И. Ф. Шарыгин

ГЕОМЕТРИЯ

7-9

ДРОФА

ВЕРТИКАЛЬ

Электронное приложение
www.drofa.ru

И. Ф. Шарыгин

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для общеобразовательных учреждений

Рекомендовано
Министерством
образования и науки
Российской Федерации

ВЕРТИКАЛЬ

7–9

Москва
дрофа
2012

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Ш26

Шарыгин, И. Ф.

Ш26 Геометрия. 7—9 кл. : учеб. для общеобразоват. учреждений / И.Ф.Шарыгин.— М. : Дрофа, 2012. — 462, [2] с. : ил.

ISBN 978-5-358-09918-0

Учебник входит в учебно-методический комплекс по геометрии для 7—11 классов и реализует авторскую наглядно-эмпирическую концепцию построения школьного курса геометрии.

Большое внимание уделено методам решения геометрических задач. В теоретической части разделы, отмеченные звёздочкой, предназначены для углублённой подготовки, система задач дифференцирована по уровням сложности.

Учебник соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту основного общего образования, одобрен РАН и РАО, имеет гриф «Рекомендовано» и включен в Федеральный перечень учебников как завершённая предметная линия.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-358-09918-0

От автора

Чем математика отличается от других школьных предметов? Наверняка любой школьник сумеет ответить на этот вопрос, указав немало важных отличий. Я же хочу обратить внимание на две особенности. С математикой приходится встречаться на протяжении всей школьной жизни.

Во всех классах, от первого до последнего, бывают уроки математики. И этим математика отличается от любого другого школьного предмета, кроме... физкультуры.

Вторая особенность состоит в том, что начиная с некоторого момента математика как бы раздваивается и в расписании уроков появляются её разделы: алгебра и геометрия. Изучаются эти разделы на разных уроках, по разным учебникам, а иногда их даже ведут разные учителя.

Чем же геометрия выделяется среди других разделов математики? Прежде всего, геометрия, наверное, самая древняя наука. Более того, сам термин «математика» возник сравнительно недавно, так что учёные древности и Средневековья, занимавшиеся в нашем понимании математикой, называли себя геометрами. Некоторые теоремы геометрии являются одними из древнейших памятников мировой культуры. Они старше самой Библии. Помните об этом, изучая геометрию. И если вы любите и интересуетесь историей, то должны неплохо знать и геометрию.

Однако далеко не все школьники испытывают большую любовь к математике. Некоторые не слишком хорошо выполняют арифметические действия, плохо разбираются в процентах, и вообще, пришли к выводу, что у них нет никаких математических способностей. Хочу их обрадовать: геометрия — это не совсем математика. Во всяком случае, это совсем не та математика, с которой до сих пор вам приходилось иметь дело. Геометрия — это предмет для тех, кому нравится фантазировать, рисовать и рассматривать картинки, кто умеет наблюдать, замечать и делать выводы.

Геометрия — необычайно важный и интересный предмет, и любой человек может найти в ней уголок по душе.

Один мудрец сказал: «Высшее проявление духа — это разум. Высшее проявление разума — это геометрия. Клетка геометрии — треугольник. Он так же неисчерпаем, как и Вселенная. Окружность — душа геометрии. Познайте окружность, и вы не только познаете душу геометрии, но и возвысите душу свою».

Часть задач учебника имеет выделения. Буква «н» показывает, что задача начальная. Решение таких задач подготовит к восприятию более сложных задач. Буква «в» сопровождает важные задачи. Эти задачи надо непременно решить и хорошо усвоить либо метод решения, либо сообщаемый в них факт. Буква «п» означает, что задача полезная, буква «т» — трудная. Этими буквами обозначены задачи, предназначенные тем, кто хочет лучше овладеть теорией геометрии и научиться решать трудные задачи.

С помощью значка ❋ выделен материал, который не является обязательным.

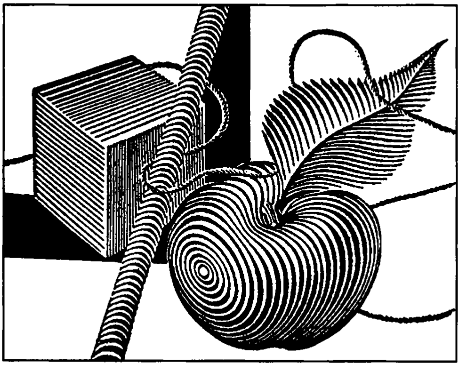
Ссылка с помощью значка указывает на материалы, представленные на электронном приложении к учебнику.

Седьмой

класс

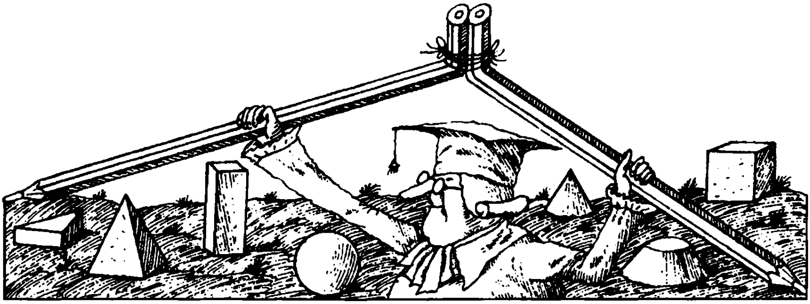
1

Геометрия как наука
Первые понятия



Предмет, к изучению которого мы приступаем, называется ***геометрия****. Но было бы неверным утверждать, что до сих пор вы ничего о ней не знали. Вам не раз приходилось встречаться с треугольниками и пирамидами, квадратами и кубами, окружностями и шарами. Не так много, но кое-что об этих телах и фигурах вы знаете, хорошо представляете себе, как они выглядят, и понимаете, что все они имеют отношение к геометрии.*

Утверждение, что мы приступаем к изучению геометрии, означает прежде всего, что в учебнике излагается систематический курс геометрии. Это, в свою очередь, значит, что мы постепенно, шаг за шагом будем строить геомет-



рическую теорию, последовательно доказывая все утверждения в соответствии с законами математики, выводя их из уже известных утверждений.

*Прежде всего, что такое геометрия? Слово **геометрия** состоит из двух частей **гео** и **метрия** и в переводе с греческого языка означает **землемерие**.*

Но уже давно геометрия вышла за узкие рамки, обозначенные этим буквальным пониманием. Если мы заглянем в любой энциклопедический словарь, то обнаружим очень большую статью, начинающуюся примерно так:

***Геометрия** — это раздел математики, изучающий пространственные формы и их отношения. А что это означает? Что такое «пространственные формы» и в чём состоят «их отношения»?*

1.1. Геометрическое тело

Важнейшей пространственной формой является ***геометрическое тело***, а одним из видов пространственных отношений — взаимное расположение геометрических тел.

Один из крупнейших математиков XX в. А. Пуанкаре сказал так: «Не будь в природе твёрдых тел, не было бы и геометрии».

Каждый из вас без труда может привести примеры различных тел, встречающихся в окружающем нас мире: жилой дом, булыжник, заводская труба, капля смолы и т. д.

Говоря «геометрическое тело», мы тем самым подчёркиваем, что нас не интересуют физические свойства тела: масса, цвет, материал и др., что рассматривать и изучать мы будем лишь его форму и размеры. Можно сказать, что мы рассматриваем ту часть пространства, которую соответствующее тело занимает.

1.1

Если взглянуть на окружающие нас предметы как на геометрические тела, то можно, например, сказать, что дом и кирпич имеют одинаковую форму — форму параллелепипеда и отличаются лишь размерами, что заводская труба часто имеет форму цилиндра, а футбольный мяч — форму шара.

Конечно, реальный кирпич следует рассматривать как параллелепипед лишь приближённо. Проделав достаточно точные измерения, можно обнаружить небольшие отклонения от результатов, которые должны получиться, если бы кирпич был действительно параллелепипедом. Да и точность наших измерений ограничена, в то время как размеры параллелепипеда считаются заданными абсолютно точно. Однако для практических нужд все эти отклонения несущественны, и кирпич удобно рассматривать как параллелепипед.

Или рассмотрим нашу планету Земля. Часто говорят, что она имеет форму шара. Это удобно для многих практических и учебных целей. Однако с геометрической точки зрения это не совсем верно. Измерения, проведённые в XVII в., показали, что Земля имеет форму *геоида* — шара, немного сплющенного вдоль одного из диаметров — оси Земли.

Геометрическое тело имеет *три измерения*. Условно мы их называем: *длина*, *ширина* и *высота* (или *толщина*). Да и само пространство, в котором мы живём, называется ***трёхмерным***. Наличие *трёх* измерений является характерным признаком геометрического тела. Как это следует понимать?

У любого параллелепипеда нетрудно указать длину, ширину и высоту (рис. 1). Правда, что именно является длиной, шириной или высотой зависит от договорённости. Это, например, может определяться положением параллелепипеда относительно поверхности земли, стола и др. Часто за длину мы принимаем наибольшее измерение, а под толщиной понимаем самое маленькое. Всё это не так уж важно. Главное — измерений ровно три.

А как быть, допустим, с конусом или каким-то совсем замысловатым телом? Ведь здесь невозможно указать три измерения, как для параллелепипеда. Что здесь длина и ширина, а что — толщина? В общем случае утверждение о наличии у тела трёх измерений означает лишь, что внутри него можно поместить параллелепипед, пусть очень небольшой, у которого, однако, все три измерения отличны от нуля.

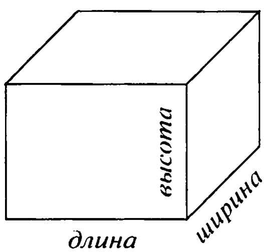
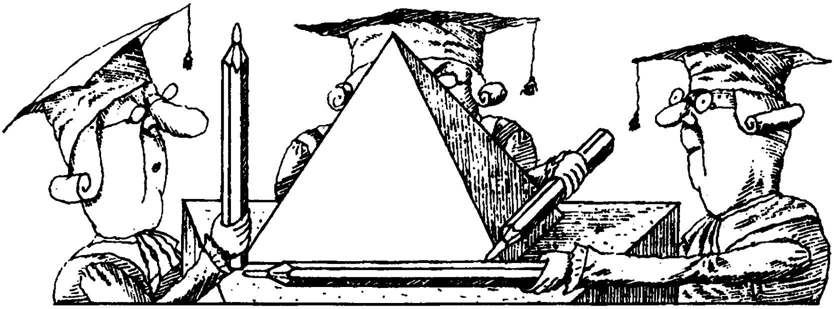


Рис. 1



А теперь решите несколько задач, выполните задания и ответьте на вопросы. (Начиная с этого момента, в конце каждого параграфа или главы вам будут предлагаться упражнения этих трёх видов.)

▲■● Задачи, задания, вопросы

1. Рассмотрим встречающиеся буквально на каждом шагу предметы: книгу, консервную банку, карандаш, электрическую лампочку... (Назовите ещё несколько предметов самостоятельно.) Какие из известных вам геометрических тел по форме наиболее соответствуют перечисленным предметам? А быть может, их удобно рассматривать составленными из нескольких известных геометрических тел? Из каких? Дайте словесное описание этих тел.

2. Вспомните названия нескольких геометрических тел. Какие реальные тела соответствуют им по форме?

3. Нарисуйте известные вам геометрические тела: куб, различные пирамиды, цилиндр, конус, шар и др. Постарайтесь, чтобы изображаемые тела выглядели объёмными. Какое из тел, на ваш взгляд, наиболее неудобно для изображения?

4. Придумайте какое-нибудь интересное тело. Опишите его словами другим ученикам, а они должны понять, что вы имеете в виду, и изобразить придуманное тело.

5. Рассмотрите внимательно рисунок 2, *а—ж*. Опишите, как устроены изображённые на них тела. Названия каких тел вам известны? Среди изображённых тел есть невозможные. Какие именно? Почему это так? Придумайте и нарисуйте какие-нибудь интересные тела, в том числе и невозможные.

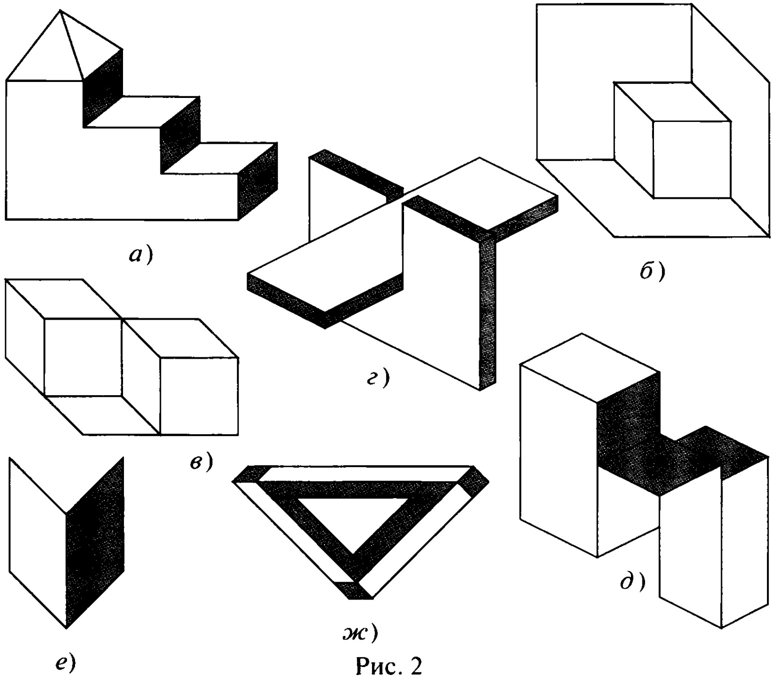


Рис. 2

6. Придумайте пробку, с помощью которой можно заткнуть любое из изображённых на рисунке 3 отверстий.

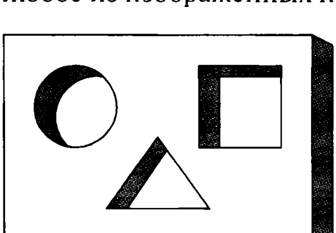


Рис. 3

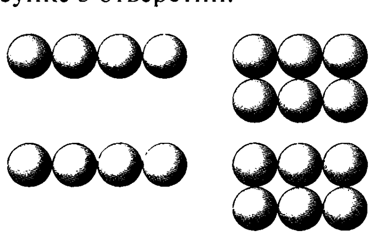


Рис. 4

7. Подумайте над следующей старинной головоломкой, которую иногда называют «египетская пирамидка». Имеется 20 одинаковых шариков, склеенных так, что получилось две «цепочки» по 4 шарика в каждой и два «прямоугольника» из 6 шариков со сторонами 2 и 3 шарика (рис. 4). Как сложить эти 4 набора, чтобы получилась составленная из шариков треугольная пирамида?

1.2. Поверхность

Всякое геометрическое тело имеет ***поверхность***, представляющую собой границу (оболочку) этого тела.

Поверхность геометрического тела делит всё пространство на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к этому телу. Чтобы попасть из любой точки, находящейся внутри тела, во внешнюю область, необходимо пересечь поверхность тела (рис. 5).

Поверхность, ограничивающая шар, называется ***сферой*** (рис. 6).

У всех других известных нам тел поверхности не имеют специальных названий.

Однако не всякая поверхность является границей какого-либо тела. Главное здесь то, что поверхность, в отличие от тела, имеет лишь *два измерения*: длину и ширину. Иными словами, никакое тело, каким бы маленьким оно ни было, нельзя расположить так, чтобы оно целиком принадлежало поверхности.

Конечно, в реальной жизни, в природе мы не встретим предметов, не имеющих толщины. Поэтому понятие поверхности *абстрактно*, является *математической абстракцией*. (*Абстрактный* в переводе с латинского означает *отвлечённый*. Абстрактное понятие означает что-либо мысленное, непредметное, существующее лишь в нашем воображении. К абстрактным

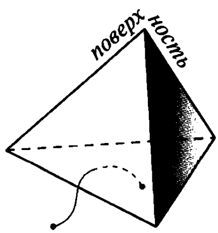


Рис. 5

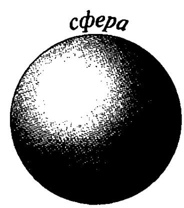


Рис. 6

следует отнести такие понятия, как красота, душа, мысль, скорость и многие другие.)

Говоря, что лист бумаги или мыльная плёнка являются поверхностями, мы подразумеваем, что их толщина ничтожно мала по сравнению с другими размерами. В жизни мы часто поступаем подобным образом. Например, говорим «фотография 9 на 12», «кусок ткани 2 м на 3 м». И никому не приходит в голову указать ещё и третий размер — толщину фотографии или ткани, хотя в отдельных случаях знание этой величины оказывается важным. Практически мы считаем их поверхностями и характеризуем двумя размерами — длиной и шириной.

Многообразен и удивителен мир поверхностей. На рисунке 7 изображены некоторые интересные математические поверхности. Стоит обратить внимание на поверхности, изображённые в нижнем ряду. Они обладают на первый взгляд невозможным свойством — у них одна сторона. Оказывается, двигаясь вдоль этих поверхностей и нигде не переходя через край, можно вернуться в ту же точку, но с другой (по отношению к этой точке) стороны. Убедитесь в этом самостоятельно. Поверхность, изображённая на рисунке 7, *е*, называется ***листом Мёбиуса***. Она названа так по имени открывшего её (вернее, его) немецкого математика Мёбиуса, жившего в XIX в. Говорят, что своё открытие он сделал, увидев ленту, которую служанка по оплошности неверно сшила. Сколько раз подобные оплошности совершали служанки, и не только они! Но никто до Мёбиуса не обращал внимания на удивительные свойства образовавшейся поверхности.

Среди всех поверхностей выделим одну — ***плоскость***, свойства которой и будем в дальнейшем изучать.

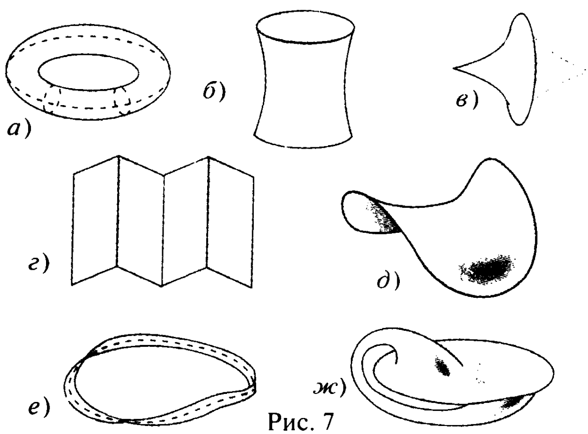
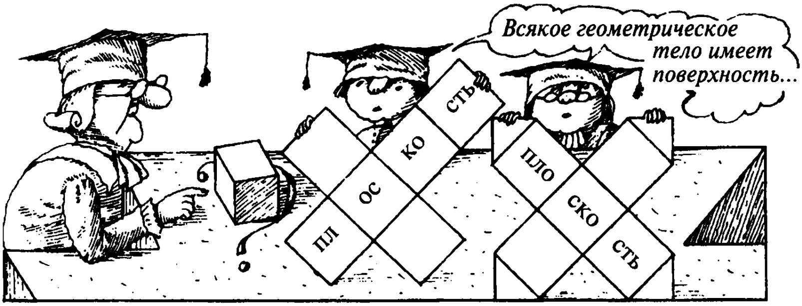


Рис. 7



Плоскость мы представляем себе бесконечной во всех направлениях. В окружающем нас мире без труда можно найти много примеров плоских поверхностей: поверхность конькобежного катка, оконное стекло, поверхность стола или пола, футбольное поле. Их практически можно рассматривать как плоские поверхности, части плоскости.

▲■● Задачи, задания, вопросы

Начиная с этого параграфа, мы будем выделять некоторые задачи. Буква «н» показывает, что задача начальная. Решение таких задач подготовит к восприятию более сложных задач. Буква «в» сопровождает важные задачи. Эти задачи надо непременно решить и хорошо усвоить либо метод решения, либо сообщаемый в них факт. Буква «п» означает, что задача полезная, буква «т» — трудная. Этими буквами обозначены задачи, предназначенные тем, кто хочет лучше овладеть теорией геометрии и научиться решать трудные задачи. Не удивляйтесь, что при выполнении части заданий вам потребуются знания из курса математики 5—6 классов, но пока без строгого обоснования.

8. Склейте из бумаги поверхности, ограничивающие куб, треугольную пирамиду, треугольную призму (рис. 8).

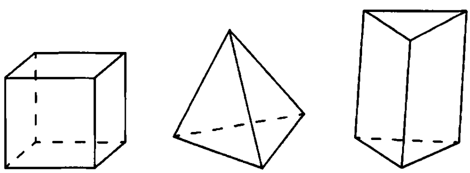
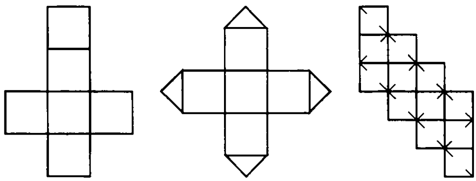


Рис. 8

9. Поверхность куба разрезали и развернули на плоскость. Получились фигуры, изображённые на рисунке 9, *а—в*. Как из них получить поверхность куба?



а) *б*) *в*)

Рис. 9

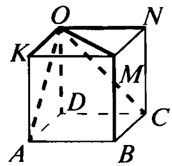


Рис. 10

10. Придумайте самостоятельно интересные развёртки куба.

11(н). Поверхность куба, изображённого на рисунке 10, разрезали по отрезкам *OD*, *OA*, *OK*, *OM*, *ON*, *OC* и *MB* и развернули. Начертите получившуюся развёртку.

12(н). По каким рёбрам нужно разрезать куб (рис. 11), чтобы получить развёртку, представленную на рисунке 12?

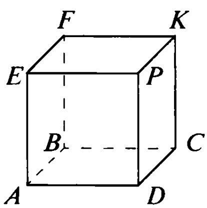


Рис. 11

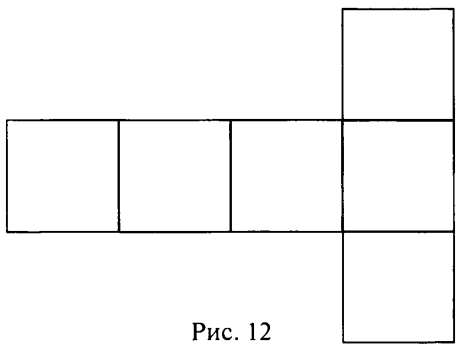


Рис. 12

13. Что получится, если поверхность треугольной пирамиды, у которой все рёбра равны, разрезать так, как показано на рисунке 13, и развернуть? (Разрезы идут по отрезкам *BA*, *CA*, *KA* и *KD*.) Придумайте другие интересные развёртки треугольной пирамиды.

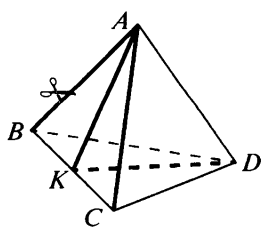


Рис. 13

14(н). Из бумажного треугольника, все углы которого острые, сложите тетраэдр, т. е. треугольную пирамиду.

15. Имеется квадратный лист бумаги. Сложите его так, чтобы получилась поверхность треугольной пирамиды.

16(н). Какие многоугольники, изображённые на рисунке 14, можно считать развёртками правильного тетраэдра (треугольная пирамида, все грани которой — одинаковые треугольники с равными сторонами)? Почему?

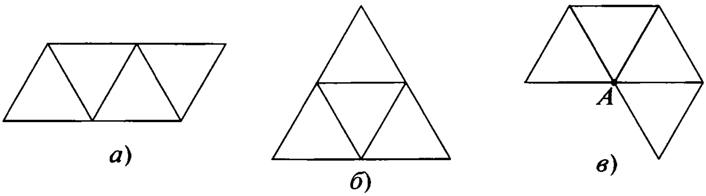


Рис. 14

17. Что получится, если лист Мёбиуса разрезать вдоль штриховой линии, указанной на рисунке 7, *е*? Можно ли одним разрезом разрезать лист Мёбиуса на две части, которые, однако, нельзя разъединить?

18. Художник изготовил для своей картины рамку. Он считает, что получившаяся рамка имеет прямоугольную форму. Каким образом это можно проверить? Достаточно ли убедиться в равенстве противоположных сторон? А если к равенству противоположных сторон добавить ещё и равенство диагоналей? Можно ли теперь быть уверенным в том, что рамка действительно имеет прямоугольную форму?

19. Каким образом из листа бумаги можно изготовить поверхность цилиндра, конуса?

20(н). Начертите развёртку цилиндра, если радиус его основания равен 5 см, а высота равна 10 см.

21. Рассмотрим известные вам тела: параллелепипед, призму, цилиндр, конус, шар. Как вы думаете, поверхности каких из этих тел можно разрезать таким образом, чтобы их можно было положить на плоскость?

22. Имеется ёмкость для воды: ведро, таз и т. п. Как проверить, что дно ёмкости плоское?

1.3

1.3. Линия

При пересечении двух поверхностей получается ***линия***.

Линией обычно является граница поверхности. (Если, конечно, у поверхности есть граница.)

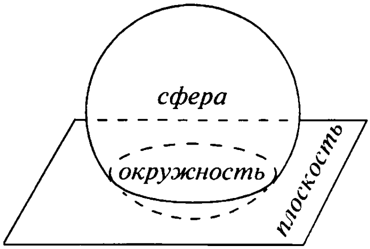


Рис. 15

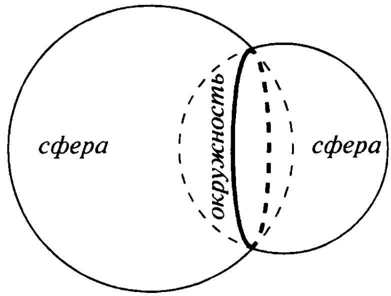


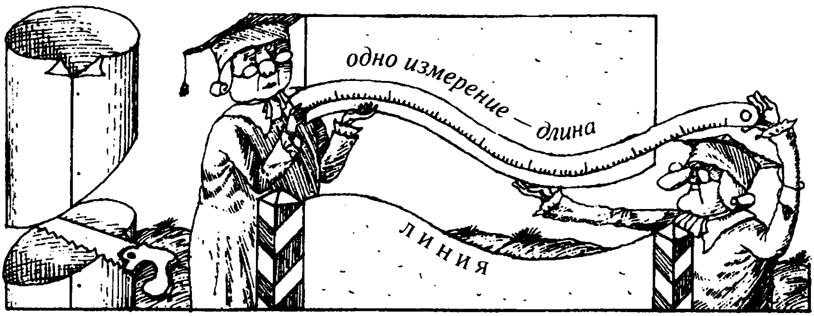
Рис. 16

Разрезав арбуз, мы получим на его поверхности линию, похожую на окружность. Она образуется при пересечении двух поверхностей: поверхности арбуза и плоскости, по которой проходит разрез.

При разрезании наискось поверхности цилиндра получаем овал, называемый ***эллипсом***. Если же перед разрезанием обернуть поверхность цилиндра бумагой, а после разрезания этот лист развернуть, то в результате получим волнистую линию, которая называется ***синусоидой***.

Следует запомнить, что при пересечении сферы с плоскостью (рис. 15) или же при пересечении двух сфер (рис. 16) образуется окружность. (Конечно, эти поверхности могут также касаться друг друга — иметь единственную общую точку и вовсе не иметь общих точек.)

Линия не имеет толщины и ширины. У неё лишь одно измерение — *длина*.



Как и поверхность, линия — понятие абстрактное.

В реальной жизни мы часто встречаемся с линиями, точнее, с тем, что удобно считать линией. Предмет или что-то иное, одно измерение которого явно преобладает над другими, мы считаем линией. Например, нить, волос, дорога, разделительная полоса на шоссе, государственная граница и т. п. Мы говорим «длина волоса», «длина дороги», «20 м верёвки», т. е. ограничиваемся для характеристики предмета лишь одним измерением.

При пересечении двух плоскостей образуется ***прямая линия*** (рис. 17).

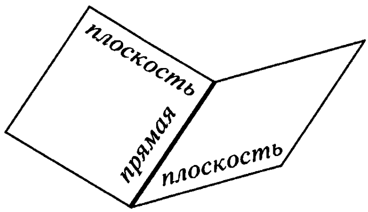


Рис. 17

В геометрии (и не только в геометрии) прямая линия играет исключительную роль. Луч света представляет собой прямую линию. Натянутая нить — также прямая. Свободно падающее тело движется по прямой. Также по прямой движется тело, на которое не действуют никакие силы. В этом (упрощённо) состоит *первый закон Ньютона*, с которым вы познакомитесь на уроках физики.

▲■● Задачи, задания, вопросы

23(н). На каждой из фигур (рис. 18) показаны вид спереди и вид сверху для некоторых известных тел. Назовите геометрическое тело в каждом случае.

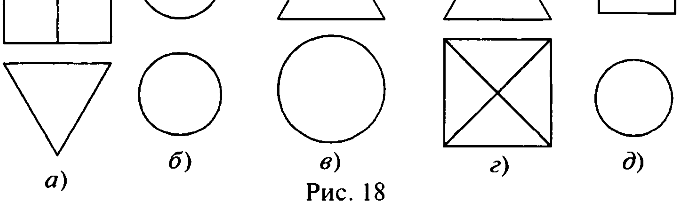


Рис. 18

24. На поверхности каких известных вам геометрических тел можно проводить прямые линии или части прямых?

25(н). Изобразите три вида (спереди, сбоку и сверху) геометрического тела, представленного на рисунке 19.

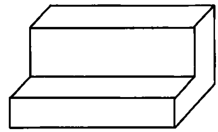


Рис. 19

26(н). Развёртка какого геометрического тела изображена на рисунке 20?

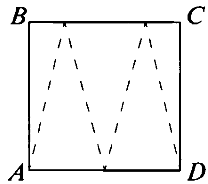


Рис. 20

27. Соедините две точки прямой линией: а) на листе бумаги; б) на полу класса; в) на местности. Предложите в пункте б) практический способ построения прямой, в пункте в) — способ, с помощью которого можно отметить на местности точки, расположенные на одной прямой.

28. Имеется кусок проволоки. Как проверить, является ли он отрезком прямой?

29. Как проверить, что имеющаяся у вас линейка в самом деле позволяет проводить прямые линии?

30. Почему образующаяся при сгибании листа бумаги линия является прямой?

31(н). С помощью нитки или проволоки на моделях основных геометрических тел, выполненных из пластилина, постройте по две линии — плоскую и пространственную (рис. 21).

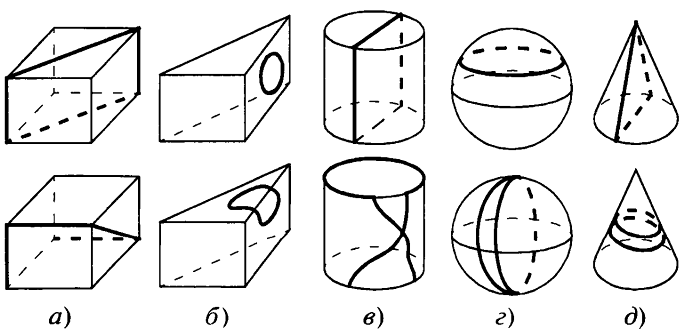


Рис. 21

32. Кусок проволоки изогнули в виде некоторой линии. На рисунке 22 показано, как выглядит этот кусок с трёх различных точек зрения (спереди, сбоку и сверху). Каким образом изогнули этот кусок?

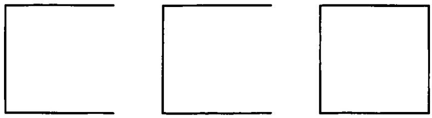


Рис. 22

1.4. Точка

Древнегреческий геометр Евклид говорил, что «точка — это то, что не имеет частей». Мы можем добавить, что точка не имеет размеров.

Всякий очень маленький по сравнению с рассматриваемым окружением предмет мы считаем точкой (рис. 23). Так, точкой является отверстие, оставленное иглой в листе бумаги, жук на поверхности земли, город на географической карте, звезда на небе или наша планета в Солнечной системе.

При пересечении двух линий образуется точка, возможно, не одна. Любое геометрическое тело, поверхность, линия, любая геометрическая фигура состоит из точек, или, как говорят математики, представляет собой множество точек. В дальнейшем отдельные точки мы обычно будем обозначать заглавными латинскими буквами A, B, C, ... (рис. 24).

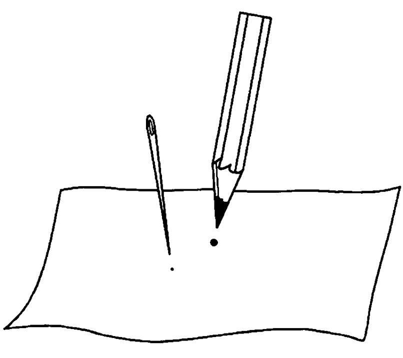


Рис. 23

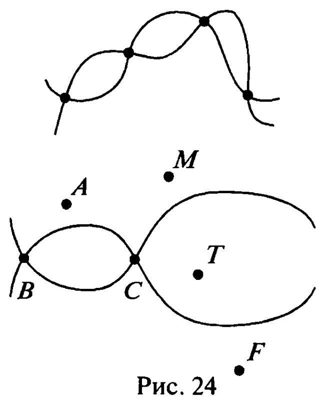


Рис. 24

▲■● Задачи, задания, вопросы

33. Могут ли два геометрических тела иметь ровно одну общую точку; две общие точки? Приведите примеры.

34(н). Разместите три стула в комнате так, чтобы у каждой стены было по одному стулу.

35(н). Расположите 10 кустов в 5 рядов, по 4 куста в каждом ряду.

36(н). Расположите 12 кустов в 6 рядов, по 4 куста в каждом ряду.

37(н). Разместите 18 монет в квадрате 6×6 так, чтобы в каждом ряду было по 3 монеты.

38. На краю большой лесной поляны стоят четыре дерева. Как найти на поляне место пересечения прямых, которые попарно соединяют противоположные деревья?

1.5. От точки к телу

Итак, начав рассмотрение с вполне реальных тел, мы получили представление о поверхностях, линиях, точках — геометрических формах, не существующих в природе, представляющих собой математические абстракции.

А теперь пойдём с «другого конца». Начнём с точки (рис. 25). Можно считать, что точка — это некое место в пространстве, нечто, не имеющее размеров.

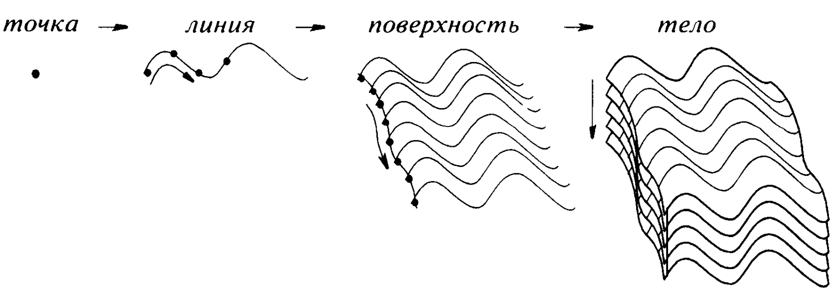


Рис. 25

При движении точка будет описывать линию — траекторию движения точки. Кстати, часть примеров, иллюстрирующих понятие прямой линии в § 1.4, — примеры движения по прямой.

Когда мы при помощи линейки вычерчиваем прямую линию, то как раз получается, что эта прямая вычерчивается движущейся точкой — кончиком карандаша. То же имеет место при вычерчивании окружности с помощью циркуля.

Будем теперь перемещать в пространстве линию целиком. При этом в процессе движения сама линия может менять форму, деформироваться. Область, заметаемая при таком движении, будет поверхностью.

Так, плоскость можно получить при помощи движения прямой линии. Представьте себе лезвие рубанка, выстругивающего доску. Луч вращающегося маяка также может заметать плоскость или же коническую поверхность. Сферу можно получить в результате вращения окружности вокруг её диаметра.

Все точки тела можно получить, перемещая в пространстве поверхность. Сферами с общим центром можно заполнить внутренность шара (конечно, надо добавить еще точку — центр шара); перемещая квадрат, можно заполнить куб и т. д.

Выводы

Подведём первые итоги.

Геометрическое тело — часть пространства; имеет три измерения, которые мы условно называем длиной, шириной и высотой (или толщиной).

Поверхность — граница геометрического тела; имеет два измерения — длину и ширину.

Линия образуется при пересечении двух поверхностей; имеет одно измерение — длину.

Точка образуется при пересечении двух линий; не имеет размеров.

С другой стороны:

Точка — «то, что не имеет частей»; не имеет размеров.

Линия получается при движении точки; имеет одно измерение — длину.

1.5

Поверхность заполняется или заметается при движении линии; имеет два измерения — длину и ширину.

Тело заполняется поверхностями; имеет три измерения — длину, ширину и высоту (или толщину).

Тело, поверхность, линия, точка являются ***основными геометрическими формами***.

Мы также будем использовать понятие ***геометрическая фигура***. Если геометрическое тело — это часть пространства, ограниченная поверхностью, то геометрическая фигура — это часть поверхности, ограниченная линией. Как и поверхность, фигура имеет два измерения.

Введём теперь ещё одно очень важное понятие — понятие ***геометрического равенства***.

Два геометрических тела, две поверхности, линии или фигуры называются ***равными****, если их можно совместить друг с другом* (рис. 26).

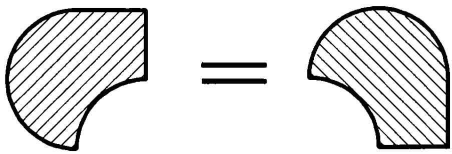


Рис. 26

Равенство геометрических фигур будем обозначать привычным символом =.

Необходимо чётко понимать, что, хотя понятие геометрического равенства и звучит, и обозначается так же, как и числовое равенство, оно во многом от него отличается. Равенство двух геометрических фигур или тел или других геометрических объектов означает их «одинаковость» по форме и по размеру.

Замечание. В математической литературе обычно используется термин ***конгруэнтность***, означающий *соответствие*, *совпадение*. Конгруэнтными являются фигуры, которые можно совместить друг с другом. Таким образом, введённое нами понятие геометрического равенства совпадает с математическим понятием конгруэнтность.

▲■● Задачи, задания, вопросы

39. Заведите специальную тетрадь, которую будем называть «Геометрический словарь». Запишите в тетрадь геометрические понятия и термины, которые вы узнали в этой главе, дайте короткие объяснения, проиллюстрируйте рисунками. Постарайтесь это сделать как можно красивее. Обращайтесь с тетрадкой аккуратно, она будет сопровождать вас в течение всех лет занятий геометрией.

40. Что означает слово «геометрия»? Чем занимается наука геометрия?

41. Назовите основные геометрические формы. Что такое геометрическое тело, поверхность, линия, точка?

42(н). Чем является труба газопровода для: а) проектировщика; б) рабочего, наносящего на трубу изоляционный слой; в) крановщика, укладывающего трубу?

43. Равны ли фигуры и тела, изображённые на рисунке 27[1]?

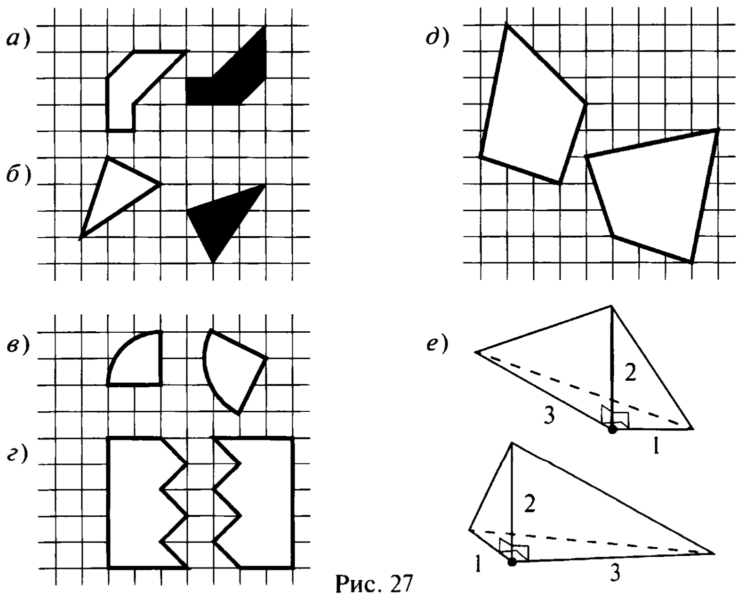


Рис. 27

[1] Напомним, что на чертежах прямой угол обозначается не дугой, а уголком (рис. 27, *е*).

44(н). Установите, развёртки каких тел изображены на рисунке 28[1].

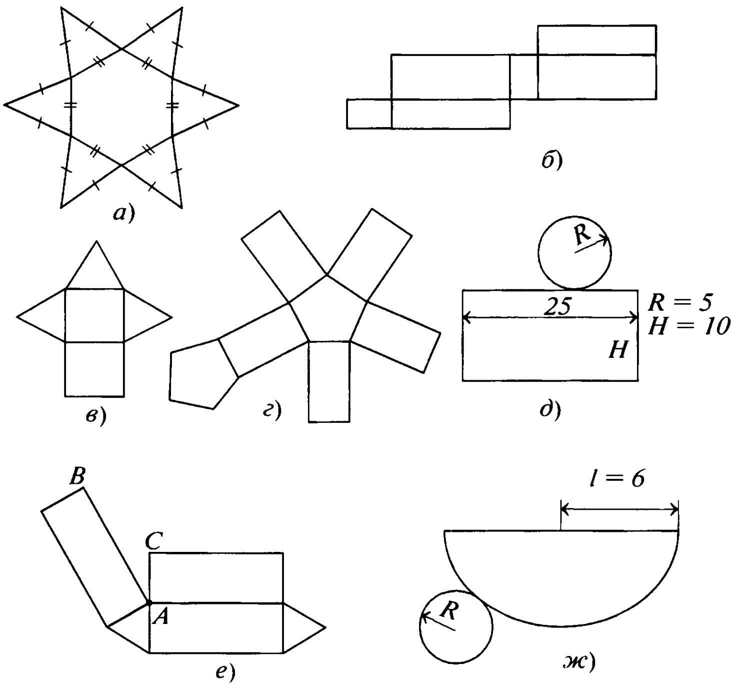


Рис. 28

45(н). Хозяйка привела козу на пастбище, вбила два колышка A и B на расстоянии 4 м друг от друга и натянула между ними верёвку с кольцом, которое свободно перемещалось по всей длине верёвки. К кольцу она привязала верёвку с козой. Длина этой верёвки равна 2 м. Нарисуйте образовавшееся пастбище и вычислите его площадь.

46(н). Какие линии могут получиться при пересечении поверхности конуса с плоскостью? Нарисуйте различные случаи. Если вы знаете названия получившихся линий, назовите их.

[1] Напомним, что на чертежах равные отрезки обозначаются равным числом засечек (см. рис. 28, *а*).

1.6. Как изучать геометрию?

После того как мы напомнили вам, *чем* занимается геометрия как наука, мы вполне можем приступать к её изучению. Есть, однако, ещё один важный вопрос, о котором нам хотелось бы до этого с вами поговорить. А именно: *как* мы будем изучать геометрию? У каждой настоящей науки есть, как принято говорить, свой метод. Например, физические исследования, даже самые абстрактные, в конечном счёте получают подтверждение или опровергаются опытами. Есть опыты и в химии, и в биологии, хотя биологи часто ограничиваются исключительно наблюдениями над животными и их поведением. Геологи изучают строение Земли в походах и экспедициях. Филологи проводят много времени в библиотеках, а историки — на раскопках.

В отличие от всех этих учёных, математикам вообще и геометрам в частности сложнее использовать эксперименты для доказательства или опровержения своих слов. Ведь невозможно перебрать все натуральные числа, чтобы проверить, что для них выполняется, скажем, великая теорема Ферма[1]! Сколько бы опытов с целыми числами мы ни сделали, нельзя исключить возможность того, что на следующий раз всё пойдёт не так. Ещё сложнее перебрать все треугольники или пирамиды (не говоря уж о том, что все чертежи, которые мы способны сделать, — лишь грубые приближения к настоящим математическим объектам). Да и какие эксперименты, казалось бы, могут быть в математике? Разве что мысленные... И потому для того, чтобы мы могли что-нибудь утверждать, требуется привести *доказательство*!

Тем не менее математика, даже, точнее, геометрия — одна из самых древних наук на Земле. Многие века она была едва ли не единственным «гражданским» предметом, изучавшимся в школах и университетах. И никогда, ни в те времена, ни сейчас, никто не сомневался в справедливости её выводов (если, конечно, они были правильно доказаны). Что же было причиной такой уверенности? На чём основывалась тогда (да и теперь) геометрия? И что означает «доказать теорему»?

Принято считать, что главное отличие геометрии от остальных изучаемых в школе предметов — это то, что вся она может быть построена на основании небольшого набора принимаемых без доказательства утверждений — *аксиом*. Многие думают, что

[1] Эта теорема гласит, что ни для какого целого $n > 2$ не существует целых a, b и c, таких, что $a^n + b^n = c^n$.

аксиомы были впервые введены Евклидом в его знаменитых «Началах» — первом из дошедших до нас учебнике геометрии и поэтому геометрия — настоящая «аксиоматическая теория» (позже, в 9 классе мы объясним, как это можно понимать). Попробуем же чуть-чуть разобраться с тем, что такое аксиомы, доказательства и как из одних утверждений получаются другие. А также постараемся объяснить читателю, что ему следует ждать от нашего учебника, а чего — нет.

Начнём с простого примера. Допустим, кто-то, кому мы абсолютно доверяем, — учитель, друг, папа или мама или, наконец, диктор телепрограммы — сообщил нам, что тигры относятся к отряду парнокопытных. Потом мы, из столь же надёжного источника, узнали, что парнокопытные животные — травоядные. Я думаю, следующий вывод покажется вам очевидным: «Тигры — травоядные животные!» С другой стороны, если бы наш первый источник говорил не про тигров, а про коров, то точно таким же образом мы бы заключили, что «коровы — травоядные». И хотя первый вывод, безусловно, неправильный, а второй — несомненно справедлив, никто из вас, наверное, не будет спорить с тем, что и то и другое заключение получено совершенно законным образом! Так в чём же дело? Всё просто: если мы не сомневаемся в первых двух утверждениях (*посылках*), то мы должны признать и верность сделанного *заключения*, ведь оно *логически следует* из первых двух.

Тем, как делать правильные выводы из тех или иных посылок и почему они будут правильными, занимается отдельная важная наука — *логика*. Наука эта весьма древняя, появилась на

свет даже раньше математики. По крайней мере, слово «логика» вошло в обиход намного раньше слова «математика», но не слова «геометрия». Как и большинство наук с древней историей, логика появилась на свет в Древней Греции и с тех пор развивалась без серьёзных перерывов. Логикой занимались Сократ и Платон, Аристотель и Авиценна и многие другие древние и средневековые учёные, не говоря уже про учёных нового времени. Можно сказать, что логика — наука о том, как правильно делать заключения, какие существуют приёмы и закономерности этой деятельности.

Мы не будем пускаться в подробное обсуждение того, каким образом логика отвечает на поставленные выше вопросы. Скажем лишь, что в ваших занятиях геометрией не потребуется никаких изощрённых логических уловок (самое сложное логическое построение, которое вы будете использовать — доказательство «от противного»). Все ваши выводы будут напоминать только что приведённый пример, разве что для достижения результата вам придётся делать не один или два шага такого рода, а несколько, порой довольно много. Чтобы было легче применять и понимать получающиеся утверждения, эти шаги разделяют на отдельные этапы, которые удобно формулируются и достаточно просто доказываются. Эти утверждения называются ***теоремами***, ***леммами*** или просто ***предложениями***.

Но не надо думать, что придумывание таких вот цепочек рассуждений — простое и лёгкое занятие! Даже очень талантливые математики не сразу находят нужные рассуждения. Дело в том, что часто из одного и того же исходного факта-посылки можно сделать огромное количество совершенно разных, на

первый взгляд, никак не связанных друг с другом выводов. И никто, наверное, не сможет сразу сказать, какие из этих выводов приведут, в конечном счёте, к нужному результату! Профессия математика-теоретика, учёного-математика — совсем не легка, зато весьма интересна. Ведь исследование математических проблем похоже на распутывание детективных историй при помощи «дедуктивного метода», только в роли преступника выступает неизвестный науке факт, а вместо улик в нашем распоряжении — известные нам предложения и теоремы. Если вы пока не совсем поняли, что такое доказательство, — не отчаивайтесь, мы ещё раз подробно поговорим о теоремах и о том, как их доказывают в параграфе 4.5.

Кстати, при занятиях геометрией мы можем пользоваться не только логическими построениями — в нашем распоряжении есть наглядные представления о фигурах, чертежи и то, что принято называть «геометрической интуицией». Правда, даже если бы мы смогли при помощи чертежа угадать правильный ответ, это ещё не значит, что его не надо доказывать — наши чертежи, к сожалению, несовершенны и мы можем ошибаться. Всё, что мы видим на чертеже, должно быть нами осмыслено и, по возможности, доказано. Некоторые даже говорят, что «геометрия — искусство правильно рассуждать на неправильном чертеже». Но всё же рисовать заведомо неправильный чертёж не имеет смысла, ведь чертёж нужен нам как подсказка, способ разбудить интуицию. Какой смысл в неправильной подсказке?

Итак, с тем, *как* математики переходят от одного утверждения к другому, мы более-менее разобрались. Но на чём же они основывают свои выводы? Для того чтобы сделать какое-нибудь заключение, нужно опираться на что-то, что нам уже известно! Понятно, что, когда мы уже что-то докажем, мы сможем использовать полученные результаты в дальнейшем. Что же нам использовать в начале, когда мы ещё ничего не успели доказать?

Вот тут мы и приходим к главной цели нашего разговора: первые утверждения, на которых основываются все остальные, не доказывают! Они считаются «очевидно верными», не требующими обоснований. В наше время такие утверждения принято называть ***аксиомами*** (др.-греч. ’αξίωμα). Хотя многие считают, что впервые данное слово было использовано геометрами, это, по всей видимости, не так. Во всяком случае, задолго до Евклида слово «аксиома» появлялось у Аристотеля. Более того, сам Евклид в своих знаменитых «Началах» нигде не использует этого слова! Он говорит, во-первых, о *постулатах* (др.-греч. 'αιτήματα), а во-вторых, об *общих понятиях*, или *общих местах* (др.-греч. χοινοὶ 'έννοιαι). Из этих двух понятий второе ближе к древнегреческому пониманию аксиом: «Того, — как говорил Аристотель и другие философы, — что верно само по себе, в силу самого значения слов». Примером такой аксиомы служит утверждение: «если от равного отнять равное, то получится равное». *Постулаты* же, в том смысле, который придавали этому понятию в Древней Греции, — это утверждения, «описывающие возможность некоторого построения». Так отвечал на вопрос о различии между аксиомой и постулатом один из поздних комментаторов Евклида, живший в V в. н. э., знаменитый философ Прокл Диадох.

Ни общие понятия, ни постулаты древние учёные не доказывали. Ведь общее понятие очевидно сразу всем, а постулат доказать невозможно! Вот, например, один из постулатов Евклида: «От каждой точки до всякой точки можно провести прямую линию». Сложно представить себе, что кто-нибудь сможет проверить такое утверждение на практике — слишком уж много на свете существует точек, даже не говоря о том, что настоящую геометрическую точку невозможно изобразить. Но, конечно, это утверждение не следует из «самого значения слова». Видимо, Евклид и сам хорошо осознавал разницу между этими двумя явлениями. Недаром перед формулировкой постулатов у него написано: «Допустим, что».

Всего у Евклида было пять постулатов и ещё девять общих понятий. С точки зрения современной науки одна часть из общих понятий — это правила абстрактной логики, другая — является постулатами. Одни постулаты не нужны, так как следуют из основных, других важных постулатов не хватает. Надо сказать, что впервые удовлетворительная система аксиом геометрии была построена только в XIX в. знаменитым немецким математиком Давидом Гильбертом. В ней более сорока различных утверждений. Мы не будем пытаться воспроизвести её — это заняло бы слишком много места, да и вряд ли это всем так уж необходимо[1].

Остался ещё один важный вопрос: «Почему всё это работает?» В самом деле, неясно, как так случилось, что утверждения,

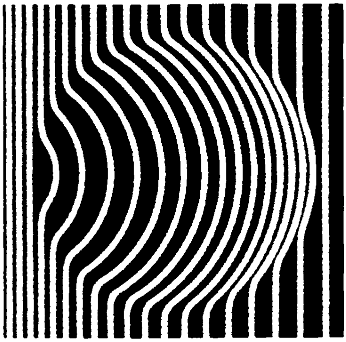
---

[1] Кое-что мы расскажем об этом для желающих в конце девятого класса.

полученные таким способом, вдруг выполняются на практике! И вот тут мы должны признаться, что современная наука не знает точного ответа на этот вопрос. Одна из вероятных причин — то, что правильно выбранные аксиомы отражают реально существующее положение вещей, а раз так, то и все наши выводы будут применимы на практике. Именно поэтому на страницах учебника вы не увидите слова «аксиома», — мы предпочитаем говорить о *свойствах пространства*. А значит, то, чем вы будете заниматься, — это исследование пространства. Итак, приглашаем вас в путешествие по удивительному миру геометрических фигур и их свойств! Надеемся, оно покажется вам увлекательным.

2

Основные свойства плоскости



Именно с этой главы, по существу, начинается систематический курс геометрии. Возможно, вначале он покажется не столь интересным, поскольку новых фактов почти не будет. Главное заключается в том, что все простые и известные геометрические факты мы постараемся изложить в строгой логической последовательности, иными словами, систематизировать их.

Мы будем в основном рассматривать раздел геометрии, который называется ***планиметрией*** *и изучает свойства плоскости, плоских форм и фигур.*

В этой главе мы познакомимся с некоторыми начальными понятиями планиметрии, обсудим важнейшие свойства плоскости в первую очередь те, которые связаны с прямыми, частями прямых, их взаимным расположением на плоскости.

Начнём с простейшего — свойств прямой линии.

2.1

2.1. Геометрия прямой линии

Геометрия прямой линии (рис. 29) достаточно проста. Основные свойства прямой линии известны и понятны. Мы лишь напомним и аккуратно сформулируем эти свойства и некоторые понятия, относящиеся к прямой линии.

*Любая точка, лежащая на прямой, делит эту прямую на две **полупрямые**. Каждая из этих полупрямых называется также **лучом*** (рис. 30).

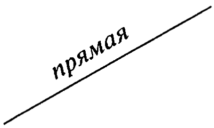


Рис. 29

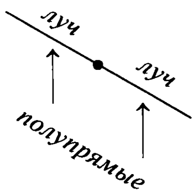


Рис. 30

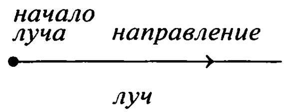


Рис. 31

Луч задаётся ***началом*** (граничная точка луча) и ***направлением*** (рис. 31).

Таким образом, каждая точка делит прямую на два луча, имеющие общее начало и противоположные направления. Такие лучи называются ***дополнительными***.

Если на прямой взять любые три точки, то одна из них расположена *между* двумя другими (рис. 32).

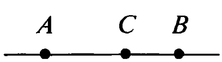
Любые две точки на прямой ограничивают ***отрезок*** прямой. Точки, которые расположены между концами отрезка, являются ***внутренними*** точками отрезка.

Отрезок задаётся своими конечными или граничными точками. Например, отрезок AB (рис. 33).

Луч мы также будем обозначать через AB, при этом первая точка в этой записи (точка A) обозначает начало луча, вторая (точка B) — любая точка на луче (рис. 34).

Если C — внутренняя точка отрезка AB, то говорят, что C принадлежит отрезку AB. Этот факт часто обозначают символически в виде $C \in AB$, в противном случае пишут $C \notin AB$.

Точно так же часто говорят, что отрезок AB прямой l принадлежит l или что AB содержится в l. В этом случае



C между A и B

Рис. 32

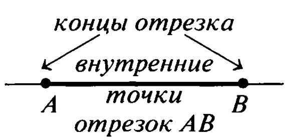


Рис. 33

Рис. 34

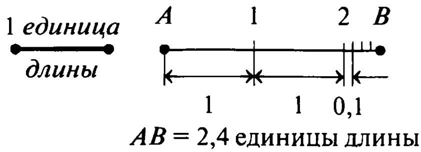


Рис. 35

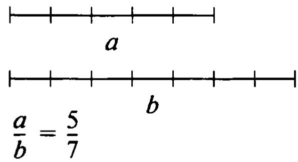


Рис. 36

пользуются обозначением $AB \subset l$, но пишут $A \in l$. Если AB не содержится в l, то записывают $AB \not\subset l$.

Такие же обозначения используют для записи принадлежности точек и отрезков лучам.

Если имеется *единица длины*, то мы можем измерять *длину* любого *отрезка*. Что такое длина отрезка и как можно измерить отрезок, считаем известным. Отметим лишь несколько простых и очевидных свойств.

Длина отрезка выражается положительным числом. Понятно, что величина этого числа зависит от выбора единицы длины. Поэтому, говоря о длине отрезка, надо указывать, в каких единицах он измерен (рис. 35). В нашей стране используется метрическая система мер. В этой системе в качестве единиц длины используются сантиметры (см), метры (м), километры (км) и т. д.

Два отрезка являются равными, если они имеют равную длину, т. е. в одинаковых единицах измерения их длины выражаются равными числами.

Отношение длин любых двух отрезков не зависит от выбора единицы длины. Поэтому мы можем говорить об ***отношении двух отрезков*** (рис. 36). Например, если отношение двух отрезков равно двум, то это означает, что в первом отрезке укладывается ровно два отрезка, равных второму отрезку.

С помощью циркуля мы можем в любом месте на прямой откладывать отрезки, равные данному.

В дальнейшем запись AB будем понимать как обозначение самого отрезка, так и его длины.

Если точка B лежит между точками A и C, то длина отрезка AC равна сумме длин отрезков AB и BC.

Это свойство можно записать (рис. 37) в виде равенства

$$AC = AB + BC.$$

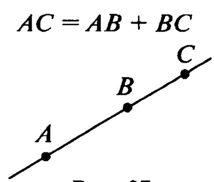


Рис. 37

2.1

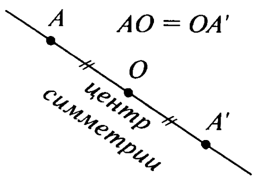


Рис. 38

Будем говорить, что точки A и A' ***симметричны относительно точки*** O или, что A переходит в A' при ***центральной симметрии*** относительно точки O, иными словами, если O — середина отрезка AA'. При этом точка O называется ***центром симметрии*** точек A и A' (рис. 38).

Любая точка O на прямой не только делит эту прямую на два противоположно направленных луча, но и является центром её симметрии, т. е. какую бы точку M мы на прямой ни взяли, на этой же прямой найдётся точка M', симметричная ей относительно точки O.

▲■● Задачи, задания, вопросы

47(н). а) Начертите прямую l.

б) Отметьте на ней точки M, K, P так, чтобы точка K лежала между точками M и P. Сделайте записи, используя знак «$\in$». Запишите несколько различных обозначений прямой l. Сколько таких обозначений?

в) Отметьте на плоскости точку F, не лежащую на прямой l. Сделайте соответствующую запись.

г) Проведите луч KF.

д) Назовите все отрезки с концом в точке K.

е) Сколько всего отрезков на рисунке?

ж) Сколько лучей с началом в точке K?

з) Сколько всего лучей на рисунке?

и) Назовите пары дополнительных лучей, получившихся на рисунке.

к) Принадлежат ли отрезки MP и KF прямой l? Сделайте соответствующие записи, используя знаки «$\subset$» и «$\not\subset$».

48. Можно ли разбить прямую на два отрезка и два луча?

49. На прямой даны точки A, B, C. Известно, что $AB = 1{,}5$, $AC = 2{,}5$, $BC = 4$. Какая из трёх точек лежит между двумя другими?

50(н). Используя рисунок 39, найдите: AB, $\frac{AC}{AB}$; $\frac{CB}{AB}$; $\frac{AC}{CB}$.

Рис. 39

51. На прямой даны точки A и B. Сколько на этой прямой найдётся точек M таких, что а) $AM = BM$; б) $2AM = MB$?

52(в). Длина отрезка AB равна 3. Внутри отрезка взята точка M. Найдите длину отрезка BM, если:

а) $AM = 2BM$;
б) $2AM = 3BM$;
в) $AM : BM = 1 : 5$;
г) $AM : BM = 3 : 4$;
д) $AM - BM = 2$;
е) $3AM + 2BM = 7$;
ж) $AM^2 - BM^2 = 3$.

53(п). Как изменится ответ для пунктов а)—г) задачи 52, если точка M — некоторая точка прямой AB, не обязательно внутри отрезка AB?

54(в). Длина отрезка AB равна 3. На отрезке взяты точки P и K так, что $AP = 1{,}7$, $BK = 1{,}8$. Найдите длину отрезка PK.

55. Точки M и K лежат на отрезке AB, длина которого равна 6 см. $BM = 2BK$, $AM = 0{,}8AK$. Найдите длину отрезка MK.

56. На прямой находятся точки A, B и C. Какие значения может принимать длина отрезка AC, если:

а) $AB = 4{,}2$; $BC = 5{,}7$;
б) $AB = 2{,}8$; $BC = 2{,}1$?

57(н). Точки E, F, K, P — лежат на одной прямой. $EF = 4$ см, $EK = 11$ см, $KP = 14$ см. Найдите длину FP.

58. На прямой расположены точки A, B, C и D. Найдите длину отрезка с концами в серединах AB и CD, если:

а) $AB = 1{,}2$, $BC = 1{,}7$, $CD = 2{,}2$, $AD = 5{,}1$;
б) $AC = 1{,}1$, $CB = 1{,}3$, $BD = 3{,}5$, $AD = 5{,}9$;
в) $AC = 5$, $BD = 7$.

59. На прямой отмечено несколько точек. Сколько всего отрезков и сколько лучей, для обозначения которых используются эти точки, если отмечено: а) две точки — A и B; б) три точки — A, B и C; в) четыре точки — A, B, C и D; г) пять точек — A, B, C, D и E?

60(п). На прямой находятся точки A, B, C и D. Какие значения может принимать длина отрезка AD, если:

а) $AB = 1{,}2$, $BC = 1{,}4$, $CD = 1{,}7$;
б) $AB = 2{,}1$, $BC = 1{,}8$, $CD = 2{,}3$;
в) $AC = 1{,}3$, $BC = 2{,}4$, $BD = 3$?

61(в). Длина отрезка AB равна 4. На отрезке взяты точки M и K так, что $AM : MK : KB = 1 : 2 : 3$ (запись означает, что $AM : MK = 1 : 2$, а $MK : KB = 2 : 3$). Найдите длину отрезка MK.

62(т). Чему может равняться длина отрезка MK, если в задаче 61 точки M и K могут располагаться где угодно на прямой AB?

63. На прямой отмечены два отрезка длиной 1,3 и 1,7. Постройте отрезок, равный: а) 3; б) 0,4; в) 0,9; г) 1.

64. На прямой находятся точки A, B, C и D, причём $AB = 1{,}2$, $BC = 2{,}1$, $CD = 0{,}8$. Найдите длину отрезка CA, если известно, что луч DA содержит точку B, но не содержит точки C.

65. Отрезок AB равен 1,5. На луче AB взята точка C, а на луче BA — точка D так, что $AC = 0{,}7$, $BD = 2{,}1$. Найдите CD.

66(н). Даны два отрезка. Ученик построил их сумму и разность. Учитель стёр исходные отрезки и предложил восстановить их по построенным. Как это можно сделать?

67(н). Пусть точка M середина отрезка AB (рис. 40). Выделите часть отрезка AB, состоящего из точек X, для которых: а) $AX > BX$; б) $AX \leqslant BX$.

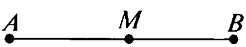


Рис. 40

Рис. 41

68(н). Выделите часть прямой MN (рис. 41), состоящую из точек X, для которых: а) $MX > NX$; б) $MX < NX$.

69(н). Нарисуйте луч и отложите на нём от его начала (точка O) единичный отрезок. Выделите на луче такие точки X, чтобы: а) $OX \leqslant 2$; б) $OX > 2$. Какая геометрическая фигура получилась?

70. На прямой взяты три точки: A, B и C. Укажите все точки M этой прямой такие, что M ближе к B, чем к A, и в то же время M ближе к B, чем к C. Рассмотрите два случая расположения точек A, B и C: B — между A и C; B — вне отрезка AC.

71. Даны точки A и B. Укажите все точки M на отрезке AB, для которых:

а) $\dfrac{AM}{BM} > 1$; в) $\dfrac{AM}{BM} \leqslant \dfrac{1}{3}$; д) $2 \leqslant \dfrac{AM}{BM} < 3$;

б) $\dfrac{AM}{BM} \geqslant 2$; г) $1 < \dfrac{AM}{BM} < 2$; е) $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{AM}{BM} \leqslant 2$.

72(т). Решите задачу 71, если рассматриваются точки на всей прямой AB.

73(т). Точка B лежит на отрезке AC, $AB = 2$, $BC = 1$. Укажите на прямой AB все точки M, для которых $AM + BM = CM$.

74(п). Две точки движутся по прямой в одном направлении. На какую величину переместится середина отрезка, определяемого этими точками, если одна точка переместится на 1, а другая — на 3? Каков будет ответ, если точки движутся в различных направлениях?

75(т). На прямой последовательно расположены точки A, B, C и D, причём $AB = BC = 1$, $CD = 2$. Точка M лежит на BC и делит отрезки BC и AD в одном и том же отношении ($BM : MC = AM : MD$). Найдите это отношение.

76(т). На прямой взяты точки A, B, C и D. Укажите множество точек M на прямой, для которых $AM + BM = CM + DM$, если: а) точки следуют в порядке A, B, C и D и $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 3$; б) точки следуют в порядке A, C, B и D и $AB = CD = 4$, $BC = 3$.

77(т). На отрезке длины 3 расположены отрезки длиной 1,7; 1,6; 1,5. Докажите, что все эти отрезки содержат общий отрезок, длина которого не меньше 0,1.

78(тп). Кузнечик делает 5 прыжков по дороге, причём длина каждого прыжка, начиная со второго, в два раза больше предыдущего, а направления прыжков произвольны. Докажите, что кузнечик не сможет вернуться в исходную точку.

79(т). Можно ли соединить между собой проводами семь телефонов так, чтобы каждый был соединён ровно с тремя другими?

80(в). На прямой даны точки A, B и C, причём $AB = 1$, $BC = 2$, $AC = 3$. Изобразите на прямой точки A, B и C, а также точки, симметричные любой из них относительно каждой из двух других. (Например, симметричные A относительно B и C.)

81(п). На прямой даны две точки: A и B, причём $AB = 1$. Пусть M — некоторая точка прямой, точка M_1 симметрична M относительно A, точка M_2 симметрична M_1 относительно B. Изобразите точки M, M_1, M_2, если:
а) M — середина AB; б) $AM = 3$, $BM = 2$;
в) $AM = 0{,}3$, $BM = 1{,}3$.
Для всех случаев найдите длину отрезка MM_2.

82. Начертите прямую и отметьте на ней точку A. Отметьте на прямой все такие точки X, которые удовлетворяют условию: а) удалены от точки A на расстоянии 2 см; б) $AX \leqslant 2$ см; в) $AX \geqslant 3$ см; г) 3 см $\leqslant AX \leqslant 4$ см.
В каких случаях множество точек X обладает симметрией относительно точки A?

83(п). Точка M симметрично отображается относительно точки A, а полученная точка симметрично отображается относительно точки B. В результате этих двух симметрий M переходит в M'. Докажите, что $MM' = 2AB$. (Выражение «точка M симметрично отображается относительно точки A» означает, что M переходит в точку M_1 такую, что A — середина MM_1.)

84. Докажите, что если середины отрезков AB и CD, расположенных на одной прямой, совпадают, то $AC = BD$.

Для решения задач 85—88 вам потребуется вспомнить, что такое числовая ось.

85(в). Пусть прямая является числовой осью. Изобразите на ней множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

а) $1 \leqslant x \leqslant 2{,}5$;
в) $-1 < x \leqslant 1$;
б) $x < 10$;
г) $1{,}2 < x < 4{,}1$ и $x < 3$.

Что за множества получились?

86(в). Точка A имеет на числовой оси координату x_1, а точка B — координату x_2. Найдите координату точки A', симметричной A относительно B, если:
а) $x_1 = 0, x_2 = 3$;
в) $x_1 = -1, x_2 = 1{,}1$;
б) $x_1 = 4{,}7, x_2 = 1$;
г) $x_1 = 3, x_2 = -22{,}2$.

87(в). Найдите координату точки, являющейся центром симметрии, переводящей точку A (x_1) в точку A' (x_2), если:
а) $x_1 = 1{,}2, x_2 = -3$;
в) $x_1 = 0{,}03, x_2 = -0{,}02$.
б) $x_1 = -17, x_2 = 113$;

88(п). В какую точку перейдёт точка A (x_0) при симметрии, переводящей B (x_1) в B' (x_2), если:
а) $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2$;
б) $x_0 = 1{,}2, x_1 = -1, x_2 = 1{,}5$;
в) $x_0 = -10, x_1 = -11, x_2 = 12$?

89(т). Длина ветки равна 2 м. В начале ветки сидит червяк. За первую минуту он проползает 1 м, за следующую — $\frac{1}{2}$ м, в течение следующей — $\frac{1}{4}$ м и так далее, т. е. за каждую следующую минуту он проползает в два раза меньше, чем за предыдущую. Доберётся ли когда-нибудь червяк до конца ветки?

90(т). Три дома A, B и C расположены на одной прямой в указанном порядке. На этой же прямой надо вырыть колодец. Каждая семья, проживающая в этих домах, будет один раз в день брать из колодца воду. Где надо расположить колодец, чтобы общий (суммарный) путь был как можно меньше, если в каждом из домов проживает одна семья? Как изменится ответ, если в доме A живёт одна семья, в доме B — две семьи, а в доме C — три семьи?

91(п). На прямой расположены 17 отрезков так, что они полностью закрывают отрезок длиной 12. Докажите, что длина хотя бы одного отрезка больше чем 0,7.

92(т). Для того чтобы линейкой с делениями измерить диагональ кирпича, можно поступить следующим образом. Взять три кирпича, расположить их так, как показано на рисунке 42, *а*. Теперь длину диагонали кирпича можно легко измерить.
А как измерить отрезок, соединяющий две отмеченные точки данного кирпича, расположенные на его противоположных гранях (рис. 42, *б*)?

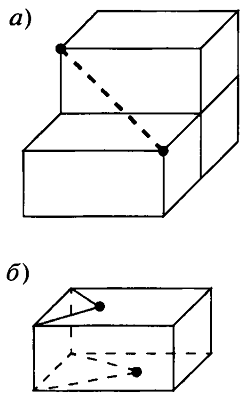


Рис. 42

2.2. Основные свойства прямой на плоскости

Плоскость как геометрическая форма характеризуется определёнными свойствами и, в первую очередь, свойствами, связанными с прямой линией. И наоборот, многие важные свойства прямой связаны с плоскостью.

2.2

Первое основное свойство плоскости

Свойство 1.

Через любые две точки плоскости можно провести прямую линию и притом только одну.

Прямую, проходящую через точки A и B, мы будем называть прямой AB (рис. 43). Как видите, обозначение AB используется в четырёх случаях: оно может обозначать и отрезок, и длину отрезка, и луч, и прямую. Но никакой путаницы в наши рассуждения это не внесёт, просто в каждом случае будем указывать, о чём идёт речь.

Расстояние на плоскости между двумя точками A и B равно длине отрезка AB. Кратчайший путь из A в B — это путь по прямой, соединяющей эти точки.

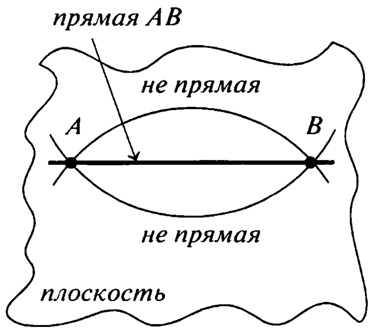


Рис. 43

Из первого свойства плоскости можно легко получить важную теорему. (Здесь появляются такие понятия, как теорема и доказательство. О них уже упоминалось в § 1.6. Позднее мы ещё раз подробно объясним, что они означают. Тем, кто хочет узнать их смысл поскорее, советуем прочитать начало § 4.5.)

Теорема 2.1 _(о числе точек пересечения двух прямых)._

Любые две различные прямые, принадлежащие плоскости, пересекаются не более чем в одной точке.

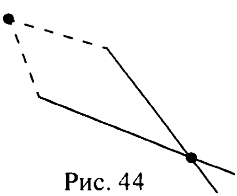


Рис. 44

Доказательство. Доказательство этой теоремы весьма просто. Если мы предположим, что число общих точек у двух прямых более одной (рис. 44), то согласно первому свойству прямые должны совпасть. А это противоречит условию, что данные прямые различны. ▼

Итак, теорема, по сути, утверждает, что любые две различные прямые, принадлежащие плоскости, либо имеют одну общую точку, либо ни одной.

Параллельные прямые

Две прямые на плоскости, не имеющие общих точек, называются ***параллельными****.*

На самом деле первое свойство и теорема 2.1 не являются чисто планиметрическими фактами. Они справедливы и для пространства. А вот следующее свойство характерно именно для плоскости.

Второе основное свойство плоскости

Свойство 2.

Любая прямая плоскости делит эту плоскость на две части — две полуплоскости.

Что означает это свойство?

Пусть в плоскости проведена некоторая прямая, которую мы обозначим буквой a. Любая точка A, не лежащая на этой прямой, находится в одной из двух образовавшихся полуплоскостей. При этом, если точки A и B расположены в разных полуплоскостях, то отрезок AB пересекает a. Если же точки A и B находятся в одной полуплоскости, то отрезок AB не пересекает a (рис. 45). Это же можно выразить несколько иначе.

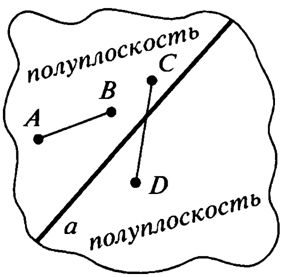


Рис. 45

Две точки плоскости A и B, не лежащие на прямой a этой плоскости, располагаются в разных или в одной полуплоскости относительно прямой a в зависимости от того, будет ли отрезок AB пересекаться с прямой a или нет.

Центральная и осевая симметрии плоскости

Как и для прямой, любая точка плоскости является центром симметрии плоскости. Для того чтобы построить точку, симметричную точке A относительно точки O, надо провести через A и O прямую и на этой прямой по уже известному правилу построить точку A', симметричную A относительно O (рис. 46).

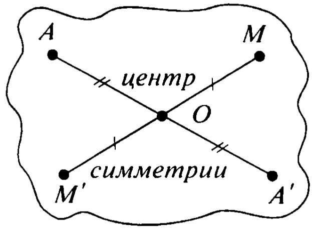


Рис. 46

Но кроме центральной, на плоскости существует ещё один вид симметрии — ***осевая симметрия*** — это ещё одно характерное свойство плоскости.

Третье основное свойство плоскости

Свойство 3. (*третье свойство плоскости*)

Любая прямая плоскости является осью симметрии плоскости.

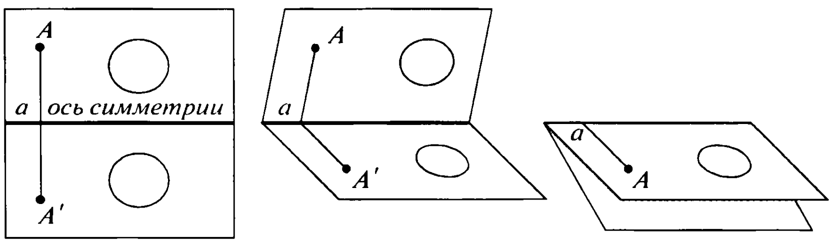
Что это означает?

Как мы знаем, прямая — это линия пересечения двух плоскостей. Отсюда следует, что при перегибании листа бумаги, представляющего собой модель плоскости, образуется прямая линия. Это станет яснее, если немного развести части листа, получившиеся при его перегибании. Тогда мы увидим, что линия сгиба — это линия пересечения двух плоскостей.

Если точки A и A' совпадут в результате перегибания листа бумаги, то будем говорить, что точки A и A' ***симметричны*** относительно образующейся при перегибании листа прямой a или что они переходят друг в друга при симметрии относительно a (рис. 47, *а—в*).

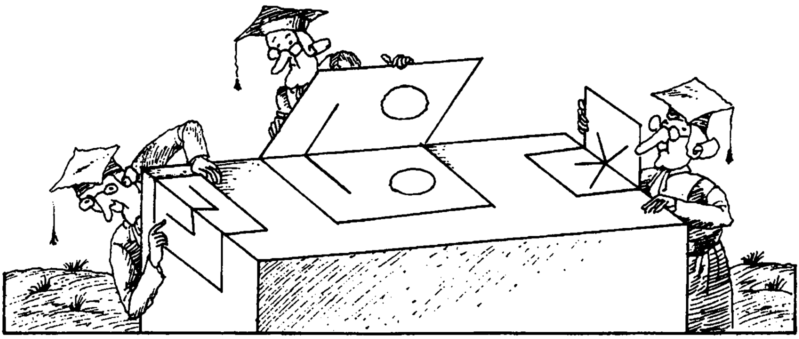
Все точки самой прямой a при этом остаются неподвижными, переходят сами в себя, т. е. прямая a симметрична самой себе.

Две фигуры или линии плоскости являются симметричными относительно прямой a, если для каждой точки одной



а) *б*) *в*)

Рис. 47



фигуры найдётся симметричная относительно *a* точка другой фигуры.

Понятно, что симметричные фигуры равны.

Если же в результате симметрии относительно прямой *a* фигура не меняется, а только меняются местами некоторые пары точек, то будем говорить, что прямая *a* является ***осью симметрии*** этой фигуры.

▲■● Задачи, задания, вопросы

93(н). Рассмотрите прямые, содержащие рёбра пирамиды, в основании которой лежит прямоугольник (рис. 48). Какие из них: а) пересекают прямую AB; б) не пересекают прямую AB? Являются ли прямые AB и MD: а) параллельными; б) пересекающимися?

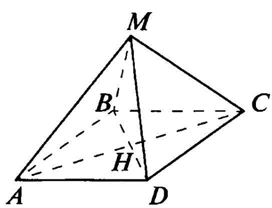


Рис. 48

94(н). Две прямые проходят через точки D и E. Что можно сказать об этих прямых?

95(н). Точка C лежит на прямой AB. Что можно сказать о прямых: а) AC и AB; б) AC и CB?

96(н). На плоскости даны: а) три точки; б) четыре точки. Сколько различных прямых можно провести через эти точки? Рассмотрите различные случаи расположения точек и сделайте соответствующие рисунки.

97(н). Сколько точек пересечения имеют четыре прямые, каждые две из которых пересекаются так, что через каждую точку пересечения проходят только две прямые?

98(н). Нарисуйте четырёхугольник, одна пара сторон которого лежит на параллельных прямых. Продолжите его непараллельные стороны. Обязательно ли они пересекутся? Если ответ утвердительный, то сколько получится точек пересечения?

99(н). На сколько частей разбивается плоскость прямыми AB, CD, BC, AD (рис. 49)?

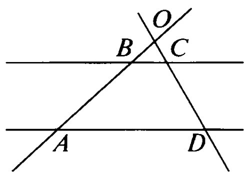


Рис. 49

100(н). На сколько частей делят плоскость: а) прямая; б) луч; в) два луча; г) три луча?

101. На сколько частей могут разделить плоскость две прямые?

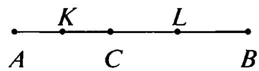


Рис. 50

102(н). Ученик провёл прямую линию, отметил на ней две точки A и B, а затем отметил внутри отрезка AB точку C. После этого он построил середины отрезков AC и CB, отметив их точками K и L соответственно (рис. 50). Учитель стёр чертёж, оставив: а) точки K, L, A; б) точки K, L, C; в) K, L. Может ли ученик восстановить чертёж?

103. На плоскости проведены три прямые, не проходящие через одну точку и не параллельные друг другу. На сколько частей оказалась разделённой плоскость? На какие-то части при этом оказалась разделённой и каждая прямая. Сколько всего образовалось отрезков и лучей (рассматриваются лучи, не содержащие точек пересечения прямых)?

104(н). На сколько частей может быть разделена плоскость тремя прямыми?

105(п). На сколько частей может быть разделена плоскость четырьмя прямыми? Перечислите все случаи. Считается известным, что если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и вторую.

106(п). Как разделить плоскость прямыми линиями на пять частей?

107(н). На плоскости отмечены четыре точки A, B, C, D. Прямая m разделила плоскость так, что две точки оказались в одной полуплоскости, а две другие — в другой. Сколько раз ломаная линия $ABCD$ может пересекать прямую m?

108(н). На плоскости отмечены пять точек A, B, C, D, E. Прямая l разделила плоскость так, что две из них оказались в одной полуплоскости, остальные три — в другой. Сколько раз ломаная $ABCDE$ может пересекать прямую?

109(в). Два брата отправились в лес по грибы. Лес пересекает дорога. Пока братья ходили по лесу, они неоднократно переходили через дорогу, причём число переходов, сделанных старшим братом, на 3 превышает это число для младшего брата. Как вы думаете, по одну сторону дороги или по разные оказались братья, когда вышли из леса?

110. Нарисуйте фигуры, имеющие ровно одну, две, три и четыре оси симметрии.

111(н). Как одним прямолинейным разрезом рассечь два квадратных куска хлеба, лежащих на сковороде, на две равные части каждый?

112(н). Четыре прямых на плоскости имеют n пересечений, где $0 \leqslant n \leqslant 6$ ($n \in N$). Все ли указанные значения n возможны?

113(п). При симметрии относительно прямой a точка A перешла в точку A'. Докажите, что прямая a делит отрезок AA' пополам.

114(п). При симметрии относительно прямой a точки A и B перешли соответственно в точки A' и B'. Докажите, что прямые AB и $A'B'$ пересекаются в точке, лежащей на прямой a. (Считаем, что прямая AB пересекает прямую a.)

115(п). На плоскости отметили 1995 точек. В результате симметрии относительно некоторой прямой a каждая из этих точек перешла в какую-то из отмеченных. Докажите, что прямая a проходит хотя бы через одну из отмеченных точек.

116(п). Понятие осевой симметрии поможет вам решить следующую задачу. Предложите правило, по которому образована каждая из последовательностей символов, изображённых на рисунке 51, и продолжите каждую из них.

а) *б*)

Рис. 51

117. На прямой мы можем задать центральную симметрию. На плоскости есть два вида симметрии: центральная и осевая. А какие виды симметрии возможны в пространстве?

2.3. Плоские углы

Определение угла. Развёрнутый угол. Измерение углов

***Углом** мы будем называть часть плоскости, заключённую между двумя лучами этой плоскости, имеющими общее начало. Точки, лежащие в этой части плоскости, будем называть **внутренними** точками угла.*

*Лучи, образующие угол, называются **сторонами** угла, а их общее начало — **вершиной** угла.*

Данное определение угла не указывает, какую из двух частей плоскости, образовавшихся при проведении на плоскости двух лучей с общим началом, следует отнести к самому углу, а какую нет.

Договоримся, что обычно мы будем относить к углу «меньшую» из двух образовавшихся частей. Из этого правила, однако, в некоторых случаях будем делать исключения. Эти случаи мы будем чётко оговаривать, а причина самих исключений в каждом конкретном случае будет достаточно понятной.

Углы мы будем обозначать знаком $\angle$. Обозначение $\angle AOB$ — это обозначение угла с вершиной в точке O и сторонами — луча-

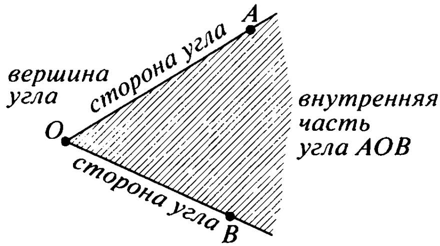


Рис. 52

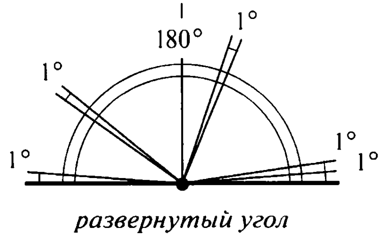


Рис. 53

ми OA и OB (рис. 52). На этом рисунке A и B — точки на сторонах угла.

Угол, стороны которого лежат на одной прямой и являются дополнительными лучами этой прямой, будем называть ***развёрнутым***.

Наиболее распространённой мерой углов является ***градусная*** мера. С этой мерой вы уже знакомы, поэтому лишь коротко напомним о ней.

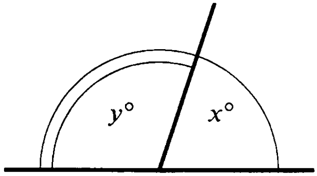
Простейшим инструментом измерения градусной меры угла служит транспортир. Совместив вершину угла с точкой O на транспортире и направив одну из его сторон по прямолинейной границе транспортира, мы увидим значение величины угла в точке пересечения его второй стороны со шкалой, указанной на транспортире.

Величина развёрнутого угла равна 180 градусам, иными словами, угол в 1 ***градус*** (обозначается 1°) есть $\frac{1}{180}$ развёрнутого угла (рис. 53). Это означает, что если мы приложим друг к другу, как на рисунке 53, 180 углов по 1° каждый, то в результате получим развёрнутый угол.

Рассмотрим какой-нибудь угол. Пусть одна его сторона неподвижна, а другая вращается вокруг вершины. Будем считать, что в начальном положении стороны угла совпадают, что соответствует углу 0°, а в конечном положении стороны образуют развёрнутый угол, величина которого равна 180°. Тогда любой угол, величина которого равна заданному числу градусов, при этом вращении появится лишь однажды.

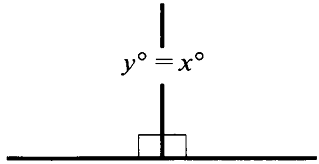
Два угла называются ***смежными***, если одна сторона у них общая, а две другие стороны являются дополнительными лучами.

2.3



смежные углы

Рис. 54

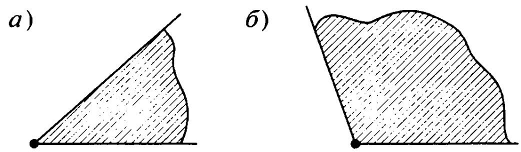


прямой угол

Рис. 55

Из определения градусной меры следует, что сумма величин градусных мер смежных углов равна 180°. На рисунке 54 $x° + y° = 180°$.

Если угол равен углу, смежному с ним, то такой угол называется ***прямым***. Величина прямого угла равна 90° (рис. 55).



острый угол

тупой угол

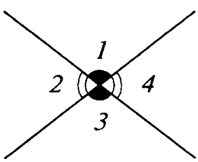
Рис. 56

Углы, меньшие 90°, называются ***острыми*** (рис. 56, *а*), углы от 90° до 180° — ***тупыми*** (рис. 56, *б*); угол в 90°, как мы уже знаем, называется ***прямым***.

Вертикальные углы. Угол между прямыми

При пересечении двух прямых плоскость делится на четыре части, четыре угла. Эти четыре угла можно разбить на две пары. В каждую пару будут входить углы, не имеющие общей стороны. Такую пару углов мы будем называть ***вертикальными***.

На рисунке 65 вертикальными являются углы *1* и *3*, а также *2* и *4*.



вертикальные углы
$\angle 1$ и $\angle 3$
$\angle 2$ и $\angle 4$

$\angle 1 + \angle 2 = 180°$
$\angle 3 + \angle 2 = 180°$
$\angle 1 = \angle 3$

Рис. 57

<u>**Теорема 2.2**</u> <u>*(о вертикальных углах).*</u>

Вертикальные углы равны.

Доказательство. Докажем, например, что на рисунке 58 равны углы *1* и *3*. Эти углы являются смежными для угла *2*. Каждый из них дополняет до 180° угол *2*, а это значит, что углы *1* и *3* равны. ▼

Понятно, что из четырёх углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, хотя бы одна пара вертикальных углов не превосходит 90°. Величину каждого из таких углов мы и примем за величину угла между прямыми. Иными словами, *величина* ***угла между двумя прямыми*** *равна величине наименьшего из образовавшихся при их пересечении углов* (см. рис. 58).

Так, на рисунке 58 угол между прямыми равен углу *1* (или углу *3*).

Перпендикулярные прямые

Две прямые называются ***перпендикулярными***, если все четыре угла, образовавшиеся при их пересечении, являются прямыми, т. е. равны 90° (рис. 59). Если прямая AB перпендикулярна прямой CD, то пишут $AB \perp CD$.

Справедлива следующая теорема.

<u>**Теорема 2.3**</u> <u>*(о симметрии перпендикулярных прямых).*</u>

Если две прямые, лежащие в плоскости, перпендикулярны, то при симметрии относительно одной из них вторая прямая переходит сама в себя.

Доказательство. Из определения симметрии следует, что любая фигура при симметрии переходит в равную ей фигуру. Значит, и угол переходит в равный угол. Обозначим данные прямые через a и b. Рассмотрим любой из углов, образованных при

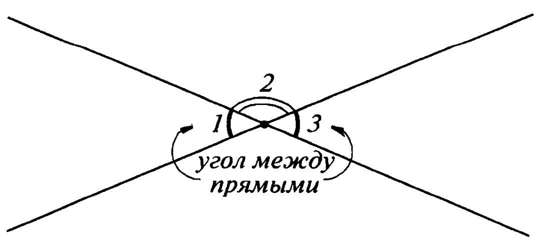


Рис. 58

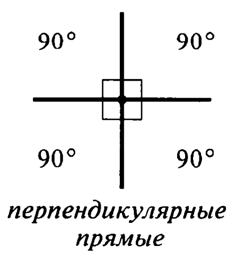


Рис. 59

их пересечении. Сторонами этого угла являются лучи прямых a_1 и b_1 (рис. 60). Этот угол по условию равен 90°. В результате симметрии относительно a этот угол перейдёт в равный ему угол. Но при этом сторона, лежащая на прямой a (луч a_1), останется на месте. Значит, другая сторона (луч b_1) перейдёт в своё продолжение — другой луч той же прямой b (луч b_2) потому, что существует единственный луч, лежащий в данной полуплоскости, образующий с a_1 прямой угол. ▼

Теорема 2.3 означает, что при симметрии относительно любой из двух перпендикулярных прямых каждая из этих прямых переходит сама в себя.

Теперь можно доказать ещё одну важную теорему.

Теорема 2.4 (*о единственности перпендикуляра*).

Через любую точку плоскости проходит единственная прямая, перпендикулярная данной прямой.

Итак, даны некоторая прямая a и точка A на плоскости. Мы должны доказать, что через A можно провести единственную прямую, перпендикулярную a.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

1. Точка A лежит на прямой a (рис. 61). Этот случай вполне очевиден. Ведь в каждой из двух полуплоскостей, соответствующих a, существует лишь один луч, образующий прямые углы с обеими полупрямыми, на которые точка A разбивает прямую a. Эти два луча лежат на одной прямой, перпендикулярной прямой a.

Кстати, при доказательстве теоремы 2.3 мы опирались на этот факт.

2. Рассмотрим теперь случай, когда точка A расположена вне прямой (рис. 62). Обозначим через A' точку, симметричную A относительно a. Как мы уже знаем из теоремы 2.3, прямая, перпендикулярная a, в результате симметрии относительно a переходит сама в себя. Это означает, что если она проходила через A, то

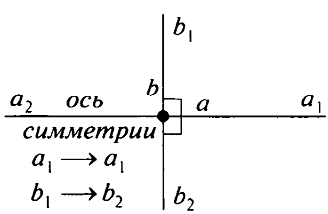
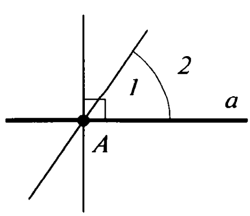


Рис. 60



$\angle 2 < \llcorner 1$

Рис. 61

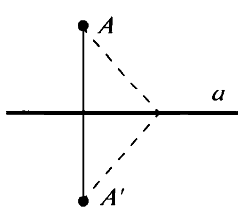


Рис. 62

должна проходить и через A'. Следовательно, эта прямая является единственной и совпадает с AA_1. ▼

Из теоремы 2.4 следует, что две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой, не могут пересечься (так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые, перпендикулярные одной и той же прямой), а значит, являются параллельными (рис. 63). Итак, мы доказали, что *параллельные прямые в самом деле существуют.*

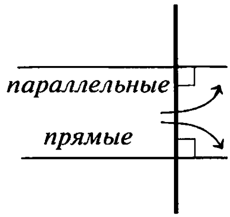


Рис. 63

Теорема 2.4 подсказывает также и способ построения прямой, перпендикулярной данной, проходящей через точку, расположенную вне данной прямой. Если точка A расположена вне прямой a, то, построив сначала точку A' симметричную A относительно a, и проведя прямую AA', мы построим нужный перпендикуляр к a, проходящий через точку A.

Биссектриса угла

Последнее связанное с углом понятие, которое мы рассмотрим в этом параграфе, — это понятие биссектрисы.

Луч с началом в вершине данного угла, лежащий внутри этого угла и делящий его на два равных угла, называется ***биссектрисой*** *этого угла.*

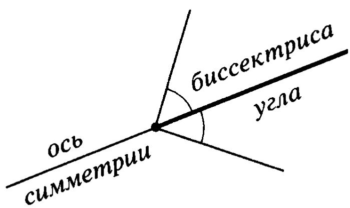


Рис. 64

Из определения биссектрисы следует, что прямая, на которой лежит биссектриса, является осью симметрии угла (рис. 64).

▲■● Задачи, задания, вопросы

118. Проверьте свой глазомер. Проведите на листе бумаги луч и постройте только с помощью линейки углы величиной 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°, 105°, 120°, 135°, 150°, 165°, одной из сторон которых будет этот луч. С помощью транспортира проверьте точность сделанного на глаз построения.

119(н). На рисунке 65 изображены углы. Определите, какие из них смежные. Ответ обоснуйте.

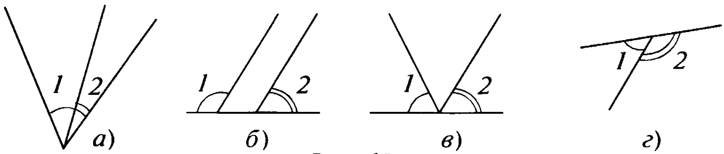


Рис. 65

120(н). Найдите градусные меры углов, отмеченных на рисунке 66 вопросительным знаком.

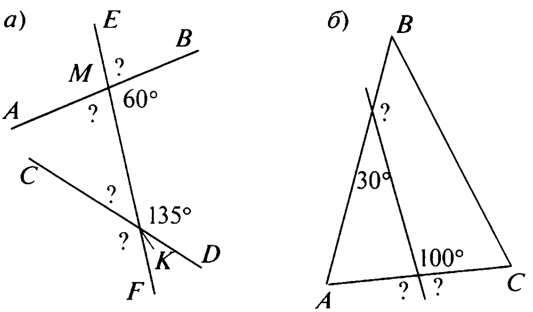


Рис. 66

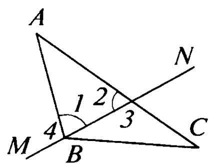


Рис. 67

121(н). На рисунке 67 прямая MN пересекает сторону AC треугольника ABC и проходит через точку B. Углы *1* и *2* равны 60°. Каковы величины углов *3* и *4*?

122(н). Начертите угол MOK. Постройте угол, смежный с ним. Сколько таких углов можно построить?

123(н). На рисунке 68 угол *1* равен углу *2*, а угол *3* равен углу *4*. Докажите, что луч EF перпендикулярен прямой LP, а луч MF перпендикулярен KF.

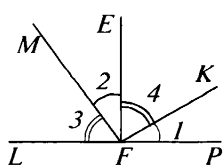


Рис. 68

124(н). Углы LFE и EFP — прямые. Докажите, что точки L, F, P лежат на одной прямой.

125(н). Какой угол образует биссектриса угла, равного 54°, с продолжением одной из его сторон?

126(н). Разность двух смежных углов равна меньшему из них. Найдите эти углы.

127(н). На рисунке 69 углы *KPD* и *MKB* равны. Докажите, что сумма углов *AKP* и *KPC* равна 180°.

128(н). Найдите величину каждого из четырёх углов, образованных пересечением двух прямых, если: а) разность двух из них равна 52°; б) величины двух из них относятся как 5 : 4; в) сумма трёх углов равна 300°.

129(н). Угол *AKM* в три раза больше угла *MKD*, а угол *DKB* на 40° больше угла *AKM* (рис. 70). Найдите угол *CKP*.

130(н). Прямые *AB* и *CD* пересекаются в точке *O*. Найдите угол между биссектрисами углов: а) *AOC* и *AOD*; б) *AOC* и *DOB*.

131(н). Докажите, что если биссектрисы углов *AOB* и *COD* не лежат на одной прямой, то эти углы не являются вертикальными.

132(н). Сумма углов *1* и *3* на рисунке 70 равна 151°. Найдите градусную меру угла *2*.

133(в). Чему равен угол, если известно, что он на 40° больше угла с ним смежного?

134(в). Чему равен угол, если известно, что он в пять раз меньше угла с ним смежного?

135(н). Найдите смежные углы и постройте их, если градусные меры этих углов относятся как 5 : 7.

136(н). Один из смежных углов на 38° меньше другого. Найдите величины этих углов.

137(н). Найдите угол между биссектрисами смежных углов.

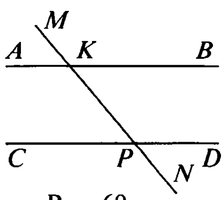


Рис. 69

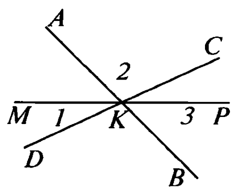


Рис. 70

2.3

138(н). Градусные меры двух углов относятся как 1 : 3, а смежных с ними углов — как 4 : 3. Найдите величины всех этих углов.

139(п). Какой из двух углов больше и на сколько, если известно, что сумма первого угла с углом, смежным со вторым, равна 200°?

140(н). На рисунке 71, *а—г* изображены пары углов. Определите, какие из них являются вертикальными.

141(н). Сумма двух вертикальных углов, получившихся при пересечении двух прямых, равна 180°. Что можно сказать об этих прямых?

142(н). Сумма двух из четырёх углов, образовавшихся при пересечении двух прямых, равна 200°. Найдите величины всех четырёх углов.

143(н). На рисунке 72 угол *1* равен углу *2*. Докажите, что угол *3* равен углу *4*, а угол *5* равен углу *6*.

144(в). На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Один из четырёх образовавшихся углов равен 92°. Чему равен угол между прямыми?

145(в). Сколько осей симметрии имеют две пересекающиеся прямые?

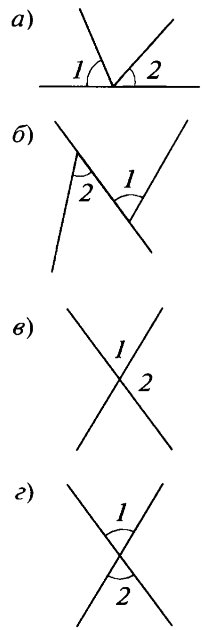


Рис. 71

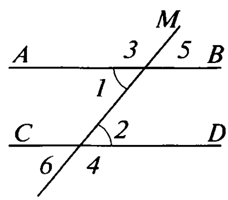


Рис. 72

146. Чему может быть равен $\angle AOC$, если $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, где: а) $\alpha = 78°$, $\beta = 82°$; б) $\alpha = 161°$, $\beta = 172°$?

147. Известно, что $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$ и при этом луч OB расположен внутри угла AOC. Лучи OA' и OB' симметричны лучам OA и OB соответственно относительно OC. Найдите $\angle AOC$, $\angle AOB'$, $\angle AOA'$, если:

а) $\alpha = 42°$, $\beta = 28°$;
б) $\alpha = 28°$, $\beta = 42°$;
в) $\alpha = 63°$, $\beta = 62°$;
г) $\alpha = 62°$, $\beta = 63°$;
д) $\alpha = 121°$, $\beta = 18°$;
е) $\alpha = 18°$, $\beta = 121°$.

148. Чему может быть равен $\angle AOD$, если $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$, $\angle COD = \gamma$, где:
а) $\alpha = 34°$, $\beta = 33°$, $\gamma = 32°$;
б) $\alpha = 78°$, $\beta = 89°$, $\gamma = 83°$;
в) $\alpha = 132°$, $\beta = 161°$, $\gamma = 141°$?

149. Три пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на шесть углов. Два из этих углов равны 28° и 36°. Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?

150. Четыре пересекающиеся в одной точке прямые делят плоскость на восемь углов. Три из этих углов равны 52°, 94° и 16°. Чему равны остальные углы? Чему равны углы между парами прямых?

151. Какое наибольшее число лучей можно провести через данную точку плоскости, чтобы все углы, сторонами которых они являются, были тупыми?

