

НАУКА ВЕЛИЧАЙШИЕ ТЕОРИИ

ГЁДЕЛЬ

17

Теоремы о неполноте



У интуиции есть своя логика

17


DeA

DeAGOSTINI

ГЁДЕЛЬ теоремы о неполноте

ГЕДЕЛЬ

Теоремы о неполноте

ГЁДЕЛЬ

Теоремы о неполноте

**У интуиции есть
своя логика**

Наука. Величайшие теории: выпуск 17: У интуиции есть своя логика. Гёдель. Теоремы о неполноте. / Пер. с исп. — М.: Де Агостини, 2015. — 168 с.

Курт Гёдель изменил понимание математики. Две теоремы о неполноте, сформулированные им в 1931 году, с помощью формальной логики выявили хрупкость фундамента великого здания математики, которое усердно строили со времен Евклида. Научное сообщество было вынуждено признать, что справедливость той или иной гипотезы может лежать за гранью любой рациональной попытки доказать ее, и интуицию нельзя исключить из царства математики. Гёдель, получивший образование в благополучной Вене межвоенного периода, быстро заинтересовался эпистемологией и теорией доказательств. Так же как и его друг Альберт Эйнштейн, он оспаривал догмы современной науки, и точно так же в его жизни присутствовали война и изгнание.

ISSN 2409-0069

© Gustavo Ernesto Piñeiro, 2013 (текст)

© RBA Coleccionables S.A., 2012

© ООО «Де Агостини», 2014–2015

Иллюстрации предоставлены:

Archivo RBA: 35, 38, 41bi, 41bd, 42, 46, 80, 91, 92, 105, 108, 137, 158; Biblioteca Nacional de Austria: 57; College of Wooster, Ohio: 22; Corbis: 95a, 95bd, 125b, 127, 146; Getty Images: 125a, 148; Howcheng: 152; C.J. Mozzochi, Princeton, Nueva Jersey: 75; Museo del Louvre, París: 24; Neue Pinakothek, Múnich: 54; Photoaisa: 67b; Universidad de Viena: 41a, 67ai, 67ad, 95bi; Joan Pejoan.

Все права защищены.

Полное или частичное воспроизведение
без разрешения издателя запрещено.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ	7
ГЛАВА 1. Кризис оснований	15
ГЛАВА 2. Первая теорема Гёделя	51
ГЛАВА 3. Вторая теорема Гёделя	87
ГЛАВА 4. Гёдель и Эйнштейн	119
ГЛАВА 5. Следствия из работы Гёделя	143
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	163
УКАЗАТЕЛЬ	165

Введение

В 1930 году чешский логик Курт Гёдель доказал теорему, сегодня известную как теорема Гёделя о неполноте, которая навсегда изменила понимание математики. По сути, теорема Гёделя утверждает, что если пользоваться точными и достоверными методами рассуждений, методами, исключающими ошибки, то неизбежно будут существовать математические проблемы, которые никогда нельзя будет решить. Всегда найдутся задачи, решение которых будет не под силу этим методам.

До того как Гёдель доказал свою теорему, математики безгранично верили в то, что при достаточном количестве времени, терпения и усилий любая поставленная проблема может быть решена. Например, немецкий математик Давид Гильберт, представивший на Втором Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 году знаменитый список из 23 проблем, в своем выдающемся докладе предположил, что эти проблемы определяют значительную часть математических исследований в течение XX века.

Проблемы Гильберта очень сложны, и было ясно, что для нахождения решений потребуются десятки лет, что в будущем и подтвердилось. Например, ответ на десятую проблему (в современных терминах: может ли определенный тип уравнений, называемых диофантовыми, всегда быть решен с помощью компьютера?) был найден только в 1970 году. Восьмая про-

блема, известная как гипотеза Римана, не решена и сегодня. Однако ни Гильберт, ни кто-либо из его коллег в далеком 1900 году не сомневались, что рано или поздно будут найдены решения всех проблем. Сам Гильберт выразил эту мысль такими словами: «Мы хотим знать, мы будем знать» (*Wir müssen wissen, wir werden wissen*). Их он распорядился написать и в своей эпитафии — возможно, в качестве послания будущим поколениям или как посмертный вызов Гёделю (Гильберт скончался в 1943 году, через 13 лет после того, как Гёдель сформулировал свою теорему).

Итак, что именно представляет собой математическая проблема? Что мы хотим сказать, когда утверждаем, что проблемы Гильберта были сложными? Может ли считаться сложной задача: «сосчитайте сумму всех чисел от единицы до миллиона»?

Большинство проблем, которые изучает математическая наука, сформулированы как гипотезы. Гипотеза — это утверждение, которое кажется истинным, но его истинность еще не доказана. Знаменитый пример — так называемая гипотеза Гольдбаха, сформулированная прусским математиком Кристианом Гольдбахом в 1742 году:

«Любое четное число, большее двух, может быть выражено в виде суммы двух простых чисел».

Простые числа — это те, которые делятся только на единицу и на само себя; число 1 по техническим причинам не считается простым. Проверим, например, что эта гипотеза справедлива для четных чисел, меньших 12:

$$4 = 2 + 2$$

$$6 = 3 + 3$$

$$8 = 3 + 5$$

$$10 = 3 + 7$$

$$12 = 5 + 7$$

В гипотезе говорится о четных числах больше двух, поэтому само число 2 оказалось вне списка. Если бы нашелся

хотя бы один пример, для которого гипотеза не выполнялась бы, то есть контрпример — четное число, которое нельзя записать в виде суммы двух простых чисел, — то гипотеза оказалась бы ложной. Такого контрпримера еще не нашли. На момент написания этих строк с помощью компьютеров было выяснено, что все четные числа до 10^{18} (единица с 18 нулями) могут быть записаны в виде суммы двух простых чисел.

Но как можно подтвердить, что гипотеза истинна? Достаточно ли того, что она проверена для четных чисел, меньших 10^{18} , для признания ее истинности? Нет, потому что это может быть неверно для числа, непосредственно следующего за 10^{18} (то есть $10^{18} + 2$). А если мы проверим это для $10^{18} + 2$, достаточно ли этого? Нет, потому что это может быть неверно для $10^{18} + 4$. И так далее, неважно, сколько эмпирических проверок мы сделаем, мы все равно не сможем проверить все четные числа, поскольку они никогда не заканчиваются и всегда есть бесконечное число новых четных чисел, среди которых может найтись контрпример.

Единственный способ проверить истинность гипотезы — это найти доказательство, то есть такие рассуждения, которые демонстрируют справедливость утверждения сразу для всех возможных случаев. Рассмотрим пример такого доказательства (естественно, мы не можем привести доказательство гипотезы Гольдбаха, поскольку оно до сих пор не найдено). Докажем утверждение: «Все простые числа, большие двух, являются нечетными». Это утверждение затрагивает бесконечное число чисел; однако мы можем охватить их все одним и тем же рассуждением.

Все простые числа, большие двух, являются нечетными. Доказательство: если простое число, большее двух, четно, то оно делится на 2. Но это невозможно, поскольку оно простое, то есть может делиться только на единицу и само на себя. Оно не может быть кратным двум, то есть четным; следовательно, оно нечетное.

Мы можем понимать доказательство как рассуждение, которое потенциально включает в себя бесконечное число част-

ных случаев. Все сложные математические проблемы потенциально включают в себя бесконечное количество объектов, будь то числа, уравнения или другие объекты. По этой причине вычисление суммы всех чисел от единицы до миллиона, при всей своей трудоемкости, не является сложной проблемой в том смысле, который придают этому слову математики, поскольку вычисление предполагает вполне определенное количество операций, и их можно совершить за некоторый промежуток времени, имеющий начало и конец.

Решение проблемы, сформулированной в гипотезе Гольдбаха (или любой другой гипотезе), состоит в том, чтобы найти опровергающий контрпример или доказательство, подтверждающее ее истинность.

Если предложено рассуждение, предположительно доказывающее гипотезу, как мы убедимся в том, что оно верно? Если кто-то не убежден в справедливости рассуждения, каковы критерии, позволяющие устранить его сомнения? Прежде чем ответить на эти вопросы, рассмотрим еще один исторический пример.

В 1909 году французский математик Эмиль Борель дал определение понятию нормального числа. Нет необходимости вникать во все сложности этого определения, достаточно сказать, что число нормальное, когда после запятой его знаки ведут себя так, как если бы выбирались наугад, и это происходит при записи в десятичном (как это принято), двоичном, шестнадцатеричном или любом другом виде. Например, ясно, что $0,101010101\dots$ не является нормальным числом (его знаки после запятой ведут себя слишком закономерно для того, чтобы быть похожими на случайные). И напротив, считается, что $\pi = 3,1415926\dots$ и $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$ являются нормальными числами, хотя эта гипотеза еще не доказана и не опровергнута.

Борель, помимо того что дал определение нормальным числам, доказал: их количество бесконечно, то есть ряд нормальных чисел никогда не заканчивается. Однако в его доказательстве были использованы очень косвенные методы; можно сказать, он также доказал, что этого бесконечного количества чисел не может не существовать. Главное в этой истории

то, что Борель, как и никто другой, не был способен в 1909 году привести ни одного примера нормального числа. Некоторые числа (включая приведенные выше) подходили под определение нормальных, но нельзя было утверждать это точно. То есть Борель доказал, что существует бесконечное количество чисел определенного типа, но не смог привести ни одного из них. Допустима ли такая ситуация? Можем ли мы вести разговор о числах, ни имея ни одного их примера? В начале XX века многие математики начали выказывать недоверие доказательствам, включавшим ряды, образованные бесконечным количеством чисел (такими как ряд нормальных чисел). Они сомневались, допустимо ли работать с ними, пользуясь теми же правилами, что и для конечных рядов (то есть не расширяющихся до неопределенности). Это недоверие было подкреплено тем, что в 1902 году британский философ и математик Бертран Рассел нашел логические противоречия, связанные с рассуждениями такого типа.

В начале XX века вопрос о том, как определить справедливость математического рассуждения, был совершенно неясен. Среди математиков бурлили споры и дискуссии. И только почти через четверть века, в 1930 году, ученые пришли к соглашению о четких и конкретных критериях, которым должно соответствовать доказательство, чтобы его приняли как верное. Эти критерии, установленные объективно, состояли в том, чтобы рассуждения были проверены компьютером — беспристрастным судьей, который ограничивается вычислениями, не оперируя лингвистическими конструкциями. Естественно, это современный вариант соглашения, раньше он формулировался по-другому, поскольку в 1930 году еще не было компьютеров.

Но именно в том месте и в то время, когда математики собрались, чтобы прийти к согласию о надежных методах рассуждений, Курт Гёдель поднял руку и попросил слова, чтобы рассказать о своей теореме о неполноте: если даже придерживаться методов, исключающих ошибку, всегда будут существовать истинные гипотезы, которые нельзя доказать, и математические проблемы, которые невозможно решить с помощью самых надежных методов. Мы можем иметь потенциальную

способность решать проблемы (без уверенности в том, что решение правильное), но никогда не сможем одновременно иметь уверенность в своих методах и возможность решить все проблемы.

Гёдель представил две теоремы о неполноте, первая из которых также известна как теорема Гёделя, а вторая получила название второй теоремы Гёделя.

Эта книга — об истории открытия Гёделя и его следствиях для философии математики. В главе 1 описаны исторический процесс, приведший к полемике о методах доказательства в математике, и роль, которую сыграла в этой полемике теорема Гёделя. В главе 2 приведены сама теорема и объяснение ее доказательства. Но как на том историческом этапе, когда почти все методы математического доказательства были поставлены под сомнение, Гёделю удалось убедить всех в своей правоте? Ответ на этот вопрос проанализирован в главе 3, в то время как глава 4 посвящена другим работам математика, среди которых — исследования в теории относительности. В последней главе обсуждаются некоторые философские следствия теорем Гёделя, связанные с природой математической истины.

- 1906** Курт Гёдель родился 28 апреля в Брно, в Австро-Венгерской империи (современная Чешская Республика), в семье Рудольфа Гёделя и Марианны Хандшу. У него был только один старший брат, которого, как и отца, звали Рудольфом.
- 1912** Гёдель перенес приступ ревматической лихорадки. Эта болезнь стала катализатором его ипохондрии как доминирующей черты личности.
- 1923** Поступил в Венский университет, чтобы изучать теоретическую физику, однако, благодаря влиянию профессора Филиппа Фуртвенглера, занялся математикой.
- 1926** Приглашен в Венский кружок — группу интеллектуалов, основанную в 1922 году немецким философом Морицем Шликом для обсуждения науки и эпистемологии. Здесь Гёдель познакомился с дебатами вокруг теории доказательства и решил посвятить себя математической логике.
- 1929** Завершил докторскую диссертацию, которую представил в следующем году в Венском университете.
- 1930** С 5 по 7 сентября в Кёнигсберге проходил конгресс, посвященный теории доказательства и связанным с ней темам. На пленарном заседании 7 сентября Гёдель впервые провозгласил свою теорему о неполноте.
- 1931** Опубликована статья ученого «О формально неразрешимых предложениях Principia Mathematica у родственных систем», содержащая формулировку и доказательство его теоремы о неполноте.
- 1933** Назначен приват-доцентом Венского университета. Совершил серию поездок в США, где читал различные курсы и лекции.
- 1938** Женился на Адель Поркерт, разведенной танцовщице, на шесть лет старше его.
- 1939** Под давлением нацистов, пришедших к власти в Австрии, бежал с супругой США. В Европу они так больше и не вернулись.
- 1940** Присоединился к Институту перспективных исследований в Принстоне, где началась его дружба с Альбертом Эйнштейном.
- 1951** Прочитал Гиббсовскую лекцию, в которой проанализировал некоторые возможные философские следствия из своей теоремы о неполноте.
- 1978** Курт Гёдель скончался в Принстонской больнице вечером 14 января.

Кризис оснований

В начале XX столетия математика переживала один из самых глубоких кризисов. Первая треть века была наполнена спорами о том, какие методы рассуждения считать подходящими и нужно ли допускать существование бесконечности. Курту Гёделю было предназначено решительно проявить себя в данной ситуации. Но как назрел этот спор? Почему математики начали сомневаться в своей науке после более чем 2500 лет ее развития?

Все люди, даже самые великие, когда-то были детьми. Это прописная истина, но все же любопытно думать, что был день, когда Моцарт не знал даже названий музыкальных нот, было время, когда Леонардо да Винчи еще не смешивал краски... и период, когда Курт Гёдель не начал изучать логику. Пусть знания будущего ученого тогда были невелики, но стремление к интеллектуальному поиску было присуще ему с самого детства. Гёдель рос любопытным ребенком и задавал много вопросов обо всем, что видел вокруг, поэтому в семье его называли герр Варум, что в переводе с немецкого означает «господин Почему».

Его отец, Рудольф, родился в Вене и рано оставил учебу, занявшись коммерцией, в которой добился больших успехов. В 1906 году, когда родился Курт, Рудольф Гёдель был управляющим и совладельцем одной из самых крупных текстильных фабрик в Брюнне — важном промышленном центре Австро-Венгерской империи, который славился своим текстильным производством.

У Рудольфа было два сына: старший, тоже Рудольф, и Курт. Ни один из них не пошел по его стопам. Рудольф-младший стал известным врачом и руководителем клиники в Вене. Курт, в свою очередь, считается самым влиятельным логиком современности (вторым после Аристотеля) и одним из знаменитых мыслителей XX века. Их мать Марианна, немка по националь-

ности, изучала литературу Австро-Венгрии и Франции. В отличие от супруга она была тонкой, художественно восприимчивой натурой, и, возможно, поэтому стеснительный и замкнутый Курт был очень привязан к ней. Многие биографы говорят, что когда матери не было дома, мальчик чувствовал себя немного потерянным. Стеснительность и погруженность в себя сохранились в нем на всю жизнь. Гёдель никогда не был душой компании, никто не хохотал над его шутками, но ему это и не было нужно. Самые яркие умы XX века обратили на него внимание благодаря не его шуткам, но идеям, которые изменили видение математики и, возможно, всей науки. В своей жизни он дружил с немногими, но очень интересными людьми — одним из самых близких его друзей стал Альберт Эйнштейн.

В школе Курт был блестящим учеником. Естественно, он преуспевал в математике и языках. Даже сегодня многие из тех, кто живет в Восточной Европе, хотя бы знают немного языки своих соседей: чешский, немецкий, несколько слов по-русски и так далее. Гёдель, считавший немецкий язык родным, не был исключением, но даже в этой многоязычной среде его страсть и способность к языкам были выдающимися. С юности он в совершенстве говорил и писал по-английски и по-французски, а в последующие годы в его библиотеке всегда было большое количество словарей и грамматик различных языков.

Когда Гёделю было шесть лет, он перенес ревматическую лихорадку, из-за которой несколько дней провел в постели. Физически он полностью выздоровел, однако через некоторое время природное любопытство побудило его почитать о перенесенной болезни, и мальчик узнал, что она может вызывать в качестве осложнения хроническую слабость сердца. Гёдель всю свою жизнь был убежден в том, что это случилось и с ним, хотя врачи неоднократно уверяли его в обратном. Более того, без каких-либо рациональных оснований всю оставшуюся жизнь он был уверен, что если его сердце охладится, то он умрет, и даже в самые жаркие дни ученый ходил в теплой одежде.

Через много лет брат Рудольф говорил, что этот кризис стал причиной глубокой ипохондрии — одной из самых заметных черт личности Курта. Возможно, именно страх перед болезнями всю жизнь вызывал у Гёделя многочисленные недомогания, из-за которых он неделями находился в угнетённом состоянии и вынужден был прерывать любую интеллектуальную деятельность.

В 1912 году, когда шестилетний Курт, ещё ничего не знавший о логике, переживал первую серьёзную болезнь, математика как наука также находилась в кризисе. И хотя на тот момент Гёдель ещё даже не подозревал об этом, ему было предназначено решительно проявить себя в решении этой проблемы.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ АРИСТОТЕЛЯ

Кризис, в котором находилась математика в 1912 году, известный сегодня как кризис оснований, начался в 1902-м, за четыре года до рождения Гёделя, с очень короткого письма Бертрانا Рассела своему коллеге немцу Готлобу Фреге.

Бесконечность всегда в возможности, а не в действительности.

АРИСТОТЕЛЬ, «МЕТАФИЗИКА»

Если не знать исторического контекста, невозможно понять, как письмо, уместившееся на одной странице, развязало спор, который длился потом более 25 лет. На самом деле письмо Рассела к Фреге было лишь камешком, который вызвал сход лавины, ждавшей в течение десятилетий. Исторический процесс, который привел к этому моменту, начался с эпохи Аристотеля, с появления понятия бесконечности — одного из самых странных, сложных и чудесных, созданных человеческой мыслью.

Что такое бесконечность? Что мы хотим сказать, когда утверждаем, что последовательность 1, 2, 3, 4, 5... бесконечна?

В IV веке до н. э. Аристотель утверждал, что мы можем ответить на этот вопрос двумя разными способами.

Чтобы представить себе первый способ, вообразим народ, которому было дано задание, передаваемое из поколения в поколение, — считать и записывать все числа последовательности 1, 2, 3, 4, 5... Смогут ли они когда-нибудь завершить эту работу? Нет, даже если посвятят этому заданию годы, десятилетия или тысячи миллионов веков. Каким бы ни было число, до которого дойдет счет, всегда можно дописать еще одно. Если они дошли до 100, есть 101, если дошли до 1000 — есть 1001, если дошли до квинтиллиона — есть квинтиллион плюс один. Они никогда не достигнут последнего числа, просто потому, что его не существует.

Однако заметим, что записи этого гипотетического народа никогда не будут содержать бесконечного количества чисел. Сначала они составят несколько сотен, потом — несколько тысяч, еще позже — несколько миллионов и триллионов чисел, но их количество всегда будет конечным (поскольку при наличии достаточного времени записанные числа можно будет полностью просмотреть от начала до конца). Бесконечность последовательности проявляется в непостижимой характеристике: она никогда не заканчивается, это будущее недостижимое свойство, а не черта, присутствующая в настоящем. Такой способ рассмотрения бесконечности Аристотель назвал потенциальной бесконечностью, или бесконечностью в возможности.

Второй способ представления бесконечности состоит в том, чтобы рассматривать ее как особенность, присутствующую в действительности. В этом случае мы должны думать не о народе, записывающем числа из поколения в поколение, а о сверхъестественном существе, которое записало их все — абсолютно все — в почти божественном акте доброй воли (при этом неправильно говорить, что оно записало их от начала до конца, потому что конца нет). Очень сложно, если не невозможно, постичь это. Способны ли мы представить себе нечто, что присутствует целиком, но никогда, абсолютно никогда не заканчивается? Невозможно показать реальные ситуации, в которых

появляется бесконечность. Вся жизнь Вселенной, начиная с момента Большого взрыва, имеет только потенциально бесконечное количество секунд. Согласно действующим теориям, Вселенная в целом включает конечное количество субатомных частиц. То ли потому что бесконечность действительно невообразима, то ли потому что ее не существует в физической реальности, то ли по другим философским причинам Аристотель утверждал: бесконечности в действительности (то есть актуальной бесконечности) не существует.

Существует понятие, искажающее и обесценивающее другие.
Речь идет не о Зле, чьи владения ограничены этикой;
речь идет о бесконечности.

ХОРХЕ ЛУИС БОРХЕС. «АВАТАРЫ ЧЕРЕПАХИ», СБОРНИК «ОБСУЖДЕНИЕ» (1932)

В течение столетий, до самого XIX века, этот отказ от актуальной бесконечности единодушно поддерживался западными философскими и математическими догмами. В Средние века схоластическая мысль усилила этот отказ, добавив к нему религиозное измерение. Актуальная (или категорематическая) бесконечность, согласно схоластике, приписывается исключительно Божеству, и претендовать на то, что человеческий ум способен охватить или понять ее целиком, — ересь.

Приведем три случая, когда проявлялся отказ от актуальной бесконечности. Первый краток и ужасен: в 1600 году Джордано Бруно был приговорен к смерти на костре в том числе из-за утверждения в одной из своих работ, что Вселенная содержит бесконечное количество миров. Второй пример: в 1638 году Галилео Галилей выдвинул математический аргумент, который, согласно видению того времени, доказывал, что актуальная бесконечность — само по себе противоречивое понятие. В рассуждении, известном как парадокс Галилея, говорится так: задумаемся еще раз о последовательности 1, 2, 3, 4, 5... В ней содержится другая последовательность, образованная

БЕСКОНЕЧНОСТЬ ЕВКЛИДА

В III веке до н. э. Евклид Александрийский написал «Начала», самую влиятельную математическую книгу всех времен (настолько, что вплоть до начала XIX века ее использовали как учебник в некоторых европейских университетах). Эта работа состоит из 13 книг, из них седьмая, восьмая и девятая посвящены арифметике. В суждении 20 девятой книги провозглашается, что существует бесконечное число простых чисел. Интересно отметить, как выражено это утверждение: «Существует больше простых чисел, чем любое предложенное [конечное] количество простых чисел». То есть в утверждении Евклида речь идет о потенциальной, а не об актуальной бесконечности. Он не говорит о том, что «существует бесконечное количество простых чисел», но «если задано любое конечное количество простых чисел, всегда существует на одно больше».



Статуя Евклида в Музее естественной истории Оксфордского университета.

квадратными числами, то есть теми, которые получаются умножением числа само на себя: 1, 4, 9, 16, 25...

На основе аристотелевского принципа о том, что целое больше любой его части, мы должны сделать вывод, что чисел больше, чем квадратных чисел, поскольку они составляют лишь часть.

Но, говорил Галилей, если бы последовательности 1, 2, 3, 4, 5... и 1, 4, 9, 16, 25... были бесконечны в действительности, было бы возможно идеально установить пары между ними обими. Числу 1 соответствовало бы число 1, числу 2—4, числу 3—9 и так далее.

1 ... 1
2 ... 4
3 ... 9
4 ... 16
5 ... 25

Каждое число первой последовательности точно соответствовало бы другому числу второй, при этом не было бы ни недостатка, ни избытка ни с одной из сторон. Если можно идеально установить пары, это означает, что существует столько же квадратных чисел, сколько и чисел всего, а это противоречит сказанному: часть была бы равна целому, а не меньше его. Актуальная бесконечность, заключил Галилей, это абсурд.

Почти через 250 лет немецкий математик Георг Кантор (1845–1918) столкнулся с той же самой проблемой, но его вывод был абсолютно противоположным. Кантор решил, что аристотелевский принцип *omne totum est maius sua parte* — «целое больше его частей» — нужно отбросить, когда речь идет о бесконечности.

Третий пример — отрывок из письма 1831 года немецкого математика Карла Фридриха Гаусса (1777–1855):

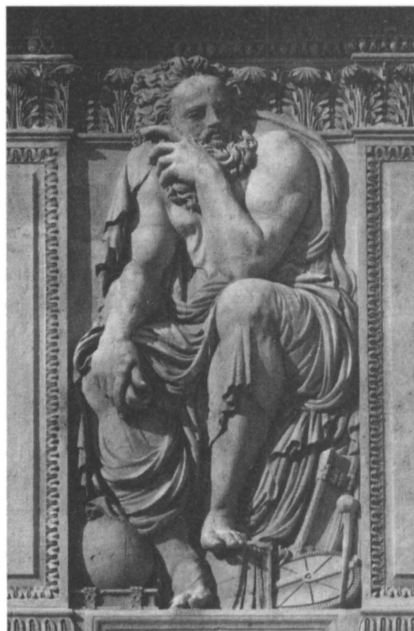
«Я протестую против употребления бесконечной величины как чего-то завершенного, что в математике никогда недопустимо. Бесконечность не нужно понимать буквально, когда речь идет собственно о пределе, к которому сколь угодно близко приближаются определенные отношения, когда другие принимаются неограниченно возрастающими».

Гаусс говорил, что бесконечность — это только величина (всегда конечная), которой позволено расти без ограничений, и ее нельзя понимать как нечто завершенное. Снова мы наблюдаем отказ от актуальной бесконечности.

Это только три примера из многих, о которых можно было бы упомянуть. Однако всего через 40 лет после этого письма Георг Кантор вынужден был ввести в математику и фи-

АРХИМЕД И БЕСКОНЕЧНОСТЬ

Сочинение Архимеда «Послание к Эратосфену о методе», или «Метод механических теорем», считалось утерянным в веках. По различным упоминаниям было известно, что в нем описывались физические рассуждения, которые позволили предположить геометрические теоремы, затем доказанные со всей логической строгостью в других книгах автора. Однако точное содержание работы не было известно до 1906 года, когда, к всеобщему удивлению, совершенно случайно в Стамбуле была обнаружена ее копия. Это был палимпсест, то есть рукопись, нанесенная на пергамент поверх другого текста. К счастью, первоначальный слой стерли не полностью, и оригинальную работу частично удалось восстановить. Процесс возобновился в начале XXI века, когда группе экспертов, располагающих современными приборами для



Архимед. Работа Жана Гужона. Фасад Лувра, Париж.

освещения и анализа изображений, удалось продвинуться в восстановлении «Метода...». Часть их открытий означает, что Архимед работал с актуальной бесконечностью. Эта история рассказана в детективе Ревьера Нетца и Уильяма Ноэля «Кодекс Архимеда». Согласно полученным данным, чтобы сравнить объем двух тел, Архимед представлял их разрезанными на бесконечное количество полосок бесконечно малой ширины и делал вывод о том, что оба тела равны, если можно установить пары между полосками, образующими эти тела. Это предполагает не только работу с актуальной бесконечностью, но и допущение сравнения между двумя бесконечностями посредством установления пар между их компонентами, что сделал Кантор в конце XIX века. Если эти открытия подтвердятся, придется переписать часть истории бесконечности и признать, что Архимед ранее Кантора использовал актуальную бесконечность.

лософию монстра, много раз отвергнутого, — актуальную бесконечность.

БЕСКОНЕЧНОСТЬ КАНТОРА

С 1867 по 1869 год Кантор в Берлине проводил свои первые исследования под руководством Леопольда Кронекера (спустя несколько лет они стали врагами). В то время Берлин был одним из самых мощных математических центров в мире (наряду с Гёттингеном и Парижем). Первые исследовательские работы Кантора не слишком впечатлили его преподавателей, которые даже считали, что он никогда не станет выдающимся математиком. В 1870 году Кантору пришлось переехать из центра науки, Берлина, на периферию. Молодой и неизвестный ученый начал собственные исследования в Галльском университете.

Когда математик проводит исследование, его цель — решить определенную проблему. Даже сегодня, если спросить у математика, над чем он работает, его ответ наверняка будет состоять в формулировке задачи, которую он пытается решить. Чтобы понять задачу, занимавшую Кантора в 1870 году, нам нужно кратко рассказать о рядах Фурье.

В начале XIX века французский математик Жозеф Фурье разработал метод, позволяющий разложить любую периодическую функцию на сумму определенных элементарных функций (каждая из которых меняет амплитуду, частоту или фазу исходной функции). Фурье успешно применил его для изучения таких волновых явлений, как распространение тепла или колебания пружины. Так как эти суммы обычно затрагивают бесконечное (теоретически) число функций, а в математике результат сложения бесконечного числа величин называют рядом, этот метод получил название рядов Фурье. Сегодня он является важным инструментом во многих отраслях науки, таких как физика и инженерное дело.

В 1860-х годах, также в Галле, немецкий математик Эдуард Гейне работал над проблемой определения того, всегда ли раз-

РЯДЫ ФУРЬЕ

Французский математик Жан Батист Жозеф Фурье (1768–1830) в начале XIX века установил, что любая периодическая функция — это результат сложения бесконечного числа синусоидальных волн. На рисунке 1 представлена периодическая функция со скачками, или разрывами, во всех целых нечетных числах (положительных и отрицательных), в то время как на рисунке 2 показана основная синусоидальная волна.

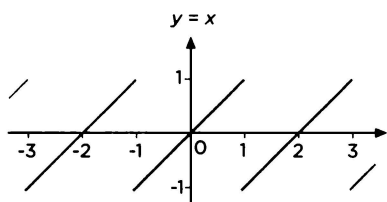


РИС. 1

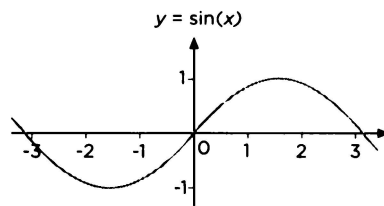


РИС. 2

Функция на рисунке 1 — это результат сложения бесконечного количества волн, изменяющих различными способами основную волну на рисунке 2. Например, мы можем сжать или растянуть ее вертикально или горизонтально. На рисунках 3 и 4 показано, соответственно, вертикальное растяжение волны с рисунка 2 и ее сжатие.

ложение периодической функции на сумму элементарных волн является единственным.

Вопрос о единственности разложения часто встречается в математике. Возьмем натуральные числа (то есть образующие вышеупомянутую последовательность 1, 2, 3, 4...). Вспомним, что простые числа — это числа, которые делятся только на единицу и на самих себя (например, 2, 3, 5 и 11 — простые числа, в то время как 9 таковым не является, поскольку делится на 3).

Уже много тысячелетий известно (об этом знал и Евклид в III веке до н. э.), что любое натуральное число, большее 1,

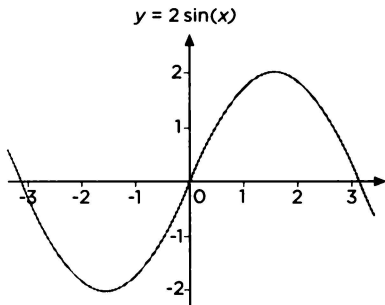


РИС. 3

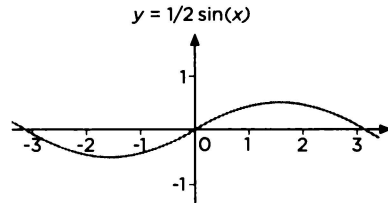


РИС. 4

На рисунке 5 показано горизонтальное сжатие волны с рисунка 2. Волны также могут перемещаться по вертикали или горизонтали: на рисунке 6 показана волна с рисунка 2, смещенная горизонтально.

