Министерство образования и науки Российской Федерации
НОВОСИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г.П. ЧИКИЛЬДИН

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Утверждено Редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

НОВОСИБИРСК
2017

УДК 517.44
Ч-602

Рецензенты:

д-р техн. наук *А.А. Воевода*,
д-р техн. наук *А.С. Толстиков*

Чикильдин Г.П.

Ч-602 Идентификация динамических объектов : учеб. пособие / Г.П. Чикильдин. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2017. – 88 с.

ISBN 978-5-7782-3275-4

Рассмотрены вопросы представления объектов управления различными видами математических моделей. Приведены алгоритмы параметрической и непараметрической идентификации. Материал в пособии излагается с точки зрения пользователей алгоритмами оценивания математических моделей динамических объектов и анализа корректирующих параметров этих алгоритмов, обеспечивающих минимум ошибки идентификации.

Чикильдин Геннадий Павлович

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Учебное пособие

Редактор *И.Л. Кескевич*
Выпускающий редактор *И.П. Брованова*
Корректор *И.Е. Семенова*
Дизайн обложки *А.В. Ладыжская*
Компьютерная верстка *Л.А. Веселовская*

Налоговая льгота – Общероссийский классификатор продукции
Издание соответствует коду 95 3000 ОК 005-93 (ОКП)

Подписано в печать 05.06.2017. Формат 60 × 84 1/16. Бумага офсетная. Тираж 75 экз.
Уч.-изд. л. 5,11. Печ. л. 5,5. Изд. № 35. Заказ № 804. Цена договорная

Отпечатано в типографии
Новосибирского государственного технического университета
630073, г. Новосибирск, пр. К. Маркса, 20

УДК 517.44

ISBN 978-5-7782-3275-4

© Чикильдин Г.П., 2017
© Новосибирский государственный технический университет, 2017

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ

Под идентификацией динамического объекта управления (ОУ) будем понимать определение математической модели этого объекта по экспериментальным данным, в качестве которых используются входной и выходной сигналы идентифицируемого объекта.

Для иллюстрации постановки задачи идентификации рассмотрим некий линейный стационарный динамический объект, описываемый дифференциальным уравнением вида

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(t) \sum_{i=1}^{m+1} b_i x^{(i-1)}(t), \qquad m < n.$$

Необходимо определить порядки n и m левой и правой части динамического объекта (ДУ) и коэффициенты a_i, $i \in [1, n]$, b_i, $i \in [1, m+1]$.

Априорной информацией для решения задачи идентификации служат измеренные (как правило, с помехами) входной $x_*(t) = x(t) + \delta x(t)$ и выходной $y_*(t) = y(t) + \delta y(t)$ сигналы объекта, подлежащего идентификации (рис. 1.1)

Наличие аддитивных помех $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$, использование численных методов в алгоритмах идентификации (методическая погрешность), обработка информации на ЦВМ (вычислительная погрешность) приводят к тому, что результатом решения задачи идентификации всегда будут лишь оценки искомых параметров математической модели

$$n_0,\ a_{0i},\ i \in [1,\ n_0],\ m_0,\ b_{0i},\ i \in [1,\ m_0 + 1].$$

Помехи $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$ возникают в результате преобразования сигналов любой физической природы в электрические сигналы вида, удобного для обработки на ЦВМ. Цепочку преобразования можно представить в виде, показанном на рис. 1.2: датчик (первичный преобразователь) → нормирующее устройство → АЦП → буфер памяти.

Все эти устройства несовершенны и вносят искажения в процессе преобразования. Кроме того, может влиять и окружающая среда в виде каких-либо возмущающих воздействий.

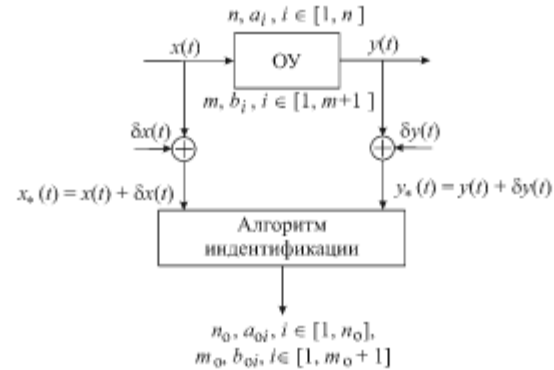

Рис. 1.1

Рис. 1.2

Идентификация называется *активной*, если входной сигнал $x(t)$ – тестовый (подается со специального генератора). Если же он измеряется в процессе нормального функционирования объекта, то имеет место *пассивная* идентификация.

Определение порядков левой n и правой m части дифференциального уравнения называют *структурной* идентификацией, а определение коэффициентов a_i, $i \in [1, n]$, и b_i, $i \in [1, m+1]$ – *параметрической* идентификацией. Это касается и передаточной функции $W(s) = B(s)/A(s)$, где n и a_i, $i \in [1, n]$ – порядок и коэффициенты полинома знаменателя $A(s)$, а m и b_i, $i \in [1, m+1]$ – порядок и коэффициенты полинома числителя $B(s)$.

Задачи определения импульсной, амплитудной частотной и фазовой частотной характеристик называют *непараметрической* идентификацией. Суть решения задачи непараметрической идентификации сводится к вычислению значений той или иной характеристики в каждой точке интервала определения.

Следует отметить частные постановки задачи идентификации, когда определяют не математическую модель, а некоторые свойства объекта управления, например, линейность, стационарность, наличие чистого запаздывания.

Существуют два подхода, на которых базируются алгоритмы идентификации. В первом случае предполагается предварительный сбор информации об объекте с дальнейшей ее обработкой, причем места сбора и обработки могут быть разнесены. Алгоритмы, базирующиеся на таком подходе, называют *ретроспективными*. Если искомые параметры и характеристики определяются по мере поступления априорной информации, в так называемом пошаговом режиме, то алгоритмы называют *рекуррентными*. Рекуррентные алгоритмы используются, например, при идентификации нестационарных объектов или при необходимости уточнения найденных оценок параметров в стационарных объектах.

Идентификацию можно проводить в пошаговом режиме и без поступления новой априорной информации. Такие алгоритмы называют *итерационными*.

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Прежде чем говорить об идентификации динамических объектов, рассмотрим типы математических моделей объектов, чаще всего используемых при синтезе систем управления. Будем считать, что объект одномерный, линейный, с сосредоточенными параметрами, без чистого запаздывания, устойчивый.

Дифференциальное уравнение (ДУ)

$$y^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i y^{(i-1)}(t)\sum_{i=1}^{m+1}b_i x^{(i-1)}(t), \qquad m<n. \tag{2.1}$$

Уравнению (2.1) при нулевых начальных условиях в объекте соответствует дробно-рациональная передаточная функция (ПФ)

$$W(s)=\frac{B(s)}{A(s)}=\frac{\sum_{i=1}^{m+1}b_i s^{(i-1)}}{s^n+\sum_{i=1}^{n}a_i s^{(i-1)}}, \quad m<n, \tag{2.2}$$

где s – переменная Лапласа.

ДУ (1.1) и ПФ (2.2) характеризуются одной и той же совокупностью параметров n, a_i, $i\in[1,n]$, m, b_i, $i\in[1,m+1]$, и в этом смысле представляют собой адекватные математические модели.

Амплитудно-фазовая характеристика (АФХ)

Если в выражении (2.2) переменную Лапласа s заменить на $j\omega$, (ω – круговая частота), то будем иметь АФХ

$$W(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{m+1} b_i(j\omega)^{i-1}}{(j\omega)^n+\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(j\omega)^{(i-1)}}=P(\omega)+jQ(\omega). \qquad (2.3)$$

На практике чаще используются амплитудная (АЧХ)

$$H(\omega)=\left|W(j\omega)\right|=\sqrt{P^2(\omega)+Q^2(\omega)} \qquad (2.4)$$

и фазовая (ФЧХ)

$$\varphi(\omega)=\arg W(j\omega)=\operatorname{arc\,tg}\frac{Q(\omega)}{P(\omega)}+k\pi, \quad k=1,2,\ldots \qquad (2.5)$$

частотные характеристики; $P(\omega)=\operatorname{Re}W(j\omega)$ – вещественная часть АФХ; $Q(\omega)=\operatorname{Im}W(j\omega)$ – мнимая часть АФХ; $H(\omega)$, $P(\omega)$ – четные функции частоты; $\varphi(\omega)$, $Q(\omega)$ – нечетные функции частоты.

Интегральное уравнение свертки (*Вольтера первого рода*)

$$y(t)=\int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau \qquad (2.6)$$

полностью определяется математической моделью в виде *импульсной характеристики* (ИХ) $w(t)$, удовлетворяющей условию физической реализуемости устойчивого объекта $w(t)=0$ при $t<0$, $\lim\limits_{t\to\infty} w(t)=0$.

Следует отметить, что иногда вместо выражения (2.6) используется интегральное *уравнение Винера–Хопфа*

$$R_{xy}(t)=\int_0^\infty w(\tau)R_{xx}(t-\tau)d\tau, \qquad (2.7)$$

где ИХ связывает посредством интегрального оператора не сигналы, а корреляционные функции этих сигналов. Здесь

$$R_{xy}(t)=M_\infty\left\{[x(\tau)-x_0][y(t+\tau)-y_0]\right\}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\{\bullet\}d\tau$$

– взаимная корреляционная функция входного и выходного сигналов;

$$R_{xx}(t) = M_{\infty}\left\{[x(\tau) - x_0][x(t+\tau) - x_0]\right\}$$

– автокорреляционная функция входного сигнала;

$$x_0 = M_{\infty}\left\{x(\tau)\right\}, \quad y_0 = M_{\infty}\left\{y(\tau)\right\}$$

– математические ожидания входного и выходного сигналов.

Представленные три типа математических моделей взаимно связаны между собой посредством преобразований Лапласа и Фурье.

Связь между ИХ $w(t)$ и ПФ $W(s)$ осуществляется через пару преобразований Лапласа:

$$W(s) = \mathrm{Lp}\left\{w(t)\right\} = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st}dt\,,$$

$$w(t) = \mathrm{Lp}^{-1}\left\{W(s)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{\sigma-j\omega}^{\sigma+j\omega} W(s)e^{st}ds\,,$$

$t \geq 0$, $\sigma \geq 0$ – радиус сходимости.

Связь между ИХ $w(t)$ и АФХ $W(j\omega)$ осуществляется через пару преобразований Фурье:

$$W(j\omega) = \mathrm{Fo}\left\{w(t)\right\} = \int_0^{\infty} w(t)e^{-j\omega t}dt\,,$$

$$w(t) = \mathrm{Fo}^{-1}\left\{W(j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\,.$$

Разностное уравнение имеет вид

$$y_k + \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i y_{\left[k-(\hat{n}+1-i)\right]} = \sum_{i=1}^{\hat{m}+1} \hat{b}_i x_{\left[k-(\hat{n}+1-i)\right]}. \qquad (2.8)$$

Ему соответствует *дискретная* ПФ (ДПФ)

$$\hat{W}(z)=\frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{\hat{m}+1}\hat{b}_i z^{(i-1)}}{z^{\hat{n}}+\sum\limits_{i=1}^{\hat{n}}\hat{a}_i z^{(i-1)}},\ z=e^{s\Delta t}, \qquad (2.9)$$

Δt – шаг дискретизации по времени $\left(t=(k-1)\Delta t\right)$.

Связь между ДПФ $\hat{W}(z)$ и ИХ w_k, $k=1,2,3,\ldots$, осуществляется парой Z-преобразования:

$$\hat{W}(z)=Z\{w_k\}=\sum_{k=1}^{\infty}w_k z^{-(k-1)},$$

$$w_k=Z^{-1}\left\{\hat{W}(z)\right\},\quad k=[1,\infty).$$

3. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ (ИХ)

В настоящем разделе речь пойдет об оценивании ИХ $w(t)$ линейного динамического объекта, которая может быть представлена в дискретном виде как $w_k = (k-1)\Delta t,\ k = 1,2,3,\ldots$ Суть оценивания $w(t)$ заключается в вычислении w_k в каждой k-й точке интервала определения. Базовым выражением для идентификации ИХ $w(t)$ является интегральное уравнение свертки (2.6).

3.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

На рис. 3.1 показана ИХ устойчивого объекта, когда $\lim\limits_{t\to\infty} w(t) = 0$. На практике оперируют с так называемой эффективной длительностью ИХ T_w, которая определяется на уровне δ_w от максимального значения ИХ w_m. Параметр δ_w будем называть уровнем усечения ИХ.

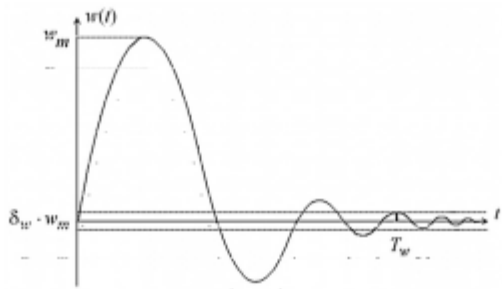

Рис. 3.1

Рассмотрим уравнение (2.6) при $t > T_w$ и представим его в следующем виде:

$$\int_0^{T_w} w(\tau)x(t-\tau)d\tau = y(t) - \int_{T_w}^{t} w(\tau)x(t-\tau)d\tau. \qquad (3.1)$$

Обозначим

$$\Delta_w(t) = \int_{T_w}^{t} w(\tau)x(t-\tau)d\tau. \qquad (3.2)$$

Отметим, что в силу устойчивости объекта $\Delta_w(t)$ принимает очень малые (близкие к 0) значения при $t > T_w$.

Запишем (3.1) с учетом помех $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$, искажающих входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы идентифицируемого объекта:

$$\int_0^{T_w} w(\tau)x_*(t-\tau)d\tau = y_*(t) - \delta y(t) - \Delta_w(t) + \int_0^{T_w} w(\tau)\delta x(t-\tau)d\tau. \qquad (3.3)$$

Переходя к дискретному времени $t = (k-1)\Delta t$, $\tau = (j-1)\Delta t$, $T_w = (K_w - 1)\Delta t$, получим при $k > K_w$

$$\sum_{j=1}^{K_w} d_j w_j x_{*(k+1-j)}\Delta t = y_{*k} - \delta y_k - \Delta_{wk} + \sum_{j=1}^{K_w} d_j w_j \delta x_{(k+1-j)}\Delta t - \Delta_{\text{кв}},$$

где d_j, $j \in [1, K_w]$ и $\Delta_{\text{кв}}$ – коэффициенты и погрешность квадратурной формулы. Вводя нормированные отсчеты ИХ

$$\hat{w}_j = d_j w_j \Delta t \qquad (3.4)$$

и обобщенную помеху

$$\delta v_k = -\delta y_k - \Delta_{wk} + \sum_{j=1}^{K_w} \hat{w}_j \delta x_{(k+1-j)} - \Delta_{\text{кв}}, \qquad (3.5)$$

окончательно будем иметь

$$\sum_{j=1}^{K_w} \hat{w}_j \cdot x_{*(k+1-j)} = y_{*k} + \delta v_k - \Delta\,,\ k > K_w\,. \qquad (3.6)$$

Соотношение (3.6) служит основой так называемых прямых методов идентификации ИХ, в том числе и метода наименьших квадратов (МНК). Необходимо в каждой точке $k = 1, 2, 3, \ldots,\ k > K_w$, определить значение ИХ w_k.

Выражение (3.6) на конечном интервале $k \in [K_s + 1,\ K_s + K_0]$, $K_s \geq K_w$, $K_0 = \rho_T K_w$, $\rho_T \geq 1$, представляет собой систему K_0 линейных алгебраических уравнений относительно K_w неизвестных. Параметр ρ_T указывает, сколько раз длительность ИХ K_w укладывается на отрезке $[K_s + 1,\ K_s + K_0]$ наблюдаемых сигналов входа и выхода объекта идентификации. В векторно-матричной форме эта система имеет вид

$$\mathbf{X}_* \cdot \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{y}_* + \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}\,, \qquad (3.7)$$

где $\hat{\mathbf{w}} = \left[\hat{w}_j,\ j \in [1,\ K_w]\right]$,

$$\mathbf{X}_* = \left[x_{*(k+1-j)},\ k \in [K_s + 1,\ K_s + K_0],\ j \in [1,\ K_w]\right],$$

$$\mathbf{y}_* = \left[y_{*k},\ k \in [K_s + 1,\ K_s + K_0]\right],$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} = \left[\delta v_k,\ k \in [K_s + 1,\ K_s + K_0]\right].$$

3.2. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ МНК

В выражении (3.7) вектор обобщенной помехи $\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}$ оказывается неизмеримым, и решить алгебраическую систему можно с помощью метода наименьших квадратов, который предполагает минимизацию функционала

$$J = \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{v} = \sum_{k=K_S+1}^{K_S+K_0} \delta v_k^2 \tag{3.8}$$

и приводит к усеченной системе уравнений

$$\mathbf{X}_* \cdot \mathbf{w}_0 = \mathbf{y}_*$$

относительно оценок $\mathbf{w}_0$ ИХ $\hat{\mathbf{w}}$. После первой трансформации Гаусса (при $\rho_T > 1$ матрица $\mathbf{X}_*$ имеет прямоугольный вид) окончательно получаем

$$\mathbf{V}_* \cdot \mathbf{w}_0 = \mathbf{X}_*^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{y}_*, \quad \mathbf{V}_* = \mathbf{X}_*^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{X}_*. \tag{3.9}$$

Формально решение системы (3.9) может быть записано в виде

$$\mathbf{w}_0 = \mathbf{V}_*^{-1} \cdot \mathbf{X}_*^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{y}_*, \tag{3.10}$$

что является МНК-оценкой искомого вектора ИХ $\hat{\mathbf{w}}$.

Представим систему (3.7) следующим образом:

$$\frac{1}{K_0}\mathbf{V}_* \cdot \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{K_0}\mathbf{X}_*^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{y}_* + \frac{1}{K_0}\mathbf{X}_*^{\mathbf{T}} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{v} \tag{3.11}$$

и, введя в рассмотрение оценки корреляционных функций

$$\tilde{R}_{x_* y_* i} = M_{K_0}\left\{[x_{*k} - \tilde{x}_{*0}][y_{*(k+i-1)} - \tilde{y}_{*0}]\right\},$$

$$\tilde{R}_{x_* x_* i} = M_{K_0}\left\{[x_{*k} - \tilde{x}_{*0}][x_{*(k+i-1)} - \tilde{x}_{*0}]\right\},$$

$$\tilde{R}_{x_* \delta v i} = M_{K_0}\left\{[x_{*k} - \tilde{x}_{*0}][\delta v_{(k+i-1)} - \delta v_0]\right\},$$

перейдем к эквивалентной системе уравнений

$$\sum_{j=1}^{K_W} \tilde{R}_{x_* x_*(i-j+1)} \hat{w}_j = \tilde{R}_{x_* y_* i} + \tilde{R}_{x_* \delta v\, i}\,,\ i \in [1,\, K_w], \qquad (3.12)$$

которая в дальнейшем понадобится для анализа свойств системы.

