(+1)}, x_{11(+1)}, x_{10(+1)}, \\ x_{2(+1)}, x_{1(+1)}, x_{12(+1)}.$$

Оптимальная система уравнений, включающая  $x_{3(+1)}$ , записывается в виде

$$\rho_3 = 4,819426 \cdot 10^{-2}, \\ x_{3(+1)} = -13,34 + 0,915x_{3(-1)} + 0,009x_{14(-2)} + \\ + 0,0001x_{14(-3)} + 0,0027x_{15(0)} + 0,0075x_{15(-1)} + \\ + 0,002x_{15(-2)} - 0,0001x_{15(-3)};$$

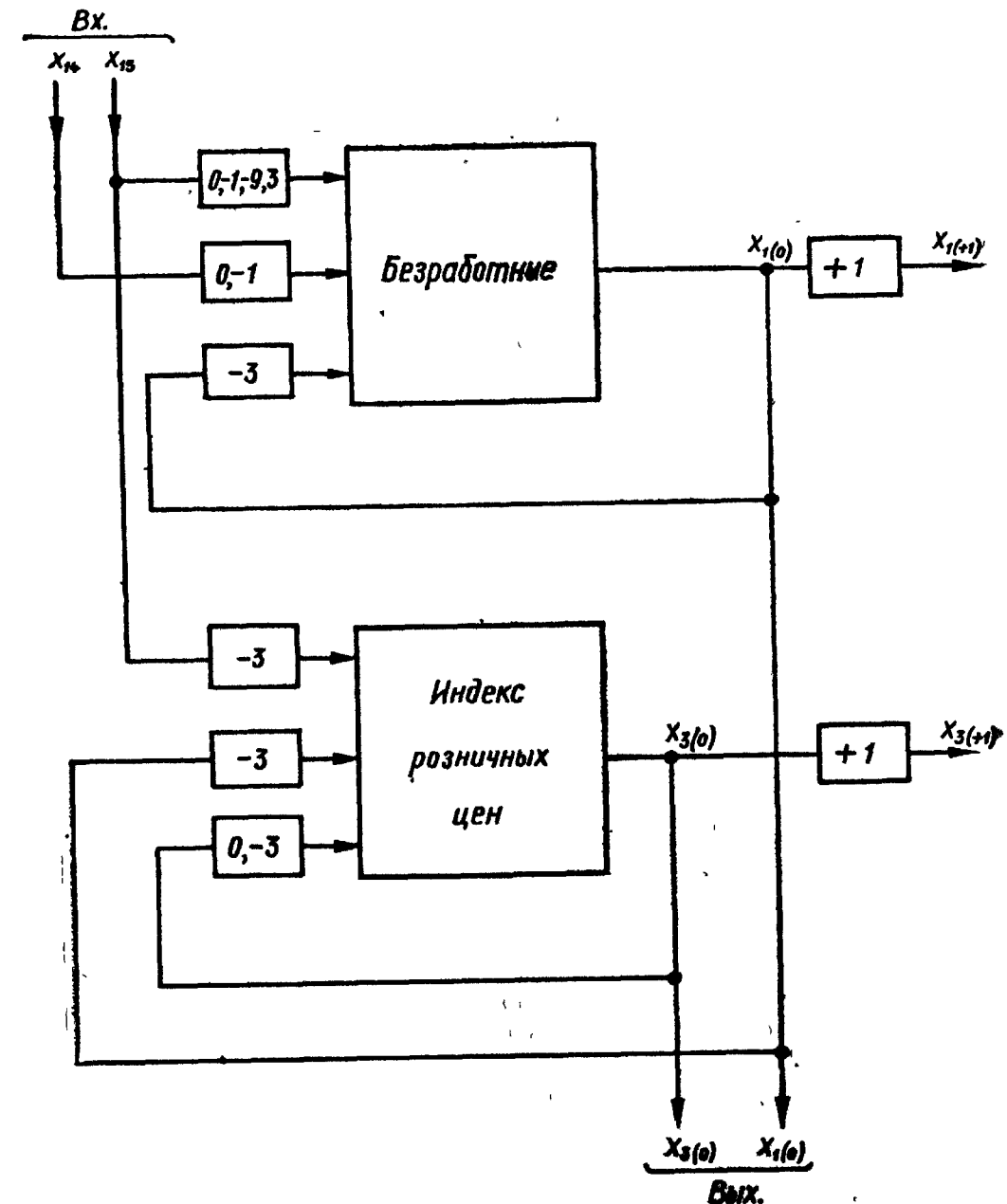


Рис. 39. Оптимальная (по  $\rho_{см}^* \rightarrow \min$ ) структура системы «безработица — розничные цены».

$$\rho_9 = 4,546979 \cdot 10^{-2}, \\ x_{9(+1)} = 9,641 + 0,932x_{9(0)} + 0,0047x_{14(-3)} - 0,0154x_{15(0)}.$$

Системный критерий имеет вид

$$\rho^* = \frac{1}{2} \sqrt{\rho_3^2 + \rho_9^2} = 3,31 \cdot 10^{-2}.$$

**Человек:** указать оптимальную по  $\rho_{см}^* \rightarrow \min$  систему уравнений при условии, что она содержит только две выходные величины  $x_1$  и  $x_3$  (число безработных и розничные цены). Показать структуру такой системы.

**Машина:** оптимальная по  $n_{см}^* \rightarrow \min$  система уравнений «безработица — розничные цены»:

$$n_{см_1} = 2,817107 \cdot 10^{-4},$$

$$x_{1(+1)} = 4,3484 + 0,071x_{1(-3)} - 0,0143x_{14(0)} + 0,039x_{14(-1)} +$$

$$+ 0,0001x_{15(0)} - 0,035x_{15(-1)} - 0,00176x_{15(-2)} + 1,319x_{15(-3)};$$

$$n_{см_2} = 8,452361 \cdot 10^{-4},$$

$$x_{3(+1)} = -23,98 - 0,0004x_{1(0)} + 0,541x_{3(0)} - 0,689x_{3(-1)} +$$

$$+ 0,0114x_{15(-3)},$$

$$n_{см}^* = -\frac{1}{2} \sqrt{n_{см_1}^2 + n_{см_2}^2} = 5,634 \cdot 10^{-4}.$$

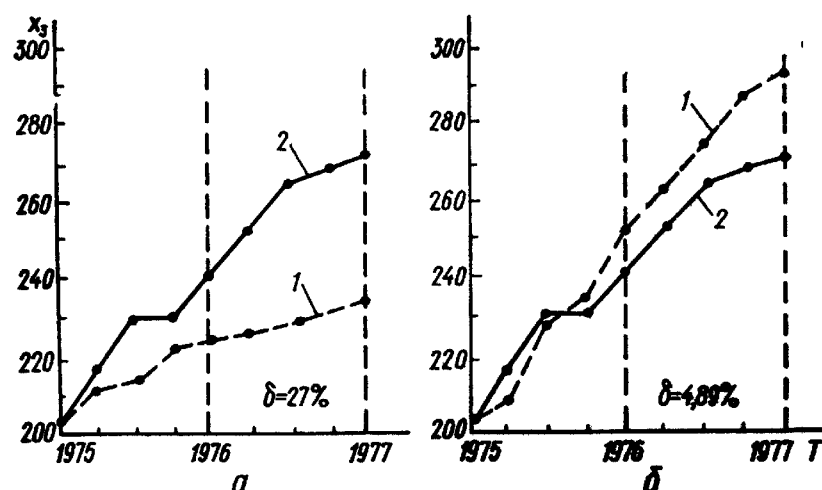


Рис. 40. Сравнение точности прогнозов величины  $x_3$  (розничные цены), полученных по различным методикам: а — модель (4а—В); б — модель (6).

Модель получилась простой, а главное ее входы  $x_{14}$ ,  $x_{15}$  являются внешними возмущающими воздействиями, что удобно для анализа прогнозов. Положительные коэффициенты при  $x_{15(0)}$  показывают, что рост цен на нефть приводит к увеличению индекса цен ( $x_1$ ) и безработицы ( $x_3$ ).

Структура системы изображена на рис. 39. Продолжим описание диалога человека и машины.

**Человек:** сравнить прогнозы изменения розничных цен  $x_3$  во времени, получаемые по описанным выше двум методикам.

**Машина:** рис. 40. Ошибка прогноза переменной  $x_3$  (розничные цены) по первой методике  $\delta = 27\%$ , по второй —  $\delta = 4,89\%$ . Более точной в данном примере оказалась вторая методика.

Напомним, что, пользуясь определениями конечных разностей

$$\frac{dx_i}{dt} = x_{i(-1)}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = x_{11(0)} - 2x_{i(-1)} + x_{i(-2)} \text{ и т. д.,}$$

можно получить непрерывные дифференциальные уравнения процессов инфляции в Англии, действительные для указанных лет.

**Человек:** из всех найденных уравнений выбрать систему уравнений с наименьшими значениями минимума критерия  $\rho^* \rightarrow \min$ , включающую в себя уравнение для переменной  $x_1$  (число безработных).

**Машина:** оптимальная по критерию  $\rho^* \rightarrow \min$  система уравнений, включающая  $x_{1(+1)}$ :

$$\rho_1 = 6,399138 \cdot 10^{-2},$$

$$x_{1(+1)} = -137,79 + 1,1x_{1(0)} - 0,028x_{14(0)} + 0,0225x_{14(-3)} +$$

$$+ 1,161x_{15(0)} + 0,263x_{15(-1)} + 0,351x_{15(-3)};$$

$$\rho_2 = 3,515942 \cdot 10^{-1},$$

$$x_{2(+1)} = 7,581 + 0,908x_{2(0)} + 0,035x_{2(-3)} - 0,0018x_{14(0)};$$

$$\rho_3 = 4,819426 \cdot 10^{-2},$$

$$x_{3(+1)} = -13,34 + 0,915x_{3(-1)} + 0,009x_{14(-2)} + 0,0001x_{14(-3)} +$$

$$+ 0,0027x_{15(0)} + 0,0075x_{1(-1)} + 0,002x_{15(-2)} - 0,0001x_{15(-3)};$$

$$\rho_8 = 8,360442 \cdot 10^{-2},$$

$$x_{8(+1)} = 9,179 + 0,0045x_{8(-1)} + 0,988x_{8(-2)} -$$

$$- 0,0004x_{14(-1)} + 0,00002x_{14(-2)} + 0,151x_{15(-2)};$$

$$\rho_9 = 4,546979 \cdot 10^{-2},$$

$$x_{9(+1)} = 9,641 + 0,932x_{9(0)} + 0,0047x_{14(-3)} - 0,0154x_{15(0)};$$

$$\rho_{10} = 3,332376 \cdot 10^{-1},$$

$$x_{10(+1)} = 38,077 + 0,511x_{10(-1)} + 0,180x_{10(-2)} - 0,001x_{10(-3)} +$$

$$+ 0,0003x_{14(0)} - 0,0005x_{14(-3)} + 0,0014x_{15(-2)} - 0,0025x_{15(-3)};$$

$$\rho_{11} = +2,921693 \cdot 10^{-1},$$

$$x_{11(+1)} = 22,23 + 0,826x_{11(0)} + 0,0243x_{11(-2)} - 0,002x_{14(-1)} +$$

$$+ 0,002x_{14(-3)} + 0,0097x_{15(0)} - 0,027x_{15(-2)};$$

$$\rho_{13} = 1,094091 \cdot 10^{-1},$$

$$x_{13(+1)} = 357,43 + 1,061x_{13(0)} - 0,004x_{14(-1)} - 8,395x_{15(0)}.$$

Минимальное значение системного критерия

$$\rho^* = \frac{1}{8} \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_8^2 + \rho_9^2 + \rho_{10}^2 + \rho_{11}^2 + \rho_{13}^2} = 1,08 \cdot 10^{-1}.$$

*Физическое объяснение существования минимума смещения при переборе систем, отличающихся по числу выходных переменных.* Представим, что в некотором проводнике действуют закон Ома  $U = IR$  и закон Гука  $F = kL$ , где  $U$  — напряжение;  $I$  — сила тока;  $R$  — сопротивление;  $F$  — сила;  $k$  — модуль упругости;  $L$  — растяжение. Исследователю это известно, но он составил

таблицу наблюдений, в которой кроме шести указанных переменных участвует ряд других, например:  $S$  — солнечная активность,  $v$  — сила ветра и другие случайные переменные. Система из двух уравнений, в которой выходными величинами являются переменные  $U$  и  $F$ , будет самой несмещенной, так как она отражает законы, которые действительно действуют как для данных части  $A$ , так и части  $B$  таблицы наблюдений («вчера, сегодня и завтра»). Все «не относящиеся к делу» переменные будут отсеяны.

Однако существует опасность того, что машина выберет в качестве закона связь двух пропорциональных друг другу или сильно коррелированных величин. Например, если в таблице заданы вес проводника  $G$  и его объем  $W$ , то в качестве закона машина найдет «неинтересную» зависимость  $G = cW$  и интересующие нас более сложные законы будут отвергнуты. Поэтому пропорциональные друг другу величины нужно заранее устранить из таблицы данных.

Законы (в другом виде) будут совместно открыты и в том случае, если вместо сопротивления  $R$  в таблице будут участвовать размеры тела и его температура, так как сопротивление выражается через эти величины и т. п.

Для того чтобы законы были точными, необходимо так выбрать опорную функцию алгоритма МГУА, чтобы из нее можно было «выкроить» данные законы. В противном случае алгоритм даст только полиномиальные аппроксимации законов. Например, если перебор моделей организован в классе полиномов, а законы, действующие в объекте структурной идентификации, выражаются через дробные функции, то алгоритм МГУА найдет только их разложения в полиномиальный ряд.

#### Самоорганизация точечных моделей по критерию баланса переменных

Основную идею критерия баланса переменных можно выразить так: на интервале интерполяции, где заданы экспериментальные точки, устанавливается некоторая математическая связь между переменными, образующими «систему». Критерий баланса переменных требует, чтобы эта связь, называемая также законом, выполнялась и на интервале экстраполяции, т. е. в области прогнозирования будущего. Если такой закон действительно существует и остается постоянным, то критерий баланса переменных обеспечивает наиболее точные долгосрочные прогнозы.

Пусть  $\Phi(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = 0$  — функция баланса (иначе, закон, связывающий переменные  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ). Из множества всех прогнозирующих моделей для переменных  $x_j(t)$  нужно выбрать такую систему, для которой на интервале экстраполяции (в окрестности точки прогноза) эта связь выполняется наилучшим образом. Нарушение баланса переменных можно ха-

рактеризовать величинами разбаланса

$$b_i = \Phi(x_1(t_i), x_2(t_i), \dots, x_n(t_i)),$$

которые рассчитываются для точек  $t_i$ , принадлежащих интервалу экстраполяции, по различным прогнозирующим моделям для каждой переменной  $x_j(t)$ . В результате выбирается наилучшая комбинация моделей, усложнение которых удобнее всего задавать в виде специальных таблиц постепенного усложнения (табл. 4—7).

Критерий баланса позволяет выбрать наилучший прогноз «вечера» прогнозов (рис. 42) для каждой переменной.

*Алгоритмы построения критерия баланса переменных.* В некоторых задачах моделирования функция связи между переменными ясна из физических соображений и использование ее в алгоритме вполне естественно. В других случаях физика процесса подсказывает существование функциональной зависимости между переменными, однако вид ее не известен. При этом рекомендуется предварительно восстановить функцию баланса, воспользовавшись одним из алгоритмов МГУА на основе критерия минимума смещения.

И в том и в другом случае критерий баланса переменных можно построить при помощи так называемого кольца разностей прямых и обратных функций, что поясняется ниже.

В задачах, где прогнозируемые переменные являются несвязанными, возможно искусственное расширение множества переменных за счет дополнения их временными рядами, образованными из исходных по выбранным законам. Эти зависимости и выступают в дальнейшем в качестве функций баланса. Например, введение усредненных величин (сумм аргументов) дает эффективное повышение долгосрочности прогнозов. Рассмотрим указанные способы построения критерия баланса по очереди на примерах прогноза одной и трех переменных.

#### Кольцо разностей прямых и обратных функций в случае, когда связь переменных известна

Сначала допустим, что зависимость между системными переменными (закон) на интервале интерполяции известна. Например, для трех взаимосвязанных переменных пусть заданы несмещенные законы:

$$x_1 = f_{1-1}(x_2, x_3), \quad x_2 = f_{2-2}(x_1, x_3) \quad \text{и} \quad x_3 = f_{3-3}(x_1, x_2).$$

Допустим также, что функции  $f_{1-1}$ ,  $f_{2-2}$  и  $f_{3-3}$  (называемые ниже прямыми) просты и допускают обратные определения переменных (например, функции четвертой и более высоких степеней обратного определения аргумента не допускают). Находим из первого уравнения обратную функцию

$$x_3 = f_{1-3}(x_1, x_2),$$

из второго —

$$x_1 = f_{2-1}(x_2, x_3),$$

из третьего \* —

$$x_2 = f_{3-2}(x_1, x_3).$$

Первый индекс указывает номер уравнения, второй — номер определяемой переменной. Тогда, поскольку прямые и обратные законы точны, имеем  $f_{1-1} = f_{2-1}$ ;  $f_{2-2} = f_{3-2}$ .

Предлагаемый критерий баланса требует, чтобы эти соотношения выполнялись не только на интервале интерполяции, но и в каждой точке на интервале экстраполяции (прогноза):

$$b_1 = (f_{1-1} - f_{2-1}) \rightarrow 0, \quad b_2 = (f_{2-2} - f_{3-2}) \rightarrow 0,$$

$$b_3 = (f_{3-3} - f_{1-3}) \rightarrow 0.$$

Критерий баланса находится через разности прямых и обратных функций.

В случае отсутствия отклонений процесса от тренда

$$x_1 = f_{1-1} = f_{2-1}, \quad x_2 = f_{2-2} = f_{3-2}, \quad x_3 = f_{3-3} = f_{1-3}.$$

Квадраты невязок равны:

$$b_{1i}^2 = (f_{1-1} - f_{2-1})_i^2, \quad b_{2i}^2 = (f_{2-2} - f_{3-2})_i^2, \quad b_{3i}^2 = (f_{3-3} - f_{1-3})_i^2.$$

Критерий баланса переменных требует, чтобы сумма невязок на интервале экстраполяции была минимальной. Нетрудно распространить приведенное здесь рассуждение на любое небольшое число переменных.

*Перебор различных вариантов составления колец прямых и обратных функций.* Обратные функции можно найти из различных прямых функций. Это определяет собой наличие нескольких вариантов составления колец. Чем больше переменных в системе, тем больше вариантов образования колец. Для двух переменных имеется только один вариант. При трех переменных можно получить шесть различных обратных функций и т. д.

Общее правило состоит в том, что из всех вариантов определения обратных функций следует предпочесть те, при которых используются прямые функции, имеющие более глубокий минимум основного критерия селекции.

Если достаточно глубокий минимум не получен вообще, то прогноз будет мало достоверным.

Прежде чем находить «кольцо разностей», следует найти множество взаимосвязанных выходных переменных данного объекта, пользуясь алгоритмами объективной самоорганизации систем уравнений. Поиск «кольца» в случае отсутствия физической связи выходных переменных всегда будет безуспешным.

\* Можно также найти из первого уравнения  $f_{1-2}(x_1, x_3)$ , из второго —  $f_{2-3}(x_1, x_3)$  и из третьего —  $f_{3-1}(x_2, x_3)$ . Из шести следует предложить три функции, выводимые по законам, полученным при более глубоком минимуме критерия несмещенности.

Таблица 30. Исходные данные для прогнозирования населения Земли по одной переменной

Год	Отсчет времени	Основная переменная — население Земли		Искусственно образованные переменные	
		$x_1$ , млрд. чел.	$x_1 = \frac{x_1 - x_{1\min}}{x_{1\max} - x_{1\min}}$	$x_2 = x_1^2$	$x_3 = \sqrt{x_1}$
1920	1	1,860	0,0000	0,0000	0,0000
1925	2	1,907	0,0263	0,0722	0,1632
1930	3	2,070	0,1185	0,0140	0,3443
1935	4	2,102	0,136	0,01864	0,3695
1940	5	2,295	0,2454	0,06023	0,4954
1945	6	2,377	0,2918	0,08514	0,5400
1950	7	2,486	0,3533	0,12482	0,5933
1955	8	2,713	0,4814	0,23171	0,6940
1960	9	2,982	0,6332	0,40094	0,79575
1965	10	3,289	0,8064	0,69024	0,8980
1970	11	3,632	1,0000	1,0000	1,0000

Пример 23. Прогнозирование численности населения Земли по одной переменной. В наиболее простой задаче, рассматриваемой нами, информация представлена в виде временного ряда значений только одной переменной величины — количества жителей Земли (табл. 30). Система уравнений образуется искусственно, при помощи возведения в квадрат и извлечения квадратного корня из этой основной переменной. Таким образом, искусственно созданная система имеет три переменные. Закон, связывающий переменные, известен: поэтому нет необходимости открывать его по критерию минимума смещения.

Уравнения регрессии являются алгебраическими уравнениями вида: а) прямые функции

$$x_1 = x_1 = f_{1-1}(t),$$

$$x_2 = x_1^2 = f_{2-2}(t),$$

$$x_3 = \sqrt{x_1} = f_{3-3}(t),$$

б) обратные функции

$$x_1 = \sqrt{x_2} = f_{2-1}(t),$$

$$x_2 = (\sqrt{x_3})^4 = f_{3-2}(t),$$

$$x_3 = \sqrt{x_1} = f_{1-3}(t).$$

В качестве опорной функции используются степенные полиномы (табл. 5). Таблицы, подобные табл. 5, составляются для каждой из трех

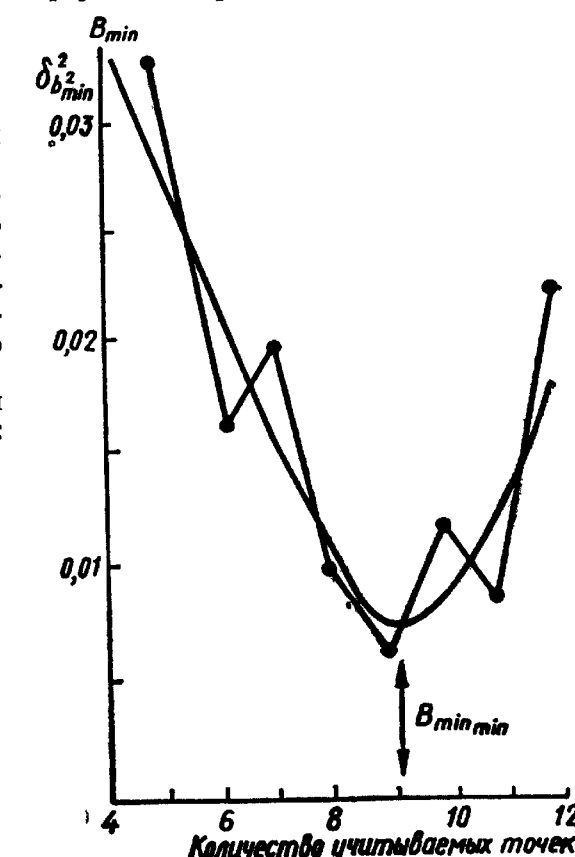


Рис. 41. Оптимизация глубины учитываемой предыстории (пример 25)  $\delta^2 B_{\min}$  — квадратичная ошибка в точке минимума.

Таблица 31. Оптимизация глубины учета предыстории

Количество учитываемых точек	Количество тактов упреждения прогнозов, $T_{оп}$	Квадратиче- ская ошибка в точке, $B_{min}$	Количество учитываемых точек	Количество тактов упреждения прогнозов, $T_{оп}$	Квадратиче- ская ошибка в точке, $B_{min}$
5	5	0,0324	9	5	0,067 → min
6	5	0,0174			
7	5	0,0150	10	5	0,0117
8	5	0,0104	11	5	0,0079
			12	5	0,0215

переменных, и перебираются все сочетания полиномов с оценкой каждого из них по критерию баланса переменных. Как видно из табл. 5, следует перебрать  $C_{31}^3 = 31^3$  комбинаций полиномов.

Критерий баланса переменных принят равным сумме квадратов разностей прямых и обратных функций при

$$b_{1i}^2 = (f_{1-1} - f_{2-1})^2 = [x_1 - \sqrt{x_2}]^2,$$

$$b_{2i}^2 = (f_{2-2} - f_{3-2})^2 = [x_2 - (\sqrt{x_3})^4]^2,$$

$$b_{3i}^2 = (f_{3-3} - f_{1-3})^2 = [x_3 - \sqrt{x_1}]^2.$$

Комбинация трех полиномов, для которых получен минимум критерия, явилась системой уравнений прогнозирования. Для нее определялась среднеквадратическая ошибка прогноза при  $T_y = 25$  лет по формуле

$$\delta_{B_{min}} = \frac{\sum_{i=1}^{N_y} (x_1 - \sqrt{x_2})_i^2}{\sum_{i=1}^{N_y} x_{1i}^2} \cdot 100 + \frac{\sum_{i=1}^{N_y} [x_2 - (\sqrt{x_3})^4]_i^2}{\sum_{i=1}^{N_y} x_{2i}^2} \cdot 100 +$$

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{N_y} [x_3 - \sqrt{x_1}]_i^2}{\sum_{i=1}^{N_y} x_{3i}^2},$$

где  $N_y$  — количество тактов упреждения прогноза.

Величина ошибки в зависимости от длины учитываемой предыстории указана на рис. 41 и в табл. 31.

**Оптимизация глубины учитываемой предыстории.** Все параметры вычислительных алгоритмов МГУА следует оптимизировать так, чтобы получить возможно более глубокий минимум основного критерия селекции в данном случае — критерия баланса переменных. Это объясняется тем, что глубина минимума может служить мерой достоверности и точности синтезируемой модели. Оптимизации подлежат состав ансамблей входных аргументов, вид опорных функций, а также глубина учитываемой предыстории в исходной таблице данных.

При контроле некоторого сложного процесса таблица данных наблюдения непрерывно пополняется новыми точками, а старые точки (по крайней мере некоторые из них) стираются (забываются).

Возникает задача определения оптимальной длины таблицы входных экспериментальных данных, используемых для решения задач интерполяции полей определяемой переменной в пространстве и прогнозирования ее изменения во времени.

Индуктивные методы самоорганизации в большинстве случаев легко решают эту задачу при помощи перебора вариантов по внешнему критерию. Длина таблицы постепенно наращивается до тех пор, пока это увеличивает глубину минимума основного критерия селекции. При этом возможны два результата, показанные на рис. 41. Первый из них определяет собой полный успех определения оптимального числа точек. Такой результат получается для нестационарных медленно изменяющихся объектов. Второй — характерен для стационарных объектов. Здесь приходится остановиться по «правилу левого угла» в точке перегиба кривой.

Выбор оптимальной длины учитываемой предыстории функционально не связан с выбором шага дискретизации переменных во времени. Обе величины определяются раздельно по описанным выше методикам. Сколько же данных нужно хранить навечно? По-видимому, целесообразно сохранять в банке данных либо все дискретные данные таблицы, либо запоминать модель для каждой из таких таблиц. Если модели повторяются, то запоминаются только номера моделей.

В рассматриваемом примере прогноза населения Земли по одной переменной изменялось число точек учитываемой предыстории от пяти до двенадцати. Изменение глубины минимума критерия баланса переменных показано в табл. 31 и на кривой рис. 41. Оказывается, что таблицу исходных данных целесообразно сократить, оставив в ней только девять-десять последних по времени точек. При этом глубина минимума критерия баланса достигает наименьшего значения  $B_{min \min} = 4,6\%$ , при котором квадратичная ошибка

$$\delta_{B_{min \min}}^2 = 0,67.$$

При оптимальном размере таблицы исходных данных (9 точек) ЭВМ выбрала для переменной  $x_2 = x_2(t)$  по таблице усложнения (табл. 5) следующий полином (прогнозирующую модель оптимальной сложности):  $x_2 = x(t) = 2013,7 + 116,1t - 4,49t^2 + 1,983t^3$ .

Результаты прогноза даны в табл. 32.

**Описание вычислительного алгоритма.** Рассматривается задача долгосрочного прогнозирования процессов для систем, в которых действуют некоторые неизменные во времени законы взаимной связи системных переменных.

Алгоритм прогноза состоит из двух частей: сначала по критерию минимума смещения находят законы, связывающие системные переменные, если они не заданы, а затем эти законы

Таблица 32. Результаты прогнозирования населения Земли (млрд. чел.) по одной переменной (пример 25)

Прогноз	1975	1980	1985	1990	1995	2000
	$t = 12$	$t = 13$	$t = 14$	$t = 15$	$t = 16$	$t = 17$
<i>a</i>	4,0074	4,4503	4,9541	5,5249	6,1990	6,8932
<i>b</i>	4,0345	4,6866	5,3875	5,59812	6,1960	6,8932

Примечание. Особенности прогноза: *a* — при прогнозировании сразу до 2000 г.; *b* — при постепенном увеличении времени упреждения прогноза (с шагом, равным пяти годам).

используются для построения критерия баланса переменных. Прогноз находится при помощи перебора комбинаций трендов (из каждого «веера» — по одному). Выбирается комбинация трендов, в наибольшей степени удовлетворяющая критерию баланса при заданном времени упреждения прогноза.

Первая часть алгоритма: действие в фазовом (не временном) пространстве. Прямые функции  $f_{1-1}$ ,  $f_{2-2}$  и  $f_{3-3}$  задаются в виде дробно-полиномиальных уравнений, указанных в табл. 7, где дроби, содержащие квадратичные члены для однозначного определения обратных функций, исключены. Всего в переборе остается  $3 \times 63$  функций (для каждой переменной 63 функции).

Для получения оценок несмещенности все точки, заданные в таблице исходных данных, ранжируются в ряд по величине дисперсии от среднего основной переменной. Полученный ряд точек делится на две равные последовательности точек *A* и *B*. Оценки коэффициентов указанных функций получаются по методу наименьших квадратов два раза: на последовательностях точек *A* и *B*. Подсчитывается  $3 \cdot 63$  показателей несмещенности  $n_{см}^2$  \*.

Для каждой переменной выбирается одна, самая несмещенная дробно-полиномиальная функция. Оценки ее коэффициентов пересчитываются по всем точкам.

Проверяется глубина минимума критерия несмещенности. Если минимальное значение  $n_{см\ min}^2$  велико (больше 5%), вычисление прогноза прекращается \*\*.

Кольцо разностей прямых и обратных функций в случае, когда связь переменных нужно открыть. В случае, когда точные зави-

\* В отличие от полиномов при дробно-полиномиальных функциях определение оценок коэффициентов требует применения итерационной процедуры, описанной в работах [21, 44].

\*\* Если глубокий минимум критерия несмещенности не достигнут, то закон, определяющий данную системную переменную, не открыт. В этом случае, как указывалось, следует подобрать более адекватную опорную функцию. Важно также оптимизировать состав аргументов, в частности (для немарковских объектов) попытаться ввести учет запаздывающих аргументов. При этом вместо полного перебора функций по таблицам постепенного усложнения удобнее применить многорядные ортогонализированные алгоритмы МГУА, разработанные специально для открытия законов с учетом запаздывающих аргументов [81].

Таблица 33. Исходные данные для прогнозирования населения Земли по трем переменным

Год	Отсчет времени	Население Земли		Энергопотребление (по Д. Ихара)		Природные ресурсы (по Д. Форрестеру)
		$x_1$	$x_1 = \frac{x_1 - x_{1\min}}{x_{1\max} - x_{1\min}}$	$x_2$	$x_2 = \frac{x_2 - x_{2\min}}{x_{2\max} - x_{2\min}}$	
1953	1	2,623	0,0000	1109	0,0000	821 982 1,0000
1954	2	2,668	0,03409	1140	0,03487	819 203 0,96094
1955	3	2,713	0,06818	1178	0,07761	816 424 0,92188
1956	4	2,754	0,09924	1214	0,11811	818 556 0,88751
1957	5	2,795	0,13030	1250	0,15860	806 987 0,82720
1958	6	2,850	0,1719	1286	0,19910	806 818 0,78686
1959	7	2,905	0,21363	1327	0,24520	803 949 0,74654
1960	8	2,982	0,27196	1368	0,29133	801 080 0,70621
1961	9	3,040	0,31590	1408	0,33623	797 732 0,65916
1962	10	3,100	0,36140	1449	0,38245	794 385 0,61211
1963	11	3,162	0,40833	1490	0,42857	791 038 0,56507
1964	12	3,174	0,41742	1547	0,49268	787 691 0,51803
1965	13	2,289	0,50454	1583	0,53318	784 344 0,47099
1966	14	3,353	0,53303	1640	0,59730	780 748 0,42044
1967	15	3,421	0,60454	1640	0,59730	777 152 0,36990
1968	16	3,490	0,65681	1725	0,69290	773 556 0,31936
1969	17	3,561	0,71060	1766	0,73903	769 960 0,26881
1970	18	3,632	0,76439	1807	0,78515	766 364 0,21827
1971	19	3,706	0,82045	1848	0,83127	762 481 0,16370
1972	20	3,785	0,88030	1909	0,89988	758 600 0,10915
1973	21	3,864	0,94015	1958	0,95500	754 717 0,05457
1974	22	3,943	1,0000	1998	1,0000	750 834 0,00000

симости на интервале интерполяции не известны, их следует сначала «открыть» методами МГУА по критерию минимума смещения. При этом для получения точной экстраполяции (прогнозирования) во временной области мы обращаемся предварительно к области фазовых координат с тем, чтобы потом вернуться к рассмотрению временного прогнозирования. Если в результате применения МГУА во вне временном пространстве будет получен глубокий минимум критерия смещения, то найденные по МГУА зависимости (не содержащие времени) можно считать требуемыми «прямыми» законами.

Пример 24. Прогноз населения Земли по трем переменным. В отличие от предыдущего примера, рассмотрим систему, где связь переменных заранее не известна. Ее нужно открыть, пользуясь критерием несмещенности. Исходная информация представлена в виде временных рядов значений трех переменных:  $x_1$  — население Земли,  $x_2$  — энергопотребление,  $x_3$  — естественные ресурсы (табл. 33). Данные взяты из статистических ежегодников.

В качестве опорных функций выбраны дробно-полиномиальные описания, постепенное усложнение которых представлено в табл. 7. Для каждой прямой функции составляется такая таблица, содержащая 63 описания. Оценки коэффициентов описаний получаются по всем точкам (делить точки на обучающую и проверочную последовательности не требуется) по методу наименьших квадратов при помощи решения системы нормальных уравнений



Гаусса. Согласно «комбинаторному алгоритму МГУА» перебираются всевозможные комбинации описаний (числом  $63^3$ ) по критерию баланса переменных, способ получения которого уже нами описан.

В каждой таблице находятся по этому критерию дробно-полиномиальные описания оптимальной сложности, комбинация которых дает минимумы разбаланса «прямых» и «обратных» функций.

В рассматриваемом примере по критерию баланса переменных программа комбинаторного алгоритма МГУА выбрала следующие функции:

население Земли:

$$\begin{aligned} \text{прямая функция } x_1 &= \frac{a_0 + a_1 x_2}{1 + b_1 + x_3} = \\ &= \frac{0,00121 + 0,989613}{1 + 0,014828 x_3} = f_{1-1}(x_2 x_3), \end{aligned}$$

$$\text{обратная функция } x_3 = \frac{0,00121 + 0,9896 x_2 - x_1}{0,01483 x_1} = f_{1-3}(x_1 x_2);$$

энергопотребление Земли:

$$\begin{aligned} \text{прямая функция } x_2 &= \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_3}{1 + b_1 x_2} = \\ &= \frac{-4,46837 + 9,8123 x_1 + 4,99023 x_3}{1 + b_1 x_2} = f_{2-2}(x_1 x_3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{обратная функция } x_1 &= \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{1 + b x_1 x_2} = \\ &= \frac{1,025 + 2,4175 x_1 - 0,09}{1 - 0,76199 x_1 x_2} = f_{2-1}(x_2 x_3); \end{aligned}$$

ресурсы:

$$\begin{aligned} \text{прямая функция } x_3 &= \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2}{1 + b x_1 x_2} = \\ &= \frac{1,025 + 2,4175 x_1 - 0,09}{1 - 0,76199 x_1 x_2} = f_{3-3}(x_1 x_2), \end{aligned}$$

$$\text{обратная функция } x_2 = \frac{1,025 + 2,4175 x_1 - x_3}{-0,035 + 0,76199 x_1 x_2} = f_{3-2}(x_1 x_3).$$

Эти функции отвечают наименьшему значению критерия минимума смещения. Функции были использованы для построения критерия баланса переменных.

Во временной области наименьшее значение критерия баланса переменных при оптимальном числе учитываемых точек предыстории (равном 16) дали следующие три уравнения (взяты из трех таблиц для  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$ , подобных табл. 5):

$$x_1(t) = 6036,8 - 96,37t + 2,843t^2 - 0,003915t^3,$$

$$x_2(t) = 3206,86 - 41,8892t + 0,000523t^3,$$

$$x_3(t) = 734\,008 - 8978,04t + 201,042t^3.$$

Таблица 34. Результаты прогнозирования населения Земли (в млрд чел.) по трем переменным

Прогноз	1975	1980	1985	1990	1995	2000
	$t = 23$	$t = 28$	$t = 33$	$t = 38$	$t = 40$	$t = 48$
$a$	4,119	4,332	4,529	4,708	4,864	4,995
$b$	—	4,457	—	5,438	—	6,494
$c$	3,934	4,343	4,806	5,330	5,918	6,579

Примечание. Особенности прогнозов:  $a$  — по критерию баланса переменных;  $b$  — средний прогноз ООН;  $c$  — прогноз Д. Ихара [49].

Результаты прогнозирования по этим уравнениям приведены в табл. 34, где для сравнения представлены еще два прогноза из других источников.

Если перебор комбинаций трендов слишком велик для машин, то для уменьшения объема перебора следует исключить из таблиц часть наиболее смещенных описаний и организовать перебор комбинаций только для самых несмещенных трендов.

Особенности прогнозирования по критерию баланса переменных объясним на примере прогнозирования населения Земли, выполненного по данным, взятым до 1950 г. включительно.

Результаты прогнозирования представлены на рис. 42. Здесь показан действительный ход измерения роста населения до 1950 г. (сплошная жирная линия) и тридцать одна кривая, отвечающие уравнениям табл. 1. Оценки коэффициентов тридцати одного уравнения регрессии были получены по данным до указанного выше срока, и в результате, как видно из рисунка, все кривые весьма хорошо аппроксимируют рост населения на интервале интерполяции, т. е. до 1950 г.

На интервале экстраполяции, т. е. в области прогнозирования, кривые образуют «веер» (рис. 42), и критерий баланса переменных может выбрать наилучшие из них в зависимости от времени упреждения прогноза. Очевидными являются следующие особенности прогнозирования по критерию баланса переменных:

**Первая особенность.** В зависимости от времени упреждения прогноза  $T_y$  по критерию баланса переменных можно выбрать разные уравнения прогнозирования.

**Вторая особенность.** Начиная с некоторого времени упреждения прогнозирования  $T_y$  ни один полином не дает уже точного прогнозирования. В нашем примере это наступает приблизительно при времени упреждения  $T_{y \max} \geq 30$  лет.

Практическое совпадение всех трендов на интервале интерполяции выражает собой теорию множественности моделей. Расходящийся (при не точном нуле критерия баланса переменных) «веер» трендов на интервале экстраполяции означает, что практически всегда существует некоторое предельно допустимое время упреждения прогноза, при котором по критерию баланса еще можно

выбрать тренд, идущий достаточно близко к процессу. Применение дробно-полиномиальных опорных функций вместо полиномов часто позволяет увеличить время упреждения прогноза (63 кривых в табл. 7 вместо 31 в табл. 5).

Дополнительное варьирование оценок коэффициентов при оптимальной структуре модели с целью уменьшения смещения при помощи случайного поиска по комбинированному критерию

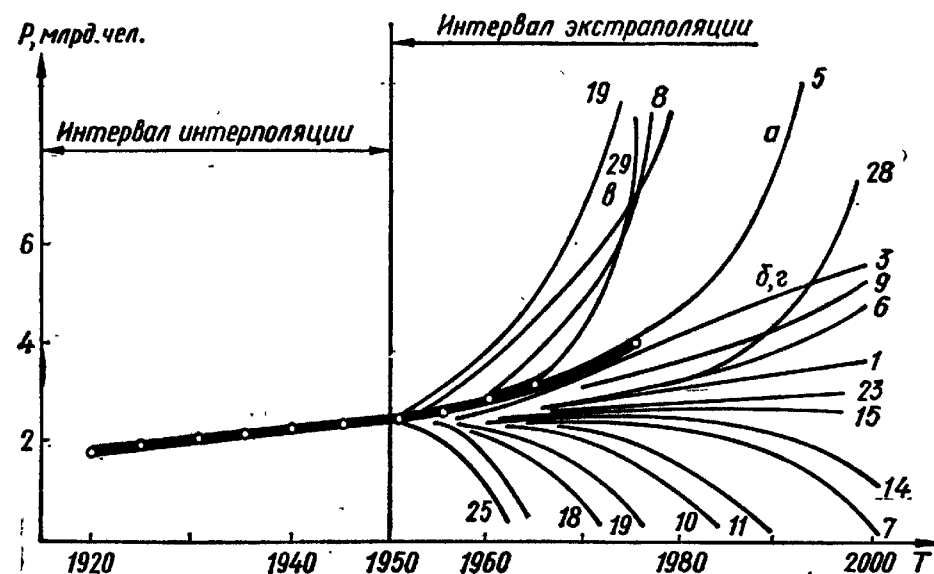


Рис. 42. Результаты прогнозирования в 1950 г.:

$a$  — на пять лет вперед;  $b$  — на десять лет вперед;  $c$  — на пятнадцать лет вперед;  $d$  — на двадцать пять лет вперед. Цифры соответствуют номерам полиномов, приведенных в табл. 5.

$\rho = [n_{\text{см}}^2 + B^2] \rightarrow \min$  часто позволяет увеличить предельно допустимое время упреждения прогноза по динамическим конечно-разностным уравнениям регрессии в несколько раз. В этом и состоит этап адаптации коэффициентов.

Другие меры повышения и преодоления предела предсказуемости будут рассмотрены нами в третьей главе.

**Сравнение прогнозов.** Важной особенностью метода самоорганизации является возможность сравнения полученных прогнозов: тот прогноз точнее и достовернее, для которого оптимальное значение невязки (разбаланс) уравнений прогнозирования (глубина минимума основного критерия селекции) меньше.

Из двух прогнозов, приведенных выше, более точным является второй прогноз, так как он получен при более глубоком минимуме критерия баланса переменных:

первый прогноз (пример 23):  $B_{\min \min} = 4,6\%$ ,

второй прогноз (пример 24):  $B_{\min \min} = 3,3\%$ .

Следовательно, прогнозам табл. 34 можем доверять больше, чем прогнозам табл. 32.

Действительный рост народонаселения Земли будет соответствовать табл. 34 до тех пор, пока будет действовать открытый по критерию несмещенности закон (уравнение для  $x_1$ ).

*Критерий баланса переменных, основанный на открытии взаимосвязи аргументов для конечно-разностных уравнений*

В ряде работ кольцо разностей прямых и обратных функций составляется для конечно-разностного уравнения, а не для алгебраических трендов.

Например, для моделей вида

$$v_0 = f(t_0) + a_1 v_{-1} + a_2 v_{-2} + a_3 v_{-3}$$

программа комбинаторного алгоритма МГУА позволяет выбрать среди самых несмещенных моделей модели с такими значениями коэффициентов  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , которые обеспечивают выполнение существующих связей  $v_{-1} = f_{1-2}(v_{-2})$ ,  $v_{-2} = f_{2-3}(v_{-3})$ ,  $v_{-3} = f_{3-4}(v_{-4})$  в сколь угодно отдаленном будущем. Это дает возможность выбора формулы для эффективного долгосрочного прогнозирования. Среди трех аргументов могут находиться и усредненные величины (суммы). Для выбора трех наиболее существенных аргументов используется критерий существенности Стьюдента (см. пример 10).

В задаче самоорганизации конечно-разностных моделей для прогнозирования погоды баланс прогнозов соединяет прогноз метеорологических параметров в данной точке Земного шара с прогнозом тех же параметров, усредненных по большой площади: на территории страны или континента, средние температуры и т. д. Усредненные по площади параметры хорошо прогнозируются. Например, известно, что давление атмосферы, усредненное для всего Земного шара, есть постоянная величина. Таким образом, сумма прогнозов давления для всех точек Земли должна быть постоянной, что можно использовать для создания «точки опоры в будущем» (к этому вопросу мы вернемся подробнее в следующей главе).

**Использование критерия баланса прогнозов для прогнозирования циклических процессов.** Одно из возможных определений терминов «колебательный процесс» и «циклический процесс» было дано нами в начале данной главы; ниже будет показано формирование критерия баланса прогнозов для прогнозирования циклических процессов.

*Принципы ближнего и дальнего действия и структура шаблонов*

Уравнения математической физики (например, уравнения процесса теплопроводности или диффузии) чаще всего являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Они составляются на основе принципа неразрывности и сохранения массы, который также именуется «принципом ближнего действия». Такой термин объясняется тем, что элементарный шаблон разностного аналога уравнений представляет собой односвязную фигуру,

состоящую из соседствующих друг с другом клеток равномерной дискретной сетки. Уравнение выражает влияние значений переменных во всех достаточно близких клетках на выходную величину в одной из них, которой далее приписывается нулевой индекс (000).

Однако на выходную величину могут оказывать существенное влияние и значения переменных или их функций в удаленных клетках. Также можно учитывать влияние сумм значений переменных в ряде удаленных клеток. При этом получим шаблоны в виде многосвязных фигур, реализующие либо принцип дальнего действия (когда среди аргументов учитываются только значения переменных и сумм в удаленных от нулевой клетках), либо комбинированный принцип ближнего и дальнего действия (когда учитываются значения в близких и дальних клетках одновременно).

Указанные принципы относятся как к составлению непрерывных уравнений, так и их разностных аналогов.

По принципу дальнего действия работают модели, реализующие матрицу вход — выход [31, 85, 108, 109]. В качестве аргументов в них используются значения возмущающих воздействий либо значения переменных в удаленных клетках.

По комбинированному принципу действуют рассматриваемые ниже модели, использующие суммирующие шаблоны — аналоги интегральных членов уравнений моделируемого объекта.

#### Интегро-дифференциальные уравнения и суммирующие шаблоны

Многие процессы в природе описываются интегро-дифференциальными уравнениями. Например, к таким процессам относятся все так называемые немарковские процессы с последствием. Конечно-разностные аналоги интегро-дифференциальных уравнений содержат в себе суммы с текущим усреднением, называемые иногда «суммирующими шаблонами». Например, уравнение вида

$$a_0 \int_{-t_1}^0 v dt + a_1 \frac{dv}{dt} + a_2 v = 0$$

имеет конечно-разностный аналог, в котором участвует суммирующий шаблон — аналог определенного интеграла:

$$a_0 \frac{1}{k+1} (v_{-k} + \dots + v_{-1} + v_0) + a_1 (v_0 - v_{-1}) + a_2 v_0 = 0.$$

Суммирующий шаблон представляет собой линейку данных (рис. 43), содержащую  $k$  клеток (где  $k$  — интервал интегрирования или усреднения). Обучение шаблона (при обычном, одномерном отсчете времени  $t$ ) выполняется при помощи составления и решения системы нормальных уравнений Гаусса, получаемых при перемещении шаблона по горизонтали (вдоль оси  $t$ ). Каждому положению шаблона по цифровой оси  $t$  отвечает одно условное уравнение.

Использование суммирующих шаблонов для самоорганизации

прогнозирующих моделей означает переход от принципа ближнего действия к комбинированным моделям, так как общий шаблон конечно-разностного уравнения получается двухсвязным. Другими словами, при самоорганизации моделей используется два шаблона: один — для прогноза выходной величины, другой — для прогноза сумм.

Кроме того, применение суммирующих шаблонов можно рассматривать как способ сокращения числа аргументов (предикторов) в модели, потому что сумма выражается одним числом, в какой-то мере представляющем все его слагаемые. Кроме того, суммирующие шаблоны повышают сходимость процесса пошагового интегрирования к интегральной кривой соответствующего дифференциального аналога (по сравнению с учетом всех слагаемых шаблона как отдельных аргументов).

Прогнозирующие модели с одним шаблоном, составленным по принципу ближнего действия, пригодны только для краткосрочных прогнозов. «Разбегание траекторий» (рис. 42) принципиально неустранимо. Известны работы, показывающие, например, что прогноз погоды на срок более пятнадцати

суток вперед по уравнениям гидродинамического типа (т. е. составленным по принципу ближнего действия) принципиально невозможен [7, 104].

На языке математики такие уравнения образуют  $k$ -системы с положительной энтропией решений, которая не может быть ни постоянной, ни тем более убывать. Аналогично принципу термодинамики энтропия прогнозов непрерывно возрастает, что всегда ведет к пределу их предсказуемости.

Долгосрочный прогноз и дальняя экстраполяция требуют перехода к уравнениям, составленным по принципу дальнего действия и комбинированным моделям. В частности, к таким моделям приводит применение при селекции прогнозов критерия баланса переменных. Критерий баланса позволяет указать точку в отдаленном будущем, через которую должна пройти интегральная кривая пошагового прогноза (точку опоры в будущем), и таким образом, выбрать оптимальную прогнозирующую модель. Так можно преодолеть предел упреждения, свойственный прогнозам, полученным по принципу ближнего действия.

Критерий баланса переменных реализуется различными способами. Наиболее просто найти определенное соотношение (закон

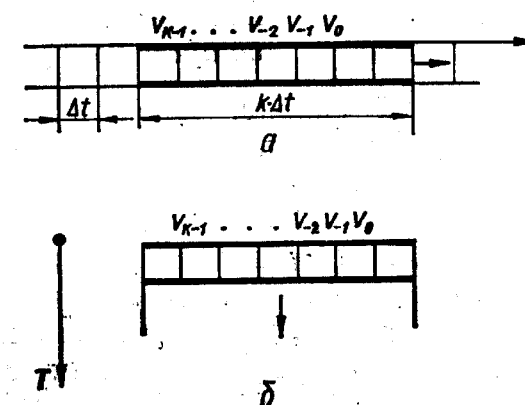


Рис. 43. Суммирующий шаблон — аналог конечного интеграла  $\int v dt$ ; Стрелка указывает движение шаблона:

а — при обучении вдоль оси  $t$ ; б — при обучении вдоль оси  $T$ .

физической связи) нескольких переменных, прогнозируемых одновременно, и потребовать, чтобы этот закон выполнялся всегда в том числе и в отдаленном будущем. На этом основан долгосрочный прогноз с использованием кольца разностей прямых и обратных функций. Кольцо можно применить как для алгебраических, так и для конечно-разностных моделей.

Ниже разрабатывается другая форма критерия, получившая название «критерий баланса прогнозов».

#### Балансы прогнозов при усреднении во времени

**Месячный баланс.** Идея критерия баланса прогнозов состоит в том, что два или большее число прогнозов выполняются одновременно. Прогнозы отличаются по интервалу усреднения переменных. Критерий требует, чтобы прогнозы для заданного времени упреждения (один месяц) как можно ближе совпадали.

**Годовой баланс.** По критерию минимума смещения из общего числа моделей, участвующих в переборе  $F_0$ , выбирается  $F_1$  лучших моделей ( $F_1 \leq F_0$ ). Затем по месячному критерию баланса выбирается  $F_2$  моделей ( $F_2 \leq F_1 \leq F_0$ ). Наконец, по годовому балансу из  $F_2$  моделей выбирается одна модель оптимальной сложности. Годовой критерий баланса требует, чтобы сумма прогнозов на 12 месяцев (или 4 квартала) \* года как можно меньше отличалась от прогноза среднегодовых значений. Последовательность применения критериев можно условно записать так:  $F_0 \rightarrow F_1 (n_{см}) \rightarrow F_2 (B_{мес}) \rightarrow 1 (B_{год})$ . Если нет отдельного достоверного прогноза среднегодовых значений, то следует выбрать  $F_{2i} = 1$  и критерий годового баланса не применять.

#### Баланс прогнозов с усреднением по пространству

Для получения усредненных величин можно использовать не только усреднение во времени, но и суммирование по пространственным координатам. Например, прогноз давления атмосферы в определенном пункте Земли можно корректировать по прогнозу средней величины давления, прогнозируемой для нескольких пунктов. Таким образом, прогнозы для Киева, Москвы и Ленинграда можно корректировать по прогнозу суммы давлений для этих трех городов.

При увеличении числа пунктов получим, что сумма всех прогнозов во всех точках Земного шара должна быть равна постоянной, определяемой весом атмосферы (использование мировых констант для критерия баланса прогнозов).

Возможно построение критериев баланса прогнозов с одновременным усреднением по времени и пространству.

\* Далее возможность замены месяца кварталом или сезоном подразумевается, но не пишется.

#### Модели с одномерным и двумерным отсчетом времени

Сравним между собой следующие две модели.

1. *Модель по принципу ближнего действия с одномерным отсчетом времени.* Допустим, что нам задана таблица опытных данных, где указана выходная величина  $v_0$  и ее предыдущие значения  $v_{-1}, v_{-2}, \dots$ . Тогда

$$v_0^* = f_1(t) + f_2(v_{-1}, v_{-2}, v_{-3}, \dots).$$

Опытные данные представляются в виде линейки, причем время отсчитывается по шагам, равным  $\Delta t$  (рис. 44),  $f_1$  — функция ис-

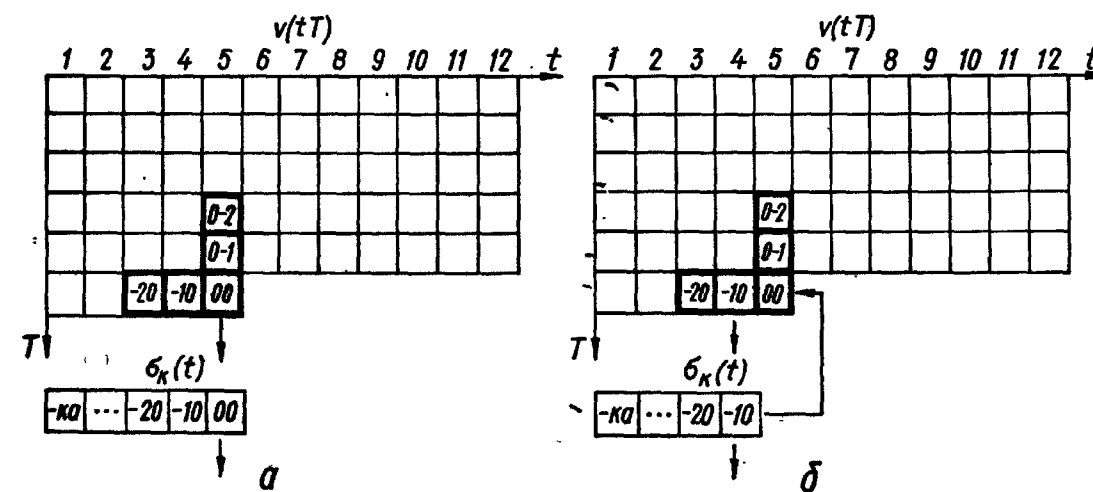


Рис. 44. Схема сбора информации при двумерном отсчете времени: для модели, использующей прогнозы сумм  $\sigma_k(t)$  (а) и  $\tau_k(t)$  (б) в качестве аргументов основной прогнозирующей модели.