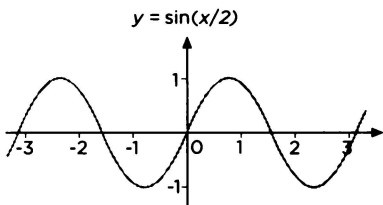


РИС. 5

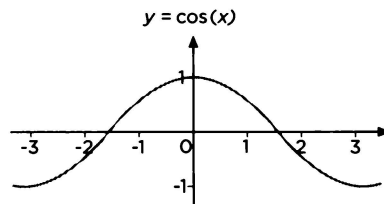


РИС. 6

либо простое, либо может быть записано как произведение простых. Единица — особый случай, который по техническим причинам рассматривается отдельно: это число не является ни простым, ни произведением простых, хотя причины этого отделения неважны для нашего обсуждения. Например: $12 = 2 \times 2 \times 3$; $9 = 3 \times 3$; $15 = 3 \times 5$. Есть ли другой способ записать число 12 как произведение простых чисел? Или вариант $2 \times 2 \times 3$ единственно возможный? Ответ заключается в том, что, не учитывая таких тривиальных вариаций, как изменение порядка чисел или группировки 2×2 в виде 2^2 , единственная

форма записи 12 в виде произведения простых чисел — это $2 \times 2 \times 3$, и это верно для всех остальных натуральных чисел.

Разложение на простые числа всегда единственное, и эта единственность создает более сильную связь между числами и их простыми множителями. Благодаря этому свойства разложения (или факторизации) на простые числа становятся сильнее.

Эдуард Гейне задался вопросом, существует ли подобная связь между периодической функцией и элементарными волнами. Единственное ли это разложение, как это установлено для разложения на простые числа? В 1860-х годах Гейне удалось доказать, что некоторые типы периодических функций (например, не имеющие скачков, то есть непрерывные) можно разложить на элементарные волны единственным образом. Однако он не нашел общего доказательства для всех возможных ситуаций, а также не смог доказать единственности в случае, когда в каждом периоде у функции бесконечное (теоретически) число разрывов. Так что когда Кантор приехал в Галле в 1870 году, Гейне предложил ему поработать над этим вопросом: всегда ли периодическую функцию можно разложить единственным образом, даже если количество разрывов в каждом периоде может неограниченно расти?

Кантор принялся изучать проблему и в 1871 году получил первый результат: разложение периодической функции является единственным, даже когда количество разрывов неограниченно растет, если только эти скачки распределяются определенным образом. То есть для гарантии единственности точки появления скачков должны удовлетворять некоторым специфическим условиям. Но ученый столкнулся со сложностями при выражении этих требований точно и элегантно. Он явно имел интуитивную догадку о том, какие особенности хотел выразить, но у него не получалось ясно сформулировать это.

В 1872 и 1873 годах Кантор постепенно понял, что для четкой формулировки условий следует рассматривать точки разрывов как множества, бесконечные в действительности. Более того, требовалось сравнить между собой различные бесконечные множества, подобно тому как 250 лет назад Галилей срав-

нил натуральные числа с квадратными (это, в свою очередь, привело к отбрасыванию аристотелевского принципа о том, что целое больше его частей). Кантор также открыл, что такое сравнение приводит к выводу о существовании бесконечных множеств, больших, чем другие бесконечные множества.

Эти идеи были настолько революционными и так противоречили тысячелетиям исследований, что Кантору понадобилось целых десять лет на то, чтобы полностью принять их и признать: в математику необходимо ввести актуальную бесконечность. В конце концов в 1883 году он написал длинную статью под названием «Основы общего учения о многообразиях. Математически-философский опыт учения о бесконечном», в которой не только выступал за введение актуальной бесконечности, но и утверждал, что это абсолютно неизбежно. Кантор начал свою статью, почти прося прощения за это решение:

«Изложение моих исследований об изучении множеств достигло того пункта, где развитие его становится зависимым от расширения понятия целого действительного числа за существующие до сих пор границы, и оказывается, что расширение это совершается по такому направлению, в котором, насколько я знаю, никто до сих пор его не искал.

Это расширение понятия числа носит только принудительный характер, и без него я вряд ли смогу сделать свободно хотя бы малейший шаг вперед в учении о множествах; пусть в этом обстоятельстве увидят оправдание или, если необходимо, извинение того, что я ввожу в свое рассмотрение, по-видимому, чужеродные идеи».

Теория множеств, которую упоминает Кантор, была его способом обозначения изучения бесконечных совокупностей как отдельных объектов. Он предложил сделать эту теорию основой математики. Числа, операции с ними и все математические понятия могут быть определены, согласно Кантору, на базе понятий теории множеств.

Множество, согласно определению Кантора, это «собрание целиком объектов действительности или нашей мысли». Например, числа 1, 2, 3, 4, 5, ... мы можем объединить в совокупность, которую назовем множеством натуральных чисел. Числа — это элементы, или члены этой совокупности, и множество становится отдельным объектом, доступным для изучения. Мы можем также задумать множество, образованное только числом один, или днями недели, или людьми, родившимися 20 июля 1899 года. Следовательно, теория множеств — это изучение взаимных свойств и отношений множеств, или совокупностей.

Теория [бесконечных] множеств — это область, в которой ничто не очевидно; истинные высказывания ее часто парадоксальны, а предполагаемые высказывания ложны.

Феликс Хаусдорф, немецкий математик, 1914 год

Предложение Кантора заключалось в том, чтобы определить числа и операции с ними на основе множеств. Как это сделать? Например, число 0 может быть определено как количество элементов пустого множества (то есть множества, у которого нет членов). Число 1 может быть определено как количество элементов любого множества, в котором выполняется свойство «во множестве есть некоторый элемент, и, кроме того, если x и y — элементы множества, то $x = y$ ».

С другой стороны, в теории множеств существует операция под названием объединение. Если задано два множества, объединение состоит в том, чтобы собрать в новом множестве элементы их обоих. Например, объединение множества, содержащего в качестве элемента город Париж, и множества, содержащего город Рим, — это множество, содержащее оба города одновременно. Сумму чисел можно определить, согласно предложению Кантора, на основе этой операции теории множеств. Если n — это количество элементов одного множества, а m — количество элементов другого множества (которое не содержит общих элементов с первым), то $n + m$ может быть опре-

делено как количество элементов результата объединения этих двух множеств.

Как можно было ожидать и, вероятно, как предвидел сам Кантор, теория множеств вызвала большое сопротивление. Его бывший учитель Леопольд Кронекер назвал Кантора совратителем молодежи и воспользовался своим немалым влиянием на немецкие научные журналы, чтобы те не публиковали его работы.

Однако со временем теория множеств и актуальная бесконечность получили признание. Почему это произошло? Может быть, Кантору удалось убедить Кронекера? Чтобы ответить на эти вопросы, стоит вспомнить утверждение Планка: «Новая научная истина побеждает не потому, что ее противники убеждаются в ее правильности и прозревают, а скорее потому, что ее противники постепенно вымирают, а новое поколение усваивает эту истину буквально с молоком матери».

Когда Планк писал эти слова, он думал о квантовой механике, но этот принцип можно применить и к теории множеств. В конце XIX века новое поколение математиков, среди которых был Давид Гильберт, начало видеть в теории Кантора важный вклад в науку. Обычно молодежь расположена разрушать традиции, так что, возможно, новое поколение было готово разбить аристотелевское видение бесконечности.

В 1890-м, за год до смерти Кронекера, Кантор был выбран председателем недавно созданного Немецкого математического общества, и его идея считать теорию множеств базой и основанием математики начинала набирать сторонников. Одним из них был немецкий логик Готлоб Фреге.

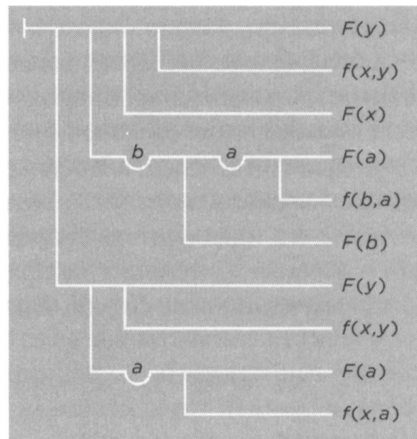
ФРЕГЕ И РАССЕЛ

Готлоб Фреге родился в 1848 году, то есть он принадлежал к тому же поколению, что и Кантор. Фреге принял теорию множеств с самого начала и стал одним из защитников идеи о том, что эта теория должна стать базой для остальной математики.

Хотя Фреге был согласен с Кантором в целом, у него было много формальных критических замечаний. По мнению Фреге, статьи Кантора были написаны недостаточно научным языком, без четкого разграничения аксиом (утверждений, которые принимаются без доказательств) и теорем (утверждений, которые доказываются на основе аксиом). Кантор все время взывал к интуиции читателя, что Фреге критиковал и называл психологизмом. Математика, по его мнению, должна пользоваться строгим языком со специально созданными символами. Все рассуждения должны быть выражены ясно, лишены двусмысленностей и взывания к интуиции. Фреге посвятил почти всю свою жизнь развитию этой идеи. В одной из своих основополагающих работ, «Исчисление понятий, или подражающий арифметике формальный язык чистого мышления» (1879), Фреге объясняет свой символический язык, очень отличающийся

КОНЦЕПТОГРАФИЯ

Немецкое слово *Begriffsschrift*, которое Готлоб Фреге использовал для обозначения символической структуры, созданной им для логики и математики, обычно переводится как концептография, что дословно означает «рисунок концептов». Как мы можем увидеть на изображении справа, символизм Фреге приближается скорее к линейному рисунку, чем к написанному тексту. Здесь показана теорема 71 из его книги «Исчисление понятий...», и ее перевод следующий: f — это процедура, а F — свойство, которое сохраняется при применении процедуры f . Если x обладает свойством, а y получен из x посредством применения процедуры f , то y также обладает этим свойством.



от нашего обычного письма (он похож скорее на линейный рисунок, чем на текст). Это вызывало сложности в понимании и у современников ученого, и даже сегодня. Возможно, Фреге намеренно хотел дистанцировать символическую запись от естественного языка, но стратегически это было ошибкой, поскольку затруднило понимание работы широкой аудиторией.

В 1893 году Фреге опубликовал первый том «Основных законов арифметики», первую часть работы всей своей жизни, в которой изложил строгое определение натуральных чисел на основе логики и теории множеств. Почти через десять лет, 16 июня 1902 года (за четыре года до рождения Гёделя), когда Фреге уже отправил в печать второй том «Основных законов...», он получил письмо от Бертрانا Рассела, отправленное из Фрайдиз Хилл, Хаслмир (Великобритания). Письмо занимало одну страницу, однако этого было достаточно для того, чтобы развязать кризис оснований. Рассел начал с похвалы работы Фреге и выразил свою абсолютную поддержку автору. «Но я нашел небольшую сложность», — пишет Рассел.

Этой небольшой сложностью была одна из аксиом, на которых Фреге основывал теорию множеств, — так называемая аксиома выделения. В ней говорится, что каждому свойству назначается множество (множество объектов, которые обладают этим свойством). Например, свойству «быть четным числом» соответствует множество, образованное всеми четными числами; свойству «быть планетой Солнечной системы» соответствует множество всех планет Солнечной системы, и так далее. На первый взгляд эта аксиома кажется абсолютно невинным утверждением, неспособным породить какую-либо проблему. Однако Рассел задал свойство «быть множеством, которое не является членом самого себя».

Поразмышляем об этой идее.

Множества образованы членами (также существует пустое множество, не имеющее членов, но мы можем оставить его за рамками нашего анализа). Например, множество планет Солнечной системы состоит из (насколько мы знаем) восьми членов: Меркурия, Венеры, Земли, Марса, Юпитера, Сатурна, Урана и Нептуна. Объект «множество планет Солнечной

системы» — это абстрактная сущность, существующая только как идея и собирающая под одним названием восемь планет. Каждый из членов этого множества — наоборот, конкретная планета, а не абстракция. Множество планет Солнечной системы не входит в список самих членов: оно не является членом самого себя. Рассел выражал эту идею следующим образом: «Множество, образованное лошадьми, — не лошадь» (мы можем сесть на лошадь, но не на абстрактную сущность). Но некоторые множества действительно являются членами самих себя. Например, подумаем о множестве всех абстрактных сущностей. Оно само является абстрактной сущностью и, следовательно, членом самого себя.

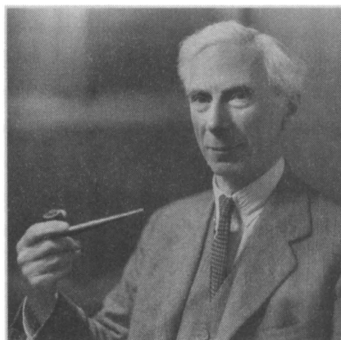
Теперь вернемся к аксиоме выделения. Возьмем множество, связанное со свойством «быть множеством, не являющимся членом самого себя». Пусть множество R образовано всеми множествами, не являющимися членами самого себя. Сформулируем следующий вопрос: является ли R элементом самого себя? Если R является членом самого себя, то выполняется свойство, определяющее R . По нему R не является членом самого себя. Это противоречие. Но если R не является членом самого себя, то не выполняется свойство, определяющее R . Следовательно, если не выполняется свойство, R все-таки является членом самого себя. Получается другое противоречие.

То есть R не может быть членом самого себя, но также не может и не быть им. Это логический парадокс. Множество R (существование которого обусловлено аксиомой выделения) не может существовать, потому что это порождает логическое противоречие. Итак, аксиома выделения, которая казалась такой невинной, на самом деле противоречит самой себе. Это открытие сегодня известно как парадокс Рассела.

Открытие противоречивости теории множеств развязало кризис оснований математики. Если такая невинная с виду аксиома выделения порождает противоречие, чего ждать от теории Кантора с актуальной бесконечностью и «бесконечностями, которые больше, чем другие бесконечности»? Положение ос-

БРАДОБРЕЙ РАССЕЛА

В 1904 году британский философ и математик Бертран Рассел (1872–1970) представил популярную версию своего парадокса. Он предложил представить себе, что в некой деревне есть только один брадобрей, бреющий всех мужчин, которые не бреются сами. Но бреет ли он сам себя? Ответ в том, что брадобрей не может бриться сам, но также не может и не делать этого.



ложнялось тем, что теория Кантора уже проникла в основные области математики, такие как анализ и топология.

Из-за открытия Рассела математики задалась вопросом о справедливости всех математических открытий по меньшей мере за 30 предыдущих лет. Они начали сомневаться в справедливости любого рассуждения, включающего в себя бесконечность, и даже задавали вопросы о смысле и значении математики. Каков конкретно объект изучения математики? Какие критерии подтверждают справедливость ее рассуждений?

Сам Фреге почувствовал, что открытие Рассела разрушает всю его работу. Во второй том своих «Основных законов...» он добавил следующие слова:

«Ученому сложно встретиться с чем-то более нежелательным, чем увидеть, как подрывается фундамент, когда работа уже заканчивается. Таково положение, в которое меня поставило письмо господина Бертрана Рассела, когда работа была уже почти напечатана».

Сразу после этого Фреге оставил борьбу и сдался. Он прожил до 1925 года, но никогда больше не вернулся к теме оснований.

ЛОГИЦИЗМ И ИНТУИЦИОНИЗМ

Какую реакцию вызвало открытие парадокса Рассела? С самого начала было предложено два решения. Первая попытка принадлежит самому Расселу и выражена в монументальной работе «Основания математики», которую он написал вместе со своим учителем Альфредом Уайтхедом.

Предложение Рассела, которое получило название «логицизм», состояло в том, чтобы вернуться к работе Фреге, но перечислить ошибки, приведшие к кризису. Рассел говорил, что любой парадокс возникает от наличия самореференции. Например, знаменитый парадокс лжеца, который возникает, когда встает вопрос, является фраза «это предложение ложно» истинной или ложной. Он рождается из-за анализа фразы, в которой говорится о ней же. Сам парадокс Рассела возникает из вопроса о том, выполняет ли некое множество свойство, определяющее само множество.

Во избежание этих ситуаций логицизм предлагает радикальное изменение логического языка с помощью теории типов. Общая идея заключается в том, чтобы назначить языку математики строгую иерархию, в которой каждое утверждение может относиться только к сущностям или утверждениям, расположенным на более низких уровнях. Таким образом, сама структура языка избегает самореференций и, следовательно, парадоксов.

На нулевом уровне иерархии находятся индивиды; на уровне 1 — утверждения, в которых говорится об индивидах; на уровне 2 — утверждения, в которых говорится об утверждениях типа 1, и так далее. Например:

1, 2, 3, 4, ... (индивиды, тип 0);

« $2 + 2 = 4$ » (утверждение типа 1, в котором говорится об индивидах);

«Верно, что $2 + 2 = 4$ » (утверждение типа 2, в котором говорится о предыдущем).

Однако по техническим причинам Рассел был вынужден усложнить свою стратификацию и ввести произвольные и неинтуитивные правила. Вследствие этого система потеряла убедительность, и Рассел в итоге оставил ее. Хотя некоторые элементы, введенные логицизмом, дошли до наших дней, к 1920 году влияние этой школы практически исчезло.

Второе решение стало известно как интуиционизм, или конструктивизм, и его лидером был нидерландский математик Лейтзен Эгберт Ян Брауэр (1881–1966).

Решение задач, которые до этого времени окружали математическую бесконечность, — возможно, самое большое из достижений, которыми может гордиться наша эпоха.

БЕРТРАН РАССЕЛ, 1910 год

Интуиционисты утверждали, что появление парадоксов напрямую обязано введению понятия актуальной бесконечности и это понятие, как утверждали еще Аристотель и Галилей, противоречиво само по себе. Вся теория Кантора не имеет смысла и должна быть оставлена, а математика — в том, что касается бесконечности, — должна вернуться к положению, существовавшему до 1870 года.

Основой математики должны быть натуральные числа и операции с ними — сложение и умножение. Эти числа не нуждаются в определении, поскольку понятие о них априори заложено в нашем сознании. Числа должны пониматься не как законченная бесконечная совокупность, а как результат непрерывного процесса (упомянутый ранее пример с народом), который начинался с числа 1 и продолжался неопределенное время за счет применения понятия последующего элемента (1 — первый элемент, 2 — элемент, следующий за 1, 3 — элемент, следующий за 2, и так далее).

Для утверждения о том, что существует математический объект, отличный от натуральных чисел, необходимо, чтобы его можно было построить за конечное число шагов на основе натуральных чисел с помощью строго определенной проце-

ЛЭЙТЗЕН ЭГБЕРТ ЯН БРАУЭР

Лейтзен Эгберт Ян Брауэр родился в Роттердаме, Голландия, 27 февраля 1881 года, за два года до публикации статьи Кантора, в которой впервые была введена в математику актуальная бесконечность. В 1904 году, сразу после окончания университета, Брауэр доказал несколько оригинальных результатов о непрерывном движении в четырех измерениях, которые были опубликованы Амстердамской королевской академией наук. В его докторской диссертации, опубликованной в 1907 году, речь шла о проблеме оснований математики. В этой работе он ввел первые понятия об интуиционизме. Также ученый внес значительный вклад в топологию, где доказал знаменитую теорему о неподвижной точке, носящую его имя. Что любопытно, доказательство этой теоремы не выполняет интуиционистских стандартов. В 1935 году Брауэр занялся политикой и практически отдалился от математических исследований, хотя в том же году основал журнал *Compositio Mathematica* и продолжал деятельность в качестве его издателя. Брауэр скончался 2 декабря 1966 года в Бларикуме (Голландия) в результате автокатастрофы.



дуры. Объекта, который невозможно построить таким образом, просто не существует. В некотором смысле интуиционисты возвращались к идее, содержащейся в сентенции Леопольда Кронекера: «Бог создал целые числа, все остальное — дело рук человека».

С другой стороны, согласно интуиционистам, для того чтобы определение свойства было справедливым, должна существовать механическая процедура (которую можно реализовать на компьютере, поскольку алгоритм — это не что иное, как последовательность действий), и с ее помощью можно проверить, выполняется ли свойство. Например, свойство «быть простым числом» для интуиционистов справедливо, поскольку его

всегда можно проверить за конечное количество шагов. Чтобы узнать, является ли число 17 677 простым, достаточно разделить его на все числа, меньшие его. Если во всех случаях деления есть остаток, то число простое. Процедура, которую мы описали, не самая лучшая (есть более быстрые методы), но она всегда дает правильный ответ за конечное количество шагов.

Чтобы рассмотреть пример свойства, не принимаемого интуиционистами, определим число p , используя знаки числа $\pi = 3,14159265\dots$ (которое, как мы знаем, является иррациональным, то есть имеет бесконечное непериодическое количество знаков после запятой). Число p определяется следующим образом: если среди знаков числа π появится хотя бы одна последовательность ровно из 15 нулей подряд, то p — это цифра (отличная от нуля), следующая после первого появления этих нулей. Если никогда не появятся 15 нулей подряд, то p равно 0. Отметим, что среди знаков числа π , вычисленных на сегодняшний день, последовательность из 15 нулей еще не появилась.

Существует ли число p ? Чему оно равно? В 1900 году Гильберт написал, что если мы определим математический объект и это определение не противоречит само себе, то мы можем утверждать, что объект существует.

Почти любой современный математик ответит, что p существует. Более того, все они согласятся, что хотя мы не знаем точно, чему оно равно, можно утверждать: это число от 0 до 9. Именно в тот момент, когда мы узнаем, появится или не появится эта последовательность из 15 нулей в числе π , мы узнаем точное значение p . Однако для интуиционистской философии p не существует, поскольку оно определено на основе свойства, которое невозможно проверить за конечное количество шагов, так как у числа π бесконечное количество знаков после запятой, и для проверки требуется просмотреть их все. Если бы среди знаков числа π , вычисленных до сих пор, появилось 15 нулей подряд, то p существовало бы и мы знали бы его точное значение. Более того, если в будущем эти 15 нулей кто-то найдет, в тот же момент p начнет существовать.

Сегодня p не существует, но, возможно, оно появится в будущем. То же самое мы могли бы сказать о еще не написанном

романе любого современного писателя. В этом сравнении нет ничего странного, поскольку для интуиционистов математика — это динамический, творческий процесс, подобный литературе, хотя он и управляется более строгими правилами. Математика создается (при соблюдении определенных правил), а не открывается.

Последующие поколения будут рассматривать теорию [бесконечных] множеств как болезнь, от которой мы излечились.

Анри Пуанкаре, французский математик, 1908 год

Поскольку сейчас p не существует, у него нет значения. Следовательно, ошибочно говорить, что оно находится в пределах от 0 до 9. Любое утверждение относительно p не имеет смысла. Некорректно говорить: « p либо четное, либо нечетное» или «оно равно или не равно 1».

Интуиционисты также задавались вопросом о статусе иррациональных чисел. Эти числа рассматривались только как никогда не достижимый результат последовательных приближений. Например, для интуиционистов числа π не существуют в виде законченной совокупности (еще один аргумент в пользу несуществования p).

Между 1905 и 1920 годами Брауэр формулировал глобальную программу для математики на основе этих идей. В течение этих лет он писал статьи и книги, в которых объяснял, как осуществить его подход на практике. Постепенно эта программа начала обретать последователей среди самых видных математиков того времени, таких как Анри Пуанкаре (1854–1912). К 1920 году теория Кантора (скончавшегося в 1918 году) подвергалась серьезному риску быть забытой. Но за интуиционизм выступали не все математики. Одним из них был Давид Гильберт, который быстро принял теорию бесконечности.

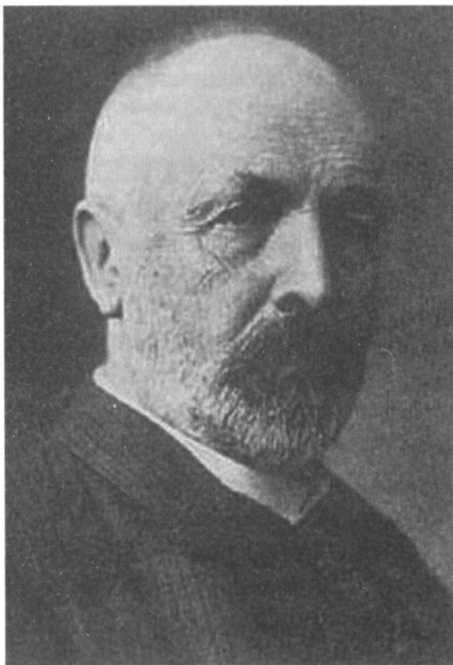
В 1890 году он поддержал кандидатуру Кантора на пост председателя Немецкого математического общества. Кроме того, ученые дружили и вели интенсивную переписку.



ВВЕРХУ:
Семья Гёделя.
Слева направо:
Марианна, Курт,
Рудольф-
старший
и Рудольф-
младший.

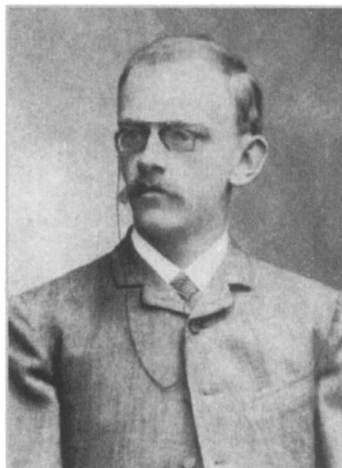
ВНИЗУ СЛЕВА:
Немецкий
математик Георг
Кантор,
которому
приписывается
создание теории
множеств.

ВНИЗУ СПРАВА:
Гёдель в Вене
в первой
половине
1920-х годов,
когда он доказал
свою первую
теорему
о неполноте.



ДАВИД ГИЛЬБЕРТ

Давид Гильберт родился 23 января 1862 года в Кёнигсберге, Германия (сегодня Калининград, Россия), и в 1885 году стал доктором математики в университете того же города. Через десять лет ему предложили должность в Гёттингене (одном из двух самых важных исследовательских центров в Германии наряду с Берлином), которую он потом занимал до конца карьеры. В числе прочего ученый внес значительный вклад в алгебру, геометрию, анализ и основания математики. В 1899 году Гильберт переформулировал «Начала» Евклида, исправив некоторые логические пробелы, не замеченные в течение более 2100 лет. Его итоговая работа, «Основания геометрии», — это выдающийся труд в истории математической логики. И конечно, знаковым является доклад Гильберта на Втором Международном математическом конгрессе, прошедшем в Париже в 1900 году. Одна фраза из доклада стала бессмертной. В ней ученый выразил убежденность в том, что неразрешимых математических проблем не существует: «Мы должны знать, и мы будем знать» (*Wir müssen wissen, wir werden wissen*). Гильберт скончался в Гёттингене 14 февраля 1943 года.



В 1900 году Гильберту было предложено прочитать инаугурационный доклад на Втором Международном математическом конгрессе в Париже. Это была почетная задача, которая говорила о признании, которое ученый заслужил своей блистательной карьерой. До сих пор, даже век спустя, доклад Гильберта широко известен, и его полный текст можно найти в интернете. Анализу этого выступления были посвящены целые книги.

В своем докладе Гильберт представил 23 нерешенные математические проблемы, принадлежащие к разным областям этой

науки, решение которых, как он думал, определит направление математических исследований XX века. Первая проблема связана с теорией Кантора и известна как континуум-гипотеза. Она была впервые поставлена самим Кантором в 1880-х годах, причем сам ученый так и не решил ее. Позже мы вернемся к этой проблеме, поскольку Гёдель в 1940 году нашел частичное решение, которое затем было дополнено Полом Козном.

Решение поместить континуум-гипотезу на первое место в списке следует трактовать как открытую поддержку Гильбертом теории множеств Кантора. В первые годы полемики об основаниях математики Гильберт держался в стороне, возможно надеясь на то, что интуиционистская точка зрения падет под тяжестью собственного веса. Но к 1920 году логицизм начал приходить в упадок, а интуиционизм набирал все больше сторонников. Именно поэтому в итоге Гильберт решил выступить лично. Под лозунгом «Никто не сможет изгнать нас из рая, который создал для нас Кантор» ученый решил остановить интуиционизм. Для этого он предложил третье решение проблемы, поставленной парадоксом Рассела. Оно было направлено на то, чтобы привлечь внимание сторонников интуиционизма и одновременно оставить нетронутой теорию Кантора.

Привлечь интуиционистов, но в то же время спасти теорию Кантора? Казалось, это невозможная задача, поскольку интуиционисты открыто отвергали актуальную бесконечность как абсурдное понятие. Но Гильберт был Гильбертом, и с помощью своего ума, ловкости и хитрости он добился своей цели.

ПРОГРАММА ГИЛЬБЕРТА

В 1920 году Курту Гёделю было 14 лет, и в своем родном городе Брно он, возможно, мечтал о научной карьере. В то же время в Гёттингене 58-летний Давид Гильберт начал примирение интуиционистов с актуальной бесконечностью. Эта работа займет десять лет.

Как уже было сказано, интуиционистская мысль находилась полностью во власти идеи конечности. Они считали, что существуют только объекты, которые можно построить механически на основе натуральных чисел за конечное количество шагов. Иррациональные числа, такие как π или $\sqrt{2}$, могли рассматриваться лишь как недостижимый результат последовательных вычислений, основанных на специфических формулах.

Предложение Гильберта, по сути, заключалось в том, чтобы привести требование конечности математических *объектов* к математическим *рассуждениям*. Мы можем перефразировать его мысль следующим образом. Установим такие методы рассуждения, чтобы правильность нашей аргументации можно было проверить алгоритмически за конечное количество шагов (алгоритм — это механический процесс, выполнимый компьютером). Кроме того, убедимся тем же «конечным» способом, что наши доказательства никогда не приведут к парадоксу. Как только мы достигнем этой цели, в наших теориях можно будет говорить о любом объекте, даже об актуальной бесконечности.

В программе Гильберта, которую также называют формальной программой, утверждается, что любая математическая теория должна быть основана на аксиомах, то есть на некоторых базовых утверждениях, принятых в качестве истинных. Любое другое утверждение должно быть доказано на основе этих аксиом с помощью рассуждений, справедливость которых можно будет проверить механически за конечное число шагов. Кроме того, непротиворечивость этих аксиом (то, что они никогда не приведут нас к парадоксу, как это произошло с Фреге) также должна быть проверена тем же механическим, или алгоритмическим, способом.

Для начала целью Гильберта была разработка такой программы для арифметики — теории, относящейся к свойствам сложения и умножения натуральных чисел (в ней идет речь о самых простых числах и самых простых операциях). Гильберт, как и интуиционисты, поддерживал идею о том, что основой всей математики должна быть арифметика, а не теория множеств. Если установить прочную базу для арифметики,

ПРИБЛИЖЕНИЯ К $\sqrt{2}$

Для интуicionистов $\sqrt{2}$ существует только как недостижимый результат, к которому асимптотически приводят последовательные приближения. Эти приближения, в свою очередь, должны быть вычислены по определенным, четким правилам. Существуют многочисленные формулы, позволяющие вычислить последовательные приближения к $\sqrt{2}$. Одна из самых древних и в то же время самых простых формул была известна Герону Александрийскому уже в I веке. В переводе на современный язык в правиле Герона для приближения к $\sqrt{2}$ говорится следующее.

- Шаг 1: возьмите любое положительное число.
- Шаг 2: назовите выбранное число x и вычислите

$$\frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

- Шаг 3: примените ту же формулу к полученному результату.
- Шаг 4: продолжайте применять ту же самую формулу столько раз, сколько пожелаете.

Если на первом шаге мы выбрали 5, в первый раз получим 2,7. Подставив 2,7 в формулу, получим 1,72037037..., затем 1,4414553..., затем 1,41447098..., и так далее, все больше приближаясь к $\sqrt{2}$.

будет легко добиться таких же прочных оснований для всех остальных теорий.