Следует отметить, что корреляционные функции могут определяться для стационарных процессов, поэтому возникает условие $K_S \geq K_W$, гарантирующее близость сигнала $y(t)$ к стационарному процессу. Кроме того, параметр ρ_T, задающий длительность интервала усреднения (величину K_0), нужно брать как можно больше, поскольку с увеличением ρ_T оценки корреляционных функций будут приближаться к истинным ($K_0 \to \infty$).

Корректирующими параметрами, определяющими эффективность МНК идентификации ИХ, АЧХ, ФЧХ, являются шаг дискретизации по времени Δt, длительность ИХ K_W (T_W), длительность интервала наблюдения (усреднения) K_0, определяемая параметром $\rho_T = K_0 / K_W$.

Ошибка идентификации МНК

$$\mathbf{e}_w = \hat{\mathbf{w}} - \hat{\mathbf{w}}_0 = \mathbf{V}_*^{-1} \cdot \mathbf{X}_*^{\mathrm{T}} \cdot \boldsymbol{\delta}\mathbf{v} \qquad (3.13)$$

зависит от обусловленности матрицы $\mathbf{V}_*$, определяемой числом Тодда

$$\eta = \alpha_{\mathbf{V}_* \max} \big/ \alpha_{\mathbf{V}_* \min}\,,$$

где $\alpha_{\mathbf{V}_* \max}$ и $\alpha_{\mathbf{V}_* \min}$ – максимальное и минимальное собственные числа матрицы $\mathbf{V}_*$ (чем больше η, тем хуже обусловленность), и содержит методическую и инструментальную составляющие.

Обусловленность матрицы $\mathbf{V}_*$ может ухудшаться по двум причинам. Первая связана с увеличением мерности матрицы $\mathbf{V}_*$, которая зависит от количества искомых параметров $K_W = T_W / \Delta t - 1$. Следовательно, чтобы улучшить обусловленность матрицы $\mathbf{V}_*$, необходимо либо уменьшать эффективную длительность ИХ T_W, либо увеличивать шаг дискретизации Δt. И то и другое приводит к увеличению уровня обобщенной помехи δv_k.

Вторая причина порождается недостаточной информативностью входного сигнала, подаваемого на объект идентификации. Входной сигнал считается информативным, если выполняется условие $\Omega_{x\max} \geq \Omega_W$, где $\Omega_{x\max}$ – максимальная частота эффективной длительности спектра входного сигнала, а Ω_W – максимальная частота эффективной длительности АЧХ объекта.

Методическая составляющая ошибки идентификации $\mathbf{e}_w$ возникает из-за наличия обобщенной помехи (3.5), куда входят слагаемые $\Delta_w(t)$ от усечения ИХ и погрешности $\Delta_{\text{кв}}$ квадратурных формул. Причем ошибка $\mathbf{e}_{\Delta_w}$ будет понижаться при уменьшении $\Delta_w(t)$, что связано с увеличением T_W, а снижение ошибки $\mathbf{e}_{\Delta_{\text{кв}}}$ связано с уменьшением $\Delta_{\text{кв}}$, что в свою очередь будет иметь место при уменьшении Δt или T_W. Таким образом, из-за противоречивого влияния параметров Δt и T_w методическая составляющая ошибки идентификации не может быть уменьшена ниже некоторого граничного значения, величина которого возрастает с увеличением T_w (K_w). Отсюда следует, что МНК применим при идентификации слабо колебательных ИХ, характеризуемых малыми значениями K_w при больших величинах Δt.

Инструментальная составляющая ошибки (3.13) связана с наличием помех $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$, искажающих входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы идентифицируемого объекта. Уменьшить эту ошибку можно соответствующим выбором генератора входного сигнала, измерительной и регистрирующей аппаратуры, а также увеличением интервала усреднения (параметра ρ_T).

Полный классический МНК

Полный классический МНК можно представить в следующем виде.

1. Формирование системы линейных алгебраических уравнений (3.9) на основе соотношений (3.1)–(3.8).
2. Определение нормированной МНК-оценки ИХ согласно (3.10).
3. Вычисление реализации оценки ИХ

$$w_{0k} = \hat{w}_{0k} / (d_k \Delta t),\ k \in [1, K_w].$$

4. Определение вещественной $P_{Wo\,i}$ и мнимой $Q_{Wo\,i}$, $i \in [1,\, N_0 = N_F/2+1]$, $N_F = 2^{m_F}$, $m_F = 2,3,4,\ldots$, частей оценки АФХ

$$W_o(j\omega) = P_{W_o}(\omega) + jQ_{W_o}(\omega)$$

посредством прямого дискретного преобразования Фурье

$$W_{o\,i} = \mathrm{Fo}_{\text{д}}\left\{w_{o\,k},\, k \in [1,\, K_w]\right\},\ i \in [1,\, N_0]$$

с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ).

5. Определение оценки АЧХ $H_{o\,i} = \left|W_{o\,i}\right|$.

6. Определение оценки ФЧХ $\varphi_{o\,i} = \arg W_{o\,i}$.

Необходимо отметить следующие особенности классического МНК.

1. При решении практических задач идентификации ИХ, как правило, используется квадратурная формула прямоугольников и коэффициенты

$$d_j = 1,\ j \in [1,\, K_w - 1],\ d_{K_w} = 0\,.$$

2. Из-за плохой обусловленности матрицы $\mathbf{V}_*$, наличия вычислительных погрешностей и неизмеримых $\Delta_w(t)$ и $\Delta_{\text{кв}}$, даже в случае отсутствия помех и идентификации неколебательной ИХ (достаточно большой шаг Δt и малое значение K_w), ошибки идентификации очень большие (среднеквадратичная на K_w ошибка может достигать 100 % и более).

Регуляризированный МНК

Улучшить обусловленность матрицы $\mathbf{V}_*$ и тем самым уменьшить ошибку идентификации позволяет регуляризация по А.Н. Тихонову, преобразующая систему линейных алгебраических уравнений (3.9) к виду

$$(\mathbf{V}_* + \rho \cdot \mathbf{E}) \cdot \mathbf{w}_o = \mathbf{X}_*^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{y}_*\,, \tag{3.14}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, а ρ – параметр регуляризации. При соответствующем выборе параметра ρ удается подавить высокочастотную составляющую ошибки (3.13).

В отличие от классического МНК модификацию (3.14) называют *регуляризированным* МНК, а ρ – новый корректирующий параметр алгоритма. Существенный недостаток регуляризированного МНК – сложность выбора параметра ρ при решении конкретной задачи идентификации, поскольку никаких рекомендаций по этому поводу в общем случае нет.

Модифицированный МНК

Результаты многочисленных исследований, проводимых на различных модельных объектах, проиллюстрировали, что ошибка идентификации $\mathbf{e}_w$ имеет спектр с явно выраженным высоким уровнем в высокочастотной области за частотой Ω_W, определяющей эффективную длительность АЧХ объекта. Указанная особенность позволяет уменьшить, причем существенно, ошибку $\mathbf{e}_w$ за счет принудительного обнуления вещественной $P_{W\text{o}}$ и мнимой $Q_{W\text{o}}$ частей АФХ W_{o} за некоторой частотой

$$\Omega_{\text{p}} = (N_{\text{p}} - 1)\Delta\omega \approx \Omega_W \ , \qquad (3.15)$$

с последующим уточнением оценки ИХ $\mathbf{w}_{\text{o}}$ путем обратного преобразования Фурье усеченной АФХ.

Частоту Ω_{p} будем называть *частотой регуляризации*, процедуру усечения АФХ – *частотной регуляризацией*, а метод – *модифицированным* МНК.

В вычислительном плане отличие модифицированного метода от классического МНК заключается в следующем.

1. На четвертой операции (см. этапы реализации классического МНК), после нахождения оценки АФХ $W_{\text{o}i}$, производится обнуление:

$$P_{W\text{o}i} = 0 \, , \; Q_{W\text{o}i} = 0 \, , \; i \in [N_{\text{p}}, \; N_0] .$$

2. Вводится дополнительная седьмая операция

$$w_{\text{o}k} = \text{Fo}_{\tilde{n}}^{-1} \left\{ W_{\text{o}i}, \; i \in [1, \, N_{\text{p}}] \right\}, \; k \in [1, \, K_w] .$$

Ω_{p} – новый корректирующий параметр, выбор которого производится алгоритмически, исходя из рекомендации (3.15). Обычно получается,

что $\Omega_{\text{р}}$ чуть меньше Ω_W, и это обоснованно, так как, подрезая АЧХ $H_{\text{о}}(\omega)$ невысокого уровня (вблизи Ω_W), тем самым обнуляем более существенный уровень спектра ошибки идентификации.

3.3. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ РМНК

Априорной информацией для решения задачи идентификации ИХ служат реализации входного x_k и выходного y_k сигналов объекта, измеренные на интервале $k \in [1, K_y]$. При формировании системы алгебраических уравнений (3.7) используются лишь отрезки измеренных сигналов длиной $[K_s + 1, K_s + K_0]$, причем $K_w << K_0 << K_y$. Другими словами, значительная часть априорной информации не используется, хотя, например, при $k = K_s + K_0 + r$, $r = 2, 3, \ldots$, можно формировать новые системы уравнений, решения которых могут привести к уточнению МНК-оценок. Однако неоднократное формирование и решение алгебраических систем, тем более с прямоугольной $(K_0 > K_w)$ матрицей $\mathbf{X}_*$, что повышает помехоустойчивость за счет увеличения длительности интервала усреднения (параметра ρ_T), существенно повышают вычислительные затраты. Устранить эту проблему можно, используя рекуррентную процедуру вычисления обратной матрицы $\mathbf{V}_*^{-1}$ и МНК-оценки $\mathbf{w}_{\text{о}}$.

Рекуррентный МНК (РМНК) выполняется в следующем виде.
Задаются начальные условия

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{о}0} = \mathbf{0}\,,\ \mathbf{D}_{\text{о}*0} = \mathbf{V}_{\text{о}*0}^{-1} = \mu \cdot \mathbf{E}\,, \tag{3.16}$$

где $\mathbf{E}$ – единичная матрица, $\mu \in [10^3, 10^6]$.

Выполняется r-шаговая $r = 1, 2, 3, \ldots, R$ процедура

$$\mathbf{D}_{\text{о}*r} = \mathbf{D}_{\text{о}*(r-1)} - \frac{\mathbf{D}_{\text{о}*(r-1)}\mathbf{x}_{*(K_s+r)}\mathbf{x}_{*(K_s+r)}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}_{\text{о}*(r-1)}}{\gamma + \mathbf{x}_{*(K_s+r)}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}_{\text{о}*(r-1)}\mathbf{x}_{*(K_s+r)}}\,,\ \gamma \le 1\,, \tag{3.17}$$

$$\hat{\mathbf{w}}_{\text{о}r} = \hat{\mathbf{w}}_{\text{о}(r-1)} + \varepsilon_r \mathbf{D}_{\text{о}*r}\mathbf{x}_{*(K_s+r)}\,, \tag{3.18}$$

где

$$\varepsilon_r = y_{*(K_S+r)} - \mathbf{x}_{*(K_S+r)}\hat{\mathbf{w}}_{\text{о}(r-1)}.$$

Приведенный алгоритм называется РМНК с взвешиванием в отличие от классического РМНК, где $\gamma = 1$. Параметр γ служит для «забывания» старой информации; чем меньше γ, тем больше информации «забывается».

Корректирующими параметрами РМНК являются μ, γ, R. Рекомендации по выбору требуемого количества итераций R неизвестны.

3.4. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ АК

В алгоритмах Качмажа (АК), как и в РМНК, оценка ИХ определяется итерационным путем, а значит, предполагается задание начальных условий, например, в виде

$$\mathbf{w}_{\text{о}0} = \mathbf{0} \tag{3.19}$$

и дальнейшее уточнение оценок посредством пошаговой процедуры, на каждом r-м ($r \in [1, R]$) шаге которой возникает r-е уравнение

$$\sum_{j=1}^{K_W} x_{*(K_S+r+1+j)}\hat{w}_j = y_{*(K_S+r)} + \delta v_{(K_S+r)},\ r = 1, 2, ..., K_0, \tag{3.20}$$

и минимизируется функционал

$$J_r = \delta v^2_{(K_S+r)},$$

в результате чего вычисляется r-я оценка

$$\mathbf{w}_{\text{о}r} = \mathbf{w}_{\text{о}(r-1)} + \chi\frac{y_{*(K_S+r)} - \mathbf{x}_{*(K_S+r)}\mathbf{w}_{\text{о}(r-1)}}{\mathbf{x}^{\mathrm{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{x}_{*(K_S+r)}}\mathbf{x}_{*(K_S+r)}. \tag{3.21}$$

Корректирующий параметр χ алгоритма Качмажа выбирается из условия сходимости алгоритма в виде $\chi \in (0, 2]$.

Соотношение (3.21) называют классическим алгоритмом Качмажа.

Известны несколько модификаций классического алгоритма:

1) алгоритм *Naguma–Noda*;

2) помехоустойчивый алгоритм В.М. Чадеева;
3) алгоритм с центрированием данных Ю.Б. Лоца;
4) ускоренный алгоритм Э.Д. Аведьяна–Я.З. Цыпкина;
5) ускоренный алгоритм Я. Маркла.

По экспериментальным данным сравнительных характеристик указанных алгоритмов в плане их точности и помехоустойчивости некоторое предпочтение следует отдать алгоритму В.М. Чадеева:

$$\mathbf{w}_{0r} = \mathbf{w}_{0(r-1)} + \chi \frac{y_*(K_s+r) - \mathbf{x}_*(K_s+r)\mathbf{w}_{0(r-1)}}{\gamma + \mathbf{x}_*^{\mathrm{T}}(K_s+r)\mathbf{x}_*(K_s+r)} \mathbf{x}_*(K_s+r), \qquad (3.22)$$

где параметр γ выбирается в виде $0 < \gamma < K_w$ и служит для повышения помехоустойчивости алгоритма Качмажа–Чадеева.

Корректирующими параметрами алгоритма являются χ, γ и количество итераций $R \le K_0$. Конкретных рекомендаций по выбору параметра R нет.

4. ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

4.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Данные методы базируются на том, что идентифицируемая ИХ представляется в виде обобщенного ряда Фурье по полной системе некоторых базисных функций

$$w(t) = \sum_{r=0}^{\infty} a_{wr}\varphi_r(t) = \sum_{r=0}^{R} a_{wr}\varphi_r(t) + \delta_R(t), \qquad (4.1)$$

где a_{wr} – коэффициенты Фурье; $\varphi_r(t)$ – базисные функции; $\delta_R(t)$ – остаточный член ряда Фурье.

Таким образом, задача идентификации сводится к определению оценок коэффициентов Фурье a_{wor} $r \in [0, R]$, а собственно оценка импульсной характеристики будет определяться как

$$w_o(t) = \sum_{r=0}^{R} a_{wor}\varphi_r(t). \qquad (4.2)$$

Такой подход существенно уменьшает мерность матрицы формируемой системы уравнений, поскольку $R << K_w$, а это в свою очередь улучшает обусловленность матрицы, по сравнению, например, с прямым МНК.

В качестве базисных функций $\varphi_r(t)$ обычно используют ортонормированные на интервале $[0, \infty)$ функции Лагерра

$$\varphi_r(t) = \sqrt{2\beta} \cdot e^{-\beta t} \sum_{i=0}^{r} C_{ri} t^i, \qquad (4.3)$$

$$C_{r(i+1)} = -\frac{2(r-i)\beta}{(i+1)^2} C_{ri},\ C_{r0} = 1,\ r \in [0, R], \tag{4.4}$$

где $\beta > 0$ – некоторый параметр, используемый для сохранения свойств функций Лагерра при переходе от бесконечного интервала к конечному.

Для функций Лагерра справедливы соотношения:

1) $$\sup_{t \in [0,\infty)} |\varphi_r(t)| = \varphi_r(0) = \sqrt{2\beta}\,; \tag{4.5}$$

2) эффективная длительность $T_{r(\delta_\varphi)}$ r-ой функции на уровне δ_φ из условия $|\varphi_r(t)| \le \delta_\varphi \varphi_r(0)$ при $t \ge T_{r(\delta_\varphi)}$ находится в виде

3) $$T_{r(0,1)} \approx 2,0(r+1)/\beta,\quad T_{r(0,05)} \approx 2,25(r+1)/\beta\,; \tag{4.6}$$

4) $$\Phi_r(s) = \mathrm{Lp}[\varphi_r(t)] = \sqrt{2\beta}\,\frac{(s-\beta)^r}{(s+\beta)^{(r+1)}}\,; \tag{4.7}$$

5) $$\Phi_r(s)\Phi_l(s) = \left[\Phi_{(r+l)}(s) - \Phi_{(r+l+1)}(s)\right] / \sqrt{2\beta}\,; \tag{4.8}$$

$$|\Phi_r(j\omega)| = \sqrt{2/\beta} \,/\, \sqrt{1 + (\omega/\beta)^2}\,; \tag{4.9}$$

6) длительность $\Omega_{\Phi(\delta_\Phi)}$ спектра $|\Phi_r(j\omega)|$ на уровне δ_Φ из условия $|\Phi_r(j\omega)| \le \delta_\Phi \sqrt{2/\beta}$ при $\omega \ge \Omega_{\Phi(\delta_\Phi)}$ находится в виде

$$\Omega_{\Phi(\delta_\Phi)} = \sqrt{(1/\delta_\Phi)^2 - 1} \cdot \beta \approx \beta / \delta_\Phi\,. \tag{4.10}$$

Первые пять функций Лагерра показаны на рис. 4.1.

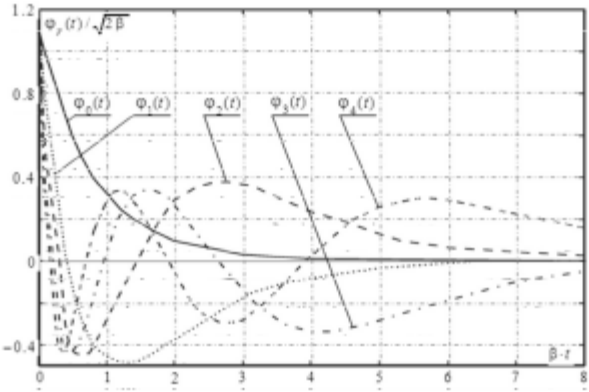

Рис. 4.1

Поскольку задача идентификации ИХ сводится к вычислению оценок коэффициентов Фурье a_{wor}, то в зависимости от того, каким способом они вычисляются, различают метод моментов (ММ) и проекционный МНК (ПМНК).

4.2. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ММ

В ММ помимо ИХ $w(t)$ в ряд Фурье раскладываются входной $x(t)$ и выходной $y(t)$ сигналы

$$x(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{xi}\varphi_i(t)\,,\ y(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{yj}\varphi_j(t)\,. \qquad (4.11)$$

Если подставить разложение ИХ $w(t)$, входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов в исходное уравнение свертки

$$y(t) = \int_0^t w(\tau)x(t-\tau)d\tau\,,$$

то получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_{yj}\varphi_j(t) = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty} a_{wr}a_{xi}\int_0^t \varphi_r(\tau)\varphi_i(t-\tau)d\tau. \qquad (4.12)$$

Преобразуя (4.12) по Лапласу, с учетом (4.7) после несложных преобразований получаем бесконечномерную систему линейных уравнений

$$\sum_{j=0}^{i} a_{x(i-j)}a_{wj} = \sqrt{2\beta}\sum_{j=0}^{i} a_{yj},\ \ i\in[0,\infty). \qquad (4.13)$$

Имея в виду, что входной и выходной сигналы измеряются с помехами, причем на конечных интервалах, система уравнений (4.13) преобразуется к виду

$$\sum_{j=0}^{i} a_{xo(i-j)}a_{wj} = \sqrt{2\beta}\sum_{j=0}^{i} a_{yoj} + \delta v_i,\ \ i\in[0,\infty), \qquad (4.14)$$

где оценки коэффициентов Фурье

$$a_{xoi} = \int_0^T x_*(t)\varphi_i(t)dt,\ \ a_{yoj} = \int_0^T y_*(t)\varphi_j(t)dt, \qquad (4.15)$$

а обобщенная помеха представляется в виде

$$\delta v_i = \sum_{j=0}^{i}\left[a_{wi}\delta a_{x(i-j)} - \sqrt{2\beta}\cdot\delta a_{yj}\right], \qquad (4.16)$$

причем $$\delta a_{xi} = a_{xoi} - a_{xi} = \int_0^T \delta x(t)\varphi_i(t)\,dt - \int_T^\infty x(t)\varphi_i(t)\,dt,$$

$$\delta a_{yj} = a_{yoi} - a_{yi} = \int_0^T \delta y(t)\varphi_j(t)dt - \int_T^\infty y(t)\varphi_j(t)\,dt.$$

Оценки a_{xor} и a_{yor} коэффициентов Фурье согласно (4.3) и (4.15) могут быть вычислены через моменты измеренных сигналов $x_*(t)$ и $y_*(t)$:

$$\mu_{x*i} = \int_0^T t^i e^{-\beta t} x_*(t)\, dt\,, \tag{4.17}$$

$$\mu_{y*i} = \int_0^T t^i e^{-\beta t} y_*(t)\, dt \tag{4.18}$$

в виде

$$a_{xor} = \sqrt{2\beta} \cdot \sum_{i=0}^{r} C_{ri}\mu_{x*i}\,, \tag{4.19}$$

$$a_{yor} = \sqrt{2\beta} \cdot \sum_{i=0}^{r} C_{ri}\mu_{y*i}\,, \tag{4.20}$$

где C_{ri} – коэффициенты функции Лагерра (4.4).

Таким образом, в системе алгебраических уравнений (4.14), сформированной относительно коэффициентов Фурье ИХ, определено всё, за исключением обобщенной помехи, информация о которой отсутствует и поэтому приходится решать лишь усеченную систему алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{i} a_{xo(i-j)} a_{woj} = \sqrt{2\beta} \sum_{j=0}^{i} a_{yoj}\,, \tag{4.21}$$

которая может быть представлена в векторно-матричном виде

$$\mathbf{A}_{xo*} \cdot \mathbf{a}_{wo} = \sqrt{2\beta} \cdot \mathbf{a}_{yo}\,, \tag{4.22}$$

$$\mathbf{a}_{wo} = \left[a_{woj},\ j \in [0, R] \right],$$

$$\mathbf{A}_{xo} = \left[a_{xo(i-j)},\ i \in [0,\ R],\ j \in [0,\ R] \right],\ a_{xo(i-j)} = 0 \text{ при } i < j\,,$$

$$\mathbf{a}_{yo} = \left[\sum_{j=0}^{i} a_{yoj},\ i \in [0,\ R] \right].$$

Решение этой системы отыскивается по рекуррентным соотношениям

$$a_{wo0} = \sqrt{2\beta} \cdot \frac{a_{yo0}}{a_{xo0}}; \tag{4.23}$$

$$a_{wor} = \frac{1}{a_{xo0}} \left[\sqrt{2\beta} \cdot \sum_{j=0}^{r} a_{yoj} - \sum_{j=0}^{r-1} a_{xo(r-j)} a_{woj} \right], \; r \in [1, R]. \tag{4.24}$$

4.3. АЛГОРИТМЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ НА ОСНОВЕ ПРОЕКЦИОННОГО МНК

Проекционный метод наименьших квадратов (ПМНК) базируется на минимизации функционала

$$J_a = M_{T_H} \left\{ [y(t) - \hat{y}(t)]^2 \right\} = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} [y(t) - \hat{y}(t)]^2 dt \tag{4.25}$$

по искомым коэффициентам a_{wr}, $r \in [0, R]$, а

$$\hat{y}(t) = \int_0^t \hat{w}(\tau) x(t-\tau) d\tau, \;\; \hat{w}(t) = \sum_{r=0}^{R} a_{wr} \varphi_r(t).$$

Подставляя в интеграл свертки выражение ИХ $\hat{w}(t)$, можно записать

$$\hat{y}(t) = \sum_{r=0}^{R} a_{wr} \Psi_r(t),$$

где

$$\Psi_r(t) = \int_0^t \varphi_r(\tau) x(t-\tau) d\tau.$$

Тогда функционал (4.25) принимает вид

$$J_a = \frac{1}{T_H} \int_0^{T_H} \left[y(t) - \sum_{r=0}^{R} a_{wr} \Psi_r(t) \right]^2 dt, \tag{4.26}$$

а условие его минимума

$$\frac{\partial J_a}{\partial a_{wi}} = 0, \ \ i \in [0, R],$$

что представляет собой систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^{R} \Psi_{ij} a_{wj} = z_i, \ i \in [0, R], \tag{4.27}$$

$$\Psi_{ij} = M_{T_H} \left\{ \Psi_i(t) \Psi_j(t) \right\}, \ z_i = M_{T_H} \left\{ \Psi_i(t) y(t) \right\}.$$

С учетом конечности интервала наблюдения и наличия помех в измеряемых сигналах система (4.27) представляется в виде

$$\sum_{j=0}^{R} \Psi_{oij} a_{wi} = z_{oi} + \delta v_i, \ i \in [0, R], \tag{4.28}$$

$$\Psi_{oij} = M_T \left\{ \Psi_{*i}(t) \Psi_{*j}(t) \right\},$$

$$z_{oi} = M_T \left\{ \Psi_{*i}(t) y_*(t) \right\},$$

$$\Psi_{*i}(t) = \int_0^t \varphi_i(t) x_*(t - \tau) d\tau,$$

а обобщенная помеха

$$\delta v_i = \sum_{j=0}^{R} a_{wj} \delta \Psi_{ij} - \delta z_i.$$

Из-за неизмеримости обобщенной помехи решается только усеченная система уравнений

$$\sum_{j=0}^{R} \Psi_{oij} a_{woi} = z_{oi}. \tag{4.29}$$

Эта система уравнений может быть представлена в векторно-матричной форме

$$\mathbf{\Psi}_0 \cdot \mathbf{a}_{w0} = \mathbf{z}_0, \tag{4.30}$$

а ее решение формально записывается в виде

$$\mathbf{a}_{w0} = \mathbf{G}_{0*}\mathbf{z}_0, \ \mathbf{G}_* = \mathbf{\Psi}_0^{-1}. \tag{4.31}$$

4.4. КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

Корректирующими параметрами проекционных методов являются:

- порядок аппроксимации R;
- параметр β функции Лагерра;
- длительность T интервала наблюдения (величина параметра ρ_T).

Прежде чем обсуждать влияние корректирующих параметров, рассмотрим две особенности, которые возникают при использовании обобщенного ряда Фурье и функций Лагерра в проекционных методах.

1. В целях уменьшения остаточного члена ряда Фурье порядок аппроксимации R необходимо увеличивать. Однако при больших R может возникнуть проблема суммируемости ряда Фурье, что в свою очередь приведет к увеличению ошибки идентификации. Теоретически существует возможность уменьшить эту ошибку за счет введения в ряд Фурье сглаживающих множителей.

2. Существует проблема выбора шага дискретизации Δt, на что влияют порядок аппроксимации R и параметр β функции Лагерра. Чем больше R и β, тем меньше должен быть шаг Δt. Рекомендуемое для выбора Δt соотношение

$$\Delta t \le \frac{1}{2(1+2R)\beta}. \tag{4.32}$$

Ошибка идентификации

$$e_w(t) = \sum_{r=0}^{R} e_{ar}\varphi_r(t) + \delta_R(t), \tag{4.33}$$

где $e_{ar} = a_{wr} - a_{w0r}$, $r \in [0, R]$, состоит из двух составляющих.

На уровень первой составляющей e_{ar} влияет обусловленность матрицы решаемой системы уравнений, которая определяется мерностью матрицы и информативностью входного сигнала. В проекционных методах решением алгебраической системы являются коэффициенты Фурье a_{wj}, $j \in [0, R]$, а не отсчеты ИХ w_k, $k \in [1, K_w]$, как, например, в прямых методах, причем всегда $R < K_w$ и этот факт является положительным, поскольку в проекционных методах мерность матрицы будет всегда меньше, что улучшает ее обусловленность.

Информативность входного сигнала обеспечивается при условии $\Omega_x \geq \Omega_W$, где Ω_x и Ω_W – частоты, ограничивающие эффективные длительности спектра сигнала и АЧХ объекта соответственно.

Кроме того, на ошибку e_{ar} еще влияет конечная величина длительности интервала T, на котором наблюдаются измеряемые сигналы.

Вторая составляющая $\delta_R(t)$ определяется остаточным членом аппроксимации. Величина остаточного члена будет тем меньше, чем ближе будут эффективные длительности $T_{r\delta_\varphi}$ базисных функций Лагерра к эффективной длительности ИХ T_w. Однако такое положение никогда не выполняется, поскольку у каждой r-й функции Лагерра своя длительность $T_{r\delta_\varphi}$. Длительность интервала аппроксимации выбирается из следующих соображений:

$$T_{0(\delta_\varphi)} < T_w < T_{R(\delta_\varphi)}. \qquad (4.34)$$

Длительность $T_{r\delta_\varphi}$ базисной функции определяется параметром β, поэтому выбор параметров β с учетом соотношения (4.6) может быть произведен в виде

$$\frac{2,25}{T_w} < \beta < \frac{2,25(R+1)}{T_w}. \qquad (4.35)$$

В целом, как показывают исследования, методическая составляющая ошибки идентификации уменьшается с увеличением параметров T и R при выборе разумного значения параметра β.

Длительность интервала наблюдения T практически всегда оказывается фиксированной априори.

Параметр β выбирается из условия (4.35).

Порядок аппроксимации R можно определить с помощью итерационной процедуры, на которой сравниваются измеренный и модельный выходные сигналы при изменении порядка аппроксимации. Поэтапно это выглядит следующим образом.

1. Задается максимальное значение $R_{\max} = 15...20$.

2. На каждом r-м шаге $r \in [0, R_{\max}]$, выполняются следующие основные операции:

2.1) вычисляются оценки коэффициентов Фурье a_{w0i}, $i \in [0, r]$, и восстанавливается оценка ИХ на этом r-м шаге;

2.2) определяется оценка $y_r(t)$ выходного сигнала по идентифицированной оценке ИХ

$$y_r(t) = \int_0^t w_r(\tau) x_*(t-\tau) d\tau ;$$

2.3) вычисляется рассогласование между измеренным выходом $y_*(t)$ и полученным через интеграл свертки $y_r(t)$. Сравнение может быть произведено в виде среднеквадратического отклонения

$$e_{y_* r} = \sqrt{\sum_{k=K_s}^{K_f} [y_{*k} - y_{rk}]^2 \Big/ \sum_{k=K_s}^{K_f} y_{*k}^2} , \qquad (4.36)$$

K_s, K_f – минимальное и максимальное значения точек сравниваемых реализаций сигналов;

2.4) осуществляется проверка

$$e_{y_* r} \le e_{y_* \max} , \qquad (4.37)$$

где $e_{y_* \max}$ – априори задаваемая величина. Если соотношение (4.37) выполняется, то принимается порядок аппроксимации $R = r$, если не выполняется, то осуществляется переход на следующий $r+1$ шаг и так до $R_{\max}$.

На этом процедура выбора порядка аппроксимации R закончена.

В том случае, если неравенство (4.37) не выполняется для всех $r \in [0, R_{\max}]$, то рекомендуется поменять значение параметра β. Если

и после этого соотношение (4.37) не выполняется, то порядок аппроксимации R выбирается таким, при котором обеспечивается

$$e_{y_* R} = \min_{r \in [0,\, R_{\max}]} e_{y_* r}. \qquad (4.38)$$

Помехоустойчивость в проекционных методах обеспечивается за счет использования интегральных операторов, обладающих сглаживающими свойствами, при вычислении оценок коэффициентов Фурье $a_{\text{ом}r}$, $r \in [0, R]$. Кроме того, помехоустойчивость определяется еще и статистическими свойствами помех и улучшается с увеличением длительности T.

Отметим, что проекционные методы занимают большой объем оперативной памяти, поскольку необходимо хранить 15...20 массивов $y_r(t)$, чтобы потом выбрать один, удовлетворяющий (4.38).

5. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

5.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Регуляризирующие алгоритмы идентификации ИХ представляют собой численные методы решения интегральных уравнений первого рода, среди которых можно выделить метод регуляризации А.Н. Тихонова и метод скользящей тейлоровской аппроксимации. Эти методы не накладывают принципиальных ограничений на степень колебательности идентифицируемой ИХ $w(t)$ и ориентированы на использование импульсных входных сигналов, удовлетворяющих условию финитности. Ограничимся рассмотрением широко распространенного метода регуляризации А.Н. Тихонова (МРТ).

5.2. МЕТОД РЕГУЛЯРИЗАЦИИ А.Н. ТИХОНОВА

МРТ базируется на преобразовании Фурье и предполагает выполнение следующих операций:

1) определение комплексного спектра реализации $x_*(t)$:

$$X_*(j\omega) = \text{Fo}\,[x_*(t)],\ \omega \in (-\infty, \infty); \tag{5.1}$$

2) определение комплексного спектра реализации $y_*(t)$:

$$Y_*(j\omega) = \text{Fo}\,[y_*(t)],\ \omega \in (-\infty, \infty); \tag{5.2}$$

3) формирование оценки $W_0(j\omega)$ АФХ $W(j\omega)$:

$$W_0(j\omega) = q_C(\omega, \rho)\left[Y_*(j\omega) / X_*(j\omega)\right],\ \omega \in (-\infty, \infty), \tag{5.3}$$

причем стабилизирующий множитель $q_c(\omega,\rho)$ должен удовлетворять достаточно общим требованиям и, в частности, он может задаваться в виде

$$q_c(\omega,\rho)=\frac{X_*(j\omega)X_*(-j\omega)}{X_*(j\omega)X_*(-j\omega)+\rho\Phi^{-1}(\omega)},$$

где ρ и $\Phi(\omega)$ – параметр регуляризации и АЧХ стабилизирующего фильтра;

4) определение оценки $w_0(t)$:

$$w_0(t)=\mathrm{Fo}^{-1}\,[W_0(j\omega)],\ t\in[0,\infty). \qquad (5.4)$$

Стабилизирующий множитель $q_c(\omega,\rho)$ с параметром регуляризации ρ вводится в выражение (5.3), поскольку нарушается условие устойчивости задачи (5.4) обратного преобразования Фурье из-за отсутствия затухания оценки АФХ $W_0(j\omega)$ и наличия незатухающего комплексного спектра $\delta Y(j\omega)$ при $\delta y(t)\neq 0$ и $\omega\to\infty$ (напомним, что $Y_*(j\omega)=Y(j\omega)+\delta Y(j\omega)$).

Стабилизирующий множитель обладает следующими свойствами:

1) $q_c(\omega,\rho)=q_c(-\omega,\rho),\ \omega\in[0,\ \infty)$;

2) $q_c(\omega,\rho)\in[0,\ 1],\ \rho\geq 0,\ \omega\in(-\infty,\infty)$;

3) $q_c(\omega,0)=1$;

4) $q_c(\omega,\rho)\to 0$ при $\rho\to\infty,\ \omega\neq 0$;

5) $q_c(\omega,\rho)\to 0$ при $\omega\to\pm\infty,\ \rho>0$.

Выражение (5.3) может быть записано в форме

$$W_0(j\omega)=Q(\omega)\left\{W(j\omega)+[1/X_*(j\omega)]\left[\delta Y(j\omega)-W(j\omega)\delta X(j\omega)\right]\right\},$$

$$Q(\omega)=\frac{\kappa\Phi(\omega)X_*(j\omega)X_*(-j\omega)}{1+\kappa\Phi(\omega)X_*(j\omega)X_*(-j\omega)},$$

где $\kappa=1/\rho$; $\delta X(j\omega)=\mathrm{Fo}\,[\delta x(t)]$; $\delta Y(j\cdot\omega)=\mathrm{Fo}\,[\delta y(t)]$; $Q(\omega)$ – АЧХ сглаживающего фильтра.

Последнее выражение структурно представляется в виде следящей системы (рис. 5.1), на входе которой действуют ИХ $w(t)$ и приведен-

ная помеха $\delta w(t)$, определяемая помехами $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$, а на выходе – получаемая оценка $w_0(t)$. Такая структурная схема позволяет наглядно проиллюстрировать возможности метода.

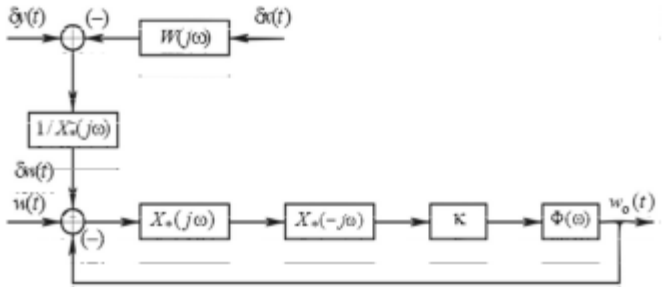

Рис. 5.1

В качестве АЧХ $\Phi(\omega)$ может быть использована любая кусочно-непрерывная функция частоты ω, удовлетворяющая условиям:

$$\Phi(-\omega) = \Phi(\omega),\ \ \Phi(0) \geq 0,\ \ \Phi(\omega) > 0 \ \text{ при } \ \omega \neq 0;$$

в частности, удобно выбрать функцию $\Phi(\omega)$ в виде

$$\Phi(\omega) = 1 / \left[1 + \chi(\omega / \Omega_\Phi)^L \right], \qquad (5.5)$$

где величина L – целое четное положительным число.

Параметры χ, Ω_Φ и L непосредственно определяют показатели АЧХ стабилизирующего фильтра $\Phi(\omega)$ (рис. 5.2), а именно:

- верхнюю граничную частоту Ω_Φ полосы пропускания $[0, \Omega_\Phi]$;
- неравномерность

$$\Delta_\Phi = \chi / (1 + \chi)$$

АЧХ $\Phi(\omega)$ в полосе пропускания $[0, \Omega_\Phi]$;

- ширину

$$\Delta\Omega_\Phi = \left[\sqrt[L]{(1 - \delta_\Phi) / (\chi - \delta_\Phi)} - 1 \right] \Omega_\Phi$$

переходной полосы при задаваемой неравномерности δ_Φ в полосе задерживания $[\Omega_\Phi + \Delta\Omega_\Phi, \infty)$. Таким образом, при $\Phi(\omega)$ вида (5.5) корректирующими параметрами МРТ являются параметры ρ, χ, Ω_Φ и L.