точника, выделяемая по МГУА предварительно (временной тренд), т. е. по уравнению  $v_0 = f_1(t)$ .

2. *Месячная модель по принципу ближнего действия с двумерным отсчетом времени.* Если прогнозируются процессы, имеющие явно выраженную цикличность (сезонность), то полезно применить двумерный отсчет времени. Например, пусть  $t$  — время, измеряемое в месяцах, а  $T$  — время, измеряемое в годах. Тогда опытные данные удобно представить в виде прямоугольной таблицы (рис. 45). Модель включает в качестве аргументов значения переменных за предыдущие месяцы и предыдущие годы:

$$v_{00}^* = f_1(t_{00}T_{00}) + f_2(v_{-10}v_{-20} \dots v_{0-1}v_{0-2} \dots).$$

Здесь  $f_1$  — двумерная функция источника, определяемая предварительно по МГУА (двумерный временной тренд) по уравнению  $v_{00} = f_1(t_{00}T_{00})$ .

Обычно самоорганизация модели выполняется по комбинаторному алгоритму МГУА с критерием минимума смещения.

Как указывалось, при обычном одномерном отсчете времени обучение шаблона выполняется при помощи перемещения его по

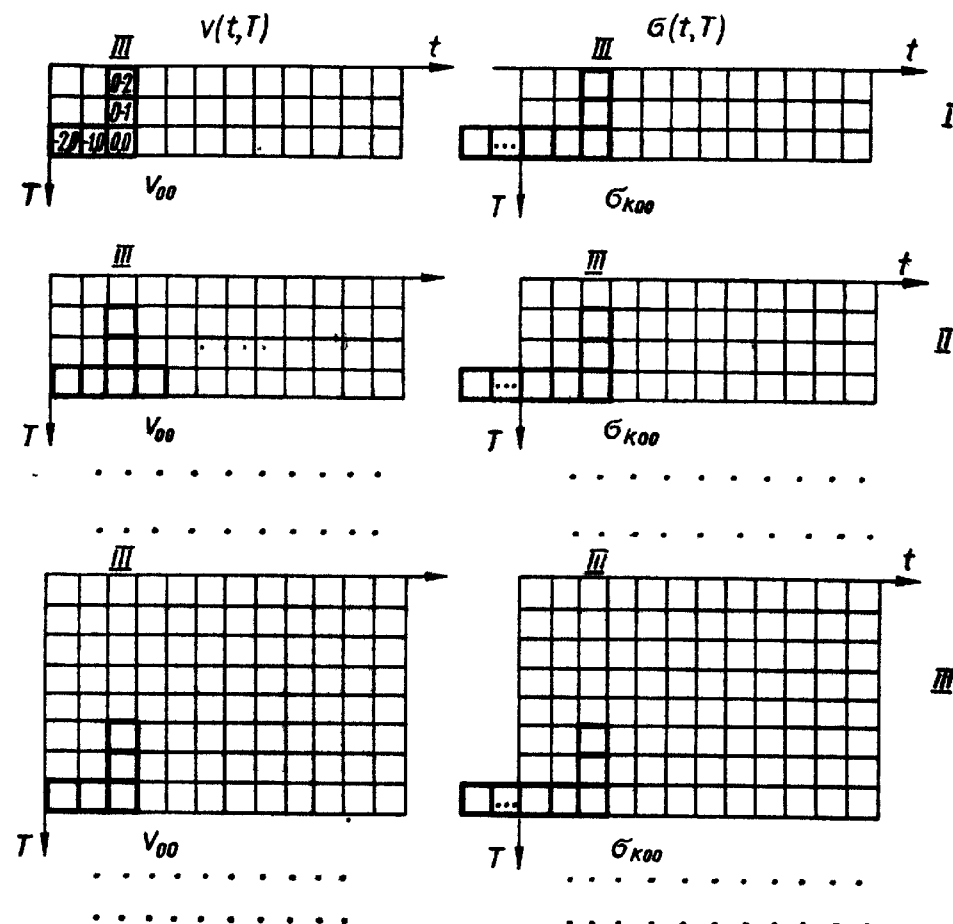


Рис. 45. Обучение мартовской модели: схема перемещения шаблонов  $V(t, T)$  и  $\sigma(t, T)$  по цифровому полю вдоль оси  $T$  при составлении таблиц опытных данных.

горизонтали, вдоль оси  $t$ . В отличие от этого при двумерном отсчете обучение получается при помощи перемещения шаблона по вертикали, вдоль оси  $T$  (рис. 45). Каждому положению шаблона соответствует одна точка таблицы исходных данных.

Получаемые при этом модели действительны только для данного месяца. Для долгосрочного прогноза при пошаговом интегри-

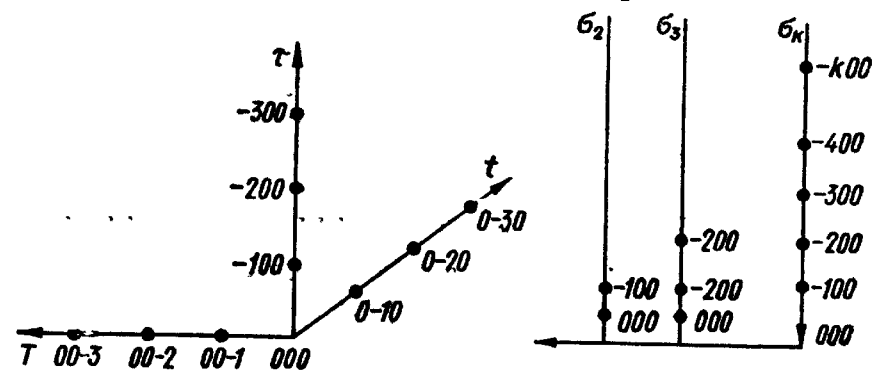


Рис. 46. Изображение шаблона при трехмерном отсчете времени:

$t$  — в месяцах;  $T$  — годах;  $\tau$  — в единицах, равных 11,2 г (период солнечной активности).

ровании осуществляется переход от одной месячной модели к модели последующего месяца. Таким образом, целью алгоритма самоорганизации является идентификация оптимального комплекта двенадцати месячных моделей.

Идея трехмерного отсчета времени при моделировании сложных циклических процессов (например, активности Солнца) поясняется на рис. 46.

*Два способа выбора оптимальной длины скользящего интервала усреднения выходной величины*

В алгоритмах самоорганизации годового комплекта месячных прогнозирующих моделей используется одна или несколько из следующих сумм: \*

$$\begin{aligned}\sigma_{1(00)} &= v_{00}, \\ \sigma_{2(00)} &= \frac{1}{2} (v_{00} + v_{-10}), \\ \sigma_{3(00)} &= \frac{1}{3} (v_{00} + v_{-10} + v_{-20}), \\ \sigma_{k(00)} &= \frac{1}{k} (v_{00} + v_{-10} + v_{-20} + \dots + v_{-(k-1)0}), \\ \sigma_{12(00)} &= \frac{1}{12} (v_{00} + v_{-10} + v_{-20} + \dots + v_{-11,0}).\end{aligned}$$

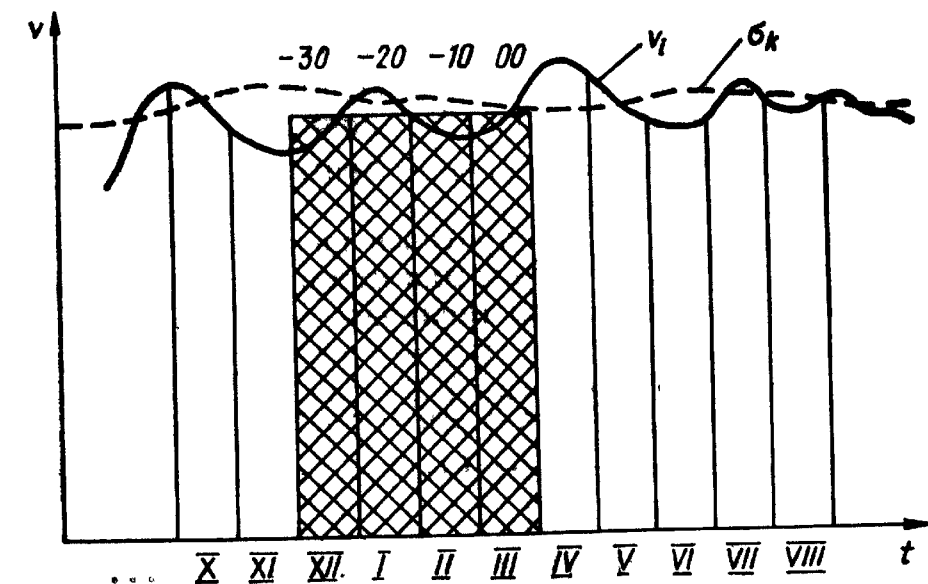


Рис. 47. Использование скользящего интервала усреднения при построении мартовской модели.

\* Возможно применение суммирования с использованием коэффициентов веса, например с экспоненциальным затуханием ординат:  $\sigma_{k(00)} =$

$$= v_{-10} + e^{\frac{-\Delta t}{\tau}} v_{-20} + e^{\frac{-2\Delta t}{\tau}} v_{-30} + \dots + e^{\frac{-k\Delta t}{\tau}} v_{-k0}.$$



Если используется одна сумма, то рационально выбрать именно ту, которая обеспечивает наиболее глубокий минимум основного критерия селекции моделей. Обозначим ее  $\sigma_{k(00)}$ . Интервал суммирования  $k$  является оптимальным. Значения  $k$  можно найти при помощи перебора  $k = 2, 3, 4, \dots, 12$ . На рис. 47 показан пример  $k = 4$  месяца. Интервал является скользящим, так как отрезок суммирования с каждым месяцем перемещается вдоль оси  $t$  на один шаг вперед. Если мы не стеснены на ЭВМ по объему вычислений, то можно оставить в полном полиноме не одну, а несколько или даже все одиннадцать сумм, предоставив комбинированному алгоритму МГУА выбрать те из них, которые благоприятствуют достижению более глубокого минимума.

В процессе перебора в модели остаются только наиболее существенные из сумм. Чаще других машина выбирает две суммы, отвечающие сезону ( $k = 3$ ) и году ( $k = 12$ ).

*Алгоритм самоорганизации годового набора комбинированных месячных моделей, в котором лучшими считаются модели, обеспечивающие наибольшее совпадение двух прогнозов на один месяц вперед*

При двумерном отсчете времени в каждой клетке сетки на плоскости  $t - T$  (цифрового поля) могут быть указаны не только выходная величина  $v$  и величина лучшей суммы  $\sigma_k$  (скользящего среднего), но и их прогнозируемые значения  $*$ . Так, для текущей клетки, имеющей индекс 00, можно принять:

$v_{00}$  — действительное значение выходной величины;  $v_{00}^*$  — прогнозируемое значение выходной величины;  $\sigma_{k(00)}$  — действительное значение  $k$ -й суммы;  $\sigma_{k(00)}^*$  — прогнозируемое значение  $k$ -й суммы.

Величины  $v_{00}$  и  $\sigma_{k(00)}$  при прогнозе не известны, остальные могут быть определены по таблице или при помощи прогноза. Месячные прогнозирующие модели (полное описание):

для выходной величины

$$v_{00}^* = \sigma_{1(00)}^* = f_1(t_{00}T_{00}) + f_2(\sigma_{k(00)}^* \sigma_{k(-10)} \sigma_{k(-20)} \dots \sigma_{k(0-1)} \sigma_{k(0-2)} \dots \dots v_{-10} v_{-20} \dots v_{0-1} v_{0-2} \dots);$$

для величины  $\sigma_k$

$$\sigma_{k(00)}^* = f_3(t_{00}T_{00}) + f_4(v_{00}^* v_{-10} v_{-20} \dots v_{0-1} v_{0-2} \dots \dots \sigma_{k(-10)} \sigma_{k(-20)} \dots \sigma_{k(0-1)} \sigma_{k(0-2)}),$$

\* Прогнозируемые значения можно получить начиная с  $N_1$ -го года (где  $N_1 = 2 + n + 1$ ,  $n$  — число членов полного полинома модели). После получения прогнозирующей модели можно указать прогнозируемые значения  $v^*$  и  $\sigma_k^*$  для всех клеток, кроме двух первых:  $B \leq i \leq N$ .

где  $f_1, f_2, f_3$  и  $f_4$  — степенные полиномы. В полных описаниях могут присутствовать и вспомогательные переменные, для краткости записи они не показаны.

Оптимальная структура месячных моделей находится по комбинаторному алгоритму МГУА с последовательным применением критерия минимума смещения и критериев месячного и годового балансов прогнозов. Последовательность применения критериев:  $F_0 \rightarrow F_1(n_{cm}) \rightarrow (B_{мес}) F_2 \rightarrow 1(B_{год})$ . При малом числе точек опытных данных вместо критерия минимума смещения рекомендуется применить критерий сходимости пошагового прогноза. Обучение шаблонов реализуется при помощи перемещения их по вертикали вдоль оси  $T$  (рис. 44).

Баланс прогнозов на каждом  $S$ -м году выражается уравнением

$$[\sigma_{k(00)}^*]_s = \left[ \frac{v_{00}^* + v_{-10} + v_{-20} + \dots + v_{-k0}}{k+1} + b \right]_s, \quad s = 3, 4, \dots, N.$$

Критерий месячного баланса прогнозов ( $N$  — число лет наблюдения процесса)

$$B_{мес} = \sum_{s=3}^N b_s^2 = \sum_{s=3}^N \left[ \sigma_{k(00)}^* - \frac{v_{00}^* + v_{-10} + v_{-20} + \dots + v_{-k0}}{k+1} \right]_s^2 \rightarrow \min.$$

Легко заметить, что для прогноза  $v_{00}^*$  нужно знать  $\sigma_{k(00)}$ , для прогноза  $\sigma_{k(00)}^* - v_{00}^*$ . Выход состоит в применении рекурсивной процедуры. Сначала следует задать первое значение  $v_{00}^*$ , например  $v_{00}^* = 0$ . Далее найти  $\sigma_{k(00)}^*$  и второе значение  $v_{00}^*$  и т. д., пока значение критерия  $B_{мес}$  падает. При очень малых значениях невязки  $b_i$  в моделях приходится исключить из состава аргументов  $\sigma_{k(00)}^*$  и  $v_{00}^*$ , так как в противном случае модели превращаются в тождество  $v_{00} = v_0$ . При этом рекурсивную процедуру построить уже нельзя, хотя первый цикл моделирования возможен.

Ниже опишем только первую операцию (цикл) рекурсивной процедуры.

*Возможное упрощение:  
алгоритм самоорганизации,  
реализующий только первый цикл рекурсивной  
процедуры основного алгоритма*

Упрощение алгоритма достигается при помощи априорного исключения тех или иных аргументов. При этом прогноз может стать только менее точным. Рассмотрим такое упрощение.

Месячные прогнозирующие модели имеют вид для  $v$

$$v_{00}^* = \sigma_{1(00)}^* = f_1(t_{00}T_{00}) + f_2(\sigma_{k(00)}^* \sigma_{k(-10)} \sigma_{k(-20)} \dots \sigma_{k(0-1)} \sigma_{k(0-2)} \dots \dots v_{-10} v_{-20} \dots v_{0-1} v_{0-2} \dots),$$

для  $\sigma_k$

$$\sigma_{k(00)}^* = f_3(t_{00}T_{00}) + f_4 \left( \frac{v_{-10} v_{-20} \dots v_{0-1} v_{0-2} \dots}{\sigma_{k(-10)} \sigma_{k(-20)} \dots \sigma_{k(0-1)} \sigma_{k(0-2)} \dots} \right).$$



Критерий месячного баланса остается без изменения:

$$B_{\text{мес}}^2 = \sum_{s=3}^N b_s^2 \rightarrow \min.$$

Последовательное применение критериев производится по схеме

$$F_0 \rightarrow F_1 (n_{\text{см}}) \rightarrow F_2 (B_{\text{мес}}^2) \rightarrow 1 (B_{\text{год}}^2),$$

т. е. так, как и в рассмотренном выше основном алгоритме.

*Алгоритм самоорганизации годового набора комбинированных месячных моделей, в котором лучшими считаются месячные модели, обеспечивающие наибольшую точность пошагового прогноза на несколько месяцев вперед*

Описываемый алгоритм отличается от рассмотренного в работе [33] по следующим трем особенностям.

1. Модели являются комбинированными, так как их шаблоны — двухсвязные (рис. 44, б). Используется расширенное множество аргументов. Модель имеет следующий вид полного описания:

$$v_{00}^* = f_1(t_{00}T_{00}) + f_2(v_{-10}v_{-20} \dots v_{0-1}v_{0-2} \dots \sigma_{2(-10)}\sigma_{2(-20)} \dots \sigma_{2(0-1)}\sigma_{2(0-2)} \dots \sigma_{3(-10)}\sigma_{3(-20)} \dots \sigma_{3(0-1)}\sigma_{3(0-2)} \dots \dots \sigma_{12(-10)}\sigma_{12(-20)} \dots \sigma_{12(0-1)}\sigma_{12(0-2)} \dots).$$

Суммы, участвующие во множестве аргументов, не включают своих прогнозируемых значений. Они вычисляются по табличным данным для каждого положения шаблонов.

2. В качестве первого промежуточного критерия селекции вместо критерия минимума смещения используется точность пошагового прогноза на  $\lambda$  месяцев вперед. Такой критерий обычно называется критерием сходимости или точности пошагового прогноза

$$i^2(\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^{\lambda} (v_k^* - v_{k\min})^2}{\sum_{k=1}^{\lambda} v_{k\min}^2}; I^2(\lambda) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N [i^2(\lambda)]_s \rightarrow \min.$$

Замена критериев целесообразна, например, в случае малого числа точек опытных данных. Для определения значения критерия  $I^2(\lambda)$  используется вся таблица опытных данных без деления ее на части.

3. При определении промежуточного критерия сходимости используется процедура, аналогичная применяемой в теории оптимального управления с оптимизацией прогноза на скользящем интервале упреждения [24].

Модель для каждого данного месяца является наилучшей, если пошаговый прогноз при ее участии на  $\lambda$  месяцев вперед оказывается наиболее точным при условии самого благоприятного подбора остальных моделей.

Напомним, что аналогично этому в теории самоорганизации многошагового управления с оптимизацией прогноза находится оптимальная последовательность управлений для всего скользящего интервала прогноза, а на управление реально поступает только первый ее шаг. Чтобы выработать второй шаг, вся последовательность выбирается снова, исходя из новых начальных условий и т. д. [24].

В данном применении указанной теории время упреждения контрольных прогнозов  $\lambda$  выбирается при помощи перебора ряда значений:  $\lambda = 1, 2, 3 \dots 12$  месяцев так, чтобы получить наиболее глубокий минимум критерия сходимости  $I(\lambda) \rightarrow \min$ .

*Самоорганизация мартовской модели при  $\lambda = 3$  месяца.* Для конкретности описания алгоритма примем величину  $\lambda$  равной трем месяцам ( $\lambda = 3$ ). Тогда для выбора, например, мартовских моделей нужно получить по комбинаторному алгоритму МГУА всевозможные модели для марта, апреля и мая \*. Особенность состоит в том, что пошаговый прогноз выполняется при помощи набора из трех моделей, используемых последовательно одна за другой.

Для получения таблицы опытных данных шаблоны моделей перемещаются по цифровому полю  $t-T$  так, как показано на рис. 42, где приведен пример самоорганизации модели для марта месяца.

Как указывалось, преимуществом критерия сходимости является малый алгебраический минимум точек: если в полном полиноме содержится  $n$  слагаемых, то минимум точек равен  $n + \tau$  (где обычно  $\tau = 2$ ) (рис. 43).

Средняя квадратическая ошибка за три месяца для  $s$ -го года вычисляется по формуле

$$[i^2(3)]_s = [(v_{III}^* - v_{III \text{ табл}})^2 + (v_{IV}^* - v_{IV \text{ табл}})^2 + (v_V^* - v_{V \text{ табл}})^2]_s = \left[ \frac{\sum_{III}^V (v_i^* - v_{i \text{ табл}})^2}{\sum_{III}^V v_{i \text{ табл}}^2} \right]_s.$$

\* Выбор интервала прогноза  $\lambda$  не является принципиальным; можно ограничиться простым назначением его величины, например  $\lambda = 3$  мес.

Критерий сходимости пошагового прогноза имеет вид

$$I^2(3) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^N [i^2(3)]_s \rightarrow \min,$$

где  $N$  — число лет наблюдения процесса.

Критерий требует, чтобы средняя ошибка при пошаговом интегрировании при помощи указанных трех месячных моделей за  $N$  лет была минимальной. Минимум критерия определяет оптимальную мартовскую модель.

По критерию  $I^2(3) \rightarrow \min$  следует отобрать не одну, а несколько мартовских моделей (практически  $F_1$  не больше двух-трех моделей).

Аналогичная процедура повторяется последовательно для самоорганизации всех двенадцати месяцев года. Обратим внимание на то, что пошаговое интегрирование всегда начинается, исходя из табличных данных для данного месяца. Далее по критерию годового баланса выбирается одна модель для каждого месяца так, чтобы система из двенадцати моделей обеспечила наиболее точный годовой прогноз:

$$B_{\text{год}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[ \bar{v}_{\text{год}}^* - \frac{1}{n} (v_I^* + v_{II}^* + v_{III}^* + \dots + v_{XII}^*) \right]^2 \rightarrow \min.$$

При этом интегрирование выполняется из табличных начальных условий, соответствующих январю первого учитываемого в  $B_{\text{год}}$  года. Последовательность применения критериев можно записать так:

$$F_0 \rightarrow F_1 [I^2(\lambda)] \rightarrow 1(B_{\text{год}}).$$

Прогноз среднегодового значения  $\bar{v}_{\text{год}}^*$  требуется знать только на этапе прогнозирования. Этот прогноз получается по гармоническим алгоритмам МГУА, описанным в начале данной главы.

**Видоизменения месячного критерия.** Данные для  $\lambda$  месяцев, получаемые по таблице и при помощи пошагового прогноза, можно усреднить

$$\bar{v}_{\text{табл}} = \frac{1}{3} (v_{III} + v_{IV} + v_V)_{\text{табл}}; \quad \bar{v}^* = \frac{1}{3} (v_{III}^* + v_{IV}^* + v_V^*).$$

Если точность месячной модели оценивать по средним значениям, то получим критерий

$$B_{(\text{мес.ск})} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\bar{v}_{\text{табл}} - \bar{v}^*)^2.$$

Этот критерий можно назвать месячным критерием баланса на скользящем интервале  $\lambda$ , так как он похож по структуре на годовой критерий баланса. Отличие состоит в том, что для критерия  $B_{\text{мес.ск}}$  не требуется прогноз среднегодовых значений по отдельному алгоритму ни на этапе обучения модели, ни на этапе прогноза.

Все входящие в него величины рассчитываются по таблице опытных данных.

Критерий  $B_{\text{мес.ск}}$  можно применять вместо критерия сходимости пошагового прогноза. При этом получим следующую последовательность применения критериев:

$$F_0 \rightarrow F_4 (B_{\text{мес.ск}}) \rightarrow 1(B_{\text{год}}).$$

Способ экспериментального определения оптимального значения свободы выбора  $F_1$ . Условимся называть оптимальным такое значение свободы выбора  $F_1$ , при котором в результате последо-

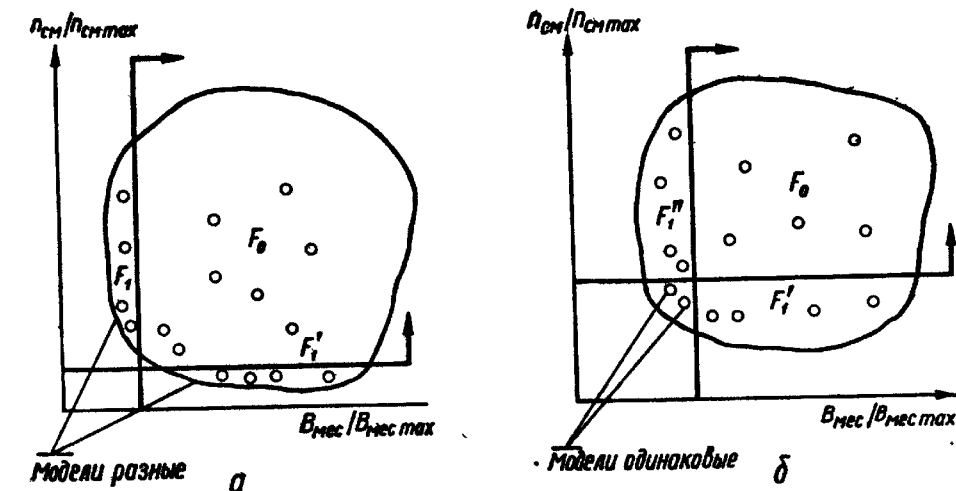


Рис. 48. Выбор оптимального значения «свободы—выбора»  $F_1$

при последовательном применении двух критериев  $\frac{n_{\text{см}}}{n_{\text{см max}}}$

и  $\frac{B_{\text{мес}}}{B_{\text{мес max}}}$ :

$a$  — недостаточная свобода;  $b$  — оптимум.

вательного применения двух критериев будет найдена модель, характеристическая точка которой на плоскости нормированных критериев лежит как можно ближе к началу координат  $\rho \rightarrow \min$ .

Для нахождения оптимального значения  $v$  следует поочередно изменять последовательность критериев:

$$F_0 \rightarrow F_1 \left( \frac{n_{\text{см}}}{n_{\text{см max}}} \right) \rightarrow 1 \left( \frac{B_{\text{мес}}}{B_{\text{мес max}}} \right),$$

$$F_0 \rightarrow F_1 \left( \frac{B_{\text{мес}}}{B_{\text{мес max}}} \right) \rightarrow 1 \left( \frac{n_{\text{см}}}{n_{\text{см max}}} \right),$$

постепенно повышая при этом  $F_1$  до тех пор, пока при обеих последовательностях не будет найдена одна и та же оптимальная модель. Если в дальнейшем предполагается использовать еще третий критерий, то следует получить  $F_2 = 2$  модели (рис. 48). Тот

Таблица 35. Сравнение точности прогнозов температуры воздуха Ленинграда при различных последовательностях применения критериев, составе аргументов и величинах отбора

Множество аргументов (предикторов) полного линейного полинома	Место применения критерия и величина отбора					Результат (квадратическая ошибка), %
	$n_{см}$	$B_{мес}$	$I_{мес}$	$B_{мес. ск}$	$B_{год}$	
$v_{-10}, \bar{v}_{год}; F_0 = 3$	$F_1 = 2$	—	—	—	$F_2 = 1$	25
$v_{-10}, v_{-20}, v_{0-1}, \sigma_{0-2}, \sigma_3(0-1), \sigma_6, \sigma_{12}; F_0 = 63$	$F_1 = 2$	—	—	—	$F_2 = 1$	24
..... $F_0 = 63$	$F_1 = 10$	—	—	$F_2 = 2$	$F_3 = 1$	18
..... $F_0 = 63$	$F_1 = 10$	—	$F_2 = 2$	—	$F_3 = 1$	22
..... $F_0 = 63$	—	$F_1 = 2$	—	—	$F_2 = 1$	22

же результат можно найти сразу по комбинированному критерию

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{n_{см}}{n_{см \max}}\right)^2 + \left(\frac{B_{мес}}{B_{мес \max}}\right)^2} \rightarrow \min.$$

Количество моделей  $F_2$ , подаваемых на перебор по третьему критерию, следует выбрать исходя из производительности ЭВМ. Для БЭСМ-6 проходит не более трех моделей (число комбинаций (наборов) месячных моделей  $3^{12}$ ).

Пример 25. Долгосрочное прогнозирование среднемесячных значений температуры воздуха Ленинграда. Различные последовательности применения критериев, описанных выше, были испробованы для решения задачи прогнозирования температуры воздуха Ленинграда.

Исходные данные содержали значения среднемесячной температуры за 100 лет (с 1867 по 1965 г.). Точности прогноза проверялись на независимом материале за 10 лет (с 1966 по 1976 г.). Последовательности критериев, объемы отборов моделей и полученные результаты представлены в табл. 35. Наибольшую точность дала последовательность

$$F_0 \rightarrow F_1(n_{см}) \rightarrow F_2(B_{мес}) \rightarrow 1(B_{год})$$

при  $F_0 = 63, F_1 = 10, F_2 = 2$  модели.

На рис. 49 показаны график действительного изменения температуры и график прогноза. Ошибка прогноза равна 17%, в то время как ошибка климатического среднемесячного прогноза составляет величину \* около

$$\Delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{12} (t_n - t_{\phi})^2}{\sum_{i=1}^{12} t_{\phi}^2} \cdot 100 = 30\%.$$

\* Климатический прогноз равен средней температуре данного месяца за длительное время. Такой прогноз является хорошим ориентиром для проверки точности различных алгоритмов прогноза, поэтому он широко известен в метеорологии и используется в качестве тренда.

Далее было экспериментально (т. е. на примерах) установлено, что решения разностных уравнений при двумерном отсчете времени (месяц — год, сезон — год или год — период основной гармоники и т. д.) через 8—10 интервалов большого усреднения (лет) жестко сходятся к климатическому (среднему за длительное время) прогнозу. В течение указанного срока упреждения прогноза достигается существенное (в два раза) повышение точности.

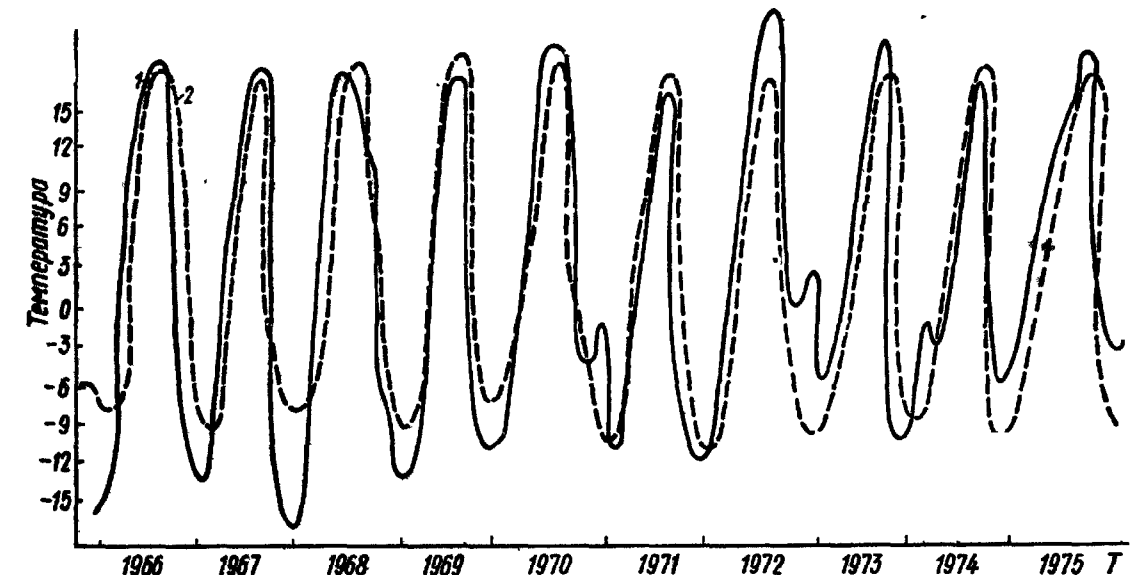


Рис. 49. Сравнение прогноза и действительных значений температуры Ленинграда за 1966—1975 гг.:

1 — действительные значения; 2 — прогноз.

Эти факты должны заинтересовать математиков, которые двумерным отсчетом времени еще не занимались, хотя вопрос о пределах предсказуемости очень интересует всех [7, 104].

Возможности повышения точности прогноза не исчерпаны, так как проверены не все возможные последовательности критериев, а величины отборов не оптимизированы. Нелинейные полиномы еще не опробованы. Следует попробовать расширить состав множества аргументов. Хуже других месяцев прогнозируется температура в ноябре месяце каждого года, причем одинаково плохо для всех лет прогноза.

Изложенный выше пример относится к случаю, когда в качестве функции источника была взята постоянная величина — многолетнее среднегодовое значение температуры, т. е.  $f_1(t_{00}T_{00}) = T_{ср}$ . Точность прогнозов увеличивается, если эта функция будет взята как изменение среднемесячной температуры, т. е. климатический месячный прогноз  $f_1(t_{00}T_{00}) = t_{ср}$ .

Для вычисления критерия годового баланса  $B_{год}$  нужно располагать достаточно точным прогнозом среднегодового значения выходной переменной текущего года. Такой прогноз можно получить для циклических процессов по МГУА при использовании в качестве опорной функции гармонического ряда с некратными частотами гармоник. Гармонический алгоритм описан выше.

## Прогноз среднемесячных значений стока рек

Гармонические тренды с некротными частотами можно эффективно использовать в соединении с полиномиальными моделями. Изучение данных стока рек показало, что расход воды за каждый месяц достаточно определяется при помощи уравнений регрессии вида

$$Q_i = f_i(Q_{\text{год}}, Q_{i-1}), \\ i = 1, 2, 3, \dots, 12,$$

где  $Q_i$  — среднемесячный расход воды за данный месяц;  $Q_{\text{год}}$  — значение (или прогноз) среднегодового стока, определяемого по тренду;  $Q_{i-1}$  — средний расход за предыдущий месяц.

Свойства стока рек таковы, что уравнение регрессии вида

$$Q_i = f_i(Q_{\text{год}})$$

дает достаточную точность только для апреля месяца, т. е. в период паводка. Для всех остальных месяцев достаточная точность регрессии получается только при указании водности года (маловодный, средний, многоводный) или, что лучше, при

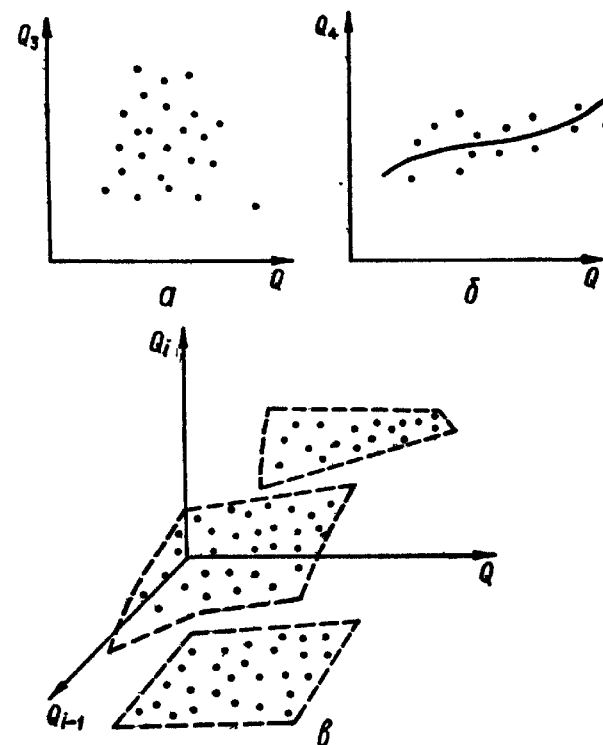


Рис. 50. Пояснение уменьшения дисперсии точек при переходе от уравнения регрессии  $Q = f(Q_{\text{год}})$  к уравнению  $Q_i = f(Q_{\text{год}}, Q_{i-1})$ .

переходе к указанной выше формуле, содержащей два аргумента  $Q_{\text{год}}$  и  $Q_{i-1}$  (рис. 50, а, б, в).

Уравнение регрессии с одним аргументом  $Q_i = f(Q_{\text{год}})$  для реки Днепр имеет слишком большую дисперсию. Облако точек, изображенное в качестве примера на рис. 50, а, нельзя достаточно точно выразить при помощи линии. Только для апреля месяца существует исключение — здесь точки ложатся со сравнительно малой дисперсией от линии регрессии (рис. 50, в).

Однако если ввести еще одну ось  $Q_{i-1}$ , то все точки довольно близко укладываются около некоторой поверхности (рис. 50, б), соответствующей уравнению с двумя аргументами  $Q_i = f(Q_{\text{год}}, Q_{i-1})$ .

Рис. 50, а можно рассматривать как проекцию точек рис. 50, б на плоскость  $Q_{i-1} - Q_{\text{год}}$ . Рисунки дают ответ на вопрос о точности уравнений с одним и двумя аргументами. Поверхность регрессии на рис. 50, в имеет небольшой угол наклона к оси  $Q_{\text{год}}$ . Это означает, что даже значительные ошибки в прогнозах среднегодового сто-

ка сравнительно мало влияют на результат прогноза среднемесячного стока. Среднегодовой сток может быть предсказан с большим приближением: например, достаточно указать, каким будет год — многоводным, средневодным или маловодным, чтобы существенно уменьшить дисперсию точек (относительно поверхности регрессии).

Для выбора функции  $f_i$  оптимальной сложности можно применить полный перебор всевозможных уравнений регрессии (по таблице усложнения полиномов), так как число аргументов невелико

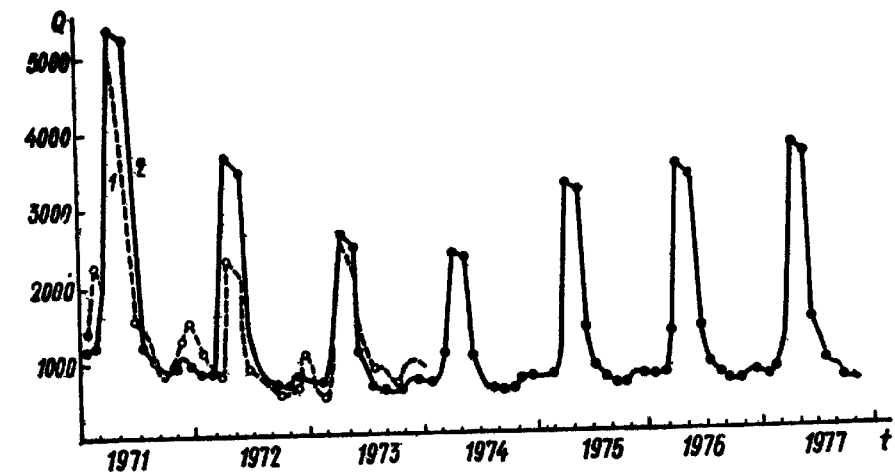


Рис. 51. График прогноза среднемесячных стоков р. Днепр за 1971—1977 гг.:

1 — действительный расход; 2 — прогноз.

(равно двум). Полный перебор применяется в комбинаторном алгоритме МГУА. Для каждого месяца выбирается единственное уравнение оптимальной сложности.

**Пример 26.** Прогнозирование среднемесячного стока р. Днепр [33]. Прогноз среднегодового стока р. Днепр приведен выше. Для прогноза среднемесячных значений стока использовались данные наблюдений с 1878 по 1967 г. включительно (табл. 36). Девяносто опытных точек были разделены на обучающую и проверочную последовательности; точки ранжировались по величине дисперсии. Точки с меньшей дисперсией ( $N_B = 40$  точек) вошли в проверочную, а точки с большей дисперсией ( $N_A = 50$  точек) — в обучающую последовательность. Оценки коэффициентов уравнений регрессии определялись сначала только на обучающей последовательности. Сложность уравнений возрастала до тех пор, пока уменьшалась ошибка, измеряемая на проверочной последовательности (критерий регулярности). После определения уравнений оптимальной структуры (для каждого месяца отдельно) их коэффициенты пересчитывались по всем точкам (этап адаптации коэффициентов).

Перебор всевозможных полиномиальных моделей с двумя аргументами до третьей степени включительно позволил выбрать по критерию регулярности  $\Delta(B) \rightarrow \min$  двенадцать полиномов оптимальной сложности следующего вида:

$$a_i = a_{0,i} + a_{1,i} + a_{1,i}Q_{\text{год}} + a_{2,i}Q_{i-1} + a_{3,i}Q_{\text{год}}^2 + \\ + a_{n,i}Q_{\text{год}}Q_{i-1} + a_{5,i}Q_{i-1}^2, \quad i = 1, 2, 3, \dots, 12.$$

Таблица 36. Исходные данные для прогноза среднемесячных стоков р. Днепр

Год	Месяц	Среднего- довой сток, м³/с	Среднемесячный					сток, м³/с							Средняя квадрати- ческая ошибка за год
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1968	I	1200	850	616	830	401	2870	1070	628	610	567	814	707	706	—
	II	1200	705	720	1174	3366	3223	1305	803	706	608	607	755	709	0,173
	III	2000	691	764	1419	5876	5848	2284	1325	1074	974	1052	1213	1309	0,705
1969	I	1340	772	574	666	2910	3760	1660	1320	882	767	694	829	1220	0
	II	1340	704	729	1219	3837	3675	1444	877	762	645	643	792	721	0,237
	III	3000	707	855	1835	8387	9263	4164	2322	1606	1893	2812	2997	2641	1,590
1970	I	2490	1290	1290	1360	10600	5970	2310	1160	908	784	943	1670	1630	—
	II	2490	686	789	1578	7193	7503	3111	1760	1337	1369	1719	1885	1684	0,317
	III	4000	295	610	132	10200	12820	6814	8691	1973	3149	6286	6532	2969	0,909
1971	I	1830	1380	2230	1950	4900	3150	1530	1340	951	801	931	1290	1470	—
	II	1830	1123	1188	2124	5380	5282	2938	1194	987	866	905	1058	903	0,348
	III	1830	1687	1711	3119	5380	5282	2038	1194	987	866	905	1083	903	0,361
1972	I	1030	1200	806	772	2310	1950	900	798	684	556	568	647	1110	—
	II	1030	840	781	1237	2775	2677	1155	724	645	578	580	727	707	0,288
	III	1030	840	781	1237	2775	2677	1155	724	645	578	580	727	707	0,288
1973	I	1060	600	522	1031	2624	1979	1159	852	895	668	667	968	859	—
	II	1060	708	712	1131	2880	2773	1180	731	655	583	584	731	707	0,226
	III	1060	708	712	1131	2880	2773	1180	731	655	583	584	731	707	0,226

П р и м е ч а н и е: I — дискретные данные; II — вывод модели; III — то же, при искус-

Полученные значения коэффициентов приведены в табл. 37. Результаты прогноза представлены в табл. 38 и на рис. 51. Ошибка прогноза на точках экзаменационной последовательности равна  $\Delta^2(C) = 25\%$ .

В. С. Степашко [33] показал устойчивость циклического прогноза к ошибкам вычислений: при ошибке изменений в 1974 г. она

Таблица 37. Оценки коэффициентов уравнения прогнозирования среднемесячных стоков р. Днепр

i	$a_{0,i}$	$a_{1,i}$	$a_{2,i}$	$a_{3,i}$	$a_{4,i}$	$a_{5,i}$
1	43,03	0,196	0,966	0	$0,288 \cdot 10^{-3}$	0
2	633,1	-0,298	0	0	0,000526	0
3	-16,8	0	1,312	0	0,000284	0
4	-1236	4,253	0	$-0,348 \cdot 10^{-3}$	0	0
5	-799,8	3,945	-0,212	0	0	0
6	692,9	0	0,0668	0	$0,103 \cdot 10^{-3}$	0
7	275,8	0	0,308	$0,897 \cdot 10^{-4}$	0	$0,262 \cdot 10^{-3}$
8	21,49	0	0,943	0	0	$0,112 \cdot 10^{-4}$
9	492,9	-0,599	0,717	$0,227 \cdot 10^{-3}$	0	0
10	525,6	-0,260	0	0	$0,54 \cdot 10^{-3}$	0
11	137,2	0	1,017	0	0	0
12	935,5	-0,570	0	0	$0,719 \cdot 10^{-3}$	$0,339 \cdot 10^{-3}$

ственном начальном отклонении на  $\Delta = 800 \text{ м}^3/\text{с}$ .

Таблица 38. Результаты прогноза среднемесячных стоков р. Днепр (при прогнозируемых значениях годового стока)

Год	Прогноз среднего- дового стока	Прогноз среднемесячного стока, м³/с											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1971	1814	1129	1168	2119	5332	5229	2016	1182	979	856	892	1045	693
1972	1398	806	807	1368	4035	3870	1503	911	787	664	663	812	730
1973	930	726	711	1104	2418	2358	1075	682	612	571	571	718	710
1974	909	713	703	1087	2342	2291	1060	674	606	570	569	716	711
1975	1180	708	721	1171	3227	3158	1286	793	698	603	603	751	708
1976	1217	706	722	1180	3424	3278	1321	812	713	612	611	759	710
1977	1283	705	727	1202	3647	3491	1386	846	739	628	627	775	715

сказывается только на результатах ближайшего 1975 г. и почти не влияет на дальнейшую точность прогноза: с увеличением времени упреждения точность прогноза асимптотически приближается к точности среднеклиматического прогноза (строка III в табл. 36).

Моделирование физических полей

Физическое поле можно представить как непрерывное множество частиц. При этом на данную частицу поля может оказывать наибольшее влияние состояние как соседних (принцип ближнего действия), так и весьма удаленных частиц (принцип дальнего действия или матрицы «вход — выход» [31, 109] \*). Поле может быть трехмерным либо плоским двумерным или, наконец, линейным, т. е. одномерным.

Моделирование физических полей имеет целью получение уравнения, достаточно точно описывающего состояние каждой частицы поля. Такое уравнение называется математической моделью поля.

В математической физике модель поля получают исходя из априорной информации о законах взаимодействия его частиц, таких, как принцип неразрывности и сохранения массы. Взаимодействие элементов поля указывается человеком — автором модели.

При использовании методов самоорганизации вычислительная машина перебирает большое число уравнений различной структуры (сложности) и выбирает одно из них (или систему уравнений), которое обеспечивает минимум того или иного внешнего критерия на заданных опытных данных. Критерий указывается человеком. По глубине минимума критерия можно определить, удалось ли машине найти модель или нет.

Модель может быть точечной или пространственной, одномерной, двумерной, трехмерной или многомерной, алгебраической, интегро-дифференциальной, гармонической, дифференциальной или разностной. Если модель строится по данным наблюдений, в которых не указано пространственное размещение датчиков (или контрольных станций), то она называется точечной. Имеется основание действовать так, как-будто все данные собраны в одной точке пространства.

\* Принцип дальнего действия не является признанием «действия на расстоянии», т. е. без физической связи двух частиц. Материальная связь удаленной и данной частиц существует в физическом поле всегда и учитывается при помощи указанной матрицы «вход — выход».

Модель называется пространственной или моделью поля, если в исходных данных содержится информация о размещении контрольно-измерительных станций в пространстве. Пространственные модели требуют наличия не менее трех измерительных станций по каждой оси. Модели с одним аргументом называются одномерными, а с несколькими — многомерными.

Дифференциальные уравнения диффузии

Установившееся поле диффузии вещества в однородной среде описывается уравнениями закона Фика:

одномерное поле  $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0$  или  $D_x \frac{\partial q}{\partial x} + q = 0$ , или  $q = e^{-x}$  (закон Стриттера — Фелпса),

двумерное поле  $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0$ ,

трехмерное поле  $\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0$ .

Динамический (переходный) процесс установления поля во времени описывается уравнениями, содержащими дополнительно первую производную по времени (уравнения параболического типа)

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = 0 \text{ или}$$

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + D_y \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + D_z \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = 0.$$

Если поле распространяется в потоке, имеющем скорость движения  $U_x$ , то добавится еще один член (для краткости далее записывается только уравнение одномерной диффузии вдоль оси водотока):

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + U_x \frac{\partial q}{\partial x} = 0.$$

Наконец, если вещество является неконсервативным, а разрушается со скоростью  $\gamma$ , то будет присутствовать еще одно слагаемое  $\gamma q$ :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + U_x \frac{\partial q}{\partial x} + \gamma q = 0.$$

Если концентрация загрязняющего вещества измеряется не в отклонениях, а по абсолютной величине, то в правой части приведенных выше уравнений следует поставить не нуль, а некоторую постоянную  $A$  — интенсивность потока загрязнения, распределенного по пространству поля. При переменной интенсивности в правой части уравнений следует поставить  $f(t)$ , а при неравномерном



распределении потока —  $f(tx)$ . Конечно-разностный аналог уравнения в общем случае будет таким:

$$(q_{+10} - q_{00}) + D_x(q_{+10} - 2q_{00} + q_{-10}) + U_x(q_{0+1} - q_{00}) + \gamma q_{00} = f(t_{00}x_{00}),$$

Это уравнение называется уравнением параболического типа. Оно действительно при бесконечной скорости распространения загрязнения по ширине водотока. Для учета конечной скорости распространения следует добавить в уравнение вторую производную по времени (уравнение гиперболического типа)

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a \frac{\partial q}{\partial t} + D_x \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - U_x \frac{\partial q}{\partial x} + \gamma q = f(tx),$$

$$(q_{0+1} - 2q_{00} + q_{0-1}) + a(q_{+10} - q_{00}) + D_x(q_{+10} - 2q_{00} + q_{-10}) + U_x(q_{0+1} - q_{00}) + \gamma q_{00} = f(t_{00}x_{00}).$$

Заметим, что процесс турбулентной диффузии веществ в газе или в жидкости еще не имеет вполне определенного и адекватного математического описания.

Параболическое уравнение, основанное на законах Фика и сохранения массы, не описывает образования пятен и струй, наблюдаемых в водоемах.

Гиперболическое уравнение (выводимое только для одномерного случая), основанное на теории соударения твердых частиц, также является только некоторым приближением к адекватному описанию турбулентного движения.

Образование указанных особенностей могут объяснить только интегро-дифференциальные уравнения, все еще не достаточно исследованные в математике.

Вот почему при самоорганизации модели турбулентной диффузии важно не забыть предоставить машине возможность выбрать наряду с другими аргументами суммы аргументов — аналоги интегральных слагаемых уравнения диффузии. Обратный переход от разностных уравнений к интегро-дифференциальным помогает выяснить действительный вид непрерывных уравнений и сложные законы, скрытые в исходной таблице опытных данных, если таблица опытных данных содержит достаточную информацию.

### Разностные аналоги дифференциальных уравнений физических полей

Данные измеряются при помощи датчиков, установленных на контрольных станциях, или получаются при помощи лабораторных анализов.

На станциях в простейшем случае может измеряться только одна переменная; получаемая при этом модель является одномерной и выражается одним уравнением. При измерении нескольких

взаимосвязанных переменных модель получается многомерной и может выражаться системой взаимосвязанных уравнений.

Измерения на контрольных станциях выполняются дискретно, например один раз в час или в сутки. Показания непрерывных датчиков обычно усредняются также за определенный период съема данных, что вызывает необходимость перехода от непрерывных дифференциальных уравнений к их конечно-разностным аналогам, т. е. к дискретной математике.

Дискретная математика применяет замену в дифференциальных уравнениях производных дифференциалами и дифференциалов конечными разностями, измеряемыми в узлах прямоугольной равномерной пространственной сетки. Например, оси трехмерного пространства координат  $x, y, z$  дискретизируются на равные участки — шаги, принимаемые обычно за единицу измерения пространства:  $\Delta x = 1, \Delta y = 1, \Delta z = 1$ .

Для перехода от непрерывного дифференциального уравнения к конечно-разностному аналогу производные заменяются табличными разностями. В интегро-дифференциальных уравнениях интегралы заменяются соответствующими суммами. Например, для двумерной задачи на плоскости  $t - x$  действуют такие определения производных и интегралов через «передние» табличные разности и суммы (формулы Эйлера):

$$а) \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = [(q_{+10} - q_{00}) - (q_{00} - q_{-10})] = \Delta^2 q_i;$$

$$б) \frac{\partial q}{\partial t} = (q_{+10} - q_{00}) = \Delta q_i;$$

$$в) t = t_{00}; \quad x = x_{00};$$

$$г) \int_1^N q dt = \sum_1^N q_i;$$

$$д) \int_1^N \int_1^N q dt^2 = \sum_1^N \sum_1^N q_i \text{ и т. д.}$$

Индекс времени далее пишется на первом месте, т. е. первый индекс относится ко времени  $t$ , а второй — к оси  $x$ . Указанное здесь прямое преобразование непрерывных дифференциальных уравнений в конечно-разностные аналоги использует наиболее простые формулы замены производных табличными разностями, соответствующие так называемой формуле Эйлера:

$$x_{+1} = x_0 + \Delta t \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 \text{ при } \Delta t = 1.$$

Более сложные формулы, например формула трапеций

$$x_{+1} = x_0 + \frac{\Delta t}{2} \left[ \left( \frac{dx}{dt} \right)_{+1} + \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 \right],$$

используются с целью наибольшего совпадения интеграла непрерывного уравнения и кривой пошагового интегрирования разностного уравнения при более крупном шаге, т. е. для повышения сходимости решений.

В данной книге мы ограничимся применением наиболее простой формулы Эйлера. Более точное преобразование разностных аналогов в дифференциальные уравнения рассматривается в нашей статье, опубликованной в журнале «Автоматика», № 3, 1981 г.

*Прямое преобразование непрерывных  
дифференциальных уравнений  
в конечно-разностный аналог  
и обратное возвращение  
к дифференциальной форме*

Рассмотрим в качестве примера известное в физике уравнение маятника

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = \mu,$$

где  $x$  — угол отклонения маятника.

Прямое преобразование реализуется при помощи замены производных соответствующими конечными разностями:

$$m(x_{+1} - 2x_0 + x_{-1}) + c(x_{+1} - x_0) + kx_0 = \mu$$

или

$$x_{+1} = b_0 x_0 + b_1 x_{-1}; \quad b_0 = \frac{-k(2m+c)}{m+c}; \quad b_1 = \frac{m}{m+c}.$$

Обратное преобразование конечно-разностных аналогов в непрерывные дифференциальные уравнения реализуется при помощи замены запаздывающих аргументов через производные. Согласно формуле Эйлера для непрерывных производных по времени (шаг дискретизации по времени равен единице) имеется приближение через «задние» разности:

$$\begin{aligned} x &= x_{+1}, \\ \frac{dx}{dt} &= x_{+1} - x_0, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= (x_{+1} - x_0) - (x_0 - x_{-1}) = x_{+1} - 2x_0 + x_{-1}, \\ \frac{d^3x}{dt^3} &= (x_{+1} - 2x_0 + x_{-1}) - (x_0 - 2x_{-1} + x_{-2}) = \\ &= x_{+1} - 3x_0 + 3x_{-1} - x_{-2} \text{ и т. д.} \end{aligned}$$

Выразив отсюда переменные  $x_{+1}, x_0, x_{-1}, x_{-2}$  через производные, получим

$$\begin{aligned} x_{+1} &= x, \quad x_0 = -\frac{dx}{dt} + x, \\ x_{-1} &= \frac{d^2x}{dt^2} - 2\frac{dx}{dt} + x, \quad x_{-2} = -\frac{d^3x}{dt^3} + 3\frac{d^2x}{dt^2} - 3\frac{dx}{dt} + x. \end{aligned}$$

Подставив полученные выражения в исходное разностное уравнение, получим искомое дифференциальное (аналог разностного) уравнение второго порядка

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + c \frac{dx}{dt} + kx = \mu.$$

Заметим, что непрерывное и разностное уравнения, участвующие в прямом и обратном преобразованиях, обладают одним и тем же интегралом (решением) только при уменьшении шага до нуля. При конечной величине шага решения совпадают только в первом приближении (совпадают два первых члена ряда Тейлора)\*.

Однако преобразования применяются нами только для решения задачи выяснения структуры системы: по ним для каждой структуры системы непрерывных уравнений можно найти структуру, составленную для конечно-разностных уравнений и наоборот. Так как методы самоорганизации систем уравнений по таблице опытных данных дают структуру разностных уравнений, то полезно в конце моделирования получить также структуру на языке непрерывных уравнений, так как такого рода структуры традиционно приняты в теории автоматического управления.

Обратим внимание на то, что обе структуры (непрерывная и разностная) относятся к системам, не содержащим в себе звеньев с постоянным запаздыванием (например, рассмотренный выше маятник).

*Преимущества конечно-разностных  
по сравнению с алгебраическими моделями*

По одной и той же таблице опытных данных можно построить как алгебраическую модель, например  $q = f(t)$ , так и разностную, например  $q_{+1} = f(q_0, q_{-1}, q_{-2}, \dots, q_{-r})$ , где первая является решением разностного уравнения.

Отличие состоит в порядке считывания данных таблицы.

При использовании методов самоорганизации моделей следует предпочесть построение конечно-разностных моделей, являющихся аналогами дифференциальных уравнений. Дело в том, что в задачах математической физики линейным дифференциальным уравнениям соответствуют нелинейные решения. При переборе моделей легче «угадать» линейный характер конечно-разностного уравнения, чем нелинейность его решения, что сокращает перебор опорных функций. Решения конечно-разностных уравнений разнообразнее («богаче»), чем вариации кривых, отвечающих одной и той же алгебраической функции.

\* Здесь используется аппроксимация производных по формуле Эйлера. Более точной является аппроксимация по формуле трапеций или по нескольким точкам (см. журнал «Автоматика», 1981, № 3).

Рекомендуется также комбинированное (совместное) использование алгебраической (или гармонической) и разностной моделей в виде суммы:

$$q = f_1(t) + f_2(q_0, q_{-1}, q_{-2}, \dots, q_{-r}).$$

Здесь  $f_1$  — низкочастотная часть решения, называемая трендом или «грубой моделью» (а иногда функцией источника);  $f_2$  — точная разностная модель.

Выбор алгоритма образования тренда  $f_1(t)$  достаточно произволен. Цель выделения тренда — уменьшить количество аргументов разностной части, вывести некоторые из них в отдельное слагаемое, что улучшает использование опытных данных. При прогнозировании погоды «грубая модель» (тренд) может соответствовать климатическому (т. е. среднему за длительное время) прогнозу. Точная (разностная) модель уточняет этот прогноз. Разработаны специальные алгоритмы МГУА для самоорганизации полиномиальных и гармонических трендов, оптимальной сложности [24, 10].

### Элементарные разностные схемы и шаблоны

Использование разностных уравнений для цели моделирования основано на построении так называемых разностных схем и соответствующих им шаблонов. Шаблоном называется множество точек, по которым значение заданной функции в заданной точке связывается со значениями ряда других величин (аргументов) в соседних узлах линейной или пространственной сетки.

Так называемый полный трехмерный шаблон, с использованием информации во всех узлах, удаленных от точки с индексом 000 не более чем на один шаг, изображен на рис. 52. Уравнение для полного шаблона имеет следующий общий вид:

$$q_{+100} = f(q_{000} q_{-100} q_{-200} \dots q_{0+10} \dots q_{0-10} \dots q_{00-1} \dots q_{00+1} x_{000} x_{-100} x_{-200} \dots x_{0+10} x_{0-10} x_{00-1} x_{00+1}),$$

где  $q$  — выходная переменная (значение в точках указанные индексами);  $x^i$  — аргументы ( $k$  — число аргументов).

Если учитывать запаздывающие значения переменных (что равносильно введению четвертой оси — оси времени  $t$ , с шагом  $\Delta t$ ), то уравнение, соответствующее полному шаблону, усложняется:

$$q_{1000} = f(q_{+10+10} q_{00+10} q_{-10+10} q_{+10-10} q_{00-10} q_{-1-10} q_{+1-100} q_{0-100} q_{-1-100} q_{+1+100} q_{0+100} q_{-1+100} q_{+100+1} q_{000+1} q_{-100+1} q_{+100-1} q_{000-1} q_{-100-1} x_{+10+10} x_{00+10} x_{-10+10} x_{+10-10} x_{00-10} x_{-10-10} x_{+1-100} x_{0-100} x_{+1-100} x_{-1+100} x_{0+100} x_{-1+100} x_{+100+1} x_{000+1} x_{-100+1} x_{+100-1} x_{000-1} x_{-100-1})$$

(первый индекс указывает время измерения, второй — точку на оси  $x$ , третий — на оси  $y$ , четвертый — на оси  $z$ ). Если дифференциальное уравнение линейно, то функция представляет сумму линейных членов. Как указывалось, здесь и дальше подразумеваем, что  $k$ -й производной ставится в соответствие разность  $k$ -го порядка (по формуле Эйлера).

В каждом реальном процессе многие слагаемые часто отсутствуют. Оптимальный шаблон получается из полного шаблона при помощи удаления несущественных, второстепенных точек (узлов).

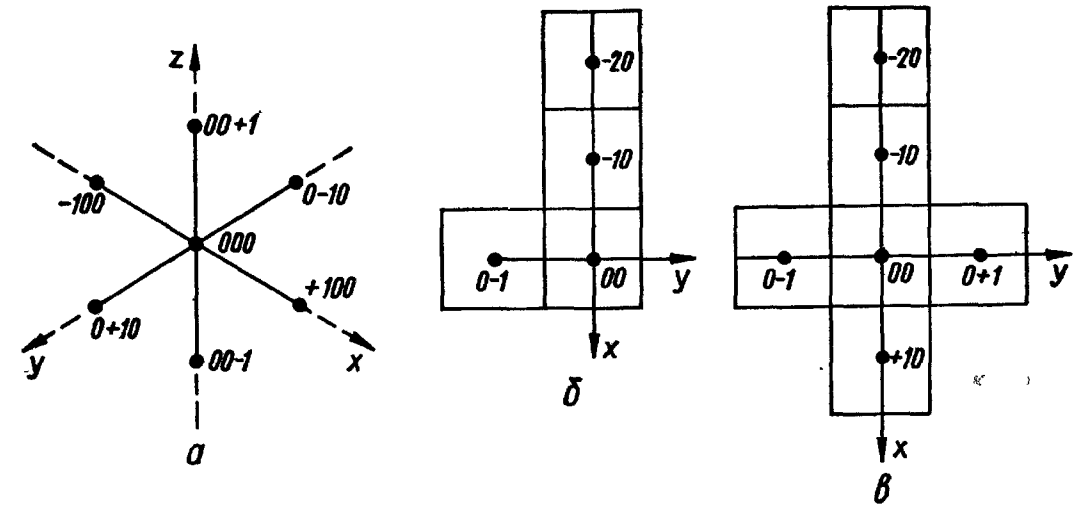


Рис. 52. Основные виды элементарных конечно-разностных схем (шаблонов) для пространственных моделей:

$a$  — полный трехмерный шаблон;  $b$  — двумерный шаблон типа «уголок»;  $c$  — двумерный шаблон типа «самолет».

Важно отметить, что между оптимальным шаблоном и уравнением динамики объекта имеется соответствие: структура оптимального шаблона определяет структуру уравнения динамики (левой части). Например, в линейной задаче одномерной турбулентной диффузии действует уравнение параболического типа

$$\frac{\partial q}{\partial t} + U \frac{\partial q}{\partial x} - K \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = f(xt),$$

где  $U$  — скорость потока;  $K$  — коэффициент диффузии.

Дискретный аналог имеет вид

$$(q_{+10} - q_{00}) + \gamma_1 (q_{0+1} - q_{0-1}) - \gamma_2 (q_{0+1} - 2q_{00} + q_{0-1}) = f(t_{00} x_{00}),$$

где  $\gamma_1 = \frac{\tau U}{2h}$ ;  $\gamma_2 = \frac{\tau K}{h^2}$ ;  $\tau$  — шаг по оси времени  $t$ ;  $h$  — шаг по оси  $x$ .

Другими словами, здесь оптимальный шаблон содержит всего три узла (точки):  $u_{+10} = f(u_{00} u_{0+1} u_{0-1})$ .

Рассмотрим также уравнение Фоккера — Планка, учитывающее непостоянство коэффициента диффузии в различных узлах

пространственной сетки:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial^2 kq}{\partial x^2} = f(xt).$$

Дискретный аналог имеет вид

$$\frac{1}{\tau} (q_{+10} - q_{00}) + \frac{u}{2h} (q_{00} - q_{0-1}) - \frac{1}{h^2} (k_{00}q_{0+1} - 2k_{00}q_0 + k_{0-1}q_{0-1}) = f(x_{00}t_{00});$$

шаблон

$$q_{+10}^{t+1} = f(q_{00}^t, q_{0+1}^t, q_{0-1}^t, k_{00}^t, k_{0+1}^t, k_{0-1}^t).$$

Таким образом, нелинейность непрерывного уравнения (произведение  $kq$ ) не мешает переходу от дифференциального уравнения к его конечно-разностному аналогу, и обратно — от аналога к непрерывному дифференциальному уравнению.

### Принципы ближнего и дальнего действия

Модели, имеющие односвязные шаблоны, реализуют так называемый принцип ближнего действия. Примером могут быть шаблоны, изображенные на рис. 53—55. Шаблоны, реализующие принцип дальнего действия, являются многосвязными, т. е. образуют на линии, плоскости или в пространстве несколько не имеющих общих границ фигур.

Принцип ближнего действия можно выразить так: чем ближе соседний узел к данному (выходному) узлу пространственно-временной сетки, тем больше его влияние на данный узел.

Принцип дальнего действия (или принцип матрицы «вход — выход» [31, 109]), наоборот, утверждает, что некоторые узлы, расположенные вдали от данного (выходного), могут влиять на него больше, чем близко расположенные узлы.

В первом случае в шаблон следует включать ближайшие к выходному, а во втором — лежащие вдали от него узлы.

*Связность шаблона при двумерном отсчете времени.* Нетрудно увидеть, что шаблон при двумерном отсчете времени в координатах  $t - T$  можно изобразить в виде двумерного линейного шаблона, лежащего на оси  $t$ . В этом случае связность определяется для линейной формы записи шаблона. Шаблон с узлами  $q_0 q_{-1} q_{-2}$  — односвязный, а шаблон с узлами  $q_0 q_{-1} q_{-2} q_{-12}$  (эквивалент шаблона  $q_{00} q_{-10} q_{-20} q_{0-1}$ ) — двусвязный.

### Правило ортогонального наращивания шаблонов по осям координат

Правило рекомендует при составлении шаблона учитывать только узлы (клетки), расположенные вдоль осей координат (рис. 53) или по диагонали (рис. 54). Этого достаточно, чтобы заменить производные конечными разностями.

Например, в уравнении авторегрессии для прогноза средне-месячных значений переменной

$$q_{+1} = a_0 + a_1 q_0 + a_2 q_{-1} + \dots + a_{38} q_{-37},$$

имеющем 39 членов, достаточно взять в качестве аргументов только данные за первые 12 месяцев и данные за 13-й, 25-й и 37-й месяцы (всегда пятнадцать слагаемых). Первые 12 узлов расположены вдоль оси  $t$  (время, измеряемое в месяцах), а последние три — вдоль оси  $T$  (время, измеряемое в годах).

### Обучение и оптимизация структуры шаблонов

При обучении шаблон находится внутри области интерполяции, т. е. внутри цифрового поля  $ABCD$  (рис. 53). Значения переменных известны в каждом его положении. Определяются оценки коэффициентов соответствующего уравнения (по МНК или по алгоритмам МГУА).

Рассмотрим, например, обучение шаблона типа самолет (рис. 53—55) и выбор оптимальной его сложности. Полный линейный шаблон в данном случае имеет вид

$$q_{+10} = a_0 + a_1 q_{00} + a_2 q_{0-1} + a_3 q_{0+1} + a_4 q_{-10} + a_5 q_{-20}.$$

Помещая шаблон в разных местах прямоугольника  $ABCD$ , записываем значения переменных

$$q_{+10} q_{0+1} q_{0-1} q_{0+1} q_{-10} q_{-20}.$$

Для каждого его положения в таблицу опытных данных поступают данные, достаточные для составления одного условного уравнения.

При этом получают три вида таблиц данных. Следует различать таблицу исходных данных контрольных станций, таблицу интерполированных исходных данных и таблицы шаблонов, получаемые в результате перемещения шаблонов по цифровому полю таблицы (рис. 53 и 54). Каждому положению того или иного шаблона на цифровом поле интерполированных данных отвечает одна строка (точка) таблицы данного шаблона. Для каждого шаблона получается своя, определенная таблица опытных данных. Таблиц будет столько, сколько сравнивается между собой шаблонов.

Оптимальный шаблон решения данной конкретной задачи можно найти двумя способами:

а) на основании глубокого знания физики объекта (дедуктивный, детерминированный подход);

б) при помощи перебора шаблонов по целесообразно выбранным внешним критериям (индуктивный подход на основе принципов эвристической самоорганизации). Шаблоны, сравниваемые между собой по критерию, получают из полного шаблона при



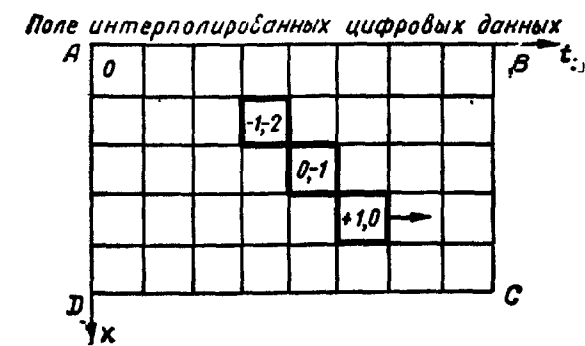
N	Шаблон	Таблица данных	Постепенное усложнение модели и аналога
1			$\frac{\partial q}{\partial t} + a_1 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f(q_{0,0})$
2			$\frac{\partial q}{\partial t} + a_1 \frac{\partial q}{\partial x} + a_2 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f_2(q_{0,0}, q_{0,-1})$
3			$\frac{\partial q}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial q}{\partial x} + a_3 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f_2(q_{0,0}, q_{0,-1}, q_{0,-1}, q_{-1,0})$
4			$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial q}{\partial t} + a_3 \frac{\partial q}{\partial x} + a_4 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f_2(q_{0,0}, q_{0,-1}, q_{0,-1}, q_{-1,0})$
5			$\frac{\partial^3 q}{\partial t^3} + a_1 \frac{\partial^3 q}{\partial t^2 \partial x} + a_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_3 \frac{\partial q}{\partial t} + a_4 \frac{\partial q}{\partial x} + a_5 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f_2(q_{0,0}, q_{0,-1}, q_{0,-1}, q_{-1,0}, q_{-2,0})$

Рис. 53. Перебор шаблонов (1—5) и получение таблиц данных для задачи прогнозирования.

помощи вычеркивания его узлов в самых различных комбинациях с целью определения шаблона оптимальной сложности.

При  $n < N$  и числе слагаемых полного полинома меньше двадцати для оптимизации шаблона используется комбинаторный алгоритм МГУА (с занулением всевозможных комбинаций членов полного полинома), предусматривающий перебор возможных частных полиномов. Число сравниваемых полиномов равно  $2^{20}$ , что является предельно допустимым для машины БЭСМ-6. При этом достаточно рассматривать только один, наиболее полный, заведомо достаточный шаблон.

При  $n > N$  и числе слагаемых полного полинома больше двадцати для выбора модели используется многорядный (поро-



N	Шаблон	Таблица данных	Постепенное усложнение модели и аналога
1			$\frac{\partial q}{\partial t} + a_1 \frac{\partial q}{\partial x} + a_2 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f(q_{0,-1})$
2			$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial q}{\partial t} + a_3 \frac{\partial q}{\partial x} + a_4 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f_2(q_{0,-1}, q_{-1,-2})$
3			$\frac{\partial^3 q}{\partial t^3} + a_1 \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + a_2 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a_3 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_4 \frac{\partial q}{\partial t} + a_5 \frac{\partial q}{\partial x} + a_6 q = f(tx)$ $q_{+1,0} = f_1(t_{+1,0}, x_{+1,0}) + f_2(q_{0,-1}, q_{-1,-2}, q_{-2,-3})$

Рис. 54. Перебор шаблонов (1—3) формы «диагональ» и получение таблиц данных для задачи прогнозирования.

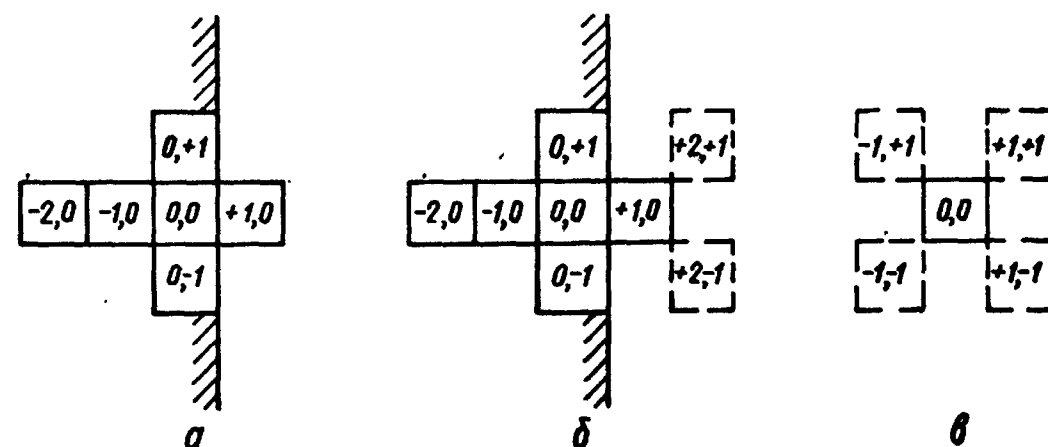


Рис. 55. Шаблоны для двумерных задач прогнозирования и экстраполяции:

а — при отсутствии опережающих данных; б, в — с использованием опережающих данных.

говый) алгоритм МГУА. Здесь возможен пропуск опробывания некоторых частных полиномов. Перебор получается неполным.

Чтобы всемерно расширить перебор при многорядном алгоритме, целесообразно применить:

а) перебор шаблонов (состава аргументов), начиная с самого простого двухклеточного шаблона (рис. 53, 54);

б) перебор всевозможных нелинейных полиномов для каждого из шаблонов (по многорядному алгоритму МГУА с переобозначением переменных), кончая полиномом, в котором высшая степень равна числу аргументов, указанному в данном шаблоне.

Такой двойной перебор шаблонов и нелинейных полиномов дает более полный просмотр множества возможных частных полиномов в задачах, где из-за слишком большого числа слагаемых полного полинома нельзя применить более простой, комбинаторный алгоритм МГУА (см. пример на стр. 220).

*Двойной перебор точечных моделей.* Для точечной задачи с одной переменной  $q$  перебор шаблонов эквивалентен перебору числа учитываемых запаздывающих аргументов:

1-й шаблон  $q_{+1} = f(q_0) = a_0 + a_1 q_0 + a_2 q_0^2$ ;

2-й шаблон  $q_{+1} = f(q_0; q_{-1}) = a_0 + a_1 q_0 + a_2 q_{-1} + a_3 q_0^2 + a_4 q_{-1}^2 + a_5 q_0 q_{-1}$

3-й шаблон

$q_{+1} = f(q_0, q_{-1}, q_{-2}) = a_0 + a_1 q_0 + a_2 q_{-1} + a_3 q_{-2} + a_4 q_0^2 + a_5 q_{-1}^2 + a_6 q_{-2}^2 + a_7 q_0 q_{-1} + a_8 q_{-2} q_0 + a_9 q_{-2} q_{-1}$ .

Перебор нелинейностей в данном примере означает перебор частных полиномов, получаемых из указанных полных полиномов по комбинаторному алгоритму, т. е. при помощи приравнивания нулю тех или иных комбинаций коэффициентов. Число частных полиномов, получаемых при этом, равно  $2^n$ , где  $n$  — индекс последнего коэффициента ( $n = 2, 5, 9$ ). Как только число слагаемых полного полинома превысит 20, придется перейти к многорядным алгоритмам МГУА.

*Показатель успеха моделирования.* Для поиска оптимального шаблона должен быть принят некоторый внешний комбинированный критерий: лучше тот шаблон, который обеспечивает наибольшее приближение модели к началу координат пространства критериев (рис. 56, 57).

Если среда моделирования указана неправильно или если таблица наблюдений не представительна и помехи слишком велики, то машина сообщит о том, что самоорганизация модели не получилась. Мерой успеха моделирования является глубина минимума критерия селекции. Чем ближе модель оптимальной сложности к началу координат пространства критериев, тем более достоверен результат моделирования. Обычно должно быть  $\rho_{\min} : \rho_{\max} \leq 0,05$ .

*Последовательное применение критериев при двойном переборе.* Экспериментально установлено, что модели, полученные для одного и того же состава аргументов (т. е. для одного шаблона), сравнительно мало отличаются по наименьшему значению критерия регулярности и резко различны по минимуму критерия сме-

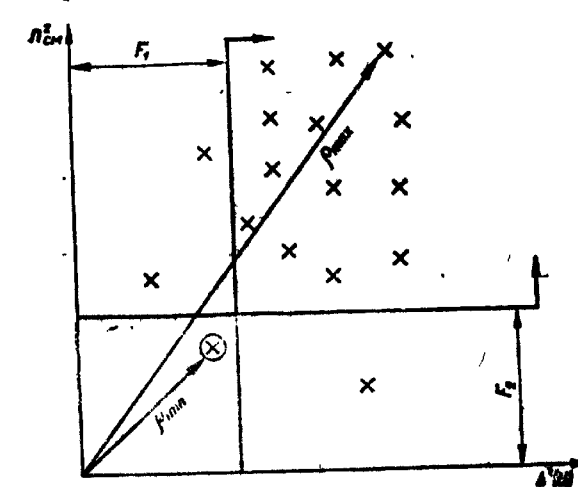


Рис. 56. Выбор модели оптимальной сложности по комбинированному критерию  $\rho = \sqrt{((n_{\text{см}}^2)^2 + \Delta(B))} \rightarrow \min$ ;  $F_1$  и  $F_2$  — оптимальная «свобода выбора» по каждому из критериев;  $\otimes$  — модель, выбранная по обоим критериям (см. пример на рис. 48).

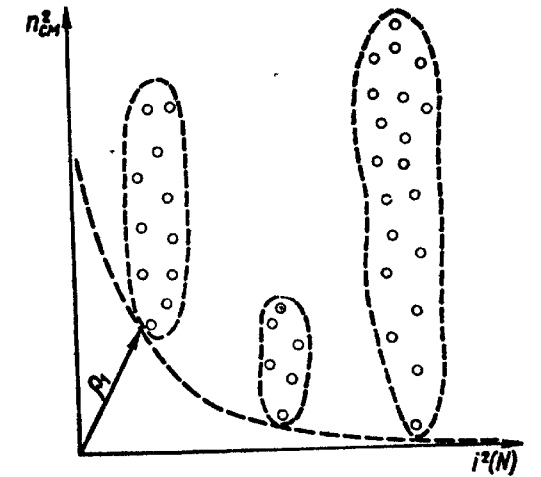


Рис. 57. Выбор шаблона оптимальной сложности по комбинированному критерию  $\rho_1 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + i^2(N)} \rightarrow \min$ ;  $\circ$  — модели с одинаковым составом аргументов (см. пример на рис. 35).

щения. Геометрически это выражается в том, что точки, отвечающие сравниваемым моделям, образуют на плоскости  $n_{\text{см}}^2 - \Delta^2(B)$  линии, подобные спектрограммам (рис. 57). По-видимому, в связи с особенностью размещения моделей на плоскости критериев (рис. 57) целесообразно для перебора размера шаблонов применять критерии регулярности, устойчивости пошагового прогноза или баланса переменных:

$$\Delta^2(B) \rightarrow \min, \quad i^2(N) \rightarrow \min, \quad B^2 \rightarrow \min,$$

а для перебора нелинейностей его полиномов — критерий минимума смещения

$$n_{\text{см}}^2 \rightarrow \min.$$

Такая рекомендация приводит к сокращению объема программы и более точному выбору модели.

Примеры показывают, что последовательное применение критериев не вполне эквивалентно применению комбинированного критерия во всех рядах селекции. Оно дает несколько более простые модели, с меньшим разнообразием аргументов.



Для физических полей обычно известны некоторые детерминированные модели поля, математически выражаемые в виде дифференциальных или интегро-дифференциальных уравнений. Такие уравнения детерминированных теорий можно использовать как подсказку для выбора вида исходного множества: а) аргументов, б) формы исходного полного шаблона и в) функций, участвующих в полном описании модели. Например, детерминированное уравнение диффузии указывает определенный шаблон, который целесообразно принять за основу перебора. Полный шаблон получается из шаблона, отвечающего детерминированному уравнению диффузии при помощи увеличения его размеров на один или два узла по всем осям. Это означает, что мы на всякий случай повышаем порядок уравнения на единицу (или две), чтобы дать возможность алгоритму выбрать более общий, чем предполагаемый априорно, закон. Интегральные слагаемые соответствуют суммам аргументов. Каждый член дифференциального уравнения диффузии имеет определенный физический смысл: первая производная  $\frac{\partial q}{\partial t}$  учитывает изменение концентрации по времени; вторая производная  $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$  — ускорение изменения концентрации во времени.

Если в уравнении присутствует производная  $\frac{\partial q}{\partial t}$ , то в шаблоне должны участвовать две точки, лежащие вдоль оси  $x$ , так как  $\frac{\partial q}{\partial t} = q_{+10} - q_{00}$ .

Если есть ускорение, то в шаблоне должны остаться (после перебора шаблонов по критерию) три точки по оси  $x$ , так как

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} = (q_{+10} + 2q_{00} + q_{-10}).$$

Производная  $\frac{\partial q}{\partial t}$  учитывает перенос загрязняющего вещества вдоль оси  $x$ . Если перенос есть, то в оптимальном шаблоне останутся по крайней мере две точки, лежащие на оси  $x$ .

Вторая производная  $\frac{\partial^2 q}{\partial t^2}$  учитывает ускорение переноса. Если оно реально существует, то в оптимальном шаблоне будет три точки на оси  $x$  и т. д.

Индуктивный подход самоорганизации интересен тем, что он часто ведет к открытию неожиданных свойств объекта. Если в начале моделирования предполагается, например, что поле описывается уравнением параболического типа (без второй производной по времени), а потом в результате перебора шаблонов оказалось, что на оси  $t$  остались три точки, то это только означает, что исходное предположение было неточным. Поле, шаблон которого содер-

жит три точки по оси  $t$ , описывается уравнением гиперболического типа, содержащим вторую производную по времени:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial q}{\partial t} + a_2 \frac{\partial q}{\partial x} + a_3 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} = f(xt).$$

Так самоорганизация модели по опытным данным позволяет открыть закон, действующий в данном поле.

### Пошаговый прогноз (во времени) и пошаговая экстраполяция (в пространстве)

Математические модели служат для решения задач прогнозирования и экстраполяции. В задаче прогнозирования значения выходной величины  $q$ , характеризующей поле, и значения коррелированных вспомогательных переменных  $v_i$  заданы в некотором прямоугольнике  $ABCD$  (рис. 53, 54 сверху), лежащем в координатной плоскости время — пространственная ось ( $t - x$ ). Требуется определить значения выходной величины в области, лежащей вправо от прямоугольника, по направлению оси  $t$ .

В задаче экстраполяции постановка та же, однако исходный прямоугольник задан на плоскости двух пространственных координат ( $x - y$ ). Ось времени отсутствует. Задачи прогнозирования и экстраполяции могут быть одномерными (вдоль оси  $x$ ), двумерными (на плоскости  $x - y$ ), трехмерными (в пространстве координат  $x y z$ ) и четырехмерными (в пространстве  $t x y z$ ).

Задача экстраполяции не предъявляет особых требований ни к выбору опорной функции, ни к методу ее обучения. Если опытных точек задано много, то любая достаточно сложная функция при любом методе ее обучения, опирающемся на метод наименьших квадратов, хорошо аппроксимирует поле. Это справедливо и для степенных полиномов, которые удовлетворяют условиям теоремы Вейерштрасса о приближении.

Теорема Вейерштрасса утверждает, что любую функцию, непрерывную в заданном интервале  $a \leq x \leq b$ , можно равномерно аппроксимировать на этом интервале с любой заданной точностью степенным многочленом. Чем больше членов полинома, тем меньше среднеквадратическая ошибка, определяемая на всех опытных точках поля.

Для решения задачи аппроксимации можно применять как сплайны, так и разностные модели. При большом числе точек применение МГУА не обязательно. Применение МГУА для аппроксимации можно оправдать только тем, что при нем снижается алгебраический минимум точек, необходимых для обучения модели, и получаются модели оптимальной сложности. Особых проблем нет. Затруднения возникают только тогда, когда либо точек опытных данных мало (даже для МГУА), либо требуется решить задачу построения поля вне области, где заданы точки (задачи прогнози-

рования и экстраполяции поля). Значительно более сложным является решение задач прогнозирования и экстраполяции.

Приближенный (грубый) прогноз и экстраполяция получаются при помощи предварительного выделения по МГУА полиномиального или гармонического (с некоторыми частотами) тренда оптимальной сложности  $q_{+1} = f_1(t)$ . В некоторых задачах трендом может быть просто среднее значение прогнозируемой переменной или даже сама ось времени. Для точного прогноза и экстраполяции используется добавка (второе слагаемое) в виде решения разностного уравнения

$$q_{+1} = f_2(q_0 q_{-1} q_{-2} \dots v_0 v_{-1} v_{-2} \dots).$$

В целом прогноз или экстраполяция получаются в виде суммы тренда и решения разностного уравнения

$$q_{+1} = f_1(t, x_0) + f_2(q_0 q_{-1} q_{-2} \dots v_0 v_{-1} v_{-2} \dots).$$

Разностные уравнения имеют преимущество для реализации точного прогноза и экстраполяции, так как они: 1) точнее соответствуют физике поля (при самоорганизации получаются часто линейными); 2) богаче решениями; 3) могут быть оценены по специальному критерию точности пошагового интегрирования  $i^2(N) \rightarrow \min$ , не требующему деления опытных данных на части. Обучение шаблона (определение оценок коэффициентов его уравнения) и пошаговый прогноз можно выполнить при помощи перемещения по области интерполяции (цифровому полю данных  $ABCD$  рис. 54, 55) явных или неявных шаблонов.

Явные шаблоны имеют один выступающий вперед по направлению интегрирования узел  $q_{+1}$ . Для каждого положения шаблона составляется одно условное уравнение Гаусса. Затем шаблон перемещается на шаг вперед, и составляется следующее условное уравнение. Система условных уравнений, полученная таким образом при движении в пределах цифрового поля  $ABCD$ , служит для обучения шаблона — определения оценок коэффициентов соответствующего ему уравнения. При движении шаблона за пределами цифрового поля получается искомый пошаговый прогноз.

Получив оптимальный шаблон на материале области интерполяции, используем его для выхода за пределы этой области: вдоль оси  $x$  — для экстраполяции или в будущее, вдоль оси  $t$  — для пошагового прогноза.

Неявные шаблоны имеют два или несколько выступающих вперед узлов. Здесь для обучения шаблонов, получения оценок коэффициентов и пошагового прогноза приходится решать совместно систему уравнений при каждом их очередном продвижении вперед на один шаг: неявные шаблоны обеспечивают большую степень устойчивости (сходимости) процесса пошагового прогноза по сравнению с явными шаблонами [22].

Таблица 39. Исходные данные

Расстояние $x$ от первой контрольной станции, км	Время измерения, недели года							
	20	22	24	26	28	30	32	34
0	$q = 9,12$ $z = 0,78$ $T = 12$	10,26 2,07 13,2	11,08 1,07 14,5	10,06 1,5 15,5	11,06 1,32 13,6	9,2 2,1 13,6	10,26 1,28 13,5	10,12 1,4 11,4
16	$q = 9,91$ $z = 0,57$ $T = 12$	9,52 1,7 13,7	9,5 1,6 13,7	8,55 1,5 17,4	8,74 1,3 15,1	9,67 1,8 14	11,06 1,7 13,8	10,21 1,5 11,8
24	$q = 9,5$ $z = 0,27$ $T = 11,9$	9,5 0,22 10,8	11,2 1,5 14	11,02 1,4 13,1	11,25 1,3 17,7	10,88 1,36 16,4	10,92 2,64 13,4	10,88 1,69 13,4

Пример 27. Самоорганизация модели для построения поля в координатах время—пространственная ось  $(t-x)$ . Пример показывает применение многорядного алгоритма МГУА с переобозначением переменных для решения задачи идентификации поля минерализации при исключительно малом числе опытных данных, что потребовало применения двухэтапной интерполяции [31]

В задаче идентификации поля минерализации ( $m$ ) воды в водоеме наблюдения велись всего в трех точках в течение трех месяцев, через две недели каждое.

На глубине полметра измерялись три переменные: растворенный кислород  $РК = q(t)$ , биохимическая потребность кислорода  $БПК_b = z(t)$  и температура  $T$ . Измерения проводились, начиная с мая, каждые две недели, всего восемь раз. Таким образом, исходная таблица данных содержит всего  $3 \times 8 = 24$  точки (табл. 39). В этом случае применяется двухэтапная интерполяция [31]. На первом этапе плоскость или пространство параметров интерполируются при помощи алгебраических уравнений (например, при помощи параболических сплайнов), а на втором — по алгоритмам МГУА синтезируются тренды и конечно-разностные модели.

В рассматриваемом примере параболический сплайн вида

$$m = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 \quad \text{при } x = \text{const}$$

позволил увеличить в четыре раза число точек, расположенных вдоль продольной оси  $x$ , на интервале, лежащем внутри области интерполяции.

Сплайны по времени

$$m = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 \quad \text{при } t = \text{const}$$

позволили удвоить число точек по оси  $t$ . Так была получена табл. 40, содержащая  $12 \times 15 = 180$  точек. Эта таблица использована для построения прогнозирующей и экстраполирующей конечно-разностной модели, действующей на плоскости  $t-x$ .

Задача прогнозирования решается при помощи идентификации разностного уравнения вида (первый индекс относится к оси  $x$ , второй — к оси  $t$ )

$$q_{+1,0} = f(x_{+1,0} t_{+1,0} q_{0,0} q_{0,+1} q_{0,-1} q_{-1,0} q_{-2,0} z_{0,0} z_{0,+1} z_{0,-1} z_{-1,0} z_{-2,0} T).$$

Для получения таблицы исходных данных шаблон (рис. 55, а) перемещаем по цифровому полю табл. 40, шаг за шагом вправо по горизонтали по направлению оси  $t$ . Каждое положение шаблона дает одну строку табл. 41. Пошаговое интегрирование уравнения позволяет прогнозировать переменные, указанные в таблице.

Т а б л и ц а 40. Результаты первого этапа интерполяции (при помощи сплай

Рассто- яние, км	Время измерения,						
	20	21	22	23	24	25	26
0	$q = 9,12$ $z = 0,78$ $T = 12,0$	9,474 1,059 12,6	10,26 2,07 13,2	9,176 1,457 13,85	11,08 1,7 14,5	9,083 1,671 15,0	10,06 1,5 14,55
2	$q = 9,317$ $z = 0,807$ $T = 12,0$	9,193 1,063 12,63	9,123 1,293 13,26	9,103 1,458 13,83	9,135 1,585 14,4	9,222 1,679 15,07	9,361 1,722 15,74
4	$q = 9,14$ $z = 0,81$ $T = 12,0$	9,123 1,085 12,66	9,158 1,311 13,32	9,24 1,458 13,81	9,375 1,577 14,3	9,57 1,685 15,14	9,819 1,715 15,97
22	$q = 10,035$ $z = 0,749$ $T = 11,9$	10,255 0,721 11,715	10,525 0,687 11,53	10,89 1,476 12,725	10,508 1,505 13,92	10,264 1,569 14,05	10,072 1,628 14,17
24	$q = 9,5$ $z = 0,27$ $T = 11,9$	10,903 0,553 11,35	9,5 0,22 10,8	10,266 1,064 12,4	11,2 1,5 14,0	9,964 1,469 13,55	11,02 1,4 13,1

Т а б л и ц а 41. Начало и конец таблицы интерполяции данных для прогнози

Номер точки	Значение прогнозируемой величины $q$						
	+1,0	0,0	-1,0	-2,0	0, -1	0, +1	+1,0
1	9,103	9,123	9,193	9,317	10,26	9,158	1,458
2	9,135	9,103	9,123	9,193	9,176	9,24	1,585
3	9,222	9,135	9,103	9,123	11,08	9,375	1,679
120	9,974	9,891	9,864	9,871	9,75	10,245	1,733
121	10,137	9,974	9,891	9,864	9,737	10,42	1,708

Задача экстраполяции решается при помощи идентификации уравнения вида

$$z_{+1,0} = f_2(x_{0,+1} t_{0,+1} z_{0,0} z_{+1,0} z_{-1,0} z_{0,-1} z_{0,-2} q_{0,0} q_{+1,0} q_{-1,0} q_{0,-1} q_{0,-2} T).$$

Для получения таблицы данных шаблон (рис. 55, а) перемещается вниз, по вертикали по направлению оси  $x$ . Пошаговое интегрирование позволяет экстраполировать данные табл. 40 шаг за шагом.

При шестиклеточном шаблоне (рис. 55, а) полный полином второй степени содержит функцию источника, 11 линейных членов, 11 квадратов и 55 ковариаций, всего  $3 + 11 + 11 + 55 = 80$  слагаемых.

Уравнения прогнозирования имеют вид

$$q_{+1,0} = (a_0 + a_{01}x_{+1,0} + a_{02}t_{+1,0}) + (a_1q_{0,0} + a_2q_{0,+1} + a_3q_{0,-1} + a_4q_{-1,0} + a_5q_{-2,0} + a_6z_{0,0} + a_7z_{0,+1} + a_8z_{0,-1} + a_9z_{-1,0} + a_{10}z_{-2,0} + a_{11}T + a_{12}q_{0,0}^2 + a_{13}q_{0,+1}^2 + a_{14}q_{0,-1}^2 + a_{15}q_{+1,0}^2 + a_{16}q_{-1,0}^2 + a_{17}z_{0,0}^2 + a_{18}z_{0,+1}^2 + a_{19}z_{0,-1}^2 + a_{20}z_{-1,0}^2 + a_{21}z_{-2,0}^2 + a_{22}T^2 + a_{23}q_{0,0}q_{0,+1} + a_{24}q_{0,0}q_{0,-1} + \dots + a_{77}z_{-2,0}T),$$

где  $a_0 + a_{01}x + a_{+1,0} + a_{02}t_{+1,0}$  — тренд, взятый нами в простом линейном

нов)

недели года							
27	28	29	30	31	32	33	34
9,147 1,721 13,6	11,06 1,32 13,6	9,404 1,645 13,55	9,2 2,1 13,5	9,902 1,718 13,55	10,26 1,28 13,6	9,776 1,505 12,5	10,12 1,4 11,4
9,5 1,743 14,76	9,692 1,658 13,79	9,984 1,694 13,67	10,288 1,689 13,56	9,87 1,731 13,59	9,623 1,773 13,625	9,392 1,522 12,54	9,213 1,137 11,45
10,362 1,76 14,97	10,358 1,693 13,97	9,935 1,702 13,8	9,681 1,704 13,62	9,486 1,743 13,635	9,343 1,781 13,65	9,217 1,537 12,575	9,144 1,162 11,5
9,976 1,76 15,61	9,931 1,657 17,05	9,871 1,785 16,435	9,864 1,869 15,8	9,891 1,875 14,65	9,974 1,733 13,5	10,137 1,708 13,25	10,382 1,766 13,0
9,984 1,754 15,4	11,25 1,3 17,7	10,026 1,69 17,05	10,88 1,36 16,4	10,245 1,888 14,9	10,42 2,64 13,4	10,696 1,737 13,4	10,88 1,69 13,4

рования (модели с двумя запаздывающими аргументами)

в клетках шаблона							
0,0	-1,0	-2,0	0, -1	+0,1	$T$	$x$	$t$
1,293	1,063	0,807	2,07	1,311	13,26	2	22
1,458	1,293	1,063	1,457	1,458	13,83	2	23
1,585	1,458	1,293	1,7	1,577	14,4	2	24
1,875	1,869	1,785	1,888	1,888	14,65	22	32
1,733	1,875	1,869	2,64	2,64	13,5	22	33

виде. В данном случае он учитывает боковые притоки, вызывающие изменения производных  $\frac{\partial c}{\partial t}$  и  $\frac{\partial c}{\partial x}$  по длине водоема  $x$  и времени  $t$ . При помощи переобозначения переменных

$q_{+1,0} = u_0 x_{+1,0} = w_{01}$ ,  $t_{+1,0} = w_{02}$ ,  $q_{0,0} = w_1$ ,  $q_{0,+1} = w_2 \dots$  получим линейный полином, содержащий 80 слагаемых:  $\dots z_{-2,0} T = w_{77}$

$$u = (a_0 + a_{01}w_{01} + a_{02}w_{02}) + (a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + \dots + a_{77}w_{77}).$$

Аналогичный полином можно получить в уравнении для  $z_{+1,0}$ .

На первом ряду селекции применяется частное описание вида

$$u = b_0 + b_1W_i + b_2W_j, \quad i = j = 0,01, 0,2, 1, 2, 3, \dots, 77.$$

Для определения смещения модели оценки коэффициентов  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  определяются два раза: на последовательности  $A$  и  $B$  соответственно. Всего получается  $C_{80}^2 = 3160$  полиномов (моделей), из которых следует выбрать  $F_1 = 80$  самых несмещенных (по критерию минимума смещения) полиномов.

На втором ряду селекции применяется частное описание

$$u_2 = c_0 + c_1u_{1i} + c_2u_{1j}.$$

Снова получаем 3160 полиномов, из которых выбираем  $F_2 = 80$  самых несмещенных.

На третьем ряду действует частное описание

$$u_3 = d_0 + d_1 u_{21} + d_2 u_{2j}.$$

Всего будет снова 3160 полиномов и т. д. Нарастание рядов селекции продолжается до тех пор, пока критерий селекции снижается.

На последнем ряду имеется две альтернативы:

а) выбирается одна самая несмещенная модель по критерию  $n_{\text{см}} \rightarrow \min$  либо б) выбирается  $F = 20$  лучших моделей с тем, чтобы при помощи вариации состава точек в множествах  $A$  и  $B$  (как было описано ранее) найти одну модель по минимаксному критерию несмещенности

$$n_{\text{см max}}^2 \rightarrow \min.$$

Второй способ (б) обладает большей помехоустойчивостью и применяется, когда исходные данные очень не точны.

После того как тем или другим способом самая несмещенная модель найдена, оценки ее коэффициентов пересчитываются по методу наименьших квадратов по всем точкам таблицы исходных данных.

**Результаты моделирования.** При помощи описанного выше алгоритма МГУА (по критерию  $n_{\text{см}}^2 \rightarrow \min$ ) получены следующие модели:

для прогнозирования

$$q_{+1,0} = 6,3700 + 0,1958 q_{0,0} q_{0,+1} + 5,6351 \cdot 10^{-4} q_{0,+1} z_{0,-1},$$

$$n_{\text{см min}} = 3,054 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta^2(B)_{\min} = 0,040.$$

$$z_{+1,0} = 1,4958 - 6,2680 \cdot 10^{-4} z_{0,0} + 2,6289 \cdot 10^{-4} z_{0,0} z_{-1,0} + \\ + 1,6642 \cdot 10^{-2} z_{0,0} q_{-2,0} - 1,5704 \cdot 10^{-5} z_{0,0} q_{0,-1} + 1,1195 \cdot 10^{-2} z_{-1,0} z_{0,-1} + \\ + 1,4887 \cdot 10^{-5} q_{0,0} q_{0,+1} - 4,4883 \cdot 10^{-3} q_{-2,0} q_{0,-1} + 3,5511 \cdot 10^{-5} z_{0,-1} z_{0,+1},$$

$$n_{\text{см min}} = 4,059 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta^2(B)_{\min} = 0,070;$$

для экстраполяции

$$q_{0,+1} = 9,6915 + 2,9860 \cdot 10^{-2} z_{0,0} + 3,4797 \cdot 10^{-2} z_{+1,0} z_{-2,0},$$

$$n_{\text{см min}} = 2,085 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta^2(B)_{\min} = 0,043;$$

$$z_{0,+1} = 0,6470 - 0,1632 z_{0,-2} + 1,0349 \cdot 10^{-4} z_{0,0}^2 - \\ - 3,2834 \cdot 10^{-4} z_{0,0} z_{-2,0} - 2,6637 \cdot 10^{-4} z_{0,0} z_{-1,0} + 7,6496 \cdot 10^{-2} z_{0,-1} z_{0,-2} - \\ - 1,3309 \cdot 10^{-3} z_{-1,0} z_{0,-1} + 4,5817 \cdot 10^{-2} z_{0,-2}^2 - 3,2259 \cdot 10^{-6} z_{0,-2} z_{+1,0} + \\ + 0,3309 z_{-1,0}^2 + 4,6004 \cdot 10^{-4} z_{-1,0} z_{1,0},$$

$$n_{\text{см min}} = 7,245 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta^2(B)_{\min} = 0,076.$$

Как видно, не все аргументы, представленные в шаблоне, вошли в модели. Модель строится как бы на сокращенном шаблоне.

### Улучшение моделей при помощи комбинированного критерия

Приведенные выше модели дают высокую точность прогнозирования и экстраполяции при упреждении прогноза на  $T_y = 2 \div 3$  шага. Ошибка не превышает 8% (на последовательности  $C$ ). Для

долгосрочных прогнозов выбирается по 20 самым несмещенным моделям, из которых выбирается одна — по комбинированному критерию (рис. 58).

По комбинированному критерию получены модели:

$$q_{0,+1} = 9,5237 + 0,0937 z_{0,0} z_{0,-2} + \\ + 0,0031 z_{0,0} T_{0,0} + \\ + 0,2500 z_{0,-1} z_{0,-2} - \\ - 0,1403 z_{0,-1} z_{+1,0} - 0,0271 z_{0,-2}^2 + \\ + 0,0392 z_{0,-2} q_{-1,0} - \\ - 0,1782 z_{0,-2} z_{-1,0} - \\ - 0,0288 z_{-1,0}^2 - 0,1046 z_{-1,0} z_{1,0},$$

$$\rho_{\text{з min}} = 1,547 \cdot 10^{-3},$$

$$n_{\text{см}} = 6,950 \cdot 10^{-6},$$

$$\Delta^2(C) = 1,551 \cdot 10^{-3},$$

$$\Delta^2(B)_{\min} = 0,038;$$

$$z_{0,+1} = -0,1798 + 1,1573 z_{0,0} - \\ - 0,1124 z_{0,0}^2 + 9,6622 \times \\ \times 10^{-3} z_{-1,0} T_{0,0},$$

$$\rho_{\text{з min}} = 7,512 \cdot 10^{-4},$$

$$n_{\text{см}} = 5,987 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta^2(C) = 4,586 \cdot 10^{-4},$$

$$\Delta^2(B)_{\min} = 0,050;$$

для прогноза

$$q_{+1,0} = 12,4306 - 4,6477 z_{0,0} + \\ + 0,1615 q_{-2,0} z_{0,0} + 0,8896 z_{0,0}^2 - \\ - 0,0035 z_{0,0} z_{+1,0} + 0,0004 t_{+1,0},$$

$$k_{\text{з min}} = 1,182 \cdot 10^{-3},$$

$$n_{\text{см}} = 2,025 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta^2(C) = 1,165 \cdot 10^{-3}, \quad \Delta^2(B)_{\min} = 0,037;$$

$$z_{+1,0} = 1,1149 + 0,0200 z_{-1,0} T_{0,0} + 0,0042 z_{0,+1} T_{0,0},$$

$$\rho_{\text{з min}} = 2,969 \cdot 10^{-3}, \quad n_{\text{см}} = 5,402 \cdot 10^{-4}, \quad \Delta^2(C) = 3,937 \cdot 10^{-3}, \\ \Delta^2(B)_{\min} = 0,064.$$

Точность пошагового интегрирования, определяемая по формуле

$$\Delta^2(C) = \frac{\sum_{i=1}^N (q_n - q_{\Phi})^2 i}{\sum_{i=1}^N q_{\Phi}^2 i} \quad \text{для моделей, выбранных по комбинированному критерию, ниже при краткосрочном прогнозе (ошибка 15 \%}$$

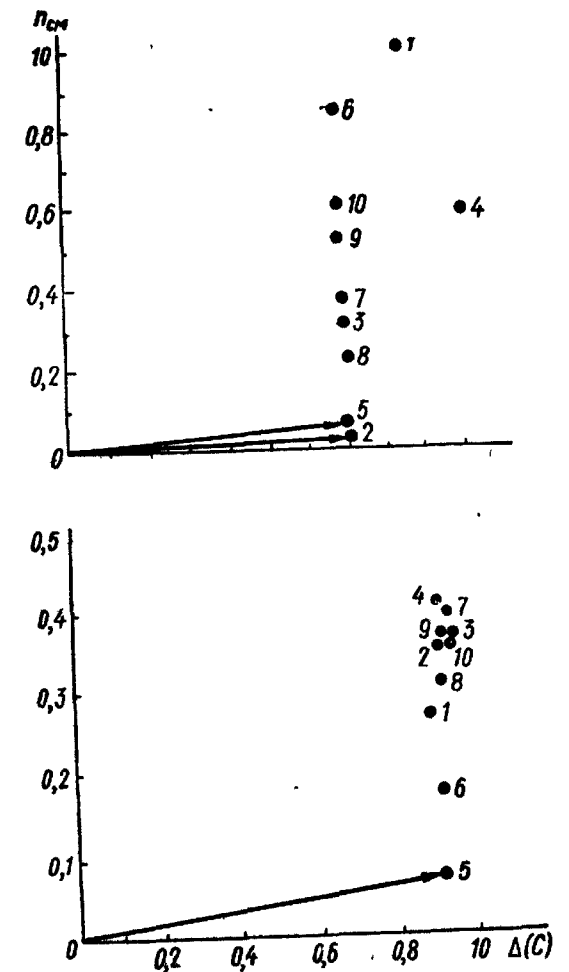


Рис. 58. Выбор на плоскости  $n_{\text{см}} - \Delta^2(C)$  модели оптимальной сложности (№5).

вместо 10%), но значительно выше при долгосрочном прогнозе и при далекой экстраполяции на 10—20 шагов по оси  $x$ , чем для моделей, выбранных по критерию минимума смещения (ошибка 20% вместо 30%).

**Пример 28.** Задача в координатах  $(t, x, y, z)$ ; четырехмерное пространство [40]. В задаче идентификации поля минерализации подземных вод Степного Крыма были заданы данные: всего 13 скважин. Равномерная сетка выбиралась так, чтобы скважины находились в ее узлах (всего на плоскости 200 узлов, т. е. как бы 200 скважин). Интерполяция по методу наименьших квадратов позволила определить оценки минерализации во всех узлах сетки, при всех сроках измерения. Однако «доверие» было оказано только узлам, в которых действительно расположены скважины, и узлам, расположенным не далее чем на один шаг мелкой сетки от них. Остальные узлы были отброшены. Этого достаточно, чтобы идентифицировать конечно-разностные уравнения поля минерализации для прогнозирования его развития во времени и экстраполяции на плоскости. Входные натурные данные были получены по 13 экспериментальным скважинам в районе Северного Крыма.

**Двумерная задача интерполяции\*.** Чтобы превратить пространственную задачу в двумерную, в каждом колодце измерялись только наибольшие значения минерализации воды. Скважины были расположены в случайном порядке по границам и внутри карты квадратной формы. Располагая тридцатью значениями минерализации для каждого момента измерения, можно интерполировать ее значения на все другие точки квадрата по методу наименьших квадратов, используя нелинейный полином четвертого порядка  $u = f(xy)$ . Опыт показал, что ошибка интерполяции мала, однако только внутри указанного квадрата. Поэтому сам по себе полином нельзя использовать для экстраполяции вне этой области.

**Четырехмерная задача прогнозирования и экстраполяции.** Двести точек интерполированных значений минерализации были взяты в таблицу исходных данных, для синтеза четырехмерной конечно-разностной модели, которая работает в области экстраполяции значительно лучше нелинейного полинома четвертого порядка и, кроме того, решает задачу прогнозирования во времени. Таблица была разделена на две части: сто точек использованы для образования множества  $A$  и такое же количество — для множества  $B$ , как было объяснено выше.

Согласно комбинаторному алгоритму МГУА полное уравнение включает в себя шаблоны, показанные на рис. 52, а для ряда моментов времени:

$$(u_{+1000} - u_{0000}) + \gamma_1 (u_{0+100} - u_{0000}) + \gamma_2 (u_{0+100} - 2u_{0000} + u_{0-100}) + \gamma_3 (u_{000+1} - u_{0000}) = f(txyz),$$

$$\text{где } \gamma_1 = \frac{\tau}{h}, \quad \gamma_2 = \frac{\tau}{h^2}$$

(первый индекс  $t$ , второй —  $x$ , третий —  $y$ , четвертый —  $z$ ).

Полный остаток был взят в следующем виде:

$$f(txyz) = a_0 + a_1x_1 + a_2y_2 + a_3z + a_4 \frac{Q_i t^{-0,35R_i}}{\sqrt{t} 4\pi R_i}.$$

Все частные уравнения (и соответствующие шаблоны) были получены при помощи «зануления» некоторых коэффициентов полного уравнения. Коэффициенты всех моделей оценивались по методу наименьших квадратов по всем точкам таблицы данных. Из всего множества моделей была выбрана только одна оптимальная модель, которая соответствует минимуму комбинированного критерия

$$\rho_1 = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(B)} \rightarrow \min,$$

\* В дальнейшем на первом этапе были применены квадратичные сплайны.