Проблема нахождения системы аксиом для арифметики была представлена Гильбертом в докладе 1900 года (вторая проблема в списке), хотя в ее формулировку не было включено существование механической проверки рассуждений. Зато вопрос алгоритма появлялся в десятой проблеме, в которой спрашивалось, всегда ли возможно механически определить, имеет ли решение особый тип уравнений, называемых диофантовыми. Как мы видим, в докладе ученого появились, хотя и по отдельности, две центральные идеи формальной программы.

Иногда говорят, что Гильберт считал, будто работа математика должна сводиться к механическому процессу: он, словно

АКСИОМЫ ПЕАНО

Давид Гильберт в качестве одной из кардинальных проблем представил нахождение множества аксиом арифметики, которые позволили бы доказать все истины теории (не упоминая необходимости механической проверки правильности использованных рассуждений). В своем докладе Гильберт не указал на существующие работы по этой теме. Это упущение вызвало недовольство Джузеппе Пеано — итальянского математика, присутствовавшего на лекции Гильберта. В 1889 году он предложил аксиомы арифметики, считая, что они позволяют вывести все истинные арифметические высказывания.



Аксиомы Пеано, как они известны сегодня, имеют в качестве первичных элементов число 1, знаки сложения (+) и умножения (\cdot) и функции последующего элемента (S).

- Аксиома 1: $S(x)$ никогда не равно 1, то есть 1 не является последующим членом ни для какого числа.
- Аксиома 2: если $S(x) = S(y)$, то $x = y$.
- Аксиома 3: $x + 1 = S(x)$.
- Аксиома 4: $x + S(y) = S(x + y)$.
- Аксиома 5: $x \cdot 1 = x$.
- Аксиома 6: $x \cdot S(y) = x \cdot y + x$.
- Аксиома 7: если можно доказать, что 1 выполняет некое свойство, x его выполняет и $S(x)$ — тоже, то можно сделать вывод: это свойство справедливо для всех натуральных чисел.

Последняя аксиома, также называемая схемой индукции, выражает тот факт, что все натуральные числа получаются на основе единицы повторяющимся применением функции последующего элемента. Если свойство справедливо для числа 1 и мы можем быть уверены, что оно будет распространяться на каждое число, выраженное последующим элементом, то это свойство будет справедливо для всех натуральных чисел. Следствие из теоремы Гёделя состоит в том, что если учитывать условие алгоритмической проверки всех рассуждений, то будут существовать арифметические истины, недоказуемые на основе этих аксиом. Таким образом, арифметика будет неполной.

компьютер, должен вычислять, но не думать. Но это не так. Механический характер носит только проверка справедливости аргументов, использованных математиком, а не открытие самих аргументов. Чтобы подчеркнуть эту разницу, Гильберт говорил о двух науках: математике и метаматематике. Объектом второй науки, механической и связанной с конечностью, была бы проверка методов первой.

С 1920 по 1930 год Гильберт опубликовал ряд статей, в которых постепенно излагал свою программу и показывал, как ее можно осуществить на практике. Другие математики увлеклись этой идеей и внесли значительный вклад в ее осуществление. Сам Гёдель в 1929 году, защищая докторскую диссертацию, показал, что можно установить методы рассуждения, правильность которых может быть проверена алгоритмически. В том же году польский математик Мойжеш Пресбургер представил ряд аксиом, непротиворечивость которых можно было проверить алгоритмически. Они позволяли доказать хотя и не все арифметические истины, но их значительную часть. Это были две важные победы формальной программы.

В то же время интуиционизм терял авторитет среди математиков. Многие из тех, кто симпатизировал общим идеям Брауэра, начинали чувствовать, что их реализация на практике, предполагавшая отказ от рассуждений из области теории множеств, принесет больше потерь, чем преимуществ. Формальная программа, в свою очередь, предлагала альтернативу, которая была допустима с философской точки зрения и осуществима на практике.

К 1930 году стало ясно, что Гильберт победил. Оставалось только помочь интуиционистам сохранить лицо и достойно сдать ся. В Кёнигсберге, родном городе Гильберта (выбор, конечно, не случаен), был организован конгресс, посвященный основаниям математики. Он проводился с пятницы 5 сентября по воскресенье 7 сентября; на понедельник было назначено награждение Гильберта званием почетного гражданина Кёнигсберга. Все было готово к великой победе учителя.

В пятницу представляли свои работы менее значимые, известные математики. В субботу выступали более значимые,

среди них был Ханс Хан, руководитель докторской диссертации Гёделя. Брауэр, который враждовал с Гильбертом по причинам, выходящим далеко за рамки академической науки, не присутствовал; интуиционистскую точку зрения излагал Аренд Гейтинг. Гильберт, имевший проблемы со здоровьем, также отсутствовал, и его главным представителем был его ученик Джон фон Нейман. На конгрессе присутствовал и представитель логицизма, философ Рудольф Карнап. В воскресенье конгресс закрылся пленарным заседанием, на котором были подведены итоги точек зрения интуиционизма, формализма и логицизма. Резюме подвел Гейтинг. Завершая выступление, он сказал, что отношения между интуиционизмом и формализмом наконец-то прояснились и больше нет необходимости продолжать борьбу между этими школами: «Если выполнится программа Гильберта, даже интуиционисты примут бесконечность с распростертыми объятиями». Интуиционисты сдались. Гильберт победил.

Какое значение могут иметь жалкие остатки, немногочисленные, неполные, не связанные друг с другом единичные результаты, которые были выработаны интуиционистами, по сравнению с могущественным размахом современной математики.

Давид Гильберт об интуиционистской школе

Все очевидцы говорят, что именно в этот момент неизвестный молодой математик скромно поднял руку, прося слова. Он был худым, носил очки и, похоже, очень нервничал. Этот молодой человек, Курт Гёдель, объявил, что доказал следующую теорему: если требуется, чтобы доказательства проверялись механически, то невозможно задать аксиомы арифметики, которые позволили бы доказать все истины теории; всегда будут истинные утверждения, которые будет невозможно доказать на основе предложенных аксиом. (Сегодня это утверждение известно как первая теорема Гёделя о неполноте.) Более того, если предложенные аксиомы позволяют доказать довольно

обширную часть арифметических истин, то невозможно проверить их непротиворечивость механическими методами. (Это вторая теорема Гёделя о неполноте.) Другими словами, программа Гильберта абсолютно нереализуема.

Мы можем представить себе сцену, которой на самом деле не было, но которая отражает состояние духа формалистов в тот воскресный вечер. Представим себе, что Гильберт звонит по телефону Джону фон Нейману, чтобы спросить его, как все прошло, и тот отвечает: «У меня одна хорошая новость и одна плохая. Хорошая — интуиционисты сдались. Плохая — Гёдель говорит, что и мы проиграли».

Как Гёделю удалось доказать свою теорему? Как можно доказать, что, независимо от предлагаемых аксиом, всегда будет существовать утверждение истинное, но недоказуемое на их основе? Доказательство Гёделя, один из самых больших интеллектуальных подвигов XX века, будет центральной темой следующей главы.

Первая теорема Гёделя

В первой теореме Гёделя о неполноте говорится, что при любом заданном множестве аксиом арифметики всегда будет существовать истинное арифметическое высказывание, которое невозможно доказать на основе этих аксиом, если пользоваться только теми методами доказательства, которые удовлетворяют программе Гильберта. Доказательство этой теоремы, по сути, состоит в том, чтобы получить самореферентное высказывание, которое говорит о себе: «Я недоказуемо».

После окончания Первой мировой войны Австро-Венгерская империя была разделена на части. Некоторые из них, такие как Австрия, Венгрия, Югославия и Чехословакия, стали отдельными странами. Другие вошли в состав уже существовавших государств, таких как Италия или Румыния. После этого раздела город Брно, в котором жила семья Гёделя, был присоединен к Чехословакии. Курт вспоминал, что с этого момента его отец всегда чувствовал себя австрийцем в изгнании. Возможно, это ощущение в какой-то степени повлияло на решение послать обоих сыновей учиться в Венский университет, чтобы они хотя бы таким образом могли вернуться на родину.

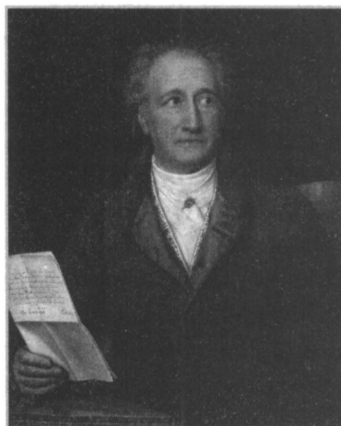
Гёдель поступил в Венский университет в 1923 году с намерением изучать физику. Можно предположить, что врожденное любопытство с самого раннего детства привело его к вопросам о том, почему вещи, подброшенные вверх, падают, или почему некоторые предметы плавают, а другие нет, или почему светит Солнце, — все они связаны с физикой. Однако основная причина, по которой он решил посвятить себя этой науке, по-видимому, сформировалась, когда Гёделю было 15 лет, после того как он прочитал о теории цвета Гёте и о противостоянии подходу Ньютона.

Очень мало известно о личной жизни Гёделя в студенческие годы. Он едва не женился на женщине, которая была на де-

сять лет его старше, но родители воспротивились, и Курт отказался от своего намерения. Нет информации о других личных отношениях или близкой дружбе. По-видимому, юноша посвящал бóльшую часть времени учебе. Но в университете его намерение посвятить себя физике вскоре пропало. В те годы в Вене преподавал Филипп Фуртвенглер, немецкий математик, специализировавшийся на высшей арифметике. Он родился в 1869 году в Эльце (Германия), в 1896-м защитил докторскую

ТЕОРИЯ ЦВЕТА ГЁТЕ

Иоганн Вольфганг фон Гёте (1749–1832) — немецкий романист, драматург и поэт, один из главных представителей романтизма. Помимо литературного творчества, Гёте также занимался наукой и стал автором работ по физике, зоологии и ботанике. Многие его идеи вызвали споры, некоторые из них разрешились в последующие десятилетия. Например, его классификация растений и понятия о морфологии животных были использованы Чарльзом Дарвином и другими натуралистами XIX века. В книге *Zur Farbenlehre* («К теории цвета»), написанной в 1810 году, Гёте утверждал, что изучение цвета не должно сводиться к физическим аспектам света, но также должно включать в себя размышления о человеческом восприятии.



Портрет Гёте руки немецкого художника Йозефа Карла Штилера.

Для Гёте оптика Ньютона была неполной и представляла собой только частный случай в рамках его собственной теории. Идеи Гёте о свете не заинтересовали физиков его времени; обычно они даже не включаются в работы по истории науки. Однако сегодня признано, что Гёте был прав, различая оптический аспект в том виде, как его изучал Ньютон, и более широкое явление — восприятие цветов человеком.

диссертацию в Гёттингене под руководством Феликса Клейна, одного из самых выдающихся математиков конца XIX века.

Занятия Филиппа Фуртвенглера отличались блеском и ясностью. Число студентов, которые записывались на его курс, было таким большим (оно доходило до 400 человек одновременно), что ученики были вынуждены делиться на две группы, и урок проводился дважды, для каждой из них. У Фуртвенглера был поперечный паралич, и он со своего кресла на колесах диктовал помощнику, что тот должен написать на доске.

На юного Курта так подействовали занятия Фуртвенглера, что он оставил решение изучать физику и обратился к математике. Это, без сомнения, выдающийся пример того, как преподаватель может повлиять на жизнь ученика. Только через 25 лет в Принстоне у Гёделя появится возможность вспомнить о своей любви к физике. В 1949 и 1950 годах он опубликовал две важные работы по теории относительности — эти труды Гёделя, единственные не связанные с математической логикой, безусловно, стали результатом его бесед с Эйнштейном.

Небольшое совпадение: Филипп Фуртвенглер закончил обучение в Гёттингене в 1896 году и остался там до 1912-го, когда переехал в Венский университет. Между тем в 1895 году в Гёттинген прибыл Давид Гильберт, считавшийся молодой надеждой немецкой математики. Хотя точных сведений об этом нет, мы уверены, что они были знакомы — Филипп Фуртвенглер, благодаря которому Гёдель посвятил себя математике, и Давид Гильберт, чья математическая работа 1920-х годов была «разрушена» теоремами Гёделя. Узнал ли когда-нибудь Фуртвенглер, что именно он вдохновил Гёделя посвятить себя математике? Нам это неизвестно.

ВЕНСКИЙ КРУЖОК

Вернемся к Гёделю и его университетским годам. В то время, в начале 1920-х годов, интеллектуальная жизнь Вены проте-

кала более или менее неформально, в виде *кружков (Kreise)*. Такие группы (которых, вероятно, были десятки, и многие из них назывались одинаково) собирались еженедельно в городских кафе, чтобы обсуждать различные темы, касающиеся философии, политики или психоанализа (в те годы в Вене жил и работал Фрейд).

Самый важный кружок был основан в 1922 году Морицем Шликом, который, кроме того, преподавал Гёделю философию науки. Сначала Шлик дал группе название «Ассоциация Эрнста Маха», но позже она была известна просто как «Венский кружок» (*Der Wiener Kreis*). В состав группы входили, среди прочих, философы Рудольф Карнап и Людвиг Витгенштейн, а также философ и математик Ханс Хан (который руководил докторской диссертацией Гёделя). Карл Поппер также участвовал в некоторых дискуссиях. Одна из его самых важных работ, *Logik der Forschung* («Логика научного исследования»), впервые появилась среди публикаций кружка.

Вступить в группу можно было строго по приглашению; Гёдель получил его от Шлика в 1926 году и регулярно ходил на встречи до 1928 года — только как слушатель. Когда Гёдель получил приглашение присоединиться к кружку, он был еще студентом, и это много говорит об авторитете, который он имел среди преподавателей.

Темы обсуждений в Венском кружке касались философии науки в целом и языка науки в частности. Также обсуждали математику, в особенности решения проблемы кризиса оснований, предложенные Расселом, Брауэром и Гильбертом. Явно именно там Гёдель приобрел первые глубокие знания о формальной программе.

Участие Гёделя в Венском кружке привело его в 1928 году к окончательному решению посвятить себя математической логике. На следующий год он закончил свою докторскую диссертацию о проблеме, связанной с программой Гильберта (хотя речь еще не шла о знаменитой теореме о неполноте, которую он представил в сентябре 1930 года на конгрессе в Кёнигсберге).

МОРИЦ ШЛИК

Мориц Шлик — немецкий философ, родился в 1882 году. Он изучал физику вместе с Максом Планком в Берлинском университете; его докторская диссертация, представленная в 1904 году, называлась «Об отражении света в неоднородной среде». Однако Шлик посвятил свою жизнь не физике, а философии. Его первая научная работа, «Мудрость жизни», была опубликована в 1908 году, а через два года появилось эссе *Das Wesen der Wahrheit nach der modernen Logik* («Природа истины согласно современной логике»). Через некоторое время Шлик переключил свое внимание на эпистемологию и философию



науки, и этим темам более не изменял. В 1922 году он занял кафедру философии в Венском университете и в это же время основал Венский кружок как центр для обсуждения новых философских горизонтов, далеких от метафизики и сосредоточенных на эмпиризме. Встречи кружка прекратились в 1936 году, с убийством Морица Шлика студентом университета (некоторые историки утверждают, что студент был психически нездоров, другие — будто он был сторонником нацистов, хотя обе версии не исключают друг друга).

Гёдель представил свою диссертацию в Венском университете 6 февраля 1930 года. В том же году он опубликовал ее в виде статьи. Эта его первая научная публикация появилась в томе 37 (1930) журнала *Monatshefte für Mathematik und Physik* под заголовком «Полнота аксиом логического функционального исчисления». Теорема, которая в ней доказана, сегодня известна как теорема Гёделя о полноте. В то время она была воспринята как знак выполнимости программы Гильберта.

ТЕОРЕМА О ПОЛНОТЕ

Чтобы понять теорему Гёделя о полноте, мы должны прежде углубиться в теорию математического доказательства по программе Гильберта. Напомним, что согласно ей нужно найти множество аксиом, которые позволили бы доказать все арифметические истины с помощью рассуждений, проверяемых алгоритмически. Но что точно представляет собой арифметика? Каковы истины, которые мы хотим доказать?

Цель моей теории — установить раз и навсегда определенность математических методов.

Давид Гильберт, «О бесконечности» (1925)

Арифметика — это область математики, в которой говорится о свойствах сложения и умножения натуральных чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ...; она включает в себя такие понятия, как простые, совершенные, треугольные или четные числа. Теория образована всеми утверждениями (также называемыми предложениями, или высказываниями), связанными с этими понятиями, например « $1 + 1 = 2$ », «2 — четное число», «5 — простое число», «любое число, делящееся на 4, четное» или «сумма двух нечетных чисел дает в результате четное число». Аксиомы, которые искал Гильберт, были бы множеством базовых истин, из которых можно вывести, при уже изложенных условиях, все остальные истинные арифметические утверждения, в том числе упомянутые выше.

С другой стороны, что означает алгоритмическая проверка справедливости рассуждений, доказывающих эти истины? Это означает, что по крайней мере в начале должно быть возможным так запрограммировать компьютер, чтобы за конечное количество шагов он мог определить, является ли доказательство справедливым. В соответствии с этой идеей мы вводим доказательство в машину, она обрабатывает его по предварительно написанной программе и через некоторое время (возможно, долгое, но в любом случае конечное) говорит нам, справедливо рассуждение или в нем содержится ошибка.

В целом проверка правильности математического доказательства — непростая работа, иногда даже для специалистов. Например, когда в 1995 году Эндрю Уайлс представил свое доказательство последней теоремы Ферма, которому он посвятил семь лет, специалисты, его проверявшие, нашли логический пробел — шаг, который, насколько они понимали, не был должным образом обоснован. Уайлс, естественно, этой ошибки не заметил, и ему потребовался год на ее исправление. В конце концов в 1996 году он представил полное доказательство.

Продemonстрируем менее сложный пример. Пусть a и b — два числа, которые мы считаем равными и при этом отличными от нуля. На основе того факта, что $a = b$, мы можем получить «доказательство» того, что $1 = 2$ (для большей ясности пронумеруем логические шаги рассуждения).

1. $a = b$	По гипотезе.
2. $a \cdot b = b \cdot b$	Умножили оба члена на b .
3. $a \cdot b = b^2$	Заменили $b \cdot b$ на b^2 .
4. $a \cdot b - a^2 = b^2 - a^2$	Вычли a^2 из обеих частей.
5. $a \cdot (b - a) = (b + a) \cdot (b - a)$	Использовали известные алгебраические равенства.
6. $a = b + a$	Сократили $(b - a)$ в обеих частях.
7. $a = a + a$	Заменили b на a , поскольку числа равны.
8. $a = 2 \cdot a$	Использовали равенство $a + a = 2 \cdot a$.
9. $1 = 2$	Разделили обе части на число a .

Очевидно, что это рассуждение неверно, но где ошибка? Она находится в переходе от шага 5 к шагу 6. В равенстве

$$a \cdot (b - a) = (b + a) \cdot (b - a)$$

мы сокращаем скобки $(b - a)$ и делаем вывод, что $a = b + a$. Это ошибочно, потому что $(b - a)$ равно 0 (поскольку $a = b$),

а 0 нельзя делить. Если представить это в виде чисел и предположить, например, что a и b равны 2, переход от 5 к 6 соответствует тому, чтобы сказать, что из $2 \cdot 0 = 4 \cdot 0$ (что истинно) следует $2 = 4$.

Но как мы можем научить компьютер обнаруживать ошибки такого типа? Компьютер — это только машина; он не рассуждает, а слепо следует программе, записанной в его памяти. Для того чтобы компьютер мог проверить правильность математического рассуждения, необходимо перевести это рассуждение в последовательность высказываний, каждое из которых либо аксиома, либо выводится из предыдущих высказываний посредством применения точных и заранее установленных логических правил.

Рассмотрим пример математического доказательства, выраженного таким образом. Для начала нам нужны некоторые аксиомы, которые будут служить нам отправной точкой. В 1889 году, задолго до открытия парадокса Рассела, итальянский математик Джузеппе Пеано предложил набор аксиом, которые (как он предполагал) позволяют доказать все арифметические истины. Эти аксиомы основывались на операциях сложения (+), произведения (\cdot), а также понятии последующего элемента (обозначаемого буквой S).

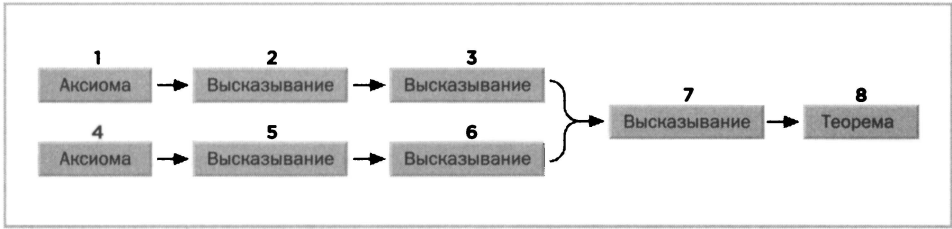
Пеано понимал, что последовательность натуральных чисел получается на основе числа 1 посредством повторного применения функции последующего элемента. Таким образом, 2 определяется как последующий элемент для 1, что обозначается $S(1) = 2$; 3, по определению, — последующий элемент для 2, то есть $S(2) = 3$; и так до бесконечности.

Для нашего примера достаточно взять две аксиомы Пеано, относящиеся к сложению.

Аксиома 1: каким бы ни было число x , $x + 1 = S(x)$.

Аксиома 2: какими бы ни были числа x и y , $S(x + y) = x + S(y)$.

В первой аксиоме говорится, что последующий элемент числа x всегда получается прибавлением к нему 1. Вторую ак-



сиому можно воспринимать как $(x + y) + 1 = x + (y + 1)$. На основе этих двух аксиом докажем, что $4 = 2 + 2$.

Но действительно ли нужно доказывать, что $4 = 2 + 2$? Разве это не очевидный факт? Хотя это действительно очевидно, по программе Гильберта любое истинное утверждение, не являющееся аксиомой, должно доказываться на их основе. За исключением высказываний, которые явно указаны как аксиомы, нет других утверждений, которые сами по себе считаются истинными.

Итак, докажем, что $4 = 2 + 2$, но запишем рассуждение таким образом, чтобы его мог обработать компьютер. Добавим несколько комментариев, чтобы мы, люди, могли следить за идеей (см. схему).

1. $S(x + y) = x + S(y)$ Аксиома 2.
2. $S(2 + 1) = 2 + S(1)$ Подставили $x = 2$ и $y = 1$ в аксиому 2.
3. $S(2 + 1) = 2 + 2$ Заменили $S(1)$ на 2 в предыдущем шаге.

Комментарий: в следующих трех шагах представлено небольшое поддоказательство того, что $2 + 1 = 3$; таким образом, в шаге 3 мы можем заменить $S(2 + 1)$ на $S(3)$.

4. $x + 1 = S(x)$ Аксиома 1.
5. $2 + 1 = S(2)$ Подставили $x = 2$ в аксиому 1.
6. $2 + 1 = 3$ В предыдущем шаге заменили $S(2)$ на 3.

Комментарий: теперь мы можем заменить $S(2 + 1)$ на 3 в третьем шаге.

Логическая структура доказательства того, что $4 = 2 + 2$. Стрелки показывают применения правил вывода.

$$7. S(3) = 2 + 2$$

$$8. 4 = 2 + 2 \quad \text{Заменили } S(3) \text{ на } 4 \text{ в предыдущем шаге.}$$

Нужна ли такая точность для доказательства того, что два плюс два равно четыре? Да, это необходимо, если мы хотим, чтобы компьютер был способен проверять правильность рассуждений. Компьютер не думает; следовательно, мы должны вести его за руку, шаг за шагом показывая ему, используя заранее установленные правила, что именно мы сделали на каждом этапе рассуждений.

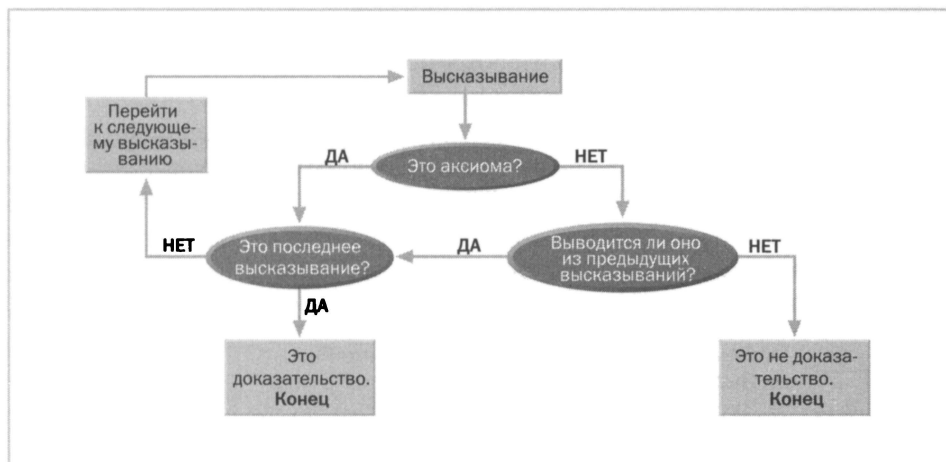
Действительный мир есть мир, постоянно изменяющийся. [...] Но такие изменения, независимо от их силы, никогда не разрушат истинности отдельного логического или арифметического закона.

Рудольф Карнап. «Философские основания физики»

Что будет делать компьютер, чтобы проверить, правильно ли наше доказательство? Для начала он возьмет первое высказывание и проверит, является ли оно аксиомой. Эта проверка происходит от символа к символу, точно так же как текстовый редактор проверяет орфографию, буква за буквой сверяя слова со словарем, загруженным в память компьютера.

Вспомним, что каждое высказывание должно либо быть аксиомой, либо выводиться из предыдущих высказываний. В нашем примере машина убедилась бы, что первое высказывание — это одна из аксиом в списке (первое высказывание должно быть аксиомой, его нельзя вывести из предыдущих высказываний, просто потому что их нет). Компьютер, конечно же, не понимает значения аксиомы, он только проверяет, что первое высказывание присутствует в списке, предварительно в него загруженном.

После первой проверки машина переходит ко второму высказыванию, $S(2 + 1) = 2 + S(1)$, и проверяет, что это не аксиома (поскольку ее нет в списке). Тогда это второе высказывание должно сводиться к первому с помощью какого-либо логиче-



ского правила. Чтобы осуществить эту проверку, в память компьютера должен быть загружен список правил логики, то есть правил, которые показывают, какие выводы можно сделать из определенных предпосылок (см. схему).

В случае нашего доказательства правило, позволяющее перейти от шага 1 к шагу 2, заключается в том, что если высказывание начинается с «какими бы ни были числа x и y ...», то в следующем выражении буквы x и y могут быть свободно заменены любыми числами. В нашем примере буква x заменена числом 2, а y — числом 1.

Эти логические правила находятся вне арифметики, они справедливы для любой области математики, поэтому выражающие их высказывания называются *универсально справедливыми высказываниями* (или *логическими аксиомами*, поскольку они выражают правила логических рассуждений).

Мы уже упомянули одно из этих правил. Другие примеры: «если $x = y$, то $y = x$ » и «если два числовых выражения равны, то любое из них может быть заменено на другое». Именно это — последнее — правило оправдывает переход от шага 2 к шагу 3, где $S(1)$ заменяется на 2.

Но когда существует потенциально бесконечное число универсально справедливых высказываний, как мы можем за-

Схема механической проверки доказательства.

ФОРМАЛЬНЫЙ ЯЗЫК

Как программа Гильберта, так и доказательство Гёделя предполагают, что все арифметические высказывания написаны на формальном языке с помощью заранее установленных символов. Существуют возможные варианты символов, один из наборов которых следующий.

- \forall : Квантор всеобщности, читается «для каждого». Указывает, что обозначаемое свойство справедливо для любого числа.
- \Rightarrow : Символ импликации; « $P \Rightarrow Q$ » означает «если P , то Q ».
- \neg : Символ отрицания; « $\neg P$ » означает «не- P ».
- $=$: Знак равенства.
- 1 : Число один.
- S : Означает «последующий элемент».
- $+$: Символ суммы.
- (\cdot) : Символ произведения.
- $()$: Скобки.
- x_1, x_2, x_3, \dots : Переменные.

В некоторых представлениях предпочитается брать в качестве первого элемента 0, но это не является существенным. При использовании символов, которые мы привели, число 2 записывается как $S(1)$, то есть следующий за 1. Число 3 записывается как $S[S(1)]$, то есть следующий за следующим за 1. И так далее.

грузить их все в память компьютера? Если это нельзя сделать, то компьютер неспособен проверить справедливость любого рассуждения, и, следовательно, программа Гильберта оказывается неосуществимой. При этом ни один компьютер не способен содержать бесконечное число высказываний.

К счастью, в теореме о полноте Гёдель доказал, что хотя количество логических правил потенциально бесконечно, любое рассуждение можно осуществить, используя только 12 из них. Если загрузить в память компьютера эти 12 правил, он будет способен проверить правильность любого доказательства.

Когда в начале 1930 года эта теорема была опубликована, казалось, что необходимая логическая основа для программы Гильберта обеспечена: можно механически проверить пра-

вильность арифметических доказательств. Проблема, которую оставалось решить, состояла в том, чтобы найти множество аксиом, которое (на основе этих 12 правил) позволило бы доказать все арифметические истины.

Теорема о полноте не произвела на математический мир большого эффекта. Считалось, что Гёдель просто подробно описал доказательство того, что все и так считали верным, — такой большой была вера в успешную реализацию программы Гильберта. Оставалась только проблема нахождения аксиом арифметики.

ТЕОРЕМА О НЕПОЛНОТЕ

Когда была установлена логическая база, дававшая возможность осуществлять доказательства, проверяемые алгоритмически, оставалось только найти аксиомы, которые позволили бы доказать все арифметические истины. К несчастью для программы Гильберта, эта цель недостижима. Теорема, в которой изложена эта невозможность, известна как первая теорема Гёделя о неполноте, или просто теорема Гёделя:

«Если выбрать в качестве аксиом любое множество истинных арифметических высказываний и требовать, чтобы доказательства, которые можно сделать на их основе, могли быть проверены алгоритмически, то будет по крайней мере одно истинное высказывание, которое не может быть доказано на основе этих аксиом».

Гёдель доказал эту теорему в 1930 году и, как мы уже знаем, впервые открыто изложил ее на конгрессе в Кёнигсберге 7 сентября того же года. Статья с выводением доказательства была послана в журнал *Monatshefte für Mathematik und Physik* («Ежемесячник по математике и физике») в ноябре и появилась в томе 38 (1931). Значение этой публикации для логики сравнимо только с «Метафизикой» Аристотеля. Изложение до-

12 ЛОГИЧЕСКИХ ПРАВИЛ

В своей докторской диссертации, представленной в 1930 году, Гёдель доказал, что любое рассуждение, которое можно проверить алгоритмически, может быть построено всего на 12 логических правилах, которые мы приводим ниже. Далее выражение « $P \Rightarrow Q$ » означает «если P , то Q », а « $\forall x P(x)$ » — «каждое x выполняет свойство P ».

1. Если справедливо высказывание Q , то, каким бы ни было P , справедливо высказывание « $P \Rightarrow Q$ ».
2. Если справедливо « $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ » и также справедливо « $P \Rightarrow Q$ », то справедливо « $P \Rightarrow R$ ».
3. Если справедливо «не- $Q \Rightarrow$ не- P », то также справедливо « $P \Rightarrow Q$ ».
4. Если справедливо « $\forall x P(x)$ », то справедливо « $P(n)$ », где n — любое число.
5. Если справедливо « $\forall x [(P \Rightarrow Q(x))]$ », то справедливо « $P \Rightarrow [\forall x Q(x)]$ », если только x не используется в P .
6. Каким бы ни было число x , справедливо, что $x = x$.
7. Какими бы ни были числа x и y , справедливо, что если $x = y$, то $y = x$.
8. Какими бы ни были числа x , y , z , справедливо, что если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$.
9. Если $x = y$, то можно заменить x на y в любом числовом выражении.
10. Если $x = y$, то можно заменить x на y в любом высказывании.
11. Если справедливо P и справедливо « $P \Rightarrow Q$ », то справедливо Q .
12. Если справедливо $P(x)$ для произвольного x , то справедливо « $\forall x P(x)$ ».