152. Какое наименьшее число лучей с началом в одной точке можно провести на плоскости, чтобы все углы, ограниченные соседними лучами, были острыми? (Любая точка плоскости должна принадлежать какому-то углу.)

153. На плоскости проведены четыре попарно пересекающиеся прямые. Точки их пересечения обозначены, как на рисунке 73. Рассмотрите углы $\angle ABC$, $\angle BCA$, $\angle CAB$, $\angle DBC$, $\angle DAC$, $\angle DBE$, $\angle DEC$, $\angle BED$, $\angle CEF$, $\angle CFE$, $\angle CFD$. Какие из этих обозначений соответствуют одному и тому же углу? Какие углы являются вертикальными? Какие смежными?

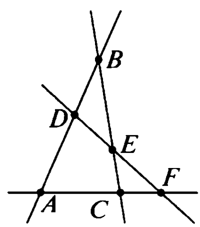


Рис. 73

154(в). Через вершину угла величины α проведена прямая, перпендикулярная его биссектрисе. Какие углы образует эта прямая со сторонами угла?

155(в). На плоскости проведены две пересекающиеся прямые. Докажите, что биссектрисы четырёх образовавшихся углов лежат на двух перпендикулярных прямых.

156. Угол AOB равен 40°, а угол BOC равен 80°. Чему равен угол между биссектрисами углов AOB и BOC?

157(п). Докажите, что если один из трёх лучей OM, OA и OB расположен внутри угла, образованного двумя другими лучами, то угол между биссектрисами углов MOA и MOB равен половине угла AOB.

158. Точка O лежит внутри треугольника ABC, $\angle AOC = \alpha$. Найдите угол между биссектрисами углов AOB и BOC.

159(в). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся под углом $30°$ в точке O. Пусть A — некоторая точка плоскости, A_1 — точка, симметричная A относительно одной из этих прямых, A_2 — точка, симметричная A относительно другой прямой. Чему равен угол A_1OA_2? (Рассмотрите различные случаи расположения точки A.)

160(н). Прямая AB разбивает плоскость на две полуплоскости. Из точки O данной прямой в разные полуплоскости проведены лучи OC и OD, причём угол AOD на $60°$ больше угла AOC. Найдите угол AOC, если угол COD равен $146°$.

161(н). Известно, что $\angle BOP = 78°$, $\angle BOF = 100°$, $\angle KOP = 40°$. Чему может быть равен угол KOF?

162(н). При пересечении двух прямых один из образовавшихся углов составляет $\frac{2}{5}$ разности двух других углов. Найдите каждый из этих углов.

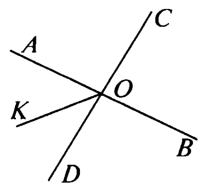


Рис. 74

163(н). На рисунке 74 угол DOK составляет $\frac{1}{3}$ угла KOC, OK — биссектриса угла AOD. Найдите угол BOD. Докажите, что AB перпендикулярна CD.

164(н). Градусные меры двух смежных углов MON и NOP относятся как $7:8$, угол NOA равен $20°$. Найдите угол MOA.

165(т). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O. Пусть A — некоторая точка плоскости, точки A_1 и A_2 симметричны A относительно данных прямых. Докажите, что угол A_1OA_2 в два раза больше угла между прямыми.

166(пт). На плоскости проведены две взаимно перпендикулярные прямые, пересекающиеся в точке O. Последовательно отражая точку A относительно одной из этих прямых, а затем полученную точку относительно другой, получим точку A_1. Докажите, что точки A и A_1 симметричны относительно точки O.

167(п). Используя результат предыдущей задачи, докажите, что при центральной симметрии любая фигура переходит в равную ей фигуру.

168(п). Докажите, что в результате симметрии относительно точки, не лежащей на прямой, прямая переходит в параллельную прямую.

169(т). На плоскости проведены две прямые a и b, пересекающиеся в точке A; пусть O — некоторая точка плоскости. Прямые a_1 и b_1 симметричны a и b соответственно относительно точки O. Пусть теперь A_1 — точка пересечения прямых a_1 и b_1, B — точка пересечения прямых a и b_1, B_1 — точка пересечения прямых a_1 и b. Докажите, что отрезки AA_1 и BB_1 пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам.

170(п). Дана прямая a и точка A вне её. Докажите, что через A можно провести прямую, параллельную a.

171(т). Из точки O на плоскости выходят 4 луча, следующих друг за другом по часовой стрелке: OA, OB, OC и OD. Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180°. Докажите, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

172. На бумаге проведены две пересекающиеся прямые, но точка их пересечения недоступна (в этом месте на бумаге оказалась дырка). Предложите способ, с помощью которого можно было бы измерить угол между этими прямыми.

2.4. Плоские кривые, многоугольники, окружность

Плоские кривые, ломаные

Плоскую линию, которую можно изобразить на листе бумаги, не отрывая карандаша от листа, будем называть ***плоской кривой*** *или просто* ***кривой****.*

2.4

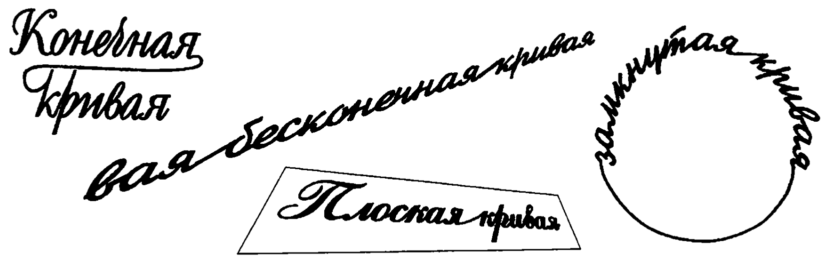


Рис. 75

Кривая может быть: ***конечной*** *и* ***бесконечной***, ***замкнутой*** *и* ***незамкнутой***, ***самопересекающейся*** *и* ***несамопересекающейся***. Все эти названия говорят сами за себя, и вы легко сможете определить, к какому виду относится та или иная кривая (рис. 75).

Например, прямая, хотя это и звучит немного странно, является частным случаем кривой, причем кривой, бесконечной в обе стороны. А отрезок прямой — пример конечной кривой. И прямая, и отрезок — незамкнутые и несамопересекающиеся кривые. Окружность — это пример конечной, замкнутой, несамопересекающейся кривой.

Если кривая состоит из конечного числа отрезков прямых линий, то она называется ***ломаной*** (рис. 76).

Концы отрезков — ***вершины*** *ломаной, сами отрезки —* ***звенья***, *или* ***стороны***, *ломаной*. (Соседние стороны не должны лежать на одной прямой.)

Любая замкнутая кривая, не пересекающаяся сама с собой, ограничивает плоскую фигуру и делит плоскость на две части — *внутреннюю* и *внешнюю* по отношению к этой фигуре (рис. 77).

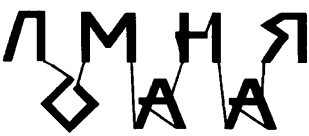


Рис. 76

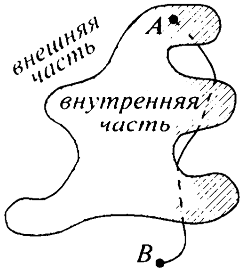


Рис. 77

При этом, если точка A принадлежит внутренней области, а точка B — внешней, то, двигаясь из A и B по любой кривой, мы пересечём данную замкнутую кривую *нечётное* число раз. Это понятно, ведь при каждом пересечении мы переходим из внутренней области во внешнюю или обратно и сами эти переходы чередуются. При одном пересечении мы перешли из внутренней во внешнюю область, после двух — вернулись обратно, после трёх — вновь попадаем во внешнюю область и т. д.

Многоугольники

Замкнутая ломаная, не имеющая самопересечений, ограничивает ***многоугольник*** (рис. 78).

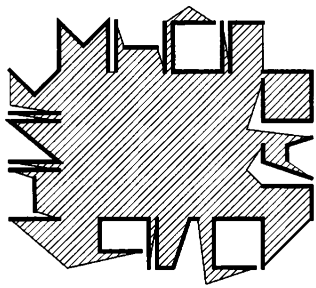


Рис. 78

Звенья этой ломаной называются ***сторонами*** многоугольника.

Если число сторон многоугольника известно, то вместо слова «много» ставится соответствующее число. Так, получаем: ***треугольник***, пятиугольник, стоугольник и даже тысячедевятьсотдевяностосемиугольник.

Отрезки, соединяющие две несоседние вершины многоугольника, называются ***диагоналями*** *многоугольника* (рис. 79).

Сумма длин всех сторон данного многоугольника называется ***периметром*** *многоугольника.*

Угол многоугольника задаётся его вершиной и лучами, которые идут по выходящим из этой вершины сторонам. При этом мы допускаем, чтобы углы многоугольника превышали 180°.

Если каждый из углов многоугольника меньше 180°, *то этот многоугольник называется* ***выпуклым*** (рис. 80). В этом

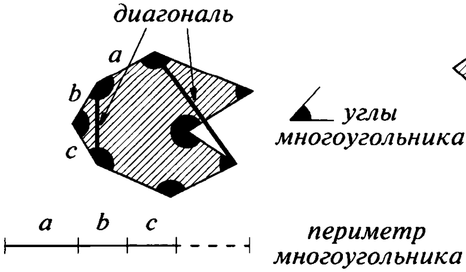


Рис. 79

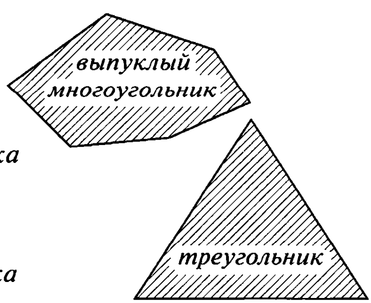


Рис. 80

учебнике в основном будут изучаться свойства выпуклых многоугольников.

Легко видеть, что любой треугольник является выпуклым.

Окружность и круг

***Окружность** — это замкнутая плоская кривая, состоящая из всех точек плоскости, удалённых от данной точки О на данное расстояние.*

При этом точка *О* называется ***центром*** окружности, а расстояние от *О* до точки окружности — её ***радиусом*** (рис. 81).

Радиусом мы будем называть также любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности.

Итак, окружность — это множество или совокупность точек плоскости, обладающих определённым свойством. Это свойство заключается в постоянстве расстояния до заданной точки. Наше определение как бы подтверждает, что кривая, изображаемая с помощью циркуля, в самом деле является окружностью.

*Фигура, ограниченная окружностью, называется **кругом*** (рис. 82).

*Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой*** (см. рис. 81).

Вообще, отрезок, соединяющий две точки любой кривой, является хордой этой кривой.

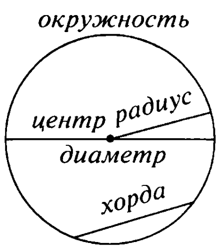


Рис. 81

*Хорда, проходящая через центр окружности, — **диаметр** окружности* (см. рис. 81).

Окружность и круг обладают многими поистине замечательными свойствами. В некотором смысле это самые симметричные линия и фигура. У окружности и круга есть центр и бесконечно много осей симметрии.

Теорема 2.5 *(об осях симметрии окружности).*

Любая прямая, проходящая через центр окружности, является её осью симметрии.

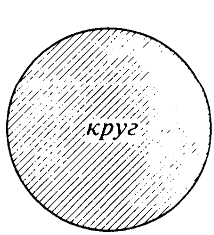


Рис. 82

Утверждение этой теоремы очевидно. Мы докажем её по той лишь причине, что важные факты (а этот факт очень важен!) полезно формулировать в виде теорем, а теоремы положено доказывать.

Доказательство. По определению окружность состоит из всех точек плоскости, удалённых на одно и то же расстояние от её центра. Проведём через центр окружности — точку O — произвольную прямую a. Пусть A — некоторая точка окружности (рис. 83).

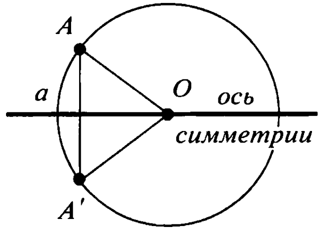


Рис. 83

Если A лежит на прямой a, то в результате симметрии относительно a точка A останется на месте.

Если же A не принадлежит прямой a, то в результате симметрии она перейдёт в некоторую точку A', а отрезок OA — в отрезок OA'. Согласно свойству симметрии $OA = OA'$, а значит, и точка A' принадлежит окружности. Но при этой симметрии точка A', в свою очередь, перейдёт в A. Короче говоря, при симметрии относительно прямой a точки A и A', лежащие на окружности, просто поменяются местами. Из этого следует, что вся окружность перейдёт сама в себя. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

173(н). На рисунке 84 изображены соответственно две группы линий. Укажите, чем отличаются линии одной группы от другой.

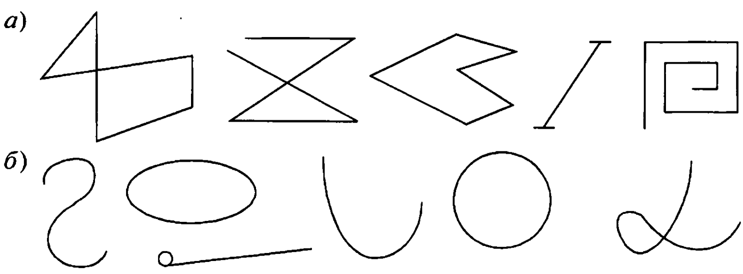


Рис. 84

174(н). Какие кривые на рисунке 84 являются: а) конечными (бесконечными); б) замкнутыми (незамкнутыми); в) самопересекающимися (несамопересекающимися)?

175(н). Какой линией является: а) окружность; б) прямая; в) отрезок?

176(н). Нарисуйте замкнутую ломаную линию без самопересечений.

177(н). На модели куба нарисуйте: а) плоскую незамкнутую линию с одной точкой самопересечения; б) пространственную кривую замкнутую линию; в) пространственную замкнутую ломаную линию, имеющую две точки самопересечений.

178. В скольких точках прямая может пересечь границу: а) треугольника; б) четырёхугольника? (Считаем, что прямая не проходит через вершины.)

179(т). Докажите, что нельзя провести прямую так, чтобы она пересекла все стороны 2001-угольника.

180. Какие фигуры могут образоваться при пересечении: а) двух треугольников; б) двух выпуклых четырёхугольников?

181(н). Начертите: а) 6 отрезков; б) 8 отрезков так, чтобы каждый из них пересекался ровно с тремя другими.

182(т). В области 6 городов. Между любыми двумя из них имеется прямое железнодорожное сообщение, так что из любого города в любой другой можно попасть по прямолинейному пути, не проезжая через другие города. Найдите такую схему железнодорожного сообщения этой области, чтобы на ней было наименьшее число пересечений дорог (в одном месте пересечение не более двух дорог).

183(н). Сколько общих точек может иметь граница прямоугольника и окружность? Рассмотрите все возможные случаи.

184(н). Какое максимальное число точек пересечения могут иметь восемь окружностей?

185(в). Две стороны треугольника равны 7 и 9. Через общую для этих сторон вершину и середину противоположной стороны проведена прямая. Чему равна разность периметров двух образовавшихся треугольников?

186. Докажите, что если прямая делит круг на две равные части, то она проходит через центр круга.

187(в). Дана окружность с центром в точке O, AB и CD — диаметры. Докажите, что $AC = DB$.

188(в). Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду и стягиваемые ею дуги пополам.

189. Периметр треугольника равен 6, длины его сторон выражаются целыми числами. Найдите его стороны.

190(в). Найдите периметр треугольника со сторонами:

а) 3, 5, 7;

б) 0,1, 100,1, 100,01;

в) 7,3, 5,4, 12,6;

г) $\frac{3}{7}, \frac{7}{11}, \frac{11}{13}$;

д) $\frac{2}{3}, \frac{2}{7}, \frac{22}{23}$.

191(в). В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 9$. На стороне CA взята точка M так, что $CM : MA = 5 : 7$. Какой из треугольников, CMB или AMB, имеет больший периметр и на сколько?

192. Стороны треугольника равны 4, 7 и 9. Через вершину треугольника, противоположную меньшей стороне, проведена прямая, делящая его периметр пополам. В каком отношении эта прямая делит меньшую сторону треугольника?

193. Периметр четырёхугольника равен 118. Одна из его диагоналей делит четырёхугольник на два треугольника с периметрами 77 и 83. Чему равна эта диагональ?

194(т). Какое наименьшее число сторон может иметь многоугольник, две несоседние стороны которого лежат на одной прямой?

195(т). Может ли при пересечении двух четырёхугольников образоваться: а) шестиугольник; б) восьмиугольник; в) десятиугольник; г) четыре четырёхугольника?

196(н). Может ли каждая из четырёх стран, имеющих границы в виде треугольника, иметь общий отрезок границы с каждой другой страной?

197(н). Нарисуйте геометрические формы, которые могут получиться при пересечении двух кругов на плоскости.

198(н). Можно ли при пересечении двух кругов на плоскости получить: а) точку; б) отрезок; в) треугольник; г) круг? Рассмотрите все возможные случаи.

199(н). Можно ли при пересечении двух кубов получить точку, отрезок, прямоугольник (в частности, квадрат), куб?

200(т). Возможно ли, чтобы все стороны десятиугольника располагались на пяти прямых?

201. Имеет ли смысл понятие «между» для трёх точек, расположенных на окружности?

202(п). Ученик нарисовал замкнутую кривую без самопересечений, которая ограничивает достаточно сложную фигуру. От рисунка остался лишь небольшой клочок бумаги (рис. 85), на котором отмечены несколько точек. Где расположены точки B, C и D, во внутренней или во внешней области соответствующей фигуры, если известно, что точка A принадлежит внутренней области?

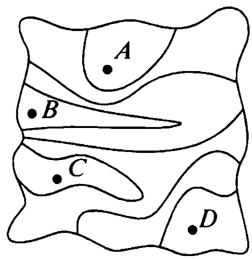


Рис. 85

203(н). Существует ли ломаная линия, пересекающая каждое своё звено ровно один раз и состоящая: а) из шести звеньев; б) из 15 звеньев? Если такая ломаная существует, то нарисуйте её.

204(н). Мальчик, находящийся на берегу водоёма в точке A (рис. 86), хочет сорвать цветок, который находится в точке C. Где растёт цветок — на берегу или на острове?

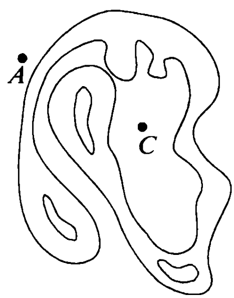


Рис. 86

205. Три черепахи A, B и C ползут по дороге:
«Я ползу первой», — с гордостью заявляет A.
«Я — не последняя», — утверждает B.
«Главное, что я обогнала A», — размышляет C.
Как вы можете это объяснить?

206(н). На рисунке 87 приведена фигура в виде многоугольника. Назовите: а) точки, лежащие во внутренней области фигуры; б) точки, лежащие во внешней области фигуры; в) точки внутренней области такие, из которых видны одна, две, три, четыре, пять или шесть вершин многоугольника; г) точки внешней области фигуры, из которых видны одна, две, три, четыре, пять или шесть вершин многоугольника.

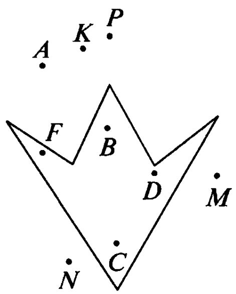


Рис. 87

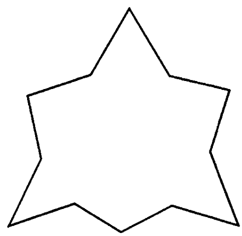


Рис. 88

207(н). Какое наибольшее число точек самопересечений может иметь замкнутая ломаная линия, состоящая из семи звеньев (общие концы звеньев не считаются)?

208. Комната имеет форму многоугольника, изображённого на рисунке 88. Укажите точки, в которых можно расположить источник света, чтобы он осветил всю комнату. Как называется фигура, заполняемая этими точками?

209(т). Придумайте комнату, имеющую вид многоугольника такой формы, чтобы её нельзя было всю осветить одной лампой, но можно это сделать двумя лампами.

210(т). Придумайте комнату такой формы, чтобы в ней можно было указать точку, из которой ни одна из стен не видна полностью.

211(в). Возможен ли треугольник с двумя прямыми углами?

212(п). На листе бумаги изображён четырёхугольник. Как можно проверить, имеет ли он центр симметрии?

213. Сколько всего диагоналей имеет шестиугольник, семиугольник, стоугольник?

214(т). Может ли многоугольник иметь ровно: а) 10 диагоналей; б) 20 диагоналей; в) 30 диагоналей?

215(т). Возможно ли, чтобы у пятиугольника какие-то три диагонали пересекались в одной точке?

216. В выпуклом пятиугольнике проведены все диагонали. На какие многоугольники оказался разделённым этот пятиугольник?

217(т). На плоскости проведены четыре прямые, среди которых нет параллельных и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько многоугольников при этом образовалось? Какие это многоугольники?

Проведём ещё пятую прямую, не параллельную ни одной из уже проведённых. Пусть эта пятая прямая проведена так, что все точки пересечения предыдущих прямых располагаются по одну сторону от неё. Посчитайте, сколько и каких многоугольников образовалось. Раскрасьте все получившиеся на плоскости области в два цвета так, чтобы любые две соседние были окрашены в разный цвет.

Начнём перемещать пятую прямую параллельно самой себе и проследим, как при этом будут меняться число и вид получающихся многоугольников. Как надо изменять окраску в два цвета, чтобы всякий раз соседние области оставались окрашенными в разные цвета? Сделайте соответствующие рисунки.

218. Нарисуйте произвольный треугольник и отметьте точку O. Постройте треугольник, симметричный изображённому относительно этой точки.

219. Выполните предыдущее задание, взяв вместо треугольника четырёхугольник, затем окружность.

220. Даны две окружности разных радиусов и с разными центрами. Постройте прямую, являющуюся осью симметрии обеих окружностей.

221(т). Внутри треугольника дана точка O. Постройте на сторонах этого треугольника две точки A и B так, чтобы отрезок AB содержал точку O и делился этой точкой пополам.

222(т). Изобразите с помощью циркуля окружность и отметьте в круге любую точку A. Как провести через A хорду окружности, для которой A является серединой?

223(т). На плоскости отмечены 4 точки (рис. 89). В каждой точке находится прожектор, освещающий угол в 90°. Как направить каждый из прожекторов, чтобы вся плоскость была освещена?

224(пт). Докажите, что многоугольник не может иметь два центра симметрии.

225(т). Многоугольник имеет две оси симметрии, пересекающиеся под углом 60°. Какое наименьшее число сторон может иметь этот многоугольник? Можно ли утверждать, что у него есть по крайней мере ещё одна ось симметрии?

226. Какие многоугольники могут получиться при пересечении треугольной пирамиды с плоскостью?

227. Дана треугольная пирамида, на рёбрах которой отмечены три точки (рис. 90). Постройте сечение этой пирамиды плоскостью, проходящей через отмеченные точки.

228. Ученик изобразил треугольную пирамиду и сечение её плоскостью (рис. 91). Как вы думаете, возможно ли такое сечение?

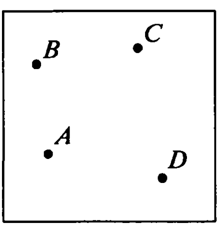


Рис. 89

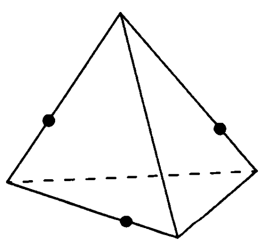


Рис. 90

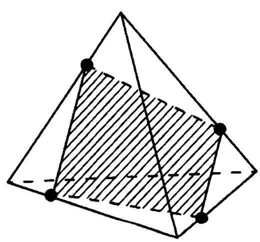
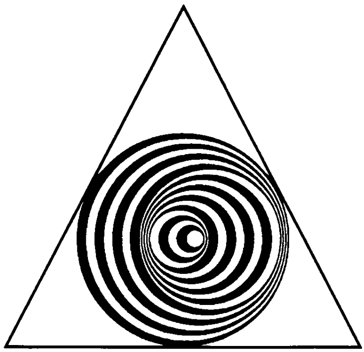


Рис. 91

3

Треугольник и окружность. Начальные сведения



Треугольник и окружность являются важнейшими фигурами планиметрии, и поэтому мы в первую очередь будем изучать свойства этих фигур. С ними связаны многие методы, используемые при решении различных геометрических задач. Любой многоугольник может быть разделён на треугольники, и изучение свойств этого многоугольника часто сводится к изучению свойств составляющих его треугольников. Окружность — единственная замкнутая кривая, не содержащая отрезков прямых, которая изучается в школе. Каждый треугольник определяет семейство окружностей, помогающих глубже и полнее понять «устройство» треугольника. В каком-то смысле изучаемая нами геометрия — это геометрия треугольника и окружности.

3.1. Равнобедренный треугольник

Некоторые понятия, связанные с треугольником

С каждым треугольником связан ряд отрезков и линий, имеющих специальные названия.

Отрезок прямой, соединяющий какую-то вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется ***медианой*** *треугольника* (рис. 92).

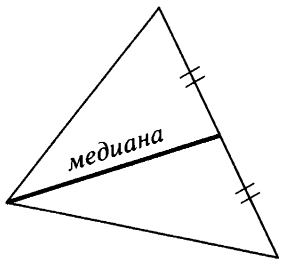


Рис. 92

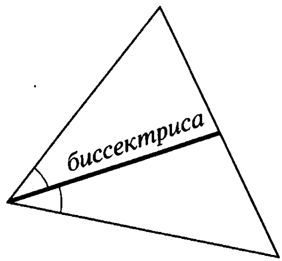


Рис. 93

Отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до точки пересечения со стороной треугольника называется ***биссектрисой*** *треугольника* (рис. 93).

Проведём через вершину треугольника прямую, перпендикулярную противоположной стороне (точнее, перпендикулярно прямой, содержащей противоположную сторону).

Отрезок этой прямой между вершиной и стороной треугольника (рис. 94, *а*) *или её продолжением* (рис. 94, *б*) *называется* ***высотой*** *треугольника.*

Конец высоты, отличный от вершины, называется ***основанием*** *высоты* (см. рис. 94, *б*).

Понятно, что у каждого треугольника имеются три медианы, три биссектрисы и три высоты.

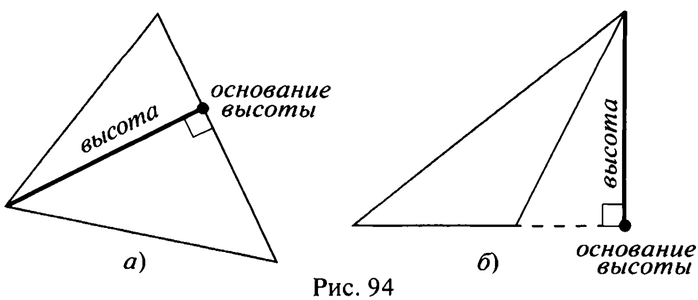


Рис. 94

3.1

Равнобедренный треугольник. Основные свойства

Треугольник с двумя равными сторонами называется ***равнобедренным****, при этом равные стороны называются* ***боковыми сторонами****, а третья сторона —* ***основанием*** *равнобедренного треугольника* (рис. 95).

Если у треугольника равны все три стороны, то он называется ***равносторонним*** (рис. 96).

Основные свойства равнобедренного треугольника мы сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.1 *(свойства равнобедренного треугольника).*

В любом равнобедренном треугольнике*: 1) *углы при основании равны*; 2) *медиана, биссектриса и высота, проведённые к основанию, совпадают.

Доказательство. Оба эти свойства доказываются совершенно одинаково. Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB = BC$. Пусть BB_1 — биссектриса этого треугольника (рис. 97). Как известно, прямая BB_1 является осью симметрии угла ABC. Но в силу равенства $AB = BC$ при этой симметрии точка A переходит в C. Следовательно, треугольники ABB_1 и CBB_1 равны. Отсюда всё и следует. Ведь в равных фигурах равны все соответствующие элементы. Значит, $\angle BAB_1 = \angle BCB_1$. Пункт 1) доказан. Кроме того, $AB_1 = CB_1$, т. е. BB_1 — медиана и $\angle BB_1A = \angle BB_1C = 90°$ (по определению прямых углов, как углов, равных своим смежным); таким образом, BB_1 также и высота треугольника ABC. ▼

Теорема о равнобедренном треугольнике имеет непосредственное отношение к свойствам окружности. Ведь любую хорду

Рис. 95

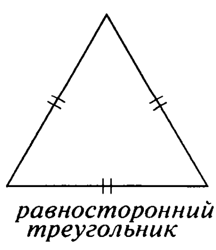


Рис. 96

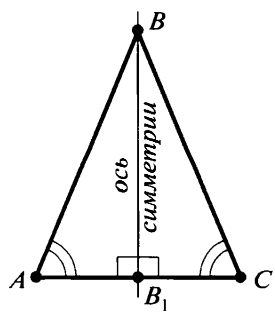


Рис. 97

окружности можно рассматривать как основание равнобедренного треугольника, противоположная вершина которого расположена в центре окружности. Этот приём часто используется при доказательстве различных свойств окружности и решении задач.

Свойство хорд окружности

Непосредственным следствием теоремы 3.1 является теорема 3.2, в которой говорится об одном важном свойстве хорд окружности.

Теорема 3.2 *(о диаметре, перпендикулярном хорде).*

Перпендикуляр, опущенный из центра окружности на хорду этой окружности, делит хорду пополам.

Это же можно выразить несколько иначе.

Диаметр окружности, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

Доказательство. Для доказательства достаточно рассмотреть треугольник OPK, где PK — некоторая хорда окружности, а O — центр (рис. 98). Этот треугольник равнобедренный: $OP = OK$. Теперь мы можем воспользоваться п. 2) теоремы 3.1. Перпендикуляр, опущенный из вершины O на PK, делит PK пополам. ▼

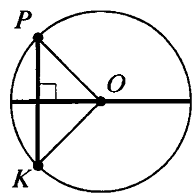


Рис. 98

Пересечение двух окружностей, а также прямой и окружности

На основании личного опыта, многократных наблюдений мы знаем, что две окружности или окружность и прямая могут пересечься не более чем в двух точках. Это кажется настолько очевидным, что не нуждается в доказательстве. Вы уже неоднократно могли использовать эти наблюдения при решении задач.

И всё же как доказать это свойство, если опираться на факты, доказанные в этой и предыдущей главах?

Теорема 3.3 *(о числе точек пересечения окружностей и прямых).*

Окружность и прямая, а также две окружности могут пересечься не более чем в двух точках.

При этом точки пересечения окружности с прямой симметричны относительно перпендикуляра к этой прямой, проходящего через центр, а точки пересечения двух окружностей симметричны относительно прямой, проходящей через их центры.

Подчеркнём, что эта теорема утверждает лишь то, что число точек пересечения окружности и прямой, а также двух окружностей не может быть равно трём, четырём и т. д.

Доказательство. Начнём со случая пересекающихся окружности и прямой.

Если прямая проходит через центр окружности, то наше утверждение вполне очевидно. На прямой имеется ровно две точки, удалённые от данной точки этой прямой на определённое расстояние.

Рассмотрим теперь общий случай (рис. 99). Пусть окружность с центром O пересекается с прямой a в точке A. Опустим из O перпендикуляр b на прямую a. Если A_1 — ещё одна точка пересечения прямой a с окружностью, то треугольник AOA_1 является равнобедренным с основанием AA_1. По теореме 3.1 (п. 2) перпендикуляр b делит отрезок AA_1 пополам, или, иначе, A_1 симметрична A относительно b. Поскольку существует только одна точка, симметричная данной, помимо точки A, прямая a может пересечься с окружностью не более чем ещё в одной точке.

Перейдём теперь к двум пересекающимся окружностям. Рассмотрим две пересекающиеся окружности с центрами O_1 и O_2 (рис. 100). Пусть A — какая-то из точек пересечения этих двух окружностей, не лежащая на прямой O_1O_2. Если точек пересечения более одной, то такая точка A найдётся. Зафиксируем эту точку. Мы утверждаем, что помимо точки A окружности могут пересечься ещё в единственной точке — симметричной A относительно прямой O_1O_2.

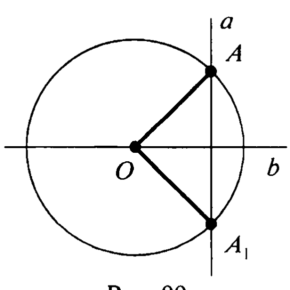


Рис. 99

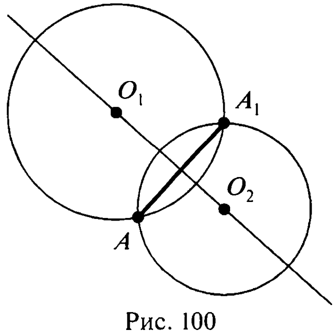


Рис. 100

В самом деле, пусть A_1 — какая-то точка пересечения окружностей, отличная от A. Прямая, проходящая через O_1 перпендикулярно AA_1, делит AA_1 пополам. Это следует из теоремы 3.2, ведь AA_1 — хорда окружности с центром O_1. Точно так же пополам делит AA_1 прямая, проходящая через O_2 перпендикулярно AA_1. Значит, эти два перпендикуляра совпадают с прямой O_1O_2, т. е. мы доказали, что A_1 симметрична A относительно прямой O_1O_2. Таким образом, число точек пересечения двух окружностей не более двух. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

229. Может ли высота треугольника находиться вне треугольника?

230(в). Докажите, что у равностороннего треугольника равны все углы.

231(н). BD — медиана, проведённая к основанию равнобедренного треугольника ABC, периметр которого равен 40 см, а периметр треугольника CBD равен 26 см. Найдите длину медианы.

232(н). Через точку M биссектрисы угла B проведена прямая a, перпендикулярная биссектрисе и пересекающая стороны угла в точках A и C. Докажите, что BM — медиана треугольника ABC.

233(н). Начертите: а) разносторонний[1] остроугольный[2] треугольник; б) прямоугольный[3] равнобедренный треугольник; в) разносторонний тупоугольный[4] треугольник.

234(н). Начертите равнобедренный треугольник, если он: а) остроугольный; б) прямоугольный; в) тупоугольный. В каждом треугольнике проведите с помощью транспортира биссектрису наибольшего угла.

---

[1] Напомним, что треугольник, у которого все стороны различны, называют ***разносторонним***.

[2] Треугольник называют ***остроугольным***, если у него все углы острые.

[3] Треугольник называют ***прямоугольным***, если у него есть прямой угол.

[4] Треугольник называют ***тупоугольным***, если у него есть тупой угол.

235(н). Начертите разносторонний тупоугольный треугольник и из вершины меньшего угла проведите: а) медиану; б) биссектрису; в) высоту.

236(н). Начертите разносторонний прямоугольный треугольник и проведите три его медианы.

237(н). В равнобедренном тупоугольном треугольнике из вершины тупого угла проведите медиану, биссектрису и высоту.

238(н). В треугольнике ABC $AB = BC$, но $BC \neq AC$. Из вершины A проведите медиану, биссектрису и высоту.

239(н). В треугольнике MKP (рис. 101) проведены медианы MB, KF, PL. Периметр треугольника MKP равен 26 см. Длины отрезков BP и LM равны соответственно 3 см и 4 см. Найдите длину отрезка MF.

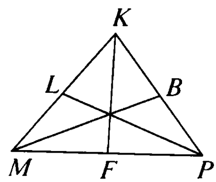


Рис. 101

240(в). Две стороны треугольника равны 3 и 4. Медиана, проведённая к третьей стороне, делит этот треугольник на два. Найдите разность периметров получившихся треугольников.

241(в). В треугольнике ABC известны стороны $AB = 5$, $AC = 7$. На стороне AB взята точка M так, что $AM : MB = 2 : 3$, а на стороне AC — точка K, причём $AK : KC = 2 : 5$. В каком отношении биссектриса угла A делит отрезок MK?

242(в). Докажите, что если три окружности имеют общую хорду, то их центры расположены на одной прямой.

243. Докажите, что если медиана треугольника делит его периметр пополам, то этот треугольник является равнобедренным.

244. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол BAC равен 80°. Пусть M — середина BC. Чему равен угол BAM?

245. Пусть O — центр окружности, AB — хорда этой окружности, отличная от диаметра, M — середина AB. Чему равен угол OMB?

246. Докажите, что радиусы двух равных пересекающихся окружностей, проведённые в точку их пересечения, образуют равные углы с общей хордой.

247. В окружности проведены два диаметра. Докажите, что концы диаметров служат вершинами четырёхугольника, противоположные стороны которого равны.

248(в). Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны медианы, проведённые к боковым сторонам.

249(п). В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На этих сторонах взяты соответственно точки K и M так, что $BK = BM$. Докажите, что $CK = AM$.

250(п). В плоскости даны два равных отрезка AB и A_1B_1. Докажите, что на плоскости можно выбрать две прямые таким образом, что в результате двух последовательных симметрий (сначала относительно первой, а затем — второй прямой) точка A перейдёт в точку A_1, а точка B — в точку B_1.

251(п). Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) три медианы пересекаются в одной точке; б) три биссектрисы пересекаются в одной точке; в) три высоты пересекаются в одной точке (возможно для этого их придётся продолжить за основание высоты).

252(т). Докажите, что если в четырёхугольнике равны все его стороны, то диагонали перпендикулярны и делятся точкой пересечения пополам.

253(т). Можно ли два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами расположить так, чтобы один лежал внутри другого?

254. Изобразите треугольники со сторонами:

а) 8, 10, 12; б) 6, 8, 10; в) 6, 8, 12; г) 6, 10, 12.

В каждом из этих треугольников проведите: 1) три медианы; 2) три биссектрисы; 3) три высоты; 4) медиану, биссектрису и высоту из одной вершины. Постарайтесь все эти построения выполнить как можно точнее и аккуратнее. (Самое трудное — построение биссектрисы — можно выполнять на глазок.)

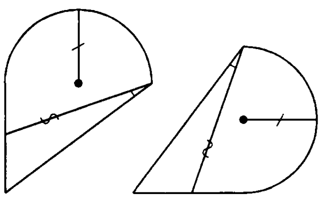
Попробуйте сделать какие-нибудь выводы. Например, какая из трёх линий, выходящих из одной вершины, лежит между двумя другими.

3.2. Признаки равенства треугольников

Как вы знаете, равные фигуры — это такие фигуры, которые можно совместить друг с другом, наложить друг на друга так, чтобы они совпали (рис. 102).

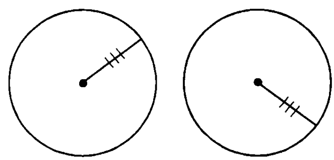
Как всё же можно установить равенство двух фигур? Нельзя же всякий раз совмещать их друг с другом. Равенство каких элементов — отрезков, углов или чего-то иного — обеспечивает и равенство самих фигур?

Мы знаем, что два отрезка равны, если равны их длины. Из равенства радиусов следует и равенство окружностей (рис. 103). А как быть с треугольниками? Равенство каких элементов двух треугольников обеспечивает равенство самих треугольников? При этом надо, чтобы число таких элементов было как можно меньше.



У равных фигур равны все соответствующие элементы.

Рис. 102



Равные окружности имеют равные радиусы. Окружности с равными радиусами равны.

Рис. 103

Полностью ответить на последний вопрос вряд ли возможно. Однако во многих практических и теоретических случаях удобно использовать следующие признаки равенства треугольников.

Первый признак равенства треугольников

(*По двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$ (рис. 104). Пусть в этих треугольниках равны стороны AB и A_1B_1, AC и A_1C_1, а угол BAC равен углу $B_1A_1C_1$. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ можно наложить на треугольник ABC так, чтобы угол $B_1A_1C_1$ совпал с углом BAC. При этом можно расположить треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB, а сторона A_1C_1 — со стороной AC. (В случае необходимости вместо треугольника $A_1B_1C_1$ можно рассматривать равный ему «перевёрнутый» треугольник, т. е. треугольник, симметричный $A_1B_1C_1$ относительно произвольной прямой.) Тогда треугольники совпадут полностью, поскольку совпадут все их вершины. ▼

Второй признак равенства треугольников

(*По стороне и двум прилегающим к ней углам*)

Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $BC = B_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$ (рис. 105).

Поступим так же, как и в предыдущем случае. Наложим треугольник $A_1B_1C_1$ на треугольник ABC так, чтобы совпали стороны BC и B_1C_1 и прилегающие к ним углы. Как и в предыдущем случае, при необходимости треугольник $A_1B_1C_1$ можно «перевернуть обратной стороной». Тогда треугольники совпадут полностью. Значит, они равны. ▼

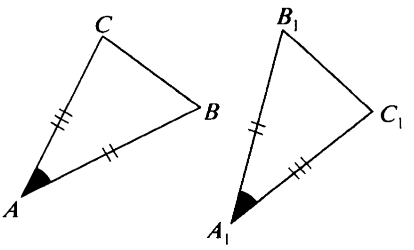


Рис. 104

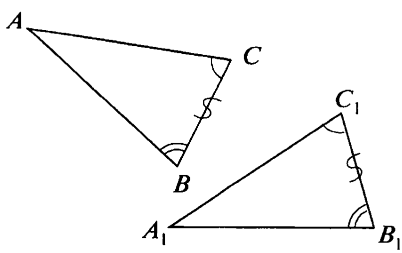


Рис. 105

3.2

Третий признак равенства треугольников

(*По трём сторонам*)

Если три стороны одного треугольника равны соответственно трём сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство. Пусть для треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $CA = C_1A_1$ (рис. 106). Перенесём треугольник $A_1B_1C_1$ так, чтобы сторона A_1B_1 совпала со стороной AB, при этом совпадут и вершины A_1 и A, B_1 и B.

Рассмотрим две окружности с центрами в A и B и радиусами соответственно AC и BC. Эти окружности пересекаются в двух симметричных относительно AB точках: C и C_2. Значит, точка C_1 после переноса указанным образом треугольника $A_1B_1C_1$ должна совпасть либо с точкой C, либо с точкой C_2. В обоих случаях это будет означать равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$, поскольку треугольники ABC и ABC_2 равны. (Эти треугольники симметричны относительно прямой AB.) ▼

Как видим, для всех трёх признаков характерно равенство трёх элементов. И это не случайно. Треугольник, как правило, определяется заданием именно трёх элементов (рис. 107). И если эти три элемента определяют единственный треугольник, то справедлив и соответствующий признак равенства треугольников.

В дальнейшем, говоря о равных треугольниках, мы будет пользоваться обозначением вида $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$. Под этим понимаем, что $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Напомним, что на чертеже равные углы обозначают обычно одинаковым количеством дуг.

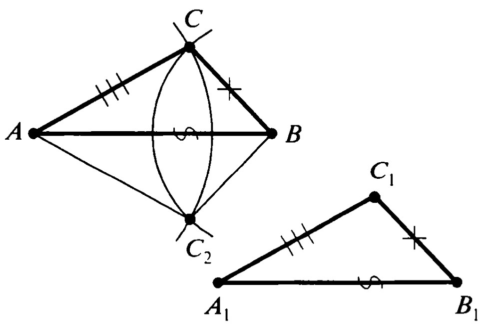


Рис. 106

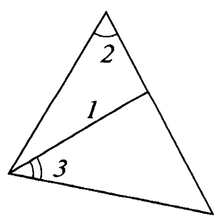


Рис. 107

Возвращаясь к равенству треугольников по трём элементам, надо отметить, что соответствующий признак равенства треугольников не всегда имеет место. Решим, например, следующую задачу.

Задача. *Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства* $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$ (рис. 108). *Обязательно ли такие треугольники равны?*

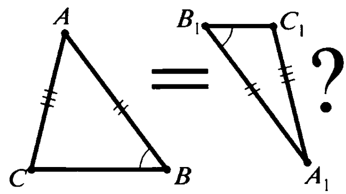


Рис. 108

Для того чтобы доказать, что такие треугольники могут быть и не равными, достаточно «предъявить» два неравных треугольника, у которых равны указанные в условии элементы. Как говорят математики, построить опровергающий пример.

Решение. Рассмотрим на плоскости какой-нибудь острый угол, вершину которого обозначим буквой B (рис. 109). Возьмём на одной из его сторон точку A и с центром в этой точке нарисуем окружность, которая пересекает другую сторону угла в двух точках. Обозначим эти точки через C и C_1. Один из двух получившихся треугольников — это ABC, а другой — ABC_1 (можно считать, что точки A и A_1, B и B_1 совпадают). Как видим, эти треугольники не равны, хотя и удовлетворяют всем условиям нашей задачи. ▼

Однако если потребовать, чтобы равные углы треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ были неострыми, то такие треугольники непременно будут равны. Дело в том, что в этом случае одна из точек пересечения окружности с прямой, на которой лежит вторая сторона угла, окажется вне угла (рис. 110). Ведь согласно теореме 3.3 эти точки симметричны относительно перпендикуляра, опущенного из точки A на эту прямую, т. е. в этом случае условия задачи

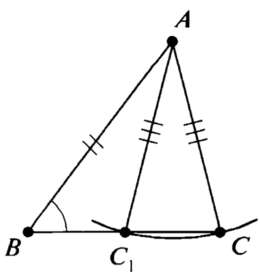


Рис. 109

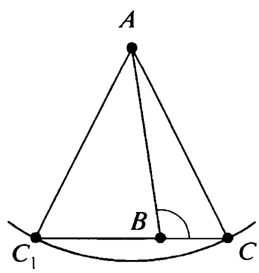


Рис. 110

определяют единственный треугольник. Строгое обоснование этому факту вы сможете дать позже.

Итак, справедлива теорема, которую можно было бы назвать четвёртым признаком равенства треугольников, но мы не станем её так называть, поскольку это противоречит геометрическим традициям.

Теорема 3.4 *(дополнительный признак равенства треугольников).*

Если в треугольниках $A_1B_1C_1$ и ABC имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $ABC = A_1B_1C_1$, причём указанные углы не являются острыми, то эти треугольники равны.

Утверждение этой теоремы следует из предыдущих рассуждений. Ведь, как было показано, можно построить единственный треугольник с заданными сторонами и углом.

Прямоугольный треугольник

В частности, соответствующий признак справедлив для прямоугольных треугольников. Но прежде чем его сформулировать, напомним, что ***прямоугольным*** *называется треугольник, у которого есть прямой угол.* (Как мы знаем, у треугольника не может быть более одного прямого угла, иначе две его стороны будут параллельны.)

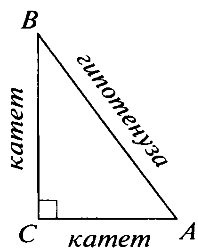


Рис. 111

Стороны, заключающие прямой угол прямоугольного треугольника, называются ***катетами*** *прямоугольного треугольника.*

Сторона, противоположная прямому углу, называется ***гипотенузой*** *прямоугольного треугольника* (рис. 111).

Из теоремы 3.4 следует специальный признак равенства прямоугольных треугольников.

Признак равенства прямоугольных треугольников

Два прямоугольных треугольника равны, если гипотенуза и катет одного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого.

Кроме того, из первого признака равенства треугольников следует равенство прямоугольных треугольников по двум катетам.

Вернёмся теперь к равнобедренному треугольнику. Оказывается, теорема 3.1 указывает не просто на свойства равнобедренного треугольника. Эти свойства характерны **только** для равнобедренного треугольника.

Признаки равнобедренного треугольника

Если в треугольнике ABC выполняется одно из следующих условий:

1) ***углы при вершинах A и C равны;***

2) ***биссектриса и высота, выходящие из вершины B, совпадают;***

3) ***высота и медиана, выходящие из вершины B, совпадают;***

4) ***медиана и биссектриса, выходящие из вершины B, совпадают,***

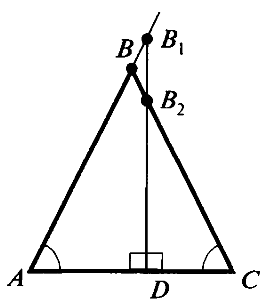
то этот треугольник равнобедренный, причём AB = = BC.

Доказательство. Докажем это утверждение последовательно по пунктам.

1) Обозначим через D середину AC и проведём через эту точку перпендикуляр к AC (рис. 112). Пусть этот перпендикуляр пересекается с прямой AB в точке B_1, а с прямой CB — в точке B_2, как показано на рисунке. Тогда по второму признаку треугольники ADB_1 и CDB_2 равны, поскольку $AD = CD$, углы B_1AD и B_2CD равны по условию, а равенство углов B_1DA и B_2DC следует из того, что B_1 и B_2 лежат на перпендикуляре к AC, проходящем через D.

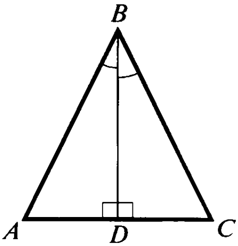
Таким образом, $DB_1 = DB_2$, точки B_1 и B_2 совпадают друг с другом, а значит, совпадут с точкой B. Следовательно, $AB = CB$.

Этот пункт можно доказать и иначе. При симметрии относительно перпендикуляра к AC, проходящего через точку D, точка C переходит в A, а точка A — в C. Угол A переходит в угол C, а угол C — в угол A. Прямая CB переходит в прямую AB, прямая AB — в прямую CB. Значит, треугольник ABC равнобедренный, $AB = BC$.

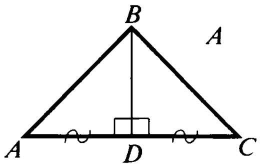


$\angle BAC = \angle BCA \Rightarrow$
$\Rightarrow AB = BC$

Рис. 112



$\triangle ABD = \triangle CBD$
(*по второму признаку*)
Рис. 113



$\triangle ABD = \triangle CBD$
(*по первому признаку*)
Рис. 114

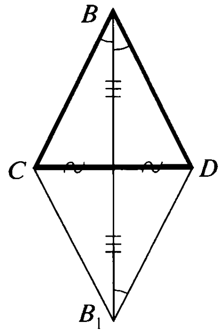


Рис. 115

2) Если BD является биссектрисой и высотой треугольника ABC (рис. 113), то треугольники ABD и CBD равны также по второму признаку равенства треугольников, поскольку сторона BD у них общая, а углы, к ней прилежащие, равны. Значит, $AB = CB$.

3) Если BD является медианой и высотой (рис. 114), то треугольники ABD и CBD равны по первому признаку: сторона BD — общая, $AD = DC$, $\angle BDA = \angle BDC$.

4) Проведём медиану BD и продолжим её за точку D (рис. 115). На этом продолжении возьмём точку B_1 так, что $DB_1 = DB$. Треугольники ABD и CB_1D равны по первому признаку: углы ADB и CDB_1 равны как вертикальные, кроме того, $DB = DB_1$, $AD = DC$. Следовательно, $CB_1 = AB$ и $\angle DB_1C = \angle DBA$. Но $\angle DBA$ равен $\angle DBC$, поскольку по условию BD — и медиана, и биссектриса. Таким образом, в треугольнике BCB_1 равны углы при стороне BB_1. Значит, в соответствии с первым пунктом теоремы $CB_1 = CB$. Кроме того, $CB_1 = AB$ и, следовательно, $CB = AB$. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

255. На рисунке 116: $BA = AM$, $AC = AK$, $\angle BAC = \angle KAM$. Перечислите все пары равных треугольников с вершинами в точках A, B, C, K и M.

256(н). Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, причём $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Выполните рисунок и отметьте равные углы.

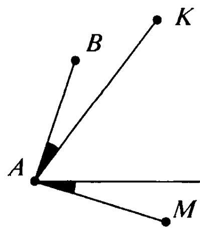


Рис. 116

257(н). Треугольники MNP и KFQ равны, причём $\angle M = \angle F$, $\angle N = \angle K$, $\angle P = \angle Q$. Выполните рисунок и отметьте равные стороны.

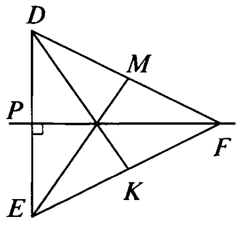


Рис. 117

258(н). В треугольнике DEF (рис. 117) $DF = FE$, $FM = KF$. Докажите равенство треугольников DME и EKD.

259(н). BD — медиана треугольника ABC. $BD = 3{,}5$ см, $AB = 5{,}8$ см, $AC = 9$ см, DE — продолжение BD, $DE = BD$, $\angle A = 50°$. Найдите периметр треугольника DEC и угол DEC.

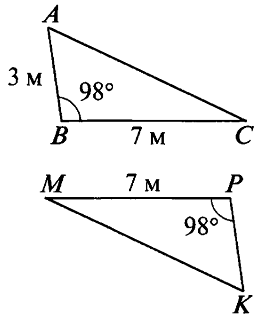


Рис. 118

260(н). Задайте ещё один элемент треугольника MPK (рис. 118), чтобы треугольники ABC и MPK стали равными по первому признаку равенства треугольников.

261(н). В равных окружностях (рис. 119) $\angle AOB = \angle A_1O_1B_1$. Докажите, что $AB = A_1B_1$.

262(н). На рисунке 120 отмечены равные элементы треугольника MNK. Докажите, что треугольники MNP и KNE равны, причём $NP = NE$.

263(н). BD — медиана и высота треугольника ABC. Докажите, что BD — биссектриса.

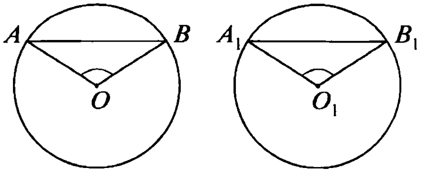


Рис. 119

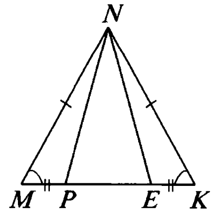


Рис. 120

264(н). На рисунке 121 отмечены равные элементы. Докажите, что треугольники MNK и MPK равны.

265(н). На рисунке 122 отмечены равные элементы. Докажите, что треугольники ABD и BCD равны.

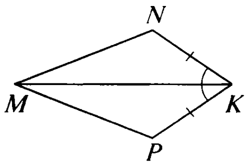


Рис. 121

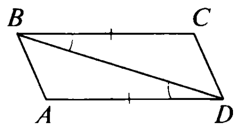


Рис. 122

266(н). Начертите треугольник MNF. Назовите:
а) стороны, противолежащие углам M и F;
б) углы, противолежащие сторонам MF и MN;
в) углы, прилежащие к стороне MF;
г) угол, лежащий между сторонами MF и MN.

267(н). Постройте треугольник MPK, в котором: $MP = 3$ см; $MK = 4$ см; $\angle M = 30°$. Укажите в нём углы, прилежащие к стороне KP, а также сторону, к которой прилежат углы M и P. Сколько различных треугольников можно построить? Почему? (Угол строится с помощью транспортира.)

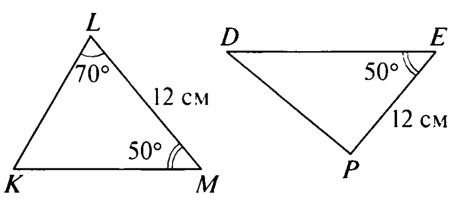


Рис. 123

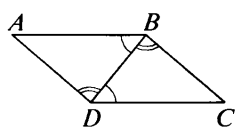


Рис. 124

268(н). Какой элемент треугольника EDP нужно ещё отметить на рисунке 123, чтобы треугольники EDP и KLM стали равными?

269(н). На рисунке 124 отмечены равные элементы. Докажите, что угол A равен углу C.

270(н). На рисунке 125 отмечены равные элементы. Докажите, что если $AB = CD$, то $BM = CK$.

271(н). На рисунке 126 отмечены равные элементы. Докажите, что $MK = KN$ и $\angle MKP = \angle KNF$.

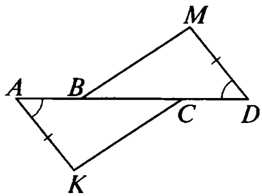


Рис. 125

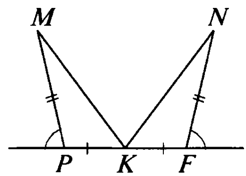


Рис. 126

272(н). По данным рисунка 127 докажите равенство соответствующих треугольников.

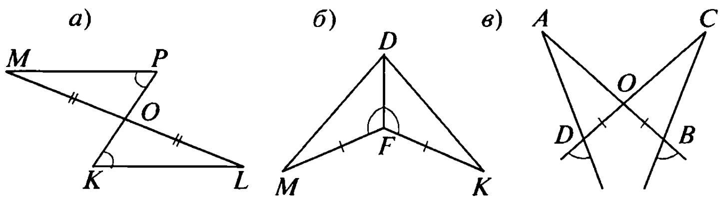


Рис. 127

273(н). На рисунке 128 $AC = BC$, $\angle A = \angle B$. Докажите, что $AD = BE$.

274(н). На рисунке 129 $\angle BCA = \angle DAC$, $BC = AD$. Докажите, что $AB = CD$.

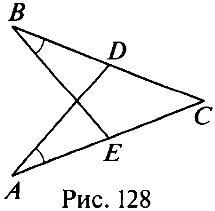


Рис. 128

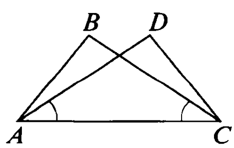


Рис. 129

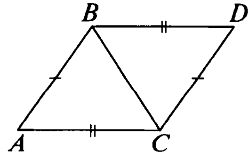


Рис. 130

275(н). По данным на рисунке 130 назовите пары равных углов.

276(н). По данным на рисунке 131 найдите угол, равный углу POK.

277(н). Как убедиться в равенстве углов A и M (рис. 132)?

278(н). Как построить четырёхугольник, равный четырёхугольнику $ABCD$ (рис. 133)?

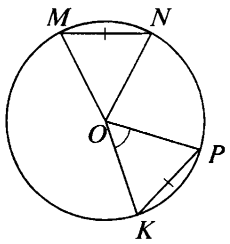


Рис. 131

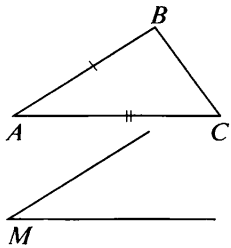


Рис. 132

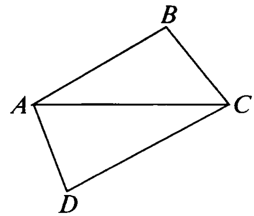


Рис. 133

279(н). На рисунке 134 найдите пары равных треугольников и докажите их равенство.

280(н). Используя данные на рисунке 135 докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

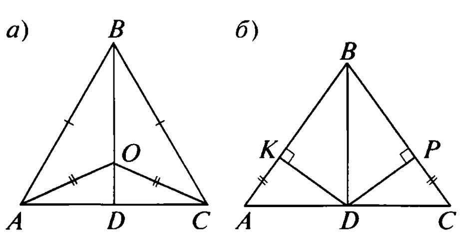


Рис. 134

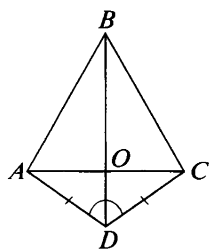


Рис. 135

281(в). Две прямые пересекаются в точке A. На одной из прямых взяты точки B и C, а на другой — P и K так, что $AB = AC$, $AP = AK$. Докажите, что $BP = CK$.

282. На основании BC равнобедренного треугольника ABC взяты точки M и K так, что $BM = CK$. Докажите, что $AM = AK$.

283. В четырёхугольнике $ABCD$ диагональ AC является биссектрисой углов A и C. Известно, что $AB = 3$, $CD = 5$. Найдите стороны BC и DA.

284. Пусть M — середина стороны AD четырёхугольника $ABCD$. Известно, что $BM = CM$, $\angle BMA = \angle CMD$, $AB = 1$. Найдите сторону CD.

285. На окружности взяты точки A, B и C так, что $AB = BC$. Докажите, что биссектриса угла ABC проходит через центр окружности.

286(в). В треугольнике ABC проведена медиана BB_1. На луче BB_1 взята точка M так, что $B_1M = BB_1$. Докажите, что $MA = BC$, $MC = BA$.

287(т). В треугольнике ABC проведена биссектриса BB_1. Пусть M — такая точка плоскости, что отрезок MB_1 пересекает сторону BC в точке K, $BM = AB_1$, $\angle MBB_1 = \angle BB_1A$. Докажите, что $BK = KB_1$.

288(п). На боковых сторонах равнобедренного треугольника во внешнюю сторону построены равносторонние треугольники. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины равносторонних треугольников (отличные от вершин равнобедренного) с серединой основания равнобедренного треугольника, равны между собой.

289(п). На двух перпендикулярных прямых от точки пересечения отложены четыре равных отрезка. Докажите, что концы этих отрезков, отличные от общего, служат вершинами четырёхугольника с равными сторонами и равными углами.

290(т). Докажите, что если у четырёхугольника все стороны и все углы равны, то его диагонали равны и перпендикулярны.

291(т). Докажите, что если у четырёхугольника противоположные стороны попарно равны, то точка пересечения его диагоналей является центром симметрии четырёхугольника.

292. На листе бумаги изображён треугольник. Постройте треугольник, ему равный.

293. На листе бумаги изображён угол. Постройте какой-нибудь угол, равный изображённому.

294(в). Докажите, что в окружности равные хорды видны из центра под равными углами. (Говорят, что отрезок AB виден из точки O под углом AOB.)

295(в). Докажите, что середины равных хорд окружности расположены на окружности с тем же центром.

296(т). На плоскости изображён угол в 19°. Постройте угол в 1°.

297(т). В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $BC = 5$, $CA = 7$. Прямая, проходящая через вершину B перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает AC в точке K. Через K проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла BCA, которая пересекает BC в точке M. И наконец, через M проходит прямая, перпендикулярная биссектрисе угла ABC, которая пересекает AB в точке P. Найдите длину отрезка AP.

298(т). В треугольнике ABC известно, что $AB = 3$, $BC = 4$, $CA = 6$. На BC взята точка M так, что $CM = 1$. Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла ACB, пересекает AC в точке N, а прямая, проходящая через N перпендикулярно биссектрисе угла BAC, пересекает прямую AB в точке K. Найдите BK и AK.

299(т). В треугольнике ABC известно, что $AB = 5$, $BC = 6$, $CA = 7$. На сторонах AB, BC и CA взяты точки K, L и M так, что прямые KL, LM и MK перпендикулярны соответственно биссектрисам углов ABC, BCA и CAB. На какие отрезки делят точки K, L и M стороны треугольника ABC?

300. Окружность с центром в точке O образует при пересечении со сторонами треугольника ABC равные хорды. Докажите, что у треугольников ABO, BCO и CAO равны высоты, выходящие из вершины O.

301. Будут ли равны два четырёхугольника, если у них все стороны соответственно равны?

302. Докажите, что если у двух выпуклых четырёхугольников соответственно равны все стороны и по одному углу между соответствующими сторонами, то такие четырёхугольники равны.

303. На рисунке 136 изображён некоторый многоугольник. Представьте себе, что дано задание перерисовать этот многоугольник в тетрадь. Вы, конечно, легко это сделаете. Но тут звонит одноклассник, у которого дома не оказалось учебника. Постарайтесь сообщить по телефону необходимые данные, чтобы он смог выполнить задание. Запишите эти данные.

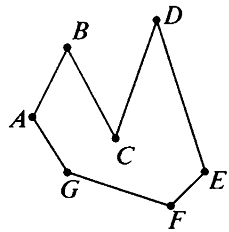


Рис. 136

304(п). Три черепахи находятся в точках A, B и C, являющихся вершинами равностороннего треугольника. Они одновременно с одинаковой скоростью начинают ползти. Черепаха, находившаяся в A, ползёт по прямой AB в направлении к B. Черепаха из B ползёт в C, черепаха из C ползёт в A. Докажите, что во все моменты времени черепахи располагаются в вершинах равностороннего треугольника.

305(н). На рисунке 137 отмечено, что $AB = BC = AC$, $AA_1 = BB_1 = CC_1$. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ — равносторонний.

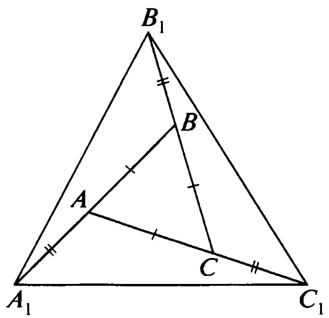


Рис. 137

306(п). Докажите, что любые две медианы равностороннего треугольника пересекаются под углом 60°.

307(т). На сторонах AB, BC и CA равностороннего треугольника взяты соответственно точки K, M и P так, что $AK = BM = CP$. Докажите, что прямые AM, BP и CK при пересечении образуют равносторонний треугольник.

308. ABC и APK — два равных треугольника. Известно, что $AB = 3$, $AC = AP = 4$, $AK = 5$. Чему равны стороны BC и PK?

309. В треугольнике ABC известны углы: $\angle BAC = 52°$, $\angle BCA = 44°$. Из вершины B провели медиану и высоту и продолжили их за сторону AC на расстояния, равные им. Получили точки P и K. Чему равен $\angle PCK$?

310. Точки A_1 и B_1 симметричны точкам A и B относительно некоторой прямой. (Эти точки не лежат на одной прямой и попарно не совпадают.) Докажите равенство треугольников: а) AA_1B и AA_1B_1; б) ABB_1 и A_1BB_1.

311(п). Попробуйте ещё раз доказать все три признака равенства треугольников, используя понятие осевой симметрии. Для этого докажите, что если на плоскости имеются два треугольника, для которых выполняется один из трёх признаков равенства треугольников, то всегда один треугольник можно перевести в другой с помощью не более чем трёх осевых симметрий.

312(п). На рисунке 138 изображена треугольная пирамида с вершинами A, B, C и D. Докажите, что все грани этой пирамиды являются равными треугольниками, если:

а) $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$;
б) $AB = CD$, $AC = BD$, $\angle ABD = \angle BDC$;
в) $AB = CD$, $\angle ABD = \angle CAB$, $\angle DAB = \angle ABC$;
г) $\angle ABD = \angle BDC$, $\angle ADB = \angle CBD$, $\angle ADC = \angle BAD$.

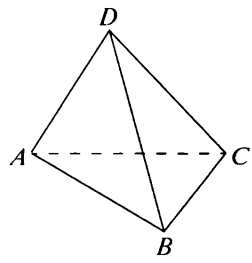


Рис. 138

313(н). Построить треугольник ABC, если:

а) $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $\angle B = 110°$;
б) $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $\angle B = 90°$;
в) $AB = 4$ см, $AC = 3{,}5$ см, $\angle B = 50°$;
г) $AB = 4$ см, $AC = 5$ см, $\angle B = 50°$.

Сколько треугольников можно построить в каждом случае?

314(н). В треугольниках MPC и DAB известно, что $MP =$ $= 12$ см, $CP = 8$ см, $DB = 8$ см. Верно ли заданы дополнительные элементы, чтобы выполнялось равенство данных треугольников?

а) $AD = 12$ см, $\angle P = \angle D = 40°$;
б) $AD = 12$ см, $\angle M = \angle A = 40°$;
в) $AB = 12$ см, $\angle M = \angle A = 120°$;
г) $AB = 12$ см, $AD = MC = 10$ см;
д) $AD = 12$ см, $\angle B = \angle C = 90°$.

315(н). По данным рисунка 139 запишите и докажите равенство соответствующих треугольников.

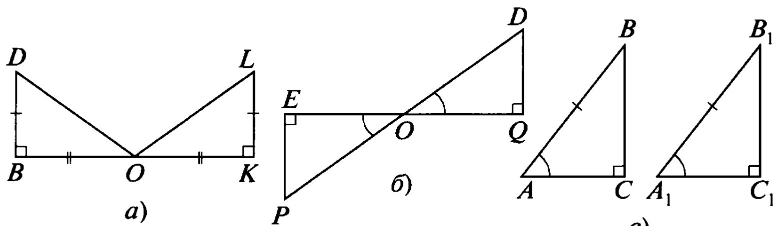


Рис. 139

316(н). Дан треугольник ABC (рис. 140), у которого $AB =$ $= BC$, $AK = PC$, $KM \perp AC$, $PN \perp AC$. Докажите, что $KM = NP$.

317(н). На рисунке 140 $AE = ED$, $\angle B = \angle C = 90°$. Докажите, что $AB = CD$, $BD = AC$.

318(н). На рисунке 141 $AC = BD$, $\angle B = \angle C = 90°$. Докажите, что $\angle BAD = \angle CDA$.

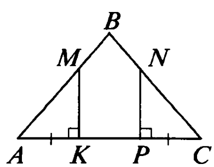


Рис. 140

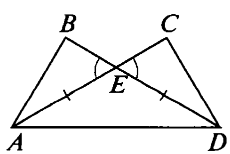


Рис. 141

319(н). В треугольнике ABC точка D — середина BC, $AB = BC = 16$ см, $DK \perp BC$; периметр треугольника AKC равен 23 см. Найдите периметр треугольника ABC.

3.3. Неравенства в треугольнике. Касание окружности с прямой и окружностью

Теорема о внешнем угле треугольника

Мы начнём этот параграф с одной очень важной для построения геометрической теории теоремы. Правда, её «жизнь» окажется не очень продолжительной, и в дальнейшем она будет заменена более сильным утверждением. Но сейчас она нам очень нужна. Прежде чем её сформулировать, введём понятие внешнего угла треугольника.

Углы, смежные с углами треугольника, называются ***внешними углами треугольника****.*

Понятие внешнего угла распространяется и на выпуклые многоугольники (рис. 142).

Теорема 3.5 *(о внешнем угле треугольника).*

Внешний угол треугольника больше любого внутреннего, с ним не смежного.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и какой-либо из его внешних углов, например угол, смежный с углом ACB (рис. 143). Докажем, что он больше угла CBA.

Проведём медиану AD и продолжим её за точку D на такое же расстояние. Получим точку A_1. Можно поступить и иначе: возьмём точку A_1, симметричную A относительно середины BC — точки D. (Этот приём мы уже использовали. Запомните его!)

Треугольник DCA_1 равен треугольнику DBA (по первому признаку), откуда $\angle DBA = \angle DCA_1$. Но угол DCA_1 меньше угла, смежного с углом ACB, поскольку составляет его часть. ▼

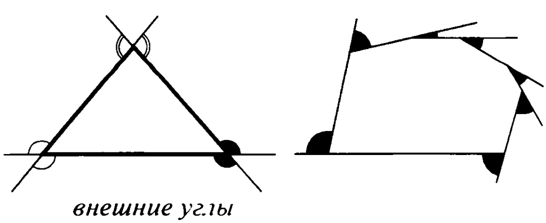


Рис. 142

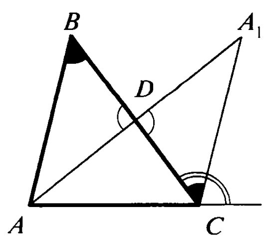


Рис. 143

Неравенство между сторонами и углами треугольника

На основании теоремы 3.5 можно доказать ещё несколько утверждений, важных для теории и полезных при решении геометрических задач.

Теорема 3.6 (*неравенство между сторонами и углами треугольника*).

В любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол. И наоборот, против большего угла лежит бо́льшая сторона.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона AC больше стороны AB (рис. 144). Возьмём на стороне AC точку D так, что $AD = AB$. В равнобедренном треугольнике ABD, как известно, равны углы ABD и ADB. Но $\angle ABD$ меньше $\angle ABC$, а $\angle ADB$ по теореме о внешнем угле больше $\angle BCA$. Значит, тем более, угол ABC больше угла BCA.

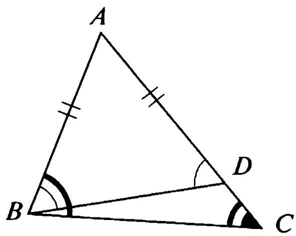


Рис. 144

А теперь — от углов к сторонам. Пусть в треугольнике ABC угол ABC больше угла ACB. Тогда из только что доказанного следует, что сторона AB не может быть больше стороны AC. Стороны AB и AC не могут быть и равными, иначе равны углы B и C. Остаётся единственное: $AB < AC$. ▼

Свойство перпендикуляра

Из теоремы 3.6 следует важное свойство перпендикуляра к прямой, которое ввиду его важности мы запишем в виде отдельной теоремы.

Теорема 3.7 (*основное свойство перпендикуляра*).

Пусть A — некоторая точка, расположенная вне прямой l, B — точка на l такая, что прямая AB перпендикулярна l, C — произвольная точка на l, отличная от B. Тогда $AB < AC$.

То, что прямая AB перпендикулярна l, можно записать следующим образом: $AB \perp l$.

3.3

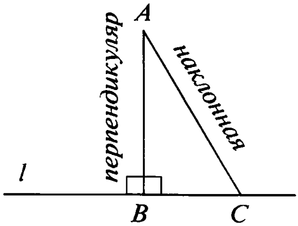


Рис. 145

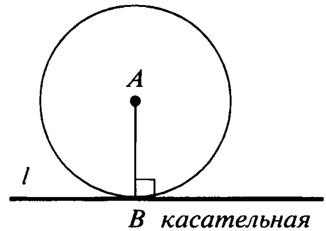


Рис. 146

Точку B называют ***основанием*** перпендикуляра, опущенного из точки A на l, или ***проекцией*** точки A на l. Отрезок AC называют ***наклонной***.

Утверждение теоремы 3.7 кратко выражают следующим образом: ***перпендикуляр меньше любой наклонной*** или так: ***кратчайшим путём от точки к прямой является перпендикуляр к прямой***.

Доказательство. В треугольнике ABC угол ABC — прямой. Отсюда по теореме 3.5 угол ACB — острый (рис. 145), т. е. угол ABC больше угла ACB, поэтому по теореме 3.6 имеем $AB < AC$. ▼

Если мы теперь построим окружность радиуса AB с центром в точке A, то эта окружность будет иметь единственную общую точку с прямой l — точку B (рис. 146).

Касательная к окружности

Если прямая имеет единственную общую точку с окружностью, то такая прямая называется ***касательной*** к окружности.

О такой прямой говорят также, что она ***касается*** окружности.

Общая точка окружности и касательной называется ***точкой касания***.

По существу, в последней фразе предыдущего пункта утверждается, что прямая l касается окружности с центром в A и радиусом AB (см. рис. 146). Точкой касания является точка B. Более того, верна следующая теорема.

Теорема 3.8 *(характеристическое свойство касательной к окружности).*

Через любую точку окружности проходит единственная прямая, касающаяся окружности. Эта прямая перпендикулярна соответствующему радиусу.

Доказательство. То, что прямая, перпендикулярная радиусу в его конце, касается окружности, нами уже доказано. Остаётся доказать, что другой касательной с той же точкой касания нет.

В самом деле, пусть некоторая прямая проходит через точку B и касается окружности с центром в A и радиусом AB (см. рис. 146). Из определения касательной следует, что все точки этой прямой, кроме точки B, расположены вне круга с центром в A и радиусом AB. Значит, AB — кратчайшее расстояние от A до этой касательной, т. е. касательная проходит через B и перпендикулярна AB и, значит, совпадает с l. ▼

Неравенство треугольника

Тот факт, что кратчайшим путём между двумя точками плоскости является отрезок прямой линии, в частности, означает, что ***в любом треугольнике сумма двух сторон больше третьей стороны***. Это очень важное свойство называется ***неравенством треугольника***.

Переведём это утверждение на алгебраический язык. В геометрии для сторон треугольника ABC общепринятыми считают обозначения $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Теперь в буквенной форме мы имеем три неравенства: $a + b > c$, $b + c > a$, $c + a > b$.

Из этих неравенств следует, что $c - b < a$, $c - a < b$ и т. д., или в словесной форме: ***разность любых сторон треугольника меньше третьей стороны треугольника***.

Неравенство треугольника следует также из свойства перпендикуляра (теорема 3.7). Как оно получается из этой теоремы, ясно из рисунка 147, *а—в*. (В доказательстве, проиллюстрированном на рисунке 147, *б*, использовано свойство неравенств: одноимённые неравенства можно почленно складывать. В данном случае это неравенства $b > b_1$, $a > a_1$. Значит, $a + b > b_1 + a_1 = c$.) Случай, изображённый на рисунке 147, *в*, разберите самостоятельно.

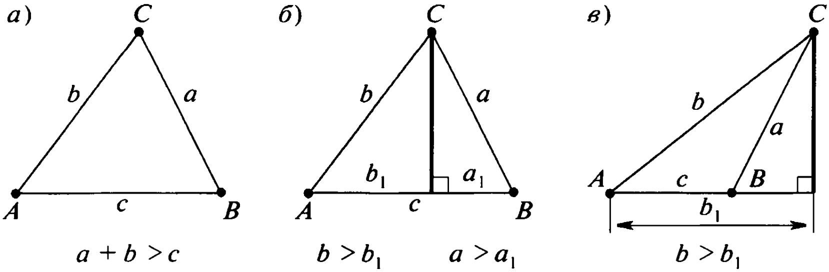


Рис. 147

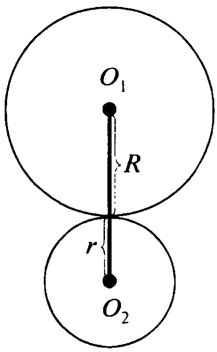
3.3

Касание двух окружностей

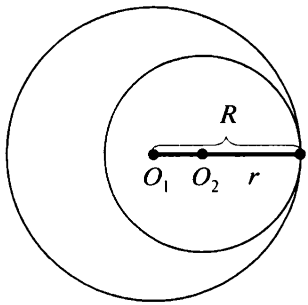
А теперь рассмотрим, как могут располагаться на плоскости две окружности.

Если две окружности пересекаются в двух точках, то на основании неравенства треугольника сумма их радиусов больше расстояния между центрами, а разность меньше.

А при каких условиях две окружности будут иметь единственную общую точку, т. е. ***касаться***? Понятно, что эта единственная общая точка должна быть расположена на прямой, проходящей через центры окружностей, иначе появилась бы вторая точка пересечения, симметричная первой.



внешнее касание
$O_1O_2 = R + r$
Рис. 148



внутреннее касание
$O_1O_2 = R - r$
Рис. 149

Возможны следующие два вида касания двух окружностей: ***внешнее*** и ***внутреннее***. Если расстояние между центрами равно сумме радиусов окружностей (рис. 148), то они касаются друг друга ***внешним образом***. Если же расстояние между центрами равно разности радиусов, то касание ***внутреннее***. При этом бóльшая окружность содержит меньшую (рис. 149).

▲■● Задачи, задания, вопросы

320(н). Для треугольника ABC постройте три его внешних угла, по одному при каждой из его вершин.

321(н). В равнобедренном треугольнике MKP, где $MK = MP$, постройте один из внешних углов: а) при основании; б) при вершине треугольника.

322(н). Назовите внешний угол при вершине M треугольника KMF (рис. 150).

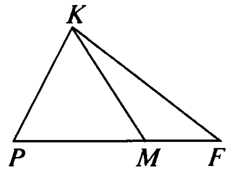


Рис. 150

323(н). Назовите внешний угол при вершине D треугольника BDC (рис. 151).

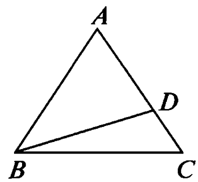


Рис. 151

324(н). Проверьте, является ли угол DCM внешним углом треугольника: а) ADC; б) ADB; в) DBC. Может ли угол DCM быть острым (рис. 152)?

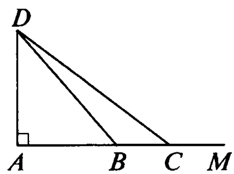


Рис. 152

325(н). Назовите внешние углы треугольника MBP, изображённого на рисунке 153. Могут ли эти углы быть: а) острыми; б) тупыми; в) прямыми?

326(н). Назовите внешние углы при вершинах C и P треугольника DCP. Для каких треугольников угол DKB является внешним (рис. 154)? Какой из углов на этом рисунке является внешним для каждого из треугольников DCM, DMP, MDK?

327(н). В треугольнике длины сторон равны 5, 6 и 7. Докажите, что против стороны длиной 6 лежит острый угол.

328(н). Докажите, что в тупоугольном треугольнике два острых угла.

329(н). Докажите, что в прямоугольном треугольнике два острых угла.

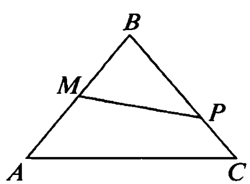


Рис. 153

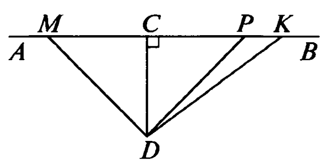


Рис. 154

330(н). Определите, какое из высказываний ложно: а) у треугольника могут быть два тупых внешних угла; б) у треугольника могут быть два острых внешних угла. Ответ обоснуйте.

331. Известно, что расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр. А сколь велика разница в пути, если двигаться не по перпендикуляру, а по близкой к нему наклонной? Проделайте следующий опыт. Пусть AB — перпендикуляр к прямой, причём B — основание перпендикуляра; C — некоторая другая точка прямой. Попробуйте сначала оценить на глаз с точностью до 0,1 см длину AC, а затем, выполнив построение, измерьте это расстояние с такой же точностью, если:
а) $AB = 5$ см; $BC = 1$ см;
б) $AB = 10$ см, $BC = 1$ см.
Интересно, намного ли вы ошиблись?

332(н). На рисунке 155 $PK = PM$. Докажите, что $\angle 1 > \angle 3$, $\angle PKF > \angle 3$.

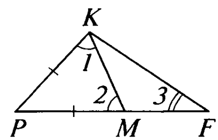


Рис. 155

333. В треугольнике ABC известны стороны: $AB = 4\sqrt{3}$, $BC = 7$, $CA = 2\sqrt{5}$. Какой угол в этом треугольнике является наибольшим, а какой — наименьшим?

334. Прямая l касается окружности с центром O и радиусом 3. Чему равно расстояние от точки O до прямой l?

335(н). Найдите расстояние между двумя параллельными касательными к окружности, если радиус этой окружности равен 5 см.

336(н). Пересекутся ли две касательные к окружности, проведённые через концы одного диаметра?

337(н). Из данной точки, лежащей вне данной прямой, как из центра опишите окружность, касающуюся данной прямой.

338(н). На окружности даны три точки M, N, K. Постройте треугольник ABC так, чтобы его стороны касались окружности в указанных точках.

339. Две окружности касаются друг друга в точке A. Через точку A проведена прямая, касающаяся одной из окружностей. Докажите, что эта прямая касается также и другой окружности.

340. Можно ли расположить на плоскости 5 различных окружностей так, чтобы любые две касались между собой?

341(н). Существует ли треугольник со сторонами: а) 6, 2, 4; б) 6, 2, 3; в) 6, 5, 5?

342(н). Определите, существует ли треугольник, периметр которого 26 см, а одна из его сторон равна 13 см.

343(н). На плоскости даны три точки A, B и C. Как они могут быть расположены, если $AC = 1{,}8$ см, $CB = 32$ мм?

344(н). Будут ли располагаться на одной прямой точки M, N, P, если $MN = 1{,}4$ см, $NP = 1{,}8$ см, а $MP = 3$ см?

345. На плоскости даны две окружности с радиусами R и r, a — расстояние между их центрами. Пусть A — точка на одной из окружностей, B — на другой. В каких пределах может меняться расстояние между A и B, если:
а) $R = 3$, $r = 1$, $a = 7$;
б) $R = 7$, $r = 3$, $a = 1$;
в) $R = 5$, $r = 3$, $a = 7$?

346(в). Пусть O — центр окружности радиуса R, A — точка плоскости, расположенная на расстоянии a от O. Среди точек окружности есть точка, самая близкая к A, и самая далекая от A точка. Обозначим первую точку через B, а вторую — через C. Как построить точки B и C? Чему равны отрезки AB и AC, если: а) $R = 3$, $a = 4$; б) $R = 5$, $a = 3$? Выразите AB и AC через R и a.

347(вт). На плоскости расположены точки A, B, C и D. Известно, что $AB = 1{,}3$, $BC = 2{,}4$, $CD = 1{,}8$, $AD = 5{,}5$. Найдите AC.

348(п). На плоскости расположены точки A, B, C и D, причём $AB = 3$, $BC = 4$, $CD = 5$, $AC + BD \leqslant 2$. Найдите AD.

349(п). Чему равна длина стороны AB треугольника ABC, если $BC = 1$, $CA = 7$ и длина стороны AB также выражается целым числом?

350(в). Найдите периметр равнобедренного треугольника, две стороны которого равны 3,9 и 7,9.

351. Вычислите периметр равнобедренного тупоугольного треугольника, две стороны которого равны 10 и 7.

352(н). В треугольнике ABC прямая l пересекает сторону AB в точке K, а сторону BC — в точке P. Докажите, что периметр четырёхугольника $AKPC$ меньше периметра треугольника ABC.

353(п). Имеются два отрезка, длины которых a и b. Известно, что существует треугольник со сторонами $a + 5b$, $5a + 6b$ и $3a + 2b$. Что больше: a или b?

354(в). В каких пределах может меняться периметр треугольника, у которого две стороны равны a и b?

355(в). Даны две окружности с радиусами R и r, расстояние между их центрами равно a. Пусть A — точка одной из окружностей, B — точка другой. Как построить точки A и B, для которых длина отрезка AB является наибольшей, и точки, для которых она наименьшая? Какова наибольшая и наименьшая длины отрезка AB, если:
а) $R = 5$, $r = 2$, $a = 8$; б) $R = 7$, $r = 3$, $a = 5$?
Выразите эти величины через R, r и a.

356(п). Дома Винни-Пуха и Пятачка находятся на расстоянии 1 км друг от друга. Однажды они одновременно вышли из своих домов и каждый пошёл по какой-то прямой. Винни-Пух проходил 3 км в час, а Пятачок — 4 км в час. Через некоторое время они встретились. Сколько времени могло продолжаться их путешествие? Укажите наибольшее и наименьшее возможное время.

357. Докажите, что равносторонний треугольник имеет три оси симметрии и все они пересекаются в одной точке.

358. Периметр равнобедренного треугольника равен 40 см, а одна из его сторон в два раза больше другой. Найдите стороны треугольника.

359(в). Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы двух сторон, между которыми она проходит.

360. Докажите, что в выпуклом четырёхугольнике сумма диагоналей меньше периметра, но больше его половины.

361. Дана окружность радиуса 3 и точка A на расстоянии, равном 5, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.

362(т). На плоскости имеются две окружности. Чему равен радиус окружности, касающейся данных окружностей и имеющей центр на прямой, проходящей через их центры, если радиусы данных окружностей и расстояние между их центрами соответственно равны: а) 1, 3, 5; б) 5, 2, 1; в) 3, 4, 5? Сколько решений имеет задача?

363(в). Имеются два равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами. Докажите, что основание меньше у того треугольника, у которого меньше противолежащий основанию угол.

364(т). Жители трёх деревень, расположенных в вершинах треугольника, решили вырыть общий колодец. При этом они хотят расположить колодец в таком месте, чтобы общий путь всех семей за водой был как можно меньше. Каждая семья должна ходить за водой один раз в день. Где следует вырыть колодец, если в деревне A живёт 100 семей, в деревне B — 200 семей, а в деревне C — 300 семей?

365(т). В вершинах треугольника расположены центры трёх попарно касающихся окружностей. Найдите радиусы этих окружностей, если стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Сколько решений имеет задача?

366. Сколько различных треугольников можно составить из отрезков, длины которых равны 1, 2, 3, 4 и 5?

367(т). Ученик измерил стороны и диагональ некоторого четырёхугольника и получившиеся числа расположил в порядке возрастания: 1; 2; 2,8; 5; 7,5. Чему равна диагональ четырёхугольника?

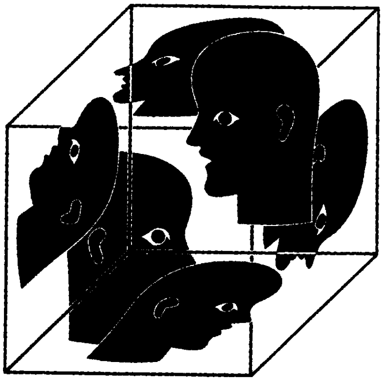
368(п). Пусть x, y и z — произвольные положительные числа. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

369(п). Пусть a, b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что существуют положительные числа x, y и z такие, что $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$.

370(т). Известно, что в треугольной пирамиде $ABCD$ угол DAB больше угла DBA, угол DBC больше угла DCB. Какой из двух углов больше — DAC или DCA?

4

Виды геометрических задач и методы их решения



Отвечая на вопрос, чем уроки математики отличаются от других уроков, любой ученик наверняка скажет, что на уроках математики решают задачи. Научиться хорошо решать задачи по математике удаётся далеко не всякому, но учиться решать задачи, учиться думать, «тренировать и развивать свои мозги» с помощью математических задач должен каждый ученик. В отличие от алгебры, в геометрии почти нет стандартных задач, решаемых по образцам. Каждая геометрическая задача требует индивидуального подхода.

В этой главе мы рассмотрим некоторые виды задач, характерные именно для геометрии. Кроме того, мы начнём разговор о методах и приёмах, которые используются при решении геометрических задач и доказательстве теорем.

4.1. Геометрические места точек

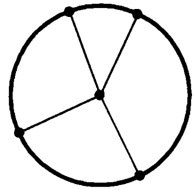


Рис. 156

Вспомним, как мы определяли окружность. Вспомнили? Теперь заметим, что окружность мы определяли как ***геометрическое место точек*** (рис. 156). Что это значит?

Под геометрическим местом точек будем понимать множество всех точек, обладающих определённым геометрическим свойством по отношению к какой-либо геометрической фигуре или другому объекту.

В случае окружности это множество состоит из всех точек плоскости, удалённых на заданное расстояние от фиксированной точки плоскости. В дальнейшем будет выяснено, что это не единственный способ задания окружности как геометрического места точек (ГМТ).

Очень часто в качестве геометрического места точек выступает прямая линия или части прямой. Дальше мы рассмотрим некоторые важнейшие случаи.

Серединный перпендикуляр к отрезку

Что представляет собой геометрическое место точек плоскости, равноудалённых от концов заданного отрезка прямой на плоскости?

Сформулируем этот вопрос в виде задачи.

Задача 1. *Дан отрезок AB, который лежит в некоторой плоскости. Найдите все точки M плоскости, для которых $AM = MB$.*

Решение. Ответ следует из известных вам свойств равнобедренного треугольника.

Искомым геометрическим местом точек является прямая, перпендикулярная AB и проходящая через середину AB (рис. 157). Такую прямую называют ***серединным перпендикуляром*** к AB. Серединный перпендикуляр является осью симметрии, при которой A переходит в B (и наоборот).

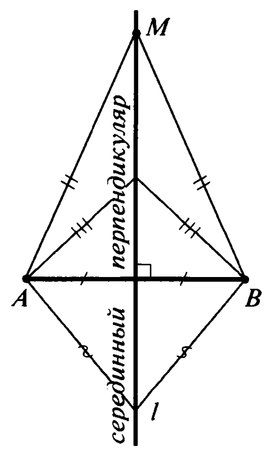


Рис. 157

В самом деле, если M — такая точка плоскости, что $AM = MB$, то, согласно свойству равнобедренного треугольника, M принадлежит серединному перпендикуляру. (Отдельно рассматриваем середину AB.)

Если же точка M принадлежит серединному перпендикуляру к AB, то (см. п. 3 теоремы о признаках равнобедренного треугольника на с. 81) треугольник AMB — равнобедренный и $AM = MB$. ▼

Мы специально так подробно остановились на обосновании этого весьма простого и очевидного факта. Очень важно, чтобы вы обратили внимание на две стороны, две части любой задачи на нахождение геометрического места точек.

1. С одной стороны, надо указать, какой линии, какому множеству принадлежат точки, обладающие заданным свойством. (В данном случае точки, для которых $AM = MB$, лежат на серединном перпендикуляре к AB.)

2. С другой стороны, следует доказать, что все точки найденной линии, найденного множества обладают заданным свойством. (В рассматриваемой задаче: для всех точек M серединного перпендикуляра к AB имеет место равенство $AM = MB$.)

Биссектриса угла

Биссектрису угла также можно рассматривать как геометрическое место точек.

Задача 2. *Докажите, что геометрическим местом точек, расположенных внутри данного угла и равноудалённых от его сторон, является биссектриса этого угла.*

Решение. Как и в предыдущем случае, мы должны провести следующие два рассуждения.

1. Если точка M расположена внутри угла и находится на равных расстояниях от его сторон, то M лежит на биссектрисе этого угла.

Опустив перпендикуляры MA и MB на стороны угла (рис. 158), из равенства $MA = MB$ на основании соответствующего признака равенства прямоугольных треугольников получим, что треугольники OMA и OMB равны. Значит, равны углы MOA и MOB, т. е. OM — биссектриса угла AOB.

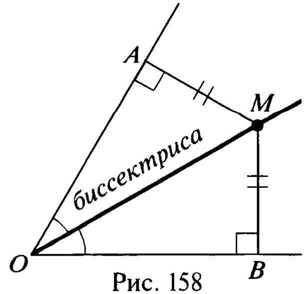


Рис. 158

2. Если точка M лежит на биссектрисе, то M равноудалена от сторон угла.

Это утверждение также очевидно. Ведь при симметрии относительно прямой, содержащей биссектрису, стороны угла перейдут друг в друга. ▼

Мы достаточно подробно решили здесь две (честно говоря, не такие уж трудные) задачи. Это, однако, не означает, что так же подробно вы должны записывать решение всех предлагаемых задач. Важно понимать, что это можно сделать, и записать самостоятельно подробное решение нескольких задач.

▲■● Задачи, задания, вопросы

371(н). Дана окружность с центром в точке O и радиусом 2. Как расположены точки A, B и C относительно окружности, если $OA = 1$, $OB = 2$, $OC = 3$?

372(н). Постройте окружность с центром в точке O и радиусом 1,5 см.

а) Отметьте две точки A и B на расстоянии 1,5 см от точки O.

б) Отметьте точку C на расстоянии 2 см от точки O.

в) Отметьте точку D на расстоянии 1 см от точки O.

г) Покажите геометрическое место точек, расположенных от точки O на расстоянии большем 1,5 см.

д) Где находятся точки, которые расположены на расстоянии, меньшем 1,5 см?

373(н). Постройте отрезок MN, равный 4 см.

а) Покажите на рисунке геометрическое место точек, удалённых от M на расстояние 3 см.

б) Покажите на рисунке геометрическое место точек, удалённых от N на расстояние 2 см.

в) Найдите точки, одновременно удалённые от точки M на расстояние 3 см и от точки N на расстояние 2 см. Обозначьте их.

г) Покажите множество точек, которые находятся от точки M на расстоянии меньшем 4 см и от точки N на расстоянии большем 3 см.

д) Где находятся точки, которые расположены от точки M на расстоянии большем 3 см и от точки N на расстоянии большем 2 см?

е) Существуют ли точки, которые одновременно располагаются от точки M на расстоянии меньшем 4 см и от точки N на расстоянии меньшем 2 см?

ж) Что представляет собой множество точек, которые одновременно лежат на расстоянии 3 см от точки M и на расстоянии большем 2 см от точки N?

374(н). Дан треугольник ABC со сторонами $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 4$ см (рис. 159). В пересечении каких геометрических мест точек лежит точка A?

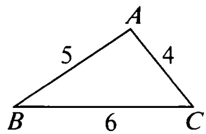


Рис. 159

375(н). A и B точки плоскости, причём $AB = 3$ см. Найдите точки плоскости, находящиеся одновременно от точки A на расстоянии 3 см, а от точки B — на расстоянии 4 см.

376. На плоскости отмечены четыре различные точки A, B, C и D так, что $AC = CB$, $AD = DB$. Чему равен угол между прямыми AB и CD?

377. На плоскости отмечены две точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что ABC — равнобедренный треугольник с основанием AB.

378. На плоскости имеется угол с вершиной в точке O. Пусть A и B — две точки на его сторонах. Укажите все точки отрезка AB, равноудалённые от сторон угла.

379. Пусть M и N — две точки, расположенные внутри угла. Каждая из них равноудалена от сторон угла. Докажите, что прямая MN проходит через вершину угла.

380(н). Где находится геометрическое место точек M (рис. 160), для которых: а) $BM = 3AM$; б) $BM \geqslant 2AM$; в) $BM < AM < 2BM$?

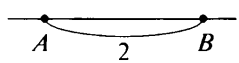


Рис. 160

381(вп). Пусть A и B — точки плоскости. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости, для которых: а) $AM < BM$; б) $AM \geqslant 2AB$; в) $AM + MB = AB$; г) $AM < AB$, $BM \geqslant AB$; д) точки A, B и M являются вершинами равнобедренного треугольника; е) $\angle ABM$ — наибольший угол треугольника ABM; ж) $\angle BAM$ — наименьший угол треугольника ABM; з) $\angle AMB$ — средний по величине угол треугольника AMB.

382(вп). Пусть A, B и C — точки плоскости, не лежащие на одной прямой. Найдите геометрическое место точек M этой плоскости таких, что:
а) прямая CM пересекает отрезок AB;
б) луч CM пересекает отрезок AB;
в) отрезок CM пересекает отрезок AB;
г) $AM = BM = CM$;
д) ближайшей к M точкой среди точек A, B и C является A.

383(т). Найдите геометрическое место точек M, равноудалённых от трёх сторон треугольника ABC.

384(п). На плоскости даны две пересекающиеся прямые p и q. Найдите геометрическое место точек M: а) равноудалённых от p и q; б) расположенных ближе к p, чем к q.

385. На плоскости расположены две пересекающиеся прямые. Из точки их пересечения одновременно начинают двигаться две точки, каждая по своей прямой. Скорости точек равны. Какую линию описывает середина отрезка с концами в движущихся точках?

386(п). На плоскости изображена окружность радиуса 1. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для каждой из которых расстояние до ближайшей к M точки окружности равно 1.

387(т). На плоскости проведены три пересекающиеся прямые. Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от этих прямых.

388(в). Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей плоскости, проходящих через две данные точки A и B этой плоскости.

389. Найдите геометрическое место центров всевозможных окружностей плоскости, пересекающих в двух точках отрезок AB этой плоскости.

390(т). Пусть A и B — точки плоскости, расстояние между которыми равно 1. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых расстояния до A и B выражаются целыми числами.

4.2. Задачи на построение

Геометрические задачи на построение, возможно, самые древние математические задачи. Кому-то они сейчас могут показаться не очень интересными и нужными, даже надуманными. И в самом деле, где и зачем может понадобиться умение с помощью циркуля и линейки построить правильный семнадцатиугольник или треугольник по трём высотам, или даже просто построить прямую, параллельную данной? Современные технические устройства выполнят эти построения быстрее и точнее, чем любой человек, а также сделают и такие построения, которые невозможны, если использовать только циркуль и линейку.

И всё же без задач на построение геометрия перестанет быть геометрией. Нельзя по-настоящему почувствовать геометрию, подружиться с ней, если «пройти мимо» этих кажущихся сейчас немного странными задач на построение. С задачами на построение вы уже встречались и в младших классах, и в предыдущих параграфах этого учебника. Рассмотрим несколько несложных задач, которые должен уметь решать каждый ученик и которые в дальнейшем послужат «деталями» при более сложных построениях.

Но прежде чем перейти к рассмотрению конкретных задач, напомним о тех условностях, которые связаны с задачами на построение.

Во всех таких задачах, если не сделано оговорок, речь идёт о построении с помощью циркуля и линейки.

С помощью линейки мы можем через любые две точки плоскости провести прямую линию. И ничего более! Математическая линейка односторонняя и не имеет делений.

С помощью циркуля мы можем построить окружность с заданным центром и заданным радиусом. При этом радиус задаётся указанием таких двух точек на плоскости, расстояние между которыми равно радиусу.

Многие геометрические построения можно реализовывать различными путями. Поэтому надо стараться в каждом отдельном случае найти наилучшую последовательность построений. Правда, что означает «наилучшая последовательность», выяснить не всегда легко. Но в некоторых случаях это сделать всё-таки удаётся.

Построение перпендикуляра к прямой

<u>***Задача 1.***</u> *Дана прямая l и точка A вне этой прямой. Постройте прямую, проходящую через A и перпендикулярную l.*

Решение. Для построения перпендикуляра достаточно сначала построить точку A', симметричную A относительно l. Для этого построим две окружности с центрами на l, проходящих через точку A (рис. 161; на этом рисунке и далее числа 1, 2 и 3 указывают последовательность проведения линий). Вторая точка пересечения этих окружностей и даст точку A'. Проведя прямую AA', мы получим искомый перпендикуляр. ▼

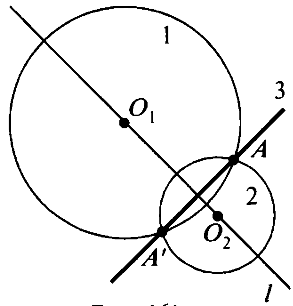


Рис. 161

Выполненное построение, как видите, очень экономично. Потребовалось провести всего две вспомогательные линии — две окружности, третьей линией стал искомый перпендикуляр. Меньшим числом проведённых линий обойтись нельзя.

А как быть, если точка A расположена на прямой l? В этом случае можно было бы построить на прямой l точки B и C, равноудалённые от A, а затем построить серединный перпендикуляр к BC. Но это построение не столь экономно, как в случае, когда точка расположена вне прямой l.