где  $n_{\text{см}}^2$  — критерий минимума смещения;  $\Delta^2(B)$  — критерий регулярности,

$$n_{\text{см}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{aN} (u_A - u_B)_i^2}{a \sum_{i=1}^N u_{\text{табл}i}}; \quad \Delta^2(B) = \frac{\sum_{i=1}^N (u - u_{\text{табл}i})^2}{\sum_{i=1}^N u_{\text{табл}i}^2}.$$

Оказалось, что шаблон с узлами 0000, +1000, —10 + 10, 00 — 10, 00 + 10, 00 — 10, 00 + 10 (и соответствующая ему теория) наилучшим образом удовлетворяет экспериментальным данным, причем остаток содержит только последний его член. Уравнение оптимальной модели, выбранное по алгоритму МГУА, такое:

$$u_{1000} = 1,325u_{0000} + 14,130 \frac{1}{h^2} (u_{00+10} - 2u_{0000} + u_{00-10}) - 2,150 \frac{1}{n} (u_{00+10} - u_{00-10}) - 0,08747u_{-10+10} - 0,002716 \frac{Q_i t^{-0,35R_i}}{\sqrt{t} 4\pi R_i},$$

где  $Q_i$  — приток воды в точке  $x = 0, y = 0$  (в другие скважины вода не накачивается);  $R_i$  — радиус-вектор точки  $(i, j, k)$ .

Если заданы граничные и начальные условия, то пошаговое интегрирование полученного уравнения позволяет найти экстраполяцию подземного водного горизонта во времени и пространстве.

В рассматриваемом примере внешний приток воды в область наблюдения был близок к нулю. В случаях, когда эта переменная не известна, ее можно оценить при помощи изложенного алгоритма по минимуму критерия несмещенности. Таким образом, алгоритм МГУА можно рассматривать как метод оценки притока.

### Оценка точности

#### и оправдываемости прогнозов

В метеорологии применяются следующие оценки точности и оправдываемости прогнозов.

#### 1. Среднеквадратическая ошибка:

а) для краткосрочного прогноза (до 3-х суток)

$$\delta_{\text{кр}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} (q_{\text{п}} - q_{\text{ф}})^2}{N_c},$$

где  $q_{\text{п}}$  — прогнозное значение переменных;  $q_{\text{ф}}$  — фактическое значение;  $q_0$  — значение в исходной (начальной) точке прогноза;  $N_c$  — точки прогноза (последовательность  $C$ );

б) критерий точности краткосрочного прогноза:  $N_c = 3$  точки ( $\Delta^2(C) \leq 1$ )

$$\Delta^2(C) = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} (q_{\text{п}} - q_{\text{ф}})^2}{\sum_{i=1}^{N_c} (q_{\text{ф}} - \bar{q}_{\text{ф}})^2},$$

где  $\bar{q}_\phi$  — среднее значение прогнозируемой переменной за каждый месяц (климатический прогноз).

2. Коэффициент корреляции  $r_{xy}$  на экзаменационной последовательности данных

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^{N_c} (x - \bar{x})(y - \bar{y})_i}{N_{\Pi} \sigma_x \sigma_y}.$$

3. Оценка оправдываемости прогноза по трехбалльной таблице. Прогноз  $q_{\Pi}$  и фактические значения  $q_{\phi}$  дискретизируются на три значения, так чтобы в каждой из дискрет было бы равное число данных  $q_{\Pi} = 1, 2, 3$ ,  $q_{\phi} = 1, 2, 3$ . Составляется таблица цены дискрет

$$\begin{aligned} (1-1), (2-2), (3-3) &= 1, \\ (2-1), (1-2), (3-2) &= 0,5, \\ (3-1), (1-3) &= 0. \end{aligned}$$

Допустим, прогноз таков, что имеется  $1/3$  дискрет  $q_{\Pi} = q_{\phi}$  с ценой 1 и  $2/3$  дискрет с ценой 0,5, что соответствует следующей матрице:

		$q_{\phi}$		
		1	2	3
$q_{\Pi}$	1	1	0,5	0
	2	0,5	1	0,5
	3	0	0,5	1

Тогда оценка оправдываемости такого прогноза равна

$$O = \frac{1}{3} - 1 + \frac{2}{3} 0,5 = \frac{2}{3}, \text{ или } 66,7\%.$$

*Связь наибольшего времени  
упреждения пошагового прогноза  
и размеров начальной области  
интерполяции*

Легко убедиться, что время упреждения пошагового прогноза не безгранично. Оно зависит от размеров области интерполяции.

Рассмотрим для конкретности дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial q}{\partial t} + a_1 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + a_2 \frac{\partial q}{\partial x} + a_3 q = f(tx).$$

Для повышения сходимости пошагового прогноза (о чем будет речь ниже) заменим его тремя дифференциальными уравнениями

первого порядка

$$\frac{\partial q}{\partial x} = Z; \quad \frac{\partial q}{\partial t} = W; \quad \frac{\partial W}{\partial x} = \frac{1}{a_1} [f(tx) - Z - a_2 W + a_3 q].$$

Заменяя производные конечными разностями, получим систему разностных уравнений. Процесс пошагового интегрирования этих уравнений зависит от способа определения конечных разностей. Покажем три способа такого определения (рис. 59):

$$\text{I) } (\Delta q)_t = q_{+10} - q_{00},$$

$$(\Delta q)_x = q_{00} - q_{0-1},$$

$$(\Delta^2 q)_x = (q_{00} - q_{0-1}) - (q_{0-1} - q_{0-2});$$

$$\text{II) } (\Delta q)_t = q_{+10} - q_{00},$$

$$(\Delta q)_x = q_{0+1} - q_{00},$$

$$(\Delta^2 q)_x = (q_{0+1} - q_{00}) - (q_{00} - q_{0-1});$$

$$\text{III) } (\Delta q)_t = q_{+10} - q_{00},$$

$$(\Delta q)_x = q_{00} - q_{0+1},$$

$$(\Delta^2 q)_x = (q_{00} - q_{0+1}) - (q_{0+1} - q_{0+2}).$$

Для пошагового интегрирования используются следующие уравнения:

при первом способе

$$Z_{+10} = q_{+10} - q_{00},$$

$$W_{+10} = q_{00} - q_{0-1},$$

$$\Delta W_{+10} = (q_{00} - q_{0+1}) - (q_{0+1} - q_{0-2}),$$

$$q_{+10} = Z_{+10} + q_{00} = a_1 \Delta W_{+10} + a_2 W_{+10} + (a_3 + 1) q_{00} - f(x_{00} t_{00});$$

при втором —

$$Z_{+10} = q_{+10} - q_{00},$$

$$W_{+10} = q_{+10} - q_{00},$$

$$\Delta W_{+10} = q_{+10} - q_{00}, \quad \Delta W_{+10} = (q_{+10} - q_{00}) - (q_{00} - q_{0-1});$$

$$\Delta q_{+10} = Z_{+10} - q_{00} = a_1 \Delta W_{+10} + a_2 W_{+10} + (a_3 + 1) q_{00} - f(t_{00} x_{00});$$

при третьем —

$$Z_{+10} = q_{+10} - q_{00}, \quad W_{+10} = q_{+10} - q_{00},$$

$$\Delta W_{+10} = (q_{00} - q_{0+1}) - (q_{0+1} - q_{0+2}),$$

$$\Delta q_{+10} = Z_{+10} + q_{00} = a_1 \Delta W_{+10} + a_2 W_{+10} + (a_3 + 1) q_{00} - f(t_{00} x_{00}).$$

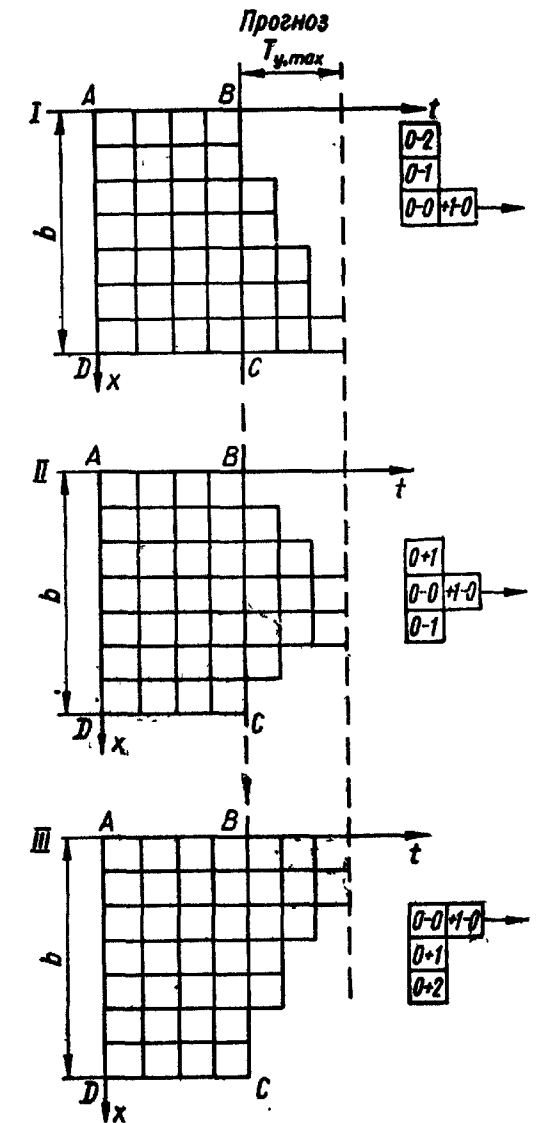


Рис. 59. Максимальное время упреждения пошагового прогноза для уравнений второго порядка  $T_{y, \max} = b/2$  и форма прогнозирующих шаблонов.



Легко понять, что, пользуясь такими формулами, можно по шагам заполнить значениями переменных  $q$ ,  $W$  и  $\Delta W$  только треугольные фигуры, показанные на рис. 59. Во всех трех случаях максимально достижимое время упреждения прогноза равно половине ширины начальной области и от величины шага не зависит. Для лучшего заполнения области прогноза рекомендуется применить все три способа последовательно один за другим.

Если в качестве примера взять уравнение первого порядка, то получилось бы, что максимальное время упреждения равно ширине начальной области. Для других уравнений действует формула

$$T_{y \max} = \frac{b}{p},$$

где  $T_{y \max}$  — наибольшее время упреждения прогноза;  $b$  — ширина начальной области;  $p$  — порядок высшей производной в уравнении.

Существует ряд приемов преодоления указанного предела. Например, область интерполяции и область прогноза можно объединить и принять за новую, расширенную область интерполяции. На расширенной области можно переобучить шаблоны и выполнить снова пошаговый прогноз. Другой способ состоит в определении значения корней и построении двумерного гармонического поля.

Достижение точности долгосрочных и сверхдолгосрочных прогнозов связано с применением дву- и трехмерного отсчета времени и специальных временных и пространственных критериев баланса прогнозов, к рассмотрению которых мы и переходим.

#### Критерии, используемые для долгосрочных прогнозов

Самоорганизацию можно определить как всемерное уменьшение необходимой априорной информации. Минимум миниморум априорной информации состоит в том, что люди приходят к соглашению об общем принципе (идее) формирования критериев селекции модели. Эти принципы могут быть выражены в самом общем виде, например так:

а) «прогноз должен быть точным»; из этого непосредственно следует применение критерия регулярности и критерия сходимости (точности) пошагового прогноза (для разностных моделей)  $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ ,  $i^2(N_1) \rightarrow \min$ ;

б) «модель вчера, сегодня и завтра должна быть одной и той же»; отсюда следует критерий минимума смещения  $n^2_{\text{см}} \rightarrow \min$ .

в) «закон связи между переменными завтра должен быть таким же, как и сегодня»; ЭВМ при таком условии применяет критерий баланса переменных  $B^2 \rightarrow \min$ ; г) «закон изменения модели завтра, должен быть таким же, как сегодня» и т. п.

Важно отметить, что подобные условия поиска модели оптимальной сложности можно сравнительно легко согласовать между учеными с противоположными взглядами. Все остальное выполняет ЭВМ по алгоритмам самоорганизации прогнозирующих моделей.

Для определения критерия минимума смещения система условных уравнений делится на две равные части  $A$  и  $B$ . Каждая из них при помощи процедуры Гаусса (метод наименьших квадратов) приводится к системе нормальных уравнений. Решая системы нормальных уравнений, находим оценки коэффициентов двух шаблонов  $q_{+10}^{(A)}$  и  $q_{+10}^{(B)}$ .

Критерий минимума смещения для полного шаблона имеет вид

$$n_{\text{см}}^2 = \frac{\sum_{i=3}^N (q_{+10}^{(A)} - q_{+10}^{(B)})^2}{\sum_{i=3}^N q_{+10}^{\text{табл}}}$$

Три точки «пропадают» из-за особенности начального положения шаблона (рис. 53).

Критерий минимума смещения может быть временным, пространственным и пространственно-временным в зависимости от того, по какой оси (времени или пространства) происходит разделение точек. Данные таблиц, составленных для шаблонов, ранжируются по дисперсии выходной величины (стоящей в левой части уравнения) и используются для определения критерия минимума смещения. Для этого, как указывалось, ранжированный ряд точек таблицы шаблонов делится на части  $A$  и  $B$ , по которым получают указанные выше две системы условных уравнений.

Обратим внимание на то, что делению на части подлежит не исходное цифровое поле данных, а таблицы, получаемые в ходе перемещения шаблонов по этому полю.

Для вычисления критерия точности пошагового прогноза делить систему условных уравнений не нужно. Коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$ ,  $a_4$  и  $a_5$  определяются на всех точках таблицы. Величина критерия вычисляется при помощи пошагового интегрирования, начиная с крайнего левого положения шаблона (рис. 53 и 54). Перемещая шаблон вдоль оси  $x$ , находим экстраполируемые значения выходной величины  $q_{\text{э}}$ . Критерий соответствует формуле

$$i^2(N) = \frac{\sum_{i=3}^N (q_{\text{табл}} - q_{\text{э}})^2}{\sum_{i=3}^N q_{\text{табл}}^2} \rightarrow \min.$$

**Пример усреднения во времени.** Прогноз среднегодового стока данной реки должен совпадать с суммой

прогнозов ее стока за каждый из двенадцати месяцев:

$$b_i = \left[ \bar{Q}_{\text{год}}^* - \frac{1}{12} (\bar{q}_1^* + \bar{q}_2^* + \dots + \bar{q}_{12}^*) \right] \rightarrow \min.$$

Временной критерий удобно использовать при прогнозе циклических процессов.

Пример усреднения по пространству. Прогноз стока воды в каждой из трех рек — Нева, Днепр и Волга ( $x_1^*, x_2^*, x_3^*$ ) должен совпадать с прогнозом суммы стоков этих рек  $x_4^*$  на интервале прогноза от  $t = 1$  до  $t = T_y$

$$b_i = \sum_{t=1}^{T_y} \left[ x_4^* - \frac{1}{3} (x_1^* + x_2^* + x_3^*) \right] \rightarrow \min.$$

Здесь звездочками указаны прогнозные значения переменных.

Критерий баланса переменных применяется при одновременном прогнозировании нескольких переменных. Он требует, чтобы некоторое соотношение (закон связи) между ними, наблюдаемое в данное время, сохранялось и в будущем, на интервале прогноза.

Критерии баланса следует применять в ансамбле с другими критериями. Без этого выбор модели получается многозначным: равные значения критерия соответствуют нескольким моделям. Критерий баланса прогнозов можно построить, используя различные усреднения переменных во времени или пространстве. Так же, как и критерий минимума смещения, критерий баланса прогнозов может быть временным, пространственным или пространственно-временным.

Увеличение периода или области усреднения повышает точность и время заблаговременности прогноза, но, с другой стороны, уменьшает ценность (информативность) прогнозов. Исходя из этого следует указать (назначить) наименьшие и наибольшие допустимые усреднения как во времени, так и по пространству.

Критерий баланса прогнозов с усреднением переменных во времени (при усреднении за сезон и за год) применяется для циклических процессов. Его можно записать так:

$$b_i^2 = \left[ Q_{\text{год}}^* - \frac{1}{4} (q_3^* + q_6^* + q_9^* + q_{12}^*) \right]^2; \quad B^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2 \rightarrow \min,$$

где  $q_3^*, q_6^*, q_9^*, q_{12}^*$  — прогнозы среднесезонных значений переменной (зима, весна, лето, осень);  $Q_{\text{год}}^*$  — прогноз среднегодового значения;  $N$  — число лет прогноза.

При самоорганизации модели наземного физического поля удобно использовать цилиндрические полярные координаты. При этом шаблон разностного уравнения является неявным и имеет всего шесть узлов (см. пример на стр. 227).

Критерий баланса прогнозов с усреднением переменных по

пространству можно записать аналогично предыдущему критерию

$$b_i^2 = \left[ \frac{1}{8} (q_1^* + q_2^* + \dots + q_8^*) - Q_0^* \right]^2, \quad B^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2 \rightarrow \min.$$

Здесь  $q_1^*, q_2^*, \dots, q_8^*$  — прогнозы, полученные для восьми шаблонов, образующих кольцо вокруг оси цилиндра (рис. 60, а);  $Q_0^*$  — прогноз среднего значения переменной, усредненной по всей площади кольца;  $N$  — число шагов проверки прогноза (по оси времени).

Выбор области усреднения в виде кольца удобен тем, что шаблоны включают в себя как более северные, так южные районы, т. е. достигается подобие усреднения за цикл. Становятся применимыми методы прогнозирования циклических процессов.

Среднее значение переменных, усредненное по площади с центром на оси цилиндра, охватывающего данное кольцо шаблонов, обозначено через  $q$ . Эта величина прогнозируется отдельно, по комбинаторному алгоритму МГУА, на один шаг (день) вперед. Обозначим полученную при помощи такого отдельного прогноза величину  $Q_0^*$ . Тогда при выборе шаблонов можно потребовать выполнение условия баланса прогнозов в следующем виде:

$$b_i^2 = \left( Q_0^* - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^k q_i^* \right)^2 \rightarrow \min,$$

где  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^k q_i^*$  — усредненная по числу всех  $N$  точек прогноза сумма значений данной переменной (при

восьми шаблонах в кольце  $k = 8$ , рис. 59, а).

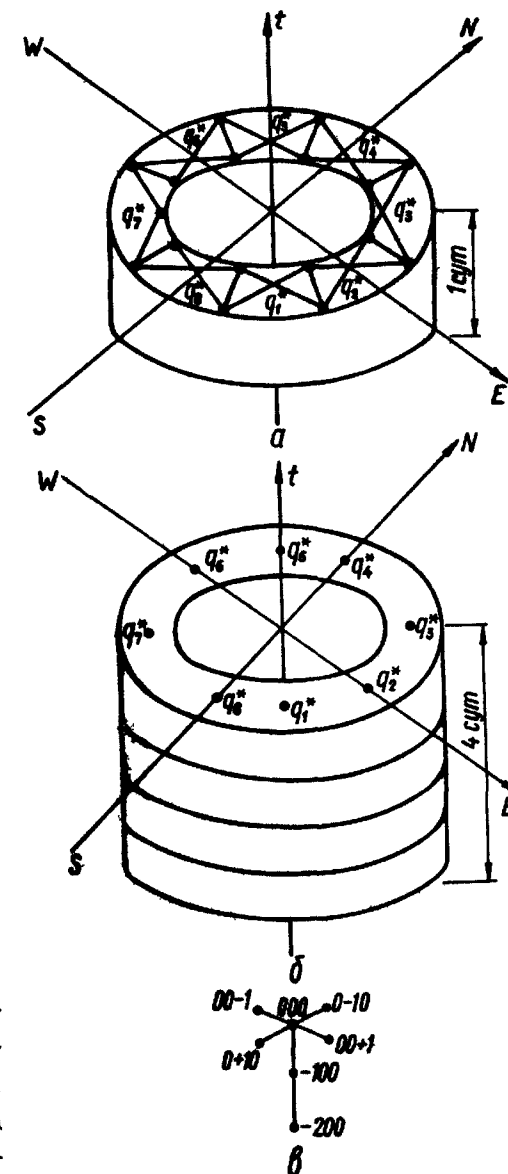


Рис. 60. Пояснение критериев баланса с усреднением:

а — по пространству: среднее восьми прогнозов должно быть равно прогнозу средних по всей площади кольца

$$b_i^2 = \left[ q_0^* - \frac{1}{8} (q_1^* + \dots + q_8^*) \right]^2, \quad B^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^N b_i^2 \rightarrow \min; \quad б — во времени и по$$

пространству: среднее  $8 \cdot 4 = 32$  прогнозов должно быть равно прогнозу средних для всего объема трубки  $B^2 =$

$$= \sum_{i=1}^W b_i^2 \rightarrow \min; \quad в — форма локального шаблона.$$

Критерий баланса прогнозов с усреднением во времени и по пространству (отсчет времени — в сутках и четырехдневках; отсчет пространства — один шаблон и площадь кольца) можно записать так:

$$b_i^2 = \left[ \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{4} (q_1^* + q_2^* + q_3^* + q_4^*)_1 + \frac{1}{4} (q_1^* + q_2^* + q_3^* + q_4^*)_2 + \dots + \frac{1}{4} (q_1^* + q_2^* + q_3^* + q_4^*)_8 \right\} - Q_0^* \right]^2,$$

$$B^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2 \rightarrow \min,$$

где  $Q_0^*$  — прогноз значения переменной, усредненной по всему объему трубки, состоящей из четырех колец (рис. 60, б).

#### Задача моделирования поля диффузии загрязняющих веществ по опытным данным [31]

Моделирование физических полей осуществляет идентификацию (построение) картины поля и оценивание его параметров. Математические модели поля необходимы для прогнозирования его дальнейшего развития или экстраполяции на соседние области, а также для синтеза закона оптимального управления полем. Примером физического поля, подлежащего моделированию, может служить поле загрязнения водного пространства. Этот пример используется ниже для пояснения весьма общих методов моделирования поля.

Для построения поля загрязнения водного пространства используются данные наблюдений контрольных станций и данные о месторасположении, интенсивности и времени сбросов загрязняющих веществ. Выбор выходной величины и аргументов определяет собой так называемую постановку задачи моделирования. Последняя зависит от цели моделирования (интерполяция, экстраполяция или прогноз), а также от наличия исходной информации, используемой для синтеза модели.

Мы приводим алгоритмы решения трех задач моделирования полей загрязнения среды в следующих трех постановках: 1) по данным контрольных станций; 2) по информации о сбросах загрязнений и 3) по тем и другим данным вместе (комбинированная задача).

В первой задаче уравнение диффузии не задается априори и находится по экспериментальным данным по принципу самоорганизации при помощи перебора шаблонов и их нелинейностей. При этом число членов полного уравнения обычно значительно превышает число опытных данных. Оценки коэффициентов определяются по методу наименьших квадратов. Решение находится при помощи пошагового интегрирования конечно-разностного уравнения. Знать это решение в аналитической форме не требуется.

Во второй задаче аргументы конечно-разностной модели выбираются так, чтобы вид уравнений соответствовал матрице «вход — выход» [31, 109].

Добавочные обозначения: аргументами моделей могут быть как текущие значения координат  $t, x, y, z$ , так и значения замеров контрольных станций  $q_j^{(i)}$  ( $\tau$ ) и сбросов  $\lambda_j^{(i)}$  ( $\tau$ ) (текущие и запаздывающие аргументы). Здесь  $i$  — номер контрольной станции;  $j$  — номер компоненты загрязнения;  $\tau$  — запаздывание измерения данного аргумента. Например,  $\lambda_{2(-3)}^{(1)}$  — сброс второй составляющей загрязнения первого источника с запаздыванием на три такта времени;  $q_{1(0)}^{(2)}$  — замер первой составляющей загрязнения на второй станции в текущий момент времени.

Отсутствие нижнего индекса означает, что рассматривается только одна компонента загрязнения.

*Моделирование поля по разностным аналогам уравнений диффузии, основанным на принципе ближнего действия (первая задача)*

Рассматриваемая задача имеет одну следующую постановку: моделирование поля загрязнения выполняется исключительно по данным нескольких контрольных станций (первая задача, первая постановка: I-1).

Первая постановка задачи моделирования поля имеет целью построение поля загрязнения не только в области интерполяции (охваченной контрольными станциями), но и на значительном расстоянии за пределами этой области, т. е. построение экстраполяции поля и прогнозов его развития во времени. При этом предполагается, что сбросы загрязнений сравнительно мало изменяются по времени, и поэтому информация о них непосредственно не учитывается. Косвенно она содержится в данных измерений контрольных станций. Поэтому в первой постановке множество аргументов включает только данные контрольных станций.

Двухэтапная интерполяция состоит в том, что сначала данные станций интерполируются (между станциями) при помощи параболических сплайнов.

Полученное «цифровое поле» используется для синтеза разностных моделей, пригодных для прогнозирования и экстраполяции за пределами области интерполяции.

Для краткости изложения общего метода ниже показаны уравнения только для двумерной модели  $q = (t, x)$ . Легко по аналогии составить подобные уравнения и для трехмерного поля

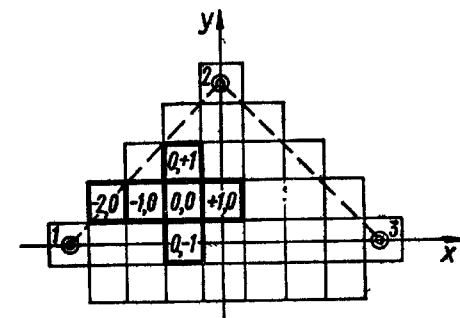


Рис. 61. Применение шаблонов для экстраполяции в направлении оси  $x$  области загрязнения, заключенной между контрольными станциями 1, 2 и 3.

$q = f(x, y, z)$ . Областью интерполяции является часть пространства, лежащая внутри многогранника, вершинами которого являются пограничные контрольные станции. Область экстраполяции находится вне этого (в общем случае трехмерного) многогранника (рис. 61).

При прогнозировании область интерполяции лежит внутри временного интервала опытных данных, область прогнозирования — вне области интерполяции процесса.

Уравнение для параметров загрязнения при шаблоне 5 (рис. 53) можно записать в векторной форме следующим образом:  
для прогнозирования

$$q_{j(+1,0)} = \alpha_{jпр} [q_{k(0,0)}, q_{k(0,-1)}, q_{k(-1,0)}, q_{k(-2,0)}, \dots, q_{k(-\tau,0)}];$$

для экстраполяции

$$q_{j(+1,0)} = \alpha_{jэк} [q_{k(0,0)}, q_{k(-1,0)}, q_{k(0,-1)}, q_{k(+1,0)}, q_{k(0,-2)}, \dots, q_{k(0,-\tau)}],$$

где  $\alpha_j$  — вектор полиномиальных функций (линейные, нелинейные, без ковариаций или с неполным учетом ковариаций) размерности  $\tau$ .

Во всех приводимых здесь уравнениях вектор измеряемых внешних переменных, стоящий в правой части, в общем случае может содержать сами переменные, их запаздывающие значения, а также ковариации (по две), которые можно рассматривать как отдельные переменные, например

$$q_{1(0)}q_{2(0)} \dots q_{1(-1)}q_{2(-1)} \dots q_{1(0)}q_{2(0)} (q_{1(0)}q_{1(-1)}) \dots,$$

где  $q_j$  и  $q_k$  — векторы параметров загрязнения размерности  $j$ ,  $k = 1, 2, 3 \dots$

В уравнениях, приводимых ниже, вектор ковариации для простоты записи не показан. Например, первая составляющая загрязнения при  $j = 2$ ,  $k = 2$ ,  $\tau = 2$  запишется в виде:

для прогноза

$$q_{1(+1,0)} = \alpha_{1пр} [q, (0, 0), q_{1(0,-1)}, q_{1(0,+1)}, q_{1(-1,0)},$$

$$q_{1(-2,0)}, q_{2(0,0)}, q_{2(0,-1)}, q_{2(0,+1)}, q_{2(-1,0)}, q_{2(-2,0)}];$$

для экстраполяции

$$q_{1(0,+1)} = \alpha_{1эк} [q_{1(0,0)}, q_{1(-1,0)}, q_{1(+1,0)}, q_{1(0,-1)}, q_{1(0,-2)}, q_{2(0,0)},$$

$$q_{2(-1,0)}, q_{2(+1,0)}, q_{2(0,-1)}, q_{2(0,-2)}].$$

*Моделирование полей по разностным уравнениям, соответствующим расширенной матрице «вход — выход», основанной на принципе дальнего действия (вторая задача)*

Кроме аналогов непрерывных уравнений диффузии, для моделирования физических полей применяются уравнения, соответствующие функциональной матрице «вход — выход» (вторая задача) [31, 109].

Решение второй задачи моделирования поля рекомендуется в том случае, когда требуется дать прогноз изменения поля загрязнения при изменении сбросов во времени. Для экстраполяции поля далеко за пределы указанной области решение второй задачи не обеспечивает точности.

Вторая задача имеет три постановки:

а) моделирование по матрице «вход — выход», использующее информацию исключительно контрольных станций (вторая задача, первая постановка II-1);

б) моделирование по матрице «вход — выход», использующее информацию исключительно о выбросах загрязнений (вторая задача, вторая постановка II-2);

в) моделирование, учитывающее информацию контрольных станций о выбросах источников загрязнения (вторая задача, третья (общая) постановка II-3).

В первой постановке для  $i$ -й станции используется следующее уравнение прогноза:

$$q_{j(+1)}^i = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^m \alpha S_j^s(q^s),$$

где  $q^s = [q_{1(0)}^s, q_{1(-1)}^s, q_{1(-\tau)}^s, \dots, q_{j(0)}^s, q_{j(-1)}^s, q_{j(-i)}^s] \quad j = 1, \dots, n$  — параметры загрязнения;  $\alpha$  — оператор полиномиальных функций;  $m$  — количество станций;  $n$  — количество компонент.

Например, при  $m = 3$ ,  $n = 2$ ,  $\tau = 2$

$$q_{1(+1)}^1 = \alpha_{11} [q_{1(0)}^{(2)}, q_{1(-1)}^{(2)}, q_{1(-2)}^{(2)}, q_{2(0)}^{(2)}, q_{2(-1)}^{(2)}, q_{2(-2)}^{(2)}] + \\ + \alpha_{31} [q_{1(0)}^{(3)}, q_{1(-1)}^{(3)}, q_{1(-2)}^{(3)}, q_{2(0)}^{(3)}, q_{2(-1)}^{(3)}, q_{2(-2)}^{(3)}].$$

Как видно, загрязнение на данной  $i$ -й станции (или точке поля) ставится в непосредственную зависимость от значений показателей, снятых на ближайших станциях, с различными запаздываниями во времени.

Во второй постановке для  $i$ -й станции уравнение прогноза имеет следующий вид:

$$q_{j(+1)}^i = \sum_{s=1}^p \beta S_j(\lambda^s),$$

где  $q_j$  — параметры загрязнения;  $\lambda^s = [\lambda_{1(0)}^s, \lambda_{1(-1)}^s, \lambda_{1(-\tau)}^s, \dots, \lambda_{n(0)}^s, \lambda_{n(-1)}^s, \lambda_{n(-\tau)}^s]$  — вектор сброса;  $\beta S_j$  — оператор полиномиальных функций;  $p$  — количество источников.

В третьей (общей) постановке задачи матрица «вход — выход» расширяется при помощи введения в нее данных замеров ближайших контрольных станций наряду со сбросами источников.

В общей постановке для  $i$ -й станции уравнение прогноза имеет вид

$$q_{j(+1)}^i = \sum_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^m \alpha S_j(q^s) + \sum_{s=1}^p \beta S_j(\lambda^s).$$

В третьей постановке в матрице участвуют как  $\lambda$ , так и  $q$ .

*Моделирование полей при одновременном использовании принципов «ближнего» и «дальнего» действий (третья задача)*

Третья задача имеет три постановки:

1) моделирование, использующее принцип «ближнего» действия и матрицу «вход — выход», учитывающую информацию контрольных станций (третья задача, первая постановка III-1); здесь используется сочетание задач I-1 и II-1;

2) моделирование, использующее принцип «ближнего» действия и матрицу «вход — выход», учитывающую информацию о сбросах (третья задача, вторая постановка III-2), что является комбинацией задач I-1 и II-2;

3) моделирование, использующее принцип «ближнего» действия и расширенную матрицу «вход — выход», учитывающую как данные замеров контрольных станций, так и сбросы источников загрязнения (третья задача, третья (общая) постановка III-3).

В этой постановке используется сочетание подходов к решению задач I-1 и II-3.

*Переборы шаблонов и степени нелинейности (двойной перебор).*

При числе слагаемых полного полинома, меньшем двадцати, для выбора модели оптимальной сложности используется комбинаторный алгоритм МГУА (с занулением всевозможных комбинаций членов полного полинома), предусматривающий перебор всех возможных частиц полиномов. При нем достаточно рассматривать только один, наиболее полный, заведомо достаточный шаблон, степень которого равна числу аргументов и тогда перебор шаблонов не требуется. При числе слагаемых полного полинома более двадцати для выбора модели используется многорядный (пороговый) алгоритм МГУА. Здесь возможен пропуск опробывания некоторых частных полиномов.

Чтобы расширить перебор, целесообразно применять перебор шаблонов (состава аргументов), начиная с самого простого двух-клеточного шаблона (см. рис. 53, 54), и перебор всевозможных нелинейных полиномов для каждого из шаблонов по многорядному алгоритму МГУА с переобозначением переменных, кончая полиномом, в котором высшая степень равна числу аргументов, указанному в данном шаблоне.

Такой двойной перебор шаблонов и нелинейных полиномов дает более полный просмотр множества возможных частных полиномов в задачах, где из-за большого числа аргументов  $n > N$  нельзя применить более простой комбинаторный алгоритм МГУА.

**Пример 29.** Сравнение моделей на тестовой задаче построения поля загрязнения водоема. Методика использования тестовых задач для сравнения моделей состоит в том, что поле рассчитывается по известной детерминированной формуле. Вид дифференциального уравнения, по которому получена формула, определяет собой вид опорной функции, применяемой в алгоритме МГУА.

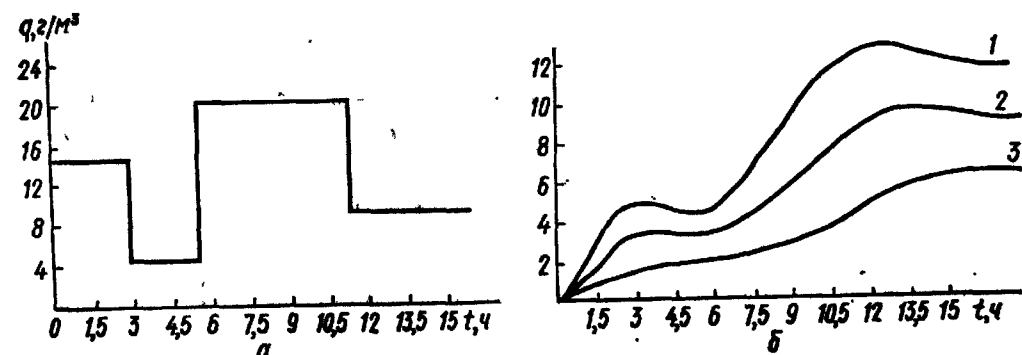


Рис. 62. Графики изменения сброса и концентрации загрязняющих веществ: а — изменение сброса загрязняющих веществ во времени (для тестовой задачи); б — изменение концентрации загрязняющих веществ на контрольных станциях 1, 2, 3.

В данном примере расчет поля выполнен по формуле, которая позволяет определять изменение загрязнения в пространстве и времени при отсутствии течения (ветра) в предположении чистой диффузии частиц в пространстве:

$$q = \frac{2\pi R}{kx} \int_{\frac{R}{kt}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx,$$

где  $k$  — коэффициент турбулентной диффузии;  $R$  — расстояние контрольной станции от источника;  $t$  — время от начала выброса и до момента замера.

Число источников в данном примере принято равным единице. Закон изменения сбросов и концентрации загрязняющих веществ во времени показан на рис. 62 по исходным данным, полученным по формуле. Синтезировались разностные модели семи видов, которые сравнивались по точности пошагового интегрирования на участке интерполяции и за его пределами, а аргументами выбросов являлись их интегральные значения.

В результате получены такие лучшие модели:

первая постановка задачи (модель I-1, рис. 63)

$$\begin{aligned} q_{+0}^{(+1)} = & 1,0620 - 0,17790q_{+1,0}^{(1)} + 0,01673q_{-2,0}^{(1)} + 0,63904q_{0,-1}^{(1)} - 0,0188q_{0,0}^{(1)} + \\ & + 0,00054q_{0,0}^{(1)}q_{1,0}^{(1)} - 0,1059q_{0,0}^{(1)}q_{2,0}^{(1)} + 0,00233q_{0,0}^{(1)}q_{-3,0}^{(1)} + 0,0001q_{0,0}^{(1)}q_{0,1}^{(1)} - \\ & - 0,10297q_{0,0}^{(1)}q_{0,+1}^{(1)} - 0,00894q_{1,0}^{(1)} + 0,00947q_{-2,0}^{(1)} - 0,00912q_{1,0}^{(1)}q_{-3,0}^{(1)} + \\ & + 0,0894q_{-3,0}^{(1)}q_{0,-1}^{(1)} - 0,02334q_{-1,0}^{(2)}q_{0,+1}^{(1)} + 0,00188q_{-2,0}^{(1)2} - 0,0035q_{-2,0}^{(1)}q_{0,-1}^{(1)} + \\ & + 0,1785q_{-1,0}^{(1)}q_{0,+1}^{(0)} + 0,00894q_{-1,0}^{(1)}q_{0,-1}^{(1)} - 0,02334q_{-1,0}^{(1)}q_{0,+1}^{(1)} + 0,0018q_{-2,0}^{(1)2} + \\ & + 0,007531q_{0,-1}^{(1)} - 0,00064q_{0,-1}^{(1)}q_{0,+1}^{(1)}, \quad \rho = 0,032; \quad n_{\text{см}} = 0,017; \\ & \Delta(C) = 0,027; \quad i = 0,182; \end{aligned}$$

вторая постановка задачи (модель II-1, рис. 64, а)

$$q_{+1}^1 = 2,73520 + 0,00031q_0^{(2)} + 0,00001q_{-2}^{(2)} - 0,0004q_{-1}^{(3)} + 0,0000q_{-2}^{(3)} +$$

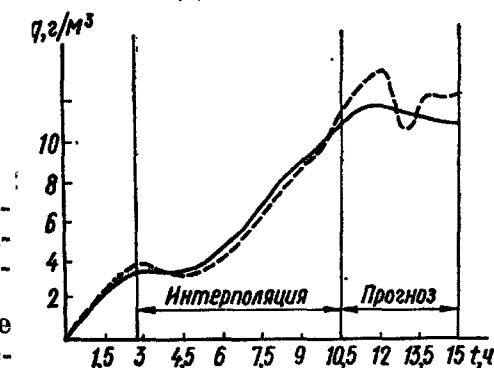


Рис. 63. Прогноз по принципу ближнего действия (модель I-1).

$$+ 0,29626q_0^{(2)}q_{-2}^{(2)} + 0,46974q_0^{(2)}q_{-2}^{(2)} - 0,66518q_0^{(2)} + 4,86824q_0^{(2)}q_{-1}^{(3)} -$$

$$- 1,95950q_{-1}^{(2)}q_{-2}^{(2)} + 1,79479q_{-1}^{(3)}q_{-3}^{(2)} + 1,58739q_{-3}^{(2)} - 1,41426q_{-3}^{(3)2} +$$

$$+ 3,44364q_{-1}^{(3)2}q_{-2}^{(3)} + 9,67937q_{-1}^{(3)}q_{-3}^{(3)} - 3,8796q_{-2}^{(3)}q_{-3}^{(3)}, \quad p = 0,061; \quad n_{\text{см}}^2 = 0,046;$$

$$\Delta^2(C) = 0,04; \quad i = 0,188;$$

модель II-2, рис. 64, б

$$q_{+1}^1 = 2,737090 + 0,000035\lambda_{-2}^2 - 0,00000\lambda_0\lambda_{-1} - 0,000382\lambda_0\lambda_{-3}^2 + 0,00039\lambda_{-1}\lambda_2^2 +$$

$$+ 0,000548\lambda_{-2}\lambda_{-1}^2 - 0,00548\lambda_{-2}\lambda_{-1}^2 - 0,000002\lambda_0^4 - 0,000003\lambda_0^2\lambda_{-3}^2 +$$

$$+ 0,000002\lambda_{-1}^2;$$

$$p = 0,089; \quad n_{\text{см}} = 0,082; \quad \Delta(C) = 0,039; \quad i = 0,169;$$

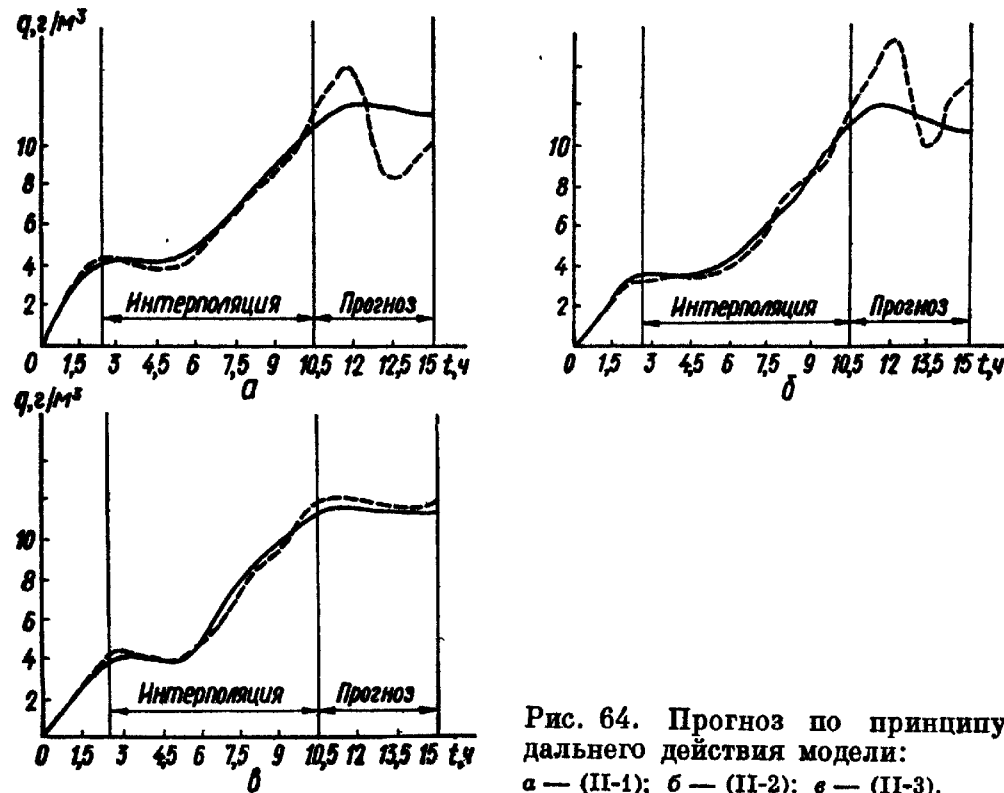


Рис. 64. Прогноз по принципу дальнего действия модели:  
а — (II-1); б — (II-2); в — (II-3).

модель II-3, рис. 64, в

$$q_{+1}^{(1)} = 2,03610 - 2,18146q_{-1}^{(2)} - 0,21021q_{-3}^{(2)} + 0,00754\lambda_0^2 + 0,10985q_0^{(2)}q_{-2}^{(2)} +$$

$$+ 0,392442q_{-1}^{(2)} + 0,00002q_0^{(2)2} - 0,000002q_0^{(2)}q_{-1}^{(3)} - 0,000001q_0^{(3)2};$$

$$\rho = 0,08; \quad n_{\text{см}} = 0,054; \quad \Delta(C) = 0,059; \quad i = 0,151;$$

третья постановка задачи:  
модель III-1, рис. 65, а

$$q_{+1,0}^{(1)} = 2,62225 - 0,25160q_0^{(1)}q_{0,0}^{(2)} + 0,12961q_{1,0}^{(1)2} + 0,00425q_{-1,0}^{(1)}q_{-2,0}^{(2)} -$$

$$- 0,94186q_{-1}^{(1)}q_{-1}^{(2)} + 0,3246q_{-1,0}^{(1)}q_{-2,0}^{(2)} - 0,1388q_{-2,0}^{(1)}q_{0,0}^{(2)} + 0,011586q_{-1}^{(1)}q_{-1}^{(2)} +$$

$$+ 0,3246q_{-1,0}^{(2)} - 0,13988q_0^{(2)} + 0,2071q_{-2,0}^{(2)}q_{0,-1}^{(1)} - 2,64613q_0^{(3)}q_{-2,0}^{(3)} +$$

$$+ 0,78000q_{-2}^{(3)}q_{0,-1}^{(1)} - 0,073q_{0,-1}^{(1)}q_{0,+1}^{(1)};$$

$$\rho = 0,064; \quad n_{\text{см}} = 0,063; \quad \Delta(C) = 0,026; \quad i = 0,176;$$

модель III-2, рис. 65, б

$$q_{+1}^1 = 0,422774 - 0,77919q_0^{(1)} - 0,57968q_{-1,0}^{(1)} - 0,49081q_{-3,0}^{(1)} + 0,93996q_0^{(1)} +$$

$$+ 1,15023q_{0,+1}^{(1)} + 0,0442\lambda_{-2,0} + 0,0047q_0^{(1)2} + 0,00166q_0^{(1)}q_{-1,0}^{(1)} + 0,00184q_0^{(1)}q_{-2,0}^{(1)} +$$

$$+ 0,073q_{-1,0}^{(1)}q_{-2,0}^{(1)} - 0,0021q_{-2,0}^{(1)}q_{0,+1}^{(1)} + 0,1874q_{3,0}^{(1)}q_{0,-1}^{(1)} - 0,00322q_{0,-1}^{(1)2} -$$

$$- 0,00196q_0^{(1)}q_{0,-1}^{(1)}; \quad \rho = 0,033; \quad n_{\text{см}} = 0,009; \quad \Delta(C) = 0,031; \quad i = 0,149;$$

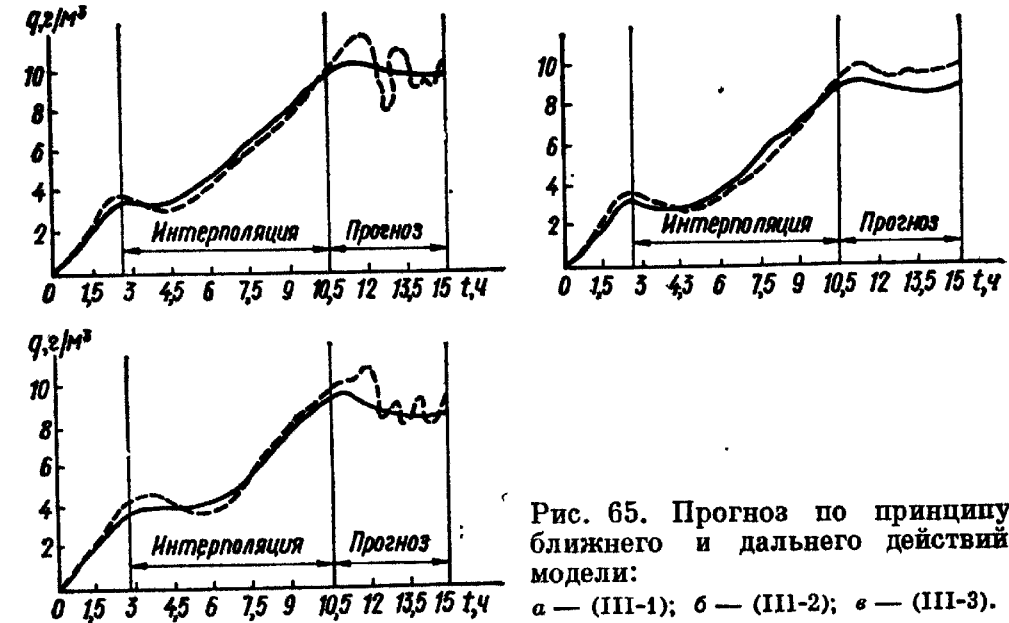


Рис. 65. Прогноз по принципу ближнего и дальнего действий модели:  
а — (III-1); б — (III-2); в — (III-3).

модель III-3, рис. 65, в

$$q_{+1,0}^{(1)} = 1,39619 + 0,03175q_{-1,0}^{(1)} - 0,00247q_{-2,0}^{(1)} + 0,0381q_{-3,0}^{(1)} + 0,46139q_0^{(2)} +$$

$$+ 0,38442q_0^{(1)} - 0,00115q_{0,+1}^{(1)} + 0,0616\lambda_{-3} - 0,03674\lambda_0^2 - 0,0016q_0^{(1)}q_0^{(2)} -$$

$$- 0,4848q_0^{(1)}q_{-1,0}^{(2)} - 0,14929q_0^{(2)}q_{0,+1}^{(1)} + 0,08367q_0^{(1)}q_{0,-1}^{(2)} + 0,22246q_{-2,0}^{(3)2};$$

$$\rho = 0,115; \quad n_{\text{см}} = 0,05; \quad \Delta(C) = 0,04; \quad i = 0,246.$$

**Сравнение моделей.** Решение первой и третьей задач дает возможность построить картину поля, прогнозировать его во времени и экстраполировать вдоль пространственных координат.

Решением второй задачи определяются значения параметров загрязнений в точках расположения контрольных станций. По полученным данным можно построить прогнозы и затем при помощи интерполяции найти поле в области, расположенной внутри многоугольника, вершинами которого являются точки станций (т. е. в области интерполяции (рис. 61)).

Возможен и второй вариант алгоритма: сначала интерполируются данные станций и только потом строится прогноз для интересующих нас точек области интерполяции.



Прогнозы можно получить также в области интерполяции при помощи пошагового интегрирования уравнений вдоль оси времени. Для экстраполяции поля на соседние области решение второй задачи не подходит.

Модель по принципу ближнего действия I-1 дает менее точные прогнозы, чем модели по принципу дальнего действия II-3 и по комбинированному принципу III-2.

Наилучшей из всех семи моделей оказалась модель дальнего действия II-3, учитывающая как данные измерений на контрольных станциях, так и информацию об изменении мощности выбросов.

### Сходимость пошагового прогноза

При изучении устойчивости пошагового прогноза удобно рассматривать два вида сходимости: 1) сходимость к тренду; 2) сходимость к решению дифференциального уравнения с непрерывными производными.

С помощью применения критерия точности пошагового прогноза  $i^2(N) \rightarrow \min$ , а также использования неявных и многосвязных шаблонов условия сходимости к тренду выполняются практически во всех задачах прогноза. Во всяком случае указанная сходимость является экспериментальным фактом: нам не удалось, пользуясь МГУА в ряде задач, найти пример, в котором процесс прогноза не сходил бы жестко к его тренду. Значительно более трудно выполнимыми являются условия сходимости к решению непрерывного дифференциального уравнения, так как они включают в себя первое условие и, кроме того, требуют сходимости тренда к указанному решению. Практически часто достаточно ограничиться проверкой, сходится ли процесс пошагового прогноза к тренду или уходит от него при увеличении времени упреждения прогноза.

Аналитические условия сходимости к решению непрерывного уравнения удается получить только в ограниченном числе задач [22]. Зато проверить, сходится ли процесс к тренду, мы можем всегда, так как тренд имеется в нашем распоряжении. Его легко определить как среднеклиматический прогноз или по алгоритмам МГУА для выделения трендов оптимальной сложности.

**Жесткая сходимость пошагового прогноза к трендам.** Трендом называется низкочастотная, установившаяся часть стационарного процесса.

Примером тренда, хорошо поясняющим смысл этого термина, может быть так называемый в метеорологии климатический прогноз, равный среднему значению данной переменной на данный месяц (или сезон), усредненному за длительное время наблюдения.

Почти такой же тренд можно получить по гармоническому алгоритму МГУА. Климатический и гармонический тренды свойственны циклическим процессам. Для монотонных процессов тренд выражается обычно полиномом невысокой степени. Оптимальная

структура полинома тренда находится по специальному алгоритму МГУА.

Интересной особенностью кривой пошагового интегрирования разностного аналога является то, что она (в случае одно- или двухмерного отсчета времени (довольно быстро приходит к тренду, причем до этого момента значительно лучше прогнозирует процесс, чем сам тренд. Это свойство можно положить в основу следующего определения сходимости пошагового прогноза к тренду: пошаговый прогноз можно назвать сходящимся, если он за конечное время приходит к тренду и в дальнейшем от него не отличается, причем до этого момента обеспечивает заметное повышение точности прогноза.

При отсутствии сходимости пошаговый прогноз не повышает точность или не приходит к тренду.

Примеры процесса перехода пошагового прогноза в три различных вида трендов показаны на рис. 66. Пошаговый прогноз сходится к среднему значению переменной (рис. 66, а), к одночастотному тренду (рис. 66, б) или к сумме гармоник с некрратными частотами (рис. 66, в).

При помощи вычитания тренда из значений прогнозируемой переменной можно перейти от случая «б» или «в» к случаю «а». При этом прогнозируется не сама переменная, а ее отклонение от тренда.

*Способы повышенной сходимости пошагового прогноза к решению дифференциального уравнения.* Для обеспечения сходимости обычно рекомендуются следующие способы:

- 1) варьирование шага дискретизации переменных;
  - 2) выбор формы шаблона по виду тренда (рис. 66); применение возможно более простых шаблонов при помощи снижения подряда дифференциальных уравнений; понижение достигается при помощи замены уравнений высокого порядка системой уравнений первого порядка;
  - 3) применение неявных схем [22];
  - 4) переход к конечно-разностным аналогам с переменными коэффициентами, имеющим более простые шаблоны;
  - 5) адаптация оценок коэффициентов к их несмещенным значениям;
  - 6) применение комбинированных критериев селекции моделей, содержащих критерий точности пошагового прогноза  $i^2(N) \rightarrow \min$ .
- Критерий сходимости выбирает среди множества моделей-претендентов только те, которые обладают достаточной сходимостью. Поясним некоторые способы.

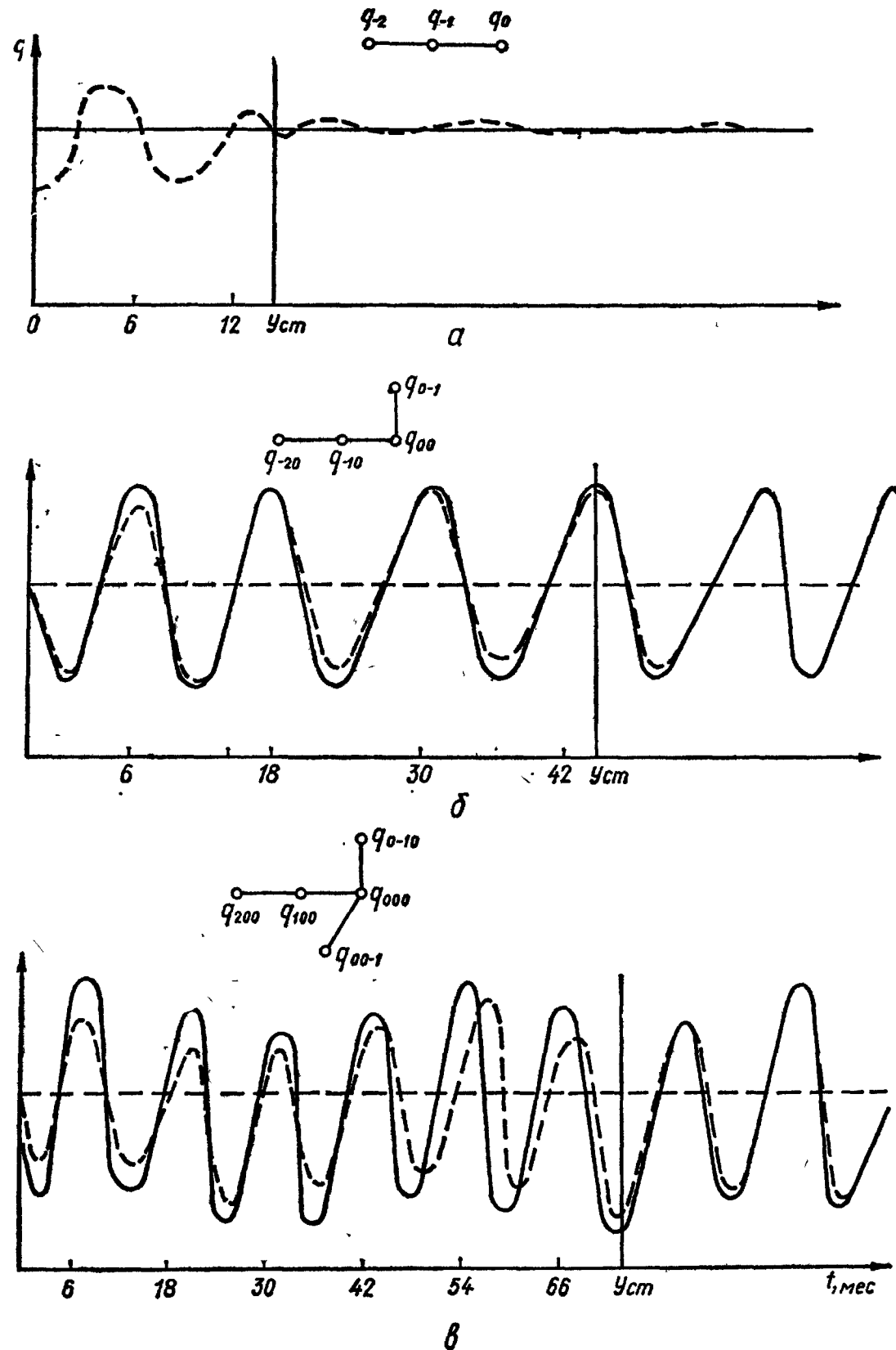


Рис. 66. Процесс сходимости прогноза к трем установившимся формам движения при линейном (а), двумерном (б), трехмерном (в) простых шаблонах; 0 — начало пошагового прогноза; Уст — начало совпадения пошагового прогноза и тренда.

Неявные схемы требуют реализации замкнутого круга их построения и перемещаются на один шаг вперед одновременно. Это дает совместную систему уравнений. Наиболее перспективным является применение конечно-разностных моделей, использующих неявные схемы, построенные в цилиндрическо-полярных координатах  $t, \rho, \varphi$ . Дифференциальное уравнение диффузии в таких координатах содержит линейную сумму производных не выше второго порядка:

$$a_0 \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} + a_1 \frac{\partial^2 q}{\partial \rho^2} + a_2 \frac{\partial^2 q}{\partial \varphi^2} + a_3 \frac{\partial q}{\partial t} + a_4 \frac{\partial q}{\partial \rho} + a_5 \frac{\partial q}{\partial \varphi} = a_6(t, \rho, \varphi),$$

где  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  — постоянные (или функции координат  $t, \rho, \varphi$ ).

При аддитивном учете одной «грубой модели» получим конечно-разностный аналог:

$$y_{000} = f_1(t_{000} \rho_{000} d_{000}) + f_2(y_{-100} y_{-200} y_{0+1+1} y_{0-1+1} y_{0-1-1} y_{0+1-1} \times \\ \times z_{001} z_{001} z_{-100} z_{-200} z_{0+1+1} z_{0-1+1} z_{0-1-1} z_{0+1-1}),$$

где  $y$  — прогнозируемая переменная;  $z$  — вектор переменных, коррелированных с прогнозируемой величиной. Первой индекс указывает значение  $t$ , второй —  $\rho$  и третий —  $\varphi$ .

Шаблоны обучаются по комбинаторному алгоритму МГУА на предыстории и используются для прогноза, перемещаясь в область будущего шаг за шагом, день за днем.

Замкнутый круг состоит в размещении шаблона вдоль круглых слоев цилиндра так, что соседние шаблоны имеют две общие точки, а это сокращает число промежуточных переменных. Метеорологические факторы (погода) прогнозируются для первого слоя вблизи центральной оси цилиндра. Тогда оказывается возможным (по числу известных и неизвестных переменных) получить систему уравнений, определяющих погоду на втором слое, а затем для третьего слоя и т. д. для всего района, охваченного цилиндром.

Пример 30. Расчет прогноза погоды в узлах восьми шаблонов по прогнозу для одной точки, лежащей на оси цилиндра. Как пример на рис. 60 показано размещение восьми шаблонов на одном из трех слоев цилиндра.

Для первого слоя можно составить восемь уравнений шаблонов

$$a_0 + a_1 q_{-200}^i + a_2 q_{-100}^i + a_3 q_{0+1+1}^i + a_4 q_{+1+1}^i + a_5 q_{-1+1}^i + a_6 q_{-1-1}^i = 0.$$

Здесь коэффициенты  $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  определяются при помощи обучения шаблонов по комбинаторному алгоритму МГУА на предыстории по вертикали. Значения всех  $q_{-200}^i$  и  $q_{-100}^i$  известны (точки находятся в прошлом).

Значения  $q_{0+1-1}^i$  и  $q_{0-1-1}^i$ , как указывалось, определяются при помощи отдельного прогноза (точки лежат вблизи оси цилиндра). Для  $q_{0+1+1}^i$  и  $q_{0-1+1}^i$  действительны уравнения связи

$$q_{0+1-1}^i = q_{0+1+1}^{i-1} \text{ или } q_{0-1+1}^i = q_{0-1-1}^{i-1}.$$

Для определения шестнадцати переменных (восемь  $q_{0+1+1}^i$  и восемь  $q_{0-1+1}^i$ ) мы располагаем шестнадцатью уравнениями, что необходимо и достаточно.

Для второго и третьего слоев цилиндра также получается алгебраический минимум уравнений. Отличие состоит только в том, что значения  $q_{0+1-1}^i$  и  $q_{0-1+1}^i$  определяются по данным предыдущего слоя, а не по отдельному прогнозу. Прогноз необходим только для области, лежащей вблизи оси цилиндра (пример прогноза дан ниже).

*Отсчет времени с двумя-тремя интервалами усреднения — основной способ получения долгосрочных прогнозов, не сходящихся к трендам*

Форма шаблона определяет собой продолжительность начального интервала, в течение которого пошаговый прогноз может (в случае сходимости) повысить точность прогноза. Процесс пошагового интегрирования разностных уравнений с одним интервалом усреднения (линейный шаблон, рис. 66, а) в пределе приходит к среднему значению переменной, т. е. к прямой линии.

При двух интервалах усреднения (двумерный шаблон, рис. 66, б) процесс через 10—15 интервалов большого усреднения приходит к одночастотному гармоническому колебанию, которое в дальнейшем почти совпадает с трендом. Для циклических процессов рекомендуется по крайней мере двумерный отсчет.

При трех интервалах усреднения (трехмерный шаблон, рис. 66, в) в пределе получаются бигармонические колебания — сумма двух циклических процессов. Примером процесса, где следует применить такой шаблон, может быть урожай мелозеры в оз. Байкал: кроме ежегодных колебаний имеется трех-четырёхлетний цикл (всплески урожайности).

Для того чтобы ответить на вопрос, сколько следует применить для прогноза интервалов усреднения переменных во времени, рекомендуется сначала выполнить разложение процесса по гармоническому алгоритму МГУА. Число основных (т. е. значительных по амплитуде) гармоник определит число и величину интервалов усреднения. Предел предсказуемости равен 10—15 периодам самой низкой частоты. На таком упреждении пошаговый прогноз дает значительное повышение точности по сравнению с климатическим прогнозом. Более сложные формы шаблонов еще не исследовались.

*Адаптация оценок коэффициентов с целью уменьшения смещения при помощи ортогонального проектирования*

В большинстве алгоритмов МГУА (кроме алгоритмов с перебором дискретных значений) оценки коэффициентов моделей получаются по методу наименьших квадратов, т. е. по критерию среднеквад-

ратической ошибки, представляющей собой сумму квадратов отклонений, каждое из которых начинается на фактической кривой процесса. Если ошибка мала, то это обеспечивает несмещенные оценки коэффициентов при решении задач идентификации объекта или получения модели для краткосрочного прогноза на один шаг вперед. При малом числе опытных данных ничего лучшего сделать нельзя.

Если же решается задача самоорганизации модели для долгосрочного прогноза, то не только выбор структуры модели, но и получение оценок коэффициентов следует выполнить по критерию точности многошагового прогноза, т. е. вместо  $\Delta^2(B) \rightarrow \min$  применить  $i^2(N) \rightarrow \min$ . Для этого оценки находятся сначала по методу наименьших квадратов, а затем организуется спуск в пространстве оценок коэффициентов, с целью достижения минимума критерия  $i^2(N) \rightarrow \min$ .

Другим способом уменьшения смещения оценок коэффициентов модели для долгосрочного прогноза является ортогональное последовательное проектирование В. Н. Высоцкого [8]. Покажем этот способ на примере адаптации оценки свободного члена. Другие коэффициенты уточняются аналогично.

**Пример 31.** Адаптация коэффициентов многошагового прогноза населения Земли. Исходные данные приведены в табл. 42 (первые три столбца). Полное описание выберем в форме линейного конечно-разностного уравнения

$$y_{+1} = a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_{-1} + a_3 y_{-2}.$$

Для простоты допустим, что множество частных описаний, получаемых из полного, содержит всего три варианта, подлежащих сравнению между собой. Рассмотрим частные описания по очереди для выбора лучшего из них в качестве прогнозирующей модели.

**Первый вариант.** Частное описание (модель)  $y_{+1} = a_0 + a_1 y_0$ . Условные уравнения для определения оценок коэффициентов показаны в табл. 43. Перейдя к нормальным уравнениям и решая их, получим  $a_0 = -433, 2123$ ,  $a_1 = 10,0722$ .

Пользуясь полученной таким образом моделью  $y_{+1} = 443, 9274 + 10,0722 y_0$ , заполняем четвертый столбец таблицы.

Обратим внимание на то, что до сих пор мы пользовались только данными одного третьего столбца.

Формула линейной коррекции соответствует модели  $y_{+1}^{(3)} = b_0 + b_1 y_0^{(4)}$ .

Однако оценки коэффициентов  $b_0$  и  $b_1$  получаются при использовании данных двух разных столбцов табл. 43 (третьего — для выходной величины и четвертого — для аргумента). Решение нормальных уравнений Гаусса дает уточнение оценок коэффициентов  $b_0 = 443,9274$ ,  $b_1 = 10,0722$ .

Пользуясь уточненной моделью  $y_{+1} = b_0 + b_1 y_0 = 443,9274 + 10,0722 y_0$ , по данным четвертого столбца заполняем цифрами пятый, окончательный прогноз по данной модели.

**Второй вариант:**  $y_{+1} = a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_{-1}$ .

Составив систему условных и нормальных уравнений (табл. 43), а затем решив их, находим оценки коэффициентов  $a_0 = 22,6180$ ,  $a_1 = 0,5289$ ,  $a_2 = 0,4940$ . Заполняем шестой столбец табл. 43 цифрами.

Далее составляем формулу линейной коррекции  $y_{+1}^{(3)} = b_0 + b_1 y_0^{(6)} + b_2 y_{-1}^{(6)}$ , где верхние индексы указывают, из какого столбца берутся данные.

Таблица 42. Население земли (млн. чел.)

Назначение точек	Номер точки	Год	$y_{+1}$	Первый вариант		Второй вариант		Третий вариант	
				$y_{(1)}$	$y_{(2)}$	$y_{(1)}^{II}$	$y_{(2)}^{III}$	$y_{(1)}^{III}$	$y_{(2)}^{IV}$
Обучение	1	1959	2905	2905	—	2905	—	2905	—
	2	1960	2982	2969	2958	2982	—	2982	—
	3	1961	3040	3034	3024	3035	3037	3040	—
	4	1962	3100	3099	3090	3101	3081	3097	3104
	5	1963	3162	3165	3157	3162	3155	3163	3170
	6	1964	3174	3231	3224	3227	3216	3225	3186
	7	1965	3289	3298	3292	3292	3285	3289	3286
	8	1966	3353	3365	3360	3358	3351	3356	3347
	9	1967	3421	3433	3429	3425	3421	3422	3411
	10	1968	3490	3501	3498	3493	3490	3491	3487
	11	1969	3561	3569	3567	3563	3561	3560	3556
	12	1970	3632	3638	3637	3633	3633	3631	3629
	13	1971	3706	3708	3708	3704	3706	3703	3705
	14	1972	3785	3778	3779	3777	3780	3777	3780
	15	1974	3943	—	3923	—	3931	—	3936
Прогноз	32	2000	—	—	5992	—	6384	—	6588

В результате решения нормальных уравнений находим оценки  $b_0 = 25,0409$ ,  $b_1 = 0,5289$ ,  $b_2 = 0,4940$ .

Пользуясь полученной формулой  $y_{+1} = 25,0409 + 0,5289 y_0 + 0,4940 y_1$ , по данным третьего столбца строим многошаговый прогноз (седьмой столбец табл. 43).

Третий вариант:  $y_{+1} = a_0 + a_1 y_0 + a_2 y_{-1} + a_3 y_{-2}$ .

Действуя аналогично описанному выше, находим оценки коэффициентов  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ , заполняем восьмой столбец табл. 43 (по данным одного третьего столбца).

Далее, пользуясь данными двух столбцов (третьего и восьмого), находим оценки коэффициентов формулы линейной коррекции  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  и  $b_3$ .

В результате получим прогнозирующую модель  $y_{+1} = 13,6562 + 0,3492 \times y_0 + 0,3753 y_{-1} + 0,3123 y_{-2}$ . Пользуясь этой формулой и данными восьмого столбца, заполняем девятый столбец.

Сравнение частных описаний по точности прогнозирования позволяет выбрать одно, оптимальное описание. Ошибки на шестнадцатой точке, где  $y_{1974} = 3943$ , следующие:  $\Delta y_1 = 16,4270$ ,  $\Delta y_2 = 13,5840$ ,  $\Delta y_3 = 9,2395$ . Следовательно, выбираем третье описание в качестве прогнозирующей модели.

#### Определение оценок коэффициентов дробно-полиномиальных описаний (метод последовательного проектирования) [44]

В первом приближении (при малых помехах) оценки коэффициентов частного описания вида

$$y = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2}{1 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2}$$

Таблица 43. Составление условных уравнений для корреляции трех моделей с целью уменьшения смещения оценок коэффициентов

Система уравнений	I			II			III		
	$y + \lambda^{(3)} = a_0 + a_1 y_0^{(3)}$			$y_{+1}^{(3)} = a_0 + a_1 y_0^{(3)} + a_2 y_{-1}^{(3)}$			$y_{+1}^{(3)} = a_0 + a_1 y_0^{(3)} + a_2 y_{-1}^{(3)} + a_3 y_{-2}^{(3)}$		
Условные уравнения для определения коэффициентов модели (15 уравнений)	2982 = $a_0 + a_1 \cdot 2905$			3040 = $a_0 + a_1 \cdot 2982 + a_2 \cdot 2905$			3100 = $a_0 + a_1 \cdot 3040 + a_2 \cdot 2982 + a_3 \cdot 2905$		
	3040 = $a_0 + a_1 \cdot 2982$			3100 = $a_0 + a_1 \cdot 3040 + a_2 \cdot 2982$			3162 = $a_0 + a_1 \cdot 3100 + a_2 \cdot 3040 + a_3 \cdot 2982$		
	3100 = $a_0 + a_1 \cdot 3040$			3162 = $a_0 + a_1 \cdot 3100 + a_2 \cdot 3040$			3174 = $a_0 + a_1 \cdot 3162 + a_2 \cdot 3100 + a_3 \cdot 3040$		
	...			...			...		
	3785 = $a_0 + a_1 \cdot 3706$			3795 = $a_0 + a_1 \cdot 3706 + a_2 \cdot 3632$			3795 = $a_0 + a_1 \cdot 3706 + a_2 \cdot 3632 + a_3 \cdot 3561$		
	3864 = $a_0 + a_1 \cdot 3785$			3864 = $a_0 + a_1 \cdot 3785 + a_2 \cdot 3706$			3864 = $a_0 + a_1 \cdot 3785 + a_2 \cdot 3706 + a_3 \cdot 3632$		
Формула коррекции начальных условий	$y_{+1}^{(3)} = b_0 + b_1 y_0^{(4)}$			$y_{+1}^{(3)} = b_0 + b_1 y_0^{(6)} + b_2 y_{-1}^{(6)}$			$y_{+1}^{(3)} = b_0 + b_1 y_0^{(8)} + b_2 y_{-1}^{(8)} + b_3 y_{-2}^{(8)}$		
Условные уравнения для определения коэффициентов формулы коррекции	2982 = $b_0 + b_1 \cdot 2905$			3040 = $b_0 + b_1 \cdot 2982 + b_2 \cdot 2905$			3100 = $b_0 + b_1 \cdot 3040 + b_2 \cdot 2982 + b_3 \cdot 2905$		
	3040 = $b_0 + b_1 \cdot 2982$			3100 = $b_0 + b_1 \cdot 3035 + b_2 \cdot 2982$			3162 = $b_0 + b_1 \cdot 3097 + b_2 \cdot 3040 + b_3 \cdot 2982$		
	3100 = $b_0 + b_1 \cdot 3034$			3162 = $b_0 + b_1 \cdot 3101 + b_2 \cdot 3035$			3174 = $b_0 + b_1 \cdot 3163 + b_2 \cdot 3097 + b_3 \cdot 3040$		
	...			...			...		
	3785 = $b_0 + b_1 \cdot 3708$			3785 = $b_0 + b_1 \cdot 3704 + b_2 \cdot 3633$			3785 = $b_0 + b_1 \cdot 3703 + b_2 \cdot 3603 + b_3 \cdot 3560$		
	3864 = $b_0 + b_1 \cdot 3778$			3864 = $b_0 + b_1 \cdot 3777 + b_2 \cdot 3704$			3864 = $b_0 + b_1 \cdot 3777 + b_2 \cdot 3703 + b_3 \cdot 3631$		

можно получить, используя систему условных уравнений вида

$$y(1 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1x_2) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1x_2.$$

Подставив значения  $y_1, x_1, x_2$  столько раз, сколько точек в таблице исходных данных, получим систему условных уравнений, которую при помощи процедуры Гаусса приводим к нормальному виду. Решая нормальные уравнения, находим оценки коэффициентов  $a_i, b_j$  [21].

Второе и последующие приближения нужны только при значительной неточности (помехах) в исходных данных.

Для второго приближения (проектирования) в таблицу прибавляем значение  $y(1)$ , вычисленное по формуле первого приближения как новый аргумент. Повторяем составление условных и нормальных уравнений Гаусса. Решая последние, находим более точные оценки указанных коэффициентов.

Для третьего приближения в таблицу добавляем в качестве еще одного аргумента столбец значений  $y(2)$ , вычисленных по формуле второго приближения и т. д. Обычно требуется всего два-три проектирования. В работе [44] доказана сходимость описанной итеративной процедуры.

Отметим ограниченность области применения полиномиальных частных описаний. Если, например, действительно действующий закон выражается уравнением  $q = \frac{1}{x}$ , то его нельзя открыть по МГУА, пользуясь полиномами  $q = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Следует применить более общую форму частных описаний, например

$$q = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{1 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m}.$$

Оценки коэффициентов дробно-полиномиальных описаний находятся при помощи указанной рекуррентной процедуры.

#### Задача долгосрочного прогноза процессов и дальней экстраполяции физических полей

Определим некоторые термины, которые нам понадобятся далее.

Прогноз называется однократным, если для него используются только точки (узлы интерполяции), наблюдавшиеся на объекте.

Прогноз называется многократным или пошаговым, если, кроме того, в качестве исходных данных используются результаты предыдущих прогнозов с меньшим временем упреждения.

Наиболее распространено дискретное определение терминов «сглаживание», «краткосрочный», «среднесрочный», «долгосрочный» прогнозы. Под сглаживанием понимается косвенное измерение переменных при времени упреждения, равном нулю ( $T_y = 0$ ).

Обычно принято считать: краткосрочные прогнозы  $T_y = 1 \div 2$  года; среднесрочные  $T_y = 3 \div 7$  лет; долгосрочные  $T_y = 10$  лет

и более. Недостаток такого дискретного определения терминов в том, что оно подходит только для прогнозирования гидрологических, экономических и некоторых других случайных процессов, где шаг дискретизации по оси времени равен одному году.

Для стационарных случайных процессов, имеющих монотонно убывающую автокорреляционную функцию, больше подходит корреляционное определение. Временем когерентности  $T_K$  обычно на-

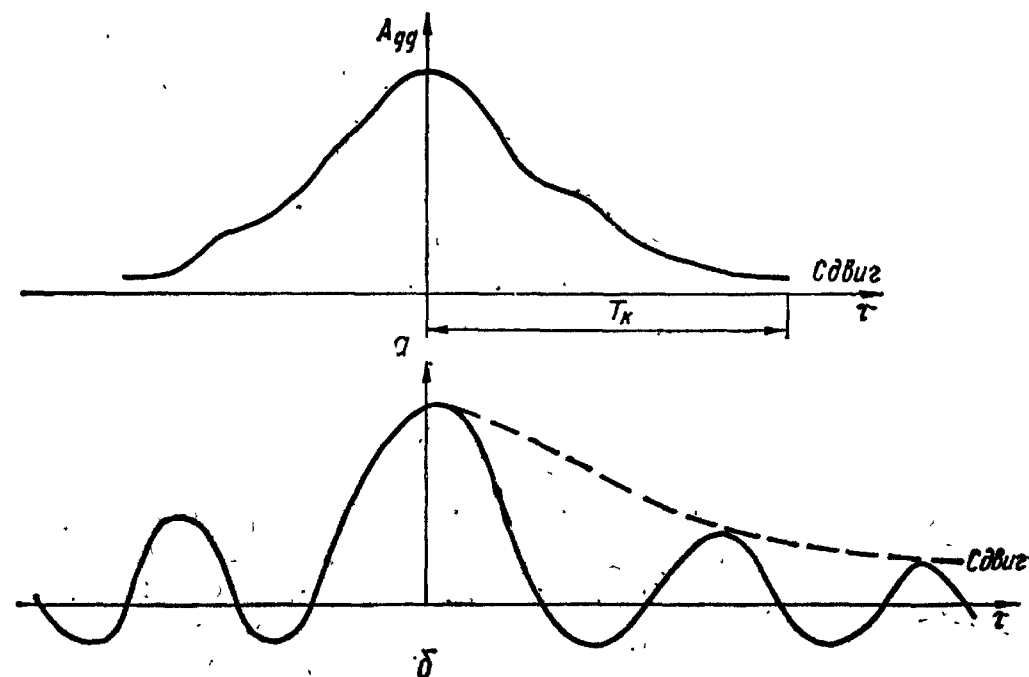


Рис. 67. Автокорреляционная функция:

а — монотонно убывающая; б — колебательная;  $T_K$  — время когерентности.

зывают величину отрезка времени сдвига, на котором автокорреляционная функция существенно отличается от нуля (рис. 67). Вне этого отрезка она почти равна нулю. Прогнозы, упреждения которых составляют 10—20% времени когерентности ( $0 < T_y < < 0,2 T_K$ ), можно назвать краткосрочными. Среднесрочные прогнозы относятся к области  $0,2 T_K \leq T_y < T_K$ . Прогнозы при времени упреждения, большем времени когерентности ( $T_K < T_y$ ), следует назвать долгосрочными.

Автокорреляционная функция однозначно связана со спектром случайного процесса (через преобразование Фурье). Поэтому можно дать еще третье, спектральное, определение терминов: краткосрочный прогноз — прогноз, который учитывает высокие гармоники, долгосрочный — учитывает только тренды — гармонические составляющие очень низких и сверхнизких частот. С этой позиции становится понятным, почему прогнозы по разностным моделям жестко приходят к трендам (рис. 66). Уравнения краткосрочного и долгосрочного прогнозов, как правило, имеют различные аргументы.

*Время когерентности как показатель предсказуемости случайных процессов в объектах с постоянной структурой*

Максимально достижимое время упреждения однократного прогноза  $T_y$  определяется временем когерентности  $T_k$  затухающей автокорреляционной функции  $A_{kk}$ . Это время равно сдвигу, при котором автокорреляционная функция (или ее огибающая) уменьшается до значения, определяемого допустимой ошибкой прогноза  $\delta$ , %, и дальше не превосходит ее (рис. 67)

$$A_{kk}(t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(t - \tau) d\tau}{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t) dt}.$$

Максимально допустимое время упреждения многократного (пошагового) прогноза равно времени когерентности, умноженному на число шагов,

$$T_{y \max} = T_k n,$$

причем ошибка прогноза с каждым шагом интегрирования увеличивается  $\delta_{\text{однокр}} = n \delta_{\text{многокр}}$ , что и определяет предел предсказуемости пошагового прогноза. Дальше будем обсуждать максимальные возможности многократного пошагового прогноза, учитывая, что они определяются величиной времени когерентности так же, как и для однократного прогноза.

Изучение автокорреляционных функций метеорологических параметров с целью определения максимального возможного времени упреждения многократного пошагового прогноза возможного времени еще не закончено. Однако, по-видимому, для некоторых переменных (температура приземного слоя воздуха и др.) должны получиться результаты, аналогичные исследованию автокорреляционных функций стока рек (гидрологическая задача, связанная с погодой).

Были построены автокорреляционные функции стока р. Днепр при разных временах его усреднения, а также для равнинных рек с разной величиной водосбора. Оказалось, что усреднение переменных во времени также увеличивает время когерентности, как и усреднение переменных при площади усреднения на поверхности Земли (рис. 68, б). Усреднение по времени равноценно усреднению в пространстве.

Автокорреляционная функция процесса, а именно время когерентности, несет информацию о степени его предсказуемости (т. е. о степени детерминистичности). Анализ автокорреляционных функций стока рек показал, что увеличивая усреднение переменных во времени или по пространству, мы можем как бы перенести процесс из области предсказуемости почти в область точного и долговре-

менного расчета. Прогноз значения давления, температуры или влажности, среднего за столетие, усредненный по всей планете, мы можем точно делать на тысячу лет вперед. В то же время прогноз метеорологических параметров для района одного города,

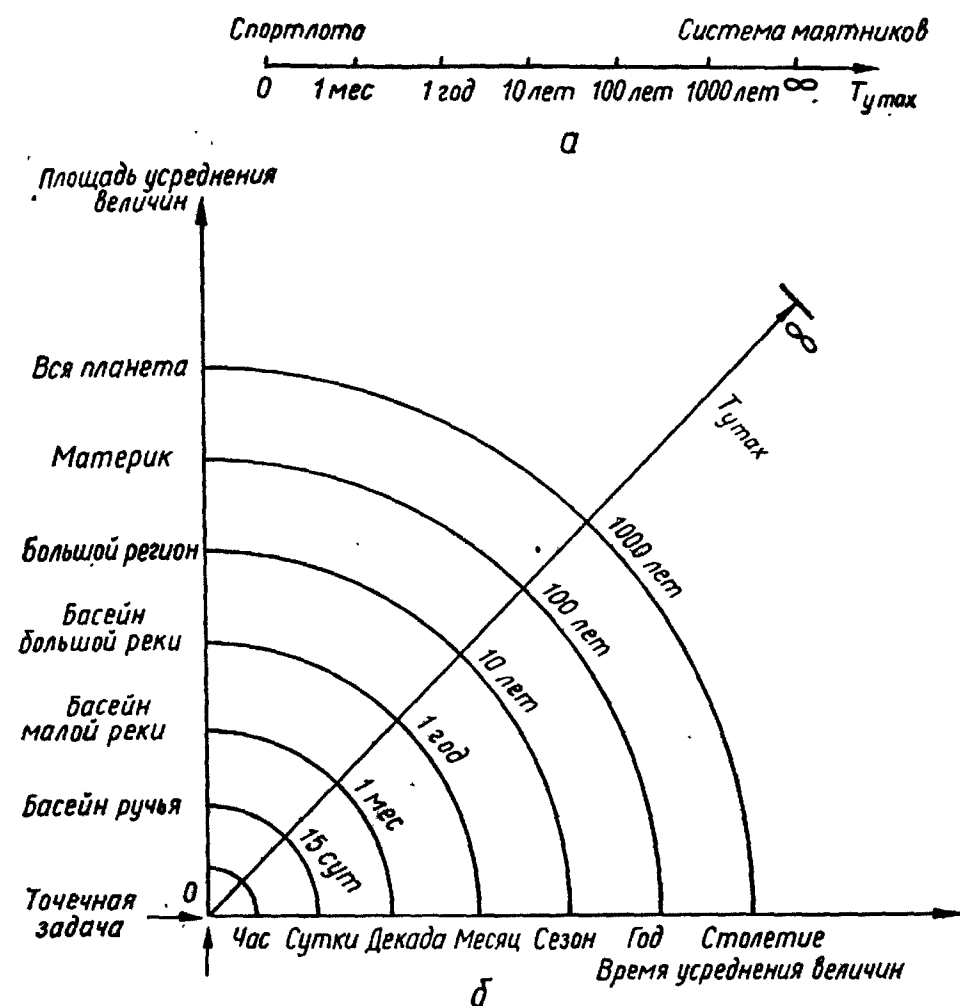


Рис. 68. Зависимости изменения предельного времени прогноза  $T_{y \max}$  от свойств объекта (а) и площади и времени усреднения переменных (б).

с усреднением за сутки, не может иметь время упреждения более 15 суток, что показано на графике рис. 68, б и соответствует выводу работы [7].

Вторым подтверждением правильности качественного представления предсказуемости процессов на рис. 68 являются наши прогнозы стока р. Днепр [34, 39]. Прогноз выполнен по тренду, полученному по МГУА с использованием гармонической опорной функции. Прогнозирующая модель оптимальной сложности содержит десять гармонических составляющих с некратными частотами, что соответствует решению разностного уравнения, содержащего 20 запаздывающих аргументов. Такое же оптимальное уравнение получено независимо от нас в работе А. И. Алехина



по его методу [88]. Совпадение результатов очень убедительное. Время упреждения прогноза около 50—100 лет, что приблизительно соответствует одной из точек графика рис. 68, б.

### Основной признак алгоритмов для долгосрочных и сверхдолгосрочных прогнозов

Если программа составлена так, что на основании данных предыстории (по любым критериям) получается только один оптимальный прогноз, то такая программа может быть только программой для краткосрочных или среднесрочных прогнозов (т. е. на один-два или три — пять тактов вперед).

Если в программе предусмотрено получение по данным предыстории ведущего прогноза при большом усреднении (например, за год) и нескольких (лучших по критериям) прогнозов при малом усреднении переменных (например, за сезон), с тем чтобы на интервале прогноза применить критерий баланса, то такая программа может быть программой для долгосрочных прогнозов (на 10—20 лет вперед).

Выбор сезонных моделей по годичной выполняется по критерию

$$B_{\text{сезон}}^2 = \sum_{i=1}^N b_i^2 \rightarrow \min, \quad b_i = Q_{\text{год}}^* - \frac{1}{4} (q_{i3}^* + q_{i5}^* + q_{i11}^* + q_{i19}^*),$$

где  $N$  — число точек прогноза;  $Q_{\text{год}}^*$  — прогноз по годичной модели (один прогноз);  $q_{i3}^*, q_{i5}^*, q_{i11}^*, q_{i19}^*$  — прогнозы по различным вариантам набора сезонных моделей.

Наконец, если в программе предусмотрено получение по данным предыстории ведущего прогноза при очень большом усреднении (например, за период первой гармоники  $T_1$ ), нескольких прогнозов при среднем усреднении (например, за один год) и еще больше прогнозов при наименьшем усреднении (например, за сезон) и применяется двухрядный критерий баланса прогнозов, то такая программа пригодна для сверхдолгосрочных прогнозов (40 и больше лет вперед).

Выбор годичных моделей по модели с усреднением 11 лет выполняется по критерию

$$B_{\text{год}}^2 = \sum_{i=1}^N b_j^2 \rightarrow \min, \quad b_j = Q_{11\text{лет}}^* - \frac{1}{T_1} (q_{j1}^* + q_{j2}^* + q_{j3}^* + \dots + q_{jT_1}^*),$$

где  $Q_{11\text{лет}}^*$  — прогноз по модели с усреднением лет (один прогноз);  $q_1, q_2, q_3, \dots, q_{11}$  — прогнозы по различным вариантам комплекта годичных моделей  $j = 1 \div 5$ .

Ведущие прогнозы получаются по гармоническому алгоритму МГУА.

Приведенные здесь правила построения программ реализуют принцип «свободы выбора решений» Д. Габора [28]. Усреднение переменных может быть выполнено во времени или по пространству, или по тому и другому вместе [38].

Пример 32. Самоорганизация структуры разностных уравнений для прогнозирования давления и температуры воздуха в пункте, лежащем на оси цилиндра (в г. Свердловске) [38]. Описанный выше алгоритм, использующий неявные схемы в цилиндрическо-полярных координатах (рис. 60), позволяет рассчитать по МГУА будущие значения метеорологических параметров в узлах всех шаблонов, если на оси цилиндра они уже на один шаг предсказаны. Таким образом, задача требует прогноза на один шаг (сутки) погоды в одной точке земной поверхности. Этот прогноз может быть найден с использованием многорядного алгоритма МГУА, простейший вариант которого излагается в данном примере.

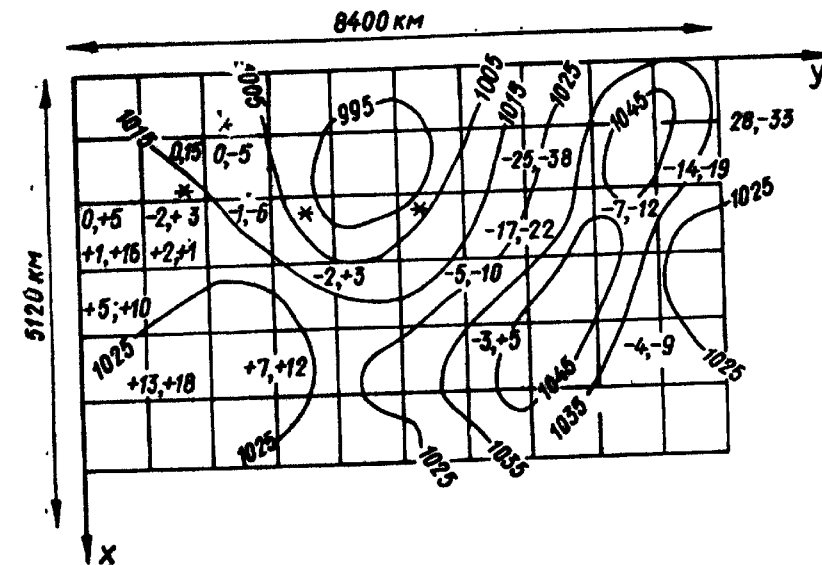


Рис. 69. Пример карты погоды.

Покажем, как может быть найдена оптимальная структура уравнений, выражающих изменение температуры и давления во времени. Аналогично можно определить структуру оптимальной сложности и для поля влажности и других метеорологических переменных.

Для определения модели, используемой для прогнозирования давления и температуры, параллелепипед данных наблюдений, изображенный на рис. 70, разбивается на элементарные кубики, в каждом из которых определяются средние значения метеорологических параметров за сутки.

Здесь используется параллелепипед данных, включающий  $60 \times 10 \times 10$  единичных кубиков (единица измерения оси  $x$  —  $5120/6$  км, оси  $y$  —  $8400/10$  км, а единица измерения времени — 1 сутки) с 11 по 20 марта 1977 г. (рис. 70). Все данные центрированы и нормированы.

Параллелепипед опытных данных был разбит на последовательности кубиков  $A + B = 80\%$  и  $C = 20\%$ . Точность прогноза проверялась на отдельной проверочной последовательности данных (7 дней), с 21 по 27 марта 1977 г.

На рис. 71 показаны шесть форм элементарных шаблонов, подлежащих перебору, и даны оценки их точности. Уравнение для полного шаблона имеет следующий общий вид:

$$P_{100} = f_1(t_{000}x_{000}y_{000}) + f_2(P_{000}P_{-100}P_{-200} \dots T_{000}T_{-100}T_{-200}),$$

где  $P$  — давление;  $T$  — температура, первый индекс — по оси  $t$ , второй — по оси  $x$ , третий — по оси  $y$ .

Использовался многорядный алгоритм МГУА с линеаризацией при помощи переобозначения переменных, описанный выше.

Уравнения, соответствующие каждому шаблону, выбирались по комбинированному критерию  $\rho = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(C)} \rightarrow \min$ , а результат выбора

проверялся по относительной ошибке на последовательности  $C$ . Оказалось, что наиболее точным является уравнение, отвечающее пятому шаблону (рис. 71).

Относительная ошибка имеет вид

$$\delta_P = \frac{\frac{1}{N} \sum_t \sum_x \sum_y (P_{\text{табл}} - P_{\text{модел}})^2}{(P_{\text{табл}}^{\max} - P_{\text{табл}}^{\min})} \rightarrow \min,$$

$$\delta_T = \frac{\frac{1}{N} \sum_t \sum_x \sum_y (T_{\text{табл}} - T_{\text{модел}})^2}{(T_{\text{табл}}^{\max} - T_{\text{табл}}^{\min})} \rightarrow \min.$$

Относительная ошибка определялась как разность между действительным изменением давления и температуры и их прогнозом. При упреждении прогноза на семь суток ( $N = 7$ ):  $\delta_P = 0,3709$ ,  $\delta_T = 0,3043$ .

Машина выбрала следующие модели:

$$1) P_{+100} = -1,0083 + 0,392y_{000} -$$

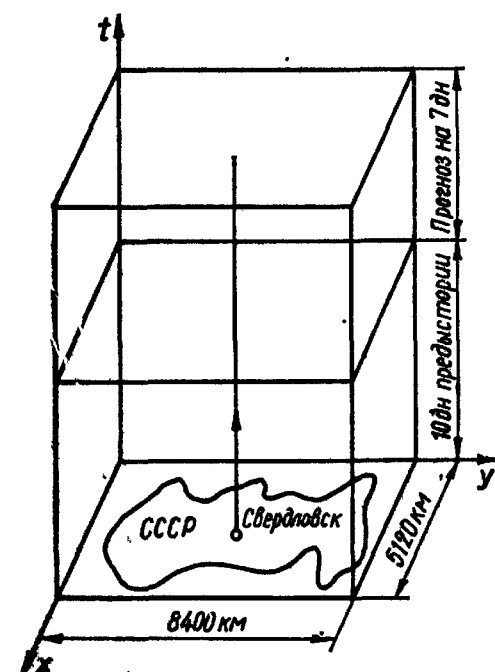


Рис. 70. Параллелепипед опытных данных (за 10 дней) и прогноза (за 7 дней).

$$-0,1099t_{000} + 0,8809\bar{P}_{000} + 0,0047P_{000}T_{000} + 0,0121\bar{P}_{000}\bar{P}_{000} + 0,000177\bar{P}_{000}\bar{T}_{000},$$

$$T_{+000} = -1,7269 + 0,1411t_{000} + 0,9834\bar{T}_{000};$$

$$2) P_{+100} = 6,0649 + 0,2366\bar{P}_{000} - 0,00348T_{-100} + 0,0059P_{000}P_{-100} +$$

$$+ 0,0047P_{000}\bar{P}_{000} + 0,01059P_{-100}T_{000} + 0,00503P_{000}P_{000} +$$

$$+ 0,00405\bar{P}_{000}\bar{P}_{000},$$

N	Форма шаблона	$n_{\text{см}}$	$\Delta(C)$	$\rho_{\text{мод.}}^2$
1		0,021138	0,276223	0,277031
		0,201362	0,290929	0,353817
2		0,022273	0,289461	0,290317
		0,176932	0,352216	0,394159
3		0,121926	0,382449	0,382407
		0,079602	0,233970	0,247141
4		0,057442	0,352762	0,357409
		0,186287	0,197606	0,271572
5		0,080550	0,235598	0,248988
		0,038617	0,235150	0,238300
6		0,198290	0,198452	0,279026
		0,046587	0,298915	0,302524

Рис. 71. Шесть вариантов шаблонов и их оценки.

$$T_{+100} = -0,6725 + 0,9838\bar{T}_{000} + 0,00172P_{-100}T_{-100};$$

$$3) P_{+100} = 4,0505 - 0,00734P_{-200} + 0,4682\bar{P}_{000} + 0,00745P_{000}P_{-100} +$$

$$+ 0,0124P_{-200}P_{-200} + 0,00566P_{-200}T_{-100} - 0,00265P_{-200}\bar{T}_{000};$$

$$T_{+100} = 1,6342 + 0,4908T_{-200} + 0,5019\bar{T}_{000} - 0,0000256P_{-100}P_{-200} -$$

$$- 0,00311P_{-200}P_{-200} - 0,00309T_{-200}T_{-200};$$

$$4) P_{+100} = -3,6239 + 0,6961t_{000} + 0,8436P_{000} + 0,2970P_{0+10} +$$

$$+ 0,2335P_{00-1} + 0,00815P_{0+10}P_{0+10} - 0,000075P_{0+10}T_{00-1} +$$

$$+ 0,00238P_{00-1}P_{0-10} + 0,0112P_{00-1}T_{00-1};$$

$$T_{+100} = 1,28603 + 0,4706T_{0+10} + 0,3842T_{00-1};$$

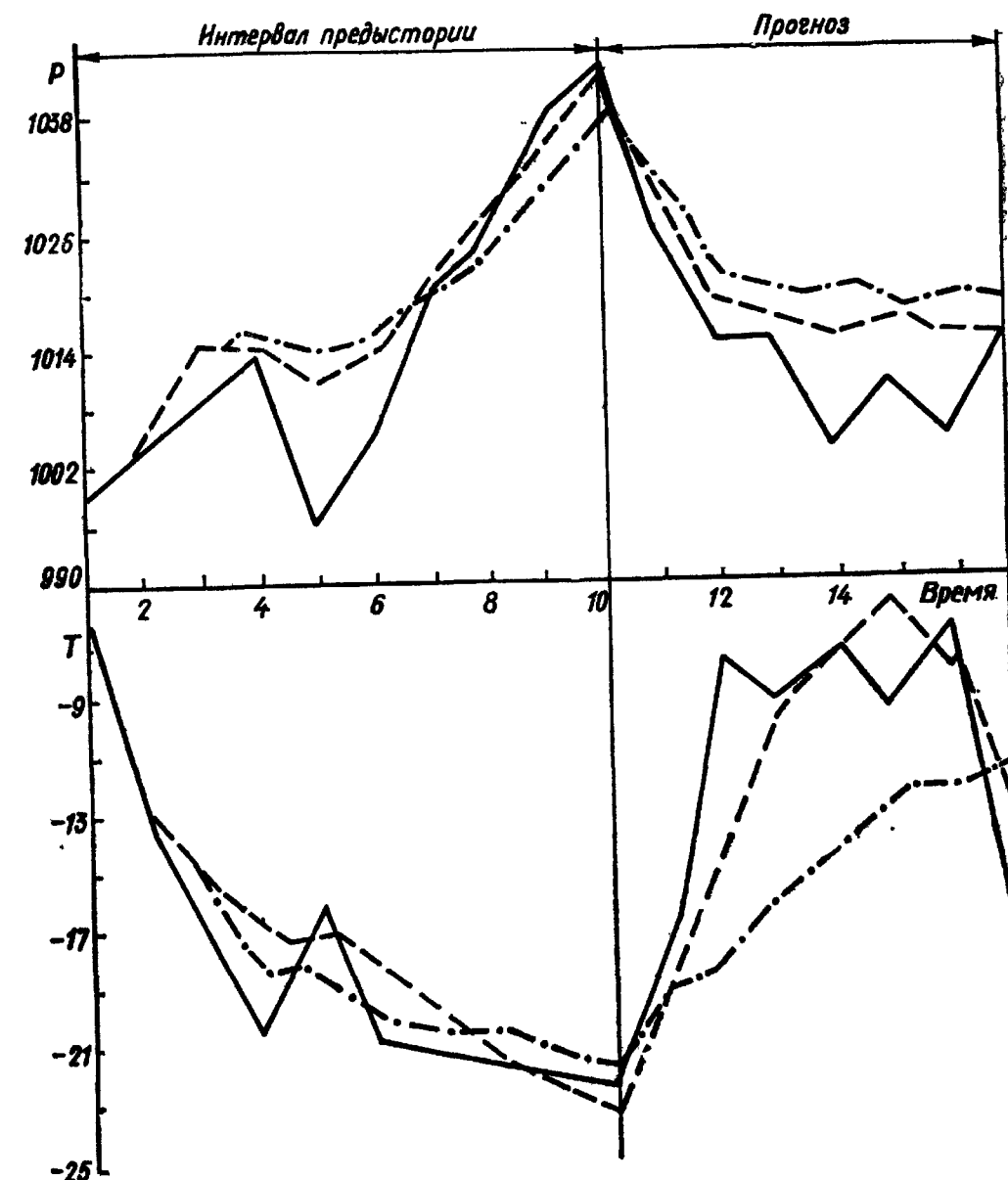


Рис. 72. Прогноз давления и температуры в г. Свердловске при явных шаблонах.

$$5) P_{+100} = 5,06 + 0,3648P_{00-1} + 0,00787T_{00-1} - 0,00538P_{000}T_{0-10} + \\ + 0,01848P_{0+10}P_{00-1} - 0,005722T_{000}T_{0-10} + \\ + 0,0000252P_{-100}P_{000},$$

$$T_{+100} = -0,8886 + 0,2417T_{000} + 0,2834T_{0-10} + 0,2712T_{00+1} + \\ + 0,00961P_{0+10}T_{-100};$$

$$6) P_{+100} = 5,056 + 0,572P_{00+1} - 0,00234P_{-400}T_{-100} + 0,0108P_{-100}T_{0+10} + \\ + 0,006951P_{-100}T_{000},$$

$$T_{+100} = 3,9901 + 0,642T_{0+10} + 0,2215T_{-100} + 0,003696P_{0+10}T_{-100} - \\ - 0,000228T_{000}T_{-200}.$$

Все сказанное выше относится к случаю, когда обучение шаблонов выполняется по всему объему параллелепипеда. Если же обучение проводится только по вертикали, т. е. по данным, отвечающим координатам г. Свердловска (лежащего на оси цилиндрических координат, рис. 60), то оптимальная модель принимает вид

$$P_{+100} = 5,06 + 0,3648P_{00-1} + 0,00787T_{00-1} - 0,00538P_{000}T_{0-10} + \\ + 0,01848P_{0+10}P_{00-1} - 0,005722T_{000}T_{0-10} + 0,0000252P_{-100}P_{000},$$

$$T_{+100} = -0,886 + 0,2471T_{000} + 0,2834T_{0+10} + 0,2712T_{00-1} + \\ + 0,00961P_{0+10}T_{-100}.$$

Ошибка прогноза на семь дней вперед (см. рис. 9) при этом значительно меньше, особенно для температуры. На рис. 72 показаны кривые прогноза давления и температуры для г. Свердловска. Модели должны быть адаптивными: прогноз уточняется каждый день с каждым поступлением новых данных.

При оценке точности прогноза следует учесть, что в данном простом примере ни объективный синтез системы прогнозирующих уравнений, ни критерии баланса прогнозов, ни объективный выбор опорных функций и ансамбля аргументов не были использованы. Следовательно, возможности повышения точности прогноза не исчерпаны.

Так как полученные уравнения линейны, то пользуясь определениями табличных разностей легко совершить обратный переход, т. е. получить дифференциальные уравнения, аналогами которых они являются. При этом убедимся, что они существенно отличаются от обычно принятых: многие члены используемых дифференциальных уравнений погоды просто отсутствуют. Машина их исключила как не соответствующие таблице данных наблюдений. Интегральные члены машина обычно вводит в уравнения.

### Физические и нефизические модели

Цели, с которыми проводится моделирование, можно разделить на две группы.

Во-первых, моделирование может служить для выяснения сущности интересующего нас объекта исследований в данный момент времени. Для этого используются так называемые физические или истинные модели (см. стр. 56).

Во-вторых, моделирование может быть направлено на решение динамических задач, учитывающих фактор времени и связанных

с процессами или временными последовательностями, например задач прогнозирования или последовательного принятия решений. Для решения задач во времени служат прогнозирующие или нефизические модели.

Физические и нефизические модели весьма различны. Физической моделью называется модель, которая:

а) основана на физических законах, таких, как закон сохранения энергии или массы, принципе непрерывности или ближнего действия;

б) построена для мгновенных значений переменных (что соответствует традиции математической физики);

в) имеет малое число легко интерпретируемых параметров, таких, как коэффициент диффузии, скорость, коэффициент рождаемости и др.

Нефизическая модель характерна тем, что она:

а) получается при помощи алгоритмов самоорганизации, т. е. в результате перебора многих моделей-претендентов по внешним критериям; она может быть основана как на принципе ближнего, так и дальнего действия, т. е. принцип непрерывности может не соблюдаться;

б) построена для любых усреднений, в том числе в одном и том же разностном уравнении могут использоваться разные интервалы усреднения переменных одновременно, что не встречалось в математической физике;

в) содержит оптимальное число параметров, причем многие из них трудно интерпретировать (объяснить с точки зрения, например, физики).

Принцип ближнего действия поясняет рис. 52, а. Согласно принципу на состояние среды в точке 0, 0, 0 влияют только соседние узлы 00 — 1, 00 + 1, 0 — 10, 0 + 10, + 1, 00 и — 100. Влияние удаленных узлов, например, точек А, В, С и D не учитывается. Принцип дальнего действия означает учет влияния удаленных узлов. Так, выше в примере прогнозирования поля загрязнения машина выбрала модель, учитывающую как данные измерений на контрольных станциях, так и информацию об изменении мощности выбросов.

В отличие от человека, который может только составить физическую модель, ЭВМ выбирает модель, которая в зависимости от вида внешнего критерия может быть как физической, так и нефизической. По физическому критерию минимума смещения машина выбирает физические модели. По критериям регулярности или точности краткосрочного прогноза самоорганизуется нефизическая модель, которая тем больше отличается от физической, чем больше зашумлены исходные данные (рис. 25).

## Недопустимость применения теории построения физических моделей для нефизических моделей

Теория самоорганизации нефизических моделей не должна слепо использовать принципы построения физических моделей. Чем скорее мы разберемся в этом, тем лучше для нашей науки. Называем только некоторые примеры.

1. Распространено детерминистическое убеждение о том, что «чем сложнее модель, тем она точнее». Добавление нового члена в уравнение будто-бы может только улучшить прогноз. Теория самоорганизации, наоборот, утверждает существование единственной модели оптимальной сложности. Переусложнение модели так же вредно, как и ее недоусложнение. При наличии шумов в исходных данных прогнозирующая модель оптимальной сложности может быть нефизической.

2. Существует убеждение, что при последовательном принятии ряда решений на каждом этапе достаточно принять одно, оптимальное «жесткое» решение. Д. Габор показал, что это не так. На каждом шагу следует обеспечить свободу выбора для последующих решений, т. е. принимать не одно, а целую «гребенку» решений. Только на последнем шагу выбирается одно оптимальное решение.

3. Господствует убеждение, что для моделирования достаточно использовать один язык (например, язык дифференциальных уравнений для мгновенных значений переменных) и только один критерий выбора модели (главным образом, критерий среднеквадратической ошибки, измеряемой на всех экспериментальных точках \*). При этом нарушаются требования теоремы Геделя о внешнем дополнении (так как указанный критерий не является внешним). Моделирование на одном языке и при одном критерии — занятие тупиковое. Для каждого языка существует предел предсказуемости, связанный с дискретностью интервала усреднения переменных, и только многоуровневое моделирование на нескольких языках, отличающихся по уровню конкретизации, может обеспечить долгосрочный количественный прогноз.

4. Метод максимального правдоподобия и связанная с ним теория статистических решений Вальда основаны на принципе, который для большинства задач прогнозирования и управления не подходит. Согласно этому методу и теории прогнозируемое на один шаг вперед значение выходной величины (параметра) принимается равным наиболее вероятному значению или значению, обеспечивающему в данный момент времени минимум удельного риска. Наиболее вероятное значение подсчитывается непосредственно эмпирически или по формуле Байеса.

По методу Монте — Карло в игру вводится еще генератор случайных чисел с распределением вероятности их появления, равным распределению выхода объекта. При этом также чаще другого выдается прогноз, равный максимально вероятному значению.

Недопустимость такого решения задачи обратного разворачивания вероятностных характеристик в конкретный детерминированный прогноз покажем на следующем примере: допустим, некоторый квадрат подвержен артиллерийскому обстрелу. Мы хотим поместить мишень в точку, где она поскорее будет поражена. Следуя принципу, после первого выстрела мы должны поместить мишень в воронку упавшего снаряда, после двух выст-

\* Структуру разностных моделей следует выбирать по минимуму комбинированного критерия на плоскости  $n_{\text{см}}^2 - i^2(N)$ , а алгебраических — на плоскости  $n_{\text{см}}^2 - \Delta^2(B)$  при  $\Delta^2(C) \leq 1,0$  с последующим перебором по критерию баланса и критериям высшего уровня (устойчивости моментов, распределений, автокорреляционных функций и др.). Выбор критерия для получения оценок коэффициентов зависит от рода задачи: для идентификации и краткосрочного прогноза рекомендуется критерий  $\Delta^2(B) \rightarrow \min$ , а для долгосрочного прогноза  $i^2(N) \rightarrow \min$ .

релов — в точку, лежащую посредине между двумя воронками. Если снаряды ложатся по кругу, мишень должна быть в центре круга, т. е. там, где никогда не будет поражена и т. п. Как известно, указанное поведение способствует решению задачи обратной той, которую мы решаем: как сохранить мишень?

Следует применить другой, многоуровневый, принцип принятия решений. Для сохранения «свободы выбора» формула Байеса (или удельного риска) используется только для выбора значительного числа наиболее перспективных решений. Из них по критерию верхнего уровня (например, по критерию сохранения вероятностного распределения) выбирается единственное оптимальное решение. Таким образом, процедура принятия решений становится двухуровневой. Легко представить себе и более сложные, трехуровневые многокритериальные процедуры, где на каждом уровне используются новые критерии выбора модели с учетом сохранения свободы выбора на всех уровнях, кроме последнего, где принимаются единственные выходные решения.

5. В теории многокритериального выбора решений принят аналогичный не эффективный принцип. Решение принимается экспертами (или при помощи какой-либо свертки критериев) в «области эффективных решений Парето» причем полагается, что в следующий момент времени она останется без изменений. В динамических системах это не так. Нужно применить двухуровневую систему: прогнозировать изменение области Парето во времени и с учетом долгосрочного прогноза принимать уже решение. Прогноз обычно сужает область и облегчает выбор решений [41].

### Принцип многоуровневого моделирования на нескольких языках, отличающихся по уровню детализации прогноза

Принцип служит для получения количественных прогнозов на языке нижнего уровня (с наибольшей детализацией) при сохранении упреждения прогноза, свойственного прогнозам на наиболее общем языке верхнего уровня. Чем более общим является язык, тем больше предельно достижимое время упреждения прогноза (см. рис. 68).

Поясним сначала принцип на примерах.

1. Прогнозирование процессов в экономических и экологических системах. На верхнем уровне используется язык устойчивости моментов. По нему выбираются прогнозы на языке среднегодовых значений переменных (средний уровень). На нижнем детальном уровне моделируются среднесезонные или среднемесячные значения. Этому примеру посвящен данный раздел.

2. Вероятностный прогноз стока рек. Верхний уровень — язык устойчивости характера вероятностных распределений. Средний уровень — прогнозы среднегодовых значений стока. Нижний — прогнозы сезонных или месячных значений. Пример показывает, как следует устранить один из наиболее опасных «подводных камней» вероятностных методов прогноза. Обычно прогноз незаконно принимается равным наиболее вероятному значению, что и является одной из причин неудач вероятностных методов. Обратный переход от вероятностных прогнозов к

количественным следует выполнять с учетом излагаемого принципа, т. е. при помощи рационализированного (многоуровневого) перебора количественных прогнозов.

3. Долгосрочный прогноз погоды. Верхним уровнем может служить язык устойчивости климатического прогноза для большого региона (или при большом усреднении во времени). Средний уровень дает прогнозы для небольших областей региона (или при среднем усреднении), а нижний — прогнозы для конкретного пункта и в конкретный день. Интересную возможность открывает использование на среднем уровне так называемых синоптических прогнозов, имеющих довольно общий (размытый) язык, но обладающих большой заблаговременностью и областью приложения.

Все приведенные примеры содержат три уровня детализации языка моделирования, что, конечно, не обязательно. Речь идет о многоуровневом алгоритме прогнозирования, ведущемся одновременно на разных языках, причем прогнозы на более общем языке служат для выбора оптимального количественного прогноза на следующем, более детальном языке. Несколько уровней (многоуровневость) алгоритма необходимы для преодоления предела прогнозируемости детальных прогнозов, а также для устранения многозначности выбора прогноза по общим критериям.

Прогноз на языке моментов выглядит так: в будущем среднее значение выходной величины и ее дисперсия будут такими же, как и были до сих пор. Прогноз на языке вероятностных распределений: характер распределения среднегодовых значений сохранится на будущее. Язык климатического прогноза утверждает, что «климат, в среднем, не изменяется» и т. п. Такие не вызывающие сомнений прогнозы имеют практически бесконечное время упреждения, но они слишком общие для использования. Критерии верхнего уровня выражают только необходимые условия выбора точного прогноза и должны быть дополнены критериями нижних уровней, чтобы образовать множество необходимых и достаточных условий. Если мы в указанных многоуровневых алгоритмах прогнозирования исключили бы средние уровни, то столкнулись бы с проблемой многозначности выбора. Можно подобрать бесконечное множество прогнозов среднесезонных (месячных) значений, сохраняющих моменты, распределения или климат. Простой перебор случайных прогнозов — претендентов по критериям устойчивости моментов (распределений, климата) — не решает задачу однозначного выбора прогноза среднесезонных (месячных) значений. Таким образом, существенное значение имеет принцип действия генератора разнообразия прогнозов, поступающих на перебор.

Для устранения многозначности выбора по выходному критерию перебираются прогнозы, уже отобранные по другим критериям. Другими словами, перебор большого множества прогнозов заменяется перебором небольшого числа прогнозирующих моделей

и алгоритмов. Совместное действие нескольких критериев уменьшает и устраняет многозначность выбора.

В первом примере алгоритм выбора ведущего оптимального прогноза может действовать так: по критерию устойчивости моментов сравниваются прогнозы среднегодовых значений, получаемые по разным алгоритмам: а) гармоническому алгоритму, б) авторегрессионному комбинаторному алгоритму и в) множественному комбинаторному и другим алгоритмам МГУА. Выбирается один ведущий алгоритм МГУА. Каждый алгоритм как бы предлагает свой прогноз, выбранный уже по некоторому ансамблю внешних критериев, что и приводит к однозначности выбора по общему критерию устойчивости моментов, распределений или климата. Затем по критерию баланса прогнозов, пространственному или временному (определяемому на интервале экстраполяции или прогноза), сравниваются все возможные комбинации посезонных моделей. Для каждого сезона выбирается несколько лучших моделей. Для пяти моделей каждого сезона число комбинаций  $F = 5^4 = 625$  комплектов и столько же будет сравниваемых между собой прогнозов. Таким образом, перебирается не бесконечное множество предложений, а уже отобранные по другим критериям (таким, как неоспоримый критерий минимума смещения и др.) близкие к оптимуму модели-претенденты. Выбранная комбинация комплект посезонных (месячных) моделей дает единственное решение задачи перебора — прогноза, сохраняющее детальность языка низшего уровня (сезон, месяц) при времени упреждения, свойственному языку высокого, общего уровня.

Рассматриваемая многоуровневая система долгосрочного прогнозирования подчиняется всем общим законам действия многоуровневых систем принятия решений, реализующим принцип неполной индукции. В ней (как и в многорядных алгоритмах МГУА) возможна потеря лучшего прогноза. Увеличение «свободы выбора» (по Д. Габору), т. е. числа соревнующихся алгоритмов и комплектов моделей, резко уменьшает возможность его потери. Все, что известно о выборе и оптимизации свободы выбора в многорядных алгоритмах МГУА, действует и здесь в многоуровневой системе одновременного прогнозирования на языках различного уровня детализации.

Принцип многоуровневого прогнозирования отличается тем, что согласно идее самоорганизации ведущий детальный прогноз находится при помощи перебора по минимуму общего внешнего критерия, выбираемого эвристически, исходя из физических свойств прогнозируемого процесса. При этом время упреждения детального прогноза достигает времени действия критерия.

С целью устранения многозначности выбора перебор прогнозов заменяется перебором алгоритмов и моделей, генерирующих некоторое разнообразие прогнозов по своим внешним критериям, и реализуется в виде многоуровневого алгоритма, в котором на



каждом уровне обеспечивается достаточная для успеха «свобода выбора».

Реализация принципа показана ниже на примере экологической системы оз. Байкал.

### Трехуровневый алгоритм самоорганизации прогнозирующих моделей [32]

Если бы мы располагали вычислительной системой машин огромной мощности, то все вопросы, связанные с выбором детальных моделей, можно было бы решить прямым перебором вариантов по комбинаторному алгоритму МГУА с большим ансамблем критериев. Однако мощность машины ограничена, поэтому приходится выяснять основные свойства моделей поэтапно, т. е. по очереди.

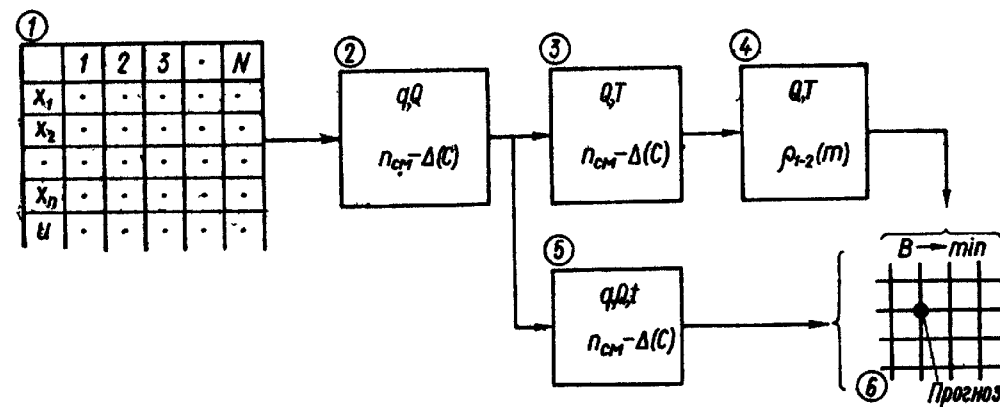


Рис. 73. Трехуровневый алгоритм долгосрочного количественного прогнозирования стационарных процессов.

Для сокращения объема перебора и достижения однозначности выбора изложенный выше принцип реализуется в виде трехуровневого алгоритма, структура которого показана на рис. 73, где 1 — таблица исходных среднегодовых и среднесезонных данных; 2 — алгоритм объективной самоорганизации физической модели объекта с целью выяснения множества выходных переменных; 3 — алгоритм самоорганизации прогнозирующей (нефизической) модели для прогноза годовых значений переменных; 4 — выбор лучшего годового прогноза по критерию устойчивости нижних моментов (критерий высшего уровня); 5 — алгоритм самоорганизации разностных моделей для прогноза сезонных значений; среди аргументов используются как сезонные, так и среднегодовые данные, а также координата времени, что дает прогноз, не сходящийся жестко к среднеклиматическому; 6 — выбор комплекта сезонных моделей по критерию баланса сезонных и годовых прогнозов (алгоритм спуска в пространстве структур моделей).

Поясним действие каждого этапа.

1 этап. Системный анализ динамики объекта для выбора множества выходных пере-

менных. На этом этапе производится разделение множества переменных, заданных в таблице исходных данных, на три подмножества: а) выходные переменные (выходы); б) входные переменные (входы); с) переменные, не имеющие существенного влияния на выходные величины.

Алгоритм достижения указанной цели описан во второй главе. Это — многорядный алгоритм самоорганизации модели, в котором постепенно увеличивается число уравнений, система которых образует модель. Машине на первом ряду разрешается использовать любую одну строку таблицы исходных данных, на втором ряду — любые две строки, на третьем — любые три строки и т. д., на последнем — всю таблицу. Каждой строке таблицы соответствует одно уравнение. Таким образом, число уравнений, образующих модель, постепенно возрастает.

Каждое уравнение оценивается на плоскости двух критериев:  $n_{cm}$  — минимум смещения и  $\Delta(C)$  — ошибка на экзаменационных данных, причем выбираются уравнения, ближайšie к началу координат плоскости критериев. Система уравнений оценивается по величине системного критерия минимума смещения \*

$$n_{cm}^* = \sqrt{\frac{1}{S} \sum_{i=1}^S n_{icm}^2} \rightarrow \min,$$

где  $S$  — число уравнений в системе;  $n_{icm}$  — величина критерия минимума смещения  $i$ -го уравнения системы.

Система уравнений, отвечающая минимуму наименьшего системного критерия смещения, является оптимальной. Переменные, не входящие в уравнения избранной оптимальной системы, из дальнейшего рассмотрения исключаются.

II этап. Соревнование одномерных алгоритмов для выбора ведущих переменных. Целью является разделение множества прогнозов среднегодовых значений переменных (не исключенных на первом этапе) на хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные с последующим выбором лучших прогнозов (по одному для каждой переменной). Входные переменные, для которых не удастся получить хорошие и удовлетворительные прогнозы, из дальнейшего рассмотрения исключаются. Выходные переменные остаются независимо от качества их годовых прогнозов, так как конечной целью всего алгоритма является прогноз выходных величин. Сравнению между собой подлежат прогнозы, получаемые по различным алгоритмам МГУА: гармоническим, авто- и множественно-регрессионным, однорядным (комбинаторным) и многорядным, отличающимся по виду опорных функций. Выбор прогнозирующих моделей во всех алгоритмах выполняется на плоскости двух критериев: «минимум

\* В переборе по критерию минимума смещения участвуют только системы уравнений, в которых все уравнения достаточно хорошо прогнозируют на три сезона вперед, т. е.  $\Delta(C) \leq 1.0$ .



смещения — точность на экзамене» ( $n_{см} - \Delta(C)$ ) или (при малом числе точек таблицы) «регулярность — точность на экзамене ( $\Delta(B) - \Delta(C)$ )». Лучшие по указанным критериям прогнозы (по одному для каждого алгоритма) оцениваются на плоскости двух других критериев: «точность на экзамене — сохранение двух первых моментов»: ( $\Delta(C) \rightarrow \rho_{1-2}(m)$ ). Входные переменные прогнозы среднегодовых значений, которые оказываются хуже некоторых пороговых значений, из дальнейшего рассмотрения исключаются.

Дадим определения критериев.

Критерий точности прогноза на экзамене записывается в виде

$$\Delta(C) = \sqrt{\frac{\sum_1^{N_C} (q_{пр} - q_{\phi})^2}{\sum_1^{N_C} (q_{\phi} - \bar{q}_{\phi})^2}} \rightarrow \min,$$

где  $N_C$  — число точек экзаменационной части таблицы.

Критерий широко используется в метеорологии и гидрологии. Прогнозы считаются при  $0 < \Delta(C) < 0,5$  хорошими,  $0,5 < \Delta(C) < 1,0$  удовлетворительными,  $1,0 < \Delta(C)$  — неудовлетворительными. Оценка прогноза может быть несколько улучшена при помощи адаптации модели: пересмотра оценок коэффициентов после каждого прогноза на один год вперед.

Критерии устойчивости двух первых моментов можно записать так:

$$\rho_{1-2}(m) = \left[ \left( \frac{m_{1\phi} - m_{1пр}}{m_{1\phi} - m_{1пр}} \right)^2 + \left( \frac{m_{2\phi} - m_{1\phi}}{m_{2\phi} - m_{2пр}} \right)^2 \right] \rightarrow \min,$$

где  $m_{1\phi}$  — среднее значение переменной по опытным данным, т. е. на интервале интерполяции  $T_{\phi}$ ;  $m_{2\phi}$  — дисперсия переменной на том же интервале  $T_{\phi}$ ;  $m_{1пр}$  — среднее значение прогноза (на интервале интерполяции и прогноза)  $T_{\phi} + T_{пр}$ ;  $m_{2пр}$  — дисперсия прогноза (на интервале  $T_{\phi} + T_{пр}$ ).

Для примера, рассматриваемого ниже,

$$\begin{aligned} m_{1пр} &= \frac{1}{(T_{\phi} + T_{пр})} \sum_1^{(T_{\phi} + T_{пр})} q_{пр} = \\ &= \frac{1}{46} \sum_{1955}^{2000} (q_{1955} + q_{1956} + \dots + q_{2000}) = \bar{q}_{\phi+пр}, \\ m_{1\phi} &= \frac{1}{T_{\phi}} \sum_1^{T_{\phi}} q_{\phi} = \frac{1}{23} \sum_{1955}^{1977} (q_{1955} + q_{1956} + \dots + q_{1977}) = \bar{q}_{\phi}, \\ m_{2пр} &= \frac{1}{T_{\phi} + T_{пр}} \sum_1^{(T_{\phi} + T_{пр})} (q_{пр} - \bar{q}_{\phi+пр}) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{46} \sum_{1955}^{2000} [(q_{1955} - \bar{q}_{\phi+пр})^2 + (q_{1956} - \bar{q}_{\phi+пр})^2 + \dots + (q_{2000} - \bar{q}_{\phi+пр})^2], \\ m_{2\phi} &= \frac{1}{T_{\phi}} \sum_{i=1}^{T_{\phi}} (q_{\phi} - \bar{q}_{\phi})^2 = \frac{1}{23} \sum_{1955}^{1977} [(q_{1955} - \bar{q}_{\phi})^2 + \dots + (q_{1977} - \bar{q}_{\phi})^2]. \end{aligned}$$

Практически критерии  $\Delta(C)$  и  $\rho_{1-2}(m)$  используются последовательно один за другим. Все соревнующиеся алгоритмы (и их прогнозы) оцениваются по критерию  $\Delta(C)$  и только хорошие и удовлетворительные прогнозы поступают на последующую оценку по критерию сохранения моментов.

Из всех хороших и удовлетворительных прогнозов, имеющих  $\Delta(C) \leq 1,0$ , для каждой переменной выбирается один или несколько лучших алгоритмов, имеющих наименьшее значение критерия устойчивости моментов  $\rho_{1-2}(m) \rightarrow \min$ . Достоверность годового прогноза (оцениваемая по критерию  $\rho_{1-2}(m)$ ) обычно улучшается, если в качестве прогноза взять среднее значение нескольких лучших (по критерию  $\Delta(C)$ ) прогнозов\*.

Выходные переменные, имеющие достаточно хорошие прогнозы годовых значений  $\Delta(C) \leq 1,0$  и  $\rho_{1-2}(m) \leq 0,01$ , далее называются ведущими выходными переменными.

III этап. Самоорганизация сезонных моделей и долгосрочное прогнозирование среднесезонных значений переменных. Для конкретности далее будем рассматривать следующие уровни детализации прогнозов: среднесезонные значения переменных корректируются по среднегодовым, а среднегодовые — по критерию устойчивости моментов. При этом целью третьего этапа является получение долгосрочных прогнозов среднесезонных значений выходных переменных.

Как указывалось, оптимальные сезонные количественные прогнозы получаются не при помощи перебора большого числа случайных прогнозов-претендентов, а при помощи перебора сравнительно небольшого числа моделей, каждая из которых генерирует один прогноз по своим критериям. В случае циклических процессов перебору подлежат комплекты сезонных моделей, сохраняющих свою естественную последовательность. Ниже ограничимся рассмотрением прогноза сезонных значений циклических процессов, который получается при помощи пошагового интегрирования комплекта сезонных моделей в последовательности смены сезонов, т. е. зима, весна, лето и осень.

Искусственное приведение процесса к циклическому виду. В ряде случаев цикличность может быть создана искусственно. Способы создания искусственной цикличности еще недостаточно разработаны. Один из них состоит

\* Если окажется, что все соревнующиеся алгоритмы не обеспечивают удовлетворительного прогноза, то необходимо увеличить число уровней детализации языка (ввести еще уровень с большим, чем год, интервалом усреднения и т. п.).

в следующем. При помощи самоорганизации находится гармонический ряд с некратными частотами, аппроксимирующий данный процесс. Выбирается основная гармоника процесса, имеющая наибольшую амплитуду. Период ее делится на четыре сезона: «лето» (45—135°), «осень» (135—225°), «зима» (225—315°) и «весна» (315—45°). Предварительно следует вычесть из ординат процесса полиномиальный тренд, чтобы осталась только знакопеременная часть процесса.

Напомним, что точный долгосрочный полиномиальный тренд лучше всего можно получить при помощи самоорганизации по критерию баланса переменных в форме «кольца разностей прямых и обратных функций» (см. гл. 2).

Сезонные модели получаются при помощи комбинаторного или многорядного алгоритма МГУА в результате перебора большого числа моделей претендентов на плоскости двух критериев «минимум смещения — точность на экзамене»  $n_{см}^2 - \Delta^2(C)$ .

При одной ведущей переменной для нее выбирается несколько (до десяти) лучших моделей (разной структуры), для остальных выходных переменных — по одной модели. Далее организуется перебор комплектов сезонных моделей с целью нахождения лучшего комплекта. Различные комплекты моделей отличаются друг от друга по структуре сезонной модели ведущей переменной и сравниваются по критерию баланса прогнозов:

$$b_i = Q_i^* - \frac{1}{4} (q_{iz}^* + q_{iv}^* + q_{il}^* + q_{io}^*),$$

$$B_i^2 = \sum_{i=1}^{N_{пр}} b_i^2 \rightarrow \min,$$

где  $N_{пр}$  — точки интервала прогноза. При этом выбирается единственный, лучший комплект сезонных моделей. Пошаговое интегрирование уравнений оптимального комплекта дает искомые долгосрочные сезонные прогнозы одновременно для всех выходных переменных. При нескольких ведущих выходных переменных лучший комплект моделей выбирается по системному критерию баланса прогнозов

$$B^* = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k B_i^2} \rightarrow \min,$$

где  $k$  — число ведущих переменных, имеющих хорошие и удовлетворительные годовые прогнозы.

*О возможностях ЭВМ.* Чем больше будет перебрано прогнозов, тем больше вероятность выбора единственного лучшего комплекта моделей.

Обозначим  $s$  — число интервалов детального прогноза в году (месяцев, сезонов и др.);  $k$  — число ведущих выходных переменных;  $p$  — число моделей, отобранных по комбинаторному алгоритму, для каждой ведущей переменной.

Тогда количество сравниваемых комплектов моделей и их прогнозов равно:

$$C = (p^s)^k.$$

Таблица 44. Объем перебора по критерию баланса прогнозов

Характеристика системы		Объем перебора	
$k$	$p$	Интервал месяц — год $s = 12$	Интервал сезон — год $s = 4$
1	3	$3^{12} = 81^4$	$3^4 = 81$
1	5	$5^{12} = 625^4$	$5^4 = 625$
2	3	$(3^{12})^2 = (81^2)^4$	$(3^4)^2 = 81^2$
2	5	$(5^{12})^2 = (625^2)^4$	$(5^4)^2 = 625^2$

Некоторые варианты перебора показаны в табл. 44. Практически на машине БЭСМ-6 за один час счета можно перебрать  $C \leq 10\,000$  прогнозов. Это означает, что для пары интервалов месяц — год при одной ведущей переменной перебирается не более трех вариантов моделей на каждый месяц.

При интервалах усреднения сезон — год можно при той же продолжительности счета повысить свободу выбора в четыре-пять раз, т. е. перебрать по восемь-девять вариантов среднесезонных моделей. Число сравниваемых прогнозов (при одной ведущей переменной)

$$C_{сезон-год} = p^s = 8^4 = 4096 \text{ прогнозов.}$$

Поэтому если среднесезонные прогнозы достаточны для заказчика, то их следует предпочесть самоорганизации среднемесячных моделей.

Для того чтобы поднять точность и время упреждения до уровня прогноза за период солнечной активности (11,2 лет), можно применить либо один критерий баланса (с интервалами сезон — период), либо последовательно два критерия баланса (например, с интервалами сезон — год и год — период). Двухрядный алгоритм, как всегда, оказывается более экономичным по времени счета. Аналогичные оценки можно сделать и для пространственных критериев баланса.

*Пример 33.* Самоорганизация точечной модели экосистемы оз. Байкал. Как известно, мнения ученых о степени опасности, которой подвергается оз. Байкал в связи с ростом так называемого антропогенного воздействия (промышленных стоков, туризма, лесосплава и др.) весьма различны [14]. Поэтому желательно попытаться найти некоторый объективный метод прогноза состояния озера, опирающийся на данные наблюдений. Методы самоорганизации моделей на ЭВМ претендуют на роль арбитра в сложных вопросах, так как они опираются на опытные данные и осуществляют перебор большого числа моделей по легко согласуемым внешним критериям.

Исходные данные, представленные в табл. 45 и 46, содержат результаты измерений, выполненных на станции № 1 (с. Большие Коты) Института биологии Иркутского университета.

Названия переменных  $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, u_1, u_2, u_3$  и их размерности указаны в табл. 45. Небольшое число переменных определяет собой тестовый характер примера самоорганизации модели экосистемы. Пример поясняет алгоритм, по которому могут быть найдены более сложные модели при условии предоставления машине более полного множества переменных.

Таблица 45. Исходные среднесезонные данные для самоорганизации точек 0—25 м. Последовательность А

Переменная	1970				1972			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
$q_1$	18,10	17,3	18,30	11,90	17,50	12,10	10,50	14,80
$q_2$	10,95	25,6	21,70	6,90	6,27	280,40	23,60	38,90
$q_3$	1,96	18,00	13,50	0,27	0,64	53,90	2,58	0,70
$q_4$	4,70	10,70	14,30	17,40	3,70	5,90	12,10	14,30
$q_5$	3,20	6,00	8,00	14,30	2,60	4,90	10,10	12,80
$u_1$	1,10	0,90	7,60	6,90	1,00	1,40	7,80	6,80
$u_2$	185,3	155,3	213,00	246,70	210,00	175,00	183,30	205,00
$u_3$	115,3	210,0	256,20	147,40	117,70	232,90	229,00	130,50

Примечание. Тут и в табл. 46  $q_1$  — прозрачность воды (м),  $q_2$  — биомасса фито ( $\text{м}^2/\text{м}^3$ ),  $q_3$  — биомасса эпицеры ( $\text{г}/\text{м}^2$ ),  $u_1$  — температура воды ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $u_2$  — уровень воды (м),

Долгосрочное прогнозирование по методам самоорганизации (с использованием значительно более полных таблиц исходных данных, включающих большее число переменных) позволит дать ответы на многие вопросы.

Самоорганизация точечной (т. е. по данным, измеренным в одной точке озера) модели выполнена по описанному выше трехуровневому алгоритму МГУА.

Результаты первого этапа. На первом этапе алгоритма получены следующие разностные модели (указываются модели, отвечающие наименьшему значению системного комбинированного критерия).

При использовании одной строки табл. 44 и 45

$$q_{2(+1)} = -320,8559 + 2,8077u_{2(-1)} - 0,8966u_{3(-1)} n_{\text{см}}^* = 0,0183.$$

Уравнение выражает связь изменения биомассы фитопланктона с динамикой изменения уровня воды.

При использовании двух строк выходными переменными оказались  $q_3$  и  $q_4$ , изменение которых во времени описывается системой состояний из двух разностных уравнений:

$$\begin{aligned} q_{3(+1)} = & -60,9848 + 0,0105q_{3(0)} - 0,0153q_{3(-1)} - 0,0059q_{3(-2)} + \\ & + 0,0049q_{3(-3)} - 2,2903q_{4(0)} + 2,1041q_{4(-1)} - 0,0682q_{4(-2)} - 16,0597u_{1(0)} - \\ & - 1,579u_{1(-1)} + 1,5683u_{2(0)} - 0,0082u_{2(-2)} - 0,3185u_{2(-3)} - 0,2380u_{3(-1)}, \\ q_{4(+1)} = & 68,0952 + 0,0012q_{3(-1)} - 0,4519q_{4(-2)} - 0,0268q_{4(-3)} - \end{aligned}$$

Таблица 46. Исходные среднесезонные данные для самоорганизации точек 0—25 м. Последовательность В

Переменная	1971				1973			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
$q_1$	17,10	13,90	16,80	11,30	17,80	15,30	16,40	9,40
$q_2$	7,47	475,50	55,80	13,40	7,30	74,90	45,10	10,40
$q_3$	1,78	224,70	32,44	1,30	0,96	64,80	37,90	1,00
$q_4$	1,20	1,50	12,50	8,30	4,30	8,70	15,10	18,60
$q_5$	0,30	0,80	8,20	6,10	3,40	7,20	10,80	16,30
$u_1$	1,1	1,00	7,80	7,40	1,10	0,70	5,10	7,20
$u_2$	203,7	168,00	224,30	268,00	167,70	139,70	215,30	297,00
$u_3$	123,0	241,70	216,50	175,50	104,00	227,80	229,20	154,70

ной модели оз. Байкал, станция №1 (на траверсе Больших Котов), горизонт

	1974				1976			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
	22,60	13,70	15,90	15,90	19,40	9,80	14,60	11,80
	4,20	640,80	209,20	6,80	11,70	27,80	23,20	5,40
	0,57	589,60	188,30	0,70	0,52	17,80	11,30	0,64
	1,30	2,80	12,10	8,50	5,80	8,50	13,50	1,80
	0,90	1,90	9,40	5,30	4,90	7,80	11,60	1,10
	1,10	1,40	10,40	8,30	1,00	1,60	9,40	8,00
	237,70	195,70	219,70	222,30	169,30	141,30	176,00	213,30
	128,40	241,40	260,90	146,70	113,60	165,30	268,10	121,30

планктона ( $\text{м}^2/\text{м}^3$ )  $x_1 = q_3$  — биомасса мелозеры ( $\text{мг}/\text{м}^3$ ),  $x_2 = q_4$  — биомасса зоопланктона  $u_3$  — число солнечных часов.

$$\begin{aligned} & -0,6002u_{1(0)} - 0,1453u_{2(0)} - 0,0297u_{2(-1)} - 0,0307u_{2(-3)} + \\ & + 0,0143u_{3(0)} - 0,0611u_{3(-3)}, \end{aligned}$$

$$n_{\text{см}}^* = 0,0008.$$

Согласно изложенному принципу уравнения, полученные на первом этапе, пригодны только для идентификации объекта и краткосрочного прогноза.

При использовании трех строк таблицы получена следующая система уравнений:

$$\begin{aligned} q_{1(+1)} = & 19,6137 - 0,5926q_{1(0)} + 0,0547q_{1(-1)} - 0,0139q_{4(-1)} + \\ & + 0,0548q_{4(-2)} + 0,2019u_{1(0)} - 0,3094u_{1(-3)} + 0,0136u_{3(-2)}, \\ q_{2(+1)} = & -399,9113 + 9,8356q_{1(-2)} + 1,0609q_{4(0)} + 11,4730q_{4(-2)} - \\ & - 0,3340q_{4(-3)} - 8,9023u_{1(0)} - 0,4520u_{1(-3)} + 2,0245u_{2(-1)} - \\ & - 0,7689u_{3(-1)} + 0,0275u_{3(-3)}, \\ q_{4(+1)} = & 58,9844 - 0,1312u_{2(0)} - 0,0505u_{2(-1)} - 0,0330u_{2(-3)} + \\ & + 0,0106u_{3(0)} - 0,0345u_{3(-3)}, \\ & n_{\text{см}}^* = 0,004. \end{aligned}$$

ной модели оз. Байкал, станция №1 (на траверсе Больших Котов), горизонт

	1975				1977			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
	22,00	19,40	15,70	9,40	21,20	11,10	14,80	11,90
	9,00	48,40	60,20	116,30	24,70	1107,10	41,58	99,42
	1,79	19,00	32,90	1,22	0,26	1,94	0,36	0,44
	10,00	11,20	6,80	10,30	9,60	18,00	32,40	28,40
	8,10	10,30	4,70	8,90	7,90	16,60	26,80	25,20
	0,60	1,00	7,30	8,00	1,20	0,60	8,40	7,10
	171,70	143,00	201,70	237,00	174,50	142,00	188,50	221,50
	103,00	236,10	246,60	169,90	103,20	158,30	256,80	160,80

Кривая изменения системного критерия минимума смещения (для лучших по этому критерию систем) в зависимости от числа уравнений показана на рис. 74. Минимум кривой определяет число (и наименование) выходных

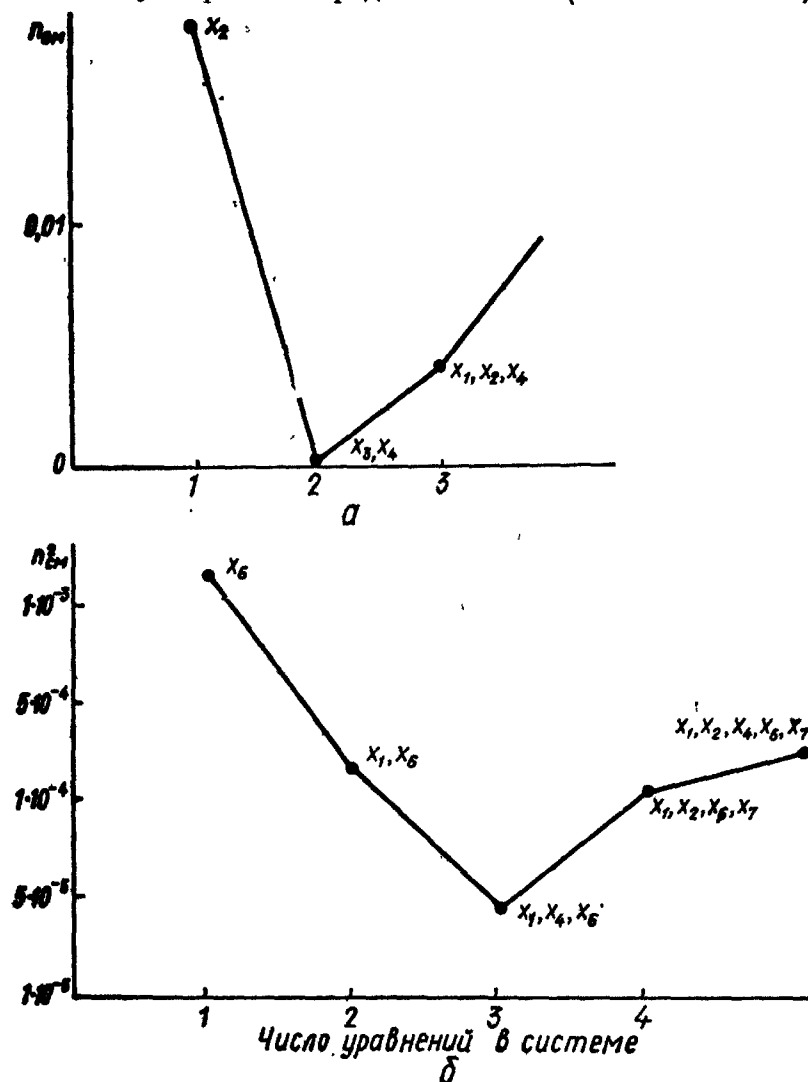


Рис. 74. Определение числа уравнений, образующих модель:  
а — по данным табл. 44 и 45; б — по данным табл. 50 и 51.

переменных. Наименее смещенной оказалась система из двух уравнений при следующих выходных переменных:  $x_1 = q_3$  (биомасса мелозеры),  $x_2 = q_4$  (биомасса зоопланктона).

Легко увидеть в найденной системе некоторый конечно-разностный вариант известной модели «хищник—жертва», описываемой также двумя уравнениями (правда, нелинейными).

Для определения вектора состояний счет на машине был повторен, причем ей было разрешено использовать все данные исходных таблиц (а не только две строки). При этом получена следующая модель оптимальной сложности:

$$\begin{aligned} q_{3(+1)} &= 22,4042 - 0,1673q_{4(0)} - 10,6977u_{1(-2)} + 1,8842u_{2(-2)} - 2,4647u_{2(-3)}, \\ q_{4(+1)} &= 58,9093 - 0,0062q_{1(-3)} + 0,0006q_{4(-3)} + 0,0223u_{1(-1)} - 0,1382u_{2(0)} - \\ &\quad - 0,0425u_{2(-1)} - 0,0325u_{2(-3)} - 0,0132u_{3(0)} - 0,0386u_{3(-3)}. \end{aligned}$$

Рассматривая полученные уравнения, легко установить: вектор выходных переменных (вектор состояний)

$$x_1 = q_3 \text{ и } x_2 = q_4;$$

вектор возмущенных воздействий («входов»):  $u_1, u_2, u_3x_3 = q_1$ . Остальные переменные, указанные в таблице исходных данных  $q_2$  и  $q_5$ , в дальнейшем из рассмотрения исключаются.

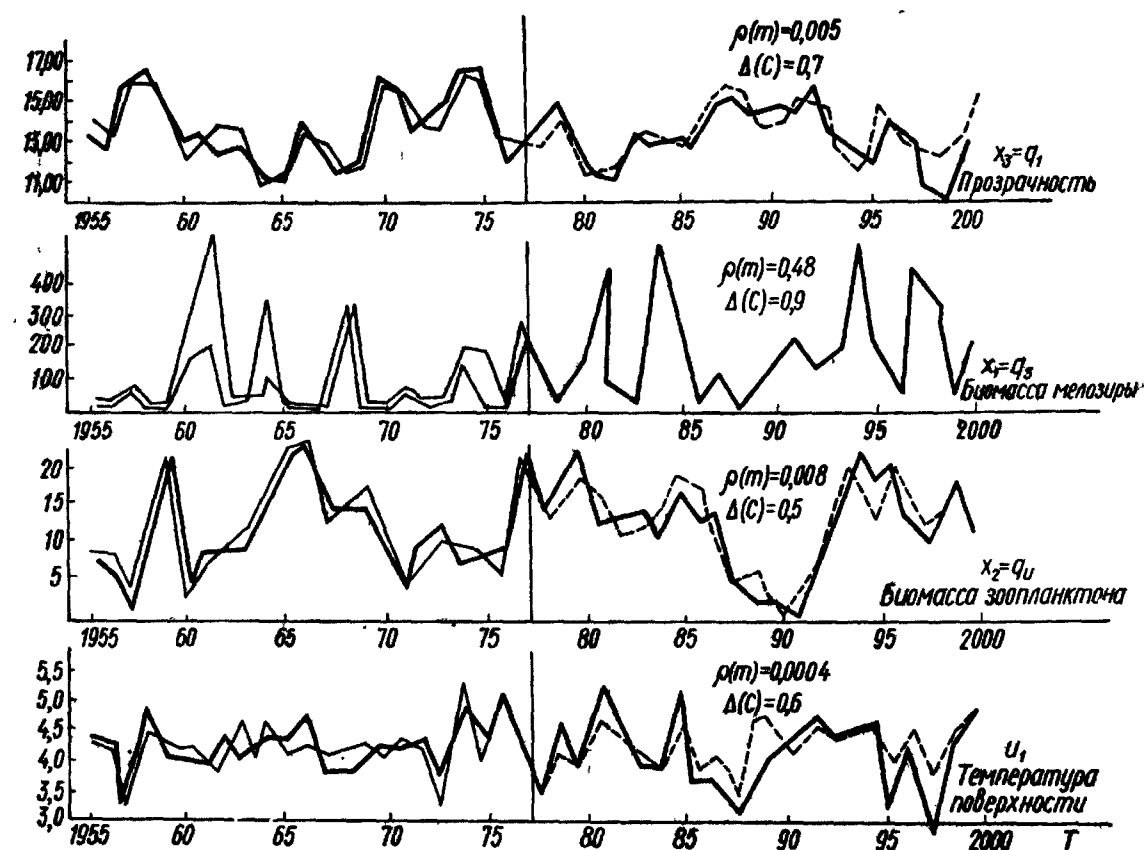


Рис. 75. Лучшие по критерию сохранения моментов прогнозы годовых значений переменных (оз. Байкал):  
—— среднее лучших прогнозов; ——— лучший прогноз; ---- фактические данные.

Результаты второго этапа алгоритма. По данным за 23 года (с 1955 по 1977 г.) выполнены долгосрочные прогнозы среднегодовых значений переменных:

$$x_1 = q_3, \quad x_2 = q_4, \quad x_3 = q_1, \quad u_1, \quad u_2 \text{ и } u_3.$$

При этом соревновались между собой следующие алгоритмы МГУА: а) гармонический алгоритм; б) авторегрессионный комбинаторный алгоритм, в котором применяется следующее полное описание:

$$q_{i(0)} = a_0 + a_1q_{i(-1)} + a_2q_{i(-2)} + \dots + a_nq_{i(-n)};$$

в) множественный комбинаторный алгоритм, учитывающий несколько аргументов; полное описание

$$\begin{aligned} q_{i(0)} &= a_0 + a_1q_{i(-1)} + a_2q_{i(-2)} + \dots + a_nq_{i(-n)}, \\ &\dots \dots \dots \\ &a_1q_{j(-1)} + a_2q_{j(-2)} + \dots + a_nq_{j(-n)}. \end{aligned}$$

Таблица 47. Исходные данные для долгосрочного прогноза среднегодовых поверхностный слой)

Переменная	1955	1956	1957	1958	1959	1960
$q_1$	13,64	12,77	15,70	16,80	15,50	12,87
$q_2$	57,44	22,01	220,27	71,66	14,73	203,00
$q_3$	7,01	3,17	81,14	3,38	7,23	185,64
$q_4$	8,49	8,42	4,96	13,46	21,20	4,02
$q_5$	7,27	6,61	3,11	10,31	15,89	2,79
$u_1$	4,29	4,16	3,56	4,78	4,21	4,22
$u_2$	109,78	114,67	119,33	117,60	136,68	126,00
$u_3$	175,11	186,83	177,48	185,63	164,18	172,07

Примечание. Началом года наблюдений принято считать 1 декабря каждого календарного года. Среднегодовые данные за 1967—1977 гг. для краткости таблицы не приведены, так как их можно легко получить из табл. 32—34 среднесезонных значений переменных.

Гармонические алгоритмы рекомендуется применять при большом числе данных, а комбинаторные — при малом (менее 20 точек).

В результате самоорганизации для прогноза среднегодовых значений получены следующие модели:

гармоническая модель для переменной  $q_1$

$$q_1(t) = \sum_{i=1}^5 [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)],$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} -0,23129 \\ 1,32977 \\ -1,28093 \\ 0,41155 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} 0,68548 \\ 0,89267 \\ -0,246343 \\ -0,08544 \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0,38155 \\ 1,461011 \\ 1,641588 \\ 2,86719 \end{bmatrix},$$

$$\rho_{1-2}(m) = 0,005, \quad \Delta(C) = 0,6; \quad A = 18, \quad B = 2, \quad C = 3 \text{ точки};$$

авторегрессионная модель для переменной  $q_1$

$$q_{1(+1)} = 7,6270 + 0,3344q_{1(-2)} + 0,5587q_{1(-3)} - 0,7970q_{1(-6)} + 0,3575q_{1(-4)},$$

$$\rho_{1-2}(m) = 0,03, \quad \Delta(C) = 0,9;$$

гармоническая модель для переменной  $x_2 = q_4$

$$q_4(t) = \sum_{i=1}^{10} [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)],$$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} -5,8501 \\ -3,1996 \\ 1,9024 \\ 2,1962 \\ 1,0010 \\ 0,4058 \\ -0,2213 \\ 0,3701 \\ -1,1417 \\ 0,2043 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} 1,1319 \\ -2,3239 \\ -1,3448 \\ -1,4404 \\ 2,4514 \\ -0,2659 \\ -1,9042 \\ 1,2434 \\ -0,3431 \\ -0,2088 \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0,4061 \\ 0,8927 \\ 1,7653 \\ 1,8399 \\ 2,6724 \\ 0,36607 \\ 0,6974 \\ 1,23447 \\ 2,3494 \\ 2,8733 \end{bmatrix},$$

$$\rho_{1-2}(m) = 0,0008, \quad \Delta(C) = 0,5; \quad A = 18, \quad B = 2, \quad C = 3 \text{ точки};$$

значений переменных по гармоническому алгоритму МГУА (оз. Байкал,

1961	1962	1963	1964	1965	1966
12,94	12,67	12,89	11,06	11,06	13,04
410,30	27,08	27,25	620,40	237,33	41,28
227,27	2,53	19,18	379,87	4,08	0,66
8,14	9,90	10,63	15,22	21,03	29,24
5,78	8,06	9,48	6,70	16,68	27,64
3,83	4,57	3,87	4,43	4,32	4,24
139,75	222,38	278,50	247,09	223,84	214,60
194,88	175,95	184,28	199,00	182,89	183,28

дарного года. Среднегодовые данные за 1967—1977 гг. для краткости таблицы не приведены,

$$\text{гармоническая модель для переменной } u_1(t) = \sum_{i=1}^8 [A_i \sin(\omega_i t) + \beta_i \cos(\omega_i t)],$$

$\times(\omega_i t)],$

$$\bar{A}_i = \begin{bmatrix} 0,3006 \\ 0,2688 \\ -0,0904 \\ -0,0786 \\ 0,1831 \\ 0,1205 \\ -0,4566 \\ -0,4215 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_i = \begin{bmatrix} -0,2214 \\ -0,1889 \\ 0,0575 \\ 0,11015 \\ 0,4101 \\ -0,2820 \\ -0,12167 \\ 0,2049 \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0,7397 \\ 1,69138 \\ 2,79676 \\ 0,47945 \\ 1,30155 \\ 1,87409 \\ 2,4407 \\ 3,02829 \end{bmatrix}.$$

$$\rho_{1-2}(m) = 0,0004, \quad \Delta(C) = 0,6, \quad A = 16, \quad B = 4, \quad C = 3 \text{ точки}.$$

Таким образом, при заданной длине предыстории (23 года) и заданном интервале упреждения прогноза (23 года) во всех случаях «победил» гармонический алгоритм МГУА. Прогнозы среднегодовых значений для переменных  $x_1 = q_2$ ,  $u_2$  и  $u_3$  оказались недостаточно точными:  $\Delta(C) > 0,8$  и  $\rho_{1-2}(m) > 0,01$ .

Следовательно, по правилу, указанному выше, переменные  $u_2$  и  $u_3$  из дальнейшего рассмотрения исключаются. В прогнозах далее участвуют только четыре переменные:  $x_1 = q_2$ ,  $x_2 = q_4$ ,  $x_3 = q_1$  и  $u_1$ . Прогнозы показаны на рис. 75. Переменной  $x_2 = q_4$  присваивается название *ведущей*; так как для нее получен самый точный годовой прогноз. По нему корректируются прогнозы при других усреднениях и для других переменных.

**Результаты третьего этапа алгоритма.** Самоорганизация моделей для четырех сезонов выполнена по комбинаторному алгоритму МГУА при следующем виде полного описания:

$$x_{1(00)} = a_0 + a_2 x_{1(-10)} + a_3 x_{1(-20)} + a_4 x_{1(-30)} + a_5 x_{1(0-1)} +$$

$$+ a_6 x_{2(00)} + a_7 x_{2(-10)} + a_8 x_{2(-20)} + a_9 x_{2(-30)} + a_{10} x_{2(0-1)},$$

$$a_{11} X_{2(00)} + \dots + a_{12} X_{2(0-1)},$$

$$a_{13}X_{3(00)} + \dots + a_{14}X_{3(0-1)}, \\ a_{15}U_{1(00)} + \dots + a_{16}U_{1(0-1)}.$$

Малыми буквами обозначены сезонные значения, большими — среднегодовые \*. Индексы (в скобках) показывают запаздывание. Полный полином включает в себя все величины, которыми мы располагаем на интервале прогноза переменных  $x_1$  и  $x_2$ . В этом состоит правило составления исходного полного описания по условию автономности пошагового прогноза. В дальнейшем предусматривается ввести в полное описание еще произведения переменных (ковариации) по два. Принято следующее разделение данных: экзаменационная последовательность  $C = 3$  точки, последовательности  $A$  и  $B$  — по 10 точек.

Наличие среди аргументов переменных  $x_{1(00)}$ ,  $x_{2(00)}$  означает, что при пошаговом прогнозе оба уравнения нужно интегрировать совместно при помощи решения системы из двух уравнений с двумя неизвестными (т. е. использовать шаблоны по неявной схеме).

Имеется еще возможность ввести в состав аргументов исходного полного описания сезонные значения переменных  $x_3 = q_1$  и  $u_1$ , а также их запаздывающие значения (всего  $2 \times 4 = 8$  слагаемых). Однако при этом придется интегрировать не два, а сразу четыре уравнения, что затрудняет пошаговый прогноз.

Свободный член иногда заменяется полиномом  $a_0 = a_0^1 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_mt^m$  оптимальной сложности, определяемой предварительно по алгоритму самоорганизации долгосрочных трендов.

При обучении шаблон сезонной модели перемещается по полю таблицы по годам: для каждого шаблона машина строит систему из 22-х условных уравнений (один год «пропадает» из-за учета запаздывания). Система условных уравнений приводится к системе нормальных уравнений для определения оценок коэффициентов по методу наименьших квадратов по всем данным.

Так как число членов полинома (двадцать один) больше практически допустимого для комбинаторного алгоритма МГУА, то алгоритм перебирает только те частные модели, для которых достаточно данных в таблице и хватает допустимого времени счета на машине (практически перебирались все модели, имеющие не более десяти слагаемых из шестнадцати возможных).

Для каждого сезона было выбрано по пять лучших структур моделей, у которых выходной переменной является ведущая выходная переменная, и по одной модели для выходной переменной. Ниже приводятся лучшие по критериям  $\Delta_{cm} - \Delta(C)$  сезонные модели:

#### Зима

$$1) x_{1(00)} = 22,6779 + 0,116x_{1(-1,0)} + 0,30914x_{2(-1,0)} - \\ - 0,519x_{2(-2,0)} - 0,01313x_{2(00)} - u_1 13 553v_{1(00)}, \Delta^2(C) = 0,286;$$

\* Обратим внимание на то, что впервые используется разностное уравнение с двумя интервалами усреднения. Это устраняет жесткую сходимость прогнозов к среднеклиматическому прогнозу.

$$2) x_{2(00)} = 1,52603 + 0,00428x_{2(0,-1)} - 0,12235x_{1(00)} + \\ + 0,36169x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,467; \\ 3) x_{2(00)} = 1,54713 - 0,12261x_{1(00)} + 0,36157x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,472; \\ 4) x_{2(00)} = 1,65407 - 0,01259x_{2(-3,0)} - 0,12673x_{1(00)} + \\ + 0,36368x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,477; \\ 5) x_{2(00)} = 1,96733 - 0,03187x_{1(-1,0)} - 0,04503x_{2(-1,0)} + \\ + 0,35490x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,481; \\ 6) x_{2(00)} = 0,82685 + 0,03125x_{2(0,-1)} + 0,36085x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,583;$$

#### Весна

$$7) x_{1(00)} = 2104,3700 - 0,4348x_{1(0,-1)} - 22,6430x_{2(00)} - \\ - 113,4710x_{3(-1,0)}, \Delta^2(C) = 0,528; \\ 8) x_{2(00)} = 11,0797 - 0,00143x_{1(00)} - 0,24109x_{1(-1,0)} - \\ - 0,00808x_{1(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,873; \\ 9) x_{2(00)} = 10,8772 - 0,28553x_{1(-1,0)} - 0,00719x_{1(-3,0)}, \Delta^2(C) = \\ = 0,891; \\ 10) x_{2(00)} = 10,5464 - 0,28359x_{1(-1,0)}, \Delta^2(C) = 0,916; \\ 11) x_{2(00)} = 9,8317 + 0,09224x_{2(0,-1)} - 0,25471x_{1(-1,0)} - \\ - 0,00570x_{1(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,919; \\ 12) x_{2(00)} = 9,46013 + 0,10258x_{2(0,-1)} - 0,24994x_{1(-1,0)}, \Delta^2(C) = \\ = 0,942;$$

#### Лето

$$13) x_{1(00)} = 58,7268 + 0,0866x_{1(0,-1)} - 2,78469x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,165; \\ 14) x_{2(00)} = 0,81270 + 1,16267x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,375; \\ 15) x_{2(00)} = 0,84930 - 0,00011x_{1(-1,0)} + 1,16190x_{2(00)}, \Delta^2(C) = \\ = 0,375; \\ 16) x_{2(00)} = 0,61803 - 0,00009x_{1(-1,0)} + 0,02804x_{2(-1,0)} + \\ + 1,15220x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,387; \\ 17) x_{2(00)} = 0,58428 + 0,02828x_{2(-1,0)} + 1,15279x_{2(00)}, \Delta^2(C) = \\ = 0,389; \\ 18) x_{2(00)} = 0,28221 - 0,26671x_{2(-1,0)} - 0,00046x_{1(-1,0)} + \\ + 1,41148x_{2(00)}, \Delta^2(C) = 0,396;$$

#### Осень

$$19) x_{1(00)} = 19,13350 + 0,00429x_{1(-2,0)} + 1,22256x_{1(-3,0)} - \\ - 1,10431x_{3(00)}, \Delta^2(C) = 0,362; \\ 20) x_{2(00)} = -0,04203 - 0,99931x_{2(-1,0)} - 0,99971x_{2(-2,0)} - \\ - 0,99831x_{2(-3,0)} + 0,00038x_{1(-3,0)} + 3,99931x_{2(00)} - 0,00792u_{(-1,0)}^1 + \\ + 0,01314u_{(00)}^1, \Delta^2(C) = 0,00027;$$



$$21) x_{2(00)} = 0,03255 - 0,99941x_{2(-2,0)} - 0,99994x_{2(-1,0)} - 0,99764x_{2(-3,0)} + 0,00001x_{1(-2,0)} + 3,99953x_{2(00)} - 0,01328u_{1(-1,0)}, \\ \Delta^2(C) = 0,0003;$$

$$22) x_{2(00)} = 0,5610 - 0,99953x_{2(-1,0)} - 0,99992x_{2(-2,0)} - 0,99747x_{2(-3,0)} + 3,99951x_{2(00)} - 0,00100x_{3(00)} - 0,01522u_{1(-1,0)}, \\ \Delta^2(C) = 0,0003;$$

$$23) x_{2(00)} = 0,04263 - 0,99940x_{2(-1,0)} - 0,99991x_{2(-2,0)} - 0,99745x_{2(-3,0)} + 3,99949x_{2(00)} - 0,01547u_{1(-1,0)}, \Delta^2(C) = 0,00036;$$

$$24) x_{2(00)} = 0,3829 - 0,99911x_{2(-1,0)} - 0,99987x_{2(-2,0)} - 0,99832x_{2(-3,0)} + 3,99922x_{2(00)} - 0,00770u_{1(-1,0)} + 0,01212u_{1(00)}, \\ \Delta^2(C) = 0,0004.$$

В результате применения критерия баланса прогнозов выбраны следующий лучший комплект сезонных моделей: зима (1) и (5); весна (7) и (8); лето (13) и (16); осень (19) и (20).

При пошаговом прогнозе сезонные модели выходных переменных используются одна за другой, соответственно смене сезонов. Прогнозы сезонных значений переменных  $x_1 = q_3$  и  $x_2 = q_4$  по оптимальному комплексу сезонных моделей показаны на рис. 76.

Вариант 1. Прогноз по одному критерию баланса для  $x_2$ . Основным является критерий баланса прогнозов переменной на интервале интерполяции и долгосрочного прогноза (с 1955 до 2000 г.):

$$b_i = \frac{1}{4} (x_{i2(в)} + x_{i2(л)} + x_{i2(о)} + x_{i2(з)}) - X_{i2\text{год}},$$

$$c_i = \frac{1}{4} (x_{i2(з)} + x_{i2(в)} + x_{i2(л)} + x_{i2(о)}) - X_{i2\text{год}},$$

$$B_{x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1955}^{2000} b_i^2}{\sum_{i=1955}^{2000} c_i^2} \rightarrow \min.$$

В первом варианте баланса прогнозов составляется только для ведущей переменной  $x_2 = q_4$  (см. табл. 48) и по нему выбирается лучший комплект сезонных моделей. Всего было рассчитано таких  $c = 5^4 = 625$  таблиц.

В табл. 48 показан лучший по критерию баланса результат прогноза сезонных значений переменных, отвечающий значению  $B_{x_2}^2 = 0,06$ .

Полученные сезонные значения переменной  $x_1 = q_3$  позволили рассчитать годовые ее значения, т. е. сделать то, что на втором

этапе оказалось невозможным (штриховая линия  $x_1(t) = q_3(t)$  на рис. 76). Критерий баланса для ведущей переменной позволяет получить годовые прогнозы для всех выходных переменных.

Вариант 2. Прогноз по системному критерию баланса для  $x_1$  и  $x_2$ . Выходным критерием для

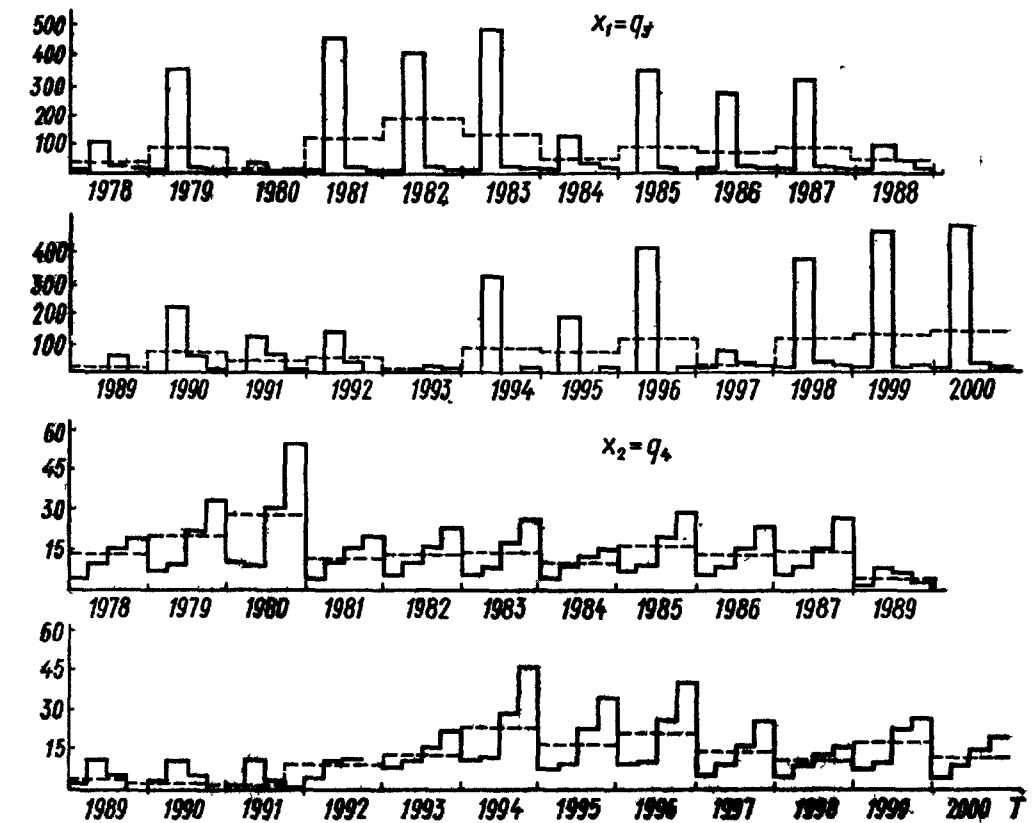


Рис. 76. Долгосрочный прогноз среднегодовых и среднесезонных значений выходных переменных (оз. Байкал):

$x_1 = q_3$  — биомасса мелозеры;  $x_2 = q_4$  — биомасса зоопланктона.

выбора оптимального комплекта сезонных моделей является системный критерий

$$B^* = \sqrt{B_{x_1}^2 + B_{x_2}^2},$$

$$\text{где } B_{x_1}^2 = \frac{\sum_{i=1955}^{1978} b_i^2}{\sum_{i=1955}^{1978} c_i^2} \rightarrow \min, \quad B_{x_2}^2 = \frac{\sum_{i=1955}^{2000} b_i^2}{\sum_{i=1955}^{2000} c_i^2} \rightarrow \min.$$

Таким образом, критерий для переменной  $x_1$  рассчитывается только на интервале интерполяции с 1955 по 1978 г., где известны ее среднегодовые значения.

Спуск в пространстве структур, в пространстве коэффициентов и обобщенный спуск. Целью спуска (градиентного, по методу Гаусса — Зейделя или по алгоритму стохастической аппроксимации) является достижение наиболее глубокого минимума критерия

Таблица 48. Оценки критерия баланса прогнозов для лучшего комплекта сезонных моделей (оз. Байкал)

Год	Сезонные прогнозы				$\frac{1}{4} (q_3 + q_4 + q_5 + q_6)$	Среднегодовой прогноз $Q_{\text{год}}$
	$q_3$	$q_4$	$q_5$	$q_6$		
1978	$x_1 = 7,98$	105,80	22,88	14,88	37,89	$x_2 = 1,290$
	$x_2 = 5,36$	9,00	16,09	21,14	12,9	
1979	2,74	351,29	8,72	7,41	92,54	18,67
	7,54	9,74	22,46	34,96	18,67	
1980	5,78	31,73	0,1	12,70	12,58	26,73
	10,38	9,57	31,94	55,04	26,73	
1981	2,82	465,74	21,93	12,18	125,67	12,75
	4,88	9,87	16,01	20,25	12,75	
1982	2,16	405,40	21,00	11,42	190	14,23
	6,06	9,81	17,33	23,72	14,23	
1983	5,89	484,94	19,19	13,21	130,81	14,05
	6,23	8,81	18,09	26,27	14,85	
1984	5,88	119,55	29,06	12,57	41,77	11,25
	4,87	9,34	13,98	16,80	11,24	
1985	0,20	353,16	13,07	6,57	93,25	17,30
	7,20	10,30	20,83	30,88	17,30	
1986	6,59	273,00	20,04	14,08	78,43	14,30
	6,05	9,00	17,55	24,58	14,29	
1987	6,92	318,02	18,42	12,59	88,99	15,10
	6,23	8,80	18,38	26,98	15,10	
1988	11,07	99,38	44,37	15,52	42,59	5,73
	2,92	8,12	7,63	4,22	5,72	
1989	0,10	0,15	51,13	0,20	12,90	4,11
	2,67	11,47	5,51	0,10	4,93	
1990	0,50	223,33	52,58	4,55	70,24	3,80
	3,15	10,23	5,09	0,10	4,64	
1991	0,61	114,03	55,96	4,14	43,69	2,63
	2,58	10,35	3,74	0,10	4,19	
1992	0,40	144,41	38,07	0,50	45,85	9,16
	4,97	10,70	11,23	9,74	9,16	
1993	1,32	0,10	23,29	5,42	7,53	13,91
	6,48	10,49	16,90	21,76	13,91	
1994	1,21	324,59	0,10	7,94	83,46	23,84
	9,63	10,14	28,44	47,15	23,84	
1995	3,13	292,07	5,75	11,15	78,03	18,85
	7,33	9,96	22,98	35,14	18,85	
1996	6,83	435,12	1,36	13,47	114,20	20,78
	8,14	8,78	25,05	41,15	20,78	
1997	5,71	66,10	22,62	11,77	26,55	13,21
	5,22	9,6	16,18	21,04	13,01	
1998	9,26	388,28	30,50	19,98	112,00	10,84
	4,85	8,12	13,43	16,93	10,83	
1999	3,62	476,94	8,82	14,23	125,90	18,87
	7,54	9,29	22,62	36,05	18,88	
2000	2,30	507,64	23,79	9,50	135,81	12,82
	5,21	9,74	15,87	20,46	12,82	

баланса прогнозов для ведущей переменной. При спуске в пространстве структур перебору подлежат комплекты некоторого числа лучших моделей. Спуск применяется в данном примере. При спуске в пространстве коэффициентов изменяются по шагам значения коэффициентов лучших (по одной для каждой переменной) моделей. Обобщенный спуск предусматривает обе операции и, конечно, должен быть наиболее эффективным.

Указанные спуски применяются также в процедурах последовательного принятия решений для создания дискретной «гребенки» отклонений от оптимальной модели первого ряда с целью обеспечения «свободы выбора» (по Д. Габору). Здесь критерием является ошибка на последующем ряду. Для ее снижения мы сознательно ухудшаем критерий предыдущего ряда. В таком смысле спуск в пространстве структур уже использовали в гармонических алгоритмах МГУА [10].

#### Самоорганизация двумерной, пространственной модели

Выше был подробно рассмотрен алгоритм самоорганизации точечной модели  $f(t)$  по данным, собранным в одной точке оз. Байкал (станция № 1). Для самоорганизации двумерной, пространственной модели  $f(t, x)$  требуется значительно большее количество данных. Пространственную ось  $x$  целесообразно направить вдоль по так называемой реперной средней линии озера с началом отсчета в южном конце.

Имеются две возможности построения пространственной модели:

1) решить задачу построения многих точечных моделей для всех станций реперной оси аналогично тому, как это было сделано выше для станции № 1 с. Большие Коты; в первом случае пространственная модель будет собранием точечных моделей, которые могут отличаться друг от друга, т. е. учитывать локальные особенности;

2) принять, что модели в некоторой части озера (например, для всего Южного Байкала) одни и те же.

Вторая возможность позволяет сократить сроки наблюдений, так как данные, собранные по всем станциям, служат для самоорганизации одной общей модели. Исходные данные содержат информацию об опытах, проведенных во многих точках поля одновременно, но за малое количество лет (рис. 77).

Так как во всех точках поля действует одно и то же уравнение (закон), то для алгоритмов МГУА опыты, разнесенные во времени, и опыты, разнесенные в пространстве, равноценны.

Например, при самоорганизации пространственной модели экосистемы оз. Байкал использовались данные, собранные всего за три года, но зато по двадцати контрольным станциям, что дало  $8 \times 2 = 16$  условных уравнений, используемых для идентифика-

ции и оценки вариантов модели, генерируемых по комбинаторному алгоритму МГУА. Половина из них образовали множество  $A$ , а другая половина — множество  $B$  точек.

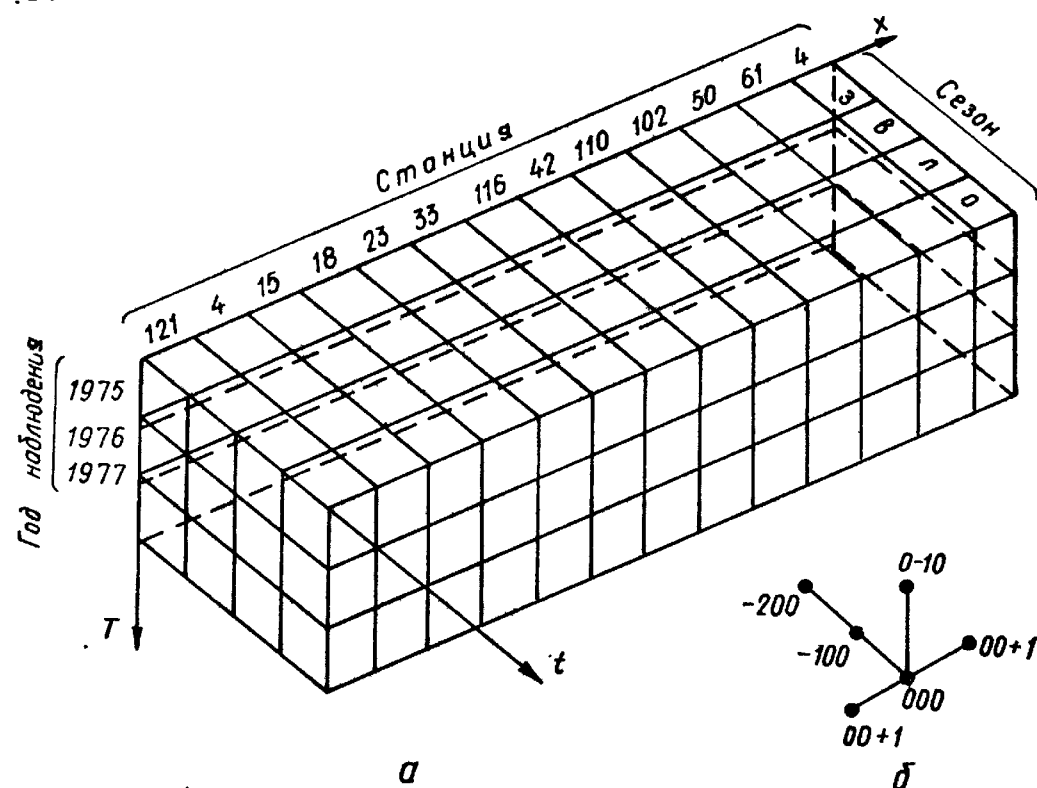


Рис. 77. Структура данных (а) и форма шаблона (б) для прогнозируемых среднесезонных значений переменных экосистемы оз. Байкал.

При втором подходе используется «взаимозаменяемость данных, собранных во времени, данными, собранными по пространству».

Концентрации веществ в различных точках озера и в различные время разные, но законы их образования повсюду одни и те же. Следовательно, данные, снятые одновременно на многих контрольных станциях, равноценны данным продолжительных наблюдений в одной точке озера (рис. 77).

*Многорядный алгоритм МГУА с линеаризацией при помощи переобозначения переменных и выходом на комбинаторный алгоритм*

Алгоритм можно описать так: полный полином содержит большое число (до 1000) линейных и нелинейных слагаемых

$$q = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \dots + a_kx_1^2 + a_{k+1}x_2^2 + \dots + a_sx_1x_2 + \dots,$$

при помощи преобразования переменных получаем линейный полином

$$q = a_0 + a_1w_1 + a_2w_2 + a_3w_3 + \dots + a_nw_n, \quad n \leq 1000.$$

На первом ряду селекции используется линейное частное описание

$$q = b_0 + b_1w_j + b_2w_j, \quad i = 1, 2, 3 \dots n, \quad j = 1, 2, 3 \dots n, \quad i \neq j.$$

Все возможные частные описания идентифицируются по методу наименьших квадратов и оцениваются на плоскости двух критериев: а) для динамических (разностных) моделей  $n_{см}^2 \rightarrow i^2(N)$ ; б) для статистических (алгебраических) моделей  $n_{см}^2 \rightarrow \Delta^2(C)$ .

Критерий точности пошагового прогноза

$$I^2(3) = i^2(N) = \frac{\sum_{i=1}^N (q_n - q_{\Phi})^2}{\sum_{i=1}^N q_{\Phi}^2} \rightarrow \min$$

не требует деления таблицы опытных данных на части \*. Для определения критерия минимума смещения таблица опытных данных разбивается на две равные части  $A$  и  $B$ . Алгебраический минимум в каждой части равен трем точкам.

Из всего числа частных моделей, равного  $F_0 > C_n^2$ , выбирается  $F$  лучших по указанным критериям моделей (ближайшие к началу плоскости критериев).

На втором ряду селекции составляется список переменных, попавших в число аргументов моделей, отобранных на первом ряду. Это единственная информация, используемая по данным первого ряда. Модели первого ряда «забываются». Снова составляется линейный полином

$$q = c_0 + c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_mv_m,$$

где  $v_{+1}, v_2, \dots, v_m$  — переменные, указанные в списке, причем  $m \ll n$ . Частное описание второго ряда

$$q = d_0 + d_1v_i + d_2v_j$$

позволяет отобрать по указанным критериям  $F_2$  лучших моделей и составить второй, еще более сокращенный список переменных.

*Правило останова.* Нарастание рядов селекции продолжается с заданным постоянным «коэффициентом редукции» до тех пор, пока число переменных в последнем списке не уменьшится до заданного числа моделей. Допустимое число членов полинома на входе комбинаторного алгоритма определяется либо мощностью машины, либо количеством точек исходных данных. Далее применяется алгоритм полного перебора, т. е. комбинаторный алгоритм МГУА с последовательностью критериев:

$$F_0 \rightarrow F_{1(n_{см})} \rightarrow F_2(\Delta^2(C)) \rightarrow F_2((B)_n) \text{ при } F_3 = 1.$$

\* Для циклических процессов критерий  $i^2(N) \rightarrow \min$  совпадает с критерием баланса прогнозов  $B \rightarrow \min$ , измеренным на одном и том же интервале времени.

Коэффициент редукции определяется отношением числа моделей данного ряда к числу моделей предыдущего ряда:  $k = \frac{F_s - 1}{F_s}$ ,  $s = 1, 2, 3, \dots$

Величина коэффициента оптимизируется при помощи сравнения нескольких его значений по результату моделирования. Например, при  $k = 2$  будет шесть рядов селекции:

$$F_6 = 20, F_5 = 40, F_4 = 80, F_3 = 160, F_2 = 320, F_1 = 640, \\ F_0 = 1280.$$

Если минимум комбинированного критерия получается до выхода на комбинаторный алгоритм, то чтобы избежать этого, следует увеличить коэффициент редукции  $k$ . Модель оптимальной сложности должна находиться в области действия комбинаторного алгоритма.

Многорядный алгоритм применяется в качестве фильтра, выделяющего существенные аргументы в случае, когда в исходном полном описании больше 20—30 слагаемых.

*Удачное априорное указание вида корней характеристического уравнения — эффективный способ резкого повышения помехоустойчивости моделирования*

На втором этапе «победителем» оказался гармонический алгоритм МГУА. Это объясняется тем, что этот алгоритм, в отличие от соревнующихся с ним однорядных комбинаторных алгоритмов, использует дополнительную априорную информацию: все корни характеристического многочлена дифференциального уравнения — чисто мнимые. Действительные корни и действительные части комплексных корней равны нулю, т. е. отсутствуют.

Удачно указанная априорная информация о виде корней характеристического уравнения резко повышает помехоустойчивость алгоритма. При наличии точных данных все алгоритмы были бы одинаково хороши.

Используя указанную априорную информацию, легко предложить однорядный авторегрессионный алгоритм МГУА, эквивалентный в смысле помехоустойчивости гармоническому алгоритму. Аналогичный прием был использован и для получения полиномиальных экспоненциальных алгоритмов. Число запаздывающих аргументов в гармонических разностных алгоритмах должно быть четным. Кроме того, в разностном уравнении, эквивалентном гармоническому ряду, оценки некоторых коэффициентов назначаются равными единице, а не определяются по методу наименьших квадратов, а некоторые другие — приравниваются друг другу. Усложнение частных описаний должно происходить так:

$$\text{одна гармоника } q_0 = 2\gamma q_{-1} - q_2 = a_1 q_{-1} - q_{-2};$$

$$\text{две гармоники } q_0 = 2(\gamma_1 + \gamma_2) q_{-1} - (2 + 4\gamma_1\gamma_2) q_{-2} + 2(\gamma_1 + \gamma_2) q_3 - q_4 = b_1(q_{-1} + q_{-3}) + b_2 q_{-2} - q_{-4};$$

$$\text{три гармоники } q_0 = 2(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) q_{-1} - (4\gamma_1\gamma_2 + 4\gamma_1\gamma_3 + 4\gamma_2\gamma_3 + 3) q_{-2} + (4\gamma_1 + 4\gamma_2 + 4\gamma_3 + 8\gamma_1\gamma_2\gamma_3) q_{-3} - (4\gamma_1\gamma_2 + 4\gamma_1\gamma_3 + 4\gamma_2\gamma_3 + 3) q_{-4} + (2\gamma_1 + 2\gamma_2 + 2\gamma_3) q_{-5} - q_{-6} = d_1(q_1 + q_{-3}) + d_2(q_{-2} + q_{-4}) + d_3(q_{-3} - q_{-6})$$

и т. д.

Только оценки коэффициентов  $d_1, b_1, b_2, d_1, d_2, d_3$  находятся по методу наименьших квадратов. Число учитываемых гармоник постепенно увеличивается. Алгоритм МГУА выбирает описание, при котором достигается минимум комбинированного критерия

$$\text{или } \rho = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + \Delta^2(C)} \rightarrow \min$$

$$\rho = \sqrt{n_{\text{см}}^2 + i^2(N)} \rightarrow \min.$$

Если данных мало, применяется один критерий, лучше  $i^2(N) \rightarrow \min$ . Более полную информационную базу будет иметь множественно-регрессионный комбинаторный алгоритм МГУА, учитывающий разнообразные аргументы и их запаздывающие значения, эквивалентный многомерному гармоническому, и, по-видимому, именно он будет «победителем» на втором этапе.

*Прогнозирование изменения прогнозов как пример использования уравнений с переменными коэффициентами*

В работе [30] на основании статистических данных до 1975 г. включительно по алгоритмам МГУА была получена модель увеличения народонаселения Земли в виде разностного уравнения с использованием переменного коэффициента при третьем члене

$$q_{+1} = -0,01104 + 1,0214q_0 - (0,0001t_n) q_{-1}.$$

Коэффициент  $(0,0001t_n)$ , где  $t_n$  — время начала прогноза, учитывает изменение хода прогнозов при изменении года их выдачи

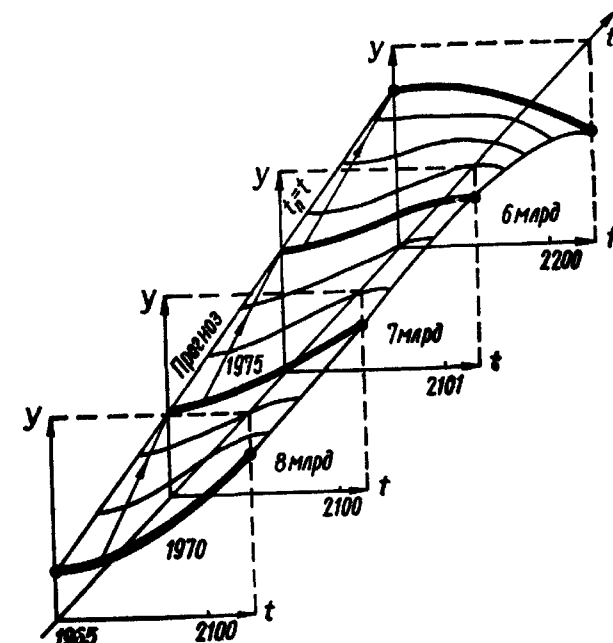


Рис. 78. Пояснение идеи прогнозирования прогнозов (прогноз получается по линии  $t_n = t$ ).

(начиная с 1976 г.). Модель позволяет определить момент в будущем, когда прекратится рост населения. Это будет где-то около 2080 г. Максимум, которого достигнет население, равен 9,8 млрд. человек (рис. 78).

### Алгебраические и конечно-разностные модели с переменными коэффициентами

Существует два пути самоорганизации моделей с переменными коэффициентами.

Первый путь исходит из таблицы полного эксперимента, включающей наблюдения за одновременным изменением выходных величин и всех их аргументов. При помощи однократного применения алгоритма МГУА получается модель оптимальной сложности. Если оптимальная модель оказалась линейной, то никаких моделей с переменными коэффициентами получить нельзя. Если же модель получилась нелинейной, то, группируя члены, можно получить несколько моделей с переменными коэффициентами и в дальнейшем пользоваться одной из них. Конечно-разностные модели с переменными коэффициентами обладают более простыми шаблонами, и поэтому сходимость пошагового прогнозирования при них лучше. Однако основной результат первого пути состоит в том, что он показывает, какие частные эксперименты могут заменить более объемный и дорогой полный эксперимент.

Второй путь получения моделей с переменными коэффициентами начинается из таблиц частных экспериментов, включающих наблюдения за изменением только части аргументов. Другая часть аргументов поддерживается на постоянных значениях. Двухкратное (или многократное) применение алгоритмов МГУА (на первом уровне — по таблице частного эксперимента, на втором уровне — по значениям коэффициентов частных моделей первого уровня) позволяет получить ряд частных моделей с переменными коэффициентами, равноценными при некоторых условиях полной модели.

На практике часто оказывается, что первый путь неудобен, так как трудно организовать полный эксперимент и вычисления. Тогда постановка частных экспериментов может быть выбрана априорно, по догадке. В этом случае существование первого пути просто является как бы теоретическим оправданием применения частных моделей с переменными коэффициентами. В других случаях полный эксперимент ставится только один раз для выяснения вида всех возможных частных моделей. В дальнейшем можно обойтись только частными экспериментами и моделями, которые становятся ясными из анализа полной модели.

### Объективная самоорганизация полной и частных моделей на основе полного эксперимента (первый путь)

Успех самоорганизации алгебраических и разностных моделей на ЭВМ зависит от: 1) точности исходных данных; 2) имеющейся априорной информации о классе уравнений и виде опорных функций; 3) сложности уравнений модели; 4) мощности машины.

Мощность машины, ее способность выполнить большой перебор, является важным условием успеха. Рекомендуется применять комбинаторный алгоритм МГУА, а в случае большого числа членов полного полинома — многорядный алгоритм МГУА с линеаризацией при помощи переобозначения переменных и выходом на комбинаторный алгоритм.

Как известно, при комбинаторном алгоритме МГУА число членов полного полинома не может превысить двадцати. Это соответствует перебору  $2^{20}$  моделей-претендентов. При многорядном алгоритме МГУА с линеаризацией при помощи переобозначения переменных число слагаемых полного полинома ориентировочно может составить величину около 1000, т. е. во много раз больше (для машины БЭСМ-6). Хорошо, если нам известно, какие функции могут быть слагаемыми полного полинома. Если ничего не известно, то следует постепенно усложнять вид слагаемых.

Наиболее просто предположить, что модель состоит из членов степенного полинома: линейных, квадратических, кубических и т. д.

$$x_1 x_2 \dots x_1^2 \dots x_2^2 \dots x_1 x_2 \dots x_1^2 x_2^3 \dots x_1 x_2 x_3 \dots$$

Если при этом не получим хороших результатов, то в качестве слагаемых рекомендуется попробовать обратные функции:

$$\frac{1}{x_i} \frac{1}{x_i^2} \frac{1}{x_i x_j} \dots x_i \dots x_i^2 \dots x_i^3 \dots$$

Как указывалось, наиболее общей является дробно-полиномиальная модель, числителями и знаменателями которой служат степенные полиномы [21, 44],

$$y = \frac{a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_1 x_2 + \dots}{1 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_1 x_2 + \dots}$$

Успех моделирования определяется по глубине минимума комбинированного критерия или непосредственно по точности прогнозирования.

**Пример 34.** Самоорганизация полной и двух частных алгебраических моделей по данным табл. 47. Модель имеет вид алгебраической функции двух аргументов  $y = f(x_1, x_2)$ . Таблица исходных данных включает тридцать опытов (табл. 49). Это дает нам возможность пользоваться комбинаторным алгоритмом МГУА и предложить машине в качестве исходного полинома полином,

Таблица 49. Данные полного эксперимента для модели  $y = f(x_1, x_2)$

$N$	$y$	$x_1$	$x_2$	$N$	$y$	$x_1$	$x_2$	$N$	$y$	$x_1$	$x_2$
1	1,42	1	100	11	9,52	2	300	21	31,50	3	500
2	5,68	2	100	12	21,42	3	300	22	56,00	4	500
3	35,50	5	100	13	38,08	4	300	23	87,50	5	500
4	51,12	6	100	14	59,50	5	300	24	126,00	6	500
5	1,88	1	200	15	11,68	2	400	25	40,12	1	600
6	7,52	2	200	16	26,28	3	400	26	16,48	2	600
7	16,92	3	200	17	46,72	4	400	27	37,68	3	600
8	30,08	4	200	18	73,00	5	400	28	66,14	4	600
9	47,00	5	200	19	3,50	1	500	29	103,00	5	600
10	67,68	6	200	20	14,00	2	500	30	148,32	6	600

состоящий из пятнадцати линейных, квадратических, кубических членов и слагаемых четвертой степени:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_1^2 + a_4x_2^2 + a_5x_1x_2 + a_6x_1^3 + a_7x_2^3 + a_8x_1^2x_2 + a_9x_1x_2^2 + a_{10}x_1^4 + a_{11}x_2^4 + a_{12}x_1^3x_2 + a_{13}x_1x_2^3 + a_{14}x_1^2x_2^2$$

Пользуясь программой комбинаторного алгоритма МГУА, использующей критерий минимума смещения, получим полную модель оптимальной сложности

$$y = x_1^2 + 0,004x_1^2x_2 + 0,00002x_2^2, \quad x_2^2.$$

Из пятнадцати слагаемых алгоритм МГУА оставил только три. Возможны две частные модели с переменными коэффициентами:

$$1) y = a_0(x_2) + a_1(x_2)x_1 + a_2(x_2)x_1^2 = 0 + 0 + (1 + 0,004x_2 + 0,00002x_2^2)x_1^2;$$

$$2) y = b_0(x) + b_1(x_1)x_2 + b_2(x_1)x_2^2 = x_1^2(0,004(x_1^2))x_2 + (0,00002x_1^2)x_2^2.$$

Физический смысл данных модели таков:  $y$  — мощность,  $x_1$  — сила тока,  $x_2$  — температура нагревательного элемента:  $y = W$ ,  $x_1 = I$ ,  $x_2 = t$ ,  $W = I^2R = I^2(1 + 0,004t + 0,00002t^2)$ , где 0,004 и 0,00002 — температурные коэффициенты; модель описывает изменение мощности в функции силы тока и температуры. Частные модели указывают два способа проведения частных экспериментов: при  $x_1 = \text{const}$  или  $x_2 = \text{const}$ , т. е. при постоянстве силы тока или температуры. Ясно, что практически получить данные для первой модели значительно проще, чем для второй.

Так как мы пользуемся переобозначением переменных, то самоорганизация разностных уравнений с переменными коэффициентами ничем не отличается от самоорганизации алгебраических уравнений. Например, конечно-разностное уравнение вида

$$q_{+1} = a_0 + a_1q_0 + a_2q_{-1} + a_3q_0^2 + a_4q_{-1}^2 + a_5q_0q_{-1}$$

после переобозначения принимает вид алгебраического уравнения

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_1^2 + b_4x_2^2 + b_5x_1x_2,$$

где  $q_1 = y$ ,  $q_0 = x_1$ ,  $q_{-1} = x_2$ .

Таким образом, все сказанное выше о самоорганизации алгебраических уравнений относится и к разностным.

Самоорганизация полной и частных моделей в виде системы разностных уравнений может быть выполнена по алгоритму, описанному во второй главе (с обязательным учетом нелинейных членов).

Пример 35. Определение постановки частных экспериментов, числа и вида моделей с переменными коэффициентами. В одной из задач моделирования была получена следующая модель оптимальной сложности:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 - a_3x_1x_3 - a_4x_2x_3.$$

Группируя члены полинома, можно получить следующие частные модели:

$$1) x_2 = \text{const}, x_3 = \text{const}; y = (a_0 + a_2x_2 - a_4x_2x_3) + (a_1 - a_3x_3)x_1 = f(x_1).$$

$$2) x_1 = \text{const}, x_3 = \text{const}; y = (a_0 + a_1x_1 - a_3x_1x_3) + (a_2 - a_4x_3)x_2 = f(x_2),$$

$$3) x_1 = \text{const}, x_2 = \text{const}, y = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2) - (a_3x_1 + a_4x_2)x_3 = f(x_3),$$

$$4) x_1 = \text{const}, y = (a_0 + a_1x_1) + a_2x_2 - (a_3x_1)x_3 - a_4x_2x_3 = f(x_2, x_3),$$

$$5) x_2 = \text{const}; y = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2) - (a_2x_2)x_3 - a_3x_1x_3 = f(x_1, x_3),$$

$$6) x_3 = \text{const}; y = (a_0 + a_1x_1 + a_2x_2) - (a_3x_3)x_1 - (a_4x_3)x_2 = f(x_1, x_2).$$

Модели определяют собой число и постановку частных экспериментов. Каждая модель равноценна сходной модели оптимальной сложности. Количество частных моделей с переменными коэффициентами определяется числом аргументов.

При двух аргументах можно получить две полиномиальные модели, т. е.  $\mu_2 = C_n^1 = C_2^1 = 4$ , при трех аргументах будет  $\mu_3 = C_n^1 + C_4^2 = 3 + 3 = 6$  моделей, при четырех  $\mu_4 = C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = 4 + 6 + 4 = 14$  моделей и т. д. Столько же возможно организаций (постановок) частных экспериментов для получения моделей с переменными коэффициентами.

*Самоорганизация частных и полной моделей на основе неполных экспериментов (второй путь)*

Субъективный характер второго пути самоорганизации моделей состоит в том, что автор модели исходя из практических, априорных соображений отказывается от получения полной системы (т. е. всех) частных моделей, а синтезирует одну из них, которая ему понятнее или проще, или дешевле.

Пример 36. Самоорганизация двух частных алгебраических моделей. В данном примере моделирования мощности в функции силы тока и температуры нагревательного элемента полная система состоит всего из двух частных моделей:

$$1) y = a_0(x_2) + a_1(x_2)x_1 + a_2(x_2)x_1^2;$$

$$2) y = b_0(x_1) + b_1(x_1)x_2 + b_2(x_1)x_2^2.$$

Выполним самоорганизацию этих двух моделей исходя из результатов частных экспериментов, представленных в табл. 48 и 49.

Самоорганизация двухуровневой модели по данным табл. 50. Применяя комбинаторный алгоритм МГУА (первый



Таблица 50. Данные первого частного эксперимента при  $x_2 = \text{const}$  для частных моделей  $y = f(x_1)$

$y$	$x_1$	$y$	$x_1$	$y$	$x_1$	$y$	$x_1$	$y$	$x_1$	$y$	$x_1$
1,42	1	1,88	2	2,38	3	2,22	4	3,50	5	4,12	6
5,68	2	7,52	3	9,52	4	11,68	5	14,00	6	16,48	7
12,78	3	16,92	4	21,42	5	26,28	6	31,50	7	37,08	8
22,72	4	40,08	5	38,08	6	46,72	7	56,00	8	65,92	9
35,50	5	47,00	6	59,50	7	73,00	8	87,50	9	103,00	10
51,12	6	67,68	7	85,68	8	105,12	9	126,00	10	158,32	11
$x_2 = 100$		$x_2 = 200$		$x_2 = 300$		$x_2 = 400$		$x_2 = 500$		$x_2 = 600$	

раз), получаем шесть моделей, соответствующих табл. 50 (модели первого уровня):

$$x_2 = 100, y = 1,42x_1^2,$$

$$x_2 = 200, y = 1,88x_1^2,$$

$$x_2 = 300, y = 2,38x_1^2,$$

$$x_2 = 400, y = 2,86x_1^2,$$

$$x_2 = 500, y = 3,50x_1^2,$$

$$x_2 = 600, y = 3,92x_1^2.$$

Каждая модель содержит один квадратический член. Остальные слагаемые полного полинома вида

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + a_3x_1^3 + a_4x_1^4$$

алгоритм МГУА отбросил. Коэффициент  $a_2$  получил шесть значений:

$$a_2 = 1,42, 1,88, 2,38, 2,86, 3,50 \text{ и } 3,92.$$

Применяя комбинаторный алгоритм МГУА (второй раз), находим зависимость коэффициента  $a_2$  от переменной  $x_2$  (модель второго уровня):

$$a_2 = 1 + 0,004x_2 + 0,00002x_2^2.$$

Таблица 51. Данные второго частного эксперимента при  $x_1 = \text{const}$  для частных моделей  $y = f(x_2)$

$y$	$x_2$	$y$	$x_2$	$y$	$x_2$	$y$	$x_2$	$y$	$x_2$	$y$	$x_2$
1,42	100	5,68	200	12,72	300	22,72	400	35,50	500	51,12	600
1,88	200	7,52	300	16,62	400	30,08	500	47,00	600	67,68	700
2,38	300	9,52	400	21,42	500	38,08	600	59,50	700	85,68	800
2,92	400	11,69	500	26,28	600	46,72	700	73,00	800	105,12	900
3,50	500	14,00	600	37,50	700	56,00	800	87,50	900	126,00	1000
4,12	600	16,48	700	37,18	800	65,92	900	103,00	1000	148,32	1100
$x_1 = 1$		$x_1 = 2$		$x_1 = 3$		$x_1 = 4$		$x_1 = 5$		$x_1 = 6$	

Объединяя две частные модели, получаем полную модель

$$y = (2 + 0,004x_2 + 0,00002x_2^2) x_1^2 = I^2 (1 + 0,004t + 0,00002t^2).$$

Самоорганизация двухуровневой модели по данным табл. 51. Первое применение комбинаторного алгоритма МГУА дает следующие шесть моделей общего вида  $y = b_0 + b_1x_2 + b_2x_2^2$  (модели первого уровня):

$$x_1 = 1, y = 1 + 0,004x_2 + 0,00002x_2^2, \quad x_1 = 4, y = 16 + 0,064x_2 + 0,00032x_2^2,$$

$$x_1 = 2, y = 4 + 0,016x_2 + 0,00008x_2^2, \quad x_1 = 5, y = 25 + 0,100x_2 + 0,00050x_2^2,$$

$$x_1 = 3, y = 9 + 0,036x_2 + 0,00018x_2^2, \quad x_1 = 6, y = 36 + 0,440x_2 + 0,00072x_2^2.$$

Второе применение комбинаторного алгоритма МГУА позволяет получить три модели для коэффициентов (модели второго уровня):

$$b_0 = x_1^2, \quad b_1 = 0,004x_1^2, \quad b_2 = 0,00002x_1^2.$$

Объединяя модели, получаем знакомую нам уже полную модель

$$y = (1 + 0,004x_2 + 0,00002x_2^2) x_1^2 = I^2 (-1 + 0,004t + 0,00002t^2).$$

Простой пример позволил нам установить, что полный эксперимент (табл. 49) и частные постановки эксперимента (табл. 50 и 51) приводят к одним и тем же равноценным результатам\*. Этот вывод важен для решения практических задач моделирования сложных объектов, одна из которых рассматривается далее.

Сравнивая два пути, можно сказать, что требования по объему исходной информации почти одинаковы. Алгебраический минимум точек равен  $6 \times 6 = 36$  точкам. Результат (при точных данных) при обоих способах один и тот же. Преимущество второго пути, очевидно, состоит в том, что при нем приходится оперировать с более простыми матрицами  $3 \times 3$  элемента, в то время как при первом пути размер матриц равен  $15 \times 15$  элементов. Помехоустойчивость и обусловленность матриц при втором способе значительно большие. Однако, как указывалось, основное преимущество второго пути — простота и ясность планирования экспериментов.

Многоуровневые модели с переменными коэффициентами. Иногда удается получить модели второго уровня (модели для коэффициентов) в свою очередь в виде моделей с переменными коэффициентами. Так, вместо описанной выше двухуровневой системы моделей получается трехуровневая, при самоорганизации которой алгоритмы МГУА применяются три раза, и т. д.

\* Более детальное исследование показывает, что указанные модели полностью равноценны только при равной точности и достоверности измерения переменных (см. А. Н. Грошков, Автоматика, 1980, № 4).

### Применение моделей с переменными коэффициентами для проектируемых (еще не существующих) объектов

При наличии нескольких физических моделей различной величины или ряда реальных объектов моделирования можно применить второй путь построения моделей с переменными коэффициентами для самоорганизации моделей объектов, которые еще не существуют, а только проектируются. Для этого аргументы разбиваются на два подмножества:  $Y_1$  — множество аргументов модели с переменными коэффициентами;  $Y_2$  — множество параметров, от которых зависят коэффициенты модели.

Получив модели  $x = A(Y_1)$  объектов одного класса, находим зависимость  $A = B(Y_2)$ . Результирующая модель с переменными коэффициентами  $x = B(Y_1)(Y_2)$  пригодна для всех объектов данного класса в некотором диапазоне изменения параметров.

Покажем метод более подробно, причем в качестве примера объекта рассмотрим экологическую систему водохранилищ равнинных рек.

#### *«Всеводохранилищная» модель для равнинных рек*

Экологические системы равнинных рек Украины находятся в сходных природных условиях. Это привело к попытке получить «всеводохранилищную» модель, действительную как для всех существующих, так и для проектируемых, еще не построенных водохранилищ данной зоны. При этом моделирование каждого водохранилища в отдельности с последующим объединением моделей (второй путь) является наиболее эффективным способом моделирования.

Водохранилища равнинного типа, лежащие в одной и той же географической зоне, отличаются друг от друга по некоторым параметрам, например

$$Y_2 = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5),$$

где  $y_1$  — время полного обмена воды (дни),  $y_2$  — площадь зеркала (тыс. га);  $y_3$  — объем воды (км<sup>3</sup>);  $y_4$  — % площади с глубиной меньше 1 м;  $y_5$  — площадь мелководий (тыс. га) с глубиной меньше 1 м.

Для каждого из водохранилищ эти параметры во времени почти постоянны, поэтому в множестве аргументов математической модели данного водохранилища они не участвуют. Однако ясно, что указанные параметры влияют на оценки коэффициентов уравнений модели разных водохранилищ. Поэтому получив, например, модели пяти водохранилищ Днепровского каскада, определим по МГУА зачисности оценок коэффициентов от параметров. В результате найдем «всеводохранилищную» модель с переменными

коэффициентами, действительную для всех водохранилищ данной зоны. Модель будет также давать оценки и для еще не построенных, проектируемых водохранилищ, например для водохранилищ канала Дунай — Днепр.

«Всеводохранилищная» модель является первым приближением. При получении новых данных модель уточняется (адаптируется) по реальным данным.

**Пример 37.** Объективное моделирование экологической системы Каховского водохранилища. Для моделирования использовался трехуровневый алгоритм МГУА. Исходные данные наблюдений представлены в табл. 52—54.

*Результаты первого этапа.* Напомним, что целью первого этапа является объективное определение закономерностей, связывающих переменные, представленные в таблицах опытных данных. Закон определяется как система разностных уравнений, соответствующая наименьшей величине системного критерия минимума смещения

$$n_{см}^* = \sqrt{(n_{см_1}^2 + n_{см_2}^2 + \dots + n_{см_n}^2)} \rightarrow \min.$$

В переборе участвуют только системы, уравнения которых удовлетворительно прогнозируют процесс на три сезона, т. е. у которых на трех точках  $\Delta(C) \leq 0,8$ .

В данном примере лучшей оказалась система из трех следующих разностных уравнений:

$$\begin{aligned} q_{1(+1)} &= 16406,9500 - 7,3036q_{4(-1)} - 284,8073q_{4(-2)} - 1626,2020q_{4(-3)} - \\ &\quad - 7,5805u_{1(0)} + 189,3907u_{1(-3)} - 1,1602u_{3(-3)} + 0,3613u_{4(0)} - \\ &\quad - 0,3597u_{5(-2)} - 0,3800u_{5(-3)} - 27,7799u_{6(0)} - 302,9003u_{6(-2)}; \\ q_{4(+1)} &= 6,7477 - 0,0056q_{6(-2)} + 0,0077q_{6(-3)} + 0,0061u_{1(0)} + \\ &\quad + 0,0009u_{1(-3)} - 0,0015u_{2(-3)} + 0,0029u_{4(-1)} - 0,0083u_{6(-3)}; \\ q_{6(+1)} &= -13,5518 + 0,3838q_{6(0)} - 0,3196u_{1(-1)} + 0,1991u_{1(-2)} + \\ &\quad + 0,237u_{1(-3)} + 0,5498u_{2(-2)} + 1,0310u_{3(-1)} + 1,3042u_{3(-3)} + \\ &\quad + 0,0549u_{4(-2)} + 0,0002u_{5(-1)} - 1,3850u_{6(-1)} - 0,7456u_{6(-2)}. \end{aligned}$$

Модель пригодна для краткосрочного прогноза среднесезонных значений переменных.

Анализируя уравнения модели, можно заключить, что множество выходных переменных состоит из трех величин:  $x_1 = q_1$  — биомасса фитопланктона;  $x_2 = q_2$  — щелочность (pH);  $x_3 = q_6$  — цветность.

Множество системных и входных переменных включает  $q_4$  — щелочность;  $q_6$  — прозрачность;  $u_1$  — температура воды;  $u_2$  — радиация;  $u_3$  — проточность;  $u_4$  — уровень;  $u_5$  — сток воды;  $u_6$  — содержание нитратов. Остальные переменные, указанные в таблицах:  $q_2$  — численность синезеленых;  $q_3$  — БПК<sub>5</sub>;  $q_5$  — содержание кислорода из дальнейшего рассмотрения исключаются. В модели, выбранной объективно машиной, они не участвуют.

Таблица 52. Исходные среднесезонные данные для самоорганизации точе

Пере- менная	1967				1969			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
$q_1$	74,00	737,00	4913,00	3294,00	5,00	52,00	4933,00	4082,00
$q_2$	2,50	68,00	4329,00	2170,00	1,00	36,00	4518,00	3913,00
$q_3$	1,90	1,90	6,20	1,20	1,34	2,89	3,70	0,33
$q_4$	7,50	8,30	7,70	7,00	7,65	7,80	7,31	7,75
$q_5$	8,70	8,00	7,10	7,40	14,49	12,90	10,10	12,24
$q_6$	25,00	33,00	60,00	28,00	22,00	25,00	31,50	28,00
$q_7$	259,00	347,00	309,00	283,00	289,80	309,00	305,00	245,00
$u_1$	4,00	14,50	23,90	19,50	0,10	4,81	20,20	9,10
$u_2$	2,60	11,40	15,50	7,10	2,70	10,80	15,50	7,30
$u_3$	2,10	3,60	1,20	1,00	1,70	2,90	1,60	1,20
$u_4$	396,00	337,00	340,00	376,00	378,00	311,00	396,00	390,00
$u_5$	762,68	3483,33	1400,00	900,00	717,33	2078,67	1287,67	763,00
$u_6$	0,252	0,600	0,317	0,162	0,107	0,101	0,238	0,515
$u_7$	0,010	0,032	0,030	0,038	0,076	0,113	0,067	0,021

Примечание. Тут и в табл. 53—55  $q_1$  — численность фитопланктона (тыс. кл/л);  $q_2$  — кислорода (мг/л);  $q_3$  — цветность;  $q_4$  — минерализация (мг/л);  $u_1$  — температура (°C);  $u_2$  — сум Днепра (м³/сек);  $u_5$  — азот суммарный (мг/л);  $u_7$  — фосфор органический (мг/л).

Таблица 53. Исходные среднесезонные данные для самоорганизации точек

Пере- менная	1968				1970			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
$q_1$	6,00	64,00	4778,00	4089,00	80,00	795,00	5797,00	2318,00
$q_2$	2,00	61,00	4497,00	4003,00	2,50	87,70	5695,00	1424,00
$q_3$	8,50	3,30	3,10	2,10	2,10	2,90	1,66	3,20
$q_4$	7,85	7,45	7,75	7,55	7,84	7,65	7,82	7,93
$q_5$	12,71	8,75	7,70	7,80	11,13	9,70	6,90	8,36
$q_6$	18,00	35,00	32,00	24,00	17,00	42,00	42,00	31,00
$q_7$	266,40	197,60	255,00	285,00	261,80	270,10	193,60	215,50
$u_1$	1,60	12,40	20,60	12,00	4,20	15,30	21,10	6,20
$u_2$	2,68	13,40	15,80	5,80	9,00	10,00	14,90	6,10
$u_3$	2,10	2,20	0,80	1,20	2,60	6,70	2,90	2,70
$u_4$	334,00	304,00	384,00	389,00	378,00	386,00	394,00	379,00
$u_5$	733,00	2576,67	769,33	724,00	1266,67	5976,67	1459,33	1132,33
$u_6$	0,993	0,114	0,923	0,320	0,261	0,620	0,777	0,275
$u_7$	0,056	0,042	0,092	0,030	0,016	0,030	0,067	0,062

Таблица 54. Исходные среднесезонные данные для самоорганизации точек

Пере- менная	1975.				19	
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна
$q_1$	535,00	3525,00	3578,00	1421,00	54,00	781,00
$q_2$	54,00	453,00	1426,00	79,00	54,00	535,00
$q_3$	1,80	1,60	4,00	2,50	2,10	1,20

чной модели экосистемы Каховского водохранилища Последовательность А

	1971				1973			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
	35,00	951,00	14028,00	6124,00	46,00	455,00	3036,00	1215,00
	6,00	200,70	13380,00	3345,00	1,60	16,00	1067,00	267,00
	3,80	4,50	3,80	0,89	2,40	3,10	2,80	2,20
	7,87	8,10	8,22	7,85	8,40	8,30	8,20	8,20
	13,90	14,40	10,10	9,48	11,65	14,55	8,90	8,70
	26,00	47,00	43,00	25,00	19,00	32,00	24,00	21,00
	221,00	310,00	290,00	231,00	296,00	370,00	305,00	270,00
	4,50	7,30	19,80	12,20	5,30	5,70	22,60	11,60
	2,00	12,00	14,90	5,60	1,70	11,00	14,20	5,50
	2,20	3,70	1,30	1,00	1,00	1,50	1,20	1,00
	346,00	385,00	392,00	361,00	384,00	404,00	407,00	386,00
	1746,67	3333,33	1273,00	1007,33	744,00	1878,00	968,67	767,67
	0,580	0,114	0,432	0,207	0,443	0,357	0,222	0,102
	0,021	0,300	0,400	—	—	—	—	—

численность синезеленых водорослей (тыс. кл/л);  $q_3$  — БПК<sub>5</sub>;  $q_4$  — рН;  $q_5$  — концентрация марная солнечная радиация (ккал/см²);  $u_2$  — проточность (м/с);  $u_4$  — уровень (см),  $u_5$  — сток

ной модели экосистемы Каховского водохранилища Последовательность В

	1972				1974			
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
	26,00	257,00	2892,00	2318,00	3,00	36,00	241,00	54,00
	0,60	20,00	2770,00	692,00	3,00	32,00	215,00	36,00
	1,80	2,10	2,90	0,95	3,30	2,50	3,20	1,20
	8,05	7,95	8,05	8,00	7,93	7,90	7,85	7,70
	11,70	10,20	7,39	7,66	12,20	12,00	6,00	8,80
	24,00	26,00	20,00	18,00	20,00	22,00	28,00	21,00
	236,00	375,00	305,00	267,00	317,00	350,00	320,00	300,00
	5,20	7,10	22,00	17,10	0,60	12,00	21,00	17,00
	3,30	11,20	15,50	5,80	2,40	7,70	15,20	6,20
	3,00	0,70	0,60	1,00	2,00	0,80	1,50	1,30
	355,00	383,00	381,00	385,00	378,00	373,00	383,00	387,00
	1188,66	1677,33	794,00	590,33	977,67	1396,67	1530,00	1105,33
	0,410	0,729	0,803	0,114	0,080	0,094	0,116	0,740
	—	—	—	—	—	—	—	—

ной модели Каховского водохранилища Последовательность С

76	1977			
	Лето	Осень	Зима	Весна
	5213,00	2085,00	79,00	788,00
	3565,00	1426,00	1,20	361,00
	2,45	2,00	4,00	2,50
				5238,00
				2408,00
				1,60
				2095,00
				963,00
				0,80

Пере- менная	1975				19	
	Зима	Весна	Лето	Осень	Зима	Весна
$q_4$	7,90	8,10	7,70	7,50	8,10	7,70
$q_5$	11,96	12,00	8,50	10,20	12,00	11,20
$q_6$	23,00	42,00	35,00	30,00	26,00	28,50
$q_7$	275,00	302,00	310,00	260,00	600,00	750,00
$u_1$	2,50	6,50	24,00	14,50	2,80	6,80
$u_2$	2,50	11,00	15,00	6,30	3,40	11,00
$u_3$	3,20	2,20	1,00	0,70	1,50	1,30
$u_4$	376,00	403,00	400,00	358,00	367,00	383,00
$u_5$	2276,67	2580,00	1206,67	684,67	582,50	1799,33
$u_6$	0,651	1,053	0,236	0,108	1,302	0,951

**Результаты второго этапа.** На втором этапе по гармоническому алгоритму МГУА прогнозируются среднегодовые значения переменных (по критериям регулярности и точности кратковременного прогноза  $\Delta^2(B) - \Delta^2(C)$  с использованием данных табл. 55).

Для переменной  $Q_4$  (щелочность) получено: число гармоник — 4; множество  $A$  — 19 точек,  $B$  — 4 точки,  $C$  — 3 точки. Ошибка прогноза  $\Delta^2(C) = 0,0112$ ; критерий сохранения моментов  $\rho_{1-2}(m) = 0,0064$  (на интервале прогноза до 2000 г. включительно). Переменная  $Q_4$  принята в качестве ведущей переменной.

Уравнение гармонической модели

$$q_4(t) = \sum_{i=1}^{14} [A_i \sin(\omega_i t) + B_i \cos(\omega_i t)],$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,194206 \\ 0,108696 \\ 0,123952 \\ 0,067498 \\ 0,108169 \\ 0,049591 \\ 0,020008 \\ -0,087815 \\ 0,012224 \\ 0,024188 \\ -0,061768 \\ 0,000749 \\ 0,055686 \\ -0,001332 \end{bmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} 0,064997 \\ -0,121382 \\ -0,101787 \\ 0,038496 \\ -0,039030 \\ 0,005407 \\ -0,185774 \\ 0,020376 \\ -0,050218 \\ -0,101869 \\ 0,035796 \\ 0,020685 \\ -0,018161 \\ -0,024657 \end{bmatrix}, \quad \bar{\omega} = \begin{bmatrix} 0,4496672 \\ 2,7458852 \\ 1,6442465 \\ 0,3172218 \\ 0,9047609 \\ 2,1774811 \\ 3,0467653 \\ 0,4780956 \\ 1,5553077 \\ 2,5145337 \\ 0,1592151 \\ 1,1269211 \\ 1,9214935 \\ 2,7186482 \end{bmatrix}.$$

Обратим внимание на то, что многорядный гармонический алгоритм МГУА благодаря использованию принципа неокончателных решений Д. Габора позволил найти число гармоник разложения, значительно большее числа гармоник первого ряда (определяемого размером таблицы опытных данных). Если пользоваться однорядными алгоритмами классической теории, то для одной

76		1977			
Лето	Осень	Зима	Весна	Лето	Осень
8,20	7,65	8,10	8,20	7,98	8,10
8,60	9,60	14,00	7,50	10,00	10,50
23,00	30,00	27,00	31,00	29,00	18,00
290,00	316,30	380,00	350,00	370,00	320,00
21,00	17,00	0,65	10,00	22,00	14,00
13,50	5,30	2,70	9,30	12,10	6,50
1,00	1,00	2,80	2,00	1,30	1,70
404,00	381,00	387,00	401,00	403,00	387,00
756,00	494,67	486,33	1860,00	841,33	240,67
0,604	0,369	0,498	0,712	0,660	0,463

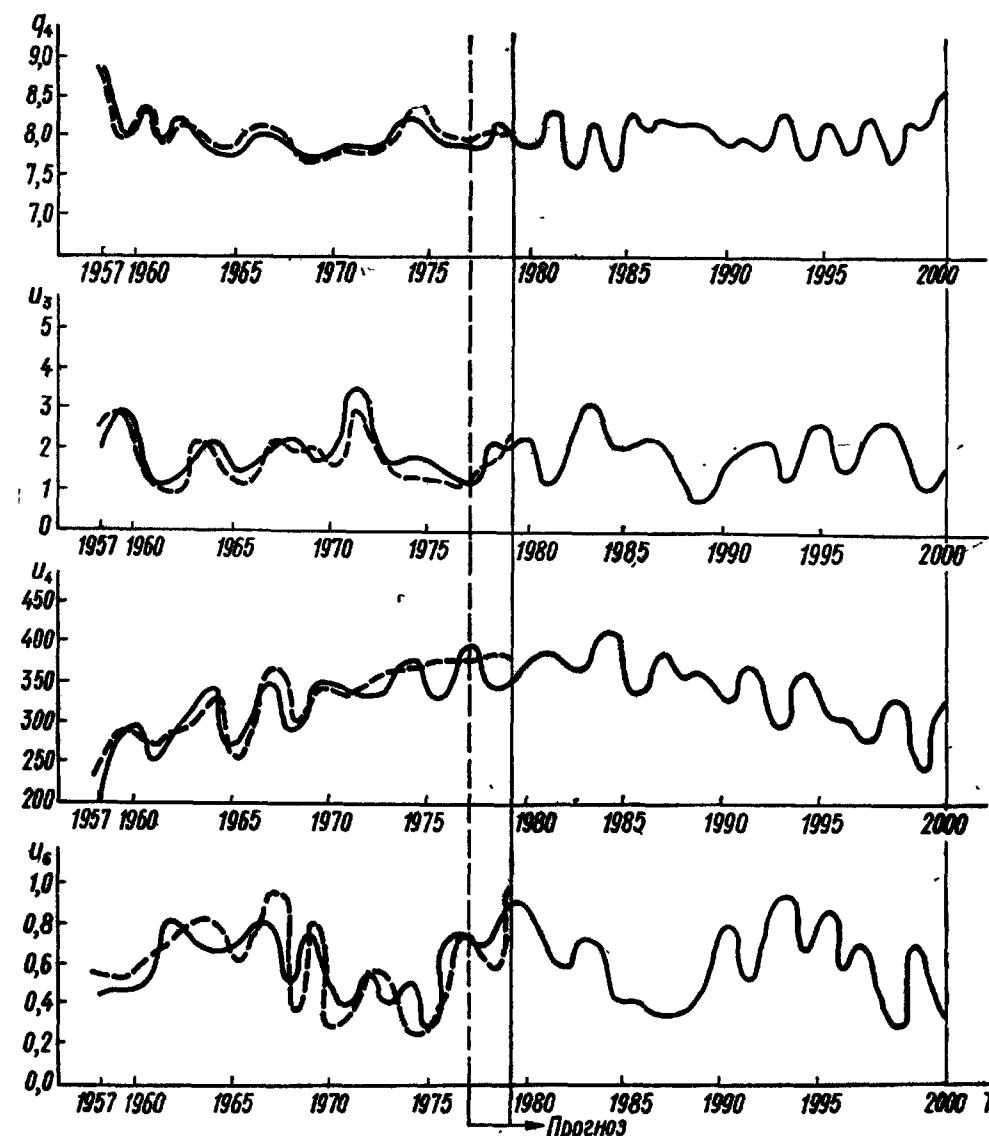


Рис. 79. Лучшие по критерию сохранения моментов прогнозы среднегодовых значений переменных (Каховское водохранилище).

Таблица 55. Исходные данные для долгосрочного прогноза среднегодовых водохранилище, поверхностный слой)

Переменная	1957	1958	1959	1960	1961
$Q_1$	2263,00	1800,00	2070,00	2250,00	2020,00
$Q_2$	1980,00	1250,00	1580,00	1450,00	625,00
$Q_3$	7,70	11,00	7,80	10,90	12,80
$Q_4$					
$Q_5$	9,00	8,00	8,40	7,90	8,20
$Q_6$		11,60	8,60	9,50	11,30
$Q_7$	32,00	62,60	43,00	20,00	28,00
$Q_8$	248,00	252,00	260,00	270,00	306,00
$V_1$	11,45	10,60	10,50	12,50	11,80
$V_2$	9,00	9,08	8,98	8,92	9,18
$V_3$	2,20	3,06	2,16	1,14	1,06
$V_4$	217,00	285,00	350,00	255,00	305,00
$V_5$	1360,00	2160,00	1300,00	1080,00	1120,00
$V_6$	0,543	0,538	0,557	0,705	0,734
$V_7$	0,107	0,121	0,075	0,059	0,043

Примечания: 1. Началом года наблюдений принято считать 1 декабря каждого года как их можно легко получить из таблиц среднесезонных значений переменных (табл. 50—52).

гармоники требуется три точки данных, для двух — шесть, для трех — девять точек, а для полученных четырнадцати гармоник потребовалось бы сорок два года наблюдений.

Напомним, что число слагаемых полиномиальной модели, получаемой по многорядным алгоритмам МГУА, может быть во много раз больше числа точек, имеющих в таблице исходных данных.

Кроме  $Q_4$ , хорошую прогнозируемость с показателями  $\Delta^2(C) \leq 1,0$  и  $\rho_{1-2}(m) \leq 0,01$  дали также гармонические модели для переменных  $u_3$ ,  $u_4$  и  $u_6$ . Прогнозы среднегодовых значений переменных  $Q_4$ ,  $u_3$ ,  $u_4$  и  $u_6$  приведены на рис. 79.

Остальные переменные  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u$ ,  $u_5$ , не вошедшие в уравнения модели, из дальнейшего рассмотрения исключаются, так как на интервале прогноза до 2000 г. они не имеют хороших прогнозирующих моделей и, следовательно, их нельзя использовать для построения критериев баланса прогноза. Это не означает, что при желании мы не можем значительно улучшить прогнозы этих величин, воспользовавшись критерием баланса хорошо прогнозируемой, ведущей переменной  $Q_4$ .

**Результаты третьего этапа.** На третьем этапе выполнена самоорганизация разностных моделей для четырех сезонов года, как было описано в примере моделирования экосистемы оз. Байкал. При этом был принят полный полином правой части разностного уравнения в следующем виде:

$$q_{1(00)} = a_0 + a_1 q_{1(-10)} + a_2 q_{1(-20)} + a_3 q_{1(-30)} + a_4 q_{1(0-1)} + \\ + a_5 q_{4(00)} + a_6 q_{4(-10)} + a_7 q_{4(-20)} + a_8 q_{4(-50)} + a_9 q_{4(0-1)} + \\ + a_{10} q_{6(00)} + a_{11} q_{6(-10)} + a_{12} q_{6(-20)} + a_{13} q_{6(-30)} + a_{14} q_{16(0-1)} +$$

значений переменных по гармоническому алгоритму МГУА (Каховское

	1962	1963	1964	1965	1966	1978
	3000,00	3900,00	3500,00	3600,00	2500,00	617,00
	1850,00	3400,00	3000,00	2800,00	2100,00	523,00
	11,60	9,50	9,50	7,70	8,50	6,40
						3,25
	7,90	7,80	7,80	8,10	7,90	8,00
	12,50	12,10	11,70	10,80	11,50	9,70
	28,00	31,60	30,00	16,00	26,30	40,00
	301,00	227,00	340,00	325,00	320,00	380,00
	11,80	11,70	10,40	10,50	12,90	11,93
	9,95	11,75	10,48	10,60	11,20	6,90
	2,10	2,23	1,22	1,25	2,20	2,00
	313,00	359,00	219,00	332,00	377,00	380,00
	1700,00	1230,00	992,00	1100,00	1380,00	1000,00
	0,850	0,793	0,623	0,708	1,001	1,004
	0,140	0,024	0,032	0,053	0,042	0,124

лендарного года. 2. Среднегодовые данные за 1967—1977 гг. для краткости не приведены, так

$$+ a_{15} Q_{1(00)} + \dots + a_{16} Q_{1(0-1)} + \\ + a_{17} Q_{4(00)} + \dots + a_{18} Q_{4(0-1)} + \\ + a_{19} Q_{6(00)} + \dots + a_{20} Q_{6(0-1)} + \\ + a_{21} u_{3(00)} + \dots + a_{22} u_{5(0-1)} + \\ + a_{23} u_{4(00)} + \dots + a_{24} u_{4(0-1)} + \\ + a_{25} u_{6(00)} + \dots + a_{26} u_{6(0-1)} \\ \text{Всего 27 слагаемых}$$

Здесь, на этапе выбора комплекта сезонных прогнозирующих моделей (этап 5, рис. 73), впервые применяется разностное уравнение, содержащее переменные с разными интервалами усреднения, сезонные и годовые значения переменных. Многомерный отсчет времени является средством устранения жесткой сходимости долгосрочных прогнозов к трендам. В сочетании с гармоническим прогнозом годовых значений, прогноз по разностным уравнениям не «застывает», а продолжается неограниченно долго.

В алгоритме сезонные модели получились из данного полного описания по комбинаторному алгоритму МГУА при помощи исключения тех или иных членов, но так, чтобы общее число слагаемых не превышало шести.

Малое число точек к таблице исходных данных или слишком большая продолжительность счета на машине часто заставляет применять сокращение числа переменных в таблице, сокращение свободы выбора  $F$  и «способ усечения треугольника перебора». Последний рекомендуется в первую очередь. Он состоит в том, что в комбинаторном переборе участвуют все переменные, но перебираются только полиномы, имеющие число слагаемых,

не больше заданного. В данной задаче перебираются все полиномы, имеющие не более шести членов (так как мы располагаем только 12-ю точками).

На данном этапе можно применить также многорядный алгоритм, где такое ограничение числа членов не требуется.

Модели оцениваются по комбинированному критерию

$$\rho = \sqrt{\dot{n}_{\text{см}}^2 + \Delta^2(C)} \rightarrow \min.$$

После выбора структуры моделей оптимальной сложности оценки коэффициентов находятся заново по методу наименьших квадратов по всем данным таблицы.

В результате отобраны следующие сезонные модели:

#### Зима

- 1)  $q_{1(00)} = 325,4950 - 6,7028q_{6(-1,0)} - 2,1435q_{6(-2,0)}, \Delta^2(C) = 0,178,$
- 2)  $q_{1(00)} = -63,3173 - 7,2642q_{6(-1,0)} + 0,9313V_{4(-1,0)}, \Delta^2(C) = 0,939,$
- 3)  $q_{4(00)} = 6,9669 + 0,0004q_{1(00)} + 0,4808q_{4(-3,0)} + 0,0136q_{6(-1,0)} + 1,3516Q_{4(00)}, \Delta^2(C) = 0,274,$
- 4)  $q_{4(00)} = -4,5261 - 0,1428q_{4(-1,0)} + 0,4058q_{4(-3,0)} + 1,3055Q_{4(00)}, \Delta^2(C) = 0,399,$
- 5)  $q_{6(00)} = 41,8091 - 2,8358q_{4(-3,0)} + 0,0043u_{6(-1,0)} - 0,0025u_{6(00)}, \Delta(C) = 1,137;$
- 6)  $q_{6(00)} = +27,7654 - 1,5153q_{4(-3,0)} + 0,0043U_{6(-1,0)}, \Delta(C) = 1,33,$

#### Весна

- 7)  $q_{1(00)} = -0,0953 + 5,4071q_{1(-1,0)} + 24,5502q_{6(-1,0)} - 37,1074q_{6(0,-1)} + 0,6461U_{6(-1,0)}, \Delta^2(C) = 6,878;$
- 8)  $q_{1(00)} = 1808,85 - 27,8384q_{6(-3,0)}, \Delta^2(C) = 4,780;$
- 9)  $q_{4(00)} = 8,5092 + 0,9151q_{4(-2,0)} - 0,9193Q_{4(-1,0)} - 0,0003U_{6(00)}, \Delta^2(C) = 0,854;$
- 10)  $q_{4(00)} = 2,6758 + 0,7029Q_{4(00)}, \Delta^2(C) = 0,999;$
- 11)  $q_{6(00)} = 34,3696 - 0,0016q_{1(0,-1)}, \Delta^2(C) = 0,460;$
- 12)  $q_{6(00)} = 19,4562 + 0,0096U_{6(-1,0)}, \Delta^2(C) = 0,815;$

#### Лето

- 13)  $q_{1(00)} = 5258,0600 - 2,3191q_{1(-2,0)} - 0,0431q_{1(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,784;$
- 14)  $q_{1(00)} = 4174,8200 + 94,3474Q_{4(00)}, \Delta^2(C) = 1,16;$
- 15)  $q_{4(00)} = 1,7519 + 0,7733q_{4(-2,0)}, \Delta^2(C) = 0,588;$

- 16)  $q_{4(00)} = -0,518 + 0,9492q_{4(-2,0)} + 0,0340q_{6(-2,0)} + 0,0042q_{6(0,-1)}, \Delta^2(C) = 0,642;$
- 17)  $q_{4(00)} = -0,2628 + 0,0001q_{1(00)} + 0,8218q_{4(-2,0)} + 0,1868q_{4(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,696;$
- 18)  $q_{4(00)} = -0,0167 + 0,9079q_{4(-2,0)} + 0,0325q_{6(-2,0)}, \Delta^2(C) = 0,74;$
- 19)  $q_{4(00)} = -3,3367 + 0,6677q_{4(-2,0)} + 0,6761q_{4(-3,0)} + 0,0188q_{6(0,-1)}, \Delta(C) = 0,745;$
- 20)  $q_{6(00)} = 133,1050 + 19,4496q_{4(-1,0)} - 33,7511q_{4(-2,0)} + 0,0093U_{6(00)}, \Delta(C) = 0,163;$
- 21)  $q_{6(00)} = 289,1110 - 35,8741q_{4(-2,0)} + 3,7147q_{4(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,345,$

#### Осень

- 22)  $q_{1(00)} = 27872,6000 - 3175,72q_{4(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,098;$
- 23)  $q_{1(00)} = 28139,4000 - 0,1966q_{1(-2,0)} - 3188,29q_{4(-3,0)}, \Delta^2(C) = 0,115;$
- 24)  $2q_{4(00)} = -2,3039 - 0,0226q_{6(00)} + 1,2875Q_{4(00)} + 0,0003U_{6(00)}, \Delta^2(C) = 0,29;$
- 25)  $q_{4(00)} = -2,2246 - 0,7834q_{4(-2,0)} + 2,0296Q_{4(00)} + 0,0001U_{6(00)}, \Delta^2(C) = 0,915;$
- 26)  $q_{4(00)} = 1,4127 - 0,8207q_{4(-2,0)} + 1,9854Q_{4(00)}, \Delta^2(C) = 0,96;$
- 27)  $q_{4(00)} = -1,5184 - 0,8534q_{4(-2,0)} + 2,0196Q_{4(00)} + 0,0001U_{6(-1,0)}, \Delta^2(C) = 0,98;$
- 28)  $q_{6(00)} = 96,6623 - 9,9461Q_{4(00)} + 0,0053U_{6(00)}, \Delta^2(C) = 0,819;$
- 29)  $q_{6(00)} = 97,0293 - 0,0125q_{6(-3,0)} - 9,9553Q_{4(00)} + 0,0044U_{6(00)}, \Delta^2(C) = 0,82.$

#### Спуск в пространстве структур моделей

Выбор оптимального комплекта сезонных моделей выполняем при помощи перебора структур моделей по критерию баланса на интервале прогноза с 1980 до 2000 г. Пошаговые прогнозы вычисляются по неявной схеме: уравнения для трех выходных переменных  $q_1$ ,  $q_4$  и  $q_6$  решаются совместно на каждом шагу прогноза. Пошаговый прогноз предусматривает поочередную смену сезонных моделей в порядке следования сезонов года. Всего сравнивалось

$$C_{\text{сезон} - \text{год}} = n^k = S^4 = 625$$

различных пошаговых прогнозов.



Первый вариант выбора прогноза. Прогнозы сезонных значений сравниваются с прогнозами среднегодовых значений по критерию баланса прогнозов

$$b_i^2(q_4) = Q_{4(\text{год})}^2 - \frac{1}{4}(q_{4(\text{в})}^2 + q_{4(\text{л})}^2 + q_{4(\text{ос})}^2 + q_{4(0)}^2), \quad B_{q_4}^2 = \sum_{i=1966}^{2000} b_i^2 \rightarrow \min.$$

В результате выбран следующий комплект моделей: зима (2), (3) и (5); весна (8), (9) и (11); лето (13), (15) и (20); осень (22), (24) и (28).

При этом минимальное значение критерия  $B_{q_4, \min}^2 = 0,0006$ .

Второй вариант. Прогнозы выбираются по системному критерию

$$B = \sqrt{\frac{1}{3}(B_{q_1}^2 + B_{q_4}^2 + B_{q_6}^2)} \rightarrow \min,$$

где

$$b_{i(q_1)} = Q_{1(\text{год})}^* - \frac{1}{4}(q_{1(\text{в})}^* + q_{1(\text{л})}^* + q_{1(\text{ос})}^* + q_{1(0)}^*),$$

$$b_{i(q_4)} = Q_{4(\text{год})}^* - \frac{1}{4}(q_{4(\text{в})}^* + q_{4(\text{л})}^* + q_{4(\text{ос})}^* + q_{4(0)}^*),$$

$$B_{q_1} = \sum_{i=1966}^{1977} b_{i(q_1)}, \quad B_{q_4} = \sum_{i=1966}^{1977} b_{i(q_4)}.$$

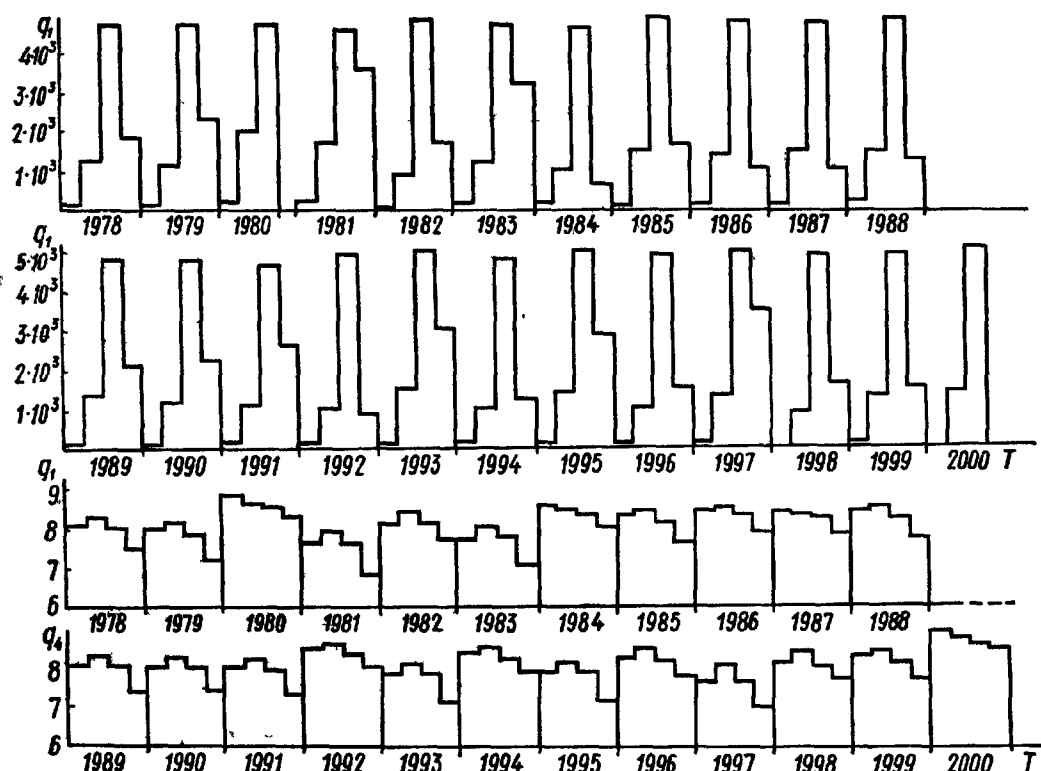


Рис. 80. Долгосрочный прогноз среднесезонных значений выходных переменных (Каховское водохранилище).

Оптимальный комплект моделей: зима (2), (3) и (5); весна (8), (10) и (11); лето (13), (15) и (20); осень (22), (25) и (28).

Минимальное значение критерия при этом  $B_{q_4, \min}^2 = 0,014$ . Спуск в пространстве оценок коэффициентов не использовался.

Долгосрочный прогноз. Результат пошагового интегрирования уравнений сезонных моделей (по второму варианту) представлен на рис. 80. Отметим, что в результате пошагового интегрирования получены оценки прогнозов среднегодовых значений переменных  $q_1$  и  $q_4$ , которые непосредственно по гармоническому алгоритму МГУА прогнозируются не достаточно хорошо.

*Комплект сезонных моделей с переменными коэффициентами, действительный для всех днепровских водохранилищ*

Было принято, что структура сезонных моделей для всех днепровских водохранилищ соответствует структуре моделей, полученных объективно по данным Каховского водохранилища. Это дало возможность определить по методу наименьших квадратов оценки коэффициентов сезонных моделей для всех водохранилищ (табл. 56).

В последнем столбце указанной таблицы приведены формулы, позволяющие рассчитать оценку водохранилищ региона, которые по своим параметрам близки к днепровским. Формулы получены по комбинаторному алгоритму МГУА по минимуму усредненного критерия регулярности, используют данные, приведенные в табл. 57.

*Усредненный критерий регулярности (УКР)*

При крайне малом числе данных для алгебраических моделей рекомендуется применять усредненный критерий регулярности, а для динамических (разностных) — критерий точности пошагового прогноза  $i^2(N) \rightarrow \min$ . Критерий минимума смещения требует наличия в два раза большего количества данных.

В примере прогноза для днепровских водохранилищ формула для расчета коэффициентов сезонных моделей в зависимости от

Таблица 57. Параметры днепровских водохранилищ

Водохранилище	Время полного обмена, дни	Площадь зеркала, тыс. га	Объем воды, см <sup>3</sup>	Процент площади с глубиной < 1 м	Площадь мелководий, тыс. га
Киевское	30	92,0	3,73	18,5	17,0
Кременчугское	120	225,0	13,5	8,0	18,0
Днепродзержинское	15	56,5	2,45	17,0	9,6
Каховское	150	220,0	18,3	2,0	4,4

Т а б л и ц а 56. Оценки коэффициентов сезонных моделей для переменной зима  $x_{1(00)} = a_1 + a_2 x_3(-1,0) + a_3 y_4(-1,0)$ ; весна  $x_{1(00)} = a_4 + a_5 x_3(-3,0)$ ; лето  $a_{1(00)} = a_6 + a_7 x_1(-2,0) + a_8 x_1(-3,0)$ ; осень  $x_{1(00)} = a_9 + a_{10} x_2(-3,0)$

Коэффициент	Номер водохранилища					Расчет оценок коэффициентов
	1	2	3	4	5	
$a_1$	-548,630	-20,952	127,194	7,588	-63,317	$a_1 = -3372,100 + 74,437 y_1 - 431,571 y_3 + 8602,84 \cdot 1/y_2$
$a_2$	3,247	-0,243	0,6242	-0,135	-7,264	$a_2 = 2,390 - 0,045 y_1 + 0,420 y_5 - 5,147 \cdot 1/y_1$
$a_3$	1,828	0,083	-0,282	0,007	0,931	$a_3 = -3,234 + 0,383 y_4 - 0,031/y_2$
$a_4$	286,692	3635,9	795,740	101,852	1808,83	$a_4 = 11,114 - 0,290 y_1 + 1,909 y_3 - 28,707 1/y_3$
$a_5$	-1,700	-0,005	-7,189	1,321	-27838	$a_5 = -5170,17 + 71,883 y_1 + 17853,300 1/y_3 - 20733,7 1/y_5$
$a_6$	704,267	3321,260	750,797	2676,860	5258,060	$a_6 = 10,576 - 204,8951/y_1 - 74,0081/y_4$
$a_7$	38,520	322,108	2,663	-76,163	-2,319	$a_7 = 1694,100 + 85,934 y_1 - 37,387 y_2 - 2201,020 1/y_4 (0,309, \Delta C 0,001 - 15889,800 + 1061,090 y_3 + 470,137 y_4 + 147,400 \cdot 1/y_3 (0,5; 0,006)$
$a_8$	0,7	-0,5339	2,05102	0,6019	-0,0431	$a_8 = -128,704 - 53,351 y_3 + 14,895 y_5 + 2074 \cdot 1/y_4 (6,49; 0,01) 1050,19 - 8,825 y_2 + 58,203 y_3 - 38725,5 \cdot 1/y_3 (84; 0,02)$
$a_9$	36,37,560	18067,900	69809,200	9205,350	27872,6	$a_9 = 14,507 - 0,038 y_2 - 0,362 y_4 - 11,017 \times 1/y_5 (0,16; 0,015) 7,232 - 0,356 y_3 - 0,215 y_4 - 0,070 y_5 (0,278; 0,022)$
$a_{10}$	-475,00	-2216,630	-8607,90	-1093,79	-3175,72	$a_9 = -96715,800 + 1650,87 y_1 - 7621,22 y_3 + 2136460 \cdot 1/y_1 \text{ UKP} = 107$
						$a_{10} = -3106,950 - 578672 \cdot 1/y_1 - 274491 \times 1/y_2 + 92936,5 1/y_3$
						$a_{10} = 1,198 \cdot 10^4 - 219,095 y_1 + 1,07799 a \times 10^3 y_3 - 2,99231 \cdot 10^5 1/y_1 \text{ UKP} = 29$

конструктивных параметров водохранилищ ищется в линейной алгебраической форме

$$a_i = k_0 + k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 + k_4 y_4 + k_5 y_5$$

(названия переменных  $y_1, y_3, y_4, y_5$  приведены выше). Сравниваются между собой модели, которые можно получить из этого полного полинома, вычеркивая те или иные его слагаемые (кроме  $k_0$ ). Всего в таблице данных пять точек (табл. 57). Для каждой модели используется четыре точки, а пятая (в качестве которой используются все точки по очереди) служит для расчета УКР:

$$\text{УКР} = \frac{\sum_{i=1}^5 (a_{i\text{мод}} - a_{i\text{табл}})^2}{\sum_{i=1}^5 a_{i\text{табл}}^2} \cdot 100\%.$$

Значения УКР для всех формул, имеющих пять и меньше слагаемых, сравниваются между собой, затем выбирается формула оптимальной сложности. Подставив полученные формулы в систему уравнений Каховского водохранилища, легко получить «всеводохранилищные» сезонные модели (табл. 57).

#### Оптимизация проектирования водохранилищ

В качестве примера рассмотрим следующую задачу: требуется определить изменение прогноза переменной  $x_1$  (фитопланктон) в Каховском водохранилище в случае, если без существенного изменения всех других его параметров площадь мелководий будет уменьшена в нем при помощи дамбирования в два раза (с 17 до 8,5 тыс. га). Соответственно изменятся площадь зеркала и объем воды. Для простоты остальные параметры водохранилища будем считать неизменными.

Чтобы решить задачу, выбирается один комплект лучших по критериям  $n_{\text{см}} \rightarrow \min$  и  $\Delta^2(C) \rightarrow \min$  сезонных уравнений фитопланктона для указанного водохранилища\*.

По методу наименьших квадратов определяются оценки коэффициентов оптимального комплекта сезонных моделей для пяти водохранилищ каскада. Учитывая параметры каждого из водохранилищ по комбинаторному алгоритму МГУА (с использованием способа усечения треугольника), определяют (сначала) линейные зависимости коэффициентов от параметров, причем используют

\* В этом месте с целью сокращения объема программы нарушается «принцип неокончательных решений» Д. Габора, так как выбирается один комплект сезонных моделей. С учетом принципа следует выбрать  $F_1 > 1$  комплектов, получить «всеводохранилищное» уравнение годовых прогнозов (с переменными коэффициентами) и организовать перебор множеств полиномов сезонных моделей с множеством  $F_2 > 1$  годовых прогнозов, используя критерий баланса. Только после такого перебора следует выбрать единственный детальный (сезонный) долгосрочный прогноз.

критерий УКР. При этом следует контролировать ошибки. Если минимум критерия не глубокий, переходят к нелинейным зависимостям, используя члены вида

$$\dots \frac{1}{x_1^2} \frac{1}{x_i} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \frac{1}{\sqrt{x_i}} x_i x_i^2 \dots$$

Обратные функции используются для отрицательных членов линейных зависимостей, так как они отражают уменьшение функции данного  $i$ -го аргумента (параметра водохранилища). Таким образом, находятся выражения коэффициентов сезонных моделей через параметры водохранилищ («всеводохранилищная» модель). Подставляя параметры Каховского водохранилища после указанной реконструкции, получаем комплекты сезонных моделей для решения рассматриваемой задачи и, следовательно, долгосрочный прогноз для реконструированного водохранилища.

### Результаты применения алгоритма

Лучший по критериям  $n_{\text{см}}^2 \rightarrow \min$  и  $\Delta^2(C) \rightarrow \min$  комплект сезонных моделей для фитопланктона приведен выше.

Оценки коэффициентов по методу наименьших квадратов для пяти водохранилищ приведены в табл. 56 (столбцы 1—5). Расчет-

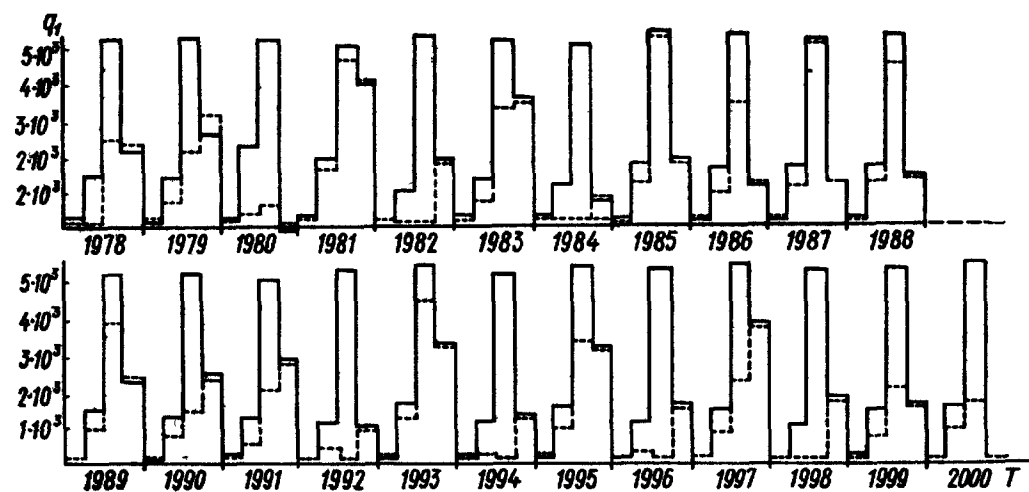


Рис. 81. Сравнение долгосрочных прогнозов сезонных значений численности фитопланктона для Каховского водохранилища: — для существующего водохранилища; — — — после уменьшения площади мелководий в два раза.

ные формулы, полученные по комбинаторному алгоритму МГУА с использованием способа усечения треугольника, и значение УКР также приведены в этой таблице (последний столбец).

Легко убедиться, что некоторые из формул потребовали учета нелинейности. Подставляя в расчетные формулы параметры Каховского водохранилища после реконструкции, указанной в примере, получаем следующий комплект сезонных моделей:

$$\text{зима } x_{1(00)} = -63,317 - 8,250x_{3(-1,0)} + 0,931V_{4(-1,0)};$$

$$\text{весна } x_{1(00)} = 1712,291 - 55,582x_{3(-3,0)};$$

$$\text{лето } x_{1(00)} = 4240,292 + 15,417x_{1(-2,0)} - 2,139x_{1(-3,0)};$$

$$\text{осень } x_{1(00)} = 27872,600 - 31,75,720x_{2(-3,0)}.$$

Пошаговое интегрирование комплекта дает прогноз, изображенный на рис. 81. Можно сделать вывод, что уменьшение площади мелководий в два раза приводит к уменьшению суммарного фитопланктона, которые можно оценить по следующей формуле:

$$\Delta \bar{x}_1 = \frac{\sum_{i=1977}^{2000} (x_1 - x_{1(\text{рек})})^2_i}{\sum_{i=1977}^{2000} x_1^2} \cdot 100 = 64,3\%.$$

Используя данную методику, можно определить зависимость численности фитопланктона от изменения других конструктивных параметров водохранилища.

\* \* \*

Итак, читатель, закончена книга о владении эвристикой последовательного применения критериев селекции модели и выбора гипотезы о виде корней характеристического уравнения с дальнейшим наращиванием нескольких уровней языка моделирования. Ни ансамбль критериев, ни задание вида корней, ни, наконец, многоуровневое моделирование не потребовались бы, если бы исходная таблица содержала точные опытные данные без наложенного шума или если бы в нашем распоряжении была вычислительная машина огромной мощности, на которой можно было бы организовать полный перебор систем уравнений всех классов, опорных функций всех видов, всевозможных корней и дискретных оценок коэффициентов. К сожалению, такой машины не может быть и, следовательно, тот, кто хочет получить долгосрочный или сверхдолгосрочный прогноз или дальнюю экстраполяцию поверхности по небольшой таблице опытных данных, должен овладеть указанным искусством рационализированного перебора. Существенным при этом является объективный выбор множества выходных переменных, характеризующих объект, на ЭВМ. Опыт показывает, что никогда сложная задача прогнозирования или экстраполяции не решается первым попавшимся, простым алгоритмом МГУА. Только опробывание многих алгоритмов, адекватных по сложности предмету задачи (в том числе и алгоритмов адаптивных, т. е. с переменными коэффициентами), приводит к успеху.

Автор надеется, что данная книга поможет читателю овладеть эвристическими приемами выбора последовательности критериев, корней и размытых языков моделирования, что и приведет к удивительно точным прогнозам, с большим временем упреждения, даже при не очень точных исходных данных и при машине средней мощности.

1. Акишин Б. А., Юнусов И. И. Последовательное применение методов самоорганизации и множественного регрессионного анализа для выхода адекватных математических моделей.— Автоматика, 1978, № 3, с. 64—67.
2. Арнольд В. И. О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных.— Мат. просвещение, 1958, № 3, с. 24—28.
3. Беляев В. И. Теория сложных геосистем.— Киев : Наук. думка, 1978.— 134 с.
4. Бир Стаффорд. Кибернетика и управление производством.— М. : Наука, 1965.— 391 с.
5. Бокс Дж., Дженкинс Т. Анализ временных рядов.— М. : «Мир», 1974. Вып. 1.— 406 с. Вып. 2.— 196 с.
6. Брайер Г. В., Пановский Г. А. Статистические методы в метеорологии.— Л. : Госметеиздат, 1967.— 248 с.
7. Власова И. Л., Сонечкин Д. М. Исследование предсказуемости в моделях системы гидродинамического типа.— Тр. Гидрометеорол. Центра СССР, вып. 210, 1978, с. 27—34.
8. Высоцкий В. Н. Идентификация динамических систем на основе принципа самоорганизации.— В кн.: Математические модели для прогнозирования и управления качеством вод. Киев; Ин-т кибернетики АН УССР 1976, с. 42—58.
9. Высоцкий В. Н. О наилучшем делении исходных данных в алгоритмах МГУА.— Автоматика, 1976, № 3, с. 71—74.
10. Высоцкий В. Н., Иващенко А. Г., Чеберкус В. И. Долгосрочное прогнозирование колебательных процессов при помощи выделения гармонического тренда оптимальной сложности по критерию баланса переменных.— Автоматика, 1973, № 3; 1975, № 1, с. 23—31.
11. Высоцкий В. Н., Ишара Д. Повышение помехоустойчивости критериев селекции МГУА при помощи векторного представления и использования минимаксных форм.— Автоматика, 1978, № 3, с. 3—14.
12. Высоцкий В. Н., Юнусов Н. И. Повышение помехоустойчивости алгоритма МГУА для выделения гармонического тренда с некратными частотами.— Автоматика, 1977, № 5, с. 72—76.
13. Волохов В. С., Зайченко Ю. П. Дисперсионный метод самопроизвольного (спонтанного) разбиения пространства изображений на компактные множества образца.— Автоматика, 1966, № 5, с. 26—36.
14. Галазий Г. И. Экосистема Байкала и проблемы ее охраны.— Природа, 1978, № 8, с. 1—8.
15. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.— М.: Наука, 1967.— 495 с.
16. Глушков В. М. и др. Программные средства моделирования непрерывно-дискретных систем («Недис»).— Киев : Наук. думка, 1975.— 231 с.
17. Глушков В. М. Введение в кибернетику.— Киев : Изд-во АН УССР, 1964.— 324 с.
18. Годунов В. К., Рябенский В. С. Разностные схемы.— М. : Наука, 1973.— 310 с.
19. Грубов В. И., Иващенко А. Г., Мандровский-Соколов Б. Ю. Промышленная кибернетика.— Киев : Наук. думка, 1966.— 477 с.
20. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ.— М.: Статистика, 1973.— 392 с.
21. Дылбокова Д. Л., Дылбоков И. С. Прогнозирование тенденций развития ЭЦВМ по МГУА по дробно-линейным частным описаниям и критерию баланса переменных.— Автоматика, 1975, № 2, с. 30—37.
22. Дьяченко В. Ф. Основные понятия вычислительной математики.— М. : Мир, 1977.— 97 с.
23. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации.— Пробл. кибернетики, 1978, № 33, с. 4—68.
24. Иващенко А. Г. Долгосрочное прогнозирование и управление сложными системами.— Киев : Техніка, 1975.— 312 с.
25. Иващенко А. Г. Самоорганизация системы распознавания и автоматического управления.— Киев : Техніка, 1966.— 322 с.
26. Иващенко А. Г., Высоцкий В. Н., Иващенко Н. А. Основные разновидности критерия минимума смещения модели и исследование их помехоустойчивости.— Автоматика, 1978, № 1, с. 32—33.
27. Иващенко А. Г., Дылбокова Д. Л., Сирбиладзе Д. Д., Дылбоков И. С. Глубина минимума критерия селекции как показатель достоверности модели.— Автоматика, 1975, № 6, с. 13—18.
28. Иващенко А. Г., Зайченко Ю. П., Димитров В. Д. Принятие решений на основе самоорганизации.— М.; Сов. радио, 1976.— 280 с.
29. Иващенко А. Г., Иващенко Н. А. Долгосрочное прогнозирование случайных процессов по алгоритмам МГУА с использованием критериев несмещенности и баланса переменных.— Автоматика, 1974, № 4, с. 52—59.
30. Иващенко А. Г., Иващенко Н. А., Высоцкий В. Н. Долгосрочное прогнозирование случайных процессов по алгоритмам МГУА при критериях несмещенности и баланса переменных. Ч.IV.— Автоматика, 1976, № 2, № 4, с. 21—35.
31. Иващенко А. Г., Кротов Г. И. Моделирование загрязнения среды при отсутствии информации о выбросах источников загрязнения.— Автоматика, 1977, № 5, с. 14—30.
32. Иващенко А. Г., Белозерский Е. И., Козубовский С. Ф. Об открытии законов сложных объектов в случае, когда выходные переменные не указаны. Ч. III.— Автоматика, 1979, № 4, с. 15—23.
33. Иващенко А. Г., Степашко В. С. Самоорганизация моделей и долгосрочное прогнозирование речного стока при помощи балансового критерия.— Автоматика, 1975, № 5, с. 34—41.
34. Иващенко А. Г., Степашко В. С., Костенко Ю. В., Рао М. Самоорганизация комбинированных моделей для прогнозирования циклических процессов с использованием критерия баланса прогнозов.— Автоматика, 1979, № 2, с. 8—21.
35. Иващенко А. Г., Степашко В. С., Хомовненко М. Г., Галямин Е. П. Самоорганизация моделей динамики роста сельскохозяйственных культур для управления орошаемым севооборотом.— Автоматика, 1977, № 5, с. 44—49.
36. Иващенко А. Г. Прогнозирование будущего: состояние и перспективы.— Автоматика, 1980, № 2, с. 8—21.
37. Иващенко А. Г., Кротов Г. И. Алгебраические и конечно-разностные модели с переменными коэффициентами.— Автоматика, 1980, № 4, с. 10—17.
38. Иващенко А. Г., Рао Мадала. Прогнозирование и экстраполяция метеорологических полей методами самоорганизации моделей.— Автоматика, 1979, № 6, с. 18—35.
39. Иващенко А. Г., Тодуа Н. Н., Гулян Н. В., Светальский Б. К. Проблемы статистического прогнозирования случайных процессов по принципу самоорганизации уравнений прогноза. Ч. III.— Автоматика, 1973, № 3, с. 15—35.

40. *Ивахненко А. Г., Пека П. Ю., Яковенко П. И.* Идентификация уравнений динамики сложного объекта по экспериментальным данным. Ч. II. Многомерные задачи.— *Автоматика*, 1977, № 2, с. 45—52.
41. *Ивахненко А. Г., Юрачковский Ю. П.* Выбор оптимального управления принадлежащего области эффективных решений Парето на основе долгосрочного прогнозирования.— *Автоматика*, 1978, № 2, с. 39.
42. *Ивахненко Н. А., Кваско М. З.* Комбинаторные алгоритмы МГУА, в которых экзамену на регулярность подвергаются как «симметричные», так и «несимметричные» полиномы.— *Автоматика*, 1972, № 5, с. 48.
43. *Ивахненко Н. А., Марчев А. А.* Самоорганизация математической модели для перспективного планирования строительно-монтажных работ.— *Автоматика*, 1978, № 3, с. 12—18.
44. *Ильницкий Л. Я.* Применение дробно-рациональных приближений в теории функциональных преобразователей.— Киев : Наук. думка, 1971.— 271 с.
45. Имитационное моделирование экологических систем.— М. : Наука, 1978.— 218 с.
46. *Козубовский С. Ф.* Вычислительная система «Гиперкомпи-80 ТМ» для прямого моделирования сложных систем по алгоритмам метода группового учета аргументов.— *Автоматика*, 1973, № 4, с. 84—86; *Зарубежная радиоэлектроника*, 1975, № 10, с. 3—12.
47. *Колмогоров А. М.* О представлении непрерывных функций нескольких переменных в виде суперпозиции непрерывных функций одного переменного и сложения.— Докл. АН СССР, 1957, № 5, с. 933—936.
48. *Колмогоров А. М., Вейц Б. Ю.* та ін. Алгебра і початки аналізу.— К. : Рад. школа, 1977.— 224 с.
49. *Кондрашова Н., Ихара Д.* Исследование возможности сокращения объема перебора в комбинаторном алгоритме МГУА.— *Автоматика*, 1979, № 5, с. 33.
50. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике: для научн. сотрудников и инженеров. Определения, теоремы, формулы.— М. : Наука, 1978.— 830 с.
51. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры.— М. : Наука, 1965.— 564 с.
52. *Ли Т. Г., Адамс Г. Э., Гнейз У. М.* Управление процессами с помощью вычислительных машин. Моделирование и оптимизация. Пер. с англ. под ред. В. И. Мудрова.— М. : Сов. радио, 1972.— 575 с.
53. *Минский М., Пейперт С.* Перцептроны.— М. : Мир, 1971.— 262 с.
54. *Монин А. С.* Прогноз погоды как задача физики.— М. : Наука, 1969.— 184 с.
55. *Нагель Э., Ньюмен Д.* Теорема Геделя / Пер. с англ.— М. : Знание, 1970.— 62 с.
56. *Налимов В. В.* Борьба со сложностью при научном описании мира (формальный анализ трудностей построения теоретической биологии).— *Автоматика*, 1977, № 4, с. 82—88.
57. *Налимов В. В.* Теория эксперимента.— М. : Наука, 1971.— 207 с.
58. *Патратий И. З.* Адаптация матрицы априорных вероятностей и матрицы потерь к установившимся формам в многорядной теории статистических решений.— *Автоматика*, 1972, № 2, с. 53.
59. *Патерэу С. Г., Равская Н. С., Кульчий В. Н.* О математической модели процесса обработки металлов резанием.— *Автоматика*, 1975, № 3, с. 28.
60. *Перцептрон — система распознавания образов* / Под. ред. *Ивахненко А. Г.*— Киев : Наук. думка, 1975.— 430 с.
61. *Попов Е. Г.* Гидрологические прогнозы.— Л. : Гидрометеиздат, 1979.— 231 с.
62. *Программы прямого синтеза модели (по принципу самоорганизации) : Сб. Респ. фонда алгоритмов и программ. Киев : Ин-т кибернетики АН УССР. 1975.— Вып. 1. 252 с.; Вып. 2. 214 с.; Вып. 3. 210 с.*
63. *Развитие теории самоорганизации и МГУА в Японии.*— *Автоматика*, 1975, № 2, с. 81.
64. *Райниш К.* Кибернетические основы и описание непрерывных систем.— М. : Энергия, 1978.— 456 с.
65. *Светальский Б. К., Ковальчук П. И.* Многорядный алгоритм МГУА с селекцией первичных аргументов.— *Автоматика*, 1979, № 4, с. 44.
66. *Свиридов И. Н.* Методы анализа регрессий и корреляций.— М. : Статистика, 1960.— 408 с.
67. *Слюсарев Г. Т.* Методы расчета оптических систем.— Л. : Машиностроение, 1969.— 446 с.
68. *Стоун Р., Ивахненко А. Г., Высоцкий В. Н., Семин Л. П.* Открытие законов сложных объектов в случае, когда выходные переменные не указаны. Ч. II.— *Автоматика*, 1979, № 1, с. 25.
69. *Справочник по типовым программам моделирования.*— Киев : Техніка, 1980.— 402 с.
70. *Тихонов А. И., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.— М. : Наука, 1974.— 320 с.
71. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.— М. : Наука, 1972.— 510 с.
72. *Трисеев Ю. П.* Алгоритм МГУА с изменением свободы выбора по рядам селекции.— *Автоматика*, 1977, № 4, с. 37—42.
73. *Ту Ю., Гонзалес Ю.* Принципы распознавания образов.— М. : Мир, 1978.— 410 с.
74. *Фаддеев Ф. Н., Фаддеева Д. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.— М.; Л. : Физматгиз, 1963.— 734 с.
75. *Флейшман Б. С.* Элементы потенциальной эффективности сложных систем.— М. : Сов. радио, 1971.— 360 с.
76. *Форрестер Дж.* Мировая динамика.— М. : Наука, 1978.— 163 с.
77. *Харафас Д. Н.* Системы и моделирование.— М. : Мир, 1967.— 418 с.
78. *Химмельблау Д.* Анализ процессов статистическими методами.— М. : Мир, 1973.— 510 с.
79. *Хомовненко М. Г., Коломиец Н. Г.* Самоорганизация системы простых частных моделей, прогнозирующих урожай пшеницы.— *Автоматика*, 1980, № 1, с. 28—37.
80. *Чеберкус В. И., Курковский А. П.* Самоорганизация точечных моделей для прогнозирования содержания кислорода и взвешенных веществ в реке.— *Автоматика*, 1979, № 5, с. 85—89.
81. *Шелудько О. И.* Алгоритм МГУА с ортогонализированным полным описанием для синтеза моделей по результатам планируемого эксперимента.— *Автоматика*, 1974, № 5, с. 32—42.
82. *Шервашидзе В. В., Шарговский В. П.* Исследование обертаций оптических систем методами эвристической самоорганизации.— *Автоматика*, 1974, № 1, с. 39.
83. *Шервашидзе В. В., Шарговский В. П.* Применение объективной структурной идентификации алгоритма МГУА для приближенного решения нелинейных систем управлений.— *Автоматика*, 1975, № 3, с. 24.
84. *Шемараев М. И.* Гидрометеорологические факторы и колебания численности Байкальского планктона.— В кн.: Лимнология придельтовых пространств Байкала. М. : Наука, 1971, с. 259—267. Тр. Лимнол. ин-та; Т. 12.
85. «Шесть времен года» — интервью с проф. М. А. Петросянц. Знание — сила, 1979, № 11, с. 6—9.
86. *Юрачковский Ю. П.* Усовершенствованные алгоритмы МГУА для прогнозирования процессов (обзор).— *Автоматика*, 1977, № 5, с. 76—86.
87. *Юрачковский Ю. П., Грошков А. Н.* Оптимальное разбиение исходных данных на обучающую и проверочную последовательности на основе анализа функции распределения критерия.— *Автоматика*, 1980, № 2, с. 5—12.
88. *Юрачковский Ю. П.* Динамико-статистический метод моделирования циклических процессов.— *Автоматика*, 1978, № 6, с. 83—85.
89. *Эшби У. Р.* Схема усилителя мыслительных способностей.— В кн.:



- Автоматы / Под ред. К. Э. Шеннова, Дж. Маккарти. М.; Изд-во иностр. лит., 1956—610 с.
90. Эшби Роос. Математические модели и анализ на вычислительных машинах функций центральной нервной системы.— Автоматика, 1967, № 1, с. 57.
  91. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления.— М.: Мир, 1975.— 682 с.
  92. Яцкевич В. В. Многорядные алгоритмы самоорганизации для решения задач динамического прогнозирования.— Автоматика, 1978, № 3, с. 19—29.
  93. Беск М. В. Modelling of dissolved oxygen in a non-tidal stream. In: The use of mathematical models in water pollution control / Ed. A. James. Wiley and Sons, 1976, p. 1—38.
  94. Беск М. В. Model structure identification from experimental data.— In: Theoretical systems ecology. Academic Press inc. 1979, p. 516.
  95. Беск М. В. Maximum likelihood identification applied to DOBOD—ALGAL models for a fresh water stream.— Rep. 7431 (c), October 1974. Lund: Inst. Technol., p. 31—40.
  96. Duffy J., Franklin M. A case study of inviromental system modelling with the group method of data handling: Proc. 1973.— Ohio: State Univ., Columbus, 1973.— 20 p.
  97. Economic trends, N 266.— [S. 1.]: Cantral Stat. Off., Dec. 1975.— 235 p.
  98. Gabor D. Cybernetics and the future of industrial civilization.— J. Cybernetics, 1971, N 1, 2, p. 1—4.
  99. Ivakhnenko A. G. Heuristic self-organization in problems of engineering cybernetics.— Automatica, 1970, 6, p. 207—219.
  100. Ivakhnenko A. G. Polinomial theory of complex systems.— IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, 1971, 1, N 4, p. 364—378.
  101. Ihara Dz. The use of perfected form at GMDH for the world population modelling.— Systems and Control, 1973, N 2, p. 21—36.
  102. Kasperowiz S. K. Modelling complex systems with multynomial networks.— IEEE Region Six Conference US Western Region, Honolulu, Hawaii, May 2—4, 1973, p. 203—207.
  103. Klunth I. Mumme. Cyceve of water quality and a tidal river segment.— J. Automatica, 1979, Jan., p. 45—49.
  104. Lorenz E. N. Predictability and periodicity: a review and extention: The 3d conf. probab. and stat. in atmospheric sci. 1971, June.— J. Atmospheric Sci., 1969, 26, N 6, p. 636—646.
  105. Stone R. Computer models of the economy.— New Sci., 1964, 21, N 381, March, p. 16—24.
  106. Stone R. Towards a model of inflation cambridge, October 1974, p. 30—40.
  107. Streeter H. N. and Phelps E. B. A study of the pollution and natural purification of the Ohio River.— Bulletin, 1925, № 146, p. 25—28.
  108. Tamura H. A discrete dynamic model with distributed transport delays and its hierarchical optimization for preserving stream quality.— IEEE Trans. Syst, Man, Cybern., 1974, 4, p. 424—431.
  109. Tamura H., Kando T. Large-spatial pattern identification of air pollution by computer model of source-receptor matrix and revised.— In: Paper presented at IFAC Simp. Environment System. Kyoto, 1977, p. 167—171.
  110. Tinuer J. The smug and silver trent. New Sci., 1971, 10 June, p. 614—618.
  111. Uesaka Y. Analog perceptron: its becomposition and order.— Trans. Inst. Electron and sommun. Eng. Jap., 1972, D-55, № 8, S. 554—561.
  112. Widrow B. Generalization and information storage in networks of adaline neurons on self-organizing systems. Washington, DC: Spartan books, 1962.— 342 p.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Основные обозначения . . . . .	6
 Г л а в а 1. Самоорганизация моделей по опытным данным . . . . .	7
Метод наименьших квадратов . . . . .	7
Идентификация характеристики экстремального объекта . . . . .	11
Регрессионный анализ и планирование эксперимента . . . . .	22
Идентификация статической характеристики экстремального объекта . . . . .	24
Малая помехоустойчивость метода наименьших квадратов при решении задач идентификации . . . . .	27
Теория множественности моделей . . . . .	28
Принцип внешнего дополнения («геделевский подход») . . . . .	29
Обычно применяемые внешние дополнения . . . . .	33
Дедуктивный, индуктивный и комбинированный подходы к решению задачи моделирования . . . . .	38
Принцип самоорганизации моделей . . . . .	40
Основные виды критериев селекции модели . . . . .	44
Основные виды структур организации перебора моделей с целью выбора единственной модели оптимальной сложности . . . . .	53
Многорядные алгоритмы МГУА . . . . .	56
Глубина минимума критерия селекции как показатель достоверности модели . . . . .	69
 Г л а в а 2. Точечные модели . . . . .	74
Определение терминов «точечная» и «пространственная» модели . . . . .	74
Алгоритм МГУА для выделения гармонического тренда оптимальной сложности по комбинированному критерию «минимум смещения плюс регулярность» . . . . .	75
Критерий баланса ординат для гармонического анализа колебательных процессов с некрatными частотами . . . . .	76
Алгоритмы МГУА для выделения гармонического тренда оптимальной сложности по критерию баланса ординат . . . . .	79
Точечные алгебраические и разностные модели . . . . .	84
Самоорганизация точечных моделей по критерию регулярности . . . . .	89
Самоорганизация точечных моделей по критерию минимума смещения . . . . .	103
Самоорганизация моделей динамики роста сельскохозяйственных культур для управления орошаемым севооборотом по комбинированному критерию . . . . .	123
Системный анализ динамики объекта на основе самоорганизации моделей, когда выходные переменные не указаны . . . . .	139
Самоорганизация точечных моделей по критерию баланса переменных . . . . .	156
Прогноз среднемесячных значений стока рек . . . . .	182



<b>Глава 3. Пространственные модели</b>	<b>186</b>
<b>Моделирование физических полей</b>	<b>186</b>
Разностные аналоги дифференциальных уравнений физических полей	188
Принципы ближнего и дальнего действия	194
Обучение и оптимизация структуры шаблонов	195
Пошаговый прогноз (во времени) и пошаговая экстраполяция (в пространстве)	201
Критерии, используемые для долгосрочных прогнозов	212
Задача моделирования поля диффузии загрязняющих веществ по опытным данным	216
Сходимость пошагового прогноза	224
Задача долгосрочного прогноза процессов и дальней экстраполяции физических полей	232
Физические и нефизические модели	240
Недопустимость применения теории построения физических моделей для нефизических моделей	242
Принцип многоуровневого моделирования на нескольких языках, отличающихся по уровню детализации прогноза	243
Алгебраические и конечно-разностные модели с переменными коэффициентами	268
Применение моделей с переменными коэффициентами для проектируемых (еще не существующих) объектов	274
Список литературы	290

**Алексей Григорьевич Ивахненко**

# **ИНДУКТИВНЫЙ МЕТОД САМООРГАНИЗАЦИИ МОДЕЛЕЙ СЛОЖНЫХ СИСТЕМ**

Утверждено к печати  
ученым советом  
Института кибернетики АН УССР

Редактор Т. С. Мельник  
Художественный редактор И. П. Антонюк  
Технический редактор Г. М. Терезюк  
Корректоры Т. Я. Чорная, Е. А. Михалец

Информ. бланк № 4275

Сдано в набор 81.07.13. Подп. в печ. 82.02.03. БФ 00112. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Обыкн. нов. гарн. Выс. печ. Усл. печ. л. 18,75. Усл. кр.-отт. 18,75. Уч.-изд. л. 19,39. Тираж 2000 экз. Заказ 1-1652. Цена 3 руб. 20 коп.

Издательство «Наукова думка». 252601, Киев, ГСП, ул. Репина, 3.

Отпечатано с матриц головного предприятия РПО «Полиграфкнига», 252057, Киев-57, Довженко, 3 в Киевской книжной типографии научной книги. 252004, Киев-4, Репина, 4. Зак. 2-137.