В целом первые десять правил представлены как универсально справедливые высказывания, в то время как два последних представлены отдельно как правила вывода. Это разграничение чисто техническое и не имеет значения для наших целей.

казательства было таким ясным и прозрачным, что не вызвало ни малейшей полемики.

Но как можно доказать факт такого масштаба? Как можно доказать, что каким бы ни было множество выбранных аксиом (если рассуждения проверяются алгоритмически), то всегда найдется истина, недоказуемая на их основе? Сейчас мы перейдем к объяснению доказательства и для этого рассмотрим, шаг за шагом, основные моменты рассуждений Гёделя.



ВВЕРХУ СЛЕВА:
Ханс Хан,
руководитель
докторской
диссертации
Гёделя. Этот
австрийский
философ
и математик
внес
значительный
вклад
в формирование
Венского
кружка.

ВВЕРХУ СПРАВА:
Немецкий
математик
Филипп
Фуртвенглер,
преподаватель
Гёделя
в Венском
университете.

ВНИЗУ:
Курт Гёдель
в 1935 году,
через пять лет
после защиты
докторской
диссертации
в Венском
университете.

ОБЩАЯ ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Предположим, что в качестве аксиом были выбраны некоторые истинные арифметические высказывания. Для начала заметим: тот факт, что аксиомы — это истинные утверждения, гарантирует истинность всех высказываний, которые можно будет доказать на их основе, поскольку из истинных предпосылок (при правильных методах рассуждения) можно сделать только истинные выводы. Это гарантирует, что ни одно доказываемое высказывание не будет ложным, однако это ни в коем случае не означает, что все истины доказуемы. Действительно, наша цель — доказать, что существует истинное арифметическое высказывание, которое не может быть доказано на основе этих аксиом (если мы будем придерживаться методов доказательства программы Гильберта).

Главная идея доказательства состоит в том, чтобы получить высказывание G , в котором будет говориться: « G недоказуемо». Другими словами, G может быть записано так: «Это утверждение недоказуемо».

Высказывание G самореферентно и говорит о самом себе, что оно недоказуемо (в дальнейшем слово «доказуемый» всегда должно пониматься как «доказуемый на основе предложенных аксиом»). Докажем, что это высказывание G является недоказуемой истиной.

Для начала заметим, что G либо истинно, либо ложно. Если бы G было ложно, в связи с тем, что в G говорится о самом себе, можно было бы сделать вывод, что G доказуемо. Следовательно, G было бы одновременно ложным и доказуемым, но это невозможно (ведь мы сказали, что исходя из истинных аксиом можно доказать только истинные высказывания). Следовательно, G не может быть ложным.

Следовательно, G истинно, и согласно тому, что оно говорит о самом себе, оно недоказуемо. Так мы делаем вывод, что G — истинное и недоказуемое высказывание (см. схему).



ЧИСЛА И УТВЕРЖДЕНИЯ

Предыдущая идея, хотя и правильная в целом, имеет одну проблему: G должно быть арифметическим утверждением. Но арифметические высказывания относятся к свойствам натуральных чисел, в них не говорится о других высказываниях и тем более о самих себе. Как мы можем преодолеть это ограничение и сделать так, чтобы арифметическое высказывание относилось к другому высказыванию? Если в высказываниях говорится о числах, а нам надо, чтобы в них говорилось о других утверждениях, то нужно приравнять числа к утверждениям:

Числа \leftrightarrow Утверждения.

Требуется связать с каждым арифметическим высказыванием какое-нибудь натуральное число так, чтобы замечание об этом числе было равносильно замечанию о соответствующем утверждении. Например, если бы утверждению P соответствовало число 457, мы могли бы считать, что в любом высказывании, в котором речь идет о 457, одновременно речь идет о P .

Теперь каждому арифметическому высказыванию назначим число, которое назовем *числом Гёделя*, или его *кодом*. Назначение чисел Гёделя происходит специфическим способом, который можно запрограммировать для компьютера, однако для того, чтобы в общих чертах понять идею доказательства

теоремы о неполноте, нет необходимости углубляться в технические детали. Примеры, которые мы приведем далее, чисто гипотетические и служат только для того, чтобы проиллюстрировать общее понятие. Представим, что:

- « $4 = 2 + 2$ » \leftrightarrow код 67
- «2 — четное число» \leftrightarrow код 223
- «162 делится на 18» \leftrightarrow код 103
- «4 — нечетное число» \leftrightarrow код 149
- «171 — четное число» \leftrightarrow код 61.

Мы настаиваем: коды не назначаются наугад или произвольно. Напротив, существует алгоритм, который при заданном высказывании позволяет точно вычислить его код. Также существует обратный алгоритм, который при заданном коде может восстановить высказывание, которому он соответствует. Более того, в действительности коды, если их правильно вычислить, могут содержать десятки цифр. Например, при реальном вычислении утверждению « $1 = 1$ » соответствует код 218700000000.

Заметим, что в нашем примере два последних высказывания ложны. Это показывает, что числа Гёделя назначаются всем высказываниям, как истинным, так и ложным. С технической целью числа Гёделя также назначаются общим выражениям, таким как « x — четное число» или « x делится на 18». Они относятся не к конкретному числу, а к переменному числу x . Эти выражения Бертран Рассел называл *пропозициональными функциями*.

Сами по себе пропозициональные функции не являются высказываниями, поскольку высказывание по определению должно быть истинным или ложным, в то время как истинность или ложность фразы « x — четное число» зависит от значения x . Каждый раз, когда мы заменяем x конкретным числом, мы получаем высказывание, которое будет истинным или ложным в зависимости от выбранного числа. Например, если в « x — четное число» заменить x числом 8, то мы получим истинное высказывание «8 — четное число». Наоборот, если заменить x

числом 3, мы получим ложное высказывание «3 — четное число».

Мы уже сказали, что каждой пропозициональной функции также назначается число Гёделя (как и для высказываний, эти коды вычисляются с помощью установленного алгоритма). Например, мы можем представить, что:

$$\begin{aligned} \langle x \text{ делится на } 18 \rangle &\leftrightarrow \text{код } 162 \\ \langle x \text{ — четное число} \rangle &\leftrightarrow \text{код } 171. \end{aligned}$$

Заметим, что « x — четное число» назначается код 171, в то время как высказыванию «2 — четное число» соответствует код 223. Коды разные, и это правильно, поскольку речь идет о разных лингвистических объектах. Точно так же «1 — четное число», «3 — четное число», «4 — четное число» имеют разные числа Гёделя.

Наконец, число Гёделя также назначается каждой конечной последовательности высказываний (которое вычисляется на основе кодов высказываний, образующих последовательность). Идея этого назначения в том, чтобы гарантировать, что каждое доказательство также можно будет идентифицировать по его коду. Например, следующему доказательству того, что « $4 = 2 + 2$ » на основе аксиом « $S(x + y) = x + S(y)$ » и « $x + 1 = S(x)$ »:

$S(x + y) = x + S(y)$	173
$S(2 + 1) = 2 + S(1)$	199
$S(2 + 1) = 2 + 2$	13
$x + 1 = S(x)$	37
$2 + 1 = S(2)$	83
$2 + 1 = 3$	7
$S(3) = 2 + 2$	251
$4 = 2 + 2$	67

может соответствовать (гипотетически) код 2414871965597, который мы вычислили как произведение кодов высказываний,

НУМЕРАЦИЯ ГЁДЕЛЯ

Как в действительности определяется нумерация Гёделя? Чтобы определить ее, каждое высказывание и каждая пропозициональная функция должны быть выражены с помощью символов формального языка. Ученый назначил каждому символу этого языка нечетное число.

\forall	1
\Rightarrow	3
\neg	5
$=$	7
1	9
S	11
$+$	13
\cdot	15
$($	17
$)$	19
x_1	21
x_2	23
x_3	25

Количество переменных потенциально бесконечно. Оставшимся (x_4, x_5, \dots) соответствуют числа 27, 29 и так далее. Гёдель назначил коды высказываний и пропозициональных функций. Для большей ясности объясним метод на конкретном примере. Какой код соответствует, например, высказыванию « $1 = 1$ »? Шаги для его вычисления следующие.

1. Сначала остановимся на кодах символов, образующих высказывание: 9, 7, 9.
2. Поскольку есть три символа, теперь возьмем по порядку три первых простых числа: 2, 3, 5.
3. Тогда код следующий: $2^9 \cdot 3^7 \cdot 5^9 = 2187\ 000\ 000\ 000$. (Заметьте, что простые числа — это основания степеней, а коды символов — показатели степеней.)

Для вычисления числа Гёделя конечной последовательности высказываний поступают похожим образом, только на шаге 1 берутся по порядку коды высказываний, образующих последовательность, а на последнем шаге они становятся показателями степеней простых чисел.

его образующих (они указаны рядом с соответствующим высказыванием).

Конечно же, как и в предыдущих случаях, должен существовать механический способ, указывающий, как вычислить код последовательности высказываний, и другой, обратный способ, который при заданном коде позволил бы восстановить последовательность соответствующих ему высказываний. Наше правило вычисления кода последовательности как произведения индивидуальных кодов неверно, потому что игнорируется порядок высказываний (при перестановке высказываний местами код конечной последовательности остается тем же самым, но этого не должно происходить, так как при перестановке на самом деле получается другая последовательность). Однако, поскольку речь идет только о гипотетическом примере, мы не будем останавливаться на этом вопросе.

ПОНЯТИЕ ДОКАЗУЕМОСТИ МОЖНО ВЫРАЗИТЬ

Коды, или числа Гёделя, приводят не только к тому, что арифметическое высказывание можно связать с другим высказыванием, но и к возможности говорить о доказуемости этого высказывания. Например, при заданном утверждении P мы можем записать арифметическое высказывание, в котором говорилось бы, что « P недоказуемо». Посмотрим, как достичь этой цели.

Как только выбрано множество аксиом, можно без ошибки определить, какие высказывания доказуемы, а какие нет (хотя это может быть и очень сложно на практике). Каждому доказуемому высказыванию, в свою очередь, соответствует число Гёделя. Итак, у нас есть множество чисел, образованное кодами доказуемых высказываний.

Гёдель доказал, что оно характеризуется четко определенным арифметическим свойством. Другими словами, «быть кодом доказуемого высказывания» — свойство, выраженное на языке арифметики (который использует в качестве базовых

элементов сложение, умножение и логические операции). Другими словами, свойство « x — это код доказуемого высказывания» может сводиться к числовому свойству, выраженному в терминах сумм, произведений и логических операций. Как обычно говорят, понятие доказуемости можно выразить.

Подчеркнем: именно эта часть аргументации Гёделя зависит в основном от того факта, что программа Гильберта допускает только доказательства, проверяемые алгоритмически. Если бы были разрешены другие методы рассуждения (поговорим о них в следующей главе), то не было бы возможности гарантировать, что свойство « x — это код доказуемого высказывания» может быть выражено в арифметических терминах.

Все принципы математики сводятся к принципам логики.

Уиллард ван Орман Куайн. «С точки зрения логики»

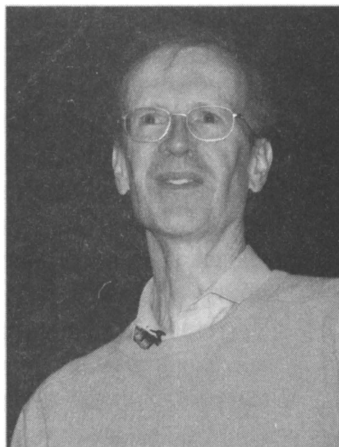
Как Гёдель доказал, что понятие доказуемости можно выразить? Для начала он доказал, что любое числовое свойство, проверяемое алгоритмически (например, «быть простым числом», «быть четным» или «делиться на 9»), всегда можно выразить с помощью сумм, произведений и логических операций.

Итак, то, что высказывание P доказуемо, означает, что существует доказательство (принимаемое программой Гильберта), в котором P — это конечное высказывание. В качестве примера мы уже приводили доказательство того, что « $4 = 2 + 2$ » на основе аксиом « $S(x + y) = x + S(y)$ » и « $x + 1 = S(x)$ ». Вспомним, что этому доказательству, с учетом последовательности высказываний, соответствует число Гёделя 2414871965597. Вспомним также, что « $4 = 2 + 2$ » соответствует число 67. В переводе на язык кодов доказуемость « $4 = 2 + 2$ » означает, что существует конечная последовательность высказываний (ее код 2414871965597), являющаяся доказательством, в котором конечное высказывание имеет код 67.

«Быть кодом доказательства» — это свойство, проверяемое алгоритмически, поскольку при заданном коде для осуществления проверки компьютер сначала использовал бы программу,

НАЙТИ ИЛИ ПРОВЕРИТЬ

Теория доказательства ставит две проблемы, которые хоть и схожи, но не должны смешиваться. Первая заключается в том, чтобы при данном высказывании P найти его доказательство (или доказать, что его не существует). Вторая — в том, чтобы определить, верно ли предложенное доказательство. Вторая проблема может быть сложной, но первая намного сложнее. Если методы доказательства подходящие, то вторая проблема может быть решена алгоритмически. Проблема нахождения доказательства, наоборот, неразрешима таким образом.



Британский математик Эндрю Уайлс.

Последняя теорема Ферма

В качестве примера можно рассмотреть последнюю теорему Ферма. В 1637 году Пьер Ферма записал, что если $n > 2$, то уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений для натуральных чисел. Ферма уверял, что у него есть доказательство этого факта, но так и не привел его. Проблема нахождения доказательства последней теоремы Ферма стала широко известной и в конце концов была решена Эндрю Уайлсом в 1996 году (он представил первое доказательство в 1995 году, но выяснилось, что в нем содержится ошибка, которая была исправлена почти через год). Определение правильности доказательства Уайлса потребовало несколько дней усилий; но для нахождения доказательства понадобилось более 350 лет.

восстанавливающую последовательность высказываний, соответствующую этому коду, а затем применил бы к этой последовательности высказываний алгоритм, который определяет, идет ли речь о доказательстве:

Код последовательности \rightarrow Последовательность высказываний \rightarrow Это доказательство?

Каждый шаг может осуществляться алгоритмически.

Следовательно, при заданных x и y свойство « y — это код доказательства, которое заканчивается высказыванием с кодом x » также является свойством, проверяемым алгоритмически, поскольку к предыдущей процедуре надо добавить только проверку того, что последовательность заканчивается высказыванием, соответствующим числу Гёделя x . Поскольку свойство проверяется алгоритмически, пропозициональную функцию « y — это код доказательства, которое заканчивается высказыванием с кодом x » можно выразить в терминах сумм, произведений и логических операций.

Наконец, делаем вывод, что выражение «существует некое y , являющееся кодом доказательства, заканчивающегося высказыванием с кодом x » также можно выразить арифметическими терминами. Фактически в этом утверждении говорится, что существует некое доказательство высказывания с кодом x , другими словами — что высказывание с кодом x доказуемо. Так мы приходим к выводу, что пропозициональную функцию « x — это код доказуемого высказывания» можно выразить арифметическими терминами.

Обычно этот арифметический перевод так сложен, что его явная структура может занять десятки страниц. Поэтому, чтобы понять идею доказательства Гёделя, предположим в качестве гипотетического примера, что свойство, характеризующее коды доказуемых высказываний, — это свойство «быть простым числом, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел». Тогда мы допускаем, что « x — это код доказуемого высказывания» равносильно « x — это простое число, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел».

Прежде чем продолжить, разберем это свойство. Простые числа — это числа, которые делятся только на единицу и на самих себя. Существует бесконечное число простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, ... (как уже говорилось в предыдущей главе, по техническим причинам число 1 не считается простым).

Число 23, например, простое и может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел, по-

скольку $23 = 17 + 19 - 13$ (заметим, что 13, 17 и 19 идут друг за другом в цепочке простых чисел, при выполнении операций их записали в другом порядке). В нашем примере мы можем убедиться, что 23 — это код доказуемого высказывания. Наоборот, 149 — это простое число, которое не может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел. Но 149 в нашем гипотетическом примере — это код высказывания «4 — нечетное число». Следовательно, говорить, что «149 не является простым числом, которое можно записать как сумму или разность трех последовательных простых чисел» равносильно тому, чтобы сказать: «высказывание о том, что 4 — нечетное число, является недоказуемым» (и действительно, оно недоказуемо, потому что мы предположили: аксиомы — это истинные высказывания, следовательно, всякое ложное высказывание недоказуемо). Повторим это понятие, поскольку это сердце доказательства Гёделя. Высказывание:

«149 не является простым числом, которое может быть
записано как сумма или разность трех последовательных
простых чисел» —

это, для начала, утверждение арифметического свойства, связанного с числом 149. Но используя нумерацию Гёделя, этому же высказыванию мы можем приписать значение:

«высказывание о том, что 4 — нечетное число,
является недоказуемым».

Существует два уровня прочтения «149 не является простым числом, которое можно записать как сумму или разность трех последовательных простых чисел». С одной стороны, чисто арифметически это дословный уровень, на котором мы истолковываем высказывание, выражая свойства числа 149. С другой стороны, у нас есть высший уровень прочтения, метаматематический, зависящий от нумерации Гёделя, и на нем мы истолковываем высказывание, говоря, что утверждение «4 — нечетное число» недоказуемо.

МЕТОД САМОРЕФЕРЕНЦИИ

Мы увидели, что с помощью нумерации Гёделя можно получить арифметические высказывания, в которых идет речь о других арифметических высказываниях. Теперь посмотрим, как мы можем сформулировать высказывание, в котором речь идет о самом себе.

Предположим, что 101 — это код некоего высказывания Q . При таком предположении высказывание «101 — нечетное число» относится к Q и означает «код высказывания Q нечетный». Теперь представим себе, что мы ищем, какому высказыванию соответствует код 101 (то есть задаемся вопросом, что такое Q), и выясняем, что 101 — это число Гёделя для «101 — нечетное число». В этом случае «101 — нечетное число» действительно относится к самому себе и может быть переведено как «мой код — нечетное число».

Да, так и есть, можно построить высказывание, относящееся к его собственному коду. В своей статье Гёдель изложил систематический метод, позволяющий записать арифметические высказывания, относящиеся к собственному коду. Если P — это любое арифметическое свойство (такое, как «быть четным числом» или «быть простым числом»), то этот метод — *метод самореференции* — объясняет, как записать высказывание, которое может означать «мой код выполняет свойство P ». Основной инструмент этого метода — функция $d(x)$, которую Гёдель назвал диагональной.

Функция — это правило, которое каждому числу x ставит в соответствие другое число. Оно может совпадать с x или отличаться, но вычисляется однозначно (одному и тому же x не могут соответствовать два разных числа). Правилами могут быть «умножить число x само на себя» или «прибавить 3 к числу x ». Для числа 2 первая функция даст значение 4, а вторая — 5. В частности, нас интересуют функции, которые могут быть выражены в терминах сумм, произведений и логических операций.

Пропозициональные функции получили это название, потому что они похожи на функции, но ставят в соответствие

не числа, а высказывания. Например, пропозициональная функция « x — четное число» сопоставляет числу 2 высказывание «2 — четное число».

В запись пропозициональных функций мы можем ввести числовые функции, если только они могут быть выражены в терминах сумм, произведений и логических операций. Так, мы можем записать: « $x + 3$ — простое число» или даже « x^2 делится на 18», и в обоих случаях это полноправные пропозициональные функции.

Теперь рассмотрим определение функции $d(x)$, которая на самом деле вычисляется только для чисел, являющихся кодами пропозициональных функций. Поясним определение на примере. Возьмем код пропозициональной функции, например 171, который, как мы предположили, является числом Гёделя выражения « x — четное число». Далее в этой пропозициональной функции заменим x числом 171. Мы получим высказывание «171 — четное число». Код этого высказывания — $d(171)$, число, которое диагональная функция назначает числу 171:

171 → соответствует « x — четное число» → заменяем x на 171 → «171 — четное число» → $d(171)$ — код «171 — четное число».

В первых примерах мы указали, что «171 — четное число» имеет код, равный 61. Следовательно, $d(171) = 61$. Диагональная функция сопоставляет числу 171 значение 61.

Во втором примере вычислим $d(162)$, где 162 — это код « x делится на 18»:

162 → соответствует « x делится на 18» → заменяем x на 162 → «162 делится на 18» → $d(162)$ — это код «162 делится на 18».

Так как «162 делится на 18» имеет код 103, то $d(162) = 103$.

Все шаги, определяющие диагональную функцию, могут быть вычислены алгоритмически, следовательно, ее опреде-

ление можно выразить с помощью сумм, произведений и логических операций. Это обстоятельство дает нам право ввести числовую функцию $d(x)$ в выражение пропозициональной функции, точно так же как в предыдущих примерах мы это делали с x^2 или $x + 3$. Таким образом мы можем рассмотреть выражение « $d(x)$ — четное».

Предположим, что « $d(x)$ — четное» соответствует код 423, и применим эту процедуру для вычисления $d(423)$:

423 → соответствует « $d(x)$ — четное» → заменяем x на 423 →
→ « $d(423)$ — четное» → $d(423)$ — код « $d(423)$ — четное».

ТЕОРЕМА ГУДСТЕЙНА

Возьмем любое натуральное число, например 25. На его основе построим последовательность чисел, называемую последовательностью Гудстейна для числа 25 (названа в честь Рубена Луиса Гудстейна (1912–1985), английского математика, который впервые ее определил). Для получения второго числа последовательности запишем 25 как сумму степеней числа 2 так, чтобы каждая степень появлялась ровно один раз (1 — это тоже степень числа 2, поскольку $2^0 = 1$):

$$25 = 2^4 + 2^3 + 1.$$

И запишем также каждый показатель степени как сумму степеней числа 2:

$$25 = 2^{2^2} + 2^{2^1} + 1.$$

Второй член последовательности получается, если заменить каждое 2 на 3 в выражении $2^{2^2} + 2^{2^1} + 1$ и затем вычесть 1:

$$(3^{3^2} + 3^{3^1} + 1) - 1 = 3^{3^2} + 3^{3^1} = 7625597485068$$



Посмотрим внимательно на последний шаг: $d(423)$ — это код « $d(423)$ — четное». То есть « $d(423)$ — четное число» может читаться как самореферентное высказывание, говорящее о своем собственном коде следующее: «мой код — четное число». Если бы у « $d(423)$ — четное число» кодом было 503, то высказывание можно было бы записать как «503 — четное число» и в нем бы ложно утверждалось, что его собственный код — четное число.

Метод самореференции говорит, что эта процедура может применяться к любому арифметическому свойству P . Возьмем пропозициональную функцию « x выполняет свойство P »

Второе число последовательности Гудстейна для числа 25 — это 7625597485068. Для получения третьего числа заменяем каждое 3 на 4 в $3^{3^3} + 3^{3^{3^3}}$ и вычитаем 1. Получается $4^{4^4} + 4^{4^{4^4}} - 1$, операция, которая в результате дает число из 155 цифр. Прежде чем перейти к следующему шагу, надо записать $4^{4^4} + 4^{4^{4^4}} - 1$ как сумму степеней числа 4, в которой каждая степень появляется самое большое 3 раза и в которой показатели степени также являются суммой степеней числа 4. Заметьте, что $4^{4^4} + 4^{4^{4^4}} - 1$ не записано таким образом, поскольку присутствует вычитание. Правильная запись:

$$4^{4^4} + 4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^{4^{4^4}} + 4^{4^{4^4}} + 4^{4^{4^4}} + 4^{4^4} + 4^{4^4} + 4^{4^4} + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1.$$

Чтобы получить четвертое число, заменим каждое 4 на 5 и вычтем 1. То есть:

$$5^{5^5} + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^5 + 5^{5^{5^5}} + 5^{5^{5^5}} + 5^{5^{5^5}} + 5^{5^5} + 5^{5^5} + 5^{5^5} + 5 + 5 + 5 + 1 + 1.$$

Результат последнего вычисления состоит из более чем 2000 цифр. Для получения следующего числа заменим каждое 5 на 6 и вычтем 1, и так далее. Кажется, что последовательность растет до бесконечности. Однако в теореме Гудстейна, доказанной им около 1950 года, утверждается, что вне зависимости от исходного числа последовательность всегда за конечное количество шагов достигнет 0. В доказательстве Гудстейна были использованы понятия теории множеств и оставалась открытой возможность того, что оно неосуществимо на основе аксиом Пеано. Это было подтверждено в 1982 году Лори Кирби и Джеффом Пэрисом, которые доказали, что теорема Гудстейна действительно недоказуема на основе аксиом Пеано с помощью рассуждений, проверяемых алгоритмически.

и трансформируем ее в « $d(x)$ выполняет свойство P ». Если код последнего выражения — число n , то « $d(n)$ выполняет свойство P » может быть прочитано посредством кодификации Гёделя как самореферентное высказывание, гласящее: «мой код выполняет свойство P ». Теперь посмотрим, как этот метод приведет нас в итоге к искомому высказыванию G .

Мы уже сказали, что «быть кодом доказуемого высказывания» — это свойство, которое можно выразить в терминах сумм, произведений и логических операций. Очевидно, что то же самое происходит и с его отрицанием. Следовательно, мы можем записать пропозициональную функцию:

« x не является кодом доказуемого высказывания»,

что, как говорится в методе самореференции, превращается в:

« $d(x)$ не является кодом доказуемого высказывания».

Если его код — число m , то:

G : « $d(m)$ не является кодом доказуемого высказывания»

имеет в качестве кода число $d(m)$ и может рассматриваться как самореферентное высказывание, говорящее о своем коде следующее: «мой собственный код не соответствует доказуемому высказыванию». Другими словами, в G говорится:

« G недоказуемо».

Как мы видели в начале доказательства, это высказывание является истинным и одновременно недоказуемым (вспомним, что «доказуемый» всегда означает «доказуемый на основе предложенных аксиом»). Мы доказали, что существует высказывание G , являющееся истинным и недоказуемым, и описали шаги, необходимые для того, чтобы записать его. Этим завершается доказательство первой теоремы Гёделя о неполноте.

ПАРАДОКС ЛЖЕЦА

Один из самых древних известных парадоксов — это так называемый парадокс лжеца. Он возникает, если поставить вопрос, является ли утверждение «это предложение ложное» истинным или ложным. Если утверждение истинно, то, судя по его смыслу, оно оказывается ложным. Но если оно ложно, то оно получается истинным. Так мы сталкиваемся с бессмыслицей, порочным кругом, который снова и снова приводит нас от истинности к ложности и от ложности к истинности. В своей статье 1931 года Гёдель объяснил, что его доказательство найдено под влиянием парадокса лжеца, только вместо того чтобы написать высказывание, говорящее о собственной ложности, Гёдель написал высказывание, говорящее о собственной недоказуемости. Высказывание «это предложение ложно» — парадоксальная бессмыслица. Но высказывание «это предложение недоказуемо на основе предложенных аксиом» — недоказуемая истина.

Важное пояснение: рассуждение, которое мы провели, на самом деле не является формальным доказательством первой теоремы Гёделя о неполноте. Это только введение, полезное для понимания основных идей, но не объясняющее специфических деталей того, как эти идеи применяются на практике. Если читателя заинтересовали детали, он может углубиться в технические работы по математической логике.

Как выглядело бы высказывание G в нашем гипотетическом примере? Вспомним, что в этом примере свойство, характеризующее коды доказуемых высказываний, — это «быть простым числом, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел». Возьмем пропозициональную функцию « x не является простым числом, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел» и трансформируем ее в « $d(x)$ не является простым числом, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел». Предположим, что последнему выражению соответствует число 909.

Тогда высказывание G формулируется как

« $d(909)$ не является простым числом, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел».

Также предположим, что $d(909)$ — это число 43. Следовательно, G примет вид

«43 не является простым числом, которое может быть записано как сумма или разность трех последовательных простых чисел».

Как уже было указано раньше, G имеет два уровня прочтения. На элементарном уровне это выражение арифметического свойства числа 43. Только когда мы смотрим на него через призму кодификации Гёделя, оно превращается в самореферентное и может читаться как говорящее о самом себе, что оно недоказуемо. Во второй главе мы увидим, что это замечание о различных уровнях прочтения позволяет преодолеть видимый парадокс, который возникает из анализа второй теоремы Гёделя.

НЕДОКАЗУЕМАЯ ИСТИНА

В связи с первой теоремой о неполноте обычно возникает вопрос: если G — недоказуемая истина, как мы можем быть уверены в ее истинности?

Ответ заключается в том, что «доказуемый» — относительное понятие. Если задано множество аксиом A , существует истинное высказывание G , которое недоказуемо на основе этих аксиом (с использованием методов доказательства, принятых в программе Гильберта). Но ничто не мешает G быть доказуемым на основе других аксиом или с помощью других методов.

Хотя это пока точно не известно, последняя теорема Ферма может быть примером истины, недоказуемой на основе аксиом Пеано. В этой теореме, впервые предложенной Пьером

Ферма в 1637 году, утверждает, что если $n > 2$, то $x^n + y^n + z^n$ не имеет решений среди натуральных чисел. После многочисленных попыток теорема наконец была доказана Эндрю Уайлсом в 1996 году.

Однако доказательство Уайлса во многом выходит за пределы обычных методов или аксиом арифметики. Последняя теорема Ферма истинна (Уайлс доказал это), но доказуема ли она, например, на основе аксиом Пеано с помощью методов программы Гильберта? Сегодня ответ на этот вопрос неизвестен, но наиболее разумное предположение заключается в том, что последняя теорема Ферма недоказуема на основе аксиом Пеано посредством рассуждений, проверяемых алгоритмически.

Однако если G недоказуемо на основе множества A аксиом, вполне возможно добавить во множество A новую аксиому, так что G станет доказуемым на основе этой расширенной системы, которую обозначим A' . Конечно, для A' также справедлива теорема Гёделя, и, следовательно, будет существовать арифметическое утверждение G' , которое является недоказуемым на ее основе.

Мы можем добавить в A' новую аксиому, которая позволит доказать G' , и так получим множество A'' , где G' будет доказуемым. Но для A'' существует новое недоказуемое высказывание G'' . Мы можем добавить новую аксиому в A'' , но тогда существует недоказуемое G''' ... И так до бесконечности...

$A \rightarrow G$ недоказуемо.

$A' = A + \text{другая аксиома} \rightarrow G$ доказуемо, но G' — нет.

$A'' = A' + \text{другая аксиома} \rightarrow G$ и G' доказуемы, но G'' — нет.

$A''' = A'' + \text{другая аксиома} \rightarrow G, G'$ и G'' доказуемы, но G''' — нет.

Добавляя аксиомы по одной, никогда не удастся достигнуть полноты (то есть возможности доказать все истины). Но можно ли добиться этого другими средствами? Обратимся к этому вопросу в следующей главе.

Вторая теорема Гёделя

Гильберт потратил десять лет на разработку своей программы, и этот период был полон борьбы. После всех усилий, когда первая теорема Гёделя о неполноте показала, что программа неосуществима, сдался ли Гильберт? Не искал ли он неточности в доказательстве Гёделя? Неужели даже не протестовал? В этой главе мы проанализируем, как Гёделю удалось представить доказательство своей теоремы о неполноте таким образом, чтобы никто — даже Гильберт — не мог усомниться в ее справедливости.

Публикация первой теоремы Гёделя о неполноте в 1931 году сделала его международной знаменитостью в мире математики. Его имя зазвучало на всех встречах и конгрессах, а его доказательство стало (и остается до сих пор) классикой математического рассуждения. Однако Гёдель не смог сразу же насладиться славой, поскольку по завершении этой работы пережил сильный нервный срыв и вынужден был отказаться от публичной деятельности на несколько месяцев. Почти наверняка это было результатом стресса, вызванного представлением его теоремы.