Мы ещё вернёмся к этой задаче, после того как приобретём нужные знания.

Деление отрезка пополам

Безусловно, любой из вас, даже тот, кто не слишком хорошо усвоил свойства геометрических фигур, о которых рассказано в предыдущих главах, справится с задачей деления отрезка пополам. И всё же мы остановимся на этой задаче, поскольку она входит в число основных задач на построение.

Задача 2. *Разделите данный отрезок пополам.* Или, иначе: *дан отрезок AB, постройте середину AB.*

Задача сводится к построению серединного перпендикуляра к AB. Точка его пересечения с AB является искомой.

Решение. Построим две одинаковые пересекающиеся окружности с центрами A и B (рис. 162). Проведём прямую через точки их пересечения и найдём точку пересечения этой прямой с AB. Это и есть искомая середина прямой AB. ▼

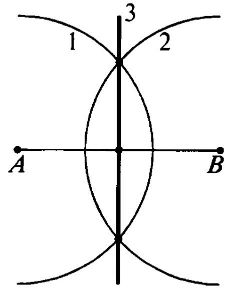


Рис. 162

4.2

Построение треугольника, равного данному, и угла, равного данному

Если на плоскости изображён треугольник, то мы без труда сможем в любом месте плоскости построить треугольник, равный изображённому. Будем исходить из третьего признака равенства треугольников.

Откладываем в нужном месте отрезок, равный одной из сторон треугольника. Затем с центрами в концах этого отрезка строим две окружности, радиусы которых равны двум другим сторонам. Находим точки пересечения построенных окружностей и т. д. (рис. 163).

Точно так же строится треугольник по трём сторонам. Разница лишь в том, что дано не изображение треугольника, а три отрезка, равные его сторонам.

Умея строить треугольник, равный данному, мы легко справимся и с задачей построения многоугольника, равного изображённому, а также любой фигуры, образованной прямыми, лучами и отрезками.

Решим, например, следующую задачу.

Задача 3. *Постройте угол, равный данному.*

Решение. Это построение легко сводится к построению треугольника, равного данному. Выберем на сторонах угла по произвольной точке. Пусть это точки B и C, вершина угла — точка A (рис. 164).

Построив теперь треугольник, равный треугольнику ABC, мы вместе с этим построим и угол, равный данному. ▼

Построение биссектрисы угла

Задача 4. *Постройте биссектрису данного угла.*

Решение. Рассмотрим угол с вершиной A. Проведём окружность произвольного радиуса с центром в точке A. Обозначим че-

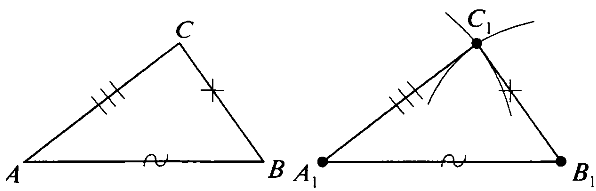


Рис. 163

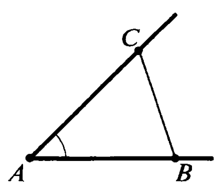


Рис. 164

рез B и C точки пересечения окружности со сторонами угла (рис. 165). Теперь построим две пересекающиеся окружности равного радиуса с центрами в точках B и C. Возьмём точку их пересечения, лежащую внутри угла. Обозначим её буквой D. Треугольники ABD и ACD равны по трём сторонам. Значит, равны углы BAD и CAD. Луч AD является биссектрисой рассматриваемого угла. ▼

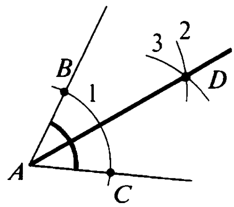


Рис. 165

В отличие от предыдущих задач, решить которые без помощи учебника мог бы любой школьник, задача, о которой сейчас пойдёт речь, является более трудной. Во всяком случае, решение, которое будет предложено, найти не очень легко. Да и обоснование правильности построения не столь очевидно.

Построение прямой, параллельной данной

Задача 5. *Дана прямая l и точка A, расположенная вне этой прямой. Постройте прямую, проходящую через A и параллельную l.*

Решение. Построим окружность, проходящую через точку A и пересекающую прямую l в точках B и C (рис. 166) так, что отрезки AB и AC не равны. (Для этого центр окружности не должен лежать на перпендикуляре к прямой l, проходящем через A.) Построим теперь ещё одну окружность с центром в C и радиусом, равным AB. Среди точек пересечения построенных окружностей есть одна точка, соединив которую с A мы получим прямую, параллельную l (см. рис. 166). Докажем это. Рассмотрим прямую p, проходящую через центр первой из построенных окружностей и перпендикулярную l.

При симметрии относительно прямой p точки B и C переходят одна в другую. Точка A перейдёт в такую точку A' первой окружности, для которой $CA' = BA$. Это означает, что A' — одна из точек пересечения окружностей *1* и *2*. (Заметим, что A' не может совпасть с A. Вот для чего потребовалось условие $AB \neq AC$.) Прямые l и AA' перпендикулярны одной прямой p, а значит, они параллельны.

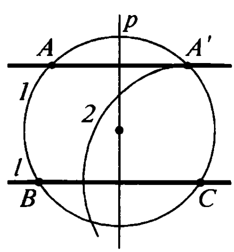


Рис. 166

Итак, мы доказали, что среди точек пересечения окружностей в самом деле имеется такая точка A', что прямая AA' параллельна l. Поскольку две окружности пересекаются не более чем в двух точках, выбрать нужную точку пересечения, как правило, нетрудно. ▼

Построение касательной к окружности

Теперь рассмотрим задачу о построении касательной к окружности. Но на этот раз построение будет не очень экономичным. Можно, конечно, показать и более удобную конструкцию, но для его обоснования нужны геометрические знания, которых у нас пока нет.

Сейчас же мы хотим подчеркнуть, что в принципе задачу о построении касательной вполне можно решить. Кстати, в математике наличие подобной принципиальной возможности очень важно.

Задача 6. *Дана окружность, у которой указан центр, и точка A вне этой окружности. Постройте прямую, проходящую через A и касающуюся данной окружности.*

Решение. Обозначим через O центр окружности, а через B — точку касания касательной с окружностью. Как мы знаем, угол ABO прямой. В прямоугольном треугольнике ABO известен катет BO, равный радиусу окружности, и гипотенуза AO. По этим данным можно построить треугольник, равный треугольнику ABO (рис. 167). (Вспомните специальный признак равенства прямоугольных треугольников.)

Для этого построим две перпендикулярные прямые в любом месте плоскости. На одной из прямых от точки P — точки их пересечения — отложим отрезок PK, равный радиусу BO. Затем проведём окружность радиуса AO с центром в точке K. Обозначим через M точку пересечения этой окружности со второй прямой.

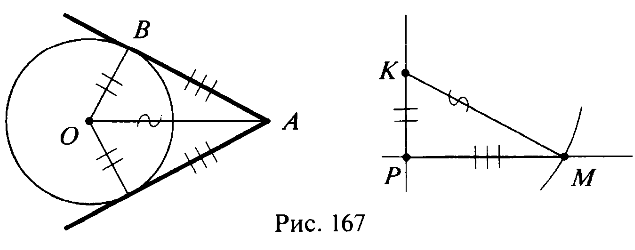


Рис. 167

Получившийся прямоугольный треугольник MPK равен треугольнику ABO. Катет MP равен касательной AB. Теперь строим окружность с центром в точке A и радиусом, равным MP. Точки её пересечения с данной окружностью будут точками касания. Соединяя их с A, получим искомые прямые. ▼

Из наших рассуждений следует, что через произвольную точку, расположенную вне окружности, можно провести ровно две прямые, касающиеся этой окружности. При этом отрезки касательных от данной точки до точек касания равны. Последнее коротко можно выразить следующим образом: ***касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны***. Это надо запомнить.

▲■● Задачи, задания, вопросы

391. Постройте угол, равный: а) 45°; б) 22°30′.

392. Постройте прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 см. Чему равны два острых угла (измерьте их с помощью транспортира)?

393. На плоскости изображён угол величиной 44°. Как построить угол в 1°?

394. Возьмите три произвольных отрезка. Постройте четырёхугольник $ABCD$, в котором углы при вершинах A и B прямые, а стороны DA, AB и BC равны заданным отрезкам. Всегда ли такой четырёхугольник существует? Сколько существует таких четырёхугольников?

395. Возьмите три произвольных отрезка. Постройте четырёхугольник $ABCD$, в котором углы при вершинах A и B прямые, а стороны AB, BC и CD равны заданным отрезкам. Всегда ли такой четырёхугольник существует? Сколько существует таких четырёхугольников?

396. Постройте отрезок, симметричный данному относительно заданной прямой.

397. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведённой к третьей стороне.

398(в). Постройте какую-нибудь окружность, касающуюся сторон данного угла.

399(вт). Постройте окружность данного радиуса, касающуюся двух данных окружностей.

400(в). Разделите данную дугу окружности на две равные дуги.

401(в). Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.

402(т). Как провести прямую через две точки, если имеются циркуль и линейка, длина которой меньше расстояния между данными точками?

403(т). На плоскости имеются три прямые: l, p и q. Постройте на прямых l и p точки A и B такие, чтобы отрезок AB был перпендикулярен прямой q и делился этой прямой пополам.

404(т). Через точку пересечения двух окружностей проведите прямую, образующую равные хорды при пересечении с этими окружностями.

405. Разделите пополам данный отрезок, если есть линейка и сломанный циркуль, позволяющий изображать окружность только одного радиуса, причём этот радиус меньше половины отрезка.

406. Даны окружность и прямая. Найдите на прямой все точки, касательные из которых к окружности равны данному отрезку.

407(п). На плоскости изображена окружность, центр которой не указан. Постройте центр этой окружности.

408(п). Имеется модель треугольной пирамиды, на гранях которой можно делать геометрические построения. Решите следующие задачи.

а) В двух гранях пирамиды отмечено по одной точке. Постройте на листе бумаги отрезок, равный отрезку прямой, соединяющей отмеченные точки.

б) В одной из граней проведены три прямые, пересекающиеся за пределами этой грани. При продолжении эти прямые образуют треугольник. Постройте на листе бумаги треугольник, который равен треугольнику, образованному этими прямыми.

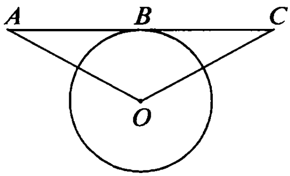


Рис. 168

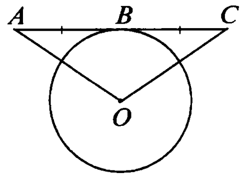


Рис. 169

409(н). На рисунке 168 AC — касательная, B — точка касания, $AO = OC$. Докажите, что $AB = BC$.

410(н). На рисунке 169 AC — касательная, B — точка касания, $AB = BC$. Докажите, что $AO = OC$.

411(н). На рисунке 170 AB и CD — касательные, M и N — точки касания. Докажите, что $AB = CD$.

412(н). На рисунке 171 AA_1 и BB_1 — касательные, A, A_1, B, B_1 — точки касания. Докажите, что $AA_1 = BB_1$ и точка K лежит на отрезке OO_1.

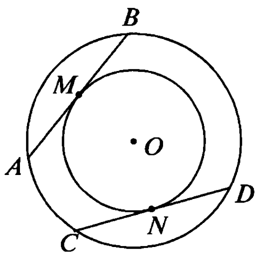


Рис. 170

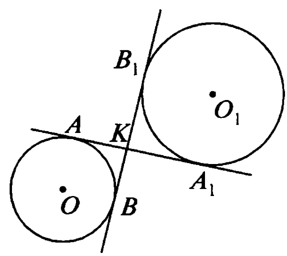


Рис. 171

4.3. Кратчайшие пути на плоскости

Как мы знаем, чтобы попасть из одной точки плоскости в другую кратчайшим путём, надо двигаться по прямой линии. Это простейшая задача на отыскание кратчайшего пути. Существует ряд гораздо более сложных, интересных и важных для практики задач подобного рода. Например, соединить несколько городов дорогами так, чтобы можно было проехать в каждый город из любого другого, а общая длина построенных дорог была наименьшей.

4.3

В этом параграфе мы рассмотрим классическую геометрическую задачу такого рода, которой очень легко придать занимательный вид. Но мы этого делать не будем и ограничимся сухой математической формулировкой.

Задача. *Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. Найдите на прямой l точку M такую, чтобы длина двузвенной ломаной AMB была наименьшей.*

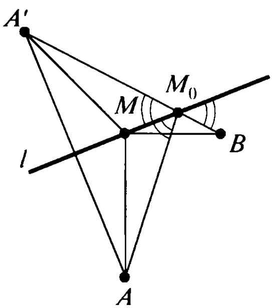


Рис. 172

Решение задачи затрудняет то, что точки A и B расположены по одну сторону от l. Вот если бы... (впрочем, не будем пытаться показать, каким образом смутная догадка может оформиться в настоящее решение). Рассмотрим само решение.

Решение. Возьмём любую точку M на прямой l. Построим точку A', симметричную A относительно l (рис. 172). Поскольку $AM = A'M$, длина ломаной AMB всегда равна длине ломаной $A'MB$. Но последняя будет наименьшей, когда она превращается в отрезок прямой. Значит, искомой точкой на l будет точка, в которой её пересечёт отрезок $A'B$. Обозначим её через M_0.

Из соответствующих свойств углов следует, что для найденной точки M_0 лучи M_0A и M_0B образуют с l равные углы. Именно по такому закону происходит отражение света, т. е. если бы мы смогли направить луч света из A так, чтобы он, отразившись от прямой l, попал в B, то этот луч реализовал бы кратчайший путь. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

413(п). На реке расположены два острова A и B. Туристы, отправившись на байдарке от острова A, хотят попасть на остров B, побывав поочерёдно на левом и правом берегах реки. Как они должны проложить свой маршрут, чтобы весь путь имел наименьшую длину? (Берега реки — прямые линии, острова — точки.)

414(п). Внутри острого угла отмечена точка A. Найдите на сторонах угла точки B и C такие, чтобы периметр треугольника ABC был наименьшим.

415(п). Дана треугольная пирамида $ABCD$. Найдите на ребре CD точку M такую, чтобы длина ломаной AMB была наименьшей.

4.4. О решении геометрических задач

В предыдущих главах и параграфах мы рассмотрели много геометрических задач. Некоторые из них вам показались интересными, другие — не очень, одни были достаточно лёгкими, а другие — весьма трудными. Нам кажется, что многие школьники хотели бы научиться решать интересные и трудные задачи. Но как это сделать? Из чего складывается умение решать геометрические задачи?

Конечно, необходимо хорошо знать и понимать теорию, освоить понятия, усвоить теоремы, разобраться в доказательствах и примерах.

Надо учиться делать хорошие, большие и красивые чертежи, а иногда не чертежи, а рисунки. Чертежи-рисунки, если они выполнены грамотно, могут сильно облегчить поиск решения, работу над ним.

Следует по капле собирать геометрические факты, методы решения задач, отдельные приёмы, обращая особое внимание на задачи, отмеченные буквой (п) (полезные). До некоторых методов и приёмов самостоятельно додуматься не так-то просто. Но разобравшись в том, как этот метод «работает» на примере одной или нескольких задач, вы в дальнейшем сможете его самостоятельно применять.

Например, в предыдущем параграфе было разобрано решение одной красивой геометрической задачи о нахождении кратчайшего пути между двумя точками с «посещением» заданной прямой. После этого задачи, приведённые в конце параграфа, возможно, показались вам не такими уж трудными. Ведь в них (речь идёт о двух первых задачах) надо было лишь дважды применить приём, использовавшийся при решении основной задачи.

4.4

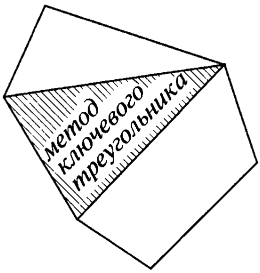


Рис. 173

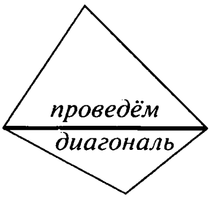


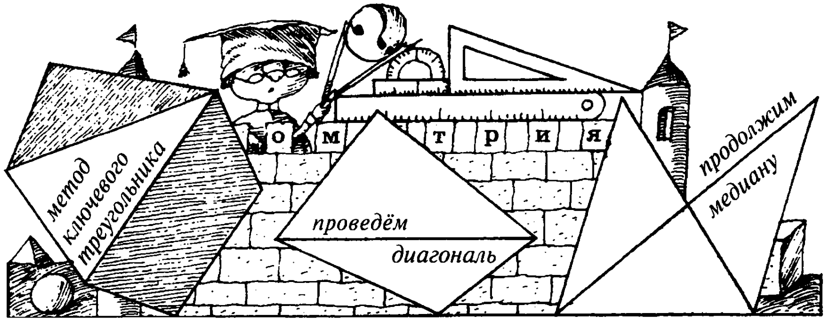
Рис. 174

Большинство доказанных до сих пор теорем относится к геометрии треугольника. Что не случайно. Ведь треугольник — это простейший из многоугольников, простейшая фигура. Решение очень многих задач сводится к рассмотрению одного или нескольких треугольников. Можно даже говорить о ***методе «ключевого треугольника»***. Суть его состоит в том, что в заданной фигуре надо найти треугольник (или треугольники), к изучению которого (которых) сводится решение задачи (рис. 173).

Иногда для этой цели надо сначала провести какое-нибудь дополнительное построение. Например, в четырёхугольнике провести диагональ (рис. 174) или концы хорды окружности соединить с её центром.

Следует запомнить некоторые построения, часто используемые в сходных ситуациях. Пока хотелось бы обратить ваше внимание на одно дополнительное построение, касающееся медианы треугольника. Если в условии задачи фигурирует медиана, то очень часто помочь решению может продолжение медианы на расстояние, ей равное.

Теперь немного поговорим об одном, пожалуй, самом распространённом в школьной практике виде задач, — о задачах на вычисление. Результатом решения этих задач является ответ. Хотя ни в коем случае нельзя всё сводить к поиску ответа.



«Ведь ответ-то правильный», — пытается защитить своё решение ученик от «придирок» учителя. Таким ученикам стоит запомнить следующий пример. Возьмём дробь $\frac{19}{95}$. Сократим на 9(??): $\frac{19}{95} = \frac{1\cancel{9}}{\cancel{9}5} = \frac{1}{5}$. Ответ правильный.

Однако мы немного отвлеклись. В геометрических задачах на вычисление есть много общего с привычными арифметическими и алгебраическими задачами.

В некоторых случаях решить их можно, последовательно, шаг за шагом вычисляя нужные величины, пока не будет пройден путь от того, что дано, к тому, что нужно найти. В качестве примера рассмотрим задачу, аналогичную задаче 297 из § 3.2.

Задача 1. *В треугольнике ABC известны стороны* $AB = 8$, $BC = 9$, $CA = 10$. *На стороне AC взята точка M так, что* $AM = 4$. *Прямая, проходящая через M перпендикулярно биссектрисе угла C, пересекает прямую BC в точке P. Прямая, проходящая через P перпендикулярно биссектрисе угла B, пересекает AB в точке Q. И наконец, прямая, проходящая через Q перпендикулярно биссектрисе угла A, пересекает AC в точке K. Найдите длину отрезка MK.*

Решение. Решение этой задачи состоит из нескольких одинаковых шагов (рис. 175).

1) $MC = AC - AM = 10 - 4 = 6$. Треугольник MPC равнобедренный с основанием MP, поскольку биссектриса, выходящая из угла C, перпендикулярна MP. Значит, $PC = MC = 6$.

2) Точно так же находим: $BP = 3$, $BQ = BP = 3$.

3) $AQ = 5$, $AK = AQ = 5$.

Значит, длина отрезка MK равна 1. ▼

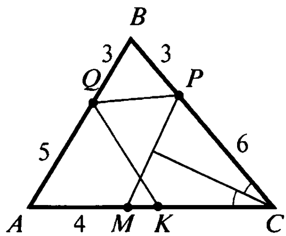


Рис. 175

Но не всегда удастся так последовательно, поэтапно получить ответ. В некоторых случаях приходится прибегать к составлению уравнений.

Рассмотрим следующую задачу, аналогичную задаче 299 из § 3.2.

Задача 2. *Возьмём треугольник ABC со сторонами такими же, как и в предыдущей задаче. На сторонах AC, CB и BA взяты соответственно точки E, D и F так, что ED перпендикулярна биссектрисе угла C, DF перпендикулярна биссектрисе угла B и, наконец, FE перпендикулярна биссектрисе угла A. На какие отрезки точка E делит сторону AC?*

Решение. Обозначим EC через x (рис. 176). Рассуждая так же, как в предыдущей задаче, последовательно получаем: $DC = x$, $BD = 9 - x$, $BF = 9 - x$, $AF = 8 - (9 - x) = x - 1$, $AE = AF = x - 1$. Но $AE + EC = 10$, или $(x - 1) + x = 10$, откуда $x = 5{,}5$. Точка E делит сторону AC на отрезки, равные 4,5 и 5,5. ▼

Важной особенностью многих интересных геометрических задач является их многовариантность. Условие задачи может быть реализовано несколькими различными способами. При решении все эти варианты необходимо рассмотреть, ничего не прозевать. Это в равной степени относится ко всем видам геометрических задач, а мы рассмотрим пример всё на ту же тему (задачу 365 из § 3.3 с изменёнными числовыми данными).

Задача 3. *Найдите радиусы трёх попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами* 8, 9 *и* 10.

Решение. Как видим, рассматривается всё тот же треугольник. Но на этом сходство не кончается. Воспользуемся теми же обозначениями, что и в задаче 2 (рис. 177). В силу равенства $CE = CD$ окружность с центром в C и радиусом CE проходит и через D. Точно так же можно построить окружности с центрами в A и B, проходящие соответственно через E и F, D и F. Эти три окружности будут касаться друг друга внешним образом. Значит, задача 2 даёт решение и этой задачи? Да, но не всё. Ведь окружности могут касаться и внутренним образом.

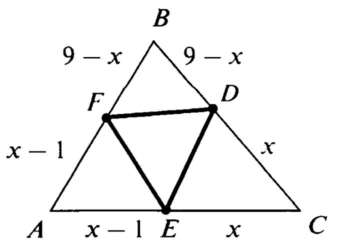


Рис. 176

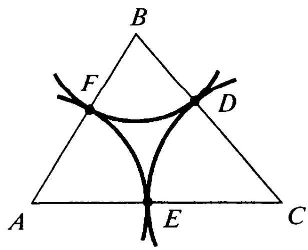


Рис. 177

Возможны ещё три(!) случая. Например, окружность с центром A содержит две другие (рис. 178). Если радиус окружности с центром A равен x, то радиусы окружностей с центрами B и C будут соответственно равны $x - 8$ и $x - 10$. Но сумма радиусов двух меньших окружностей равна $BC = 9$. Получаем уравнение $(x - 8) + (x - 10) = 9$, откуда $x = 13{,}5$.

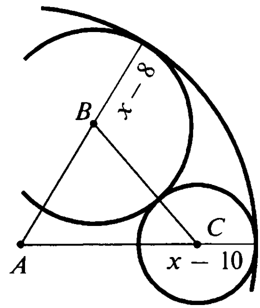


Рис. 178

Радиусы окружностей в этом случае равны 13,5; 5,5; 3,5. Предлагаем вам закончить решение самостоятельно. Мы же приведём полный ответ на вопрос задачи: (4,5; 3,5; 5,5); (13,5; 5,5; 3,5); (5,5; 13,5; 4,5); (3,5; 4,5; 13,5). ▼

Заканчивая этот параграф, мы хотели бы задать ещё один вопрос. Какая из трёх рассмотренных задач самая трудная — это ясно. А какая самая интересная по решению и красивая по формулировке?

▲■● Задачи, задания, вопросы

416. Точки A, B, C и D в указанной последовательности расположены на прямой, $AB = 2{,}3$, $BC = 3{,}5$, $CD = 1{,}3$. Точка M лежит на отрезке BC, причём $BM : MC = 3 : 4$. В каком отношении точка M делит отрезок AD?

417. Внутри отрезка AC расположена точка B. Известно, что $AB = 1{,}2$. Отрезки AC и BC являются диаметрами окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

418. Точки K, P и M являются серединами отрезков AB, BC и AC. В каком отношении точка M делит отрезок KP, если $AB = 1$, $BC = 3$, $AC = 4$?

419(т). На прямой расположены точки A, B, C и D, причём $AB = 2$, $CD = 3$. Отрезки AC и BD являются диаметрами двух окружностей. Найдите расстояние между центрами этих окружностей.

420(т). На прямой расположены точки A, B, C и D так, что $AB = 3$, $BC = 1$, $CD = 2$, $AD = 6$. На каком расстоянии от A может находиться такая точка M этой же прямой, для которой $AM : MD = BM : MC$?

421. Чему равен угол, если известно, что биссектриса смежного с ним угла образует угол $20°$ с одной из сторон этого угла?

422. Через точку на прямой a проведены прямые p и q. Известно, что угол между прямыми a и p равен $20°$, а угол между прямыми a и q равен $80°$. Чему равен угол между прямыми p и q?

423(т). Через одну точку плоскости проведены три прямые, разбивающие плоскость на шесть углов. Известно, что средний по величине угол равен среднему арифметическому наибольшего и наименьшего из образовавшихся углов. Найдите средний по величине угол.

424(т). Две стороны четырёхугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырёхугольника.

425(т). В треугольнике ABC сторона AB равна 1, а длина стороны BC выражается целым числом. Биссектриса угла A перпендикулярна медиане, выходящей из вершины B. Найдите периметр треугольника.

426(т). Через вершины A и C треугольника ABC проведены прямые, перпендикулярные биссектрисе угла ABC, пересекающие прямые CB и BA в точках K и M соответственно. Найдите AB, если $BM = 8$, $KC = 1$.

427(т). В вершинах A, B, C и D четырёхугольника $ABCD$ находятся центры четырёх окружностей. Любые две окружности, центры которых расположены в соседних вершинах, касаются друг друга внешним образом. Известны три стороны четырёхугольника: $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 5$. Найдите сторону AD.

428(т). Стороны пятиугольника равны (в порядке обхода) 7, 10, 12, 8 и 9. В вершинах пятиугольника расположены центры пяти окружностей, причём любые две соседние окружности касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус наименьшей окружности.

429(т). Окружность касается сторон угла с вершиной A. Расстояния от A до точек касания равны 5. К окружности проведена касательная, пересекающая стороны угла в точках B и C. Известно, что центр окружности расположен вне треугольника ABC. Найдите периметр треугольника ABC.

430(т). В пирамиде $ABCD$ известны рёбра: $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 10$, $AD = 8$. В вершинах пирамиды расположены центры шаров, касающихся друг друга внешним образом. Найдите рёбра BD и CD.

4.5. Доказательства в геометрии

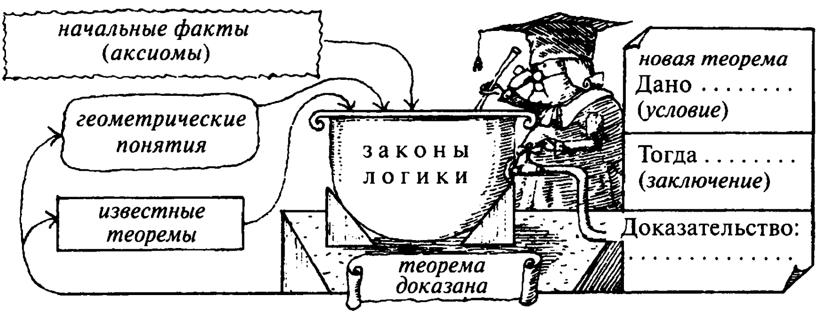
Прежде чем продолжать строить геометрическую теорию, давайте подведём первые итоги и обсудим некоторые вопросы, которые, возможно, возникли у тех, кто искренне хотел лучше узнать и понять геометрию. А именно: попробуем объяснить, как и зачем доказывают теоремы. Мы уже начинали обсуждать это в параграфе 1.6, попробуем ответить на этот вопрос подробнее.

Теоремы и доказательства

В математике, в отличие от любой другой науки, есть такие понятия, как ***теорема*** и ***доказательство***. Да и сама математика стала наукой лишь с появлением в ней теорем и доказательств.

Арифметические задачи и геометрические формулы можно встретить уже в египетских папирусах, написанных в третьем тысячелетии до нашей эры. Но в этих старинных текстах не было самого главного — доказательств. А без доказательств нет и самой математики.

Когда же появились первые доказательства? С поразительным единодушием историки науки присваивают звание пер-



воматематика Фалесу Милетскому (625—527 гг. до н. э.), знаменитому мудрецу из древнегреческого города Милет. Впрочем, лучше назвать Фалеса первогеометром, ведь все его математические достижения связаны с геометрией. (Здесь, наверное, стоит снова сказать, что само понятие «математика» как название науки появилось лишь в начале XIX в. До этого учёные, занимавшиеся в нашем понимании математикой, назывались геометрами.) Считают, что первые геометрические теоремы доказаны именно Фалесом. Среди них уже известные вам теоремы о вертикальных углах и свойстве равнобедренного треугольника (равенство углов при основании). В следующем учебном году вы познакомитесь ещё с одной теоремой, которая традиционно называется теоремой Фалеса.

Так что же это такое — теорема?

Под *теоремой* в математике понимают любое математическое утверждение, справедливость которого устанавливается с помощью *доказательства.*

Довольно часто в теореме можно чётко выделить две части: то, что дано, и то, что требуется доказать. То, что дано, называют ***условием*** теоремы. То, что требуется доказать, — ***утверждением*** теоремы или ***заключением***.

Математическое доказательство проводится по чётко определённым правилам. Исходя из ранее известных фактов и теорем, в соответствии с законами логики устанавливается справедливость новой теоремы.

Правда, в начале этого учебника мы сформулировали некоторые утверждения, которые были приняты в качестве верных, истинных без доказательств. Эти факты мы как бы объявили очевидными. Математики называют принимаемые без доказательств утверждения ***аксиомами***. Мы же назвали их основными

свойствами плоскости (о том, почему мы так делаем, мы немного говорили в параграфе 1.6).

И теоремы, и доказательства появились в самом начале второй главы. С этого же момента могли возникнуть различные мнения: одни, наверное, считают, что некоторые из доказанных теорем вполне очевидны и в доказательствах не нуждаются. Просто математики играют в какую-то свою игру и навязывают остальным её правила.

Надо сказать, что у тех, кто придерживается подобного мнения, есть достойные союзники. Известный персидский поэт и математик Омар Хайям, живший в XI в., а в те времена сочетание поэзии и математики было явлением типичным, заметил, что Евклид в своих сочинениях доказал многое из того, что не нуждалось в доказательстве. (Заметим, что геометрию, которую мы изучаем, математики называют евклидовой.)

Другие, наоборот, могут быть недовольны уровнем строгости некоторых наших рассуждений. Что значит «наложим» один треугольник на другой? Или почему любая прямая пересекает треугольник не более чем в двух точках? У сторонников этого взгляда также немало единомышленников, особенно среди профессиональных математиков.

Мы не будем сейчас выяснять, кто прав. Не следует даже такой вопрос задавать. Ведь вопросы типа «Кто лучше? Кто хуже?» — большей частью не имеют смысла. Но всё же стоит заметить, что если бы человек время от времени не сомневался в очевидных фактах, то мы бы до сих пор считали, что Земля плоская и неподвижная, а Солнце вращается вокруг неё.

К этим проблемам мы ещё вернёмся в конце курса, а сейчас попробуем разобраться в тех методах доказательства, которыми уже пользовались в предыдущих главах. Ведь мы начали доказывать без всяких объяснений, опираясь лишь на здравый смысл.

Для этого поступим очень просто: просмотрим уже известные вам теоремы и выясним суть методов, используемых в их доказательствах.

Метод от противного

Теорема 2.1 (с. 40). Мы доказали эту теорему с помощью ***метода от противного***. Суть его отражена в самом названии. Вначале мы предполагаем, что утверждение теоремы неверно, после чего с помощью тех или иных рассуждений получаем противоречие либо с исходным предположением, либо с условием теоремы, либо с известным математическим фактом. По-латыни этот метод называется reductio ad absurdum, что означает «приведение к абсурду».

Не следует думать, что метод от противного такой уж специальный математический метод. Как и в любом математическом методе, в его основе лежит элементарный здравый смысл. Нередко к этому методу в своей работе прибегает следователь. Чтобы установить, кто мог совершить преступление, часто сначала надо установить, кто не мог его совершить.

Метод от противного очень любил использовать Евклид. И всё же математики по-разному относятся к этому методу. Некоторые считают его одним из наиболее мощных орудий математики. Другие сравнивают с приёмом политикана, который поддерживает своего кандидата тем, что опорочивает репутацию кандидата другой партии.

Теоремы как следствие определений

Теорема 2.2 (с. 49) в особых комментариях не нуждается. Всё основано на элементарном рассуждении: если от равных величин отнять поровну, то поровну и останется.

Теорема 2.3 (с. 49) непосредственно следует из свойств двух понятий: *осевая симметрия* и *перпендикулярность*. Подобного рода теоремы весьма часто встречаются в математике. Обычно они не очень сложны. Здесь самое главное — чётко понимать смысл слов. (В данном случае *симметрия* и *перпендикулярность*.)

Теорема 2.3 — вспомогательная. С её помощью мы доказываем важную теорему 2.4.

Перебор вариантов

Теорема 2.4 (с. 50). На её доказательство стоит обратить внимание. Во-первых, в этом доказательстве мы рассматриваем два случая возможного расположения точки A. Необходимость рассматривать несколько случаев — типичное явление для геометрических теорем и задач. Правда, первый случай очень простой, но его необходимо учитывать, иначе доказательство будет неполным.

Метод симметрии при доказательстве

Во-вторых, в основном случае мы прибегаем к помощи симметрии, хотя в условии теоремы о ней не упоминается. Симметрия здесь является методом доказательства.

Рассмотрев симметричную точку, мы имеем возможность воспользоваться теоремой 2.3 и первым основным свойством плоскости.

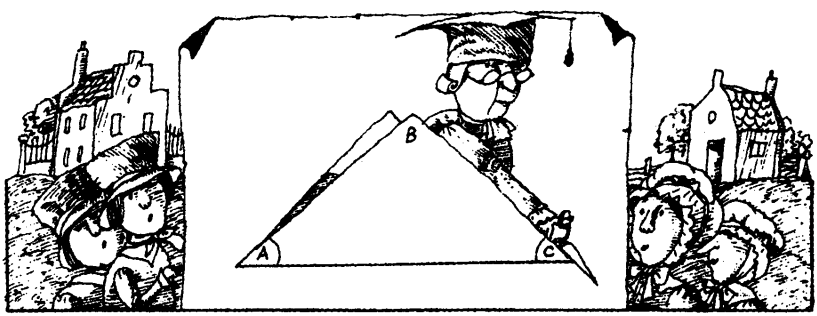
Теорема 2.5 (с. 60) является очень простой и очевидной теоремой, полностью следующей из определения окружности и свойств симметрии.

Теорема 3.1 (с. 70) о свойствах равнобедренного треугольника. Здесь вновь используется ***метод симметрии*** при доказательстве.

Интересно, что, по существу, точно так же доказывал теорему о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника Льюис Кэрролл — замечательный сказочник и неистощимый выдумщик. Его сказки про девочку Алису и её приключения в Стране Чудес и в Зазеркалье известны во всём мире. Однако не все знают, что Льюис Кэрролл — это псевдоним, а настоящее имя автора этих книг Чарлз Латуидж Доджсон и что был он профессором математики в Оксфорде. Главным трудом своей жизни он считал «Дополнение» к своей книге «Евклид и его современные соперники».

Доказательство Льюиса Кэрролла проводится с помощью... ножниц. Допустим, что на листе бумаги нарисован равнобедренный треугольник ABC, причём $AB = BC$. Вырежем ножницами этот треугольник. Перевернём и попробуем заткнуть образовавшуюся дыру. Это нам удастся, не так ли? Сторона BC пойдёт по бывшей стороне BA, а BA — по BC. Значит, все вершины исходного и перевёрнутого треугольника совпадут, вершина C займёт место вершины A. Таким образом, угол C равен углу A. Теорема доказана.

Понятно, что рассмотренный нами «метод симметрии» и «метод ножниц» Льюиса Кэрролла — это, по существу, одно и то же.



4.5

Из свойств равнобедренного треугольника сразу следуют некоторые свойства окружности. Ведь любой треугольник, у которого одна вершина в центре окружности, а две другие лежат на окружности, является равнобедренным. Именно такой подход лежит в основе доказательства **теоремы 3.2** (с. 71) и **теоремы 3.3** (с. 71).

В теореме 3.3 следует обратить внимание на рассмотренные ниже два момента.

Некоторые тонкости

Рассматривая случай двух пересекающихся окружностей, мы не проводим сразу прямую, соединяющую их центры, а опускаем перпендикуляры из центров на общую хорду. На основании свойства равнобедренного треугольника делаем вывод, что эти перпендикуляры сливаются в одну прямую.

И ещё, наше рассуждение начинается с того, что мы фиксируем одну из точек пересечения окружностей. После чего доказываем, что к ней можно добавить не более одной точки пересечения.

Далее мы рассматриваем три признака равенства треугольников. Никаких математических тонкостей в их доказательстве нет. Всё основывается на здравом смысле.

Контрпример

А вот задача, предшествующая **теореме 3.4** (с. 80), представляет интерес. В ней рассматриваются треугольники с двумя парами равных сторон и соответствующей парой равных углов (не между сторонами). Обязательно ли такие треугольники являются равными?

Здесь возникает более общий вопрос. Каким образом можно опровергнуть неверное утверждение, теорему? Одним из наиболее распространённых способов является построение опровергающего примера, или, как говорят математики, ***контрпримера***.

Способ опровержения с помощью контрпримера применяется не только в математике. Его часто используют в самых различных науках и даже в обычной жизни. Если кто-либо утверждает, что птицы отличаются от других животных наличием крыльев, то можно в качестве контрпримера указать на бескрылую птицу киви, живущую в Новой Зеландии, или же на известных всем летучих мышей.

Так и в нашей задаче приводится пример, показывающий, что два треугольника, у которых есть две пары равных сторон и пара соответствующих равных углов, могут и не быть равными.

Однако этот пример оказывается невозможным, если рассматриваемый угол не острый. В результате появляется теорема 3.4 и специальный признак равенства прямоугольных треугольников как её частный случай.

Прямая и обратная теоремы

В математике многие теоремы «ходят парами». Очень часто встречаются пары, состоящие из ***прямой*** и ***обратной*** теорем.

Такую пару образуют, например, теорема о свойствах равнобедренного треугольника и теорема о признаках равнобедренного треугольника. Если же на эти теоремы посмотреть более внимательно, то мы увидим здесь четыре пары теорем. Вот одна из этих пар.

<u>Прямая теорема</u>

У равнобедренного треугольника углы при основании равны.

<u>Обратная теорема</u>

Если в треугольнике два угла равны, то этот треугольник равнобедренный. Его основанием является сторона, к которой прилежат равные углы.

То, что в прямой теореме служит условием (треугольник является равнобедренным), в обратной становится заключением.

А то, что в прямой теореме требовалось доказать (равны углы при основании), в обратной становится условием.

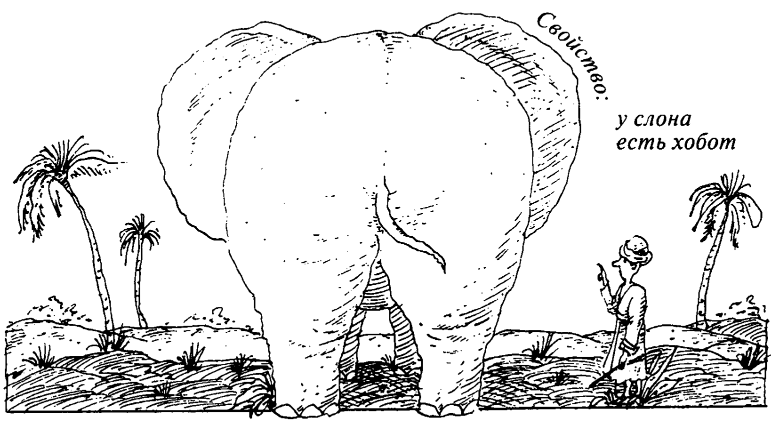
Заметим сразу, что справедливость прямой теоремы вовсе не означает справедливость обратной теоремы. Вот простейший пример.

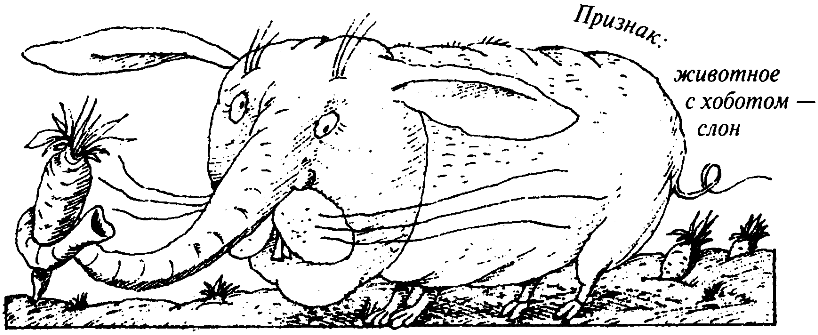
Прямая теорема. *Вертикальные углы равны.* Условие — даны вертикальные углы. Требуется доказать, что они равны. **Обратная теорема** выглядит просто нелепо: если углы равны, то они вертикальные(?). Однако если её немного «подправить», то можно получить абсолютно верное, хотя и не очень интересное утверждение: ***если два угла равны, то их можно расположить так, что они образуют пару вертикальных углов.***

Свойства и признаки

Но вернёмся к паре теорем о свойствах и признаках равнобедренного треугольника. На самом деле нечто похожее есть в любой науке, хотя далеко не всегда соответствующие свойства и признаки приобретают такой же строгий смысл, как теорема в математике.

Возьмём, например, зоологию. У каждого вида животных имеются и свои свойства, и свои признаки, по которым этот вид можно опознать. Хотя, конечно, редко бывает так, чтобы свойство являлось также и признаком. В качестве примера можно взять разве что слона. У слона имеется хобот (это свойство). Животное, имеющее хобот, является слоном (это признак).





Правда, хобот имеется и у некоторых пресмыкающихся (мягких черепах) и других животных, но это совсем «не тот» хобот.

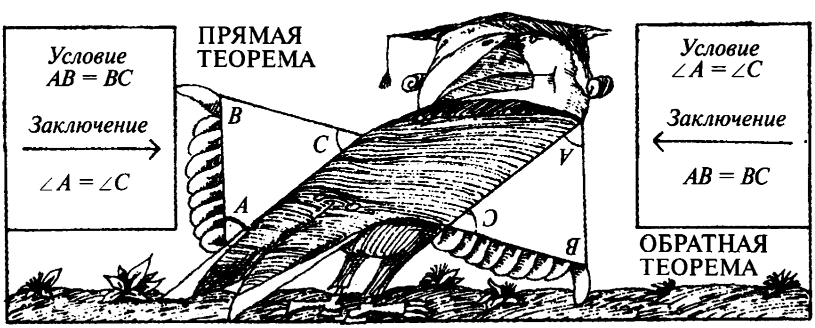
Два приёма в доказательстве одной теоремы

Теорема 3.5 (*о внешнем угле треугольника*) (с. 92). На что здесь следует обратить внимание?

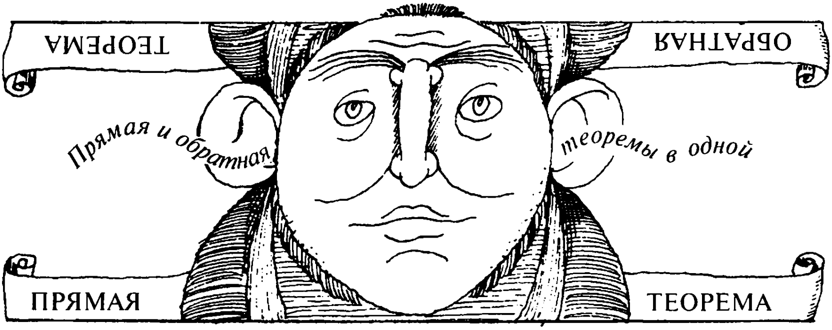
В геометрии, чтобы доказать, что одна величина меньше другой, часто прибегают к такому приёму: рассматриваемые фигуры располагают так, чтобы одна фигура оказалась внутри другой. В данной теореме речь идёт об углах. Даётся способ, с помощью которого внутренний угол треугольника располагают внутри внешнего. Этот способ, кстати, основан на известном нам приёме — продолжении медианы.

Прямая и обратная теоремы в одной

Теорема о внешнем угле треугольника позволяет сделать ещё несколько шагов в развитии геометрической теории.



4.5



Теорема 3.6 (с. 93). Если вы вдумаетесь в её формулировку, то заметите, что в ней заключены сразу две теоремы — прямая и обратная. В прямой мы идём от сторон к углам. В обратной, как и положено, идём в обратном направлении.

Прямую теорему мы сводим к предыдущей теореме о внешнем угле. Обратную теорему доказываем «методом от противного». Использование «метода от противного» при доказательстве обратных теорем — типичное явление.

Теорема как частный случай другой теоремы

Частным случаем теоремы 3.6 является **теорема 3.7** (с. 93), в которой сформулировано одно очень важное свойство перпендикуляра. А применяя результат теоремы 3.7 к окружности и касательной, мы получаем также важное свойство касательной.

Видите, сколько следствий мы получили из одной теоремы о внешнем угле, хотя сама она, как было сказано, скоро будет заменена более сильным утверждением.

Итак, мы закончили краткий обзор теорем, доказанных в предыдущих главах, методов рассуждений и доказательств, использовавшихся в этих теоремах.

А сейчас «докажем» две «теоремы». Эти «доказательства» должны предостеречь вас от некоторых опасностей, таящихся на пути изучения и овладения геометрией.

Внимание! Чертёж!

Опасность первая: опора на неверный чертёж.

(??)*Теорема.*

***В прямоугольном треугольнике гипотенуза равна катету.* (?)**

(??)*«Доказательство»*[1]. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C. Докажем, что гипотенуза AB равна катету AC. Проведём биссектрису угла A и серединный перпендикуляр к BC (рис. 179). Обозначим через K точку их пересечения. Опустим из K перпендикуляры KM и KP на катет AC и гипотенузу AB.

Согласно свойству биссектрисы точка K равноудалена от AB и AC, т. е. $KM = KP$. Прямоугольные треугольники AKM и AKP равны: гипотенуза AK у них общая и $KM = KP$. Значит, $AM = AP$.

Треугольники CKM и BKP также равные прямоугольные: $CK = BK$, поскольку K лежит на серединном перпендикуляре к BC, и $KM = KP$. Значит, $CM = BP$.

В результате получаем $AC = AM + CM = AP + BP = AB$. Равенство доказано(?).

В чём дело? Вы скажете, что точка K должна быть вне треугольника ABC. Пожалуйста! На рисунке 180 проиллюстрировано «доказательство»(?) для этого случая.

Другое возражение кажется не очень разумным: как же мы доказываем равенство треугольников, когда совершенно очевидно, что они не могут быть равными. Один треугольник явно «меньше» другого, это хорошо видно на рисунке. Кроме того, прямая AK не похожа на биссектрису угла BAC. Сделаем аккуратный чертёж (рис. 181).

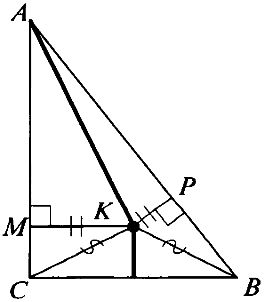


Рис. 179

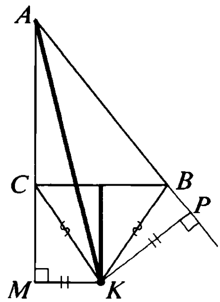


Рис. 180

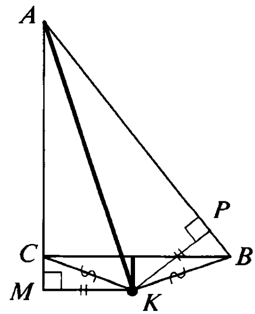


Рис. 181

[1] На самом деле теорема **неверна** и «доказательство» содержит ошибку!

4.5

Теперь всё встало на свои места. Треугольники CKM и BKP в самом деле равны. Но отрезки CM и BP располагаются по разные стороны от BC. ▼

Короче говоря, верь глазам своим!

Четвёртый признак равенства треугольников?

Вторая опасность: что-то прозевать. «Докажем» ещё одно утверждение.

(??) *Теорема.*

Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $ABC = A_1B_1C_1$, то такие треугольники равны.

Если вы помните задачу (с. 79), предшествовавшую теореме 3.4, то должны удивиться. Ведь в этой задаче показано, что такие треугольники вовсе не обязательно равны. И всё же...

(??)*«Доказательство».* Построим треугольник AB_2C, равный треугольнику $A_1B_1C_1$, причём расположим точку B_2 по другую сторону от AC, чем точка B. Имеем $AB_2 = A_1B_1 = AB$, $CB_2 = C_1B_1$ (рис. 182).

В треугольнике BAB_2 стороны AB и AB_2 равны. Следовательно, равны и углы ABB_2 и AB_2B. Но так как по условию углы ABC и AB_2C равны ($\angle AB_2C = \angle A_1B_1C_1 = \angle ABC$), то равными оказываются и углы CBB_2 и CB_2B. Значит, треугольник CBB_2 равнобедренный и $CB_2 = CB$. Теперь треугольники

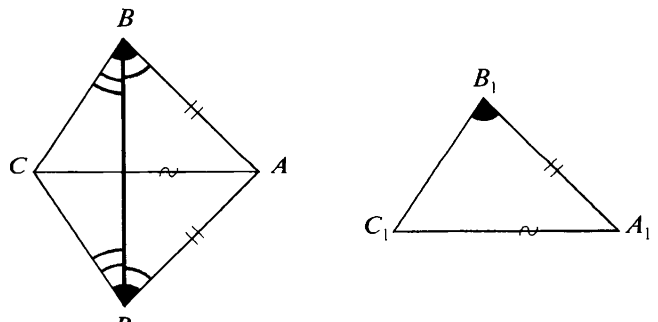


Рис. 182

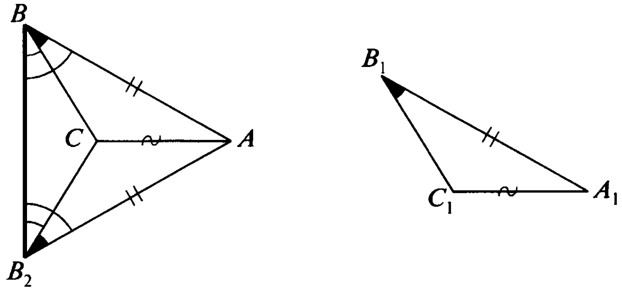


Рис. 183

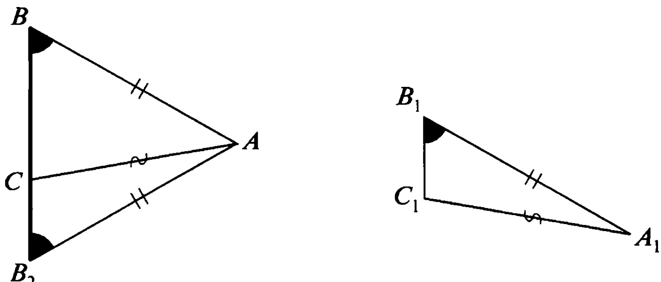


Рис. 184

ABC и AB_2C оказываются равными по третьему признаку равенства треугольников, т. е. треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны.

Практически ничего не меняется, если точки A и C оказываются по одну сторону от прямой BB_2 (рис. 183).

А здесь в чём дело? Оказывается, упущен один, на первый взгляд малозначительный, случай, когда точки B, B_2 и C оказываются на одной прямой (рис. 184). Именно в этом случае наши рассуждения и «не проходят». Углы CBB_2 и CB_2B обязательно равны, но они могут оказаться равными нулю. В этом случае «не работает» признак равнобедренного треугольника. (?)

Вывод: надо быть внимательным и бдительным. И это относится не только к случаям, подобным только что рассмотренному. Внимательным и бдительным надо быть постоянно. Все опасности заранее предусмотреть нельзя, и не только в геометрии.

Козьма Прутков в своё время сказал коротко и точно: **«Бди!»**

▲■● Задачи на доказательство

431. Вспомните понятия, связанные с многоугольниками.

432. Вспомните понятия, связанные с окружностью.

433. Вспомните понятия, связанные с треугольником.

434. Приведите примеры, когда обе теоремы — прямая и обратная — верны.

435. Приведите примеры, когда одна из двух теорем, прямая или обратная, верна, а другая — нет.

436(т). Докажите, что если фигура имеет ровно две оси симметрии, то эти оси перпендикулярны.

437. Может ли фигура иметь центр симметрии, но не иметь ни одной оси симметрии?

438(п). Докажите, что если у треугольника равны две высоты, то этот треугольник равнобедренный.

439(т). Докажите, что если для сторон треугольника выполняется неравенство $a + b \geqslant 3c$, то c — наименьшая сторона этого треугольника.

440. Докажите, что если в треугольнике ABC сторона AB в два раза больше стороны AC, то медиана, выходящая из вершины C, перпендикулярна биссектрисе угла A.

441. Докажите, что диагональ многоугольника меньше половины его периметра.

442. От данного многоугольника с помощью одного прямолинейного разреза отрезали некоторый многоугольник. Докажите, что периметр отрезанного многоугольника меньше периметра исходного многоугольника.

443(т). Внутри некоторого многоугольника содержится выпуклый многоугольник. Докажите, что периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего многоугольника.

444(т). Обозначим стороны треугольника ABC как обычно $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $2p = a + b + c$ — периметр треугольника (p — полупериметр). Докажите, что существуют три попарно касающиеся друг друга внешним образом окружности с центрами в вершинах треугольника, причём радиусы окружностей с центрами A, B и C соответственно равны $p - a, p - b$ и $p - c$.

445(т). Докажите, что существуют три попарно касающиеся друг друга окружности с центрами в вершинах треугольника ABC такие, что окружности с центрами B и C касаются друг друга внешним образом и обе они изнутри касаются окружности с центром A. При этом радиус окружности с центром A равен p, а окружности с центрами B и C имеют радиусы $p - c$ и $p - b$ соответственно (обозначения задачи 466).

446(т). Докажите, что если прямые AB, BC и AC касаются одной окружности с центром внутри треугольника ABC, то отрезки касательных от вершин A, B и C до точек касания равны соответственно $p - a$, $p - b$ и $p - c$ (обозначения задачи 444).

447(т). Докажите, что если прямые AB, BC и CA касаются одной окружности с центром вне треугольника ABC, но внутри угла BAC, то отрезки касательных от вершин A, B и C до точек касания равны соответственно p, $p - c$ и $p - b$ (обозначения задачи 444).

448(т). Пусть углы треугольника ABC равны $\angle BAC = 40°$, $\angle CBA = 60°$, $\angle ACB = 80°$. Пусть, далее, O — точка плоскости треугольника такая, что $AO = BO = CO$. Докажите, что $\angle OBC = \angle OCB = 50°$, $\angle OCA = \angle OAC = 30°$ и $\angle OBA = \angle OAB = 10°$ (сравните с задачами 466 и 468).

449(т). В вершинах четырёхугольника $ABCD$ расположены центры окружностей. Известно, что любые две окружности с центрами в соседних вершинах касаются друг друга внешним образом. Докажите, что для сторон четырёхугольника выполняется равенство $AB + CD = BC + DA$.

4.5

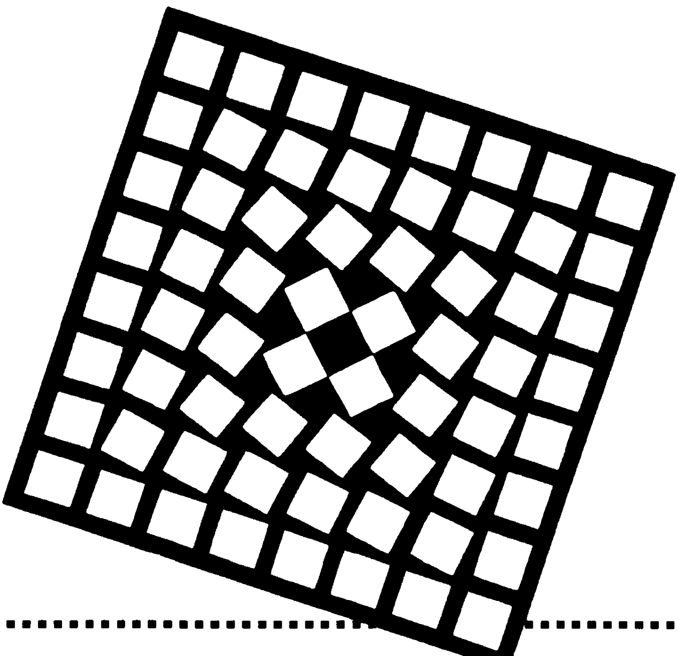
450(т). Стороны четырёхугольника $ABCD$ касаются одной окружности. (Точки касания — на сторонах четырёхугольника.) Докажите, что $AB + CD = BC + DA$.

451(т). Вершины четырёхугольника $ABCD$ расположены на одной окружности. Докажите, что

$$\angle BAD + \angle BCD = \angle ABC + \angle ADC.$$

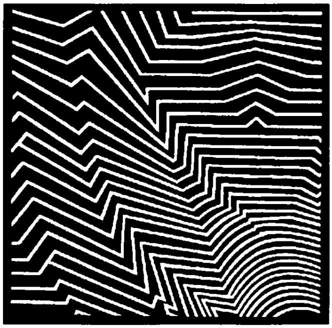
452. В треугольной пирамиде $ABCD$ имеют место равенства $AB = CD$, $AD = BC$. Докажите, что прямая, проходящая через середины AC и BD, перпендикулярна AC и BD.

Восьмой класс



5

Параллельные прямые и углы



В этой главе вводится ещё одно свойство плоскости, относящееся к параллельным прямым. Это последнее принимаемое без доказательства утверждение. Все последующие факты будут строго доказываться. Лишь с появлением этого свойства изучаемая нами геометрия становится евклидовой геометрией, да и сама плоскость «получает право» называться евклидовой плоскостью. Здесь стоит заметить, что все доказанные ранее теоремы относятся к так называемой ***абсолютной*** *геометрии, они верны в евклидовой геометрии, которую мы и будем, начиная с этой главы, изучать, но они верны и в геометрии Лобачевского, о которой мы лишь упомянем в этой главе.*

5.1. Параллельные прямые на плоскости

Во второй главе мы доказали, что через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой плоскости, можно провести прямую, параллельную этой прямой. При этом не обсуждался вопрос, нельзя ли провести через эту же точку ещё какую-то прямую, параллельную данной. Впрочем, наверное, никто на это не обратил внимания, поскольку большинству школьников известно и очевидно, что более одной прямой провести нельзя. Именно этот факт мы и запишем в виде свойства 4.

Четвёртое основное свойство плоскости

Свойство 4.

Через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой же плоскости, можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Но прежде чем начать обсуждать, какие следствия можно получить из этого свойства, остановимся на одном знаменательном моменте из многовековой истории геометрии.

Необходимо заметить, что рассматриваемое сейчас основное свойство плоскости существенно отличается от трёх предыдущих. Оно допускает много различных формулировок. Некоторые из них совсем не похожи на приведённую. Однако при внимательном изучении можно заметить, что все эти формулировки равносильны друг другу.

Лобачевский и история открытия неевклидовой геометрии

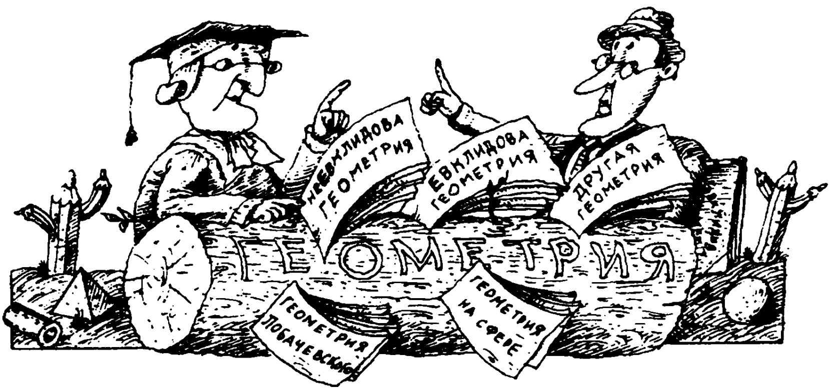
В отличие от трёх предыдущих свойств плоскости, свойство 4, которое называют аксиомой о параллельных прямых, казалось математикам не таким уж очевидным. Они, конечно, считали его верным, но не настолько бесспорным, чтобы принять без доказательства. И с глубокой древности до начала XIX столетия учёные неоднократно предпринимали попытки доказать это свойство, вывести его из других, более очевидных свойств.

Указанное свойство пытались доказать методом от противного: предполагалось, что аксиома о параллельных неверна, и из этого делался ряд выводов. Было накоплено много интересных геометрических фактов, доказан ряд теорем, которые были верны при таком предположении. Но никто из учёных не мог допустить и мысли о том, что, кроме геометрии Евклида, существует какая-то иная геометрия. Поэтому все эти попытки завершались тем, что в каком-то месте явно или неявно использовалось утверждение, равносильное аксиоме о параллельных, в результате чего и обнаруживалось «противоречие».

И вот в первой половине XIX в. эти попытки увенчались успехом, а вернее... полным неуспехом. Была создана новая геометрическая система, в которой через любую точку плоскости, расположенную вне данной прямой этой плоскости, можно провести более одной прямой, не пересекающейся с данной (т. е. параллельной данной). Эта геометрическая система называется ***неевклидовой геометрией*** и носит имя Лобачевского.

23 февраля 1826 г. на заседании физико-математического отделения Императорского Казанского университета тридцатитрёхлетний профессор Николай Иванович Лобачевский выступил с докладом «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных прямых». Этот день и стал днём рождения неевклидовой геометрии, началом новой эпохи в развитии геометрии.

В истории науки нередки случаи, когда открытия практически одновременно делались несколькими учёными. Независимо от Лобачевского существование новой геометрической системы установили великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс и венгр Янош Больяйи (Бойаи). Однако Гаусс, боясь быть непонятым, не опубликовал своё открытие. Больяйи же изложил свои



результаты в виде приложения к обширному геометрическому трактату своего отца, вышедшему в 1832 г.

Но если вы думаете, что учёный мир с восторгом и благодарностью принял новую геометрию, то очень и очень ошибаетесь. К сожалению, судьбы первооткрывателей далеко не всегда оказываются счастливыми. Так было и в этом случае. Гениальный Гаусс, по существу, отрёкся от своего открытия. Для Яноша Больяйи непризнание его работ стало причиной большой личной трагедии, он бросил занятия математикой и до конца жизни так и не оправился от полученного удара.

До дна испил горькую чашу непонимания и невежественной критики и Николай Иванович Лобачевский. И всё же он упорно продолжал изучать созданную им геометрию, издав ряд работ, в которых развивались основы, изложенные в его первой работе. Ровно через 30 лет после своего исторического доклада Лобачевский скончался непризнанным и почти всеми забытым. И лишь 10 лет спустя работы Лобачевского стали известными и его идеи получили признание. А в 1992 г. двухсотлетие со дня рождения великого русского математика торжественно отмечалось во всём мире.

Признаки и свойства параллельных прямых

Рассмотрим прямую l и точку A вне этой прямой. Проведём через A произвольную прямую, пересекающую прямую l в некоторой точке B. Обозначим через β один из углов, образованных AB с прямой l. Проведём через A прямую m такую, что угол α дополнял бы до $180°$ *угол β, т. е.* $\alpha + \beta = 180°$ (рис. 185). *Построенная прямая m параллельна прямой l.*

Докажем это. Предположим, что прямые m и l пересекаются. Обозначим точку пересечения через C. Тогда в треугольнике ABC внешний угол при вершине A равен внутреннему углу при верши-

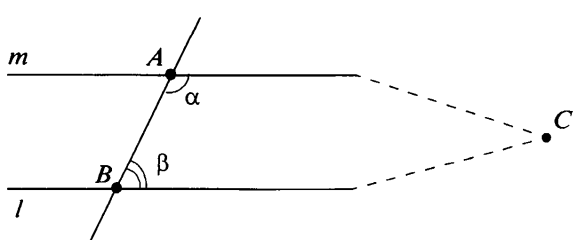
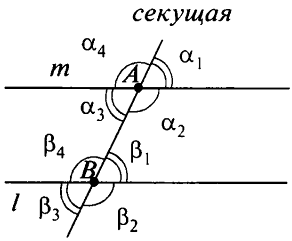


Рис. 185



Внутренние накрест лежащие углы:
α_3 и β_1, β_4 и α_2

Односторонние углы:
внутренние β_1 и α_2, β_4 и α_3
внешние β_2 и α_1, β_3 и α_4

Соответственные углы:
β_1 и α_1, β_2 и α_2
β_3 и α_3, β_4 и α_4

Рис. 186

не *B*. (Это следует из того, что сумма внутренних углов *A* и *B* этого треугольника равна 180°.) Получено противоречие с теоремой о внешнем угле треугольника (теорема 3.5)[1].

Заметим, что углы, образовавшиеся при пересечении прямых *m* и *l* прямой *AB*, расположенные между *m* и *l* по одну сторону от *AB*, называются ***внутренними односторонними углами***. (Прямую *AB*, чтобы отличить её от прямых *m* и *l*, иногда называют ***секущей***.) Кроме того, среди образовавшихся углов можно выделить пары ***внешних односторонних углов***. (Что это за пары, понятно из рисунка 186.) И наконец, образовавшиеся углы можно разбить на четыре пары ***соответственных углов*** (см. рис. 186).

Выделяют также ***внутренние накрест лежащие углы*** (рис. 186).

Сформулируем теперь полностью признаки параллельности двух прямых, непосредственно следующие из наших предшествующих рассуждений.

Признаки параллельных прямых.

Если при пересечении двух прямых третьей (секущей) углы, образующие какую-то пару соответственных углов, равны, или же углы, образующие какую-то пару внутренних или внешних односторонних углов, дают в сумме 180°, то эти прямые параллельны.

[1] Внешний угол треугольника больше любого не смежного с ним внутреннего.

Но через каждую точку плоскости можно провести лишь одну прямую, параллельную данной. Поэтому сформулированный признак параллельности является одновременно и свойством параллельных прямых.

Свойства параллельных прямых.

***При пересечении двух параллельных прямых третьей (секущей) все соответственные углы попарно равны, а пары внутренних или внешних односторонних углов образованы из углов, дополняющих друг друга до* 180°.**

Параллельность двух прямых можно для краткости обозначить знаком $\|$.

Сумма углов треугольника

Следствием доказанных нами утверждений является теорема о сумме углов треугольника.

Теорема 5.1 *(о сумме углов треугольника).*

***Сумма углов в любом треугольнике равна* 180°.**

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и проведём через вершину B прямую, параллельную AC (рис. 187). Имеем $\angle KBM = \angle BAC$, поскольку эти углы являются соответственными, образованными при пересечении параллельных CA и BM секущей AB. Равными являются также углы ACB и CBM, так как угол, вертикальный к $\angle CBM$, является соответственным для $\angle ACB$ (здесь секущей является CB).

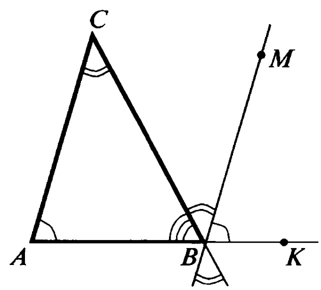


Рис. 187

Таким образом,

$$\angle CAB + \angle ACB + \angle ABC =$$
$$= \angle MBK + \angle MBC + \angle ABC = 180°. \blacktriangledown$$

Из теоремы 5.1 сразу следует, что ***внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних, с ним не смежных.*** (Сравните это утверждение с ранее доказанной теоремой о внешнем угле треугольника.)

5.1

Сумма углов n-угольника

Зная сумму углов треугольника, легко получить формулу для суммы углов любого n-угольника.

Рассмотрим, например, выпуклый семиугольник (рис. 188). Соединим какую-либо его вершину диагоналями со всеми остальными вершинами. В результате семиугольник разобьётся на пять треугольников, сумма углов которых и даёт искомую сумму, т. е. сумма углов этого семиугольника равна $5 \cdot 180° = 900°$.

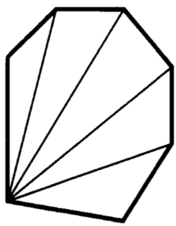


Рис. 188

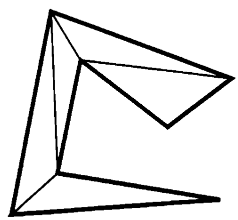


Рис. 189

Таким же образом можно поступить и с любым выпуклым n-угольником. Сумма его углов равна $(n - 2) \cdot 180°$.

Невыпуклый многоугольник нельзя так просто разбить на треугольники. Тем не менее формула для суммы его углов остаётся прежней. (На рисунке 189 показан пример разбиения невыпуклого семиугольника.) Запишем это в виде теоремы.

Теорема 5.2 *(о сумме углов n-угольника).*

Сумма углов любого n-угольника равна $(n - 2) \cdot 180°$.

▲■● Задачи, задания, вопросы

453. Что вы можете сказать по поводу утверждения, что в геометрии Лобачевского параллельные прямые пересекаются?

454(н). Через точку M, лежащую вне прямой l, проведены три прямые m, n, k. Сколько из этих прямых могут пересекать прямую l?

455(н). Прямые m и n пересекаются в точке O (рис. 190). В какой полуплоскости относительно прямой p лежит точка O?

456(н). Дана прямая p и четыре точки, не принадлежащие этой прямой (рис. 191). A симметрична A_1 относительно прямой p. Точка B симметрична B_1 относительно прямой p. AB_1 пересекается с BA_1 в точке O. Докажите, что BB_1 параллелен AA_1. Определите как располагается точка O относительно прямой p.

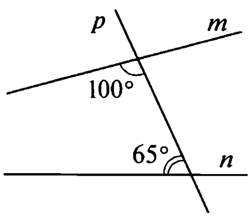


Рис. 190

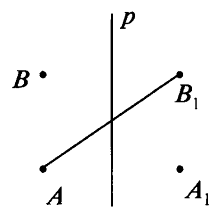


Рис. 191

457(н). По данным рисунка 192 докажите, что прямые m и n параллельны.

458(н). На рисунке 193 прямые a и b параллельны. Прямая c пересекает прямую a в точке A. Докажите, что прямая c пересекает прямую b.

459(н). По данным рисунка 194 докажите, что прямые m и n параллельны.

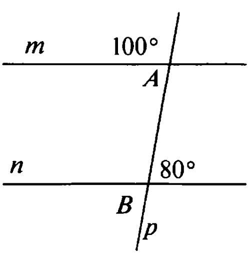


Рис. 192

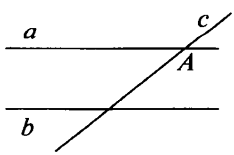


Рис. 193

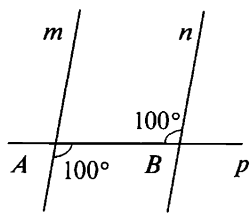


Рис. 194

460(н). По данным рисунка 195 докажите, что прямые m и n параллельны.

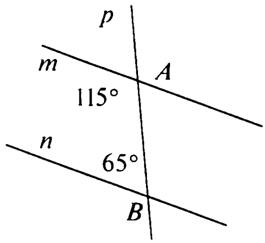


Рис. 195

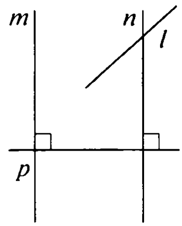


Рис. 196

461(н). На рисунке 196 прямые m и n перпендикулярны прямой p, прямые n и l пересекаются. Докажите, что прямые l и m пересекаются.

462(н). По данным рисунка 197 докажите в каждом случае, что прямые m и n параллельны.

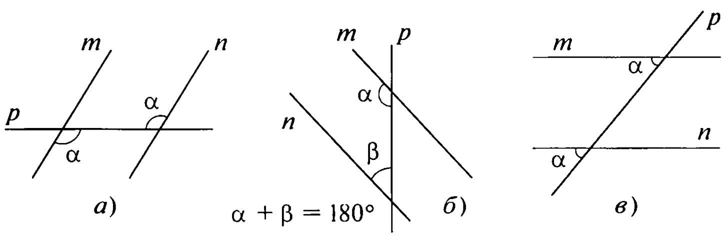


Рис. 197

463(н). На рисунке 198 прямые m и n параллельны отрезку AC. Могут ли пересекаться прямые m и n? Пересекает ли AD прямую m?

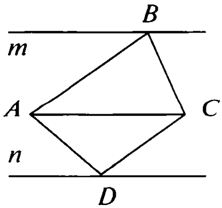


Рис. 198

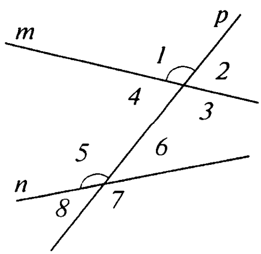


Рис. 199

464(н). На рисунке 199 прямая p — секущая к m и n. Угол 1 равен углу 5. Докажите, что: $\angle 4 = \angle 8$, $\angle 2 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 7$, $\angle 4 = \angle 6$, $\angle 3 = \angle 5$, $\angle 1 = \angle 7$, $\angle 2 = \angle 8$, $\angle 1 + \angle 8 = 180°$, $\angle 4 + \angle 5 = 180°$, $\angle 2 + \angle 7 = 180°$, $\angle 3 + \angle 6 = 180°$.

465(н). Прямые m и n параллельны, p — секущая, $\angle 1 = 110°$ (рис. 200). Найдите градусную меру углов 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8.

466(н). Прямые m и n параллельны, p — секущая, $\angle 1 = 70°$ (рис. 201). Найдите градусную меру углов x и y.

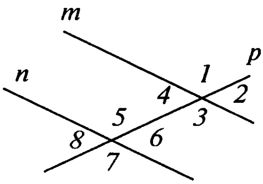


Рис. 200

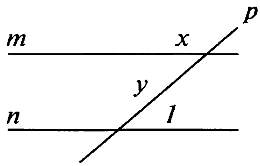


Рис. 201

467(н). На рисунке 202 $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3$. Докажите, что прямые a и c параллельны.

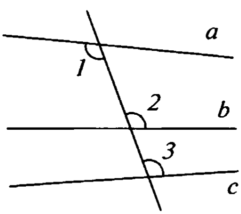


Рис. 202

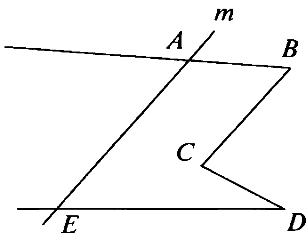


Рис. 203

468(н). На рисунке 203 $\angle BCD = \angle B + \angle D$, прямая m пересекает луч DE. Докажите, что:
а) лучи BA и DE параллельны;
б) прямая m пересекает прямую AB.

469(н). Докажите, что расстояние от каждой точки одной из двух параллельных прямых до второй прямой постоянно (не зависит от точки).

470(н). Найдите геометрическое место точек, удалённых от данной прямой на расстояние, равное a.

471(н). Найдите геометрическое место точек, равноудалённых от двух данных параллельных прямых.

472(н). Две параллельные прямые l_1 и l_2 пересечены другой парой параллельных прямых l_3 и l_4. Точки их пересечения A и D лежат на l_1, точки B и C — на l_2, A и B — на l_3, C и D — на l_4. Докажите, что $AB = CD$ и $AD = BC$.

273(н). При пересечении двух параллельных прямых двумя другими параллельными прямыми получился четырёхугольник $ABCD$. Докажите, что противоположные углы этого четырёхугольника равны.

474(н). Прямая l параллельна стороне MP треугольника MNP. Докажите, что прямая MN пересекается с прямой l.

475(н). Точка M внутри угла BAC (рис. 204). Прямая MP параллельна лучу AC, прямая MK параллельна лучу AB, угол APK равен 40°, угол MKC равен 50°. Найдите углы треугольника PKM.

476(н). p — секущая при непараллельных прямых m и n. Углы *1* и *2* накрест лежащие (рис. 205). Докажите, что угол *1* не равен углу *2*.

477(н). Концы отрезка AB лежат на параллельных прямых l_1 и l_2. Через середину этого отрезка (точка M) проведена прямая, пересекающая l_1 и l_2 в точках C и D соответственно. Докажите, что точка M — середина CD.

478. Докажите, что прямая, проходящая через середины боковых сторон равнобедренного треугольника параллельна основанию.

479. При пересечении двух параллельных прямых секущей образовалось восемь углов. Сумма семи из них равна 700°. Чему равны эти углы?

480(н). p — секущая при непараллельных прямых m и n. Углы *1* и *2* внутренние односторонние (рис. 206). Докажите, что сумма углов *1* и *2* не равна 180°.

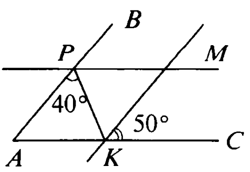


Рис. 204

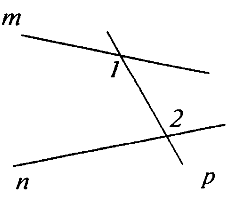


Рис. 205

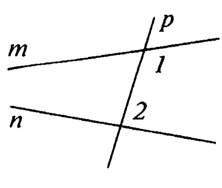


Рис. 206

481(н). На рисунке 207 прямые l и MN пересекаются в точке A, а прямые l и PQ пересекаются в точке B, $MN \parallel PQ$. AB равно 10, BC — биссектриса угла PBA. Найдите AC.

482(н). На рисунке 208 угол ABC равен 100°, точка M лежит внутри угла ABC. Лучи PM и BC параллельны. Лучи KM и BA параллельны, угол MPK равен 30°. Найдите углы треугольника MPK.

483(н). Дан треугольник ABC с прямым углом A (рис. 209). KD параллельна CB, угол DAB равен 37°. Найдите углы C и B.

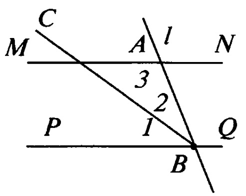


Рис. 207

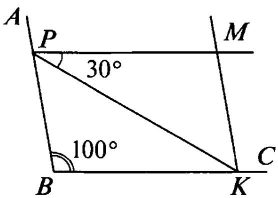


Рис. 208

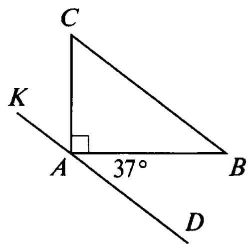


Рис. 209

484(н). Используя данные рисунка 210, найдите неизвестные углы треугольника ABC.

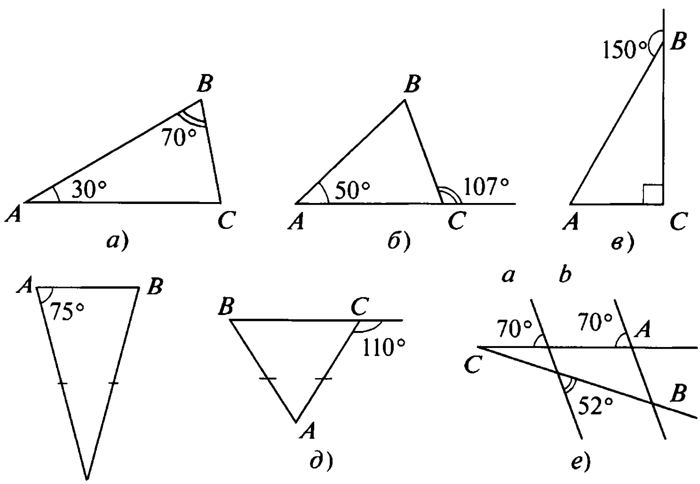


Рис. 210

485(н). Какой особенностью обладают треугольники, представленные на рисунке 211, *а*, *б*, *в*?

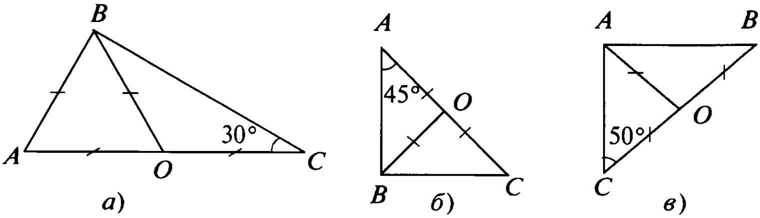


Рис. 211

486(н). Выясните, какие фигуры на рисунке 212 являются многоугольниками.

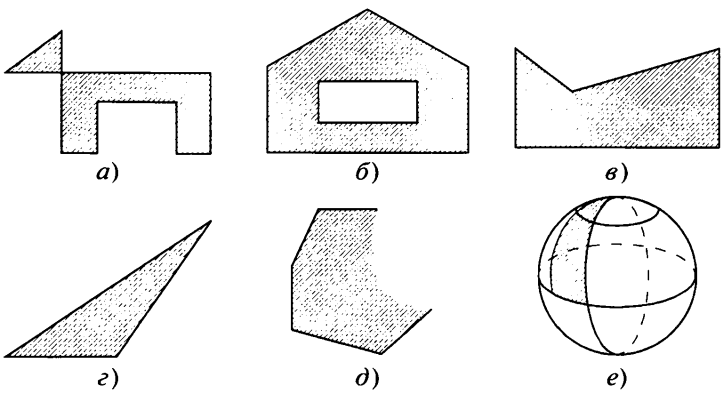


Рис. 212

487(н). Начертите различные по числу сторон многоугольники, которые состоят из:
а) двух равных тупоугольных треугольников;
б) трёх прямоугольных треугольников.
Какие из них выпуклые?

488(н). Отметьте на листе бумаги точку A. Нарисуйте многоугольник так, чтобы точка A была видна:
а) из всех вершин многоугольника;
б) только из двух его вершин;
в) только из одной его вершины.

489(н). Начертите такой четырёхугольник, который можно одной прямой разделить на:
а) два треугольника;
б) три треугольника;
в) треугольник и четырёхугольник.

490(н). Начертите два четырёхугольника так, чтобы в пересечении образовалось:
а) два треугольника;
б) два четырёхугольника;
в) пятиугольник;
г) шестиугольник.

491(н). На плоскости изображено несколько многоугольников, сумма всех углов которых равна 720°. Сколько и какие многоугольники изображены, если среди них нет пятиугольника?

492. На плоскости изображено несколько многоугольников. Сумма углов этих многоугольников равна 540°. Сколько и какие многоугольники изображены (укажите все возможности)?

493. Сколько сторон имеет многоугольник, если известно, что все его углы острые?

494(н). Угол треугольника равен сумме двух других его углов. Докажите, что треугольник прямоугольный.

495. Докажите, что во всяком треугольнике найдётся угол, который не больше 60°.

496(п). Какие значения может принимать:
а) наибольший угол треугольника;
б) наименьший угол треугольника;
в) средний по величине угол треугольника?

497. Углы A и B треугольника ABC равны α и β. Какой угол образует биссектриса угла C со стороной AB? Какой угол образует высота, опущенная на BC, со стороной AC? Решите задачу, если:
а) $\alpha = 18°, \beta = 68°$; б) $\alpha = 92°, \beta = 86°$.

498. Известно, что при пересечении прямых a и b третьей прямой образовалось восемь углов. Четыре из них равны по 80°, а четыре других — по 100°. Следует ли из этого, что прямые a и b параллельны?

499(в). Докажите, что если каждая из прямых a и b параллельна прямой c, то прямые a и b параллельны.

500. Найдите угол между биссектрисами внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей.

501. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Найдите угол между продолжениями биссектрис внешних односторонних углов.

502. Могут ли пересечься биссектрисы внутренних накрест лежащих углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых секущей?

503(в). Найдите углы равностороннего треугольника.

504(в). Докажите, что если в прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 30°, то противолежащий этому углу катет в два раза меньше гипотенузы.

505. В треугольнике ABC угол C прямой. Катет AC равен половине гипотенузы. Докажите, что угол B равен 30°.

506(т). Высота и медиана, проведённые из одной вершины, делят угол треугольника на три равные части. Найдите углы треугольника.

507. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его углов равен: а) 62°; б) 90°; в) 100°; г) 80°.

508. В треугольнике ABC угол C прямой. Угол A равен 30°. $AB = 8$, CD перпендикулярен AB. Найдите AD и DB.

509. На каждой стороне правильного треугольника взято по точке. Стороны треугольника с вершинами в этих точках перпендикулярны сторонам исходного треугольника. В каком отношении каждая из взятых точек делит стороны исходного треугольника?

510. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Докажите, что в этом треугольнике отрезок серединного перпендикуляра, проведённого к гипотенузе до пересечения с катетом, втрое меньше большего катета.

511. Докажите, что медиана к гипотенузе прямоугольного треугольника равна её половине.

512. Острый угол прямоугольного треугольника равен 30°. Докажите, что высота и медиана, проведённые из вершины прямого угла, делят его на три равные части.

513. Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе c и высоте h, проведённой к гипотенузе.

514. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между высотой и медианой, проведёнными из той же вершины, пополам.

515(т). Высота, проведённая из вершины C прямого угла треугольника ABC, равна 1. Величина угла B равна 15°. Найдите длину гипотенузы AB.

516. В треугольнике ABC проведены медианы AA_1, BB_1, CC_1 и высоты AA_2, BB_2, CC_2. Докажите, что длина ломаной $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ равна периметру треугольника.

517. Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

518. Докажите, что если биссектриса одного из внешних углов треугольника параллельна противоположной стороне треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

519(п). Найдите сумму внешних углов: а) треугольника; б) выпуклого четырёхугольника; в) выпуклого одиннадцатиугольника; г) выпуклого многоугольника.

520. $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, точка O — его внутренняя точка, такая что $AO = OB = OC = OD$, угол AOB равен 80°, угол BOC равен 66°, угол AOD равен 130°. Найдите:

а) углы четырёхугольника $ABCD$ и их сумму;

б) углы пятиугольника $ABCDO$ и их сумму.

521(п). Из точки O плоскости выходят три луча, на которых взяты точки A, B и C так, что $OA = OB = OC$. Известно также, что $\angle AOB = 70°$, $\angle BOC = 160°$, $\angle COA = 130°$. Найдите углы треугольника ABC.

522(п). В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. На продолжении стороны AB за точку B взята точка D так, что $BD = AB$. Докажите, что угол $ACD = 90°$.

523. Могут ли два внешних угла треугольника быть острыми?

524. Найдите градусные меры внешних углов (по одному при каждой вершине) и их суммы:

а) для равностороннего треугольника;

б) для равнобедренного прямоугольного треугольника.

525. Через вершину угла C треугольника ABC проведена прямая, параллельная прямой AB. Образовавшиеся при этом углы с вершиной в точке C относятся как $4:9:5$. Найдите углы треугольника ABC.

526. Докажите, что треугольник равнобедренный, если один из его углов $40°$, а один из внешних углов равен $110°$.

527. Найдите углы равнобедренного треугольника, если один из его внешних углов равен: а) $80°$; б) $100°$.

528(в). Внутри угла, величина которого равна $40°$, взята точка A, из которой опущены перпендикуляры AB и AC на стороны угла. Найдите угол BAC.

529(п). На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A взята точка K так, что $AK = AC$, а на её же продолжении за точку B взята точка M так, что $BM = BC$. Найдите углы треугольника MKC, если: а) $\angle BAC = 70°$; $\angle ABC = 80°$; б) $\angle BAC = \alpha$; $\angle ABC = \beta$.

530(п). Докажите, что если в треугольнике ABC медиана, выходящая из вершины A, в два раза меньше стороны BC, то $\angle BAC = 90°$.

531(п). Докажите, что если AB — диаметр окружности, а M — произвольная точка на окружности, не совпадающая с A, то $\angle AMB = 90°$.

532. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что биссектриса AD равна AC и, кроме того, $AD = DB$.

533. Докажите, что в каждом семиугольнике есть пара диагоналей, угол между которыми меньше $13°$.

534(т). Найдите углы треугольника ABC, если известно, что биссектриса угла A делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника.

535(в). Постройте угол в $60°$, $30°$, $15°$.

536(т). На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в два раза больше медианы треугольника, проведённой из той же вершины.

537(т). В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно, что $AE = AD$, $AC = AB$ и $\angle DAC = \angle AEB + \angle ABE$. Докажите, что DC в два раза больше медианы AK треугольника ABE.

538(т). Биссектриса равнобедренного треугольника вдвое меньше другой биссектрисы, найдите углы треугольника.

539(т). В треугольнике ABC сторона $AB = 2$, а углы A и B равны соответственно $60°$ и $70°$. На стороне AC взята точка D так, что $AD = 1$. Найдите углы треугольника BDC.

540(т). Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M такая, что угол MAB равен $60°$, а угол MCD равен $15°$. Найдите угол MBC.

541(т). Внутри квадрата $ABCD$ проведены прямые через вершины A и B так, что они образуют со стороной AB угол в $15°$. Докажите, что треугольник DEC равносторонний, где точка E — точка пересечения проведённых прямых.

542(т). На гипотенузе AB равнобедренного прямоугольного треугольника ACB выбраны такие точки M и N, что градусная мера угла MCN равна $45°$. Докажите, что из отрезков AM, MN, BN можно составить треугольник и что он будет прямоугольным.

543(т). Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике найдутся три диагонали, из которых можно составить треугольник.

544. Угол ABC равен α. Чему равен угол KPM, если прямая PK параллельна BA, а прямая PM параллельна BC?

545. Докажите, что если стороны одного угла соответственно перпендикулярны сторонам другого угла, то такие углы либо равны, либо в сумме составляют $180°$.

546. На плоскости проведены три луча OA, OB и OC. Три прямые, соответственно перпендикулярные этим лучам, образуют треугольник. Найдите углы этого треугольника, если: а) $\angle BOA = 100°$, $\angle AOC = 110°$, $\angle COB = 150°$; б) $\angle AOB = 40°$, $\angle BOC = 30°$, $\angle COA = 70°$.

547. Один из углов треугольника равен α. Найдите угол между высотами, проведёнными из вершин двух других углов.

548. Высоты остроугольного треугольника, проведённые из вершин A и B, пересекаются в точке H, причём угол AHB равен $120°$, а биссектрисы, проведённые из вершин B и C, — в точке K, причём угол BKC равен $130°$. Найдите угол ABC.

549. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. Продолжите все его стороны до пересечения. Найдите сумму углов получившейся звезды.

550(т). Найдите сумму отмеченных углов пятиконечной звезды, изображенной на рисунке 213.

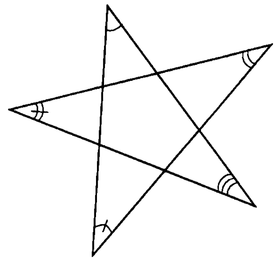


Рис. 213

551(пт). Биссектрисы углов B и C треугольника ABC пересекаются в точке O. Найдите угол BOC, если $\angle BAC = \alpha$.

552. Найдите углы треугольника, стороны которого лежат на прямых, если углы между прямыми равны:
а) 20°, 30° и 50°;
б) 30°, 40° и 70°.

553. Центры трёх попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей расположены в точках A, B и C, $\angle ABC = 90°$. Точки касания K, P и M; точка P находится на стороне AC. Найдите угол KPM.

554(пт). Стороны треугольника ABC касаются некоторой окружности в точках K, P и M, причём точка P расположена на стороне AC. Найдите угол KPM, если $\angle ABC = 2\alpha$.

555. Найдите величину углов выпуклого шестиугольника, если все его углы равны друг другу.

556. Найдите величины углов выпуклого четырёхугольника, если величины его внешних углов пропорциональны числам 7, 6, 5, 6.

557. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, у которого все внутренние углы равны, а сумма его внешних и внутренних углов равна 1440°? Определите величину каждого внутреннего и внешнего угла.

558. Определите углы пятиугольника, зная, что величины их относятся как 2 : 3 : 4 : 5 : 4.

559(т). Докажите, что у выпуклого многоугольника может быть не более трёх острых углов.

560(т). Для выпуклого четырёхугольника $ABCD$ выполняются следующие условия: $AB = BC$, $CD = DA$. На отрезках AD и BD взяты точки M и K так, что $\angle MKD = \angle BCK$. Найдите $\angle AKM$, если $\angle ABC = 2\alpha$.

561(т). Две прямые пересекаются в точке O. Рассмотрим ломаную $OA_1A_2A_3A_4A_5$ с вершинами на данных прямых и равными сторонами ($OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4A_5$). Найдите углы треугольника OA_4A_5, если угол между данными прямыми равен: а) 20°; б) 70°. Для пункта а) найдите также углы треугольника $A_1A_4A_5$.

562(т). Биссектриса угла, смежного с углом C треугольника ABC, пересекает продолжение стороны AB за точку B в точке D, а биссектриса угла, смежного с углом A, пересекает продолжение BC за точку C в точке E. Известно, что $DC = CA = AE$. Найдите углы треугольника ABC.

563(т). На катетах прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (рис. 214). Из точек E и F на прямую AB опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.

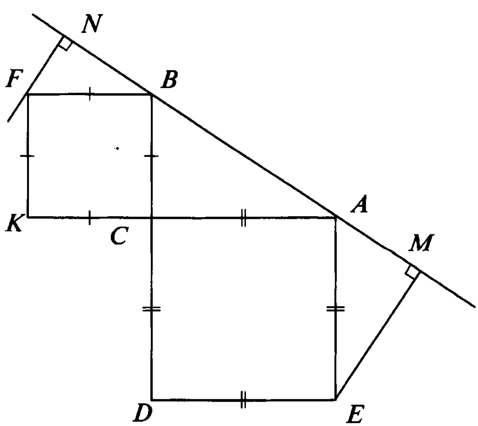


Рис. 214

564(т). На катетах AC и BC прямоугольного треугольника ABC вне его построены квадраты $ACDE$ и $CBFK$ (рис. 215). Точка P — середина KD. Докажите, что отрезок CP перпендикулярен AB.

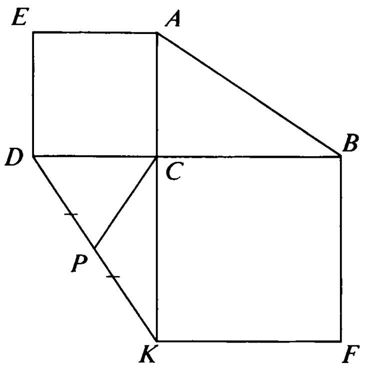


Рис. 215

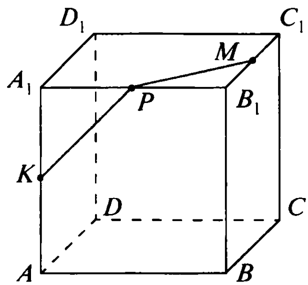


Рис. 216

565. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол ACB_1. Найдите также угол KPM, где K, P и M — соответственно середины рёбер AA_1, A_1B_1, B_1C_1 (рис. 216).

5.2. Измерение углов, связанных с окружностью

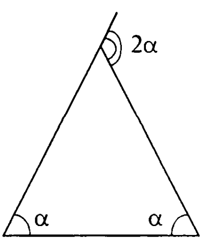


Рис. 217

В основе большинства утверждений, доказываемых в этом параграфе, лежит свойство внешнего угла треугольника: внешний угол равен сумме двух внутренних, с ним не смежных. Особое значение имеет частный случай этого свойства внешнего угла: ***внешний угол при вершине равнобедренного треугольника вдвое больше каждого из углов при основании*** (рис. 217).

Для того чтобы было можно перейти к основным утверждениям, нам необходимо ввести одно новое понятие.

Центральный угол в окружности

***Центральным углом** по отношению к заданной окружности мы будем называть любой угол с вершиной в центре этой окружности.*

Любому центральному углу соответствует дуга окружности. И наоборот, любой дуге окружности соответствует центральный угол. Правда, при этом рассматриваемые углы могут быть больше 180° (рис. 218).

Дуги окружности, как и углы, можно измерять в градусах. Градусная мера всей окружности равна 360°. Одному градусу соответствует дуга, равная $\frac{1}{360}$ окружности. Теперь мы можем сказать, что центральный угол измеряется соответствующей дугой окружности.

Вписанный угол. Измерение вписанного угла

***Вписанным углом** окружности мы будем называть угол, вершина которого расположена на окружности, а стороны пересекают окружность* (рис. 219).

Рассмотрим сначала вписанный угол, одна из сторон которого проходит через центр окружности (рис. 220). Итак, сторона BC угла ABC является диаметром окружности. Центральный угол AOC — внешний угол равнобедренного треугольника AOB. Значит, $\angle AOC = 2\angle ABC$. Таким образом, вписанный угол ABC в этом случае равен половине соответствующего центрального угла и измеряется половиной дуги окружности, расположенной внутри угла ABC, иначе говоря, половиной дуги, *на которую он опирается*.

Оказывается, это же верно для любого вписанного угла.

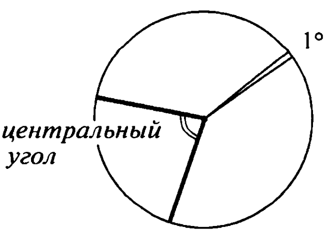


Рис. 218

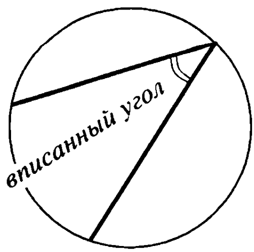


Рис. 219

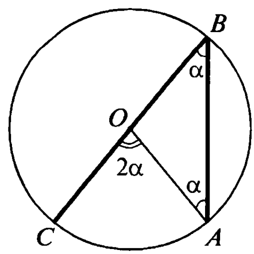


Рис. 220

5.2

Теорема 5.3 *(об измерении вписанного угла).*

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.

Доказательство. Доказательство этой теоремы легко сводится к уже рассмотренному случаю, когда одна из сторон угла проходит через центр окружности.

Рассмотрим вписанный угол ABC. Проведём диаметр BD. Возможны два случая расположения этого диаметра относительно угла ABC.

Первый случай. Диаметр BD проходит внутри угла (рис. 221). Тогда угол ABC равен сумме углов ABD и DBC, каждый из которых измеряется половиной соответствующей дуги AD и DC. Значит, весь угол ABC измеряется половиной дуги AC, заключённой внутри угла, т. е. половиной дуги, на которую он опирается.

Второй случай. Диаметр BD проходит вне угла. Пусть точка D расположена так, как на рисунке 222. Тогда угол ABC равен разности углов ABD и CBD, каждый из которых измеряется половиной соответствующей дуги AD и CD. И в этом случае получаем, что угол ABC измеряется половиной дуги AC, расположенной внутри угла. ▼

Особое значение имеет частный случай теоремы 5.3.

Теорема 5.4 *(об угле, опирающемся на диаметр).*

***В любой окружности вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен* 90°** (рис. 223).

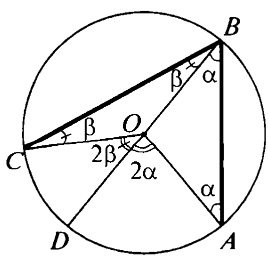


Рис. 221

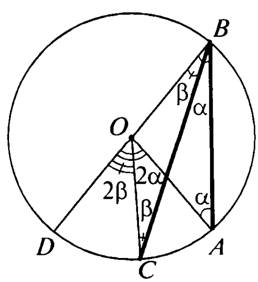


Рис. 222

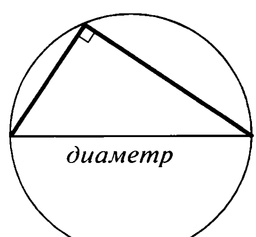


Рис. 223

Доказательство. В самом деле, в этом случае внутри угла находится половина окружности, т. е. дуга в 180°, тогда опирающийся на неё угол равен 90°. ▼

Из теоремы 5.3 и свойства внешнего угла вытекают теоремы об измерении углов, различным образом расположенных относительно окружности.

Угол с вершиной внутри круга

Теорема 5.5 *(измерение угла с вершиной внутри круга).*

Угол с вершиной внутри круга измеряется полусуммой двух дуг, одна из которых расположена внутри этого угла, а другая — внутри угла, вертикального к данному.

Доказательство. Рассмотрим угол с вершиной B внутри круга, A и C — точки пересечения его сторон с окружностью, а A_1 и C_1 — вторые точки пересечения прямых AB и CB с окружностью (рис. 224). Угол ABC является внешним углом треугольника A_1BC. Значит,

$$\angle ABC = \angle AA_1C + \angle C_1CA_1.$$

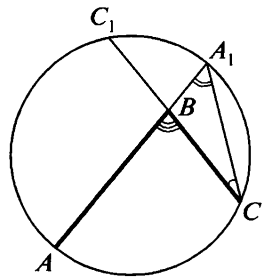


Рис. 224

Но по теореме 5.4 каждый из углов в правой части этого равенства измеряется половиной соответствующей дуги: AC и A_1C_1. Таким образом, угол ABC измеряется полусуммой дуг AC и A_1C_1. ▼

Угол с вершиной вне круга

Теорема 5.6 *(измерение угла с вершиной вне круга).*

Угол, вершина которого расположена вне круга, а каждая из сторон пересекает окружность в двух точках, измеряется полуразностью дуг, заключённых внутри угла.

Доказательство. Пусть стороны угла с вершиной в точке B пересекаются с окружностью в точках A и A_1, C и C_1, причём C_1 и

A_1 — ближайшие к вершине точки пересечения (рис. 225). Рассмотрим треугольник ABC_1. Угол AC_1C — внешний угол этого треугольника. Значит,

$$\angle AC_1C = \angle ABC + \angle BAC_1,$$

откуда $\angle ABC = \angle AC_1C - \angle A_1AC_1$. Но углы в правой части последнего равенства измеряются половинами соответствующих дуг AC и A_1C_1. Следовательно, полуразностью этих дуг измеряется и данный угол ABC. ▼

Для полноты картины нам потребуется ещё одна теорема.

Угол между касательной и хордой

Теорема 5.7 *(измерение угла между касательной и хордой).*

Угол между касательной к окружности и хордой, проведённой через точку касания, измеряется половиной дуги, заключённой внутри этого угла.

Доказательство. Рассмотрим меньший из углов между хордой AB и касательной к окружности в точке B (рис. 226). Пусть BD — диаметр окружности. Поскольку BD перпендикулярен к касательной, угол ABD дополняет до 90° рассматриваемый угол между хордой AB и касательной. Но по теореме 5.4 угол BAD прямой.

Значит, угол ADB также дополняет до 90° угол ABD. Таким образом, рассматриваемый угол равен углу ADB и измеряется (по теореме 5.3) половиной указанной дуги.

Для полноты доказательства надо рассмотреть и второй — больший угол между AB и касательной. Этот угол — смежный с рассмотренным — дополняет его до 180° и измеряется половиной большей дуги, задаваемой хордой AB. ▼

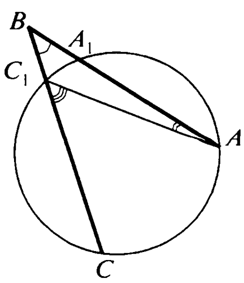


Рис. 225

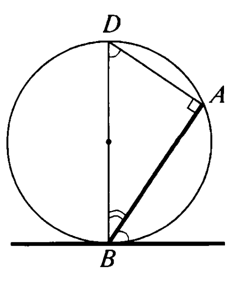


Рис. 226

▲■● Задачи, задания, вопросы

566(н). Каждая окружность на рисунке 227 разделена на равные части. Найдите градусные меры отмеченных центральных углов.

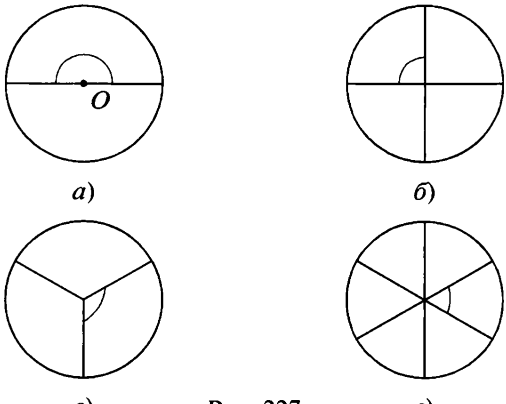


Рис. 227

567(н). Точки A, B, C и D принадлежат окружности с центром в точке O (рис. 228). Найдите величины указанных дуг и соответствующих им центральных углов, если:

а) дуга ACB в три раза больше дуги ADB;

б) дуга ADB на 60° меньше дуги ACB;

в) градусные меры дуг AD и AC относятся как 1 : 2, градусные меры дуг AC и CB равны, а также равны и градусные меры дуг AD и DB.

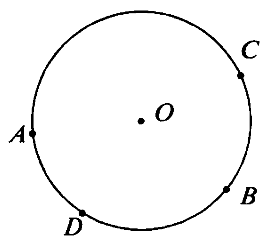


Рис. 228

568. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, градусные меры которых относятся как 2 : 3 : 7. Найдите углы треугольника ABC.

569. Точки A, B и C делят окружность на три дуги, причём дуга AB на 40° меньше дуги BC, но на 70° больше дуги AC. Найдите углы треугольника ABC.

570. Точки A, B и C, лежащие на окружности, служат вершинами равностороннего треугольника. На окружности взята точка D, причём точки C и D расположены по разные стороны от прямой AB. Найдите угол ADB.

571(в). Угол ABC вписан в окружность. Докажите, что биссектриса этого угла делит дугу AC пополам.

572(в). В окружность радиуса 1 вписан угол ABC, равный 30°. Чему равна хорда AC?

573(в). Чему может быть равен вписанный угол, опирающийся на хорду, равную радиусу окружности?

574. Все вершины четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности. Дуга AB равна 100°, а дуга CD равна 102°. Найдите угол между прямыми AC и BD, AD и BC.

575(п). Вершины четырёхугольника $ABCD$ расположены на окружности. Докажите, что сумма двух противоположных углов этого четырёхугольника равна 180°.

576. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, если $\angle ABD = 74°$, $\angle DBC = 38°$, $\angle BDC = 65°$.

577(в). На окружности строится последовательность точек: первая точка берётся произвольно, а начиная со второй, каждая следующая удалена от предыдущей на расстояние, равное радиусу окружности. Докажите, что седьмая точка совпадает с первой.

578(в). На плоскости даны две точки A и B. Только с помощью циркуля постройте две точки, расстояние между которыми равно $2AB$.

579. Окружность касается одной из сторон угла в его вершине — точке A и пересекает другую сторону в точке B. Величина угла равна 40°; M — точка на меньшей дуге AB. Найдите угол AMB.

580(т). Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M. Известно, что $\angle ABC = 72°$, $\angle BCD = 102°$, $\angle AMD = 110°$. Найдите $\angle ACD$.

581(т). Диагонали четырёхугольника $ABCD$, вершины которого расположены на окружности, пересекаются в точке M, $\angle AMB = 80°$. Прямые AB и CD пересекаются в точке K, причём $\angle AKD = 20°$, а прямые BC и DA — в точке N, $\angle ANB = 40°$. Найдите углы четырёхугольника $ABCD$. Сколько решений имеет задача?

582(п). На окружности отмечены точки: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7. Эти точки соединены так, как показано на рисунках 229 и 230. Чему равны суммы отмеченных семи углов в каждом случае?

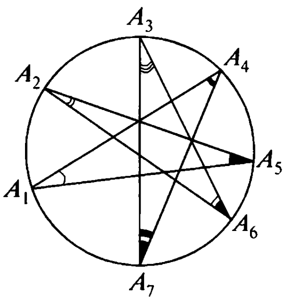


Рис. 229

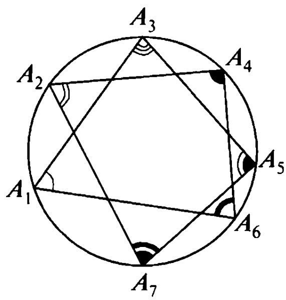


Рис. 230

583. Окружность, построенная на катете прямоугольного треугольника как на диаметре, делит гипотенузу в отношении 1 : 3. Найдите острые углы треугольника.

584(т). В окружности с центром O проведён диаметр; A и B — точки окружности, расположенные по одну сторону от этого диаметра. На диаметре взята точка M такая, что AM и BM образуют равные углы с диаметром. Докажите, что $\angle AOB = \angle AMB$.

585(т). В четырёхугольнике $ABCD$ стороны BC и AD параллельны. Точки A, C и D расположены на окружности, касающейся AB и CB. Угол ABC равен 120°, а высота треугольника ACD, опущенная на сторону AD, равна 1. Найдите DC.

586(п). Две окружности касаются друг друга в точке A. Произвольная прямая, проходящая через A, вторично пересекает одну окружность в точке B, а другую — в точке C. Докажите, что центральные углы этих окружностей, соответствующие хордам AB и AC, равны.

587(п). Две окружности пересекаются в двух точках. Через одну из точек их пересечения проведена прямая, пересекающая одну окружность в точке A, а другую — в точке B. Через вторую точку пересечения окружностей проведена ещё одна прямая, пересекающая первую окружность в точке C, а вторую — в точке D. Докажите, что прямые AC и BD параллельны. (Точки A, B, C, D отличны от точек пересечения окружностей.)

5.3. Задачи на построение и геометрические места точек

В начале этого параграфа будут рассмотрены задачи на построение. Они не являются для вас новыми, мы их уже решали. Дело в том, что те несколько шагов в развитии геометрической теории, сделанные в этой главе, дают возможность предложить более короткие решения этих задач.

Построение перпендикуляра к прямой

Задача 1. *Дана прямая l и точка A на ней. Постройте в этой плоскости прямую, проходящую через A и перпендикулярную l.*

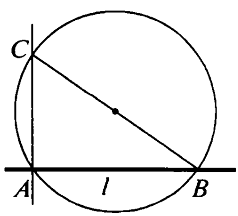


Рис. 231

Построение. Предлагаемое построение основывается на теореме 5.4 о вписанном угле, опирающемся на диаметр. Проводим через A любую окружность с центром вне прямой l (рис. 231). Через точку B — вторую точку пересечения этой окружности с прямой l — проводим диаметр BC. Тогда прямая AC и будет искомым перпендикуляром, поскольку вписанный угол BAC опирается на диаметр и, следовательно, равен 90°. ▼

Как видим, это построение очень экономно: потребовалось провести всего три линии. Третьей являлся искомый перпендикуляр. Можно показать, что меньшим числом линий обойтись нельзя.

Такое же число линий нам потребовалось для проведения перпендикуляра через точку вне прямой, поэтому мы можем сказать, что задача о наиболее экономном построении прямой, перпендикулярной данной и проходящей через любую точку плоскости, решена полностью.

Теперь рассмотрим задачу о построении касательной к окружности.

Построение касательной

Задача 2. *Дана окружность с центром в точке O и точка A вне её. Постройте прямую, проходящую через A и касающуюся окружности.*

Построение. Построим на отрезке OA как на диаметре окружность (рис. 232). Для этого надо сначала разделить OA пополам. Середина OA будет центром этой окружности. Построенная окружность пересечётся с данной в двух точках B и B_1, которые являются точками касания искомых касательных. Это следует из того, что угол OBA (а также $\angle OB_1A$), как опирающийся на диаметр, равен 90°, а прямая, перпендикулярная радиусу и проходящая через его конец, лежащий на окружности, как мы знаем, является касательной к окружности. ▼

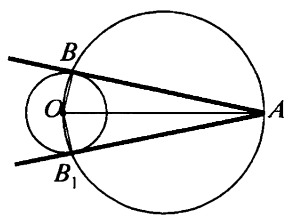


Рис. 232

Прежде чем перейти к следующей задаче, докажем простую, но очень важную и полезную теорему.

Существование окружности, проходящей через три точки. Описанная окружность

Теорема 5.8 *(об окружности, проходящей через три точки).*

Через любые три точки плоскости, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную окружность.

5.3

Доказательство. Рассмотрим три точки A, B и C, не лежащие на одной прямой. Построим серединные перпендикуляры к отрезкам AB и BC. Эти серединные перпендикуляры пересекутся в некоторой точке O (рис. 233). Понятно, что они не могут быть параллельными, поскольку перпендикуляры к параллельным прямым также параллельны или совпадают, а прямые AB и BC пересекаются. Точка O равноудалена от точек A и B, а также от B и C, т. е. она равноудалена от A, B и C. Значит, окружность с центром в точке O проходит через точки A, B и C. Эта окружность единственная, так как две окружности могут пересекаться не более чем в двух точках. ▼

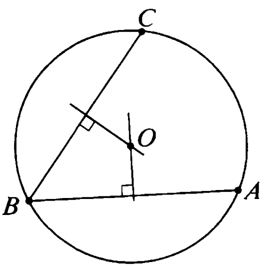


Рис. 233

Рис. 234

Окружность, проходящая через вершины треугольника, называется ***описанной*** *около этого треугольника* (рис. 234).

Теорема 5.8 утверждает, что ***у любого треугольника существует и притом единственная описанная окружность.***

Четыре точки на одной окружности

При решении некоторых задач может оказаться полезной следующая теорема.

Теорема 5.9 *(условие принадлежности четырёх точек окружности).*

Если для четырёх точек плоскости A, B, M и K выполняется одно из следующих двух условий:

а) ***точки M и K расположены по одну сторону от прямой AB и при этом $\angle AMB = \angle AKB$;***

б) ***точки M и K расположены по разные стороны от прямой AB и при этом $\angle AMB + \angle AKB = 180°$,***

то точки A, B, M и K лежат на одной окружности.

Доказательство. а) Проведём окружность через точки A, B и M (см. теорему 5.8). Эта окружность должна пройти через точку K (рис. 235). В самом деле, точка K не может находиться внутри этой окружности, поскольку в этом случае, согласно теореме 5.5, угол AKB измерялся бы половиной суммы дуги AB и ещё какой-то дуги, т. е. был больше угла AMB. (Этот угол по теореме 5.3 измеряется половиной дуги AB.) Точка K не может располагаться и вне этой окружности, так как в этом случае угол AKB был бы меньше угла AMB (см. теорему 5.6).

Итак, точка K обязательно должна лежать на окружности, проходящей через точки A, B и M.

б) Этот случай легко свести к случаю а). Для чего, проведя через точки A, B и M окружность, возьмём на дуге, не содержащей точки M, точку M_0 (рис. 236). Сумма углов AMB и AM_0B измеряется половиной всей окружности. Значит, $\angle AMB + \angle AM_0B = 180°$. Теперь из условия б) следует, что $\angle AM_0B = \angle AKB$, и мы пришли к предыдущему случаю. ▼

Особенно важную роль играет частный случай теоремы 5.9, который мы даже запишем в виде отдельной теоремы.

Теорема 5.10.

Если $\angle AMB = \angle AKB = 90°$, то точки A, B, M и K расположены на окружности с диаметром AB (рис. 237).

Как видите, в этой теореме два случая слились в один: точки M и K могут располагаться как по одну, так и по разные стороны от прямой AB.

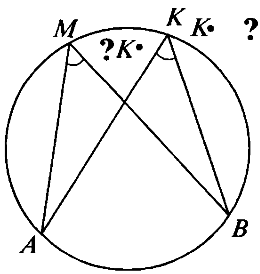


Рис.235

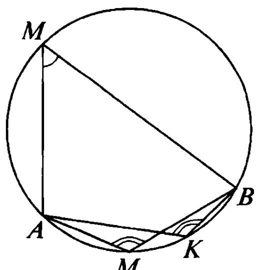


Рис. 236

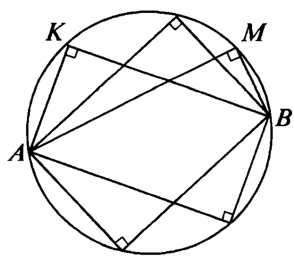


Рис. 237

5.3

Дуга, вмещающая данный угол

На основании теоремы 5.9 легко решается следующая задача.

Задача 3. *На плоскости даны две точки A и B. Найдите геометрическое место точек M плоскости, расположенных по одну сторону от прямой AB, и таких, что $\angle AMB = \alpha$, где α — заданный угол.*

Решение. В соответствии с теоремой 5.9 все нужные точки M должны располагаться на дуге окружности, проходящей через точки A и B.

Для построения этой дуги достаточно найти хотя бы одну точку M, для которой $\angle AMB = \alpha$. Предложим такое построение (рис. 238). Построим угол, равный углу α, так, чтобы вершина угла была в точке A, а одна из сторон угла была лучом AB. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Построим теперь серединный перпендикуляр к AB и прямую, перпендикулярную AC и проходящую через A. Точка пересечения этих перпендикуляров — точка O — и будет центром искомой окружности. Это следует из теоремы 5.7.

Если же в условии задачи снять требование, чтобы точки M располагались по одну сторону от AB, то соответствующее геометрическое место точек будет состоять из двух дуг, симметричных относительно прямой AB. Строго говоря, концы этих дуг — сами точки A и B — в рассматриваемое геометрическое место не входят (рис. 239). ▼

Как мы уже говорили, теоремы 5.9 и 5.10 и геометрическое место точек, рассмотренное в последней задаче, могут быть использованы при решении различных геометрических задач.

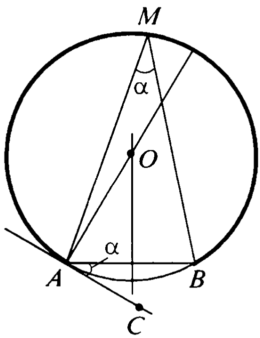


Рис. 238

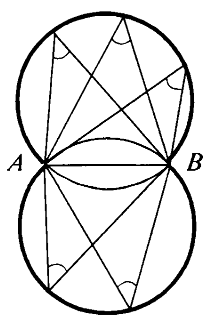


Рис. 239

Метод геометрических мест в задачах на построение

Сейчас мы обсудим один из самых распространённых методов решения задач на построение — метод геометрических мест точек.

Задача 4. *Постройте треугольник по стороне, высоте, проведённой к этой стороне, и противолежащему углу.*

Решение. Итак, нам даны два отрезка a и h, один из которых равен стороне треугольника, а другой — его высоте, опущенной на эту сторону, и угол α, равный противолежащему данной стороне углу треугольника.

Построим в любом месте на плоскости отрезок $AB = a$ (рис. 240). Вершина C искомого треугольника должна располагаться на прямой, параллельной AB, проходящей на расстоянии h от AB. Иными словами, C принадлежит геометрическому месту точек, удалённых на расстояние h от прямой AB, а это геометрическое место точек есть прямая, параллельная AB. (Мы рассматриваем лишь точки по одну сторону от AB.)

В то же время, если не учитывать высоту, то вершина C лежит на дуге с концами A и B, вмещающей данный угол α. Построив эти прямую и дугу, мы найдём точку C как точку пересечения прямой и окружности. Таких точек может быть две. Но им соответствуют два равных треугольника, и выбрать можно любой из них (только в случае касания такой треугольник один). Построенные прямая и дуга могут и не пересекаться. В этом случае задача не имеет решения. ▼

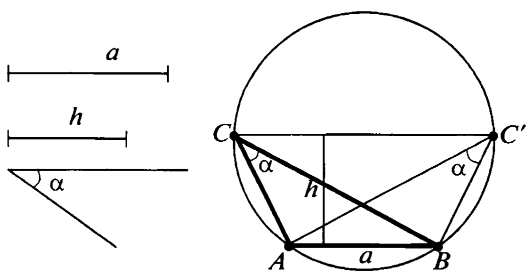


Рис. 240

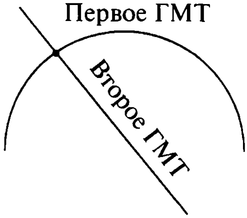


Рис. 241

Как видим, суть метода, а это и есть ***метод геометрических мест точек***, довольно проста. Сначала задача сводится к нахождению какой-либо точки плоскости. Эта точка определяется как точка пересечения двух линий. Отбрасывая одно условие (в рассмотренном случае угол), мы получаем, что искомая точка должна принадлежать одному геометрическому месту точек (в данном случае — прямой линии). Отбрасывая другое условие (заданную высоту), мы получаем, что эта же точка должна принадлежать другому геометрическому месту точек (дуге окружности). Построив эти геометрические места, найдём искомую точку как точку их пересечения (рис. 241).

Известное всем простейшее построение треугольника по трём сторонам также осуществляется методом геометрических мест. (Объясните почему.) Впрочем, в любой задаче на построение этот метод так или иначе присутствует.

▲■● Задачи, задания, вопросы

588. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABC = 112°$, $\angle ABD = 48°$, $\angle CAD = 64°$. Чему равен угол ACD?

589. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABC = 104°$, $\angle CDA = 76°$, $\angle ABD = 38°$. Чему равен угол CAD?

590. Внутри угла с вершиной O взята точка A, B и C — проекции точки A на его стороны. Найдите углы треугольника ABC, если известно, что луч OA образует со сторонами данного угла углы в 30° и 40°.

591(н). На данной прямой m найдите точки X, удалённые от данной точки A на заданное расстояние a. Какие при этом возможны случаи?

592(н). На данной прямой m найдите точку X, равноудалённую от сторон данного угла ABC, $B \notin m$.

593(н). На данной прямой m найдите точки X, равноудалённые от двух заданных точек A, B, m — не является серединным перпендикуляром к AB.

594(н). Найдите геометрическое место точек — центров окружностей, проходящих через:

а) данную точку A;

б) две данные точки A и B;

в) три данные точки A, B, C, где $A \notin BC$.

595(н). Найдите геометрическое место точек:

а) центров окружностей O, касающихся сторон данного угла ABC;

б) центров окружностей, касающихся данной прямой в данной точке;

в) равноудалённых от трёх попарно пересекающихся прямых;

г) являющихся серединами отрезков, концы которых лежат на разных сторонах угла величиной меньше развёрнутого;

д) являющихся серединами всех хорд данной окружности;

е) являющихся серединами хорд данной окружности, проходящих через данную точку A, лежащую внутри окружности;

ж) являющихся серединами хорд окружности, параллельных заданной прямой;

з) являющихся серединами хорд окружности, имеющих заданную длину;

и) являющихся центрами окружностей, касающихся данной окружности в данной на ней точке;

к) являющихся основаниями перпендикуляров, опущенных из данной точки A на прямые, проходящие через другую данную точку B.

596. Даны точки A и B. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых угол AMB больше $80°$, но меньше $90°$.

597. Постройте треугольник по стороне, медиане к этой стороне и противолежащему углу.

598(н). Постройте треугольник по двум сторонам и углу, противолежащему одной из них.

599(н). Постройте треугольник по стороне, высоте, опущенной на эту сторону и медиане к другой стороне.

5.3

600(в). Даны две точки A и B на плоскости. Найдите геометрическое место точек M плоскости, из которых отрезок AB виден под тупым углом. (Это означает, что угол AMB тупой.)

601(п). Постройте треугольник по медиане и углам, которые она образует с двумя заключающими её сторонами.

602(т). Дан треугольник с тупым углом. Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых данный треугольник виден под прямым углом.

603(т). Постройте треугольник по медиане и двум углам.

604(в). Найдите геометрическое место точек M плоскости таких, что отрезок касательной, проведённой из M к данной окружности, равен данному отрезку.

605. На прямой расположены два равных отрезка AB и CD. Найдите геометрическое место точек плоскости, из которых эти отрезки видны под равными углами.

606. На плоскости даны два отрезка AB и CD. Найдите геометрическое место точек, из которых отрезок AB виден под углом 20°, а отрезок CD — под углом 30°. Может ли искомое геометрическое место содержать более четырёх точек?

607(в). Постройте треугольник по стороне, противоположному углу и медиане, проведённой к данной стороне.

608(в). Постройте треугольник по стороне, медиане и высоте, проведённым к данной стороне.

609(т). На плоскости даны точки A и K. Найдите геометрическое место точек B плоскости, для которых найдётся точка C такая, что в треугольнике ABC угол BAC равен 90° и AK является медианой.

610(п). Концы отрезка постоянной длины перемещаются по двум перпендикулярным прямым. Какую линию описывает середина этого отрезка?

611(т). На окружности даны точки A и B. Две точки C и D перемещаются по окружности так, что хорда CD остаётся постоянной. Найдите геометрическое место точек пересечения прямых AC и BD.

612(пт). Дана прямая l и две точки A и B по одну сторону от неё. Возьмём на этой прямой точку M, для которой угол AMB является наибольшим из всех таких углов. Докажите, что окружность, проходящая через точки A, B и M, касается прямой l.

613. На краю листа бумаги изображена дуга окружности, центр которой находится за пределами этого листа. Предложите способ построения прямой, проходящей через данную точку A и касающейся окружности, частью которой является данная дуга.

5.4. Метод вспомогательной окружности. Задачи на вычисление и доказательство

Теоремы 5.9 и 5.10 и свойства вписанных углов позволяют решать некоторые интересные геометрические задачи с помощью метода, который иногда называют ***методом вспомогательной окружности***.

Метод вспомогательной окружности

Суть метода хорошо иллюстрирует следующая задача.

Задача 1. *Через некоторую точку плоскости проведены три прямые так, что угол между любыми двумя из них равен* 60°. *Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из любой точки плоскости на эти прямые, служат вершинами равностороннего треугольника.*

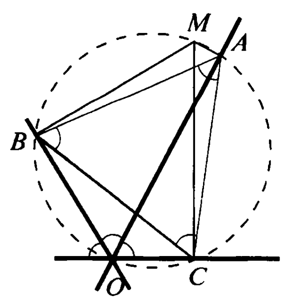


Рис. 242

Решение. Пусть три данные прямые пересекаются в точке O; M — некоторая точка плоскости; A, B и C — основания перпендикуляров, опущенных из точки M на данные прямые.

Заметим, что точки O, M, A, B и C, согласно теореме 5.10, лежат на одной окружности с диаметром OM. (На рисунке 242 эта окружность изображена штриховой линией, хотя её можно было и вообще не изображать, а «представ-

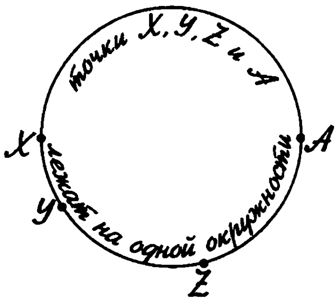


Рис. 243

лять в уме».) Теперь мы видим, что $\angle ABC = \angle AOC$, поскольку оба они опираются на одну и ту же дугу. Значит, $\angle ABC = 60°$. Точно так же $\angle ACB = \angle AOB = 60°$. Из этого следует, что все углы треугольника ABC равны 60°, т. е. этот треугольник — равносторонний. ▼

Главной, дающей ключ к решению, здесь является фраза: «Заметим, что точки... лежат на одной окружности» (рис. 243). Во многих задачах, решаемых предложенным методом, встречается эта фраза.

❋ Теорема о высотах[1]

Докажем с помощью этого же метода одну важную теорему планиметрии. Впоследствии мы ещё не раз вернёмся к этой теореме и более подробно её обсудим. Сейчас же мы её приведём лишь в качестве интересного примера, иллюстрирующего рассматриваемый метод. Поэтому мы сформулируем её даже не в виде теоремы, а в виде задачи.

Задача 2. *Докажите, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.*

Точку пересечения высот треугольника называют его ***ортоцентром***.

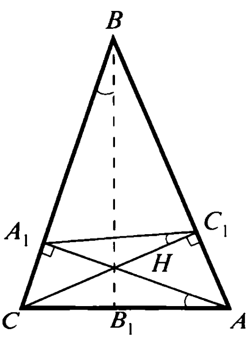


Рис. 244

Прежде чем приступить к доказательству, заметим, что формулировка задачи требует некоторого уточнения. Здесь допускается, что точка пересечения высот может находиться и на продолжениях высот.

Решение. Рассмотрим сначала случай остроугольного треугольника. Проведём в таком треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 и обозначим через H точку их пересечения (рис. 244), а через B_1 — точку пересечения AC и BH. Нам надо доказать, что угол BB_1A — прямой.

[1] Здесь и далее ❋ означает, что материал пункта не является обязательным.

Заметим, что точки A, C, A_1 и C_1 лежат на окружности с диаметром AC (!). Следовательно, $\angle A_1C_1C = \angle A_1AC$, поскольку в этой вспомогательной окружности они опираются на одну дугу.

Теперь заметим, что и точки B, H, A_1 и C_1 лежат на одной окружности с диаметром BH. Следовательно, $\angle A_1BH = \angle A_1C_1H$. Итак, получаем, что в треугольниках CAA_1 и CBB_1 один угол общий и $\angle CAA_1 = \angle CBB_1$. Следовательно, равны и оставшиеся углы: $\angle BB_1C = \angle AA_1C = 90°$, что и требовалось доказать. ▼

Рисунок 245 иллюстрирует случай, когда в треугольнике ABC один угол (угол B) является тупым. Рассуждение остаётся точно таким же. Просто точки B и H как бы меняются местами. В этом случае точка пересечения высот оказывается расположенной вне треугольника.

Для прямоугольного треугольника точкой пересечения высот является вершина прямого угла.

Окружности и касательные

Рассмотрим теперь задачи, в которых фигурируют окружности и касающиеся их прямые. Решение подобного рода задач очень часто может быть основано на очень простом и известном вам факте: ***касательные к окружности, выходящие из одной точки, равны***.

Рассмотрим ситуацию, изображённую на рисунке 246: две непересекающиеся окружности касаются сторон угла с верши-

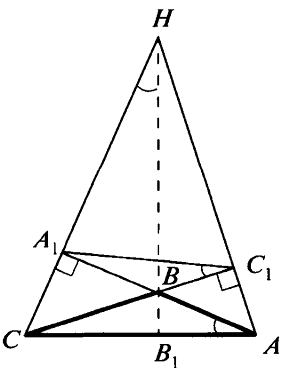


Рис. 245

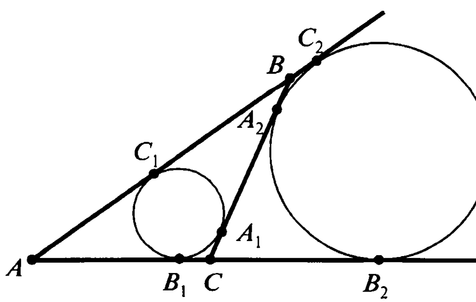


Рис. 246

ной A в указанных на рисунке точках, третья прямая также касается этих окружностей и пересекает стороны угла в точках B и C.

Заметим, что стороны угла являются ***общими внешними касательными*** к окружностям, а прямая BC — ***общей внутренней касательной*** к окружностям. Есть ещё одна общая внутренняя касательная к этим окружностям, но на рисунке она не изображена.

В некоторых случаях под общими внешними касательными мы будем понимать отрезки этих касательных между точками касания. Так, утверждение, что общие внешние касательные к двум окружностям равны между собой, означает равенство соответствующих отрезков. В наших обозначениях это означает равенство $C_1C_2 = B_1B_2$.

Обозначим стороны и периметр треугольника ABC как обычно: $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, $2p = a + b + c$. А теперь сформулируем задачу.

Задача 3. *Рассмотрим всевозможные отрезки с концами в точках касания, расположенные на проведённых прямых. Выразить эти отрезки через стороны треугольника ABC.*

В подобных задачах полезно сначала обозначить каждый из рассматриваемых отрезков одной маленькой буквой. Тогда возникающие в процессе решения преобразования и формулы будут менее громоздкими и более наглядными. При этом для обозначения неизвестных обычно используют буквы: x, y, z, ...

Решение. Пусть $AB_1 = AC_1 = x$. Тогда $CA_1 = CB_1 = b - x$, $BA_1 = BC_1 = c - x$. Из равенства $CA_1 + BA_1 = a$ получим $(c - x) + (b - x) = a$, откуда $x = \dfrac{b + c - a}{2} = p - a$. (Вспомните, в каких задачах мы уже использовали подобный приём.)

Для нахождения AB_2 и AC_2 заметим, что эти отрезки, как касательные, равны между собой и $AB_2 + AC_2 = (AC + CB_2) + (AB + BC_2) = (AC + CA_2) + (AB + BA_2) = AC + AB + BC = 2p$. Значит, $AB_2 = AC_2 = p$.

Точно так же находятся другие отрезки. Доведите самостоятельно решение до конца, а мы запишем окончательный результат: $BA_1 = BC_1 = CA_2 = CB_2 = p - b$, $CA_1 = CB_1 = BA_2 = BC_2 = p - c$, $C_1C_2 = B_1B_2 = a$, $A_1A_2 = |b - c|$. ▼

Вписанная окружность треугольника

Вернёмся к рисунку 246, иллюстрирующему задачу 3.

Окружность, касающаяся сторон треугольника ABC, называется ***вписанной*** *окружностью этого треугольника.* (На рисунке это меньшая из двух окружностей.)

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.11 *(существование вписанной окружности).*

У каждого треугольника существует единственная вписанная окружность.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Геометрическое место центров окружностей, вписанных в угол BAC, есть биссектриса этого угла. Центр любой окружности, вписанной в угол ABC, лежит на его биссектрисе. Две указанные биссектрисы пересекаются в точке J, которая равноудалена от сторон треугольника ABC и является центром вписанной в него окружности. ▼

(Подумайте, почему две биссектрисы треугольника не могут быть параллельными?)

▲■● Задачи, задания, вопросы

614(н). По данным рисунка 247 найдите углы треугольника ABC.

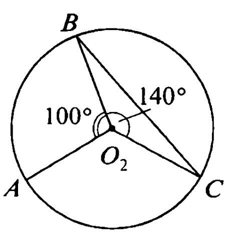


Рис. 247

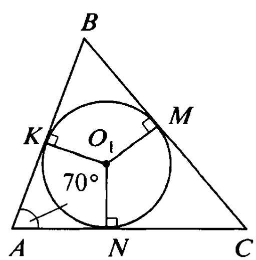


Рис. 248

615(н). По данным рисунка 248 найдите угол KMN.

616(н). На рисунке 249 O_2 — центр описанной окружности, BD — высота и медиана треугольника. Докажите, что точка O_2 принадлежит BD.

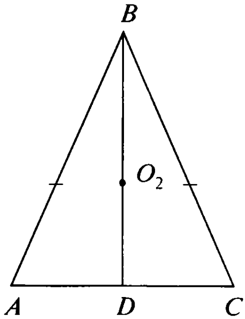


Рис. 249

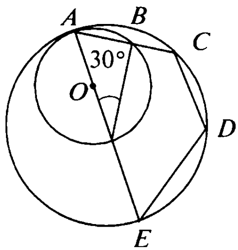


Рис. 250

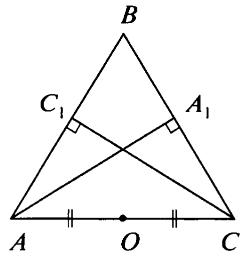


Рис. 251

617(н). По данным рисунка 250 найдите угол CDE ($CD \parallel AE$).

618(н). На рисунке 251 $AC = 10$. Найдите C_1O и A_1O.

619. Найдите углы треугольника, у которого центр вписанной окружности совпадает с центром описанной.

620. Найдите углы треугольника ABC, у которого центр вписанной окружности O_1 симметричен центру описанной окружности O_2 относительно AC (рис. 252).

621(в). Через некоторую точку плоскости проведены три прямые. Два из шести образовавшихся углов равны 50° и 70°. Найдите углы треугольника, вершинами которого являются основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки плоскости на данные прямые.

622. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известны следующие углы: $\angle ABC = 102°$, $\angle DBC = 44°$, $\angle ACD = 58°$. Найдите $\angle CAD$.

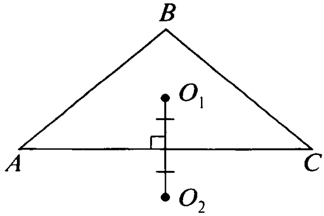


Рис. 252

623(в). Внутри угла с вершиной O взята точка M. Луч OM образует со сторонами угла углы 25° и 40°. Точки A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла. Найдите углы треугольника AMB.

624(т). Внутри угла с вершиной O, отличного от прямого, взята точка M; A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на стороны угла. Докажите, что прямая, проходящая через середины OM и AB, перпендикулярна AB.

625. На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O под углом 30°; M — точка плоскости такая, что $OM = 2$; A и B — основания перпендикуляров, опущенных из M на данные прямые. Найдите AB.

626(п). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся в точке O, M — точка на окружности с центром в O. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенных из M на данные прямые, постоянно для всех точек окружности.

627(п). В треугольнике ABC проведены две высоты AA_1 и CC_1. Найдите углы треугольника A_1BC_1, если $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \beta$.

628. На рисунке 253 $KN = 3$ см, $EP = 5$ см, $MK : KN = 4 : 3$. Найдите периметр треугольника MNP.

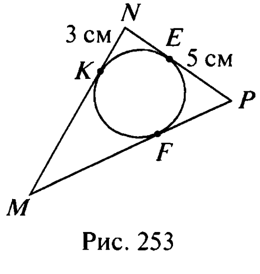


Рис. 253

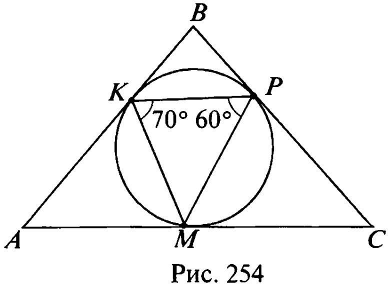


Рис. 254

629. По данным рисунка 254 найдите углы треугольника ABC.

630. В треугольник со сторонами 5, 6 и 7 вписана окружность. Найдите отрезки, на которые разделена бóльшая сторона треугольника точкой касания.

631. Найдите отрезки, на которые точки касания вписанной окружности делят стороны треугольника, если стороны треугольника равны соответственно a, b и c.

632. Докажите, что радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен $p - c$, а радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен p, где p — полупериметр, c — гипотенуза треугольника.

633. В угол с вершиной A вписана окружность. Рассмотрим прямую, касающуюся окружности, пересекающую стороны угла в точках B и C и такую, что данная окружность расположена вне треугольника ABC. Докажите, что периметр треугольника ABC не зависит от того, как проведена прямая.

634(пт). В треугольники ABC и CDA (точки B и D расположены по одну сторону от CA) вписаны окружности. Найдите длину общей внешней касательной к этим окружностям, если:

а) $AB = 5$, $BC = 7$, $CD = DA$;

б) $AB = 7$, $BC = CD$, $DA = 9$.

635(т). Стороны пятиугольника равны 5, 6, 7, 8 и 9 в порядке обхода и касаются одной окружности. На какие отрезки точка касания со стороной длины 5 делит эту сторону?

636(т). Докажите, что если стороны пятиугольника равны в порядке обхода соответственно 4, 6, 8, 7 и 9, то его стороны не могут касаться одной окружности.

637(пт). Докажите, что если четыре прямые касаются окружности, как показано на рисунке 255, то выполняются следующие равенства:

а) $AB + CD = BC + DA$;

б) $KB + DM = BM + KD$;

в) $KA + AM = KC + CM$.

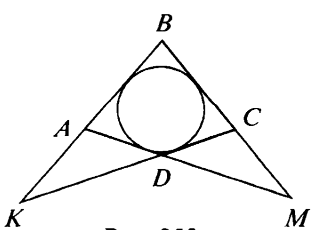


Рис. 255

638(т). В задаче 582 мы находили сумму углов двух семиконечных звёзд, вершины которых расположены на одной окружности. Рассмотрим семь точек, не лежащих на одной окружности и таких, что, соединив эти точки так же, как в той задаче, получим две семиконечные звезды, сходные с рассмотренными (рис. 256, 257). Докажите, что сумма углов этих звёзд осталась такой же. (Для этого постройте окружность, содержащую рассматриваемые точки.)

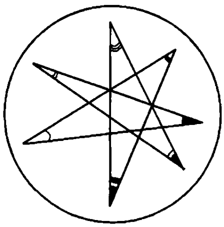


Рис. 256

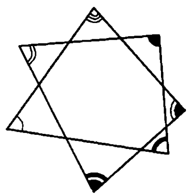


Рис. 257

639(пт). Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. Докажите, что прямая AD проходит через середину дуги BC большей окружности, не содержащей точки A.

640(т). В треугольнике ABC угол A равен 70°, а угол B равен 50°. Внутри треугольника взята точка M так, что $\angle MAC = \angle MBC = 30°$. Найдите $\angle MCA$.

641. Докажите, что все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

642. Докажите, что все три серединных перпендикуляра треугольника пересекаются в одной точке.

643. В прямоугольном треугольнике найдите расстояние от ортоцентра до центра описанной окружности, если его гипотенуза равна 10.

644(т). В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть M — некоторая точка на прямой BC. Докажите, что сумма $B_1M + C_1M$ принимает наименьшее значение, когда точка M совпадает с A_1.

645(т). В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Докажите, что точка пересечения высот треугольника ABC является центром вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$ окружности.

646(пт). На плоскости изображена окружность и прямая l, проходящая через её центр. Пусть A — некоторая точка плоскости, не лежащая ни на окружности, ни на прямой l. С помощью только линейки постройте прямую, проходящую через A и перпендикулярную l.

647(пт). Рассмотрим окружность, описанную около треугольника ABC. Докажите, что основания перпендикуляров, опущенных из произвольной точки окружности на прямые AB, BC и CA, лежат на одной прямой. (Эта прямая называется *прямой Симсона*.)

648(т). Точки A, B, C, D, E и F расположены на окружности. Хорды EC и DA пересекаются в точке M, а хорды BE и DF — в точке N. Докажите, что если хорды AB и CF параллельны, то они параллельны также прямой MN.

6

Подобие

Основная цель этой главы — изучение свойств подобных фигур. Существование подобных фигур и тел является одной из самых важных характеристик евклидова пространства, изучаемой нами евклидовой геометрии. С проявлениями подобия мы очень часто встречаемся в жизни.

В магазине детских игрушек можно увидеть модели автомобилей, являющиеся подобием реальных машин. Да и вообще, очень многие детские игрушки подобны реальным предметам взрослого мира. Когда мы рассматриваем репродукции картин известных мастеров живописи, то также имеем дело с изображением, представляющим собой подобие подлинника. Хотя, конечно, никакая копия произведения искусства не мо-

жет дать полное представление о нём. Обувь или одежда одного фасона выпускается разных размеров. И здесь можно сказать, что, например, кроссовки одного вида подобны. Эти примеры можно продолжать и дальше.

6.1. Параллелограмм, прямоугольник, ромб, квадрат

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые достаточно хорошо известные многим из вас виды четырёхугольников. Каждый из них обладает рядом интересных и важных свойств. Из всех этих свойств мы выделим и рассмотрим лишь небольшую часть. В основном это те свойства, которые будут непосредственно необходимы в следующих параграфах для развития геометрической теории.

Параллелограмм

Параллелограммом *называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны* (рис. 258).

Рис. 258

Теорема 6.1 *(о свойствах и признаках параллелограмма).*

***В любом параллелограмме*:**

а) *противоположные стороны равны*;

б) *противоположные углы равны*;

в) *диагонали делятся пополам точкой пересечения.*

При этом, если четырёхугольник имеет любое из трёх перечисленных свойств, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

Каждый из пунктов теоремы даёт как свойство параллелограмма, так и признак параллелограмма.

Доказательство. а) *Свойство параллелограмма.* Рассмотрим параллелограмм $ABCD$ (рис. 259). Согласно свойству параллельных прямых, $\angle BAC = \angle ACD$ (AB и CD — параллельные прямые, AC — секущая). Точно так же $\angle ACB = \angle CAD$. Таким образом, треугольники ABC и CDA равны по второму признаку равенства треугольников и $AB = CD$, $BC = AD$.

Признак параллелограмма. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ имеют место равенства $AB = CD$ и $BC = AD$. Тогда треугольники ABC и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Эти треугольники должны располагаться по разные стороны от прямой AC, так как в противном случае $ABCD$ не являлся бы четырёхугольником. Следовательно, из равенства $\angle BAC = \angle DCA$ мы можем заключить, что прямые AB и CD параллельны, а из равенства $\angle BCA = \angle DAC$ сделать вывод о параллельности BC и AD. Значит, $ABCD$ — параллелограмм.

б) *Свойство параллелограмма.* Если $ABCD$ — параллелограмм, то из равенства треугольников ABC и CDA мы получаем равенство углов ABC и CDA, а из равенства треугольников BAD и DCB следует равенство двух других противоположных углов этого параллелограмма.

Признак параллелограмма. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ равны противоположные углы при вершинах A и C, а также при вершинах B и D. Обозначим величины углов первой пары через α, а второй пары — через β (рис. 260). Зная, что сумма углов четырёхугольника равна 360°, получим $2\alpha + 2\beta = 360°$, откуда $\alpha + \beta = 180°$. Теперь на основании признака параллельности получаем, что в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно параллельны.

в) *Свойство параллелограмма.* Обозначим через O точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ (рис. 261). На основании пункта а) заключаем, что $AB = CD$. Кроме того, согласно свойству параллельных и секущей, $\angle ABO = \angle ODC$ и $\angle BAO = \angle OCD$.

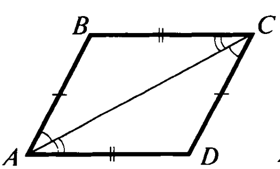


Рис. 259

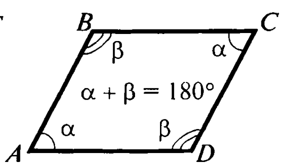


Рис. 260

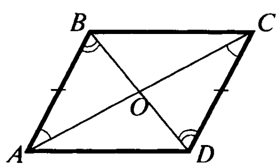


Рис. 261

6.1.

Значит, треугольники BAO и DCO равны по второму признаку равенства треугольников и $AO = CO$, $BO = OD$.

Признак параллелограмма. Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O и делятся этой точкой пополам. Тогда треугольники BAO и DCO равны согласно первому признаку равенства треугольников, поэтому $\angle BAO = \angle DCO$, т. е. прямые AB и CD параллельны на основании соответствующего признака параллельности. Точно так же параллельными являются стороны AB и BC. ▼

Прямоугольник

***Прямоугольником** называется четырёхугольник, все углы которого прямые* (рис. 262).

Рис. 262

Из определения прямоугольника следует параллельность его противоположных сторон, т. е. прямоугольник является частным видом параллелограмма.

Точнее говоря, имеет место следующая теорема.

***Теорема 6.2** (свойства прямоугольника).*

а) *Прямоугольник — параллелограмм, у которого равны диагонали.*

б) *Параллелограмм с равными диагоналями является прямоугольником.*

Доказательство. а) Справедливость первой части пункта а) следует из того, что прямые, перпендикулярные одной прямой, параллельны.

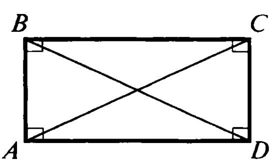


Рис. 263

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$ (рис. 263). Прямоугольные треугольники BAD и CDA равны по первому признаку равенства треугольников ($AB = CD$, так как $ABCD$ — параллелограмм, и $\angle BAD = \angle CDA = 90°$). Значит, $AC = BD$.

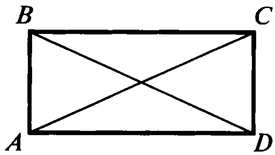


Рис. 264

б) Пусть в параллелограмме $ABCD$ равны диагонали AC и BD (рис. 264). Тогда треугольники BAD и CDA равны по третьему признаку равенства треугольников. Значит, $\angle BAD = \angle CDA$.

Но сумма этих углов равна 180°, поскольку прямые AB и CD параллельны. Следовательно, каждый из них равен 90°, а значит, прямыми являются все углы параллелограмма $ABCD$. ▼

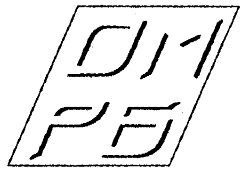


Рис. 265

Ромб

***Ромбом** называется четырёхугольник, все стороны которого равны между собой* (рис. 265).

***<u>Теорема 6.3</u>** <u>(свойства ромба).</u>*

а) ***Ромб является параллелограммом. Диагонали ромба перпендикулярны, а каждая из диагоналей является биссектрисой соответствующих углов ромба.***

б) ***Если в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм — ромб.***

в) ***Если в параллелограмме одна из диагоналей делит пополам каждый из углов, через которые она проходит, то этот параллелограмм — ромб.***

Как видим, в пункте а) сформулированы свойства ромба, а в пунктах б) и в) — признаки ромба.

Доказательство. а) То, что четырёхугольник, у которого все стороны равны, является параллелограммом, следует из соответствующего признака параллелограмма. (Теорема 6.1, пункт а), обратное утверждение.)

Далее, каждая из диагоналей, согласно свойству параллелограмма, делится точкой пересечения пополам (рис. 266). А поскольку треугольники ABC и ADC — равнобедренные, медианы BO и DO перпендикулярны их общему основанию AC и являются биссектрисами каждого из этих треугольников. Точно так же диагональ AC делит пополам углы BAD и BCD.

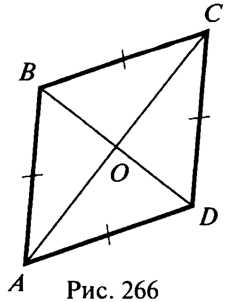


Рис. 266

6.1.

б) Если в параллелограмме $ABCD$ диагонали перпендикулярны, то ABC и ADC — равнобедренные треугольники с общим основанием AC. Это следует из соответствующего признака равнобедренного треугольника: в каждом из треугольников ABC и ADC медиана, проведённая к стороне AC, является и высотой треугольника.

Значит, $AC = BC$, $AD = DC$. Кроме того, $AB = DC$. Следовательно, $ABCD$ — ромб.

в) Справедливость утверждения этого пункта также следует из признаков равнобедренного треугольника: если указанным свойством обладает диагональ BD, то в треугольниках ABC и ADC медианы, проведённые к стороне AC, являются биссектрисами этих треугольников. ▼

Квадрат

***Квадратом** называется четырёхугольник, у которого все стороны равны между собой, а все углы — прямые* (рис. 267).

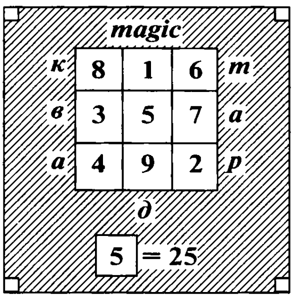


Рис. 267

Квадрат обладает всеми свойствами прямоугольника и ромба, поскольку он является и прямоугольником, и ромбом. Но у квадрата есть и свои специальные свойства, о которых будет сказано позднее.

▲■● Задачи, задания, вопросы

649. Какой четырёхугольник называется параллелограммом, прямоугольником, ромбом, квадратом?

650(в). Какие из рассмотренных в этом параграфе четырёхугольников имеют центр симметрии, а какие — ось симметрии?

651(в). Сколько осей симметрии имеет прямоугольник, ромб, квадрат? Как расположены оси симметрии этих четырёхугольников?

652. Докажите, что если у четырёхугольника есть центр симметрии, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

653. Докажите, что если около параллелограмма можно описать окружность (т. е., если существует окружность, содержащая все его вершины), то этот параллелограмм является прямоугольником.

654. Докажите, что в ромб можно вписать окружность (т. е. существует окружность, касающаяся всех сторон ромба).

655. Найдите стороны параллелограмма, у которого наибольшая сторона на 2 см больше наименьшей, а периметр равен 20 см.

656. Один из углов ромба равен 80°. Найдите углы, которые образует со сторонами ромба наименьшая диагональ.

657. Угол между диагоналями прямоугольника равен 80°. Найдите углы, которые образуют его диагонали с большей стороной.

658. Из двух равных треугольников с углами 43° и 57° составлен параллелограмм. Какие значения может принимать величина тупого угла параллелограмма?

659. На рисунке 268 $CDEK$ — параллелограмм, $DF \perp EK$, $DF = 2$ см, $CD = 10$ см, угол DEK равен 30°. Найдите CK и периметр параллелограмма.

660. На рисунке 269 $AEDF$ — параллелограмм, $AB = CD$. Докажите, что $BECF$ — параллелограмм.

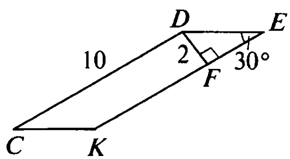


Рис. 268

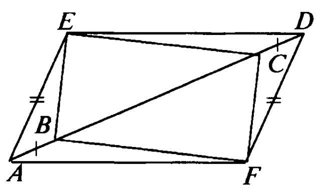


Рис. 269

661. На рисунке 270 $ABCD$ — параллелограмм, $BK = 2$, угол A равен 30°. Найдите BD, углы BDC и DBC.

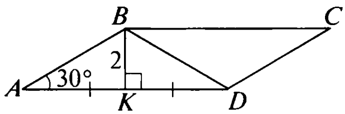


Рис. 270

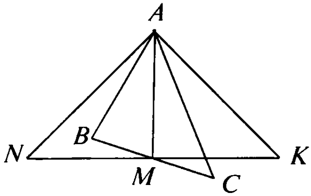


Рис. 271

662. На рисунке 271 AM — медиана к BC и NK. Докажите, что $BK = NC$.

663. На рисунке 272 $ABCDEF$ — выпуклый шестиугольник, $AB = ED$, $AB \parallel ED$, $BC = FE$, $BC \parallel FE$. Докажите, что точка O — общая точка прямых AD, BE, CF.

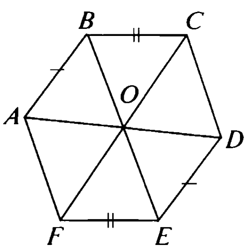


Рис. 272

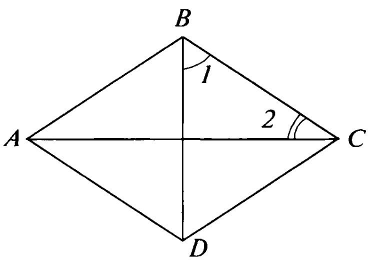


Рис. 273

664. На рисунке 273 $ABCD$ — ромб, градусные меры углов *1* и *2* относятся как 2 : 1, $BD = 3$ см. Найдите угол BAD и периметр ромба.

665. На рисунке 274 $ABCD$ — прямоугольник. Найдите BD.

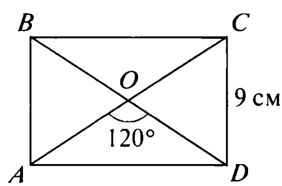


Рис. 274

666. Какие высказывания верны:

а) если диагонали четырёхугольника равны, то он является прямоугольником;

б) если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то он ромб;

в) если параллелограмм является прямоугольником, то его диагонали являются биссектрисами его углов;

г) если в параллелограмме две смежные стороны равны, то этот параллелограмм есть ромб?

667. В параллелограмме проведены биссектрисы углов A и C, которые пересекают стороны BC и AD в точках P и M соответственно. Определите вид четырёхугольника $APCM$.

668. Докажите, что прямая, проходящая через середины противоположных сторон прямоугольника, является его осью симметрии.

669. Докажите, что прямая, содержащая диагональ ромба, является его осью симметрии.

670(пт). Верно ли, что выпуклый четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом (O — точка пересечения его диагоналей), если:

а) стороны AB и CD равны, а стороны BC и AD параллельны;

б) $AO = OC$, а стороны AB и CD параллельны;

в) $AB = CD$ и $\angle BAD = \angle DCB$;

г) $AO = OC$ и $AB = CD$;

д) $AO = OC$ и $\angle ABC = \angle ADC$.

671(п). На плоскости расположены точки A, B, C и D. Известно, что $\angle ABC = \angle ADC$ и $\angle BAD = \angle BCD$. Обязательно ли данные точки служат вершинами параллелограмма?

672. Найдите меньшую диагональ ромба со стороной, равной 1, и острым углом в 60°.

673. На сторонах AB и CD прямоугольника $ABCD$ взяты точки K и M так, что $AKCM$ — ромб. Диагональ AC составляет со стороной AB угол 30°. Найдите сторону ромба, если наибольшая сторона прямоугольника $ABCD$ равна 3.

674. Серединный перпендикуляр к диагонали прямоугольника делит сторону на части, пропорциональные числам 1 и 2. Найдите величину угла между диагоналями.

675. Прямая, проходящая через центр прямоугольника перпендикулярно его диагонали, пересекает бо́льшую сторону прямоугольника под углом 60°. Длина отрезка этой прямой, заключённого внутри прямоугольника, равна 10. Найдите длину большей стороны прямоугольника.

676. На стороне BC прямоугольника $ABCD$ выбрана такая точка M, что углы AMB и AMD равны. Найдите угол AMB, если $BC = 2AB$.

677. Точки M и N — середины сторон BC и CD прямоугольника $ABCD$. Угол между прямыми BN и MD равен 40°. Найдите угол MAN.

678(т). В прямоугольном треугольнике ABC на катетах AB и BC взяты точки M и N так, что $AM = CB$ и $MB = CN$. Найдите угол между отрезками AN и CM.

679(т). Точка N расположена на стороне CD квадрата $ABCD$, точка M — на стороне AB. Сумма длин MD и ND равна AB. Найдите сумму углов, под которыми отрезок MN виден из точек A, B и C.

680(в). Около каких из рассмотренных в этом параграфе четырёхугольников можно описать окружность, а в какие можно вписать окружность? (Описать около четырёхугольника окружность означает: построить окружность, проходящую через все вершины этого четырёхугольника; вписать — построить окружность, касающуюся всех сторон этого четырёхугольника.)

681(пт). О параллелограмме $ABCD$ известно, что $\angle ABD = 40°$ и что центры окружностей, описанных около треугольников ABC и CDA, лежат на диагонали BD. Найдите $\angle DBC$.

682(т). Диагонали выпуклого четырёхугольника делят его на четыре треугольника. Известно, что радиусы окружностей, описанных около этих четырёх треугольников, равны между собой. Докажите, что этот четырёхугольник — ромб.

683(п). Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K и продолжение стороны CD в точке M. Известно, что $CM = 1$, $BK = 3$. Найдите стороны параллелограмма.

684. Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, перпендикулярны.

685. Докажите, что биссектрисы противоположных углов параллелограмма либо параллельны, либо совпадают.

686. От параллелограмма с помощью прямой, пересекающей две его противоположные стороны, отрезали ромб. От оставшегося параллелограмма таким же образом вновь отрезали ромб. И от вновь оставшегося параллелограмма опять отрезали ромб. В результате остался параллелограмм со сторонами 1 и 2. Найдите стороны исходного параллелограмма.

687. Две окружности с равными радиусами пересекаются в двух точках (рис. 275). Докажите, что $MANB$ и AO_1BO_2 — ромбы.

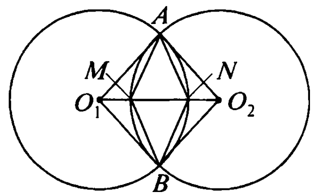


Рис. 275

688. Докажите, что углы, опирающиеся на одну хорду или равные хорды окружности, а также на равные хорды в равных окружностях, или равны, или в сумме составляют 180°.

689. Постройте прямоугольник по стороне и диагонали.

690. В данный треугольник MNP впишите ромб (т. е. все вершины ромба должны лежать на сторонах треугольника), имеющий с треугольником общий угол M.

691. Около данной окружности опишите ромб с данной стороной.

692. Постройте квадрат, если известен радиус R описанной около него окружности.

693. Постройте:

а) параллелограмм по двум диагоналям и одной из его сторон;

б) ромб по двум диагоналям.

694. В данную окружность впишите прямоугольник с данным углом между диагоналями.

695. Существует ли параллелограмм с диагоналями 10 и 6 и стороной 2? Если такой параллелограмм не существует, измените данные так, чтобы параллелограмм можно было бы построить.

696(т). В ромбе $ABCD$ с углом A, равным 60°, расположен треугольник BNM так, что точка N лежит на AD, а точка M — на DC. Угол BNM равен 60°. Найдите углы NBM и BMN.

697(т). На сторонах AD и DC ромба $ABCD$ построены правильные треугольники AKD и DMC так, что точка K лежит по ту же сторону от AD, что и прямая BC, а точка M — по другую сторону от DC, чем AB. Докажите, что точки B, K и M лежат на одной прямой.

698(т). Докажите, что биссектрисы углов параллелограмма при пересечении образуют прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности соседних сторон параллелограмма.

699(т). Будем говорить, что фигура имеет постоянную ширину, если она может вращаться между двумя параллельными прямыми так, что её граница не пересекает ни одной из этих прямых, но всегда касается каждой из них (т. е. на каждой из прямых лежит хотя бы одна точка, принадлежащая границе фигуры). Понятно, что круг имеет постоянную ширину. Но оказывается, существуют и другие фигуры постоянной ширины. Например, так называемый *треугольник Рело*. Он получается следующим образом.

Рассмотрим равносторонний треугольник. Построим три круга с центрами в вершинах этого треугольника и радиусами, равными его стороне. Общая часть этих трёх кругов и является треугольником Рело.

Проверьте, что треугольник Рело имеет постоянную ширину. Найдите ещё какие-нибудь фигуры постоянной ширины.

700(т). Плоскость пересекает рёбра AB, BC, CD и DA пирамиды $ABCD$ в точках K, P, M и H соответственно; известно, что $KPMH$ — параллелограмм. Докажите, что стороны этого параллелограмма параллельны AC и BD.

6.2. Теорема Фалеса и следствия из неё

Самым древним из учёных, вошедших в историю геометрии, является греческий философ Фалес, живший свыше двух с половиной тысячелетий тому назад. Можно сказать, что с Фалеса начинается история геометрии как науки. О Фалесе и его достижениях в геометрии было сказано в главе 3. А сейчас сформулируем и докажем теорему, которая лежит в основе теории подобия.

Теорема Фалеса

***Теорема 6.4** (теорема Фалеса).*

Пусть через точки A, B, C и D, расположенные на одной стороне угла, проведены параллельные прямые, пересекающие другую сторону этого угла в точках A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Тогда если равны отрезки AB и CD, то равны и отрезки A_1B_1 и C_1D_1.

Доказательство. Проведём через A и C прямые, параллельные другой стороне угла (рис. 276). Получим два параллелограмма $AB_2B_1A_1$ и $CD_2D_1C_1$. Согласно свойству параллелограмма (теорема 6.1), $AB_2 = A_1B_1$ и $CD_2 = C_1D_1$. Итак, нам осталось доказать равенство $AB_2 = CD_2$. Треугольники ABB_2 и CDD_2 равны на основании второго признака равенства треугольников; $AB = CD$ согласно условию теоремы; $\angle ABB_2 = \angle CDD_2$ как соответственные, образовавшиеся при пересечении параллельных BB_1 и DD_1 прямой BD; точно так же каждый из углов BAB_2 и DCD_2 оказывается равным данному углу с вершиной O. Таким образом, теорема доказана полностью. ▼

Средняя линия треугольника

***Средней линией треугольника** называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон* (рис. 277).

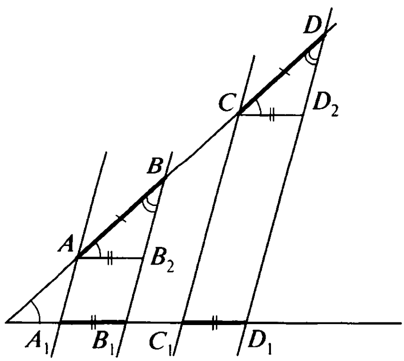


Рис. 276

Рис. 277

6.2

Теорема 6.5 (*о средней линии треугольника*).

Средняя линия треугольника параллельна соответствующей стороне этого треугольника и равна половине этой стороны.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC и обозначим через D середину стороны AB (рис. 278). Проведём через D прямую, параллельную AC. Пусть эта прямая пересекает BC в точке E.

Согласно теореме Фалеса, $BE = EC$, т. е. DE и есть средняя линия треугольника. Первая часть теоремы доказана.

Теперь проведём через E прямую, параллельную AD, и обозначим через F точку её пересечения с AC. Поскольку E — середина BC, по теореме Фалеса F — середина AC. Но $ADEF$ — параллелограмм, значит, $DE = AF = \frac{1}{2} AC$. Таким образом, теорема доказана. ▼

Трапеция

Трапецией *называется четырёхугольник, у которого две стороны параллельны между собой, а две другие не параллельны.*

Параллельные стороны трапеции называются ***основаниями*** *трапеции, а непараллельные —* ***боковыми сторонами*** (рис. 279).

Трапеция с равными боковыми сторонами называется ***равнобочной***. Так же её называют *равнобокой* или *равнобедренной*.

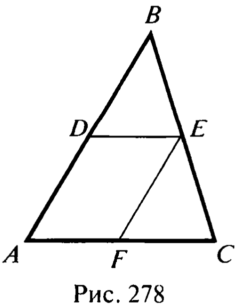


Рис. 278

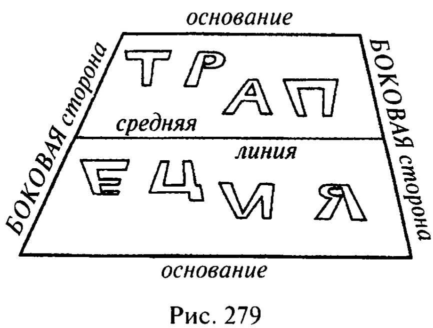


Рис. 279

Вообще-то трапеция должна была «открывать» рассматриваемый нами ряд четырёхугольников. Тогда мы имели бы «цепочку», в которой постепенно возрастает число условий, определяющих вид четырёхугольника. Но только сейчас у нас появилась возможность доказать одну важную теорему о трапеции.

Введём ещё один термин.

Средней линией трапеции *называется отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.*

Теорема 6.6 *(о средней линии трапеции).*

Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 280). Обозначим через K и M середины боковых сторон AB и CD. Рассмотрим ещё одну точку — середину P диагонали BD.

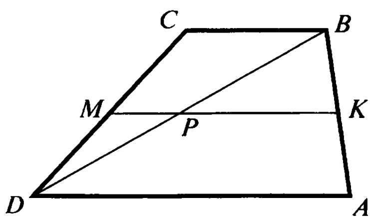


Рис. 280

Тогда KP — средняя линия треугольника ABD, а PM — средняя линия треугольника BDC. По теореме 6.5 KP и PM параллельны соответственно AD и BC, а поскольку AD и BC параллельны между собой, точки K, P и M лежат на одной прямой, параллельной основаниям трапеции. Кроме того,

$$KM = KP + PM = \frac{1}{2}(AD + BC). \blacktriangledown$$

Конечно же теорема о средней линии верна не только для трапеций, но и для параллелограммов, а значит, и для всех остальных рассмотренных нами видов четырёхугольников.

6.2

Пропорциональные отрезки

В начале нашего курса мы говорили, что любым двум отрезкам соответствует число, которое называется *отношением этих отрезков.*

Отношение двух отрезков a и b мы записываем в виде дроби $\frac{a}{b}$; оно является числом, равным отношению длин данных отрезков. Это число не зависит от единицы длины, выбранной для измерения отрезков. Можно сказать, что отношение отрезков a и b равно длине отрезка a, когда в качестве единицы измерения взят отрезок b.

Рассмотрим теперь две пары отрезков: a и b, c и d. Будем говорить, что эти пары пропорциональны, если их отношения равны, т. е. имеет место равенство $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Теория подобия основывается на следующей теореме.

Теорема о пропорциональных отрезках

Теорема 6.7 *(об отрезках, возникающих при пересечении сторон угла параллельными прямыми).*

Пусть стороны угла пересекаются двумя параллельными прямыми. Тогда отрезки, образовавшиеся на одной стороне угла, пропорциональны соответствующим отрезкам на другой его стороне.

Иными словами, если A — вершина угла и пара параллельных прямых пересекает одну сторону в точках B и C, а другую — соответственно в точках B_1 и C_1, то $\frac{AB}{BC} = \frac{AB_1}{B_1C_1}$. Эту теорему часто называют «*обобщённой теоремой Фалеса*».

Доказательство. Заметим, что если на одной стороне угла последовательно отложить от вершины равные отрезки и через их концы провести параллельные прямые, то в соответствии с теоремой Фалеса на другой стороне угла также образуются равные отрезки.

Перейдём теперь непосредственно к доказательству теоремы. Рассмотрим угол с вершиной в точке A, стороны которого

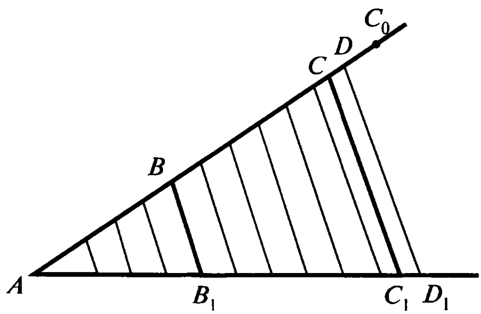


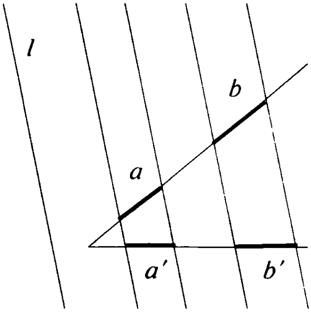
Рис. 281

пересечены параллельными прямыми BB_1 и CC_1 (рис. 281). Нам требуется доказать равенство $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$.

Предположим, что эти дроби не равны. Пусть, например, $\frac{BC}{AB} < \frac{B_1C_1}{AB_1}$. Возьмём на продолжении отрезка BC точку C_0 так, что $\frac{BC_0}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}$. Разделим отрезок AB на достаточно большое число равных отрезков таких, что длина каждого из них меньше длины отрезка CC_0. Пусть h — длина одного из отрезков разбиения. Будем последовательно откладывать от точки B отрезки длины h до тех пор, пока конец одного из них (обозначим его буквой D) не попадёт внутрь отрезка CC_0. Такой момент непременно наступит, поскольку длина шага h меньше длины CC_0. Проведём через концы получившихся маленьких отрезков прямые, параллельные прямым BB_1 и CC_1. Точке D будет соответствовать точка D_1. При этом отрезок B_1D_1 больше отрезка B_1C_1. Как мы знаем, построенная система параллельных образует на другой стороне угла также равные отрезки. Пусть длина каждого равна h_1. Если на отрезке AB было n отрезков длины h, а на отрезке BD было m таких отрезков, то отрезок AB_1 окажется разделённым на n отрезков длины h_1, а отрезок B_1D_1 — на m таких же отрезков. Значит,

$$\frac{BD}{AB} = \frac{m}{n} = \frac{B_1D_1}{AB_1}.$$

6.2



$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$$

Рис. 282

Но, с другой стороны,

$$\frac{BC_0}{AB} > \frac{BD}{AB} = \frac{B_1D_1}{AB_1} > \frac{B_1C_1}{AB_1},$$

что противоречит выбору точки $C_0\left(\frac{BC_0}{AB} = \frac{B_1C_1}{AB_1}\right)$. Полученное противоречие доказывает теорему. ▼

В связи с доказанной теоремой сделаем одно замечание. Если дан угол и прямая l, то любая пара прямых, параллельных l, высекает на сторонах угла пару отрезков, отношение которых постоянно. Это отношение определяется лишь направлением прямой l (рис. 282).

▲■● Задачи, задания, вопросы

701(н). На рисунке 283 $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, $OB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$, $A_1A_3 = 10$ см. Найдите OA_1.

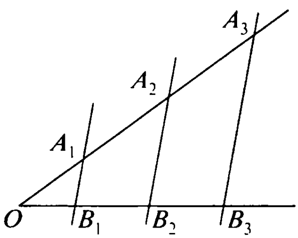


Рис. 283

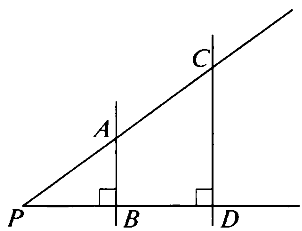


Рис. 284

702(н). На рисунке 284 $AB \perp PD$, $CD \perp PD$, $BP = BD = 3$ см, $PC = 8$ см. Найдите AC.

703(н). На рисунке 285 сумма градусных мер углов *1* и *2* равна 180°, $OM = 10$ см, $KN = NO$. Найдите PM.

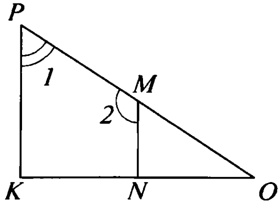


Рис. 285

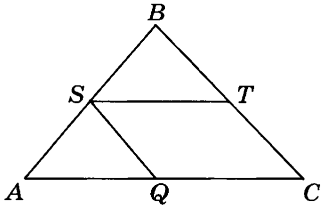


Рис. 286

704(н). На рисунке 286:

а) зная, что ST и SQ — средние линии треугольника ABC, $AB = 10$ см, найдите TQ;

б) зная, что сумма ST и AC равна 9 см, найдите ST.

705(н). На рисунке 287 треугольник ABC — равносторонний, DE — средняя линия, $DE = 8$ см. Найдите периметры треугольников DBE и ABC.

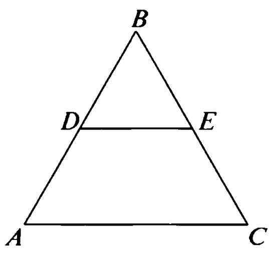


Рис. 287

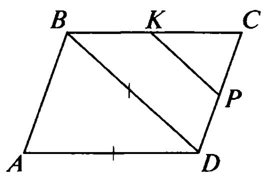


Рис. 288

706(н). На рисунке 288 $ABCD$ — параллелограмм. Угол ABC равен 120°, $BD = AD$, точка K — середина BC, точка P — середина CD, периметр $ABCD$ равен 32 см. Найдите KP.

707(в). Докажите, что средние линии треугольника делят его на четыре равных треугольника.

708(в). Докажите, что середины сторон четырёхугольника служат вершинами параллелограмма, стороны которого параллельны диагоналям четырёхугольника и равны половинам этих диагоналей.

709(н). Докажите, что:

а) отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, в точке пересечения делятся пополам;

б) середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба;

в) середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника;

г) середины сторон квадрата являются вершинами другого квадрата.

710(н). Что можно сказать о четырёхугольнике, у которого середины сторон являются вершинами:

а) прямоугольника;

б) квадрата?

711. Отрезок, соединяющий середины сторон AB и AC треугольника ABC, на 3 см меньше стороны BC, на 2 см меньше стороны AC и на 1 см меньше стороны AB. Найдите периметр треугольника ABC.

712. Средняя линия трапеции равна пяти, разность оснований равна двум. Найдите основания трапеции.

713. Основания трапеции равны 7 и 5. Каждая из боковых сторон разделена тремя точками на четыре равные части. Соответствующие точки деления соединены. Чему равны получившиеся отрезки?

714. На одной стороне угла взяты два отрезка, длины которых 2 см и 5 см. Через концы этих отрезков проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне угла два соответственных отрезка. Найдите длины образовавшихся отрезков, если известно, что один из них больше другого на 9 см.

715. Во сколько раз периметр треугольника с вершинами в серединах сторон данного треугольника меньше его периметра?

716(п). Докажите, что если диагонали четырёхугольника равны, то середины его сторон служат вершинами ромба.

717(п). Докажите, что если диагонали четырёхугольника перпендикулярны, то середины его сторон служат вершинами прямоугольника.

718(п). Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, перпендикулярны, то его диагонали равны.

719(п). Докажите, что если отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника, равны, то его диагонали перпендикулярны.

720. Дан четырёхугольник, у которого нет параллельных сторон, и точка пересечения диагоналей не является их серединой. Докажите, что середины двух его противоположных сторон и середины его диагоналей являются вершинами параллелограмма.

721. Докажите, что точка пересечения отрезков, соединяющих середины противоположных сторон четырёхугольника, отличного от параллелограмма, делит пополам отрезок, соединяющий середины его диагоналей.

722(т). В четырёхугольнике $ABCD$ точка E — середина AB, F — середина CD. Докажите, что середины отрезков AF, CE, BF, DE являются вершинами параллелограмма.

723(в). Через вершины треугольника проведены прямые, параллельные его противоположным сторонам. Докажите, что стороны получившегося треугольника в два раза больше сторон исходного треугольника.

724. На сторонах AB и AC треугольника ABC взяты соответственно точки M и K, причём $AM = \frac{3}{4}AB$, $AK = \frac{3}{4}AC$. Найдите длину отрезка MK, если $BC = 5$.

725. Найдите геометрическое место середин всевозможных отрезков, один конец которых совпадает с вершиной A треугольника ABC, а другой расположен на стороне BC.

726. Данный треугольник разрежьте на 4 равных треугольника. Приведите пример треугольника, который можно разрезать на 4 равных треугольника двумя различными способами.

727(п). Найдите длину отрезка, соединяющего середины диагоналей трапеции, если её основания равны a и b.

728. AB и BC — соответственно боковая сторона и меньшее основание трапеции $ABCD$. Известно, что AB равно 2,6, а BC равно 2,5. Какой из отрезков пересекает биссектриса угла A — основание BC или боковую сторону CD?

729. Биссектрисы углов при одном из оснований трапеции пересекаются на втором основании. Найдите длину второго основания, если боковые стороны трапеции равны a и b.

730(в). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC через вершину C проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AD в точке M. Докажите, что в треугольнике DCM две стороны равны боковым сторонам трапеции, а третья сторона равна разности её оснований.

731(в). Докажите, что в равнобочной трапеции:
а) равны углы при каждом основании;
б) равны диагонали.

732. Диагональ делит равнобочную трапецию на два равнобедренных треугольника. Найдите величину угла между диагоналями трапеции.

733(п). Докажите, что если в трапеции выполняется одно из следующих условий:
а) равны углы при основании;
б) равны диагонали,
то эта трапеция является равнобочной.

734(п). Постройте трапецию по четырём её сторонам.

735(п). Постройте трапецию по основаниям и диагоналям.

736. Через концы основания AD трапеции $ABCD$ проведена окружность, пересекающая прямые AB и CD в точках K и M. Докажите, что точки B, C, K и M расположены на одной окружности.

737(в). Данный отрезок разделите на три равные части.

738. Разделите данный отрезок AB точкой C в отношении:
а) 2 : 3, считая от точки A;
б) 3 : 2, считая от точки A.

739. На одной из сторон угла расположены два отрезка длиной 3 и 4. Через их концы проведены параллельные прямые, образующие на другой стороне также два отрезка. Длина большего из отрезков равна 6. Найдите длину другого отрезка.

740(п). Основания трапеции равны a и b. Две прямые, параллельные основаниям, делят одну из боковых сторон на три равные части. Найдите отрезки этих прямых, лежащие внутри трапеции.

741. Докажите, что если диагонали равнобочной трапеции взаимно перпендикулярны, то её высота равна средней линии трапеции.

742. На рисунке 289 $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$), окружность с центром в точке O вписана в трапецию. Докажите, что углы AOB и COD прямые.

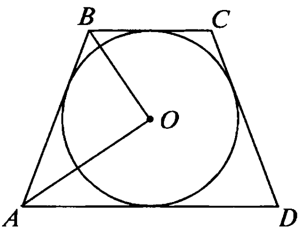


Рис. 289

743. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB равна 5, а основание BC равно 4. Какую из сторон трапеции, BC или CD, пересекает биссектриса угла A этой трапеции?

744(пт). Докажите, что если в четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины AB и CD, равен полусумме AD и BC, то AD и BC параллельны.

745. На стороне AB четырёхугольника $ABCD$ взята точка M_1. Через эту точку проведём прямую, параллельную диагонали AC, пересекающую BC в точке M_2. Прямая, проходящая через M_2 параллельно BD, пересекает CD в точке M_3. Затем получаем таким же образом точку M_4 на DA и точку M_5 на AB. Докажите, что точка M_5 совпадает с M_1.

746(т). Длина одного из оснований равнобедренной трапеции втрое больше длины другого основания. Из середины большего основания меньшее видно под углом в два раза меньшем, чем угол, под которым большее основание видно из середины меньшего. Найдите величины этих углов.

747(т). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC биссектрисы углов при вершинах A и B пересекаются в точке M, а биссектрисы углов при вершинах C и D — в точке N. Найдите MN, если известно, что $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $AD = d$.

748(т). На рисунке 290 $ABCD$ — трапеция, периметр которой равен P. AR, BR, CQ, DQ — биссектрисы внешних углов при вершинах A, B, C, D соответственно. Найдите RQ.

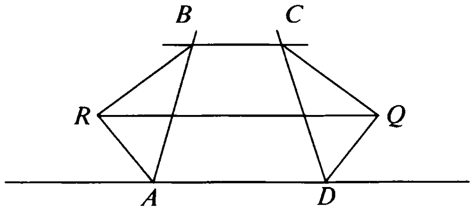


Рис. 290

749(т). Как одним прямолинейным разрезом отрезать от треугольника трапецию, у которой меньшее основание было бы равно сумме её боковых сторон?

750(т). Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне трапеции.

751(т). В треугольнике ABC на стороне AB взята точка M_1. Прямая, проходящая через M_1 параллельно CA, пересекает BC в точке M_2. Прямая, проходящая через M_2 параллельно AB, пересекает AC в точке M_3. Прямая, проходящая через M_3 параллельно BC, пересекает AB в точке M_4. При каком положении точки M_1 точка M_4 совпадает с ней? Пусть точка M_4 не совпала с M_1. Продолжая этот процесс, последовательно получим точки M_5, M_6 и M_7. Докажите, что M_7 всегда совпадает с M_1.

752(т). В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC имеет место равенство $\angle ABD = \angle ACD$. Докажите, что эта трапеция равнобочная.

753(т). Диагонали трапеции с основаниями AD и BC пересекаются в точке O. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AOD и BOC, касаются друг друга.

754(п). Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, вторично пересекает окружности в точках K и M, а прямая, проходящая через B, вторично пересекает окружности в точках P и Q. Докажите, что точки K, M, P и Q служат вершинами трапеции или параллелограмма.

755(т). Докажите, что точка пересечения диагоналей трапеции расположена ближе к меньшему её основанию, чем к большему.

756(т). Основания трапеции равны 4 и 3, а боковые стороны при продолжении пересекаются под прямым углом. Найдите длину отрезка, соединяющего середины оснований трапеции.

757(т). Сумма углов при верхнем основании трапеции равна 270°. Докажите, что точка пересечения продолжения боковых сторон и середины оснований трапеции лежат на одной прямой.

758. Докажите, что середины непараллельных сторон трапеции и середины её диагоналей лежат на одной прямой.

759(т). На рисунке 291 $ABCD$ — трапеция ($BC \parallel AD$), P — середина BC, K — середина AD, F — середина AP, E — середина BK, M — середина KC, N — середина PD, O — середина PK. Докажите, что точки F, E, M, N, O — лежат на одной прямой.

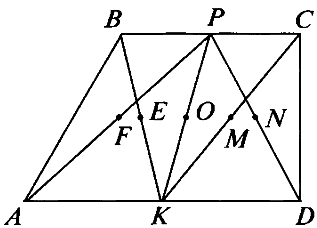


Рис. 291

760(т). На стороне CB треугольника ABC взята точка M, а на стороне CA взята точка P. Известно, что $\frac{CP}{CA} = 2\frac{CM}{CB}$.

Через M проведена прямая, параллельная CA, а через P — прямая, параллельная AB. Докажите, что построенные прямые пересекаются на медиане, выходящей из вершины C.

761. Покажите, каким образом произвольный треугольник можно разрезать на три трапеции.

762(т). Через вершину C параллелограмма $ABCD$ проведена произвольная прямая, пересекающая продолжения сторон AB и AD в точках K и M соответственно. Докажите, что произведение $BK \cdot DM$ не зависит от того, как проведена эта прямая.

763. Докажите, что если у треугольной пирамиды все грани — равные между собой треугольники, то, разрезав её поверхность по трём рёбрам, выходящим из одной вершины, мы получим в качестве развёртки треугольник, в котором проведены средние линии.

764. Докажите, что если в треугольной пирамиде сумма углов при каждой из трёх вершин равна 180°, то все её грани являются равными треугольниками.

6.3. Подобные треугольники. Признаки подобия треугольников

Подобие треугольников

В начале этой главы мы говорили о том, что существование подобных фигур является одним из основных свойств нашего пространства. На основании личного опыта, интуиции мы достаточно хорошо умеем узнавать подобные предметы или фигуры, выделять их среди прочих. Тем не менее перевести эти представления на чёткий математический, геометрический язык не так просто. Поэтому мы начнём изучение свойств подобия с основной простейшей геометрической фигуры — с треугольника.

*Два треугольника называются **подобными**, если у них равны соответствующие углы, а соответствующие стороны пропорциональны.*

Это означает, что если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны между собой, причём вершинам A, B и C соответствуют вершины A_1, B_1 и C_1, то углы при этих вершинах равны между собой и, кроме того, выполняются равенства

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Обозначим эти отношения через k и будем называть величину k ***коэффициентом подобия*** треугольника $A_1B_1C_1$ по отношению к треугольнику ABC.

Подобие треугольников принято обозначать символом $\backsim$. В нашем случае мы могли бы записать $\triangle A_1B_1C_1 \backsim \triangle ABC$ (рис. 292) ($\triangle$ — общепринятый знак, обозначающий треугольник.)

Мы только что определили, какие треугольники называются подобными. Однако данное определение не гарантирует существование не равных, но подобных треугольников. Следующая теорема, вытекающая из теоремы о пропорциональных отрезках, утверждает также и то, что такие треугольники существуют.

Основная теорема о подобных треугольниках

Теорема 6.8 *(основная теорема о подобных треугольниках).* ***Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, образуют с его сторонами подобные между собой треугольники.***

Теорема утверждает, что если стороны угла с вершиной A пересекаются двумя параллельными прямыми, одна из которых пересекает их в точках B и C, а другая — в точках B_1 и C_1 соответственно, то треугольники ABC и AB_1C_1 подобны. При этом соответственными являются вершины A и A, B и B_1, C и C_1.

Доказательство. То, что в треугольниках ABC и AB_1C_1 (рис. 293) соответствующие углы равны, непосредственно следует из свойств параллельных прямых. Так что одно из условий, определяющих подобие треугольников, выполнено.

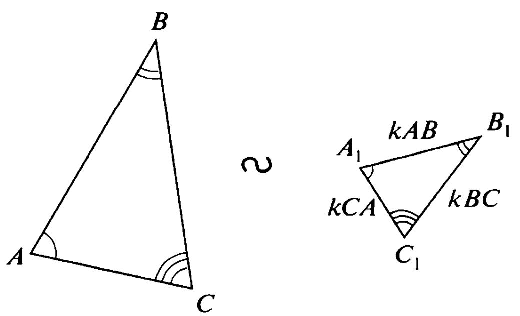


Рис. 292

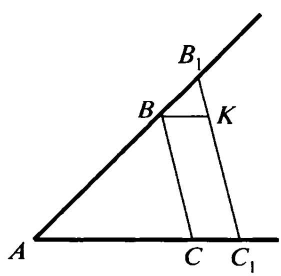


Рис. 293

6.3

Пропорциональность сторон AB и AB_1, AC и AC_1 утверждается в теореме 6.7. Из этой теоремы следует равенство $\frac{BB_1}{AB} = \frac{CC_1}{AC}$. Но если к обеим частям последнего равенства прибавить по 1, то получим

$$\frac{AB + BB_1}{AB} = \frac{AC + CC_1}{AC}, \quad \frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC},$$

что означает пропорциональность пар сторон AB, AB_1 и AC, AC_1. Для завершения доказательства осталось установить, что и оставшаяся пара сторон BC и B_1C_1 пропорциональна двум рассмотренным. Для этого проведём через вершину B прямую, параллельную AC, и обозначим через K точку её пересечения с B_1C_1. Поскольку $CBKC_1$ — параллелограмм, $KC_1 = BC$. Теперь по теореме 6.7, как и выше, получаем, что

$$\frac{B_1C_1}{KC_1} = \frac{AB_1}{AB} \quad \text{или} \quad \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AB_1}{AB}.$$

Таким образом, доказательство теоремы завершено. ▼

Признаки подобия треугольников

В соответствии с тремя признаками равенства треугольников можно сформулировать и три признака подобия треугольников.

Первый признак подобия треугольников.

Если угол одного треугольника равен углу другого, а стороны, образующие этот угол в одном треугольнике, пропорциональны соответствующим сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Второй признак подобия треугольников.

Если два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого, то такие треугольники подобны.

Третий признак подобия треугольников.

Если три стороны одного треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого, то такие треугольники подобны.

Доказательство. Начало доказательства одинаково для всех трёх признаков. Рассмотрим два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, для которых выполняется одно из трёх сформулированных условий (рис. 294). Причём будем считать, что обозначения выбраны следующим образом.

Первый признак. Равны углы при вершинах A и A_1, кроме того,

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}.$$

Второй признак. Равны углы при вершинах A и A_1, B и B_1.

Третий признак. Верны равенства

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}.$$

Отложим на луче AB отрезок $AB_2 = A_1B_1$ и проведём через B_2 прямую, параллельную BC. Получившийся треугольник AB_2C_2 подобен треугольнику ABC по теореме 6.8.

Нам остаётся доказать, что треугольник AB_2C_2 равен треугольнику $A_1B_1C_1$.

Первый признак. В треугольниках $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны углы при вершинах A и A_1, $A_1B_1 = AB_2$. Кроме того, по условию $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1C_1}{AC}$, а из того, что треугольники AB_2C_2 и ABC подобны, следует равенство $\frac{AB_2}{AB} = \frac{AC_2}{AC}$. Из этих двух равенств получаем (так как $A_1B_1 = AB_2$), что $A_1C_1 = AC_2$. Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны по первому признаку равенства треугольников.

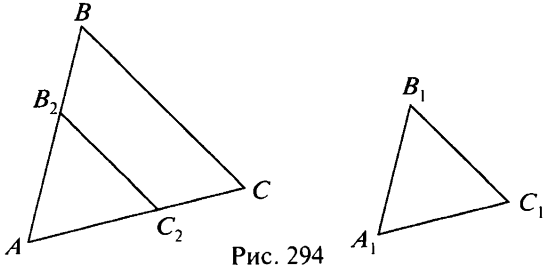


Рис. 294

Второй признак. Треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 имеют по одной равной стороне ($A_1B_1 = AB_2$). Кроме того, равны углы, прилежащие к этим сторонам. Эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников.

Третий признак. По условию и на основании теоремы 6.8 имеем следующие равенства:

$$\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{B_1C_1}{BC} = \frac{C_1A_1}{CA}, \quad \frac{AB_2}{AB} = \frac{B_2C_2}{BC} = \frac{C_2A}{CA}.$$

А так как $A_1B_1 = AB_2$, то $B_1C_1 = B_2C_2$, $C_1A_1 = C_2A$.

Значит, треугольники $A_1B_1C_1$ и AB_2C_2 равны по третьему признаку равенства треугольников. ▼

Итак, все три признака доказаны. Сразу отметим, что чаще всего при решении задач, в доказательстве теорем используется второй признак.

Кроме трёх указанных признаков можно доказать и специальный признак подобия прямоугольных треугольников, соответствующий специальному признаку равенства прямоугольных треугольников. Но мы этого делать не будем, так как он на практике почти не используется.

Важное свойство подобных фигур

Подобные между собой треугольники обладают одним очень важным свойством, которое является характерным для любых подобных фигур.

Теорема 6.9 (*основное свойство подобных треугольников*).

Отношение любых соответствующих линейных элементов двух подобных треугольников равно коэффициенту подобия.

Это означает, что если ABC и $A_1B_1C_1$ — подобные треугольники, причём коэффициент подобия равен k (треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом k), то каждой точке одного треугольника можно поставить в соответствие одну точку другого. При этом, если точке M в треугольнике ABC соответствует точка M_1 треугольника $A_1B_1C_1$, а точке K треугольника ABC — точка K_1 треугольника $A_1B_1C_1$, то $\frac{M_1K_1}{MK} = k$.

Доказательство. Пусть M — некоторая точка треугольника ABC (рис. 295). Поставим ей в соответствие точку M_1 треугольника $A_1B_1C_1$ таким образом, чтобы треугольник $A_1B_1M_1$ был подобен треугольнику ABM. (Соответствующими являются вершины, обозначенные одинаковыми буквами.) При этом треугольник $A_1B_1M_1$ по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$ расположен так же, как и треугольник ABM по отношению к треугольнику ABC. Понятно, что такое соответствие можно установить между всеми точками этих треугольников (например, откладывая углы от вершин A, A_1 и B, B_1). Пусть теперь точке K таким же образом поставлена в соответствие точка K_1.

Треугольник $A_1B_1M_1$ подобен треугольнику ABM с коэффициентом k. С этим же коэффициентом треугольник $A_1B_1K_1$ подобен треугольнику ABK. Из этого следует, что

$$\frac{A_1M_1}{AM} = \frac{A_1B_1}{AB} = \frac{A_1K_1}{AK} = k.$$

При этом $\angle MAK = \angle MAB - \angle KAB = \angle M_1A_1B_1 - \angle K_1A_1B_1 = \angle M_1A_1K_1$. Следовательно, треугольник $M_1A_1K_1$ подобен треугольнику MAK с коэффициентом k (по первому признаку подобия). Значит, $\frac{M_1K_1}{MK} = k$. ▼

Доказанное в последней теореме свойство лежит в основе определения подобия для произвольных фигур.

*Две фигуры F и F_1 называются **подобными**, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие (т. е. каждой точке одной фигуры соответствует*

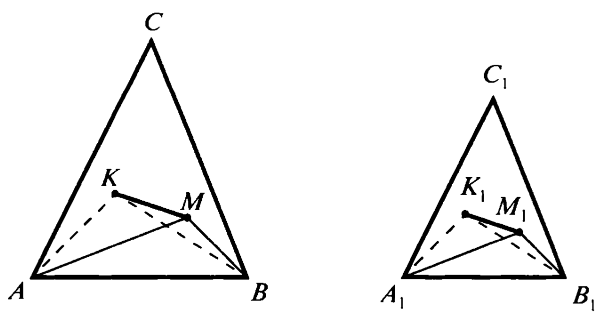


Рис. 295

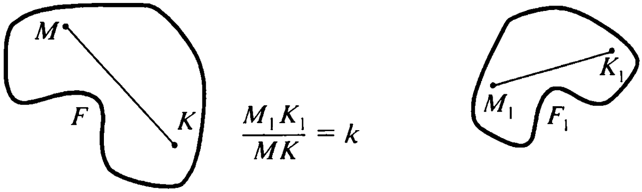


Рис. 296

одна точка другой фигуры, и наоборот), сохраняющее отношение расстояний (рис. 296).

Это значит, что если точкам M и K фигуры F соответствуют точки M_1 и K_1 фигуры F_1, то $\frac{M_1K_1}{MK} = k$, где k — постоянная величина, называемая ***коэффициентом подобия*** фигуры F_1 по отношению к фигуре F.

Понятие подобия распространяется и на пространственные объекты, тела.

Точки подобных фигур, соответствующие друг другу, называются ***соответственными***. Отрезки, концами которых являются соответственные точки, мы также будем называть ***соответственными***.

При решении некоторых задач на подобие очень часто полезным может оказаться следующий простой факт: ***отношение отрезков в одной фигуре равно отношению соответствующих отрезков в подобной фигуре***. Это значит, что если отрезку a одной фигуры соответствует отрезок a_1 другой, а отрезку b соответствует отрезок b_1, то $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$. В самом деле, по определению подобных фигур $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b}$. Значит, $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$.

▲■● Задачи, задания, вопросы

765(н). Какие треугольники называются подобными?

766(н). Дайте определения подобия для произвольных фигур.

767(н). Запишите равенство отношений соответственных сторон в подобных треугольниках, представленных на рисунке 297.

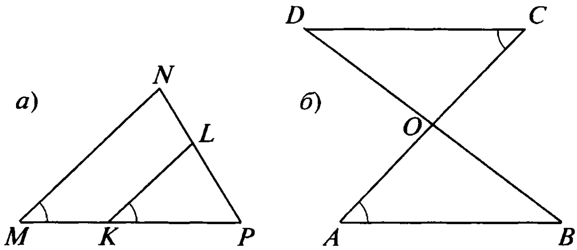


Рис. 297

768(н). Запишите равенство отношений в подобных треугольниках AMK и AKP (рис. 298).

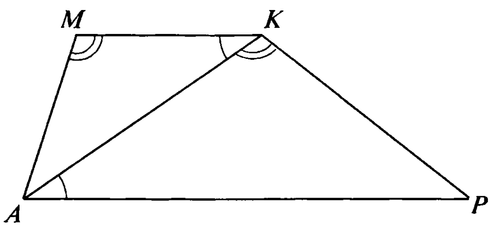


Рис. 298

769(н). В подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ найдите неизвестные элементы x, y по рисунку 299.

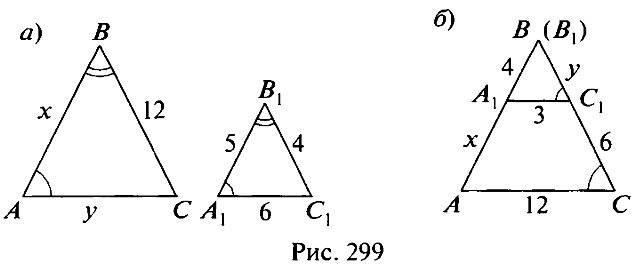


Рис. 299

770(н). Найдите неизвестные элементы в подобных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ на рисунках 300 и 301.

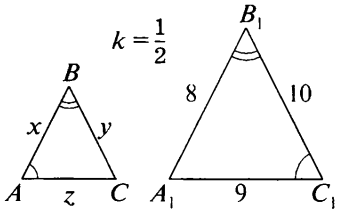


Рис. 300

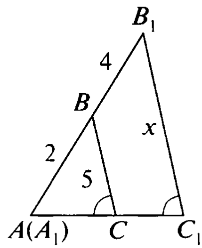


Рис. 301

771(н). Укажите на рисунке 302 пары подобных треугольников, докажите их подобие и запишите равенство отношений соответственных сторон.

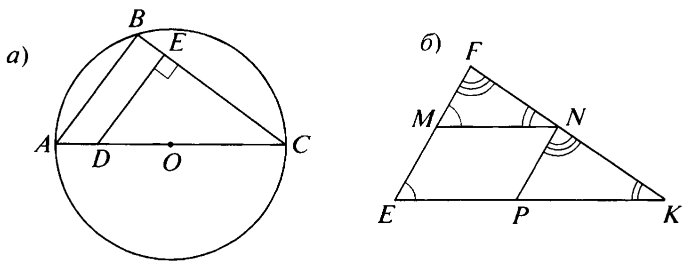


Рис. 302

772(н). На рисунке 303, где $ABCD$ — параллелограмм, укажите пару подобных треугольников, докажите их подобие и запишите отношение соответственных сторон.

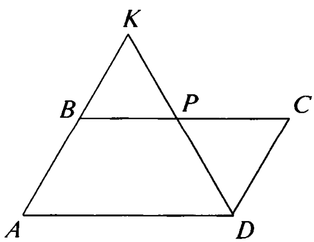


Рис. 303

773(н). Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие. Запишите равенство отношений соответственных сторон (рис. 304).

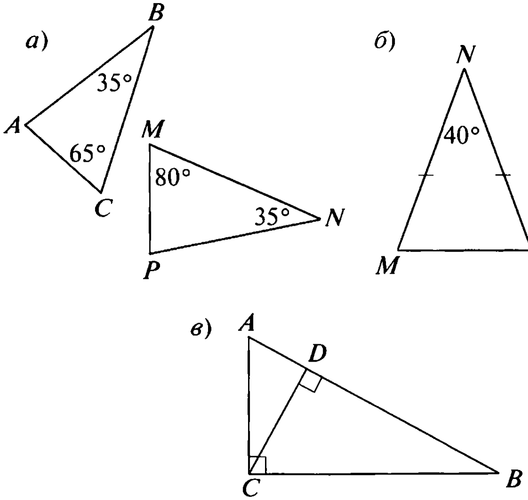


Рис. 304

774(н). Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие. Запишите пары равных углов (рис. 305).

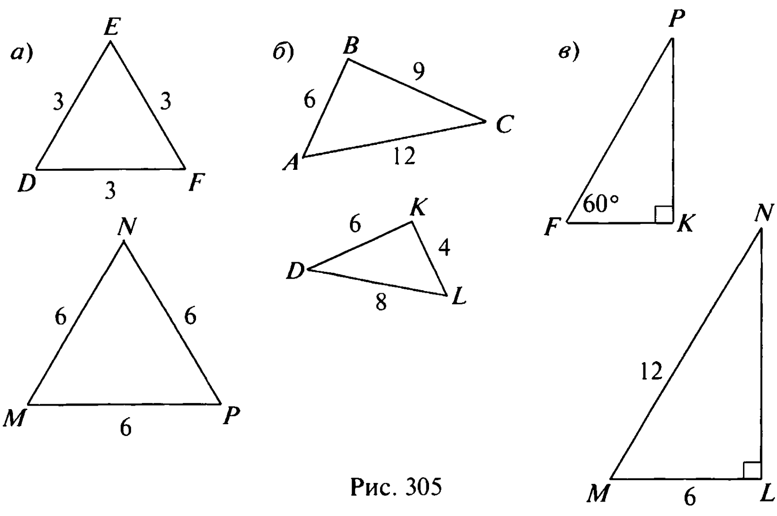


Рис. 305

775(н). Укажите пары подобных треугольников и докажите их подобие. Где требуется, найдите неизвестные элементы x или α (рис. 306).

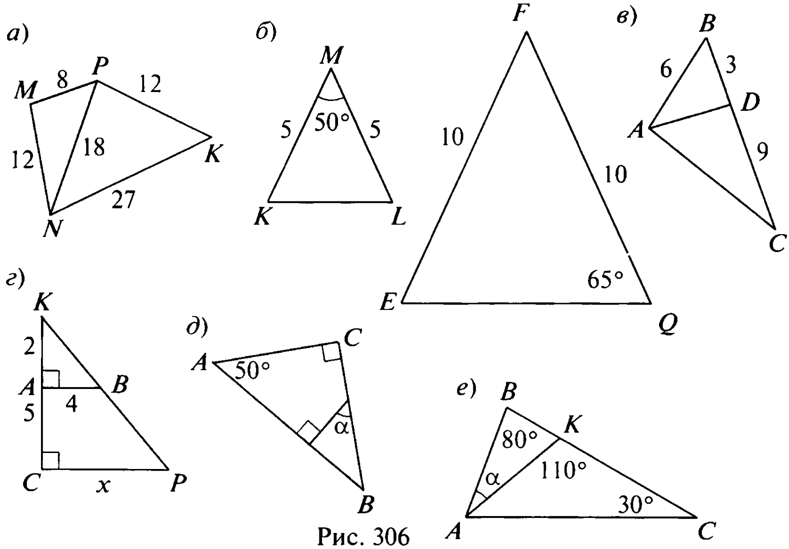


Рис. 306

776(н). В трапеции $ABCD$ (рис. 307) $BC \parallel AD$, $CB = 4$ см, $BO : OD = 2 : 3$. Найдите AD.

777(н). На рисунке 308 $ABCD$ — трапеция, M — середина AB, N — середина BD, MN пересекает CD в точке P. Докажите, что MP — средняя линия трапеции $ABCD$.

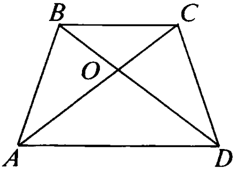


Рис. 307

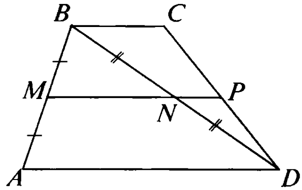


Рис. 308

778(н). Всегда ли подобны равнобедренные треугольники, если в каждом из них один из углов равен: а) 110°; б) 70°?

779. Подобны ли два треугольника, если их соответствующие средние линии пропорциональны?

780(н). Постройте треугольник, подобный данному с коэффициентом подобия: а) $\frac{1}{2}$; б) 2; в) 3; г) $\frac{1}{3}$.

781(в). Будут ли подобными два четырёхугольника, у которых соответственно равны все углы?

782. Предложите способ измерения высоты дома, основанный на свойствах подобных фигур.

783(в). Докажите, что любые два круга подобны друг другу.

784(н). Подобны ли прямоугольники, образующие рамку картины на рисунке 309.

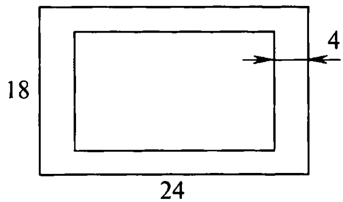


Рис. 309

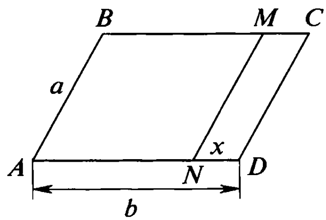


Рис. 310

785(н). На рисунке 310 изображён параллелограмм $ABCD$ со сторонами $AB = a$, $AD = b$ ($a < b$). От него отсекли параллелограмм $ABMN$, подобный данному. Каким должен быть отрезок ND?

786. Докажите, что отрезок с концами на боковых сторонах трапеции, параллельный её основаниям и равный их среднему геометрическому[1], разбивает эту трапецию на две подобные трапеции.

787(в). В начале главы говорилось о случаях подобия, с которыми мы встречаемся в повседневной жизни, однако подобие в обыденном смысле и с математической точки зрения — не одно и то же. Поэтому ответьте на вопрос: будут ли подобными две банки емкостью 3 л и 1 л?

---

[1] Напомним, что средним геометричесим двух чисел a и b называется число $\sqrt{ab}$. В данном случае a и b — длины оснований трапеции.

788. Докажите, что треугольник с вершинами в серединах сторон данного треугольника подобен данному. Чему равен коэффициент подобия?

789(в). Рассмотрим треугольник ABC и произвольную точку O. Возьмём на отрезках OA, OB и OC соответственно точки A_1, B_1 и C_1 так, что $OA = kOA_1$, $OB = kOB_1$, $OC = kOC_1$. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику ABC. Чему равен коэффициент подобия?

790. В треугольнике ABC углы при вершинах A и B равны соответственно 70° и 80°. На стороне BC взята точка K так, что треугольник ABK подобен треугольнику ABC. Чему равен угол BAK?

791. В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = 2$, $AC = 4$. На стороне AC взята точка M так, что $AM = 1$. Докажите, что треугольник ABM подобен треугольнику ABC. Найдите коэффициент подобия.

792. В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = 3$, $AC = 6$. На сторонах AB и AC взяты соответственно точки M и K так, что $AM = 2$, $AK = 1$. Докажите, что треугольник AMK подобен треугольнику ABC. Найдите коэффициент подобия.

793(в). Докажите, что диагонали трапеции вместе с основаниями образуют два подобных треугольника.

794. Одна из диагоналей трапеции делится точкой их пересечения на отрезки длиной 2 и 3. Меньшее основание трапеции равно 5. Найдите большее основание трапеции.

795(пт). Через середину наибольшей стороны треугольника проведена прямая, отсекающая от него треугольник, подобный данному. Найдите наименьшую сторону отсечённого треугольника, если стороны исходного треугольника равны:

а) 6, 7, 8; б) 6, 7, 9; в) 6, 7, 10.

Сколько решений имеет задача в каждом случае?

796(в). Какие треугольники можно разрезать на два подобных между собой треугольника?

797. Из отрезков длиной 4, 6, 8, 9, 12 и 18 составили два подобных между собой треугольника. Найдите коэффициент подобия этих треугольников.

798(п). В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M так, что $\angle ABM = \angle ACB$. Известно также, что $AM = 1$, $MC = 3$. Найдите длину стороны AB.

799. Все стороны треугольника различны. Один из углов равен 40°. Биссектриса этого угла делит треугольник на два треугольника, один из которых подобен исходному. Найдите наибольший угол исходного треугольника.

800. На клетчатой бумаге изображено несколько пар треугольников (рис. 311). Докажите, что треугольники в каждой паре подобны.

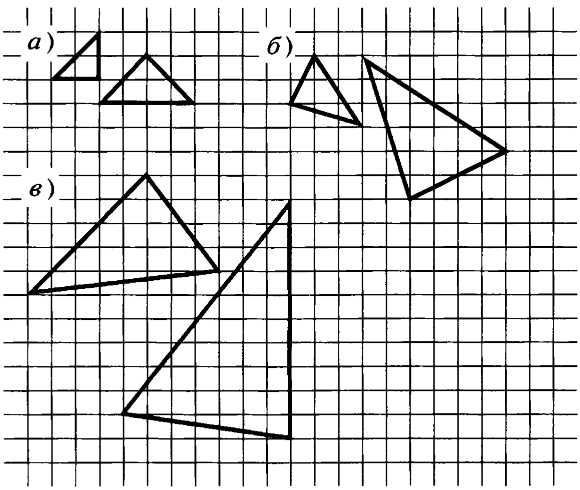


Рис. 311

801(пт). У двух неравных, но подобных между собой треугольников имеется две пары соответственно равных сторон, длины которых 12 и 18. Найдите остальные стороны каждого треугольника.

802(п). Две окружности пересекаются в точках A и B. Прямая, проходящая через A, вторично пересекает данные окружности в точках C и D. Докажите, что все получающиеся таким образом треугольники BCD подобны между собой.

803(в). В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, CC_1 (A_1 и C_1 — основания высот). Докажите, что треугольник A_1BC_1 подобен треугольнику ABC.

804(т). Диагональ трапеции делит её на два подобных между собой треугольника. Отношение боковых сторон трапеции равно 2. Найдите отношение оснований трапеции.

805(п). На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку C взята точка D так, что $\angle BDC = \angle ABC$. Известно, что $AB = 3$, $DC = 8$. Найдите AC.

806. В трапеции $ABCD$ известны основания: $AD = 7$, $BC = 3$. Прямая, параллельная основаниям трапеции, пересекает боковые стороны AB и CD в точках K и M. Известно также, что $AK : KB = 7 : 3$. Найдите KM.

807(пт). Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений её боковых сторон, делит основания трапеции пополам.

808(пт). На плоскости даны две параллельные прямые и точка N. Используя результаты предыдущей задачи, с помощью только линейки постройте прямую, параллельную данным, проходящую через N.

809(т). Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям, делит трапецию на две подобные между собой трапеции. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

810(т). Основания трапеции равны a и b. Прямая, параллельная основаниям трапеции, проходит через точку пересечения её диагоналей. Найдите длину отрезка этой прямой внутри трапеции.

811. Две окружности с радиусами R и r касаются друг друга. Через точку касания проведена прямая, пересекающая эти окружности. Эта прямая при пересечении с окружностью радиуса R образует хорду длины a. Найдите длину хорды, высекаемой на этой прямой второй окружностью.

812(п). Две окружности с диаметрами 3 и 5 касаются друг друга в точке A. Прямая, проходящая через A, вторично пересекает меньшую окружность в точке B, а бóльшую — в точке C. Найдите хорды AB и AC, если: а) $BC = \sqrt{3}$; б) $BC = \sqrt{5}$.

813(т). «Золотым» называется прямоугольник (говорят также, что отношение сторон этого прямоугольника представляет собой «золотое сечение»), обладающий следующим свойством: если от этого прямоугольника отрезать возможно больший квадрат, то останется прямоугольник, подобный исходному (с тем же отношением сторон).

а) Найдите бóльшую сторону такого прямоугольника, если меньшая сторона равна 1.

б) Расположите прямоугольник так, чтобы его бóльшая сторона была горизонтальной. Отрежьте от него квадрат с правой стороны. От оставшегося прямоугольника отрежьте квадрат сверху, затем слева, снизу и т. д. по спирали. Покажите, что существует точка M внутри исходного прямоугольника, которая не попадает ни в один из отрезанных квадратов. Найдите расстояние от M до левой и нижней сторон исходного прямоугольника.

814. В треугольной пирамиде $ABCD$ известны длины рёбер: $AB = 9$, $BC = 12$, $CA = 8$, $AD = 6$, $BD = 12$, $CD = 4$. Имеются ли среди граней пирамиды подобные между собой треугольники?

815. В треугольной пирамиде $ABCD$ выполняются равенства: $\angle ADB = \angle DBC = \angle ADC = \angle ABC$; $\angle ABD = \angle BDC = \angle DAC = \angle ACB$. Для каждого из пунктов а), б), в) выясните, существует ли такая пирамида, и, если существует, найдите периметр треугольника ABC:

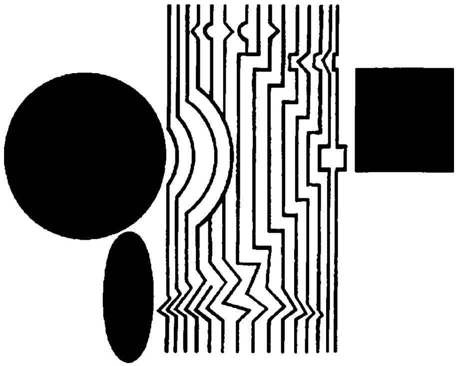
а) $DB = 10$, $DA = 8$;

б) $DB = 27$, $CA = 8$;

в) $DB = 21$, $BA = 8$.

7

Метрические соотношения в треугольнике и окружности



Прежде всего поясним, что означают слова «метрические соотношения»: эти слова указывают на то, что речь пойдёт о соотношениях между длинами тех или иных отрезков, связанных с треугольником и окружностью, о расстояниях между характерными точками в этих фигурах.

Центральное место в главе занимает знаменитая теорема Пифагора. Правда, доказательство этой теоремы, которое будет приведено, далеко от классического. Мы будем использовать методы, ещё не открытые во времена Пифагора. (Великий древнегреческий математик и философ Пифагор жил в VI в. до н. э.)

Сегодня обычный школьник владеет математическими знаниями и методами, неизвестными такому великому и мудрому человеку, как Пифагор. Несколько позднее мы вернёмся к теореме Пифагора и приведём более близкое к классическому доказательство, которое, как и сама теорема, несмотря на древность, не потеряло своей красоты и важности.

И теоретическая, и практическая роль теоремы Пифагора необычайно важны. Благодаря этой теореме мы можем находить расстояния между точками, не измеряя этого расстояния непосредственно, даже не рассматривая прямую, проходящую через эти точки.

7.1. Метрические соотношения в прямоугольном треугольнике. Теорема Пифагора

Свойства высоты в прямоугольном треугольнике

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC. Будем в соответствии с геометрическими традициями считать, что прямым является угол при вершине C. Таким образом, гипотенузу AB мы будем обозначать буквой c, а катеты AC и BC — соответственно буквами b и a.

Опустим в этом треугольнике высоту CD на гипотенузу (рис. 312). Получившуюся картинку — прямоугольный треугольник с высотой, проведённой к гипотенузе, надо запомнить. Она отражает важное геометрическое свойство прямоугольного треугольника.

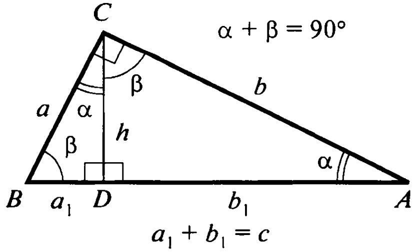


Рис. 312

7.1

Оказывается, *треугольники ABC, ACD и CBD подобны между собой*. Это непосредственно следует из второго признака подобия (равенство углов в этих треугольниках очевидно).

Прямоугольные треугольники — единственный вид треугольников, которые можно разрезать на два треугольника, подобных между собой и исходному треугольнику.

Мы специально записали обозначения этих трёх треугольников в таком порядке следования вершин: ABC, ACD, CBD. Тем самым мы одновременно показываем и соответствие вершин. (Вершине A треугольника ABC соответствует также вершина A треугольника ACD и вершина C треугольника CBD и т. д.)

Поскольку гипотенуза треугольника ACD равна b, а гипотенуза треугольника CBD равна a, коэффициент подобия треугольника ACD по отношению к треугольнику ABC равен $\frac{b}{c}$, а для треугольника CBD он равен $\frac{a}{c}$.

Для удобства обозначим высоту CD через h, а отрезки гипотенузы AD и DB — через b_1 и a_1 соответственно.

Теорема 7.1 (*о соотношениях в прямоугольном треугольнике*).

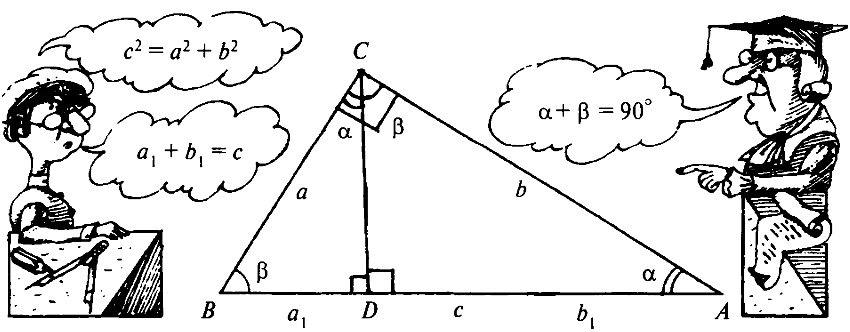
В прямоугольном треугольнике справедливы следующие соотношения:

1) $h^2 = a_1 \cdot b_1$; ***2)*** $b^2 = b_1 \cdot c$; ***3)*** $a^2 = a_1 \cdot c$,

где b_1 ***и*** a_1 ***— проекции катетов*** b ***и*** a ***на гипотенузу.***

Указанные соотношения иногда формулируют так:

Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, есть среднее пропорциональное между отрезками гипотенузы, на которые она этой высотой разделена.



Катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу.

(Напомним, что величина x является средним пропорциональным для величин m и n, если имеет место равенство $\frac{m}{x} = \frac{x}{n}$, откуда $x^2 = m \cdot n$.)

Доказательство. Все три соотношения непосредственно следуют из отмеченного нами подобия треугольников.

1. Треугольники ABC и CBD подобны. Значит,

$$\frac{b_1}{h} = \frac{h}{a_1}\text{, откуда } h^2 = a_1 \cdot b_1.$$

2. Треугольники ABC и ACD подобны. Значит,

$$\frac{b_1}{b} = \frac{b}{c}\text{, откуда } b^2 = c \cdot b_1.$$

3. Соотношение следует из подобия треугольников ABC и CBD. ▼

Теорема Пифагора

Теорема 7.2 (*теорема Пифагора*).

***В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов*:**

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Доказательство. Сложим почленно равенства 2) и 3) в теореме 7.1. Получим

$$b^2 + a^2 = c \cdot b_1 + c \cdot a_1 = c\,(b_1 + a_1) = c^2. \text{ ▼}$$

Вы, возможно, удивитесь и огорчитесь: «И это всё доказательство?» Столько было сказано о важности этой теоремы, а её доказательство свелось к двум строчкам. Здесь необходимо заметить, что, по существу, доказательство теоремы Пифагора началось с проведения высоты в прямоугольном треугольнике. Согласитесь, до этого надо ещё додуматься.

Если же говорить о проблемах, которые возникали при доказательстве теоремы у древних геометров, то объяснялись они отсутствием алгебраического аппарата. Что такое отношение двух отрезков, они вполне чётко понимали. А вот переход от равенства отношений к равенству произведений, который любой современный школьник воспринимает как очевидный, для древних геометров был просто невозможен. Произведение отрезков для них не имело геометрического смысла.

Теорема Пифагора формулировалась как равенство площадей. Именно в такой формулировке, сопровождаемая соответствующим доказательством, она становится истинной теоремой геометрии, одной из её жемчужин. Поэтому мы ещё вернёмся к ней, когда начнём изучать площади плоских фигур.

Было бы несправедливо не отметить важность алгебраической формулировки теоремы Пифагора. Она позволяет при измерении расстояний в каком-то смысле «сойти с прямой», выйти в плоскость и далее — в пространство. Об этой важнейшей роли открытой Пифагором теоремы в теории и практике геометрии сам Пифагор мог лишь догадываться.

Заметим, что справедливо и утверждение, обратное теореме Пифагора.

Теорема, обратная теореме Пифагора

Теорема 7.3 (*теорема, обратная теореме Пифагора*).

Если в треугольнике со сторонами a, b и c выполняется равенство $c^2 = a^2 + b^2$, то этот треугольник прямоугольный, причём прямой угол противолежит стороне c.

Доказательство. Рассмотрим треугольник, стороны которого равны a и b, а угол между ними — прямой. По теореме Пифагора квадрат третьей стороны равен $a^2 + b^2$, т. е. эта сторона равна c. Значит, построенный нами треугольник равен данному по третьему признаку равенства треугольников. ▼

Исходя из свойств подобных треугольников, можно сформулировать теорему Пифагора в более общем виде.

Обобщённая теорема Пифагора

Теорема 7.4 (*обобщённая теорема Пифагора*).

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с гипотенузой AB. Рассмотрим какие-то три соответственных отрезка в треугольниках ABC, ACD и CBD (CD —

высота в ABC). Обозначим их через l_c, l_b и l_a соответственно. Тогда справедливо равенство $l_c^2 = l_b^2 + l_a^2$.

Доказательство. Как мы знаем, треугольники ABC, ACD и CBD (рис. 313) подобны. Согласно свойству подобных треугольников, любые два соответственных отрезка в них относятся одинаково.

Это означает, что $\frac{l_c}{c} = \frac{l_b}{b} = \frac{l_a}{a}$ (см. рис. 313). Обозначим каж-

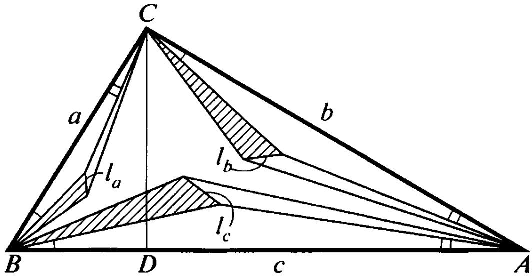


Рис. 313

дую из дробей через λ. Тогда $l_c = \lambda c$, $l_b = \lambda b$, $l_a = \lambda a$. И если мы теперь в равенстве $c^2 = b^2 + a^2$ умножим обе части почленно на λ^2, то получим $l_c^2 = l_b^2 + l_a^2$. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

816(в). Прямоугольные треугольники с целочисленными сторонами называются ***пифагоровыми*** (треугольник со сторонами 3, 4, 5 называют египетским), а тройки целых чисел, для которых выполняется соотношение, связывающее стороны прямоугольного треугольника, — ***пифагоровыми тройками***. Проверьте, что следующие тройки чисел являются пифагоровыми: 3, 4, 5; 5, 12, 13; 7, 24, 25. Проверьте также, что при любых m и n ($m > n$) числа $m^2 - n^2$, $2mn$, $m^2 + n^2$ представляют собой пифагорову тройку.

7.1

817(н). Запишите пропорцию для вычисления среднего пропорционального отрезков с длинами 1,2 и 0,3. Вычислите значение среднего пропорционального.

818(н). Используя рисунок 314, найдите величины x и y.

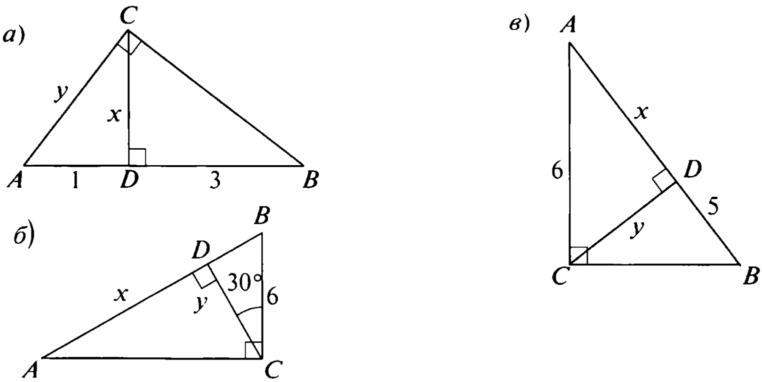


Рис. 314

819(н). Докажите, что проекции катетов на гипотенузу пропорциональны квадратам катетов.

820(н). Катеты прямоугольного треугольника относятся как 4 : 3, а гипотенуза равна 75. Найдите проекции катетов на гипотенузу.

821(н). В прямоугольном треугольнике разность проекций катетов на гипотенузу равна 10 см. Найдите гипотенузу, если катеты относятся как 3 : 2.

822(н). Докажите равенство для высоты, опущенной на гипотенузу в прямоугольном треугольнике: $h = \frac{ab}{c}$.

823(н). На рисунке 315 в треугольнике ABC угол C прямой, $c = 10$, $h = 4{,}8$. Найдите a, b.

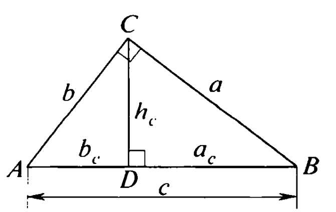


Рис. 315

824(н). По рисунку 315 ответьте на следующие вопросы.

а) Приведите пример отрезка, являющегося средним пропорциональным для двух других отрезков.

б) Почему катет BC есть среднее пропорциональное между гипотенузой и своей проекцией на неё?

в) Докажите подобие треугольников BDC и BCA и запишите нужное для подтверждения пункта б) равенство.

г) Подобие каких ещё пар треугольников можно доказать? Какие равенства можно получить из подобия этих пар треугольников?

д) Найдите:

1) h_c, b, если $a_c = 36$, $b_c = 25$;

2) a_c, a, если $c = 3$, $h_c = \sqrt{2}$;

3) a_c, h_c, если $b = 12$, $b_c = 6$;

4) a_c, b_c, b, если $a = 6$, $c = 9$.

е) Выразите:

1) c через a и a_c;

2) c через b и b_c;

3) c через a и b.

825. В прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4 опущена высота на гипотенузу. Найдите эту высоту и отрезки, на которые она делит гипотенузу.

826. Высота прямоугольного треугольника делит гипотенузу на отрезки длиной 1 и 2. Найдите катеты этого треугольника.

827(н). По данным рисунка 316 найдите BD.

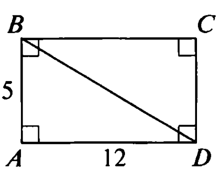


Рис. 316

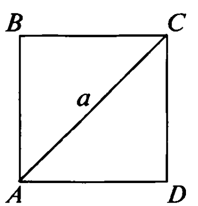


Рис. 317

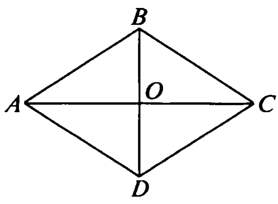


Рис. 318

828(н). $ABCD$ — квадрат (рис. 317), $AC = a$. Найдите AD.

829(н). $ABCD$ — ромб (рис. 318), $AC = 8$ см, $BD = 6$ см. Найдите периметр ромба.

830(н). В треугольнике, стороны которого равны 6, 8 и 10, проведена высота к большей стороне. Найдите отрезки, на которые высота делит эту сторону, и длину этой высоты.

831. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 17, а гипотенуза равна 13. Найдите катеты этого треугольника.

832. Разрежьте прямоугольный треугольник на три подобных между собой треугольника.

833. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $\sqrt{17}$, а произведение катетов равно 4. Найдите катеты этого треугольника.

834. Гипотенуза прямоугольного треугольника на 1 больше одного из катетов, а сумма катетов на 4 больше гипотенузы. Найдите гипотенузу этого треугольника.

835. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 5, а высота, проведённая к ней, равна 2. Найдите меньший катет этого треугольника.

836. На рисунке 319 AB — касательная. Найдите AB.

837. Треугольник ABC вписан в окружность (рис. 320). Сторона AC равна 8, а сторона CB равна 6. Найдите радиус окружности.

838. Катеты прямоугольного треугольника равны 5 и $5\sqrt{3}$. Найдите медиану к гипотенузе.

839. Сторона равностороннего треугольника равна $18\sqrt{3}$. Найдите биссектрису этого треугольника.

840. Биссектриса равностороннего треугольника равна $2\sqrt{3}$. Найдите сторону этого треугольника.

841. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна $5\sqrt{3}$, а один из катетов равен 5. Найдите другой катет.

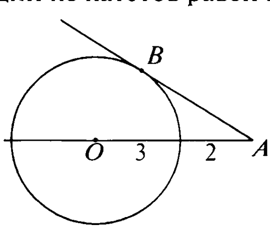


Рис. 319

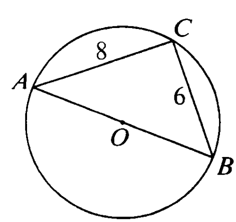


Рис. 320

842. В равнобокой трапеции боковые стороны равны по 5, а основания равны 6 и 12. Найдите высоту трапеции.

843. В равнобокой трапеции основания равны 5 и 13, а высота равна 3. Найдите длины боковых сторон.

844. В окружности радиуса 17 проведена хорда, равная 16. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

845. В окружности на расстоянии 3 от центра проведена хорда, длиной 8. Найдите радиус окружности.

846. Сторона квадрата равна 6. Определите радиус окружности, описанной около квадрата.

847. Радиус окружности, описанной около квадрата, равен $4\sqrt{2}$. Определите сторону квадрата.

848. Стороны параллелограмма равны 6 и 10, а одна из диагоналей равна 8. Найдите угол между этой диагональю и меньшей стороной параллелограмма.

849(в). Сторона равностороннего треугольника равна a. Найдите высоту этого треугольника, радиус описанной окружности, радиус вписанной окружности.

850. В квадрат со стороной a вписан другой квадрат, вершины которого делят стороны данного в отношении 3 : 4. Найдите сторону вписанного квадрата.

851(в). Найдите диагональ квадрата со стороной a.

852(п). Докажите, что в данном треугольнике произведения каждой стороны на проведённую к ней высоту равны между собой.

853(п). Высота прямоугольного треугольника делит его на два треугольника. Радиусы окружностей, вписанных в эти два треугольника, равны 1 и 2. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

854(в). Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус описанной окружности равен медиане, проведённой к гипотенузе, и равен половине гипотенузы.

855(п). Докажите, что в прямоугольном треугольнике радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле

$$r = \frac{1}{2}(a + b - c).$$

856(п). Докажите, что в прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла является одновременно и биссектрисой угла между медианой и высотой, выходящими из этой вершины.

857(п). В треугольнике со сторонами 6, 7 и 9 проведена высота к большей стороне. Найдите высоту и отрезки, на которые сторона делится этой высотой.

858. Найдите основание равнобедренного треугольника, если высота, проведённая к основанию, равна 5, а высота, проведённая к боковой стороне, равна 6.

859(п). Докажите, что если для сторон треугольника имеет место неравенство $a^2 + b^2 < c^2$, то высоты, опущенные на стороны a и b, проходят вне треугольника (т. е. угол между этими сторонами тупой).

860(п). Основания трапеции равны 10 и 20, боковые стороны равны 6 и 8. Найдите угол, под которым пересекаются при продолжении боковые стороны трапеции.

861. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб, сторона которого равна 25, а одна из диагоналей 14.

862(п). Докажите, что если радиусы окружностей равны R и r, а расстояние между их центрами a, то длина d общей внешней касательной к этим окружностям (расстояние между точками касания) может быть найдена по формуле $d^2 = a^2 - (R - r)^2$.

863(п). На одной из сторон прямого угла взяты точки A и B на расстоянии a и b от вершины. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A и B и касающейся другой стороны этого угла.

864(т). Основания трапеции равны 20 и 10, а боковые стороны 6 и 8. Найдите радиус окружности, проходящей через концы меньшей боковой стороны и касающейся прямой, содержащей другую боковую сторону.

865(т). В прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°, O — середина гипотенузы AB, P — центр вписанной окружности. Найдите угол POC.

866(т). Найдите катеты прямоугольного треугольника, в котором один из острых углов равен 15°, а гипотенуза равна 1.

867(т). Высота прямоугольного треугольника, опущенная на гипотенузу, делит этот треугольник на два. Расстояние между центрами окружностей, вписанных в эти треугольники, равно 1. Найдите радиус окружности, вписанной в исходный треугольник.

868. Три ребра, выходящие из одной вершины прямоугольного параллелепипеда, равны a, b и c. Найдите длину диагонали этого параллелепипеда. (Получив нужную формулу, вы получите одно из возможных пространственных обобщений теоремы Пифагора.)

869(т). В пространстве даны точки A, B, C и D. Известно, что $AB = BC = 25$, $AD = DC = 39$, $AC = 30$, $BD = 56$. Докажите, что данные точки лежат в одной плоскости.

870(т). В пространстве даны точки A, B, C и D таким образом, что $AC = BD = CD = 5$, $AB = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{10}$, $AD = 2\sqrt{5}$.

Докажите, что данные точки лежат в одной плоскости.

7.2. Тригонометрические функции. Теоремы косинусов и синусов

Синус и косинус острого угла

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине C и углом при вершине A, равным α (рис. 321).

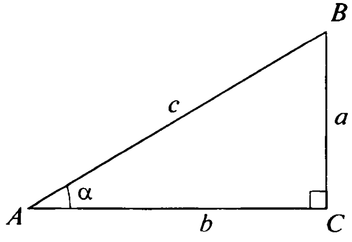


Рис. 321

7.2

Назовём ***синусом*** *угла* α *отношение* $\frac{BC}{AB}$, *т. е. отношение противолежащего катета к гипотенузе.* Запишем это в виде равенства

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}.$$

Косинус α *есть отношение прилежащего катета к гипотенузе*:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}.$$

Все прямоугольные треугольники с острым углом α подобны между собой. Поэтому указанные отношения, определяющие синус и косинус, одинаковы для всех таких треугольников, а следовательно, зависят лишь от величины α, являются функцией α. Синус и косинус — две первые и самые важные тригонометрические функции. (Вторая часть слова «тригонометрия» — «метрия» означает, как мы знаем, «измерение». Так что «тригонометрия» — это дословно «измерение треугольников».) Тригонометрия — раздел математики, в котором изучаются свойства синуса, косинуса, тангенса, котангенса и других тригонометрических функций.

Если в равенстве $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Пифагора) поделить почленно обе части на c^2, то получим

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1,$$

или

$$(\sin\alpha)^2 + (\cos\alpha)^2 = 1.$$

Последнее равенство, тригонометрический эквивалент теоремы Пифагора, является основным тригонометрическим равенством. На нём основывается вся тригонометрия. Можно сказать, что вся тригонометрия проистекает из теоремы Пифагора.

Тангенс и котангенс острого угла

Кроме синуса и косинуса к числу наиболее часто встречающихся тригонометрических функций относятся тангенс (записывается tg) и котангенс (ctg):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}.$$

***Тангенс** угла α есть отношение противолежащего катета к прилежащему.*

***Котангенс** угла α — отношение прилежащего катета к противолежащему.*

Из определений четырёх рассмотренных тригонометрических функций следуют соотношения:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \qquad \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Изменение тригонометрических функций на интервале [0°; 90°]

Рассмотрим теперь в прямоугольном треугольнике ABC угол при вершине B (см. рис. 321). Его величина дополняет до 90° угол A, т. е. он равен $90° - \alpha$. С другой стороны, по отношению к этому углу катет AC является противолежащим, а катет BC — прилежащим. В соответствии с определением тригонометрических функций имеем:

$$\sin(90° - \alpha) = \frac{AC}{AB} = \cos\alpha,$$

$$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha, \qquad \operatorname{ctg}(90° - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Проследим, как меняются значения введённых тригонометрических функций, когда угол изменяется от 0° до 90°.

Хотя при $\alpha = 0°$ и $\alpha = 90°$ прямоугольного треугольника нет, понятно, что при $\alpha = 0°$ мы должны положить $\sin 0° = 0$, $\cos 0° = 1$; а при $\alpha = 90°$, наоборот, $\sin 90° = 1$, $\cos 90° = 0$.

При возрастании угла от 0° до 90° синус возрастает от 0 до 1, а косинус убывает от 1 до 0. Причём каждая из этих функций пробегает все значения от 0 до 1. В этом нетрудно убедиться, например, следующим образом.

Рассмотрим четверть единичного круга (т. е. круга, радиус которого равен 1), ограниченную дугой B_0BB_1, один из концов которой — точка B_0 лежит на луче AC. Пусть C — проекция B на AB_0, D — проекция B на AB_1. Тогда $AC = \cos\alpha$, $AD = \sin\alpha$ (рис. 322). При перемещении точки B от B_0 к B_1 «видно», что $\sin\alpha$ возрастает от 0 до 1, а $\cos\alpha$ соответственно убывает от 1 до 0.

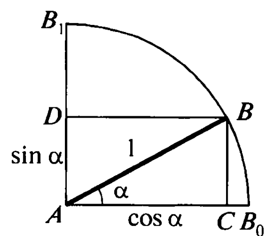


Рис. 322

7.2

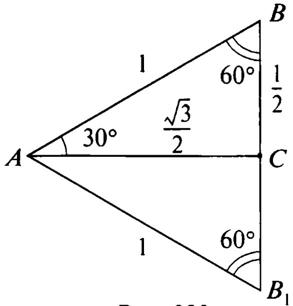


Рис. 323

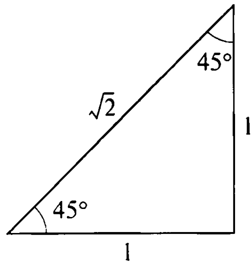


Рис. 324

Кроме значений синуса и косинуса для 0° и 90° необходимо знать значения этих функций при α, равном 30°, 45° и 60°.

Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с острым углом при вершине A, равным 30° (рис. 323). Построим точку B_1, симметричную B относительно AC. В треугольнике ABB_1 все углы равны 60°. Значит, этот треугольник равносторонний, и

$$\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{BC}{AB} = \frac{1}{2}.$$

По теореме Пифагора, считая для удобства, что $AB = 1$, найдём $AC = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Таким образом,

$$\cos 30^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Для определения значений тригонометрических функций угла, равного 45°, рассмотрим прямоугольный треугольник, катеты которого равны 1 (рис. 324). Гипотенуза этого треугольника равна $\sqrt{2}$. Значит,

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Воспользовавшись формулами, выражающими тангенс и котангенс, получим, что $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Когда угол возрастает и приближается к 90°, возрастает и тангенс, становясь сколь угодно большим при приближении к 90°. Для угла 90° тангенс не существует $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right.$, при изменении α от 0° до 90° числитель этой дроби возрастает от 0 до 1, а знаменатель убывает от 1 до $\left.0\right)$.

Для котангенса всё наоборот $\left(\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$. При уменьшении угла от $90°$ до $0°$ котангенс неограниченно возрастает. Для угла $0°$ котангенс не существует; кроме того, имеем следующие равенства:

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{ctg} 60° = \frac{\sqrt{3}}{3},\quad \operatorname{tg} 60° = \operatorname{ctg} 30° = \sqrt{3},\quad \operatorname{tg} 45° = \operatorname{ctg} 45° = 1.$$

Тригонометрические функции тупого угла

Определим теперь значения тригонометрических функций тупых углов.

Рассмотрим единичный полукруг с центром A, ограниченный дугой $B_0B_1B_2$ (рис. 325; AB_1 — радиус, перпендикулярный диаметру B_0B_2). Возьмём на полуокружности точки B и B', соответствующие углам α и $180° - \alpha$. Эти точки симметричны относительно AB_1, т. е. их проекции на AB_1 совпадают. Но $AD = \sin\alpha$. Естественно считать, что и $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.

Иначе обстоит дело с косинусом. Чтобы отличить лучи AB_0 и AB_2, положим, что лучу AB_0 соответствует положительное направление, а лучу AB_2 — отрицательное. А так как точки C и C' симметричны относительно A и $AC = \cos\alpha$, то естественно считать, что $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha$.

Во многих геометрических теоремах и формулах используются тригонометрические функции. Важнейшими являются теорема синусов и теорема косинусов.

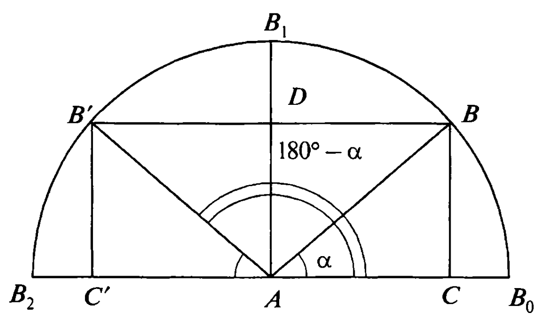


Рис. 325

7.2

Теорема косинусов

Теорема 7.5 *(теорема косинусов).*

Рассмотрим треугольник ABC, углы которого будем считать равными A, B и C, а противолежащие им стороны соответственно a, b и c. Тогда справедливо равенство

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A.$$

Доказательство. Проведём в данном треугольнике ABC высоту BD (рис. 326). Учитывая определение синуса и косинуса, независимо от величины угла A имеем (обратите внимание на случай тупого угла)

$$CD = |b - c\cos A|,\ BD = c\sin A.$$

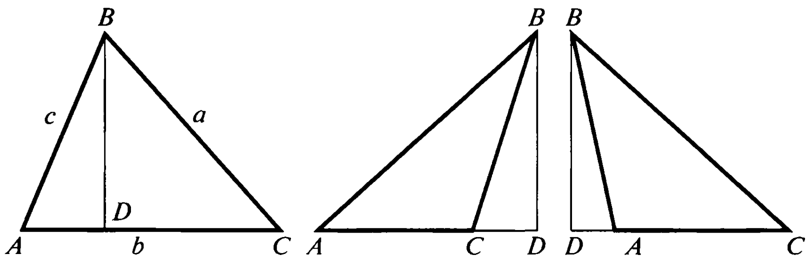


Рис. 326

Теперь по теореме Пифагора

$$a^2 = BD^2 + CD^2 = (b - c\cos A)^2 + (c\sin A)^2 =$$
$$= b^2 - 2bc\cos A + c^2(\cos^2 A + \sin^2 A) = b^2 + c^2 - 2bc\cos A. \blacktriangledown$$

Заметим, что теорему косинусов можно доказать, не используя теорему Пифагора. Проведя высоту BD (рис. 327), получим, что

$$b = c\cos A + a\cos C, \qquad (1)$$

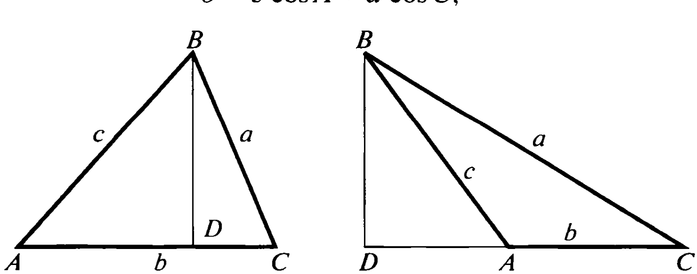


Рис. 327

причём это равенство верно, каковы бы ни были углы A и C. Запишем ещё два таких же равенства:

$$c = a\cos B + b\cos A; \qquad (2)$$

$$a = b\cos C + c\cos B. \qquad (3)$$

Умножим теперь равенство (1) почленно на b, равенство (2) на c, а равенство (3) на $(-a)$ и сложим. Преобразовав получившееся выражение (проверьте), получим равенство

$$b^2 + c^2 - a^2 = 2bc\cos A,$$

представляющее собой теорему косинусов, записанную немного иначе.

Теорема косинусов удобна для определения вида треугольника (является ли треугольник остроугольным, прямоугольным или тупоугольным). Ведь для этого достаточно определить знак косинуса, соответствующего наибольшему углу.

Если a — наибольшая сторона треугольника, то этот треугольник будет остроугольным, прямоугольным или тупоугольным в зависимости от того, больше нуля, равна нулю или меньше нуля величина $b^2 + c^2 - a^2$.

Теорема синусов

Теорема 7.6 (теорема синусов).

Обозначим стороны и углы треугольника ABC так же, как и в теореме косинусов, R — радиус описанной около ABC окружности. Тогда выполняются равенства:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Доказательство. Проведём в некоторой окружности хорду KM (рис. 328). Эта хорда делит окружность на две дуги. При этом вписанные углы, опирающиеся на хорду KM, с вершинами на разных дугах дополняют друг друга до 180°. Пусть углы с вершинами на большей дуге равны α. Противолежат им углы величиной $180° - \alpha$. Как мы знаем, синусы этих углов равны.

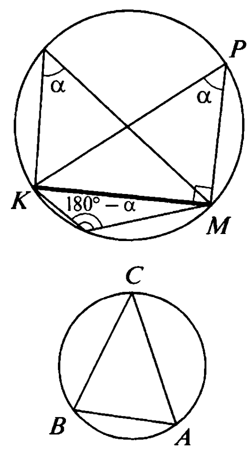


Рис. 328

7.2

Проведём в рассматриваемой окружности диаметр KP. Угол KPM равен α. Следовательно, $\frac{KM}{KP} = \sin\alpha$, или $\frac{KM}{\sin\alpha} = KP = 2R$.

Тем самым мы доказали теорему синусов, поскольку стороны треугольника ABC являются хордами описанной около него окружности, а углы треугольника ABC опираются на эти хорды. ▼

Теорема синусов бывает очень полезной в задачах, где требуется найти радиус описанной окружности, причём не только вокруг треугольника.

Формулы сложения для синуса и косинуса

Вообще, теоремы синусов и косинусов очень часто используют при решении всевозможных геометрических задач и доказательстве теорем. Покажем, как с помощью теоремы синусов можно получить формулу для $\sin(\alpha + \beta)$.

Пусть α и β — острые углы. Рассмотрим два прямоугольных треугольника ABD и ACD с общим катетом $AD = 1$, расположенных, как на рисунке 329. Пусть $\angle BAD = \alpha$, $\angle CAD = \beta$. Тогда $BD = \operatorname{tg}\alpha$, $DC = \operatorname{tg}\beta$, $AB = \frac{1}{\cos\alpha}$, $\angle ACD = 90° - \beta$. По теореме синусов для треугольника ABC $\left(\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C}\right) = \frac{BC}{\sin A}$ имеем

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{1}{\cos\alpha \cdot \sin(90° - \beta)},$$

откуда (так как $\sin(90° - \beta) = \cos\beta$)

$$\sin(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \cdot (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta).$$

Заменив $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ $\left(\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right)$, получим очень важную формулу

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta.}$$

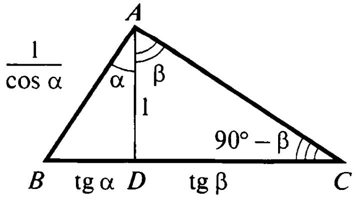


Рис. 329

Эта формула доказана нами при условии, что α и β — острые углы. На самом деле она верна при любых α и β.

Если α и β — острые углы и $\alpha > \beta$, то с помощью этого же приёма нетрудно доказать, что

$$\boxed{\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta.}$$

Аналогичные формулы для косинуса выглядят следующим образом:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta, \\ \cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta + \sin\alpha \cdot \sin\beta. \end{array}}$$

Докажем, например, первую из формул. Имеем:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(90° - (\alpha + \beta)) = \sin((90° - \alpha) - \beta) =$$
$$= \sin(90° - \alpha) \cdot \cos\beta - \cos(90° - \alpha) \cdot \sin\beta =$$
$$= \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta.$$

▲■● Задачи, задания, вопросы

871(н). По данным рисунка 330 найдите тригонометрические функции острых углов.

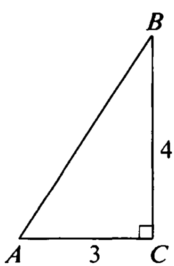


Рис. 330

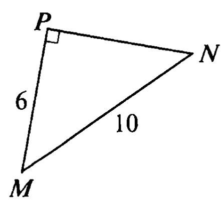


Рис. 331

872(н). По данным рисунка 331 найдите тригонометрические функции острых углов. Какой из них меньше?

873(н). По данным рисунка 332 найдите синус и косинус угла при основании треугольника EDF.

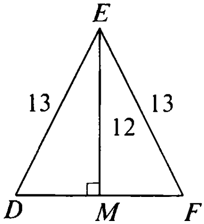


Рис. 332

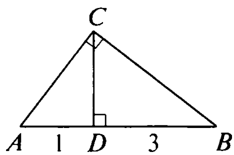


Рис. 333

874(н). По данным рисунка 333 найдите функции острых углов треугольника ABC.

875(н). Постройте угол:
а) синус которого равен 0,4;
б) косинус которого равен 0,6;
в) тангенс которого равен 2.

876(н). Может ли синус (или косинус) острого угла прямоугольного треугольника быть равным:

а) 0,9; б) 1; в) $\sqrt{3}$; г) $\frac{2}{3}$?

877(н). Могут ли одновременно синус и косинус одного и того же острого угла быть равными:

а) 0,6 и 0,8; б) $\frac{7}{25}$ и $\frac{24}{25}$; в) $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$?

878(н). Найдите косинус угла α, если синус его равен $\frac{1}{3}$.

879(н). Найдите синус угла α, если косинус его равен $\frac{2}{3}$.

880(н). Найдите синус, косинус и котангенс угла α, если $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$.

881(н). По данным рисунка 334 запишите, чему равны AC и BA.

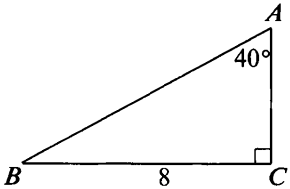


Рис. 334

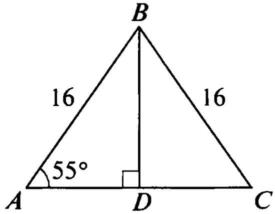


Рис. 335

882(н). По данным рисунка 335 запишите, чему равны AC и BD.

883(н). В прямоугольном треугольнике ABC (угол C прямой) найдите:

а) b, c, β, зная CB и угол A;

б) a, c, зная AC и угол A;

в) a, b, зная AB и угол A.

884(н). По данным рисунка 336 найдите периметр прямоугольника.

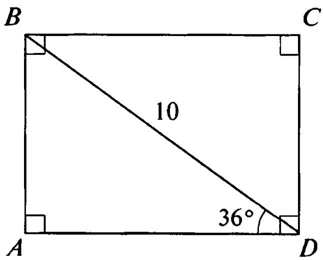


Рис. 336

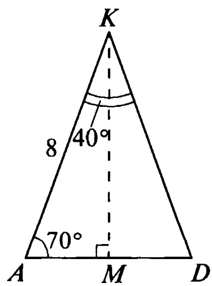


Рис. 337

885(н). На рисунке 337 KM высота к AD. Найдите KM, KD, AD.

7.2

886(н). Найдите периметр треугольника ABC (рис. 338), если косинус угла α равен 0,2.

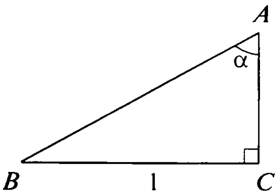


Рис. 338

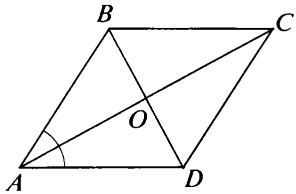


Рис. 339

887(н). На рисунке 339 $ABCD$ — ромб, диагональ BD равна 16, угол BAD равен 70°. Найдите AD и AC.

888(н). Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$ (рис. 340).

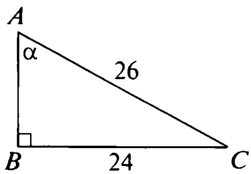


Рис. 340

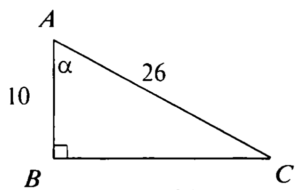


Рис. 341

889(н). Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 341).

890(н). Найдите MN, MP (рис. 342).

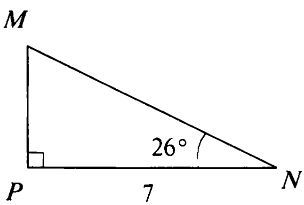


Рис. 342

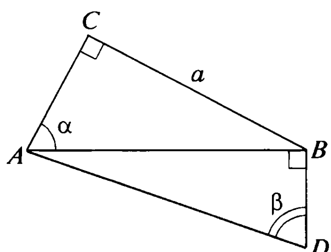


Рис. 343

891(н). Найдите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{5}{13}$.

892(н). Найдите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{12}{13}$.

893(н). Найдите BD, AD (рис. 343).

894(в). В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C гипотенуза равна 1, угол B равен 30°. Найдите синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых углов данного треугольника.

895(в). В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C катеты равны 1. Найдите синусы, косинусы, тангенсы и котангенсы острых углов данного треугольника.

896. Найдите значения выражений:

а) $\cos^2 30° - 3\operatorname{ctg} 45°$; в) $\cos^2 39° + \cos^2 51°$;

б) $\sin^2 45° - 5\cos 60°$; г) $\operatorname{tg} 28° \cdot \operatorname{tg} 62°$.

897(н). Определите, что больше:

а) $\sin 42°$ и $\sin 45°$; в) $\operatorname{tg} 45°$ и 1;

б) $\cos 42°$ и $\cos 45°$; г) $\operatorname{ctg} 45°$ и 1.

898(н). Расположите в порядке возрастания:

$\cos 17°$, $\sin 52°$, $\cos 52°$.

899(н). Расположите в порядке убывания

$\sin 73°$, $\sin 56°$, $\cos 26°$.

900(н). Сравните величины острых углов α и β, если:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $\sin\beta = 0{,}6$;

б) $\cos\alpha = 0{,}3$, $\cos\beta = \frac{1}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = 2{,}6$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$;

г) $\operatorname{ctg}\alpha = 2\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = 3$.

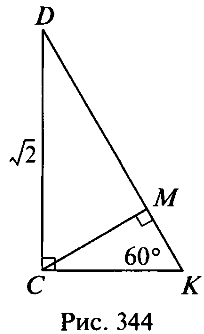


Рис. 344

901(н). В прямоугольном треугольнике CDK (рис. 344) угол C прямой, CM — высота, угол K равен 60°, CD равен $\sqrt{2}$. Найдите CM.

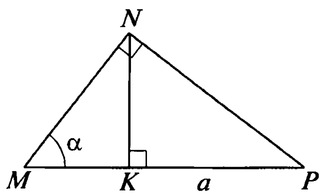


Рис. 345

902(н). В прямоугольном треугольнике MNP (рис. 345) угол N прямой, NK — высота, угол M равен α, отрезок KP равен a. Найдите NP.

903(н). В треугольнике DEF (рис. 346) $DE = DF$, угол F равен 75°, DM — высота, отрезок EM равен $\sqrt{3}$. Найдите DM и MF.

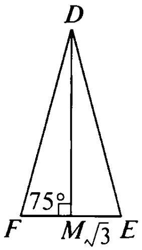


Рис. 346

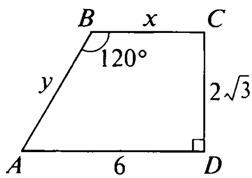


Рис. 347

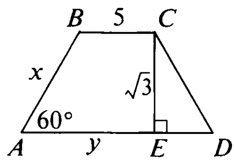


Рис. 348

904(н). На рисунке 347 $ABCD$ — трапеция. Найдите x и y.

905(н). На рисунке 348 $ABCD$ — трапеция. Найдите x и y.

906(в). Выпишите значения четырёх тригонометрических функций для углов 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°. Оформите ответ в виде таблицы.

907(н). $\sin \alpha = 1$. Найдите $\operatorname{ctg} \alpha$.

908(н). $\cos \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.

909(н). $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$.

910(н). $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $90° < \alpha < 180°$. Найдите $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$.

911(н). Можно ли утверждать, что если синусы углов равны, то равны и сами углы?

912(н). Упростите выражения:

а) $1 - \cos^2 \alpha$;

б) $(1 + \sin \alpha)(1 - \sin \alpha)$;

в) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 1$;

г) $\sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha$.

913(н). По данным рисунка 349 найдите в каждом случае x.

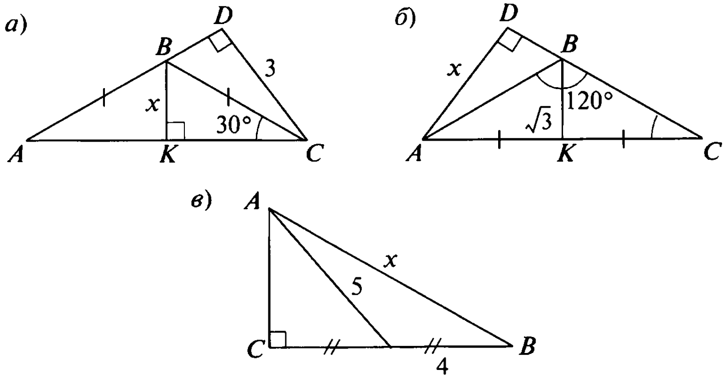


Рис. 349

914(н). По данным рисунка 350 найдите $\cos E$.

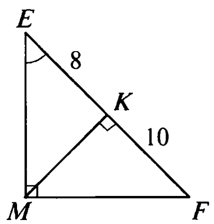


Рис. 350

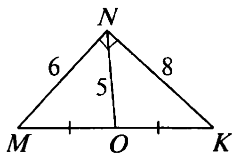


Рис. 351

915(н). По данным рисунка 351 найдите MK.

916(в). Докажите равенства для острого угла α:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha.$$

917. Найдите три оставшиеся тригонометрические функции угла (угол от 0° до 180°), если:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

918. Докажите справедливость равенств:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; б) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \operatorname{ctg}^2\alpha$.

919. Найдите $\sin(\alpha + \beta)$ и $\cos(\alpha + \beta)$, если

$$\sin\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{1}{4}\quad (\alpha \text{ и } \beta \text{ — острые углы}).$$

920. Сторона AB треугольника ABC равна 3, $\angle BAC = 60°$, $\angle ABC = 75°$. Найдите BC и радиус описанной около этого треугольника окружности.

921. Найдите косинусы углов треугольника со сторонами 5, 6 и 10.

922. В треугольнике ABC сторона AB в два раза больше BC. Пусть M — произвольная точка на стороне AC. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABM, в два раза больше радиуса окружности, описанной около треугольника BCM.

923. Найдите $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, если:

а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$; б) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{5}{2}$, где α — угол от 0 до 180°.

924. Постройте угол α, для которого:

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$; в) $\operatorname{tg}\alpha = 7$; г) $\operatorname{ctg}\alpha = -9$.

925(в). Существует ли треугольник со сторонами:

а) 6, 6, 6; г) 0,6, 0,8, 12;
б) 20, 21, 29; д) 8, 10, 12;
в) 6, 8, 12; е) 5, 9, 3?

Если существует, то определите его вид (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный).

926(в). Определите вид треугольника (остроугольный, прямоугольный или тупоугольный), если известны его стороны:

а) 5, 6, 7; в) $1, \sqrt{17}, 4$; д) $\sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{10}$;

б) 5, 6, 8; г) $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$; е) $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$.

927(н). В треугольнике ABC сторона BC равна $5\sqrt{3}$, AC равна 4, угол C равен 30°. Найдите AB.

928(н). В треугольнике ABC сторона BC равна 4, AB равна $\sqrt{13}$, угол C равен 60°. Найдите AC.

929(н). В треугольнике ABC сторона AC равна 3, AB равна 4, BC равна $\sqrt{13}$. Найдите угол A.

930(н). В треугольнике ABC с прямым углом C (рис. 352) $AB = 9$, $BC = 5$. Точка M делит AB в отношении 1 : 2 считая от A. Найдите CM.

931(н). В равностороннем треугольнике ABC со стороной 9 отмечены две точки K и M соответственно на сторонах AB и AC так, что $AK : KB = 2 : 1$, а $AM : MC = 1 : 2$. Найдите длину отрезка KM.

932(н). Одна сторона треугольника равна $3\sqrt{2}$, а две другие образуют угол 30° и относятся как 1 : 3. Найдите эти стороны.

933(н). Одна из сторон треугольника вдвое больше другой, а угол между этими сторонами равен 60°. Докажите, что треугольник прямоугольный.

934(н). Одна из сторон параллелограмма равна 13, а диагонали равны 10 и 24. Найдите угол между диагоналями параллелограмма.

935(н). Стороны параллелограмма равны $4\sqrt{2}$ и 6, а один из углов параллелограмма равен 45°. Найдите большую диагональ параллелограмма.

936(н). На рисунке 353 $ABCD$ — параллелограмм, BD перпендикулярен AB, AB равен 2, BD равен 3. Найдите AC.

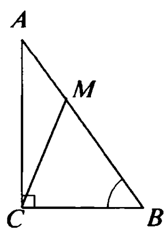


Рис. 352

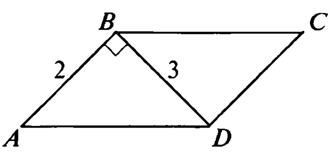


Рис. 353

937(н). В треугольнике ABC сторона AB равна 10, угол A равен 30°, а угол B равен 45°. Найдите AC и BC.

938(н). В треугольнике ABC сторона BC равна 6, сторона AC равна 8, угол A равен 30°. Найдите AB и углы B и C.

939. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°, $AB = 3$, $BC = 4$. Найдите сторону AC.

940. В треугольнике ABC угол при вершине A равен α, $AB = 1$, $BC = a$. Найдите сторону AC. Сколько решений имеет задача в зависимости от величины a и α?

941. Средняя сторона треугольника на 1 больше наименьшей и на 1 меньше наибольшей стороны. Косинус среднего по величине угла равен $\frac{2}{3}$. Найдите периметр этого треугольника.

942. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$. На стороне AB взята точка M так, что $BM = 2AM$, а на стороне BC взята точка K так, что $3BK = 2KC$. Найдите длину отрезка MK.

943. В треугольнике ABC известны стороны $AC = 2$, $AB = 3$, $BC = 4$. На прямой AC взята точка D, отличная от C так, что треугольник ABD подобен треугольнику ACB. Найдите BD, а также расстояние от D до середины BC.

944. В треугольнике ABC отрезок, соединяющий середины AB и BC, равен 3, сторона AB равна 7, угол C равен 120°. Найдите сторону BC.

945(п). Стороны треугольника равны a, b и c; m_a — длина медианы, проведённой к стороне a. Докажите, что

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2).$$

946. В треугольнике со сторонами 3, 4 и 6 проведена медиана к большей стороне. Найдите косинус угла, образованного этой медианой с меньшей стороной треугольника.

947(пт). Вычислите значения тригонометрических функций для угла 15°.

948(пт). Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с основанием AC и углом при вершине, равным 36°. Докажите, что биссектриса угла при основании делит этот треугольник на два равнобедренных треугольника, один из которых подобен исходному. Опираясь на этот факт, найдите значения тригонометрических функций для угла 18°.

949. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно 75° и 60°. Чему равно отношение сторон AB и AC?

950(п). Найдите радиус окружности, описанной около треугольника, две стороны которого равны a и b, а высота к третьей стороне равна h.

951. Одна сторона треугольника равна 2, прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите две оставшиеся стороны треугольника.

952(в). Пусть основание равнобедренного треугольника равно a, боковые стороны равны b, высота, опущенная на основание, равна h. Выразите радиус описанной около этого треугольника окружности через любые две из трёх величин: a, b и h. Ответ оформите в виде таблицы.

953. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через вершины острых углов этого треугольника и середину большего катета.

954. Стороны треугольника равны 2, 3 и 4. Найдите радиус окружности, проходящей через концы наибольшей и середину наименьшей стороны.

955(п). Прямая, пересекающая основание равнобедренного треугольника и проходящая через противоположную вершину, делит этот треугольник на два. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около этих треугольников, равны.

956. Дан квадрат со стороной 1. Найдите радиус окружности, проходящей через вершину квадрата, середину одной из сторон, не содержащих этой вершины, и центр квадрата.

957(п). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ известно, что $\angle ABD = \angle ACD = 45°$, $\angle BAC = 30°$. $BC = 1$. Найдите AD.

958(т). Найдите периметр треугольника, один из углов которого равен α, а радиусы вписанной и описанной окружностей равны соответственно r и R.

959(т). Найдите периметр четырёхугольника $ABCD$, в котором $AB = CD = a$, $\angle BAD = \angle BCD = \alpha < 90°$, $BC \neq AD$.

960(т). На окружности, описанной около треугольника ABC, взята точка M. Прямая MA пересекается с прямой BC в точке L, а прямая CM — с прямой AB — в точке K. Известно, что $AL = a$, $BK = b$, $CK = c$. Найдите BL.

961(т). Точки A, B и C расположены на одной прямой. Через точку B проходит некоторая прямая. Пусть M — произвольная точка на этой прямой. Докажите, что расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM, не зависит от положения этой точки. Найдите это расстояние, если $AC = a$, $\angle MBC = \alpha$.

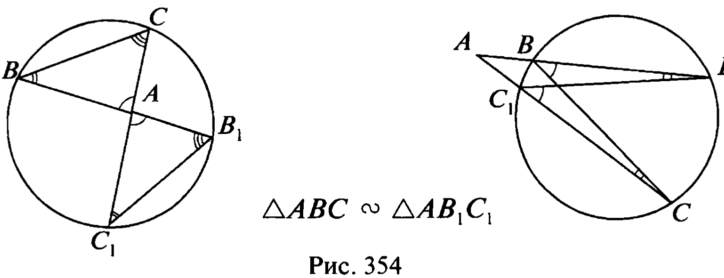
962. В пирамиде $ABCD$ известны рёбра $AD = BC = a$, $BD = CA = b$, $CD = AB = c$. Найдите расстояния между серединами AD и BC.

963(т). В пространстве расположены четыре точки A, B, C и D. Известно, что $AB = AD = 15$, $BC = 7$, $CD = 25$, $AC = 20$, $BD = 24$. Докажите, что данные точки лежат в одной плоскости.

7.3. Соотношения между отрезками, возникающими при пересечении прямых с окружностью

Окружность и две пересекающие её прямые

Рассмотрим на плоскости две прямые, пересекающиеся в точке A. Пусть некоторая окружность пересекает одну из этих прямых в точках B и B_1, а другую — в точках C и C_1. Возникающая при этом картина, часто встречается в различных геометрических теоремах и задачах, обладает одним очень важным свойством. Оказывается, тре-



$\triangle ABC \sim \triangle AB_1C_1$

Рис. 354

угольники ABC и AC_1B_1 подобны между собой. Здесь мы вновь обозначили вершины треугольников так, чтобы они следовали в порядке соответствия (рис. 354). Заметим, что на самом деле на этом рисунке две пары подобных треугольников: ABC и AC_1B_1, а также AB_1C и AC_1B. При этом совершенно не важно, где расположена точка A: вне или внутри круга.

Свойство хорд в окружности

Теорема 7.7 *(об отрезках хорды).*

Пусть точка A расположена внутри круга радиуса R на расстоянии a от его центра, BB_1 — произвольная хорда, проходящая через A. Тогда произведение $BA \cdot AB_1$ постоянно и

$$BA \cdot AB_1 = R^2 - a^2.$$

Иными словами, если через какую-то точку внутри круга провести две хорды, то произведение отрезков, на которые разделилась одна хорда, равно произведению отрезков для другой хорды.

Доказательство. Рассмотрим две хорды BB_1 и CC_1, проходящие через A (рис. 355). Треугольники ABC и AC_1B_1 подобны по второму признаку подобия: углы с вершинами B и C_1 вписанные и опираются на одну дугу.

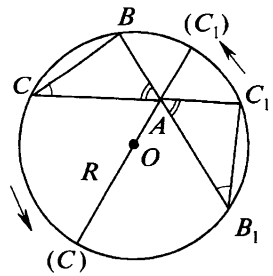


Рис. 355

Таким образом, $\dfrac{AC}{AB_1} = \dfrac{AB}{AC_1}$, или $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$. В качестве хорды

CC_1 можно взять диаметр. Тогда один из отрезков этой хорды равен $R - a$, а другой $R + a$. Значит, $AB \cdot B_1A = R^2 - a^2$. ▼

Свойство секущих к окружности

<u>*Теорема 7.8* (*о секущих к окружности*).</u>

Пусть точка A расположена вне круга радиуса R на расстоянии a от его центра; прямая, проходящая через A, пересекает окружность в точках B и B_1. Тогда произведение отрезков $AB \cdot AB_1$ постоянно и $AB \cdot AB_1 = a^2 - R^2$.

При этом $a^2 - R^2$ есть квадрат касательной, проведённой из точки A к данной окружности.

Доказательство. Можно поступить так же, как и в предыдущем случае: проведём через A две секущие (прямые, пересекающие окружность), обозначим точки пересечения с окружностью соответственно через B и B_1, C и C_1 (рис. 356). Из подобия треугольников ABC и AC_1B_1 (вновь по второму признаку; укажите, какие углы равны и почему) получим $\frac{AC}{AB_1} = \frac{AB}{AC_1}$, или $AB \cdot AB_1 = AC \cdot AC_1$.

Можно, однако, вторую секущую заменить касательной. (Точки пересечения с окружностью как бы совпали.) Если AD — касательная, то подобными будут треугольники ABD и ADB_1: угол A у них общий, кроме того, равны углы ADB и AB_1D, так как они измеряются половиной дуги DB, заключённой внутри угла ADB. Таким образом, $\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{AB_1}$, откуда

$$AB \cdot AB_1 = AD^2 = a^2 - R^2. \blacktriangledown$$

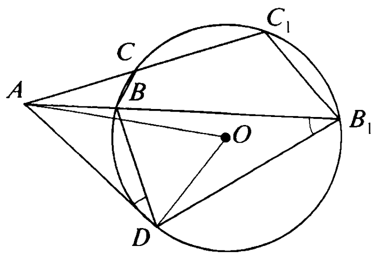


Рис. 356

▲■● Задачи, задания, вопросы

964(н). По данным рисунка 357 найдите угол AOB.

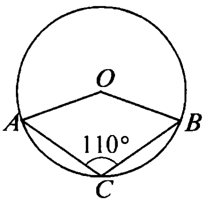


Рис. 357

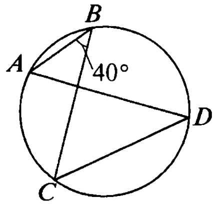


Рис. 358

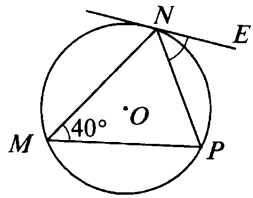


Рис. 359

965(н). По данным рисунка 358 найдите угол D.

966(н). На рисунке 359 NE — касательная, N — точка касания, угол M равен 40°. Найдите угол PNE.

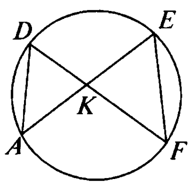


Рис. 360

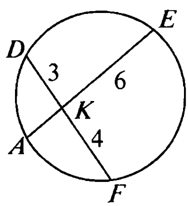


Рис. 361

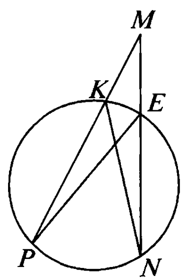


Рис. 362

967(н). По рисунку 360 запишите пропорциональные отрезки.

968(н). По данным рисунка 361 найдите AK.

969(н). По рисунку 362 запишите пропорциональные отрезки.

970(н). На рисунке 363 AB — диаметр окружности с центром в точке O, отрезок BF равен 2, CB равен 8, EF равен 1, EF параллелен AC. Найдите AC и радиус окружности.

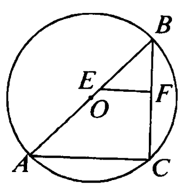


Рис. 363

971(н). На рисунке 364 AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC, отрезок A_1B_1 равен 2, AB равен 4. Найдите угол C.

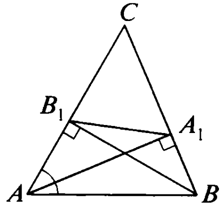


Рис. 364

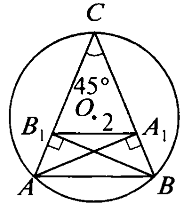


Рис. 365

972(н). Окружность с центром в точке O и радиусом R описана около треугольника ABC (рис. 365). Найдите R по данным на рисунке.

973. Через точку M проведены две прямые. Одна из них пересекает некоторую окружность в точках A и B, а другая — в точках A_1 и B_1. Известно, что $MA = 6$, $MB = 4$, $MA_1 = 8$. Найдите MB_1. Зависит ли ответ от того, где находится точка M, внутри или вне окружности?

974. Пусть A, B и C — три последовательные точки на прямой. Проведём через A и B произвольную окружность, а из C — касательную к этой окружности. Обозначим через M точку касания. Найдите геометрическое место точек M.

975. На окружности взяты точки A, B, C и D. Прямые AB и CD пересекаются в точке M. Известно, что $AC = 3$, $BD = 6$, $BM = 4$, $DM = 5$. Найдите AM и CM. (Рассмотрите различные возможные случаи расположения точек.)

976. В окружности проведены две пересекающиеся хорды $AB = 7$, $CD = 5$. Точка их пересечения делит CD в отношении 2 : 3. В каком отношении эта точка делит хорду AB?

977(в). Две окружности пересекаются в точках A и B. Пусть M — любая точка прямой AB, расположенная вне отрезка AB. Докажите, что касательные к данным окружностям, выходящие из M, равны между собой.

978(т). $ABCD$ — четырёхугольник, вписанный в окружность, M — точка пересечения его диагоналей. Известно, что $AB = 2$, $BC = 1$, $CD = 3$ и $CM : MA = 1 : 2$. Найдите AD.

979. Две стороны треугольника равны 3 и 5. Известно, что окружность, проходящая через середины этих сторон и их общую вершину, касается третьей стороны треугольника. Найдите третью сторону.

980. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$, $CA = 4$. В каком отношении делит сторону AC окружность, проходящая через вершины B, C и середину AB?

981. В окружности проведена хорда, составляющая $\frac{3}{4}$ её диаметра. Точка M, лежащая на этой хорде, делит её в отношении $1 : 2$, а расстояние от M до центра окружности равно 1. Найдите радиус окружности.

982. Хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M. Известно, что $AM : MB = 2 : 3$, $CM : MD = 1 : 2$, $AC = 3$. Найдите BD.

983(п). В окружности проведены хорды AB и CD, пересекающиеся в точке M, причём $AM = 4$, $MB = 1$, $CM = 2$. Найдите угол OMC (O — центр окружности).

984(т). Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4. Окружность, проходящая через середины гипотенузы и меньшего катета, касается другого катета. Найдите длину хорды этой окружности, высекаемой на гипотенузе.

985(т). Во вписанном четырёхугольнике $ABCD$ известны отношения $AB : DC = 1 : 2$, $BD : AC = 2 : 3$. Найдите $DA : BC$.

986(п). Через точку M внутри окружности проведены три хорды. Известно, что M — середина двух хорд. В каком отношении точка M делит третью хорду?

987(т). На прямой расположены точки A, B, C и D, следующие друг за другом в указанном порядке. Известно, что $BC = 3$ и $AB = 2CD$. Через точки A и C проведена некоторая окружность, а через B и D — другая. Их общая хорда пересекает BC в точке K. Найдите BK.

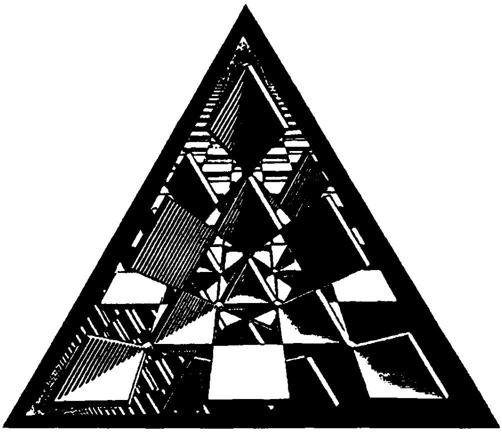
7.3

988(т). Через некоторую точку, расположенную на общей хорде пересекающихся окружностей, проведены две прямые. Первая прямая пересекает одну из окружностей в точках A и B, вторая прямая пересекает другую окружность в точках C и D.
Докажите, что точки A, B, C и D расположены на одной окружности.

989. В пирамиде $ABCD$ известны рёбра $AB = 4$, $BC = 7$, $CA = 9$, $CD = 8$. Сфера, проходящая через A, B, D и середину CD, пересекает CB и CA в точках K и M. Найдите KM.

8

Задачи и теоремы геометрии



В этой главе вы познакомитесь с некоторыми фактами и теоремами геометрии, которые по тем или иным причинам оказались в стороне от выбранного нами пути построения геометрической теории. Кстати, заметим, что строить теорию геометрии можно по-разному, и выбранный путь отнюдь не является единственным.

По содержанию глава достаточно разнородна. Здесь рассматриваются некоторые теоремы, относящиеся к геометрии треугольника. Они лишь слегка «приоткрывают занавес», скрывающий богатый мир этой простейшей геометрической фигуры. В ней же содержится несколько параграфов, посвящённых методам решений геометрических *задач, в первую очередь, методам, так или иначе использующим основные свойства подобия и метрические теоремы. Несколько обособлен параграф, в котором рассматриваются свойства вписанных и описанных четырёхугольников.*

8.1. Замечательные точки треугольника

С каждым треугольником связан ряд точек, обладающих многими интересными, замечательными свойствами. Они так и называются ***замечательными точками треугольника***. С некоторыми из них вы уже познакомились. Это центр описанной окружности — точка, в которой пересекаются серединные перпендикуляры к сторонам треугольника. Точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника является центром вписанной в треугольник окружности. Мы знаем также, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Как видим, все эти точки интересны уже тем, что в них пересекаются три определённые прямые.

Давайте вспомним, как мы раньше доказывали соответствующие утверждения.

Центры вписанной и описанной окружностей. Основная идея рассуждения

Что касается центров вписанной и описанной окружностей, то здесь наши рассуждения были весьма сходными. Основывались они на свойствах соответствующих геометрических мест точек.

Как мы знаем, серединный перпендикуляр к отрезку представляет собой геометрическое место точек, равноудалённых от

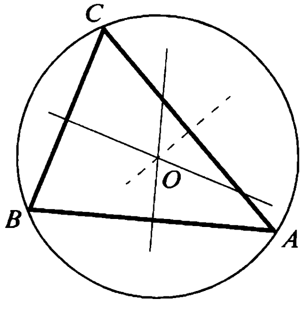


Рис. 366

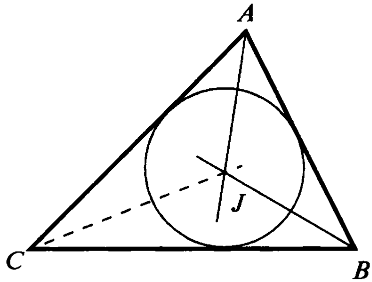


Рис. 367

его концов. Поэтому, если мы проведём два серединных перпендикуляра к сторонам AB и BC треугольника ABC (рис. 366), то точка их пересечения, а они обязательно пересекутся (почему?), будет равноудалена от вершин A и B, а также от B и C. Таким образом, получившаяся точка O равноудалена от всех трёх вершин треугольника, и окружность с центром в O радиусом OA проходит через все вершины треугольника и является описанной окружностью. Понятно, что через O проходит и серединный перпендикуляр к AC.

Обратно, если какая-то точка равноудалена от всех вершин треугольника, то она расположена на серединных перпендикулярах к AB и BC, т. е. совпадает с O.

Рассмотрим теперь центр вписанной окружности. Будем рассуждать аналогично. Биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудалённых от его сторон (рассматриваются лишь точки внутри угла). Обозначим через J точку пересечения биссектрис углов A и B треугольника ABC (рис. 367). Эта точка равноудалена от сторон AB и BC, а также от сторон BA и BC. Значит, она равноудалена от всех трёх сторон треугольника, поэтому существует окружность с центром в J, которая касается всех трёх сторон треугольника, т. е. является вписанной для треугольника ABC. Кроме того, через точку J обязана пройти и биссектриса угла C.

Так же как и в предыдущем случае, проводится обратное рассуждение. Если некоторая окружность касается всех сторон треугольника, то её центр должен лежать на биссектрисах углов A и B, а значит, он совпадает с J.

8.1

В § 5.4 доказывалось, что высоты треугольника пересекаются в одной точке. Там мы использовали *метод вспомогательной окружности*. Сейчас мы приведём другое, также весьма интересное доказательство этого факта, дающее важные следствия для теории.

Теорема о высотах. Второе доказательство

Теорема 8.1 (*о высотах треугольника*).

Три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

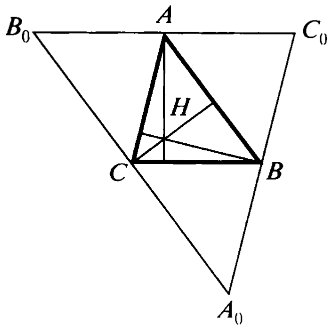


Рис. 368

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC (рис. 368). Проведём через его вершины прямые, параллельные противоположным сторонам. Эти три прямые образуют треугольник $A_0B_0C_0$. Стороны треугольника ABC являются средними линиями треугольника $A_0B_0C_0$. В самом деле, $ACBC_0$ — параллелограмм. Значит, $AC_0 = CB$. Аналогично $AB_0 = CB$. Следовательно, A — середина C_0B_0. То же верно и для других вершин B и C.

Проведём теперь высоты в треугольнике ABC. Соответствующие прямые, на которых лежат высоты, являются серединными перпендикулярами к сторонам треугольника $A_0B_0C_0$, а значит, пересекаются в одной точке. При этом точка их пересечения является центром окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$. ▼

«Картинка», образованная треугольниками ABC и $A_0B_0C_0$, позволяет сделать ещё целый ряд интересных выводов.

Теорема о медианах треугольника. Прямая Эйлера

Теорема 8.2 (*о медианах треугольника*).

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1 (считая от вершин).

Три замечательные точки треугольника: центр описанной окружности, точка пересечения медиан и точка пересечения высот лежат на одной прямой.

Эта прямая называется ***прямой Эйлера***. Она названа по имени одного из величайших математиков Леонарда Эйлера (1707—1783). По количеству великолепных научных трудов, оказавших влияние на развитие науки, этому учёному нет равных в мире. Родившись в Швейцарии, Леонард Эйлер долгие годы прожил в России. В России же он создал большинство своих работ; здесь же он и умер. Так что мы с полным основанием можем считать его российским математиком.

Доказательство. Пусть D — середина стороны BC треугольника ABC, O — центр описанной около треугольника ABC окружности, H — точка пересечения высот треугольника ABC (рис. 369). Как мы знаем из предыдущего рассуждения, H — центр окружности, описанной около треугольника $A_0B_0C_0$. Но треугольник $A_0B_0C_0$ подобен треугольнику ABC с коэффициентом подобия 2. Точке H треугольника $A_0B_0C_0$ соответствует точка O треугольника ABC. Отрезки AH и OD являются для этих треугольников соответствующими. Значит, $AH = 2OD$. Кроме того, AH и OD параллельны.

Обозначим через M точку пересечения AD с OH. Из подобия треугольников AHM и DOM находим: $2OM = HM$, $2DM = AM$.

Итак, точка M делит отрезок OH в отношении 2 : 1, а медиана AD проходит через M и также делится этой точкой в отношении 2 : 1.

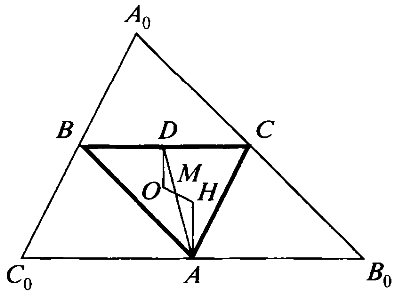


Рис. 369

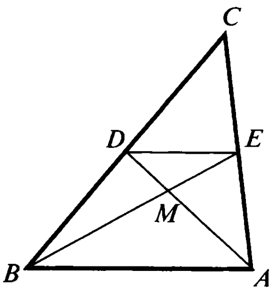


Рис. 370

Такие же рассуждения справедливы для любой медианы треугольника. Это означает, что все три медианы проходят через одну и ту же точку M отрезка OH, т. е. пересекаются в одной точке и, как мы показали, делятся этой точкой в отношении 2 : 1. Таким образом, все утверждения теоремы доказаны. ▼

Приведём ещё одно доказательство теоремы о том, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. Оно проще только что рассмотренного, хотя и не так богато геометрическими следствиями.

Рассмотрим треугольник ABC, D и E — середины BC и AC (рис. 370). Обозначим через M точку пересечения AD и BE. Поскольку ED — средняя линия треугольника ABC, из её свойств следует, что треугольники ABM и DEM подобны. Коэффициент подобия равен 2, т. е. $\frac{AB}{DE} = 2$.

Таким образом, точка пересечения любых двух медиан делит каждую из них в отношении 2 : 1 $\left(\frac{AM}{MD} = \frac{BM}{ME} = \frac{AB}{DE} = 2\right)$.

Из этого следует, что все три медианы должны пересекаться в одной точке — точке M. (Если мы проведём медиану из вершины C, то она разделит AD в том же отношении 2 : 1, т. е. пройдёт через точку M.) ▼

❋ Три роли одной точки

Итак, мы установили, что точка H (см. рис. 369) является точкой пересечения высот треугольника ABC и центром описанной окружности для треугольника $A_0B_0C_0$. Но этим её свойства далеко не исчерпываются.

В главе 1 предлагалась следующая задача.

Задача. *Докажите, что в остроугольном треугольнике точка пересечения высот является центром окружности, вписанной в треугольник, вершинами которого являются основания высот данного.*

Если вы в своё время с этой задачей не справились или пропустили её, не беда, сейчас мы приведём решение.

Решение. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, H — точка их пересечения (рис. 371). Точки C, A_1, H и B_1 лежат на одной окружности с диаметром HC. Следовательно, $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$, поскольку в этой вспомогательной окружности они опираются на одну дугу. Точно так же $\angle HB_1C_1 = \angle HAC_1$. Докажем равенство углов $\angle HCA_1 = \angle HAC_1$. Это то же самое, что и равенство $\angle C_1CB = \angle A_1AB$. Но в прямоугольных треугольниках C_1CB и A_1AB имеется общий острый угол — угол B треугольника ABC. Следовательно, $\angle C_1CB = \angle A_1AB$, а значит, $\angle HB_1A_1 = \angle HB_1C_1$, т. е. B_1H — биссектриса угла B_1 треугольника $A_1B_1C_1$.

Аналогично докажем, что биссектрисами являются HA_1 и HC_1. Утверждение задачи доказано. ▼

Рассмотрим теперь три треугольника: ABC, $A_1B_1C_1$ и $A_0B_0C_0$. (Как связаны треугольники ABC и $A_0B_0C_0$, было показано при доказательстве теоремы 8.1.) Точка пересечения высот треугольника ABC — точка H — является для треугольника $A_0B_0C_0$ центром описанной окружности, а для треугольника $A_1B_1C_1$ — центром вписанной окружности (рис. 372).

Напомним, что рисунок 372 соответствует остроугольному треугольнику ABC. А что будет, если ABC тупоугольный треугольник? Прежде чем ответить на этот вопрос, введём ещё одно понятие. Оказывается, что у каждого треугольника имеется четыре (!) окружности, касающиеся всех трёх прямых, образующих этот треугольник.

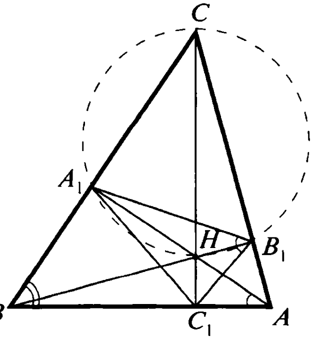


Рис. 371

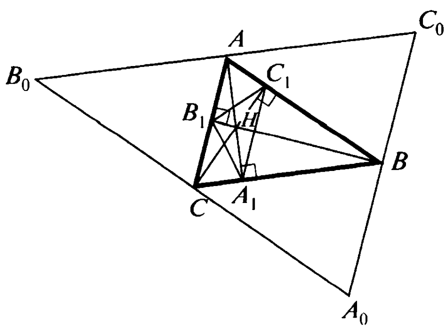


Рис. 372

Одна из них — это известная вам вписанная окружность. Три другие называются ***вневписанными*** окружностями. Их центры расположены вне данного треугольника.

❋ Вневписанные окружности треугольника

Рассмотрим треугольник ABC. Проведём биссектрисы углов, внешних к углам B и C (рис. 373). (Эти биссектрисы перпендикулярны соответствующим биссектрисам внутренних углов.)

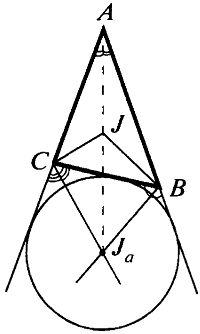


Рис. 373

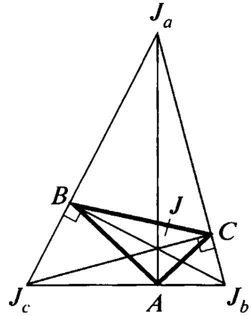


Рис. 374

Точка их пересечения — обозначим её J_a — равноудалена от лучей AB и BC и от лучей AC и CB. Значит, J_a равноудалена от всех трёх прямых AB, BC и CA, поэтому существует окружность с центром в J_a, касающаяся стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Через J_a проходит также и биссектриса угла A треугольника ABC.

Точно так же получаются две другие вневписанные окружности с центрами J_b и J_c. На рисунке 374 построены все четыре центра вписанной и вневписанных окружностей для треугольника ABC.

Как видно, для треугольника $J_aJ_bJ_c$ отрезки J_aA, J_bB, J_cC являются высотами, J — точка пересечения высот.

Давайте ещё раз рассмотрим треугольники $A_0B_0C_0$, ABC и $A_1B_1C_1$, где A, B, C — середины сторон треугольника $A_0B_0C_0$, а A_1, B_1, C_1 — основания высот треугольника ABC, H — точка их пересечения.

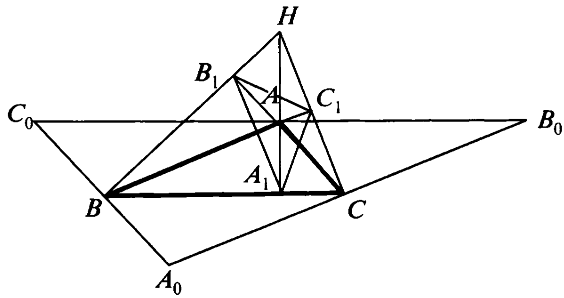


Рис. 375

Пусть угол при вершине A тупой (рис. 375). В этом случае точка H, как и раньше, является для треугольника $A_0B_0C_0$ центром описанной окружности. Для треугольника $A_1B_1C_1$ она будет центром вневписанной окружности. (Докажите это самостоятельно.)

▲■● Задачи, задания, вопросы

990(н). Найдите только сгибанием бумажного треугольника центр его вписанной окружности, центр описанной окружности для остроугольного, прямоугольного и тупоугольного треугольников.

991(в). Углы B и C треугольника ABC равны соответственно 10° и 100°. Найдите углы BOC, COA, AOB, где O — центр описанной окружности.

992(в). Докажите, что в остроугольном треугольнике центр описанной окружности находится внутри треугольника, а для тупоугольного — вне его.

993(в). Найдите углы треугольника, если его стороны видны из центра описанной окружности под углами:

а) 110°, 130°, 120°; б) 10°, 30°, 40°.

994. Точка O — центр вневписанной окружности треугольника ABC, угол BAC равен 120°, периметр треугольника равен 20 см. Найдите AO.

995(п). В треугольнике ABC угол A равен α. Пусть J — центр вписанной в этот треугольник окружности, а J_a, J_b — центры двух вневписанных окружностей (J_a касается стороны BC, J_b — стороны AC). Найдите углы BJC, BJ_aC, BJ_bC.

996. Внутри треугольника ABC взята точка M. Известно, что угол A равен 30°, угол B равен 70°. Треугольник BMC является равносторонним. Найдите угол MAB.

997(п). Шестиугольник $AKBPCM$ вписан в окружность. Известно, что $AK = KB$, $BP = PC$, $CM = MA$. Докажите, что диагонали AP, KC и BM этого шестиугольника пересекаются в одной точке. Оказывается, точка их пересечения для каждого из треугольников ABC и KPM является известной вам замечательной точкой. Какой?

998(в). Докажите, что точка пересечения медиан треугольника с вершинами в серединах сторон данного совпадает с точкой пересечения медиан данного треугольника.

999(п). Пусть $ABCD$ — параллелограмм. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и CDA лежат на диагонали BD и делят её на три равные части.

1000. Касательные к окружности в точках B и C пересекаются в точке A. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC, совпадает с серединой дуги BC, расположенной внутри треугольника.

1001(н). Найдите только сгибанием модели бумажного треугольника точку пересечения его высот. Всегда ли это возможно?

1002(т). В треугольнике ABC угол A равен α, H — точка пересечения высот. Чему может быть равен угол BHC?

1003(пт). Пусть O — центр описанной, J — центр вписанной в треугольник ABC окружности, H — точка пересечения его высот. Докажите, что если угол A равен 60°, то точки B, C, O, J, H лежат на одной окружности. Чему равен угол OJC?

1004. Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что A — точка пересечения высот треугольника BHC.

1005(п). Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC, AHB, BHC, CHA, равны между собой.

1006(п). Докажите, что точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно его сторон, лежат на описанной около этого треугольника окружности.

1007(н). Найдите только сгибанием бумажного треугольника точку пересечения его медиан.

1008(п). Докажите, что из медиан любого треугольника можно построить треугольник (т. е. что существует треугольник, стороны которого равны медианам любого указанного треугольника).

1009(п). Пусть AA_1, AA_2, AA_3 — соответственно высота, биссектриса и медиана, выходящие из вершины A треугольника ABC; AA_2 при продолжении пересекает описанную около ABC окружность в точке D. Докажите, что DA_3 параллельна AA_1. Докажите также, что A_2 расположена между A_1 и A_3.

1010. Используя формулу, выражающую медиану через стороны треугольника (задача 945), найдите отношение суммы квадратов медиан к сумме квадратов сторон треугольника.

В задачах 1011—1015 треугольник был нарисован, затем его стёрли, оставив указанные элементы.

1011. Восстановите треугольник по точке пересечения высот и стороне.

1012. Восстановите треугольник по точке пересечения медиан M и стороне.

1013. Восстановите равнобедренный треугольник по центру описанной окружности и боковой стороне.

1014. Восстановите треугольник по центру вписанной окружности и стороне.

1015. Восстановите равносторонний треугольник по центру описанной окружности и стороне.

1016. В остроугольном треугольнике ABC высоты CC_1 и BB_1 пересекаются в точке H. Докажите что:

а) $C_1H \cdot CH = BH \cdot B_1H$;

б) $AB_1 \cdot CB_1 = BB_1 \cdot HB_1$;

в) $AB \cdot AC_1 = AC \cdot AB_1$;

г) $AC_1 \cdot BC_1 = CC_1 \cdot HC_1$;

д) ортоцентр делит высоты на части, произведение которых постоянно для данного треугольника.

1017(т). В остроугольном треугольнике ABC высоты CN и AM при продолжении пересекают описанную около треугольнике ABC окружность соответственно в точках Q и P. Найдите радиус описанной около треугольника ABC окружности, если $AC = a$, $PQ = 1{,}2a$.

В задачах1018—1019 известны длины указанных отрезков.

1018(пт). Постройте треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной вершины.

1019(п). Постройте треугольник по трём медианам.

1020(пт). Пусть B и C — фиксированные точки окружности; A — произвольная точка на ней. Найдите геометрическое место следующих точек:

а) пересечения высот треугольника ABC;

б) пересечения биссектрис треугольника ABC;

в) пересечения медиан треугольника ABC.

1021(т). Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC. Докажите, что расстояние между серединами BC и AH равно радиусу описанной около треугольника ABC окружности.

1022(т). На стороне AB треугольника ABC построен прямоугольник $ABDE$. Из точек E и D проведены прямые, перпендикулярные CB и AC соответственно. Обозначим через M точку их пересечения. Докажите, что прямая CM перпендикулярна AB.

1023(т). Пусть R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей некоторого треугольника. Докажите, что $R \geqslant 2r$.

1024. Пусть O, J, M, H — соответственно центры описанной, вписанной окружностей, точка пересечения медиан и точка пересечения высот некоторого треугольника. Докажите, что если две любые их этих точек совпадают, то треугольник равносторонний.

1025(п). Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности, прямая AJ пересекает описанную окружность в точке D. Докажите, что $JD = DB = DC$.

1026(т). Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Докажите, что центры окружностей, описанных около треугольников AJB, BJC, CJA, лежат на описанной около данного треугольника ABC окружности.

1027. В обозначениях задачи 1025 выразите отрезки JD и AJ через R и r (радиусы вписанной и описанной окружностей) и угол A.

1028(т). Докажите формулу Эйлера: $d^2 = R^2 - 2Rr$, где R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей треугольника, d — расстояние между их центрами.

1029. Докажите, что четыре отрезка, соединяющие вершины треугольной пирамиды с точками пересечения медиан противоположных граней, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 3 : 1.

8.2. Некоторые теоремы и задачи геометрии. Метод подобия

В предыдущем параграфе мы двумя способами доказали, что медианы треугольника пересекаются в одной точке. В обоих случаях было использовано подобие некоторых треугольников, возникших в результате дополнительных построений. По существу, в этом и состоит метод подобия.

Очень часто метод подобия оказывается удобным при доказательстве теорем или при решении задач, в которых речь идёт об отношениях отрезков.

Одно свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника

Вот как, например, можно доказать одну важную теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

8.2

Теорема 8.3 *(свойство биссектрисы треугольника).*

Если AA_1 — биссектриса внутреннего угла A треугольника ABC, то

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{BA}{AC}.$$

Иными словами, ***биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные заключающим её сторонам.***

Доказательство. Проведём через B прямую, параллельную AC, и обозначим через D точку пересечения этой прямой с продолжением AA_1 (рис. 376).

Согласно свойству параллельных прямых имеем $\angle BDA = \angle CAD$. Так как AA_1 — биссектриса, то $\angle CAD = \angle DAB$. Итак, $\angle BDA = \angle DAB$, поэтому $BD = BA$.

Из подобия треугольников CAA_1 и BDA_1 (по второму признаку $\angle BDA_1 = \angle CAA_1$, $\angle BA_1D = \angle CA_1A$) получаем $\dfrac{BA_1}{A_1C} = \dfrac{BD}{AC} = \dfrac{BA}{AC}$, что и требовалось доказать.

Заметим, что можно было бы с тем же успехом провести через B прямую, параллельную биссектрисе AA_1, до пересечения в точке E с продолжением CA (рис. 377).

Тогда $EA = AB$ и $\dfrac{CA_1}{A_1B} = \dfrac{CA}{AE} = \dfrac{CA}{AB}$. ▼

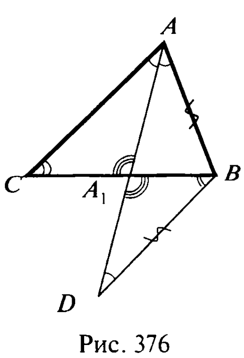


Рис. 376

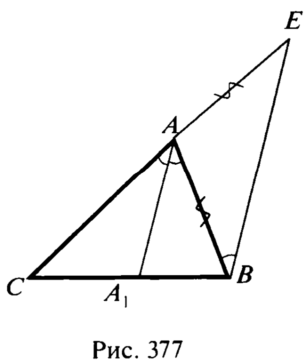


Рис. 377

* Пересекающиеся отрезки в треугольнике

Приём, использованный при доказательстве теоремы 8.3, помогает и при решении следующей задачи.

__Задача 1.__ *На стороне AC треугольника ABC взята точка M, а на стороне BC — точка K так, что $AM : MC = 2 : 3$, $BK : KC = 4 : 3$. В каком отношении AK делит отрезок BM?*

Решение. Проведём через B прямую, параллельную AC, и обозначим через P точку её пересечения с продолжением AK (рис. 378).

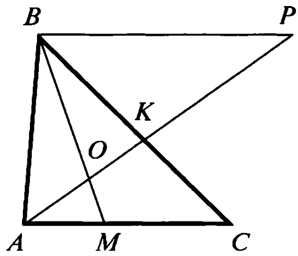


Рис. 378

Из подобия треугольников BKP и CKA имеем $\frac{BP}{AC} = \frac{BK}{KC} = \frac{4}{3}$, т. е. $BP = \frac{4}{3}AC$. Кроме того, заметим, что $AM = \frac{2}{5}AC$.

Теперь из подобия треугольников BPO и MOA, где O — точка пересечения AK и BM, получим

$$\frac{BO}{OM} = \frac{BP}{AM} = \frac{\frac{4}{3}AC}{\frac{2}{5}AC} = \frac{10}{3}. \blacktriangledown$$

В некоторых случаях можно вообще обойтись без дополнительных построений, поскольку подобные треугольники уже имеются на чертеже. Самое главное — увидеть их.

* Формула длины биссектрисы треугольника

__Задача 2.__ *В треугольнике ABC проведена биссектриса AA_1. На стороне AC взята точка K так, что $CK = CA_1$, а на продолжении стороны AB за точку B взята точка M так, что $BM = A_1B$. Найдите AA_1, если $AK = k$, $AM = m$.*

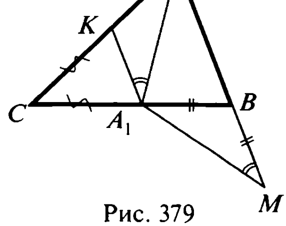


Рис. 379

Решение. Оказывается, треугольники AKA_1 и AA_1M подобны по второму признаку подобия (рис. 379). Найти одну пару равных углов в этих треугольниках легко. Ведь AA_1 — биссектриса, значит, $\angle KAA_1 = \angle A_1AM$.

Далее, угол A_1MA равен половине угла B треугольника ABC, так как $\angle ABC$ является внешним для равнобедренного треугольника A_1MB ($A_1B = BM$).

Найдём угол AA_1K:

$$\angle AA_1K = 180° - \frac{A}{2} - \angle AKA_1 = 180° - \frac{A}{2} - (180° - \angle CKA_1) =$$
$$= \angle CKA_1 - \frac{A}{2} = \frac{1}{2}(180° - C) - \frac{A}{2} =$$
$$= 90° - \frac{A+C}{2} = 90° - \frac{180° - B}{2} = \frac{B}{2}.$$

Подобие треугольников AKA_1 и AA_1M доказано.

Теперь получаем

$$\frac{AK}{AA_1} = \frac{AA_1}{AM}, \text{ или } AA_1 = \sqrt{AK \cdot AM} = \sqrt{km}. ▼$$

Только что решённая задача, а также теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника (теорема 8.3) позволяют доказать формулу для длины биссектрисы треугольника.

Задача 3. *Докажите, что если AA_1 — биссектриса внутреннего угла треугольника ABC, то*

$$AA_1^2 = BA \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C.$$

Другими словами, квадрат биссектрисы внутреннего угла треугольника равен произведению сторон, её заключающих, без произведения отрезков третьей стороны, возникающих при пересечении её с биссектрисой.

Решение. Как следует из задачи 2 (см. рис. 379),

$$AA_1^2 = AK \cdot AM = (AC - CA_1)(AB + BA_1) =$$
$$= AC \cdot AB - CA_1 \cdot A_1B + (AC \cdot BA_1 - AB \cdot CA_1).$$

По теореме 8.3 о биссектрисе $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{AB}{AC}$. Значит, выражение в скобках равно нулю. Задача решена.

Приведём ещё одно решение этой задачи, также использующее подобие и одно стандартное дополнительное построение. Это дополнительное построение состоит в следующем: опишем около треугольника ABC окружность и продолжим биссектрису угла A до пересечения с этой окружностью в точке D (рис. 380).

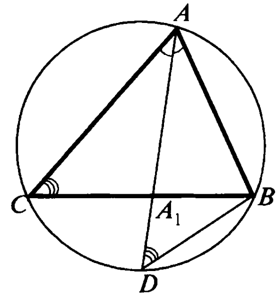


Рис. 380

Мы знаем, что $CA_1 \cdot A_1B = AA_1 \cdot A_1D$. Кроме того, из подобия треугольников CAA_1 и DAB ($\angle CAA_1 = \angle DAB$, $\angle ACA_1 = \angle ADB$) следует, что

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AA_1}{AB}, \text{ или } AC \cdot AB = AA_1 \cdot AD.$$

Запишем два получившихся равенства:

$$AA_1 \cdot A_1D = CA_1 \cdot A_1B,$$
$$AA_1 \cdot AD = BA \cdot AC.$$

Вычтем из второго равенства первое. Поскольку $AD - A_1D = AA_1$, имеем $AA_1^2 = BA \cdot AC - BA_1 \cdot A_1C$. ▼

✻ Одно свойство трапеции

Естественным образом подобные треугольники возникают в различных задачах на трапецию. Решим одну такую задачу (она предлагалась ранее для самостоятельного решения — задача 807), в которой утверждается также и полезный факт.

Задача 4. *Докажите, что прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и через точку пересечения продолжений её боковых сторон, делит основания трапеции пополам.*

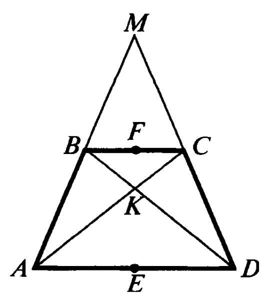


Рис. 381

Решение. Обозначим через E и F середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$; K — точка пересечения её диагоналей, M — точка пересечения продолжений боковых сторон (рис. 381).

Заметим, что точки M, E и F лежат на одной прямой. Это следует из подобия треугольников BMC и AMD. В каждом из них отрезки ME и MF соответственно являются медианами, а значит, они делят угол при вершине M на одинаковые части.

Точно так же на одной прямой расположены точки K, E и F. (Здесь это следует из подобия треугольников BKC и DKA.) Значит, все четыре точки M, E, K и F лежат на одной прямой, т. е. прямая MK проходит через E и F. ▼

❋ Задачи, задания, вопросы

1030. В четырёхугольнике стороны равны (в порядке обхода) 8, 6, 9, 12. Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов четырёхугольника пересекаются на его диагонали.

1031(в). В треугольнике ABC известны две стороны: $AB = 2$, $AC = 3$. В каком отношении биссектриса угла A делит медиану, проведённую к стороне AC?

1032(п). В каком отношении делит сторону BC треугольника ABC прямая, проходящая через A и середину медианы, выходящей из B?

1033. Докажите, что две прямые, проходящие через одну вершину параллелограмма и середины противоположных этой вершине сторон, делят диагональ параллелограмма на три равные части.

1034(п). На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки K и M так, что $AK : AB = BM : BC = 1 : 3$. В каком отношении точка пересечения CK и AM делит каждый из этих отрезков?

1035. В прямоугольном треугольнике с катетами, равными 3 и 4, проведены биссектрисы острых углов. Найдите расстояния между концами этих биссектрис, лежащих на катетах.

1036. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 4$, $BC = 6$, $AC = 7$, AA_1 — биссектриса угла A этого треугольника, J — центр вписанной окружности. Найдите AA_1, AJ.

1037(п). В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M; O — точка пересечения CK и AM. Обозначим $\frac{AK}{KB} = k$, $\frac{BM}{MC} = m$, $\frac{CO}{OK} = p$, $\frac{AO}{OM} = l$. Пусть из четырёх чисел k, m, p и l известны два. Найдите два оставшихся числа, если:

а) $k = 2, m = \frac{1}{3}$; б) $k = \frac{2}{3}, m = \frac{1}{2}$; в) $k = 3, p = 2$;

г) $k = 2, l = 3$; д) $m = \frac{1}{3}, l = \frac{1}{3}$; е) $p = 2, l = 1$.

1038(п). В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки K и M, прямая KM пересекает прямую AC в точке P. Найдите $CP : AP$, если:
а) $AK : KB = 2$, $BM : MC = 1 : 3$;
б) $AK : KB = 3$, $BM : MC = 4$;
в) $AK : KB = 2 : 5$, $BM : MC = 2$.

1039(т). Две окружности пересекаются в точках A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности. Найдите AB, если $CB = a$, $DB = b$.

1040(т). В треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности. Через вершину B проведена прямая, перпендикулярная AO и пересекающая прямую AC в точке K, а через вершину C проведена прямая, также перпендикулярная AO и пересекающая AB в точке M. Найдите BC, если $BK = a$, $CM = b$.

1041(т). Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей в точке D. Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M. Найдите MB, если $MA = a$, $MD = b$.

1042(т). В треугольнике ABC через вершину A проведена прямая l, касающаяся описанной около этого треугольника окружности. Найдите высоту треугольника ABC, проведённую к стороне BC, если расстояния от B и C до l равны a и b.

1043(т). К окружности проведены две прямые, касающиеся её в точках A и B. Пусть M — произвольная точка на окружности. Найдите расстояние от M до AB, если расстояния от M до касательных равны a и b.

1044(т). Серединные перпендикуляры к сторонам AB и AC треугольника ABC пересекают высоту, проведённую к стороне BC, в точках K и M. Найдите радиус окружности, описанной около ABC, если $AK = a$, $AM = b$.

1045(т). Около окружности описана равнобокая трапеция. Боковая сторона трапеции равна a, отрезок, соединяющий точки касания боковых сторон с окружностью, равен b. Найдите диаметр окружности.

1046(т). В окружности проведён диаметр AB. Другая окружность с центром в B пересекает первую в точках C и D; M — точка первой окружности внутри второй. Отрезок AM пересекает вторую окружность в точке E. Найдите ME, если $MC = a$, $MD = b$.

1047. Докажите, что отрезок, соединяющий вершину угла треугольника с точкой, делящей противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам указанного угла, является биссектрисой этого угла.

1048(т). Биссектриса угла C треугольника ABC делит сторону AB на отрезки, равные a и b ($a > b$). Касательная к окружности, описанной около треугольника ABC, проходящая через C, пересекает прямую AB в точке D. Найдите CD.

1049. В треугольной пирамиде $ABCD$ на рёбрах AB, BD и DC взять соответственно точки K, M и P так, что $\frac{AK}{KB} = 1$, $\frac{BM}{MD} = 2$, $\frac{DP}{PC} = 3$. Через точки K, M и P проходит плоскость, пересекающая прямые AD, BC и CA в точках E, F и G. Найдите $\frac{AE}{ED}$, $\frac{BF}{FC}$, $\frac{CG}{GA}$. Какие из точек E, F и G расположены на рёбрах пирамиды?

8.3. Построение отрезка по формуле. Метод подобия в задачах на построение

В начале этого параграфа мы решим несколько стандартных задач на построение отрезка по заданной формуле. Или, более точно, построение отрезка, длина которого выражается через длины данных отрезков с помощью заданной формулы.

Набор простейших задач, который мы рассмотрим, служит основой алгебраического метода решения задач на построение. Суть метода состоит в том, что данная задача на построение сводится к построению какого-то неизвестного отрезка. Этот отрезок оказывается возможным выразить через известные отрезки и величины. Находится формула, дающая такое выражение. Затем предлагается способ построения отрезка по найденной формуле. Этот способ обычно состоит в том, что, используя стандартный набор построений, мы строим сначала несколько вспомогательных отрезков, а затем уже искомый отрезок.

Построение отрезка по формуле $x = \frac{bc}{a}$

Задача 1. *Даны три отрезка a, b и c. Постройте отрезок x, выражающийся через a, b и c по формуле* $x = \frac{bc}{a}$.

Заметим, что равенство $x = \frac{bc}{a}$ эквивалентно равенству $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, которое означает, что x является ***четвёртым пропорциональным*** отрезком для отрезков a, b и c.

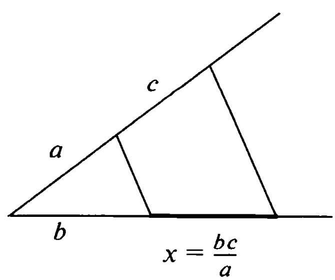


Рис. 382

Решение. Построение основано на теореме о пропорциональных отрезках. На одной стороне произвольного угла от вершины последовательно отложим отрезки a и c, а на другой — отрезок b (рис. 382). Проведём прямую l через концы отрезков a и b, а затем через другой конец отрезка c проведём прямую, параллельную l. Две эти параллельные прямые ограничат примыкающий к b нужный отрезок x. Ведь по указанной теореме $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. ▼

Построения, основанные на свойствах прямоугольного треугольника

Задача 2. *Даны два отрезка a и b. Постройте отрезок*:

а) $x = \sqrt{a^2 + b^2}$; б) $x = \sqrt{a^2 - b^2}$; в) $x = \sqrt{ab}$.

Решение. Первые два построения основаны на теореме Пифагора.

а) x — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами a и b (рис. 383).

б) x — катет прямоугольного треугольника, у которого другой катет равен b, а гипотенуза равна a (рис. 384).

в) Здесь можно предложить построение, основанное на соотношении между высотой прямоугольного треугольника и отрезками гипотенузы: если a и b — отрезки гипотенузы, на которые она делится высотой, то высота как раз и равна $\sqrt{ab}$. Теперь построение понятно. Строим отрезок $a + b$. Затем на этом отрезке, как на диаметре, строим полуокружность, и из точки, разделяющей отрезки a и b, проводим перпендикуляр к диаметру до пересечения с полуокружностью (рис. 385). Получившийся отрезок этого перпендикуляра и будет искомым, поскольку, как мы знаем, угол, опирающийся на диаметр, является прямым.

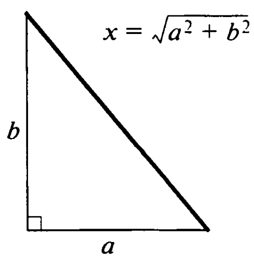


Рис. 383

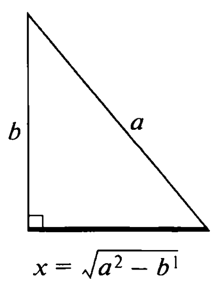


Рис. 384

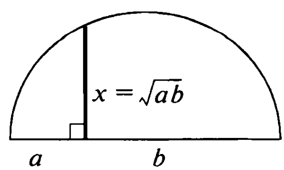


Рис. 385

Можно было бы исходить и из других соотношений в прямоугольном треугольнике (рис. 386).

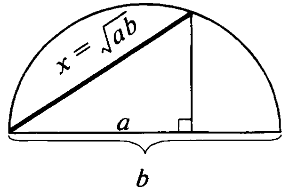


Рис. 386

В связи с последним построением сделаем одно замечание. Величина $\frac{a+b}{2}$ называется ***средним арифметическим*** a и b, а величина $\sqrt{ab}$ — ***средним геометрическим***. Из нашего построения (см. рис. 385) следует известное неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$. Оно следует из того, что любая хорда окружности не превосходит её диаметра. ▼

Рассмотрим одну задачу, чтобы показать, как эти элементарные построения позволяют делать более сложные построения.

✻ Одна нестандартная задача

Задача 3. *Даны отрезки a и b. Постройте отрезок, задаваемый формулой*[1] $x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}$.

Решение. Преобразуем подкоренное выражение: $a^4 + b^4 = a^2\left(a^2 + \frac{b^4}{a^2}\right)$. Построим сначала вспомогательный отрезок $y = \frac{b^2}{a}$. В данном случае можно воспользоваться методом, предложенным в задаче 1 этого параграфа.

Теперь получаем, что $a^4 + b^4 = a^2(a^2 + y^2)$. Построим ещё один вспомогательный отрезок $z = \sqrt{a^2 + y^2}$. В результате имеем $x = \sqrt[4]{a^2z^2} = \sqrt{az}$. Поскольку a и z — известные отрезки, задача сведена уже к рассмотренной (задача 2 этого параграфа). ▼

Две следующие задачи на построение служат иллюстрацией метода подобия.

---

[1] $\sqrt[4]{m}$ можно определить равенством $\sqrt[4]{m} = \sqrt{\sqrt{m}}$.

8.3

* Две задачи на метод подобия

Задача 4. *Постройте треугольник по двум углам и сумме радиусов вписанной и описанной окружностей.*

Решение. Дело в том, что два первых условия — два угла треугольника — определяют треугольник, как говорят математики, с точностью до подобия. Любой треугольник, два угла которого равны данным, подобен искомому.

Итак, построим любой треугольник $A_0B_0C_0$, имеющий нужные углы (рис. 387). Сторону A_0B_0 можно выбрать произвольно.

В этом треугольнике построим центры вписанной и описанной окружности (это вы уже умеете делать), находим их радиусы R_0 и r_0, а затем и сумму $R_0 + r_0$.

Проведём через A_0 произвольный луч, отложим на нём от A_0 отрезок $R_0 + r_0$ и данный отрезок $R + r$. Получим точки M_0 и M. Соединим M_0 и B_0 и через M проведём прямую, параллельную M_0B_0. Эта прямая определит на A_0B_0 точку B. Затем найдём точку C на A_0C_0 ($BC \parallel B_0C_0$).

Треугольник A_0BC будет искомым. Он подобен треугольнику $A_0B_0C_0$ с коэффициентом $\dfrac{R + r}{R_0 + r_0}$. Это означает, что сумма радиусов вписанной и описанной окружностей у него равна $R + r$. ▼

Задача 5. *Дан треугольник ABC. Постройте квадрат, две вершины которого лежат на прямой AC и по одной — на сторонах AB и BC.*

Решение. Возьмём любую точку M_0 на AB и построим квадрат $M_0K_0P_0L_0$, у которого точки P_0 и L_0 лежат на AC (рис. 388). Проведём прямую AK_0 и найдём на BC точку K, являющуюся одной из вершин искомого квадрата $MKPL$. ▼

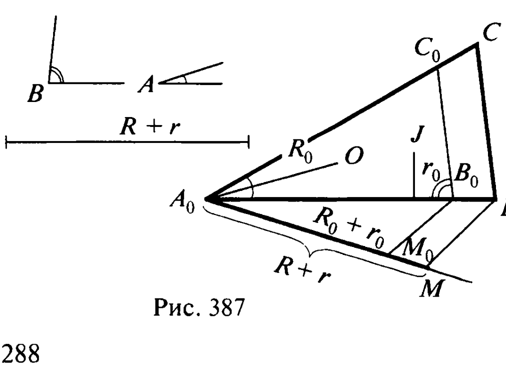


Рис. 387

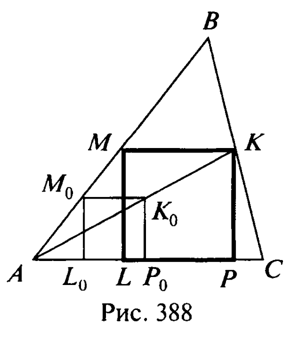


Рис. 388

Задачи, задания, вопросы

1050(в). Дан отрезок длины 1. Постройте отрезки длины $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и $\sqrt{7}$. Укажите способ построения отрезка длиной $\sqrt{n}$.

1051(н). Даны отрезки a, b, c, d, e. Постройте отрезок длины:

а) ka, где $k \in N$;
б) $\frac{a}{k}$, где $k \in N$, $k > 1$;
в) $\sqrt{ab + cd}$;
г) $\sqrt{a^2 - bc}$;
д) $\frac{2ab}{a + b}$;
е) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;
ж) $\frac{abc}{d^2 + e^2}$.

1052(вп). Даны отрезки a, b, c, d и e. Постройте отрезок x, если:

а) $x = \sqrt{a^2 + 2b^2}$;
б) $x = \sqrt{2ab}$;
в) $x = \sqrt[4]{abcd}$;
г) $x = \frac{abc}{de}$;
д) $x = \frac{a^5}{b^4}$;
е) $\frac{1}{x} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} + \frac{1}{e}$.

1053. Постройте прямоугольный треугольник по катету и проекции другого катета на гипотенузу.

1054. Даны отрезок длиной a и угол, равный α. Постройте отрезки длины:

а) $a\cos\alpha$;
б) $a\sin\alpha$;
в) $\frac{a}{\cos\alpha}$;
г) $\frac{a}{\sin\alpha}$.

1055(н). Впишите в данную часть окружности (она называется *сегментом*) (рис. 389) квадрат так, чтобы две его вершины лежали на хорде, а две другие вершины — на дуге сегмента.

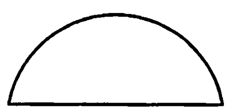


Рис. 389

1056(н). Дана прямая XY и точки A, B вне данной прямой. Найдите на прямой XY точку M такую, что углы AMX и BMY равны (рис. 390).

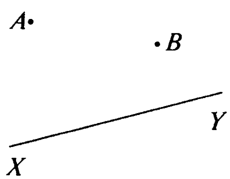


Рис. 390

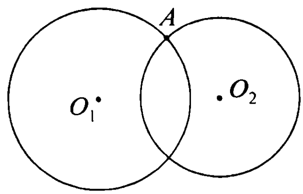


Рис. 391

1057(н). Через точку A пересечения двух окружностей (рис. 391) проведите прямую, отсекающую от окружностей равные хорды.

1058(п). Постройте треугольник по двум углам и сумме медиан.

1059. Постройте прямоугольный треугольник по сумме его катетов $a + b$ и гипотенузе c.

1060. Постройте прямоугольный треугольник по его катету a и сумме другого катета b и гипотенузы c.

1061(п). Постройте треугольник по углу, отношению сторон, заключающих этот угол, и радиусу вписанной окружности.

1062. Постройте треугольник по двум сторонам и биссектрисе угла между ними.

1063(п). Дан угол и точка внутри него. Постройте окружность, касающуюся сторон угла и проходящую через данную точку.

1064(п). Дана прямая и две точки по одну сторону от неё. Постройте окружность, проходящую через данные точки и касающуюся данной прямой.

1065(т). Постройте треугольник по углам, которые одна из медиан образует со сторонами, заключающими её, и другой медиане.

1066(т). Докажите, что если d — любой отрезок, h_a, h_b, h_c — три высоты некоторого треугольника, то треугольник со сторонами $\frac{d^2}{h_a}$, $\frac{d^2}{h_b}$, $\frac{d^2}{h_c}$ подобен данному треугольнику. Используя этот факт, постройте треугольник по трём высотам.

1067(т). На плоскости изображена дуга AB окружности и указан её центр. Только с помощью циркуля разделите дугу AB пополам.

✱ 8.4. Одно важное геометрическое место точек

Свойство прямой, перпендикулярной данному отрезку

Рассмотрим задачу на геометрические места точек.

Факт, который утверждается в этой задаче, бывает весьма полезен при решении некоторых достаточно интересных и трудных задач, доказательстве теорем.

Задача. *Докажите, что геометрическим местом точек M таких, что $AM^2 - BM^2$ есть величина постоянная, где A и B — данные точки плоскости, является прямая, перпендикулярная AB.*

Решение. Пусть M — любая точка нашего геометрического места. Опустим из M перпендикуляр на AB (рис. 392). Получим точку D. По теореме Пифагора $AM^2 - AD^2 = MD^2 = MB^2 - BD^2$, откуда $AM^2 - BM^2 = AD^2 - BD^2$. Но $AM^2 - BM^2$ — величина постоянная. Из этого следует, что и точка D одна и та же для всех точек M из нашего геометрического места.

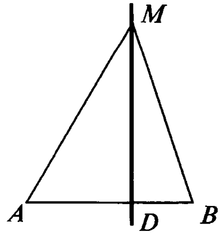


Рис. 392

В самом деле, пусть $AM^2 - BM^2 = k$, $AB = a$, $AD = x$. (Будем считать, что $k > 0$.) Имеем уравнение $x^2 - (a - x)^2 = k$, решая которое находим $x = \dfrac{k + a^2}{2a}$.

Итак, все точки нашего геометрического места лежат на одном перпендикуляре к AB, проходящем через найденную точку D. Понятно, что все точки этого перпендикуляра принадлежат нашему геометрическому месту точек. Ведь для всех таких точек M выполняется равенство $AM^2 - BM^2 = AD^2 - BD^2 = k$. ▼

Условие перпендикулярности двух прямых

Только что решённая задача даёт удобное условие перпендикулярности двух прямых.

Если прямые AB и KM перпендикулярны, то

$$AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2.$$

И обратно: если $AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2$, то прямые AB и KM перпендикулярны.

Чтобы не формулировать отдельно два утверждения — прямое и обратное, в математике используется оборот ***необходимо и достаточно***. В данном случае условие будет формулироваться так:

для того чтобы прямые AB и KM были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$AK^2 - BK^2 = AM^2 - BM^2.$$

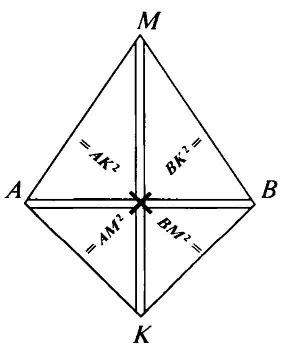


Рис. 393

Это равенство можно записать в виде

$$AK^2 + BM^2 = AM^2 + BK^2.$$

Или, в словесной формулировке: *для того чтобы диагонали четырёхугольника были перпендикулярными, необходимо и достаточно, чтобы суммы квадратов его противоположных сторон были равны* (рис. 393).

Используя это условие, приведём ещё одно, третье, доказательство теоремы о высотах треугольника.

Теорема о высотах, третье доказательство

Теорема 8.4 *(о высотах треугольника).*

Высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Доказательство. Рассмотрим треугольник ABC. Пусть высоты, выходящие из вершин A и B, пересекаются в точке H (рис. 394).

Прямые AH и BH перпендикулярны соответственно BC и AC, поэтому, согласно условию,

$$AB^2 - AC^2 = BH^2 - CH^2,$$
$$BA^2 - BC^2 = HA^2 - HC^2.$$

Вычитая эти равенства одно из другого, получим

$$CB^2 - CA^2 = HB^2 - HA^2,$$

т. е. HC и AB перпендикулярны. Теорема доказана (в третий раз!). ▼

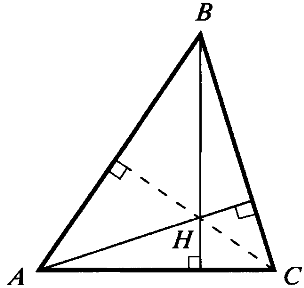


Рис. 394

❋ Задачи, задания, вопросы

1068(в). Сформулируйте необходимое и достаточное условие равнобедренности треугольника.

1069(в). Сформулируйте прямое и обратное утверждение теоремы Пифагора в виде одной теоремы.

1070. Приведите примеры необходимых и достаточных условий, известные вам из курса геометрии.

1071(п). Три стороны четырёхугольника в порядке обхода равны 7, 1, 4. Найдите четвёртую сторону этого четырёхугольника, если известно, что его диагонали перпендикулярны.

1072. Рассмотрим два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если у одного из них диагонали перпендикулярны, то и у другого они также перпендикулярны.

1073(т). В четырёхугольнике $ABCD$ известны стороны $AB = 12$, $BC = 9$, $CD = 1$, $DA = 8$. Вершины A и B остаются неподвижными, а C и D перемещаются так, что длины сторон этого четырёхугольника не меняются. Какую линию описывает при этом точка пересечения диагоналей четырёхугольника?

1074(т). Даны две окружности с центрами O_1 и O_2 и радиусами R и r. Докажите, что геометрическим местом точек M, для которых касательные к данным окружностям равны, является прямая, перпендикулярная O_1O_2, или часть такой прямой. В каких случаях геометрическим местом является вся прямая?

1075. Даны две окружности с радиусами 7 и 1. Расстояние между их центрами равно 2. На прямой, проходящей через центры окружностей, взята точка M такая, что касательные, проведённые из M к окружностям, равны между собой. Чему равны эти касательные?

1076(т). Даны три попарно пересекающиеся окружности. Докажите, что три прямые, каждая из которых проходит через две точки пересечения двух окружностей, пересекаются в одной точке.

1077(т). Дана окружность и точка A. Рассмотрим произвольную окружность, проходящую через A и пересекающую данную в точках B и C. Прямая BC и касательная к построенной окружности в точке A пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

1078(т). На плоскости заданы две точки A и B. Точка C перемещается по плоскости так, что ABC — треугольник, в котором $AC - BC = a$, где a — заданный отрезок, $a < AB$. Какую линию при этом описывает центр окружности, вписанной в треугольник ABC?

8.5. Вписанные и описанные четырёхугольники

В этом параграфе будут рассмотрены два вида четырёхугольников: вписанные и описанные. С такими четырёхугольниками вы уже встречались, хотя чёткие определения не приводились. Поэтому начнём с определений.

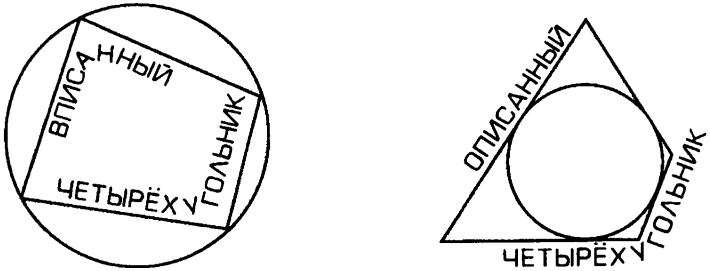


Рис. 395

Четырёхугольник называется ***вписанным****, если его вершины расположены на одной окружности.*

Четырёхугольник называется ***описанным****, если его стороны касаются одной окружности* (рис. 395).

С некоторыми свойствами этих четырёхугольников вы познакомились в главе 5. Более того, первая из двух теорем, которые сейчас будут доказаны, уже нам известна (теорема 5.9), правда, в несколько иной формулировке.

Вписанный четырёхугольник

Теорема 8.5 (свойства и признаки вписанного четырёхугольника).

Для того чтобы четырёхугольник ABCD был вписанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

а) ***ABCD — выпуклый четырёхугольник и*** $\angle ABD = \angle ACD$;

б) ***сумма двух противоположных углов четырёхугольника равна*** **180°.**

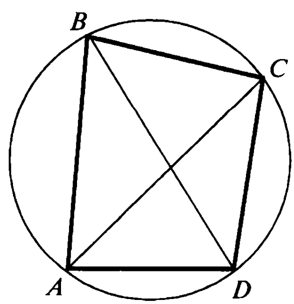


Рис. 396

а) Необходимость. Если $ABCD$ — вписанный четырёхугольник (рис. 396), то он непременно выпуклый и углы ABD и ACD равны, поскольку опираются на одну дугу.

Достаточность. Так как $ABCD$ — выпуклый четырёхугольник, то точки B и C расположены по одну сторону от прямой AD.

8.5

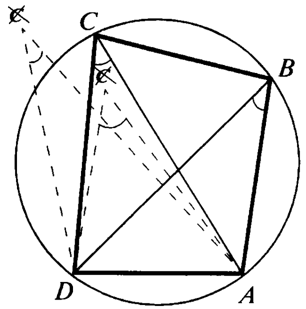


Рис. 397

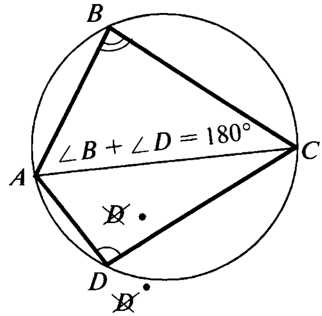


Рис. 398

Опишем около треугольника ABD окружность (рис. 397). Точка C не может располагаться вне этой окружности, так как в этом случае угол ACD, как угол с вершиной вне круга, измерялся бы полуразностью дуги AD и ещё какой-то дуги, т. е. был бы меньше угла ABD.

Точно так же точка C не может находиться внутри круга, так как в этом случае угол ACD был бы больше угла ABD.

Значит, точка C лежит на окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$, и этот четырёхугольник является вписанным.

б) Необходимость следует из свойств вписанных углов.

Достаточность. Из условия следует, что все углы четырёхугольника меньше 180°, т. е. он выпуклый. Дальше рассуждаем так же, как и в пункте а). Рассмотрим два противоположных угла B и D. Их сумма равна 180°. Опишем около треугольника ABC окружность (рис. 398). Точка D расположена по другую сторону от AC, чем B. Но для всех точек дуги AC, не содержащей B, вписанные углы дополняют до 180° угол B. Значит, D не может быть ни вне (тогда угол ADC был бы меньше, чем $180° - \angle B$), ни внутри круга (тогда он был бы больше $180° - \angle B$). Таким образом, точка D лежит на окружности, описанной около треугольника ABC, и четырёхугольник $ABCD$ — вписанный. ▼

Описанный четырёхугольник

Теорема 8.6 *(свойства и признак описанного четырёхугольника).*

Для того чтобы выпуклый четырёхугольник $ABCD$ являлся описанным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $AB + CD = BC + AD$. (Суммы противоположных сторон равны.)

Доказательство. Необходимость. Эта часть теоремы вам знакома. Итак, четырёхугольник $ABCD$ является описанным. Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, CD и DA соответственно через K, P, M и H (рис. 399). Мы знаем, что касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны.

Пусть $AK = AH = a$, $BK = BP = b$, $CP = CM = c$, $DM = DH = d$. Тогда $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CD = c + d$, $DA = d + a$, а значит, $AB + CD = a + b + c + d$, $BC + DA = b + c + d + a$, т. е. $AB + CD = BC + DA$.

Достаточность. Нам надо доказать, что если для выпуклого четырёхугольника выполняется условие теоремы (равны суммы противоположных сторон), то он является описанным.

Приведём два доказательства этого утверждения.

Первое доказательство. Воспользуемся методом от противного. Пусть для четырёхугольника $ABCD$ выполняется условие $AB + CD = BC + DA$ (рис. 400). Проведём биссектрисы углов A и B и обозначим через O точку их пересечения.

Точка O равноудалена от сторон AD и AB, а также от сторон BA и BC. Значит, точка O равноудалена от трёх сторон AB, AD и BC, поэтому мы можем построить окружность с центром в O, касающуюся этих трёх сторон четырёхугольника $ABCD$. Пусть эта окружность не касается стороны CD. Для определённости можно считать, что она не пересекает стороны CD.

Проведём через C прямую, касающуюся этой окружности, и обозначим через D_1 её точку пересечения с AD. Имеем два четырёхугольника $ABCD$ и $ABCD_1$, в каждом из которых суммы проти-

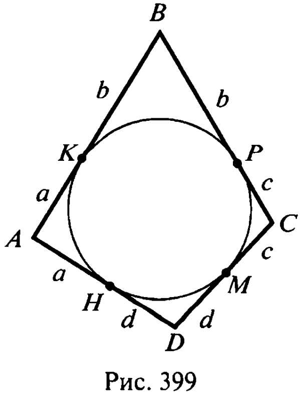


Рис. 399

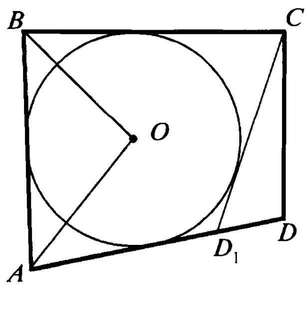


Рис. 400

воположных сторон равны. В первом — по условию теоремы, во втором — потому, что он описанный. Запишем оба этих равенства:

$$AB + CD = BC + AD, \quad AB + CD_1 = BC + AD_1.$$

Вычтем второе равенство из первого. Получим: $CD - CD_1 = DD_1$ или $CD = CD_1 + DD_1$. Последнее равенство означает, что точки C, D и D_1 лежат на одной прямой, так как в противном случае оно противоречило бы неравенству треугольника. Значит, точки D и D_1 совпадают, и четырёхугольник $ABCD$ является описанным.

Замечание. В геометрии (и не только в геометрии) очень важно уметь видеть различные варианты, которые могут быть в той или иной ситуации. В данном случае возникает вопрос: а что будет, если построенная окружность выйдет за границы четырёхугольника, т. е. пересечёт сторону CD? Не может ли получиться так, что касательная к окружности, проведённая через C, либо окажется параллельной AD, либо пересечёт прямую AD с другой стороны от точки A?

Покажем, что для любого выпуклого четырёхугольника найдётся окружность, касающаяся трёх его сторон и целиком расположенная внутри него. В самом деле, если окружность касается AB, BC и AD и пересекает CD (рис. 401), то окружность, касающаяся AB, BC и CD, имеет меньший радиус и целиком лежит внутри четырёхугольника $ABCD$.

Второе доказательство. Докажем, что если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$ (рис. 402), то найдётся точка, равноудалённая от всех сторон этого четырёхугольника.

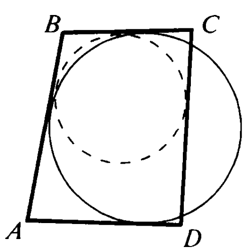


Рис. 401

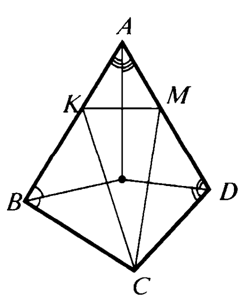


Рис. 402

Для этого достаточно установить, что биссектрисы трёх его углов, например углов A, B и D, пересекаются в одной точке. (Тогда точка пересечения соответствующих биссектрис равноудалена от AB и AD, BA и BC, AD и DC, т. е. равноудалена от всех четырёх сторон.)

Пусть для определённости $AB > BC$. Из условия $AB + CD = BC + AD$ следует, что $AB - BC = AD - CD$. Возьмём на AB точку K так, что $BK = BC$, $AK = AB - BC$, а на AD — точку M такую, что $MD = CD$, $AM = AD - CD$. Как видим, $AK = AM$.

Поскольку треугольники MAK, KBC и CDM — равнобедренные с основаниями MK, KC и CM, биссектрисы углов A, B и D являются серединными перпендикулярами к отрезкам MK, KC и CM. Это означает, что они пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника MKC. ▼

Докажем теорему, усиливающую утверждение теоремы 8.6.

❄ ***Теорема 8.7*** *(обобщённая теорема о свойствах и признаках описанного четырёхугольника).*

Пусть в выпуклом четырёхугольнике ABCD нет параллельных сторон. Обозначим через E и F точки пересечения прямых AB и DC, BC и AD соответственно. Будем считать, что точка A лежит на отрезке BE, а точка C — на отрезке BF.

Для того чтобы четырёхугольник ABCD был описанным, необходимо и достаточно выполнения любого из следующих условий:

а) $AB + CD = AD + BC$;

б) $ED + BF = DF + BE$;

в) $EA + AF = EC + CF$.

Доказательство. Как видим, теорема 8.6 составляет пункт а) теоремы 8.7. (Для этого пункта требование отсутствия параллельных сторон не нужно.)

Рассуждения во всех пунктах одинаковы. Пункт а) мы умеем доказывать, поэтому ограничимся **доказательством пункта в)**.

Необходимость. Пусть касательные к окружности из точек A, B, C, D, E и F соответственно равны a, b, c, d, e и f

8.5

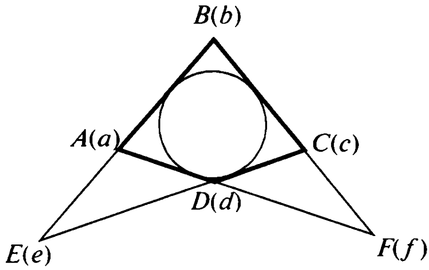


Рис. 403

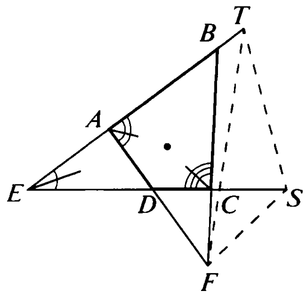


Рис. 404

(рис. 403). Тогда $EA = e - a$, $AF = a + f$, $EC = e + c$, $CF = f - c$. Значит,

$$EA + AF = (e - a) + (a + f) = e + f,$$
$$EC + CF = (e + c) + (f - c) = e + f,$$
$$EA + AF = EC + CF.$$

Достаточность. Пусть выполняется равенство $EA + AF = EC + CF$. Докажем, что биссектрисы углов BAD, BCD и BEC пересекаются в одной точке. Из этого будет следовать, что $ABCD$ — описанный четырёхугольник. (Точка пересечения этих биссектрис будет равноудалена от AB и AD, BC и CD, а также от AB и CD.)

Возьмём на луче EA за точкой A точку T так, что $AT = AF$, а на луче EC за точкой C точку S так, что $CS = CF$ (рис. 404). Поскольку $ET = EA + AF$, а $ES = EC + CF$, из условия теоремы следует, что $ET = ES$.

Рассмотрим треугольник TFS. Серединный перпендикуляр к стороне TS этого треугольника является биссектрисой угла TES (или угла BEC). Это следует из равнобедренности треугольника TES.

Точно так же из равнобедренности треугольника TAF будет следовать, что серединный перпендикуляр к TF является биссектрисой угла TAF (или BAD), а из равнобедренности треугольника SCF получим, что серединный перпендикуляр к SF является биссектрисой угла SCF (или BCD).

Таким образом, указанные биссектрисы пересекаются в одной точке — центре окружности, описанной около треугольника TFS.

Тем самым пункт в) доказан полностью. Попробуйте самостоятельно доказать пункт б). ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1079. Приведите пример четырёхугольника $ABCD$, для которого имеет место равенство $\angle ABD = \angle ACD$, но который не является вписанным.

1080. Докажите, что если четырёхугольник можно разрезать на два вписанных четырёхугольника, тот этот четырёхугольник либо трапеция, либо параллелограмм.

1081(в). В треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1, H — точка их пересечения. Перечислите все вписанные четырёхугольники с вершинами в точках A, B, C, A_1, B_1, C_1, H.

1082(в). Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, P — точка пересечения диагоналей четырёхугольника. Докажите, что $AP \cdot PC = BP \cdot PD$.

1083(в). Докажите утверждение, обратное утверждению задачи 1082.

1084. Четырёхугольник $ABCD$ описан около окружности, с центром в точке O. Докажите, что сумма градусных мер углов:

а) AOB и COD;

б) BOC и AOD

равна 180°.

1085. $ABCD$ — трапеция, $AD = 10$, $BC = 5$, F — точка касания вписанной окружности с центром в точке O_1 и стороны AB, $AF = 4$, $FB = 3$. Окружность с центром O_2 касается CD в точке P и продолжений сторон BC и AD в точках N и T соответственно. Найдите EP (рис. 405).

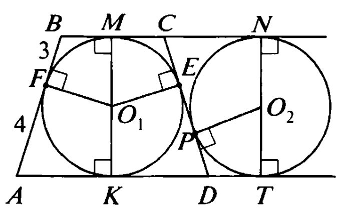


Рис. 405

1086. Из вершины A квадрата $ABCD$ проведены лучи, образующие между собой угол 45°. Один из лучей пересекает диагональ BD в точке M, другой пересекает сторону BC в точке N. Докажите, что треугольник AMN является прямоугольным и равнобедренным.

1087. В треугольнике ABC проведены биссектрисы AA_1 и BB_1. Докажите, что если четырёхугольник AB_1A_1B является вписанным, то ABC — равнобедренный треугольник.

1088(п). Пусть O — центр описанной около ABC окружности, J — центр вписанной окружности. Докажите, что если точки A, B, O и J лежат на одной окружности, то угол C равен 60°.

1089(п). Пусть H — точка пересечения высот треугольника ABC, J — центр вписанной в него окружности. Известно, что точки A, B, H и J лежат на одной окружности. Найдите угол C треугольника.

1090. Имеются два выпуклых четырёхугольника с соответственно равными сторонами. Докажите, что если один из них является описанным, то и другой также является описанным.

1091(т). Треугольники ABC и AB_1C имеют равные периметры, точки B и B_1 расположены по одну сторону от AC. Обозначим через D точку пересечения прямых AB и CB_1, а через E — точку пересечения прямых AB_1 и CB. Докажите, что $EB + B_1D = EB_1 + BD$ (точки D и E расположены по ту же сторону от AC, что и B).

1092(п). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Докажите, что окружности, описанные около треугольников AB_1C_1, A_1BC_1 и A_1B_1C, пересекаются в одной точке. (Эта точка называется *точкой Микеля*.)

1093(т). В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке M. Известно, что $AB = a$, $CD = b$, $\angle AMB = \alpha$. Найдите радиус окружности.

1094. Стороны параллелограмма равны 2 и 3. Прямая, пересекающая две бóльшие стороны параллелограмма и перпендикулярная им, делит этот параллелограмм на два четырёхугольника, в каждый из которых можно вписать окружность. Найдите острый угол этого параллелограмма.

1095. В треугольник ABC со сторонами $AB = 5$, $BC = 7$, $CA = 10$ вписана окружность. Прямая, пересекающая стороны AB и BC в точках M и K, касается этой окружности. Чему равен периметр треугольника MBK?

1096(п). Четыре окружности расположены на плоскости таким образом, что каждая касается ровно двух других внешним образом. Докажите, что четыре точки попарного касания этих окружностей лежат на одной окружности.

1097(т). Окружность, вписанная в треугольник ABC, имеет центр в точке J и касается сторон AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Биссектриса угла B пересекает прямую A_1B_1 в точке K. Докажите, что точки A, J, B_1 и K лежат на одной окружности. Чему равен угол AKB?

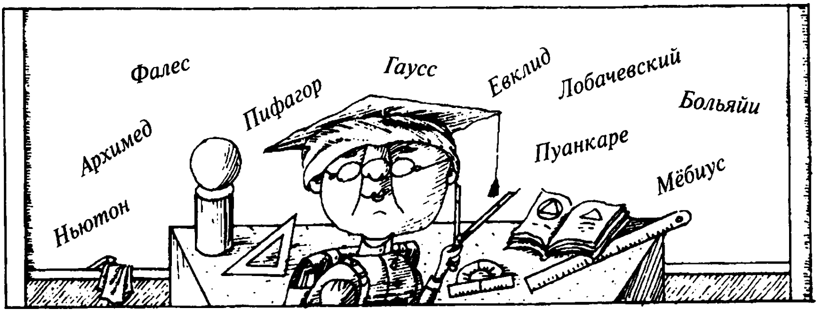
1098(т). В выпуклом четырёхугольнике проведены биссектрисы его внутренних углов. Докажите, что точки пересечения пар соседних биссектрис служат вершинами вписанного четырёхугольника.

1099(т). Одна из сторон вписанного четырёхугольника является диаметром окружности. Докажите, что проекции сторон, прилегающих к этой стороне, на четвёртую сторону (на прямую, задающую четвёртую сторону) равны между собой.

* 8.6. Вычислительные методы в геометрии, или Об одной задаче Архимеда

Возможно, на фоне удивительных достижений науки и техники, с которыми вы встречаетесь буквально на каждом шагу, геометрия может показаться каким-то малосовременным, неразвиваю-

8.6



щимся предметом, не нужным современному человеку, в чью жизнь прочно вошли компьютеры, авиалайнеры, лазеры и многое, многое другое.

Да, в целом человечество за свою долгую жизнь стало намного умнее и совершеннее. А вот стал ли умнее и совершеннее сам человек? Сегодня мы знаем больше своих предков потому, что «стоим на их плечах».

Развитие человечества — это прежде всего развитие человеческой мысли. И история геометрии является своего рода зеркалом истории развития человеческой мысли, удивительной сокровищницей, хранящей высшие достижения человеческого гения, жемчужины которой создавались величайшими мыслителями.

Кто не слышал об удивительном учёном Древней Греции Архимеде! Этот великий человек жил в III столетии до н. э. в городе Сиракузы на Сицилии, бывшем в то время греческой колонией. Много прекрасных открытий и изобретений сделал Архимед за свою долгую жизнь. Будучи уже зрелым учёным, в 50 лет он увлекся геометрией и не расставался с ней до конца своих дней. Говорят, что последними словами Архимеда перед тем, как его убил римский легионер, были: «Осторожно, не наступи на мои круги».

Сегодня школьник восьмого класса владеет средствами, неизвестными Архимеду. И всё же давайте рассмотрим одну из его задач. Разберём решение самого Архимеда, подумаем, как бы её мог решить современный ученик. И сравним эти решения.

8.6

Одна задача Архимеда об арбелосе

В своих занятиях геометрией Архимед много внимания уделил изучению свойств фигуры, носящей название ***арбелос***, или ***скорняжный нож***. Это название фигура получила из-за сходства с очертаниями ножа, использовавшегося скорняками для разделки кож.

Если взять на прямой три последовательные точки A, B и C и построить три полуокружности с диаметрами AB, BC и AC, расположенные по одну сторону от этой прямой, то фигура, ограниченная этими полуокружностями, и является арбелосом (рис. 406).

Рис. 406

Из многих свойств этой фигуры, обнаруженных Архимедом, мы рассмотрим только одно.

Задача 1. **(*Задача Архимеда.*)** *Проведём в арбелосе через точку B прямую, перпендикулярную AC, и обозначим её точку пересечения с большей полуокружностью через D. Рассмотрим две окружности, вписанные в два образовавшихся криволинейных треугольника. Первая касается отрезка BD, полуокружности AB и дуги DA. Вторая касается BD, полуокружности BC и дуги DC. Докажите, что эти две вписанные окружности равны.*

Решение Архимеда опиралось на одно простое свойство касающихся окружностей, которое мы назовём ***леммой Архимеда***. (***Леммой*** в математике называют вспомогательное утверждение, предшествующее основной теореме.)

Лемма Архимеда. ***Пусть прямая пересекает данную окружность в точках K и M. Рассмотрим произвольную окружность, касающуюся данной в точке P, а прямой KM в***

точке L. Тогда прямая PL проходит через середину одной из двух дуг KM, на которые данная окружность разделена прямой KM.

Эта лемма предлагалась в виде задачи (см. задачу 639).

Доказательство леммы. Рассмотрим для определённости случай, изображённый на рисунке 407. Пусть O — центр данной окружности, O_1 — центр построенной окружности. Точки O, O_1 и P лежат на одной прямой. Пусть прямая PL пересекает данную окружность в точке E. Треугольники PO_1L и POE равнобедренные. У них есть общий угол — угол при вершине P. Значит, они подобны, и O_1L параллельна OE. Но O_1L перпендикулярна KM. Следовательно, OE также перпендикулярна KM. Значит, E — середина дуги. Лемма доказана.

Приведём ещё одно доказательство леммы Архимеда. Рассмотрим прямую, касающуюся обеих окружностей в точке P. Обозначим через Q точку её пересечения с прямой KM; E — точка пересечения PL с большей окружностью (рис. 408). Углы PLM и QPL равны, так как $PQ = LQ$ как касательные. Но угол PLM измеряется полусуммой дуг KE и PM, а $\angle QPL = \angle QPE$ и измеряется половиной дуги PME или полусуммой дуг PM и ME. Значит, дуги KE и ME равны.

Другие случаи расположения окружностей рассматриваются аналогично. Заметим, что точки K и M могут слиться, т. е. рассматриваемая прямая может и касаться окружности. В этом случае прямая PL пройдёт через точку E такую, что KE — диаметр данной окружности. ▼

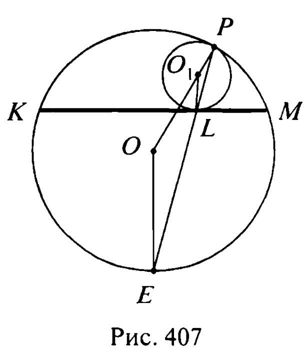


Рис. 407

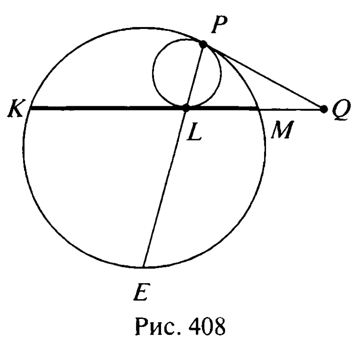


Рис. 408

Решение Архимеда

Рассмотрим окружность, касающуюся BD в точке L, дуги AD — в точке P и полуокружности AB — в точке F (рис. 409). Согласно лемме, прямая PL проходит через точку C, а прямая FL — через A.

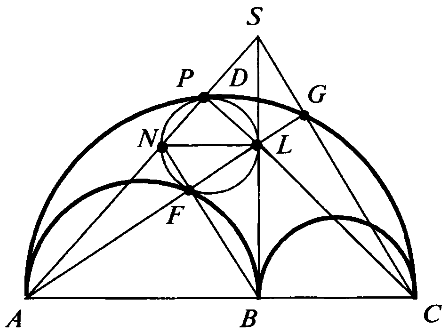


Рис. 409

Проведём через L в построенной окружности диаметр LN. Углы NPL и APC — прямые (как опирающиеся на диаметры в соответствующей окружности), поэтому точки P, N и A лежат на одной прямой. Точно так же на одной прямой лежат точки N, F и B. (Прямыми являются углы NFL и AFB.)

Обозначим теперь через G точку пересечения AL с большей полуокружностью. Рассмотрим треугольник ALC. Высотами в нём являются LB, AP и CG. Продолжим их до пересечения в одной точке, которую обозначим через S.

Из подобия треугольников SNL и SAB получим $\frac{NL}{AB} = \frac{NS}{AS}$. Но прямые NB и SC параллельны, так как они перпендикулярны AL. Значит, $\frac{NS}{AS} = \frac{BC}{AC}$. Итак, имеем $\frac{NL}{AB} = \frac{BC}{AC}$. Откуда следует, что $NL = \frac{AB \cdot BC}{AC}$, при этом NL — диаметр одной из окружностей, вписанных в части арбелоса. Понятно, что, находя диаметр второй окружности, мы придём к тому же равенству. ▼

Так доказывал Архимед, а как может или должен решать эту задачу современный хороший ученик?

8.6

Вычислительное решение задачи Архимеда

Пусть для краткости и удобства $AB = 2a$, $BC = 2b$, x — радиус окружности, касающейся полуокружности AB, отрезка BD и дуги AD, O — центр этой окружности, O_1 и O_2 — середины AB и AC (рис. 410; O_1 и O_2 — центры соответствующих полуокружностей). В треугольнике O_1O_2O мы можем выразить все стороны через a, b и x. Получаем: $O_1O = a + x$ (это следует из касания окружностей с центрами O и O_1), $O_2O = a + b - x$ (это следует из касания окружностей с центрами O_2 и O),

$$O_1O_2 = AO_2 - AO_1 = (a + b) - a = b.$$

Нарисуем для удобства отдельно треугольник O_1O_2O и прямую BD (рис. 411). Опустим из O перпендикуляр OT на сторону O_1O_2. Имеем: $TB = x$, $O_2T = |O_2B - TB| = |a - b - x|$, $O_1T = |a - x|$.

По теореме Пифагора $O_1O^2 - O_1T^2 = OO_2^2 - O_2T^2$. Заменяя все отрезки выражениями через a, b и x, получаем уравнение

$$(a + x)^2 - (a - x)^2 = (a + b - x)^2 - (a - b - x)^2,$$

откуда $4ax = 4(a - x)b$, $\quad x = \dfrac{ab}{a + b}$. ▼

Таким образом, мы получили ту же формулу для радиусов вписанных окружностей, что и Архимед, но используя чисто алгебраический метод. Что лучше, судите сами. На наш взгляд, решение Архимеда — это своего рода искусство, в то время как алгебраическое решение чем-то напоминает «заводскую продукцию».

Основными этапами, причём достаточно стандартными, являются: выделение треугольников с вершинами в центрах рассматриваемых окружностей, выражение длин отрезков через из-

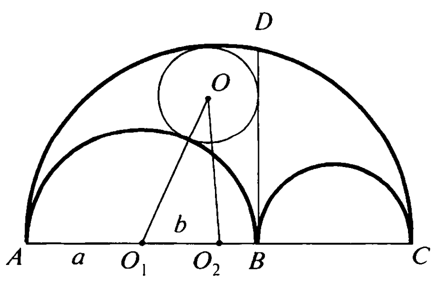


Рис. 410

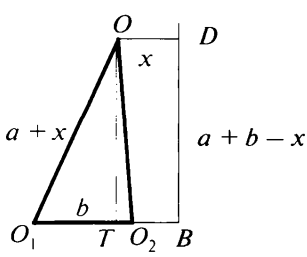


Рис. 411

вестные и неизвестные величины, составление уравнения или уравнений. Типичным здесь является и то, что для составления уравнения используется теорема Пифагора. Нередко уравнения получают, используя теорему косинусов.

Окружность, вписанная в арбелос

Задача 2. *Пусть радиусы двух меньших полуокружностей, образующих арбелос, равны a и b. Найдите радиус окружности, вписанной в арбелос, т. е. радиус окружности, касающейся большей полуокружности внутренним образом и двух меньших — внешним образом.*

Решение. Обозначим центры трёх полуокружностей, образующих арбелос, через O_1, O_2 и O_3 (рис. 412), их радиусы соответственно a, b и $a + b$, O — центр искомой окружности, x — её радиус.

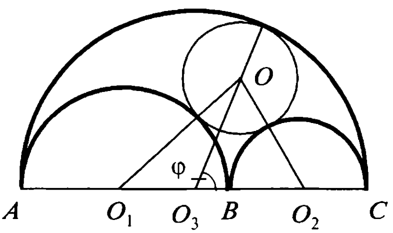


Рис. 412

Все отрезки, соединяющие попарно точки O_1, O_2, O_3 и O, можно выразить через a, b и x:

$$O_1O_3 = b,\ \ O_3O_2 = a,\ \ O_1O = a + x,$$
$$O_2O = b + x,\ \ O_3O = a + b - x.$$

Обозначим $\angle OO_3O_2 = \varphi$, $\angle OO_3O_1 = 180° - \varphi$. Запишем теорему косинусов для треугольников OO_3O_2 и OO_3O_1:

$$(b + x)^2 = a^2 + (a + b - x)^2 - 2a(a + b - x)\cos\varphi,$$
$$(a + x)^2 = b^2 + (a + b - x)^2 + 2b(a + b - x)\cos\varphi.$$

Упростим каждое из уравнений:

$$(2b + a)x = a^2 + ab - a(a + b - x)\cos\varphi,$$
$$(2a + b)x = b^2 + ab + b(a + b - x)\cos\varphi.$$

Теперь умножим первое уравнение на b, а второе — на a и сложим их. При этом исключается $\cos\varphi$. Получим

$$2(b^2 + ab + a^2)x = 2(ba^2 + ab^2),$$

откуда $x = \dfrac{(a+b)ab}{a^2 + ab + b^2}$. ▼

❋ Задачи, задания, вопросы

1100. В круге радиуса 1 с центром O проведены радиусы OA и OB. Найдите радиус окружности, касающейся OA, OB и дуги AB, если: а) $\angle AOB = 60°$; б) $\angle AOB = 90°$.

1101. В круге радиуса R проведён диаметр, на котором взята точка A на расстоянии a от центра. Найдите радиус окружности, касающейся данной изнутри и диаметра в точке A.

1102(п). Найдите сторону квадрата, вписанного в полукруг радиуса R.

1103(п). Найдите сторону квадрата, вписанного в четверть круга радиуса R так, что две вершины лежат на радиусах и две — на дуге.

1104. Докажите, что длина общей касательной к двум меньшим полуокружностям, образующим арбелос, равна отрезку BD (BD — тот же самый отрезок, что и в задаче Архимеда). (*Общая внешняя касательная* — это касательная, не пересекающая отрезка, соединяющего центры окружностей.)

1105(пт). Окружность радиуса r касается изнутри окружности радиуса R. Найдите радиус третьей окружности, которая касается обеих данных и прямой, проходящей через их центры.

1106(т). Найдите радиусы трёх попарно касающихся окружностей с центрами в вершинах треугольника со сторонами 7, 8, 9.

1107(т). Найдите длины общих касательных к окружностям, радиусы которых равны R и r, а расстояние между их центрами равно 1.

1108(т). Три окружности радиуса $\sqrt{3}$ касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, касающейся трёх данных окружностей.

1109(т). Дан полукруг радиуса R, в него вписана окружность радиуса $\frac{R}{2}$. Вторая окружность касается диаметра полукруга, полуокружности, его ограничивающей, и вписанной окружности. Найдите радиус второй окружности.

Построим ещё и третью окружность, которая отлична от первой и изнутри касается исходной полуокружности, её диаметра и внешним образом второй окружности. Найдите радиус третьей окружности.

1110(т). В окружности единичного радиуса проведена хорда длины 1. Найдите сторону квадрата, две вершины которого лежат на хорде, а две — на окружности.

1111(т). Два квадрата $ABCD$ и $KLMN$ расположены в плоскости так, что вершины B, C, K и N лежат на одной прямой, а четыре оставшиеся расположены по разные стороны от BC и лежат на одной окружности. Известно, что сторона одного из квадратов на 1 больше стороны другого. Найдите расстояние от центра окружности до прямой BC.

1112(т). На прямой находятся точки A, B и C, причём $AB = BC = 3$. Три окружности радиуса R имеют центры в точках A, B и C. Найдите радиус четвёртой окружности, касающейся всех трёх данных, если: а) $R = 1$; б) $R = 2$; в) $R = 5$.

1113(т). Три окружности, попарно касающиеся друг друга внешним образом, имеют центры в вершинах прямоугольного треугольника. Эти окружности касаются изнутри четвёртой окружности. Найдите радиус четвёртой окружности, если периметр прямоугольного треугольника равен $2p$.

1114(пт). Две окружности с радиусами R и r $(R > r)$ касаются друг друга внешним образом. Найдите радиус окружности, касающейся данных и их общей внешней касательной.

8.7. Задачи для повторения

1115. В треугольнике ABC углы A и B равны соответственно α и β. Окружность с центром в C и радиусом CA вторично пересекает AB в точке K. Окружность с центром в K и радиусом KB вторично пересекает CB в точке M. Найдите углы треугольника CKM, если:
а) $\alpha = 40°$, $\beta = 60°$; б) $\alpha = 100°$, $\beta = 40°$; в) $\alpha = 70°$, $\beta = 100°$.

1116. Возможно ли, чтобы одна биссектриса треугольника делила пополам другую биссектрису?

1117. Два угла треугольника равны 40° и 80°. Найдите углы треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами данного треугольника.

1118(т). На окружности, описанной около треугольника ABC, взяты точки K, M, P, отличные от его вершин, так, что $AK = AB$, $BM = BC$, $CP = CA$. Найдите углы треугольника KMP, если углы A и B треугольника ABC соответственно равны:
а) 28°, 58°; б) 58°, 84°; в) 84°, 28°.

1119(п). В окружности проведён диаметр AB, C — произвольная точка окружности, J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Какую линию описывает точка J, когда C пробегает все точки окружности, отличные от A и B?

1120(в). Докажите, что в прямоугольном треугольнике сумма диаметров вписанной и описанной окружностей равна сумме катетов.

1121. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, делит гипотенузу на отрезки, равные 24 и 54. Найдите катеты этого треугольника.

1122. Катет прямоугольного треугольника равен 6, проекция этого катета на гипотенузу равна 2. Найдите гипотенузу и другой катет этого треугольника.

1123. Катет прямоугольного треугольника равен проекции другого катета на гипотенузу. Найдите синус меньшего угла этого треугольника.

1124(в). Найдите наименьший острый угол прямоугольного треугольника, если известно, что медиана, выходящая из вершины прямого угла, делит этот угол в отношении 2 : 1.

1125. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 и 15. Чему равно расстояние от вершины прямого угла до ближайшей точки вписанной в этот треугольник окружности?

1126. Один катет прямоугольного треугольника равен 5, а проекция другого катета на гипотенузу равна 2,25. Найдите гипотенузу этого треугольника.

1127. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, равен полуразности его катетов. Найдите тангенс большего острого угла этого треугольника.

1128(т). Разность катетов прямоугольного треугольника в 1,2 раза меньше разности их проекций на гипотенузу. Высота, опущенная на гипотенузу, равна 1. Найдите меньший катет этого треугольника.

1129. В окружности радиуса $\sqrt{2}$ проведена хорда AB, равная 2. Пусть M — некоторая точка окружности, отличная от A и B. Чему может быть равен угол AMB?

1130(в). Найдите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность радиуса R.

1131(в). Сторона равностороннего треугольника равна a. Найдите радиус описанной и радиус вписанной окружности.

1132. Найдите расстояния от точки пересечения медиан треугольника до его сторон, если стороны треугольника равны 9, 40 и 41.

1133(п). Найдите радиус наименьшего круга, в котором можно разместить треугольник со сторонами 7, 9 и 12.

1134(п). В треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Найдите AC, если:

а) $AA_1 = 4$, $BB_1 = 5$, $BC = 6$;

б) $A_1C = 8$, $B_1C = 5$, $BB_1 = 12$.

1135(в). Выразите сторону равностороннего треугольника и радиус описанной около него окружности через r (радиус вписанной окружности).

1136. В треугольнике ABC угол A равен 32°, угол C равен 24°. Окружность с центром в точке B проходит через A, пересекает сторону AC в точке M, сторону BC — в точке K. Чему равен угол KAM?

1137. В треугольнике ABC известны стороны $AB = 2$, $BC = 4$. Окружность, проходящая через точки B и C, пересекает прямую AC в точке M, а прямую AB — в точке P. Известно, что $AM = 1$. Найдите длину PM.

1138. Около треугольника со сторонами 5, 6 и 7 описана окружность. Найдите длину хорды этой окружности, делящей пополам среднюю по длине сторону треугольника и проходящей через противоположную этой стороне вершину.

1139(т). Пусть M — точка на диаметре AB окружности с центром в O; C и D — точки окружности, расположенные по одну сторону от AB, причём $\angle CMA = \angle DMB$, $\angle OCM = \alpha$. Чему равен угол ODM?

1140(п). Пусть AB — диаметр окружности, C — некоторая точка плоскости. Прямые AC и BC вторично пересекают окружность в точках M и K соответственно. Прямые MB и KA пересекаются в точке P. Чему равен угол между прямыми CP и AB?

1141(в). Около окружности описана равнобочная трапеция с основаниями 5 и 3. Найдите радиус окружности.

1142. Из точки, расположенной вне окружности, проведены к ней касательная и секущая. Длина касательной равна 6. Секущая высекает на окружности хорду длиной 5. Найдите длину отрезка секущей, расположенного вне окружности.

1143. Окружность радиусом r высекает на сторонах четырёхугольника равные хорды, длина каждой из которых d. Докажите, что в этот четырёхугольник можно вписать окружность. Найдите радиус окружности, вписанной в этот четырёхугольник.

1144(п). Около окружности описана трапеция. Докажите, что концы боковой стороны трапеции и центр окружности являются вершинами прямоугольного треугольника. Докажите также, что произведение отрезков боковой стороны, на которые она разделена точкой касания, равно квадрату радиуса окружности.

1145(т). К окружности проведены касательные, касающиеся её в концах диаметра AB. Произвольная касательная к окружности пересекает первую из этих касательных (проходящую через A) в точке K, а вторую — в точке M. Докажите, что произведение $AK \cdot BM$ постоянно.

1146(т). На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ взяты точки K и M так, что $3AK = 4AM = AB$. Докажите, что прямая KM касается окружности, вписанной в этот квадрат.

1147(в). В треугольнике ABC угол A равен $60°$, $AB = 1$, $BC = a$. Найдите сторону AC.

1148. Найдите периметр правильного треугольника, вписанного в окружность, если известно, что хорда этой окружности, длина которой равна 2, удалена от её центра на расстояние, равное 3.

1149. В прямоугольнике $ABCD$ известно, что $AB = 2$, $BC = \sqrt{3}$. Точка M делит сторону CD в отношении $1:2$, считая от точки C, K — середина AD. Какой из отрезков BK или AM больше?

1150(п). Углы треугольника ABC удовлетворяют условию $A > B > C$. К какой из вершин ближе всего расположен центр вписанной окружности?

Ответьте на этот же вопрос относительно точки пересечения высот и точки пересечения медиан.

К какой стороне ближе всего расположены: центр описанной окружности, точка пересечения высот, точка пересечения медиан?

1151(п). В треугольнике ABC угол C равен 60°, радиус описанной окружности равен 2. На прямой AC взята точка D так, что $\angle ADB = 45°$. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ADB.

1152. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника ABC делит гипотенузу AB на отрезки, равные 7 и 24. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABD, где D — точка пересечения медиан треугольника ABC.

1153(в). Докажите, что средняя линия равнобочной трапеции, описанной около окружности, равна её боковой стороне.

1154(п). В плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что треугольник ABC остроугольный, причём: а) угол C — наибольший; б) угол C является средним по величине углом треугольника ABC.

1155(т). В плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C этой плоскости таких, что медиана к стороне BC в треугольнике ABC перпендикулярна стороне AC.

1156(т). В плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C этой плоскости таких, что медиана к стороне AC равна высоте к стороне BC.

1157(п). В треугольнике ABC известны стороны $AB = \sqrt{17}$, $BC = 4$, $CA = 5$. На стороне BC взята точка D так, что $BD = 1$. Найдите угол ADB и расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников ADB и ADC.

8.7

1158. Основанием равнобедренного треугольника ABC является сторона AC, O и J — соответственно центры описанной и вписанной окружностей. Найдите углы треугольника AOJ, если:

а) $\angle B = 80°$; б) $\angle B = 100°$.

1159. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника с катетами 3 и 4.

1160. В треугольнике ABC углы B и C равны 50° и 70°. Найдите углы треугольника DH_1H_2, где D — точка на AB, H_1 и H_2 — соответственно точки пересечения высот треугольников ACD и BCD.

1161(п). Найдите углы треугольника, если известно, что медиана и высота, выходящие из одной вершины, делят соответствующий угол на три равные части.

1162. На сторонах AB и AC прямоугольного треугольника ABC взяты точки K и M так, что $BK = KM = MC$. В каком отношении точка K делит гипотенузу AB, если $\cos\angle BAC = \frac{2}{3}$?

1163. Сторона ромба $ABCD$ равна 6, $\angle BAD = 60°$. На стороне BC взята точка E так, что $CE = 2$. Найдите расстояние от точки E до центра ромба.

1164(п). Найдите отношение радиусов двух окружностей, касающихся между собой, если каждая из них касается сторон угла, величина которого равна α.

1165(т). На одной из сторон угла величины α ($\alpha < 90°$) с вершиной в точке O взяты точки A и B, причём $OA = a$, $OB = b$. Найдите радиус окружности, проходящей через A и B и касающейся другой стороны угла.

1166(т). В окружность вписана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC, у которой острый угол A равен α; K — точка на окружности такая, что BK параллельна CD, а KD параллельна AC. Найдите $BC : AD$.

1167(т). Острый угол равнобочной трапеции равен 75°. Прямые, проходящие через концы одного основания трапеции параллельно противоположным боковым сторонам, пересекаются на окружности, описанной около трапеции. Найдите отношение оснований трапеции.

1168(п). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB проведена окружность с центром на AC, проходящая через A и касающаяся BC в точке M. Найдите угол BAM.

1169(т). В треугольнике ABC сторона BC равна 4, а медиана к этой стороне равна 3. Найдите длину общей хорды двух окружностей, каждая из которых проходит через точку A и касается BC, причём одна касается BC в точке B, а другая — в точке C.

1170(п). Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон четырёхугольника и середины его диагоналей, пересекаются в одной точке.

1171(т). Около окружности описана равнобочная трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC; M и K — точки касания окружности с AB и CD, P — точка касания с AD. В каком отношении отрезок MK делится отрезком BP?

1172. На прямой расположены точки A, B, C и D так, что $AB = BC = CD$. Отрезки AB, BC, CD служат диаметрами окружностей. Из точки A к окружности с диаметром CD проведена касательная l. Найдите отношение хорд, высекаемых на прямой l окружностями с диаметрами AB и BC.

1173(т). В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса CD угла C. На прямой AC взята точка E так, что $\angle EDC = 90°$. Найдите EC, если $AD = 1$.

1174(п). Сторона квадрата является гипотенузой прямоугольного треугольника, расположенного вне квадрата. Докажите, что биссектриса прямого угла этого треугольника проходит через центр квадрата.

1175(п). Вершины острых углов некоторого прямоугольного треугольника, лежащего внутри прямого угла, движутся по сторонам этого угла. Какую линию описывает вершина прямого угла этого треугольника?

1176. Вершина угла, равного 70°, служит началом луча, который образует с его сторонами углы 30° и 40°. Из некоторой точки M плоскости на этот луч и стороны угла опущены перпендикуляры, основания которых A, B и C. Найдите углы треугольника ABC.

1177(т). Через вершину C равностороннего треугольника ABC проведена произвольная прямая, K и M — проекции A и B на эту прямую, P — середина AB. Докажите, что треугольник KMP — равносторонний.

1178(т). Сторона AD вписанного четырёхугольника $ABCD$ является диаметром описанной окружности, M — точка пересечения его диагоналей, P — проекция M на AD. Докажите, что M — центр окружности, вписанной в треугольник BCP.

8.7

1179(т). Внутри угла с вершиной O взята некоторая точка M. Луч OM образует со сторонами угла углы, один из которых больше другого на $10°$; A и B — проекции M на стороны угла. Найдите угол между прямыми AB и OM.

1180(т). В треугольнике ABC проведены медиана AA_0 и биссектриса AA_1. Прямая, параллельная CA и проходящая через A_1, пересекает AA_0 в точке K. Докажите, что прямые CK и AA_1 перпендикулярны.

1181(пт). Пусть M — некоторая точка, расположенная на окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Докажите, что из трёх отрезков MA, MB, MC один равен сумме двух других.

1182(п). В прямоугольном треугольнике ABC к гипотенузе AB проведена высота CD. На отрезках CD и DA взяты точки E и F так, что $\frac{CE}{CD} = \frac{AF}{AD}$. Докажите, что прямые BE и CF перпендикулярны.

1183(н). В треугольниках ABC и ABC_1 проведены высоты CD и C_1D_1. Докажите, что прямые CD и C_1D_1 параллельны или совпадают.

1184. Найдите углы треугольника, если они пропорциональны числам 5, 6 и 7.

1185. Один из углов треугольника равен $35°$, а один из его внешних углов равен $100°$. Найдите наибольший угол этого треугольника.

1186. Наименьший угол треугольника в три раза меньше наибольшего угла и на $20°$ меньше среднего угла. Найдите углы треугольника.

1187(н). В равностороннем треугольнике ABC проведена высота BD. Найдите углы треугольника ABD.

1188. Медиана BD треугольника ABC отсекает от него равносторонний треугольник DAB. Определите углы треугольника CDB.

1189. Докажите, что в равностороннем треугольнике расстояние от точки пересечения двух биссектрис до стороны в два раза меньше расстояния от этой же точки до вершины.

1190. Найдите углы равнобедренного треугольника, если внешний угол при основании равен $112°$.

1191. Найдите наибольший угол треугольника, если известно, что один из его внешних углов равен одному из внутренних углов.

1192. Сумма углов выпуклого многоугольника в два раза меньше суммы внешних углов, взятых по одному при каждой вершине. Найдите число сторон этого многоугольника.

1193. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если все его внешние углы тупые?

1194. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, у которого все углы равны, если сумма его внешних углов с одним из внутренних равна 480°?

1195. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов с одним из внешних равна 2250°?

1196. Окружность разделена на две дуги, причём градусная мера одной из них в три раза больше градусной меры другой. Чему равны соответствующие этим дугам центральные углы?

1197. На диаметре окружности построен равносторонний треугольник. Определите градусную меру дуг, на которые стороны треугольника делят окружность.

1198. Из точки полуокружности проведены к концам диаметра две хорды. Одна из них равна 17 см и образует с диаметром угол, равный 45°. Найдите длину второй хорды.

1199. Найдите углы треугольника, если из центра описанной окружности его стороны видны под углами: а) 100°, 120° и 140°; б) 30°, 80° и 110°.

1200. На окружности отмечены точки A, B, C и D. Известно, что дуги AB, BC и CD равны 80°, 110° и 70° соответственно. Чему равен угол между прямыми AC и BD?

1201. Докажите, что в равностороннем треугольнике высота треугольника равна трём радиусам вписанной окружности.

1202. Два угла треугольника равны 80° и 70°. Под каким углом видна каждая его сторона из центра вписанной в него окружности.

1203. Определите вид треугольника, усли центр вписанной в него окружности совпадает с центром описанной около него окружности.

1204. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает прямую BC в точке F. Докажите, что треугольник ABF равнобедренный.

1205. Известно, что в параллелограмме один угол на 12° меньше другого. Могут ли эти углы быть противолежащими? Найдите углы параллелограмма.

1206(н). В параллелограмме $ABCD$ диагональ BD равна 12 см; O — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Чему равен отрезок DO?

1207. Сторона AD параллелограмма $ABCD$ равна 9 см, а его диагонали равны 14 см и 10 см; O — точка пересечения диагоналей. Чему равен периметр треугольника AOD?

1208(н). В треугольнике ABC проведена медиана BF. На её продолжении за точку F отложен отрезок FD, равный BF. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

1209(н). В треугольнике ABC стороны AB и BC продолжены за точку B. На продолжении отложены отрезки $BF = AB$ и $BD = CB$. Докажите, что четырёхугольник $ADFC$ — параллелограмм.

1210(н). В каждой из двух концентрических окружностей проведён диаметр AC и BD соответственно. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ — параллелограмм.

1211. В параллелограмме $KLMN$ углы LKM и MNL равны. Определите, является ли параллелограмм $KLMN$ прямоугольником.

1212(н). $ABCD$ — прямоугольник. O — точка пересечения диагоналей. Докажите, что треугольник AOB — равнобедренный.

1213(н). Две окружности с центрами в точках O и O_1 и равными радиусами пересекаются в точках A и B. Докажите, что четырёхугольник AO_1BO — параллелограмм.

1214. Сторона ромба равна 18 см, а один из углов равен 150°. Найдите расстояние между его противолежащими сторонами.

1215(н). В треугольнике QRP проведены средние линии ST, OT и OS. Докажите, что треугольники QSO, SRT, OTP и TOS равны.

1216(н). В треугольнике QRP отмечены точки S, T и O, которые являются серединами сторон QR, RP и QP соответственно. Докажите, что $QSTO$ — параллелограмм.

1217. В равностороннем треугольнике QRP отмечены точки S, T и O, которые являются серединами сторон QR, RP и QP соответственно. Найдите периметр параллелограмма $QSTO$, если периметр треугольника SRT равен 27.

1218. Сумма диагоналей четырёхугольника равна 26. Найдите периметр четырёхугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.

1219. Диагонали трапеции делят её среднюю линию на три равные части. Как относятся основания этой трапеции?

1220. Докажите, что середины сторон равнобокой трапеции являются вершинами ромба.

1221. В параллелограмме $ABCD$ проведена диагональ BD и отрезок AF (F лежит на стороне BC). Известно, что $BO = 6$ см,

$OD = 18$ см, O — точка пересечения AF и BD. Укажите подобные треугольники и определите коэффициент их подобия.

1222. Определите подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют по одному равному углу.

1223. Определите подобны ли равнобедренные треугольники, если они имеют по одному равному углу и эти углы тупые.

1224. Определите подобны ли равнобедренные треугольники, если угол при вершине одного из них равен 54°, а угол при основании другого 63°.

1225(н). Боковая сторона и основание одного равнобедренного треугольника соответственно равны 34 и 20 см, а боковая сторона и основание другого равнобедренного треугольника 17 см и 10 см. Определите, подобны ли эти треугольники.

1226(н). Докажите, что прямая, параллельная одной из сторон треугольника и пересекающая две другие стороны, отсекает от него подобный треугольник.

1227. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 20 см, а гипотенуза больше второго катета на 8 см. Вычислите периметр треугольника.

1228. В треугольнике ABC высота CD, опущенная из вершины прямого угла C, делит гипотенузу AB на отрезки $AD = 9$ см и $DB = 16$ см. Найдите катет AC и высоту CD этого треугольника.

1229(н). Радиус окружности, описанной около квадрата, равен 3 см. Определите сторону квадрата.

1230(н). Сторона квадрата равна 7 см. Определите диаметр окружности, описанной около квадрата.

1231(н). Найдите отношение диагонали квадрата к его стороне.

1232(н). К окружности радиуса 10 см проведена касательная, на которой взята точка M на расстоянии 24 см от точки касания. Найдите расстояние от точки M до центра окружности.

1233(н). Из точки M, отстоящей от центра окружности на расстоянии 29 см, проведена касательная $KM = 21$ см, где K — точка касания. Найдите радиус окружности.

1234(н). В окружности радиуса 17 см проведена хорда, равная 16 см. Найдите расстояние от центра окружности до хорды.

1235. Две окружности, радиусы которых равны 20 и 5 см соответственно, касаются внешним образом и имеют общую касательную AB. Найдите длину отрезка AB.

1236. Докажите, что если диагонали четырёхугольника $ABCD$ взаимно перпендикулярны, то $AB^2 + CD^2 = BC^2 + AD^2$.

1237. В равнобочной трапеции основания равны 30 см и 72 см, боковая сторона 75 см. Найдите высоту трапеции.

1238. Основания равнобочной трапеции равны 22 см и 42 см, боковая сторона 26 см. Найдите диагонали трапеции.

1239. Основания трапеции равны 13 см и 53 см, боковые стороны 13 см и 37 см. Найдите высоту трапеции.

1240. Докажите, что из диагоналей параллелограмма больше та, которая соединяет вершины острых углов.

1241. Земельный участок квадратной формы был огорожен. От изгороди сохранились два столба на параллельных сторонах (точки M и N) и столб в центре участка (точка O). Требуется восстановить границы участка.

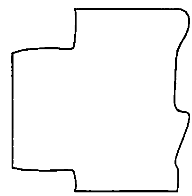


Рис. 413

1242. Восстановите положение центра квадрата, если у него не доступны все вершины и одна из его сторон (рис. 413).

1243. Постройте параллелограмм $ABCD$ по вершине C и серединам сторон AB и AD (точки M и N соответственно).

1244. Дан выпуклый четырёхугольник $MKPT$ и точка O внутри него. Постройте параллелограмм $ABCD$ так, чтобы точки M, K, P, T лежали на прямых AB, BC, CD, DA соответственно, точка O являлась бы точкой пересечения его диагоналей.

1245. Дана прямая a с лежащей на ней точкой O и произвольные точки P и K, лежащие по одну сторону от прямой a, причём отрезок PK не параллелен a. Постройте ромб так, чтобы прямая a содержала одну из диагоналей ромба, а прямая PK — одну из сторон ромба и точка O являлась бы точкой пересечения диагоналей ромба.

1246. Постройте ромб, у которого центром симметрии является данная точка O, а три вершины принадлежат трём данным прямым.

1247. Постройте квадрат, у которого диагональ принадлежит данной прямой a, а концы другой диагонали — двум данным окружностям, центры которых расположены по разные стороны от прямой a.

1248(т). Постройте трапецию, у которой боковые стороны AB и CD принадлежат двум данным прямым, середина диагонали AC — данная точка O, а большее основание (или его продолжение) содержит точку M.

1249(т). На каждой стороне квадрата отметили по точке. Затем все точки, кроме отмеченных, стёрли. Восстановите квадрат с помощью циркуля и линейки.

1250. Постройте квадрат, стороны которого проходят через четыре данные точки. Всегда ли задача имеет решение?

1251(т). На сторонах треугольника ABC вне его построены три квадрата. Как восстановить сам треугольник по центрам этих квадратов?

1252. Постройте трапецию, если известны длины её диагоналей d_1 и d_2, длина большего основания a и величина тупого угла, образованного при пересечении диагоналей трапеции, равна α.

1253. Постройте параллелограмм по двум диагоналям и углу между ними.

1254. Постройте прямоугольник по периметру P и диагонали a.

1255. Постройте трапецию по боковым сторонам, меньшему основанию и сумме углов, прилежащих к большему основанию.

1256. Постройте ромб:

а) по стороне и сумме диагоналей;

б) по острому углу и сумме диагоналей;

в) по стороне и разности диагоналей.

1257. Постройте треугольник по трём медианам.

1258. Дана трапеция $ABCD$, углы A и B которой прямые, угол D равен 30°, сторона AB равна 3. Точка M, такая, что BM и CM биссектрисы соответствующих углов трапеции, лежит на AD. Найдите AD.

1259. Прямая, проходящая через биссектрису внешнего угла при вершине A параллелограмма $ABCD$, при пересечении с прямыми BC и CD образуют треугольник CB_1D_1. Найдите сумму длин сторон CB_1 и CD_1 этого треугольника, если периметр параллелограмма $ABCD$ равен p.

1260(т). В прямоугольнике с длинами сторон a и b ($a > b$) проведены биссектрисы всех углов. Докажите, что при пересечении биссектрис образовался квадрат, и найдите его диагональ.

1261(т). Стороны параллелограмма равны a и b. Найдите диагонали четырёхугольника, образованного при пересечении биссектрис внешних углов параллелограмма.

1262(н). Докажите, что отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон параллелограмма, делит его на два параллелограмма и проходит через точку пересечения диагоналей.

8.7

1263. Докажите, что если середина отрезка, соединяющего середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, совпадает с точкой пересечения диагоналей, то данный четырёхугольник является параллелограммом.

1264(н). Докажите, что сумма отрезков соединяющих середины противоположных сторон параллелограмма равна его полупериметру.

1265(н). Докажите, что если в четырёхугольнике две противоположные стороны параллельны, то отрезок, соединяющий середины двух других его сторон, параллелен первой паре сторон и равен их полусумме.

1266. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника, равен полусумме двух других сторон, то этот четырёхугольник — трапеция или параллелограмм.

1267. Докажите, что если противоположные стороны выпуклого четырёхугольника не параллельны, то их полусумма больше отрезка, соединяющего середины двух других противоположных сторон.

1268. Докажите, что если полусумма двух противоположных сторон выпуклого четырёхугольника больше средней линии для двух других сторон, то первые две его стороны не параллельны.

1269. Докажите, что если сумма отрезков соединяющих середины противоположных сторон выпуклого четырёхугольника равна его полупериметру, то этот четырёхугольник — параллелограмм.

1270(т). В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ отрезок, соединяющий середины диагоналей, равен отрезку, соединяющему середины сторон AB и CD. Найдите угол, образованный продолжением сторон AD и CB.

1271. В выпуклом четырёхугольнике прямая, проходящая через середины двух противоположных сторон, образует равные углы с диагоналями четырёхугольника. Докажите, что диагонали равны.

1272(т). Основания трапеции равны a и b ($a > b$). Отрезок, соединяющий середины непараллельных сторон, пересекает диагонали в точках O_1 и O_2. Найдите длину отрезка O_1O_2.

1273(т). Отрезок MN, соединяющий середины сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$, пересекает его диагонали AC и BD соответственно в точках E и F (E не совпадает с F), причём $MF = NE$. Докажите, что $ABCD$ — трапеция.

1274(т). Докажите, что центры симметрии двух параллелограммов, вершины одного из которых лежат на сторонах другого, совпадают.

1275. Через центр симметрии параллелограмма $ABCD$ проведены две прямые. Одна из них пересекает стороны AB и CD в точках M и K соответственно, вторая — стороны BC и AD соответственно в точках N и L. Докажите, что четырёхугольник $MNKL$ — параллелограмм.

1276. Через центр квадрата $ABCD$ (точку O) проведены две взаимно перпендикулярные прямые KL и MN, где K, L, M, N — точки на сторонах квадрата. Докажите, что $KNLM$ — квадрат.

1277. В квадрат $ABCD$ впишите новый квадрат так, чтобы одна из его вершин M принадлежала бы стороне AB.

1278. На стороне квадрата $ABCD$ построен прямоугольный треугольник с прямым углом M, так что точка M — вне квадрата. Докажите, что отрезок, соединяющий точку M с центром симметрии квадрата, есть биссектриса угла BMC.

1279. Квадрат $ABCD$ пересечён взаимно перпендикулярными прямыми FT и PQ, причём точки F, T, P, Q лежат на разных сторонах квадрата (F на BC, P на AB).

а) Докажите, что отрезки FT и PQ равны.

б) O общая точка FT и PQ. Периметр $PBFO$ равен P_1. Периметр $QCFO$ равен P_2. Периметр $TDQO$ равен P_3. Периметр $PATO$ равен P_4. Докажите, что $P_1 + P_3 = P_2 + P_4$.

1180. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что центр симметрии четырёхугольника $MNKL$ совпадает с центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

1181. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что $MNKL$ — квадрат.

1182. На сторонах AB, BC, CD, DA параллелограмма $ABCD$ взяты соответственно точки M, N, K, L, делящие эти стороны в одном и том же отношении (при обходе по часовой стрелке). Докажите, что при пересечении прямых AN, BK, CL, DM получается параллелограмм, причём его центр симметрии совпадает с центром симметрии параллелограмма $ABCD$.

1183. Боковая сторона трапеции равна одному из оснований и вдвое меньше другого. Докажите, что вторая боковая сторона трапеции перпендикулярна одной из её диагоналей.

1184. Диагонали трапеции взаимно перпендикулярны. Длина одной диагонали равна 6, а вторая образует с основанием угол, равный 30°. Найдите среднюю линию трапеции.

1185. Средняя линия трапеции равна 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 3. Углы при большем основании равны 30° и 60°. Найдите длины её оснований и меньшей боковой стороны.

1286. Существуют ли две трапеции, основания первой из которых соответственно равны боковым сторонам второй, а основания второй — боковым сторонам первой?

1287. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $AEDB$ и $BCKM$. Докажите, что отрезок DM в два раза больше медианы BP к стороне AC.

1288. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ во вне его построены равносторонние треугольники ABM и BCN. Докажите, что треугольник DMN — равносторонний.

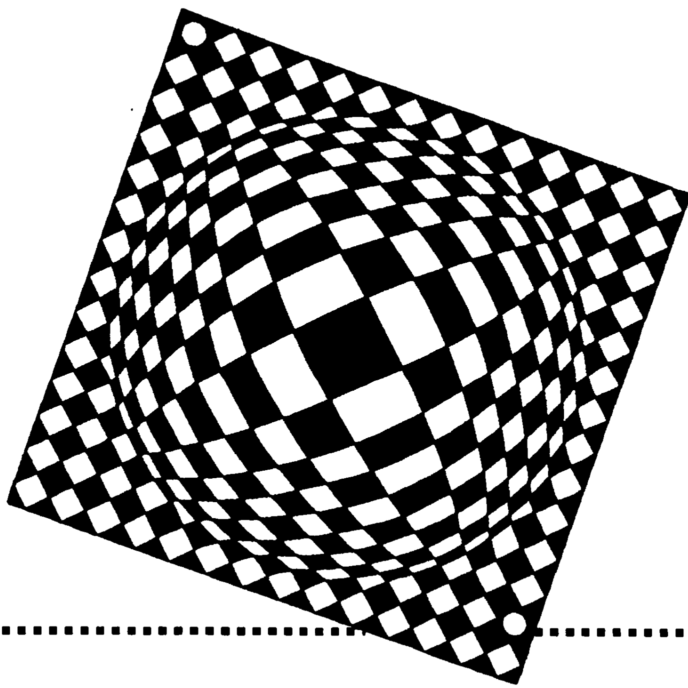
1289. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ во вне его построены квадраты $ABFE$ и $BCKM$. Докажите, что отрезки ED и KD взаимно перпендикулярны.

1290. На сторонах параллелограмма построены квадраты. Докажите, что их центры симметрии являются вершинами квадрата.

1291. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $BCDE$, $ACTM$, $BAHK$, а затем параллелограммы $TCDQ$ и $EBKP$. Докажите, что треугольник APQ — равнобедренный и прямоугольный.

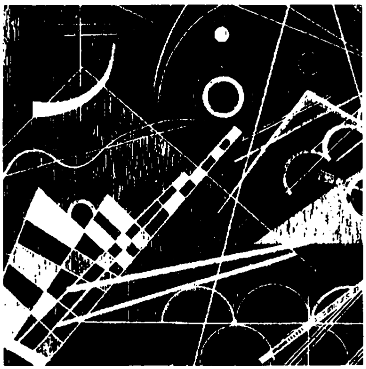
Девятый

класс



9

Аксиоматики



В этой главе мы ненадолго вернёмся в самое начало курса. А именно — подробно расскажем о том, какие аксиомы бывают на самом деле. Конечно, основные свойства плоскости, которые мы использовали для построения нашего курса, достаточно строги, а главное — наглядны. И их вполне хватает, чтобы доказывать теоремы, опираясь на факты, известные вам из других школьных курсов (например, алгебры), наглядные представления (например, что любая прямая, пересекающая одну из сторон треугольника, непременно пересечёт и другую, или, что между любыми двумя точками на прямой непременно найдётся ещё одна точка этой же прямой) и здравый смысл (или, говоря научно, законы формальной логики). В некотором смысле, избранный в этом учебнике подход, близок к использованному Евклидом, который ограничился всего только пятью постулатами. Однако, за *прошедшие со времён Евклида века, такой подход перестал удовлетворять многих математиков. Произошло это, в первую очередь, вследствие развития математического анализа, теории множеств, теории групп, и других абстрактных теорий и связанными с этими отраслями парадоксами, в том числе с построением геометрии Лобачевского. Вдруг оказалось, что наглядных повседневных построений недостаточно, чтобы объяснить то или иное явление, или что их опрометчивое использование может привести к серьёзным затруднениям и даже парадоксам. О том, как учёные выходят из создавшегося положения, мы и поговорим в этой главе.*

9.1. Что такое аксиомы

В конце XIX — начале XX в., через две с лишним тысячи лет после Евклида, учёные-математики вернулись к вопросу о том, какие постулаты должны быть положены в основание геометрии с точки зрения достижения математики того времени. Было предложено много разных вариантов аксиом. Среди математиков, которые этим занимались, можно упомянуть Морица Паша, Исая Шура, Джузеппе Пеано, Джузеппе Веронезе, Германа Вейля. Наибольшую известность получили, пожалуй, две системы: система аксиом, предложенная великим немецким математиком Давидом Гильбертом и система, предложенная американцем Джорджем Биркхофом.

Мы собираемся кое-что рассказать вам об этих системах, отличающихся количеством аксиом, их составом и многим другим. Но между ними (и остальными системами аксиом) есть и общее.

А именно, прежде чем начать заниматься какой-то математической, да и не только математической, теорией, неплохо было бы узнать, какие явления и объекты будут нам встречаться. Обычно это понятно из названия теории или из общих наглядных представлений о ней. Например, в физике электродинамика занимается электричеством, гидродинамика — свойствами жидкостей, теория поля — взаимодействиями и полями. При этом нам из повседневной жизни (или из предварительно изученного) вполне понятно, что такое жидкость или электричество. По крайней мере, нужда в строгом определении этих понятий обычно не возникает.

9.1

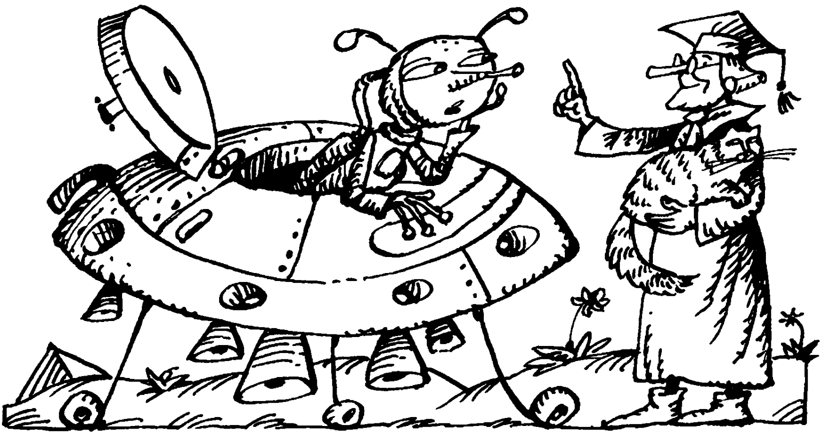
В геометрии дело обстоит несколько хуже — нам приходится работать (особенно в самом начале курса) с идеальными точками, идеальными бесконечными прямыми и т. д. Хоть мы и можем представить себе, что такое плоскость или прямая, тем не менее это представление не очень строгое. Оно вполне может оказаться недостаточным, если мы будем углублять теорию. Во всяком случае, мы никогда в жизни не видели идеальной бесконечной плоскости, а именно такую мы должны рассматривать на уроках геометрии!

Как же математики определяют изучаемые в геометрии объекты, если не хотят попасть в неловкое положение из-за неидеальности чертежей? А как, если им приходится работать с ещё более абстрактными понятиями? Что они делают в таком случае? Оказывается, ничего! То есть совсем НИЧЕГО! А именно, они говорят, что прямые и точки на плоскости (в случае геометрии пространства, или стереометрии, надо ещё добавить плоскости в пространстве) — это НЕОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ объекты! И никакого особенного объяснения, что такое прямая, или точка вообще не дают[1]! А как же их изучают, спросите тогда вы? Очень просто: хотя эти объекты сами по себе и неопределяемые, но у них есть свойства! Эти свойства задаются аксиомами (современная математика обычно не различает аксиомы и постулаты) и теми их следствиями, которые мы сможем доказать.

Хоть это и кажется сложным и непонятным, на самом деле такой подход вполне естественен. Представьте себе, что вы объясняете инопланетянину, почему вы любите кошек (или собак). Если вы попробуете для начала объяснить ему (или ей, или кем ещё могут быть инопланетяне), что такое кошка, то это будет непросто. Вы начнёте, например, сказав, что кошка — это такое домашнее животное. «А что такое животное?» — спросит вас он. Допустим, что вы найдётесь, сказав, что животное — это такое живое существо на четырёх ногах, покрытое шерстью (хоть это, конечно, неправильно — киты, например, никакой шерстью не покрыты, но инопланетянин вас всё равно не сможет уличить в обмане, ведь его планета, устроена совершенно иначе). Тогда он начнёт задавать вопросы, что такое шерсть, что такое нога, что

---

[1] Впрочем, и те определения, которые давал Евклид, нельзя назвать вполне ясными. Он, например, говорил, что «прямая — это длина без ширины». Не очень-то строго, ничего не скажешь...



такое существо и прочее, и прочее — до бесконечности. Для того чтобы остановить этот процесс, вам надо продемонстрировать вашему собеседнику или кошку, или её изображение, или же сказать: «Стоп! Я не скажу, что такое кошка, но достаточно знать: 1) она говорит «мур», если её почесать за ухом; 2) она тёплая и пушистая; 3) я люблю всё, что тёплое и пушистое; 4) многим людям нравятся те, кто мурлычет!» Тогда у вашего собеседника, возможно, и не появится представления о том, что такое кошка и как она выглядит, но он (она, оно) поймёт, за что вы её любите. Кроме того, немного подумав, он, вероятно, скажет, что, наверное, многие люди должны любить кошек. Так и в математике: когда речь идёт о прямой на плоскости, нам сложно представить себе сразу идеальную прямую (да и видел ли кто-нибудь в природе хоть один объект «без ширины»?). Но можно перечислить несколько свойств прямых и начать делать об этих «существах» те или иные выводы. Такой метод особенно полезен, когда математикам приходится работать не с прямыми и с точками, о которых мы всё же имеем некоторое наглядное представление, а с объектами гораздо более абстрактными (но тем не менее, вполне реальными и даже полезными для приложений).

Конечно, пользуясь этим методом, мы рискуем показаться пустословами: может оказаться, что такой подход сводится к высказыванию: «Я люблю кошек потому, что я люблю кошек». Такая опасность есть. Чтобы не попасть в глупое положение, математики стараются, во-первых, обходиться минимально возможным количеством аксиом такого рода, а во-вторых, ограничивать список аксиом только теми свойствами, которые им интуитивно понятны (да, интуиция бывает разная...).

Этим нехитрым приёмом пользуются учёные при строгом построении геометрии. Различаются только наборы неопределяемых объектов и списки их свойств. Далее мы приведём примеры таких систем.

9.2. Аксиомы Гильберта

Итак, чтобы задать аксиомы геометрии Евклида, нам надо выбрать несколько *неопределяемых понятий* и перечислить их *свойства*, стараясь при этом обойтись возможно меньшим их количеством и пользуясь данной нам «в ощущениях» интуицией. Некоторые из этих понятий вполне очевидны: «точки» и «прямые». Но оказывается, этого чуть-чуть не хватает. Что же ещё нам потребуется?

Оказывается, можно обойтись самой малостью (этим минимализмом вообще отличаются все математические теории, связанные с именем Гильберта). А именно: чтобы сказать что-то умное про точки, прямые и разные другие объекты, с которыми нам придётся работать, нам надо уметь с ними работать. Но как это делать? Что значит, например, «точка A лежит на прямой a»? По мнению Гильберта это неопределяемое понятие! Кроме того, нам часто приходится говорить про то, что одна из трёх точек на прямой «лежит между другими» и что «точка A лежит на прямой b». Вот и всё: эти два понятия надо объявить неопределяемыми (равенство объектов и отношение «лежать между» для точек).

Теперь можно сформулировать аксиомы, их у Гильберта 15. Они разделены для удобства на несколько частей. Мы здесь рассматриваем только аксиомы, относящиеся к геометрии на плоскости: аксиомы, описывающие свойства понятия «лежать на прямой» (так называемые *аксиомы принадлежности*), свойства «лежать между» и прочее. Например, аксиом принадлежности всего три.

<u>Аксиомы принадлежности.</u>

1. ***Каковы бы ни были две точки A и B, существует прямая a, которой принадлежат эти точки.***

2. ***Каковы бы ни были две различные точки A и B, существует не более одной прямой, которой принадлежат эти точки.***

3. ***Каждой прямой а принадлежат по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не принадлежащие одной прямой.***

Наверное, не имеет смысла приводить тут все аксиомы. Назовём только три самые известные.

Аксиома Паша.

Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая, не проходящая ни через одну из точек A, B или C; если при этом прямая проходит через одну из точек отрезка AB, то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC.

Это утверждение проиллюстрировано на рисунке 414: по-существу, аксиома Паша требует, чтобы прямая «вылезала» из любой ограниченной области и пересекалась при этом с границами области. В избранной нами системе (см. 7 класс), аксиоме Паша более-менее соответствует свойство прямой делить плоскость на две полуплоскости.

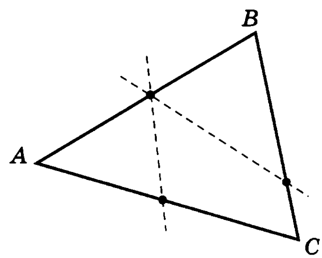


Рис. 414

Следующая аксиома не встречалась у нас в явном виде, более того, при первом знакомстве она может показаться как минимум излишней, если не вовсе глупой. Тем неожиданнее, что эта аксиома весьма древняя и очень важная: её аналоги встречаются повсюду в современной математике, а отказ от неё может привести к удивительным результатам, как ни странно используемым в прикладных науках.

Аксиома Архимеда.

Если даны отрезок CD и луч AB, то существует натуральное число n и n точек A_1, ... , A_n на AB таких, что $A_jA_{j+1} = CD$, для всех $j = 1, \dots, n$ и B лежит между A_1 и A_n.

Эта аксиома по-просту утверждает, что, как бы далеко друг от друга мы ни расставили на прямой точки A и B, и сколь маленький отрезок CD ни использовали, мы непременно сможем добраться из A в B, делая шаги длиной CD. «Разве это не очевидно?!» — возможно, воскликните вы. И будете в чём-то правы: отрицание такого рода свойства противоречит всему, с чем мы сталкиваемся каждый день. Как это может быть, что сколько бы мы ни двигались, мы не придём из одной точки в другую? Но, оказывается, несложно и привести пример обратной ситуации — построить такую систему, какие-то два элемента которой невозможно соединить, если двигаться слишком короткими шажками. Например, будем говорить, что многочлен $p(x)$ больше многочлена $q(x)$, если $p(x) - q(x) > 0$ при достаточно больших x. Понятно, что любые два многочлена тогда можно сравнить и сказать, какой из них больше, а какой — меньше. С другой стороны, пусть $p(x) = 0$, $q(x) = x$. Возьмём $p(x)$ за отправную точку, и станем двигаться шагом 1. Очевидно, что при этом мы никогда не получим многочлена, большего $q(x)$.

Наконец, последняя из «именных» аксиом — это уже знакомая нам аксиома о параллельных.

Аксиома о параллельных.

Через любую точку вне данной прямой а можно провести не более одной прямой, параллельной а.

Вместо этой аксиомы (которая совпадает с тем, что использовали мы и эквивалентна пятому постулату Евклида) можно было бы использовать *аксиому Лобачевского*: через любую точку вне данной прямой a можно провести не менее двух прямых, параллельных a. В этом случае мы получили бы аксиоматику *неевклидовой геометрии*, или *геометрии Лобачевского*.

После того как все аксиомы записаны, мы можем попытаться доказать какие-либо теоремы. Правда, сделать это будет совсем не просто, ведь мы теперь не имеем права использовать чертежи. Более того, то, что раньше нам казалось очевидным и простым, например, то, что на прямой бесконечно много точек, теперь составляет предмет весьма непростого утверждения. Приведём для примера несколько утверждений из классического учебника высшей геометрии для студентов-математиков (автор Н. В. Ефимов).

Теорема 9.1.

Каковы бы ни были точки A и C, существует по крайней мере одна точка D на прямой AC, лежащая между A и C.

Теорема 9.2.

Из любых трёх точек A, B и C, лежащих на одной прямой, по крайней мере одна лежит между двумя другими.

Хоть эти утверждения и кажутся очевидными, их надо доказывать (если мы пользуемся настоящим аксиоматическим методом, и не апеллируем к наглядности). Как ни странно, теорема 2 является следствием аксиомы Паша, и не может быть получена без использования этого постулата или ему эквивалентного.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1292. Какие неопределяемые понятия, по вашему мнению, используются в нашем учебнике?

1293. Какие неопределяемые понятия использует Гильберт?

1294. Докажите теоремы 1 и 2, используя в качестве аксиом основные свойства плоскости (см. главу 1).

9.3. Конечные геометрии

А что же будет, если мы не будем использовать все аксиомы, а ограничимся только частью? Оказывается, может получиться много интересного. Например, если мы ограничимся только следующими аксиомами, окажется, что на плоскости может лежать конечное число точек.

Аксиома 1. ***Через любые две точки можно провести прямую, причём единственную.***

Аксиома 2. ***Через любую точку A, не принадлежащую прямой l, можно провести единственную прямую l', не пересекающуюся с l.***

Аксиома 3. ***Существуют четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой.***

9.3

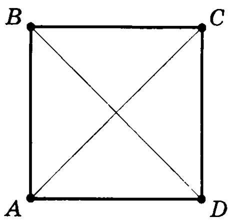


Рис. 415

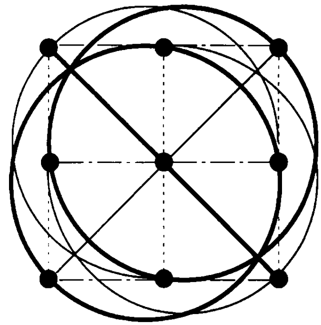


Рис. 416

В самом деле, посмотрите на рисунки 415 и 416. На первом из них изображена система из четырёх точек (вершины квадрата), и шести прямых, каждая прямая содержит по две точки, прямые одного начертания параллельны (как и в «настоящей» геометрии мы говорим, что две прямые параллельны, если они не пересекаются, т. е., если не существует точек, принадлежащих им обеим). На рисунке 416 указана аналогичная система из 9 точек и 12 прямых. Некоторые из этих прямых совсем не похожи на прямые, но это не должно нас смущать: нам надо лишь проверить, что выполняются все три сформулированных нами свойства, что сделать совсем не сложно, достаточно перебрать все варианты.

«Какой прок в таких моделях?» — можете спросить вы. Как ни странно, довольно большой. Во-первых, на таких конечных системах можно проверить выполнение или невыполнение каких-либо геометрических утверждений: если какое-то утверждение следует из приведённых выше трёх аксиом, то оно будет выполнено в любой такой конечной модели. Конечно, нам трудно проверить сразу *все* модели, но ведь если мы найдём хоть одну, для которой искомое утверждение *не* выполнено, то этого достаточно, чтобы утверждать его независимость от наших аксиом. Во-вторых, сам по себе вопрос о существовании или несуществовании геометрии с тем или иным конечным числом точек — весьма нетривиальная комбинаторная задача, которая оказывается тесно связанной со свойствами целых чисел (ими занимается теория чисел) и многими другими разделами современной математики.

▲■● Задача

1295. Существует ли «геометрия» на множестве из 5, 6, 7, 8, 16 точек? Под «геометрией» мы понимаем такую систему «прямых», для которой выполняются все три приведённые нами в этом разделе аксиомы. Как и ранее под прямой мы понимаем набор точек, а параллельные прямые — это такие прямые, у которых нет общих точек.

9.4. Аксиомы Биркхофа

Расскажем, наконец, о ещё одном подходе к аксиоматике геометрии, который обычно связывают с именами знаменитого немецкого математика Германа Вейля или американского математика Джорджа Биркхофа. Главная идея этого подхода состоит в том, что в геометрию как можно раньше, на уровне аксиом, вводятся вещественные числа. Так, одна из наиболее экономных систем аксиом такого рода содержит всего четыре требования.

Аксиома линейки.

Если на прямой выбрать начальную точку и направление, то любой точке на прямой можно однозначно сопоставить вещественное число (расстояние до начала отсчёта с учётом знака).

Аксиома прямых.

Через любые две точки можно провести единственную прямую.

Аксиома транспортира.

Если выбрать луч с началом в точке A и направление поворота, то любому другому лучу с началом в A можно однозначно сопоставить вещественное число из промежутка от 0 до 2π (угол поворота).

9.4

Аксиома подобия.

Выполняется второй признак подобия треугольников (по двум углам).

В этом случае нам не надо доказывать бесконечность точек на прямой — это следует из бесконечности количества вещественных чисел. То же самое можно сказать и про теоремы 1 и 2 — они описывают очевидные свойства чисел, только и всего. Но в этом-то и обманчивость избранной тут системы: она попросту заменяет геометрические трудные утверждения на «более привычные» утверждения про вещественные числа. Но это совсем не значит, что их не надо доказывать. Напротив, чтобы доказать такого рода утверждения, надо пользоваться довольно сильными средствами — аксиоматической теорией вещественных чисел или чем-то аналогичным. Очевидно, предпочтение, отдаваемое такого рода наборам аксиом, связано с тем, что психологически приятнее оперировать с числами, а не с фигурами. Но настоящая строгая аксиоматическая теория должна была бы при этом содержать кроме приведённых четырёх утверждений ещё какую-то систему, описывающую вещественные числа.

С другой стороны, можно показать, что этот набор аксиом задаёт ту же самую геометрию, что и набор аксиом Гильберта. Правда, сделать это не очень просто. Точнее говоря, несложно доказать, что если выполнены приведённые нами аксиомы, то выполняются и все аксиомы Гильберта. Обратное утверждение требует значительно больших усилий — ведь мы, по-существу, должны передоказать все свойства вещественных чисел!

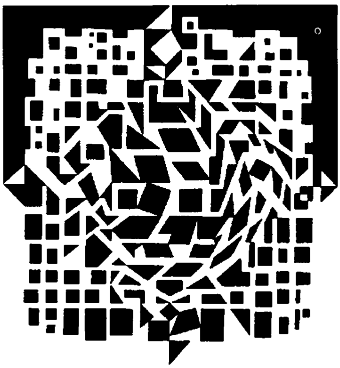
▲■● Задачи, задания, вопросы

1296. Докажите, пользуясь приведёнными четырьмя аксиомами, что в геометрии, заданной таким образом, выполнена аксиома Евклида о параллельных.

1297. Докажите аксиому Паша, исходя из приведённых аксиом Биркхофа.

10

Площади многоугольников



В этой главе мы познакомимся с понятием площади. Впрочем, слово «познакомимся» здесь совсем не подходит. В обычной жизни мы на каждом шагу встречаемся с площадями. Площадь — это и квадратные метры наших квартир, гектары полей, квадратные километры лесов и т. д.

Что такое площадь, знает каждый. А действительно ли это так? Подумайте и постарайтесь самостоятельно ответить на вопрос: что такое площадь? И вы увидите, что не так-то это просто. Даже математики смогли создать соответствующую математическую теорию сравнительно недавно. Правда, это никому не мешало успешно использовать понятие площади и в науке, и на практике уже с незапамятных времён.

Изучению понятия площади, выводу формул, с помощью которых можно вычислять площади важнейших геометрических фигур, и, в первую очередь, многоугольников, посвящена эта глава.

10.1

10.1. Основные свойства площади. Площадь прямоугольника

Давайте всё же постараемся, исходя из обычного здравого смысла, ответить на вопросы, что такое площадь и каковы её свойства.

Итак, что такое площадь?

Прежде всего заметим, что площадь — это некоторая характеристика геометрической фигуры, расположенной на плоскости или на иной поверхности. Мы пока будем рассматривать лишь плоские фигуры. Поэтому поставим вопрос несколько иначе: что такое площадь плоской фигуры? Что это за характеристика — площадь плоской фигуры?

***Площадь** — это число, которое ставится в соответствие ограниченной плоской фигуре.*

Теперь попытаемся установить свойства этого числа, выяснить, как его можно найти. Вполне очевидными выглядят следующие свойства площади.

Свойство 1. ***Площадь фигуры является неотрицательным числом.***

Свойство 2. ***Площади равных фигур равны.***

Свойство 3. ***Если фигура разделена на две части, то площадь всей фигуры равна сумме площадей образовавшихся частей.***

Ещё нужна фигура, которую мы примем за эталон для измерения площади, — *единицу площади*. При этом не следует забывать, что уже имеется единица измерения длины.

Свойство 4. ***За единицу измерения площади принимается площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины*** (рис. 417).

Другими словами, площадь квадрата со стороной, равной 1 единице длины, равна 1 единице площади, или 1 квадратной

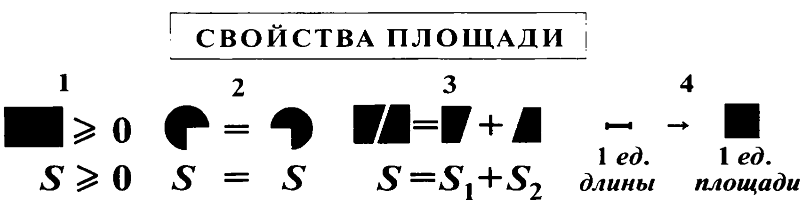
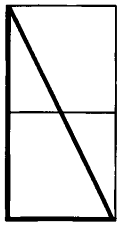


Рис. 417



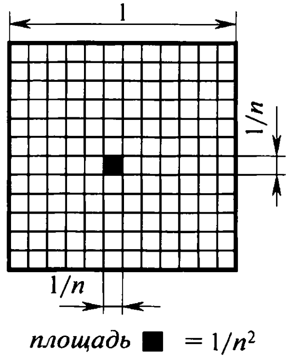


Рис. 418 Рис. 419

единице. Например, площадь квадрата со стороной 1 метр равна одному квадратному метру (1 м^2).

Конечно, единичный квадрат не является единственной фигурой с площадью 1. Из свойств площади следует, что площадь 1 имеет и прямоугольный треугольник, изображённый на рисунке 418.

Фигуры, имеющие равные площади, называются ***равновеликими.***

Два следствия из свойств площади

Перечисленные свойства площади определяют величину площади геометрической фигуры.

Следствие 1.

Если одна фигура содержит внутри себя другую фигуру, то площадь первой фигуры не меньше площади второй фигуры.

Справедливость этого утверждения следует из неотрицательности площади и свойства 2.

Следствие 2.

Площадь квадрата со стороной, длина которой $\frac{1}{n}$ (ед. дл.), равна $\frac{1}{n^2}$ (кв. ед., или ед.^{2}).

Докажем это. Разделим каждую из сторон единичного квадрата на n равных частей и через точки деления проведём прямые, параллельные сторонам квадрата (рис. 419). Весь квадрат окажется разделённым на n^2 равных квадратов. А так как в соответствии со свойством 1 все они имеют равные площади и, согласно свойствам 2 и 3, сумма их площадей равна 1, то площадь каждого из получившихся маленьких квадратов равна $\frac{1}{n^2}$.

Площадь прямоугольника

Теперь мы можем доказать основную теорему.

Теорема 10.1 *(основная формула для площади прямоугольника).*

Если стороны прямоугольника равны a и b, то его площадь равна произведению ab.

Таким образом, для площади прямоугольника справедливо равенство

$$\boxed{S = ab,}$$

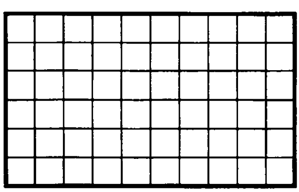
где a и b — длины сторон этого прямоугольника.

Замечание. Здесь a и b — длины сторон прямоугольника, измеренные в **одинаковых** единицах длины. Тогда ab — площадь в соответствующих квадратных единицах.

Доказательство. Утверждение теоремы можно легко доказать, если a и b — рациональные числа $\left(\text{т. е. числа вида } \frac{p}{q}, \text{ где } p \text{ и } q \text{ — натуральные числа}\right)$.

В самом деле, приведём дроби, выражающие длины сторон a и b, к одному знаменателю. Пусть $a = \frac{k}{n}$, $b = \frac{m}{n}$ (рис. 420).

$a = \frac{k}{n}$



$b = \frac{m}{n}$ $\qquad S = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = ab$

Рис. 420

Разделим теперь сторону a рассматриваемого прямоугольника на k равных частей, а сторону b — на m равных частей. Через точки деления проведём прямые, параллельные сторонам прямоугольника. Тогда весь прямоугольник окажется разделённым на km квадратов со стороной $\frac{1}{n}$, площади которых, как мы знаем, равны $\frac{1}{n^2}$.

Таким образом, площадь нашего прямоугольника равна

$$S = km \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{k}{n} \cdot \frac{m}{n} = ab. \blacktriangledown$$

Труднее приходится при доказательстве формулы площади прямоугольника, если хотя бы одно из чисел a или b не является рациональным. (Напомним, что числа, которые нельзя представить в виде дроби, числитель и знаменатель которой — целые числа, называются *иррациональными*.)

❋ Для тех, кто не любит ничего принимать на веру (что характерно именно для математиков), приведём доказательство для произвольных a и b.

Возьмём произвольное натуральное число n и подберём натуральные числа k и m такие, что выполняются двойные неравенства $\frac{k}{n} \leqslant a < \frac{k+1}{n}$, $\frac{m}{n} \leqslant b < \frac{m+1}{n}$ (рис. 421). Понятно, что такие числа найдутся: мы как бы «шагаем» с шагом $\frac{1}{n}$ до тех пор, пока не «перепрыгнем» через a, а также через b[1].

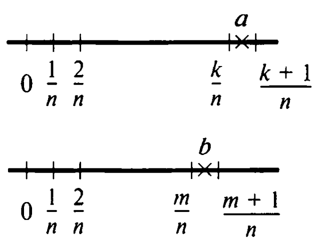


Рис. 421

[1] По существу, именно это утверждает аксиома Архимеда.

10.1

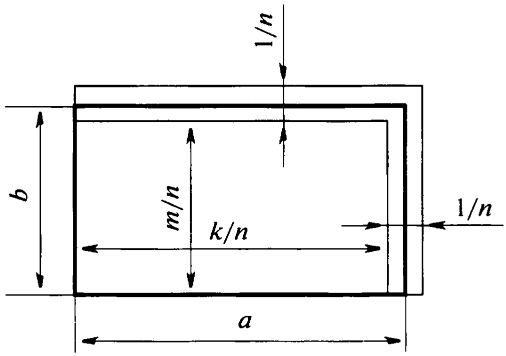


Рис. 422

Рассмотрим три прямоугольника: первый — со сторонами $\frac{k}{n}$ и $\frac{m}{n}$; второй — данный, со сторонами a и b; третий — со сторонами $\frac{k+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n}$ (рис. 422). Их можно расположить так, что первый прямоугольник не выходит за пределы второго, а третий содержит второй.

Из свойств площади следует, что площадь второго прямоугольника меньше площади третьего и не меньше площади первого.

Площадь первого многоугольника равна $\frac{km}{n^2}$, а площадь третьего составляет $\frac{(k+1)(m+1)}{n^2}$.

Пусть S — площадь второго прямоугольника. Имеем

$$\frac{km}{n^2} \leqslant S < \frac{(k+1)(m+1)}{n^2}.$$

Но из двойного неравенства $\frac{k}{n} \leqslant a < \frac{k+1}{n}$ следует, что $an - 1 < k \leqslant an$. Точно так же $bn - 1 < m \leqslant bn$.

Теперь в левой части двойного неравенства для S заменим k и m меньшими величинами, а в правой — бо́льшими. Получим

$$\frac{(an-1)(bn-1)}{n^2} < S < \frac{(an+1)(bn+1)}{n^2}.$$

Или, после раскрытия скобок,

$$ab - \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2} < S < ab + \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}$$

и тем более $$ab - \frac{a+b}{n} - \frac{1}{n^2} < S < ab + \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Вычитая из всех частей неравенства ab, получаем

$$-\left(\frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}\right) < S - ab < \left(\frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}\right),$$

т. е.

$$|S - ab| < \frac{a+b}{n} + \frac{1}{n^2}.$$

Посмотрим внимательно на последнее неравенство. Оно верно при любом n. Но в его левой части стоит неотрицательное число, не зависящее от n. Если предположить, что $S \neq ab$, то это число будет положительным. Выбирая теперь n достаточно большим, можно сделать правую часть неравенства меньше любого положительного числа, а значит, меньше левой его части, если $S \neq ab$[1].

Таким образом, непременно $S = ab$, каковы бы ни были числа a и b. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1298. Как изменится площадь прямоугольника, если каждую из его сторон увеличить в k раз?

1299. На плоскости лежат два одинаковых по площади четырёхугольника (рис. 423). Докажите, что сумма площадей белых треугольников равна сумме площадей чёрных треугольников.

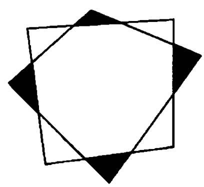


Рис. 423

1300. Докажите, что площадь круга радиуса 1 меньше 4 м^2.

[1] И это тоже гарантирует нам аксиома Архимеда, но в данном случае её надо рассматривать как аксиому вещественных чисел.

1301. На сторонах квадрата во внешнюю сторону построены четыре равных прямоугольных треугольника. Стороны квадрата служат гипотенузами этих треугольников. Найдите площадь фигуры, составленной из квадратов и этих треугольников, если сумма катетов в каждом треугольнике равна d.

1302(т). Имеется прямоугольник со сторонами 10 и 12. Предложите способ, с помощью которого этот прямоугольник можно разрезать на части, из которых можно составить равновеликий ему квадрат.

1303. Имеется два квадрата 3×3 и 1×1. Разрежьте их на части, из которых можно составить один квадрат.

1304(т). Решите предыдущую задачу для двух произвольных квадратов. Эта задача достаточно трудная, поэтому дадим подсказку в виде рисунка 424.

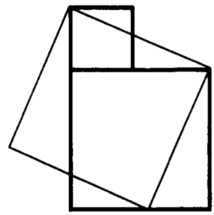


Рис. 424

10.2. Площади треугольника и четырёхугольника

В этом параграфе мы сначала получим основные формулы, выражающие площади трёх фигур: параллелограмма, треугольника и трапеции, затем выведем ещё несколько формул, прежде всего для треугольника, которые могут оказаться полезными при решении различных задач.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма может быть вычислена по формуле

$$\boxed{S = ah,}$$

где a — длина стороны параллелограмма, h — его высота, опущенная на эту сторону.

Доказательство. Рассмотрим параллелограмм $ABCD$, в котором $BC = AD = a$ (рис. 425). Опустим из B и C перпендикуляры BK и CM на AD, $BK = CM = h$. Получившийся прямоуголь-

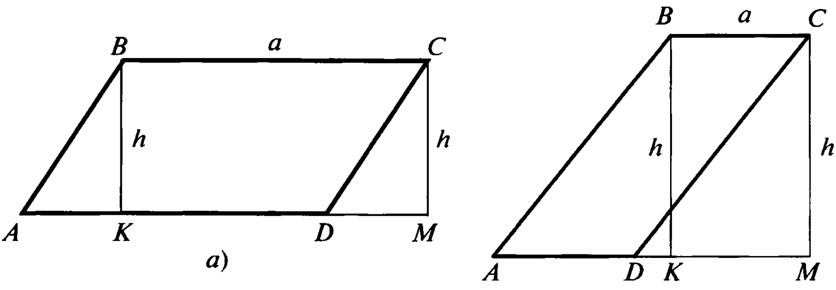


Рис. 425

ник $KBCM$ равновелик параллелограмму $ABCD$. Это следует из равенства треугольников ABK и DCM: чтобы получить из площади $ABCD$ площадь $KBCM$, надо прибавить к ней площадь треугольника DCM, а затем вычесть площадь треугольника ABK. Это верно при любом расположении K и M на прямой AD (см. рис. 425, *а*, *б*). Значит,

$$S = S_{ABCD} = S_{KBCM} = BC \cdot BK = ah. \blacktriangledown$$

Площадь треугольника

Площадь треугольника может быть вычислена по формуле

$$\boxed{S = \frac{1}{2}ah,}$$

где a — сторона треугольника, h — высота, опущенная на эту сторону.

Указанная формула является основной для вычисления площади треугольника.

Доказательство. Пусть в треугольнике ABC сторона BC равна a, а высота, опущенная на неё, равна h.

Достроим треугольник ABC до параллелограмма $ABCD$ (рис. 426). Площадь параллелограмма, как мы знаем, равна ah. Площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, поскольку треугольники ABC и DCA равны. Значит, $S = S_{ABC} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{2}ah. \blacktriangledown$

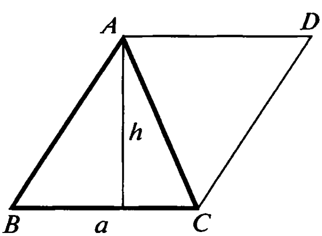


Рис. 426

10.2

Площадь трапеции

Площадь трапеции может быть вычислена по формуле

$$\boxed{S = \frac{a+b}{2} \cdot h,}$$

где a и b — основания трапеции, h — высота трапеции, т. е. расстояние между её основаниями.

Другими словами, ***площадь трапеции равна произведению её средней линии на высоту.***

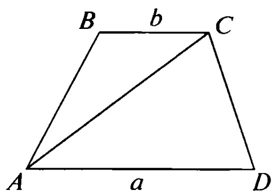


Рис. 427

Доказательство. Рассмотрим трапецию $ABCD$ с основаниями AD и BC (рис. 427). Диагональ AC делит её на два треугольника. Имеем

$$S = S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} =$$
$$= \frac{1}{2} AD \cdot h + \frac{1}{2} BC \cdot h = \frac{1}{2}(a+b) \cdot h. \blacktriangledown$$

Ещё несколько формул для площади треугольника

Будем обозначать через A, B и C величины соответствующих углов треугольника ABC, а через a, b и c, как обычно, длины противолежащих им сторон. Имеем $2p = a + b + c$ — периметр треугольника, r и R — соответствsенно радиусы вписанной и описанной окружностей.

В этих обозначениях для площади треугольника справедливы следующие формулы

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad (1)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \cdot \sin C}{2 \sin A}, \quad (2)$$

$$S = 2R^2 \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C, \quad (3)$$

$$S = pr. \quad (4)$$

Доказательство.

1. Пусть AD — высота, опущенная на BC (рис. 428). Имеем

$$h = AD = AC \cdot \sin C = b\sin C.$$

Значит,

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin C.$$

2. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \quad \text{откуда } b = \frac{a\sin B}{\sin A}.$$

Заменив в формуле (1) b через a, получим

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}a\,\frac{a\sin B}{\sin A}\,\sin C = \frac{a^2\sin B \cdot \sin C}{2\sin A}.$$

3. По теореме синусов $a = 2R\sin A$. Заменив в формуле (2) a этим значением, получим

$$S = \frac{a^2\sin B \cdot \sin C}{2\sin A} = (2R\sin A)^2\,\frac{\sin B \cdot \sin C}{2\sin A} = 2R^2\sin A \cdot \sin B \cdot \sin C.$$

4. Пусть J — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Площадь треугольника ABC составляется из площадей трёх треугольников: ABJ, BCJ и CAJ (рис. 429). В каждом из них высоты, опущенные из вершины J, равны r. Значит,

$$S = S_{ABJ} + S_{BCJ} + S_{CAJ} = \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = \frac{1}{2}(a + b + c)r = pr. \ \blacktriangledown$$

Обратим внимание, что формула площади $S = pr$ верна для любого описанного многоугольника (p — его полупериметр, r — радиус вписанной окружности).

Доказывается это так же, как и для треугольника.

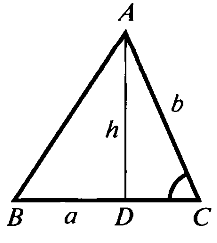


Рис. 428

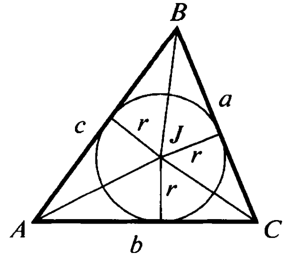


Рис. 429

10.2

Площадь произвольного четырёхугольника

Для произвольного четырёхугольника во многих случаях полезна формула, выражающая его площадь через диагонали и угол между ними.

Пусть m и n — диагонали четырёхугольника, φ — угол между ними. Тогда для площади этого четырёхугольника справедлива формула

$$\boxed{S = \frac{1}{2}mn \sin \varphi.} \qquad (5)$$

Доказательство. Рассмотрим выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Имеем $AC = m$, $BD = n$, K — точка пересечения его диагоналей (рис. 430).

Высота треугольника ABC, опущенная на AC, равна $BK \cdot \sin \varphi$, а высота треугольника ACD равна $DK \cdot \sin \varphi$.

Таким образом,

$$S = S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ADC} =$$

$$= \frac{1}{2}AC \cdot BK \cdot \sin \varphi + \frac{1}{2}AC \cdot DK \cdot \sin \varphi =$$

$$= \frac{1}{2}AC(BK + DK) \sin \varphi = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin \varphi = \frac{1}{2}mn \cdot \sin \varphi. \ \blacktriangledown$$

Обратите внимание на то, что указанная формула верна для любого четырёхугольника, как выпуклого, так и невыпуклого (рис. 431).

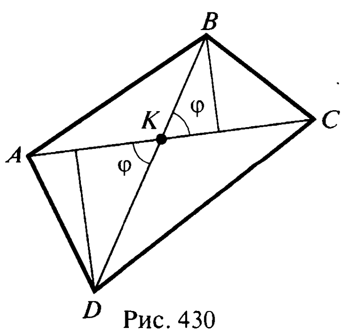


Рис. 430

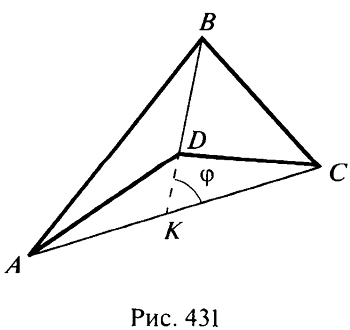


Рис. 431

Формула Герона

Приведённые пять формул для площади треугольника не исчерпывают все формулы, с помощью которых можно эту площадь находить. Любые три элемента, задающие треугольник, задают и его площадь, а значит, и соответствующую формулу. Правда, большинство подобных формул не представляют ни практического, ни теоретического интереса.

Но на одной формуле, выражающей площадь треугольника через его стороны, нельзя не остановиться. Во-первых, это наиболее естественный и удобный способ задания треугольника (по трём его сторонам). И поэтому формула интересна как в практическом, так и теоретическом отношении.

Во-вторых, несмотря на то что эта формула достаточно длинная, она является одной из самых красивых и древних формул геометрии. Речь идёт о ***формуле Герона***, названной так по имени Герона Александрийского — выдающегося древнегреческого математика, жившего в I в. н. э.

$$\boxed{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.}$$

Приведём два доказательства этой формулы.

Первое доказательство. Оно, по существу, является чисто алгебраическим и по своей идее совсем несложно. Самое главное — разумно провести необходимые преобразования. Задачу существенно облегчает то, что нам известен результат. А ведь Герон Александрийский получил его, не зная заранее, открыл (!) формулу. К тому же, он сумел получить её без использования современных алгебраических обозначений.

Будем исходить из двух известных соотношений:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C,\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Далее мы должны из второй формулы (теоремы косинусов) выразить через a, b и c сначала $\cos C$, а затем и $\sin C$ и подставить в формулу для площади.

Прежде чем перейти к реализации этого плана, заметим, что

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a+b+c-2c}{2} = \frac{2p-2c}{2} = p - c.$$

10.2

Точно так же имеем

$$\frac{b+c-a}{2}=p-a, \quad \frac{c+a-b}{2}=p-b.$$

Теперь выразим косинус через a, b и c:

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Так как любой угол в треугольнике больше 0° и меньше 180°, то $\sin C>0$. Значит,

$$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{(1-\cos C)(1+\cos C)}.$$

Теперь отдельно преобразуем каждый из сомножителей в подкоренном выражении. Имеем

$$1-\cos C=1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=$$
$$=\frac{c^2-a^2-b^2+2ab}{2ab}=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}=$$
$$=\frac{(c-a+b)(c+a-b)}{2ab}=\frac{2(p-a)(p-b)}{ab};$$

$$1+\cos C=1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=$$
$$=\frac{(a+b+c)(a+b-c)}{2ab}=\frac{2p(p-c)}{ab}.$$

Значит,

$$\sin C=\sqrt{(1-\cos C)(1+\cos C)}=$$
$$=\frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Подставляя это выражение в формулу для площади, получаем

$$S=\frac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}. ▼$$

❋ **Второе доказательство.** Это доказательство «более геометрично» и ближе к методам, которые использовали древние геометры. Нам понадобится понятие вневписанной окружности, введённое на с. 272.

Оказывается, кроме формулы $S=pr$ для площади треугольника справедлива и формула

$$S=(p-a)r_a,$$

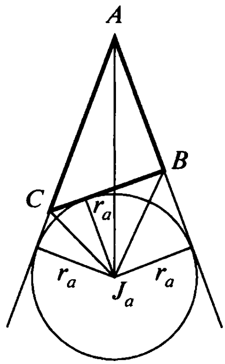


Рис. 432

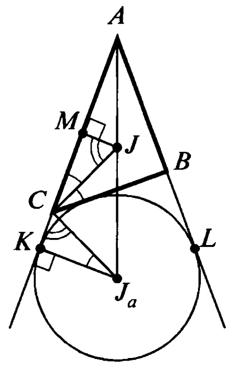


Рис. 433

где r_a — радиус вневписанной окружности, касающейся стороны BC треугольника.

Докажем эту формулу. Пусть J_a — центр вневписанной окружности, касающейся BC (рис. 432). В каждом из треугольников ABJ_a, BCJ_a, CAJ_a высота, опущенная из J_a, равна r_a. Имеем

$$S = S_{ABC} = S_{ABJ_a} + S_{ACJ_a} - S_{BCJ_a} =$$

$$= \frac{1}{2}cr_a + \frac{1}{2}br_a - \frac{1}{2}ar_a = \frac{b+c-a}{2}r_a = (p-a)r_a.$$

Теперь выведем ещё одну формулу, связывающую r и r_a.

Пусть J — центр вписанной окружности; M — точка касания вписанной окружности с AC, K — точка касания рассматриваемой вневписанной окружности с продолжением AC (рис. 433). Отрезки CM и CK мы уже находили (с. 172 задача 3): $CM = p - c$, $CK = p - b$.

Напомним, как можно найти CK. Имеем: $CK + BL = BC = a$. Значит, $AK + AL = AC + AB + BC = 2p$. Но $AK = AL$, следовательно, $AK = p$ и $CK = AK - AC = p - b$.

Рассмотрим два прямоугольных треугольника CJM и CJ_aK. В первом из них угол при вершине C равен $\frac{C}{2}$, так как CJ — биссектриса угла C, а угол при вершине J равен $90° - \frac{C}{2}$. В треугольнике CJ_aK угол при вершине C равен половине угла KCB, т. е. $\frac{1}{2}(180° - C) = 90° - \frac{C}{2}$.

Таким образом, прямоугольные треугольники CJM и J_aCK подобны, поскольку у них углы при вершинах J и C соответственно равны. Из подобия получаем

$$\frac{CM}{KJ_a} = \frac{MJ}{CK} \quad \text{или} \quad \frac{p-c}{r_a} = \frac{r}{p-b}, \quad rr_a = (p-b)(p-c).$$

Запишем следующие три равенства:

$$S = pr, \quad S = (p-a)r_a, \quad rr_a = (p-b)(p-c).$$

Перемножим два первых равенства и заменим $r \cdot r_a$ его значением:

$$S^2 = p(p-a)rr_a = p(p-a)(p-b)(p-c).$$

Получена формула Герона. ▼

Отношение площадей подобных фигур

Сформулируем и докажем одну простую, даже очевидную, но очень важную теорему.

Теорема 10.2 *(об отношении площадей подобных фигур).*

Площади подобных фигур относятся как квадраты сходственных линейных элементов.

Или, иначе, ***отношение площадей двух подобных фигур равно квадрату коэффициента подобия*** (рис. 434).

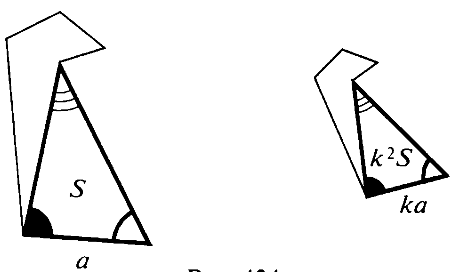


Рис. 434

Доказательство. Докажем эту теорему для треугольников. Требуемое утверждение можно получить на основании любой формулы, выражающей площадь треугольника. Пусть коэффициент подобия второго треугольника по отношению к первому равен k.

Если a — сторона первого треугольника, то ей соответствует сторона ka второго. Все углы в треугольниках соответственно равны. Утверждение теоремы следует теперь из формулы (2) для площади треугольника.

Утверждение теоремы легко распространяется на подобные многоугольники, поскольку их можно разбить на соответственно подобные треугольники.

Что же касается произвольных подобных фигур, то здесь мы ограничимся одним общим замечанием. Произвольные подобные фигуры можно сколь угодно точно приблизить соответственно подобными многоугольниками, для которых теорема доказана. На основании этого можно сделать вывод, что она верна и для произвольных подобных фигур. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1305(в). Найдите площадь равностороннего треугольника со стороной a.

1306(в). Внутри параллелограмма взята точка. Эту точку соединили со всеми вершинами параллелограмма. Докажите, что сумма площадей двух треугольников, прилежащих к противоположным сторонам параллелограмма, составляет половину его площади.

1307. Два параллелограмма расположены так, как показано на рисунке 435. Докажите, что эти параллелограммы равновелики.

1308(т). Параллелограмм разделён на шесть треугольников и один четырёхугольник, как на рисунке 436. Докажите, что сумма площадей двух чёрных треугольников равна сумме площадей двух белых треугольников, а сумма площадей двух заштрихованных треугольников равна площади четырёхугольника.

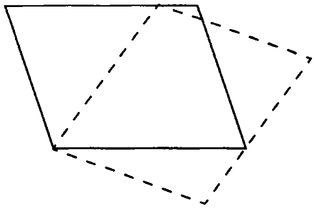


Рис. 435

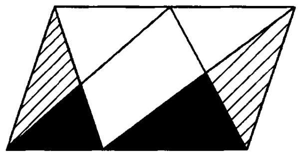


Рис. 436

1309(в). Докажите, что медианы треугольника делят его на шесть равновеликих треугольников.

1310(п). Три высоты треугольника меньше 1. Может ли его площадь быть больше 10 квадратных единиц?

1311(в). Пусть M — произвольная точка на медиане треугольника ABC, выходящей из вершины A. Докажите, что треугольники ABM и ACM равновелики.

1312(в). Имеется треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что треугольник ABM равновелик треугольнику ABC.

1313(п). Имеется треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M таких, что треугольник ABM равновелик треугольнику ACM.

1314. Найдите площадь треугольника, если известны три его стороны:

а) 5, 9 и 12; б) 5, 9 и $\sqrt{34}$; в) $\sqrt{29}$, $\sqrt{65}$ и $\sqrt{106}$.

1315. Докажите, что при любом a существует треугольник со сторонами $\sqrt{a^2 - a + 1}$, $\sqrt{a^2 + a + 1}$, $\sqrt{4a^2 + 3}$, причём его площадь не зависит от a. Найдите эту площадь.

1316(в). Диагонали трапеции делят её на четыре треугольника. Докажите, что треугольники, прилежащие к боковым сторонам, равновелики.

1317(п). Диагонали четырёхугольника делят его на четыре треугольника. Площади двух из них, прилежащих к противоположным сторонам четырёхугольника, равны. Докажите, что данный четырёхугольник трапеция или параллелограмм.

1318. В выпуклом четырёхугольнике проведены прямые, проходящие через середины его противоположных сторон. Эти прямые делят четырёхугольник на четыре четырёхугольника. Докажите, что сумма площадей двух противоположных четырёхугольников равна сумме двух других четырёхугольников (также противоположных).

1319. В треугольнике ABC прямая, параллельная BC, пересекает AB и AC соответственно в точках B_1 и C_1. Найдите площадь треугольника ABC_1, если площади треугольников ABC и AB_1C_1 равны соответственно p и q.

1320(п). Диагонали четырёхугольника делят его на четыре треугольника. Докажите, что произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух оставшихся.

1321. В трапеции проведены диагонали. Площади двух треугольников, прилежащих к основаниям трапеции, равны 4 и 9. Найдите площадь трапеции.

1322(т). На отрезке, соединяющем середины оснований AD и BC трапеции $ABCD$, взята точка M. Докажите, что треугольники AMB и CMD равновелики.

1323(т). На отрезке, соединяющем середины оснований трапеции $ABCD$, взята точка M. Докажите, что треугольники AMC и BMD равновелики.

1324(т). Найдите площадь четырёхугольника $ABCD$, если известны площади треугольников ABD, ACD и AED, где E — точка пересечения диагоналей. Площади этих треугольников равны соответственно p, q и r.

1325(т). Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка прямой внутри трапеции, параллельной её основаниям и делящей площадь трапеции пополам.

1326. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 437). Сторона квадрата и диаметры полукругов равны 1, диаметры окружностей равны $\frac{1}{2}$.

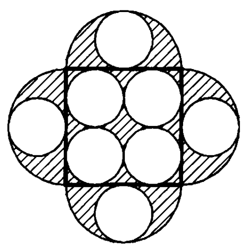


Рис. 437

1327. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника как на диаметрах построены полуокружности. Полуокружности на катетах расположены вне треугольника, а полуокружность на гипотенузе содержит треугольник. Докажите, что общая площадь частей меньших полукругов, оставшихся вне большего, равна площади треугольника.

1328. Рисунок 438 иллюстрирует известный парадокс. Квадрат 8×8 разрезан на четыре части, из которых составлен прямоугольник 13×5. Значит, $64 = 65$? Объясните, где здесь допущена ошибка.

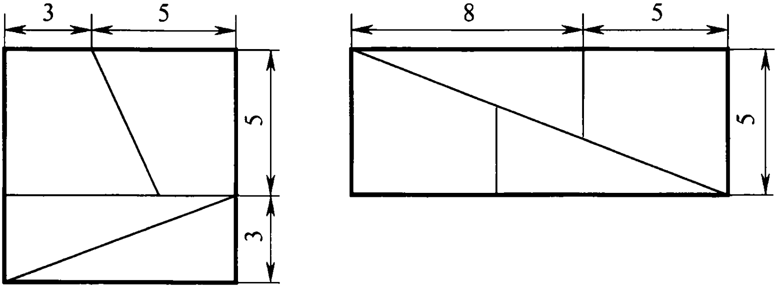


Рис. 438

1329(т). Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 3 и 4, а радиус вписанной окружности равен 1.

1330(п). Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки на основании равнобедренного треугольника до боковых сторон — величина постоянная.

1331(п). Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри выпуклого равностороннего многоугольника до его сторон величина постоянная.

1332. Найдите площадь поверхности треугольной пирамиды, все ребра которой равны 1.

1333. Найдите площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, рёбра которого равны a, b и c.

1334. В треугольной пирамиде $ABCD$ каждые два ребра, выходящие из вершины D, перпендикулярны, $DA = 1$, $DB = 2$, $DC = 3$. Найдите площади всех граней этой пирамиды.

1335. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра, выходящие из вершины D, попарно перпендикулярны. Докажите, что квадрат площади треугольника ABC равен сумме квадратов площадей треугольников DAB, DBC и DCA (теорема Пифагора для треугольной пирамиды).

1336. Имеется крест, образованный пятью равными квадратами (один квадрат в центре, а четыре других прилежат к его сторонам). Покажите, каким образом шестью такими крестами, вырезанными из бумаги, можно оклеить поверхность куба, каждая грань которого равновелика одному кресту.

10.3. Площади в теоремах и задачах

Понятие площади можно с успехом использовать при доказательстве различных теорем и решении задач, причём даже тех, в формулировках которых отсутствует упоминание о площади. Поэтому можно говорить о методе площадей в геометрии.

Но об этом методе несколько позже, а сначала мы приведём ещё одно доказательство теоремы Пифагора.

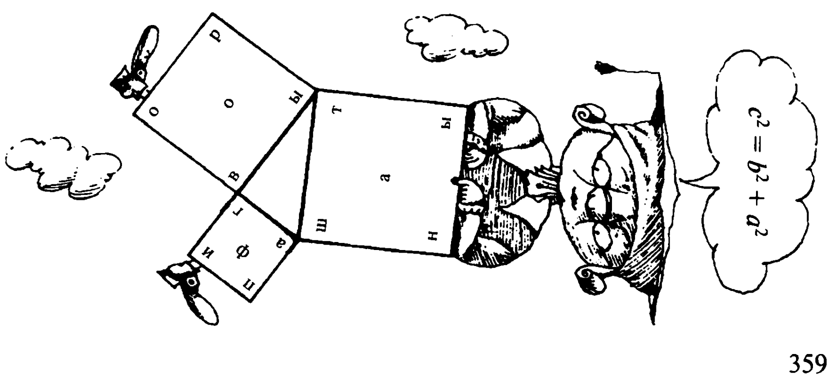
Ещё одно доказательство теоремы Пифагора

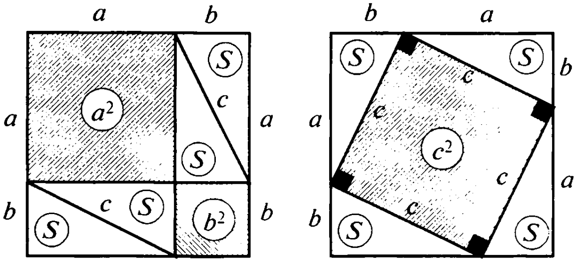
С точки зрения понятия площади теорема Пифагора утверждает следующее.

Теорема Пифагора *(другая формулировка).*

Сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на его гипотенузе.

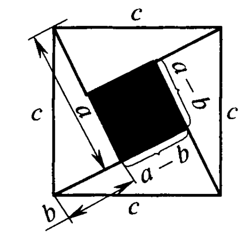
Именно так или почти так выглядела изначальная, классическая формулировка теоремы. Картинка, иллюстрирующая теорему Пифагора, была ранее своеобразным символом геометрии, а в среде российских гимназистов получила название «Пифагоровы штаны». Саму теорему они переиначили так: «Пифагоровы





$$4S + a^2 + b^2 \quad = \quad 4S + c^2$$

Рис. 439



$$c^2 = (a - b)^2 + 2ab$$

Рис. 440

штаны на все стороны равны». И в этой шуточной формулировке запоминали её на всю жизнь.

Приведём одно из многочисленных геометрических доказательств теоремы Пифагора. Оно отлично от доказательства самого Пифагора, но широко известно и даже встречается в художественной литературе. Впрочем, по сути, и доказательства как такового нет. Всё сводится к «предъявлению» двух картинок (рис. 439), посмотрев на которые вы без труда убедитесь, что теорема Пифагора доказана!.. Убедились?

Рисунок 440 демонстрирует старинное индийское доказательство теоремы Пифагора. Этот рисунок можно найти в сочинении Бхаскары (индийский математик, живший в XII в.). Оно сопровождается одним словом: «Смотри».

Метод площадей

Интересно, что метод площадей оказывается близким «родственником» метода подобия. Во всяком случае, во многих теоремах и задачах они с успехом заменяют друг друга.

Вот как доказывается с помощью понятия площади теорема о медианах треугольника.

Теорема о медианах треугольника, второе доказательство

Теорема *(о медианах треугольника).*

Медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся этой точкой в отношении 2 : 1, считая от вершин треугольника.

Доказательство. Рассуждение, которое мы сейчас приведём, основано на понятии геометрического места точек и сходно с теми, которые использовались при доказательстве теорем о серединных перпендикулярах к сторонам треугольника, биссектрисах и высотах.

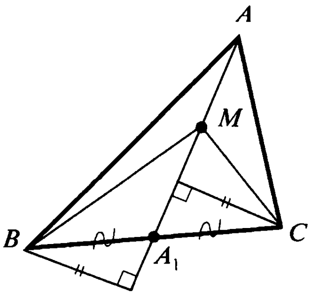


Рис. 441

С точки зрения понятия геометрического места точек медиана AA_1 треугольника ABC представляет собой геометрическое место точек M внутри треугольника, для которых треугольники ABM и ACM равновелики (см. задачу 1311).

В самом деле, так как треугольники BAA_1 и CAA_1 равновелики (у них общая высота из точки A и равные основания), то равны и их высоты к общей стороне AA_1 (рис. 441). Поэтому для любой точки M на AA_1 также будут равны высоты к AM в треугольниках BAM и CAM, а значит, эти треугольники для всех M равновелики.

Точно так же проводится и обратное рассуждение. Если точка M внутри треугольника ABC такова, что треугольники ABM и ACM равновелики, то равны и высоты этих треугольников к общей стороне AM.

Пусть AM пересекает BC в точке A_1' (рис. 442). Треугольники BAA_1' и CAA_1' равновелики, поскольку у них AA_1' общая сторона, а высоты, опущенные на неё, равны. Из равенства площадей треугольников BAA_1' и CAA_1' следует, что A_1' — середина BC, т. е. точка A_1' совпадает с A_1.

Проведём теперь в треугольнике ABC медианы AA_1 и BB_1 и обозначим через K точку их пересечения (рис. 443).

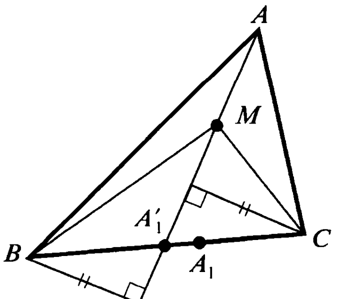


Рис. 442

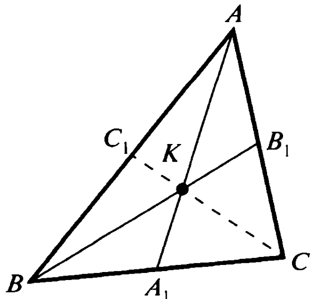


Рис. 443

10.3

Точка K лежит на соответствующих медианах, поэтому равновеликими являются треугольники ABK и ACK, а также BAK и BCK. Значит, треугольники BCK и ACK равновелики и K лежит на медиане CC_1. Таким образом, K — точка пересечения всех трёх медиан.

Далее, площадь треугольника BAK составляет $\frac{1}{3}$ площади всего треугольника, а площадь треугольника ABA_1 равна половине площади всего треугольника. Следовательно, площадь треугольника ABK равна $\frac{2}{3}$ площади треугольника ABA_1, а значит, и AK равно $\frac{2}{3}$ от AA_1, $AK : KA_1 = 2 : 1$.

Утверждение теоремы доказано полностью. ▼

Теорема о биссектрисе внутреннего угла треугольника, второе доказательство

Таким же образом, используя формулу (1) (с. 348) для площади треугольника, можно доказать и теорему о биссектрисе внутреннего угла треугольника.

Теорема *(о биссектрисе внутреннего угла треугольника).*

Если AA_1 — биссектриса угла A треугольника ABC, то

$$BA_1 : A_1C = BA : AC.$$

Доказательство. Пусть угол при вершине A в треугольнике ABC равен 2α. Рассмотрим треугольники BAA_1 и CAA_1 (рис. 444). Их площади относятся как отрезки BA_1 и A_1C, поскольку высота к этим сторонам в рассматриваемых треугольниках общая.

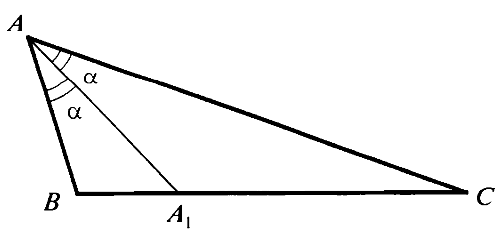


Рис. 444

С другой стороны, воспользуемся для площадей этих треугольников формулой (1). Имеем

$$\frac{BA_1}{A_1C} = \frac{S_{BAA_1}}{S_{CAA_1}} = \frac{\frac{1}{2}BA \cdot AA_1 \cdot \sin\alpha}{\frac{1}{2}AC \cdot AA_1 \cdot \sin\alpha} = \frac{BA}{AC}. \blacktriangledown$$

(См. также задачу 1342 в конце этого параграфа.)

Как видим, при доказательстве обеих теорем мы использовали один очень простой факт:

если два треугольника имеют общую вершину, а противолежащие этой вершине стороны расположены на одной прямой, то площади треугольников относятся как стороны, лежащие на одной прямой.

Этот факт является частным случаем следующего более общего утверждения, которое также необходимо запомнить.

Одна важная задача

Задача 1. *Пусть две прямые пересекаются в точке A; B и B_1 — любые две точки на одной прямой, а C и C_1 — на другой. Докажите, что*

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}.$$

Решение. Утверждение задачи следует из формулы (1) для площади треугольника. Ведь у треугольников AB_1C_1 и ABC (рис. 445) углы при вершине A либо равны, либо дополняют друг друга до 180°, т. е. в любом случае их синусы равны. Значит,

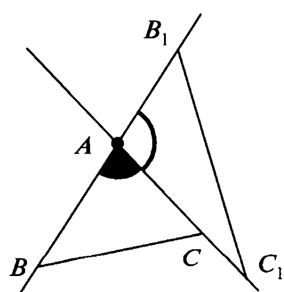


Рис. 445

$$\frac{S_{AB_1C_1}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}AB_1 \cdot AC_1 \cdot \sin B_1AC_1}{\frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC} = \frac{AB_1 \cdot AC_1}{AB \cdot AC}. \blacktriangledown$$

10.3

Ещё один метод, основанный на понятии площади

Задача 2. *Докажите, что длину биссектрисы AA_1 треугольника ABC можно вычислить по формуле*

$$l = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c},$$

где $b = AC$, $c = AB$, A — угол BAC (рис. 446).

Решение. Будем исходить из очевидного равенства

$$S_{BAC} = S_{BAA_1} + S_{CAA_1}$$

или

$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}cl\sin\frac{A}{2} + \frac{1}{2}bl\sin\frac{A}{2}.$$

Далее воспользуемся формулой $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$. (Эта формула вытекает из доказанных нами в § 7.2 формул сложения. Ниже мы докажем её «методом площадей».)

Заменив в левой части равенства $\sin A = 2\sin\frac{A}{2} \cdot \cos\frac{A}{2}$ и разделив обе его части на $\frac{1}{2}\sin\frac{A}{2}$, получим

$$2bc\cos\frac{A}{2} = (b+c)l,$$

откуда

$$l = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}. \blacktriangledown$$

* Вывод формулы синуса двойного угла

Рассмотрим равнобедренный треугольник с боковыми сторонами, равными 1, и углом 2α между ними (рис. 447). Высота, она же

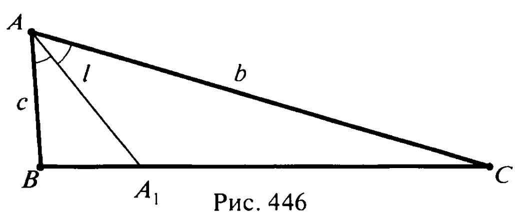


Рис. 446

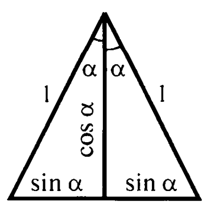


Рис. 447

биссектриса, разбивает треугольник на два равных прямоугольных треугольника с катетами $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. Площадь каждого из них равна $\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, площадь всего треугольника равна $\frac{1}{2}\sin 2\alpha$. Значит,

$$2\cdot\frac{1}{2}\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha.$$

Отношение отрезков диагонали четырёхугольника

Решим ещё одну полезную задачу.

Задача 3. *Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Тогда имеет место равенство* $\frac{AO}{CO}=\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}$.

Решение. Пусть h_1 и h_2 — соответственно высоты в треугольниках ABD и CBD, проведённые к стороне BD (рис. 448). Понятно, что $\frac{AO}{CO}=\frac{h_1}{h_2}$. Значит,

$$\frac{AO}{CO}=\frac{h_1}{h_2}=\frac{\frac{1}{2}h_1\cdot BD}{\frac{1}{2}h_2\cdot BD}=\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}.\ \blacktriangledown$$

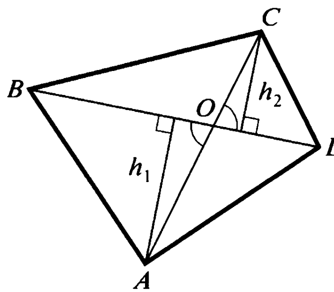


Рис. 448

✻ Одна типичная задача

В следующей задаче мы будем использовать результаты, полученные в задачах 1 и 3.

Задача 4. *В треугольнике ABC на сторонах AB, BC и CA взяты соответственно точки K, M и P так, что $AK : KB = 2 : 3$, $BM : MC = 3 : 4$, $CP : PA = 4 : 5$. В каком отношении отрезок BP делится отрезком KM?*

10.3

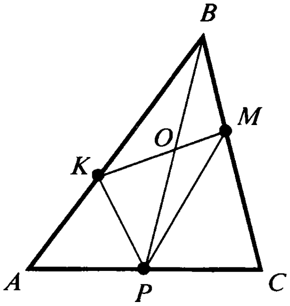


Рис. 449

Решение. Обозначим через O точку пересечения BP и KM (рис. 449). Пусть $S_{ABC} = S$. В соответствии с формулой, полученной в задаче 1, имеем

$$S_{KBM} = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{7} S = \frac{9}{35} S,$$

$$S_{CMP} = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{9} S = \frac{16}{63} S,$$

$$S_{APK} = \frac{5}{9} \cdot \frac{2}{5} S = \frac{2}{9} S.$$

Следовательно,

$$S_{KPM} = S\left(1 - \frac{9}{35} - \frac{16}{63} - \frac{2}{9}\right) = \frac{4}{15} S.$$

Теперь, в соответствии с формулой, полученной в задаче 3, имеем

$$\frac{BO}{OP} = \frac{S_{KBM}}{S_{KPM}} = \frac{9}{35} \cdot \frac{15}{4} = \frac{27}{28}. \blacktriangledown$$

✻ Составление уравнений

Формулы, выражающие площадь треугольника, могут быть с успехом использованы для составления уравнений.

Мы надеемся, что основная идея такого подхода очевидна, и поэтому рассмотрим не совсем типичный, но красивый пример.

Задача 5. *Пусть r — радиус окружности, вписанной в арбелос (что такое арбелос, объяснено на с. 305), h — расстояние от центра этой окружности до общего диаметра трёх полуокружностей, образующих арбелос. Докажите, что $h = 2r$.*

Решение. Обозначим через O_1, O_2 и O_3 центры данных полуокружностей (O_3 — центр большей из них), O — центр вписанной окружности (рис. 450). Пусть радиусы полуокружностей с центрами O_1 и O_2 равны соответственно a и b.

Далее будем следовать обычной схеме: рассмотрим треугольники O_1O_3O и O_1O_2O и выразим их стороны через a, b и r, учи-

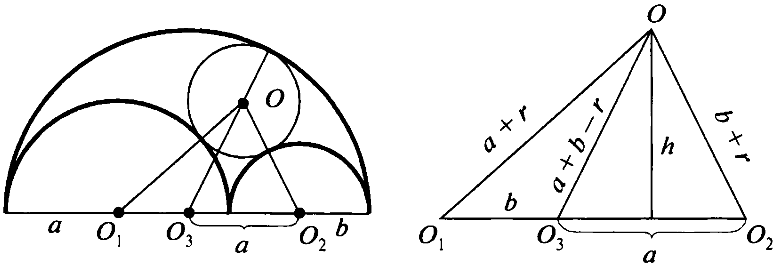


Рис. 450

тывая соответствующие касания. Имеем: $O_1O_3 = b$, $O_2O_3 = a$, $O_1O = a + r$, $O_3O = a + b - r$, $O_2O = b + r$.

Площадь каждого из рассматриваемых треугольников выразим по формуле Герона и по основной формуле и полученные выражения приравняем друг другу.

Для треугольника O_1O_3O $(p = a + b)$

$$\sqrt{(a + b)a(b - r)r} = \frac{1}{2}bh.$$

Для треугольника O_1O_2O $(p = a + b + r)$

$$\sqrt{(a + b + r)rab} = \frac{1}{2}(a + b)h.$$

Возведём полученные уравнения в квадрат и вычтем первое из второго:

$$ar((a + b + r)b - (a + b)(b - r)) = \frac{h^2}{4}((a + b)^2 - b^2),$$

$$ar(\cancel{a}b + \cancel{b^2} + br - \cancel{a}b + ar - \cancel{b^2} + br) = \frac{h^2}{4}a(2b + a),$$

$$ar^2(a + 2b) = \frac{h^2}{4}a(a + 2b), \quad h^2 = 4r^2, \; h = 2r. \blacktriangledown$$

▲■● Задачи, задания, вопросы

1337. Найдите длину биссектрисы прямого угла в прямоугольном треугольнике с катетами a и b.

1338. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ на гипотенузе AC взята точка D так, что $\angle DCA = 30°$. Найдите длину отрезка CD.

1339(в). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки K, M и P так, что $AK : KB = 1 : 2$, $BM : MC = 2 : 3$, $CP : PA = 3 : 4$. Площадь треугольника ABC равна 1. Найдите площадь треугольника KMP.

1340. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки K, M и P. Известно, что $AK : KB = 2 : 5$, а $BM : MC = 7 : 4$ и что треугольники AKP и CMP равновелики. Найдите $CP : PA$.

1341. Площадь выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равна 1. На сторонах AB, BC, CD и DA взяты точки K, M, P и L соответственно. Известно, что K — середина AB, $BM : MC = 1 : 5$, $CP : PD = 2 : 1$, $DL : LA = 1 : 3$. Найдите площадь шестиугольника $AKMCPL$.

1342(п). Биссектриса угла, внешнего по отношению к углу A треугольника ABC, пересекает прямую BC в точке A_1. Докажите, что $BA_1 : A_1C = BA : AC$.

1343. В треугольнике ABC угол C равен 30°, $BC = a$, $CA = b$. Прямая, проходящая через C перпендикулярно CB, пересекает прямую AB в точке M. Найдите длину отрезка CM.

1344(т). В прямоугольном треугольнике ABC, катеты которого CB и CA равны a и b ($a \neq b$), проведена прямая, касающаяся описанной около этого треугольника окружности в точке C. Эта прямая пересекает продолжение AB в точке D. Найдите CD.

1345. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты точки K и M так, что $AK : KB = BM : MC = 1 : 5$. В каком отношении прямая KM делит медиану, выходящую из вершины B?

1346(т). Из вершины B треугольника ABC выходят две прямые, делящие AC на три равные части. В каком отношении эти прямые делят медиану, выходящую из вершины A?

1347. Вершины A, B, C и D параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми соответственно с серединами сторон BC, CD, DA и AB. Найдите площадь параллелограмма, ограниченного этими прямыми, если площадь параллелограмма $ABCD$ равна 1.

1348(п). Рассмотрим треугольник ABC. Пусть CD — высота этого треугольника — образует углы α и β (α и β — острые углы) с AC и BC, причём точка D расположена между A и B (рис. 451). Выразив площадь треугольника ABC через стороны AC и CB и угол между ними и как сумму площадей треугольников ACD и BCD, найдите формулу для $\sin(\alpha + \beta)$.

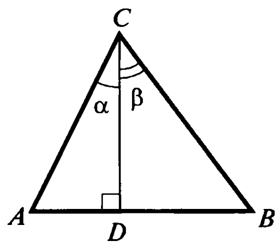


Рис. 451

1349(т). На плоскости имеется угол, равный 75°, с вершиной O. На сторонах угла взяты точки A и B так, что $OA = \sqrt{2}$, $OB = \sqrt{3}$. На луче, расположенном внутри угла и имеющем начало O, взята точка C так, что $OC = \frac{1}{2}\sqrt{6}$. Известно также, что $\angle AOC = 30°$. Докажите, что точки A, C и B лежат на одной прямой.

1350(т). Площадь прямоугольного треугольника равна S. Из середины медианы к гипотенузе этого треугольника опущены перпендикуляры на его стороны. Найдите площадь треугольника с вершинами в основаниях этих перпендикуляров.

1351(т). На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки K, M и P так, что $AK : AB = BM : BC = CP : CA = 1 : 3$. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного прямыми AM, BP и CK, составляет $\frac{1}{7}$ площади треугольника ABC.

10.3

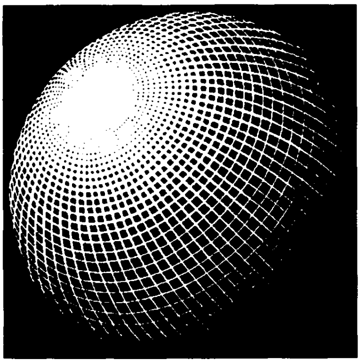
1352(т). В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB, равной c, на высоте CD, как на диаметре, построена окружность. Касательные к этой окружности, проходящие через точки A и B, пересекаются при продолжении в точке K. Чему равны касательные к окружности, выходящие из K?

1353. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$, его диагонали AC и BD пересекаются в точке M. Докажите, что

$$\frac{AM}{MC} = \frac{AB \cdot AD}{CB \cdot CD}.$$

11

Длина окружности, площадь круга



Окружность и круг с незапамятных времён манили и очаровывали человека совершенством своей формы и той таинственностью, которая всегда сопутствует совершенству. Их обожествляли, им поклонялись, приписывали различные магические и даже целебные свойства, а учёные терпеливо и настойчиво изучали их, пытаясь проникнуть в суть многочисленных загадок, связанных с этими фигурами.

Возможно, вы слышали выражение «квадратура круга», которым часто характеризуют очень сложную или неразрешимую задачу. А каков точный смысл этих слов?

Не одно поколение математиков трудилось над решением проблемы о нахождении длины окружности и площади круга. Одной из трёх древнейших задач математики является *задача о квадратуре круга, т. е. построении квадрата, площадь которого равна площади данного круга. (Две другие задачи — это задача о трисекции угла, т. е. делении его на три равные части, и удвоении куба — построении отрезка, равного ребру куба, объём которого в два раза больше объёма данного куба.) Лишь в XIX в. было доказано, что все эти три задачи неразрешимы, так как соответствующие построения с помощью циркуля и линейки невозможны (что, впрочем, не исключает возможность их решения с привлечением других средств). И хотя все эти задачи в настоящее время полностью исследованы и интереса для математики не представляют, и поныне встречаются люди, предлагающие свои решения данных задач, что следует считать скорее признаком необразованности, чем любознательности.*

Задачи, связанные с измерениями длины окружности и площади круга, порождают одну из важнейших в науке и технике постоянных — число π. Удивительным образом число π появляется также в самых различных математических и нематематических исследованиях, на первый взгляд очень далёких от геометрии, как бы подчёркивая целостность и единство науки.

11.1. Правильные многоугольники

Определение правильного многоугольника. Простейшие свойства

Многоугольник называется ***правильным****, если у него равны все стороны и все углы* (рис. 452).

Рис. 452

В частности, равносторонний треугольник является правильным, поскольку из равенства его сторон следует и равенство углов. Правильные многоугольники тесно связаны с окружностью. Если мы разделим окружность на n равных дуг и точки деления последовательно соединим, то получим правильный n-угольник, вписанный в эту окружность. Другими словами, равносторонний n-угольник, вписанный в окружность, является правильным.

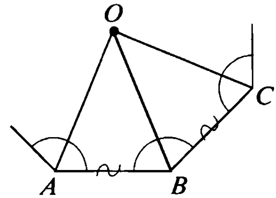


Рис. 453

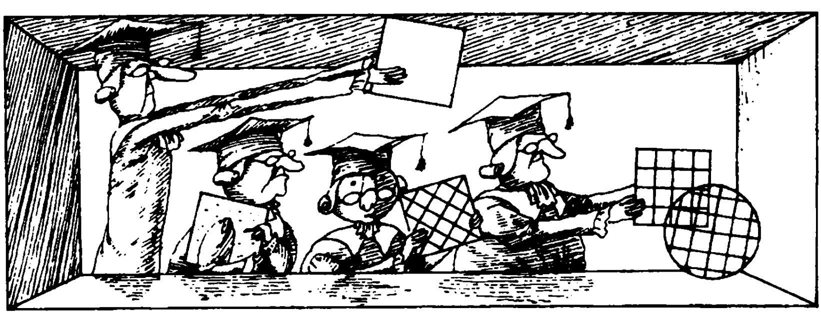
Если же через точки деления провести касательные к окружности, то получим правильный n-угольник, описанный около окружности. Верно и обратное утверждение.

Любой правильный многоугольник является одновременно вписанным и описанным, причём центры описанной и вписанной окружностей совпадают.

Докажем это. Пусть AB — одна из сторон правильного n-угольника (рис. 453). Проведём в этом многоугольнике биссектрисы углов A и B и обозначим через O точку их пересечения. В силу равенства всех углов многоугольника треугольник AOB равнобедренный, $AO = OB$.

Если теперь взять соседнюю с AB сторону этого правильного n-угольника (сторону BC) и выполнить для неё то же самое построение, то получим равнобедренный треугольник с основанием BC, равный треугольнику AOB. А так как биссектриса угла B содержит одну сторону каждого из этих равнобедренных треугольников, то они должны иметь и общую вершину O.

Таким образом, биссектрисы всех углов правильного многоугольника пересекаются в одной точке O и эта точка равноудалена от всех вершин этого многоугольника, т. е. O является центром как описанной около этого многоугольника окружности, так и центром вписанной в него окружности.



11.1

Свойство периметра правильного вписанного *n*-угольника

У правильных многоугольников имеется много интересных свойств. Рассмотрим одно из них, которое послужит основой для наших дальнейших рассуждений.

Теорема 11.1 *(экстремальное свойство правильных многоугольников).*

Среди всех n-угольников, вписанных в данную окружность, наибольший периметр имеет правильный n-угольник.

Доказательство этой теоремы основывается на вспомогательном утверждении.

Лемма.

Из двух неравных треугольников таких, что одна сторона и противолежащий угол одного из них равны стороне и противолежащему углу другого, больший периметр имеет тот, у которого больше площадь.

Доказательство леммы. Рассмотрим треугольник, у которого одна сторона равна a, а противолежащий ей угол равен φ (рис. 454). Пусть x и y — две другие стороны этого треугольника, S — его площадь.

Запишем теорему косинусов для этого треугольника:

$$x^2 + y^2 - 2xy\cos\varphi = a^2,$$

откуда

$$(x + y)^2 = 2xy(1 + \cos\varphi) + a^2.$$

Но так как $xy\sin\varphi = 2S$, то $xy = \dfrac{2S}{\sin\varphi}$. Заменим теперь в формуле, выражающей $(x + y)^2$, величину $2xy$ через S:

$$(x + y)^2 = 4S\,\frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi} + a^2.$$

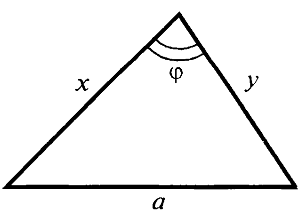


Рис. 454

Из последнего равенства видно, что чем больше S, тем больше и $x + y$, а значит, тем больше и периметр треугольника. Напоминаем, что в треугольнике $\cos\varphi > -1$. ▼

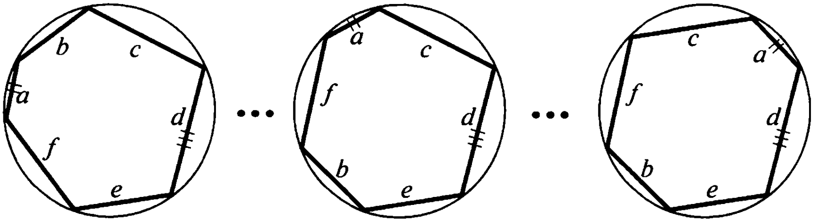


Рис. 455

Доказательство теоремы. Рассмотрим произвольный n-угольник, вписанный в окружность. Пусть этот n-угольник содержит центр окружности и не является правильным. Если a_n — сторона правильного n-угольника, вписанного в эту же окружность, то в рассматриваемом n-угольнике должны найтись стороны как бóльшие a_n, так и меньшие a_n. (Понятно, что все стороны любого вписанного n-угольника, содержащего центр окружности, не могут быть больше a_n, равно как и не могут быть меньше a_n.)

В любом вписанном многоугольнике можно переставлять любые две стороны, при этом периметр не меняется. Переставляя попарно соседние стороны рассматриваемого n-угольника, мы можем добиться, чтобы те две выделенные стороны, одна из которых больше a_n, а другая меньше a_n, оказались соседними (рис. 455).

Обозначим эти соседние стороны через AB и BC, пусть при этом $AB > a_n$, $BC < a_n$ (рис. 456). Возьмём теперь на дуге AC, содержащей точку B, точку B_1 так, что $AB_1 = a_n$. Такая точка найдётся. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим хорду BB_0, параллельную AC. Так как $AB_0 = BC < a_n$, $AB > a_n$, то окружность с центром в A и радиусом a_n непременно пересечёт дугу B_0B в точке B_1. Площадь треугольника AB_1C больше площади треугольника ABC. У этих треугольников есть общая сторона AC, а углы, ей противолежащие, равны, поскольку опираются на одну и ту же дугу. Согласно лемме, периметр треугольника AB_1C больше периметра треугольника ABC.

Но A, B и C — три соседние вершины вписанного n-угольника. Если мы рассмотрим многоугольник, все вершины которого, кроме B, совпадают с вершинами этого же n-угольника, а вершина B заменена на B_1, то новый n-угольник имеет

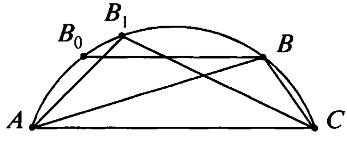


Рис. 456

больший периметр и при этом одна из его сторон равна a_n — стороне правильного вписанного n-угольника.

Если получившийся n-угольник по-прежнему не является правильным, то в нём также найдутся две стороны, одна из которых больше a_n, а другая меньше a_n. И вновь можно увеличить его периметр, сделав ещё одну сторону равной a_n. Через конечное число шагов (самое большее через $n - 1$) мы придём к правильному n-угольнику. Значит, периметр правильного n-угольника больше периметра любого n-угольника, вписанного в ту же окружность. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1354(в). Выразите сторону правильного треугольника, четырёхугольника и шестиугольника через радиус описанной окружности и через радиус вписанной окружности.

1355(в). Сторона правильного n-угольника равна a_n. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей этого n-угольника, если $n = 3, 4, 6$.

1356. Постройте правильный треугольник, четырёхугольник и шестиугольник, вписанные в данную окружность.

1357. Постройте правильный двенадцатиугольник, вписанный в данную окружность.

1358. Постройте правильный двенадцатиугольник. Постарайтесь выполнить это построение как можно точнее, а сам многоугольник изобразите достаточно большим. Проведите в нём все диагонали. Внимательно изучите получившуюся картинку. Найдите точки, отличные от центра, в которых пересекаются ровно три диагонали, четыре диагонали. Попробуйте обосновать этот экспериментальный факт.

1359. Дана окружность, причём указан её центр. Только с помощью циркуля впишите в эту окружность правильный шестиугольник и правильный треугольник.

1360(п). Дана окружность с указанным центром. Впишите в неё квадрат только с помощью циркуля (*подсказка*: можно воспользоваться тем, что треугольник со сторонами 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ является прямоугольным).

1361. В окружность радиусом R впишите правильный треугольник, в него впишите окружность, в эту окружность впишите квадрат, в квадрат вновь впишите окружность, в эту окружность впишите правильный шестиугольник и в него вновь впишите окружность. Найдите радиус последней окружности. Изменится ли ответ на вопрос задачи, если последовательность вписанных многоугольников изменить на обратную: сначала вписываем шестиугольник, затем квадрат, а потом треугольник?

1362(п). Воспользовавшись результатом задачи 945, выразите сторону правильного десятиугольника через радиус описанной окружности.

1363. Найдите сторону правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиусом R.

1364. Предложите способ построения правильного десятиугольника и правильного пятиугольника, вписанных в данную окружность.

1365(в). Все углы вписанного многоугольника равны между собой. Следует ли из этого, что этот многоугольник правильный?

1366(в). Все стороны описанного многоугольника равны между собой. Следует ли из этого, что этот многоугольник правильный?

1367(т). Все углы вписанного пятиугольника равны между собой. Докажите, что этот пятиугольник правильный.

1368(т). Докажите, что если все углы вписанного многоугольника с нечётным числом сторон равны, то этот многоугольник правильный.

1369(т). Докажите, что если все стороны описанного многоугольника с нечётным числом сторон равны, то этот многоугольник правильный.

1370(т). Все углы многоугольника равны между собой. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки внутри этого многоугольника до его сторон есть величина постоянная.

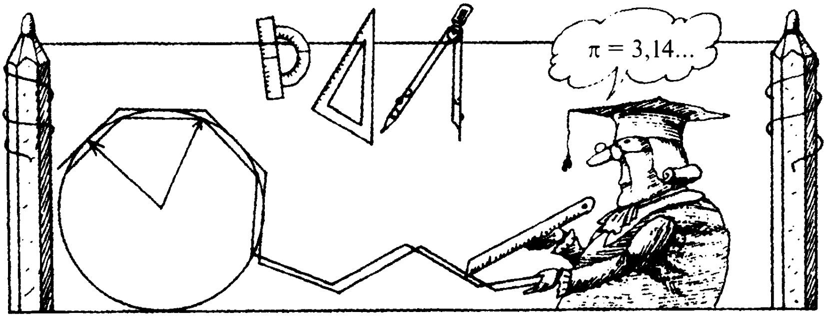
11.2. Длина окружности

Рассмотрим последовательность вписанных в некоторую окружность правильных многоугольников с возрастающим числом сторон. Можно заметить, что по мере возрастания числа сторон эти многоугольники всё более и более приближаются к кругу, их граница прижимается к окружности. Для достаточно больших n граница правильного n-угольника практически неотличима от окружности, а его периметр можно считать приблизительно равным длине окружности.

Так или примерно так размышляли геометры древности, приступая к решению задачи о нахождении длины окружности. При этом они понимали, что нет необходимости последовательно находить периметры всех правильных n-угольников: трёх-, четырёх-, пяти-, ..., n-угольников. Желательно как можно быстрее «добраться» до многоугольников с большим числом сторон.

Формулы удвоения

И здесь на помощь пришли ***формулы удвоения***. Оказывается, зная периметр правильного n-угольника, можно найти периметр правильного $2n$-угольника. Поэтому, начав, например, рассмот-



рение с шестиугольника, периметр которого известен, можно последовательно находить периметры многоугольников с числом сторон 12, 24, 48, 96, ... Безусловно, с возрастанием n резко возрастают вычислительные трудности (если, конечно, не использовать современные вычислительные средства).

С другой стороны, можно рассмотреть последовательность периметров правильных описанных многоугольников, величины которых также можно выразить через соответствующие периметры вписанных многоугольников. Эта последовательность будет уменьшаться, также приближаясь к длине окружности. Так что эта длина «зажимается» двумя последовательностями периметров.

Воспользуемся именно этим способом, тем более что мы гораздо лучше, чем наши предки, вооружены и теоретически, и практически (можем прибегнуть к помощи калькулятора).

Рассмотрим единичную окружность и обозначим через $2p_n$ периметр правильного вписанного в неё n-угольника, а через $2q_n$ — периметр правильного описанного n-угольника. Понятно, что для окружности радиусом R величины периметров надо будет умножить на R.

Имеют место следующие равенства, которые и называются формулами удвоения:

$$\boxed{p_{2n} = k_n p_n, \quad q_{2n} = k_n p_{2n},}$$

где

$$k_n = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^2}}}.$$

Доказательство. Пусть A и B — две соседние вершины правильного вписанного n-угольника, C — середина меньшей из дуг с концами A и B; A, C и B — три последовательные вершины правильного $2n$-угольника, вписанного в ту же окружность (рис. 457).

Для удобства обозначений будем считать, что $AB = a$, $AC = CB = x$. Радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника со сторонами x, x и a, равен 1. Для составления уравнения воспользуемся теоремой синусов.

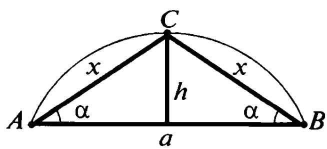


Рис. 457

11.2

Сначала найдём высоту треугольника ABC, проведённую к основанию AB. Она равна

$$h = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}.$$

Теперь можно найти синус угла при основании треугольника ABC. Получим

$$\sin\alpha = \frac{h}{x} = \frac{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}}{x}.$$

И наконец, на основании теоремы синусов имеем уравнение

$$\frac{x}{\sin\alpha} = 2, \quad \text{или} \quad \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}a^2}} = 2, \quad x^4 - 4x^2 + a^2 = 0.$$

Из этого уравнения найдём x (нам подходит меньший положительный корень, поскольку больший корень больше $\sqrt{2}$):

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} = \frac{a}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{4 - a^2}}} \cdot a.$$

Вспомним теперь, что a — это сторона правильного вписанного n-угольника, а x — сторона $2n$-угольника, т. е.

$$a = \frac{2p_n}{n}, \quad x = \frac{2p_{2n}}{2n} = \frac{p_{2n}}{n}.$$

В результате получаем

$$\frac{p_{2n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{2 + 2\sqrt{\left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^2}}} \cdot \frac{2p_n}{n},$$

или

$$p_{2n} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^2}}} \cdot p_n = k_n p_n.$$

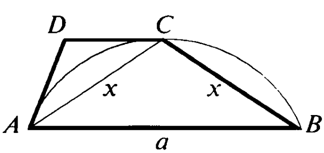


Рис. 458

Осталось доказать вторую формулу, утверждающую, что отношение q_{2n} и p_{2n} также равно k_n.

Проведём через вершины A и C правильного вписанного $2n$-угольника касательные к окружности и обозначим через D точку их пересечения (рис. 458). Точку D можно рассматривать как вершину правильного описанного $2n$-угольника, при этом A и C — середины соответствующих сторон этого $2n$-угольника.

Треугольники ADC и ACB подобны, поскольку AB и CD параллельны, значит, $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$. Но AB — сторона правильного вписанного n-угольника, AC — сторона правильного вписанного $2n$-угольника, AD — половина стороны правильного описанного $2n$-угольника. Теперь из равенства $\frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}$ получаем

$$\frac{4n \cdot AD}{2n \cdot AC} = \frac{2n \cdot AC}{n \cdot AB}, \text{ или } \frac{2q_{2n}}{2p_{2n}} = \frac{2p_{2n}}{2p_n}, \quad \frac{q_{2n}}{p_{2n}} = \frac{p_{2n}}{p_n} = k_n.$$

Обе формулы доказаны. ▼

Замечание. Методы тригонометрии позволяют получить формулы удвоения иначе (в некотором смысле быстрее и проще).

Зная радиус окружности R, мы можем выразить сторону правильного вписанного n-угольника. Она равна $2R\sin\frac{180°}{n}$.

$\Big($Соединив две соседние вершины с центром, мы получим равнобедренный треугольник, две стороны которого равны R, а угол между ними составляет $\frac{360°}{n}$.$\Big)$ Сторона описанного правильного n-угольника равна $2R\operatorname{tg}\frac{180°}{n}$. У нас $R = 1$, а $2p_n$ и $2q_n$ — периметры правильного вписанного и описанного n-угольников соответственно. Значит,

$$p_n = n\sin\frac{180°}{n}, \quad p_{2n} = 2n\sin\frac{90°}{n}, \quad q_{2n} = 2n\operatorname{tg}\frac{90°}{n}.$$

Положим $\frac{90°}{n} = \alpha$. Тогда

$$p_n = n\sin 2\alpha, \quad p_{2n} = 2n\sin\alpha, \quad q_{2n} = 2n\operatorname{tg}\alpha.$$

Далее имеем

$$\sin 2\alpha = \frac{p_n}{n}, \quad \cos 2\alpha = \sqrt{\left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^2},$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\left(1 - \frac{p_n}{n}\right)^2}} = \frac{1}{k_n}.$$

Таким образом,

$$p_{2n} = 2n\sin\alpha = \frac{2n\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{n\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = k_n p_n,$$

$$q_{2n} = \frac{2n\sin\alpha}{\cos\alpha} = k_n p_{2n}.$$

Число π

Теперь будем последовательно, начиная с $n = 6$, находить по формулам удвоения величины p_n и q_n для $n = 12, 24, 48, 96, \ldots$ $(p_6 = 3)$.

Кроме того, построим ещё одну последовательность этих же величин, соответствующую значениям $n = 4, 8, 16, 32, 64, 128$ $(p_4 = 2\sqrt{2} = 2{,}828\ldots)$. Результаты этих вычислений оформим в виде таблицы. (Советуем, не доверяя полностью приведённой таблице, проделать вычисления самостоятельно с помощью калькулятора. А вдруг где-то допущена ошибка.)

n	p_n	q_n
4	2,8284	
6	3	
8	3,0615	3,3137
12	3,1058	3,2152
16	3,1215	3,1826
24	3,1326	3,1597
32	3,1366	3,1517
48	3,1394	3,1461
64	3,1403	3,1441
96	3,1410	3,1427
128	3,1413	3,1422

Напоминаем, что в этой таблице для соответствующих значений n указаны величины полупериметров правильных вписанных в единичную окружность и описанных около неё n-угольников, обозначенных соответственно p_n и q_n.

Бросается в глаза, что с ростом n значения p_n и q_n сближаются, причём последовательность p_n возрастает, а последовательность q_n — убывает. При этом, по мере совпадения у величин p_n и q_n цифр единиц, десятых, сотых и т. д., вырисовывается очень знакомое число: 3,14... . Действительно, получающееся в результате такого процесса число и есть знаменитое π («пи»), одна из важнейших констант математики (и не только математики).

Число π равно длине единичной полуокружности. Удваивая число сторон вписанных и описанных n-угольников, мы можем получать всё больше и больше знаков числа π.

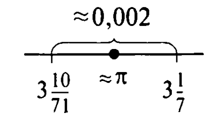


Рис. 459

И здесь нельзя не восхититься достижениями древних геометров, в частности великого Архимеда. Не располагая алгебраическим аппаратом, хитроумно распрямляя периметры вписанного и описанного 96-угольника, он пришёл к выводу, что π заключено в пределах от $3\frac{10}{71}$ до $3\frac{1}{7}$ (рис. 459). Так как разность между правой и левой границами $\left(3\frac{1}{7} - 3\frac{10}{71}\right)$ мало отличается от 0,002, то это означает, что Архимед вычислил π с погрешностью не более чем 0,001.

В дальнейшем, рассматривая многоугольники с ещё бóльшим числом сторон и комбинируя вписанные и описанные многоугольники, учёные получали всё больше и больше знаков числа π. Рекордом следует считать достижение голландского математика Ван Роумана, который во второй половине XVI в. сумел найти 17(!) знаков числа π.

В дальнейшем появились иные методы, позволявшие вычислять знаки числа π быстрее и проще. Когда же в XX в. в это «состязание» включились ЭВМ, были найдены несколько десятков тысяч знаков числа π.

Конечно, никакого практического смысла знание большого количества знаков π не имеет. Более того, в реальной жизни человек вполне обходится достижением Архимеда, полагая в практических задачах π равным 3,14. И всё же следует запомнить, что 3,14 лишь приближённое значение числа π. На всякий случай укажем его значение с большей точностью: $\pi = 3{,}14159265358...$, хотя такое количество знаков вам скорее всего не понадобится. А вот то, что $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, следует запомнить.

Длина окружности и её дуги

Итак, длина единичной окружности равна 2π. Если же мы рассмотрим окружность радиусом R, то увидим, что периметры всех вписанных и описанных n-угольников для этой окружности получаются из соответствующих периметров для единичной окружности умножением на R. Следовательно, длина окружности радиусом R равна

$$\boxed{L = 2\pi R.}$$

Таким образом, π — это отношение длины окружности к её диаметру.

Центральному углу в 1° соответствует дуга, длина которой равна $\frac{1}{360}$ длины всей окружности, т. е. $\frac{\pi R}{180}$.

Таким образом, длина дуги, соответствующей центральному углу в $n°$, или просто длина дуги в $n°$ равна (рис. 460)

$$\boxed{l_n = \frac{\pi R}{180} \cdot n.}$$

Радианная мера углов

Возьмём на плоскости какой-нибудь угол и построим несколько окружностей с центром в вершине этого угла. Каждая окружность образует при пересечении со сторонами угла дугу, длина которой пропорциональна радиусу этой окружности. Или, другими словами, для каждой дуги отношение её длины к радиусу соответствующей окружности есть величина постоянная, определяемая самим углом (рис. 461). Убедиться в этом можно, например, вписывая в соответствующие дуги подобные ломаные. Это отношение мы и примем за число, выражающее величину угла. Если же эта окружность имеет радиус, равный 1, то длина дуги равна мере соответствующего угла. Такая мера углов называется

$$l_n = \frac{\pi R}{180} n$$

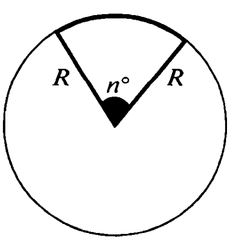


Рис. 460

$$\frac{l'''}{R_3} = \frac{l''}{R_2} = \frac{l'}{R_1} = \alpha$$

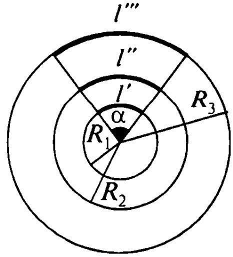


Рис. 461

радианной. Как видим, если α — радианная мера угла, то длина соответствующей дуги вычисляется по формуле

$$l = R\alpha.$$

Таким образом, ***радианная мера угла — это число, которое равно отношению длины дуги окружности, для которой этот угол является центральным, к радиусу окружности***.

Связь между градусной и радианной мерами углов

Подчеркнём, радианная мера угла — это число. Мы можем рассматривать углы величиной в 1, $\frac{5}{7}$, $\sqrt{3}$ и даже 100 (это не то же самое, что 100°). Что такое угол в 100 радиан, а этот угол существенно больше угла в 360°, вы узнаете позднее.

Так как развёрнутому углу, градусная мера которого 180°, соответствует половина окружности, то радианная мера развёрнутого угла равна π (рис. 462).

Пусть α — радианная мера угла, n — его градусная мера. Пусть, далее, l — длина дуги, соответствующая этому углу. По определению радианной меры $\frac{l}{R} = \alpha$ или $l = \alpha R$. С другой стороны, $l = l_n = \frac{\pi R}{180} n$. Приравнивая два выражения для l и деля на R, получаем (рис. 463)

$$\boxed{\alpha = \frac{\pi}{180} n}$$

— формулу для перевода градусной меры в радианную. Из неё следует формула для перевода радианной меры в градусную:

$$\boxed{n = \frac{180}{\pi} \alpha.}$$

Полагая в последней формуле $\alpha = 1$ (рис. 464), найдём, что углу в 1 радиан соответствует угол в $\frac{180}{\pi}$ (градусов) $\approx 57°17'45''$.

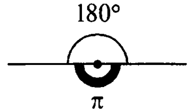


Рис. 462

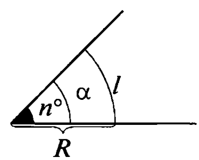


Рис. 463

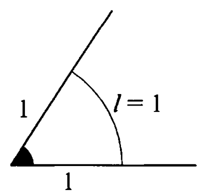


Рис. 464

▲■● Задачи, задания, вопросы

1371. В качестве приближённого значения числа π в древнем мире использовали следующие числа: $\sqrt{10}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{355}{113}$. Оцените погрешность при замене π этими числами.

1372(п). а) Представим себе, что земной шар плотно обтянут по экватору верёвкой. Допустим теперь, что длину этой верёвки увеличили на 1 м и расположили так, что она всюду одинаково отстоит от Земли.

Попробуйте, не делая вычислений, по интуиции ответить на вопрос: сможет ли в образовавшийся зазор пролезть мышь? А теперь проверьте ответ вычислением. Надо ли для этого знать радиус земного шара?

б)**(т)** Усложним задачу. «Оттянем» верёвку в каком-то месте поверхности Земли как можно дальше. Сможет ли теперь под верёвкой пройти слон? (Радиус Земли можно считать приблизительно равным 6400 км.)

1373. Найдите сторону правильного восьмиугольника, вписанного в окружность радиусом 1, и сторону правильного описанного восьмиугольника. Оцените величину π с помощью периметров этих многоугольников. (Все вычисления делайте без помощи калькулятора.)

1374. В единичной окружности проведены хорды длиной $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Как относятся длины меньших дуг, соответствующих этим хордам?

1375. Каким должен быть радиус окружности, в которой дуга в 1° имеет длину 1 м?

1376. Переведите в радианную меру углы в 10°, 30°, 50°, 70°, 100°, 135°, 175°.

1377. Переведите в градусную меру углы, величина которых в радианах равна $\frac{\pi}{20}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, 0, 8π, 0,8, 3, $\frac{1}{3}$.

1378(в). Вычислите значения всех четырёх тригонометрических функций углов величиной в $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, π.

*11.3. Длина окружности (продолжение)

Возможно, у кого-то возник ряд вопросов и даже сомнений относительно обоснованности выводов, сделанных в § 11.2. Действительно, почему при удвоении числа сторон правильных многоугольников периметры вписанных и описанных многоугольников сходятся к одному и тому же числу? Да и само существование такого числа для каждой из этих последовательностей может вызвать сомнение. На основании чего мы убеждены, что, начиная процесс удвоения с различных многоугольников, мы придём к одному и тому же результату? А если рассматривать другие последовательности многоугольников с возрастающим числом сторон? Получим ли мы в качестве длины окружности одно и то же число?

Попробуем отчасти ответить на эти вопросы. Для этого докажем теорему.

Монотонность периметров вписанных n-угольников

Теорема 11.2 *(монотонность периметров правильных n-угольников).*

Периметр правильного (n + 1)-угольника, вписанного в окружность, больше периметра правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность.

Доказательство. Из теоремы 11.1 следует, что среди всех n-угольников, вписанных в некоторую окружность, наибольший периметр имеет правильный n-угольник.

Рассмотрим правильный n-угольник, вписанный в некоторую окружность, и возьмём любую точку A на этой окружности, отличную от его вершин (рис. 465). Соединим точку A с двумя соседними вершинами этого многоугольника и удалим сторону, соединяющую эти вершины. Получим вписанный $(n + 1)$-угольник, не являющийся правильным, периметр которого больше периметра правильного n-угольника. Следовательно, периметр правильного $(n + 1)$-угольника тем более больше периметра правильного n-угольника, вписанного в ту же окружность. ▼

Таким образом, если обозначить через P_n периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность, то

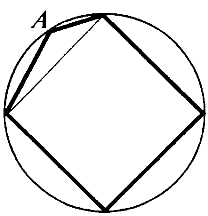
$$P_3 < P_4 < P_5 < \ldots < P_n < \ldots .$$

С другой стороны, эта последовательность не может неограниченно возрастать. Ведь периметр любого вписанного многоугольника меньше периметра любого описанного многоугольника.

Ограниченность периметров вписанных многоугольников

Объясним этот факт. Если внутри некоторого многоугольника содержится выпуклый многоугольник, то периметр внутреннего многоугольника меньше периметра внешнего. Покажем, почему это так. Проводя последовательно прямолинейные разрезы, можно из данного многоугольника вырезать любой выпуклый содержащийся в нём многоугольник (рис. 466). А при каждом разрезе периметр отрезаемой части уменьшается.

Если обозначить через П периметр любого описанного около этой же окружности многоугольника, то $P_n <$ П при всех n. Итак, $P_3 < P_4 < \ldots < P_n < \ldots <$ П.



$P_n < P_{n-1}$

Рис. 465

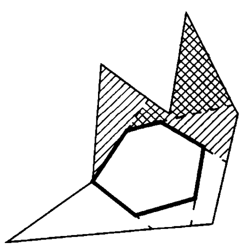


Рис. 466

Периметры правильных n-угольников и длина окружности

Таким образом, последовательность периметров правильных вписанных n-угольников является возрастающей и ограниченной. А любая последовательность, обладающая этими двумя свойствами, является *сходящейся*. Это означает, что существует такое число, обозначим его через L, к которому числа P_n по мере возрастания n неограниченно приближаются.

В рассматриваемом случае можно утверждать, что существует число L, большее любого из чисел P_n. Однако при этом L можно выбрать так, что какое бы маленькое положительное число ε мы ни взяли (маленькие положительные числа в математике часто обозначают греческой буквой ε — «эпсилон»), например $\varepsilon = 0{,}01, 0{,}001, ..., 0{,}0001, ...$, начиная с некоторого момента, т. е. с некоторого номера N, значения P_n будут отличаться от L не более чем на ε. В данном случае это означает, что при всех $n \geqslant N$ выполняются неравенства $L - \varepsilon < P_n < L$ (рис. 467). Все числа P_n, начиная с N, будут располагаться внутри отрезка с концами $L - \varepsilon$, L.

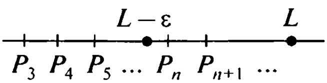


Рис. 467

Величину L мы и примем за длину окружности. Напомним, что π — это отношение длины окружности к её диаметру, т. е. $L = 2\pi R$.

Оценка разности периметров правильных описанных и вписанных n-угольников

Осталось ответить ещё на один вопрос: если рассмотреть последовательность правильных описанных n-угольников, то будут ли их периметры стремиться к той же величине L?

Можно доказать, что, в отличие от периметров вписанных многоугольников, периметры правильных описанных многоугольников монотонно уменьшаются и ограничены снизу. Из этого можно заключить, что они также стремятся к некоторой величине, а затем уже доказывать совпадение предельных величин для вписанных и описанных окружностей. Мы же поступим иначе и докажем теорему, из которой следует, что при больших n разность периметров описанных и вписанных n-угольников становится сколь угодно малой.

Теорема 11.3 (*оценка разности периметров*).

Если P_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность радиусом 1, а Π_n — периметр описанного около этой окружности правильного n-угольника, то $0 < \Pi_n - P_n < \frac{100}{n^2}$.

Доказательство. Пусть A и B — две соседние вершины правильного вписанного n-угольника (рис. 468). Проведём через A и B касательные и обозначим через C точку их пересечения. Понятно, что AC и CB равны половине стороны правильного описанного n-угольника.

Пусть $AB = 2x$, $AC = CB = y$, O — центр окружности, D — середина AB.

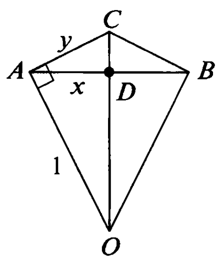


Рис. 468

В прямоугольном треугольнике OAC с прямым углом при вершине A известен катет $OA = 1$ и высота $AD = x$, опущенная на гипотенузу. Найдём катет $AC = y$. По теореме Пифагора из треугольника OAD находим

$$OD = \sqrt{OA^2 - AD^2} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Из подобия треугольников ACD и OAD имеем

$$\frac{AC}{AD} = \frac{OA}{OD}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{x} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Таким образом, $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Теперь рассмотрим разность $\Pi_n - P_n$. Поскольку x и y — половины сторон соответствующих n-угольников, имеем

$$\Pi_n - P_n = 2n(y - x) =$$

$$= 2nx\left(\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} - 1\right) = 2nx\,\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}} =$$

$$= 2nx\frac{(1 - \sqrt{1 - x^2})(1 + \sqrt{1 - x^2})}{\sqrt{1 - x^2}(1 + \sqrt{1 - x^2})} =$$

$$= 2nx\frac{1 - (1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2} = \frac{2nx^3}{\sqrt{1 - x^2} + 1 - x^2}.$$

Так как x — половина стороны правильного вписанного n-угольника, то с ростом n величина x уменьшается, а знаменатель дроби растёт. Но уже при $n = 4$ имеем $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и знаменатель больше 1, следовательно,

$$\Pi_n - P_n \leqslant 2nx^3 \quad \text{при} \quad n \geqslant 4.$$

Далее заметим, что $2nx$ — периметр правильного вписанного в единичную окружность n-угольника. Значит, $2nx < 2\pi$ и $x < \frac{\pi}{n}$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\Pi_n - P_n < 2\pi^3\frac{1}{n^2} < 2 \cdot (3{,}2)^3 \cdot \frac{1}{n^2} < \frac{100}{n^2}.$$

Из проведённых рассуждений следует, что это неравенство выполняется при $n \geqslant 4$; при $n = 3$ его легко проверить непосредственно. (Сделайте это самостоятельно.) ▼

На самом деле указанная разность периметров меньше (примерно втрое) при больших n. Главным является то, что теперь можно сделать важный вывод.

Последовательность периметров правильных описанных n-угольников неограниченно приближается к той же самой величине L — длине окружности, что и последовательность периметров правильных вписанных n-угольников.

11.4. Площадь круга и его частей

После того как вы научились вычислять длину окружности, не составит большого труда вывести формулу для вычисления площади круга.

11.4

Площадь круга

Рассмотрим круг радиуса R. Опишем около него правильный n-угольник. Если P_n — периметр этого n-угольника, а S_n — площадь, то имеет место равенство

$$S_n = \frac{1}{2} P_n R.$$

При возрастании n, как вы уже знаете, величина P_n убывает и стремится к $L = 2\pi R$ — длине окружности. Последовательность S_n с ростом n также убывает и стремится к величине $S = \pi R^2$, которую мы принимаем равной площади круга (рис. 469). Нетрудно понять, что то же самое значение для площади круга мы получаем, рассматривая последовательность площадей правильных вписанных n-угольников. При этом, если последовательность площадей описанных многоугольников убывающая, то последовательность площадей вписанных многоугольников возрастающая. Итак, площадь круга вычисляется по формуле

$$\boxed{S = \pi R^2.}$$

Площадь сектора

Рассмотрим теперь сектор, соответствующий центральному углу величиной α (α — радианная мера угла) (***сектор*** — это часть круга, ограниченная двумя радиусами и дугой, на которую они опираются). Если S_α — площадь этого сектора, то имеет место равенство $\frac{S_\alpha}{S_\pi} = \frac{\alpha}{\pi}$ (площади двух секторов относятся как их центральные углы, S_π — площадь полукруга).

Таким образом (рис. 470),

$$\boxed{S_\alpha = \frac{\alpha}{2} R^2.}$$

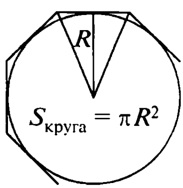


Рис. 469

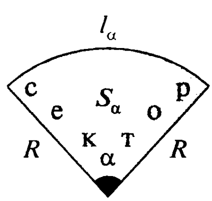


Рис. 470

Если $l_\alpha = \alpha R$ — длина дуги, соответствующей центральному углу α, то

$$\boxed{S_\alpha = \frac{1}{2} l_\alpha R.}$$

Площадь сегмента

Для вычисления площади сегмента (***сегмент — это часть круга, ограниченная хордой и соответствующей дугой***) удобно рассматриваемую площадь представить в виде разности площадей сектора и треугольника (рис. 471). В результате для площади Q_α сегмента, дуге которого соответствует центральный угол α, получим следующую формулу:

$$\boxed{Q_\alpha = \frac{1}{2}R^2\alpha - \frac{1}{2}R^2\sin\alpha = \frac{R^2}{2}(\alpha - \sin\alpha).}$$

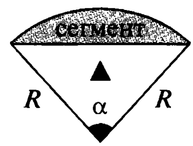


Рис. 471

(Кстати, из этой формулы следует, что при всех α имеет место неравенство $\sin\alpha < \alpha$.)

▲■● Задачи, задания, вопросы

1379. Запишите в порядке возрастания следующие величины: площадь круга радиусом 1, площади правильных шести- и двенадцатиугольников, вписанных и описанных по отношению к этому кругу.

1380. Какая из фигур имеет бóльшую площадь и на сколько: круг, ограниченный окружностью, длина которой равна 1, или квадрат с периметром 1?

1381. Найдите сторону правильного шестиугольника, равновеликого кругу радиусом 3.

1382. В круге радиусом 1 проведена хорда длиной 1. Пусть S — площадь наименьшего из получившихся сегментов. Чему равен центральный угол сектора, имеющего площадь S?

1383(п). Найдите площадь общей части двух кругов с радиусами 1 и $\sqrt{3}$, расстояние между центрами которых равно 2.

1384(т). В круге радиусом 1 проведены две непересекающиеся хорды длиной $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$. Они разделили круг на три части. При этом площадь наибольшей части больше чем 2,3. Найдите площадь наименьшей части.

1385. Найдите площадь общей части четырёх единичных кругов, центры которых находятся в вершинах единичного квадрата.

1386(т). В треугольнике ABC угол B равен 140°, высота к стороне AC равна 1. Рассмотрим круг радиусом $\sqrt{2}$ с центром в точке B. Найдите площадь общей части треугольника ABC и круга.

1387(п). На плоскости дан отрезок AB и прямая l, перпендикулярная AB. Пусть M — произвольная точка на l. Докажите, что площадь фигуры, заметаемой AB при вращении вокруг M, не зависит от положения точки M.

1388. Докажите, что площадь арбелоса Архимеда может быть вычислена по формуле $\frac{1}{4}\pi CD^2$ (рис. 472).

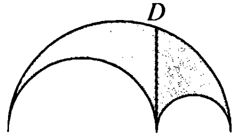


Рис. 472

1389(т). Вершины правильного шестиугольника со стороной 2 служат центрами кругов радиусом $\sqrt{2}$. Найдите площадь части шестиугольника, расположенной вне этих кругов.

1390. Докажите, что при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ имеет место неравенство $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$.

1391. Возможно ли, чтобы сумма радиусов некоторого числа кругов была больше 100, а сумма их площадей меньше 0,01?

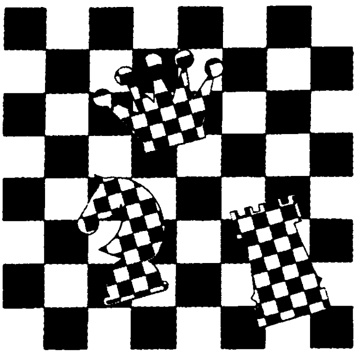
1392. Точки A, B, C, D лежат на одной прямой и следуют друг за другом в указанном порядке, причём $AD = a$, $BC = b$. Найдите площадь фигуры, ограниченной полуокружностями с диаметрами AB, AC, BD и CD, при этом первые две полуокружности расположены по одну сторону от прямой AD, а две последние — по другую сторону.

1393(т). Докажите неравенство:

$$2500\pi - 100 < \sqrt{1 \cdot 199} + \sqrt{2 \cdot 198} + \dots$$
$$\dots + \sqrt{99 \cdot 101} < 2500\pi.$$

12

Координаты и векторы



Координатный метод, возникновение которого обычно связывают с именем великого французского математика и философа Рене Декарта, жившего в первой половине XVII в., произвёл настоящий переворот в геометрии и не только в ней. Сегодня в любой естественной или технической науке, в теоретических и практических исследованиях очень широко используются координаты.

Метод координат даёт универсальный способ поставить в соответствие геометрическим объектам — фигурам, линиям и т. д. — те или иные алгебраические выражения или соотношения. Иначе, метод координат — это способ перевода с геометрического языка на язык алгебры, после чего геометрические проблемы превращаются в алгебраические и мы получаем возможность использовать для решения геометрических задач алгебраические методы.

12.1. Декартовы координаты на плоскости

Ось

Рассмотрим две взаимно перпендикулярные прямые на плоскости. Обозначим через O точку пересечения этих прямых и будем считать, что каждая из них является числовой осью, или ***осью координат***, с началом в точке O и равными единичными отрезками. При этом одну из этих прямых будем считать первой и назовём *осью иксов* или ***осью абсцисс***, а вторую прямую — *осью игреков* или ***осью ординат*** (рис. 473).

Такая пара перпендикулярных прямых задаёт на плоскости ***декартову систему координат***.

Теперь по достаточно простому правилу каждой точке плоскости можно поставить в соответствие пару чисел, а вернее, упорядоченную пару чисел — ***координаты*** этой ***точки***.

Пусть A — произвольная точка плоскости, A_1 — проекция A на ось абсцисс, A_2 — проекция A на ось ординат. Первая координата точки A, или абсцисса точки A (будем обозначать её буквой x), является положительной, если A_1 лежит на положительной полуоси оси абсцисс, и отрицательной — в противоположном случае. Абсолютная величина абсциссы равна длине отрезка OA_1. Аналогично точка A_2 задаёт вторую координату — ординату точки A — будем обозначать её буквой y (рис. 474).

Тот факт, что x и y — соответственно абсцисса и ордината точки A, будем записывать следующим образом: A $(x; y)$. Понятно, что точке O соответствуют две нулевые координаты: O $(0; 0)$.

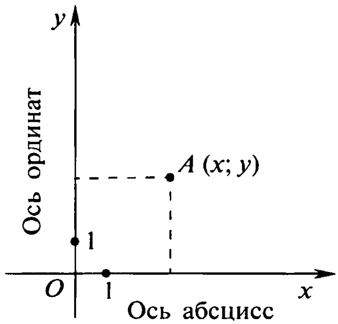


Рис. 473

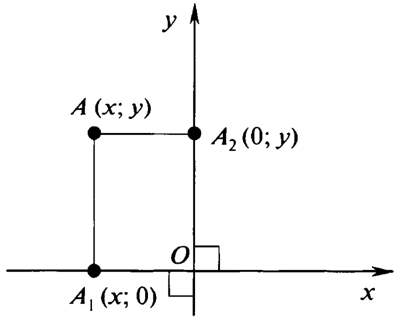


Рис. 474

Введя таким образом координаты на плоскости, мы установили взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и упорядоченными парами чисел. Выражение «взаимно однозначное соответствие» в данном случае означает, что каждой точке плоскости соответствует пара чисел, а каждой паре чисел — точка плоскости. При этом важно, в каком порядке записаны эти числа. Так, точка $M(2; 3)$ и точка $K(3; 2)$ — различные точки плоскости. Именно этот факт обозначает прилагательное «упорядоченная».

Для всех точек оси абсцисс ордината равна нулю, а для точек оси ординат нулю равна абсцисса.

Формула расстояния между двумя точками

Пусть A и B — две точки плоскости, координаты которых в декартовой системе координат: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, тогда

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.}$$

Указанная формула, по существу, является теоремой Пифагора, записанной в координатной форме. В самом деле, пусть A_1 и B_1 — соответственно проекции точек A и B на ось абсцисс, M — проекция A на прямую BB_1 (рис. 475).

Имеем: AB — гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами AM и BM. Но $AM = A_1B_1 = |x_2 - x_1|$. Точно так же $BM = |y_2 - y_1|$.

Следовательно,

$$AB^2 = AM^2 + BM^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

и формула доказана.

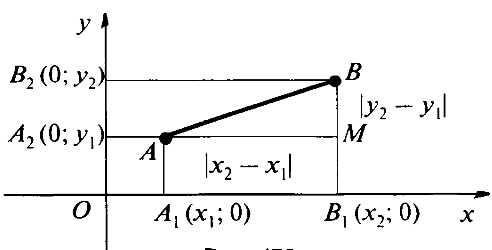


Рис. 475

Задачи, задания, вопросы

1394. Постройте в данной декартовой системе координат точки $A\ (2;\ 7)$; $B\ (-2;\ 7)$; $C\ (-7;\ 2)$; $D\ (-7;\ -2)$.

1395. Найдите расстояние между точками A и B, если:
а) $A\ (1;\ 7)$, $B\ (-2;\ 4)$;
б) $A\ (1{,}2;\ 2{,}1)$, $B\ (1{,}1;\ -1{,}9)$;
в) $A\ (3;\ 0)$, $B\ (0;\ 4)$;
г) $A\ (0{,}17;\ -0{,}04)$, $B\ (0{,}05;\ 0{,}01)$.

1396(в). Укажите все точки $A(x;\ y)$ координатной плоскости, для которых:
а) $x \geqslant 0$, $y < 0$;
б) $x > 1$, $y \leqslant -1$;
в) $x = 1$;
г) $xy + 1 = x + y$;
д) $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

1397. Найдите все точки оси абсцисс, удалённые на расстояние, равное 5, от точки $A\ (14;\ 3)$.

1398. Рассмотрим на координатной плоскости точки $A\ (-2;\ 5)$ и $B\ (4;\ -3)$. Найдите координаты точки M, если:
а) M — середина AB;
б) M — точка на отрезке AB такая, что $AM : MB = 1 : 2$;
в) M точка на прямой AB такая, что $AM : MB = 1 : 2$;
г) $AM = MB = 10$;
д) $AM^2 + BM^2 = 50$.

12.2. Уравнение линии

Окружность и прямая на координатной плоскости

Всякое уравнение, связывающее между собой x и y, задаёт на координатной плоскости, как правило, ***линию***. Так, например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ задаёт такие точки плоскости, для которых расстояние до начала координат равно 1. Ведь $x^2 + y^2$ — это квадрат расстояния от точки $M\ (x;\ y)$ до начала координат — точки $O\ (0;\ 0)$. Следовательно, $x^2 + y^2 = 1$ — это уравнение окружности единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 476).

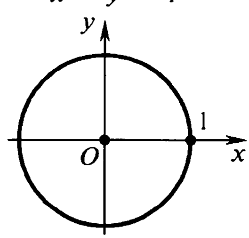


Рис. 476

12.2

В первой фразе параграфа мы употребили выражение «как правило». Это значит, что наше утверждение допускает исключения. Например, уравнение $(x - 1)^2 + |y + 2| = 0$ определяет одну точку M (1; –2), а уравнение $x^2 + y^2 - 2y + 3 = 0$ вообще не имеет решений и задаёт на координатной плоскости пустое множество. Можно придумать уравнения, которым соответствует полуплоскость или угол. Возможны и другие исключения, но ещё раз подчеркнём, как правило, каждому уравнению соответствует на координатной плоскости некоторая линия.

Здесь обычно возникают две взаимно обратные задачи.

1. По заданному уравнению, связывающему x и y, построить соответствующую линию. С подобными задачами вы часто имеете дело на уроках алгебры. К ним относятся такие типичные алгебраические задачи, как задачи на построение графиков функций.

2. Найти уравнение, задающее данную линию плоскости. С такими проблемами мы сталкиваемся в тех случаях, когда хотим использовать метод координат для решения той или иной геометрической задачи.

Мы, по существу, имеем дело лишь с двумя плоскими линиями: прямой и окружностью, поэтому нас будут интересовать уравнения, задающие именно эти линии.

Уравнение окружности

Определение окружности, данное в § 2.4, легко переводится на координатный язык.

Пусть точка Q — центр окружности (привычной буквой O мы обозначили начало координат) имеет координаты (a; b), R — радиус окружности, M (x; y) — некоторая точка на окружности (рис. 477). По определению окружности $QM = R$.

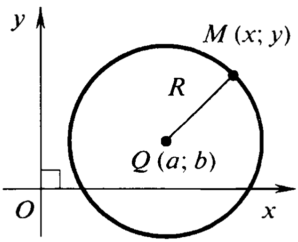


Рис. 477

Теперь остаётся выразить MQ по известной формуле через координаты точек M и Q и возвести равенство в квадрат. В результате имеем

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.}$$

Получившееся уравнение и является ***уравнением окружности с центром в точке*** Q (a; b) и радиусом R.

Координаты любой точки $M(x;\ y)$ окружности удовлетворяют этому уравнению, а любая точка $M(x;\ y)$, координаты которой удовлетворяют этому уравнению, лежит на окружности.

При решении геометрических задач координатным методом в большинстве случаев не ограничиваются первым этапом — переводом на алгебраический язык и решением алгебраической задачи. Мы должны также суметь дать геометрическое толкование полученному алгебраическому результату, в частности, увидеть в получившемся соотношении уравнение окружности и в том случае, когда это уравнение записано в нестандартном виде.

Следует запомнить, что уравнение

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

задаёт либо окружность, либо точку, либо пустое множество. Чтобы ответить на вопрос, какой именно случай имеет место для данного конкретного уравнения, надо выделить полные квадраты по x и y. С этим приёмом вы уже встречались на уроках алгебры при изучении квадратного трёхчлена. Например, уравнение $x^2 + y^2 - 4x + 2y = 0$ можно преобразовать так:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 2y + 1) - 5 = 0, \qquad (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5.$$

Таким образом, рассматриваемое уравнение задаёт окружность с центром в точке $Q\,(2;\ -1)$ и радиусом $\sqrt{5}$.

Уравнение прямой, проходящей через начало координат

Выведем теперь уравнение прямой линии. Начнём со случая прямой, проходящей через начало координат.

Пусть угол, образованный рассматриваемой прямой с положительным направлением оси абсцисс, равен α, причём он измеряется против движения часовой стрелки (рис. 478), так что величина α изменяется от $0°$ до $180°$, при этом мы исключаем из рассмотрения случай, когда прямая перпендикулярна оси абсцисс, т. е. совпадает с осью ординат. Положим $k = \text{tg}\ \alpha$. Величина k положительна,

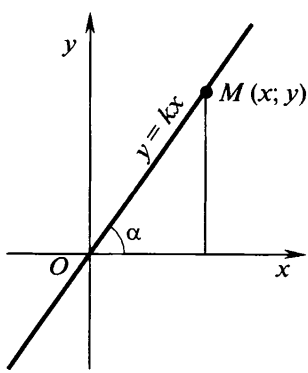


Рис. 478

когда прямая проходит в I и III четвертях, и отрицательна, если эта прямая проходит во II и IV четвертях.

Величина k называется угловым коэффициентом прямой.

Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка прямой. По определению тангенса $k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, или

$$\boxed{y = kx.}$$

Полученное соотношение является ***уравнением прямой, проходящей через начало координат***. В таком виде можно записать уравнение любой прямой, кроме прямой, перпендикулярной оси абсцисс, т. е. оси ординат, которая имеет уравнение $x = 0$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим теперь произвольную прямую l, не перпендикулярную оси абсцисс. Пусть эта прямая пересекает ось ординат в точке $P(0; b)$ (рис. 479). Проведём через начало координат параллельную ей прямую l_1. Рассмотрим две точки $M(x; y)$ и $M_1(x; y_1)$ с одинаковой абсциссой x, лежащие соответственно на прямых l и l_1.

Как вы знаете, $y_1 = kx$, где k — угловой коэффициент прямой l_1 (а также l). Четырёхугольник $OPMM_1$ является параллелограммом. Следовательно, ордината точки M получается из ординаты точки M_1 так же, как ордината точки P получается из

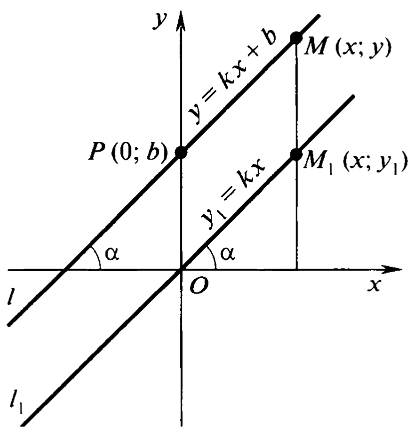


Рис. 479

ординаты точки O — прибавлением b, т. е. $y = y_1 + b$. Таким образом, ***уравнение прямой l с угловым коэффициентом*** имеет вид

$$\boxed{y = kx + b.}$$

В таком виде можно записать уравнение любой прямой, за исключением прямых, перпендикулярных оси абсцисс. Если прямая перпендикулярна оси абсцисс, то все её точки имеют одну и ту же координату x и её уравнение имеет вид $x = a$.

Ещё раз напомним геометрический смысл параметров k и b, входящих в полученное уравнение прямой:

k — угловой коэффициент прямой, равный тангенсу угла, образованного прямой с положительным направлением оси абсцисс (угол измеряется против часовой стрелки);

b — ордината точки пересечения данной прямой с осью ординат.

Общее уравнение прямой

Можно сделать вывод, что любое уравнение первой степени, т. е. уравнение вида

$$\boxed{Ax + By + C = 0,}$$

в котором A и B не равны нулю одновременно, представляет собой уравнение прямой линии (рис. 480). Данное уравнение называют ***общим уравнением прямой***.

При этом если $B \neq 0$, то, выразив y через x, можно это уравнение привести к виду $y = \frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$, или $y = kx + b$, т. е. к уравнению с угловым коэффициентом. Если же $B = 0$, то получаем, что уравнение прямой, перпендикулярной оси абсцисс, имеет вид $x = -\frac{C}{A}$.

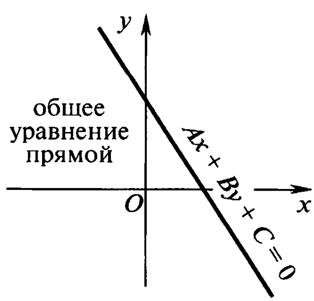


Рис. 480

Отметим, что если в общем уравнении $Ax + By + C = 0$ заменить коэффициенты на λA, λB и λC для некоторого $\lambda \neq 0$, то прямая, задаваемая уравнением, не изменится.

Задачи, задания, вопросы

1399(в). Напишите уравнение окружности, если дан её центр — точка Q и точка A на окружности:
а) $Q(-1; 2)$, $A(0; 5)$;
б) $Q(2; 0)$, $A(-1; -2)$;
в) $Q(1; -2)$, $A(-1; 2)$.

1400(в). Найдите уравнение прямой, проходящей через точку A и параллельной прямой l, если:
а) $A(2; -3)$, уравнение прямой l имеет вид $y = 2x - 5$;
б) $A(1; 1)$, уравнение прямой l имеет вид $y = -3x + 1$;
в) $A(3; 0)$, уравнение прямой l имеет вид $3x - 2y = 0$.

1401(п). Точка M принадлежит линии, задаваемой уравнением I, а точка K принадлежит линии, задаваемой уравнением II. Найдите наибольшее и наименьшее значения расстояния между точками M и K, если уравнения I и II имеют вид:

	I	II
а)	$x^2 + y^2 = 5$,	$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 1$;
б)	$x^2 + y^2 - 2x = 0$,	$x^2 - 3x + y^2 + y = 100$;
в)	$x^2 + y^2 - x + y - 1 = 0$,	$x^2 + y^2 + 2x - y - 1 = 0$;
г)	$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 5 = 0$,	$x^2 + y^2 - 3x + y - 5 = 0$.

1402(в). Определите вид линии, задаваемой уравнением:
а) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 13 = 0$;
б) $x^2 + y^2 - x - y + 1 = 0$;
в) $x^2 + y^2 - 3x - 5y - 7 = 0$;
г) $y - 1 = \sqrt{5 - x^2}$;
д) $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 5x^2 - 5y^2 + 4 = 0$.

1403. Найдите уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB, если точка A имеет координаты $(-2; 3)$, а координаты точки B $(1; -4)$.

1404(п). Даны точки A (1; 2) и B (3; 0). Найдите геометрическое место точек M таких, что:
а) $AM^2 + BM^2 = 2AB^2$;
б) $AM^2 - BM^2 = AB^2$;
в) $AM = 2BM$;
г) $AM^2 + BM^2 - AM \cdot BM = AB^2$.

1405(п). Докажите, что если k_1 и k_2 — угловые коэффициенты двух прямых, не параллельных осям координат, то условие их перпендикулярности задаётся равенством $k_1 \cdot k_2 = -1$.

1406(п). Найдите уравнение прямой, которая проходит через точки A и B, если:
а) A (2; −1), B (−2; 1);
б) A (3; 0), B (0; 4);
в) A (4; 3), B (3; 2).

1407. Найдите расстояние от точки A до прямой l, если:
а) A (0; 0), l: $y = x + 1$;
б) A (1; 4), l: $y = 3x - 2$;
в) A (−2; −1), l: $2x + 3y + 1 = 0$.

12.3. Векторы на плоскости

Определение вектора

Рассмотрим на плоскости две точки A и B. Обозначим через $\overrightarrow{AB}$ ***вектор*** AB, понимая под этим направленный отрезок AB, т. е. отрезок, у которого точка A является ***началом***, а точка B — ***концом*** (рис. 481).

Таким образом, точки A и B, ограничивающие вектор $\overrightarrow{AB}$, играют различную роль. Именно в этом в первую очередь и состоит главное различие между вектором $\overrightarrow{AB}$ и отрезком AB.

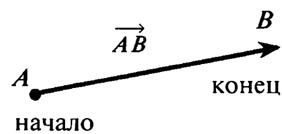


Рис. 481

12.3

Две точки A и B плоскости задают два различных вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BA}$ одинаковой длины и противоположно направленные.

Равенство двух векторов

Два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, расположенные на одной прямой, считаются равными, если равны отрезки AB и CD, т. е. равны длины этих векторов, а лучи AB и CD задают одинаковые направления.

Если же векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ не расположены на одной прямой, то они считаются равными, если четырёхугольник $ABDC$ (вершины рассматриваются в данном порядке) является параллелограммом (рис. 482).

Таким образом, мы можем вектор не только перемещать вдоль соответствующей прямой, но и переносить его начало в любую точку плоскости. Следовательно, для обозначения вектора нет необходимости указывать его начало и конец, и можно использовать обозначения вида $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{l}$ и т. п., помещая в случае необходимости начало соответствующего вектора в удобную точку плоскости.

Для длины вектора $\vec{a}$ будем использовать обозначение $|\vec{a}|$ — читается: «длина вектора $\vec{a}$» или «***модуль*** вектора $\vec{a}$» (рис. 483).

Нулевым *называется вектор, длина которого равна нулю (его начало и конец совпадают).* Обозначается нулевой вектор $\vec{0}$.

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно расположить вдоль одной прямой, то эти векторы будем называть ***коллинеарными***, т. е. лежащими на одной прямой.

Нулевой вектор мы считаем коллинеарным любому вектору.

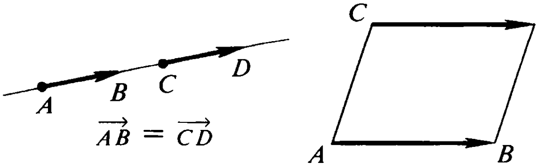
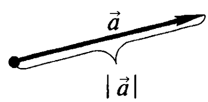


Рис. 482



$|\vec{a}|$ — модуль вектора $\vec{a}$

Рис. 483

Умножение вектора на число

Для любого вектора $\vec{a}$ и любого числа k определим вектор $\vec{b} = k\vec{a}$, являющийся произведением вектора $\vec{a}$ на число k, с помощью следующего простого правила:

вектор $\vec{b}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$, причём его направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $k > 0$, и противоположно, если $k < 0$, **при этом**

$$|\vec{b}| = |k| \cdot |\vec{a}|.$$

(Если $k = 0$, то получаем нулевой вектор, т. е. точку.) Таким образом, длина вектора $\vec{b}$ в $|k|$ раз больше длины вектора $\vec{a}$. Если $k = -1$, то получаем вектор $-\vec{a}$, равный по длине вектору $\vec{a}$, но противоположно направленный (рис. 484). В частности, это означает, что $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$.

Сложение векторов

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ будем называть вектор $\vec{c}$ ($\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$), полученный по следующему правилу (***правило треугольника***):

расположим векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ так, чтобы начало вектора $\vec{b}$ совпадало с концом вектора $\vec{a}$ (рис. 485); ***тогда началом вектора $\vec{c}$ будет начало вектора $\vec{a}$, а его концом — конец вектора $\vec{b}$.***

Из определения сложения следует, что для любых A, B и C имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

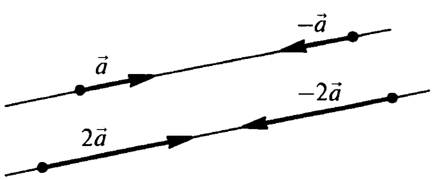


Рис. 484

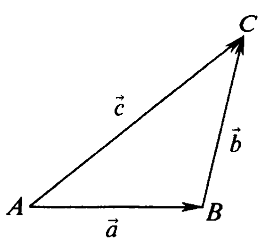


Рис. 485

12.3

Правило сложения двух неколлинеарных векторов можно сформулировать иначе, в виде ***правила параллелограмма***:

пусть начала векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ совпадают; рассмотрим параллелограмм, у которого эти векторы являются соседними сторонами; тогда суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c}$ — диагональ этого параллелограмма, с началом в общей для векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ точке (рис. 486).

Из определения суммы векторов (см. правило параллелограмма) следует равенство

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

Вычесть из $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$ — это значит прибавить к $\vec{a}$ вектор, противоположный $\vec{b}$, т. е.

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

Неравенство треугольника в векторной форме записывается следующим образом:

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|.$$

При этом равенство имеет место лишь для коллинеарных и одинаково направленных векторов.

Координаты вектора

Пусть A и B — две точки координатной плоскости. Их координаты соответственно $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Тогда ***координаты вектора*** $\overrightarrow{AB}$ таковы: $(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Они получаются вычитанием из координат конца вектора координат его начала (рис. 487).

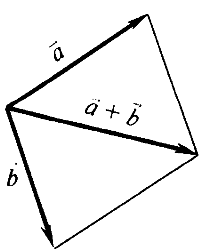


Рис. 486

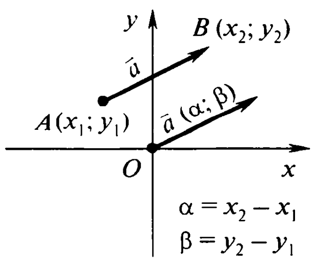


Рис. 487

Заметим, что в какой бы точке плоскости мы ни поместили начало вектора, его координаты будут одними и теми же.

При умножении вектора на число его координаты соответственно умножаются на это число, т. е. если вектор $\vec{a}$ имел координаты (α; β), то координатами вектора $k\vec{a}$ будут ($k\alpha$; $k\beta$).

При сложении векторов их координаты соответственно складываются, т. е. если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имели соответственно координаты (α_1; β_1) и (α_2; β_2), то координатами вектора $\vec{a} + \vec{b}$ являются ($\alpha_1 + \alpha_2$; $\beta_1 + \beta_2$). (Проверьте это свойство самостоятельно.)

Теорема о единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам

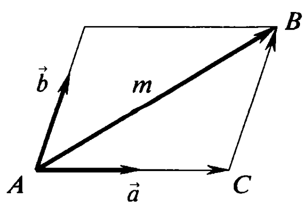
Теорема 12.1 (*о разложении вектора*).

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два неколлинеарных вектора плоскости. Тогда для любого вектора $\vec{m}$ плоскости существует, и притом единственная, пара чисел x и y такая, что

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}.$$

Доказательство. Пусть A и B — соответственно начало и конец вектора $\vec{m}$, т. е. $\vec{m} = \overrightarrow{AB}$. Проведём через точку A прямую, параллельную вектору $\vec{a}$, а через точку B — прямую, параллельную вектору $\vec{b}$ (рис. 488). Обозначим через C точку пересечения этих прямых.

Имеем $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$. Но вектор $\overrightarrow{AC}$ коллинеарен вектору $\vec{a}$. Значит, $\overrightarrow{AC} = x\vec{a}$. Точно так же из коллинеарности вектора $\overrightarrow{CB}$ вектору $\vec{b}$ следует, что $\overrightarrow{CB} = y\vec{b}$. Таким образом, $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$.



$\overrightarrow{AC} = x\vec{a}$ $\quad$ $\overrightarrow{CB} = y\vec{b}$

Рис. 488

Итак, мы доказали, что такая пара чисел x и y существует. Теперь докажем, что она единственная.

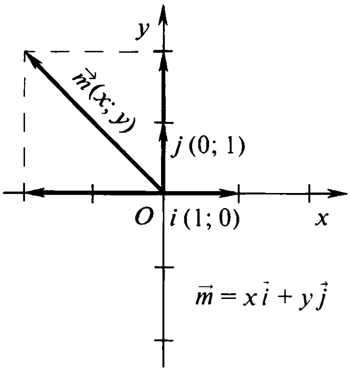


Рис. 489

Предположим, что существует ещё одна пара чисел x_1 и y_1 такая, что $\vec{m} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$.

Имеем

$$x\vec{a} + y\vec{b} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b},$$

откуда

$$(x - x_1)\vec{a} = (y_1 - y)\vec{b}.$$

Но последнее равенство возможно лишь при условии, что $x = x_1$, $y = y_1$. Если, например, $x \neq x_1$, то можно выразить вектор $\vec{a}$ через $\vec{b}$: $\vec{a} = k\vec{b}$. А это означает коллинеарность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. ▼

Замечание. Рассмотрим декартову систему координат. Обозначим через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единичные векторы, направленные по осям координат. Представим вектор $\vec{m}$ в виде $\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Коэффициенты x и y в данном случае являются координатами вектора $\vec{m}$ в этой системе координат (рис. 489).

▲■● Задачи, задания, вопросы

1408(в). Даны два вектора $\vec{a}\,(3; -2)$ и $\vec{b}\,(1; 2)$. Найдите координаты векторов $2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$, $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$, $\frac{\vec{a} - 3\vec{b}}{|\vec{a} + \vec{b}|}$.

1409(в). На координатной плоскости заданы точки $A\,(-1; 3)$, $B\,(2; -5)$, $C\,(3; 4)$. Найдите координаты следующих векторов $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$.

1410. Найдите координаты вектора единичной длины, коллинеарного прямой $3x - 2y + 1 = 0$.

1411(п). Дан правильный пятиугольник. Докажите, что сумма пяти векторов с началом в центре этого пятиугольника и с концами в его вершинах равна нулю.

1412. Дан параллелограмм $ABCD$. Найдите

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} - 2\overrightarrow{AD}.$$

1413(п). Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.

1414(п). Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Докажите также, что если имеет место равенство $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$, то M — точка пересечения медиан треугольника ABC.

1415(п). Пусть ABC и $A_1B_1C_1$ — два треугольника на плоскости. Докажите, что если $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \vec{0}$, то точки пересечения медиан этих треугольников совпадают.

1416(п). Докажите, что для любых a, b, x и y имеет место неравенство

$$\sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2} \leqslant \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

1417(т). Найдите все точки $M(x; y)$, для которых имеет место равенство $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = 5$.

1418. Пусть A, B, C и D — данные точки. Найдите точку M такую, что $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CD}$.

1419(т). В треугольнике ABC точка O является центром описанной окружности; H — точка пересечения высот. Докажите, что $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

1420(т). Из точки M внутри треугольника ABC выходят три луча, перпендикулярные его сторонам. На луче, перпендикулярном стороне AB, взята точка C_1 так, что $MC_1 = AB$. Точно так же на двух других лучах взяты точки A_1 и B_1 ($MA_1 \perp BC$, $MA_1 = BC$, $MB_1 \perp AC$, $MB_1 = AC$). Докажите, что

$$\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \vec{0}.$$

12.4

12.4. Скалярное произведение векторов

Две операции над векторами — умножение на число и сложение, с которыми вы познакомились в предыдущем параграфе, в результате вновь дают вектор. Сейчас мы расскажем ещё об одной операции, ставящей в соответствие любым двум векторам число. Речь пойдёт о *скалярном произведении*. Скалярной в математике называют величину, задаваемую, в отличие от вектора, одним числом. Слова *скаляр* и *шкала* родственны по происхождению (от лат. scalaris — ступенчатый).

Определение скалярного произведения

Будем через $\vec{a}\cdot\vec{b}$ обозначать ***скалярное произведение векторов*** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и определим его равенством

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi,}$$

где φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 490).

Из определения скалярного произведения непосредственно следует, что

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

причём равенство имеет место лишь в случае, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

Скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю. И наоборот, из равенства $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ следует перпендикулярность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. (Чтобы не оговаривать исключения, нулевой вектор считаем перпендикулярным любому другому вектору.)

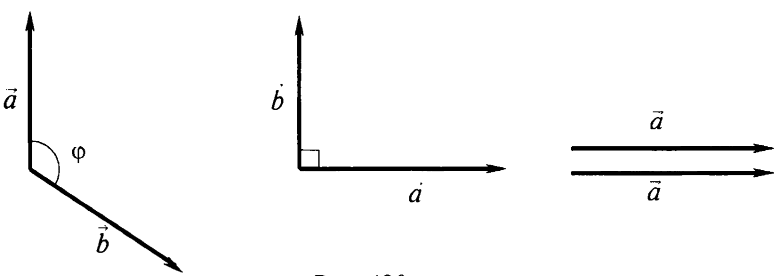


Рис. 490

Произведение вектора само на себя ($\varphi = 0$, $\cos\varphi = 1$) есть скалярный квадрат вектора:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = (\vec{a})^2 = |\vec{a}|^2.$$

Свойства скалярного произведения

Из определения скалярного произведения следует *свойство перестановочности*, *или **коммутативности**, **скалярного произведения***:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}.$$

Далеко не так очевидно следующее ***свойство скалярного произведения*** (***распределительный закон***).

Теорема 12.2 (*распределительное свойство скалярного произведения*).

Для любых трёх векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет место равенство

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$

Доказательство. Рассмотрим декартову систему координат, в которой ось абсцисс направлена по вектору $\vec{a}$, т. е. вектор $\vec{a}$ имеет в этой системе координаты $(|\vec{a}|; 0)$ (рис. 491).

Пусть в этой системе векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеют соответственно координаты $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$.

Заметим, что если какой-либо вектор $\vec{m}$ в этой системе имеет координаты $(x; y)$, то $x = |\vec{m}| \cos\varphi$, где φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{m}$, т. е.

$$\vec{a} \cdot \vec{m} = |\vec{a}| \cdot |\vec{m}| \cos\varphi = |\vec{a}| \cdot x,$$

следовательно,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot x_1, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = |\vec{a}| \cdot x_2.$$

Так как абсцисса вектора $\vec{b} + \vec{c}$ в выбранной системе равна $x_1 + x_2$, то аналогично

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot (x_1 + x_2).$$

Итак,

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = |\vec{a}| \cdot x_1 + |\vec{a}| \cdot x_2 = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}.$$ ▼

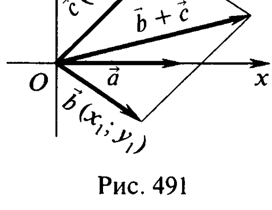


Рис. 491

12.4

Из свойств скалярного произведения следует, что при умножении векторов можно использовать те же правила, что и при умножении числовых выражений.

Запись скалярного произведения в декартовой системе координат

Теорема 12.3 (*координатная форма записи скалярного произведения*).

Пусть в декартовой системе координат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют координаты соответственно $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Тогда (рис. 492)

$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2.}$$

Доказательство. Обозначим через $\vec{i}$ и $\vec{j}$ единичные векторы, направленные по осям координат. Эти векторы перпендикулярны, поэтому $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$. Кроме того,

$$(\vec{i})^2 = (\vec{j})^2 = 1, \quad \vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}, \quad \vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}.$$

Учитывая эти равенства, а также только что доказанные свойства скалярного произведения, имеем

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) =$$
$$= x_1x_2(\vec{i})^2 + y_1y_2(\vec{j})^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)(\vec{i} \cdot \vec{j}) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Скалярное произведение и теорема косинусов

Из свойств скалярного произведения непосредственно следует теорема косинусов. В самом деле, рассмотрим треугольник ABC, в котором, как обычно, $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ равен α (рис. 493).

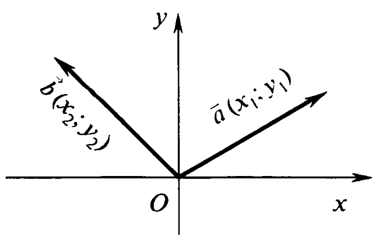


Рис. 492

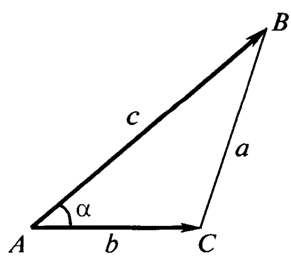


Рис. 493

Имеем $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Возведём последнее равенство в квадрат: $(\overrightarrow{BC})^2 = (\overrightarrow{AC})^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{AB})^2$. А так как $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = bc\cos\alpha$, то $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1421(в). Чему равен угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = -6$;

б) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$;

в) $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = -4$?

1422(в). Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен $\frac{2}{3}\pi$, $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$. Найдите $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$.

1423. Докажите равенства:

а) $(\vec{a} + \vec{b})^2 + (\vec{a} - \vec{b})^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$;

б) $(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b}$.

1424(в). На координатной плоскости даны четыре точки: $A(1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; 4)$, $D(-3; -2)$. Найдите:

а) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$;

г) $(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC})$; д) $(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB})$.

1425(п). Найдите координаты вектора единичной длины, перпендикулярного прямой $2x + 3y = 1$.

1426(п). Докажите, что вектор $\vec{n}(a; b)$ перпендикулярен прямой $ax + by = c$.

1427. Докажите, что

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2).$$

1428(т). Пусть ABC — равносторонний треугольник со стороной 1. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} = 1$.

1429(т). Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

1430(т). Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых:

а) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}$;

б) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$;

в) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = AB^2$.

1431(т). Пусть M — произвольная точка окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC. Найдите $MA^2 + MB^2 + MC^2$, если радиус окружности равен R.

12.5. Координатный и векторный методы

Метод координат является одним из самых универсальных методов не только в геометрии и вообще в математике, но и во многих других естественных и технических науках, и все же его значение не следует преувеличивать.

Конечно, очень хотелось бы иметь один или два метода «на все случаи жизни». Однако таких методов нет. Метод координат, например, даёт универсальный способ перевода с языка геометрии на язык алгебры, но при этом могут возникать алгебраические задачи, гораздо более трудные, чем исходные геометрические.

Выбор системы координат

Первым и, возможно, самым главным этапом решения геометрической задачи методом координат является разумный выбор системы координат. Необходимо, чтобы выбранная система координат естественным образом была «привязана» к изучаемой геометрической фигуре. Есть фигуры, к которым удобно применять координатный метод, своим видом задающие нужную систему координат

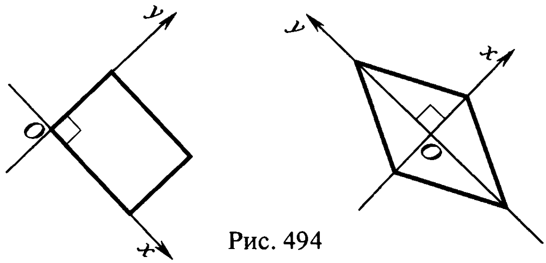


Рис. 494

(рис. 494). Это, например, прямоугольники или ромбы. Другие фигуры «не так удобны». И в первую очередь это фигуры, имеющие произвольный вид, — произвольные треугольники, четырёхугольники и др.

Рассмотрим в качестве примера следующую задачу.

Задача 1. *Дан квадрат $ABCD$. На его диагоналях AC и BD взяты соответственно точки M и K так, что $CM \cdot BK = AB^2$. Докажите, что прямые BM и CK пересекаются на окружности, описанной около квадрата.*

Решение. Квадрат естественным образом задаёт несколько систем координат. Можно выбрать оси координат либо параллельными его сторонам, либо — диагоналям. Начало координат можно выбрать либо в одной из его вершин, либо — в его центре. Возьмём начало координат в центре квадрата, а оси направим по диагоналям.

Пусть в этой системе координат вершины B и C имеют соответственно координаты $(1; 0)$ и $(0; 1)$, а точки M и K — координаты $(0; u)$ и $(v; 0)$ (рис. 495). Сторона квадрата равна $\sqrt{2}$, и значит, условие $CM \cdot BK = 2$ запишется в виде

$$(1 - u)(1 - v) = 2.$$

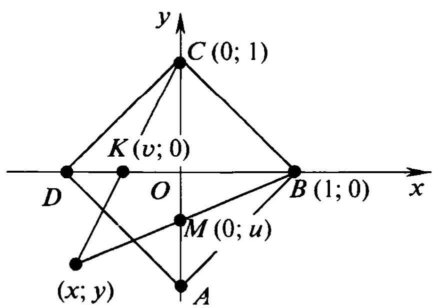


Рис. 495

12.5

Найдём уравнение прямой, проходящей через точки B и M. Вероятно, самый простой (хотя и не самый быстрый) способ нахождения уравнения прямой, проходящей через две данные точки, состоит в том, чтобы записать уравнение прямой $y = kx + b$, подставить в него координаты данных точек, после чего решить получившуюся систему двух уравнений с двумя неизвестными. Неизвестными в ней являются параметры рассматриваемой прямой: угловой коэффициент и свободный член.

В данном случае получаем систему

$$\begin{cases} 0 = k + b, \\ u = b, \end{cases}$$

из которой находим: $b = u$, $k = -u$. Итак, уравнение прямой, проходящей через B и M, имеет вид $y = -ux + u$.

Точно так же найдём уравнение прямой, проходящей через точки C и K. Оно имеет вид $y = -\frac{1}{v}x + 1$.

Теперь найдём координаты точки пересечения прямых BM и CK. Для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = -ux + u, \\ y = -\frac{1}{v}x + 1. \end{cases}$$

Находим: $x = \dfrac{(u-1)v}{uv-1}$, $y = \dfrac{(v-1)u}{uv-1}$.

Осталось проверить, что точка с найденными координатами действительно лежит на окружности с центром в начале координат и радиусом, равным 1. При этом мы должны учитывать равенство $(1-u)(1-v) = 2$.

Итак, надо доказать, что

$$\frac{(u-1)^2v^2}{(uv-1)^2} + \frac{(v-1)^2u^2}{(uv-1)^2} = 1, \quad \text{если} \quad (1-u)(1-v) = 2.$$

Это чисто алгебраическая задача. Самое простое — выразить u через v: $u = \dfrac{v+1}{v-1}$, а затем подставить найденное значение в выражение, которое надо доказать. Преобразования можно упростить, если сначала выразить x и y через v. Имеем:

$$x = \frac{\left(\frac{v+1}{v-1} - 1\right)v}{\frac{v+1}{v-1}v - 1} = \frac{2v}{v^2+1}, \quad y = \frac{v^2-1}{v^2+1}.$$

Таким образом,

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{2v}{v^2+1}\right)^2 + \left(\frac{v^2-1}{v^2+1}\right)^2 = 1. \blacktriangledown$$

(Попробуйте найти более короткое и красивое решение.)

❋ Окружность Аполлония

Метод координат часто оказывается удобным при решении задач на геометрические места точек. В качестве иллюстрации рассмотрим следующую полезную задачу.

Задача 2. *Даны две точки A и B. Докажите, что геометрическим местом точек M таких, что $AM : BM = k$ при $k \neq 1$, является окружность с центром на прямой AB.* (Такая окружность называется ***окружностью Аполлония***, по имени древнегреческого математика и астронома Апо́ллония Пе́ргского, жившего во III—II вв. до н. э.)

Решение. Введём систему координат, в которой точки A и B лежат на оси абсцисс, а начало находится в середине отрезка AB. Пусть в этой системе точки A и B имеют соответственно координаты $(a; 0)$ и $(-a; 0)$. Точка M, принадлежащая искомому геометрическому месту, имеет координаты $(x; y)$ (рис. 496).

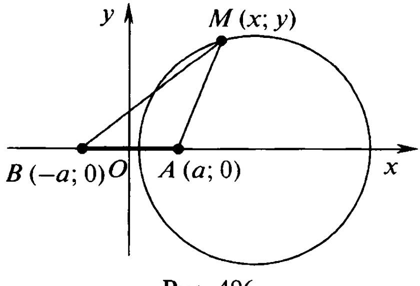


Рис. 496

12.5

По формуле расстояния между двумя точками имеем

$$AM^2 = (x-a)^2 + y^2, \quad BM^2 = (x+a)^2 + y^2.$$

Условие $AM : BM = k$ эквивалентно равенству $AM^2 = k^2 \cdot BM^2$. Заменяя AM^2 и BM^2 их выражениями, получаем уравнение

$$(x-a)^2 + y^2 = k^2(x+a)^2 + k^2y^2$$

или

$$(k^2-1)(x^2+y^2) + 2(k^2+1)ax + (k^2-1)a^2 = 0.$$

Разделив последнее равенство на $(k^2 - 1)$ и выделяя полный квадрат по переменной x, приходим к уравнению

$$\left(x + \frac{k^2+1}{k^2-1}a\right)^2 + y^2 = a^2\left(\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - 1\right).$$

Это уравнение является уравнением окружности с центром $\left(-\frac{k^2+1}{k^2-1}a; 0\right)$ и радиусом

$$R = a\sqrt{\left(\frac{k^2+1}{k^2-1}\right)^2 - 1} = \frac{2ka}{|k^2-1|}.$$

Все преобразования, начиная с уравнения окружности, можно проделать в обратном порядке, поэтому все точки этой окружности принадлежат рассматриваемому геометрическому месту точек. ▼

Заметим, что эта задача может быть решена и по-другому. Проведём в треугольнике AMB биссектрисы внутреннего и внешнего углов, соответствующих вершине M (рис. 497). Пусть эти биссектрисы пересекают прямую AB соответственно в точках M_1 и M_2. По теореме о биссектрисе (см. § 9.3) $AM_1 : BM_1 = AM_2 : BM_2 = AM : BM = k$. Значит, точки M_1 и M_2 постоянны,

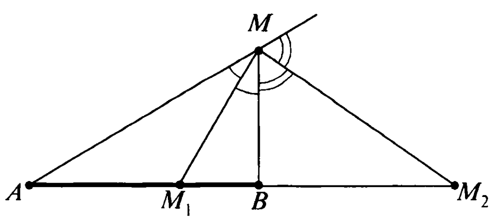


Рис. 497

одни и те же для любой точки M. Но угол M_1MM_2 равен 90°. Следовательно, точка M лежит на окружности с диаметром M_1M_2. Остаётся доказать, что любая точка данной окружности принадлежит этому геометрическому месту, т. е. что для любой точки M окружности с диаметром M_1M_2 выполняется равенство $AM : BM = k$.

Как правило, в подобных случаях можно воспользоваться методом «от противного». Предположим, что для какой-то точки M окружности $AM : BM$ не равно k. Пусть для определённости $AM : BM > k > 1$ (рис. 498). В треугольнике AMB проведём биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине M. Пусть эти биссектрисы пересекают прямую AB в точках K_1 и K_2 соответственно.

Для точки M_1 имеет место равенство $AM_1 : BM_1 = k$. А для точки K_1 справедливо неравенство $AK_1 : BK_1 > k$. Значит, $AK_1 > AM_1$.

Точки M_2 и K_2 расположены вне AB, на продолжении за точку B. При этом, в силу неравенства $AK_2 : BK_2 > AM_2 : BM_2 > 1$, точка K_2 ближе к B, чем M_2. Итак, точки K_1 и K_2 лежат внутри отрезка M_1M_2. Но этого быть не может, ведь каждый из углов M_1MM_2 и K_1KK_2 равен 90°.

Полученное противоречие доказывает, что любая точка рассматриваемой окружности входит в искомое геометрическое место точек. ▼

Таким образом, преимущество метода координат состоит в данном случае в том, что вопрос, все ли точки найденной окружности принадлежат рассматриваемому геометрическому месту точек, решается сам собой. Но и у геометрического метода есть свои достоинства, не так ли?

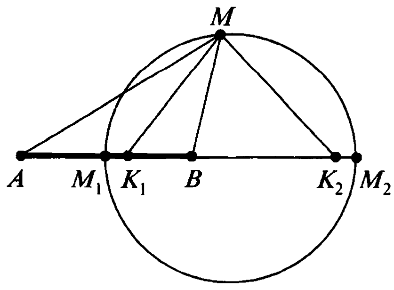


Рис. 498

12.5

Задачи на коллинеарность векторов

Рассмотрим теперь примеры применения векторного метода. Выделим две разновидности этого метода.

Первая разновидность векторного метода. Здесь мы используем свойства коллинеарных векторов, единственность разложения любого вектора плоскости по двум неколлинеарным векторам.

Задача 3. *Рассмотрим пятиугольник $ABCDE$; M, K, N и L соответственно середины сторон BC, CD, DE и EA. Докажите, что отрезок, соединяющий середины MN и KL, параллелен AB и равен $\frac{1}{4}AB$.*

Решение. Заметим, что для любых трёх точек O, P и Q имеет место равенство $\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ})$, где T — середина PQ (рис. 499).

Исходя из этого, имеем (рис. 500):

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}), \quad \overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}),$$

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}), \quad \overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$$

Если F и G — середины MN и KL, то

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}),$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}).$$

Таким образом, $\overrightarrow{GF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$. ▼

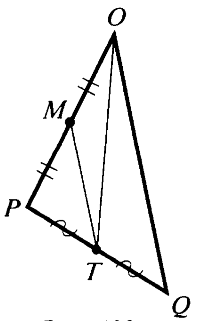


Рис. 499

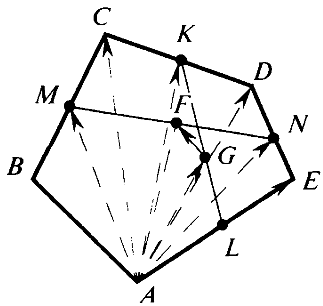


Рис. 500

Задачи, использующие свойства скалярного произведения

Вторая разновидность векторного метода. Здесь мы используем свойства скалярного произведения. Рассмотрим пример.

Задача 4. *Пусть A, B и C — углы некоторого треугольника. Докажите, что имеет место неравенство*

$$\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}.$$

Решение. Это неравенство может быть доказано многими различными способами. Воспользуемся одним из наиболее изящных.

Возьмём любую точку M внутри треугольника ABC, например центр вписанной окружности, опустим из этой точки перпендикуляры на стороны треугольника и отложим на каждом из перпендикуляров единичные векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$ (рис. 501). Легко видеть, что углы между этими векторами дополняют до 180° соответствующие углы треугольника ABC. Если, например, угол между $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равен $180° - A$, то $\vec{m} \cdot \vec{n} = -\cos A$. Теперь сложим эти векторы и возведём в квадрат. Имеем

$$0 \leqslant (\vec{m} + \vec{n} + \vec{p})^2 = \vec{m}^2 + \vec{n}^2 + \vec{p}^2 + 2\vec{m} \cdot \vec{n} + 2\vec{m} \cdot \vec{p} + 2\vec{n} \cdot \vec{p} =$$
$$= 3 - 2\cos A - 2\cos B - 2\cos C.$$

Отсюда следует требуемое неравенство. ▼

С помощью этого приёма можно доказывать интересные неравенства. Ведь вовсе не обязательно рассматривать лишь единичные векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ и $\vec{p}$.

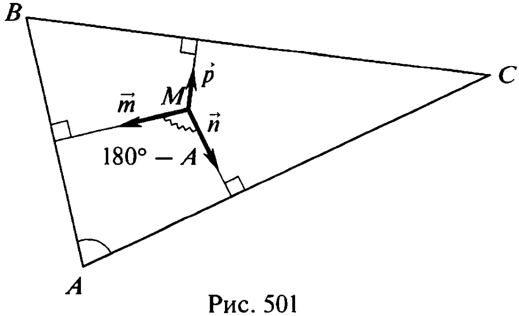


Рис. 501

12.5

* Ещё одно доказательство теоремы о высотах треугольника

Используя свойства скалярного произведения, можно дать ещё одно (четвёртое!) доказательство теоремы о том, что высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Рассмотрим треугольник ABC. В задаче 1429 было предложено найти геометрическое место точек M плоскости, для которых имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} = 0.$$

Оказывается, что это последнее равенство выполняется для любой точки плоскости, следовательно, искомое геометрическое место точек состоит из всех точек плоскости. В самом деле, заменяя $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$, $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}$, будем иметь:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BM} =$$
$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BC}\,(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}) + \overrightarrow{CA} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}) =$$
$$= \overrightarrow{CM} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \overrightarrow{BC} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}) = 0.$$

Если теперь H — точка пересечения высот, опущенных из вершин C и A, т. е. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$, то и $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BH} = 0$. Таким образом, высота, проведённая из вершины B, также проходит через H.

▲■● Задачи, задания, вопросы

1432. На плоскости даны две точки A и B, причём $AB = 2$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости, для которых $AM^2 + BM^2 = 3$.

1433(п). Дан прямоугольник $ABCD$. Докажите, что для всех точек M плоскости выполняется равенство $AM^2 + CM^2 = BM^2 + DM^2$.

1434. В прямоугольном треугольнике ABC катеты AC и BC равны соответственно 1 и 3. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых $AM^2 + BM^2 = 2CM^2$.

1435(т). Через вершину A прямоугольника $ABCD$ проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке K, а прямые BC и CD в точках P и M соответственно. Найдите AK, если $AP = a$, $AM = b$.

1436(п). Дана прямая l и точки A и B по одну сторону от неё на расстоянии a и b соответственно. Возьмём в плоскости точку M так, что прямые MA и MB пересекают прямую l. Обозначим через A_1 и B_1 соответствующие точки пересечения. Найдите геометрическое место точек M таких, что $\frac{MA}{MA_1} + \frac{MB}{MB_1} = k$, если: а) $a = 3$, $b = 1$, $k = 2$; б) $a = 5$, $b = 1$, $k = \frac{3}{2}$; в) $a = 5$, $b = 1$, $k = 3$.

1437. На сторонах AB и BC квадрата $ABCD$ взяты точки K и N так, что $3AK = 2BM = AB$. Найдите косинус угла между прямыми DK и AM.

1438. Через центр O правильного треугольника ABC проведена прямая; A_1, B_1 и C_1 — проекции вершин A, B и C на эту прямую. Известно, что $OA_1 = 5$, $OB_1 = 1$. Найдите OC_1.

1439. На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что медиана к стороне BC в треугольнике ABC равна стороне BC.

1440(п). Около единичной окружности описан квадрат. Найдите сумму квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин квадрата.

1441(т). На плоскости даны точки A и B. Найдите геометрическое место точек C таких, что в треугольнике ABC медиана к стороне BC равна высоте к стороне AB.

1442(т). На сторонах прямого угла с вершиной O взяты точки A и B так, что $OA = OB = 1$. Через вершину O проведена произвольная прямая l. Точки A_1 и B_1 симметричны соответственно точкам A и B относительно l. Через A_1 проходит прямая, перпендикулярная OA, а через B_1 — прямая, перпендикулярная OB. Эти прямые пересекаются в точке M. Найдите геометрическое место точек M.

1443(т). На плоскости проведены две прямые, пересекающиеся под углом 45°, и на одной из них отмечена точка A. Пусть M_1 и M_2 — две точки, симметричные некоторой точке M относительно данных прямых. Найдите геометрическое место точек M таких, что прямая M_1M_2 проходит через A.

1444(т). На прямой взяты две точки A и B. Пусть C — произвольная точка на этой прямой. Построим два квадрата со сторонами AC и BC соответственно, расположенные по одну сторону от этой прямой. Найдите геометрическое место середин всевозможных отрезков, соединяющих центры этих квадратов.

1445. Дан квадрат $ABCD$. Найдите геометрическое место таких точек M плоскости квадрата, для которых $AM + CM = DM + BM$.

1446(т). Дан треугольник ABC. Найдите геометрическое место точек M плоскости, для которых существует треугольник со сторонами, равными и параллельными отрезкам MA, MB и MC.

1447(т). Через середину диагонали AC четырёхугольника $ABCD$ проведена прямая, параллельная BD и пересекающая прямую BC в точке K, а через середину диагонали BD проведена прямая, параллельная AC и пересекающая прямую AD в точке M. Докажите, что прямая MK параллельна CD.

1448(п). Пусть A и B — фиксированные точки плоскости, O — произвольная точка плоскости. Докажите, что при изменении x точка M, для которой выполняется равенство $\overrightarrow{OM} = x\overrightarrow{OA} + (1 - x)\overrightarrow{OB}$, описывает прямую AB. Причём при изменении x от 0 до 1 точка M пробегает отрезок AB от B к A, и значение x равно отношению $\frac{BM}{BA}$.

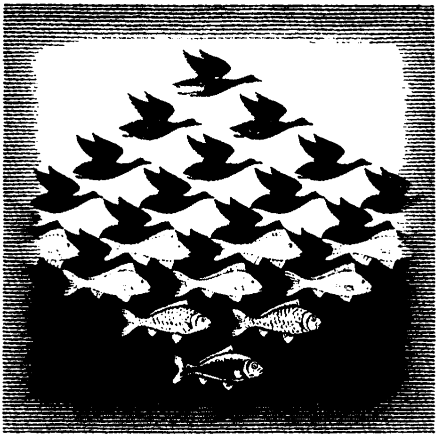
1449(т). Найдите геометрическое место центров всевозможных параллелограммов, стороны которых параллельны диагоналям данного четырёхугольника, а вершины лежат на его сторонах.

1450(т). Пусть A, B и C — величины углов некоторого треугольника. Докажите, что для любых чисел m, n и p имеет место неравенство

$$2mn\cos A + 2np\cos B + 2pm\cos C \leqslant m^2 + n^2 + p^2.$$

13

Преобразования плоскости



В этой главе, завершающей теоретическую часть курса планиметрии, мы рассмотрим одну из важнейших геометрических тем — преобразования плоскости. Точнее, лишь коснёмся этой темы, поскольку она далеко выходит за рамки изучаемого вами курса.

Идея преобразований является ведущей идеей современной математики. Её с успехом используют в самых различных разделах, доказывая удивительные и трудные теоремы. Нас будут интересовать лишь преобразования плоскости, поэтому ограничимся определением понятия преобразования для плоскости.

Будем говорить, что задано ***преобразование плоскости****, если указан способ, с помощью которого каждой точке A плоско-*

сти ставится в соответствие точка A' этой же плоскости. (Это означает, что в результате преобразования точка A переходит в точку A'.) При этом различным точкам A и B соответствуют различные точки A' и B'.

13.1. Движение плоскости

Среди различных видов преобразований плоскости выделим и рассмотрим в первую очередь ***движения*** плоскости.

Что такое движение плоскости?

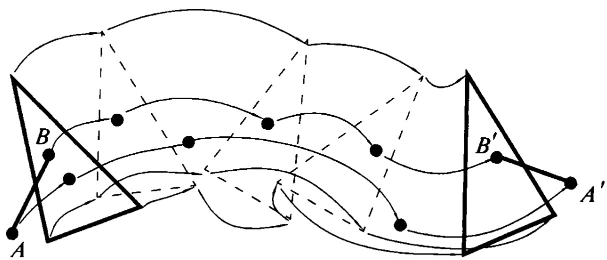


Рис. 502

Возьмём на плоскости какой-нибудь треугольник и начнём его передвигать по плоскости как твёрдое тело (рис. 502). В результате такого перемещения определённым образом передвинутся и все его внутренние точки, но не только они. Перемещение треугольника задаёт перемещение любой точки плоскости. Каждую точку плоскости можно рассматривать как бы жёстко связанной с данным треугольником. Зная все три расстояния от некоторой точки плоскости до вершин исходного треугольника, мы без труда определим точку, в которую она перейдёт в результате перемещения треугольника.

Заметим, что треугольник может не только передвигаться вдоль поверхности плоскости. Он может быть повёрнут обратной стороной и перемещаться в таком виде. Преобразование, задаваемое таким образом при перемещении треугольника, является движением.

Дадим более чёткое определение движения плоскости.

Движением *называется такое преобразование плоскости, которое не меняет расстояние между парами точек, т. е. если точки A и B в результате движения переходят в точки A' и B', то $AB = A'B'$.*

Примером движения является рассмотренная нами в начале курса осевая симметрия. Как будет показано в дальнейшем, осевая симметрия является основным видом движения плоскости и любое движение может быть сведено к нескольким осевым симметриям.

Отметим одно очевидное свойство движения, следующее из определения.

Теорема 13.1 (основное свойство движений).

Результатом двух последовательных движений плоскости является движение плоскости.

Утверждение этой теоремы очевидно. По сути, надо лишь разъяснить её формулировку.

Пусть в результате первого движения точка A переходит в точку A', а в результате второго — точка A' переходит в точку A''. Два этих движения можно заменить одним преобразованием, переводящим точку A непосредственно в точку A''. Различные точки плоскости при этом переходят в различные точки, поэтому мы на самом деле получили преобразование плоскости. Осталось доказать, что построенное таким образом преобразование является движением.

Рассмотрим две различные точки плоскости A и B, переходящие после первого движения соответственно в точки A' и B'. Пусть точки A' и B' в результате второго движения переходят соответственно в точки A'' и B''. Так как $AB = A'B' = A''B''$, то преобразование, переводящее A и B в A'' и B'', является движением. (Ведь A и B — две любые точки плоскости.) ▼

Две основные теоремы о движении плоскости

Теорема 13.2 (основной способ задания движения).

Любое движение плоскости полностью задаётся движением трёх точек плоскости, не лежащих на одной прямой.

Иными словами, если A, B и C — три не лежащие на одной прямой точки и если указаны точки A', B' и C', в которые они переходят в результате некоторого движения, то для любой точки M этой плоскости полностью определена точка M', в которую в результате этого движения переходит точка M.

13.1

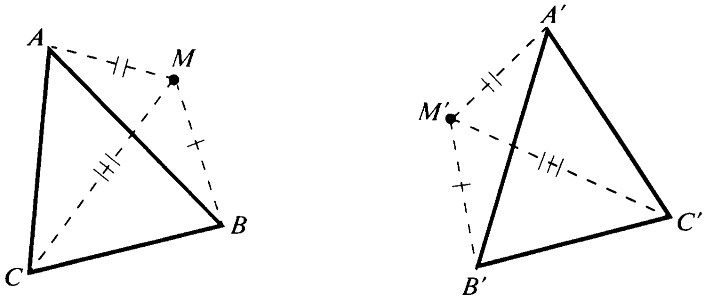


Рис. 503

Доказательство теоремы, по сути дела, уже «намечено» в начале этого параграфа. Сейчас мы его лишь чётко оформим. Пусть вершины треугольника ABC в результате движения переходят соответственно в точки A', B' и C'. Треугольник $A'B'C'$ равен треугольнику ABC (рис. 503). Возьмём любую точку M этой плоскости. Пусть при этом движении она переходит в точку M'. Так как $A'M' = AM$, $B'M' = BM$, то M' — одна из точек пересечения окружностей с центрами в A' и B' и радиусами AM и BM. Эти две окружности пересекаются не более чем в двух точках. И для уточнения положения точки M' остаётся построить ещё окружность с центром в C' и радиусом CM. Точка пересечения первых двух окружностей, которая принадлежит и третьей окружности, является нужной нам точкой M'.

Здесь существенным является тот факт, что точки A, B и C, а значит, и A', B' и C' не лежат на одной прямой. Три окружности с центрами не на одной прямой имеют не более одной точки пересечения. А хотя бы одну точку пересечения они должны иметь, поскольку точка M', удалённая от точек A', B' и C' на заданные расстояния, существует. ▼

Следующая теорема указывает на ведущую роль осевой симметрии среди различных видов движения.

Теорема 13.3 (*о возможности представления любого движения через осевые симметрии*).

Любое движение плоскости может быть получено с помощью не более чем трёх осевых симметрий.

Доказательство. Достаточно доказать, что с помощью не более чем трёх последовательных осевых симметрий можно три

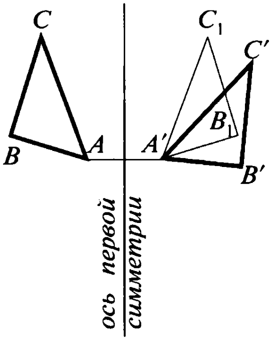


Рис. 504

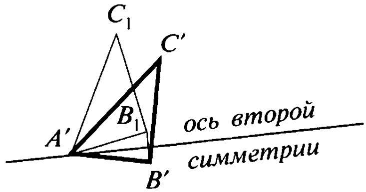


Рис. 505

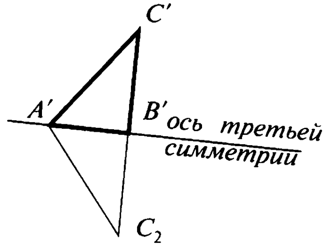


Рис. 506

точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, перевести в любые такие точки A', B' и C', для которых $A'B' = AB$, $B'C' = BC$, $C'A' = CA$.

В качестве первой оси симметрии возьмём серединный перпендикуляр к отрезку AA'. Тогда точка A перейдёт в A' (рис. 504). Пусть при этом точка B переходит в B_1, а точка C — в C_1. (Если A совпадает с A', то эта симметрия оказывается ненужной.) В качестве оси второй симметрии возьмём серединный перпендикуляр к $B'B_1$ (рис. 505). Так как $A'B' = AB = A'B_1$, то выбранная ось симметрии содержит точку A'.

Значит, в результате второй симметрии точка A' останется на месте, а точка B_1 перейдёт в B'. В результате двух последовательных симметрий точка A переходит в A', а точка B — в B'. Пусть при этом точка C переходит в C_2.

Так как $A'C_2 = AC = A'C'$, $B'C_2 = BC = B'C'$, то точка C_2 может занять одно из двух возможных положений: она или совпадает с точкой C', и тогда третья симметрия оказывается ненужной, или она симметрична точке C' относительно $A'B'$ (рис. 506). В этом случае выполняем симметрию относительно $A'B'$. В результате последовательного применения трёх (или меньше) указанных симметрий точка A переходит в A', точка B — в B', а точка C — в C'. Значит, три эти симметрии задают нужное нам движение плоскости. (Это следует из теоремы 13.2.) ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1451. Поставим каждой точке плоскости в соответствие проекцию на заданную прямую плоскости. Верно ли, что тем самым мы зададим преобразование плоскости?

1452. Докажите, что любое движение переводит прямую в прямую, а окружность — в окружность.

1453. Сколько существует движений, переводящих квадрат сам в себя?

1454. На координатной плоскости заданы точки A (1; 2) и B (5; 5). При движении плоскости эти точки переходят соответственно в точки A' (2; 3) и B' (7; 3). В какую точку при этом движении может перейти точка M (−2; −3)?

1455. На плоскости даны две прямые, пересекающиеся под углом 45°. В результате двух последовательных симметрий относительно этих прямых точка A переходит в A', а точка B — в B'. Найдите угол между прямыми AB и $A'B'$.

1456. Докажите, что любое движение в пространстве может быть задано при помощи не более чем четырёх симметрий относительно плоскостей.

13.2. Виды движений плоскости

Вы уже знакомы с такими преобразованиями плоскости, как поворот вокруг точки и параллельный перенос. (Мы не будем выделять центральную симметрию, поскольку она представляет собой поворот на 180°.) Легко видеть, что каждое из этих преобразований является движением. И здесь возникает естественный вопрос: а какие вообще имеются виды движений? С помощью теоремы 13.3 можно дать на этот вопрос исчерпывающий ответ. Мы будем классифицировать движения по числу задающих их осевых симметрий.

Прежде всего выделим отдельно ***тождественное преобразование***, оставляющее каждую точку плоскости на месте. Понятно, что это преобразование является движением.

Параллельный перенос

Одна осевая симметрия так и задаёт осевую симметрию. Гораздо интереснее случай двух осевых симметрий. Здесь есть две возможности: оси симметрий параллельны и оси симметрий пересекаются. Соответственно сформулируем и докажем две теоремы.

Теорема 13.4 *(о представлении параллельного переноса в виде двух симметрий).*

В результате двух последовательных осевых симметрий с параллельными осями любая точка A плоскости переходит в такую точку A', что вектор $\overrightarrow{AA'}$ постоянен для всех точек плоскости.

При этом вектор $\overrightarrow{AA'}$ перпендикулярен осям симметрий, направлен от первой оси ко второй и его длина в два раза больше расстояния между осями.

Такое преобразование называется ***параллельным переносом***. Сам вектор $\overrightarrow{AA'}$ называется ***вектором параллельного переноса***.

Доказательство. Рассмотрим какой-либо вектор $\overrightarrow{AB}$, перпендикулярный осям симметрии (рис. 507). После каждой симметрии он переходит в противоположный по направлению вектор такой же длины. Значит, после двух симметрий он перейдёт в вектор $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, расположенный на той же прямой AB. Таким образом, $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, т. е. для всех точек прямой, перпендикулярной осям симметрии, после двух последовательных симметрий происходит перемещение на один и тот же вектор.

Взяв точку A на первой оси симметрии, мы легко убедимся в том, что длина вектора параллельного переноса в самом деле

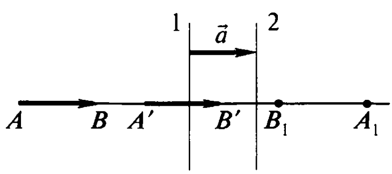
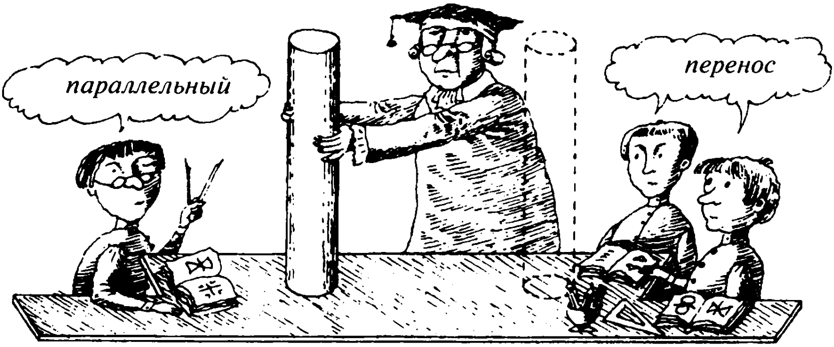


Рис. 507

13.2



в два раза больше расстояния между осями и он направлен от первой оси ко второй. ▼

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что, взяв любые две прямые, перпендикулярные вектору $\vec{a}$ на расстоянии, равном $\frac{1}{2}|\vec{a}|$ друг от друга, после двух симметрий в соответствующем порядке относительно этих прямых мы получим параллельный перенос на вектор $\vec{a}$.

Поворот

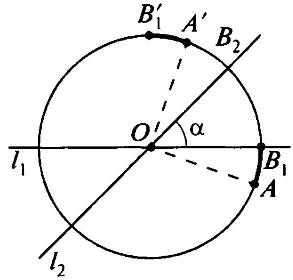
Выясним теперь, какое движение получится в результате двух последовательных симметрий с пересекающимися осями. Ответ на этот вопрос даёт нам следующая теорема.

Теорема 13.5 *(о представлении поворота в виде двух симметрий).*

Пусть две прямые l_1 и l_2 на плоскости пересекаются в точке О и образуют между собой угол α ($\alpha \leqslant 90°$). В результате двух последовательных симметрий относительно прямых l_1 и l_2 мы получим поворот на угол 2α вокруг точки О. При этом направление поворота то же, что и у поворота на угол α, переводящего прямую l_1 в прямую l_2.

Такое преобразование называют ***поворотом***, а угол 2α называют ***углом поворота***.

Поясним, что утверждает эта теорема. Возьмём любую точку A на плоскости. Рассмотрим окружность с центром в точке O и радиусом OA (рис. 508). Эта окружность пересекает оси симметрий в четырёх точках. Выберем из них две точки: точку B_1 на прямой l_1 и точку B_2 на прямой l_2 так, что $\angle B_2OB_1 = \alpha$. Эти две точки определяют на окружности направление движения: от точки B_1 к B_2 по меньшей дуге, соответствующей углу α. В результате последовательного применения симметрий относительно прямых l_1 и l_2 точка A перейдёт в точку A' на этой окружности. Причём при движении от A к A' в указанном направлении мы получим меньшую дугу окружности, которой соответствует центральный угол величиной 2α.



$\angle AOA' = 2\alpha$

Рис. 508

Доказательство. Для точки B_1 утверждение теоремы очевидно. В общем случае после первой симметрии дуга AB_1 переходит в такую же, но противоположно направленную дугу. (Точка B_1 остаётся на месте.) После двух симметрий дуга AB_1 переходит в равную ей и так же направленную дугу $A'B_1'$. Значит, $\angle AOA' = \angle B_1OB_1' = 2\alpha$, причём точки A и A' следуют друг за другом в том же порядке, что и B_1 и B_1'. ▼

Здесь следует обратить внимание на то, что, как бы мы ни провели через точку O две пересекающиеся под углом α прямые, после двух последовательных симметрий относительно этих прямых мы получим поворот в соответствующем направлении на угол 2α вокруг точки O.

❋ Три осевые симметрии

Итак, нам осталось рассмотреть последний случай и ответить на вопрос: какое движение плоскости будет иметь место в результате трёх последовательных осевых симметрий?

Случай, когда оси всех трёх симметрий параллельны, без труда сводится к одной осевой симметрии. В самом деле, рассмотрим три параллельные прямые l_1, l_2 и l_3 (рис. 509). Как мы знаем (теорема 13.3), результатом двух первых симметрий является параллельный перенос,

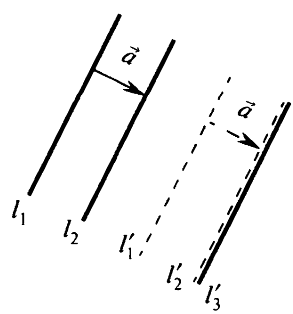


Рис. 509

причём если вместо l_1 и l_2 взять любые параллельные им две прямые l'_1 и l'_2 на том же расстоянии друг от друга (и одинаково направленным перпендикулярным вектором), то в результате получим тот же параллельный перенос. В частности, можно взять прямую l'_2 совпадающей с l_3. Тогда симметрии относительно l'_2 и l_3 «взаимно уничтожатся» (дадут тождественное преобразование), и в результате останется одна осевая симметрия относительно l'_1. Таким образом, как и утверждалось, три осевые симметрии с параллельными осями можно заменить одной осевой симметрией.

Точно так же три симметрии, оси которых проходят через одну точку, можно заменить одной осевой симметрией.

Теперь рассмотрим общий случай, когда среди трёх осей есть пересекающиеся, но все они не имеют общей точки.

Теорема 13.6 *(о движении, задаваемом тремя осевыми симметриями).*

Три последовательные осевые симметрии, оси которых не все параллельны и не проходят через одну точку, можно заменить двумя движениями: симметрией и параллельным переносом.

Доказательство. Пусть осями симметрий являются прямые l_1, l_2 и l_3, причём прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке O (рис. 510). Тогда две первые симметрии можно заменить поворотом вокруг точки O на соответствующий угол. Если вместо l_1 и l_2 взять прямые l'_1 и l'_2, пересекающиеся в точке O под тем же углом, то в результате симметрий относительно l'_1 и l'_2 будем иметь тот же поворот, что и в результате симметрий относительно l_1 и l_2. (Прямые l'_1 и l'_2 получаются из прямых l_1 и l_2 любым поворотом вокруг O.) В частности, можно взять прямую l'_2 параллельной l_3.

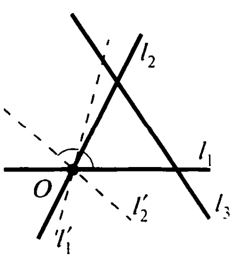


Рис. 510

Последовательные симметрии относительно l'_2 , l'_2 и l_3 дают то же движение, что и симметрии относительно l_1, l_2 и l_3. Но в силу параллельности l'_2 и l_3 симметрии относительно этих прямых можно заменить параллельным переносом. В результате получаем движение, состоящее последовательно из осевой симметрии и параллельного переноса. ▼

Оказывается, теорема 13.6 может быть уточнена.

❋ Скользящая симметрия

Добавим к трём рассмотренным движениям (осевой симметрии, параллельному переносу, повороту) ещё одно.

Скользящей симметрией *называется движение, состоящее последовательно из осевой симметрии и параллельного переноса, задаваемого вектором, параллельным оси симметрии.*

Теорема 13.7 *(о представлении скользящей симметрии через три симметрии).*

Движение, получающееся в результате трёх последовательных осевых симметрий с осями, не проходящими через одну точку, среди которых есть непараллельные, является скользящей симметрией. При этом всякая скользящая симметрия может быть получена как результат трёх последовательных осевых симметрий.

Доказательство. Рассмотрим симметрии с осями l_1, l_2 и l_3. Пусть l_2 и l_3 пересекаются в точке P (рис. 511). (Если l_2 и l_3 параллельны, то мы сначала повернём вместе l_1 и l_2 вокруг точки их пересечения.) Повернём эти оси вокруг точки P так, чтобы l_2 перешла в прямую l_2', перпендикулярную l_1. Получим новую тройку прямых l_1, l_2' и l_3', определяющих то же движение, что и исходные прямые l_1, l_2 и l_3 (рис. 512). Теперь повернём прямые l_1 и l_2' вокруг Q — точки их пересечения — так, чтобы l_1 перешла в прямую, перпендикулярную l_3. В результате получим прямые l_1', l_2'' и l_3' (рис. 513), задающие то же движение, что и исходная тройка, причём l_1' перпендикулярна l_2'' и l_3'. Значит, l_2'' и l_3' параллельны

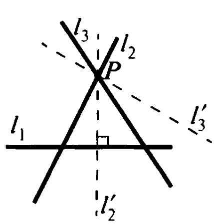


Рис. 511

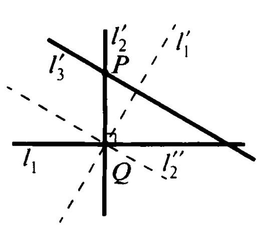


Рис. 512

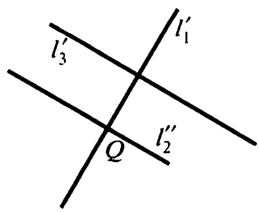


Рис. 513

и задают перенос в направлении, параллельном l_1', т. е. рассматриваемое движение является скользящей симметрией. Также любая скользящая симметрия может быть получена как результат трёх последовательных осевых симметрий, поскольку при меньшем числе симметрий мы получаем другие виды движений. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1457(в). В результате параллельного переноса точка A переходит в точку A', а точка B — в точку B'. Найдите координаты точки B', если известны координаты точек A, A' и B:
а) $A(-1; 3)$, $A'(2; 4)$, $B(1; -3)$;
б) $A(2; -2)$, $A'(0; 1)$, $B(-1; -5)$;
в) $A(-3; -2)$, $A'(-5; -1)$, $B(4; 7)$.

1458(в). В результате параллельного переноса точка A переходит в точку A', а прямая l — в прямую l'. Найдите уравнение прямой l', если:
а) $A(-2; 5)$, $A'(3; -4)$;
уравнение прямой l есть $2x - 3y = 1$;
б) $A(4; 7)$, $A'(-3; 13)$;
уравнение прямой l есть $3x + 4y = 5$.

1459. Найдите вектор параллельного переноса, если прямая, задаваемая уравнением $y = 3x - 2$, переходит в прямую $y = 3x + 4$, а прямая $3x + 2y = 2$ переходит в прямую $6x + 4y = 3$.

1460(в). Будем считать положительным направлением вращения направление против движения часовой стрелки. Пусть оси координат таковы, что в результате поворота вокруг начала координат в положительном направлении на 90° точка (0; 1) переходит в точку (1; 0). Найдите координаты точки, в которую эта же точка (0; 1) перейдёт в результате поворота в положительном направлении на угол 30°, 45°, 60°, 120°, 150°.
Ответьте на этот же вопрос для тех же углов, если поворот происходит в противоположном направлении.

1461(п). Какое наименьшее число вершин может иметь многоугольник, у которого есть две оси симметрии, пересекающиеся под углом: а) 30°; б) 10°; в) 87°?

1462(п). На плоскости даны два равных и не параллельных отрезка AB и $A'B'$. Постройте центр поворота, при котором точка A переходит в A', а точка B переходит в B'.

1463. На плоскости даны два равных отрезка AB и CD. Прямые AC и BD пересекаются в точке P. Пусть окружности, описанные около треугольников ABP и CDP, пересекаются в точке O, отличной от P. Докажите, что в результате поворота вокруг O на угол AOC точка A переходит в C, а точка B — в точку D.

1464(п). Дана прямая l и точка A. Найдите геометрическое место точек M плоскости таких, что существует поворот на угол 60° с центром на прямой l, переводящий A в M.

1465. Дан правильный шестиугольник. Сколько существует различных движений, переводящих его в себя? Сколько среди них симметрий, вращений, скользящих симметрий?

13.3. Гомотетия

Из преобразований плоскости, не являющихся движениями, мы рассмотрим одно, играющее в геометрии важную роль. Речь идёт о преобразовании, называющемся ***гомотетией***.

Определение гомотетии

Гомотетией *с центром в точке O и коэффициентом k называется такое преобразование плоскости, при котором любая точка A переходит в точку A′ такую, что* $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$ (рис. 514).

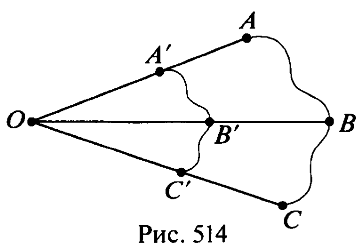
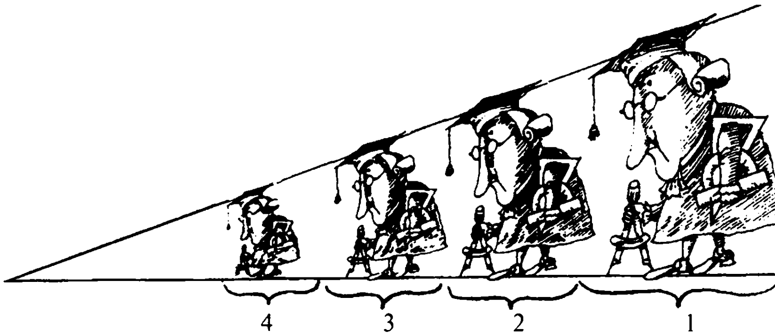


Рис. 514

13.3



Из определения гомотетии следует, что при $k = 1$ гомотетия является тождественным преобразованием.

При $k = -1$ гомотетия становится центральной симметрией.

Две гомотетии с центром в O и коэффициентами k и $\frac{1}{k}$ являются взаимно обратными. Это означает, что если одна из них переводит точку A в точку A', то другая переводит A' в A.

Свойства гомотетии

Основные свойства гомотетии выражает следующая теорема.

Теорема 13.8 *(основное свойство гомотетии).*

При гомотетии с коэффициентом k отрезок AB переходит в отрезок A'B', параллельный AB и такой, что A'B' = |k| · AB, а любая фигура F отображается в фигуру F', подобную F с коэффициентом подобия k. При этом всякий элемент фигуры F отображается в соответствующий элемент фигуры F'.

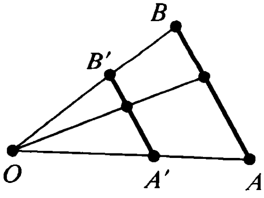


Рис. 515

Доказательство. Пусть O — центр гомотетии (рис. 515). Треугольники OAB и $OA'B'$ подобны по первому признаку подобия: $OA : OA' = OB : O'B'$ и $\angle AOB = \angle A'OB'$. Значит, $A'B' = |k|AB$ и $A'B'$ параллельна AB.

Понятно, что середина AB переходит при гомотетии в середину $A'B'$ и вообще, точка, делящая AB в каком-то отношении, переходит в точку на $A'B'$, делящую этот отрезок в том же отношении.

Из предыдущего утверждения следует, что при гомотетии с коэффициентом k треугольник ABC переходит в подобный ему с коэффициентом $|k|$ треугольник $A'B'C'$ (рис. 516). При этом стороны треугольников соответственно параллельны, а одинаково расположенные относительно этих треугольников точки соответствуют друг другу при гомотетии.

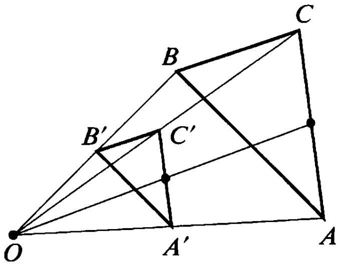


Рис. 516

Последнее утверждение легко распространяется на многоугольники. Ведь каждый многоугольник F можно разбить на треугольники, которые в результате гомотетии перейдут в подобные и так же расположенные треугольники, образующие многоугольник F', подобный многоугольнику F с коэффициентом k.

Доказательство этого утверждения для произвольных фигур мы опустим, считая его очевидным. ▼

▲■● Задачи, задания, вопросы

1466(в). На плоскости даны три точки O, A и A', расположенные на одной прямой. Пусть гомотетия с центром в O переводит A в A'. Возьмём на плоскости произвольную точку B. Постройте точку B', в которую переходит B при той же гомотетии.

1467. На плоскости даны два параллельных отрезка. Сколько существует гомотетий, переводящих один отрезок в другой? Постройте центры этих гомотетий.

1468. На прямой даны точки A, B, A' и B'. Постройте центр гомотетии, при которой точка A переходит в A', а точка B переходит в B'.

13.3

1469(в). Докажите, что для любых двух неконцентрических и неравных окружностей существует ровно две гомотетии, переводящие одну окружность в другую. Постройте центры этих гомотетий.

1470(в). Докажите, что любые два неравных треугольника с соответственно параллельными сторонами гомотетичны.

1471(в). На плоскости даны окружность и точка A. Какую линию описывает середина отрезка AB, если точка B описывает данную окружность?

1472. На плоскости даны два параллельных отрезка AB и KM. Найдите геометрическое место центров всевозможных гомотетий, переводящих AB в отрезок $A'B'$, расположенный на KM.

Приложения

Проверь свои знания

Каждое из ста приведённых ниже утверждений либо верно, либо неверно. В соответствующей клетке заранее подготовленной таблицы нужно написать «да», если вы считаете утверждение верным, и «нет», если неверным; если нет уверенности в ответе — сделайте прочерк.

Сверьте свои ответы с приведёнными в конце (с. 448). За каждый правильный ответ вы получаете 1 очко, в случае неверного ответа нужно вычесть из набранной суммы 2 очка, за сделанный прочерк — 0 очков. Если набрано больше 85 очков — вы очень хорошо знаете предмет (оценка 5); 71—85 очков — знания можно оценить как хорошие (оценка 4); 46—71 очко — знания удовлетворительные (оценка 3).

На всю работу отводится три часа. Можно сделать несколько перерывов по 5—10 минут. (Время перерывов не учитывается и в сумме не должно превышать одного часа.)

1. Через любую точку плоскости можно провести прямую, параллельную данной прямой этой плоскости.

2. Если фигура имеет более одной оси симметрии, то она имеет центр симметрии.

3. Через любую точку плоскости можно провести прямую, перпендикулярную данной прямой плоскости.

4. Не существует многоугольника, имеющего ровно 15 диагоналей.

5. Пусть A, B и C такие три точки плоскости, что имеет место равенство $\angle BAC = \angle BCA$. Тогда выполняется и равенство $BA = BC$.

6. Серединный перпендикуляр к основанию равнобедренного треугольника проходит через вершину этого треугольника.

7. Если в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ имеют место равенства $AB = A_1B_1$, $\angle ACB = \angle A_1C_1B_1$, $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, то эти треугольники равны.

8. Для любого треугольника ABC существует, и притом единственная, окружность, касающаяся прямых AB, BC и CA.

9. Если треугольник можно разрезать на два равных треугольника, то этот треугольник равнобедренный.

10. Не существует треугольника со сторонами $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, 6.

11. В треугольнике, два угла которого равны $\frac{2\pi}{5}$ и $\frac{2\pi}{7}$, наибольшей является сторона, соединяющая вершины этих углов.

12. Если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна противоположной стороне треугольника, то этот треугольник является равнобедренным.

13. Если для четырёхугольника $ABCD$ имеет место равенство $AB + CD = BC + AD$, то существует окружность, касающаяся прямых AB, BC, CD и DA.

14. Не существует треугольника, две биссектрисы которого перпендикулярны.

15. Не существует треугольника, две высоты которого перпендикулярны.

16. Если радиус окружности, описанной около треугольника, равен стороне треугольника, то угол, противолежащий этой стороне, равен $30°$.

17. Треугольник, в котором одна из сторон равна опущенной на эту сторону высоте, а противолежащий угол меньше $45°$, является тупоугольным.

18. В тупоугольном треугольнике квадрат наибольшей стороны меньше суммы квадратов двух других сторон.

19. В произвольном треугольнике наименьшей является медиана, проведённая к наибольшей стороне.

20. В любой четырёхугольник со сторонами 8, 9, 10 и 12 нельзя вписать окружность.

21. Трапецией называется четырёхугольник, у которого две какие-то противоположные стороны параллельны.

22. Существует четырёхугольник, площадь которого больше половины произведения его диагоналей.

23. Четырёхугольник, все углы которого прямые, — параллелограмм.

24. Если у четырёхугольника суммы противоположных углов равны, то в этот четырёхугольник можно вписать окружность.

25. Если у четырёхугольника равны диагонали, то этот четырёхугольник является прямоугольником.

26. Если каждая из диагоналей четырёхугольника делит пополам два его угла, то этот четырёхугольник является ромбом.

27. Если диагонали четырёхугольника делят его на четыре равновеликих треугольника, то этот четырёхугольник является параллелограммом.

28. Если диагонали четырёхугольника делят его на четыре треугольника таким образом, что два противоположных треугольника равновелики, а два других — нет, то этот четырёхугольник является трапецией.

29. Имеется последовательность многоугольников, вписанных в одну и ту же окружность. Известно, что длина наибольшей стороны этих многоугольников стремится к нулю. Тогда периметр этих многоугольников стремится к длине окружности.

30. Если внутри некоторого многоугольника расположен другой многоугольник, то периметр второго (расположенного внутри) многоугольника меньше периметра первого.

31. Среди всех окружностей, содержащих данный треугольник (вершины могут располагаться на окружности), наименьший радиус имеет описанная окружность.

32. Середины сторон произвольного четырёхугольника являются вершинами параллелограмма.

33. Существует треугольник, высоты которого меньше 1 см, а площадь больше 1 м^2.

34. Для любого треугольника ABC имеет место равенство $AB \cdot A_1C = AC \cdot A_1B$, где A_1 — точка, в которой биссектриса угла BAC пересекает BC.

35. Нельзя расположить на плоскости пять различных попарно касающихся окружностей.

36. Центр описанной около треугольника окружности всегда расположен внутри треугольника.

37. Центр вписанной в треугольник окружности всегда расположен внутри треугольника.

38. Серединные перпендикуляры к сторонам треугольника пересекаются в центре вписанной в этот треугольник окружности.

39. Если уменьшить все стороны треугольника, то уменьшится и его площадь.

40. Прямые, проходящие через вершины треугольника и делящие пополам его площадь, пересекаются в одной точке.

41. Если в треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей, то этот треугольник является правильным.

42. Для любого угла α имеет место равенство $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

43. Геометрическим местом проекций точки A на всевозможные прямые, проходящие через точку B, есть окружность с диаметром AB. (A и B — фиксированные точки плоскости, рассматриваются прямые, принадлежащие этой плоскости.)

44. Расстояние между центрами двух лежащих в одной плоскости и касающихся окружностей равно сумме их радиусов.

45. Средней линией треугольника называется прямая, параллельная одной из сторон треугольника и проходящая через середины двух его других сторон.

46. Синус тупого угла отрицателен.

47. Прямые, задаваемые уравнениями $2x + 3y = 1$ и $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, параллельны.

48. Если отношение любых двух сторон одного треугольника равно отношению двух соответствующих сторон другого треугольника, то такие треугольники являются подобными.

49. Расстояние между точками $A(-1; 2)$ и $B(2; -2)$ равно 5.

50. Если две стороны треугольника равны, а один из углов равен 60°, то этот треугольник — правильный.

51. Треугольник со сторонами 9, 40 и 41 является остроугольным.

52. При любом a уравнение $x^2 + y^2 = ax$ задаёт окружность.

53. Скалярное произведение двух векторов всегда положительно.

54. Существует единственный треугольник, у которого две стороны равны 7 и 8, а угол, противолежащий наименьшей из них, равен 60°.

55. Площадь треугольника с периметром 6 см не может быть больше 2 см^2.

56. Угол в три радиана больше, чем угол в 172°.

57. Из высот любого треугольника можно составить треугольник (стороны нового треугольника равны высотам исходного).

58. Не существует треугольника, у которого одна сторона равна 1, высота, опущенная на эту сторону, равна 10, а угол, противолежащий данной стороне, равен 30°.

59. Из медиан любого треугольника можно составить треугольник (построить треугольник, стороны которого равны медианам данного).

60. Сумма внешних углов любого выпуклого многоугольника равна 360°.

61. Радиус вписанной в треугольник окружности меньше половины любой высоты.

62. Существует треугольник, у которого две высоты находятся внутри треугольника, а одна — снаружи.

63. Пусть O — центр вписанной в треугольник ABC окружности. Известно, что $\angle AOC = 135°$. В этом треугольнике радиус описанной окружности равен медиане к стороне AC.

64. Если центр описанной около треугольника окружности лежит на его медиане, то этот треугольник равнобедренный.

65. Если четырёхугольник является одновременно и вписанным, и описанным, причём центры вписанной и описанной окружностей совпадают, то этот четырёхугольник является правильным.

66. Рассмотрим всевозможные выпуклые четырёхугольники с соответственно равными сторонами. Если в один из них можно вписать окружность, то и в каждый четырёхугольник также можно вписать окружность.

67. Центр окружности, описанной около треугольника со сторонами 5, 6 и 8, расположен внутри треугольника.

68. При изменении угла от 0° до 180° его косинус возрастает.

69. В любом треугольнике квадрат биссектрисы меньше произведения сторон, её заключающих.

70. Если радиус описанной около треугольника окружности равен половине одной из его сторон, то этот треугольник — прямоугольный.

71. Если радиус описанной около треугольника окружности равен какой-то медиане треугольника, то этот треугольник — прямоугольный.

72. В любом треугольнике с неравными сторонами высота проходит между биссектрисой и медианой, выходящими из той же вершины.

73. В любом треугольнике высота меньше медианы, выходящей из той же вершины.

74. Скалярное произведение двух векторов всегда меньше произведения их длин.

75. Треугольник, у которого радиус вписанной окружности равен 1, а периметр равен 6, невозможен.

76. Существует треугольник, у которого сумма двух сторон равна 2, а медиана к третьей стороне равна 1.

77. Справедливо равенство $\cos^2 45° = \cos 60°$.

78. Прямая, проходящая через точку пересечения диагоналей трапеции и середину одной из его сторон, проходит и через точку, в которой пересекаются продолжения непараллельных сторон трапеции.

79. Диагонали четырёхугольника, у которого две противоположные стороны равны 8 и 1, а две другие 7 и 4, перпендикулярны.

80. Пусть две окружности пересекаются в точках A и B, M — некоторая точка, расположенная на прямой AB вне отрезка AB. Тогда касательные к данным окружностям, проведённые из точки M, равны.

81. Проведём через данную точку A произвольную прямую, пересекающую данную окружность в точках B и C. Произведение $AB \cdot AC$ постоянно и не зависит от прямой.

82. Площадь треугольника может быть вычислена по формуле $S = R^2 \sin A \sin B \sin C$, где R — радиус описанной окружности, A, B и C — углы треугольника.

83. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то один из векторов равен нулю.

84. На плоскости отмечены четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Существует единственный четырёхугольник, вершинами которого являются эти точки.

85. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два вектора плоскости. Тогда для любого вектора $\vec{m}$ существует пара чисел x и y такая, что $\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b}$.

86. Площадь круга больше полусуммы вписанного и описанного квадрата.

87. Если все углы вписанного многоугольника равны между собой, то этот многоугольник является правильным.

88. Если угол одного треугольника равен углу другого, а две стороны первого пропорциональны соответствующей паре сторон второго, то эти треугольники подобны.

89. Если все стороны описанного многоугольника равны между собой, то этот многоугольник является правильным.

90. Отношение длины окружности к её диаметру больше, чем 3,14.

91. Геометрическим местом точек M плоскости, для которых треугольник ABM является равнобедренным, где A и B — две фиксированные точки плоскости, есть серединный перпендикуляр к отрезку AB.

92. Угол, вершина которого совпадает с центром вписанной в треугольник окружности, а каждая из сторон проходит через вершину этого треугольника, обязательно является тупым.

93. При любых a, b и c уравнение $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ задаёт на координатной плоскости окружность или точку.

94. Уравнения $y = kx + b$ и $x + ky = d$ при любых k, b и d задают на координатной плоскости пару перпендикулярных прямых.

95. Если высота треугольника равна 6 и делит сторону, на которую она опущена, на отрезки длиной 4 и 9, то этот треугольник является прямоугольным.

96. Если для треугольника выполняется неравенство $p - a < r$, где p, a и r — соответственно полупериметр, одна из сторон и радиус вписанной окружности, то этот треугольник — тупоугольный.

97. Треугольник, у которого две стороны равны 1 и 2, а угол между ними 59°, является тупоугольным.

98. Существуют два различных треугольника, в каждом из которых две стороны равны 10 см и 7 см, а угол, противолежащий меньшей из этих сторон, равен 45°.

99. Если радиус описанной около треугольника окружности в два раза больше радиуса вписанной в него окружности, то этот треугольник правильный.

100. Нельзя расположить на плоскости три непересекающиеся окружности так, чтобы нашлось не менее семи различных окружностей, касающихся этих трёх.

Ответы

1	нет	21	нет	41	да	61	да	81	да
2	нет	22	нет	42	нет	62	нет	82	нет
3	да	23	да	43	да	63	да	83	нет
4	да	24	нет	44	нет	64	нет	84	нет
5	нет	25	нет	45	нет	65	да	85	нет
6	да	26	да	46	нет	66	да	86	да
7	да	27	да	47	нет	67	нет	87	нет
8	нет	28	да	48	да	68	нет	88	нет
9	да	29	нет	49	да	69	да	89	нет
10	да	30	нет	50	да	70	да	90	да
11	нет	31	нет	51	нет	71	нет	91	нет
12	да	32	да	52	нет	72	нет	92	да
13	да	33	да	53	нет	73	нет	93	нет
14	да	34	да	54	нет	74	нет	94	да
15	нет	35	нет	55	да	75	да	95	да
16	да	36	нет	56	нет	76	нет	96	да
17	да	37	да	57	нет	77	да	97	да
18	да	38	нет	58	да	78	да	98	нет
19	да	39	нет	59	да	79	да	99	да
20	да	40	да	60	да	80	да	100	нет

Ответы и указания

7 класс

$\boxed{2.1}$ **49.** Точка A лежит между B и C. **52.** а) 1; б) $\frac{6}{5}$; в) $2\frac{1}{2}$; г) $1\frac{5}{7}$; д) 0,5; е) 2; ж) 1. **53.** Кроме ответов, указанных в задаче 4, возможны ещё следующие значения для BM: а) 3; б) 6; в) $3\frac{3}{4}$; г) 12. **54.** 0,5. **56.** а) 9,9 и 1,5; б) 4,9 и 0,7. **58.** а) 3,4; б) 2,3; в) 6 или 1. **59.** а) Один отрезок и два луча; б) три отрезка и четыре луча; в) шесть отрезков и шесть лучей; г) десять отрезков и восемь лучей. **60.** а) 4,3; 0,9; 1,9; 1,5; б) 6,2; 1,6; 2,6; 2; в) 6,7; 0,7; 4,1; 1,9. **61.** $1\frac{1}{3}$. **62.** Возможны три варианта ответа: $KM = 1\frac{1}{3}$; $KM = 2$; $KM = 4$. **64.** $CA = 3{,}3$. **65.** 1,3. **73.** Задача имеет два решения: точка M может быть серединой AB, а также лежать на луче BA так, что $BM = 3$. **74.** Если точки движутся в одном направлении, то середина отрезка переместится на величину $\frac{3+1}{2} = 2$. Если в разных, то на величину $\frac{3-1}{2} = 1$. **75.** $\frac{BM}{MC} = \frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. **76.** а) Точка M лежит на BC, причём $BM = 1\frac{1}{2}$; б) подходят все точки отрезка BC, включая его концы. **81.** Во всех случаях $MM_2 = 2AB = 2$. **86.** а) 6; б) –2,7; в) 3,2; г) –47,4. **88.** а) 3; б) –0,7; в) 11. **90.** В первом случае колодец надо вырыть возле дома B. Во втором — где угодно на отрезке BC.

$\boxed{2.2}$ **101.** Три или четыре. **103.** На семь частей. Отрезков три, лучей шесть. **106.** Четырьмя параллельными прямыми. **109.** По разные стороны.

$\boxed{2.3}$ **133.** 110°. **134.** 30°. **139**. Первый угол больше второго на 20°. **144.** 88°. **145.** Две. **146.** а) 160° или 4°; б) 27° или 11°. **147.** а) 70°, 98°, 140°; б) 70°, 112°, 140°; в) 125°, 173°, 110°; г) 125°, 172°, 110°; д) 139°, 157°, 82°; е) 139°, 100°, 82°. **148.** В каждом пункте имеются четыре возможности. а) 99°, 35°, 33°, 31°; б) 110°, 85°, 72°, 94°; в) 104°, 122°, 160°, 142°. **163.** Углы между прямыми равны 28°, 36°, 64°. **151.** 3. **152.** 5. **154.** $90° - \frac{\alpha}{2}$. **156.** 60° или 20°. **158.** $180° - \frac{\alpha}{2}$. **159.** 60°.

2.4 **178.** а) 2; б) 2 или 4. **185.** 2. **189.** 2; 2; 2. **190.** а) 15; б) 200,21; в) 25,3; г) $\frac{1913}{1001}$; д) такой треугольник невозможен. **191.** Периметр треугольника BCM больше на $\frac{1}{2}$. **192.** 3 : 1. **193.** 21. 194. 6. **213.** 9; 14. Число диагоналей стоугольника равно 4850. **215.** Нет. **216.** 10 треугольников и один пятиугольник.

3.1 **229.** Может. **240.** 1. **241.** Пополам. **244.** 40°. 245. 90°.

3.2 **255.** $\triangle BAK = \triangle MAC$, $\triangle BAC = \triangle MAK$, $\triangle BKC = \triangle MCK$, $\triangle BCM = \triangle MKB$. **283.** 5 и 3. **284.** 1. **297.** $AP = 2$. **298.** $AK = 5$, $BK = 2$. (Точка K находится на продолжении стороны AB за точку B.) **299.** $AK = AM = 3$, $BK = BL = 2$, $CL = CM = 4$. **308.** $BC = 5$, $PK = 3$.

3.3 **333.** Угол ABC — наибольший, угол ACB — наименьший. **334.** 3. **340.** Можно (все окружности касаются друг друга в одной точке). **345.** а) от 3 до 11; б) от 3 до 11; в) от 0 до 15. **346.** а) $AB = 1$, $AC = 7$; б) $AB = 2$, $AC = 8$. **347.** $AC = 3{,}7$. **349.** $AB = 7$. **350.** 19,7. **353.** $b > a$. **355.** а) Наибольшее значение AB равно 15, наименьшее равно 1; б) 5 и 0. **356.** Время путешествия не меньше $\frac{1}{7}$ ч, но не больше 1 ч. **362.** Во всех случаях задача имеет четыре решения: а) $\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{2}$; б) 1, 2, 3, 4; в) 1, 2, 3, 6. **365.** