Шарыгин И.Ф.

Геометрия·7

ТЕОРИЯ, ЗАДАЧИ

Экспериментальное учебное пособие для VII класса

МИРОС

МОСКВА 1995

Шарыгин И. Ф. Геометрия 7 (теория, задачи). — М.: МИРОС, 1995. — 442 с.
ISBN 5—7084—0116—8

Данный учебник соответствует по своему содержанию школьной программе по геометрии за VII класс и реализует авторскую концепцию предмета.

Изд. № Ф30(03)
ISBN 5—7084—0116—8

Некоторые методические особенности предлагаемого учебника (вместо предисловия)

Еще в начале XX столетия математики и методисты вели оживленную дискуссию о том, какова роль геометрии в системе математических дисциплин, каким должен быть школьный курс геометрии. Дискуссия эта, то затихая, то разгораясь с особой яростью, прошла через все столетие. И сегодня, когда человечество вот-вот вступит в XXI век, математики и методисты, теоретики и практики вновь и вновь пытаются ответить на старые вопросы. По-прежнему широк разброс мнений: от полного неприятия геометрии, как устаревшего предмета, не соответствующего реалиям компьютерного века, до заявлений о необходимости широкой геометризации всего школьного курса математики, с которыми, кстати признаюсь, неоднократно выступал автор настоящего учебника.

Поскольку эти строки адресованы учителю-практику, я не буду излагать здесь теоретические посылки и рассуждения, обусловившие структуру и содержание курса. В конце концов, речь идет не об авторском замысле, а о его реализации. И если вдумчивый учитель, приняв учебник и разобравшись в нем, сможет увидеть и исходные теоретические позиции, то это уже хотя бы отчасти будет свидетельствовать об авторской удаче.

Первая глава носит вводный характер. Происходит переход от реального мира, реальных трехмерных тел к геометрическим абстракциям: поверхностям, линиям и точкам, к плоским фигурам. Обсуждается также и другая схема: точка, затем траектория движения точки—линия, линии «заметают» двумерные фигуры, после чего мы выходим в трехмерное пространство, получаем тела. Геометрические объекты, формы рассматриваются как бы с двух точек зрения: как готовая форма (статический подход) и как результат — траектория — некоего движения (кинематический подход). Именно с этих двух точек зрения мы и будем изучать важнейшие геометрические формы и прежде всего прямую и окружность.

Следует обратить внимание на следующее обстоятельство. Сложившееся в нашей литературе расширенное понимание термина «фигура», когда под фигурой понимается любое множество точек, мне представляется педагогически не совсем оправданным. С точки зрения обыденного сознания фигура — это все же плоско-протяженный объект, нечто, имеющее контур. А раз так, то не следует вступать в борьбу с этим обыденным пониманием, тем более, что вопрос этот отнюдь не принципиален. По этой же причине (непринципиальности) в учебнике вообще отсутствует строгое определение понятия фигуры. Такая же позиция уклончивости при определении и некоторых элементарных геометрических объектов (таких, как луч, отрезок, угол и т. д.) сохраняется в учебнике и в следующих главах. Дело в том, что строгое, формализованное определение того или иного геометрического объекта может в дальнейшем оказаться тормозом в развитии геометрической теории. (Следует подчеркнуть, что такой подход имеет место лишь по отношению к небольшому числу конкретных начальных понятий геометрии.)

В первой главе мы вводим также понятие равенства геометрических тел, фигур, понимая под равными такие геометрические фигуры и тела, которые могут быть совмещены в пространстве.

Одной из важнейших задач, решаемых в первой главе, является задача развития интереса к геометрии. Не секрет, что сегодня у многих школьников достаточно быстро пропадает интерес к изучению геометрии. Одна из причин, как мне кажется, состоит в том, что самые первые уроки геометрии не оправдывают их ожиданий. Отсутствие новой, полезной информации, необходимость доказывать очевидные вещи, заучивать малопонятные определения, делать элементарные чертежи, доступные ученику начальной школы, решать задачи на отработку формальных определений,—все это способно умерить пыл самых отъявленных энтузиастов. И вот первая глава должна помочь нам втянуть ученика в полноценный учебный процесс, заинтересовать его геометрией. Основными средствами, помогающими нам в достижении этих целей, являются интересные, занимательные задачи, красивые чертежи-картинки, разнообразная самостоятельная изобразительная деятельность. Очень хорошо, если учитель сможет по-

полнить список задач и упражнений, предложенных в учебнике, интересными заданиями, где-то найденными или самостоятельно придуманными.

Со второй главы начинается собственно курс геометрии, а точнее,—планиметрии. Одной из характерных особенностей здесь является отказ, а возможно, лишь попытка отказа от аксиоматического подхода (нелегко выдавить из себя раба). Начинается он с того, что вместо термина «аксиома» используется понятие «основное свойство плоскости». На первый взгляд, это всего лишь своеобразный эвфемизм,—замена несколько скомпрометированного термина (наподобие термина «множество») другим, более привычным неискушенному уху. И все же в этой замене, по мнению автора, есть и более глубокий смысл. Тем самым мы как бы снимаем определенную логическую напряженность, чрезмерные логические обязательства, сопровождающие применение аксиоматического метода, и кроме того, подчеркиваем естественно-научную основу курса геометрии, получаем право более широко использовать апелляции к наглядности в дальнейших рассуждениях, при доказательстве теорем.

В первом параграфе второй главы изучается геометрия прямой линии, а лучше сказать, систематизируются знания, напоминается терминология, имеющие отношение к прямой линии. В связи с прямой линией я хотел бы рассмотреть один пример, частично объясняющий и оправдывающий некоторые формально-логические вольности, имеющиеся в учебнике. Рассмотрим вопрос: «Можно ли прямую линию разделить на два луча?» Как ни определяй понятие «луч», ответ один: «Нельзя». Либо какая-то точка прямой будет двойной, либо мы получим прямую с выколотой точкой. И все же лучше на такой вопрос отвечать иначе: «Прямую линию можно разбить на два луча с общим началом». Тем, кто не доволен таким ответом, я предлагаю подумать над следующим вопросом: «Можно ли треугольник разрезать на два треугольника?» А ведь задач, в условиях которых описывается эта или подобная ситуация, достаточно много. Получается, что на прямую, лучи, отрезки мы смотрим с теоретико-множественной точки зрения, а на треугольники и иные собственно-плоские фигуры—с другой и, по моему мнению, более содержательной и геометрической точки зрения.

В основном вторая глава носит теоретическо-информационный характер. В ней формулируются основные свойства плоскости, определяются некоторые важнейшие геометрические понятия. К характерным особенностям, вероятно, надо отнести следующие: появление на ранней стадии такого понятия, как осевая (зеркальная) симметрия на плоскости; определение угла и многоугольников как частей плоскости. При этом мы не ограничиваемся рассмотрением лишь выпуклых многоугольников. Очень важно, что уже во второй главе в курсе появляются окружность и круг. И в дальнейшем треугольник и окружность будут все время выступать в качестве главных персонажей курса, практически не уходя со сцены.

Располагая таким инструментом, как осевая симметрия, мы можем уже во второй главе доказать ряд вполне содержательных теорем, относящихся к перпендикулярным прямым и окружностям.

В третьей главе делается несколько достаточно стандартных шагов в развитие геометрической теории: доказываются свойства равнобедренного треугольника и признаки равенства треугольников. Здесь стоит заметить, что свойства равнобедренного треугольника сразу, без потери времени и в соответствии с авторской идеологией, трансформируются в соответствующие свойства хорд в окружности. Кроме того, в этой главе изучается одна часто встречающаяся в геометрических задачах ситуация: треугольник, в котором заданы две стороны и угол не между ними. Из рассмотрения этой ситуации, в частности, получается специальный признак равенства прямоугольных треугольников.

Заканчивается третья глава параграфом, в котором изучаются некоторые неравенства, связанные с треугольником, в частности, неравенство треугольника. Затем полученная теория используется для изучения геометрических ситуаций, в которых имеет место касание окружности с прямой, а также двух окружностей между собой. Как известно, далеко не все выпускники средней школы четко понимают, что касание двух окружностей означает равенство расстояния между их центрами сумме или разности радиусов этих окружностей, а ведь этот факт основан на теории, входящей в программу седьмого класса.

В четвертой, завершающей седьмой класс, главе практически никакого развития теории не происходит. Материал этой главы носит большей частью повторительный характер. В начале рассматриваются несколько классических и традиционных задач на геометрические места точек и на построение. Знание осевой симметрии дает нам возможность решить одну известную задачу на нахождение кратчайшего пути между двумя точками (задачу, относящуюся к золотому фонду геометрии), причем не только решить, но и показать общий метод, часто используемый при решении подобных задач.

И если только что отмеченная задача рассматривается в самых различных школьных учебниках, то следующий параграф, в котором обсуждаются методы решения геометрических задач, в частности, задач на вычисление, несколько выходит за рамки содержания, традиционного для школьных учебников. И это обстоятельство я бы хотел особо подчеркнуть. Я считаю, что обучение методам решения геометрических задач является важнейшей целью геометрического обучения, а поэтому в курсе геометрии, в учебнике по геометрии надо не только выстраивать теорию, но и изучать методы решения геометрических задач. Последний параграф четвертой главы, а вместе с тем последний параграф учебника для седьмого класса посвящен изучению методов доказательства, применяемых в геометрии. Просматривая теоремы и утверждения нашего курса, мы одновременно и повторяем теорию, и глубже вникаем в методы доказательства теорем нашего курса. Дополняют этот ретроспективный обзор два примера, демонстрирующие типичные и достаточно замаскированные ошибки, встречающиеся в геометрических рассуждениях.

Существенной составной частью учебника является система задач. На это, кстати, указывают слова в подзаголовке: «теория и задачи». Именно в задачах, начиная со второй главы, продолжается тема трехмерного пространства—основная тема первой главы. Пространственные тела, главным образом многогранники, выступают в качестве объектов для применения теорем планиметрии. Но не только и даже не в первую очередь. Главное—это создать своего рода трехмерный интерьер, не допустить деградации пространственного мышления школьников. Возможно, что долю стереометрических задач следовало бы несколько увеличить. Учитель при желании мог бы сделать это самостоятельно. Но слишком увлекаться пространством тоже не следует: педагогические цели, преследуемые при обучении планиметрии и стереометрии, все же не полностью совпадают и в чем-то даже противоречивы.

Создание содержательной системы задач по программе геометрии седьмого класса серьезно затруднено ограниченностью теоретического материала. Отсюда в большинстве учебных пособий появляются многочисленные упражнения на отработку понятий и определений, задачи логического, а вернее псевдо-логического типа, в которых школьников заставляют произносить нечто вроде заклинаний, выдавая пустые словосочетания за умозаключения. Автору самому трудно судить, насколько он сумел избавиться от подобного рода задач и упражнений. Во всяком случае он затратил довольно много усилий на поиск содержательных задач на доказательство, с помощью которых можно начать учить детей основным подходам, приемам, идеям и методам, встречающимся при решении геометрических задач, таким, как перебор вариантов, доопределение условия, выделение ключевого треугольника, движение, четность и т. д.

Большое количество задач вычислительного плана, на нахождение ответа обусловлено их педагогической значимостью, их традиционным преобладанием в большинстве списков геометрических задач и, в частности, среди задач конкурсного типа. В основной своей массе вычислительные задачи, предлагаемые в учебнике, достаточно просты и направлены на отработку отдельных технических деталей, некоторых стандартов, типичных ситуаций и многого другого, без чего не обходится решение большинства интересных и содержательных геометрических задач. Конечно, алгебраические возможности школьников пока еще весьма ограничены, и поэтому в нашем курсе преобладают вычислительные задачи арифметического типа, то есть задачи, решаемые поэтапно, по действиям. Невелико, к сожалению, число задач на составление уравнений. К ним относятся задачи из параграфа 2.1 №№ 12 и 21, из параграфа 2.3 № 4, из параграфа 3.2 № 16, из параграфа 3.3 № 17, из параграфа 4.4 №№ 5, 6 и 13.

Очень важно в геометрии научиться видеть различные варианты реализации описанной геометрической ситуации и разумно перебирать эти варианты. Задач на эту тему в пособии достаточно много: в параграфе 2.1 №№ 2, 3, 5, 7, 10, 12, 16, 18, 19, 22; в параграфе 2.3 №№ 6, 7, 14, 16; в параграфе 3.2 №№ 1, 24; в параграфе 3.3 №№ 13, 14, 17, 18, 19; в параграфе 4.1 №№1д, 9; в параграфе 4.4 №№ 4, 5, 9.

С умением видеть и перебирать варианты соседствует умение строить примеры, подтверждающие или опровергающие то или иное утверждение. На эту тему в пособии предлагаются задачи: в параграфе 2.2 №№ 3, 4, 6; в параграфе 2.4 №№ 8, 9, 14, 15, 28; в параграфе 3.1 №№ 1, 13; в параграфе 3.2 № 18; в параграфе 4.5 №№ 4, 5, 7.

Нельзя научиться решать сколько-нибудь интересные и трудные геометрические задачи, не научившись правильно, грамотно и красиво делать геометрические чертежи, а иногда и «картинки». Поэтому особо следует выделить задачи, в которых результатом решения является изображение или же сам процесс решения основан на тех или иных построениях. Типичными задачами такого рода являются задачи на геометрическое место точек (параграф 4.1) и задачи на построение (параграф 4.2). Кроме задач из этих двух параграфов, сюда же относятся следующие задачи:

из параграфа 2.1 №№ 16, 17, 18, 22, 29; из параграфа 2.2 № 7; из параграфа 2.4 №№ 13, 22, 23, 24, 25, 26, 27; из параграфа 3.1 № 14; из параграфа 3.2 №№ 9, 10, 13.

Конечно, четыре главы настоящего пособия—это лишь первые четыре ступеньки той геометрической лестницы, которую предстоит преодолеть школьнику. И единым должен быть не только теоретический курс, единой должна быть и система задач, в ней должны вполне четко просматриваться основные идейные линии курса, ведущие темы, происходить развитие этих идей и тем. В качестве примера идейно-тематически развивающейся цепочки задач можно указать следующую последовательность задач учебника: параграф 2.1 № 10; параграф 3.2 №№ 14, 15, 16; параграф 3.3 № 17; параграф 4.4 №№ 12—15; параграф 4.5 №№ 14—21. Эта цепочка будет продолжена и в последующих главах учебника и, в принципе, может вывести ученика на очень высокий, олимпиадный уровень.

В системе задач, в первую очередь, реализуется и методическая идея уровневой дифференциации. Конечно, особенно сложных задач в учебнике нет, но все же диапазон сложности достаточно широк. Чтобы учитель мог легче ориентироваться в этом диапазоне, используются обозначения, указывающие степень важности или трудности задачи. Здесь хотелось бы дать один совет учителю: не следует ограничивать уровень сложности рассматриваемых задач минимальным уровнем даже в самых слабых классах и по отношению к самым слабым ученикам. Геометрия обладает необычайно мощным развивающим потенциалом, при этом сам процесс поиска решения трудных задач, изучение решений таких задач в некотором смысле может оказаться полезнее длительных и монотонных упражнений на отработку тех или иных стандартных схем.

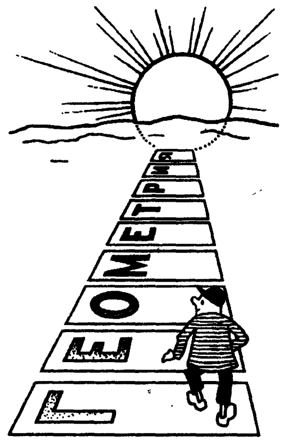
Небольшая уровневая дифференциация имеет место и в теоретической части курса. В первую очередь это относится к двум последним параграфам четвертой главы. В слабых классах эти параграфы можно рассмотреть лишь в самых общих чертах и даже вовсе опустить, в сильных же, наоборот, уделить им особенно пристальное внимание.

Кроме того, учитель имеет некоторые возможности для варьирования временем, отводимым на изучение той или иной темы. Ограничиваясь общими рекомендациями, не доводя их до уровня почасового планирования, хочу предложить следующий подход к распределению учебного времени. Разобьем это время на 5 частей в пропорции 1:2:3:3:1. Первые четыре части соответствуют времени, отводимому на изучение соответственно 1-й, 2-й, 3-й и 4-й глав учебника, последняя—резерв. Этот резерв может быть использован либо для повторения, либо израсходован на увеличение времени изучения какой-либо главы. (В первую очередь главы 3.)

Пожалуй, на этом стоит закончить вступительное слово, поскольку все главное вроде бы сказано. Но прежде чем окончательно поставить точку, я хочу выразить свою благодарность Ю. П. Соловьеву за постоянное дружеское и неформальное внимание к работе автора. Я благодарен В. Ю. Протасову—в первой главе есть доля его участия.

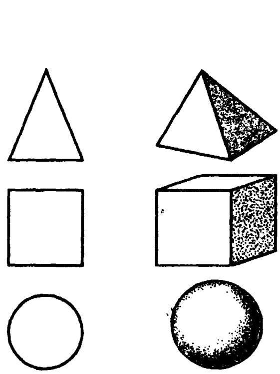
Глава 1

Чем занимается геометрия? Первые понятия геометрии



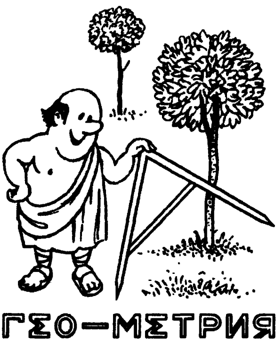
Предмет, к изучению которого мы приступаем, называется *геометрия.* Но было бы неверно утверждать, что до сих пор вы совсем не занимались геометрией и ничего о ней не знаете. Вам не раз приходилось встречаться с треугольниками и пирамидами, квадратами и кубами, окружностями и шарами. Может быть, не так много, но кое-что об этих телах и фигурах вы знаете, хорошо представляете себе, как они выглядят, и понимаете, что все они имеют отношение к геометрии.

Утверждение, что мы приступаем к изучению геометрии, означает прежде всего, что мы начинаем *систематический курс* геометрии. Это, в свою очередь, значит, что мы постепенно, шаг за шагом будем строить геометрическую теорию, последовательно *доказывая* наши утверждения, выводя их из уже известных в соответствии с математическими законами.



Прежде всего, что такое геометрия?

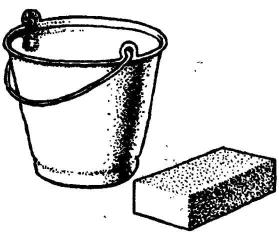
Слово «геометрия» — греческое, оно составлено из двух частей «гео» и «метрия» и дословно на русский язык переводится как «земле-мерие».



Но уже давно геометрия вышла за узкие рамки, обозначенные этим буквальным пониманием. Если мы заглянем в любой энциклопедический словарь, то обнаружим на соответствующем месте очень большую статью, начинающуюся примерно так:

«*Геометрия* — это раздел математики, изучающий пространственные *формы* и их *отношения*».

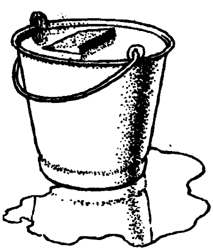
А что это означает? Что такое «пространственные формы» и в чем состоят «их отношения»?



1.1. Геометрическое тело

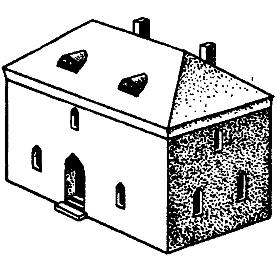
Важнейшей пространственной формой является *геометрическое тело*, а одним из видов пространственных отношений — взаимное расположение геометрических тел.

Один из крупнейших математиков XX века А. Пуанкаре сказал так: «Не будь в природе твердых тел, не было бы и геометрии».



Каждый из вас без труда сможет привести примеры различных тел, встречающихся в окружающем нас мире: жилой дом, булыжник, заводская труба, капля смолы и т. д.

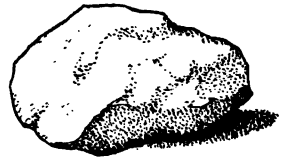
Говоря «геометрическое тело», мы тем самым подчеркиваем, что нас не интересуют физические свойства тела: вес, цвет, материал и др., что рассматривать и изучать мы будем лишь его форму и размеры.

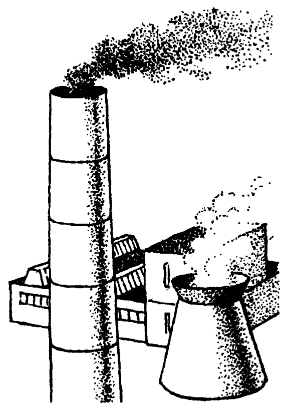


Можно сказать, что мы рассматриваем ту часть пространства, которую соответствующее тело занимает.

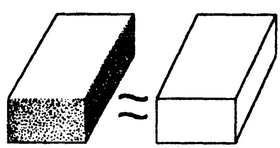
Если взглянуть на окружающие нас предметы как на геометрические тела, то можно сказать, например, что дом и кирпич имеют одинаковую форму — форму параллелепипеда и отличаются лишь размерами, что заводская труба часто имеет форму цилиндра, а футбольный мяч — форму шара.

Конечно, реальный кирпич следует рассматривать как параллелепипед лишь приближенно. Если проделать достаточно точные измерения, то можно обнаружить небольшие отклонения от тех результатов, которые должны были бы получиться, если бы кирпич был в точности параллелепипедом. Да и точность наших измерений ограничена, в то время как размеры параллелепипеда считаются заданными абсолютно точно. Однако для практических нужд все эти отклонения несущественны, и кирпич вполне удобно рассматривать как параллелепипед.



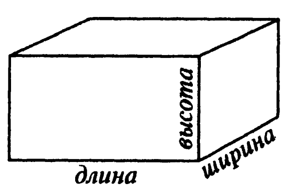


Или возьмем нашу планету Земля. Часто говорят, что Земля имеет форму шара. Это вполне удобное для многих практических и учебных целей представление. Однако с геометрической точки зрения оно не совсем верно. Измерения, проведенные в XVII веке, показали, что Земля имеет форму «геоида» — шара, немного сплющенного вдоль одного диаметра — оси Земли.



Геометрическое тело имеет *три измерения*. Условно мы их называем: длина, ширина и высота (или толщина). Да и само пространство, в котором мы живем, называется *трехмерным*.

Наличие *трех* измерений является характерным признаком геометрического тела. Как это следует понимать?



У любого параллелепипеда нетрудно указать длину, ширину и высоту. Правда, сами названия — что является длиной, а что шириной или высотой —

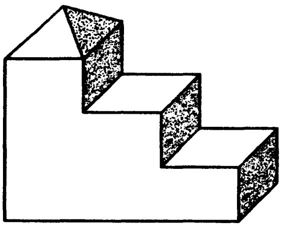


Рис. 1

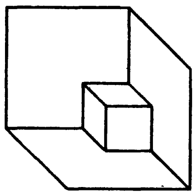


Рис. 2

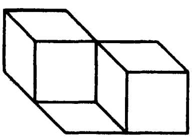


Рис. 3

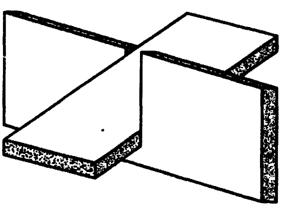


Рис. 4

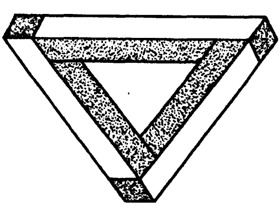


Рис. 5

могут зависеть от договоренности. Например, они могут определяться положением параллелепипеда относительно поверхности земли, стола или чего-то другого. Часто за длину мы принимаем наибольшее измерение, а под толщиной понимаем самое маленькое. Все это не так уж важно. Главное — измерений ровно три.

А как быть, допустим, с конусом или же каким-то совсем замысловатым телом? Здесь ведь невозможно указать три измерения, как для параллелепипеда. Что здесь длина и ширина, а что — толщина?

В общем случае утверждение о наличии у тела трех измерений означает лишь, что внутри него можно поместить параллелепипед, пусть очень небольшой, но у которого все три измерения отличны от нуля.

А теперь несколько задач, заданий и вопросов. (Начиная с этого момента, в конце каждого параграфа или главы вам будут предлагаться упражнения этих трех видов.)

Задачи, задания, вопросы

1. Рассмотрим окружающие нас предметы: карандаш, консервная банка, абажур, велосипедная шина... (Назовите еще несколько предметов самостоятельно.) Какие из известных вам геометрических тел по форме наиболее соответствуют перечисленным предметам? А может, их удобно рассматривать составленными из нескольких известных геометрических тел? Из каких? Дайте словесное описание этих тел.

2. Вспомните названия нескольких геометрических тел. Какие реальные тела по форме соответствуют им?

3. Нарисуйте известные вам геометрические тела: куб, различные пирамиды, цилиндр, конус, шар и другие. Постарайтесь, чтобы изображаемые тела выглядели объемными. Какое из тел, на ваш взгляд, наиболее неудобно для изображения?

4. Придумайте какое-нибудь интересное тело. Опишите его словами другим ученикам, а они должны понять, что вы имеете в виду, и изобразить придуманное вами тело.

5. Посмотрите внимательно на рисунки 1—7. Опишите, как устроены изображенные на них тела. Назовите те, названия которых вам известны. Может, среди изображенных тел есть невозможные. Какие? Почему они невозможны? Придумайте и изобразите какие-нибудь интересные тела, в том числе и невозможные.

6. Придумайте пробку, с помощью которой можно заткнуть любое из изображенных на рисунке 8 отверстие.

7. Подумайте над следующей старинной головоломкой, которую иногда называют «египетская пирамидка». Имеется 20 одинаковых шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 9). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

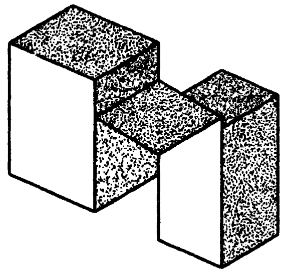


Рис. 6

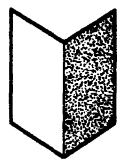


Рис. 7

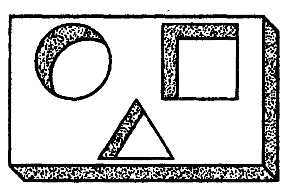


Рис. 8

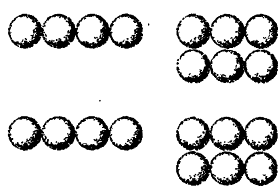


Рис. 9

1.2. Поверхность

Всякое геометрическое тело имеет *поверхность*, представляющую собой границу (оболочку) этого тела.

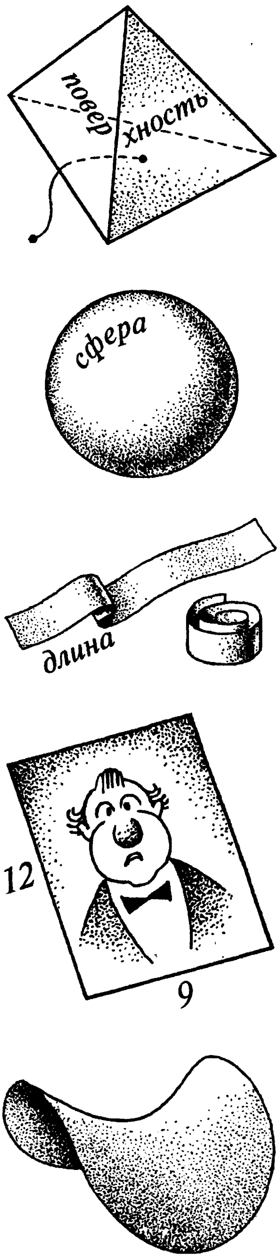


Рис. 10

Поверхность геометрического тела делит все пространство на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к этому телу. Чтобы попасть из любой точки внутри тела во внешнюю область, необходимо пересечь поверхность тела.

Поверхность, ограничивающая шар, называется *сферой*. У всех других известных нам тел поверхности не имеют специальных названий.

Однако не всякая поверхность является границей какого-либо тела. Главное здесь то, что поверхность, в отличие от тела, имеет лишь *два измерения*: длину и ширину. Иными словами, никакое тело, каким бы маленьким оно ни было, нельзя расположить так, чтобы оно целиком принадлежало поверхности.

Конечно, в мире, в природе мы не встретим предметов, не имеющих толщины. Поэтому понятие поверхности *абстрактно*, является *математической абстракцией*. (Слово «абстрактный» в переводе с латинского означает «отвлеченный». Абстрактное понятие означает что-либо мысленное, непредметное, существующее лишь в нашем воображении. К абстрактным следует отнести такие понятия, как красота, душа, мысль, скорость и многое другое.)

Когда мы говорим, что лист бумаги или мыльная пленка являются поверхностями, то мы подразумеваем, что их толщина ничтожно мала по сравнению с другими размерами. В жизни мы часто поступаем подобным образом. Например, мы говорим «фотография 9×12», «кусок ткани 2 м на 3 м». И никому не приходит в голову указать еще и третий размер — толщину фотографии или ткани, хотя в отдельных случаях знание этой величины оказывается важным. Практически мы считаем их поверхностями и характеризуем двумя размерами — длиной и шириной.

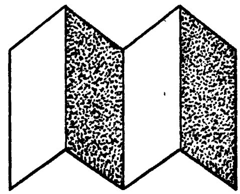


Рис. 11

Многообразен и удивителен мир поверхностей. На рисунках 10—16 изображены некоторые интересные математические поверхности. Особо стоит обратить внимание на поверхности 15 и 16. Они обладают, на первый взгляд, невозможным свойством — у них одна сторона. Оказывается, двигаясь вдоль этих поверхностей и нигде не переходя через край, можно вернуться в ту же точку, но с другой по отношению к этой точке стороны. Убедитесь в этом самостоятельно. Поверхность на рисунке 15 называется *листом Мёбиуса.* Она названа по имени открывшего ее, а вернее его, немецкого математика Мёбиуса, жившего в XIX веке. Говорят, что свое открытие он сделал, увидев ленту, которую служанка по оплошности неверно сшила. Сколько раз подобные оплошности совершали служанки и не только они! Но никто до Мёбиуса не обращал внимания на удивительные свойства образовавшейся поверхности.