В тракте следящей системы находится звено с АЧХ

$$\left|X_*(j\omega)\right|^2 = X_*(j\omega)X_*(-j\omega),$$

а следовательно, оценка $w_0(t)$ будет содержать существенные гармоники ИХ $w(t)$ только при достаточной информативности входного сигнала.

АЧХ $Q(\omega)$ сглаживающего фильтра, определяющая основные свойства МРТ, так же как и АЧХ $\Phi(\omega)$ стабилизирующего фильтра, может быть охарактеризована неравномерностью Δ_Q в полосе пропускания, неравномерностью δ_Q в полосе задерживания, верхней граничной частотой Ω_Q полосы пропускания и шириной $\Delta\Omega_Q$ переходной полосы (рис. 5.3).

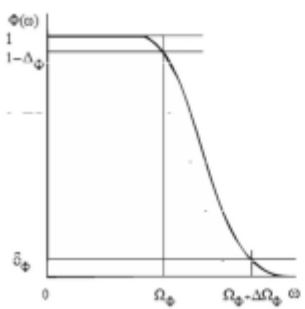

Рис. 5.2

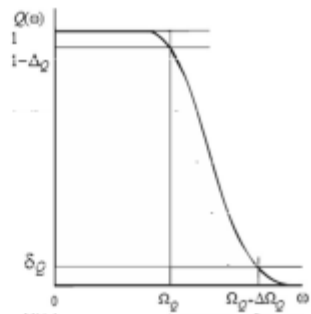

Рис. 5.3

Достаточное условие наличия существенных гармоник ИХ $w(t)$ в оценке $w_0(t)$ формулируется в виде

$$\Omega_Q \geq \Omega_W. \qquad (5.6)$$

Качественный анализ можно осуществить в предположении, что при условии (5.6) для существенного диапазона частот $[0, \Omega_W]$ в первом приближении выполняется

$$\left|X_*(j\omega)\right|^2 \approx X_{*m}^2 \quad \text{при} \quad \omega \in [0,\ \Omega_W],$$

где, например, для импульсного входного сигнала $x(t)$ вида полупериода синусоиды имеем

$$X_{*m} = X_m = (2\pi)T_X x_m .$$

В этом случае АЧХ $Q(\omega)$ определяется приближенным выражением

$$Q(\omega) = \frac{(1/\rho)\Phi(\omega)X_{*m}^2}{1 + (1/\rho)\Phi(\omega)X_{*m}^2} \tag{5.7}$$

и с учетом условий $\rho << 1$, $\delta_Q << 1$ получаем

$$\Omega_Q = L\sqrt{\frac{X_{*m}^2 \Delta_Q}{\rho\chi(1-\Delta_Q)}}\,\Omega_\Phi , \tag{5.8}$$

$$\Delta\Omega_Q = L\sqrt{\frac{1-\Delta_Q}{\Delta_Q \delta_Q}}\,\Omega_Q . \tag{5.9}$$

Методическая составляющая ошибки идентификации $e_w(t)$ порождается ненулевым значением параметра регуляризации ρ, и ее уровень понижается при уменьшении параметра ρ, что соответствует увеличению коэффициента усиления $\kappa = 1/\rho$ прямого тракта следящей системы.

Помехоустойчивость МРТ достигается за счет сглаживающего фильтра, который при соответствующем выборе параметров стабилизирующего фильтра (χ, Ω_Φ, L) может обеспечить очень качественное сглаживание высокочастотных составляющих помех $\delta x(t)$ и $\delta y(t)$.

Из сказанного можно заключить, что для обеспечения приемлемой ошибки идентификации должны выполняться следующие требования:

1) достаточная информативность входного сигнала $x(t)$ $(\Omega_\chi \geq \Omega_W)$;

2) наличие существенных гармоник ИХ $w(t)$ в оценке $w_0(t)$, что достигается выполнением условия

$$\Omega_Q \geq \Omega_W; \tag{5.10}$$

3) малый уровень методической составляющей ошибки идентификации, что достигается выбором малого значения параметра регуляризации ρ, например, из диапазона

$$\rho \in [10^{-6},\ 10^{-4}]; \tag{5.11}$$

4) необходимое качество АЧХ $Q(\omega)$ сглаживающего фильтра, обеспечиваемое показателями Ω_Q и $\Delta\Omega_Q / \Omega_Q$, в которые могут быть пересчитаны корректирующие параметры χ, Ω_Φ и L.

На практике для удобства некоторые параметры и показатели могут быть априори зафиксированы, например, можно положить

$$\Delta_Q = 0{,}05,\quad \delta_Q = 0{,}01,\quad \chi = 0{,}5.$$

6. СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА

6.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Математические модели в виде ДУ или ПФ являются наиболее общей формой уравнения связи между переменными состояния на входе и выходе линейного объекта при синтезе систем управления.

Рассмотрим задачу определения порядков n и m (структурная идентификация), а при необходимости и коэффициентов a_i, $i \in [1, n]$, b_j, $i \in [1, m+1]$ (параметрическая идентификация) уравнения (2.1), описывающего линейный, непрерывный динамический (ЛНД) объект или порядков $\hat{n}$ и $\hat{m}$, и коэффициентов $\hat{a}_i$, $i \in [1, \hat{n}]$, $\hat{b}_j$, $i \in [1, \hat{m}+1]$ уравнения (2.8), описывающего линейный дискретный динамический (ЛДД) объект. Уравнениям (2.1) и (2.8) соответствуют непрерывная ПФ (2.2) и дискретная ПФ (2.9).

В общем случае априорной информацией для решения поставленной задачи служат измеренные (как правило, с помехами) реализации входного $x_*(t)$ и выходного $y_*(t)$ сигналов объекта.

Иногда известна дополнительная информация о порядках n ($\hat{n}$), m ($\hat{m}$) объекта идентификации, что существенно упрощает задачу определения математической модели, сводя ее к чисто параметрической идентификации.

6.2. МЕТОД ПЕРЕХОДНЫХ ФУНКЦИЙ

Метод переходных функций представляет собой простейший случай активной идентификации.

На вход идентифицируемого объекта подается ступенчатое воздействие. На выходе имеем переходную характеристику, или, как ее

иногда называют, кривую разгона. Полученная кривая аппроксимируется аналитическим выражением, например, вида

$$y(t) = \sum_{r=1}^{L} \beta_r e^{-\alpha t},$$

а затем по аналитическим выражениям входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов могут быть найдены их изображения по Лапласу, получены ПФ и ДУ.

Однако спектр сигнала типа ступенчатого воздействия близок к виду затухающей экспоненты и носит низкочастотный характер. В результате он малоинформативен и точность определения характеристик объектов в области высоких частот с помощью метода переходных функций очень низка. Если же выходной сигнал $y(t)$ искажен случайными помехами, то качество идентификации еще больше ухудшается.

Другие тестовые сигналы, которые удается реализовать, например трапецеидальный, также имеют спектры, которые носят низкочастотный характер.

Недостатки метода переходных функций частично парируются в так называемых частотных методах. Однако и они в настоящее время практически не используются.

6.3. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПОСРЕДСТВОМ *rl*-ПРОЦЕДУРЫ

Процедура *rl* применяется при идентификации структуры и параметров ЛНД- и ЛДД-объектов. Суть ее рассмотрим на примере ЛНД-объекта.

На каждом r-м шаге итерационной процедуры, где $r \in [1, R]$, а $R > n$ задается априори, параметр l последовательно принимает значения из диапазона $l \in [0, r]$, в результате чего получаем оценки модели (2.1) в виде

$$y^{(r)}(t) + \sum_{i=1}^{r} a_{ri} y^{(i-1)}(t) = \sum_{i=1}^{l+1} b_{rli} x^{(i-1)}(t), \quad r \in [1, R], \; l \in [0, r]. \qquad (6.1)$$

При необходимости находим и rl -оценки ПФ

$$W_{rl}(s) = \frac{B_{rl}(s)}{A_{rl}(s)}.$$

Здесь же определяются и оценки коэффициентов полиномов $A_r(s)$ и $B_{rl}(s)$, а также модельные сигналы

$$y_{rl}(t) = \mathrm{Lp}^{-1}\left\{W_{rl}(s) Lp\{x(t)\}\right\}. \qquad (6.2)$$

Далее вычисляются рассогласования

$$\varepsilon_{rl}(t) = y_*(t) - y_{rl}(t), \quad t \in [0, T_y], \qquad (6.3)$$

а при необходимости и ряд других выборочных показателей, например, математические ожидания, дисперсии сигналов $y_*(t)$ и $y_{rl}(t)$.

Оценки порядков n и m определяются в результате анализа совокупности функционалов $\varepsilon_{rl}(T_y(t))$, $r \in [1, R]$, $l \in [0, r]$. При этом вводится понятие состоятельности оценок, под которой понимается тот факт, что вероятность ошибки определения порядков $r = n$ и $l = m$ должна стремиться к 0 при $T_y \to \infty$.

Способы определения порядков n и m могут быть объединены в три группы которые базируются:

1) на исследовании ранговых критериев,

2) минимизации информационных критериев,

3) проверке статистических гипотез.

Дополнительная четвертая группа включает в себя другие, не вошедшие в первые три группы подходы к определению структуры.

Ранговые критерии базируются на том, что на любом конечном или бесконечном интервале времени $t \in \left[T_s \geq 0,\ T_f = T_s + T_0 \leq \infty\right]$ совокупность $(n+m+1)$ функций $y^{(i-1)}(t),\ i \in [1, n],\ -x^{(i-1)}(t), i \in [1,\ m+1]$ представляет собой систему линейно независимых функций, поскольку

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(t) - \sum_{i=1}^{m+1} b_i x^{(i-1)}(t) = -y^{(n)}(t), \qquad (6.4)$$

а совокупность $(n+m+2)$ функций $y^{(i-1)}(t),\ i\in[1,\ n+1]$, $-x^{(i-1)}(t),\ i\in[1,\ m+1]$ образует систему линейно зависимых функций, так как

$$y^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_i y^{(i-1)}(t)-\sum_{i=1}^{m+1}b_i x^{(i-1)}(t)=0\,. \qquad (6.5)$$

Если посредством какого-либо критерия устанавливается факт перехода от системы линейно независимых функций (6.4) к линейно зависимой системе (6.5) при $r=r_0$ и $l=l_0$, то полагается $n_o=r_0$, $l_o=l_0$.

Сложность использования ранговых критериев обусловлена наличием помех, а также методических и вычислительных ошибок, что приводит к проблеме определения нуля, который свидетельствует о переходе к линейно зависимой системе функций.

При использовании информационных критериев оценки порядков n и m отыскиваются в рамках rl -процедуры в виде $n_o=r_0$ и $l_o=l_0$, где r_0 и l_0 определяются из условия

$$\varepsilon_{r_0 l_0}(T_y)=\min_{r\in[1,R]}\varepsilon_{rl}(T_y)\,. \qquad (6.6)$$

Проверка статистических гипотез применяется в основном при оценивании параметров авторегрессионных (АР) и авторегрессионных скользящего среднего (АРСС) моделей, когда в качестве априорной информации используется только выходной сигнал объекта в предположении, что на его входе – случайный сигнал типа «белый шум» с известной дисперсией.

6.4. ИДЕНТИФИКАЦИЯ СТРУКТУРЫ ПО ОЦЕНКЕ ИХ ОБЪЕКТА

Предлагаемый подход к оцениванию структуры и параметров базируется на восстановлении РУ (дискретной ПФ), а затем и ДУ (непрерывной ПФ) по оценке ИХ, т. е. в данном случае в качестве априорной информации используются не сигналы входа и выхода объекта, а предварительно идентифицированная ИХ.

Достоинства такого подхода по сравнению с ранее рассмотренными в следующем.

1. Нет необходимости измерять производные входного и выходного сигналов объекта, что, вообще говоря, представляет весьма существенную проблему. Для решения же задачи идентификации ИХ не требуется наличие производных в качестве априорной информации.

2. Известны (см. раздел 3) высокоэффективные алгоритмы идентификации ИХ, которые малочувствительны к степени колебательности ИХ объекта и обладают высокой помехоустойчивостью. В результате помехи высокого уровня, искажающие реализации входного и выходного сигналов объекта, трансформируются в помеху существенно меньшего уровня, искажающую идентифицируемую оценку ИХ. Например, модифицированный МНК идентификации ИХ дает относительную среднеквадратичную ошибку e_w, на порядок меньшую относительного максимального уровня δy_m широкополосной помехи $\delta y(t)$, искажающей выходной сигнал $y(t)$ объекта на интервале наблюдения.

Основной недостаток метода, базирующегося на восстановлении РУ и ДУ – предварительная идентификация ИХ объекта.

Таким образом, задачу сформулируем в следующем виде. Требуется оценить порядки и коэффициенты полиномов числителя и знаменателя дискретной ПФ (2.9), а в качестве априорной информации использовать реализацию оценки $w_{\text{o}}(t) = w(t) + \delta w(t)$ ИХ $w(t)$, заданной K_w отсчетами $w_{ok} = w_{\text{o}}[(k-1)\Delta t]$ с шагом Δt, $k \in [1, K_w]$. Дополнительно предполагается известной оценка верхней частоты $\Omega_{\text{в}}$ эффективной полосы АЧХ объекта, которая, вообще говоря, определяется в процессе идентификации ИХ.

Поставленная задача решается на базе Z-преобразования

$$\hat{W}(z) = \frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \sum_{k=1}^{\infty} w_k z^{-(k-1)} . \qquad (6.7)$$

Связь между отсчетами w_k реализации ИХ и коэффициентами полиномов $\hat{B}(z)$ и $\hat{A}(z)$ может быть представлена в виде

$$w_k = 0, \quad k \in [1, \hat{n} - \hat{m}], \text{ при } \hat{n} - \hat{m} \geq 1,$$

$$w_k = \hat{b}_{(\hat{m}+1)}, \quad k = \hat{n} - \hat{m} + 1, \text{ при } \hat{n} - \hat{m} \geq 1,$$

$$w_k = \hat{b}_{(\hat{n}+2-k)} - \sum_{i=\hat{n}+2-k}^{\hat{n}} \hat{a}_i w_{(k+i-\hat{n}-1)}, \quad k \in [\hat{n}-\hat{m}+1,\ \hat{n}+1],$$

$$w_k = -\sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i w_{(k+i-\hat{n}-1)}, \quad k \in [\hat{n}+2,\ \infty).$$

Данные выражения, по существу, представляют собой расчетные формулы обратного Z-преобразования, которые для нашей задачи удобнее преобразовать к следующему виду:

$$w_k = 0, \quad k \in [1,\ \hat{n}-\hat{m}], \text{ при } \hat{n} > \hat{m}, \tag{6.8}$$

$$\hat{b}_i = w_{(\hat{n}+2-i)} + \sum_{r=i}^{\hat{n}} \hat{a}_r w_{(r+1-i)}, \quad i \in [1,\ \hat{m}+1], \tag{6.9}$$

$$w_{(\hat{n}+1+k)} + \sum_{i=1}^{\hat{n}} \hat{a}_i w_{(i+k)} = 0, \quad k \in [1,\ \infty). \tag{6.10}$$

Из соотношения (6.10) следует, что на любом конечном или бесконечном $k \in [K_s \geq 1,\ K_f \leq \infty]$ множестве функции $w_{(i+k)}$, $i \in [1,\ \hat{n}]$, образуют систему $\hat{n}$ линейно независимых функций, а $w_{(i+k)}$, $i \in [1,\ \hat{n}+1]$ – линейно зависимую систему.

Как и в ранее рассмотренной rl-процедуре, производим перебор порядка $\hat{n}$, т. е. на каждом r-м шаге ($r = 2, 3, \ldots, R > \hat{n}$) формируем однородное уравнение

$$w_{(r+1+k)} + \sum_{i=1}^{r} \hat{a}_{ri} w_{(i+k)} = 0, \quad k \in [K_s,\ K_f],$$

и проверяем линейную зависимость функций $w_{(i+k)}$, $i \in [1,\ r]$. Если на некотором r_0-м шаге $w_{(i+k)}$, $i \in [1,\ r_0]$, стали линейно зависимыми, то

$$\hat{n} = r_0 - 1. \tag{6.11}$$

Здесь, как и в rl-процедуре, возникает проблема определения линейной зависимости функций.

Однако если сравнивать сложность рассмотренного подхода и rl-процедуры, то в данном случае отсутствует перебор структуры модели по параметру l.

7. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА

7.1. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛНД-МОДЕЛИ

ЛНД-модель идентифицируемого объекта будем представлять в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_j u_j(t) = u_0(t), \tag{7.1}$$

где a_j, $j \in [1, n]$ – идентифицируемые параметры, а $u_j(t)$, $j \in [1, n]$ – координаты объекта. Подобного вида модель может быть получена, если в ДУ

$$y^{(l)}(t) + \sum_{j=1}^{l} a_j y^{(j-1)}(t) = \sum_{j=l+1}^{n+1} b_i x^{(j-1)}(t)$$

ввести обозначения:

$$u_j(t) = y^{(j)}(t),\ a_j = a_j,\quad j \in [1, l],$$

$$u_j(t) = -x^{(j)}(t),\ a_j = b_j,\ j \in [l+1, n],$$

$$u_0(t) = -y^{(l)}(t).$$

Ставится задача определить коэффициенты a_j, $j \in [1, n]$, уравнения (7.1) в предположении, что порядок n и координаты $u_j(t)$, $j \in [0, n]$, известны.

Для решения поставленной задачи сформируем систему $m \geq n$ линейных алгебраических уравнений следующим образом. Слагаемые

уравнения (7.1) умножим на некоторые линейно независимые функции $w_i(t-\tau),\ i \in [1, m],$ и проинтегрируем на интервале $[0, t]$. Получим

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \int_0^t w_i(t-\tau) u_j(\tau)\, d\tau = \int_0^t w_i(t-\tau) u_0(\tau)\, d\tau\,,\ i \in [1, m], \qquad (7.2)$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_j u_{ij}(t) = u_{0i}(t)\,,\ i \in [1, m]\,. \qquad (7.3)$$

Физически это означает (рис. 7.1), что координаты $u_j(t),\ j \in [0, n]$, пропускаются через некие фильтры с ИХ $w_i(t)$, на выходе которых получаем элементы матрицы $u_{ij}(t),\ i \in [1, m]$, $j \in [1, n]$ и вектора правой части $u_{0i}(t),\ i \in [1, m]$, системы линейных алгебраических уравнений:

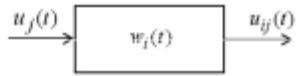

Рис. 7.1

$$\mathbf{U}(t)\mathbf{a} = \mathbf{u}_0(t)\,,$$

$$\mathbf{U}(t) = \left[u_{ij}(t),\ i \in [1, m],\ j \in [1, n]\right],$$

$$\mathbf{a} = \left[a_j,\ i \in [1, n]\right],\ \mathbf{u}_0(t) = \left[u_{0i}, i \in [1, m]\right],$$

которая при $t = T$ выглядит как

$$\mathbf{U}\mathbf{a} = \mathbf{u}_0\,. \qquad (7.4)$$

Поскольку может выполняться условие $m > n$, система (7.4) преобразуется к виду

$$\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}\mathbf{a} = \mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{u}_0\,, \qquad (7.5)$$

а ее решение

$$\mathbf{a} = (\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{u}_0 \qquad (7.6)$$

может быть получено при условии невырожденности матрицы $\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}$, что обеспечивается за счет:

1) линейной независимости координат $u_j(t)$, $j \in [1, n]$, $t \in [0, T]$, для чего входной сигнал объекта должен содержать не менее $n/2$ гармоник;

2) линейной независимости функций $w_i(t)$, $t \in [0, T]$.

Следует отметить проблему, возникающую в описанном методе идентификации (впрочем, как и в других случаях оценивания параметров ЛНД-объекта), связанную с информацией о производных входного $x(t)$ и выходного $y(t)$ сигналов. Указанные производные входят в состав координат $u_j(t)$, $j \in [1, n]$, а фактически можно измерить лишь только сами сигналы. В результате приходится прибегать к искусственным приемам, позволяющим избежать операции дифференцирования зашумленных сигналов. Одним из таких приемов является известное в математике интегрирование по частям. Напомним это правило:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

В нашем случае имеем, например,

$$\int_0^T w_i(T-\tau) y^{(2)}(\tau) d\tau = w_i(T-\tau) y(\tau)\Big|_0^T + \int_0^T w_i^{(1)}(T-\tau) y^{(1)}(\tau) d\tau ,$$

так как $$u = w_i(T-\tau),\ du = -w_i^{(1)}(T-\tau) d\tau ,$$

$$dv = y^{(2)}(\tau) d\tau,\ \ v = y^{(1)}(\tau)$$

и далее

$$w_i(T-\tau) y(\tau)\Big|_0^T + \int_0^T w_i^{(1)}(T-\tau) y^{(1)}(\tau) d\tau =$$

$$= \Big[w_i(T-\tau) y^{(1)}(\tau) + w_i^{(1)}(T-\tau) y(\tau) \Big]_0^T + \int_0^T w_i^{(2)}(T-\tau) y(\tau) d\tau ,$$

поскольку

$$u = w_i^{(1)}(T-\tau),\ \ du = -w_i^{(2)}(T-\tau) d\tau ,\quad dv = y^{(1)}(\tau) d\tau,\ \ v = y(\tau) .$$

В общем случае выражение интегрирования по частям, позволяющее избежать операции дифференцирования сигналов, выглядит следующим образом:

$$\int_0^T w_i(T-\tau)\,y^{(j)}(\tau)\,d\tau = \sum_{r=0}^{j-1} w_i^{(r)}(T-\tau)\,y^{(j-1-r)}(\tau)\Big|_0^T + \\ + \int_0^T w_i^{(j)}(T-\tau)\,y(\tau)\,d\tau\,. \qquad (7.7)$$

Для обеспечения корректности описанного подхода помимо требований, предъявляемых к функциям $w_i(t)$, $i \in [1, m]$, необходимо выполнять соотношения

$$w_i^{(r)}(0) = w_i^{(r)}(T) = 0\,, \quad r \in [0,\ j-1], \qquad (7.8)$$

что позволяет обеспечить

$$\sum_{r=0}^{j-1} w_i^{(r)}(T-\tau)\,y^{(j-1-r)}(\tau)\Big|_0^T = 0\,. \qquad (7.9)$$

Корректирующими параметрами алгоритма идентификации являются:

1) вид функций $w_i(t)$, $i \in [1, m]$, формирующих алгебраическую систему;

2) длительность T интервала интегрирования;

3) количество m формируемых уравнений.

Указанные параметры определяют свойства матрицы $\mathbf{U^T U}$ формируемой системы уравнений, в частности ее обусловленность, анализ которой позволил дать рекомендации по выбору корректирующих параметров.

Линейная независимость строк алгебраической системы (7.5) будет выполняться наилучшим образом, если АЧХ $\left|W_i(j\omega)\right|$, $i \in [1, m]$, формирующих звеньев с ИХ $w_i(t)$, $i \in [1, m]$, будут представлять собой АЧХ полосовых фильтров с разнесенными полосами пропускания в диапазоне частот $\omega \in [0, \Omega_W]$ эффективной длительности АЧХ идентифицируемого объекта, как показано на рис. 7.2.

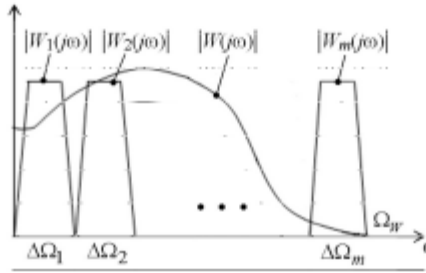

Рис. 7.2

Выполнение этого условия дополнительно позволит устранить постоянную и высокочастотную составляющие помех, искажающих координаты $u_j(t)$, $j \in [1, n]$, что положительно скажется на помехоустойчивости алгоритма идентификации. Влияние параметра T на свойства матрицы таково, что с его увеличением обусловленность матрицы $\mathbf{U}^{\mathbf{T}}\mathbf{U}$ становится лучше, поскольку при этом усиливаются сглаживающие свойства интегрального оператора.

Чем больше количество m формируемых уравнений (строк матрицы $\mathbf{U}$), тем лучше обусловленность матрицы $\frac{1}{m}(\mathbf{U}^{\mathbf{T}} \cdot \mathbf{U})$ вследствие более качественного усреднения высокочастотных помех при выполнении операции первой трансформации Гаусса.

Однако практически реализовать указанные выше рекомендации по выбору корректирующих параметров, как правило, не удается.

Если обозначить через $\Delta\Omega_i = \Delta\Omega = \text{const}$, $i \in [1, m]$, полосы пропускания формирующих фильтров, то параметр m можно будет определить из условия

$$m\Delta\Omega = \Omega_W . \tag{7.10}$$

С другой стороны, для конкретного типа полосовых фильтров выполняется соотношение

$$\Delta\Omega T_w = \kappa = \text{const} , \tag{7.11}$$

где T_w – длительность ИХ фильтра. Таким образом, чем у́же полоса пропускания $\Delta\Omega$, тем больше длительность ИХ T_w и тем сложнее реализация фильтра.

Из (7.11) следует

$$\Delta\Omega = \kappa / T_w \,. \tag{7.12}$$

Подставляя (7.12) в (7.10), получаем

$$m\kappa \frac{1}{T_w} = \Omega_W \,,$$

откуда

$$T_w = m\kappa \frac{1}{\Omega_W} \,. \tag{7.13}$$

В результате приходим к тому, что $T = T_w$, а $m = n$.

Следует отметить, что идентифицируемые объекты, как правило, носят низкочастотный характер и даже в случае $m = n$ разместить в диапазоне $[0, \Omega_W]$ АЧХ объекта m фильтров с неперекрывающимися полосами пропускания $\Delta\Omega$ не удается.

7.2. ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛДД-МОДЕЛИ

Линейные дискретные динамические (ЛДД) модели описываются разностным уравнением

$$y_k + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{\left[k-(n+1-i)\right]} = \sum_{i=1}^{m+1} b_i x_{\left[k-(n+1-i)\right]} \,.$$

С учетом помех δx_k и δy_k, искажающих измеряемые сигналы на интервале K_y, это уравнение будет иметь вид

$$y_{*k} + \sum_{i=1}^{n} a_i y_{*\left[k-(n+1-i)\right]} = \sum_{i=1}^{m+1} b_i x_{*\left[k-(n+1-i)\right]} + \delta v_k \,, \tag{7.14}$$

где

$$\delta v_k = \delta y_k + \sum_{i=1}^{n} a_i \delta y_{[k-(n+1-i)]} - \sum_{i=1}^{m+1} b_i \delta x_{[k-(n+1-i)]} \qquad (7.15)$$

– обобщенная помеха.

Фиксируя уравнение (7.14) в точках $k \in [K_s, K_f]$, где $K_s = K_w + 1$, $K_f = K_s + K_0$, $K_f \le K_y$, $K_0 \ge n + m + 1$, K_w – время переходного процесса или, что то же самое, эффективная длительность ИХ, K_0 раз получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{u}_{*k}^{\mathrm{T}} \mathbf{a} = y_{*k} + \delta v_k,$$

или

$$\mathbf{U}_* \mathbf{a} = \mathbf{y}_* + \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}, \qquad (7.16)$$

где

$$\mathbf{a} = \left[a_i,\ i \in [1,\ n],\ b_i,\ i \in [1,\ m+1] \right],$$

$$\mathbf{u}_{*k} = \left[y_{*[k-(n+1-i)]},\ i \in [1,\ n],\ -x_{*[k-(n+1-i)]},\ i \in [1,\ m+1] \right],$$

$$\mathbf{U}_* = \left[\mathbf{u}_{*(K_S+k)}^{\mathrm{T}},\ k \in [1,\ K_0] \right],$$

$$\mathbf{y}_* = \left[y_{*(K_S+k)},\ k \in [1,\ K_0] \right],$$

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} = \left[\delta v_{(K_S+k)},\ k \in [1, K_0] \right].$$

Поскольку в общем случае $K_0 \ge n + m + 1$, система (7.16) приводится к виду

$$\mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{U}_* \mathbf{a} = \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_* + \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}, \qquad (7.17)$$

а искомое решение будем определять из системы

$$\mathbf{V}_{ии} \mathbf{a} = \mathbf{f}_{иу} + \mathbf{f}_{и\delta v}, \qquad (7.18)$$

где

$$\mathbf{V}_{ии} = \frac{1}{K_0} \sum_{k-1}^{K_0} \mathbf{u}_{*(K_S+k)} \mathbf{u}_{*(K_S+k)}^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{f}_{uy} = \frac{1}{K_0}\sum_{k=1}^{K_0}\mathbf{u}_{*(K_S+k)}\mathbf{y}_* \ , \tag{7.19}$$

$$\mathbf{f}_{u\delta v} = \frac{1}{K_0}\sum_{k=1}^{K_0}\mathbf{u}_{*(K_S+k)}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} \ . \tag{7.20}$$

Решение системы (7.18) ищем методом наименьших квадратов (МНК) из условия минимума функционала

$$J = \frac{1}{K_0}\sum_{k=1}^{K_0}\delta v_k^2 \ ,$$

в результате чего МНК-оценку искомых параметров определим из усеченной системы алгебраических уравнений

$$\mathbf{V}_{uu}\mathbf{a}_{\text{o}} = \mathbf{f}_{uy} \tag{7.21}$$

в виде

$$\mathbf{a}_{\text{o}} = \mathbf{V}_{uu}^{-1}\mathbf{f}_{uy} \ . \tag{7.22}$$

Следует отметить, что МНК-оценки, найденные согласно (7.22), получаются смещенными относительно истинных параметров.

Ошибка идентификации

$$\mathbf{e} = \mathbf{a} - \mathbf{a}_{\text{o}}$$

возникает из-за отбрасывания неизмеримого вектора $\mathbf{f}_{u\delta v}$ правой части системы и может быть уменьшена за счет компенсации влияния указанного вектора, что реализуется в так называемом *прямом компенсационном МНК* (*ПКМНК*).

Помимо компенсационного подхода возможны другие способы уменьшения ошибки идентификации. Для описания этих способов воспользуемся аппаратом корреляционных функций.

Взаимная корреляционная функция между сигналами $x(t)$ и $y(t)$ в идеальном случае выглядит как

$$R_{xy}(t) = \lim_{T_0\to\infty}\int_0^{T_0} x(\tau)y(t+\tau)\,d\tau = M_\infty\{x(\tau)y(t+\tau)\} \ .$$

Конечность длины интервала T_0 и вычисление интеграла посредством квадратурной формулы позволяют определить лишь оценку

$$\tilde{R}_{xyk} = \frac{1}{K_0}\sum_{i=1}^{K_0} x_i y_{(k+i)} \equiv M_{K_0}\{x_i y_{(k+i)}\}. \qquad (7.23)$$

Если сравнить (7.23) с выражениями слагаемых системы (7.18), то будет очевидно, что элементы матрицы $\mathbf{V}_{uu}$ и векторов $\mathbf{f}_{uy}$ и $\mathbf{f}_{u\delta v}$ представляют собой отсчеты автокорреляционных и взаимнокорреляционных функций, что позволяет записать алгебраическую систему (7.18) в эквивалентном виде

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{R}_{u_* u_*(i-j)} a_j = \tilde{R}_{u_* y_*(i-1)} + \tilde{R}_{u_* \delta v(i-1)}. \qquad (7.24)$$

Из (7.24) следует, что помимо компенсации неизмеримого вектора уменьшение ошибки идентификации будет иметь место, если оценка:

- $\tilde{R}_{u_* \delta v(i-1)}$ будет стремиться к 0,
- $\tilde{R}_{u_* u_*(i-j)}$ будет стремиться к истинной $R_{uu(i-j)}$,
- $\tilde{R}_{u_* y_*(i-1)}$ будет стремиться к истинной $R_{uy(i-1)}$.

Попытки реализации уменьшения ошибки идентификации были сделаны в алгоритмах:

1) *прямом компенсационном* МНК (ПКМНК);

2) *обобщенном* МНК (ОМНК);

3) *рекуррентном* МНК (РМНК) и близком к нему алгоритме Качмажа (АК);

4) *методе инструментальной переменной* (МИП).

7.2.1. ПРЯМОЙ КОМПЕНСАЦИОННЫЙ МНК

Ставится задача скомпенсировать влияние неизмеримого вектора $\mathbf{f}_{u\delta v}$ системы (7.18) на ошибку идентификации. Для этой цели проведем анализ указанного вектора в предположении, что помеха $\delta x_k = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, а обобщенная помеха δv_k не коррелирует с входным сигналом x_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$

Представим вектор $\mathbf{f}_{u\delta v}$ в следующем виде:

$$\mathbf{f}_{u\delta v} = \begin{bmatrix} M_{k0}\{\mathbf{y}_* \delta v_k\} \\ M_{k0}\{\mathbf{x}\delta v_k\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{y\delta v} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}\mathbf{f}_{y\delta v}. \qquad (7.25)$$

Соотношение (7.25) получено в предположении, что

$$M_{k0}\{\mathbf{x}\delta v_k\} = \mathbf{0},$$

поскольку априори x_k и δv_k, $k = 0, 1, 2, ...,$ не коррелируют между собой. Матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_n \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

имеет мерность $n \times (n+m)$, а $\mathbf{E}_n$ – единичная матрица порядка n.

На основе (7.18), (7.19) и (7.21) можно записать:

$$\mathbf{a}_{\text{о}} = \mathbf{V}_{uu}^{-1}\mathbf{f}_{uy} = \mathbf{V}_{uu}^{-1}(\mathbf{V}_{uu}\mathbf{a} - \mathbf{f}_{u\delta v}) =$$

$$= \mathbf{V}_{uu}^{-1}(\mathbf{V}_{uu}\mathbf{a} - \mathbf{Q}\mathbf{f}_{y\delta v}) = \mathbf{a} - \mathbf{V}_{uu}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{f}_{y\delta v}.$$

В результате, если оценить вектор $\mathbf{f}_{u\delta v}$, то можно получить скомпенсированную оценку

$$\mathbf{a}_{\text{ок}} = \mathbf{a}_{\text{о}} - \mathbf{V}_{uu}^{-1}\mathbf{Q}\mathbf{f}_{y\delta v}. \qquad (7.26)$$

Введем в рассмотрение расширенный вектор

$$\mathbf{u}_k = [\mathbf{u}_k; \bar{\mathbf{x}}_k], \ \bar{\mathbf{x}}_k = [x_{(k-m-1)}, \ x_{(k-m-2)} \cdots x_{(k-m-n)}],$$

отличающийся от ранее используемого

$$\mathbf{u}_k = [\mathbf{y}_{*k}; \mathbf{x}_k] = [\mathbf{y}_{*k}; x_k, x_{(k-1)} \cdots x_{(k-m)}],$$

и в результате определенных векторно-матричных преобразований получим

$$\mathbf{f}_{y\delta v} = \left(\mathbf{V}_{u\bar{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_{uu}^{-1} \cdot \mathbf{Q}\right)^{-1}\left(\mathbf{V}_{u\bar{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{\text{о}} - \mathbf{f}_{\bar{x}y}\right), \qquad (7.27)$$

где

$$\mathbf{V}_{u\tilde{x}} = M_N\left\{\mathbf{u}_{(K_0+k)}\tilde{\mathbf{x}}^{\mathbf{T}}_{(K_0+k)}\right\},$$
$$\mathbf{f}_{\tilde{x}y} = M_N\left\{\tilde{\mathbf{x}}_{(K_0+k)}y_k\right\},\ N > K_0. \tag{7.28}$$

Таким образом, последовательность вычислительных этапов ПКМНК имеет следующий порядок.

1. По выражениям (7.19), (7.28) при $k \in [1, N]$ вычисляем оценки

$$\mathbf{V}_{uu}(N),\ \mathbf{f}_{uy}(N),\ \mathbf{V}_{u\tilde{x}}(N),\ \mathbf{f}_{\tilde{x}y}(N).$$

2. Определяем МНК-оценку (7.22):

$$\mathbf{a}_0(N) = \mathbf{V}^{-1}_{uu}(N)\mathbf{f}_{uy}(N).$$

3. Оцениваем неизмеримый вектор (7.27):

$$\mathbf{f}_{y\delta v}(N) = [\mathbf{V}^{\mathbf{T}}_{u\tilde{x}}(N)\mathbf{V}^{-1}_{uu}(N)\mathbf{Q}]^{-1}[\mathbf{V}^{\mathbf{T}}_{u\tilde{x}}(N)\mathbf{a}_0(N) - \mathbf{f}_{\tilde{x}y}(N)].$$

4. Вычисляем уточненную, скомпенсированную оценку (7.26):

$$\mathbf{a}_{0K}(N) = \mathbf{a}_0(N) - \mathbf{V}^{-1}_{uu}(N)\mathbf{Q}\mathbf{f}_{y\delta v}(N).$$

ПКМНК характеризуется новым корректирующим параметром N.

7.2.2. ОБОБЩЕННЫЙ МНК

Ставится задача уменьшить (теоретически до нуля) уровень обобщенной помехи δv_k за счет ее «выбеливания», которое заключается в том, что δv_k представляется в виде реакции дискретного формирующего фильтра на белый шум δ_k. Это позволяет выразить обобщенную помеху в виде произведения белого шума на ПФ фильтра, в результате чего взаимная корреляционная функция $\tilde{R}_{u_*\,\delta v(i-1)}$ (неизмеримое слагаемое правой части системы уравнений) в выражении (7.24) будет стремиться к нулю, поскольку белый шум не коррелирует ни с каким другим сигналом.

ПФ формирующего фильтра можно представить в виде авторегрессионной (АР) модели P- го порядка (рис. 7.3) и тогда

$$\delta v_k = [1/C(z)]\delta_k ,$$

$$\delta v_k + \sum_{j=1}^{P} c_j \delta v_{(k-P-1+j)} = \delta_k ,$$

$$k \in [K_s + 1,\ K_s + K_0].$$

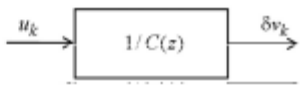

Рис. 7.3

Фиксируя значения параметра k на интервале наблюдения, можно сформировать систему линейных алгебраических уравнений, которая в векторно-матричном виде записывается как

$$\boldsymbol{\delta v} + \boldsymbol{\delta V c} = \boldsymbol{\delta} , \tag{7.29}$$

откуда

$$\boldsymbol{\delta v} = -\boldsymbol{\delta V c} + \boldsymbol{\delta} . \tag{7.30}$$

Подставив (7.30) в алгебраическую систему (7.17), получим

$$\mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{U}_* \mathbf{a} = \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_* - \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta V c} + \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta} .$$

В этом выражении слагаемое $\dfrac{1}{K_0} \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta}$ представляет собой взаимную корреляционную функцию между u_{*k} и δ_k. В силу независимости δ_k

$$\frac{1}{K_0} \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta} = \mathbf{0},$$

в результате

$$\mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{U}_* \mathbf{a} = \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_* - \mathbf{U}_*^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\delta V c} . \tag{7.31}$$

Из (7.31) можно найти искомый вектор $\mathbf{a}$ при условии, что будут известны $\boldsymbol{\delta V}$ и $\mathbf{c}$.

Для оценивания матрицы $\boldsymbol{\delta V}$ и вектора $\mathbf{c}$ представим (7.29) как

$$\boldsymbol{\delta V c} = -\boldsymbol{\delta v} + \boldsymbol{\delta} \tag{7.32}$$

и преобразуем (7.32) к виду

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}\mathbf{c} = -\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} + \boldsymbol{\delta}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta},$$

где

$$\frac{1}{K_0}\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta} = \mathbf{0},$$

и тогда

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}\mathbf{c} = -\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}. \qquad (7.33)$$

Из системы (7.33) можно определить вектор $\mathbf{c}$. Однако для этого предварительно оценивается обобщенная помеха δv_k через МНК-оценку $\mathbf{a}_0$ (7.22).

Таким образом, вычислительная схема ОМНК может быть представлена в следующем виде.

1. Выбираем порядок P формирующего фильтра в соответствии с рекомендациями $P \le (0,3...0,5)K_0$.

2. Запускаем итерационную процедуру, на каждом r-м шаге которой:

1) определяем оценку обобщенной помехи

$$\delta v_{r\,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{(r-1)\,j} u_{*(k-1+j)} - y_{*k}\ ,\ k \in [K_s+1,\ K_s+K_0],$$

где в качестве начальных условий $a_{0\,j}$, $j \in [1,\ n]$, используются грубые МНК-оценки, найденные обычным МНК (7.22);

2) из системы

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}_r^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}\mathbf{c}_r = -\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}_r^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}_r$$

вычисляем оценку вектора $\mathbf{c}_r$;

3) находим оценку $\mathbf{a}_r$ вектора $\mathbf{a}$ путем решения системы

$$\mathbf{U}_*^{\mathbf{T}}\mathbf{U}_*\mathbf{a}_r = \mathbf{U}_*^{\mathbf{T}}\mathbf{y}_* - \mathbf{U}_*^{\mathbf{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{V}_r\mathbf{c}_r;$$

4) вычисляем норму

$$\left\| \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_{(r-1)} \right\|$$

и выносим решение о прекращении или продолжении итерационной процедуры (в случае сходимости алгоритма имеем $\| \mathbf{a}_r - \mathbf{a}_{(r-1)} \| \to 0$ при $r \to \infty$).

Сходимость ОМНК в значительной мере определяется порядком P формирующего фильтра, который является основным корректирующим параметром ОМНК, однако никаких конкретных рекомендаций по выбору этого параметра нет, поэтому может возникнуть проблема сходимости алгоритма.

7.2.3. РЕКУРРЕНТНЫЙ МНК

В данном случае для уменьшения влияния неизмеримого вектора (7.20) системы (7.18) необходимо увеличивать количество формируемых уравнений. Такая возможность реально существует, поскольку алгебраическая система (7.18) формируется на интервале $k \in [K_s + 1, K_s + K_0]$, а длина интервала $(K_s + K_0)$ существенно меньше длины интервала наблюдения K_y. Другими словами, часть априорной информации (измеренные x_k и y_k, $k \in [1, K_y]$) не используется. Можно формировать системы уравнений последовательно на интервалах $k \in [K_s + 1, K_s + K_0 + 1]$, $k \in [K_s + 1, K_s + K_0 + 2]$ и далее, или в общем случае на $k \in [K_s + 1, K_s + K_0 + r]$, $r \in [1, R]$. Однако формирование R систем уравнений требует R обращений матриц сформированных систем, мерность которых увеличивается по мере возрастания r, а это приводит к существенному повышению вычислительных затрат. В результате была предложена рекуррентная процедура вычисления обратной матрицы – РМНК параметрической идентификации.

Решение алгебраической системы обычным МНК запишем как

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{U}_*^{-1} \mathbf{y}_* = \mathbf{D}_* \mathbf{y}_*, \ \mathbf{D}_* = \mathbf{U}_*^{-1},$$

и тогда численную реализацию РМНК можно поэтапно представить в следующем виде.

1. Зададим начальные условия

$$\mathbf{a}_{o1} = \mathbf{0},\ \mathbf{D}_{*1} = \mu\mathbf{E},\ \mu \geq 10^6. \tag{7.34}$$

2. Выполним R-шаговую итерационную процедуру, на каждом r-м шаге которой ($r = 2, 3, 4, \ldots, R$) вычислим:

1) оценку обратной матрицы

$$\mathbf{D}_{*r} = \mathbf{D}_{*(r-1)} - \frac{\mathbf{D}_{*(r-1)}\mathbf{u}_{*r}\mathbf{u}_{*r}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{*(r-1)}}{1 + \mathbf{u}_{*r}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{*(r-1)}\mathbf{u}_{*r}}; \tag{7.35}$$

2) оценку вектора искомых параметров

$$\mathbf{a}_{o\,r} = \mathbf{a}_{o(r-1)} + \varepsilon_r \mathbf{D}_{*r}\mathbf{u}_{*r}, \tag{7.36}$$

где

$$\varepsilon_r = \mathbf{u}_{o\,r} - \mathbf{u}_{*r}^{\mathrm{T}}\mathbf{a}_{o(r-1)}.$$

Если рекуррентный алгоритм сходится, то при $r \to \infty$ получим $\mathbf{a}_{o\,r} \to \mathbf{a}$.

Приведенный выше РМНК называют *классическим* алгоритмом. Чаще на практике используется РМНК *со взвешиванием*, отличающийся вычислением матрицы $\mathbf{D}_{*r}$, а именно

$$\mathbf{D}_{*r} = \mathbf{D}_{*(r-1)} - \frac{\mathbf{D}_{*(r-1)}\mathbf{u}_{*r}\mathbf{u}_{*r}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{*(r-1)}}{\gamma + \mathbf{u}_{*r}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}_{*(r-1)}\mathbf{u}_{*r}}, \tag{7.37}$$

где вводится дополнительный параметр $\gamma \leq 1$, характеризующий степень «забывания» старой информации (при $\gamma = 1$ вся информация используется полностью).

Новые корректирующие параметры РМНК: μ, R, γ, причем в отличие от μ и γ существует проблема выбора параметра R.

7.2.4. АЛГОРИТМ КАЧМАЖА

Здесь, как и в РМНК, используется итерационная процедура определения идентифицируемых параметров. Суть АК в следующем. Задается начальное значение оценки вектора параметров. Обычно

$$\mathbf{a}_{o0} = \mathbf{0}\,, \tag{7.38}$$

а далее производится итерационная процедура уточнения, на каждом r-м шаге которой ($r \in [1, R]$) возникает r-е уравнение

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{a} = y_{*(K_S+r)} + \delta v_{(K_S+r)}\,, \tag{7.39}$$

минимизируется функционал

$$J_r = 0{,}5\,\delta v^2_{(K_S+r)} = 0{,}5\left[\mathbf{u}^{\mathbf{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{a} - y_{*(K_S+r)}\right]^2,$$

в результате чего вычисляется r-я оценка $\mathbf{a}_{or}$ вектора $\mathbf{a}$ в виде

$$\mathbf{a}_{or} = \mathbf{a}_{o(r-1)} + \kappa\frac{y_{*(K_S+r)} - \mathbf{u}^{\mathbf{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{a}_{o(r-1)}}{\mathbf{u}^{\mathbf{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{u}_{*(K_S+r)}}\mathbf{u}_{*(K_S+r)}\,, \tag{7.40}$$

где $0 < \kappa \le 2$.

Выражение (7.40) называют *классическим* АК. На практике чаще используется алгоритм *Качмажа–Чадеева* (АКЧ)

$$\mathbf{a}_{or} = \mathbf{a}_{o(r-1)} + \kappa\frac{y_{*(K_S+r)} - \mathbf{u}^{\mathbf{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{a}_{o(r-1)}}{\gamma + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}_{*(K_S+r)}\mathbf{u}_{*(K_S+r)}}\mathbf{u}_{*(K_S+r)}\,, \tag{7.41}$$

где параметр $0 \le \gamma \le n$ вводится для улучшения помехоустойчивости алгоритма.

7.2.5. МЕТОД ИНСТРУМЕНТАЛЬНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В МИП сформированная в МНК алгебраическая система

$$\mathbf{U}_*\mathbf{a} = \mathbf{y}_* + \boldsymbol{\delta}\mathbf{v}$$

преобразуется к виду

$$\frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_*\mathbf{a} = \frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{y}_* + \frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v}. \qquad (7.42)$$

Матрица

$$\mathbf{Q}_* = \left[\mathbf{q}_{*(K_S+1)}^{\mathrm{T}}, \mathbf{q}_{*(K_S+2)}^{\mathrm{T}}, \cdots, \mathbf{q}_{*(K_S+K_0)}^{\mathrm{T}}\right]$$

формируется из отсчетов реализации функции q_{*k}, которая называется инструментальной переменной и должна удовлетворять двум требованиям:

1) сильно коррелировать с элементами вектора $\mathbf{u}_{*k}$, что обеспечивает невырожденность матрицы $\mathbf{Q}_*^{\mathrm{T}}\mathbf{U}_*$;

2) не коррелировать с обобщенной помехой δv_k, что при больших K_0 приводит к выполнению условия

$$\frac{1}{K_0}\mathbf{Q}_*^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\delta}\mathbf{v} \approx \mathbf{0}.$$

Выполнение этих требований создает проблему выбора вида инструментальной переменной. Рассмотрим два подхода к выбору инструментальной переменной при условии, что помеха $\delta x(t) = 0$.

В *методе сдвига* инструментальная переменная выбирается в виде

$$q_{*k} = y_{*(k+r)},$$

причем сдвиг r должен быть таким, чтобы сигнал $y_{*(k+r)}$ не коррелировал с обобщенной помехой δv_k. Однако никаких рекомендаций по выбору параметра r не дается.

Экспериментальные исследования с различными объектами идентификации показали следующие факты. Взаимная корреляционная

функция $R_{q_* u_*}$ близка к автокорреляционной ($R_{q_* u_* k} \approx 0,9$ при $k = 0$), и это практически означает выполнение первого требования, а взаимная корреляционная функция $R_{q_* \delta v k} \approx 0,2$ при $k = 0, 1, 2, \ldots$, что свидетельствует о наличии корреляции инструментальной переменной с обобщенной помехой.

В *методе линейного фильтра* инструментальная переменная вычисляется посредством итерационной процедуры, на каждом r -м шаге которой

$$q_{* k\, r} = W_r(z)\{x_k\},$$

а $W_r(z)$ есть оценка ПФ идентифицируемого объекта с параметрами $a_{0j\, r}$, $j \in [1, n]$. При $r = 0$ в качестве начальных условий используются МНК-оценки $a_{0j\, 0}$, полученные обычным МНК.

Модельные исследования метода линейного фильтра показывают незначительное уменьшение степени корреляции инструментальной переменной как с сигналом u_{*k}, так и с обобщенной помехой δv_k, и в этом смысле метод линейного фильтра обладает преимуществом по сравнению с методом сдвига. Однако сходимость итерационной процедуры метода линейного фильтра не доказана и уменьшение ошибки идентификации от влияния неизмеримого вектора обобщенной помехи носит случайный характер при изменении количества итераций.

8. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ МОДЕЛИ

8.1. ГРАДИЕНТНЫЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ МОДЕЛИ

Структурная схема системы идентификации с градиентной самонастраивающейся моделью (ГСМ) приведена на рис. 8.1.

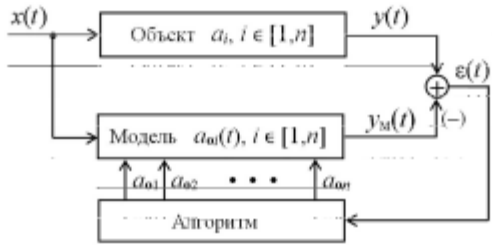

Рис. 8.1

Априори предполагается, что существует

$$a_{0i}^{(1)}(t) = -K_i \frac{\partial J\{\varepsilon(t)\}}{\partial a_{0i}(t)},\ i \in [1,\ n],\ K_i > 0, \qquad (8.1)$$

где J – выбираемый критерий настройки модели по параметрам $a_{0i}(t)$.

Если предположение (8.1) выполняется, то алгоритм идентификации (подстройки параметров модели к параметрам объекта) имеет вид

$$a_{0i}(t) = a_{0i}(0) - K_i \int_0^t \frac{\partial J\{\varepsilon(\tau)\}}{\partial a_{0i}(\tau)}\, d\tau,\ i \in [1,\ n], \qquad (8.2)$$

где $a_{0i}(0),\ i \in [1,\ n]$ – задаваемые начальные условия параметров модели.

В качестве иллюстрации функционирования ГСМ рассмотрим пример.

Пусть идентифицируемый объект описывается уравнением

$$\sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(t) = x(t).$$

Дифференциальное уравнение модели

$$\sum_{i=1}^{n} a_{oi}(t) y_{м}^{(i-1)}(t) = x(t).$$

Критерий настройки параметров модели к параметрам объекта выберем в виде

$$J\{\varepsilon(t) = y(t) - y_{м}(t)\} = \frac{1}{2} \int_{t-T}^{t} \varepsilon^2(\tau) d\tau.$$

Тогда в предположении, что на интервале длительностью T (этапе подстройки параметров модели)

$$a_{oi}(t) \approx \text{const}, \quad i \in [1, n],$$

можно записать

$$\frac{\partial J}{\partial a_{oi}} = \int_{t-T}^{t} \varepsilon(\tau)[-u_i(\tau)] d\tau,$$

где

$$u_i(\tau) = \frac{\partial y_{м}(\tau)}{\partial a_{oi}(\tau)}, \; i \in [1, n],$$

называются функциями чувствительности модели по ее параметрам и представляют собой решение дифференциального уравнения чувствительности

$$\sum_{j=1}^{n} a_{oj}(t) u_i^{(j-1)}(t) = -y_{м}^{(i-1)}(t), \; i \in [1, n],$$

с нулевыми начальными условиями

$$u_i^{(j-1)}(0) = 0, \quad j \in [1, n-1].$$

При этом алгоритм идентификации (8.2) принимает вид

$$a_{0i}(t) = a_{0i}(0) + K_i \int_0^t \int_{\tau-T}^{\tau} \varepsilon(\xi) u_i(\xi)\, d\xi\, d\tau, \; i \in [1, n].$$

Корректирующими параметрами алгоритма являются время усреднения T, коэффициенты K_i, $i \in [1, n]$, корректирующие динамику системы, начальные условия $a_{0i}(0)$, $i \in [1, n]$.

Начальные условия следует выбирать из физических соображений при оценивании параметров объекта в каждом конкретном случае.

Что касается коэффициентов K_i, $i \in [1, n]$, то они представляют собой некий аналог коэффициентов усиления систем управления и в общем случае их можно положить равными единице.

К параметру T предъявляются противоречивые требования, что создает проблему его выбора. С одной стороны необходимо выполнять условие $a_{0i}(t) \approx \text{const}$, $i \in [1, n]$, на интервале T и с этой точки зрения длительность T следует уменьшать. Чем меньше T, тем меньше ошибка фиксации оценок модели на этом интервале. С другой стороны, интегральный оператор на интервале интегрирования $[0, T]$ сглаживает (усредняет) помехи, искажающие сигналы при их измерении. Поэтому каких-то конкретных рекомендаций по выбору параметра T нет.

Достоинство ГСМ в том, что это система замкнутого типа и если выходной сигнал $y(t)$ объекта искажен центрированной и не коррелирующей с $y(t)$ помехой $\delta y(t)$, то ее наличие не приводит к смещенности оценок $a_{0i}(t)$, $i \in [1, n]$.

Недостатки ГСМ

1. ГСМ описываются системой нелинейных, нестационарных, интегродифференциальных уравнений, заданных в неявном виде, и потому не представляется возможным провести необходимый теоретический анализ не только точности и быстродействия, но даже устойчивости.

2. Как правило, критерии настройки J – не унимодальные и потому сходимость параметров модели $a_{0i}(t)$ к параметрам объекта a_i,

$i \in [1, n]$, будет иметь место, если начальные условия $a_{oi}(0)$, $i \in [1, n]$, достаточно близки к параметрам объекта a_i, $i \in [1, n]$, а это связано с необходимостью дополнительной априорной информации.

3. Функции чувствительности $u_i(t)$ являются функциональными производными, и их определение через модели чувствительности справедливо только при очень медленном изменении параметров модели $a_{oi}(t)$, $i \in [1, n]$. Поэтому ГСМ имеют принципиально низкое быстродействие.

4. ГСМ характеризуются сильной взаимной связью между каналами идентификации. Поэтому с увеличением количества n подстраиваемых параметров быстродействие резко падает.

8.2. НЕГРАДИЕНТНЫЕ САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ МОДЕЛИ

Структурная схема системы идентификации с неградиентной самонастраивающейся моделью (НГСМ) показана на рис. 8.2.

Пусть объект описывается уравнением

$$y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_i y^{(i-1)}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_i x^{(i-1)}(t). \qquad (8.3)$$

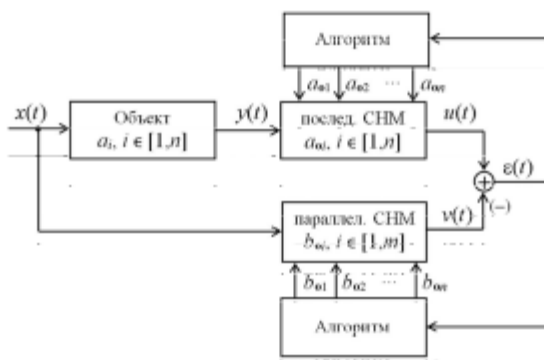

Рис. 8.2

Последовательная модель имеет вид

$$u^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i u^{(i-1)}(t) = y^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} a_{0i}(t) y^{(i-1)}(t), \qquad (8.4)$$

а параллельная –

$$v^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i v^{(i-1)}(t) = \sum_{i=1}^{m} b_{0i}(t) x^{(i-1)}(t). \qquad (8.5)$$

Коэффициенты $c_i > 0$, $i \in [1, n]$, последовательной и параллельной моделей задаются априори из условия их устойчивости, а при необходимости и из дополнительных условий, например, обеспечения требуемой полосы пропускания параллельной модели для сглаживания помех $\delta x(t)$.

Если ввести в рассмотрение рассогласование

$$\varepsilon(t) = u(t) - v(t),$$

ошибку по параметрам последовательной модели

$$e_{a_i}(t) = a_i - a_{0i}(t), \ i \in [1, n],$$

ошибку по параметрам параллельной модели

$$e_{b_i}(t) = b_i - b_{0i}(t), \ i \in [1, m],$$

то динамику НГСМ можно будет описать системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} e_{a_i}^{(1)} = f_{a_i}[e_{a_i}, e_{b_i}], \ i \in [1, n], \\ e_{b_i}^{(1)} = f_{b_i}[e_{a_i}, e_{b_i}], \ i \in [1, m]. \end{cases}$$

Алгоритм идентификации синтезируется из условий устойчивости

$$\lim_{t \to \infty} e_{a_i}(t) = 0 \ \text{ и } \ \lim_{t \to \infty} e_{b_i}(t) = 0,$$

а в качестве критерия устойчивости можно использовать, например, второй метод Ляпунова или метод гиперустойчивости Попова.

При использовании второго метода Ляпунова выбирается функция Ляпунова, например, в виде

$$V(t)=\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{n}K_{a_i}e_{a_i}^2(t)+\sum_{i=1}^{m}K_{b_i}e_{b_i}^2(t)\right]>0\,, \tag{8.6}$$

где K_{a_i} и K_{b_i} определяют скорость сходимости алгоритма и задаются из условия коррекции динамики системы идентификации, причем $K_{a_i}>0$, $i\in[1,n]$, $K_{b_i}>0$, $i\in[1,m]$, и в частности их можно положить равными единице.

Согласно критерию Ляпунова устойчивость будет иметь место, если

$$W(t)=\frac{dV(t)}{dt}<0\,. \tag{8.7}$$

Определим вспомогательную функцию $q(t)$, которая получается при почленном вычитании уравнения (8.5) из уравнения (8.4):

$$q(t)=\varepsilon^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}c_i\varepsilon^{(i-1)}(t)=$$

$$=y^{(n)}(t)+\sum_{i=1}^{n}a_{oi}(t)y^{(i-1)}(t)-\sum_{i=1}^{m}b_{oi}(t)x^{(i-1)}(t)\,.$$

В полученном выражении заменим

$$a_{oi}(t)=a_i-e_{a_i}(t)\,,\ b_{oi}(t)=b_i-e_{b_i}(t)$$

и после несложных преобразований получим

$$q(t)=-\sum_{i=1}^{n}e_{a_i}(t)y^{(i-1)}(t)+\sum_{i=1}^{m}e_{b_i}(t)x^{(i-1)}(t)\,. \tag{8.8}$$

Теперь условие устойчивости (8.7) представим в виде

$$W(t)=\frac{dV(t)}{dt}<-q^2(t)\,. \tag{8.9}$$

Определим

$$\frac{dV(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{n} K_{a_i} e_{a_i}(t) e_{a_i}^{(1)}(t) + \sum_{i=1}^{m} K_{b_j} e_{b_j}(t) e_{b_j}^{(1)}(t) \qquad (8.10)$$

и

$$-q^2(t) = \sum_{i=1}^{n} e_{a_i}(t) y^{(i-1)}(t) q(t) - \sum_{i=1}^{m} e_{b_i}(t) x^{(i-1)}(t) q(t). \qquad (8.11)$$

Согласно (8.9) приравняем в левой и правой части выражений (8.10) и (8.11) слагаемые при одинаковых ошибках $e_{a_i}(t)$ и $e_{b_i}(t)$. Получим

$$e_{a_i}^{(1)}(t) = \frac{1}{K_{a_i}} y^{(i-1)}(t) q(t), \; i \in [1, n],$$

$$e_{b_i}^{(1)}(t) = -\frac{1}{K_{b_i}} x^{(i-1)}(t) q(t), \; i \in [1, m],$$

откуда, имея в виду, что

$$e_{a_i}(t) = a_i - a_{oi}(t), \; i \in [1, n], \quad \text{и} \quad e_{b_i}(t) = b_i - b_{oi}(t), \quad i \in [1, m],$$

а следовательно,

$$a_{oi}^{(1)}(t) = [a_i - e_{a_i}(t)]^{(1)} = -e_{a_i}^{(1)}(t), \; i \in [1, n],$$

$$b_{oi}^{(1)}(t) = [b_i - e_{b_i}(t)]^{(1)} = -e_{b_i}^{(1)}(t), \; i \in [1, m],$$

получим алгоритм идентификации

$$a_{oi}(t) = a_{oi}(0) - \frac{1}{K_{a_i}} \int_0^t y^{(i-1)}(\tau) q(\tau) \, d\tau, \; i \in [1, n],$$

$$b_{oi}(t) = b_{oi}(0) + \frac{1}{K_{b_i}} \int_0^t x^{(i-1)}(\tau) q(\tau) \, d\tau, \; i \in [1, m].$$

Функцию $q(t)$ можно определить выражением

$$q(t) = \varepsilon^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \varepsilon^{(i-1)}(t).$$

Достоинством НГСМ является гарантия сходимости оценок $a_{0i}(t)$, $b_{0i}(t)$ к параметрам a_i, b_i объекта при любых начальных условиях в отсутствие помех.

Недостатки

1. НГСМ описывается системой нелинейных, нестационарных, дифференциальных уравнений, заданных в неявной форме, поэтому невозможно провести теоретический анализ точности и быстродействия алгоритма.

2. В алгоритм идентификации входят все производные входного и выходного сигналов объекта. Возникает необходимость их измерения.

3. Решение модельных задач иллюстрирует низкое быстродействие НГСМ, которое с увеличением n или m резко падает.

4. Отсутствует сглаживание высокочастотных составляющих помехи $\delta y(t)$ из-за одинаковых порядков n левой и правой части уравнения последовательной модели.

9. ОЦЕНИВАНИЕ РАСШИРЕННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ

Пусть объект описывается нелинейной системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{y}^{(1)}(t) = \mathbf{f}[\mathbf{y}(t), \mathbf{a}, x(t)], \\ \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \qquad t \in [0, T]. \end{cases} \tag{9.1}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \left[y_i(t), \quad i \in [1, m] \right], \\ \mathbf{a} \quad &= \left[a_i, \quad i \in [1, n] \right], \\ \mathbf{f} \quad &= \left[f_i, \quad i \in [1, m] \right]. \end{aligned}$$

Входной $x(t)$ и выходной $y(t) = y_1(t)$ сигналы измеряются на интервале наблюдения $t \in [0, T]$. Для записи расширенного вектора состояния проделаем некоторые преобразования.

Переведем искомые параметры a_i, $i \in [1, n]$, в разряд переменных состояния объекта и дополним систему (9.1) новой системой дифференциальных уравнений, которая имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{a}^{(1)}(t) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{a} \quad (0) = \mathbf{a}. \end{cases} \tag{9.2}$$

Затем введем обозначения:

$$v_i(t) = \begin{cases} y_i(t), & i \in [1, m], \\ a_{(i-m)}, & i \in [m+1, m+n], \end{cases} \qquad g_i = \begin{cases} f_i, & i \in [1, m], \\ 0, & i \in [m+1, m+n]. \end{cases}$$

При этом

$$\mathbf{v}(t) = [v_i(t),\ i \in 1, m+n], \qquad \mathbf{g} = [g_i,\ i \in 1, m+n].$$

В результате система нелинейных дифференциальных уравнений относительно расширенного вектора состояния объекта $\mathbf{v}(t)$, объединяющая системы (9.1) и (9.2), может быть представлена в виде

$$\begin{cases} \mathbf{v}^{(1)}(t) = \mathbf{g}[\mathbf{v}(t),\ t], \\ \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0. \end{cases} \tag{9.3}$$

Решение системы (9.3) можно отыскать, например, методом квазилинеаризации или инвариантного погружения. Рассмотрим первый из них.

Метод квазилинеаризации представляет собой итерационную процедуру, на каждом r-м шаге которой ($r = 1, 2, 3, \ldots$) вычисляется r-я оценка $\mathbf{v}_r(t)$ вектора $\mathbf{v}(t)$ посредством решения некоторой системы линейных алгебраических уравнений. Эта система получается при аппроксимации функции $\mathbf{g}[\mathbf{v}(t),\ t]$ рядом Тейлора в окрестности $\mathbf{v}(t)$. Полагая $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_r(t)$ и учитывая только линейную часть ряда Тейлора, можно перейти от нелинейной дифференциальной системы (9.3) к линеаризованной системе алгебраических уравнений вида

$$\mathbf{v}_r^{(1)}(t) = \mathbf{G}_{(r-1)}(t)\mathbf{v}_r(t) +$$

$$+\mathbf{g}[\mathbf{v}_{(r-1)}(t), t] - \mathbf{G}_{(r-1)}(t)\mathbf{v}_{(r-1)}(t), \tag{9.4}$$

где

$$\mathbf{G}_{(r-1)}(t) = \left[\frac{\partial g_i}{\partial v_j},\quad i,\ j \in [1, m+n]\right]_{\mathbf{v}=\mathbf{v}_{(r-1)}}. \tag{9.5}$$

Формально решение системы (9.4) может быть представлено как

$$\mathbf{v}_r(t) = \mathbf{V}_{(r-1)}(t)\mathbf{v}_r(0) + \mathbf{p}_{(r-1)}(t), \tag{9.6}$$

где матрица $\mathbf{V}_{(r-1)}(t)$ является решением однородной матричной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{(1)}_{(r-1)} = \mathbf{G}_{(r-1)}(t)\mathbf{V}_{(r-1)}(t), \\ \mathbf{V}^{(0)}_{(r-1)} = \mathbf{E}, \end{cases} \tag{9.7}$$

а вектор $\mathbf{p}_{(r-1)}(t)$ представляет собой решение неоднородной дифференциальной системы

$$\begin{cases} \mathbf{p}^{(1)}_{(r-1)}(t) = \mathbf{G}_{(r-1)}(t)\mathbf{p}_{(r-1)}(t) + \mathbf{g}[\mathbf{v}_{(r-1)}(t), t] - \mathbf{G}_{(r-1)}(t)\mathbf{v}_{(r-1)}(t), \\ \mathbf{p}^{(0)}_{(r-1)} = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{9.8}$$

Предполагаем, что метод квазилинеаризации сходится, т. е. имеет место

$$\lim_{r\to\infty} \mathbf{v}_r(t) = \mathbf{v}(t).$$

Тогда при $r = \infty$ будем иметь

$$a_i = v_{(m+i)}(0) = v_{\infty(m+i)}, \; i \in [1, n],$$

а при $r = R$ (R – количество итераций)

$$a_i \approx v_{R(m+i)}(0), \quad i \in [1, n].$$

Поэтапно метод квазилинеаризации выглядит следующим образом.

На основании некоторых физических соображений задается начальное условие – оценка вектора $\mathbf{v}_0(t)$, а затем организуется итерационная процедура, на каждом r-м, $r \in [1, R]$, шаге которой выполняется ряд операций:

1) формируется матрица $\mathbf{G}_{(r-1)}$ вида (9.5), элементы которой вычисляются как $\partial g_i / \partial v_j$, $i, j \in [1, m+n]$, путем решения уравнения чувствительности;

2) определяется матрица $\mathbf{V}_{(r-1)}(t)$ посредством решения однородной дифференциальной системы (9.7), мерность которой $(m+n)\times$ $\times(m+n)$;

3) вычисляется вектор $\mathbf{p}_{(r-1)}(t)$, представляющий собой решение $(m+n)$-мерной неоднородной системы дифференциальных уравнений (9.8);

4) определяется оценка $\mathbf{v}_r(0)$ и вектора $\mathbf{v}(0)$;

5) вычисляется оценка $\mathbf{v}_r(t)$ по выражению (9.6);

6) вычисляется функционал

$$\Delta v_r = \| \mathbf{v}_r(t) - \mathbf{v}_{(r-1)}(t) \|, \; t \in [0, T],$$

например, вида

$$\Delta v_r = \frac{1}{m+n} \sum_{i=1}^{m+n} \sqrt{\int_0^T \left[v_{ri}(t) - v_{(r-1)i}(t) \right]^2 dt \Big/ \int_0^T v_{ri}^2(t)\, dt};$$

7) производится сравнение вычисленного значения Δv_r с наперед задаваемой величиной Δv и выносится соответствующее решение:

- при $\Delta v_r > \delta v$ осуществляется переход на следующий $(r+1)$-й шаг,
- при $\Delta v_r \le \delta v$ производится останов итерационной процедуры и принимается

$$R = r,$$

$$\tilde{a}_i = v_{R(m+i)}(0), \; i \in [1, n],$$

$$\tilde{y}_i(t) = v_{Ri}, \; i \in [1, m].$$

В заключение следует отметить, что оценка $\mathbf{v}_r(0)$ начальных условий $\mathbf{v}(0)$ (см. п. 4) находится на основе первого уравнения системы (9.4), которое в развернутом виде выглядит как

$$v_{r1}(t) = y_r(t) = \sum_{j=1}^{m+n} v_{(r-1)1\,j}(t)\, v_{rj}(0) + p_{(r-1)j}(t)$$

и представляет собой r-ю оценку выходного сигнала объекта. Причем, поскольку $v_{r\,j}(0), \; j \in [1, m]$, задаются априори ($v_{r\,j}(0) = y_{j0}$, $j \in [1, m]$), необходимо отыскать только n начальных условий $v_{r\,j}(0)$,

$j \in [m+1,\ m+n]$. Эту задачу можно решить из условия минимизации функционала

$$J = \int_0^T [y(t) - y_r(t)]^2 dt = \int_0^T \left[y(t) - \sum_{j=1}^{m+n} v_{(r-1)j}(t) v_{rj}(0) - p_{(r-1)1}(t) \right]^2 dt$$

путем исследования его на экстремум, а именно

$$\frac{\partial J}{\partial v_{rj}(0)} = 0\,,\ \ j \in [m+1,\ m+n]\,.$$

В результате приходим к необходимости решать систему n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^{m+n} \int_0^T v_{(r-1)j}(t) v_{(r-1)i}(t)\, dt\, v_{rj}(0) =$$

$$= \int_0^T \left[y(t) - \sum_{j=1}^{m} v_{(r-1)j}(t) v_{rj}(0) - p_{(r-1)1}(t) \right] v_{(r-1)i}(t)\, dt\,,\ \ i \in [m+1,\ m+n]\ .$$

Метод квазилинеаризации наряду с оцениванием параметров позволяет оценить при необходимости и вектор состояния нелинейного объекта, а в ряде случаев дополнительно и некоторые характеристики помех, что является достоинством метода.

Однако в общем случае сходимость метода квазилинеаризации не доказана. В результате оценивание расширенного вектора состояния существенно зависит от начальных условий. Исследования показывают, что если начальные условия выбраны достаточно близко, то алгоритм сходится. Кроме того, реализация метода предполагает существенные вычислительные затраты, связанные с формированием и решением обширных систем уравнений, что также негативно характеризует метод линеаризации.

Рассмотрим пример. Объект описывается линейным (для простоты понимания) дифференциальным уравнением

$$y^{(2)}(t) + a_3 y^{(1)}(t) + a_2 y(t) = a_1 x(t)\,,$$

$$y(0) = y_{00},\quad y^{(1)}(0) = y_{10}\,.$$

Эквивалентная система уравнений вида (9.1) с учетом обозначения $y_1(t) = y(t)$ записывается в форме

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(t) = y_2(t), \\ y_2^{(1)}(t) = -a_2 y_1(t) - a_3 y_2(t) + a_1 x(t), \end{cases}$$

а система (9.2) определяется выражением

$$\begin{cases} a_1^{(1)}(t) = 0, \\ a_2^{(1)}(t) = 0, \\ a_3^{(1)}(t) = 0. \end{cases}$$

Вводя обозначения

$$\begin{cases} v_1(t) = y_1(t) = y(t), \\ v_2(t) = y_2(t), \\ v_3(t) = a_1, \\ v_4(t) = a_2, \\ v_5(t) = a_3, \end{cases}$$

представим систему (9.3) в виде

$$\begin{cases} v_1^{(1)}(t) = g_1 = v_2(t), \\ v_2^{(1)}(t) = g_2 = -v_4(t)v_1(t) - v_5(t)v_2(t) + v_3(t)x(t), \\ v_3^{(1)}(t) = g_3 = 0, \\ v_4^{(1)}(t) = g_4 = 0, \\ v_5^{(1)}(t) = g_5 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1(0) = y_{00}, \\ v_2(0) = y_{10}, \end{cases}$$

или

$$\mathbf{v}^{(1)}(t) = \mathbf{g}[v(t), t],$$

$$\mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0 .$$

Решение этой линейной системы в соответствии с (9.6) (система уравнений (9.4) нелинейная) будет

$$\mathbf{v}_r(t) = \mathbf{V}_{(r-1)}(t)\mathbf{v}_r(0) .$$

Для определения матрицы $\mathbf{V}_{(r-1)}(t)$ необходимо решить систему (9.7), а это в свою очередь требует формирования матрицы $\mathbf{G}_{(r-1)}(t)$ согласно (9.5)

$$\mathbf{G}_{(r-1)}(t) =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial a_1} & \dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial a_2} & \dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial a_3} \\ -a_2 - a_3 - a_2\dfrac{\partial y}{\partial a_1} - a_3\dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial a_1} + x(t) - y(t) & & & -a_2\dfrac{\partial y}{\partial a_2} - a_3\dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial a_2} & -a_2\dfrac{\partial y}{\partial a_3} - y^{(1)}(t) - a_3\dfrac{\partial y^{(1)}}{\partial a_3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$y(t) = y_{(r-1)}(t),\ y^{(1)}(t) = y^{(1)}_{(r-1)}(t),$$

$$a_1 = a_{(r-1)1}(t),\ a_2 = a_{(r-1)2}(t),\ a_3 = a_{(r-1)3}(t) .$$

Уравнения чувствительности:

1) $u_1^{(2)}(t) + a_3 u_1^{(1)}(t) + a_2 u_1(t) = x(t)$ при

$$a_2 = a_{(r-2)}(0),\ a_3 = a_{(r-3)}(0) ;$$

2) $u_2^{(2)}(t) + a_3 u_2^{(1)}(t) + a_2 u_2(t) = -y(t)$ при

$$a_2 = a_{(r-2)}(0),\ a_3 = a_{(r-3)}(0),\ y(t) = y_{(r-1)}(t) ;$$

3) $u_3^{(2)}(t)+a_3u_3^{(1)}(t)+a_2u_3(t)=-y^{(1)}(t)$ при

$$a_2=a_{(r-2)}(0),\ a_3=a_{(r-3)}(0)\ ,\ y^{(1)}(t)=y_{(r-1)}^{(1)}(t)\ .$$

$$\begin{vmatrix} v_{11}^{(1)} & v_{12}^{(1)} & v_{13}^{(1)} & v_{14}^{(1)} & v_{15}^{(1)} \\ v_{21}^{(1)} & v_{22}^{(1)} & v_{23}^{(1)} & v_{24}^{(1)} & v_{25}^{(1)} \\ v_{31}^{(1)} & v_{32}^{(1)} & v_{33}^{(1)} & v_{34}^{(1)} & v_{35}^{(1)} \\ v_{41}^{(1)} & v_{42}^{(1)} & v_{43}^{(1)} & v_{44}^{(1)} & v_{45}^{(1)} \\ v_{51}^{(1)} & v_{52}^{(1)} & v_{53}^{(1)} & v_{54}^{(1)} & v_{55}^{(1)} \end{vmatrix} =$$

$$\mathbf{V}_{(r-1)}^{(1)}(t)$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 1 & u_1^{(1)} & u_2^{(1)} & u_3^{(1)} \\ -\tilde{a}_2 & -\tilde{a}_3 & -\tilde{a}_2u_1-a_3u_1^{(1)}+x & -\tilde{a}_2u_2-\tilde{a}_3u_2^{(1)}-\tilde{y} & -\tilde{a}_2u_3-a_3u_3^{(1)}-\tilde{y}^{(1)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times$$

$$\mathbf{G}_{(r-1)}(t)$$

$$\times \begin{vmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} & v_{15} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} & v_{25} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} & v_{35} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} & v_{45} \\ v_{51} & v_{52} & v_{53} & v_{54} & v_{55} \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{V}_{(r-1)}(t)$$

$$\mathbf{V}_{(r-1)}(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Это и есть система (9.7) в развернутом виде для рассматриваемого примера, решение которой

$$\mathbf{V}_{(r-1)}(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} & \mathbf{x} \\ 0 & 0 & \mathbf{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{x} \end{vmatrix}.$$

10. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ

Пусть объект описывается уравнением

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(t) u_j(t) = u_0(t). \qquad (10.1)$$

Это может быть линейный объект

$$y^{(l)}(t) + \sum_{j=1}^{l} a_j(t) y^{(j-1)}(t) = \sum_{j=1}^{m+1} b_j(t) x^{(j-1)}(t),$$

причем координаты

$$u_j(t) = u_j\left[y^{(i)}(t),\ i \in [0, l],\ x^{(i)}(t), i \in [0, m] \right],\ j \in [1, n],$$

или нелинейный по координатам, но линейный по параметрам, например, объект, описываемый уравнением типа Риккати

$$y^{(1)}(t) + a_1(t) y^2(t) + a_2 y(t) = a_3(t).$$

Структура объекта (порядок n) известна.

Координаты $u_j(t) \in C[0, \infty),\ j \in [0, n]$, доступны измерению (обычно с помехами $\delta u_j(t)$) и представляют собой линейно независимые функции.

Предполагаются известными нижняя ω_u и верхняя Ω_u граничные частоты эффективной полосы спектра координат объекта и максимальная частота

$$\Omega_{a\max} = \max_{j \in [1, n]} \Omega_{a_j}$$

спектра идентифицируемых параметров, которую можно грубо оценить из физических законов функционирования идентифицируемого объекта.

Ставится задача текущей идентификации параметров

$$a_j(t) \in C[0, \infty), \ j \in [1, n].$$

Решение ее базируется на формировании системы $m \geq n$ уравнений, например, путем воздействия на уравнение (10.1) совокупности интегральных операторов Вольтерра с ядрами $w_i(t, \tau)$, $i \in [1, m]$.

В результате будем иметь

$$\int_0^t \mathbf{H}(t, \tau)\mathbf{a}(\tau)\, d\tau = \mathbf{v}(t), \tag{10.2}$$

где $\mathbf{a}(t) = \left[a_j(t), \ j \in [1, n] \right]$,

$$\mathbf{H}(t, \tau) = \left[h_{ij}(t, \tau) = w_i(t, \tau) u_j(\tau), \ j \in [1, n], \ i \in [1, m] \right],$$

$$\mathbf{v}(t) = \left[u_{0i}(t) = \int_0^t w_i(t, \tau) u_0(\tau)\, d\tau, \quad i \in [1, m] \right].$$

На функции $w_i(t, \tau)$ накладывается условие финитности, т. е.

$$w_i(t, \tau) = 0 \ \text{ при } \ \tau > T, \tag{10.3}$$

где T – некоторая конечная фиксированная величина.

Решение интегрального уравнения Вольтерра (10.2) представляет собой некорректную задачу, и известные методы, в том числе и регуляризация по А.Н. Тихонову, оказываются мало пригодными в условиях текущей идентификации.

Для решения системы (10.2) предлагается метод, в основе которого лежит представление идентифицируемых параметров на скользящем интервале времени $[t - T, \ t]$ в виде обобщенного ряда

$$a_j(t) = \sum_{r=0}^{l} c_{rj}(t) \varphi_r(t, \tau) + R_{lj}(t, \tau), \ \tau \in [t - T, t], \tag{10.4}$$

где $c_{rj}(t)$ – коэффициенты приближения (нестационарные спектральные характеристики); $\varphi_r(t,\tau)$ – базисные функции обобщенного ряда; $R_{lj}(t,\tau)$ – остаточный член обобщенного ряда.

С учетом (10.3) система (10.2) представляется как

$$\int_{t-T}^{t} \mathbf{H}(t,\tau)\mathbf{a}(\tau)\,d\tau = \mathbf{v}(t)\,. \tag{10.5}$$

Подставив (10.4) в (10.5), получим эквивалентную систему алгебраических уравнений относительно нестационарных спектральных характеристик

$$\sum_{r=0}^{l}\sum_{j=1}^{n} c_{rj}(t)\int_{t-T}^{t} w_i(t,\tau)\varphi_r(t,\tau)u_j(\tau)\,d\tau =$$

$$= \int_{t-T}^{t} w_i(t,\tau)u_0(\tau)\,d\tau - \sum_{j=1}^{n}\Delta_{lij}(t)\,,\ i\in[1,\,m(l+1)]\,, \tag{10.6}$$

где $\Delta_{lij}(t) = \int_{t-T}^{t} w_i(t,\tau)R_{lj}(t,\tau)u_j(\tau)\,d\tau$.

Система (10.6) может быть записана в векторно-матричной форме

$$\mathbf{U}_l(t)\mathbf{c}(t) = \mathbf{v}(t) - \mathbf{\Delta}_l(t)\,, \tag{10.7}$$

$$\mathbf{U}_l(t) = \left[\int_{t-T}^{t} w_i(t,\tau)\varphi_r(t,\tau)u_j(\tau)\,d\tau,\ j\in[1,\,n(l+1)],\ i\in[1,\,m(l+1)]\right],$$

$$\mathbf{c}(t) = \left[\mathbf{c}_r(t),\ r\in[1,\ l+1]\right],$$

$$\mathbf{c}_r(t) = \left[c_{rj}(t),\ j\in[1,\ l+1]\right],$$

$$\mathbf{\Delta}_l(t) = \left[\sum_{j=1}^{n}\Delta_{lij}(t),\ i\in[1,\ m(l+1)]\right].$$

Если предположить, что остаточные члены $R_{lj}(t,\tau)$ известны, а следовательно известен и вектор $\mathbf{\Delta}_l(t)$, то при условии невырожденности матрицы $\mathbf{U}_l(t)$ описанная процедура позволит определить истинные параметры $a_j(t)$, $j\in[1,n]$.

Следует отметить основное достоинство описанного подхода к идентификации нестационарных параметров, которое заключается в том, что решение интегральной системы (10.5) сводится к решению линейной алгебраической системы (10.7), формируемой на интервале $[t-T,t]$, а это существенно упрощает задачу, поскольку определяемые из системы (10.7) коэффициенты c_{rj} (вектор $\mathbf{c}(t)$) постоянны на $[t-T,t]$.

Однако при этом имеет место и основной недостаток – существенное увеличение мерности решаемой задачи, так как теперь вместо n параметров $a_j(t)$, $j\in[1,n]$, необходимо определять $n(l+1)$ коэффициентов c_{rj}, $r\in[0,l]$, $j\in[1,n]$.

Реализация алгоритма предполагает решение следующих задач выбора:

1) вида формирующих функций $w_i(t,\tau)$;

2) способа приближенного представления идентифицируемых параметров (обобщенного ряда (10.4));

3) вида базисных функций $\varphi_r(t,\tau)$;

4) способа восстановления параметров $a_j(t)$ по идентифицированным оценкам $c_{rj}(t)$.

Вопрос выбора функций $w_i(t,\tau)$, формирующих систему линейных алгебраических уравнений, обсуждался в разделе 7.1. Аналогичная ситуация имеет место и здесь, т. е. в качестве формирующих функций $w_i(t,\tau)$ следует выбирать ИХ полосовых фильтров с разнесенными полосами пропускания, расположенными в пределах эффективной длительности АЧХ идентифицируемого объекта. Однако в отличие от стационарного случая здесь формирование системы уравнений выполняется на интервале $[t-T,t]$, т. е. длительность T_w ИХ полосового фильтра и длительность T скользящего интервала должны быть согласованы. С точки зрения приближения функций, чем меньше T, тем

меньше ошибка приближения и T надо уменьшать. С другой стороны, длительность T_w ИХ определяет качество АЧХ полосового фильтра, причем, чем больше T_w, тем выше качество АЧХ и с этой точки зрения T_w надо увеличивать. Таким образом, конкретных рекомендаций по выбору T_w пока дать невозможно, по крайней мере, до тех пор, пока не будут обсуждены вопросы реализации способа приближения идентифицируемых параметров, а далее возможны варианты либо выбора по приоритету (что важнее), либо компромиссное решение.

При выборе способа приближенного представления идентифицируемых параметров рассмотрим такие методы теории приближения функций, как интерполирование, наилучшее равномерное приближение, и среднеквадратичную аппроксимацию.

Интерполяционный полином, обеспечивающий минимальную ошибку приближения, есть полином Лагранжа с узлами по Чебышеву.

В качестве одного из вариантов полинома наилучшего равномерного приближения рекомендован интерполяционный полином Лагранжа с узлами по Чебышеву.

Наилучшую среднеквадратичную аппроксимацию обеспечивает обобщенный ряд Фурье с полиномами Чебышева в качестве базисных функций, причем этот ряд в нашем случае обладает не только среднеквадратичной, но и равномерной сходимостью, так как приближаемые функции $a_j(\tau) \in C[t-T, t]$, $j \in [1, n]$.

Таким образом, с точки зрения точности приближения необходимо использовать полиномы Чебышева и в этом смысле различие между способами приближения теряется.

При решении практических задач, когда приближаемая функция представлена в виде зашумленной реализации сигнала, предпочтительнее среднеквадратичная аппроксимация. Во-первых, как теория она имеет наиболее простой и законченный вид. Во-вторых, среднеквадратичная близость, за счет наличия интегрального оператора, учитывает погрешность приближения на всем интервале аппроксимации, а не в точке, а кроме того, интегральный оператор обладает сглаживающими свойствами. Следовательно, представляется целесообразным отдать предпочтение среднеквадратичной аппроксимации, а именно обобщенному ряду Фурье по ортонормированным полиномам Чебышёва первого рода.

Полиномы Чебышёва первого рода $T_r(t)$, $r = 1, 2, 3, ...$, ортонормированы на интервале $[a, b]$ с весом

$$\rho(t) = \frac{b-a}{2\sqrt{[-t^2 + (a+b)t - ab]}}.$$

Вычисление коэффициентов Фурье при аппроксимации функции $f(t)$

$$c_r = \int_a^b \rho(t) f(t) T_r(t)\, dt$$

предполагает использование квадратурных формул с реализацией их на ЦВМ. Однако в точках $t = a$ и $t = b$ весовая функция обращается в ∞, поскольку в этих точках знаменатель $\rho(t)$ равен нулю и вычисление коэффициентов Фурье невозможно. Вручную подобного рода интегралы не берутся, особенно если $f(t)$ задана не в аналитическом виде.

Исследования по использованию другого, близкого к полиномам Чебышева базиса, проиллюстрировали неплохие результаты, когда в качестве ортонормированного базиса использовались близкие по виду и свойствам полиномы Лежандра $\varphi_r(t)$, $r = 1, 2, 3, ...$, ортонормированные на $[a, b]$ с весом $\rho(t) = 1$.

Таким образом, в качестве способа приближения и вида базисных функций использован обобщенный ряд Фурье с базисными функциями Лежандра.

Восстановление идентифицируемых параметров осуществляется по найденным оценкам нестационарных спектральных характеристик (оценкам коэффициентов Фурье). Ошибки определения искомых параметров возникают по следующим причинам.

Во-первых, в условиях задачи идентификации аппроксимируемые функции $a_j(t)$, $j \in [1, n]$, неизвестны, следовательно, неизвестны априори и остаточные члены ряда Фурье $R_{jj}(t, \tau)$. В результате вектор $\mathbf{\Delta}_l(t)$ оказывается неизмеримым, и решать можно только усеченную систему

$$\mathbf{U}_l(t)\mathbf{c}_0(t) = \mathbf{v}(t)\,, \tag{10.8}$$

решение которой $\mathbf{c}_0(t)$ представляет собой оценку вектора $\mathbf{c}(t)$, а значит, удается определить лишь оценки искомых нестационарных параметров

$$a_{0j}(t) = \sum_{r=0}^{l} c_{0rj}(t)\varphi_r(t,\tau)\ ,\ \ j \in [1,\, n]\,.$$

В результате будем иметь методическую погрешность идентификации

$$\mathbf{e}_{\text{мет}}(t) = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}_0(t)\,.$$

Во-вторых, с учетом помех $\delta u_j(t)$, возникающих при измерении сигналов $u_j(t)$, система (10.8) принимает вид

$$\mathbf{U}^{\mathrm{T}}_{l*}(t)\mathbf{U}_{l*}(t)\mathbf{c}_*(t) = \mathbf{U}^{\mathrm{T}}_{l*}(t)\mathbf{v}_*(t)\,, \tag{10.9}$$

где

$$\mathbf{U}_{l*}(t) = \mathbf{U}_l(t) + \Delta\mathbf{U}_l(t)\,,$$

$$\Delta\mathbf{U}_l(t) = \left[\int_{t-T}^{t} w_i(t,\tau)\varphi_r(t,\tau)\delta u_j(\tau)\,d\tau,\ \ j \in [1,\, m(l+1)],\ \ i \in [1,\, m(l+1)]\right],$$

$$\mathbf{v}_*(t) = \mathbf{v}(t) + \Delta\mathbf{v}(t)\,,$$

$$\Delta\mathbf{v}(t) = \left[\int_{t-T}^{t} w_i(t,\tau)\delta u_0(\tau)\,d\tau,\ i \in [1,\, m(l+1)]\right].$$

Восстановление оценок $a_{*j}(t),\ j \in [1,\, n]$, идентифицируемых параметров осуществляется по оценкам $c_{*rj}(t)$ нестационарных спектральных характеристик, полученных в результате решения системы (10.9), причем это восстановление может быть произведено либо сразу на всем интервале аппроксимации, либо в отдельной точке этого интервала. Текущая идентификация предполагает информацию о свойствах и

поведении наблюдаемого объекта в момент T, что представляет собой точку правого конца интервала аппроксимации и логически именно эту точку, казалось бы, необходимо выбирать в качестве точки восстановления. Однако как показывают многочисленные модельные исследования, хорошо вписывающиеся в рамки свойств полиномов Лежандра (впрочем, как и Чебышёва), ошибка идентификации минимальна при восстановлении идентифицируемых параметров в точке

$$\nu = \frac{T}{2}, \tag{10.10}$$

т. е. в середине интервала аппроксимации. Именно в этой точке полиномы Лежандра с нечетными индексами обращаются в нуль, что, вообще говоря, влияет на выбор значения параметра l – количества слагаемых ряда Фурье. Недостатком выбора точки восстановления в виде (10.10) является вносимое в текущую идентификацию запаздывание на величину $T/2$. В результате можно дать следующую рекомендацию по выбору точки ν. Если предъявляются более жесткие требования к информации об объекте именно в текущий момент, пусть даже в ущерб точности этой информации, то следует полагать $\nu = T$. Если же функционирование объекта в том технологическом процессе, в котором он используется, допускает небольшие запаздывания, но требует более точной информации о свойствах объекта, то точку восстановления нужно выбирать в виде (10.10).

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. *Анисимов А.С.* Алгоритмы идентификации импульсной характеристики: учеб. пособие / А.С. Анисимов, Г.П. Чикильдин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996. – 93 с.

2. *Анисимов А.С.* Исследование алгоритмов идентификации импульсной и частотных характеристик / А.С. Анисимов, М.М. Симонов, Г.П. Чикильдин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 1996. – 48 с.

3. *Анисимов А.С.* Алгоритмы преобразования линейных динамических моделей: учеб. пособие / А.С. Анисимов, В.Т. Кононов, Г.П. Чикильдин. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2004. – 146 с.

4. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление: пер. с англ. / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – Вып.1. – 406 с.

5. *Бокс Дж.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление: пер. с англ. / Дж. Бокс, Г. Дженкинс. – М.: Мир, 1974. – Вып. 2. – 200 с.

6. *Гроп Д.* Методы идентификации систем: пер. с англ. / Д. Гроп. – М.: Мир, 1979. – 302 с.

7. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя: пер. с англ. / Л. Льюнг. – М.: Наука, 1991. – 432 с.

8. *Марпл-мл. С.Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения: пер. с англ. / С.Л. Марпл-мл. – М.: Мир, 1990. – 584 с.

9. *Райбман Н.С.* Построение моделей процессов производства / Н.С. Райбман, Чадеев В.М. – М.: Энергия, 1975. – 376 с.

10. Современные методы идентификации систем: пер. с англ. / под ред. П. Эйкхофа. – М.: Мир, 1983. – 400 с.

11. *Тихонов А.Н.* Методы решения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 224 с.

12. *Эйкхоф П.* Основы идентификации систем управления: пер. с англ. / П. Эйкхоф. – М.: Мир, 1975. – 683 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ ОБ ИДЕНТИФИКАЦИИ 3
2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ 6
3. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ (ИХ) 10
3.1. Общие положения 10
3.2. Алгоритмы идентификации на основе МНК 13
3.3. Алгоритмы идентификации на основе РМНК 18
3.4. Алгоритмы идентификации на основе АК 19
4. ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ 21
4.1. Общие положения 21
4.2. Алгоритмы идентификации на основе ММ 23
4.3. Алгоритмы идентификации на основе проекционного МНК 26
4.4. Качественный анализ проекционных методов 28
5. РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЕ МЕТОДЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ 32
5.1. Общие положения 32
5.2. Метод регуляризации А.Н. Тихонова 32
6. СТРУКТУРНАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА 38
6.1. Общие положения 38
6.2. Метод переходных функций 38
6.3. Идентификация структуры посредством *rl*-процедуры 39
6.4. Идентификация структуры по оценке ИХ объекта 41
7. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО ОБЪЕКТА 44
7.1. Идентификация ЛНД-модели 44
7.2. Идентификация ЛДД-модели 49
8. САМОНАСТРАИВАЮЩИЕСЯ МОДЕЛИ 62
8.1. Градиентные самонастраивающиеся модели 62
8.2. Неградиентные самонастраивающиеся модели 65
9. ОЦЕНИВАНИЕ РАСШИРЕННОГО ВЕКТОРА СОСТОЯНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ОБЪЕКТОВ 70
10. ИДЕНТИФИКАЦИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПАРАМЕТРОВ 79
Библиографический список 87