На самом деле в статье 1931 года Гёдель представил две теоремы. Одна из них — уже упомянутая первая теорема о неполноте, также известная как теорема Гёделя. Именно ее мы доказали в предыдущей главе и вернемся к ней еще. В теореме говорится, что если выбрать в качестве арифметических аксиом любое множество истинных высказываний и принимать только доказательства, проверяемые алгоритмически, то всегда найдется истинное высказывание, недоказуемое на основе этих аксиом.

Другая теорема, которую Гёдель представил в этой статье 1931 года, сегодня известна как вторая теорема о неполноте, или вторая теорема Гёделя. В ней говорится о невозможности алгоритмически проверить истинность множества арифметиче-

ских аксиом. Мы обсудим эту теорему чуть позже. Следует сказать, что в статье не содержалось ее детального доказательства. Гёдель ограничился лишь тем, что в общих чертах изложил идею и отметил, что собирается написать вторую часть статьи с полным доказательством. Однако болезнь помешала ему сделать это в ближайшие месяцы, а после выздоровления выяснилось, что доказательства обеих теорем (даже второй, о которой ученый только намекнул) получили всеобщее признание. В этой ситуации Гёдель не счел нужным публиковать дополнительные пояснения, поэтому вторая часть статьи так и не была написана. (Оригинальное название статьи на немецком языке заканчивается римской цифрой I: это указывает на то, что речь идет только о первой части. В переводах на испанский, английский и другие языки ее обычно опускают.)

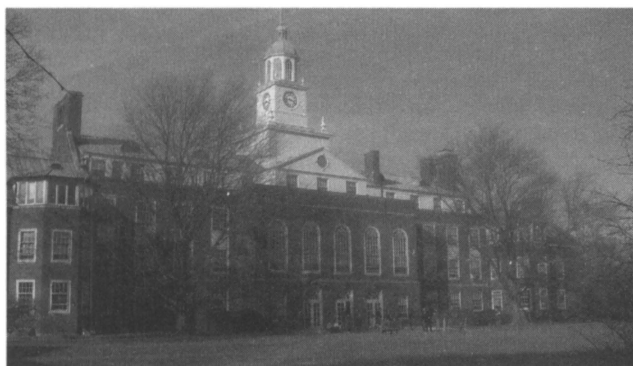
Преодолев нервный кризис, Гёдель в 1933 году начал работу в Венском университете в качестве приват-доцента. В то время в университетах Центральной Европы с должности приват-доцента обычно начинали карьеру преподавателя. Кроме того, как мы уже сказали, Гёдель превратился в международную знаменитость и в том же году был приглашен в США прочесть лекцию на ежегодном собрании Американского математического общества.

Во время этой первой поездки в США Гёдель познакомился с Альбертом Эйнштейном, который эмигрировал туда в 1933 году. Между ними сразу зародилась теплая дружба, которая длилась до самой смерти Эйнштейна в 1955 году.

В последующие два года, 1934 и 1935, Гёдель снова ездил в США, уже по приглашению Института перспективных исследований в Принстоне. В этом учреждении он прочитал несколько курсов и лекций, не только по своим теоремам о неполноте, но и по темам, затронутым в последующих исследованиях. Среди них, например, такая проблема: существует ли алгоритм, который при заданном множестве аксиом и высказывании P позволит определить, доказуемо ли P на основе этих аксиом? Гёдель получил несколько частичных решений, а полностью проблема была решена в 1936 году американским логиком Алонзо Чёрчем, который доказал, что алгоритма с такими

ИНСТИТУТ ПЕРСПЕКТИВНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ПРИНСТОНЕ

Институт перспективных исследований в Принстоне (Нью-Джерси, США), основанный в 1930 году, имел целью собрать международную научно-исследовательскую элиту. И действительно, в нем трудились такие прославленные ученые, как Курт Гёдель, Альберт Эйнштейн, Джулиус Роберт Оппенгеймер (американский физик-теоретик, научный руководитель Манхэттенского проекта), Джон фон Нейман, Оскар Моргенштерн (последние двое — создатели теории игр) и Герман Вейль (выдающийся немецкий физик и математик).



характеристиками не существует. Эта проблема, как и другие, поставленные самим Гёделем или другими логиками, вдохновленными его исследованиями, положила начало теории вычислимости, то есть изучению того, при каких условиях математическая проблема решается алгоритмически.

Во время поездок в США Гёдель продемонстрировал свои методы, идеи и поставленные им проблемы, и это дало импульс развитию американской школы математической логики, где блистали Уиллард ван Орман Куайн, Стивен Коул Клини и уже упомянутый Алонзо Чёрч. Также работы Гёделя дали толчок развитию математической логики в целом; по сравнению с дру-

АЛОНЗО ЧЁРЧ

Алонзо Чёрч был одним из главных представителей американской школы математической логики, которая образовалась практически сразу после прочтения Гёделем курсов и лекций в США в 1930-х годах. Чёрч родился в Вашингтоне 14 июня 1903 года и изучал математику в Принстонском университете, где защитил докторскую диссертацию в 1927 году. Его научным руководителем был Освальд Веблен (который помогал в организации Института перспективных исследований в Принстоне и пригласил Гёделя прочитать там свои первые лекции). Чёрч внес вклад в логику первого порядка, теорию вычислимости (которая исследует, какие математические проблемы могут быть решены алгоритмически, а какие нет) и теоретическую информатику. Он также создал лямбда-исчисление, которое до сих пор является важным инструментом в изучении теории алгоритмов. Ученый скончался в США в 1995 году.



гими ученый публиковал очень мало научных работ, но каждая из них открывала новую отрасль в логике и вводила методы и идеи, актуальные до сих пор.

АНШЛЮС

В то время как Гёдель наслаждался плодами растущего академического престижа, политическая ситуация в Вене становилась всё более сложной. После того как Адольф Гитлер пришел к власти, он объявил о своем намерении сделать Австрию частью Германии. С этой целью он начал политическое и военное

давление на соседнюю страну. В 1931 году он потребовал, чтобы нацистская партия, которая в Австрии была запрещена, получила признание и вошла в состав правительства. Однако на выборах в Австрии в апреле 1932 года нацисты не одержали ожидаемой победы, так что перешли в оппозицию и прибегли к террористическим методам. Произошла серия терактов, убийств высокопоставленных лиц и попыток государственного переворота, которые к 1937 году привели Австрию к угрозе гражданской войны.

Насколько известно, первые годы этой бурной политической жизни особо не затронули Гёделя, который без перерывов продолжал свои исследования и поездки в США. Но 22 июня 1936 года Мориц Шлик, один из его наставников и основатель Венского кружка, был убит. Когда Гёдель узнал об этом, у него случился новый нервный срыв, на восстановление после которого потребовалось несколько месяцев. В том году ученый снова должен был отправиться в США, но поездку пришлось отменить. Гёдель не смог возобновить научную работу до 1937 года.

В феврале 1938 года Гитлер выдвинул ультиматум: Австрия должна добровольно присоединиться к Третьему рейху, или ее присоединят силой. После многочисленных споров, во время которых дважды сменилось правительство, в марте был проведен референдум о присоединении к Германии. Голосование не было секретным; бюллетень с отметкой принимал офицер СС, который и помещал его в урну. При таких обстоятельствах неудивительно, что за присоединение к Германии проголосовало более 99% избирателей, после чего 12 марта Австрия стала провинцией нацистской Германии (это событие было названо аншлюсом, что по-немецки означает «присоединение» или «аннексия»).

Нацисты сразу же реформировали австрийскую университетскую систему, после чего некоторые интеллектуалы, включая Гёделя, остались без работы. Однако это не помешало ему в сентябре 1938 года заключить брак с Адель Поркерт, разведенной танцовщицей на шесть лет старше его, с которой Гёдель познакомился в 1927 году. Возможно, брак был первым шагом, необходимым для эмиграции, о которой Гёдель уже думал.

Адель и Курт были очень крепкой, любящей парой, хотя они и не демонстрировали публично нежность друг к другу.

Важно искать непротиворечивые доказательства, хотя любое непротиворечивое доказательство относительно в том смысле, что мы не можем доверять ему больше, чем доверяем той логической системе, в рамках которой развивается это непротиворечивое доказательство.

Уиллард ван Орман Куайн. «С точки зрения логики»

В 1938 и 1939 годах Гёдель вновь посетил Институт перспективных исследований, где, кроме проведения обычных курсов и лекций, постарался завязать необходимые контакты, чтобы подготовиться к вступлению в должность профессора этого института, если ему придется покинуть Австрию. После второй поездки в Вене на него напала группа ультраправых студентов, которых, как говорится в популярной истории, его супруга отогнала ударами зонтика.

Давление на Гёделя усиливалось, этот независимый интеллеktуал раздражал нацистов, и в конце концов в октябре 1939 года он был включен в черный список. Это официально подчеркивало статус безработного, а при нацистском режиме безработные почти автоматически призывались в армию. Действительно, через некоторое время Гёдель получил приказ о призыве. Единственно возможным выходом для Курта и Адели стало бегство в США (как и для многих европейских ученых того времени, включая Альберта Эйнштейна и Джона фон Неймана).

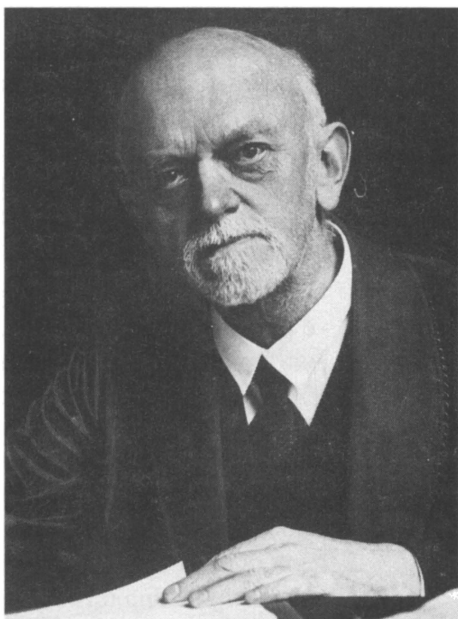
Война между Германией, Францией и Англией к тому времени уже началась, так что Гёделю и его супруге пришлось ехать в США самым долгим путем, через Россию, Японию и Тихий океан. Гёдель прибыл в Институт перспективных исследований в 1940 году и благодаря заранее установленным контактам сразу вступил в должность приглашенного профессора. В 1946 году он вошел в состав ученых института на постоянной основе, а в 1948-м — получил американское гражданство.



ВВЕРХУ:
Гитлер
приветствует
жителей Вены
в связи
с присоедине-
нием Австрии
к нацистской
Германии, март
1938 года.

ВНИЗУ СЛЕВА:
Адель Поркерт
и Курт Гёдель
в день свадьбы,
сентябрь
1938 года.

ВНИЗУ СПРАВА:
Немецкий
математик
Давид Гильберт
в 1930-е годы.
Созданная им
программа
стремилась
поставить
математику
на прочные
логические
основания.



Ученый так и не вернулся ни в Австрию, ни в Чехословакию. Годы спустя Венский университет предлагал ему должности и почести, но он не принял их.

СЕМАНТИЧЕСКИ ИЛИ СИНТАКСИЧЕСКИ

Прежде чем последовать за Гёделем в Принстон, вернемся в сентябрь 1930 года и восстановим образ юноши, который скромно поднял руку на конгрессе в Кёнигсберге, чтобы провозгласить первую теорему о неполноте.

Естественный вопрос, который мы еще не формулировали, состоит в следующем: после десяти лет разработки своей программы, размышлений и трудов сдался ли Гильберт без борьбы? Не пытался ли он оспорить рассуждения Гёделя? Правда состоит в том, что доказательство Гёделя было принято мгновенно и единодушно всеми, включая Гильберта, поскольку Гёдель не только очень хорошо продумал доказательство, но и был очень осторожен в способе его представления.

Как мы уже сказали, в программе Гильберта принимались только те доказательства, которые можно проверить алгоритмически, и к сентябрю 1930 года это ограничение принимали все математики, включая интуиционистов, которые, по словам Аренда Гейтинга, «примут с распростертыми объятиями» бесконечность, если только доказательства будут соответствовать этому критерию.

И так же, как Гильберт в свое время внес предложение с расчетом на то, чтобы убедить интуиционистов, Гёдель изложил доказательство первой теоремы о неполноте так, чтобы было очевидно, что ее правильность можно проверить алгоритмически и что она удовлетворяет условиям программы Гильберта. Даже Гильберт не смог выразить сомнений по этому поводу.

Как хорошо известно, прогресс математики в отношении
каждый раз все большей точности привел к [...] тому,
что рассуждения можно осуществить на основе небольших
механических правил.

КУРТ ГЕДЕЛЬ, ВВЕДЕНИЕ К «О ФОРМАЛЬНО НЕРАЗРЕШИМЫХ
ПРЕДЛОЖЕНИЯХ...» (1931)

Как Гёдель сделал очевидным, что доказательство его теоремы проверяется компьютером? Он прибегнул к «семантико-синтаксическому дуализму».

В математической логике понятие, связанное с последовательностью символов, считается *синтаксическим*, если оно зависит только от символов, образующих эту последовательность, при этом неважно его значение, если оно вообще существует. Например, если мы утверждаем, что последовательность букв *Kuna mbwa nyekundu* образована 18 символами (считая пробелы), мы говорим о синтаксическом понятии. Действительно, нашу правоту легко проверить с помощью простого подсчета символов, и нас не интересует, есть ли в этом ряду букв какой-то смысл. Другие примеры синтаксических понятий: «первая буква — K» или «здесь нет буквы h».

Наоборот, если понятие *семантическое*, оно зависит от значения, которое передает последовательность. Например, если мы говорим, что *Kuna mbwa nyekundu* истинно, то ясно, что мы говорим о семантическом понятии, потому что не можем сказать, является оно «истинным» или «ложным», если предварительно не узнаем, какое значение заложено в этой последовательности букв (если оно там есть).

На самом деле смысл в высказывании есть: *Kuna mbwa nyekundu* на суахили означает «бывают красные собаки» (см. рисунок). Теперь мы можем задаться вопросом, истинно предложение или ложно, но все равно ответ дать непросто. Ведь что такое красная собака? Она должна была родиться со шкурой такого цвета или ее могли покрасить позже? Уж не говоря о том, что люди воспринимают цвета по-разному. Целью всех этих рассуждений является пояснение: синтаксические аспек-



Свойство, относящееся к предложению, называют синтаксическим, если оно зависит только от самих символов, независимо от их значения (например, количество букв в предложении). Оно является семантическим, если зависит от значения (например, утверждение об истинности или ложности предложения). Синтаксические свойства проверяются механически; семантические — нет.

ты языка прозрачны, а вот семантические — связаны с путаницей и парадоксами. В соответствии с этой идеей основная предпосылка программы Гильберта состояла в требовании того, чтобы справедливость семантических аспектов математики контролировалась синтаксическими методами. Синтаксис, ясный и не вызывающий сомнений, должен был ограничивать семантику, грозящую парадоксами.

ПЕРЕСМОТР ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ

Итак, Курт Гёдель представил доказательство первой теоремы о неполноте таким образом, что всем было очевидно: ее можно проверить с помощью компьютера. Он изложил свое высказывание и каждый шаг доказательства теоремы, апеллируя только к синтаксическим понятиям.

В предыдущей главе мы сформулировали первую теорему Гёделя о неполноте (теорему Гёделя) следующим образом.

Если выбрать в качестве аксиом любое множество истинных арифметических высказываний и требовать, чтобы доказательства, которые получены на их основе, могли быть проверены алгоритмически, то будет по крайней мере одно ис-

тинное высказывание, которое не может быть доказано на основе этих аксиом.

В этой формулировке теоремы появляется семантическое понятие истинности. Поэтому Гёдель представил его в статье 1931 года не в такой форме. Формулировка Гёделя аналогична, но записана с помощью только синтаксических понятий.

Определим синтаксические понятия, которыми пользовался Гёдель, и переформулируем первую теорему о неполноте.

Для начала скажем, что «являться доказательством, соответствующим требованиям программы Гильберта» — это синтаксическое свойство, поскольку его можно проверить с помощью компьютера посимвольно. Следовательно, идея «доказуемого высказывания» также синтаксическая, поскольку высказывание P доказуемо, если существует доказательство, заканчивающееся этим высказыванием.

Даже понятие «высказывание» может быть определено синтаксически. Для начала, в аристотелевском определении говорится, что высказывание — это выражение, которому можно назначить значение истинности (истинно или ложно). Так,

« x — простое число»

не является высказыванием, поскольку его значение истинности зависит от того, каково x . И напротив, из двух высказываний:

«Существует некоторое x , являющееся простым числом»,
«Для любого x справедливо, что x — простое число»

первое истинное, а второе ложное.

Итак, это семантическое понятие может быть сформулировано синтаксически: высказывание — это выражение, не имеющее переменных (букв x , y , z), которые могут быть свободно заменены числами. То есть это выражение, в котором либо нет переменных, как в случае « $4 = 2 + 2$ », либо все они сопровожда-

ются выражениями типа «для любого x справедливо, что...» или «существует некоторое x , которое...», как это происходит в предыдущих двух примерах. Является выражение высказыванием или нет — это условие можно проверить посимвольно, при этом нет необходимости рассматривать значение выражений. Итак, «высказывание» и «доказуемое высказывание» — два синтакси-

СИНТАКСИЧЕСКАЯ АВТОРЕФЕРЕНЦИЯ

В своей работе *Principia Mathematica* («Принципы математики») Бертран Рассел утверждал, что все известные парадоксы всегда порождаются самореференцией. То есть они возникают из-за того, что в высказываниях прямо или косвенно говорится о них самих. Способ избежать любого парадокса, говорил Рассел, — исключить из языка любой намек на самореференцию. В семантическом самореферентном высказывании говорится о семантической характеристике как таковой. Таков случай «это предложение ложно», то есть утверждение, вызывающее парадокс лжеца. В синтаксической самореференции, наоборот, в самореферентном высказывании говорится о синтаксической характеристике как таковой. Например: «в этом предложении пять слов». Семантическая самореференция, как говорил Рассел, всегда опасна и подводит нас к границе парадокса. Синтаксическая самореференция, наоборот, не несет в себе никакого риска. Почему? Потому что синтаксическая самореференция иллюзорна; кажется, что в предложении говорится о нем самом, но на самом деле здесь раздвоение: в значении предложения говорится не о нем самом, а о символах, которые его образуют. Когда мы говорим: «в этом предложении пять слов», мы имеем в виду:

«В предложении «в этом предложении пять слов» содержится пять слов».

Отрицание этого:

«В предложении «в этом предложении пять слов» содержится не пять слов».

Мы говорим о символах, а не о смысле, так что нет риска получить парадокс. В высказывании Гёделя G утверждается, что оно недоказуемо, то есть речь идет о синтаксической характеристике себя самого. Так как самореференция синтаксическая, рассуждения на основе G никогда не приведут нас к парадоксу.

ческих понятия, которые Гёдель мог использовать при формулировании своей теоремы.

НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ

Другое важное понятие для синтаксической формулировки первой теоремы о неполноте — это понятие непротиворечивости. Множество аксиом является непротиворечивым, если не существует ни одного высказывания P такого, чтобы P и $\neg P$ были одновременно доказуемы на основе этих аксиом (с синтаксической точки зрения $\neg P$ получается простым размещением слева от P символа, обозначающего отрицание).

Хотя далее мы увидим, какая связь существует между тем, чтобы быть «непротиворечивым» и быть «истинным», очевидно, что непротиворечивость — это чисто синтаксическое понятие (поскольку зависит от синтаксического понятия доказуемости).

Если все аксиомы — истинные высказывания, то множество аксиом непротиворечиво. Действительно, из истинных предпосылок получаются только истинные выводы. Тогда только одно из высказываний P и $\neg P$ ложно; следовательно, если все аксиомы истинны, невозможно, чтобы P и $\neg P$ были доказуемы одновременно (ложное не будет доказуемым).

Значит ли это, что выражение «непротиворечивое множество аксиом» равносильно «множеству истинных аксиом»? Это тонкий вопрос, который заслуживает тщательного анализа.

Начнем с вопроса, является ли высказывание «2 — простое число» истинным. Почти любой человек сразу же скажет, что его истинность очевидна. Однако более правильным ответом будет «когда как». Это зависит от Вселенной, в контексте которой мы сейчас работаем. Если подразумевается, что речь идет о натуральных числах, то высказывание действительно истинно, но в другом контексте оно может быть ложным.

Вспомним, что число (отличное от единицы) является простым, если делится только на единицу и само на себя. Можно выразить это понятие по-другому: 2 — простое число, поскольку единственный способ представить его в виде произведения двух чисел тривиален: $2 = 2 \times 1$ (запись $2 = 1 \times 2$ считается совпадающей с ней, так как в ней используются те же числа). А вот число 15 не является простым, поскольку его можно представить, помимо тривиального способа $15 = 1 \times 15$, также как $15 = 3 \times 5$.

Но точно ли единственный способ записать число 2 в виде произведения — это $2 = 2 \times 1$? В мире натуральных чисел — да. Но существуют и другие миры.

Расширим наш числовой мир и включим в него все числа, которые получаются умножением $\sqrt{2}$ на натуральное число (и на нуль), а затем прибавлением другого натурального числа (или нуля). Например, этот мир содержит числа $3 + 4\sqrt{2}$ или $7\sqrt{2}$. Также в нем содержится само число $\sqrt{2}$, которое записывается как $0 + 1\sqrt{2}$, и все натуральные числа, которые могут быть записаны как:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + 0\sqrt{2} \\ 2 &= 2 + 0\sqrt{2} \\ 3 &= 3 + 0\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Итак, в этом мире 2 — не простое число, поскольку может быть записано как $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$. Высказывание «2 — простое число» верно среди натуральных чисел, но ложно в мире, который мы определили по-другому (см. схему).

Какова связь между непротиворечивостью и истинностью? Ответ дан теоремой Лёвенгейма — Скулема (доказанной в 1915 году Леопольдом Лёвенгеймом для частного случая и в 1920 году Туральфом Скулемом для общего случая): множество аксиом является непротиворечивым, если существует какой-нибудь мир, в котором все аксиомы являются истинными высказываниями. Следовательно, множество, образованное двумя аксиомами:



Для любого x справедливо, что $x + 0 = x$;
 2 не является простым числом

непротиворечиво, поскольку существует мир, в котором обе аксиомы одновременно истинны. С синтаксической точки зрения это означает, что не существует такого высказывания P , что P и $\neg P$ доказуемы на основе этих двух предпосылок одновременно.

Но можем ли мы принять « 2 не является простым числом» за аксиому? Не должны ли аксиомы быть очевидными сами по себе? В чисто синтаксическом мире, в котором истинности и ложности не существует, нет смысла говорить об очевидных высказываниях. Любое из них может быть взято за аксиому. Почему основополагающей является непротиворечивость? Что произойдет, если множество аксиом будет противоречивым? С семантической точки зрения это означает, что нет ни одного возможного мира, в котором все высказывания одновременно истинны. Но у противоречивости системы аксиом есть и синтаксическое следствие, поскольку

если множество аксиом противоречиво, то на его основе можно доказать любое высказывание.

Предположим, что существует некое высказывание P такое, что множество аксиом позволяет доказать как P , так и $\neg P$, и возьмем любое высказывание Q . Мы хотим доказать, что Q доказуемо. Для этого вспомним несколько правил логики:

а) из « P » всегда выводится « $\neg Q \Rightarrow P$ »;

- б) из «не- $Q \Rightarrow P$ » выводится «не- $P \Rightarrow Q$ »;
в) из « P » и « $P \Rightarrow Q$ » выводится « Q » (это правило вывода, *modus ponens*).

Заметим, что все они сформулированы синтаксически и апеллируют к форме высказываний, а не к их значению. Предположим, как мы сказали, что P и не- P доказуемы. Получается следующее.

1. P доказуемо, по гипотезе.
2. Выводится, что «не- $Q \Rightarrow P$ » доказуемо, по правилу «а».
3. Следовательно, «не- $P \Rightarrow Q$ » доказуемо, по правилу «б».
4. Не- P доказуемо, по гипотезе.
5. Из не- P (пункт 4) и «не- $P \Rightarrow Q$ » (пункт 3), по правилу *вывода*, выводится Q .
6. Следовательно, Q доказуемо.

Поскольку Q было произвольным высказыванием, можно сделать вывод, что любое высказывание доказуемо на основе аксиом. То есть любое высказывание доказуемо на основе противоречивого множества аксиом.

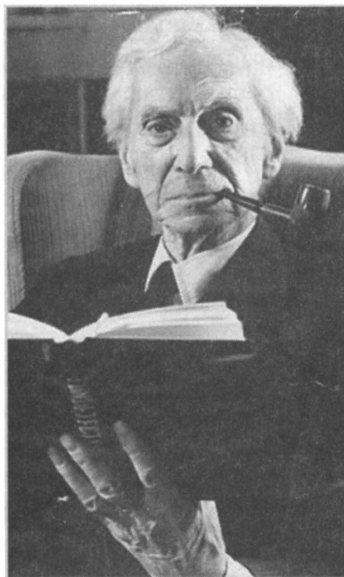
Заметим, что проделанные нами рассуждения чисто синтаксические и не затрагивают ни значения P или Q , ни таких семантических понятий, как «истинно» или «ложно». Мы основывались только на синтаксических правилах логики и на виде высказываний. Таким типом аргументов Гёдель воспользовался для изложения доказательства своей теоремы.

Бертран Рассел в своем парадоксе на самом деле показал, что система аксиом, которую предложил Фреге, противоречива. Рассмотрим эту идею более подробно. Вспомним, что Рассел определил множество R , образованное всеми множествами, не являющимися членами самих себя.

Если R является членом самого себя, то выводится, что оно им не является. Это противоречие, которое возникает от предположения, что R — член самого себя, дает основание допустить: R не является членом самого себя. Но если предположить это, то логическим путем можно прийти к выводу, что

ПРИМЕР РАССЕЛА

Как-то раз, читая лекцию для широкой публики, Бертран Рассел упомянул, что если множество аксиом противоречиво, то любое утверждение доказуемо на их основе. Рассел объявил об этом в семантическом виде, говоря, что исходя из ложной предпосылки можно доказать любую вещь. Аудитория сразу же предложила ученому доказать, что Смит (один из слушателей) является Папой Римским, исходя из ложной предпосылки о том, что $1 = 0$. Рассел рассуждал так: если $1 = 0$, то при прибавлении 1 к обоим членам мы делаем вывод, что $2 = 1$. Теперь подумаем о множестве, образованном Смитом и Папой. У этого множества два члена, но так как $2 = 1$, то мы можем сказать, что у множества только один член. То есть Смит и Папа — это одно и то же лицо.



все-таки является. Тогда получается, что R является членом самого себя. Парадокс Рассела на самом деле демонстрирует: существует такое высказывание, что и оно, и его отрицание доказуемы на основе аксиом Фреге. Другими словами, как уже говорилось, это демонстрирует противоречивость аксиом Фреге.

ПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ И ПОЛНОТА

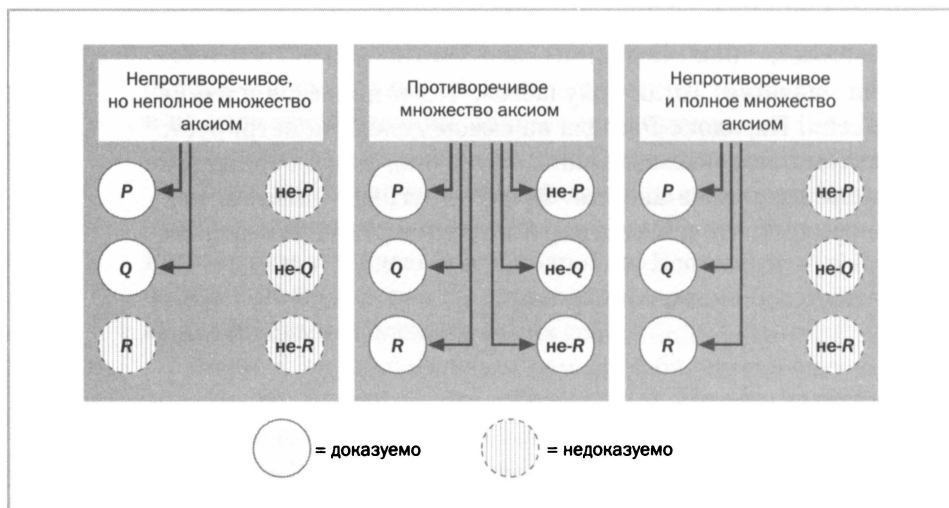
На основе противоречивого множества аксиом доказуемо что угодно. В связи с этим возникает новое синтаксическое поня-

тие *полноты*. Множество аксиом является *полным*, если для любого высказывания либо оно, либо его отрицание (по крайней мере одно из них) доказуемо.

Тогда мы можем утверждать, что любое противоречивое множество аксиом является полным, поскольку при любом высказывании P как P , так и $\text{не-}P$ доказуемы. Но речь идет о тривиальной полноте, которая не дает никакой информации, поскольку абсолютно все доказуемо, даже те высказывания, которые противоречат сами себе, например «для любого x справедливо то, что x отличается сам от себя».

Более интересно рассмотреть множество аксиом, являющееся одновременно полным и непротиворечивым. Множество аксиом с такой характеристикой приблизилось бы к выполнению цели программы Гильберта. Действительно, если система непротиворечива, то ее высказывания истинны в каком-нибудь мире, а если она полна, то все истины, относящиеся к этому миру, доказуемы (см. схему).

Но в программе Гильберта искали аксиомы для арифметики, а не произвольного мира. Есть ли какой-нибудь синтаксический способ сформулировать эту цель? Да, такой способ есть.



ФИНИТНЫЕ ВЫСКАЗЫВАНИЯ

Существуют некоторые арифметические высказывания, истинность или ложность которых можно проверить алгоритмически за конечное количество шагов, — интуиционисты могли бы считать их истинными или ложными без споров, в основном потому что они не затрагивают идею бесконечности (даже в потенциальном значении).

Например, следующие финитные высказывания

$$\begin{aligned} &\langle 2 + 3 = 5 \rangle \\ &\langle 3 \times 7 = 21 \rangle \\ &\langle 45 \text{ делится на } 9 \rangle \\ &\langle 2 - \text{ простое число} \rangle \end{aligned}$$

истинны (во всех этих случаях мы рассматриваем мир натуральных чисел), а $\langle 2 \times 3 = 10 \rangle$ — финитное и ложное. Высказывание

«Любое четное число, большее 2, является суммой двух простых чисел»

не является финитным, поскольку предполагает бесконечное число случаев. Действительно, это равносильно «4 — сумма двух простых чисел, и 6 — сумма двух простых чисел, и 8 — сумма двух простых чисел (и так далее)».

Заметим, что «36 — сумма двух простых чисел» является финитным высказыванием. Действительно, если 36 — сумма двух простых чисел, то они обязательно меньше 36. Существует всего 11 простых чисел, меньших 36 (это 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31), и 55 пар, которые из них можно образовать. Чтобы посмотреть, истинно ли высказывание, достаточно проверить одну за другой эти 55 пар и убедиться, даст ли какая-нибудь в сумме 36. Высказывание истинно, поскольку $36 = 5 + 31$.

Напротив, для высказывания «43 является суммой или разностью трех последовательных простых чисел» тот факт, что мы говорим о сумме или разности, предполагает: задей-

ГИПОТЕЗА ГОЛЬДБАХА

Утверждение о том, что любое четное число является суммой двух простых, известно как гипотеза Гольдбаха. Он сформулировал ее в 1742 году в письме знаменитому швейцарскому математику Леонарду Эйлеру (1707–1783). До сих пор неизвестно, верна ли эта гипотеза. Она выполняется для большого числа четных чисел, но до сих пор никто не нашел доказательства для всех возможных случаев, так же как и не нашли примера, при котором гипотеза была бы ложной.



ствованные простые числа могут быть настолько большими, насколько мы захотим. Поиск простых чисел потенциально бесконечен, поэтому высказывание не финитное.

Итак, если мы предложим множество аксиом арифметики, то наименьшее, чего мы можем от него требовать — это способности доказать все финитные истинные высказывания. Следует заметить: во всем, что мы только что сказали, слово «истинное» связано с финитными высказываниями. В этом ограниченном контексте «истинное» и «ложное» становятся синтаксическими условиями, поскольку они проверяются механически за конечное число шагов. С точки зрения синтаксиса программа Гильберта предполагала нахождение непротиворечивого и полного множества аксиом арифметики, которое было бы способно доказать все финитные истинные высказывания. В первой теореме Гёделя о неполноте доказываемся как раз то, что эта цель недостижима.

ПЕРЕСМОТР ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ГЁДЕЛЯ

Так мы дошли до синтаксической формулировки первой теоремы Гёделя о неполноте:

если множество арифметических аксиом непротиворечиво и позволяет доказать все финитные истинные высказывания, то оно неполное, то есть существует такое высказывание G , что ни G , ни $\neg G$ (ни одно из двух) недоказуемо. (Мы все время помним, что допускаются только доказательства, проверяемые алгоритмически.)

В этой версии теоремы появляются только синтаксические понятия («непротиворечивый», «неполный», «высказывание» и «доказуемый»). Понятие «истинность» связано с финитными высказываниями, то есть появляется в более ограниченной, синтаксической версии.

Эту синтаксическую формулировку Гёдель представил в своей статье 1931 года, и синтаксическими также были аргументы, которые он использовал для доказательства. Далее вспомним рассмотренное в предыдущей главе доказательство и посмотрим, как его можно реализовать на основе исключительно синтаксических аргументов.

- Шаг 1. Предположим, что у нас есть непротиворечивое множество арифметических аксиом, позволяющих доказать все финитные истинные высказывания (мы не указываем на то, что это истинные высказывания, поскольку апеллируем только к синтаксическим понятиям). Нам нужно доказать, что существует такое высказывание G , что ни G , ни $\neg G$ недоказуемы. Как мы увидели в предыдущей главе, каждому высказыванию и каждой пропозициональной функции назначается код (или число Гёделя), но сейчас мы должны подчеркнуть, что назначение происходит чисто синтаксически, на основе символов, образующих высказывание или функцию, вне зависимости от того, каково их значение. Точно так же,

синтаксически, назначается код каждой последовательности высказываний и, в частности, каждому доказательству.

— Шаг 2: Гёдель доказал, что пропозициональная функция

« y — код доказательства высказывания с кодом x »

может быть представлена как арифметическое свойство, связывающее числа x и y . Кроме того, он доказал, что какими бы ни были числа n и r , высказывание

« n — код доказательства высказывания с кодом r »

всегда финитно.

— Шаг 3: Гёдель определил пропозициональную функцию

«Не существует y , которое было бы кодом доказательства высказывания с кодом x ».

— Шаг 4: Гёдель определил диагональную функцию. Если n — код пропозициональной функции $P(x)$, то $d(n)$ — код $P(n)$. Следовательно, определение диагональной функции, которое основывается на механизме назначения кодов, синтаксическое.

— Шаг 5: На основе шагов 3 и 4 метод самореференции позволил Гёделю записать высказывание G :

«Не существует y , которое было бы кодом доказательства высказывания с кодом t »,

код которого — само число t .

— Шаг 6: Теперь докажем синтаксически, что G недоказуемо. Предположим, от противного, что G доказуемо.

Тогда существует доказательство G , и ему соответствует код, к примеру k . Следовательно, высказывание

« k — код доказательства высказывания с кодом m »

истинное (поскольку m — код G , а k — код доказательства G) и, кроме того, финитное, поскольку можно проверить его истинность за конечное число шагов (можно проверить алгоритмически, что k — действительно код доказательства G). Так как оно финитное и истинное, то, по гипотезе, высказывание доказуемо. Тогда одно из правил логики позволяет нам сделать вывод, что также доказуемо высказывание

«Существует y , являющееся кодом доказательства высказывания с кодом m ».

Если сравнить последнее высказывание с тем, как мы формулировали G , оказывается ясным, что оно соответствует не- G . Получается, мы говорим, что G и не- G одно-

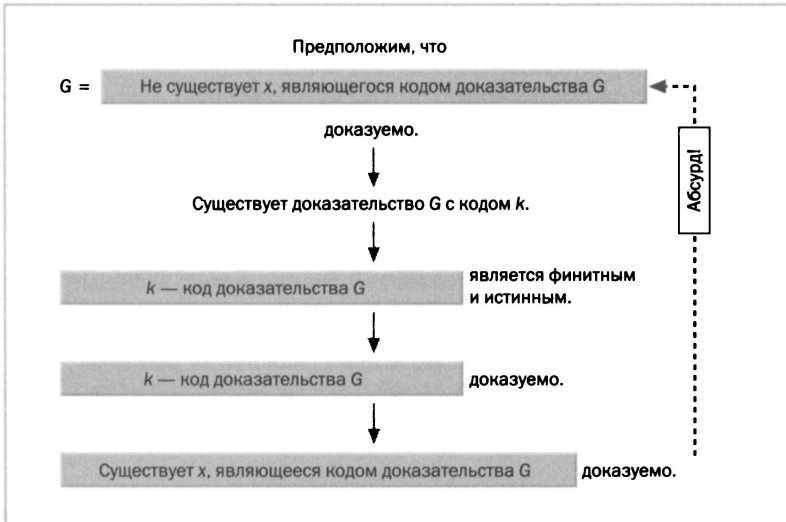


Схема доказательства того, что G недоказуемо. Мы исходим из предположения, что G доказуемо. Стрелки показывают последовательные выводы, которые получаются из этого предположения, пока мы не приходим к заключению, что отрицание G также доказуемо. Это содержит противоречие, следовательно G не может быть доказуемо.

временно доказуемы. Мы пришли к противоречию. Оно возникает из предположения, что G доказуемо, следовательно делаем вывод: G недоказуемо (см. схему на предыдущей странице).

- Шаг 7: Теперь докажем, что не- G также недоказуемо. Снова сделаем это от противного. Предположим, что не- G доказуемо, и придем к противоречию. Так как мно-

ОМЕГА-НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТЬ

Когда мы показали, что высказывание не- G недоказуемо, мы основывались на том факте, что если для свойства P верно

высказывание «1 не удовлетворяет свойству P » доказуемо,
высказывание «2 не удовлетворяет свойству P » доказуемо,
высказывание «3 не удовлетворяет свойству P » доказуемо
...и так далее,

то высказывание «существует некое x , удовлетворяющее свойству P » недоказуемо. Но так ли это? Сначала рассмотрим этот вопрос семантически. Предположим, что P — арифметическое свойство, для которого выполняется:

высказывание «1 не удовлетворяет свойству P » истинно,
высказывание «2 не удовлетворяет свойству P » истинно,
высказывание «3 не удовлетворяет свойству P » истинно
...и так далее,

то есть для любого числа n справедливо, что свойство P не выполняется. Тогда ясно, что высказывание «существует некоторый x , для которого выполняется свойство P » ложно (поскольку мы сказали, что ни для 1, ни для 2, ни для 3 и так далее свойство не выполняется). Но оно ложно, если мы говорим о мире натуральных чисел, и может быть истинным, когда говорим о другом мире. Например, если свойство P — это « $x^2 = 2$ », а мы говорим о мире чисел, образованных на основе $\sqrt{2}$, то для 1 свойство не выполняется, как и для 2, 3 и так далее. Но для $\sqrt{2}$ свойство P выполняется. Что же происходит с синтаксической точки зрения? Рассмотрим снова свойство P , но теперь предположим, что:

жество аксиом непротиворечиво, если не- G доказуемо, то G не может быть доказуемым. Это означает, что не существует доказательства G ; следовательно, ни одно число не является кодом доказательства G : число 1 — не код доказательства G , так же как 2, 3 и так далее.

Получается, что высказывания

«1 — не код доказательства высказывания с кодом m »,

- «1 не удовлетворяет свойству P » доказуемо,
 - «2 не удовлетворяет свойству P » доказуемо,
 - «3 не удовлетворяет свойству P » доказуемо
- ...и так далее.

Верно ли, что «существует некоторое x , которое удовлетворяет свойству P » недоказуемо? Поскольку в некоторых мирах это истинно, мы не можем точно утверждать, что это никогда не будет доказуемо. В доказательстве того, что не- G недоказуемо, имеется логический пробел, поскольку мы не можем утверждать, что это высказывание не окажется доказуемым. Чтобы справиться с этой проблемой, Гёдель ввел синтаксическое понятие омега-непротиворечивости. Множество аксиом омега-непротиворечиво, если притом что каждое из высказываний «1 не удовлетворяет свойству P », «2 не удовлетворяет свойству P », и так далее доказуемо, «существует некоторый x , который удовлетворяет свойству P » недоказуемо (в какой-то степени это синтаксически вынуждает считать, что мы имеем в виду мир натуральных чисел). Следовательно, в начало синтаксического изложения первой теоремы Гёделя, где говорится, что множество аксиом непротиворечиво, следовало бы добавить «омега-непротиворечиво».

Вклад Россера

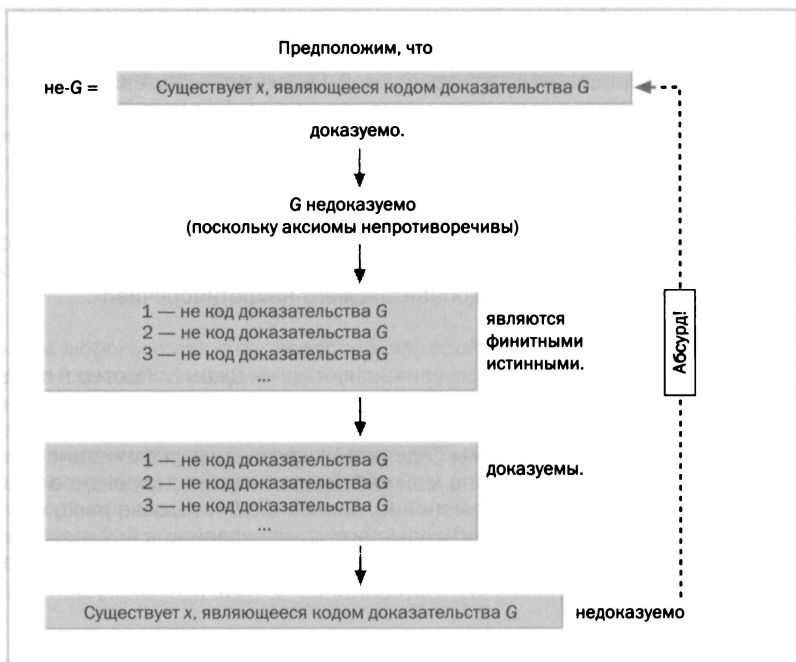
К счастью, в 1936 году американский логик Джон Б. Россер в статье объемом всего две страницы изменил рассуждение Гёделя так, чтобы оно было справедливо и при гипотезе непротиворечивости. Благодаря Россеру в изложении теоремы Гёделя можно опустить упоминание омега-непротиворечивости, и она может быть записана в том виде, в каком мы привели ее в тексте. Изменение, внесенное Россером в рассуждение Гёделя, состояло в том, чтобы заменить самореферентное высказывание «это высказывание недоказуемо» другим: «если это высказывание доказуемо, то также доказуемо и его отрицание».

«2 — не код доказательства высказывания с кодом m »,
 « k — не код доказательства высказывания с кодом m »
 и так далее

являются финитными истинными высказываниями. Раз они финитные и истинные, они доказуемы. Следовательно,

«существует y , являющееся кодом доказательства высказывания с кодом m »

недоказуемо. Но это высказывание — не- G , следовательно, не- G не будет доказуемым; однако это противоречит предположению того, что не- G доказуемо. От противного получили, что не- G в итоге недоказуемо (см. схему).



Итак, синтаксически доказано, что как G , так и не- G , ни одно из двух, недоказуемо. Таким образом, доказательство первой теоремы о неполноте может быть полностью переведено в синтаксические аргументы и понятия, как этого требует программа Гильберта. Этот способ представления доказательства, основанный исключительно на синтаксических аргументах, проверяемых механически, спас от любых споров.

ВТОРАЯ ТЕОРЕМА

В программе Гильберта требовалось, как мы уже сказали, найти непротиворечивое множество аксиом арифметики таким образом, чтобы каждое высказывание P (либо его отрицание) было доказуемым. Но также требовалось, чтобы непротиворечивость этих аксиом проверялась алгоритмически, — это придавало уверенности, что аксиомы не приведут к парадоксу. В своей статье 1931 года Гёдель доказал вторую теорему, так называемую вторую теорему о неполноте. В ней доказывалось, что эта цель также неосуществима.

Эта теорема часто формулируется следующим образом:

ни одно непротиворечивое множество аксиом не содержит арифметики, достаточной для того, чтобы доказать свою собственную непротиворечивость.

В выражении «содержит арифметики, достаточной...» речь идет об уже упомянутом условии того, что множество аксиом, о котором мы говорим, способно доказать все финитные истинные высказывания. Но как же может множество доказать или не доказать собственную непротиворечивость? Для начала арифметические аксиомы позволяют доказать только те высказывания, в которых говорится о числах, но не такие, в которых говорится о непротиворечивости множества аксиом. Мы уже сталкивались с подобной проблемой в предыдущей главе, когда хотели записать арифметическое высказывание, которое гово-

рило бы о себе самом. Как добиться того, чтобы арифметическое высказывание, в котором говорится о числах, начало говорить о самом себе? Способом достижения этого была идентификация высказываний с помощью их кодов, так чтобы разговор о высказывании был равносильен разговору о его коде.

Для доказательства непротиворечивости аксиом арифметики необходим прямой метод.

Давид Гильберт на инаугурационном докладе на **Втором Международном математическом конгрессе в Париже в 1900 году**

В нашем случае, когда мы хотим записать арифметическое высказывание, в котором говорилось бы о непротиворечивости множества аксиом, нумерация Гёделя снова приходит нам на помощь.

Как уже говорилось, если множество аксиом противоречиво, то любое высказывание доказуемо на его основе. Наоборот, если множество непротиворечиво, всегда найдется высказывание, являющееся недоказуемым (поскольку для любого P либо оно, либо его отрицание, по крайней мере одно из двух, недоказуемо). Следовательно, непротиворечивость множества аксиом равносильна тому, что есть по крайней мере одно высказывание, которое не является доказуемым на его основе. То, что система непротиворечива, равносильно следующему:

«существует некоторое высказывание, не являющееся доказуемым».

Вновь возьмем гипотетический пример из предыдущей главы, в котором мы предположили, что всем высказываниям соответствуют коды, являющиеся простыми числами, а доказуемым высказываниям, в частности, соответствуют простые числа, являющиеся суммой или разностью трех последовательных простых чисел. В данном контексте в предыдущем высказывании утверждалось бы, что «существует некоторое простое число, не являющееся суммой или разностью трех последова-

тельных простых чисел», что на другом уровне прочтения означало бы: «существует код высказывания, не являющийся кодом доказуемого высказывания», то есть «существует недоказуемое высказывание» или «множество аксиом непротиворечиво».

У нас есть два уровня прочтения для «существует некоторое простое число, не являющееся суммой или разностью трех последовательных простых чисел»: арифметический, где указывается только арифметическое свойство; и более высокий уровень прочтения, зависящий от нумерации Гёделя, на котором заявляется непротиворечивость множества аксиом. Теперь сформулируем вторую теорему о неполноте:

если система арифметических аксиом непротиворечива и может доказать все финитные истинные высказывания, то арифметическое высказывание, в котором утверждается непротиворечивость множества аксиом, недоказуемо на основе этих же аксиом.

Прокомментируем идею доказательства этой теоремы, как это сделал Гёдель в статье 1931 года. В своей первой теореме о неполноте Гёдель доказывает, что:

если множество аксиом непротиворечиво, то G недоказуемо.

Заметим, что высказывание, в котором говорится: « G недоказуемо», — это само G . То есть $G = \text{«}G \text{ недоказуемо»}$. Следовательно, в предыдущее утверждение, в котором говорится: « G недоказуемо», можно просто поставить G . Или, что то же самое, в своей первой теореме Гёдель доказал:

если множество аксиом непротиворечиво, то справедливо G .

Итак, если доказать, что система аксиом непротиворечива, то высказывание «если множество аксиом непротиворечиво, то справедливо G » будет доказуемым. То есть «если множество



аксиом непротиворечиво, то справедливо G » доказуемо, тогда доказуемо «множество аксиом непротиворечиво».

Тогда, по правилу вывода, G тоже доказуемо. Это абсурд, поскольку мы уже доказали, что G недоказуемо. Делаем вывод, что «множество аксиом непротиворечиво» недоказуемо на основе аксиом (см. схему).

В последней главе мы рассмотрим некоторые философские следствия обеих теорем Гёделя о неполноте.

Гёдель и Эйнштейн

Курт Гёдель и Альберт Эйнштейн были большими друзьями и в Принстоне много времени проводили вместе. Благодаря этой дружбе появились три статьи Гёделя о теории относительности Эйнштейна — в отличие от остальных его опубликованных работ, они полностью чужды математической логике.

Несмотря на все политические и экономические проблемы (первые были вызваны нацистами, а вторые — кризисом 1929 года), в 1930-е годы в Вене бурлила не только богатая ночная жизнь, но и не менее разнообразная интеллектуальная. В кафе, кабаре и клубах по ночам слушали музыку и танцевали, а днем обсуждали искусство, науку и философию. В том же самом баре, где собирался Венский кружок, ночью звучали джазовые оркестры.

Принстон, наоборот, был маленьким провинциальным городом, в котором не было ни клубов, ни кабаре и фактически отсутствовала ночная жизнь. Возможно, было бы преувеличением сказать, что Принстон являлся придатком Университета и Института перспективных исследований (независимых учреждений, хотя и имевших много связей друг с другом), но в действительности было сложно выйти на улицу и не встретиться с преподавателями, студентами или выпускниками, убежденными в своей принадлежности к интеллектуальной элите планеты.

Гёдель воспринял изменение обстановки почти как благоговение. Он быстро адаптировался к новому стилю жизни, более соответствовавшему его стремлению к уединению и размышлениям об интеллектуальных аспектах бытия. Адель, наоборот, никогда не чувствовала себя в Принстоне комфортно.

В Вене она была танцовщицей в ночных клубах и теперь скучала по музыке и веселью, поэтому чувствовала себя грустно и одиноко. Детей у них с мужем не было, но Адель частично смягчала это одиночество множеством домашних животных, среди которых были собаки, коты и птицы. Ее одиночество усиливали недостаточное владение английским языком и отсутствие друзей (за исключением некоторых соседей).

Гёдель же, в отличие от Адель, сознательно сократил круг знакомых. Он общался в основном с коллегами из Института перспективных исследований, а самыми близкими его друзьями стали Оскар Моргенштерн и, конечно же, Альберт Эйнштейн.

Пока еще «слава» совсем не давит на меня. Это начинается только тогда, когда ты становишься настолько известным, что тебя узнает на улице даже ребенок, как это происходит в случае с Эйнштейном.

Из письма Гёделя матери о начале жизни в Принстоне и прогулках с Эйнштейном

Гёдель познакомился с Эйнштейном в 1933 году, во время первого визита в США, где их представил друг другу Пауль Оппенгейм, немецкий химик, также эмигрировавший из-за нацистов. Они вновь встретились в 1940 году, по приезде Гёделя в Принстон, и за очень короткое время стали хорошими друзьями.

Из-за обоюдной сдержанности ученых мы знаем об их дружбе немного и в основном из переписки Гёделя с матерью, которая жила в Брно. Каждое утро между 10 и 11 часами Эйнштейн заходил за Гёделем домой, и они шли пешком в Институт, что занимало примерно полчаса, по пути беседуя о физике, политике и философии. В час или два часа дня они возвращались домой, также беседуя.

Некоторые обрывки этих бесед сохранены в письмах Гёделя. Эйнштейн, похоже, был настроен относительно будущего человечества довольно оптимистично, хотя и с некоторыми

оговорками. Гёдель, наоборот, проявлял пессимизм, что не было удивительно в первые годы ядерной эры, когда казалось, что вот-вот разразится атомная катастрофа.

Образ Гёделя и Эйнштейна, беседующих на немецком языке во время прогулок по Принстону, стал широко известным. Эйнштейн вспоминал: самое важное, что он делал в Принстоне в те годы, — это прогулки с Гёделем.

Рассказывают, что во время одной из этих прогулок водитель автомобиля узнал Эйнштейна и от удивления чуть не врезался в дерево. Гёделя, почти всегда облаченного в шляпу, пальто и перчатки (даже в разгаре лета), наоборот, узнавали редко.

Эйнштейн скончался в 1955 году, и это стало тяжелым ударом для Гёделя, хотя он и не выражал свое горе публично. Ученый пишет матери:

«То, что люди никогда не упоминают меня в связи с Эйнштейном, меня вполне устраивает (и также устроило бы и его, поскольку он поддерживал мнение, что даже известный человек заслуживает право на личную жизнь). После его смерти меня несколько раз приглашали сказать несколько слов о нем, но я, естественно, не согласился».

ВРАЩАЮЩИЕСЯ ВСЕЛЕННЫЕ

Заметным следствием бесед с Эйнштейном стали статьи Гёделя по теории относительности — в отличие от остальных его работ они не имеют прямой связи с математической логикой.

Первая, написанная на английском языке, называлась «Пример нового типа космологических решений эйнштейновских уравнений гравитационного поля» и была опубликована в журнале *Reviews of Modern Physics* за 1949 год (том 21, номер 3, страницы 447–450). В этой статье Гёдель представил решение уравнений Эйнштейна, которое заключается в описании вращающейся, гомогенной, закрытой и стабильной (то есть нерасширяющейся) системы с замкнутыми времениподобными

кривыми. Теоретически эти кривые позволяли путешествия во времени и фактически сделали бы так, что в такой Вселенной времени не существовало бы в том значении, в котором мы обычно его понимаем, поскольку прошлое и будущее были бы неразличимы.

Хотя такое описание не противоречит уравнениям Эйнштейна, оно касается не реального мира. И все же Вселенная Гёделя вызывала определенный интерес. Ученый писал:

«Сам факт совместимости с законами природы вселенных, в которых невозможно различить абсолютное время и, следовательно, в которых не может существовать объективного промежутка времени, проливает свет на значение времени также в тех вселенных, в которых можно определить абсолютное время».

Эти слова взяты из «Замечания об отношении между теорией относительности и идеалистической философией», опубликованного также в 1949 году в качестве сообщения в сборнике, изданном Артуром Шлиппом, посвященном работе Эйнштейна. Эта книга была частью коллекции «Библиотека современных философов», вклад в которую Гёдель внес еще в 1944 году сборником, посвященным Бертрану Расселу. В отличие от других работ эта статья была написана языком, доступным широкой публике, без использования математических формул. В ней Гёдель рассмотрел некоторые философские следствия из теории относительности в ее связи с природой времени, «этой таинственной и, казалось бы, противоречивой сущности, которая, с другой стороны, похоже, составляет основу существования мира и нашего собственного существования» (цитата из этой статьи).

В работе Гёдель утверждает, что относительность обеспечивает «безошибочное доказательство философской концепции, в которой, как и у Парменида, Канта и современных идеалистов, отрицается объективность изменений и считается, что изменение — это иллюзия или видимость, вызванная нашим особенным методом восприятия». Гёдель объясняет эту идею,



ВВЕРХУ:
Гёдель (слева)
и Эйнштейн
во время одной
из многочислен-
ных прогулок
в Принстоне
с 1940
по 1954 год.

ВНИЗУ:
В 1951 году
Гёдель (вместе
с американским
физиком-
теоретиком
Джулианом
Швингером) был
награжден
премией
Альберта
Эйнштейна.
Слева направо:
Эйнштейн,
Льюис Штраус
(председатель
совета Института
перспективных
исследований
в Принстоне),
Гёдель
и Швингер.



основываясь на том факте, что изменение существует только относительно объективного промежутка времени, но понятие «объективного промежутка времени» несправедливо в релятивистской вселенной, в которой у каждого наблюдателя есть свое собственное «сейчас», не сравнимое с «сейчас» других наблюдателей. Следовательно, если нет объективного времени, нет изменений.

Гёдель продолжает: «Джеймс Джинс сделал вывод, что нет причин отказываться от интуитивной идеи существования абсолютного времени, длящегося объективно. Я не думаю, что ситуация оправдывает этот вывод», — говорит он и объясняет это расхождение во взглядах, основываясь на результатах, полученных в своей предыдущей статье. Если существуют вселенные без объективного времени, совместимые с уравнениями относительности, а наша Вселенная, конечно же, совместима с ними, то мы не можем точно сделать вывод о том, что в нашей Вселенной есть объективное время.

В 1952 году была опубликована третья и последняя работа Гёделя об относительности. Она называлась «Вращающиеся вселенные в общей теории относительности» и на самом деле была рефератом его выступления на Международном математическом конгрессе в Кембридже (Массачусетс) в 1950 году. В ней ученый излагает новые решения уравнений Эйнштейна, вновь основанные на вращающихся Вселенных, хотя в этом случае не все они имеют замкнутые времениподобные кривые.

Хотя решения Гёделя не описывают реальную Вселенную, они подтолкнули поиск неортодоксальных решений уравнений Эйнштейна, и в этой области Гёдель опять был первым.

Ученый опубликовал все свои работы по математической логике в течение всего десяти лет, с 1930 по 1939 год (пока жил в Вене, хотя последние две статьи, 1938 и 1939 годов, были опубликованы на английском языке в американских журналах). Во время принстонского периода Гёдель не публиковал результатов по логике и в основном (за исключением уже упомянутых статей по теории относительности) занимался комментированием философских выводов своих предыдущих исследований.

ДЖЕЙМС ДЖИНС

Джеймс Хопвуд Джинс, которого Гёдель цитирует в своей второй статье о теории относительности, — британский физик, математик и астроном, родившийся в 1877 году в графстве Ланкашир. Он учился в Кембриджском университете и преподавал там же до переезда в Принстонский университет в 1904 году, где работал преподавателем прикладной математики. Вернулся в Кембридж в 1910 году. Джинс внес важный вклад в квантовую механику, теорию излучения и звездную эволюцию. Его анализ вращающихся тел привел к выводу о том, что теория Лапласа об образовании Солнечной системы из облака газа была ошибочной. В свою очередь, Джинс предположил, что планеты возникли из вещества, испущенного Солнцем из-за гипотетического столкновения с другой звездой; однако сегодня эта теория не принята. Ученый написал несколько книг по популярной физике и космологии, которые принесли ему славу замечательного популяризатора науки. В одной из них, «Загадочная Вселенная», сказано:



«Направление знаний устремляется к немеханической реальности: Вселенная теперь больше похожа на великую мысль, чем на великую машину. Разум уже не кажется неким существом, случайно вторгшимся в королевство материи... мы скорее должны приветствовать его как создателя и властелина королевства материи».

Джеймс Джинс скончался в графстве Суррей (Англия) в 1946 году.

Последняя научная работа по математической логике за авторством Гёделя появилась в форме книги объемом примерно 70 страниц, опубликованной издательством Принстонского университета в 1940 году. Она не была напрямую написана Гёделем, а представляла собой издание конспектов курса, прочитанного ученым в 1938–1939 годах в Институте перспективных

исследований. Книга называется «Совместимость аксиомы выбора и обобщенной континуум-гипотезы с аксиомами теории множеств», и в ней изложено частичное решение первой из проблем, которые поставил Давид Гильберт на своей знаменитой лекции 1900 года, — проблемы, изначально сформулированной Георгом Кантором и известной как континуум-гипотеза.

КАРДИНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Чтобы понять, что такое континуум-гипотеза, мы должны вернуться к теории Кантора о бесконечности, о которой говорилось в первой главе. Вспомним, что множество, по словам самого Кантора, это «собрания целиком объектов действительности или нашей мысли». Так, имеется множество всех дней недели, множество всех месяцев в году или множество четных натуральных чисел. Одни из этих множеств конечны, другие бесконечны.

Множество является конечным, когда возможно сосчитать его члены один за другим, и этот счет в какой-то момент заканчивается. В бесконечных множествах, наоборот, счет никогда не заканчивается. Если у нас есть конечное множество, мы вполне можем сказать, сколько в нем членов; например, во множестве дней недели семь членов, а во множестве месяцев года — 12. Количество членов множества математики называют его кардинальным числом; таким образом, мы можем сказать, что кардинальное число множества, образованного буквами слова «море», равно четырем.

Целью Кантора было придать смысл идее кардинального числа, или количества членов, для бесконечных множеств. Но как можно говорить о количестве членов бесконечного множества? Можно ли что-то сказать, кроме очевидного факта того, что оно бесконечно? Кантор исходил из простой идеи: представим себе, что в большом зале много играющих детей и большое число стульев (рисунок 1), и нам хочется знать, равно ли их количество друг другу. Один из способов сделать

Рис. 1

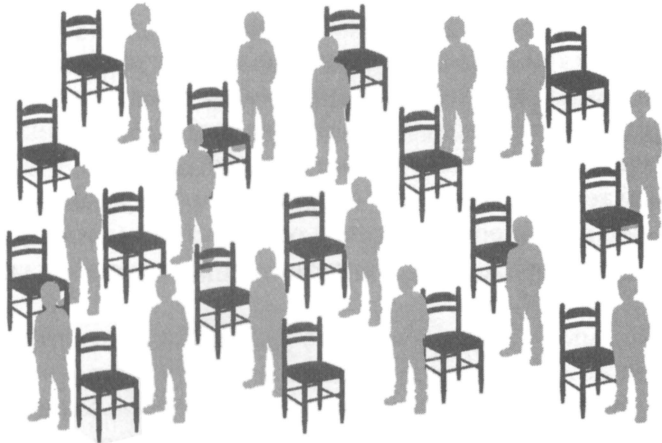
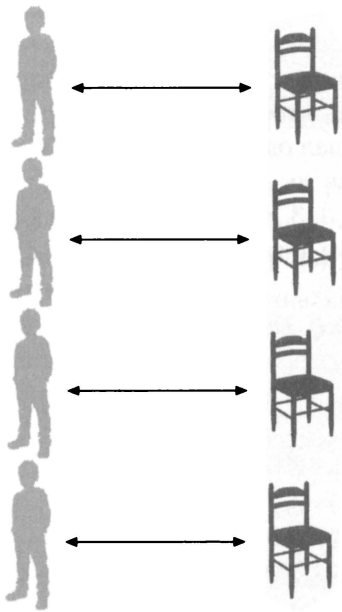


Рис. 2



это — это сосчитать детей по одному, сделать то же самое со стульями, а затем сравнить результаты.

Но есть более прямой способ осуществить это сравнение — попросить детей сесть по одному на каждый стул. Если не осталось ни одного пустого стула, мы можем сказать, что стульев ровно столько же, сколько и детей, то есть что кардинальные числа множества стульев и множества детей равны. В математической терминологии можно сказать, что мы установили биективное (взаимооднозначное) соответствие между множествами (каждому ребенку соответствует один стул, а каждому стулу — один ребенок).

Итак, мы можем сказать, что у двух конечных множеств одно и то же кардинальное число, если можно установить биективное соответствие между ними. Идея Кантора заключалась в том, чтобы распространить это понятие на бесконечные множества, установив биективное соответствие между множествами в виде сравнения их кардинальных чисел.

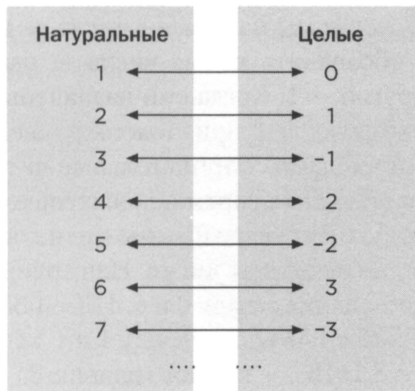
На основе этой идеи Кантор определил, что два бесконечных множества имеют одно и то же кардинальное число, если можно установить между ними биективное соответствие, то есть если можно установить пары между их соответствующими членами так, чтобы каждому члену первого множества точно соответствовал один член второго, и наоборот.

В первой главе мы уже видели, что множество всех натуральных чисел (1, 2, 3, 4, ...) может иметь биективное соответствие с множеством квадратных чисел (1, 4, 9, 16, ...).



Множество натуральных чисел обычно обозначают буквой \mathbb{N} (буква символизирует числа в целом как самостоятельный объект). А если к натуральным числам добавить их противоположные (то есть отрицательные числа $-1, -2, -3, -4, \dots$), а также ноль, мы получим множество целых чисел, которое в математике обычно обозначается буквой \mathbb{Z} — от первой буквы немецкого слова *Zahl* (число).

Кантор заметил, что у множества целых чисел то же самое кардинальное число, что и у \mathbb{N} . Другими словами, существует столько же натуральных чисел, сколько и целых.

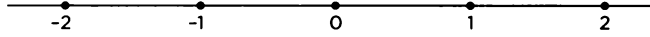


В соответствии между \mathbb{N} и \mathbb{Z} число 1 множества \mathbb{N} образует пару с числом 0 множества \mathbb{Z} ; остальные нечетные числа множества \mathbb{N} устанавливают пары с отрицательными числами множества \mathbb{Z} ; а четные числа множества \mathbb{N} устанавливают пары с положительными числами множества \mathbb{Z} . Заметим, что, как это и должно быть, каждому члену множества \mathbb{N} соответствует один член множества \mathbb{Z} , при этом нет ни одного отсутствующего или лишнего члена.

Натуральные числа — только часть целых; однако оба множества имеют, как это определил Кантор, «одно и то же количество элементов» (на математическом языке — у обоих множеств одно и то же кардинальное число). Как мы уже сказали в главе 1, аристотелевский принцип — «целое больше любой из его частей» — неприменим к бесконечным множествам.

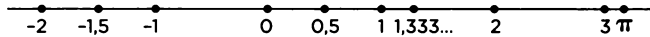
ДИАГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД

Чтобы пойти еще дальше, необходимо кратко остановиться на очень распространенном способе представления чисел на числовой прямой.



Фрагмент числовой прямой с обозначенными на ней некоторыми целыми числами.

Числовая прямая — это прямая линия, которая превращается в числовую, когда мы назначаем числа ее точкам. Самый простой способ обозначить целые числа — назначить одной точке число 0, другой — 1. Когда они назначены, натуральные числа располагаются после 1, при этом сохраняется расстояние между соседними числами. Отрицательные числа расположены симметрично положительным относительно числа 0. Очевидно, что как только будут назначены все целые числа, будет еще много точек, не имеющих чисел. Например, $1/2 = 0,5$ находится ровно посередине между 0 и 1; $4/3 = 1,333\dots$ — на трети пути между 1 и 2; $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ — между 1 и 1,5 (намного ближе к 1,5, чем к 1); $\pi = 3,1415\dots$ — немного дальше 3.

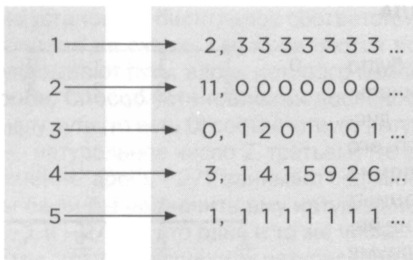


Множеством действительных чисел (которое обычно обозначается буквой \mathbb{R}) называют множество, образованное числами, заполняющими всю числовую прямую. Каждой точке числовой прямой соответствует действительное число, и наоборот. Среди действительных чисел, конечно же, есть и целые, и упомянутые выше $\sqrt{2}$ или π , а также другие бесконечные числа, такие как 12,22222 или $-2,01001000100001\dots$

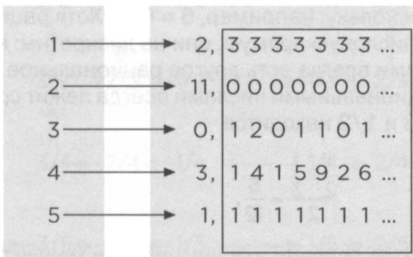
У множеств \mathbb{N} и \mathbb{Z} , как мы видели, одно и то же кардинальное число, но... происходит ли то же самое с \mathbb{N} и \mathbb{R} ? Кантор открыл, что это не так: \mathbb{N} и \mathbb{R} имеют разные кардинальные числа, и между ними невозможно установить биективное соответствие. Доказательство этого факта состоит в том, что любая по-

пытка установить биективное соответствие между натуральными и действительными числами провалится и по крайней мере одно действительное число неизбежно останется без соответствия. Если бы натуральные числа обозначали стулья, а действительные — детей, то всегда будет один ребенок, оставшийся без стула.

Чтобы понять эту идею, приведем доказательство для одного специфического примера, хотя ясно, что эта процедура работает во всех случаях. Итак, назначим действительное число каждому натуральному и посмотрим, как можно найти пропущенное число (на следующем рисунке показаны только числа от 1 до 5, но в действительности список продолжается до неопределенности).



Правило, по которому мы назначили эти числа, неясно, но это не имеет значения, поскольку метод работает при любом правиле назначения. В качестве первого шага этого метода сосредоточим наше внимание на цифрах, находящихся после запятой.



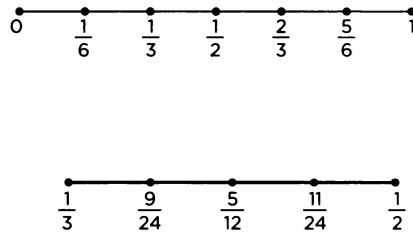
1	→	2, 3 3 3 3 3 3 3 ...
2	→	11, 0 0 0 0 0 0 0 ...
3	→	0, 1 2 0 1 1 0 1 ...
4	→	3, 1 4 1 5 9 2 6 ...
5	→	1, 1 1 1 1 1 1 1 ...

Обратим внимание на диагональную линию, начинающуюся в левом верхнем конце, опускающуюся вправо (см. рисунок). Выдающаяся роль этой линии определила название метода — диагональное доказательство.

Число, которое мы ищем (оно осталось без пары), начинается с 0,

НАТУРАЛЬНЫЕ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Можно было бы подумать, будто \mathbb{N} и \mathbb{R} имеют разные кардинальные числа потому, что \mathbb{N} — дискретное множество (то есть его графическое представление заключено в изолированных точках), в то время как \mathbb{R} не является таковым (между двумя действительными числами всегда есть другие действительные числа, в \mathbb{R} нет изолированных точек). Однако дело не в этом. Возьмем множество рациональных чисел, которое обычно обозначается буквой \mathbb{Q} и в котором содержатся все рациональные числа, то есть те, что можно представить в виде дроби (или в виде частного двух целых чисел). Например, $1/2 = 0,5$ и $-4/3 = -1,333\dots$ рациональные числа, в то время как $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ и $\pi = 3,1415\dots$ таковыми не являются. Целые числа включены в рациональные, поскольку, например, $6 = 6/1$. Хотя рациональные числа не заполняют всю числовую прямую, они не дискретны: между двумя рациональными числами всегда есть другое рациональное число. Например, между двумя рациональными числами всегда лежит среднее для них число. Так, между $1/3$ и $1/2$ находится



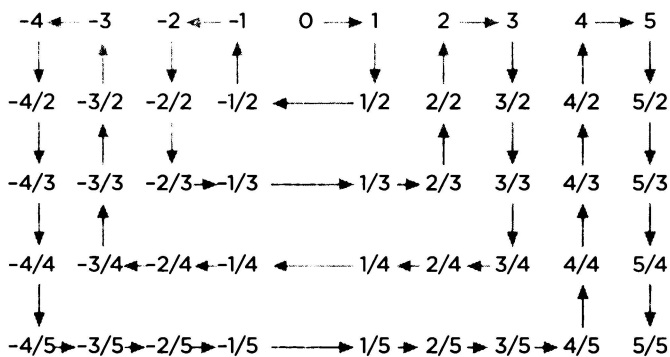
$$\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{2} = \frac{5}{12},$$

между $1/3$ и $5/12$ находится среднее для них число, а между $1/3$ и этим средним числом — их среднее число, и так далее (схема выше).

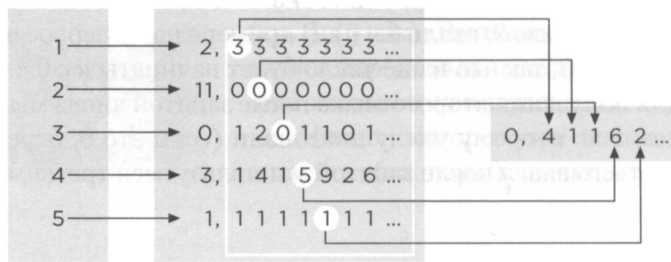
а знаки после запятой определены числами, появляющимися по диагонали. Для получения первого знака после запятой числа мы берем первую цифру диагонали и прибавляем к ней 1 (если бы это было 9, взяли бы 0). В примере наше первое число диагонали — 3, так что наше число будет начинаться с 0,4.

Для получения второго знака после запятой числа мы прибавляем 1 ко второму числу диагонали (если это 9, берем 0). Для третьего знака после запятой мы пользуемся третьим чис-

Несмотря на то что \mathbb{Q} — плотное множество, а \mathbb{N} — дискретное, между ними можно установить биективное соответствие. Один из способов сделать это показан на схеме, где появляются все рациональные числа, а стрелки указывают путь, вдоль которого можно пройти один раз через каждую дробь. Способ установления последовательности следующий: первому числу пути (то есть 0) соответствует натуральное число 1, второму (то есть 1) — натуральное число 2, третьему (то есть $1/2$) — число 3, и так далее. Пояснение: дробь $-2/2$ занимает седьмое место на пути, и сначала мы должны были бы назначить ему натуральное число 7. Однако $-2/2$ равно -1 (-1 и $-2/2$ — это одно и то же число, записанное по-разному), а числу -1 мы до этого назначили натуральное число 5. Мы не можем назначить 5 числу -1 , а 7 — числу $-2/2$, поскольку это одно и то же число. Способ решения этой проблемы — просто опустить $-2/2$ и назначить 7 следующей дроби, то есть $-2/3$.



лом диагонали и так далее. В нашем примере искомое число начинается с 0,41162...



Число, которое мы только что вычислили, не назначено никакому натуральному числу. Оно не может быть назначено первому числу, потому что они отличаются первым знаком после запятой. Также оно не может быть назначено второму числу, потому что они отличаются вторым знаком после запятой. Также оно не может быть назначено третьему числу, потому что они отличаются третьим знаком после запятой, и так далее.

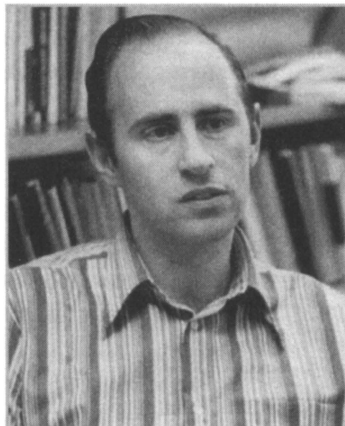
Поскольку существует число, которое избежало назначения, наш пример не может представлять собой биективного соответствия между \mathbb{N} и \mathbb{R} . Любая попытка такое соответствие определить провалится по описанной причине, следовательно, мы не можем утверждать, что у множеств \mathbb{N} и \mathbb{R} одно кардинальное число.

КОНТИНУУМ-ГИПОТЕЗА

Кардинальное число действительных чисел больше, чем кардинальное число натуральных. Кантор доказал это в 1873 году и сразу же задался вопросом, существует ли некое множество, кардинальное число которого больше \mathbb{N} , но меньше \mathbb{R} ? В течение нескольких лет он предпринял много попыток найти промежуточное множество между \mathbb{N} и \mathbb{R} , но ему это так и не удалось. В конце концов, в 1877 году он сформулировал гипотезу о том, что промежуточного множества не существует. Она стала из-

ПОЛ КОЭН

Пол Джозеф Коэн родился в Лонг-Бренче (Нью-Джерси, США) в 1934 году в семье польских иммигрантов. С самого раннего возраста он демонстрировал экстраординарные математические способности и считался вундеркиндом. Это позволило ему, несмотря на скудные финансы родителей, учиться в лучших школах Нью-Йорка. Коэн получил высшее образование в Чикагском университете, где в 1958 году защитил докторскую диссертацию, в которой обобщал проблему единственности представления периодической функции рядом Фурье (над этой проблемой работал в начале 1870-х Кантор, и она привела его к разработке собственной теории).



Коэн внес значительный вклад в различные области математики, такие как теория чисел, математический анализ и логика. В 1966 году на Международном математическом конгрессе в Москве он получил Филдсовскую премию — самую престижную математическую награду — за работу над континуум-гипотезой. Пол Коэн скончался в Калифорнии в марте 2007 года.

вестна как *континуум-гипотеза*: «Не существует такого множества A , что $\text{card}(\mathbb{N}) < \text{card}(A) < \text{card}(\mathbb{R})$ ».

Кантор безуспешно пытался доказать ее в течение многих лет. К 1900 году решения все еще не было, и Гильберт поставил эту гипотезу на первое место в списке проблем в своем знаменитом докладе на конгрессе в Париже.

Решение проблемы в том виде, в каком мы знаем его сейчас, было получено в два этапа. Первый был завершен Гёделем в конце 1930-х годов. В 1938 и 1940 годах Гёдель опубликовал две статьи, где вкратце изложил различные аспекты первой части решения, которое детально изложено в курсе, прочитан-

ном в Институте перспективных исследований. Конспекты курса были изданы в форме книги в 1940 году.

Вторую часть решения получил в 1963 году Пол Коэн — американский математик, который также работал в Институте перспективных исследований. Говорят, Коэн первым показал свое решение Гёделю, но когда он пришел к знаменитому коллеге, тот как раз переживал пик маниакально-депрессивного кризиса и не захотел впускать гостя, поэтому ему пришлось просовывать бумаги под дверь. Через несколько дней Гёдель позвонил коллеге и пригласил выпить чаю, из чего Коэн сделал вывод, что его решение верно. И действительно, за эту работу ученый в итоге получил Филдсовскую премию — для математиков она эквивалентна Нобелевской.

РЕШЕНИЕ ГЁДЕЛЯ И КОЭНА

Верна ли континуум-гипотеза? Это до сих пор неизвестно, поскольку ответ, найденный Гёделем и Коэном, состоит в том, что ни подтвердить континуум-гипотезу, ни опровергнуть ее невозможно на основе аксиом теории множеств. Если обозначить CH высказывание, в котором говорится, что «не существует множества с кардинальным числом, промежуточным между \aleph_1 и 2^{\aleph_1} », то CH для теории множеств — это идеальный пример первой теоремы Гёделя о неполноте: ни оно, ни его отрицание недоказуемы.

Как Гёдель и Коэн доказали это? Обозначим $*$ абстрактную числовую операцию и предположим, что она удовлетворяет двум аксиомам:

- аксиома 1: операция коммутативна, то есть $a * b = b * a$;
- аксиома 2: у операции есть нейтральный элемент, то есть такой, что при операции с ним не происходит никаких изменений (если этот нейтральный элемент назвать e , то $a * e = a$).

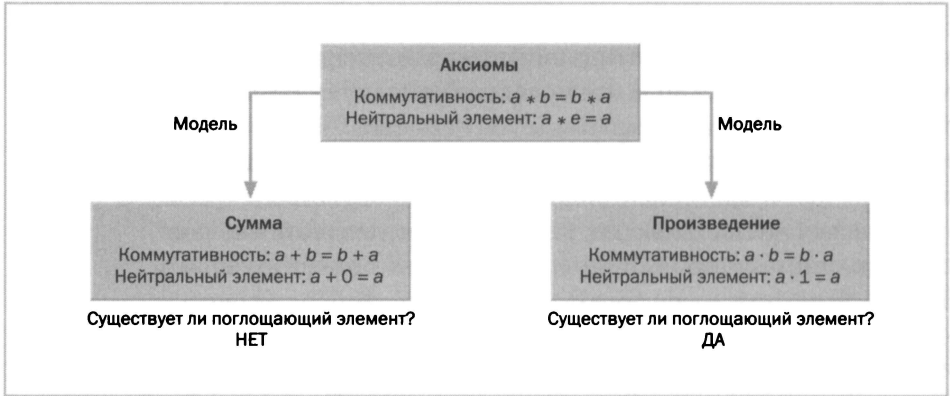
Моделью назовем любой конкретный пример, любую специфическую операцию, выполняющую эти аксиомы. Например, сумма целых чисел — это модель, поскольку сумма коммутативна и имеет нейтральный элемент (то есть 0). Произведение целых чисел — также модель, поскольку эта операция также коммутативна и имеет нейтральный элемент (то есть 1). Вычитание целых чисел, наоборот, не является моделью, поскольку оно некоммутативно (например, $2 - 3$ — не то же самое, что $3 - 2$).

На основе этих аксиом можно синтаксически (согласно терминологии из предыдущей главы) доказать, что не может быть двух различных нейтральных элементов. То есть если e и e' — элементы, удовлетворяющие аксиоме 2, то обязательно $e = e'$. Доказательство состоит в следующем: предположим, что для e и e' верна аксиома 2. Тогда, так как e — нейтральный элемент, $e * e' = e'$ (при операциях с e не происходит никаких изменений). Но e' также нейтральный элемент, тогда $e' * e = e$ (при операциях с e' не происходит никаких изменений). Получается, что:

$$e = e' * e = e * e' = e', \text{ следовательно, } e = e'.$$

Любое утверждение, выводимое из аксиом, обязательно будет справедливо во всех моделях, потому что это же самое доказательство воспроизводимо на каждом конкретном примере. Следовательно, в любом примере, выполняющем аксиомы 1 и 2, окажется, что нейтральный элемент операции является единственным. Это происходит, конечно же, в случае суммы (где нет другого нейтрального элемента, кроме 0) и произведения (где единственный нейтральный элемент — 1).

Теперь назовем поглощающим такое число f , что при операциях с ним результат вновь дает f (то есть $a * f = f$), и рассмотрим утверждение P : «у операции есть поглощающий элемент». Вопрос: можно ли вывести P из аксиом 1 и 2? Можно ли вывести отрицание P ? Из того факта, что операция коммутативна и имеет нейтральный элемент, можем ли мы вывести, обладает она поглощающим элементом или нет?



Сверху — аксиомы коммутативной операции с нейтральным элементом. Слева внизу — пример, выполняющий эти аксиомы, но не имеющий поглощающего элемента. Справа внизу — пример, в котором имеется поглощающий элемент. Следовательно, существование или отсутствие поглощающего элемента не может быть выведено из аксиом из верхней части схемы.

Если бы существование поглощающего элемента было доказуемым на основе аксиом, то любая коммутативная операция с нейтральным элементом обладала бы поглощающим элементом. Однако это не так, поскольку у суммы, коммутативной операции с нейтральным элементом, нет поглощающих элементов. Следовательно, утверждение P недоказуемо на основе аксиом 1 и 2.

А если бы отсутствие поглощающего элемента было доказуемым, то ни одна операция, выполняющая аксиомы 1 и 2, не имела бы поглощающих элементов. Однако у произведения целых чисел он есть, поскольку 0 — поглощающий элемент, так что отрицание P также недоказуемо на основе аксиом. Существование или отсутствие поглощающего элемента не может быть ни доказано, ни опровергнуто на основе аксиом 1 и 2 (см. схему на этой странице).

Гёдель приводит подобные рассуждения в своей второй статье по теории относительности, чтобы опровергнуть факт, утверждаемый Джеймсом Джинсом, о том, что в рамках теории относительности можно определить понятие абсолютного времени. Гёдель отвечает ему, что поскольку он нашел модели теории, в которых этого понятия не существует, невозможно вывести из уравнений Эйнштейна обязательного существования абсолютного времени.

Вернемся к проблеме Кантора. Способ, которым Гёдель и Коэн доказали, что континуум-гипотеза неразрешима на основе аксиом теории множеств, подобен способу, которым мы воспользовались для доказательства неразрешимости P относительно аксиом 1 и 2. В статьях 1938 и 1939 годов, а также более детально в книге 1940 года Гёдель демонстрирует модель, выполняющую аксиомы теории множеств, для которой континуум-гипотеза верна. В этой модели нет множеств с промежуточными кардинальными числами между \aleph_1 и \aleph_2 — подобно тому, как мы нашли модель, в которой нет поглощающих элементов. Это доказывает, что СН не может быть опровергнута (если бы ее можно было опровергнуть на основе аксиом, она была бы ложной во всех моделях).

Изменение — это иллюзия видимости, вызванная особенностями нашего восприятия.

КУРТ ГЕДЕЛЬ, 1949 год

В 1963 году Коэн нашел модель аксиом теории множеств, в которой существует множество с промежуточным кардинальным числом между \aleph_1 и \aleph_2 , то есть модель, в которой СН ложна, и таким образом доказал, что СН не может быть доказана на основе аксиом теории множеств.

Но в стандартной модели, которую мы имеем в виду, формулируя аксиомы теории множеств, континуум-гипотеза истинна или ложна? На этот вопрос еще нет ответа. Многие специалисты считают, что надо найти еще одну аксиому, которую будут согласны принять как верную все заинтересованные лица, и она позволит в конце концов доказать или опровергнуть СН в стандартной модели. Общее мнение, основанное на философских аргументах (Гёдель и Коэн его разделяли), состоит в том, что континуум-гипотеза на самом деле ложна.

Следствия из работы Гёделя

Теоремы Гёделя о неполноте обозначили поворотную точку в исследованиях, связанных с философией математики. Современные тексты по философии математики обязательно учитывают теоремы Гёделя, анализируют и делают из них выводы, которые часто становятся причиной споров. Изучение следствий из теорем о неполноте едва лишь началось и, возможно, будет длиться еще десятки или сотни лет.

В Принстоне Гёдель нашел спокойный и однообразный социальный климат, идеально подходящий его образу жизни. Однако даже благоприятное окружение не смягчило ни ипохондрию ученого, ни его чудачества. Напротив, с течением времени его странности усилились до такой степени, что в 1941 году директор Института перспективных исследований Франк Эйделотт был вынужден спросить у личного врача Гёделя, существует ли опасность того, что его начинающаяся паранойя станет опасной для него и окружающих. Хотя врач ответил, что такой опасности нет, сам факт возникновения этого вопроса говорит о многом.

Гёделем владел страх болезней, реальных и мнимых. Так, он был убежден, что от отопления и кондиционера исходит плохой воздух, вредный для здоровья. У него был навязчивый страх холода, и нередко в разгар лета ученого видели в пальто, шарфе и перчатках. Как ни парадоксально, этот страх перед болезнями сопровождался полным недоверием к врачам, которое медленно трансформировалось в опасение людей в целом. Его стремление к одиночеству росло, и иногда он проводил долгие периоды, избегая любого контакта с другими, за исключением супруги Адели и двух-трех самых близких друзей.

С момента прибытия в США Адель вела грустную и одинокую жизнь, которая в основном заключалась в заботе о муже, однако необходимость такой заботы становилась все сильнее. Вначале Адели помогал Освальд Веблен, первый друг Гёделя в Принстоне, который поспособствовал ему в получении ра-

ФРАНК ЭЙДЕЛОТТ

Франклин Риджвей Эйделотт родился в деревне округа Гибсон (Индиана, США) в 1880 году и изучал английскую литературу в Индианском университете, который окончил в 1911 году. С 1921 по 1940 год он руководил колледжем Свартмор — образовательным учреждением, в котором провел много инновационных реформ. С 1939 по 1947 год был директором Института перспективных исследований в Принстоне, Нью-Джерси. В тот период в нем работало много выдающихся преподавателей, среди них Альберт Эйнштейн, Гёдель и Джон фон Нейман. Эйделотт скончался в 1956 году в Принстоне.



Фотография, сделанная 14 марта 1951 года — в день, когда Эйнштейну исполнилось 72 года. На снимке рядом с Эйнштейном — Франк Эйделотт и его супруга.

боты в Институте перспективных исследований. Через некоторое время помощь в заботе о Гёделе стал оказывать Альберт Эйнштейн. Их дружба (особенно крепкая после 1942 года) оказала на Гёделя благотворное влияние; прогулки с Эйнштейном были для него, если можно так сказать, терапевтическими, и хотя чудачества не исчезли полностью, они значительно смягчились. Можно понять, что смерть Эйнштейна в 1955 году стала тяжелым ударом для Гёделя и вызвала обострение его ипохондрии и паранойи. Восполнить эту утрату было невозможно, хотя Адели и помогал в ее заботах о супруге еще один его друг, Оскар Моргенштерн.

Кажется ясным, что плодотворность его идей вдохновит на новые работы. Немногим математикам дарован этот вид бессмертия.

Некролог, посвященный Гёделю, в лондонской газете «Таймс»

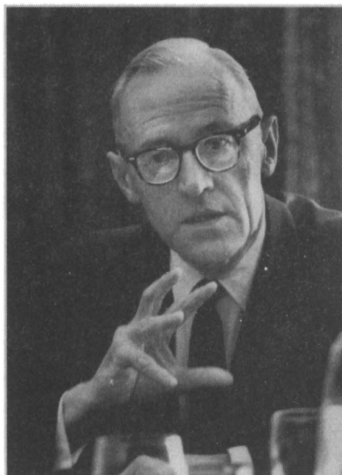
Психическое расстройство прогрессировало и в середине 1970-х годов превратилось в бред преследования. Гёдель жил с навязчивой идеей, что его хотят отравить. Доверял он только Адели и Моргенштерну и решительно отказывался принимать пищу, если Адель до этого ее не пробовала.

Оскар Моргенштерн скончался 26 июля 1977 года, через некоторое время Адели пришлось на шесть месяцев лечь в больницу, и Гёдель, оставшийся наедине со своими страхами и навязчивыми идеями, практически перестал есть. Его организм, и так не очень крепкий, быстро ослабел от истощения. Ученого положили в больницу в Принстоне, где он скончался вечером 14 января 1978 года. В заключении о смерти в качестве причины указано «недоедание и истощение, вызванные личными проблемами».

Но в некотором смысле Гёдель так и не умер; его работы, идеи, мысли, теоремы все еще живы; его методы доказательства изучаются и используются по сей день, и не будет преувеличением сказать, что их будут анализировать в течение веков.

ОСКАР МОРГЕНШТЕРН

Оскар Моргенштерн — экономист и математик. Родился в Силезии (сегодня — часть Польши) в 1902 году. Учился в университетах Вены, Гарварда и Нью-Йорка. В Вене посещал знаменитые семинары, организованные Карлом Менгером (профессором Венского университета), в которых также участвовал Гёдель. Во время Второй мировой войны эмигрировал в Принстон и уже в США в 1944 году совместно с Джоном фон Нейманом опубликовал книгу *Theory of Games and Economic Behavior* («Теория игр и экономического поведения»), которая положила начало современной теории игр. Моргенштерн скончался в 1977 году в Принстоне, Нью-Джерси, США.



В книге «За гранью чисел» американский математик Джон Аллен Полос пишет:

«Логик математики Курт Гёдель был одним из интеллектуальных гигантов XX века, и если предположить, что наш вид выживет, возможно, этот ученый окажется в числе немногих наших современников, которых будут помнить еще тысячу лет. [...] Речь идет не о самоуспокоении математиков, хотя для представителей всех дисциплин характерна некоторая профессиональная близорукость. Просто это правда».

ГИББСОВСКАЯ ЛЕКЦИЯ

Хотя после 1950 года Гёдель публиковался очень мало, это не значит, что он перестал размышлять и писать. Ученый оставил внушительное число неизданных рукописей, посвященных в основном философии и теологии, с исследованиями, среди прочего, на тему существования Бога, переселения душ и анализа философских работ Готфрида Лейбница. Все эти рукописи — поскольку Гёдель не оставил инструкций о том, что делать с ними, — были унаследованы его супругой Аделью, которая, в свою очередь, перед смертью в 1981 году передала их библиотеке Института перспективных исследований, где они и хранятся.

Среди неизданных бумаг выделяется текст Гиббсовской лекции, которую Гёделя пригласили прочитать на ежегодной встрече Американского математического общества, состоявшейся в Провиденсе 26 декабря 1951 года. По свидетельствам, Гёдель ограничился тем, что быстро прочел подготовленную заранее рукопись и даже не предоставил права на вопросы и комментарии в конце, хотя его встречали громкими аплодисментами, вызванными редкой возможностью лично увидеть гения такого уровня.

В последующие годы Гёдель занимался тем, что исправлял и завершал рукопись с намерением опубликовать ее, однако ему так и не удалось придать ей форму, которая удовлетворяла бы его самого. В конце концов лекция была опубликована в 1994 году как часть сборника под названием «Курт Гёдель, неизданные очерки».

Чем так интересна Гиббсовская лекция? В ней Гёдель очень детально (больше, чем в любой другой своей работе) изложил собственное понимание философских следствий из своих теорем о неполноте. В этой лекции он утверждал: теоремы доказывают, что математический платонизм — правильная позиция философии математики.

Вопрос состоит в следующем: математика создается или открывается? Это человеческое творение, или ученые откры-

вают факты, существующие во внешней реальности независимо от них?

Платонизм утверждает, что математические объекты имеют объективное существование, и работа ученых состоит в том, чтобы открывать характеристики этих объектов. Платон был уверен, что наши ощущения — только деформированное отражение высшей действительности, существующей в «мире идей». В этом самом мире живут и объекты, исследуемые математиками.

Знаменитая теорема Гёделя о неполноте показывает, что нет никаких формальных [синтаксических] методов доказательства, с помощью которых можно доказать все математические истины.

УИЛЛАРД ВАН ОРМАН КУАЙН О ТЕОРЕМЕ ГЁДЕЛЯ

Противоположная позиция, которая обычно называется формализмом и в которой собраны некоторые идеи интуиционизма и программы Гильберта, утверждает, что математика — это творение человека, подобное музыке. С этой точки зрения математика — лингвистическая (синтаксическая) игра, в которой есть некоторые отправные точки (аксиомы) и логические правила, позволяющие осуществлять операции на их основе. Работа ученого состоит в том, чтобы открыть, куда нас заведут правила игры (что, по сути, не сильно отличается от работы шахматиста, который ищет оптимальный ход в определенной позиции). Если, согласно платонизму, математические объекты существуют сами по себе, а ученые открывают их свойства, то формализм утверждает обратное: математические объекты и их свойства существуют лишь благодаря ученым. У обеих позиций есть сильные и слабые стороны, и они существуют в математической мысли параллельно друг другу. Современный философ математики Джон Барроу пишет: «Математики — формалисты с понедельника по пятницу и платонисты по выходным».

То есть для повседневной работы, для доказательства теорем и написания статей формалистская позиция является более подходящей, поскольку в конечном счете любая истина основывается на аксиомах, выбор которых не нуждается в дальнейших подтверждениях (в формализме требуется только, чтобы аксиомы были непротиворечивыми, но они не обязаны отражать внешнюю истинность). Однако по выходным, когда математики расслабляются, они чувствуют, что работают с «истинными объектами», существование которых независимо и реально (что бы это ни означало).

Обе позиции четко разделены в отношении вопроса континуум-гипотезы. В предыдущей главе мы увидели, что континуум-гипотеза (СН) неразрешима относительно аксиом теории множеств. Так истинна она или ложна? Для чистого формалиста (хотя сегодня таких почти не существует) ответ не имеет смысла. Аксиомы — это правила игры, выбранные произвольно, не отражающие никакую внешнюю «истинность»; существуют только синтаксические понятия «доказуемого» и «недоказуемого», а не понятия «истинности» или «ложности». Согласно этой точке зрения так же законно добавить в теорию множеств новую аксиому, при которой СН будет доказуема, как и добавить другую аксиому, при которой она будет опровергнута. Две различные теории множеств могут существовать параллельно друг другу так же, как одновременно существуют различные виды шахмат (например, китайские и японские), которые допускают варианты правил игры, и нет необходимости думать, что существуют «истинные» шахматы.

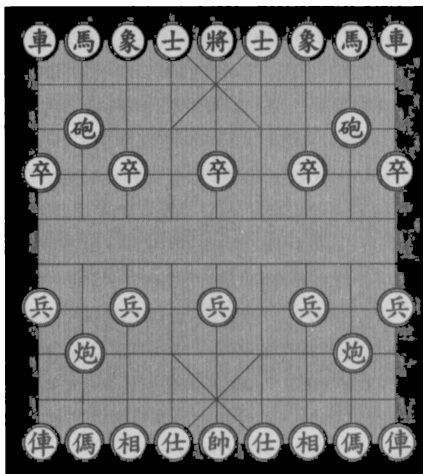
Для платонизма, наоборот, аксиомы теории множеств отражают истину, которая существует объективно и в которой СН либо истинна, либо ложна, и не хватает всего лишь аксиомы, которая позволила бы решить вопрос.

Гёдель был убежденным платонистом и в статье, опубликованной в 1947 году под названием «Что представляет собой проблема континуума Кантора?», писал: «Следует отметить [...], что с точки зрения, принятой здесь, доказательство неразрешимости гипотезы Кантора на основе аксиом, принятых в теории множеств, [...] в какой-то степени решило бы про-

ЕСТЬ ЛИ ИСТИННЫЕ ШАХМАТЫ?

Китайские шахматы — стратегическая игра из той же серии, что и западные шахматы и сёги (японские шахматы). Считается, что все они происходят от игры под названием чатуранга, зародившейся в Индии в VI веке. Для формалистов (которые подчеркивают синтаксические аспекты математики) выбор аксиом для математической теории не сильно отличается от определения правил настольной игры. Западные, китайские или японские шахматы — родственные настольные игры, но среди них нет «истинной» и «ложных». Подобно этому, поскольку континуум-гипотеза (CH) неразрешима относительно аксиом

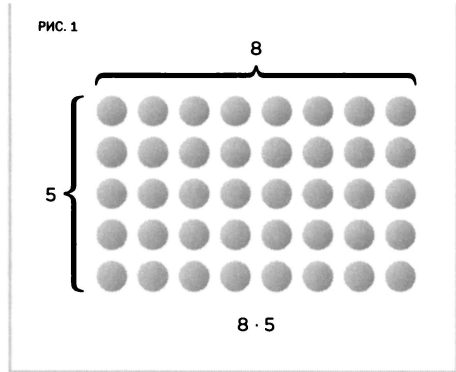
теории множеств, можно добавить CH или ее отрицание в качестве новой аксиомы. В обоих случаях получаются разные теории множеств (разные правила игры), и нельзя сказать, что одна из них истинная, а другая ложная. Для платонистов, наоборот, теория множеств относится к объективной действительности, в которой континуум-гипотеза на самом деле истинна или ложна.



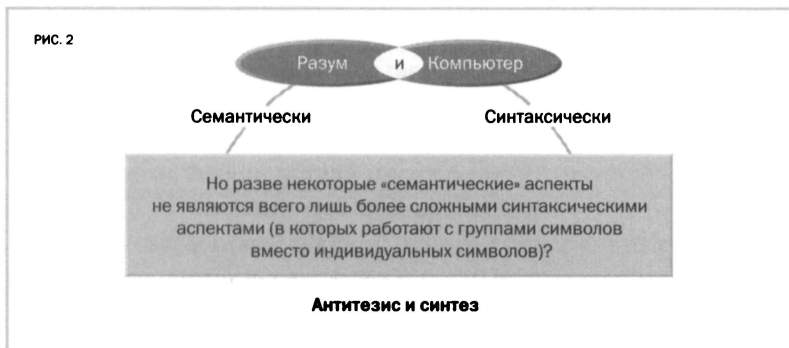
Доска китайских шахмат с исходной позицией фигур.

блему. Итак, если принять, что значение первичных символов теории множеств [...] корректно, то понятия и теоремы теории множеств описывали бы некую точно определенную действительность, в которой гипотеза Кантора должна была бы быть истинной или ложной». Позже, в 1963 году, дополнив доказательство о неразрешимости CH, Пол Коэн согласился с этой точкой зрения и рискнул предположить, что гипотеза Кантора на самом деле ложна.

Как мы уже сказали, на Гиббсовской лекции 1951 года Гёдель утверждал, что его теоремы о неполноте доказывают справедливость платонистической точки зрения. Рассмотрим кратко аргументацию Гёделя. В разуме каждого из нас есть интуитивное представление о том, что такое натуральные числа. Мы понимаем, как определяются основные операции и каковы их основные свойства. Например, мы воспринимаем, что умножение 8 на 5 равносильно физической операции образования восьми столбиков с пятью объектами в каждом из них (рисунок 1).



Следовательно, у нас есть мысленная модель натуральных чисел, их структуры, которую изучают математики. С другой стороны, первая теорема Гёделя о неполноте доказывает, что эта модель не может быть полностью охарактеризована синтаксическими методами, то есть если мы ограничимся синтаксическими методами рассуждения, всегда найдутся недостижимые истины. Синтаксических методов доказательства недостаточно, чтобы постичь все свойства модели, которую мы не способны понять семантически. Это предполагает, согласно Гёделю, что эта мысленная модель, эти сущности, которые



АКСИОМЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Парадокс Бертрана Рассела был в конце концов решен благодаря переформулировке аксиом теории множеств, предложенной немецким математиком Эрнстом Цермело в 1908 году и улучшенной через несколько лет также немецким математиком Абрахамом Френкелем. Хотя существовали и другие аналогичные предложения (одно из них было представлено самим Гёделем), аксиоматическая теория Цермело — Френкеля (или ZF, как ее обычно называют) сегодня является теорией множеств по умолчанию.

1. Два множества равны, если они имеют в точности одни и те же члены.
2. Существует пустое множество.
3. При заданных x и y существует упорядоченная пара (x, y) .
4. Объединение множеств — это также множество.
5. Существует по крайней мере одно бесконечное множество.
6. Любое свойство, которое можно выразить на формальном языке теории множеств, может быть использовано для определения множества.
7. При заданном множестве всегда существует множество, образованное всеми его подмножествами.
8. При заданном конечном или бесконечном семействе непустых множеств всегда существует множество, содержащее ровно один член каждого множества этого семейства.
9. Ни одно множество не является членом самого себя.

Ключевая аксиома для избегания парадокса Рассела — шестая, которая уточняет, на каких свойствах могут основываться определения множеств. Эта аксиома в сочетании с девятой позволяет доказать, что парадоксального множества Рассела просто не существует.

мы называем натуральными числами, со всеми их свойствами и взаимоотношениями, существуют в платонической реальности, находящейся за гранью чистой лингвистики (рисунок 2).

Выводы Гёделя были оспорены современными логиками, такими как Соломон Феферман или Пану Раатикайнен, утверждавшими, что аргументы Гёделя основываются на предположениях, справедливость которых можно оспорить (как тот факт, что в каждом человеческом мозге существует модель натуральных чисел).

Дело в том, что сегодня пока еще нет единодушного мнения о том, какая связь существует между теоремами Гёделя и природой математических объектов. В любом случае прошло чуть более 80 лет с момента публикации теорем Гёделя, а это небольшой срок для того, чтобы делать какой-то определенный математический вывод.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ИСТИНА

Во многих популярных книгах говорится, что теорема Гёделя о неполноте доказывает невозможность найти множество аксиом арифметики, которое позволило бы доказать все истины этой теории; но это утверждение на самом деле некорректно. Как мы уже много раз говорили, это правда, только если ограничиваться только методами доказательства, принятыми программой Гильберта. Однако существуют и другие методы.

Например, вспомним аксиомы Пеано, то есть аксиомы, относящиеся к натуральным числам и включающие в качестве первоначальных составляющих сумму, произведение и функцию последующего элемента.

Аксиома 1: нет ни одного числа с последующим элементом 1.

Аксиома 2: если у двух чисел один и тот же последующий элемент, то они равны.

Аксиома 3: последующий элемент для x — это $x + 1$.

Аксиома 4: $(x + y) + 1 = x + (y + 1)$.

Аксиома 5: произведение x на 1 равно x .

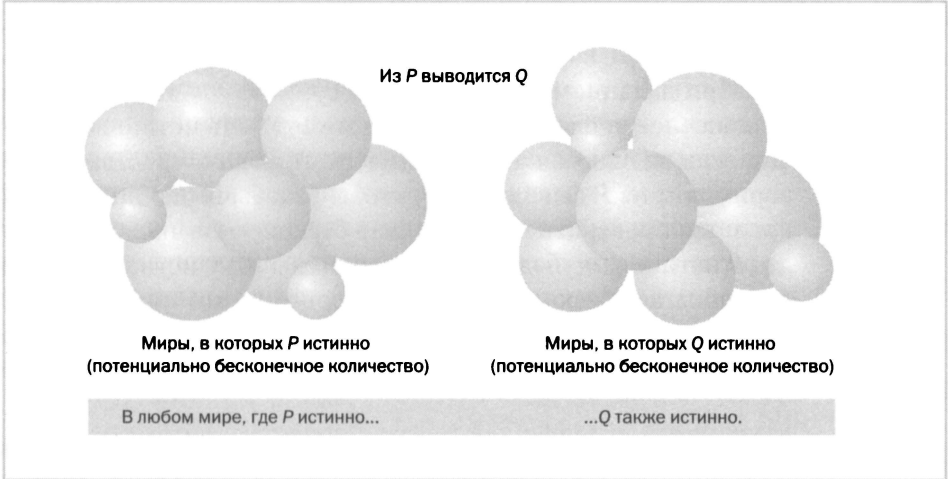
Аксиома 6: $x \cdot (y + 1) = x \cdot y + x$.

Аксиома 7: если 1 выполняет некое свойство и можно быть уверенным, что и x выполняет это свойство, а значит, его последующий элемент тоже его выполняет, то при таких условиях можно быть уверенным: любое число выполняет это свойство.

Докажем, что аксиомы Пеано непротиворечивы. Для начала заметим, что все семь аксиом — это истинные высказывания (в мире натуральных чисел). Мы уже сказали, что из истинных предпосылок можно вывести только истинные утверждения, следовательно, из аксиом Пеано нельзя вывести ни одного ложного высказывания. Но если множество аксиом противоречно, то на его основе доказуемо любое высказывание. Поскольку есть высказывания, которые недоказуемы на основе аксиом Пеано (ложные высказывания недоказуемы), то мы делаем вывод, что аксиомы Пеано непротиворечивы.

Во второй теореме о неполноте говорится, что нельзя доказать непротиворечивость аксиом Пеано... но мы только что его доказали. Как это возможно? Ответ, конечно же, в том, что во второй теореме о неполноте на самом деле говорится: невозможно доказать непротиворечивость аксиом Пеано, *пользуясь методами программы Гильберта*. Доказательство непротиворечивости, которое мы только что осуществили, следовательно, является корректным рассуждением, но не подчиняется ограничениям этой программы: корректность доказательства нельзя проверить алгоритмически.

Это ведет нас напрямую к следствию из теорем Гёделя: не существует алгоритма, который мог бы во всех случаях проверить истинность или ложность арифметического высказывания (если бы это было так, компьютер мог бы проверить корректность доказательства о непротиворечивости, которое мы вывели выше, что, согласно второй теореме Гёделя, невозможно). Другими словами, никогда нельзя будет запрограммировать компьютер так, чтобы можно было доказать все гипотезы арифметики (речь идет о принципиальном ограничении, которое не сможет преодолеть технический прогресс), компьютеры



никогда не превзойдут математиков (хотя, как мы увидим далее, также неясно, всегда ли математики будут способны превосходить компьютеры).

Итак, вторая теорема о неполноте оказывается ложной, если мы применим при доказательстве семантические методы. Но что произойдет с первой теоремой Гёделя? Можно доказать, что если мы допустим семантические методы, то любая арифметическая истина доказуема на основе аксиом Пеано. Под семантическими методами мы понимаем те, что основаны на понятии истины. Логическое правило, которое используется в этих рассуждениях, таково: из P выводится Q , если во всех мирах (или моделях), где P истинно, Q также истинно (см. рисунок). Вновь возьмем пример доказательства, который мы рассматривали в главе 2, и зададимся вопросом, справедлив ли вывод:

из равенства $(a - b) \cdot a = (a - b) \cdot c$ мы делаем вывод, что $a = c$,

где P — это высказывание « $(a - b) \cdot a = (a - b) \cdot c$ », а Q — это « $a = c$ ». Вывод несправедлив, поскольку существует модель (пример), в которой P истинно, а Q ложно. Действительно,

если мы возьмем $a = b = 2$ и $c = 3$, то получается, что P истинно, а Q ложно.

При заданном высказывании существует потенциально бесконечное число миров, где оно может быть истинным. Значит, если на одном шаге семантического доказательства мы говорим, что из P выводится Q , чтобы узнать, верно ли это, нам придется проверить потенциально бесконечное число случаев, где P истинно, и убедиться, что во всех также истинно Q . Это предполагает бесконечное число проверок, которое не может быть осуществлено компьютером. Также неясно, может ли оно быть осуществлено человеческим разумом.

НЕЕВКЛИДОВЫ ГЕОМЕТРИИ

Евклидова геометрия, изложенная в работе ученого «Начала» (III век до н. э.), основана на пяти постулатах, или аксиомах, которые могут быть сформулированы следующим образом.

1. Через две точки можно провести единственную прямую.
2. Отрезок можно продолжить из любого его конца.
3. При любом центре и любом радиусе можно провести окружность.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Через точку, не лежащую на прямой, можно провести единственную прямую, параллельную данной.



Итальянский математик Эудженио Бельтрами.

Первые четыре постулата очевидны, но пятый имеет высокую понятийную сложность и может оказаться не таким явным, как остальные. На самом деле оригинальная формулировка Евклида для пятого постулата была

Это приравнивает математику к естественным наукам. В физике, например, любая теория является предварительной. То, что гравитационное притяжение между двумя телами уменьшается согласно квадрату расстояния, — это предварительное утверждение, поскольку мы никогда не сможем проверить силу гравитационного притяжения для всех пар тел, существующих во Вселенной, на всех возможных расстояниях. Утверждение истинно... пока не найдена ситуация, в которой оно не работает.

Нечто подобное происходит с семантическими доказательствами; мы можем быть уверены, что из P выводится Q ... пока

еще сложнее (выше приведена самая известная формулировка, предложенная английским математиком Джоном Плейфэром в конце XVIII века). Интересно добавить, что в своих доказательствах Евклид старался меньше использовать пятый постулат (как будто он сам немного не доверял его справедливости).

Доказательство Эудженио Бельтрами

В течение многих веков считалось, что пятый постулат можно доказать на основе четырех других. Было сделано много попыток найти доказательство, но все они провалились. Наконец, в 1868 году Эудженио Бельтрами доказал, что пятый постулат неразрешим относительно остальных четырех, то есть ни сам постулат, ни его отрицание не могут быть доказаны на их основе. Это был первый в истории известный пример неразрешимости относительно множества аксиом — за несколько десятков лет до того, как Гёдель доказал свою теорему. У пятого постулата есть два отрицания: в одном из них говорится, что через точку, не лежащую на прямой, не проходит ни одной прямой, параллельной данной, в другом — что через нее проходит больше одной параллельной прямой. Как пятый постулат, так и его отрицания могут быть добавлены к оставшимся четырем, и во всех случаях получается непротиворечивое множество аксиом. Когда добавляется пятый постулат, получается, конечно же, геометрия Евклида; в оставшихся двух случаях возникают так называемые неевклидовы геометрии. Сегодня считается, что все эти геометрии одинаково справедливы; неевклидовы больше подходят для описания эйнштейновского пространства, искривленного присутствием масс, в то время как евклидова больше приспособлена к нашему восприятию повседневных явлений.

не найдем мир, в котором P будет истинным, а Q не работает. В программе Гильберта предполагалось избавление от этой неточности и предлагались методы доказательства, правильность которых можно было бы проверить раз и навсегда.

Повторим сказанное выше: любое истинное арифметическое высказывание может быть доказано на основе аксиом Пеано, если мы допустим семантические методы. Но мы никогда не сможем быть абсолютно уверены в том, что эти семантические методы верны. Мы можем иметь точные и достоверные методы рассуждения, как хотел Гильберт, но в этом случае не сможем доказать все истины. Мы можем узнать потенциально все арифметические истины, но без уверенности в том, что наши методы корректны. Надежность и достоверность либо возможность узнать все истины — одно или другое, но не оба варианта одновременно.

ЛЮДИ И КОМПЬЮТЕРЫ

Выше ли человеческий разум компьютера? Верно ли, что мы «думаем», в то время как компьютер просто «считает»? Или нет принципиальной разницы, и однажды технологический прогресс позволит нам создать искусственный интеллект, с которым мы встречаемся в научной фантастике?

Полемика на эту тему началась в середине XX века — с развитием первых электронных компьютеров. С тех пор были написаны десятки и даже сотни книг и статей с аргументами, опровержениями, дебатами и гипотезами на эту тему, но до сегодняшнего дня ответа так и нет.

Очевидно, что на нескольких страницах невозможно сделать обзор всех аргументов за или против. Упомянем лишь: теоремы Гёделя о неполноте несколько раз использовались в таких дискуссиях как аргумент в пользу того, что человеческий разум выше компьютера.

Прежде мы привели доказательство непротиворечивости аксиом Пеано, и наша человеческая способность воспринимать

семантическое понятие «истины» убеждает нас в том, что оно верно. Однако во второй теореме Гёделя доказываем, что правильность этого доказательства не может быть проверена компьютером. Так мы нашли задачу (проверка правильности доказательства того, что аксиомы Пеано непротиворечивы), которую человеческий разум может осуществить, а компьютер нет (и эта невозможность принципиальна). Следовательно, человеческий разум выше компьютера.

В случае если математические предложения имеют отношение к действительности, они неточны, и наоборот, если они точные, они не имеют отношения к действительности.

АЛЬБЕРТ ЭЙНШТЕЙН НА ЛЕКЦИИ, ПРОЧИТАННОЙ 27 ЯНВАРЯ 1921 ГОДА

Аргумент кажется убедительным, но он не окончательный. Доказательство непротиворечивости аксиом Пеано основывается на нашей интуиции о том, что эти аксиомы являются истинными высказываниями. Но не ошибается ли наша интуиция? Она ведь подвела, например, Фреге, который в течение нескольких лет был убежден в непротиворечивости своих аксиом, пока Бертран Рассел не открыл, что одна из них противоречит самой себе. Возможно, когда-то в будущем новый Рассел покажет нам парадокс, следующий из аксиом Пеано, и скажет, что они все-таки противоречивы.

Следовательно, мы не можем хвастаться своим превосходством над компьютерами, поскольку никогда не будем уверенными в том, что наши семантические рассуждения верны. Нам нужно свыкнуться с возможностью того, что в будущем все (или почти все) наши рассуждения окажутся неверными.

Дискуссия, начатая с открытия парадокса Рассела, так и не закончилась. Три предположения, которые были сделаны в начале XX века, — интуиционизм, логицизм и формализм (или программа Гильберта) — провалились по разным причинам и не были заменены другой программой аналогичного уровня. Какова природа математических объектов? Существует ли промежуточный уровень между чисто синтаксически-

ми и семантическими рассуждениями, который позволил бы превзойти неполноту теорем Гёделя, в то же время обеспечив непротиворечивость? Действительно ли существует категорическая разница между синтаксическим и семантическим? Или понятия, которые мы называем семантическими, являются всего лишь более сложными синтаксическими понятиями (в которых работают с группами символов вместо индивидуальных символов)? Существует еще много подобных вопросов, ответы на которые не найдены... к счастью.

Список рекомендуемой литературы

- BELL, E.T., *Los grandes matemáticos*, Buenos Aires, Losada, 2010.
- BOYER, C., *Historia de la matemática*, Madrid, Alianza Editorial, 2007.
- GÖDEL, K., *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de los Principia Mathematica y sistemas afines*, Oviedo, KRK Ediciones, 2006.
- HOFSTADTER, D., *Gödel, Escher y Bach (Un eterno y grácil bucle)*, Barcelona, Tusquets, 1992.
- KLINE, M., *Matemáticas, la pérdida de la incertidumbre*, México D.F., Siglo Veintiuno Editores, 1998.
- MARTÍNEZ, G., PIÑEIRO, G., *Gödel \forall (para todos)*, Barcelona, Destino, 2010.
- MARTINÓN, A. (compilador), *Las matemáticas del siglo xx (Una mirada en 101 artículos)*, Madrid, Nivola, 2000.
- NAGEL, E., NEWMAN, J., *El teorema de Gödel*, Madrid, Tecnos, 1994.
- ODIFREDDI, P., *La matemática del siglo xx: de los conjuntos a la complejidad*, Buenos Aires, Katz Editores, 2006.
- SMULLYAN, R., *Juegos por siempre misteriosos*, Barcelona, Gedisa, 1988.
- STEWART, I., *Historia de las matemáticas*, Madrid, Crítica, 2008.

Указатель

- Аристотель 18–21, 37, 65
арифметика 22, 33, 35, 44–48, 51,
54, 58, 60, 62, 63, 64, 69, 73,
76–78, 81, 83, 84, 107, 108, 110,
112, 115–117, 155–157, 160
Архимед 24
- бесконечность
актуальная 19–24, 28, 29, 31,
35, 37, 43, 44
потенциальная 19, 20, 22, 25,
28
- Борель, Эмиль 10, 11
Брауэр, Лейтзен Эгберт Ян 37, 38,
40, 47, 48, 56
- Вена 13, 17, 18, 41, 53–57, 67, 90,
92–94, 96, 121, 126, 148
Венский кружок 13, 56–57, 67, 93,
121
Вселенная 21, 101, 124, 126, 127,
156, 157, 158
вращающаяся 123–128
Гёделя 124
- Галилей, Галилео 21–23, 29, 37
- Гаусс, Иоганн Карл Фридрих 23
Гейне, Эдуард 25, 28
Гейтинг, Аренд 48, 96
Герон Александрийский 45
Гёте, Иоганн Вольфганг фон 54
теория цвета 53, 54
Гиббсовская лекция 13, 149–155
Гильберт, Давид
проблемы 7, 8, 42, 45, 46, 56,
65, 128, 137
программа 43–49, 51, 56–58,
61, 64, 65, 68, 74, 84, 87,
96–99, 106–108, 115, 150,
155, 156, 159, 161, 162
- гипотеза
континуум 43, 128, 136–138,
141, 151, 152
Римана 8
- Гольдбах, Кристиан 108
Гольдбаха гипотеза 8, 9, 10, 108
Гудстейна теорема 80, 81
- Джинс, Джеймс Хопвуд 126, 127,
140
диагональная функция 78, 79,
110

- доказательство
 семантическое 157, 159, 160
 синтаксическое 97, 99, 101,
 103, 104, 107, 109–111, 113,
 115, 139
- единственность 26, 28, 137
 разложения на простые числа
 28
- интуиционизм 36–43, 47, 48, 150,
 161
- Кантор, Георг 23–25, 28–32, 35,
 37, 38, 40, 41, 43, 128, 130–132,
 136, 137, 141, 151, 152
- Кантора диагональный метод
 132–136
- код 70–74, 76–82, 109, 110, 111,
 113, 114, 116, 117
- концептография 32
- Коэн, Пол Джозеф 43, 137, 138,
 141, 152
- Кронекер, Леопольд 25, 30, 31,
 38
- логицизм 36–43, 48, 161
- множество 29, 30, 33, 34, 36, 46, 51,
 58, 60, 65, 66, 73, 84, 85, 89–91,
 99, 101, 103–106, 108, 109, 112,
 113, 115–118, 128, 130–132,
 134, 136–138, 141, 154–156,
 159
- бесконечное 28, 29, 128, 130–
 132, 154
- кардинальное число 128–134,
 136, 138, 141
- конечное 128, 130
- теория 29, 30, 31, 33, 40, 41, 43,
 44, 81, 127, 138, 141, 151,
 152, 154
- множество аксиом 46, 58, 60, 65,
 66, 73, 89, 90, 101, 103–106,
 108, 109, 112, 113, 115–118,
 155, 156, 159
- неполное 106, 109
- непротиворечивое 101, 103,
 106, 108, 109, 112–118, 124,
 151, 156, 159, 161
- омега-непротиворечивое
 112
- полное 106, 108, 115
- противоречивое 103–106, 116,
 156, 161
- модель 139–141, 153, 154, 157
- Моргенштерн, Оскар 91, 122, 147,
 148
- «Начала» (Евклид) 22, 158
- Нейман, Джон фон 48, 49, 91, 94,
 146, 148
- относительности теория 12, 55,
 119, 123, 124, 126, 127, 140
- парадокс лжеца 36, 83, 100
- Пеано, Джузеппе 46
- аксиомы 46, 60, 84, 155–157,
 159–161
- Планк, Макс 57
- Планка принцип 31
- платонизм 149–151
- понятия
- семантические 96–100, 104,
 156, 157, 159–162
- синтаксические 96–99, 101,
 103, 104, 106, 109, 115,
 151–153, 162
- Поркерт, Адель 13, 93–95
- правила
- логики 60, 63, 66, 104, 111, 150,
 157
- синтаксические 104

- Принстон, Институт перспективных исследований 13, 55, 90–92, 96, 119, 121–123, 125–127, 145–148
- Рассел, Бертран 11, 19, 31–37, 56, 70, 100, 104, 105, 124, 161
- Рассела парадокс 34, 36, 43, 60, 100, 105, 154, 161
- самореференция 36
 метод 78–84, 110
 семантическая 100
 синтаксическая 100
- теорема
 о неполноте (вторая теорема) 49, 65, 90, 106, 117, 143, 149, 152, 156, 160, 162
 о неполноте (первая теорема) 7, 13, 41, 48, 51, 57, 64–68, 70, 82, 84, 87, 89, 90, 96, 97–99, 101, 109, 115, 117, 138, 143, 149, 152, 153, 160, 162
 о полноте 57, 58–65, 85
- Уайлс, Эндрю 59, 75, 85
- Ферма теорема 59, 75, 84
 формализм 48, 150, 151, 161
 Фреге, Готлоб 19, 31–33, 35, 36, 44, 104, 105, 161
 Фуртвенглер, Филипп 13, 54, 55, 67
 Фурье ряды 25–26, 137
- Чёрч, Алонзо 91, 92
- число
 Гёделя 70–74, 76–79, 109, 116, 117
 действительное 132, 134, 136
 иррациональное 39, 40, 44
 квадратное 22, 23, 29, 130
 нормальное 10, 11
 простое 8, 9, 22, 26–29, 38, 39, 58, 74, 76–78, 83, 99, 100, 102, 103, 107, 108, 116, 117
 целое 26, 131, 132, 134, 139, 140
- Шлик, Мориц 13, 56, 57, 93
- Эйделотт, Франклин Риджвей 145, 146
- Эйнштейн, Альберт 13, 18, 55, 90, 91, 94, 119, 122–126, 141, 146, 147, 161

Наука. Величайшие теории
Выпуск № 17, 2015
Еженедельное издание

РОССИЯ

Издатель, учредитель, редакция:
ООО «Де Агостини», Россия
Юридический адрес: Россия, 105066,
г. Москва, ул. Александра Лукьянова,
д. 3, стр. 1
*Письма читателей по данному адресу
не принимаются.*

Генеральный директор: Николаос Скилакис
Главный редактор: Анастасия Жаркова
Выпускающий редактор:
Людмила Виноградова
Финансовый директор: Полина Быстрова
Коммерческий директор: Александр Якутов
Менеджер по маркетингу: Михаил Ткачук
Младший менеджер по продукту:
Ольга Кравцова

**Для заказа пропущенных выпусков
и по всем вопросам, касающимся информа-
ции о коллекции, обращайтесь по телефону
бесплатной горячей линии в России:**
☎ 8-800-200-02-01
**Телефон «горячей линии» для читателей
Москвы:**
☎ 8-495-660-02-02

Адрес для писем читателей:
Россия, 600001, г. Владимир, а/я 30,
«Де Агостини», «Наука. Величайшие
теории»
*Пожалуйста, указывайте в письмах свои кон-
тактные данные для обратной связи (теле-
фон или e-mail).*

Распространение: ООО «Бурда Дистрибью-
шен Сервисиз»

Свидетельство о регистрации СМИ в Феде-
ральной службе по надзору в сфере связи, ин-
формационных технологий и массовых ком-
муникаций (Роскомнадзор) ПИ № ФС77-
56146 от 15.11.2013

УКРАИНА

Издатель и учредитель:
ООО «Де Агостини Пабблишинг», Украина
Юридический адрес:
01032, Украина, г. Киев, ул. Саксаганского,
119
Генеральный директор: Екатерина Клименко

**Для заказа пропущенных выпусков
и по всем вопросам, касающимся информа-
ции о коллекции, обращайтесь по телефону
бесплатной горячей линии в Украине:**
☎ 0-800-500-8-40
Адрес для писем читателей:
Украина, 01033, г. Киев, а/я «Де Агостини»,
«Наука. Величайшие теории»
Україна, 01033, м. Київ, а/с «Де Агостіні»

Свидетельство о регистрации печатного
СМИ Государственной регистрационной
службой Украины
КВ № 20525-10325Р от 13.02.2014

БЕЛАРУСЬ

Импортер и дистрибьютор в РБ:
ООО «Росчерк», 220037, г. Минск,
ул. Авангардная, 48а, литер 8/к,
тел./факс: + 375 (17) 331 94 41
Телефон «горячей линии» в РБ:
☎ + 375 17 279-87-87
(пн-пт, 9.00–21.00)
Адрес для писем читателей:
Республика Беларусь, 220040, г. Минск,
а/я 224, ООО «Росчерк», «Де Агостини»,
«Наука. Величайшие теории»

КАЗАХСТАН

Распространение:
ТОО «КГП «Бурда-Алатау Пресс»

Издатель оставляет за собой право изменять
розничную цену выпусков. Издатель остав-
ляет за собой право изменять последователь-
ность выпусков и их содержание.

**Отпечатано в полном соответствии
с качеством предоставленного
электронного оригинал-макета
в ОАО «Ярославский полиграфический
комбинат»**
150049, Ярославль, ул. Свободы, 97
Формат 70 x 100 / 16.
Гарнитура Petersburg
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Печ. л. 5,25. Усл. печ. л. 6,804.
Тираж: 28 300 экз.
Заказ № 1504870.

© Gustavo Ernesto Piñeiro, 2012 (текст)
© RBA Coleccionables S.A., 2012
© ООО «Де Агостини», 2014–2015

ISSN 2409-0069



Данный знак информационной про-
дукции размещен в соответствии с требова-
ниями Федерального закона от 29 декабря
2010 г. № 436-ФЗ «О защите детей от ин-
формации, причиняющей вред их здоровью
и развитию».

Коллекция для взрослых, не подлежит обя-
зательному подтверждению соответствия
единым требованиям установленным Техни-
ческим регламентом Таможенного союза «О
безопасности продукции, предназначенной
для детей и подростков» ТР ТС 007/2011
от 23 сентября 2011 г. № 797

Дата выхода в России 02.05.2015

Курт Гёдель изменил понимание математики. Две теоремы о неполноте, сформулированные им в 1931 году, с помощью формальной логики выявили хрупкость фундамента великого здания математики, которое усердно строили со времен Евклида. Научное сообщество было вынуждено признать, что справедливость той или иной гипотезы может лежать за гранью любой рациональной попытки доказать ее, и интуицию нельзя исключить из царства математики. Гёдель, получивший образование в благополучной Вене межвоенного периода, быстро заинтересовался эпистемологией и теорией доказательств. Так же как и его друг Альберт Эйнштейн, он оспаривал догмы современной науки, и точно так же в его жизни присутствовали война и изгнание.



Рекомендуемая розничная цена: 279 руб.