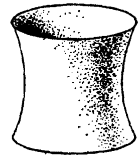


Рис. 12

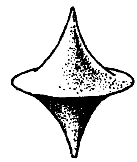


Рис. 13

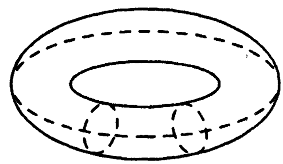


Рис. 14

Среди всех поверхностей выделим одну — *плоскость*, свойства которой мы будем в дальнейшем изучать.

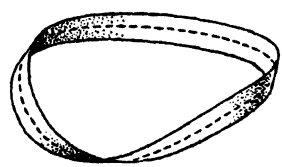


Рис. 15

Плоскость мы представляем себе бесконечной во всех направлениях.

В окружающем нас мире без труда можно найти много примеров плоских поверхностей: поверхность конькобежного катка, оконное стекло, поверхность стола или пола, футбольное поле. Все это практически можно рассматривать как плоские поверхности, части плоскости.

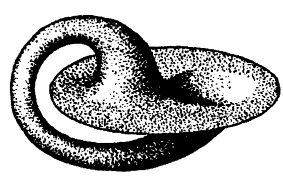


Рис. 16

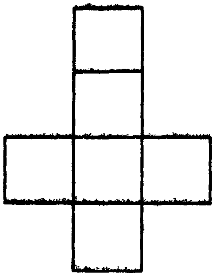


Рис. 17

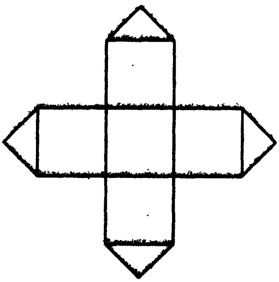


Рис. 18

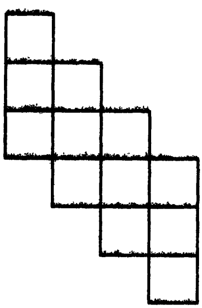


Рис. 19

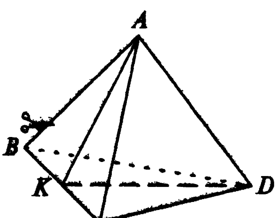


Рис. 20

Задачи, задания, вопросы

1. Склейте из бумаги поверхности, ограничивающие куб, треугольную пирамиду, треугольную призму.

2. Поверхность куба разрезали и развернули на плоскость. Получились фигуры, изображенные на рисунках 17, 18, 19. Как из них получить поверхность куба?

3. Придумайте самостоятельно интересные развертки куба.

4. Что получится, если поверхность треугольной пирамиды, у которой все ребра равны, разрезать так, как показано на рисунке 20, и развернуть? (Разрезы идут по отрезкам BA, KA, CA и KD.) Придумайте другие интересные развертки треугольной пирамиды.

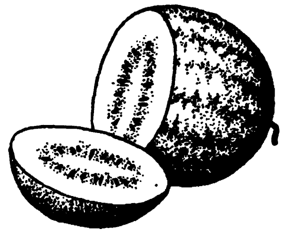
5. Имеется квадратный лист бумаги. Сложите его так, чтобы получилась поверхность треугольной пирамиды.

6. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать вдоль пунктирной линии, указанной на рисунке 15? Можно ли одним разрезом разрезать лист Мёбиуса на две части, которые, однако, нельзя было бы разъединить?

7. Художник изготовил для своей картины рамку. Он считает, что получившаяся рамка имеет прямоугольную форму. Каким образом он может это проверить? Достаточно ли убедиться в равенстве противоположных сторон? А если к равенству противоположных сторон добавить еще и равенство диагоналей? Теперь можно быть уверенным в том, что рамка имеет прямоугольную форму?

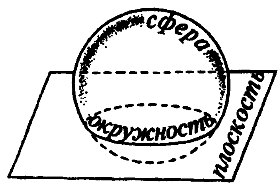
8. Каким образом из листа бумаги можно изготовить поверхность цилиндра, конуса?

9. Рассмотрим известные нам тела: параллелепипед, призму, цилиндр, конус, шар. Как вы думаете, поверхности каких из этих тел можно разрезать таким образом, чтобы ее можно было положить на плоскость?



10. Дана емкость для воды: ведро, таз и т. п. Как проверить, что дно плоское?

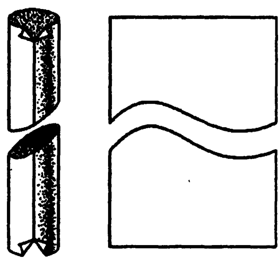
1.3. Линия



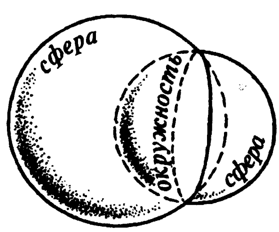
При пересечении двух поверхностей получается *линия*.

Линией обычно бывает граница поверхности. (Если, конечно, у поверхности есть граница.)

Разрезав арбуз, мы образуем на его поверхности линию, похожую на окружность. Она получается при пересечении двух поверхностей: поверхности арбуза и плоскости, по которой проходит разрез.



При разрезании наискось поверхности цилиндра получаем овал, называемый *эллипсом*. Если же мы перед разрезанием обернем поверхность цилиндра бумагой, а после разрезания этот лист развернем, то получим волнистую линию, которая называется *синусоидой*.

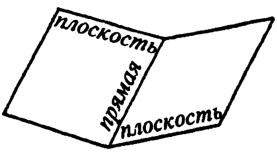


Следует запомнить, что при пересечении сферы с плоскостью или же при пересечении двух сфер возникает окружность. (Конечно, эти поверхности могут также касаться друг друга — иметь единственную общую точку, и вовсе не иметь общих точек.)

Линия не имеет толщины и ширины. У нее лишь одно измерение — *длина*.

Как и поверхность, линия—понятие абстрактное.

В реальной жизни мы часто встречаемся с линиями, а точнее с тем, что удобно считать линией. Предмет или что-то иное, у чего одно измерение явно преобладает над другими, мы считаем линией. Например, нить, волос, дорога, разделительная полоса на шоссе, государственная граница и т. п. Мы говорим «длина волоса», «длина дороги», покупаем «20 м веревки», то есть ограничиваемся лишь одним измерением для характеристики подобного предмета.



При пересечении двух плоскостей образуется *прямая линия.*

В геометрии и не только в геометрии прямая линия играет исключительную роль.

Луч света представляет собой прямую линию.

Натянутая нить—также прямая.

Свободно падающее тело движется по прямой.

Также по прямой движется тело, на которое не действуют никакие силы. Именно в этом состоит Первый закон Ньютона, с которым вы познакомитесь на уроках физики.

Задачи, задания, вопросы

1. На поверхности каких из известных вам геометрических тел можно проводить прямые линии или части прямых?

2. Соедините две точки прямой линией: а) на листе бумаги; б) на полу класса; в) на местности. (В пункте б) предложите практический способ построения прямой, в пункте в)—способ, с помощью которого можно отметить на местности точки, расположенные на одной прямой.)

3. Имеется кусок проволоки. Как проверить, является ли он отрезком прямой?

4. Как проверить, что имеющаяся у вас линейка в самом деле позволяет проводить прямые линии?

5. Почему при сгибании листа бумаги линия сгиба есть прямая линия?

6. Кусок проволоки изогнули в виде некоторой линии. На рисунке 21 показано, как выглядит этот кусок с трех различных точек зрения (спереди, сбоку и сверху). Каким образом изогнули этот кусок?

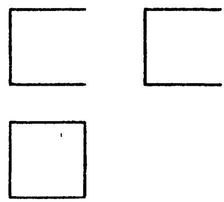
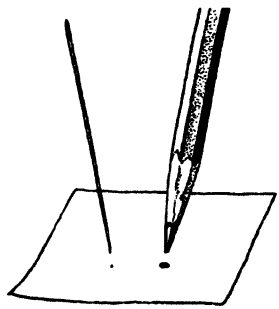


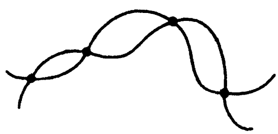
Рис. 21

1.4. Точка

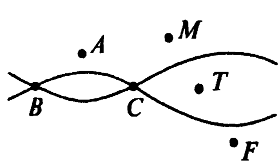


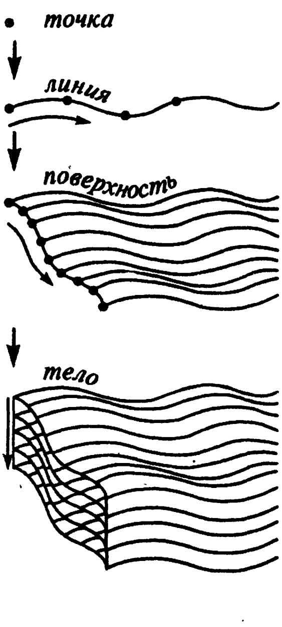
Древнегреческий геометр Евклид говорил, что «точка — это то, что не имеет частей». Мы можем добавить к этому, что точка не имеет никаких размеров.

Всякий очень маленький по сравнению с рассматриваемым окружением предмет мы считаем точкой. Так, точкой будет отверстие от иглы на листе бумаги, жук на поверхности Земли, город на географической карте, звезда на небе или наша планета в Солнечной системе.



При пересечении двух линий образуется точка, возможно, что и не одна. Любое геометрическое тело, поверхность, линия, любая геометрическая фигура состоит из точек, или, как говорят математики, представляет собой множество точек. В дальнейшем точки мы обычно будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C, ...





Задачи, задания, вопросы

1. Могут ли два геометрических тела иметь ровно одну общую точку? Две общие точки? Приведите примеры.

2. На краю большой лесной поляны стоят 4 дерева. Как найти на поляне место, где пересекаются прямые, попарно соединяющие противоположные деревья?

1.5. От точки к телу

Итак, исходя из вполне реальных тел, мы получили представление о поверхностях, линиях, точках—геометрических формах, в чистом виде не существующих в природе, представляющих собой математические абстракции.

А теперь пойдем с другого конца.

Начнем с точки. Можно считать, что точка—это некое место в пространстве, не имеющее размеров.

При движении точка будет описывать линию—траекторию движения точки.

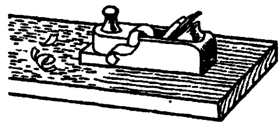
Кстати, часть примеров, иллюстрирующих понятие прямой линии в параграфе 1.3, были примерами движения по прямой.

Когда мы при помощи линейки вычерчиваем прямую линию, то как раз получается, что эта прямая вычерчивается движущейся точкой—кончиком карандаша. То же имеет место при вычерчивании окружности с помощью циркуля.

Будем теперь перемещать в пространстве линию целиком. При этом в процессе движения сама линия может менять свою форму, деформироваться.

Область, заметаемая при таком движении, будет поверхностью.

Так, плоскость можно получить при помощи движения прямой линии. Представьте себе лезвие рубанка, выстругивающего доску. Луч вращающегося маяка также может заметать плоскость или же коническую поверхность. Сферу можно получить в результате вращения окружности вокруг ее диаметра.



Все точки тела можно получить, перемещая в пространстве поверхность. Сферами с общим центром можно заполнить внутренность шара (конечно, надо добавить еще точку — центр шара), перемещая квадрат, можно заполнить куб и т. д.

Выводы

Что же получается?

Геометрическое тело — часть пространства. Имеет три измерения, которые мы условно называем длиной, шириной и высотой (или толщиной).

Поверхность — граница геометрического тела. Имеет два измерения — длину и ширину.

Линия образуется при пересечении двух поверхностей. Имеет одно измерение — длину.

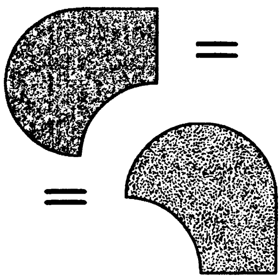
Точка не имеет размеров. Образуется при пересечении двух линий.

А с другой стороны:

Точка — «то, что не имеет частей», не имеет размеров.

Линия получается при движении точки. Имеет одно измерение — длину.

Поверхность заполняется или заметается при движении линий. Имеет два измерения — длину и ширину.



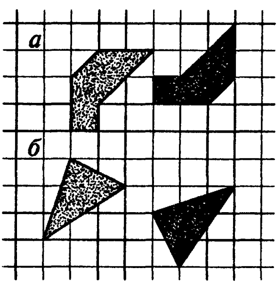


Рис. 22, а, б

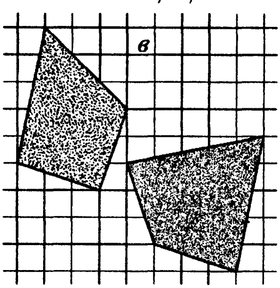


Рис. 22, в

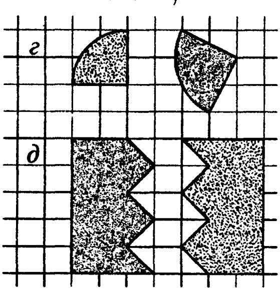


Рис. 22, г, д

Тело заполняется поверхностями. Имеет три измерения — длину, ширину и высоту (или толщину).

Все это — тело, поверхность, линия, точка — основные *геометрические формы*.

Кроме того, мы будем пользоваться также понятием *геометрическая фигура*. Если геометрическое тело — это часть пространства, ограниченная поверхностью, то геометрическая фигура — это часть поверхности, ограниченная линией. Как и поверхность, фигура имеет два измерения.

А теперь введем еще одно очень важное понятие — понятие геометрического равенства.

Два геометрических тела, две поверхности, линии или фигуры называются *равными*, если их можно совместить друг с другом.

Равенство геометрических фигур мы будем обозначать привычным нам символом: «=».

Необходимо четко понимать, что хотя понятие геометрического равенства и звучит, и обозначается так же, как и числовое равенство, оно во многом от него отличается. Равенство двух геометрических фигур или тел или чего-то иного означает их «одинаковость» и по форме, и по размеру.

Задачи, задания, вопросы

1. Заведите специальную тетрадь, которую будем называть «Геометрический словарь». Впишите в эту тетрадь известные вам по этой главе геометрические понятия и термины, дайте короткие объяснения, проиллюстрируйте рисунками. Постарайтесь все это сделать как можно красивее. Аккуратно обращайтесь с этой тетрадкой—она будет сопровождать вас в течение всех лет занятий геометрией.

2. Что означает слово «геометрия»? Чем занимается наука геометрия?

3. Назовите основные геометрические формы. Что такое геометрическое тело, поверхность, линия, точка?

4. Равны ли фигуры и тела, изображенные на рисунках 22 а)—е)?

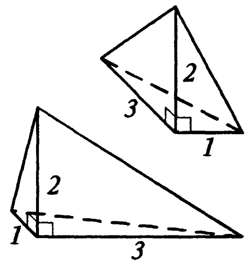
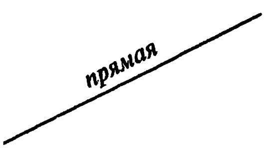


Рис. 22, е

Глава 2

Основные свойства плоскости

Именно с этой главы, по-существу, начинается наш систематический курс геометрии. Возможно, поначалу он покажется не столь интересным, поскольку новых, неизвестных фактов почти не будет. Самое главное заключается в том, что все эти простые и известные геометрические факты мы постараемся изложить в строгой логической последовательности, иными словами, систематизировать их.

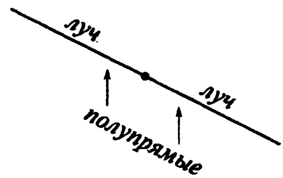


Рассматривать мы будем в основном раздел геометрии, носящий название «планиметрия», изучающий свойства плоскости, плоских форм и фигур.

В этой главе мы познакомимся с некоторыми начальными понятиями планиметрии, обсудим важнейшие свойства плоскости, в первую очередь те, которые связаны с прямыми, частями прямых, их взаимным расположением на плоскости.

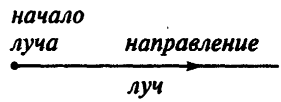
Начнем мы с простейшего—свойств прямой линии.

2.1. Геометрия прямой линии



Геометрия прямой линии достаточно проста. Основные свойства известны и понятны. Мы лишь напомним и аккуратно сформулируем эти известные свойства и некоторые понятия, относящиеся к прямой линии.

Любая точка, лежащая на прямой, делит эту прямую на две *полупрямые*. Каждая из этих полупрямых называется также *лучом*.

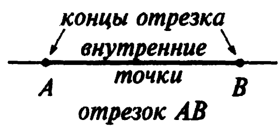


Луч определяется своим *началом* (граничная точка луча) и *направлением*.

Таким образом, каждая точка делит прямую на два луча с общим началом и противоположными направлениями.

Если на прямой взять любые три точки, то одна из них расположена *между* двумя другими.

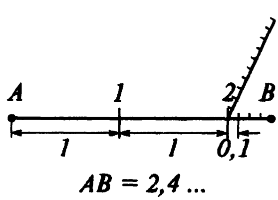
Любые две точки на прямой ограничивают *отрезок прямой*. Точки, расположенные между концами отрезка, являются внутренними точками отрезка.



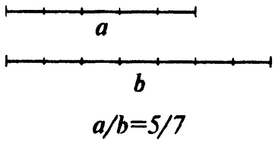
Отрезок задается своими конечными или граничными точками. Например, отрезок AB.

Луч мы также будем обозначать через AB, при этом первая точка в этой записи — точка A — обозначает начало луча, вторая — точка B — любая точка на луче.

Если у нас есть *единица длины*, то мы можем измерять *длину* любого *отрезка*. Что такое длина отрезка и как можно измерить отрезок, считаем известным. Отметим лишь несколько известных и очевидных свойств.

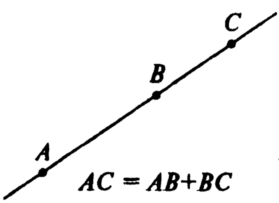


Длина отрезка выражается числом. Понятно, что величина этого числа зависит от выбора единицы длины. Поэтому, говоря о длине отрезка, надо указывать, в каких единицах он измерен. В нашей стране используется так называемая метрическая система мер. В этой системе в качестве единиц длины используются сантиметры (см), метры (м), километры (км) и т.д.



Два отрезка являются равными, если они имеют равную длину, то есть в одинаковых единицах измерения их длины выражаются равными числами.

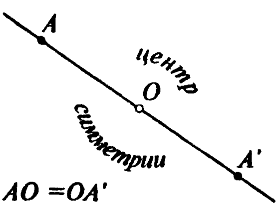
Отношение длин любых двух отрезков не зависит от выбора единицы. Поэтому мы можем говорить об *отношении двух отрезков*. Например, если отношение двух отрезков равно 2, то это означает, что в первом отрезке укладывается ровно 2 отрезка, равных второму отрезку.



С помощью циркуля мы можем в любом месте на прямой откладывать отрезки, равные данному.

В дальнейшем запись AB мы будем понимать как обозначение самого отрезка, так и его длины.

Если точка B лежит между A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC. Это свойство можно записать в виде равенства $AC = AB + BC$.



Мы будем говорить, что точки A и A' *симметричны* относительно точки O, если O—середина отрезка AA'. При этом точка O называется *центром симметрии* точек A и A'.

Любая точка O на прямой не только делит прямую на два противоположно направленных луча, но и является центром симметрии этой прямой, то есть какую бы точку M мы на прямой ни взяли, найдется на этой же прямой точка M', симметричная ей относительно точки O.

Задачи, задания, вопросы

Начиная с этого параграфа, мы будем выделять некоторые задачи. Буквой «В» мы будем сопровождать «важные» задачи. Их надо непременно решить и хорошо усвоить либо метод решения, либо сообщаемый в них факт. Буквой «П», которая может означать «полезная», а буквой «Т» — «трудная», мы будем обозначать задачи, предназначенные тем из вас, кто хотел бы получше овладеть теорией геометрии и научиться решать более трудные задачи.

1. Можно ли разбить прямую на два отрезка и два луча?

2. На прямой даны точки A, B, C. Известно, что $AB=1{,}5$, $AC=2{,}5$, $BC=4$. Какая из трех точек лежит между двумя другими?

3. На прямой даны две точки: A и B. Сколько найдется на этой прямой точек M таких, что: а) $AM = BM$; б) $2AM = MB$?

4 В. Длина отрезка AB равна 3. Внутри отрезка взята точка M. Найдите длину отрезка BM, если: а) $AM=2BM$; б) $2AM = 3BM$; в) $AM : BM = 1 : 5$; г) $AM : BM = 3 : 4$; д) $AM - BM = 2$; е) $3AM+2BM=7$; ж) $AM^2-BM^2=3$.

5 П. Как изменится ответ для пунктов а)—г) предыдущей задачи, если точка M — некоторая точка прямой AB, не обязательно внутри AB?

6 В. Длина отрезка AB равна 3. На отрезке взяты точки P и K так, что $AP=1{,}7$, $BK=1{,}8$. Найдите длину отрезка PK.

7. На прямой находятся точки A, B и C. Какие значения может принимать длина отрезка AC, если: а) $AB=4{,}2$; $BC=5{,}7$; б) $AB=2{,}8$; $BC=2{,}1$?

8. На прямой расположены точки A, B, C и D. Найдите длину отрезка с концами в серединах AB и CD, если: а) $AB=1{,}2$, $BC=1{,}7$, $CD=2{,}2$, $AD=5{,}1$; б) $AC=1{,}1$, $CB=1{,}3$, $BD=3{,}5$, $AD=5{,}9$; в) $AC=5$, $BD=7$.

9. На прямой отмечено несколько точек. Сколько будет отрезков и сколько лучей, для обозначения которых используются эти точки, если отмечено: а) две точки — A и B; б) три точки — A, B и C; в) четыре точки — A, B, C и D; г) пять точек — A, B, C, D и E?

10 п. На прямой находятся точки A, B, C и D. Какие значения может принимать длина отрезка AD, если: а) $AB=1{,}2$, $BC=1{,}4$, $CD=1{,}7$; б) $AB=2{,}1$, $BC=1{,}8$, $CD=2{,}3$; в) $AC=1{,}3$, $BC=2{,}4$, $BD=3$?

11 в. Длина отрезка AB равна 4. На отрезке взяты точки M и K так, что $AM:MK:KB=1:2:3$ (эта запись означает, что $AM:MK=1:2$, а $MK:KB=2:3$). Найдите длину отрезка MK.

12 т. Чему может равняться длина отрезка MK, если в предыдущей задаче точки M и K могут располагаться где угодно на прямой AB?

13. На прямой отмечены два отрезка длиной 1,3 и 1,7. Постройте отрезок, равный: а) 3; б) 0,4; в) 0,9; г) 1.

14. На прямой находятся точки A, B, C и D, причем $AB=1{,}2$, $BC=2{,}1$, $CD=0{,}8$. Найдите длину отрезка CA, если известно, что луч DA содержит точку B, но не содержит точки C.

15. Отрезок AB равен 1,5. На луче AB взята точка C, а на луче BA — точка

D так, что $AC=0{,}7$, $BD=2{,}1$. Найдите CD.

16. На прямой взяты три точки: A, B и C. Укажите все точки M этой прямой такие, что M ближе к B, чем к A, и в то же время M ближе к B, чем к C. Рассмотрите два случая расположения точек A, B и C: B — между A и C; B — вне отрезка AC.

17. Даны две точки: A и B. Укажите все точки M на отрезке AB, для которых: а) $\frac{AM}{BM} > 1$; б) $\frac{AM}{BM} \geqslant 2$; в) $\frac{AM}{BM} \leqslant \frac{1}{3}$; г) $1 < \frac{AM}{BM} < 2$; д) $2 \leqslant \frac{AM}{BM} < 3$; е) $\frac{1}{2} \leqslant \frac{AM}{BM} \leqslant 2$.

18 т. Решите задачу 17, если рассматриваются точки на всей прямой AB.

19 т. Точка B лежит на отрезке AC, $AB=2$, $BC=1$. Указать на прямой AB все точки M, для которых $AM+BM=CM$.

20 п. Две точки движутся по прямой в одном направлении. На какую величину переместится середина определяемого этими точками отрезка, если одна точка переместится на 1, а другая — на 3? Каков будет ответ, если точки движутся в различных направлениях?

21 т. На прямой последовательно расположены точки A, B, C и D, причем $AB=BC=1$, $CD=2$. Точка M лежит на BC и делит отрезки BC и AD в одном и том же отношении $BM/MC=AM/MD$. Найдите это отношение.

22 т. На прямой взяты точки A, B, C и D. Укажите множество точек M на прямой, для которых $AM+BM=CM+DM$, если: а) точки следуют в порядке A, B, C и D и $AB=1$, $BC=2$, $CD=3$; б) точки следуют в порядке A, C, B и D и $AB=CD=4$, $BC=3$.

23 т. На отрезке длины 3 расположены отрезки длиной 1,7; 1,6; 1,5. Докажите, что все эти отрезки содержат общий отрезок длиной не меньше 0,1.

24 п. Кузнечик делает 5 прыжков по дороге, причем длина каждого прыжка, начиная со второго, в 2 раза больше предыдущего, а направления он выбирает произвольно. Докажите, что кузнечик никак не сможет вернуться в исходную точку.

25 в. На прямой даны точки A, B и C, причем $AB=1$, $BC=2$, $AC=3$. Изобразите на прямой точки A, B и C, а также точки, симметричные любой из них относительно каждой из двух других. (Например, симметричные A относительно B и C.)

26 п. На прямой даны две точки: A и B, причем $AB=1$. Пусть M — некоторая точка прямой, M_1 симметрична M относительно A, M_2 симметрична M_1 относительно B. Изобразите точки M, M_1, M_2, если: а) M — середина AB; б) $AM=3$, $BM=2$; в) $AM=0{,}3$, $BM=1{,}3$. Для всех случаев найдите длину отрезка MM_2.

27 п. Точка M симметрично отображается относительно точки A, а полученная точка симметрично отображается относительно точки B. В результате этих двух симметрий M переходит в M'. Докажите, что $MM'=2AB$. (Выражение «точка M симметрично отображается относительно точки A» означает, что M переходит в точку M_1 такую, что A — середина MM_1.)

28. Докажите, что если середины отрезков AB и CD, расположенных на одной прямой, совпадают, то $AC=BD$.

29 в. Пусть наша прямая является числовой осью. Изобразите на ней множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам: а) $1\leqslant x\leqslant 2{,}5$;

б) $x < 10$; в) $-1 < x \leqslant 1$; г) $1{,}2 < x < 4{,}1$ и $x < 3$. Что это за множества?

30 в. Точка A имеет на числовой оси координату x_1, а точка B — координату x_2. Найдите координату точки A', симметричной A относительно B, если а) $x_1 = 0$, $x_2 = 3$; б) $x_1 = 4{,}7$, $x_2 = 1$; в) $x_1 = -1$, $x_2 = 1{,}1$; г) $x_1 = 3$, $x_2 = -22{,}2$.

31 в. Найдите координату точки, являющейся центром симметрии, переводящей точку $A(x_1)$ в точку $A'(x_2)$, если а) $x_1 = 1{,}2$, $x_2 = -3$; б) $x_1 = -17$, $x_2 = 113$; в) $x_1 = 0{,}03$, $x_2 = -0{,}02$.

32 п. В какую точку перейдет точка $A(x_0)$ при симметрии, переводящей $B(x_1)$ в $B'(x_2)$, если а) $x_0 = 0$, $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; б) $x_0 = 1{,}2$, $x_1 = -1$, $x_2 = 1{,}5$; в) $x_0 = -10$, $x_1 = -11$, $x_2 = 12$?

33. Длина ветки равна 2 м. В начале ветки сидит червяк. За первую минуту червяк проползает 1 м, за следующую — 1/2 м, в течение следующей — 1/4 м и т. д., то есть за каждую следующую минуту он проползает в два раза меньше, чем за предыдущую. Доберется ли когда-нибудь червяк до конца ветки?

34 т. Три дома A, B и C расположены на одной прямой в указанном порядке. На этой же прямой надо вырыть колодец. Каждая семья, проживающая в этих домах, один раз в день носит из колодца воду. Где надо расположить колодец, чтобы общий путь (суммарный) был как можно меньше, если в каждом из домов проживает одна семья? Как изменится ответ, если в доме A живет одна семья, в доме B — две семьи, а в доме C — три семьи?

35 п. На прямой расположены 17 отрезков так, что они полностью закрывают отрезок длиной 12. Докажите, что длина хотя бы одного отрезка больше, чем 0,7.

36 т. Для того чтобы линейкой с делениями измерить диагональ кирпича, можно поступить следующим образом. Взять три кирпича, расположить их так, как показано на рисунке 23. Теперь нужный отрезок можно легко измерить.

А как измерить отрезок, соединяющий две отмеченные точки данного кирпича, расположенные на противоположных гранях кирпича?

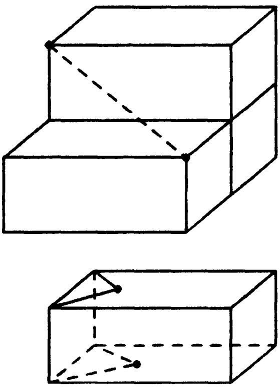
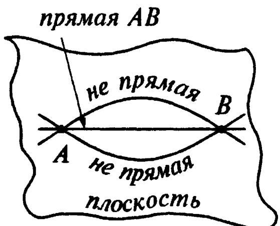


Рис. 23

2.2. Основные свойства прямой на плоскости

Плоскость как геометрическая форма характеризуется определенными свойствами и, в первую очередь, свойствами, связанными с прямой линией. И, наоборот, многие важные свойства прямой связаны с плоскостью.

Первое основное свойство плоскости



1-е свойство плоскости

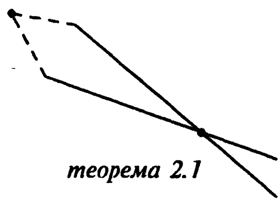
Свойство 1. *Через любые две точки плоскости можно провести прямую линию и притом только одну.*

Прямую, проходящую через точки A и B, мы будем называть прямой AB. Как видите, обозначение AB у нас используется в четырех случаях: оно может обозначать и отрезок, и длину отрезка, и луч, и прямую. Но никакой путаницы в наши рассуждения это не внесет, мы просто в каждом случае будем указывать, о чем идет речь.

Расстояние на плоскости между двумя точками A и B равно длине отрезка AB. Кратчайший путь из A в B—

это путь по прямой, соединяющей эти точки.

Из первого свойства плоскости легко можно получить важную теорему. (В этом месте у нас впервые появляются такие понятия, как теорема и доказательство. Несколько позднее мы объясним, что они означают. Тем же, кто хотел бы узнать их смысл поскорее, мы советуем прочитать начало параграфа 4.5.)


теорема 2.1

Теорема 2.1.

Любые две различные прямые плоскости пересекаются не более чем в одной точке.

Доказательство. Доказательство этой теоремы весьма просто. Если мы предположим, что число общих точек у двух прямых более одной, то по первому свойству эти прямые должны совпасть. А это противоречит условию, что эти прямые различны.

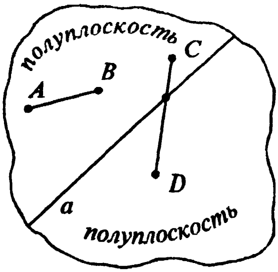
Итак, наша теорема, по сути, утверждает, что любые две различные прямые плоскости либо имеют одну общую точку, либо ни одной.

Параллельные прямые

Две прямые плоскости, не имеющие общих точек, называются *параллельными.*

На самом деле первое свойство и теорема 2.1 не являются чисто планиметрическими фактами. Они справедливы и для пространства.

А вот следующее свойство характерно именно для плоскости.



Второе основное свойство плоскости

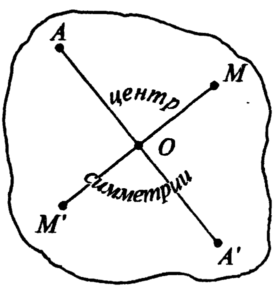
Свойство 2. *Любая прямая плоскости делит эту плоскость на две части — две полуплоскости.*

Что означает это свойство?

Пусть в плоскости проведена некоторая прямая, которую мы обозначим буквой a. Любая точка A, не лежащая на этой прямой, находится в одной из двух образовавшихся полуплоскостей. При этом, если точки A и B расположены в разных полуплоскостях, то отрезок AB пересекает a. Если же A и B — в одной полуплоскости, то отрезок AB не пересекает a.

Это же можно выразить и несколько иначе.

Две точки плоскости A и B, не лежащие на прямой a этой плоскости, будут располагаться в разных или в одной полуплоскости относительно прямой a в зависимости от того, будет ли отрезок AB пересекаться с прямой a или же нет.

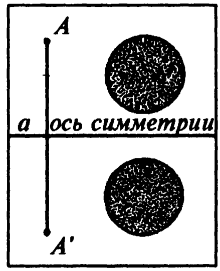


Центральная и осевая симметрии плоскости

Как и для прямой, любая точка плоскости является центром симметрии плоскости. Для того, чтобы построить точку, симметричную точке A относительно точки O, надо провести через A и O прямую и на этой прямой по уже известному правилу построить точку A', симметричную A относительно O.

Но кроме центральной, на плоскости появляется еще один вид симметрии — *осевая симметрия*, являющаяся характерным свойством плоскости.

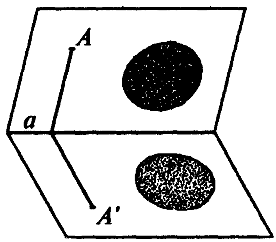
Третье основное свойство плоскости



Свойство 3. *Любая прямая плоскости является осью симметрии плоскости.*

А что это означает?

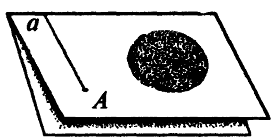
Как мы знаем, прямая есть линия пересечения двух плоскостей. Из этого следует, что при перегибании листа бумаги, представляющего модель плоскости, образуется прямая линия. Это станет яснее, если мы немного разведем в стороны части листа, получившиеся при его перегибании. Тогда мы увидим, что линия сгиба — это линия пересечения двух плоскостей.



Если точки A и A' совпадут в результате перегибания листа бумаги, то мы будем говорить, что A и A' *симметричны* относительно образующейся при перегибании листа прямой a, или что они переходят друг в друга при симметрии относительно a.

Все точки самой прямой a при этом остаются неподвижными, переходят сами в себя.

Две фигуры или линии плоскости являются симметричными относительно прямой a, если для каждой точки одной фигуры найдется симметричная относительно a точка другой фигуры.



Понятно, что симметричные фигуры равны.

Если же в результате симметрии относительно прямой a фигура не меняется, только меняются местами некоторые пары точек, то мы будем говорить, что прямая a является осью симметрии этой фигуры.

Задачи, задания, вопросы

1. На сколько частей могут разделить плоскость две прямые?

2. На плоскости проведены три прямые, не проходящие через одну точку и не параллельные друг другу. На сколько частей оказалась разделенной плоскость? На какие-то части при этом оказалась разделенной и каждая прямая. Сколько при этом всего образовалось отрезков и лучей (рассматриваются лучи, не содержащие точек пересечения прямых)?

3 п. На сколько частей может быть разделена плоскость четырьмя прямыми? Перечислите все случаи. Можно считать известным, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую.

4 п. Каким образом прямыми линиями плоскость может быть разделена на 5 частей?

5 в. Два брата отправились в лес по грибы. Лес пересекает дорога. Пока братья ходили по лесу, они неоднократно переходили через дорогу, причем старший брат сделал это на 3 раза больше, чем младший. Как вы думаете, по одну сторону дороги или по разные оказались братья, когда вышли из леса?

6. Нарисуйте фигуры, имеющие ровно одну, ровно две, три и четыре оси симметрии.

7 в. Нарисуйте на плоскости две пересекающиеся прямые a и b. Отметьте какую-то точку A на плоскости. Изобразите точку A_1, симметричную точке A относительно прямой a, затем точку A_2, симметричную A относительно прямой b, затем точку A_3, симметричную A_1 относительно b, и A_4, симметричную A_2

относительно a. Рассмотрите несколько случаев расположения точки A.

8 п. При симметрии относительно прямой a точка A перешла в точку A'. Докажите, что прямая a делит отрезок AA' пополам.

9 п. При симметрии относительно прямой a точки A и B перешли соответственно в точки A' и B'. Докажите, что прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке, лежащей на прямой a. (Считаем, что прямая AB пересекает прямую a.)

10 п. На плоскости отметили 1995 точек. После симметрии относительно некоторой прямой a каждая из этих точек перешла в какую-то из отмеченных. Докажите, что прямая a проходит хотя бы через одну из отмеченных точек.

11 п. Понятие осевой симметрии поможет вам решить следующую задачу. Угадайте, по какому правилу образована каждая из последовательностей символов, изображенных на рисунке 24, и продолжите каждую из них.

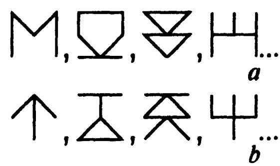
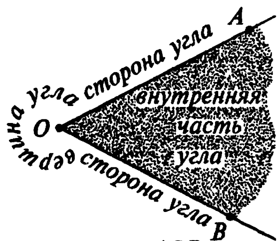


Рис. 24

12. На прямой мы можем задать центральную симметрию. На плоскости есть два вида симметрии: центральная и осевая. А какие виды симметрии возможны в пространстве?

2.3. Плоские углы

Определение угла. Развернутый угол. Измерение углов



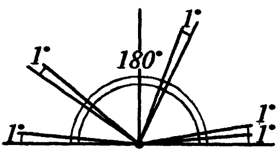
угол $\angle AOB$

Углом мы будем называть часть плоскости, заключенную между двумя лучами этой плоскости, имеющими общее начало. Точки, лежащие в этой части плоскости, мы будем называть *внутренними* точками угла.

Лучи, образующие угол, называются *сторонами* угла, а их общее начало — *вершиной* угла.

Данное нами определение угла не указывает, какую из двух частей плоскости, образовавшихся при проведении на плоскости двух лучей с общим началом, следует отнести к самому углу, а какую нет.

Договоримся, что обычно мы будем относить к углу «меньшую» из двух образовавшихся частей. Из этого правила, однако, в некоторых случаях мы будем делать исключения. Эти случаи мы будем четко оговаривать, а причина самих исключений в каждом конкретном случае будет достаточно понятной.



развернутый угол

Рис. 25

Углы мы будем обозначать знаком $\angle$. Обозначение $\angle AOB$ есть обозначение угла с вершиной в точке O и сторонами-лучами OA и OB. (A и B — точки на сторонах угла.)

Угол, стороны которого лежат на одной прямой, мы будем называть *развернутым*.

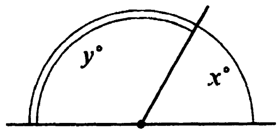
Наиболее распространенной мерой для углов является *градусная* мера.

С этой мерой вы познакомились в предыдущих классах. Так что мы коротко лишь напомним о ней.

Простейшим инструментом для измерения градусной меры угла служит транспортир. Совместив вершину угла с точкой O на транспортире и направив одну из его сторон по прямолинейной границе транспортира, мы увидим значение величины угла в точке пересечения его второй стороны со шкалой, указанной на транспортире.

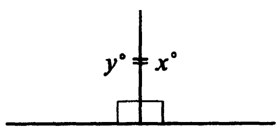
Величина развернутого угла равна 180 градусам, иными словами, угол в 1 градус (обозначается 1°) есть 1/180 развернутого угла. Это означает, что если мы приложим друг к другу, как на рисунке 25, 180 углов по 1° каждый, то в результате получим развернутый угол.

Рассмотрим какой-нибудь угол. Пусть одна его сторона неподвижна, а другая вращается вокруг вершины. Будем считать, что в начальном положении стороны угла совпадают, что соответствует углу в 0°, а в конечном положении стороны образуют развернутый угол, величина которого равна 180°. Тогда любой угол величиной в заданное число градусов при этом вращении появится лишь однажды.



смежные углы
$x^\circ + y^\circ = 180^\circ$

Два угла называются *смежными*, если одна сторона у них общая, а две другие стороны образуют прямую линию.

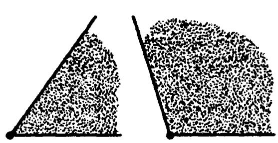


прямой угол

Из определения градусной меры следует, что сумма величин градусных мер смежных углов равна 180°.

Если угол равен углу, смежному с ним, то такой угол называется *прямым*. Величина прямого угла равна 90°.

Углы меньше 90° называются *острыми*, углы от 90° до 180° — *тупыми*, угол в 90°, как мы уже знаем, называется прямым.


острый угол *тупой угол*

Вертикальные углы. Угол между прямыми

При пересечении двух прямых плоскость делится на 4 части, 4 угла. Эти 4 угла можно разбить на две пары. В каждую пару будут входить углы, не имеющие общей стороны. Два угла, полученные при пересечении двух прямых, стороны которых являются дополнительными лучами этих прямых, называются

Рис. 26

вертикальными. На рисунке 26 вертикальными являются углы 1 и 3, а также 2 и 4.

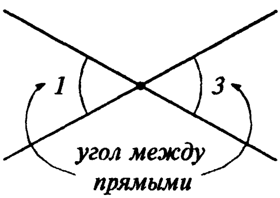
Теорема 2.2.

Вертикальные углы равны.

Доказательство. Докажем, например, что равны углы 1 и 3 на рисунке 26. Эти углы являются смежными для угла 2. Каждый из них дополняет до 180° угол 2, а это значит, что углы 1 и 3 равны.

Понятно, что из четырех углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, хотя бы одна пара вертикальных углов не превосходит 90°. Величину каждого из таких углов мы и примем за величину угла между прямыми. Иными словами, величина *угла между двумя прямыми* равна величине наименьшего из образовавшихся при их пересечении углов.

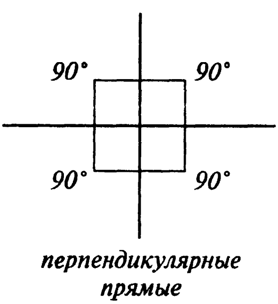
Так, на рисунке угол между прямыми равен углу 1 (или 3).



Перпендикулярные прямые

Две прямые называются *перпендикулярными*, если все четыре угла, образовавшиеся при их пересечении, являются прямыми, то есть равны 90°.

Справедлива следующая теорема.



Теорема 2.3.

Если две прямые плоскости перпендикулярны, то при симметрии относительно одной из них вторая прямая переходит сама в себя.

Доказательство. Из определения симметрии следует, что любая фигура при симметрии переходит в равную ей фигуру. Значит, и угол переходит в равный угол. Обозначим наши прямые через *a* и b. Рассмотрим любой из углов, образованных при их пересечении. Сторонами этого угла являются лучи наших прямых a_1 и b_1 (см. рис. 27). Этот угол по условию равен 90°. После симметрии относительно a этот угол перейдет в равный ему угол. Но при этом сторона, лежащая на прямой a,—луч a_1 останется на месте. Значит, другая сторона, луч b_1 перейдет в свое продолжение—другой луч, луч b_2, той же прямой b.

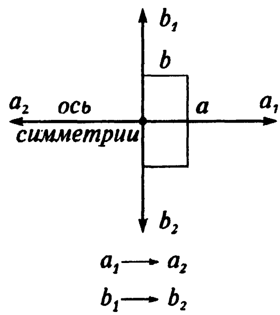


Рис. 27

Наша теорема 2.3 означает, что при симметрии относительно любой из двух перпендикулярных прямых каждая из этих прямых переходит сама в себя.

Теперь можно доказать еще одну важную теорему.

Теорема 2.4.

Через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.

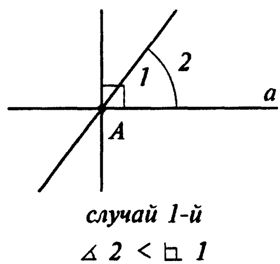


Рис. 28

Итак, нам даны некоторая прямая a и точка A на плоскости. Мы должны доказать, что через A можно провести единственную прямую, перпендикулярную a.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Точка A лежит на прямой a (рис.28). Этот случай вполне очевиден. Ведь в каждой из двух полуплоскостей, соответствующих a, существует лишь один луч, образующий прямые углы с обеими полупрямыми, на которые точка A разбивает прямую a. Эти два луча лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой a.

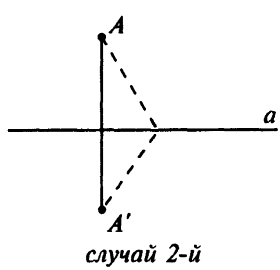


Рис. 29

Кстати, при доказательстве теоремы 2.3 мы опирались на этот факт.

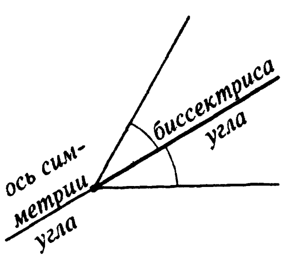
2. Рассмотрим теперь случай, когда точка A расположена вне прямой (рис. 29). Обозначим через A' точку,

симметричную A относительно a. Как мы уже знаем из теоремы 2.3, прямая, перпендикулярная a, после симметрии относительно a переходит сама в себя. А это означает, что если она проходила через A, то она должна проходить и через A'. Следовательно, эта прямая является единственной.

Из теоремы 2.4 следует, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не могут пересечься (т. к. в противном случае через их точку пересечения проходили бы две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой), а значит, являются параллельными. Итак, мы доказали, что параллельные прямые в самом деле существуют.

Теорема 2.4 подсказывает нам также и способ построения прямой, перпендикулярной данной, проходящей через точку, расположенную вне данной прямой. Если точка A расположена вне прямой a, то, построив сначала точку A', симметричную A относительно a, и проведя прямую AA', мы построим нужный перпендикуляр к a, проходящий через точку A.

Биссектриса угла



Последнее понятие, связанное с углом, которое мы рассмотрим в этом параграфе,—это понятие *биссектрисы*.

Луч с началом в вершине данного угла, лежащий внутри этого угла и делящий его на два равных угла, называется *биссектрисой* этого угла.

Из определения биссектрисы следует, что прямая, на которой лежит биссектриса, является осью симметрии угла.

Задачи, задания, вопросы

1. Проверьте свой глазомер. Проведите на листе бумаги луч и постройте при помощи одной линейки углы величиной в 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120°, 135°, 150°, 165°, одной из сторон которых будет этот луч. С помощью транспортира проверьте точность сделанного вами «на глаз» построения.

2 в. Чему равен угол, если известно, что он на 40° больше угла, с ним смежного?

3 в. Чему равен угол, если известно, что он в пять раз меньше угла, с ним смежного?

4 п. Какой из двух углов, первый или второй, больше и на сколько, если известно, что сумма величины первого угла с углом, смежным со вторым, равна 200°?

5 в. На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Один из четырех образовавшихся углов равен 92°. Чему равен угол между прямыми?

6. Три пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на 6 углов. Два из этих 6 углов равны 28° и 36°. Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?

7. Четыре пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на 8 углов. Три из этих 8 углов равны 52°, 94° и 16°. Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?

8. Какое наибольшее число лучей можно провести через данную точку плоскости, чтобы все углы, сторонами которых они являются, были бы тупыми?

9. Какое наименьшее число лучей с началом в одной точке можно провести на плоскости, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были бы острыми?

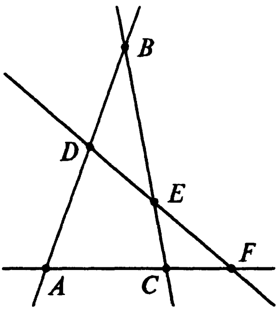


Рис. 30

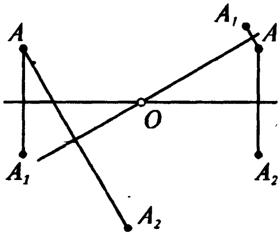
10. На плоскости проведены 4 попарно пересекающиеся прямые. Точки их пересечения обозначены, как на рисунке 30. Рассмотрим углы: $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$, $\angle DBC$, $\angle DAC$, $\angle DBE$, $\angle DEC$, $\angle BED$, $\angle CEF$, $\angle CFE$, $\angle CFD$. Какие из этих обозначений соответствуют одному и тому же углу? Какие углы являются вертикальными? Какие смежными?

11 в. Через вершину угла величины α проведена прямая, перпендикулярная его биссектрисе. Какие углы образует эта прямая со сторонами угла?

12 в. На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Докажите, что биссектрисы четырех образовавшихся углов лежат на двух перпендикулярных прямых.

13. Угол AOB равен $40°$, а угол BOC равен $80°$. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC?

14 п. Докажите, что угол между биссектрисами углов MOA и MOB равен половине угла AOB.



15 в. На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся под углом $30°$ в точке O. Пусть A — некоторая точка плоскости, A_1 — точка, симметричная A относительно одной из этих прямых, A_2 — точка, симметричная A относительно другой прямой. Чему равен угол A_1OA_2? (Рассмотрите различные случаи расположения точки A.)

16 т. На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть A — некоторая точка плоскости, точки A_1 и A_2 симметричны A относительно данных прямых. Докажите, что угол A_1OA_2 в два раза больше угла между прямыми.

17 ПТ. На плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Последовательно отражая точку A относительно одной из этих прямых, а затем полученную точку относительно другой, получим точку A_1. Докажите, что точки A и A_1 симметричны относительно точки O.

18 П. Используя результат предыдущей задачи, докажите что при центральной симметрии, любая фигура переходит в равную ей фигуру.

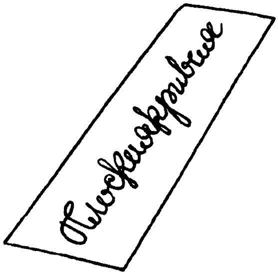
19 П. Докажите, что в результате симметрии относительно точки, не лежащей на прямой, прямая переходит в параллельную прямую.

20 Т. На плоскости проведены две прямые a и b, пересекающиеся в точке A, O — некоторая точка плоскости. Прямые a_1 и b_1 симметричны a и b соответственно относительно точки O. Пусть теперь A_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1, B — точка пересечения прямых a и b_1, B_1 — точка пересечения прямых a_1 и b. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

21 П. Дана прямая a и точка A вне этой прямой. Докажите, что через A можно провести прямую, параллельную a.

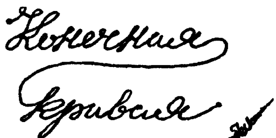
22 Т. Из точки O на плоскости выходят 4 луча, следующих друг за другом по часовой стрелке: OA, OB, OC и OD. Известно, что сумма углов AOB и COD равна $180°$. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

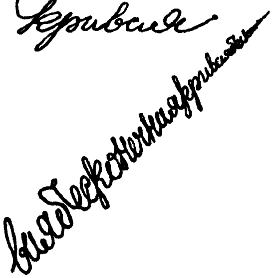
23. На бумаге проведены две пересекающиеся прямые, но их точка пересечения недоступна. В этом месте оказалась дырка на бумаге. Предложите способ, с помощью которого можно было бы измерить угол между этими прямыми.



2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность

Плоские кривые, ломаные





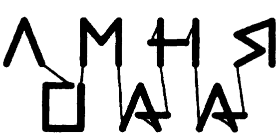
Плоскую линию, которую можно изобразить на листе бумаги, не отрывая карандаша от листа, мы будем называть *плоской* кривой или просто кривой.

Кривая может быть: *конечной* и *бесконечной*, *замкнутой* и *незамкнутой*, *самопересекающейся* и *несамопересекающейся*. Все эти названия говорят сами за себя и вы легко сможете определить, к какому виду относится та или иная кривая.

Например, прямая, хоть это и звучит немного странно, является частным случаем кривой, причем кривой, бесконечной в обе стороны. А отрезок прямой — пример конечной кривой. И прямая, и отрезок — незамкнутые и несамопересекающиеся кривые. А окружность — это пример конечной, замкнутой, несамопересекающейся кривой.

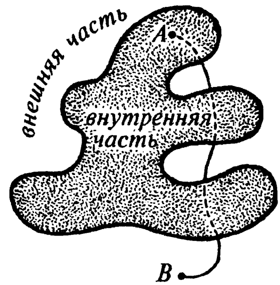
Если кривая состоит из конечного числа отрезков прямых линий, то она называется *ломаной*.

Концы отрезков — *вершины* ломаной, сами отрезки — *звенья* или *стороны* ломаной.



Любая замкнутая кривая, не пересекающаяся сама с собой, ограничивает плоскую фигуру и делит плоскость на две части — *внутреннюю* и *внешнюю* по отношению к этой фигуре.

При этом, если точка A принадлежит внутренней области, а точка B — внешней, то, двигаясь из A и B по любой кривой, мы пересечем данную замкнутую кривую *нечетное* число раз. Это понятно, ведь при каждом пересечении мы переходим из внутренней области во внешнюю или обратно и сами эти переходы чередуются. При одном пересечении мы перешли из внутренней во внешнюю, после двух — вернулись обратно, после трех — вновь попадаем во внешнюю область и т. д.



Многоугольники

Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, ограничивает *многоугольник.*

Звенья этой ломаной называются *сторонами* многоугольника.

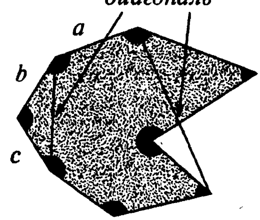
Если число сторон многоугольника известно, то вместо слова «много» ставится соответствующее число. Так, получаем: треугольник, пятиугольник, стоугольник и даже тысяча-девятьсот-девяносто-пяти-угольник.

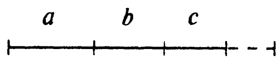
Отрезки, соединяющие две несоседние вершины многоугольника, называются *диагоналями* многоугольника.

Сумма длин всех сторон многоугольника называется *периметром* многоугольника.

Угол многоугольника задается его вершиной и лучами, идущими по выходящим из этой вершины сторонам. При этом мы допускаем, чтобы углы многоугольника превышали 180°.

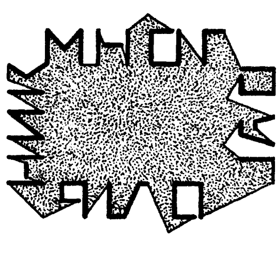
Если все углы многоугольника меньше 180°, то этот многоугольник называется *выпуклым.* В нашем курсе большей частью будут изучаться свойства выпуклых многоугольников.





периметр многоугольника

углы многоугольника



Легко видеть, что любой треугольник является выпуклым.

Окружность и круг

Совсем иначе, чем многоугольник, определяется окружность.

Окружность — это замкнутая плоская кривая, состоящая из всех точек плоскости, удаленных от данной точки O на данное расстояние. При этом точка O называется *центром* окружности, а расстояние от O до точки окружности — ее *радиусом.*

Радиусом мы будем называть также любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности.

Итак, окружность — это множество или совокупность точек плоскости, обладающих определенным свойством. Это свойство — постоянство расстояния до заданной точки.

Наше определение как бы подтверждает, что кривая, изображаемая при помощи циркуля, в самом деле является окружностью.

Фигура, ограниченная окружностью, называется *кругом.*

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой.* Вообще, отрезок, соединяющий две точки любой кривой, является хордой для этой кривой.

Хорда, проходящая через центр окружности,— *диаметр* окружности.

Окружность и круг обладают многими поистине замечательными свойствами. В некотором смысле, это самые симметричные линия и фигура.

У окружности и круга есть центр и бесконечно много осей симметрии.

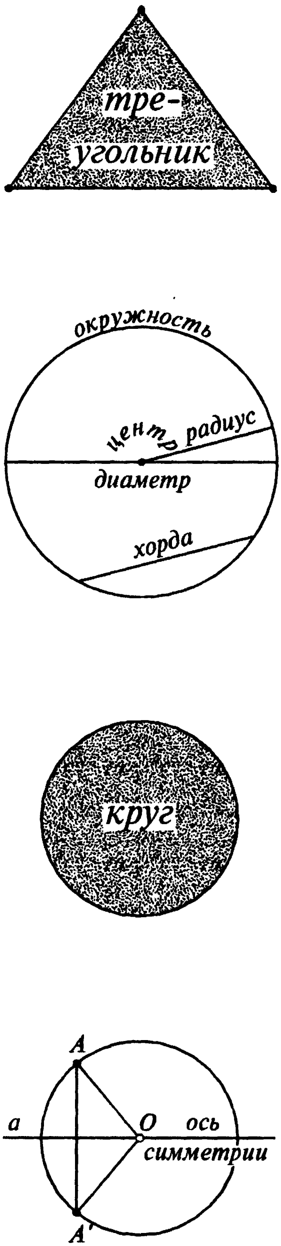


Рис. 31

Теорема 2.5.

Любая прямая, проходящая через центр окружности, является ее осью симметрии.

Утверждение этой теоремы совершенно очевидно. Мы все же докажем ее по той лишь причине, что важные факты (а этот факт очень важен!) полезно формулировать в виде теорем, а теоремы положено доказывать.

Доказательство. Мы будем исходить из того, что окружность состоит из всех точек плоскости, удаленных на одно и то же расстояние от ее центра. Пусть A — некоторая точка окружности с центром в точке O (рис. 31). Проведем через O произвольную прямую a.

Если A лежит на прямой a, то в результате симметрии относительно a точка A останется на месте.

Если же A не принадлежит прямой a, то в результате симметрии она перейдет в некоторую точку A', а отрезок OA — в отрезок OA'. По свойству симметрии $OA = OA'$, а значит и точка A' принадлежит нашей окружности. Но при этой симметрии точка A' в свою очередь перейдет в A. Короче говоря, при симметрии относительно прямой a точки A и A', лежащие на окружности, просто поменяются местами. Из всего этого следует, что вся окружность перейдет сама в себя. Теорема доказана.

Задачи, задания, вопросы

1. В скольких точках прямая может пересечь границу: а) треугольника; б) четырехугольника? (Считаем, что прямая не проходит через вершины.)

2. Какие фигуры могут образоваться при пересечении двух: а) треугольников; б) выпуклых четырехугольников?

3 в. Найдите периметр треугольника со сторонами: а) 3, 5, 7; б) 0,1, 100,1, 100,01; в) 7,3, 5,4, 12,6; г) $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{11}$, $\frac{11}{13}$; д) $\frac{2}{3}$, $\frac{2}{7}$, $\frac{22}{23}$.

4 в. В треугольнике ABC известны стороны: $AB=5$, $BC=7$, $CA=9$. На стороне CA взята точка M так, что $CM:MA=5:7$. Какой из треугольников, CMB или AMB, имеет больший периметр и на сколько?

5. Стороны треугольника равны 4, 7 и 9. Через вершину треугольника, противоположную меньшей его стороне, проведена прямая, делящая его периметр пополам. В каком отношении эта прямая делит меньшую сторону треугольника?

6. Периметр четырехугольника равен 118. Одна из его диагоналей делит четырехугольник на два треугольника с периметрами 77 и 83. Чему равна эта диагональ?

7 т. Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник, две несоседние стороны которого лежат на одной прямой?

8 т. Может ли при пересечении двух четырехугольников образоваться: а) шестиугольник; б) восьмиугольник; в) десятиугольник; г) четыре четырехугольника?

9 т. Возможно ли, чтобы все стороны десятиугольника располагались на пяти прямых?

10. Имеет ли смысл понятие «между» для трех точек, расположенных на окружности?

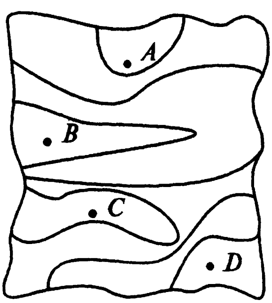


Рис. 32

11 п. Ученик нарисовал замкнутую кривую без самопересечений, ограничивающую весьма сложную фигуру. От его рисунка остался лишь небольшой клочок бумаги (рис. 32), на котором отмечены несколько точек. Где расположены точки B, C и D, во внутренней или во внешней области соответствующей фигуры, если известно, что точка A принадлежит внутренней области?

12. Три черепахи A, B и C — ползут по дороге:

«Я ползу первой», — с гордостью заявляет A.

«Слава Богу, я — не последняя», — утверждает B.

«Главное, что я обогнала A», — размышляет C.

Как бы вы смогли это объяснить?

13. Комната имеет форму многоугольника, изображенного на рисунке 33. Укажите, где можно расположить источник света, чтобы он осветил всю комнату. Как называется фигура, заполняемая этими точками?

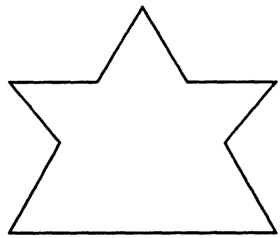


Рис. 33

14 т. Придумайте комнату, имеющую вид многоугольника такой формы, чтобы ее нельзя было всю осветить одной лампой, но можно двумя.

15 т. Придумайте комнату такой формы, чтобы в ней можно было указать точку, из которой ни одна из стен не видна полностью.

16 в. Возможен ли треугольник с двумя прямыми углами?

17 п. На листе бумаги изображен четырехугольник. Каким способом можно проверить, имеет ли он центр симметрии?

18. Сколько всего диагоналей имеет шестиугольник, семиугольник, стоугольник?

19 т. Может ли многоугольник иметь ровно 10 диагоналей? 20 диагоналей? 30 диагоналей?

20 т. Возможно ли, чтобы у пятиугольника какие-то три диагонали пересекались в одной точке?

21. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. На какие многоугольники оказался разделенным пятиугольник?

22 т. Проведены на плоскости 4 прямые, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько многоугольников при этом образовалось? Какие это многоугольники?

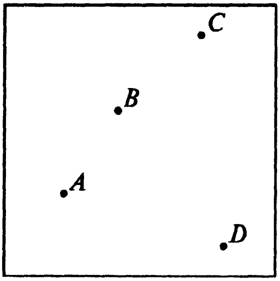


Рис. 34

Проведем еще пятую прямую, не параллельную ни одной из уже проведенных. Пусть эта пятая прямая проведена так, что все точки пересечения предыдущих располагаются по одну сторону от пятой. Подсчитайте, сколько и каких многоугольников образовалось? Окрасьте все получившиеся на плоскости области в два цвета так, чтобы любые две соседние были бы окрашены в разный цвет.

Начнем перемещать пятую прямую параллельно самой себе и проследим, как при этом будут меняться число и вид получающихся многоугольников. Как надо изменять окраску в два цвета, чтобы всякий раз соседние области оставались окрашенными в разные цвета? Сделайте соответствующие рисунки.

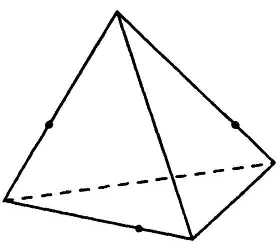


Рис. 35

23. Нарисуйте произвольный треугольник и отметьте точку O. Постройте треугольник, симметричный изображенному относительно точки O.

24. Выполните предыдущее задание, взяв вместо треугольника четырехугольник, затем окружность.

25. Даны две окружности разных радиусов и с разными центрами. Постройте прямую, являющуюся осью симметрии обеих окружностей.

26 т. Внутри треугольника дана точка O. Как найти на сторонах этого треугольника две точки A и B так, чтобы отрезок AB содержал точку O и делился этой точкой пополам?

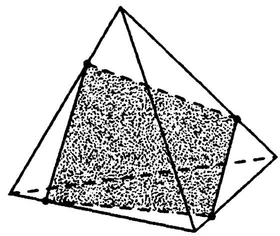


Рис. 36

27 т. Изобразите с помощью циркуля окружность и отметьте в круге любую точку A. Как провести через A хорду окружности, для которой A является серединой?

28 т. На плоскости отмечены 4 точки (см. рис. 34). В каждой точке находится прожектор, освещающий угол в $90°$. Как направить каждый из прожекторов, чтобы вся плоскость была освещена?

29 пт. Докажите, что многоугольник не может иметь два центра симметрии.

30 т. Многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом $60°$. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник? Можно ли утверждать, что у него есть по крайней мере еще одна ось симметрии?

31. Какие многоугольники могут получиться при пересечении треугольной пирамиды с плоскостью?

32. Дана треугольная пирамида, на ребрах которой отмечены три точки (см. рис. 35). Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через отмеченные точки.

33. Ученик изобразил треугольную пирамиду и сечение ее плоскостью (рис. 36). Как вы думаете, возможно ли такое сечение?

34. Кусок веревки выложен на столе как показано на рис. 37. (Из рисунка понятно, какой участок веревки при пересечении проходит под другим.) В каких случаях, потянув за концы веревки, мы получим на ней узел, а в каких — нет?

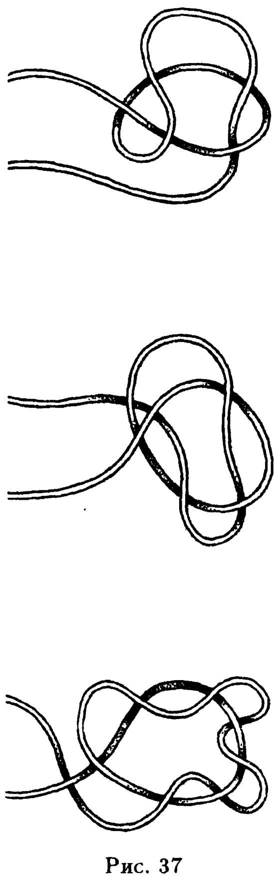
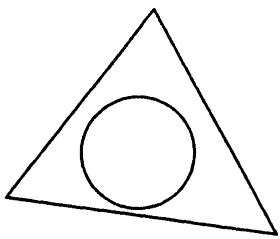


Рис. 37

Глава 3

Треугольник и окружность. Начальные сведения



Треугольник и окружность являются двумя важнейшими фигурами планиметрии, и поэтому мы в первую очередь будем изучать свойства этих фигур. С ними также связаны многие методы, используемые при решении различных геометрических задач.

В этой главе мы лишь начнем знакомство с треугольником и окружностью, докажем несколько теорем, в основном относящихся к геометрии треугольника.

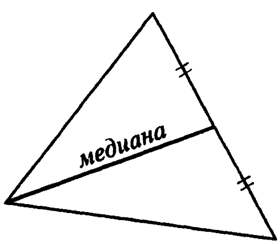


Рис. 38

3.1. Равнобедренный треугольник

Некоторые понятия, связанные с треугольником

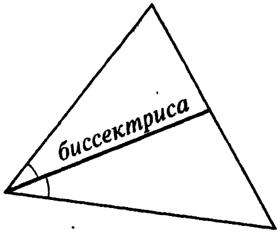


Рис. 39

С каждым треугольником связан целый ряд отрезков и линий, носящих специальные названия. Отрезок прямой, соединяющий какую-то вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется *медианой* треугольника (рис. 38).

Отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до точки пересечения со стороной треугольника называется *биссектрисой* треугольника (рис. 39).

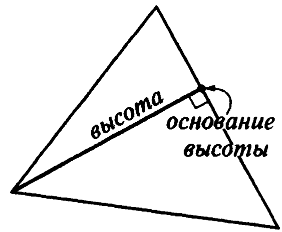


Рис. 40

Проведем через вершину треугольника прямую, перпендикулярную противоположной стороне (а точнее, перпендикулярно прямой, содержащей противоположную сторону). Отрезок этой прямой между вершиной и стороной треугольника (или ее продолжением) называется *высотой* треугольника.

Конец высоты, отличный от вершины, называется *основанием* высоты (рис. 40, 41).

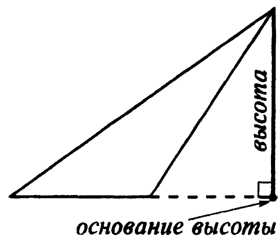
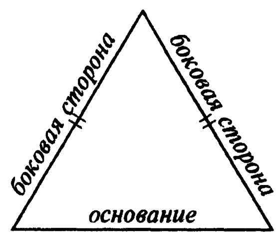


Рис. 41

Понятно, что у каждого треугольника есть три медианы, три биссектрисы и три высоты.

Равнобедренный треугольник. Основные свойства

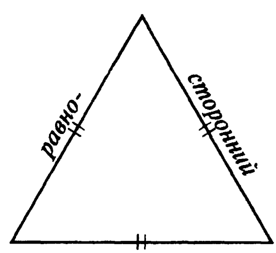
Треугольник с двумя равными сторонами называется *равнобедренным*, при этом равные стороны называются *боковыми* сторонами, а третья сторона — *основанием* равнобедренного треугольника.



равнобедренный треугольник

Если у треугольника равны все три стороны, то он *равносторонний*.

Основные свойства равнобедренного треугольника мы сформулируем в виде теоремы.



треугольник

Теорема 3.1.

В любом равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.

Доказательство. Оба эти свойства доказываются совершенно одинаково. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Пусть

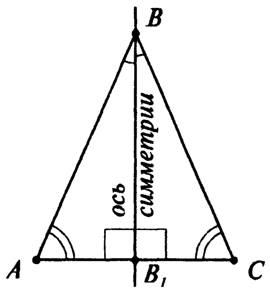


Рис. 42

BB_1 — биссектриса этого треугольника (рис. 42). Как известно, прямая BB_1 является осью симметрии угла ABC. Но ввиду равенства $AB = BC$ при этой симметрии точка A переходит в C. Следовательно, треугольники ABB_1 и CBB_1 равны. Отсюда все и следует. Ведь в равных фигурах равны все соответствующие элементы. Значит, $\angle BAB_1 = \angle BCB_1$. Пункт 1 доказан. Кроме того, $AB_1 = CB_1$, то есть BB_1 является медианой, и $\angle BB_1A = \angle BB_1C = 90°$, то есть BB_1 также и высота треугольника ABC.

Наша теорема о равнобедренном треугольнике имеет непосредственное отношение к свойствам окружности. Ведь любую хорду окружности можно рассматривать как основание равнобедренного треугольника, противоположная вершина которого расположена в центре окружности. Этот прием часто используется при доказательстве различных свойств окружности и решении задач.

Свойство хорд окружности

Непосредственным следствием теоремы 3.1 является теорема 3.2, в которой говорится об одном важном свойстве хорд окружности.

Теорема 3.2.

Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду этой окружности, делит хорду пополам.

Это же можно выразить и несколько иначе.

Диаметр окружности, перпендикулярной хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Для доказательства нам достаточно рассмотреть любой треугольник OPK, где PK — некоторая хорда окружности, а O — центр (рис. 43).

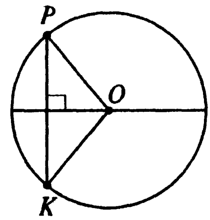


Рис. 43

Этот треугольник равнобедренный: $OP=OK$. А теперь мы можем воспользоваться п. 2 теоремы 3.1 Перпендикуляр, опущенный из вершины O на PK, делит PK пополам.

Пересечение двух окружностей, а также прямой и окружности

На основании личного опыта, многократных наблюдений мы хорошо знаем, что две окружности или окружность и прямая могут пересечься не более чем в двух точках. Это настолько кажется очевидным, что не нуждается ни в каком доказательстве.

И все же, как доказать это свойство, если опираться на факты, доказанные нами в этой и предыдущей главах?

Теорема 3.3.

Окружность и прямая, а также две окружности могут пересечься не более чем в двух точках.

При этом точки пересечения окружности с прямой симметричны относительно перпендикуляра к этой прямой, проходящего через центр, а точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, проходящей через их центры.

Подчеркнем, что эта теорема утверждает лишь то, что число точек пересечения окружности и прямой, а также двух окружностей, не может равняться 3, 4 и т. д.

Доказательство. Начнем со случая пересекающихся окружности и прямой.

Если прямая проходит через центр окружности, то наше утверждение вполне очевидно. На прямой есть ровно две точки, удаленные от данной точки этой прямой на определенное расстояние.

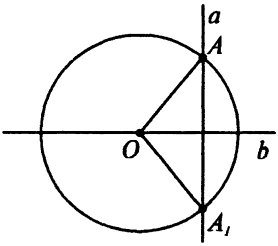


Рис. 44

Рассмотрим теперь общий случай (рис. 44). Пусть окружность с центром O пересекается с прямой a в точке A. Опустим из O перпендикуляр b на прямую a. Если A_1 — еще одна точка пересечения прямой a с окружностью, то треугольник AOA_1 является равнобедренным с основанием AA_1. По теореме 3.1 (п. 2) перпендикуляр b делит отрезок AA_1 пополам, или, иначе, A_1 симметрична A относительно b. Это означает, что, помимо точки A, прямая a может пересечься с нашей окружностью не более чем еще в одной точке.

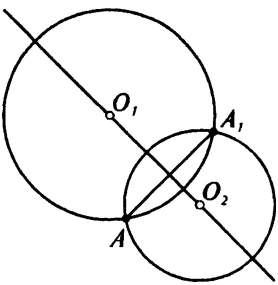


Рис. 45

Теперь перейдем к двум пересекающимся окружностям. Рассмотрим две пересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 45). Пусть A — какая-то из точек пересечения этих двух окружностей, не лежащая на прямой O_1O_2. Если точек пересечения более одной, то такая точка A найдется. Зафиксируем эту точку. Мы утверждаем, что помимо точки A наши окружности могут пересечься еще в единственной точке — симметричной A относительно прямой O_1O_2.

В самом деле, пусть A_1 — какая-то точка пересечения наших окружностей, отличная от A. Прямая, проходящая через O_1 перпендикулярно AA_1, делит AA_1 пополам. Это следует из теоремы 3.2, ведь AA_1 — хорда в окружности с центром O_1. Точно так же пополам делит AA_1 прямая, проходящая через O_2 перпендикулярно AA_1. Значит, эти два перпендикуляра совпадают с прямой O_1O_2. То есть мы доказали, что A_1 симметрична A относительно прямой O_1O_2. Значит, число точек пересечения двух окружностей не более двух.

Задачи, задания, вопросы

1. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?

2 в. Докажите, что у равностороннего треугольника равны все углы.

3 в. Две стороны треугольника равны 3 и 4. Медиана, проведенная к третьей стороне, делит этот треугольник на два. Найдите разность периметров получившихся треугольников.

4 в. В треугольнике ABC известны стороны $AB=5$, $AC=7$. На стороне AB взята точка M так, что $AM:MB=2:3$, а на стороне AC — точка K, $AK:KC=2:5$. В каком отношении биссектриса угла A делит отрезок MK?

5 в. Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

6. Докажите, что радиусы двух равных пересекающихся окружностей, проведенные в точку их пересечения, образуют равные углы с общей хордой.

7. В окружности проведены два диаметра. Докажите, что концы диаметров служат вершинами четырехугольника, противоположные стороны которого равны.

8 в. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны медианы, проведенные к боковым сторонам.

9 п. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На этих сторонах взяты соответственно точки K и M

так, что $BK = BM$. Докажите, что $CK = AM$.

10 п. В плоскости даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что можно выбрать на плоскости две прямые таким образом, что в результате двух последовательных симметрий (сначала относительно первой, а затем — второй прямой) точка A перейдет в A_1, а точка B — в B_1.

11 п. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) три медианы пересекаются в одной точке; б) три биссектрисы пересекаются в одной точке; в) три высоты пересекаются в одной точке (возможно, для этого две из них надо продолжить за основание высоты).

12 т. Докажите, что если в четырехугольнике равны все его стороны, то диагонали перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.

13 т. Можно ли два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами расположить так, чтобы один лежал внутри другого?

14. Изобразите треугольники со сторонами: а) 8, 10, 12; б) 6, 8, 10; в) 6, 8, 12; г) 6, 10, 12.

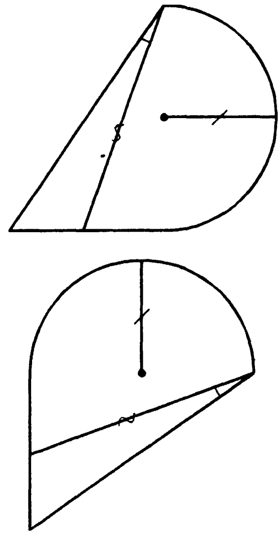
В каждом из этих треугольников проведите: 1) три медианы; 2) три биссектрисы; 3) три высоты; 4) медиану, биссектрису и высоту из одной вершины (любой). Постарайтесь все эти построения выполнить как можно точнее и аккуратнее. (Самое трудное — построение биссектрисы. Можно его делать «на глазок».)

Попробуйте сделать какие-нибудь выводы. Например, какая из трех линий, выходящих из одной вершины, лежит между двумя другими.

3.2. Признаки равенства треугольников

Как мы знаем, равные фигуры—это такие фигуры, которые можно совместить друг с другом, наложить друг на друга так, чтобы они совпали.

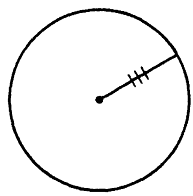
А как все же можно установить равенство двух фигур? Нельзя же всякий раз совмещать их друг с другом. Равенство каких элементов—отрезков, углов или чего-то иного—обеспечивает и равенство самих фигур?



у равных фигур равны все соответствующие элементы

Мы знаем, что два отрезка равны, если равны их длины. Равенство радиусов дает нам и равенство окружностей. А как быть с треугольниками? Равенство каких элементов двух треугольников обеспечивает нам равенство самих треугольников? При этом надо, чтобы число этих элементов было бы как можно меньше.

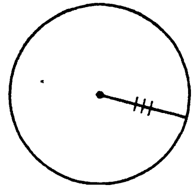
Полностью ответить на только что поставленный вопрос вряд ли возможно. Однако во многих практических и теоретических случаях удобно пользоваться следующими признаками равенства треугольников.



равные окружности

⇅

равные радиусы



Первый признак равенства треугольников

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 46). Пусть в этих треугольниках равны стороны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, а также угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, чтобы угол $B_1A_1C_1$ совпал с углом BAC. При этом мы можем расположить треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB, а сторона A_1C_1 — со стороной AC. (В случае необходимости вместо треугольника $A_1B_1C_1$ можно рассматривать равный ему «перевернутый» треугольник, т. е. треугольник, симметричный $A_1B_1C_1$ относительно произвольной прямой.) Тогда наши треугольники полностью совпадут, поскольку совпадут все их вершины.

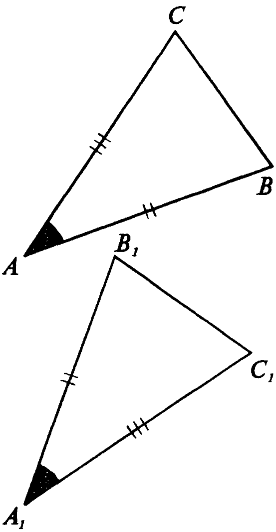


Рис. 46

Второй признак равенства треугольников

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (рис. 47).

Поступим так же, как и в предыдущем случае. Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы совпали стороны BC и B_1C_1 и прилегающие к ним углы. Как и в предыдущем случае, при необходимости треугольник $A_1B_1C_1$ можно перевернуть обратной стороной. Тогда наши треугольники полностью совпадут. Значит, они равны.

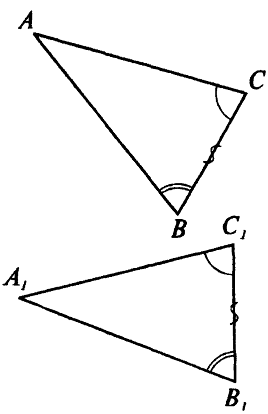


Рис. 47

Третий признак равенства треугольников

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 48). Перенесем треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB, при этом должны совпасть вершины A_1 и A, B_1 и B. Тогда вершины C и C_1 будут принадлежать пересечению двух окружностей с центрами A и B и соответствующими радиусами AC и BC. Но по теореме 3.3 две окружности пересекаются в двух точках, симметричных относительно линии их центров. Значит, вершина C_1 совпадает с C или будет ей симметрична относительно AB. В обоих случаях это означает равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$.

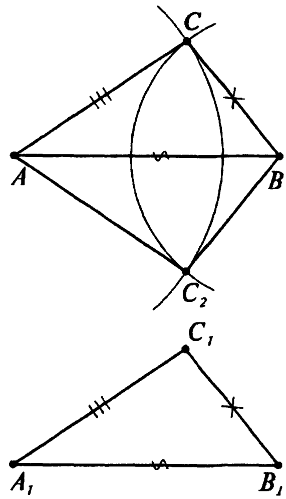
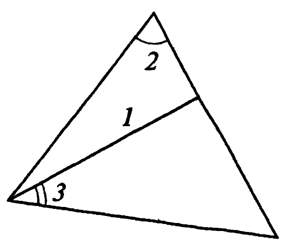


Рис. 48

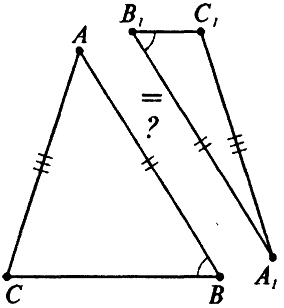
Как мы видим, для всех трех признаков характерно равенство трех элементов. И это не случайно. Треугольник, как правило, определяется заданием именно трех элементов. И если эти три элемента определяют единственный треугольник, то справедлив и соответствующий признак равенства треугольников.



треугольник, как правило, задается тремя элементами

Однако, это далеко не всегда имеет место. Решим например следующую задачу.

Задача 1. *Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$. Обязательно ли такие треугольники равны?*



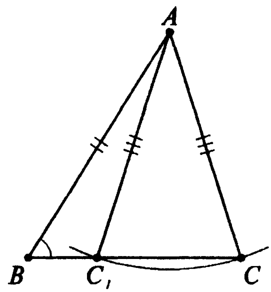
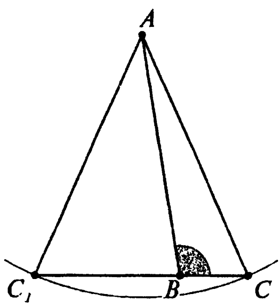


Рис. 49



Для того, чтобы доказать, что такие треугольники могут и не быть равными, нам достаточно предъявить два неравных треугольника, у которых равны указанные в условии элементы. Как говорят математики, построить опровергающий пример.

Решение. Рассмотрим на плоскости какой-нибудь острый угол, вершину которого обозначим буквой B (рис. 49). Возьмем на одной из его сторон точку A и с центром в A нарисуем окружность, которая пересекает другую сторону угла в двух точках. Обозначим эти точки через C и C_1. Один из двух треугольников — это ABC, а другой — ABC_1 (можно считать, что точки A и A_1, B и B_1 совпадают). Как видим, эти треугольники не равны, хотя и удовлетворяют всем условиям нашей задачи.

Однако, если потребовать, чтобы равные углы в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ были бы не острыми, то эти треугольники непременно будут равными. Дело в том, что в этом случае одна из точек пересечения окружности с прямой, на которой лежит вторая сторона угла, окажется вне угла. Ведь согласно теореме 3.3 эти точки симметричны относительно перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую. То есть наши условия в этом случае определяют единственный треугольник.

Итак, справедлива теорема, которую можно было бы назвать четвертым признаком равенства треугольников, но мы не станем ее так называть, поскольку это противоречит геометрическим традициям.

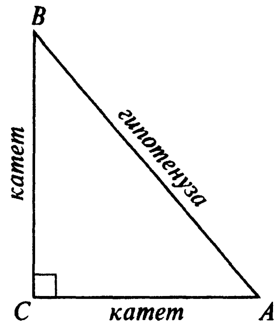
Теорема 3.4.

Если в треугольниках $A_1B_1C_1$ и ABC имеют место равенства $AB =$

$= A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, *причем указанные углы не являются острыми, то эти треугольники равны.*

Утверждение этой теоремы следует из наших предыдущих рассуждений. Ведь, как нами было показано, мы можем построить единственный треугольник с заданными сторонами и углом.

Прямоугольный треугольник. Признак равенства прямоугольных треугольников



В частности, соответствующий признак справедлив для прямоугольных треугольников. Но прежде, чем его сформулировать, напомним, что прямоугольным называется треугольник, у которого есть прямой угол. (Как мы знаем, у треугольника не может быть более одного прямого угла.)

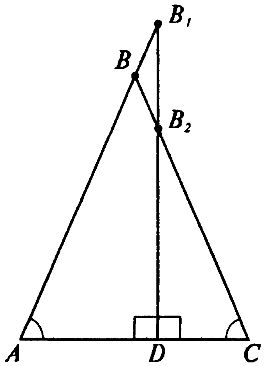
Стороны, заключающие прямой угол прямоугольного треугольника, называются *катетами* прямоугольного треугольника. Сторона, противоположная прямому углу, называется *гипотенузой* прямоугольного треугольника.

Из теоремы 3.4 следует специальный признак равенства прямоугольных треугольников.

Два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.

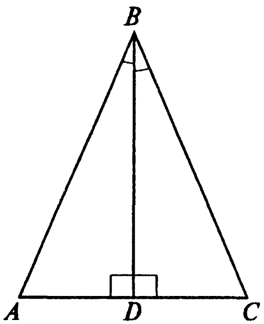
Кроме того, из 1-го признака равенства треугольников следует равенство прямоугольных треугольников по двум катетам.

Вернемся теперь к равнобедренному треугольнику. Оказывается, теорема 3.1



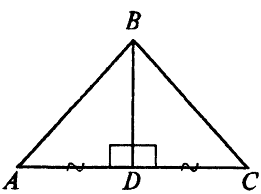
$\angle BAC = \angle BCA \rightarrow AB = BC$

Рис. 50



$\triangle ABD = \triangle CBD$
(по 2-ому признаку)

Рис. 51



$\triangle ABD = \triangle CBD$
(по 1-ому признаку)

Рис. 52

указывает не просто на свойства равнобедренного треугольника. Эти свойства характерны только для равнобедренного треугольника.

Признаки равнобедренного треугольника

Если в треугольнике ABC выполняется одно из следующих условий: 1) $\angle BAC = \angle BCA$; 2) биссектриса и высота, выходящие из вершины B, совпадают; 3) высота и медиана, выходящие из вершины B, совпадают; 4) медиана и биссектриса, выходящие из вершины B, совпадают, то этот треугольник равнобедренный, причем $AB = BC$.

Доказательство. Докажем это утверждение последовательно по пунктам.

1) Обозначим через D середину AC и проведем через D перпендикуляр к AC (рис. 50). Пусть этот перпендикуляр пересекается с прямой AB в точке B_1, а с прямой CB в точке B_2, как на рисунке. Тогда по второму признаку треугольники ADB_1 и CDB_2 равны, поскольку $AD = CD$, углы B_1AD и B_2CD равны по условию, а равенство углов B_1DA и B_2DC следует из того, что B_1 и B_2 лежат на перпендикуляре к AC, проходящем через D.

Таким образом, $DB_1 = DB_2$, точки B_1 и B_2 должны совпасть друг с другом, а значит, совпасть с точкой B. Следовательно, $AB = CB$.

Этот пункт можно доказать и иначе. При симметрии относительно перпендикуляра к AC, проходящего через точку D, точка C переходит в A, а точка A — в C. Угол A переходит в угол C, а угол C — в угол A. Прямая CB переходит в прямую AB, прямая AB — в прямую CB.

Значит, треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$.

2) Если BD является биссектрисой и высотой треугольника ABC (рис. 51), то треугольники ABD и CBD равны также по второму признаку равенства треугольников, поскольку сторона BD у них общая, а углы, к ней прилежащие, равны. Значит, $AB = CB$.

3) Если BD является медианой и высотой (рис. 52), то треугольники ABD и CBD равны по первому признаку: BD — общая, $AD = DC$, $\angle BDA = \angle BDC$.

4) Проведем медиану BD и продолжим ее за точку D (рис. 53). На этом продолжении возьмем точку B_1 так, что $DB_1 = DB$. Треугольники ABD и CB_1D являются равными по первому признаку: углы ADB и CDB_1 равны как вертикальные, кроме того, $DB = DB_1$, $AD = DC$. Следовательно, $CB_1 = AB$ и $\angle DB_1C = \angle DBA$. Но последний угол равен $\angle DBC$, поскольку по условию BD — и медиана, и биссектриса. Таким образом, в треугольнике BCB_1 равны углы при стороне BB_1. Значит, в соответствии с первым пунктом нашей теоремы $CB_1 = CB$. А раз $CB_1 = AB$, то $CB = AB$, что и требовалось.

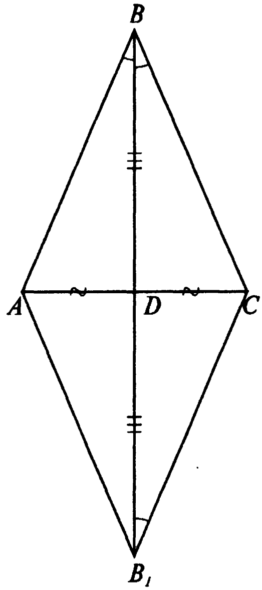


Рис. 53

Задачи, задания, вопросы

1. На рисунке 54: $BA = AM$, $AC = AK$, $\angle BAC = \angle KAM$. Перечислите все пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, C, K и M.

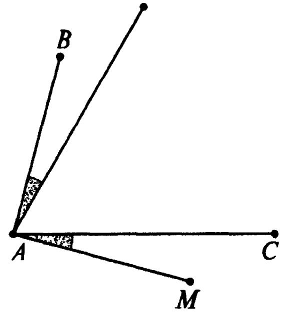


Рис. 54

2 в. Две прямые пересекаются в точке A. На одной прямой взяты точки B и C, а на другой — P и K так, что $AB = AC$, $AP = AK$. Докажите, что $BP = CK$.

3 в. В треугольнике ABC проведена медиана BB_1. На луче BB_1 взята точка

M так, что $B_1M = BB_1$. Докажите, что $MA = BC$, $MC = BA$.

4 т. В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Пусть M — такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает сторону BC в точке K, $BM = AB_1$, $\angle MBB_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.

5 п. На боковых сторонах равнобедренного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников (отличные от вершин равнобедренного) с серединой основания равнобедренного треугольника, равны между собой.

6 п. На двух перпендикулярных прямых от точки пересечения отложены четыре равных отрезка. Докажите, что концы этих отрезков, отличные от общего, служат вершинами четырехугольника с равными сторонами и равными углами.

7 т. Докажите, что если у четырехугольника все стороны и все углы равны, то его диагонали равны и перпендикулярны.

8 т. Докажите, что если у четырехугольника противоположные стороны попарно равны, то точка пересечения его диагоналей является центром симметрии четырехугольника.

9. На листе бумаги изображен треугольник. Постройте какой-нибудь треугольник, ему равный.

10. На листе бумаги изображен угол. Постройте какой-нибудь угол, равный изображенному.

11 в. Докажите, что в окружности равные хорды видны из центра под равными углами. (Угол, под которым отрезок AB виден из точки O,—это $\angle AOB$.)

12 в. Докажите, что середины равных хорд окружности расположены на окружности с тем же центром.

13 т. На плоскости изображен угол в $19°$. Постройте угол в $1°$.

14 т. В треугольнике ABC известны стороны $AB=4$, $BC=5$, $CA=7$. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает AC в точке K. Через K проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла BCA, которая пересекает BC в точке M. И, наконец, через M проходит прямая, перпендикулярная биссектрисе угла ABC, которая пересекает AB в точке P. Найдите длину отрезка AP.

15 т. В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 6$. На BC взята точка M так, что $CM = 1$. Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла ACB, пересекает AC в точке N, а прямая, проходящая через N перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую AB в точке K. Найдите BK и AK.

16 т. В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. На сторонах AB, BC и CA взяты точки K, L и M так, что прямые KL, LM и MK перпендикулярны соответственно биссектрисам углов ABC, BCA и CAB. На какие отрезки делят точки K, L и M стороны треугольника ABC?

17. Окружность с центром в точке O образует при пересечении со сторонами треугольника ABC равные хорды. Докажите, что у треугольников ABO, BCO и CAO равны высоты, выходящие из вершины O.

18. Будут ли равными два четырехугольника, если у них все стороны соответственно равны?

19. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников соответственно равны все стороны и по одному углу, то такие четырехугольники равны.

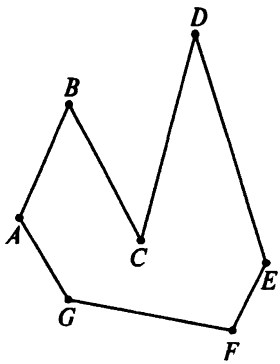


Рис. 55

20. На рисунке 55 изображен некоторый многоугольник. Представьте себе, что вам дано задание перерисовать этот многоугольник в тетрадь. Вы, конечно, легко это сделаете. Но тут звонит ваш товарищ, у которого дома не оказалось учебника. Постарайтесь ему помочь и сообщить по телефону необходимые данные, чтобы он смог выполнить задание. Запишите то, что вы ему продиктуете.

21 п. Три черепахи находятся в точках A, B и C, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Они одновременно с одинаковой скоростью начинают ползти. Черепаха, находившаяся в A, ползет по прямой AB в направлении к B. Черепаха из B ползет в C, из C — ползет в A. Докажите, что во все моменты времени движения черепахи располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

22 п. Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60°.

23 т. На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника взяты точки K, M и P соответственно так, что $AK = BM = CP$. Докажите, что прямые AM, BP и CK при пересечении образуют равносторонний треугольник.

24. ABC и APK — два равных треугольника. Известно, что $AB = 3$, $AC =$

$= AP = 4$, $AK = 5$. Чему равны стороны BC и PK?

25. В треугольнике ABC известны углы: $\angle BAC = 52°$, $\angle BCA = 44°$. Из вершины B провели медиану и высоту и продолжили их за сторону AC на расстояния, равные им. Получили точки P и K. Чему равен $\angle PCK$?

26. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B соответственно относительно некоторой прямой. Докажите равенство треугольников AA_1B и AA_1B_1, а также ABB_1 и A_1BB_1.

27 п. Попробуйте еще раз доказать все три признака равенства треугольников, используя понятие осевой симметрии. Для этого докажите, что если на плоскости имеются два треугольника, для которых выполняется один из трех признаков равенства треугольников, то всегда один можно перевести в другой при помощи не более, чем трех осевых симметрий.

28 п. На рисунке 56 изображена треугольная пирамида с вершинами A, B, C и D. Докажите, что все грани этой пирамиды являются равными треугольниками, если: а) $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$; б) $AB = CD$, $AC = BD$, $\angle ABD = \angle BDC$; в) $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CAB$, $\angle DAB = \angle ABC$; г) $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle BAD$.

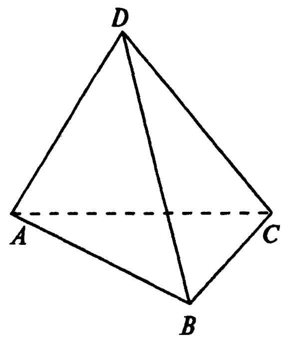
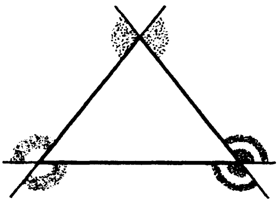
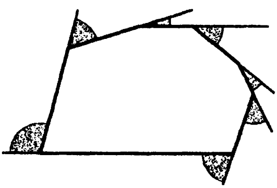


Рис. 56

3.3. Неравенства в треугольнике. Касание окружности с прямой и окружностью



внешние углы



Теорема о внешнем угле треугольника

Мы начнем этот параграф с одной очень важной для построения геометрической теории теоремы. Правда, ее жизнь окажется не очень продолжительной и в дальнейшем она будет заменена на более сильное утверждение. Но сейчас она нам очень нужна. Прежде чем мы ее сформулируем, введем понятие внешнего угла треугольника.

Углы, смежные с углами треугольника, называются *внешними* углами треугольника. Понятие внешнего угла распространяется и на выпуклые многоугольники.

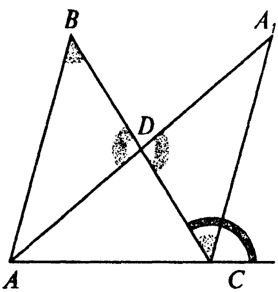


Рис. 57

Теорема 3.5.

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и какой-либо из его внешних углов, скажем, угол, смежный с углом ACB (рис. 57). Докажем, что он больше угла B.

Проведем медиану AD и продолжим ее за точку D на такое же расстояние. Получим точку A_1. Можно сказать и иначе: возьмем точку A_1, симметричную A относительно середины BC — точки D. (Этим приемом мы уже пользовались. Запомните его!)

Треугольник DCA_1 равен треугольнику DBA (по первому признаку), откуда $\angle DBA = \angle DCA_1$. Но угол DCA_1 меньше угла, смежного с углом ACB, поскольку составляет часть от него. Теорема доказана.

Неравенство между сторонами и углами треугольника

На основании теоремы 3.5 можно доказать еще несколько утверждений, важных для теории и полезных для решения геометрических задач.

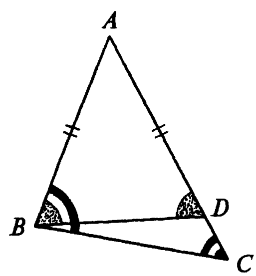


Рис. 58

Теорема 3.6.

В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол. И наоборот, против большего угла лежит большая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB (рис. 58). Возьмем на стороне AC точку D так, что $AD = AB$. В равнобедренном треугольнике ABD, как нам известно, равны углы ABD и ADB. Но угол ABD меньше угла ABC, а угол ADB, по теореме о внешнем угле, больше угла BCA. Значит, тем более, угол ABC больше угла BCA.

А теперь с другой стороны — от углов к сторонам.

Пусть в треугольнике ABC угол ABC больше угла ACB. Тогда из только что доказанного следует, что сторона AB не может быть больше стороны AC. Стороны AB и AC не могут быть и равными. Остается единственное: $AB < AC$.

Свойство перпендикуляра

Из теоремы 3.6 следует одно важное свойство перпендикуляра к прямой, которое ввиду его важности мы запишем как отдельную теорему.

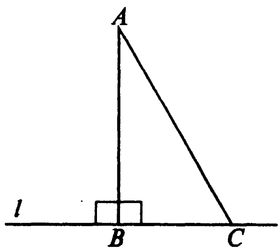


Рис. 59

Теорема 3.7.

Пусть A — некоторая точка, расположенная вне прямой l, B — такая точка на l, что прямая AB перпендикулярна l, C — произвольная точка на l, отличная от B. Тогда $AB < AC$.

То, что AB перпендикулярна l, можно записать следующим образом: $AB \perp l$.

Точку B называют *основанием* перпендикуляра, опущенного из A на l, или *проекцией* A на l.

Утверждение теоремы 3.7 кратко выражают следующим образом: перпендикуляр меньше любой наклонной (наклонной является AC), или — кратчайшим путем от точки к прямой является перпендикуляр к прямой.

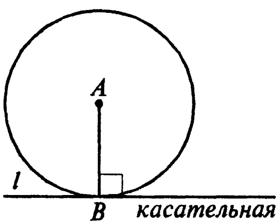


Рис. 60

Доказательство. Поскольку угол ACB острый, а угол ABC — прямой (рис. 59), т. е. угол ABC больше угла ACB, то по предыдущей теореме $AB < AC$.

Если мы теперь построим окружность с центром в точке A и радиусом AB, то эта окружность будет иметь единственную общую точку с прямой l — точку B (рис. 60).

Касательная к окружности

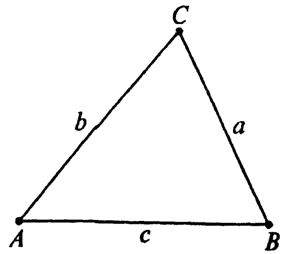
Если прямая имеет единственную общую точку с окружностью, то такая прямая называется *касательной* к окружности.

Значит, прямая l является касательной к окружности с центром в A и радиусом AB.

По существу, мы получили еще одно утверждение, являющееся просто переформулировкой теоремы 3.7

Теорема 3.8.

Касательная к окружности перпендикулярна радиусу окружности, проведенному в точку касания.



Неравенство треугольника

Тот факт, что кратчайшим путем между двумя точками плоскости является отрезок прямой линии, в частности, означает, что *в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей.* Это очень важное свойство носит название *неравенства треугольника.*

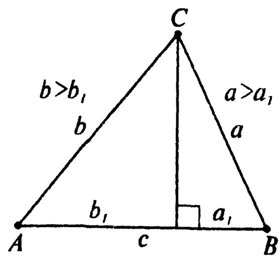


Рис. 61

Переведем это утверждение на алгебраический язык. В геометрии для сторон треугольника ABC общепринятыми считаются обозначения $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Теперь в буквенной форме мы имеем три неравенства: $a+b > c$, $b+c > a$, $c + a > b$.

Из этих неравенств следует, что $c - b < a$, $c - a < b$..., или в словесной форме: *разность любых двух сторон треугольника меньше третьей стороны треугольника.*

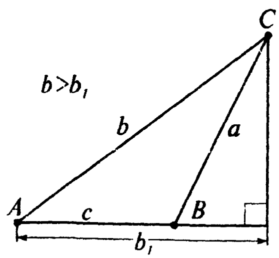


Рис. 62

Неравенство треугольника следует также из свойства перпендикуляра (теорема 3.7). Как оно получается из этой теоремы, ясно из рисунков 61, 62. (В доказательстве, проиллюстрированном на рис. 61, мы пользуемся одним простым свойством неравенств: одноименные неравенства можно почленно складывать, в данном случае $b > b_1$, $a > a_1$. Значит,

$a+b>b_1+a_1=c$.) Случай, изображенный на рис. 62, разберите самостоятельно.

Касание двух окружностей

А теперь вновь перейдем к окружностям.

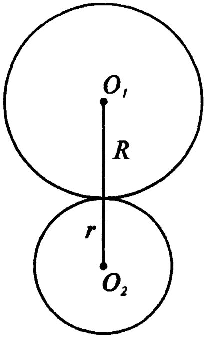
Если две окружности пересекаются в двух точках, то на основании неравенства треугольника, сумма их радиусов больше расстояния между центрами.

А при каких условиях две окружности будут иметь единственную общую точку,— касаться друг друга?

Понятно, что эта единственная общая точка должна быть расположена на прямой, проходящей через центры окружностей.

Возможны два вида касания двух окружностей: *внешнее* и *внутреннее*.

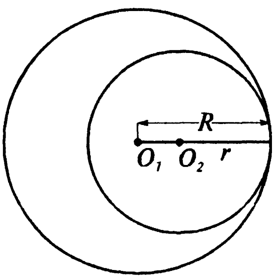
Если расстояние между центрами равно сумме радиусов окружностей (рис. 63), то они касаются друг друга *внешним образом*.



внешнее касание
$O_1O_2=R+r$

Рис. 63

Если же расстояние между центрами равно разности радиусов, то касание *внутреннее*. При этом большая окружность содержит меньшую (рис. 64).



внутреннее касание
$O_1O_2=R-r$

Рис. 64

Задачи, задания, вопросы

1. Вам известно, что кратчайшим расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр. А сколь велик соответствующий выигрыш в пути? Проделайте следующий опыт. Пусть AB — перпендикуляр к прямой, причем B — основание перпендикуляра, C — некоторая другая точка прямой. Попробуйте сначала оценить «на глаз» с точностью до 0,1 см длину AC, а затем, сделав построение, измерить это расстояние с такой же точностью, если: а) $AB=5$ см,

$BC=1$ см; б) $AB=10$ см, $BC=1$ см. Интересно, намного ли вы ошиблись?

2 в. Пусть O — центр окружности радиуса R, A — точка плоскости, расположенная на расстоянии a от O. Среди точек окружности есть самая близкая точка к A и самая далекая от A точка. Обозначим первую через B, а вторую — через C. Как построить точки B и C? Чему равны отрезки AB и AC, если: а) $R=3$, $a=4$; б) $R=5$, $a=3$? Выразите AB и AC через R и a.

3 вт. На плоскости расположены 4 точки: A, B, C и D. Известно, что $AB=1{,}3$, $BC=2{,}4$, $CD=1{,}8$, $AD=5{,}5$. Найдите AC.

4 п. На плоскости расположены 4 точки: A, B, C и D. Известно, что $AB=3$, $BC=4$, $CD=5$, $AC+BD\leqslant 2$. Найдите AD.

5 п. Чему равна длина стороны AB треугольника ABC, если $BC=1$, $CA=7$, и длина стороны AB также выражается целым числом?

6 в. Найдите периметр равнобедренного треугольника, в котором известны длины двух сторон, равные 3,9 и 7,9.

7 п. Имеются два отрезка, длины которых a и b. Известно, что существует треугольник со сторонами $a+5b$, $5a+6b$ и $3a+2b$. Что больше: a или b?

8 в. В каких пределах может меняться периметр треугольника, у которого две стороны равны a и b?

9 в. Даны две окружности с радиусами R и r, расстояние между их центрами равно a. Пусть A — точка одной из окружностей, B — на другой. Как построить точки A и B, для которых длина отрезка AB является наибольшей и точки, для которых она наименьшая? Какова наибольшая и какова наименьшая длины отрезка AB, если: а) $R=5$,

$r=2$, $a=8$; б) $R=7$, $r=3$, $a=5$. Выразите эти величины через R, r и a.

10 п. Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и каждый пошел по какой-то прямой. Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время.

11 в. Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, между которыми она проходит.

12. Докажите, что в выпуклом четырехугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше половины периметра.

13. Дана окружность радиусом 3 и точка A на расстоянии 5 от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.

14 т. На плоскости имеются две окружности. Чему равен радиус окружности, касающейся данных и имеющей центр на прямой,проходящей через их центры, если радиусы данных и расстояние между их центрами соответственно равны: а) 1, 3, 5; б) 5, 2, 1; в) 3, 4, 5? Сколько решений имеет задача?

15 в. Имеются два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами. Докажите, что основание меньше у того треугольника, у которого меньше противолежащий основанию угол.

16 т. Жители трех деревень, расположенных в вершинах треугольника, решили вырыть общий колодец. При этом они хотят расположить колодец в таком месте, чтобы общий путь всех семей за водой был бы как можно меньше. Каждая семья должна сходить за водой один раз в день. Где следует вырыть колодец, если в деревне A живет 100 семей, в деревне B — 200 семей, а в деревне C — 300 семей?

17 т. В вершинах треугольника расположены центры трех попарно касающихся окружностей. Найдите радиусы этих окружностей, если стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Сколько решений имеет задача?

18. Сколько различных треугольников можно составить из отрезков, длины которых равны 1, 2, 3, 4 и 5?

19 т. Ученик измерил стороны и диагональ некоторого четырехугольника и получившиеся числа расположил в порядке возрастания: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна диагональ четырехугольника?

20 п. Пусть x, y и z — произвольные положительные числа. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$.

21 п. Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что существуют положительные числа x, y и z такие, что $a=x+y$, $b=y+z$, $c=z+x$.

22 т. Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ угол DAB больше угла DBA, угол DBC больше угла DCB. Какой из двух углов больше, DAC или DCA?

Глава 4

Виды геометрических задач и методы их решения

Отвечая на вопрос, чем уроки математики отличаются от уроков по другим предметам, любой ученик наверняка скажет о том, что на уроках математики решают задачи. Научиться хорошо решать задачи по математике удается не всякому, но учиться решать задачи, учиться думать, тренировать и развивать свои мозги при помощи математических задач должен каждый ученик.

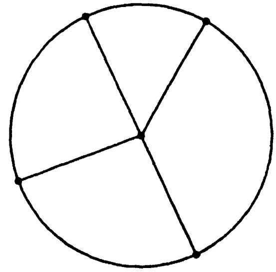
В этой главе мы обсудим некоторые виды задач, характерных именно для геометрии. Кроме того, мы начнем разговор о методах и приемах, используемых при решении геометрических задач.

4.1. Геометрические места точек

Давайте вспомним, как мы определяли окружность. Вспомнили? Теперь мы добавим к этому, что окружность мы определяли как *геометрическое место точек*. Что это значит?

Под геометрическим местом точек мы будем понимать множество точек, обладающих определенным геометрическим свойством по отношению к какой-либо геометрической фигуре или другому объекту.

В случае окружности наше множество состоит из всех точек плоскости, удаленных на заданное расстояние от фиксированной точки плоскости. В дальнейшем мы выясним, что это не единственный способ задать окружность как геометрическое место точек (ГМТ).



окружность - это ГМТ

Очень часто в качестве геометрического места точек выступает прямая линия или части прямой. Вот некоторые важнейшие случаи.

Серединный перпендикуляр к отрезку

Что представляет собой геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от концов заданного отрезка прямой на плоскости?

Сформулируем задачу иначе.

Задача 1. *Дан отрезок AB, лежащий в некоторой плоскости. Найдите все точки M плоскости, для которых $AM = MB$.*

Ответ на поставленный вопрос без труда следует из известных нам свойств равнобедренного треугольника.

Искомым геометрическим местом точек является прямая, перпендикулярная AB и проходящая через середину AB (рис. 65). Такую прямую называют *серединным перпендикуляром* к AB. Серединный перпендикуляр является осью симметрии, при которой A переходит в B (и наоборот).

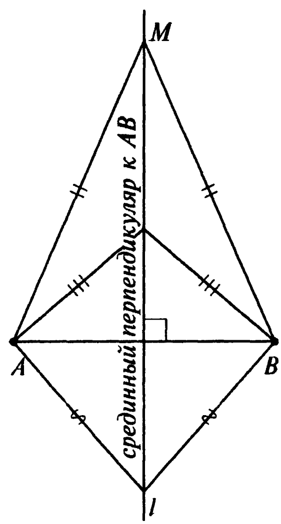


Рис. 65

В самом деле, если M — такая точка плоскости, что $AM = MB$, то по свойству равнобедренного треугольника M принадлежит серединному перпендикуляру. (Отдельно рассматриваем середину AB).

Если же M принадлежит серединному перпендикуляру к AB, то (см. пункт 3 теоремы о признаках равнобедренного треугольника из параграфа 3.2) треугольник AMB — равнобедренный и $AM = MB$.

Мы специально столь подробно остановились на обосновании этого весьма простого и очевидного факта. (Возможно даже, что в результате такой чрезмерной подробности для некоторых он стал менее очевидным и понятным, чем сначала. К сожалению, так бывает.) Очень важно, чтобы вы обратили внимание на две стороны, две части, имеющиеся в любой задаче на нахождение геометрического места точек.

1. С одной стороны, надо указать, какой линии, какому множеству принадлежат точки, обладающие заданным свойством. В нашем случае точки, для которых $AM = MB$, лежат на серединном перпендикуляре к AB.

2. С другой стороны, надо доказать, что все точки найденной линии, найденного множества обладают заданным свойством. В нашей задаче: для всех точек M серединного перпендикуляра к AB имеет место равенство $AM = MB$.

Биссектриса угла

Биссектрису угла также можно рассматривать как геометрическое место точек.

Задача 2. *Докажите, что геометрическим местом точек, расположенных внутри данного угла и равноудаленных от его сторон, является биссектриса этого угла.*

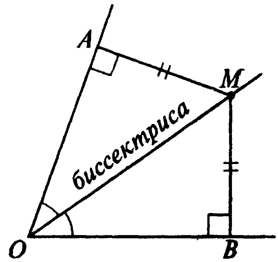


Рис. 66

Вновь, как и в предыдущем случае, мы должны провести два рассуждения.

1. Если точка M расположена внутри угла и находится на равных расстояниях от его сторон, то M лежит на биссектрисе этого угла.

Опустив перпендикуляры MA и MB на стороны угла (рис. 66) из равенства $MA = MB$ по соответствующему признаку равенства прямоугольных треугольников получим, что треугольники OMA и OMB равны. Значит, равны углы MOA и MOB, то есть OM — биссектриса угла AOB.

2. Если точка M лежит на биссектрисе, то M равноудалена от сторон угла.

Это утверждение также вполне очевидно. Ведь при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису, стороны угла перейдут друг в друга. (Напомним: через любую точку плоскости проходит единственный перпендикуляр к заданной прямой.)

Как видите, мы достаточно подробно решили здесь две (честно говоря, не такие уж трудные) задачи. Это, однако, не означает, что так же подробно вы должны записывать решение всех предлагаемых вам задач. Важно понимать, что это можно сделать, записать подробное решение нескольких задач.

Задачи, задания, вопросы

1 вп. Пусть A и B — две точки плоскости. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых: а) $AM < BM$; б) $AM \geqslant 2AB$; в) $AM + MB = AB$; г) $AM < AB$, $BM \geqslant AB$; д) точки A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника; е) $\angle ABM$ — наибольший угол треугольника ABM; ж) $\angle BAM$ — наименьший угол треугольника ABM; з) $\angle AMB$ — средний по величине угол треугольника AMB.

2 вп. Пусть A, B и C — три точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, таких, что: а) прямая CM пересекает отрезок AB; б) луч CM пересекает отрезок AB; в) отрезок CM пересекает отрезок AB; г) $AM = BM = CM$; д) ближайшей к M точкой среди точек A, B и C является A.

3 п. На плоскости даны две пересекающиеся прямые: p и q. Найдите геометрическое место точек M: а) равноудаленных от p и q, б) расположенных ближе к p, чем к q.

4. На плоскости расположены две пересекающиеся прямые. Из точки их пересечения одновременно начинают каждая по своей прямой двигаться две точки. Скорости точек равны. Какую линию описывает середина отрезка с концами в движущихся точках?

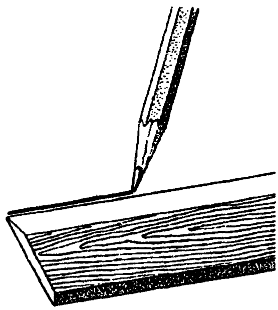
5 п. На плоскости изображена окружность радиуса 1. Найти геометрическое место точек M плоскости, для каждой из которых расстояние до ближайшей от M точки окружности равно 1.

6 т. На плоскости проведены три пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, равноудаленных от этих прямых.

7 в. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей плоскости, проходящих через две данные точки A и B этой плоскости.

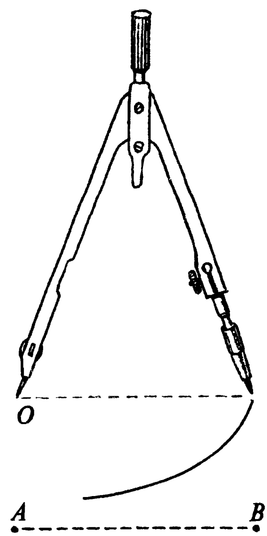
8. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей плоскости, пересекающих в двух точках отрезок AB этой плоскости.

9 т. Пусть A и B — точки плоскости, расстояние между которыми $AB = 1$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых расстояния до A и B выражаются целыми числами.



4.2. Задачи на построение

Геометрические задачи на построение, возможно, самые древние математические задачи вообще. Кому-то они сейчас могут показаться не очень интересными и нужными, какими-то надуманными. И в самом деле, где и зачем может понадобиться умение с помощью циркуля и линейки построить правильный семнадцатиугольник или треугольник по трем высотам, или даже просто сделать построение параллельной прямой. Современные технические устройства сделают все эти построения и быстрее, и точнее, чем любой человек, а заодно смогут выполнить и такие построения, которые просто невозможно выполнить при помощи циркуля и линейки.



И все же без задач на построение геометрия перестала бы быть геометрией. Нельзя по-настоящему почувствовать геометрию, подружиться с нею, если пройти мимо этих, кажущихся сейчас немного странными, задач на построение. С задачами на построение вы уже встречались и в предыдущих классах, и в предыдущих параграфах этой книги. Сейчас мы рассмотрим несколько несложных задач, которые должен уметь решать каждый ученик, и которые в дальнейшем будут служить отдельными «деталями» при более сложных построениях.

Но прежде чем мы перейдем к рассмотрению конкретных задач, напомним о тех условностях, которые связаны с задачами на построение.

Во всех таких задачах, если не сделано никаких оговорок, речь идет о построении с помощью циркуля и линейки.

С помощью линейки мы можем через любые две точки плоскости провести прямую линию. И ничего более! Математическая линейка не имеет делений.

С помощью циркуля мы можем построить окружность с заданным центром и заданным радиусом. При этом радиус задается указанием таких двух точек на плоскости, расстояние между которыми равно радиусу.

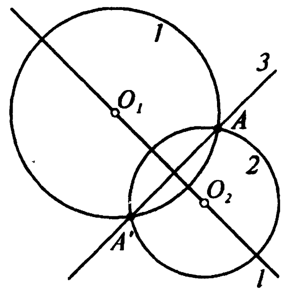
Многие геометрические построения можно реализовывать различными путями. Поэтому надо стараться в каждом отдельном случае найти самую лучшую последовательность построений. Правда, что означает «самая лучшая последовательность», выяснить не всегда легко. Но в некоторых случаях это сделать удается.

Начнем с задачи.

Построение перпендикуляра к прямой

Задача 1. *Дана прямая l и точка A вне этой прямой. Постройте прямую,* *проходящую через A и перпендикулярную l.*

Решение. Для построения перпендикуляра нам достаточно сначала построить точку A', симметричную A относительно l. А для этого построим две окружности с центрами на l и проходящие через A (рис. 67). Вторая точка пересечения этих окружностей и даст нам точку A'. Проведя прямую AA', мы получим искомый перпендикуляр.



AA' перпендикуляр к l

Рис. 67

Наше построение, как видите, очень экономно. Нам потребовалось провести всего две вспомогательные линии—две окружности, третьей линией стал искомый перпендикуляр. Меньшим числом проведенных линий обойтись нельзя.

А как быть, если точка A расположена на прямой l? В этом случае можно было бы построить на прямой l точки B и C, равноудаленные от A, а затем построить серединный перпендикуляр к BC. Но это построение не будет столь же экономным, как для случая, когда A вне прямой l. Несколько позднее, когда мы приобретем нужные знания, мы вернемся к этой задаче.

Деление отрезка пополам

Безусловно, любой из вас, даже тот, кто не слишком хорошо усвоил свойства геометрических фигур, о которых было рассказано в предыдущих главах, справится с задачей деления отрезка пополам. И все же мы остановимся на этой задаче, поскольку она входит в число основных задач на построение.

Задача 2. *Разделите данный отрезок пополам. Или иначе: дан отрезок AB, постройте середину AB.*

Задача сводится к построению серединного перпендикуляра к AB. Точка его пересечения с AB является искомой.

Решение. Построим две одинаковые пересекающиеся окружности с центрами A и B (рис. 68). Проведем прямую через точки их пересечения и найдем точку пересечения этой прямой с AB. Это и будет искомая середина AB.

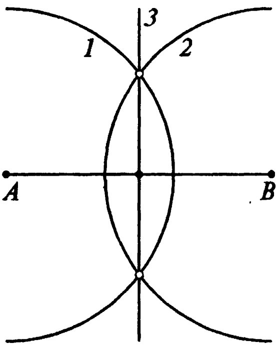


Рис. 68

Построение треугольника, равного данному, и угла, равного данному

Если на плоскости изображен треугольник, то мы без труда сможем в любом месте плоскости построить треугольник, равный изображенному. Будем исходить из третьего признака равенства треугольников.

Откладываем в нужном месте отрезок, равный одной из сторон треугольника. Затем с центрами в концах этого отрезка строим две окружности с радиусами, равными двум другим сторонам. Находим точки пересечения этих окружностей и т. д. (рис. 69).

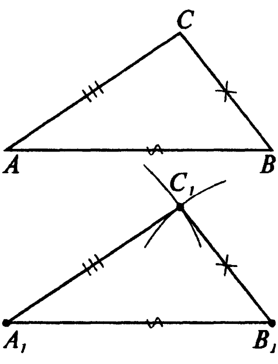


Рис. 69

Точно также осуществляется построение треугольника по трем сторонам. Разница лишь в том, что дано не изображение треугольника, а три отрезка, равные его сторонам.

Умея строить треугольник, равный данному, мы легко справимся и с задачей построения многоугольника, равного изображенному, а также любой фигуры, образованной прямыми, лучами и отрезками.

Решим, например, следующую задачу.

Задача 3. *Постройте угол, равный данному.*

Решение. Это построение легко сводится к построению треугольника, равного данному. Выберем на сторонах угла произвольно по точке. Пусть это будут точки B и C, вершина угла — точка A (рис. 70).

Построив теперь треугольник, равный треугольнику ABC, мы вместе с этим построим и угол, равный данному.

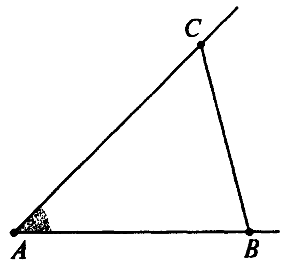


Рис. 70

Построение биссектрисы угла

Задача 4. *Постройте биссектрису данного угла.*

Эта задача также относится к числу учебных задач, которые обязан уметь решать любой ученик.

Решение. Рассмотрим угол с вершиной A. Проведем окружность произвольного радиуса с центром в A. Обозначим через B и C точки ее пересечения со сторонами угла (рис. 71). Теперь построим две пересекающиеся окружности равного радиуса с центрами в B и C. Возьмем точку их пересечения, лежащую внутри угла. Обозначим ее буквой D. Треугольники ABD и ACD равны по трем сторонам. Значит, равными являются углы BAD и CAD. Луч AD является биссектрисой нашего угла.

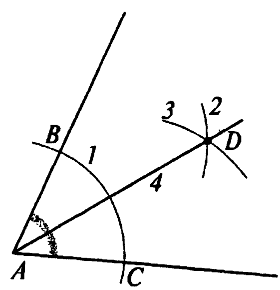


Рис. 71

В отличие от предыдущих задач, справиться с которыми без помощи учебника мог бы любой школьник, задача, о которой сейчас пойдет речь, является более трудной. Во всяком случае, то решение, которое мы вам предложим, найти не очень легко. Да и обоснование правильности построения не столь очевидно.

Построение прямой, параллельной данной

Задача 5. *Дана прямая l и точка A, расположенная вне этой прямой. Постройте прямую, проходящую через A и параллельную l.*

Решение. Построим окружность, проходящую через точку A и пересекающую прямую l в точках B и C (рис. 72) так, что отрезки AB и AC не равны. (Для этого центр окружности не должен лежать на перпендикуляре к прямой l, проходящем через A). Построим теперь еще одну окружность с центром в C и радиусом, равным AB. Среди точек пересечения построенных окружностей есть одна точка, соединив которую с A, мы получим прямую, параллельную l. (Числа 1, 2 и 3 на рис. 72 указывают последовательность проведения линий.) Докажем это. Рассмотрим прямую p, проходящую через центр первой из построенных окружностей и перпендикулярную l.

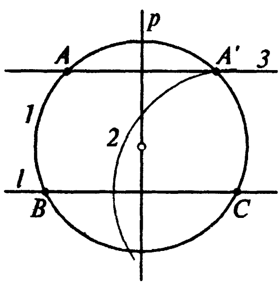


Рис. 72

При симметрии относительно p точки B и C переходят друг в друга. Точка же A перейдет в такую точку A' первой окружности, для которой $CA' = BA$. Это означает, что A' — одна из точек пересечения наших двух окружностей. (Заметим, что A' не может совпасть с A. Вот для чего нам потребовалось условие $AB \neq AC$). Прямые l и AA' перпендикулярны одной прямой p, а значит, они параллельны.

Итак, мы доказали, что среди точек пересечения наших окружностей, в самом деле, есть точка — эта точка A' — такая, что прямая AA' параллельна l. Поскольку две окружности пересекаются не более, чем в двух точках, то выбрать нужную нам точку пересечения, как правило, не трудно.

Построение касательной к окружности

Теперь мы рассмотрим задачу о построении касательной к окружности. Но на этот раз наше построение будет не очень экономным. Можно, конечно, показать и более удобное построение, но для его обоснования нужны геометрические знания, которых у нас пока нет.

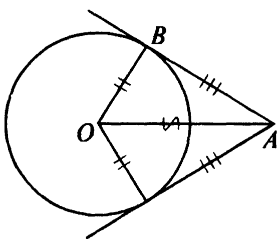
Сейчас же мы хотим подчеркнуть, что, в принципе, задачу о построении касательной вполне можно решить. Кстати, в математике понимание подобной принципиальной возможности очень важно. Часто математики этим вполне удовлетворяются.

А теперь перейдем к нашей задаче.

Задача 6. *Дана окружность, у которой указан центр, и точка A вне этой окружности. Постройте прямую, проходящую через A и касающуюся данной окружности.*

Решение. Обозначим через O центр окружности, а через B — точку касания нашей касательной с окружностью. Как мы знаем, угол ABO прямой. В прямоугольном треугольнике ABO мы знаем катет BO, равный радиусу окружности, и гипотенузу AO. По этим данным мы можем построить треугольник, равный треугольнику ABO (рис. 73). (Вспомните специальный признак равенства прямоугольных треугольников.)

Для этого построим две перпендикулярные прямые в любом месте плоскости. На одной из прямых от точки P — точки их пересечения — отложим отрезок PK, равный радиусу BO. Затем проведем окружность с центром в K и радиусом AO. Обозначим через M точку пересечения этой окружности со второй прямой.



Получившийся прямоугольный треугольник MPK равен треугольнику ABO. Катет MP равен касательной AB. Теперь строим окружность с центром в точке A и радиусом, равным MP. Точки ее пересечения с данной окружностью будут точками касания. Соединяя их с A, получим искомые прямые.

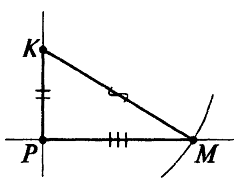


Рис. 73

Кстати, из наших рассуждений следует, что через произвольную точку, расположенную вне окружности, можно провести ровно две прямые, касающиеся этой окружности. При этом отрезки этих прямых от данной точки до точек касания равны. Последнее коротко можно выразить следующим образом: *касательные к окружности из одной точки равны*. Это надо запомнить.

Задачи, задания, вопросы

1. Постройте отрезок, симметричный данному относительно заданной прямой.

2. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте к третьей стороне.

3 в. Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла.

4 вт. Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

5 в. Разделите данную дугу окружности на две равные дуги.

6 в. Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

7 т. Как провести прямую через две точки, если у вас имеется циркуль и линейка, длина которой меньше расстояния между данными точками?

8 т. На плоскости имеются три прямые: l, p и q. Постройте на прямых l и p точки A и B так, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам.

9 т. Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, образующую равные хорды при пересечении с этими окружностями.

10. Разделите пополам данный отрезок, если у вас есть линейка и сломанный циркуль, позволяющий изображать окружность только одного радиуса. А этот радиус меньше половины отрезка.

11. Даны окружность и прямая. Найдите на прямой все точки, касательные из которых к окружности равны данному отрезку.

12 п. На плоскости изображена окружность, центр которой не указан. Постройте центр этой окружности.

13 п. Имеется модель треугольной пирамиды, на гранях которой можно делать геометрические построения. Решите теперь следующие задачи.

а) В двух гранях пирамиды отмечено по одной точке. Постройте на листе бумаги отрезок, равный отрезку прямой, соединяющей отмеченные точки.

б) В одной из граней проведены три прямые, пересекающиеся за пределами этой грани. При продолжении эти прямые образуют треугольник. Постройте на листе бумаги треугольник, равный треугольнику, образованному этими прямыми.

4.3. Кратчайшие пути на плоскости

Как мы знаем, чтобы попасть из одной точки плоскости в другую кратчайшим путем, надо двигаться по прямой линии. Это простейшая задача на отыскание кратчайшего пути. На эту тему есть целый ряд гораздо более сложных, интересных и важных для практики задач. Например, соединить несколько городов дорогами так, чтобы можно было проехать в каждый город из любого другого, а общая длина построенных дорог была бы наименьшей.

В этом параграфе мы рассмотрим одну классическую геометрическую задачу такого рода. Этой задаче очень легко можно придать какой-нибудь занимательный вид. Но мы этого делать не будем и ограничимся сухой математической формулировкой.

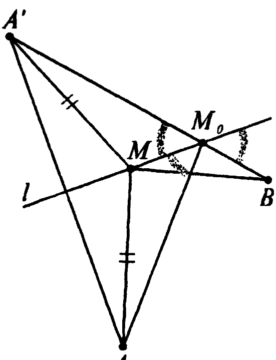


Рис. 74

Задача 1. *Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. Найдите на прямой l такую точку M, чтобы длина двузвенной ломаной AMB была бы наименьшей.*

Иными словами, надо попасть кратчайшим путем из A в B, посетив по дороге прямую l.

Нашу задачу существенно затрудняет то, что точки A и B расположены по одну сторону от l. Вот, если бы ...

Впрочем, не будем все же пытаться изобразить, каким образом смутная догадка может оформиться в настоящее решение. Предъявим само решение.

Решение. Возьмем любую точку M на прямой l. Построим точку A', симметричную A относительно l (рис. 74). Поскольку $AM = A'M$, то длина ломаной AMB всегда равна длине ломаной $A'MB$. Но последняя будет наименьшей, когда она превращается в отрезок прямой. Значит, искомой точкой на l будет точка, в которой ее пересечет отрезок $A'B$. Обозначим ее через M_0.

Из соответствующих свойств углов следует, что для найденной точки M_0 лучи M_0A и M_0B образуют равные углы с l. Именно по такому закону, кстати, происходит отражение света. То есть, если бы мы смогли направить луч света из A, чтобы он, отразившись от прямой l попал в B, то этот луч реализовал бы наш кратчайший путь.

Задачи, задания, вопросы

1 п. На реке расположены два острова A и B. Туристы, отправившись на байдарке от острова A, желают попасть на остров B, побывав поочередно на левом и правом берегах реки. Как они должны проложить свой маршрут, чтобы весь путь имел бы наименьшую длину? (Берега реки — прямые линии.)

2 п. Внутри острого угла отмечена точка A. Найдите на сторонах угла точки B и C так, чтобы периметр треугольника ABC был бы наименьшим.

3 п. Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите на ребре CD точку M так, чтобы длина ломаной AMB была бы наименьшей.

4.4. О решении геометрических задач

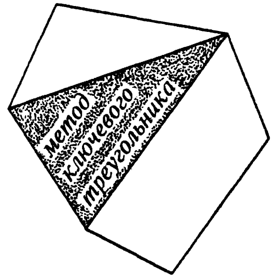
В предыдущих главах и параграфах вам уже встретилось много геометрических задач. Среди них некоторые вам показались интересными, другие — не очень, одни были достаточно легкими, а другие — весьма трудными. Нам кажется, что многие школьники хотели бы научиться решать интересные и трудные задачи. Но как это сделать? Из чего складывается умение решать геометрические задачи?

Конечно, необходимо хорошо знать и понимать теорию, освоить понятия, усвоить теоремы, разобраться в доказательствах и примерах.

Надо учиться делать хорошие, большие и красивые чертежи, а иногда не чертежи, а рисунки. Эти чертежи-рисунки, если они грамотно выполнены, могут сильно облегчить работу над решением, поиск решения.

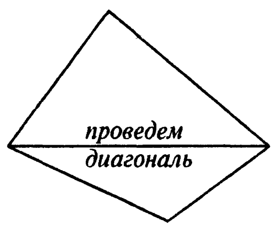
Надо постепенно, по капле, собирать геометрические факты, методы решения задач, отдельные приемы, обращая особое внимание на задачи, отмеченные буквой «П» (полезные). До некоторых методов и приемов самостоятельно додуматься не так-то просто. Но разобравшись в том, как этот метод «работает» на примере одной или нескольких задач, вы в дальнейшем сможете его самостоятельно применять.

Например, в предыдущем параграфе мы разобрали решение одной красивой геометрической задачи о нахождении кратчайшего пути между двумя точками с посещением заданной прямой. После этого задачи, приведенные в конце параграфа, возможно, показались вам не такими уж трудными. Ведь в них (речь идет о двух первых) надо было лишь дважды применить прием, использовавшийся при решении основной задачи.

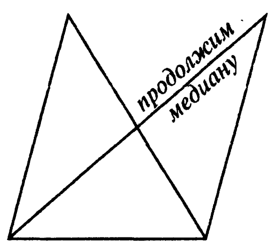


Большинство доказанных нами до сих пор теорем относится к геометрии треугольника. Это не случайно. Ведь треугольник — это простейший из многоугольников, простейшая фигура. Решение очень многих задач сводится к рассмотрению одного или нескольких треугольников. Можно даже говорить о методе «ключевого треугольника». Суть его состоит в том, что в заданной фигуре надо найти треугольник (или треугольники), к изучению которого (которых) сводится решение задачи.

Иногда для этой цели надо сначала провести какое-нибудь дополнительное построение. Например, в четырехугольнике провести диагональ или концы хорды окружности соединить с ее центром.



Следует запомнить некоторые построения, часто используемые в сходных ситуациях. Мы пока хотели бы обратить ваше внимание на одно дополнительное построение, касающееся медианы треугольника. Если в условии задачи фигурирует медиана треугольника, то очень часто помочь решению может продолжение медианы на расстояние, равное ей.



А теперь мы немного поговорим об одном, пожалуй, самом распространенном в школьной практике виде задач, — о задачах на вычисление. Результатом решения этих задач является ответ. Хотя ни в коем случае нельзя все сводить к поиску ответа.

«Ведь ответ-то правильный» — пытается защитить свое решение ученик от «придирок» учителя. Таким ученикам стоит запомнить следующий пример. Возьмем дробь 19/95. Сократим на 9(?): $19/95=1\cancel{9}/\cancel{9}5=1/5$. Ответ правильный.

$$!\ \boxed{\frac{19}{95}=\frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5}=\frac{1}{5}}\ ?$$

Но мы немного отвлеклись. В геометрических задачах на вычисление есть много общего с привычными для нас арифметическими и алгебраическими задачами.

В некоторых случаях решить их можно, последовательно, шаг за шагом вычисляя нужные величины, пока не будет пройден путь от того, что дано, к тому, что нужно найти. В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную задаче 15 из параграфа 3.2

Задача 1. *В треугольнике ABC известны стороны $AB=8$, $BC=9$, $CA=10$. На стороне AC взята точка M так, что $AM=4$. Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла C, пересекает прямую BC в точке P. Прямая, проходящая через P перпендикулярно биссектрисе угла B, пересекает AB в точке Q. И, наконец, прямая, проходящая через Q перпендикулярно биссектрисе угла A, пересекает AC в точке K. Найдите длину отрезка MK.*

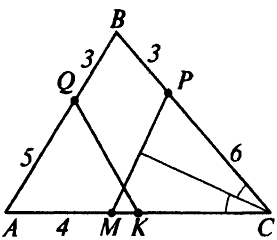


Рис. 75

Решение. Решение этой задачи состоит из нескольких последовательных одинаковых шагов (рис. 75).

1) $MC=AC-AM=10-4=6$. Треугольник MPC равнобедренный с основанием MP, поскольку биссектриса, выходящая из угла C, перпендикулярна MP. Значит, $PC=MC=6$.

2) Точно так же находим $BP=3$, $BQ=BP=3$.

3) $AQ=5$, $AK=AQ=5$.

Значит, длина отрезка MK равна 1.

Но не всегда удается так последовательно, поэтапно получить ответ. В некоторых случаях приходится прибегать к уравнениям.

Рассмотрим следующую задачу, аналогичную задаче 16 из параграфа 3.2.

Задача 2. *Возьмем треугольник ABC со сторонами такими же, как и в предыдущей задаче. На сторонах AC, CB и BA взяты соответственно точки E, D и F так, что ED перпендикулярна биссектрисе угла C, DF перпендикулярна биссектрисе угла B и, наконец, FE перпендикулярна биссектрисе угла A. На какие отрезки точка E делит сторону AC?*

Решение. Обозначим EC через x (рис. 76). Рассуждая так же, как и в предыдущей задаче, последовательно получим $DC = x$, $BD = 9 - x$, $BF = 9 - x$, $AF = 8 - (9 - x) = x - 1$, $AE = AF = x - 1$. Но $AE + EC = 10$, или $(x - 1) + x = 10$, откуда $x = 5{,}5$. Точка E делит сторону AC на отрезки 4,5 и 5,5.

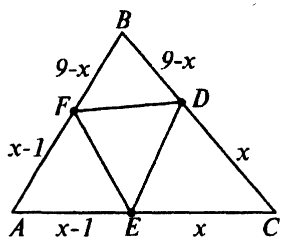


Рис. 76

Важной особенностью многих интересных геометрических задач является их многовариантность. Условие задачи может быть реализовано несколькими различными способами. При решении все эти варианты необходимо рассмотреть, ничего не прозевать. Это в равной степени относится ко всем видам геометрических задач, а мы рассмотрим пример все на ту же тему (с другими числами это задача 17 из параграфа 3.3).

Задача 3. *Найдите радиусы трех попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 8, 9 и 10.*

Решение. Как видим, рассматривается все тот же треугольник. Но этим сход-

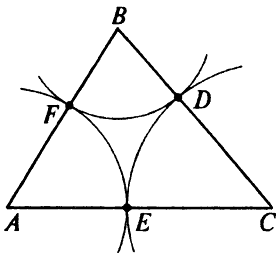


Рис. 77

ство не кончается. Воспользуемся теми же обозначениями, что и в предыдущей задаче (рис. 77). Ввиду равенства $CE = CD$ окружность с центром в C и радиусом CE проходит и через D. Точно так же можно построить окружности с центрами в A и B и проходящие соответственно через E и F, D и F. Эти три окружности будут касаться друг друга внешним образом. Значит, предыдущая задача дает нам решение и этой задачи? Да, но не все. Ведь две окружности могут касаться и внутренним образом.

Возможны еще три(!) случая, например: окружность с центром A содержит две другие (рис.78). Если радиус окружности с центром A равен x, то радиусы окружностей с центрами B и C будут соответственно равны $x - 8$ и $x - 10$. Но сумма радиусов двух меньший окружностей равна $BC = 9$. Получаем уравнение $(x-8)+(x-10)=9$, откуда $x = 13{,}5$.

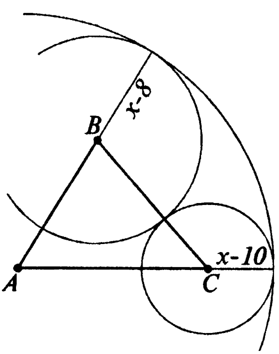


Рис. 78

Радиусы окружностей в этом случае равны 13,5; 5,5; 3,5. Предлагаем вам закончить решение самостоятельно. Мы же приведем полный ответ на вопрос задачи. Всего вариантов в ответе будет 4: (4,5, 3,5, 5,5); (13,5, 5,5, 3,5); (5,5, 13,5, 4,5); (3,5, 4,5, 13,5).

И, заканчивая этот параграф, мы хотели бы задать еще один, немного странный вопрос. Какая из трех рассмотренных задач самая трудная—это ясно. А какая самая интересная по решению и красивая по формулировке?

Задачи на вычисление

1. Точки A, B, C и D в указанной последовательности расположены на прямой, $AB = 2{,}3$, $BC = 3{,}5$, $CD = 1{,}3$.

Точка M лежит на отрезке BC, причем $BM : MC = 3 : 4$. В каком отношении точка M делит отрезок AD?

2. Внутри отрезка AC расположена точка B. Известно, что $AB = 1{,}2$. Отрезки AC и BC служат диаметрами окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

3. Точки K, P и M являются серединами отрезков AB, BC и AC. В каком отношении точка M делит отрезок KP, если $AB = 1$, $BC = 3$, $AC = 4$?

4 т. На прямой расположены точки A, B, C и D, причем $AB = 2$, $CD = 3$. Отрезки AC и BD являются диаметрами двух окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

5 т. На прямой расположены точки A, B, C и D так, что, $AB = 3$, $BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 6$. На каком расстоянии от A может находиться такая точка M этой же прямой, для которой $AM : MD = BM : MC$?

6. Чему равен угол, если известно, что биссектриса смежного с ним угла образует угол $20°$ с одной из сторон этого угла?

7. Через точку на прямой a проведены прямые p и q. Известно, что угол между прямыми a и p равен $20°$, а угол между прямыми a и q равен $80°$. Чему равен угол между прямыми p и q?

8 т. Через одну точку плоскости проведены три прямые, разбивающие плоскость на 6 углов. Известно, что средний по величине угол равен среднему арифметическому наибольшего и наименьшего из образовавшихся углов. Найдите средний по величине угол.

9 т. Две стороны четырехугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит четырехугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырехугольника.

10 т. В треугольнике ABC сторона AB равна 1, а длина стороны BC выражается целым числом. Биссектриса угла A перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B. Найдите периметр треугольника.

11 т. Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$.

12 т. В вершинах A, B, C и D четырехугольника $ABCD$ находятся центры четырех окружностей. Любые две окружности, центры которых расположены в соседних вершинах, касаются друг друга внешним образом. Известны три стороны четырехугольника: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$. Найдите сторону AD.

13 т. Стороны пятиугольника в порядке обхода равны 7, 10, 12, 8 и 9. В вершинах пятиугольника расположены центры пяти окружностей, причем любые две соседние окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус наименьшей окружности.

14 т. Окружность касается сторон угла с вершиной A. Расстояния от A до точек касания равны 5. К окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Известно, что центр окружности расположен вне треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC.

15 т. В пирамиде $ABCD$ известны ребра: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 10$, $AD = 8$. В вершинах пирамиды расположены центры шаров, касающиеся друг друга внешним образом. Найдите ребра BD и CD.

4.5. Доказательства в геометрии

Прежде чем продолжать выстраивать геометрическую теорию, давайте ненадолго остановимся, чтобы подвести первые итоги и обсудить некоторые вопросы, которые, возможно, возникли у тех, кто искренне хотел бы получше узнать и понять геометрию.

Теоремы и доказательства

В математике, в отличие от любой другой науки, есть такие понятия, как *теорема* и *доказательство.*

Да и сама математика стала наукой лишь с появлением в ней теорем и доказательств.

Арифметические задачи и геометрические формулы можно встретить уже в египетских папирусах, написанных в третьем тысячелетии до нашей эры. Но в этих старинных текстах не было самого главного — не было доказательств. А без доказательств нет и самой математики.

А когда же появились первые доказательства?

И тут сквозь дым времен перед нами возникает удивительный человек, знаменитый мудрец из древнегреческого города Милет. С поразительным единодушием историки науки присваивают звание первоматематика Фалесу Милетскому, даты жизни которого 625—527 гг. до нашей эры. Впрочем, лучше назвать Фалеса первогеометром, ведь все его математические достижения связаны с геометрией. (Здесь, наверное, стоит сказать, что само понятие «математика» как

название науки появилось лишь в начале XIX века. До этого ученые, занимавшиеся в нашем понимании математикой, назывались геометрами.) Считают, что первые геометрические теоремы доказаны именно Фалесом. Среди них всем известные теоремы о вертикальных углах и свойстве равнобедренного треугольника (равенство углов при основании). В следующем году вы познакомитесь еще с одной теоремой, которая традиционно называется теоремой Фалеса.

Так что же это такое — теорема?

Под теоремой в математике понимают любое математическое утверждение, справедливость которого устанавливается при помощи *доказательства.*

Довольно часто в теореме можно четко выделить две части: то, что дано, и то, что требуется доказать. То, что дано, называют *условием* теоремы. То, что требуется доказать — *утверждением* теоремы или *заключением.*

Математическое доказательство проводится по четко определенным правилам. Исходя из ранее известных фактов и теорем в соответствии с законами логики, устанавливается справедливость новой теоремы.

Правда, в начале этого учебника мы сформулировали некоторые утверждения, которые были приняты в качестве верных, истинных без всяких доказательств. Эти факты мы как бы объявили очевидными. Математики называют принимаемые без доказательств утверждения *аксиомами.* Мы же назвали их основными свойствами плоскости.

И теоремы, и доказательства появились у нас с самого начала второй главы. И с этого же момента по этому поводу могли появиться различные мнения.

Одни, наверное, считают, что некоторые из доказанных нами теорем вполне очевидны и не нуждаются ни в каких доказательствах. Просто математики играют в какую-то свою игру и навязывают правила этой игры нормальным людям.

Надо сказать, что у тех, кто придерживается подобного мнения, есть вполне достойные союзники. Известный таджикский и персидский поэт и математик Омар Хайям, живший в XI веке, а в те времена сочетание поэзии и математики было явлением типичным, заметил, что Евклид в своих сочинениях доказал многое из того, что не нуждалось в доказательстве. (Здесь, конечно, надо сказать, что геометрию, которую мы изучаем, математики называют евклидовой.)

Другие, наоборот, могут быть недовольны уровнем строгости некоторых из наших рассуждений. Что значит «наложим» один треугольник на другой? Или почему любая прямая пересекает треугольник не более чем в двух точках?

У сторонников такого взгляда также немало союзников, особенно среди профессиональных математиков.

Мы не будем сейчас выяснять, кто здесь больше прав. Не следует даже такой вопрос задавать. Ведь вопросы типа «Кто лучше? Кто хуже?», —большей частью не имеют смысла. Но все же стоит заметить, что если бы человек время от времени не сомневался в очевидных фактах, то мы бы до сих пор считали, что Земля плоская и неподвижная, а Солнце вращается вокруг нее.

Впрочем, к этим проблемам мы еще вернемся в конце курса, а сейчас попробуем разобраться в тех методах доказательства, которыми мы уже пользовались в предыдущих главах. Ведь мы начали «доказывать» без всяких объяснений, рассчитывая лишь на здравый смысл ученика.

Для этого мы поступим очень просто: просмотрим коротко уже известные нам теоремы и выясним суть методов, используемых в наших доказательствах.

Метод от противного

Теорема 2.1. Мы доказали эту теорему при помощи метода, который называется «метод от противного». Суть этого метода вполне отражена в его названии. Вначале мы предполагаем, что утверждение теоремы неверно, после чего с помощью тех или иных рассуждений получаем противоречие либо с исходным предположением, либо с условием теоремы, либо с известным математическим фактом. По-латыни этот метод носит название «reductio ad absurdum», что означает «приведение к абсурду».

Не следует думать, что «метод от противного» такой уж специальный математический метод. Как и в любом математическом методе, в его основе лежит элементарный здравый смысл. Нередко к этому методу в своей работе прибегает следователь. Чтобы установить, кто мог совершить преступление, часто сначала надо установить, кто не мог его совершить.

Метод от противного очень любил Евклид. И все же математики по-разному относятся к этому методу. Некоторые считают его одним из наиболее мощных орудий математики. Другие сравнивают его с жульническим приемом политикана, который поддерживает своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии.

Теоремы как следствие определений

Теорема 2.2 в особых комментариях не нуждается. Все основано на элементарном, доступном и первокласснику рассуждении: если от равных величин отнять поровну, то поровну и останется.

Теорема 2.3 непосредственно следует из свойств двух понятий: «осевая симметрия» и «перпендикулярность». Подобного рода теоремы весьма часто встречаются в математике. Обычно они не очень сложны. Здесь самое главное — четко понимать смысл слов. (В данном случае — «симметрия» и «перпендикулярность».)

Теорема 2.3 — вспомогательная. С ее помощью мы доказываем важную теорему 2.4.

Перебор вариантов

На доказательство теоремы 2.4 стоит обратить внимание. Во-первых, в этом доказательстве мы рассматриваем два случая возможного расположения точки A. Необходимость рассматривать несколько случаев — типичное явление для геометрических теорем и задач. Правда, первый случай очень прост. Но он необходим. Иначе доказательство было бы неполным.

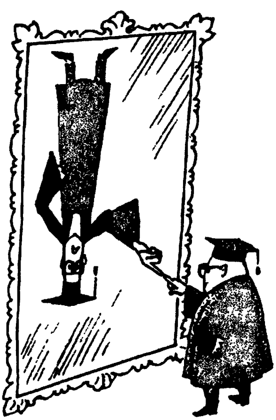
Метод «симметрии» при доказательстве

Во-вторых, во втором, главном случае мы прибегаем к помощи симметрии, хотя в условии теоремы о ней нет упоминаний. Симметрия здесь является методом доказательства.

Рассмотрев симметричную точку, мы имеем возможность воспользоваться теоремой 2.3 и первым основным свойством плоскости.

Теорема 2.5 — очень простая и очевидная теорема, полностью следующая из определения окружности и свойств симметрии.

Первой теоремой главы 3 является теорема 3.1 о свойствах равнобедренного треугольника. Здесь вновь в качестве метода доказательства выступает симметрия.



Интересно, что по существу, точно также доказывал теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника Льюис Кэролл, замечательный сказочник, неистощимый выдумщик. Его сказки про девочку Алису и ее приключения в Стране Чудес и в Зазеркалье известны во всем мире. Однако, не всем известно, что Льюис Кэролл — это псевдоним, а настоящее имя автора этих книг Чарльз Доджсон, и что был он профессором математики в Оксфорде. И главным трудом своей жизни он считал «Дополнение» к своей книге «Евклид и его современные соперники».

Доказательство Льюиса Кэролла, проводится с помощью... ножниц. Допустим, что на листе бумаги нарисован равнобедренный треугольник ABC, причем $AB = BC$. Вырежем этот треугольник ножницами. Перевернем и попробуем заткнуть образовавшуюся дыру. Это нам удастся, не так ли? Сторона BC пойдет по бывшей стороне BA, а BA — по BC. Значит, все вершины исходного и перевернутого треугольника совпадут, вершина C займет место вершины A. Таким образом, угол C равен углу A. Теорема доказана.

Понятно, что наш «метод симметрии» и «метод ножниц» Льюиса Кэролла—это, по-существу, одно и то же.

Из свойств равнобедренного треугольника сразу следуют некоторые свойства окружности. Ведь любой треугольник, у которого одна вершина в центре окружности, а две на окружности, является равнобедренным. Именно такой подход лежит в основе доказательства теорем 3.2 и 3.3.

В теореме 3.3 вновь следует обратить внимание на два момента.

Некоторые тонкости

Когда мы рассматриваем случай двух пересекающихся окружностей, то мы не проводим сразу прямую, соединяющую их центры, а опускаем перпендикуляры из центров на общую хорду. По свойству равнобедренного треугольника мы заключаем, что эти перпендикуляры сливаются в одну прямую.

И еще, наше рассуждение начинается с того, что мы фиксируем одну из точек пересечения окружностей. После чего доказываем, что к ней можно добавить не более одной точки пересечения.

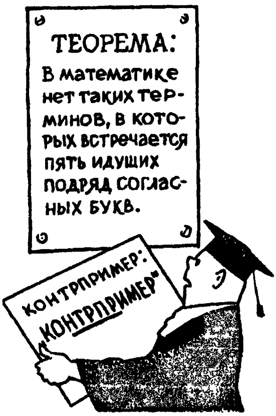
Далее в курсе мы рассматриваем три признака равенства треугольников. Никаких математических тонкостей при их доказательстве нет. Все основывается на простом здравом смысле.

Контрпример

А вот задача, предшествующая теореме 3.4, представляет интерес. В ней рассматриваются треугольники с двумя парами равных сторон и соответствующей парой равных углов (не между сто-

ронами). Обязательно ли такие треугольники являются равными?

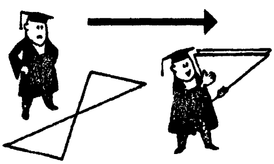
Здесь возникает более общий вопрос. Каким образом можно опровергнуть неверное утверждение, теорему? Одним из наиболее распространенных способов является построение опровергающего примера, или, как говорят математики, *контрпримера.*



Способ опровержения с помощью контрпримера применяется не только в математике. Он часто используется в самых различных науках и даже в обычной жизни. Если кто-либо утверждает, что птицы отличаются от других животных наличием крыльев, то можно, в качестве контрпримера указать на бескрылую птицу киви, живущую в Новой Зеландии, или же на известных всем летучих мышей.

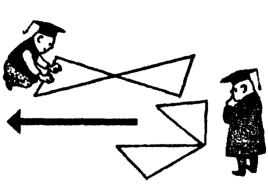
Так и в нашей задаче приводится пример, показывающий, что два треугольника, у которых есть две пары равных сторон и пара соответствующих равных углов, могут и не быть равными.

Однако этот пример оказывается невозможным, если рассматриваемый угол не острый. В результате появляется теорема 3.4 и специальный признак равенства прямоугольных треугольников как ее частный случай.

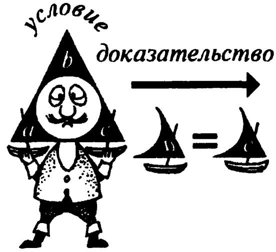


Прямая и обратная теоремы

В математике многие теоремы «ходят парами». Очень часто встречаются пары, составленные из *прямой* и *обратной* теорем.

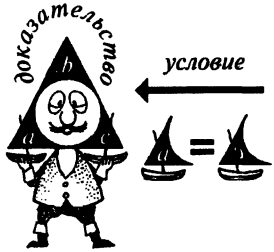


Такую пару в нашем курсе, например, образуют теорема о свойствах равнобедренного треугольника и теорема о признаках равнобедренного треугольника. Если же на эти теоремы посмотреть внимательнее, то мы увидим здесь четыре пары теорем. Вот одна из этих пар.



Прямая теорема: у равнобедренного треугольника углы при основании равны.

Обратная теорема: если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный. Его основанием является сторона, к которой прилежат равные углы.



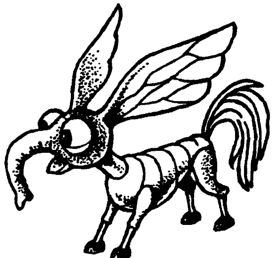
То, что в прямой теореме является условием (треугольник является равнобедренным), в обратной становится заключением. А то, что в прямой теореме требовалось доказать (равны углы при основании), в обратной становится условием.

Заметим сразу, справедливость прямой теоремы вовсе не означает справедливость обратной. Вот простейший пример.

Прямая теорема: вертикальные углы равны. Условие — даны вертикальные углы. Требуется доказать, что они равны. Обратная теорема выглядит здесь просто нелепо: если углы равны, то они вертикальные(?) Однако, если ее немного подправить, то можно получить абсолютно верное, хотя и не очень интересное утверждение: если два угла равны, то их можно расположить так, что они образуют пару вертикальных углов.

Свойства и признаки

Но вернемся к нашей паре теорем — о свойствах и признаках равнобедренного треугольника. На самом деле нечто похожее есть в любой науке, хотя далеко не всегда это приобретает такой же строгий смысл, как теорема в математике.



Признак: животное с хоботом - слон.

Возьмем, например, зоологию. У каждого вида животных имеются и свои свойства, и свои признаки, по которым этот вид можно опознать. Хотя, конечно, редко бывает так, чтобы свойство являлось также и признаком. В качестве примера можно взять разве что слона. У слона имеется хобот (это свойство). Животное, имеющее хобот, является слоном (это признак).

Правда,хобот имеется и у некоторых видов мягких черепах, но это совсем не тот хобот.

Два приема в доказательстве одной теоремы

Следующей теоремой нашего курса является теорема 3.5 о внешнем угле треугольника. На что здесь следует обратить внимание?

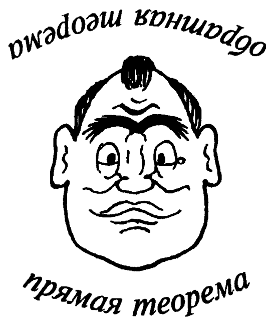
Зайцы меньше шляпы

В геометрии, чтобы доказать, что одна величина меньше другой, часто прибегают к такому приему: рассматриваемые фигуры располагают так, чтобы одна фигура оказалась внутри другой. В данной теореме речь идет об углах. Дается способ, с помощью которого внутренний угол треугольника располагают внутри внешнего. Способ этот, кстати, основан на известном нам приеме—продолжении медианы.

Прямая и обратная теоремы в одной

Теорема о внешнем угле треугольника позволяет сделать еще несколько шагов в развитии геометрической теории.

Прежде всего это теорема 3.6. Если вы вдумаетесь в ее формулировку, то заметите, что в ней заключены сразу две теоремы — прямая и обратная. В прямой мы идем от сторон к углам. В обратной, как и положено, идем в обратном направлении.

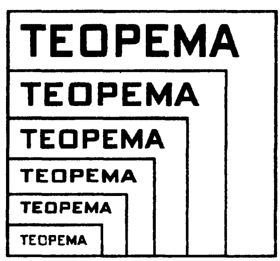


Прямую теорему мы сводим к предыдущей теореме о внешнем угле. Обратную теорему доказываем методом «от противного». Использование метода «от противного» при доказательстве обратных теорем — явление типичное.

Теорема как частный случай другой теоремы

Частным случаем теоремы 3.6 является теорема 3.7, в которой сформулировано одно очень важное свойство перпендикуляра. А применяя результат теоремы 3.7 к окружности и касательной, мы получаем также важное свойство касательной.

Видите, сколько следствий мы получили из одной теоремы о внешнем угле, хотя сама она, как было сказано, скоро будет заменена на более сильное утверждение.



Итак, мы закончили наш краткий обзор теорем, доказанных в предыдущих главах, методов рассуждений и доказательств, использовавшихся в этих теоремах.

А сейчас «докажем» две «теоремы». Эти «доказательства» должны предостеречь вас от некоторых опасностей, таящихся на пути познания и овладения геометрией.

Внимание! Чертеж!

Опасность первая: опора на неверный чертеж.

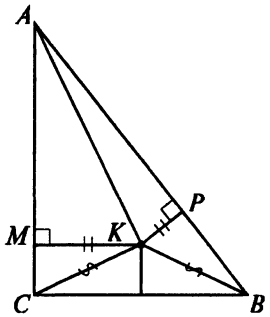


Рис. 79

Теорема (??)

В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна катету(?)

«Доказательство». Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Докажем, что гипотенуза AB равна катету AC. Проведем биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к BC (рис. 79). Обозначим через K точку их пересечения. Опустим из K перпендикуляры KM и KP на катет AC и гипотенузу AB.

По свойству биссектрисы точка K равноудалена от AB и AC, то есть $KM = KP$. Прямоугольные треугольники AKM и AKP равны: гипотенуза AK у них общая и $KM = KP$. Значит, $AM = AP$.

Треугольники CKM и BKP также равные прямоугольные: $CK = BK$, поскольку K лежит на серединном перпендикуляре к BC, и $KM = KP$. Значит, $CM = BP$.

В результате получаем $AC = AM + CM = AP + BP = AB$. Равенство доказано(?)

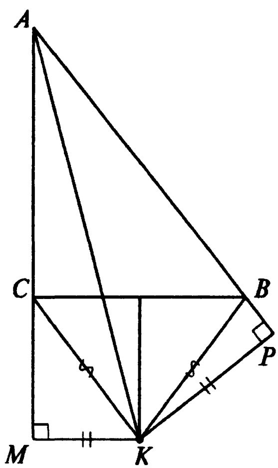


Рис. 80

В чем дело? Вы скажете, что точка K должна быть вне треугольника ABC. Пожалуйста! На другом рисунке (рис. 80) проиллюстрировано доказательство(?) для этого случая.

Другое возражение кажется не очень разумным: как же мы доказываем равенство треугольников, когда совершенно очевидно, что они не могут быть равными. Один треугольник явно «меньше» другого, это хорошо видно на рисунке. Давайте сделаем аккуратный чертеж... (рис. 81). Что у нас получилось? Теперь все встало на свои места. Треугольники CKM и BKP в самом деле равны. Но отрезки CM и BP располагаются по разные стороны от BC. Вот и все!

Короче говоря, верь глазам своим!

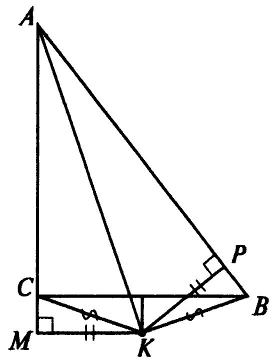


Рис. 81

Четвертый признак равенства треугольников?

Вторая опасность: что-то прозевать.

«Докажем» еще одно утверждение.

Теорема (??)
Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, то такие треугольники равны.

Если вы помните пример, предшествовавший теореме 3.4, то должны удивиться. Ведь в этом примере показано, что такие треугольники вовсе не обязательно равны. И все же...

«Доказательство». Построим треугольник AB_2C, равный треугольнику $A_1B_1C_1$, причем расположим точку B_2 по другую сторону от AC, чем точка B. $AB_2 = A_1B_1 = AB$, $CB_2 = C_1B_1$ (рис. 82).

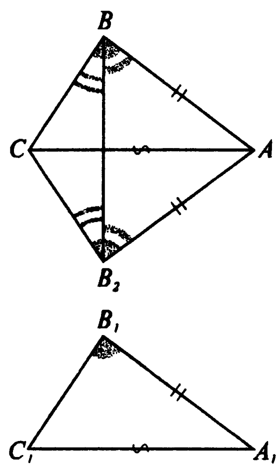


Рис. 82

В треугольнике BAB_2 стороны AB и AB_2 равны. Следовательно, равны и углы ABB_2 и AB_2B. Но поскольку по условию углы ABC и AB_2C равны ($\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$), то равными оказываются и углы CBB_2 и AB_2B. Значит, треугольник CBB_2 равнобедренный и $CB_2 = CB$. Теперь треугольники ABC и AB_2C оказываются

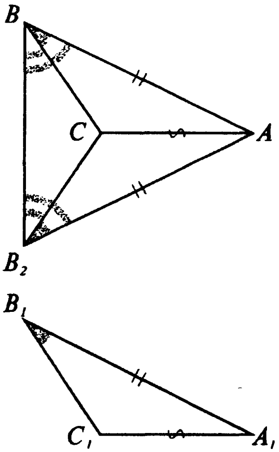


Рис. 83

равными по третьему признаку равенства треугольников, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Практически ничего не меняется, если точка A оказывается по другую сторону от прямой BB_2 (рис. 83).

А здесь в чем дело? Оказывается, что нами упущен один, на первый взгляд, малозначительный случай, когда точки B, B_2 и C оказываются на одной прямой (рис. 84). Именно в этом случае наши рассуждения и не проходят.

Вывод: надо быть внимательным и бдительным. И вывод этот относится не только к случаям, подобным только что рассмотренному.

Внимательным и бдительным надо быть постоянно. Все опасности заранее предусмотреть нельзя, и не только в геометрии.

Козьма Прутков в свое время сказал коротко и точно: «Бди!»!

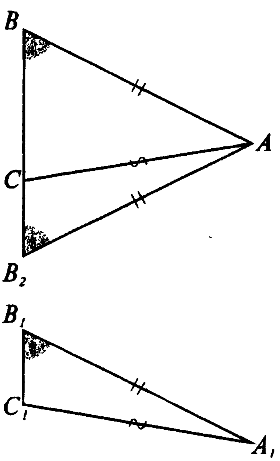


Рис. 84

Задачи на доказательство

1. Вспомните понятия, связанные с многоугольниками.

2. Вспомните понятия, связанные с окружностью.

3. Вспомните понятия, связанные с треугольником.

4. Приведите примеры, когда обе теоремы — прямая и обратная — верны.

5. Приведите примеры, когда одна из двух теорем, прямая или обратная, верна, а другая — нет.

6 т. Докажите, что если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

7. Может ли фигура иметь центр симметрии, но не иметь ни одной оси симметрии?

8 п. Доказите, что если у треугольника равны две высоты, то этот треугольник равнобедренный.

9 т. Докажите, что если для сторон треугольника выполняется неравенство $a + b \geqslant 3c$, то c — наименьшая сторона этого треугольника.

10. Докажите, что если в треугольнике ABC сторона AB в два раза больше стороны AC, то медиана, выходящая из вершины C, перпендикулярна биссектрисе угла A.

11. Докажите, что диагональ многоугольника меньше половины его периметра.

12. От данного многоугольника при помощи одного прямолинейного разреза отрезали некоторый многоугольник. Докажите, что периметр отрезанного многоугольника меньше периметра исходного многоугольника.

13 т. Внутри некоторого многоугольника содержится выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего многоугольника.

14 т. Обозначим стороны треугольника ABC как обычно: $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $2p = a + b + c$ — периметр треугольника (p — полупериметр). Докажите, что существуют три попарно касающиеся друг друга внешним образом окружности с центрами в вершинах треугольника, причем радиусы окружностей с центрами A, B и C соответственно равны $p - a$, $p - b$ и $p - c$.

15 т. Докажите, что существуют три попарно касающиеся друг друга окружности с центрами в вершинах треугольника ABC такие, что окружности с центрами B и C касаются друг друга внешним образом и обе они изнутри касаются окружности с центром A. При этом радиус окружности с центром A равен p, а окружности с центрами B и C имеют радиусы $p-c$ и $p-b$ соответственно (обозначения задачи 14).

16 т. Докажите, что если прямые AB, BC и AC касаются одной окружности с центром внутри треугольника ABC, то отрезки касательных от вершин A, B и C до точек касания равны соответственно $p-a$, $p-b$ и $p-c$ (обозначения задачи 14).

17 т. Докажите, что если прямые AB, BC и CA касаются одной окружности с центром вне треугольника ABC, но внутри угла BAC, то отрезки касательных от вершин A, B и C до точек касания равны соответственно p, $p-c$ и $p-b$ (обозначения задачи 14).

18 т. Пусть углы треугольника ABC равны $\angle BAC = 40°$, $\angle CBA = 60°$, $\angle ACB = 80°$. Пусть O — такая точка плоскости треугольника, что $AO=BO=CO$. Докажите, что $\angle OBC=\angle OCB=50°$, $\angle OCA=\angle OAC=30°$ и $\angle OBA=\angle OAB=10°$ (сравните с задачами 14 и 16).

19 т. В вершинах четырехугольника $ABCD$ расположены центры окружностей. Известно, что любые две окружности с центрами в соседних вершинах касаются друг друга внешним образом. Докажите, что для сторон четырехугольника выполняется равенство $AB+CD=BC+DA$.

20 т. Стороны четырехугольника $ABCD$ касаются одной окружности. (Точки касания—на сторонах четырехугольника). Докажите, что $AB+CD=BC+DA$.

21 т. Вершины четырехугольника $ABCD$ расположены на одной окружности. Докажите, что $\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC$.

22. В треугольной пирамиде $ABCD$ имеют место равенства $AB = CD$, $AD = BC$. Докажите, что прямая, проходящая через середины AC и BD, перпендикулярна AC и BD.

Ответы и указания

Глава 1

1.1. Геометрическое тело

6. Одна из возможных пробок изображена на рисунке 85. **7.** Решение понятно из рисунка 86.

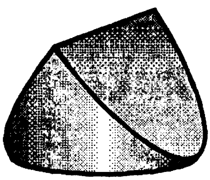


Рис. 85

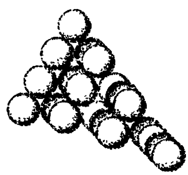


Рис. 86

1.2. Поверхность

2. Чтобы получить поверхность куба из последней среди изображенных фигур, согните по ее пунктирным линиям, как на рисунке 87. **5.** Задача имеет много решений. Одно из них понятно из рисунка 88. Пунктирными линиями показаны линии сгиба. **6.** При указанном в условии разрезе мы получим дважды перекрученное бумажное кольцо. Чтобы лист Мёбиуса «распался» на две части, можно провести следующий разрез: отступим от края листа Мёбиуса на 1/3 его ширины и будем его разрезать вдоль края, сохраняя выбранное расстояние. Обойдя дважды лист Мёбиуса, мы разрежем его на две части: большое дважды перекрученное кольцо, с которым зацеплен меньшего размера лист Мёбиуса. **7.** Всех этих измерений недостаточно: надо еще убедиться, что изготовленная рамка плоская. **9.** Все, кроме поверхности шара, т. е. сферы. **10.** Нальем в емкость небольшое количе-

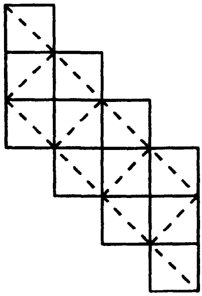


Рис. 87

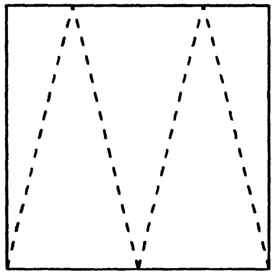


Рис. 88

ство воды и постараемся найти такое положение емкости, чтобы вода закрывала все дно. Если такого положения найти нельзя, то дно нельзя считать плоским. Чем меньшим количеством воды мы можем закрыть все дно, тем ближе оно к части плоскости.

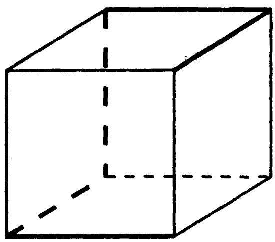


Рис. 89

1.3. Линия

2. В пункте б) можно отметить прямую с помощью натянутой веревки. В пункте в) можно поступить следующим образом: Отметим две точки, через которые должна пройти наша прямая, с помощью двух кольев. Займем теперь такую позицию сзади одного из этих кольев, чтобы второй был невидим. Отмечая теперь другие невидимые точки, будем получать точки на одной прямой. **4.** Проведите с помощью этой линейки линию через какие-нибудь две точки дважды, причем второй раз линейку переверните. Получившиеся линии должны совпасть. **5.** Линия сгиба является линией пересечения двух плоскостей. **6.** Например, так, как на рисунке 89.

1.5. От точки к телу

4. Среди пар плоских фигур не равными будут фигуры, являющиеся частью круга, и два четырехугольника. Остальные три пары являются парами равных фигур. Что касается двух пирамид, то их с точки зрения данного нами определения мы не можем считать равными, так как совместить их в пространстве невозможно. Но с другой стороны, одна из них является как бы зеркальным отображением другой. Такие фигуры (тела) в математике иногда удобно рассматривать как равные.

Глава 2

2.1. Геометрия прямой линии

2. A лежит между B и C. **3.** а) Такая точка одна — середина AB. б) Таких точек две: одна находится внутри отрезка AB, а другая — на его продолжении за точку A. **4.** а) 1; б) $\frac{6}{5}$; в) $2\frac{1}{2}$; г) $1\frac{5}{7}$; д) 1; е) 2; ж) 1. Пусть $BM = x$, тогда $AM = 3 - x$. Для x получаем уравнение $(3-x)^2 - x^2 = 3$. **5.** Кроме ответов, указанных в задаче 4, возможны еще следующие значения для величины BM: а) 3; б) 6; в) $3\frac{3}{4}$; г) 12. **6.** 0,5. **7.** Точку C мы можем расположить двумя способами. (Сделайте нужный рисунок.) Поэтому в каждом пункте возможны два ответа: а) 9,9 и 1,5; б) 4,9 и 0,7. **8.** а) 3,4; б) 2,3; в) 6 или 1. **9.** а) Один отрезок и два луча; б) три отрезка и четыре луча; в) шесть отрезков и шесть лучей; г) десять отрезков и восемь лучей. **10.** Поступим так же, как и в задаче 7. Возьмем две точки A и B. Тогда для C возможны два положения — вправо и влево от B. Затем «шагая» вправо и влево от C, получим возможные положения точки D. Для каждого положения C возможны два положения D. (Сделайте чертеж.) В пункте в) точки B и C меняются ролями. Возможны значения AD: а) 4,3; 0,9; 1,9; 1,5; б) 6,2; 1,6; 2,6; 2; в) 6,7; 0,7; 4,1; 1,9. **11.** $1\frac{1}{3}$. **12.** Пусть $AM = x$. Тогда $MK = 2x$, $KB = 3x$. Поступая так же, как при решении задачи 10 — «шагая» по прямой от A и получая последовательно точки M, K и B, получим для AB возможные значения: $AB=6x$, $AB=4x$, $AB=2x$. (4-й случай оказывается невозможным, так как дает нам $AB=0$.) Возможны три варианта ответа: $KM = 1\frac{1}{3}$, $KM = 2$, $KM = 4$. **13.** в) $2 \cdot 1{,}3 - 1{,}7 = 0{,}9$; г) $6 \cdot 1{,}3 - 4 \cdot 1{,}7 = 1$. **14.** $CA = 3{,}3$. Точки следуют в таком порядке: C, D, B, A. **15.** 1,3. **16.** В первом случае искомые точки являются внутренними точками отрезка, концами которого являются середины AB и BC. Во втором случае будет луч с началом в середине BC, содержащий точку B. **17.** Рассмотрим пункт д). Возьмем на AB точки K и P. $BK = \frac{1}{3}AB$, $BP = \frac{1}{4}AB$. Точки M заполняют отрезок KP, при этом точка K удовлетворяет условию задачи, а точка P — нет. **18.** а) Обозначим через K середину AB. Нам подходят точки луча KB, кроме точек K и B. б) Рассмотрим две точки на прямой AB: точку K на отрезке AB, $BK = \frac{1}{3}AB$, и точку P на продолжении AB за точку B, $BP = AB$. Точки M заполняют отрезок KP, исключая точку B. Концы отрезка включаются. е) Возьмем на прямой точки M_1, M_2, M_3 и M_4. Вместе с точками A и B они идут в таком порядке: M_1, A, M_2, M_3, B, M_4. При этом выполняются равенства $M_1A = AB$, $AM_2 = \frac{1}{3}AB$, $AM_3 = \frac{2}{3}AB$, $AM_4 = 2AB$. Нам подходят все точки прямой, кроме внутренних точек отрезков M_1M_2 и M_3M_4. **19.** Задача имеет два решения: точка M может быть серединой AB, а также лежать на луче BA так, что $BM = 3$. **20.** Если точки движутся в одном направлении, то середина отрезка переместится на величину $\frac{3+1}{2} = 2$. Если в разных, то на величину $\frac{3-1}{2} = 1$. **21.** $\frac{BM}{MC} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. Пусть $BM = x$. Тогда $MC = 1 - x$, $AM = 1 + x$, $DM = 3 - x$. Условие задачи дает нам уравнение $\frac{x}{1-x} = \frac{1+3}{3-x}$, откуда найдем $x = \frac{1}{3}$. **22.** а) Точка M лежит на BC, причем $BM = 1\frac{1}{2}$. б) Подходят все точки отрезка BC, включая его концы. **24.** Если длину первого прыжка принять за единицу, то получится, что первый прыжок имеет нечетную длину, а все последующие — четную. **26.** Во всех случаях $MM_2 = 2AB = 2$. **27.** Рассмотрите несколько случаев расположения точки на прямой AB(M — внутри AB, M — вне AB, но «близко» к A и др.). Проследите за ее перемещением после каждой симметрии, сделайте соответствующие рисунки. **29.** а) Отрезок вместе с концами. б) Луч, исключая его начало. в) Отрезок без его левого конца. г) Отрезок, исключая его концы. 30 а) 6. б) $-2{,}7$. в) 3,2. г) $-47{,}4$. Во всех случаях координата x' точки A' задается формулой $x' = x_2 + (x_2 - x_1) = 2x_2 - x_1$. **31.** Центр симметрии есть точка с координатой $(x_1+x_2)/2$. **32.** а) 3. б) $-0{,}7$. в) 11. Во всех случаях искомая точка имеет координату $x_1+x_2-x_0$. **33.** После первой минуты червяку остается 1 м, после второй — 1/2 м, затем 1/4 м, 1/8 м, ... Каждое следующее расстояние в два раза меньше предыдущего. Если считать червяка точкой, то он никогда не доберется до конца ветки. **34.** В первом случае колодец надо вырыть возле дома B. Во втором — где угодно на отрезке BC. **35.** Общая длина 17 отрезков не меньше 12. Значит, хотя бы один из них не меньше $12/17 = 0{,}7058\ldots > 0{,}7$.

2.2. Основные свойства прямой на плоскости

1. Три или четыре. **2.** На семь частей. Отрезков три, лучей шесть. **3.** Пять частей (все прямые параллельны); восемь частей (три прямые параллельны, а четвертая их пересекает; либо все прямые проходят через одну точку); девять частей (две пары параллельных прямых, либо три прямые проходят через одну точку, а четвертая параллельна одной из них); десять частей (одна пара параллельных прямых, но никакие три в одной точке не пересекаются; либо нет параллельных, но какие-то три проходят через одну точку); одиннадцать частей (никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку). **4.** Четырьмя параллельными прямыми. **5.** По разные стороны. Если один их них пересекал дорогу x раз, то другой $(x+3)$ раза. Но x и $(x+3)$ — числа разной четности. **8.** Пусть B — точка пересечения AA' с прямой a. По свойству симметрии $AB = BA'$. **9.** Пусть M — точка пересечения прямых AB и a. При симметрии относительно a прямая AB переходит в прямую $A'B'$, а прямая $A'B'$ — в прямую AB. А точка M остается на месте, значит, M есть точка пересечения AB и A_1B_1. **10.** Если бы прямая a не проходила ни через одну из отмеченных точек, то их можно было бы разбить на пары точек, симметричных относительно a. Но 1995 — число нечетное. **11.** Каждая последовательность получается из последовательности 1,2,3,4... присоединением к записи каждого числа симметричной относительно соответствующей оси фигуры.

2.3. Плоские углы

2. 110°. **3.** 30°. **4.** Первый угол больше второго на 20°. **5.** 88°. **6.** Среди оставшихся четырех углов два равны 116°, один 28° и один 36°. Углы между прямыми равны 28°, 36°, 64°. **7.** 18°, 18°, 52°, 94°, 16°. Если данные углы, являясь соседними, идут в указанном порядке (или противоположном), то углы между прямыми равны следующим величинам: 52°, 86°, 16°, 18°, 34°, 70°. Если они идут в порядке 94°, 52°, 16°, то углы между прямыми равны 86°, 52°, 16°, 18°, 34°, 68°. Если они идут в порядке 94°, 16°, 52°, то углы между прямыми равны 86°, 16°, 52°, 18°, 70, 68°. (Сделайте соответствующие чертежи.) **8.** 3. **9.** 5. **10.** Следующие обозначения соответствуют одному и тому же углу: $\angle ABC$, $\angle DBC$ и $\angle DBE$; $\angle CAB$ и $\angle DAC$; $\angle CFE$ и $\angle CFD$. Вертикальные углы $\angle BED$ и $\angle CEF$. Смежные углы $\angle DEC$ и $\angle BED$. **11.** $90° - \alpha/2$. **13.** 60° или 20°. **14.** Рассмотрите два случая: луч OM расположен внутри угла $\angle AOB$ и вне его. **15.** 60°. **16.** Сделайте чертеж и рассмотрите несколько случаев расположения точки A относительно этих прямых. **17.** Утверждение следует из предыдущей задачи. **18.** Из задачи 17 следует, что центральную симметрию можно заменить на две последовательные осевые симметрии. Но при осевой симметрии фигура переходит в равную ей фигуру. **19.** Пусть в результате симметрии относительно точки O прямая l переходит в прямую l' (O не лежит на l). Если l и l' пересекаются в точке M, то они должны пересечься и в точке M', симметричной M относительно O. **20.** При симметрии относительно O точки A и A_1 переходят друг в друга (a переходит в a_1, а b переходит в b_1). Точно также друг в друга переходят точки B и B_1. **21.** Пусть A_1 — любая точка на прямой a, 0 — середина AA_1. При симметрии относительно точки O прямая a перейдет в прямую a_1, параллельную a и проходящую через точку A. **22.** Рассмотрим случай, когда луч OB расположен внутри угла $\angle AOC$, а луч OC — внутри угла BOD. Положим $\angle AOB = 2\alpha$, $\angle BOC = 2\beta$, $\angle COD = 2\gamma$. По условию $2\alpha + 2\gamma = 180°$. Обозначим через K и M точки на биссектрисах углов AOC и BOD соответственно. Имеем $\angle KOC = \alpha + \beta$, $\angle BOM = \beta + \gamma$. Теперь получаем $\angle KOM = \angle KOC + \angle BOM -$

$-\angle BOC = (\alpha+\beta)+(\beta+\gamma)-2\beta = \alpha+\gamma = 90°$, что и требовалось. Разберите самостоятельно другие случаи расположения лучей OA, OC, OB и OD. **23.** Возьмите какую-то точку O и постройте прямые, симметричные данным относительно O.

2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность

1. а) 2; б) 2 или 4. **2.** При пересечении двух треугольников может получиться многоугольник с числом сторон от трех до шести. Для двух выпуклых четырехугольников — от трех до восьми. (Приведите примеры.) **3.** а) 15; б) 200,21; в) 25,3; г) $\frac{1913}{1001}$; д) такой треугольник невозможен. **4.** Периметр треугольника BCM больше на $\frac{1}{2}$. **5.** 3 : 1. **6.** 21. **7.** 6. **8.** Во всех пунктах ответ «да». (Пункты в) и г) — см. рисунки 90, 91.) **9.** Да.

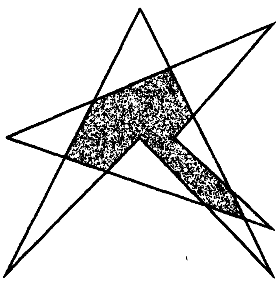


Рис. 90

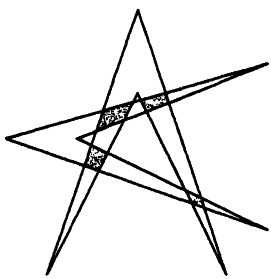


Рис. 91

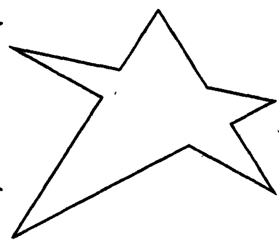


Рис. 92

Пример — пятиконечная звезда (см. рисунок 92). **11.** Точки B и D находятся во внешней области. C — во внутренней. Если мы соединим A с B, то пересечем границу трижды, значит A и B расположены в разных частях. (Так же рассматриваем пары A и C, A и D.) **12.** Возможны два объяснения: одна из черепах ошибается, либо они ползут по окружности (или другой замкнутой кривой). **13.** Продолжим стороны «комнаты», идущие «внутрь». Они ограничат многоугольник, внутри которого следует расположить источник света. **14.** См. рисунок 93. **15.** См. рисунок 94. **18.** 9; 14. Число диагоналей стоугольника равно 4850. Чтобы его найти, можно рассуждать следующим образом. Из каждой вершины выходит $100-3=97$ диагоналей. Число вершин 100. В произведении $97\cdot100$ каждая диагональ подсчитана дважды. Значит, число диагоналей равно

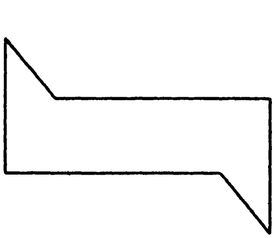


Рис. 93

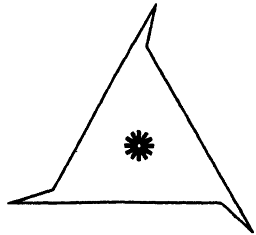


Рис. 94

$97 \cdot 50 = 4850$. **19.** 20 диагоналей имеет восьмиугольник, многоугольников с 10 и 30 диагоналями не существует. **20.** Нет. **21.** 10 треугольников и 1 пятиугольник. **25.** Проведите прямую, проходящую через центры окружностей. **26.** Построим треугольник, симметричный данному относительно точки O. Стороны двух треугольников пересекутся в некоторых точках. Число точек пересечения может быть 2, 4 или 6, они разбиваются на пары точек, симметричные относительно O. В качестве A и B можно взять любую из этих пар. Число решений нашей задачи равно 1, 2 или 3. **27.** Постройте окружность, симметричную данной относительно O, и проведите хорду через точки пересечения двух окружностей. **28.** Решение понятно из рисунка 95. **29.** Если у многоугольника есть два центра симметрии P и Q,

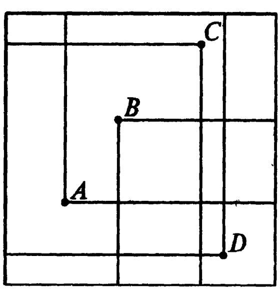


Рис. 95

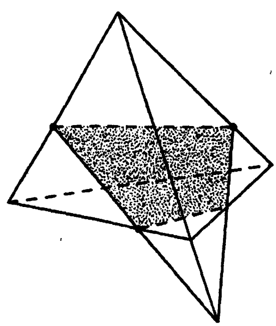


Рис. 96

то центром симметрии будет также и точка P', симметричная P относительно Q. Таким образом мы можем получать сколько угодно центров симметрии, лежащих на прямой PQ.

При этом расстояние между соседними равно длине PQ. Значит, наш многоугольник оказывается неограниченно большим, чего не может быть. **30.** Наименьшее число сторон 3. Наименьшее число осей симметрии также 3. **31.** Треугольники и четырехугольники. **32.** Решение понятно из рисунка 96. **33.** Невозможно. Получается, что это сечение пересекает прямую, задаваемую передним ребром пирамиды, в двух точках. Значит, это прямая обязана принадлежать плоскости сечения. А это не так.

Глава 3

3.1. Равнобедренный треугольник

1. Может. **3.** 1. **4.** Пополам. Треугольник AMK — равнобедренный. **7.** Воспользуйтесь тем, что центр окружности является ее центром симметрии. **10.** В качестве первой оси симметрии надо взять прямую, проходящую через середину AA_1 перпендикулярно AA_1. Пусть при этом B переходит в B'. Вторая ось проходит через A_1 перпендикулярно $B'B_1$. **11.** Рассмотрим треугольник ABC, в котором $AB = BC$. При симметрии относительно биссектрисы угла B (она же медиана и высота) биссектриса, медиана и высота, выходящие из вершины A, перейдут соответственно в биссектрису, медиану и высоту, выходящие из вершины C. (См. в этой связи задачу 9 из 2.2.). **12.** Рассмотрим четырехугольник $ABCD$ с равными сторонами. Опустим из B и D перпендикуляры на диагональ AC. Эти перпендикуляры разделят AC пополам, то есть образуют одну прямую, перпендикулярную AC. **13.** Можно, см. рисунок 97.

Рис. 97

3.2. Признаки равенства треугольников

1. $\triangle BAK = \triangle MAC$, $\triangle BAC = \triangle MAK$, $\triangle BKC = \triangle MCK$, $\triangle BCM = \triangle MKB$. **4.** $\triangle B_1BM = \triangle BB_1A$ (первый признак). Значит, $\angle MB_1B = \angle ABB_1 = \angle CBB_1$; $\triangle BKB_1$ — равнобедренный. **7.** Пусть $ABCD$ — четырехугольник с равными сторонами и равными углами. Тогда $\triangle ABC = \triangle BCD$. Значит, $AC = BD$, то есть диагонали равны. Обозначим через M точку пересечения диагоналей. В равнобедренном треугольнике ABC отрезок BM — биссектриса. Поэтому $\angle BMA = \angle BMC = 90°$. **8.** Пусть в четырехугольнике $ABCD$ равны AB и CD, BC и AD, M — точка пересечения диагоналей. $\triangle ABC = \triangle CDA$ (третий признак). Значит, $\angle CAD = \angle BCA$ (или $\angle MAD = \angle BCM$). Так же докажем, что $\angle MDA = MBC$ (из равенства $\triangle BDA = \triangle DBC$). Треугольники MDA и MBC равны по второму признаку, то есть $MD = MB$, $MA = MC$. **13.** Имея угол в $19°$, мы можем строить любой угол величиной $n \cdot 19°$, где n — целое число. Но $19° \cdot 19° = 361° = 360° + 1°$. **14.** $AP = 2$. В треугольнике ABK биссектриса угла A перпендикулярна стороне BK. Значит, $AK = AB = 4$, $KC = 7 - 4 = 3$. Точно так же найдем $CM = CK = 3$, $BM = 5 - 3 = 2$, $BP = BM = 2$, $AP = 2$. **15.** $AK = 5$, $BK = 2$. (Точка K находится на продолжении стороны AB за точку B.) Решение такое же, как и в задаче 14. **16.** $AK = AM = 3$, $BK = BL = 2$, $CL = CM = 4$. Обозначим $AK = AM = x$, тогда $CM = CL = 7 - x$, $BK = BL = 6 - (7 - x) = x - 1$. Поскольку $BK + KA = 5$, то $(x - 1) + x = 5$, откуда $x = 3$. **18.** Такие четырехугольники не обязательно равны. **22.** В задаче 11 параграфа 3.1 мы доказали, что в равнобедренном треугольнике медианы пересекаются в одной точке. Теперь мы можем доказать, что медианы равностороннего треугольника делят его на 6 равных треугольников. Углы этих треугольников с вершиной в точке пересечения медиан равны между собой и равны $60°$. **24.** $BC = 5$, $PK = 3$. **25.** Пусть M — середина AC, $\triangle CMP = \triangle AMB$ (второй признак: $CM = MA$, $PM = MB$, $\angle CMP = \angle BMA$). Значит, $\angle MCP = \angle MAB = 52°$. $\triangle BCK$ — равнобедренный, $BC = CK$; AC — биссектриса угла BCK, $\angle ACK = \angle BCA = 44°$. Теперь найдем угол PCK: $\angle PCK = \angle PCA - \angle KCA = 52° - 44° = 8°$. **28.** г) $\triangle ABD = \triangle CDB$ (второй признак). Следовательно, $BA =$

$=CD$, $AD=BC$. Теперь получаем, что $\triangle BAD=\triangle CDA$ (первый признак). Следовательно, $BD=CA$. И, наконец, $\triangle BAD=\triangle ABC$ (третий признак).

3.3. Неравенства в треугольнике. Касание окружности с прямой и окружностью

2. а) $AB=1$, $AC=7$. б) $AB=2$, $AC=8$. Вообще $AB=|a-R|$, $AC=a+R$. **3.** $AC=3{,}7$. Докажите, что точки A, B, C и D расположены на одной прямой. **4.** Докажем, что точки A, B, C и D лежат на одной прямой, при этом они идут в следующем порядке: C, A, B и D. В самом деле, для любых трех точек плоскости A, B и C верно неравенство $AB+AC\geqslant BC$, или $AC\geqslant BC-AB=4-3=1$. При этом равенство будет, если A, B и C — на одной прямой и A — между B и C. Точно так же $BD\geqslant CD-BC=5-4=1$. Значит, $AC+BD\geqslant 1+1=2$, а по условию $AC+BD\leqslant 2$. Таким образом, $AC=1$ и $BD=1$, $AD=4$. **5.** $AB=7$. Докажем это. По неравенству треугольника $AC-BC<AB<AC+BC$, или $6<AB<8$. А поскольку AB выражается целым числом, то $AB=7$. **6.** 19,7. **7.** $b>a$. **8.** Периметр треугольника больше $a+b+|a-b|$, но меньше, чем $2(a+b)$. **9.** а) Наибольшее значение AB равно 15, наименьшее равно 1. б) 15 и 0. Наибольшее значение AB всегда равно $a+R+r$. Если окружности пересекаются, то наименьшее значение AB равно 0. Если же одна целиком вне другой, то наименьшее значение AB равно $a-(R+r)$. Если же окружность радиуса r расположена внутри окружности радиуса R, то это значение равно $R-a-r$. **10.** Пусть встреча произошла через t часов. Путь Винни-Пуха равен $3t$, путь Пятачка равен $4t$. По неравенству треугольника $3t+4t\geqslant 1$, значит $t\geqslant \frac{1}{7}$ часа. Самое меньшее $t=\frac{1}{7}$ будет в случае, когда Пятачок и Винни-Пух идут навстречу по прямой. С другой стороны $3t+1\geqslant 4t$, откуда $t\leqslant 1$. Итак, время путешествия не меньше $\frac{1}{7}$ часа, но не больше 1 часа. **11.** Проведем в треугольнике ABC медиану AA_1 и продолжим ее за точку A_1. Возьмем на продолжении точку D так, что $A_1D=AA_1$. Из равенства $\triangle AA_1B=\triangle DA_1C$ (первый признак) получим, что $DC=AB$. По неравенству треугольника $AD<AC+CD$, или

$2AA_1 < AC + AB$, $AA_1 < \frac{1}{2}(AC + AB)$. **13.** Таких окружностей две. Первая имеет радиус $5 - 3 = 2$ и касается данной внешним образом. Вторая содержит данную, касаясь ее внутренним образом, и имеет радиус $5 + 3 = 8$. **14.** Во всех случаях задача имеет четыре решения: а) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$; б) 1, 2, 3, 4; в) 1, 2, 3, 6. Пусть первая окружность пересекает прямую, проходящую через центры, в точках A и B, а вторая — в точках C и D. Тогда диаметрами искомых окружностей будут отрезки AC, AD, BC и BD. Нам остается лишь правильно расставить точки A, B, C и D на прямой. **15.** Расположим треугольники ABC и ABD, как на рисунке 98. При этом $AB = AC = AD$ и $\angle BAD > \angle BAC$. Угол BCD больше угла ACD, а угол BDC

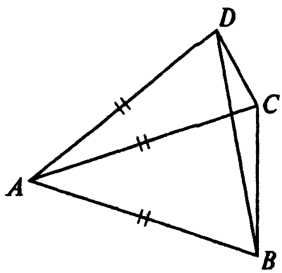


Рис. 98

меньше угла ADC. Но треугольник CAD равнобедренный и углы ACD и ADC равны. Итак, угол BCD больше угла BDC, а значит $BD > BC$. **16.** Докажем, что самое лучшее — это вырыть колодец в деревне C. В самом деле, пусть колодец вырыт в некоторой точке M. Тогда общий путь всех жителей равен $100AM + 200BM + 300CM = 100AM + 200BM + 100CM + 200CM = 100(AM + CM) + 200(BM + CM) \geqslant 100AC + 200BC$. При этом равенство будет лишь в случае, когда M совпадает с C. **17.** Задача имеет 4 решения. Радиусы окружностей с центрами в вершинах соответственно противоположных сторонам 5, 6 и 7 могут равняться: 1) 4, 3, 2; 2) 9, 2, 3; 3) 2, 9, 4; 4) 3, 4, 9. Точно такая же задача, но с другими числами рассматривается в 4.4. **18.** Возможны 3 треугольника со сторонами: 2, 3 и 4; 2, 4 и 5; 3, 4 и 5. **19.** Диагональ равна 2,8. Докажем это. Возьмем самый длинный из отрезков: 7,5.

Лишь два отрезка из четырех оставшихся могут составить с ним треугольник. Это отрезки 5 и 2,8. К треугольнику со сторонами 7,5, 5, 2,8 мы можем единственным способом приложить отрезки 1 и 2, чтобы получился четырехугольник. Их можно приложить лишь к стороне 2,8. **20.** Проверьте, что для чисел a, b и c выполняются неравенства: $a+b>c$, $b+c>a$, $a+c>b$. **21.** Величины x, y и z можно найти, выразив их через a, b и c. Из первого и третьего равенства получаем $y=a-x$, $z=c-x$. Заменим y и z во втором равенстве $b=y+z$, $b=a-x+c-x$, откуда $x=(a+c-b)/2$. Затем найдем $y=(a+b-c)/2$, $z=(b+c-a)/2$. Так как a, b и c — стороны некоторого треугольника, то найденные значения x, y и z положительны. **22.** $\angle DAC > \angle DCA$.

Глава 4

4.1. Геометрические места точек

1. а) Проведем серединный перпендикуляр к отрезку AB. Нам подходят точки той полуплоскости, ограниченной этим перпендикуляром, которая содержит точку A. Точки на серединном перпендикуляре в наше множество не входят. б) Геометрическое место состоит из точек, лежащих на окружности с центром в A и радиусом $2AB$ или вне этой окружности. в) Отрезок AB, включая концы A и B. г) Построим две окружности с центрами в точках A и B и радиусом AB. Подходят точки внутри первой, но вне второй. (Точки второй окружности, находящиеся внутри первой, подходят. Точки первой — нет.) д) Геометрическое место состоит из точек, лежащих на серединном перпендикуляре к AB и двух окружностях с центрами A и B и радиусом AB. При этом точки, лежащие на прямой AB, исключаются. (Как говорят математики, «выкалываются».) е) Из условия следует, что в треугольнике AMB наибольшей является сторона AM, то есть $AM \geqslant AB$, $AM \geqslant BM$. Первое неравенство означает, что M лежит вне или на окружности с центром в A и радиусом AB. Второе означает, что M лежит в той полуплоскости, задаваемой серединным перпендикуляром к AB, в которой лежит точка B,

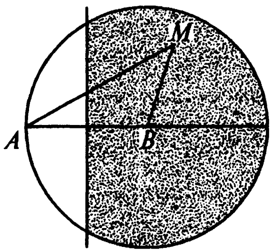


Рис. 99

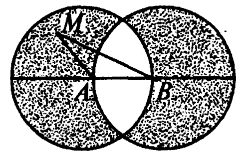


Рис. 100

включая сам этот перпендикуляр. При этом необходимо удалить все точки прямой AB. ж) См. рисунок 99. з) См. рисунок 100. **2.** а) См. рисунок 101. б) См. рисунок 102. в) См. рисунок 103. г) Геометрическое место состоит из одной точки. M — точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AB, BC и CA. д) Геометрическое место состоит из внутренних точек угла, содержащего точку A, стороны которого лежат на серединных перпендикулярах к отрезкам AB и AC. **3.** а) Четыре биссектрисы углов, образованных при пересечении прямых p и q. Эти биссектрисы в совокупности образуют две перпендикулярные прямые. б) Два угла, образованных двумя прямыми — биссектрисами, о которых говорится в пункте а), содержащие прямую p. **4.** Биссектрису угла, по сторонам ко-

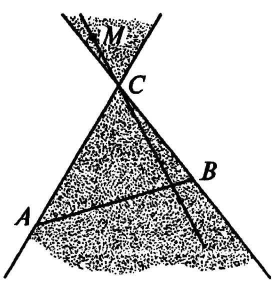


Рис. 101

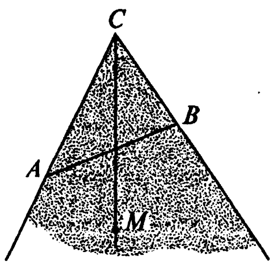


Рис. 102

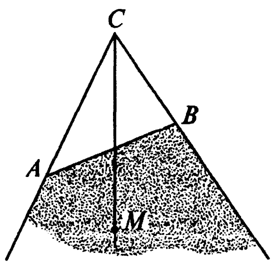


Рис. 103

торого движутся указанные точки. **5.** Окружность с тем же центром и радиусом 2, а также точка — центр данной окружности. **6.** Обозначим данные прямые через a, b и c. Если a,

b и c пересекаются в одной точке, то искомое геометрическое место состоит из одной этой точки. Пусть эти прямые пересекаются в трех различных точках, образуя треугольник. В этом случае геометрическое место состоит из четырех точек. Каждая точка является точкой пересечения биссектрисы одного из углов, образованных прямыми a и b, с биссектрисой какого-то из углов, образованных прямыми a и c (или b и c). **7.** Серединный перпендикуляр к AB. **8.** Проведем через A и B перпендикуляры p и q к AB. Искомое геометрическое место точек состоит из точек между p и q. **9.** Понятно, что условию удовлетворяют точки прямой AB, находящиеся на целочисленном расстоянии от A (а значит, и от B). Пусть теперь точки A, M и B образуют треугольник и $AM = n$, где n — натуральное число. Тогда из неравенства треугольника следует, что $n - 1 < BM < n + 1$. Значит, $BM = n$. Таким образом, нам подходят еще точки серединного перпендикуляра к AB, удаленные от его концов на целочисленное расстояние.

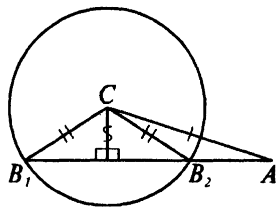


Рис. 104

4.2. Задачи на построение

2. Обратите внимание, что задача может иметь до двух решений (см. рисунок 104). **3.** Центр окружности можно взять в любой точке на биссектрисе угла. Радиус равен расстоянию от этой точки до сторон угла. **4.** Рассмотрим окружность радиуса R. Геометрическое место центров окружностей радиуса a, касающихся этой окружности состоит в случае $R \neq a$ из двух окружностей с тем же центром и радиусами $R + a$ и $|R - a|$. Если $R = a$, то меньшая окружность превращается в точку. Пусть даны две окружности с радиусами R_1 и R_2. Чтобы найти центр окружности радиуса a, касающейся данных, построим для каждой из данных соответствующее геометрическое место точек. Там, где эти места пересекаются, и находится центр искомой окружности. Задача может иметь до восьми решений. **5.** Постройте серединный перпендикуляр к хорде, соединяющей концы дуги. **6.** Рассмотрим треугольник ABC. AA_1 — медиана. Продолжим медиану за точку A_1 на расстояние, равное ей. Получим точку D. В треугольнике ABD имеем $AD = 2AA_1$, $BD = AC$. Так как нам были даны отрезки AB, AC и AA_1, то в треугольнике ABD мы знаем все стороны и можем его построить. **7.** Нужное построение можно осуществить, например, следующим образом. Пусть A и B — данные точки. Построим две равные окружности с центрами A и B и радиусами немного больше половины AB. Пусть C и D — точки пересечения этих окружностей. Середина CD совпадает с серединой AB. Если CD достаточно маленький отрезок, то, пользуясь циркулем и имеющейся линейкой, мы можем разделить его пополам и найти середину AB — точку E. Если AE все еще больше длины линейки, делим отрезки AE и BE пополам, и т. д. **8.** Построим прямую l_1, симметричную l относительно q. Точка пересечения l_1 и p будет одним из концов искомого отрезка. **9.** Рассмотрите центральную симметрию относительно точки пересечения окружностей. **12.** Возьмем любые две точки на окружности. Серединный перпендикуляр к хорде, соединяющей эти две точки, проходит через центр. Взяв другие две точки, найдем центр как точку пересечения двух серединных перпендикуляров. **13.** а) Пусть в гранях ABC и ABD пирамиды $ABCD$ отмечены точки P и K. Проведем через A и P прямую. Пусть она пересекает BC в точке M. Точно так же, проведя прямую AK, найдем на BD точку N. На листе бумаги построим треугольник, равный треугольнику AMN, построим на сторонах AM и AN точки P и K, затем найдем длину нужного отрезка. б) Отметим на каждой из прямых по две точки. Получим шестиугольник. На листе бумаги построим шестиугольник, равный получившемуся, и достроим его до искомого треугольника.

4.3. Кратчайшие пути на плоскости

1. Отразите точку A относительно одного берега, а точку B — относительно другого. Полученные точки A_1 и B_1 соедините прямой. Точки пересечения A_1B_1 с берегами реки и есть точки, где должны побывать туристы. **2.** Отразите A относительно сторон угла и соедините прямой получившиеся две точки. Эта прямая пересечет стороны угла в нужных нам точках B и C. **3.** «Развернем» треугольники ACD и BCD на плоскость так, чтобы A и B располагались по разные стороны от CD, и соединим A и B. Эта прямая пересечет CD в нужной нам точке M. Если же прямая не пересекает CD, то в качестве M берется одна из точек C или D.

4.4. О решении геометрических задач

1. $AM : MD = 38 : 33$. **2.** 0,6. **3.** $KM : MP = 3 : 1$. **4.** 2,5 или 0,5. Рассмотрим нашу прямую как координатную ось с началом в A. Координаты точек B, C и D равны соответственно 2, x и $x+3$ (или $x-3$). Центры наших окружностей являются серединами отрезков AC и BD. В первом случае их координаты $\frac{x}{2}$ и $\frac{2+(x+3)}{2} = 2\frac{1}{2} + \frac{x}{2}$. Расстояние между ними равно $2\frac{1}{2}$. **5.** Таких точек M ровно 3, по одной на каждом из отрезков AB, BC и CD. Самое трудное—это найти точки, расположенные на AB и CD. Пусть M—на отрезке AB, причем $AM = x$, тогда $BM = 3 - x$, $CM = 4 - x$, $DM = 6 - x$. Получаем уравнение $\frac{x}{6-x} = \frac{3-x}{4-x}$. Освобождаясь от знаменателя и приводя подобные члены, получим уравнение $2x^2 - 13x + 18 = 0$. Это квадратное уравнение. Оно может быть решено по соответствующим формулам. Мы же покажем, как левая часть может быть разложена на множители: $2x^2 - 13x + {}$ ${}+ 18 = 2x^2 - 4x - 9x + 18 = 2x(x-2) - 9(x-2) = (x-2)(2x-9)$. Получаем уравнение $(x-2)(2x-9) = 0$. На отрезке AB находится точка M, для которой $x = 2$. Оказывается, что и второе значение x нам также подходит. (Соответствующая точка попадает на отрезок CD.) Осталось рассмотреть случай, когда M на BC. Этот случай дает нам обычное линейное уравнение. Соответствующее расстояние будет равно $3\frac{3}{5}$. Общий ответ: 2, $3\frac{3}{5}$, $4\frac{1}{2}$. **6.** $140°$. **7.** $80°$ или $60°$. **8.** $60°$. **9.** 11. **10.** 5. Треугольник ABC—равнобедренный, $AC = BC = 2$. **11.** 7 или 9. Из условия следует, что $BM = BC$, $BK = BA$. При этом возможны два случая: $AB < BC$ и $AB > BC$. **12.** $AD = 4$. Докажите, что $AB + CD = BC + AD$. Последнее равенство следует из того, что выражения $AB + CD$ и $BC + AD$ равны сумме радиусов всех четырех окружностей.

13. 2. Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$, в котором $AB=7$, $BC=10$, $CD=12$, $DE=8$, $EA=9$. Пусть радиус окружности с центром в A равен x. Последовательно находим радиусы окружностей с центрами в B, C, D и E, они будут равны $7-x$, $10-(7-x)=3+x$, $12-(3+x)=9-x$, $8-(9-x)=x-1$. Итак, радиус окружности с центром в E равен $x-1$. Но $AE=9$. Значит, $(x-1)+x=9$, $x=5$. При этом наименьшей является окружность с центром в B. Ее радиус 2. **14.** 10. Пусть окружность касается BC в точке K, а сторон угла AB и AC — в точках M и P соответственно. По условию $AM=AP=5$. Учитывая равенство касательных к окружности, проведенных из одной точки, будем иметь $AB+AC+BC=AB+AC+BK+CK=$ $=AB+AC+BM+CP=AM+AP=10$. **15.** $BD=5$, $CD=10$. Рассмотрим четырехугольник (не плоский) $ABCD$. Рассуждая так же, как в задаче 12, докажем, что $AB+CD=AD+BC$. Затем, рассмотрев четырехугольник $ABDC$, докажем также, что $AB+DC=BD+AC$.

4.5. Доказательства в геометрии

6. Пусть p и q — две оси симметрии некоторой фигуры. Тогда осью будет и прямая p_1, симметричная p относительно q. Но по условию осей симметрии лишь две. Значит, p_1 совпадает с p. Это возможно лишь при условии перпендикулярности p и q. **9.** Допустим $c>a$. Тогда $2c>c+a>b$. Сложив неравенства $2c>b$ и $c>a$, получим, что $3c>a+b$, что противоречит условию. Значит, $c\leqslant a$. То, что $c\leqslant b$, доказывается аналогично. **13.** Обозначим внутренний выпуклый многоугольник через P, а тот, в котором он содержится, через Q. Многоугольник P можно вырезать из Q, отрезая последовательно некоторые многоугольники. Как мы знаем (задача 12), при каждом таком разрезе периметр отрезанного многоугольника уменьшается. **14.** См. решение задачи 21 из 3.3. **15.** Пусть радиус окружности с центром в A равен x. Тогда радиусы окружностей с центрами B и C будут соответственно $x-BA=x-c$ и $x-b$. Из уравнения $(x-c)+(x-b)=a$ найдем $x=(a+b+c)/2$. **16.** См. решение задачи 21 из 3.3. **17.** См. задачу 15. **18.** Будем считать, что точка O — внутри ABC. Обозначим $\angle OBC=\angle OCB=x$. Тогда $\angle OAB = \angle OBA = 60° - x$, $\angle OAC = \angle OCA = 80° - x$. Имеем уравнение $(60° - x) + (80° - x) = 40°$, откуда $x = 50°$. Покажите, что O не может быть вне или на стороне треугольника ABC. **19.** См. решение задачи 12 из 4.4. **20.** См. предыдущую задачу и задачу 12 из 4.4. **21.** Рассмотрим случай, когда O — центр окружности — внутри $ABCD$. Имеем $\angle OAB = \angle OBA = \alpha$, $\angle OAD = \angle ODA = \beta$, $\angle ODC = \angle OCD = \gamma$, $\angle OBC = \angle OCB = \delta$. Тогда $\angle BAD + \angle BCD = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Такой же будет и сумма $\angle ABC + \angle ADC$. (Случай, когда точка O расположена вне $ABCD$, рассмотрите самостоятельно.) **22.** Обозначим через M и K середины AC и BD. Из равенства треугольников ABC и CDA следует, что $BM = DM$. Значит, треугольник BMD — равнобедренный с основанием BD, и медиана MK перпендикулярна BD. Аналогично получим, что KM — медиана равнобедренного треугольника AKC.

Оглавление

Игорь Федорович Шарыгин

ГЕОМЕТРИЯ–7
(теория, задачи)

Редактор *Р. К. Гордин*
Оформление художника *Н. Н. Рожнова*
Обложка *Г. А. Карасевой*
Технический редактор *Г. А. Карасева*
Корректор *В. П. Соловьева*
Технический художник *Э. Е. Фоминова*
Компьютерная верстка в системе LaTeX
Т. М. Грозовского

Оригинал-макет сделан ТОО "ЧеРо"

н/к

ЛР № 070160 от 02.10.91 г.
Подписано в печать 25.09.95.
Формат 60×90/16. Объем 9,0 п. л.
Гарнитура Computer Modern Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная.
Тираж 30000 экз. Зак. № 1219.

Московский институт развития
образовательных систем.
109004, Москва, Нижняя Радищевская ул., д. 10.

Шарыгин И.Ф.

Геометрия 7

теория, задачи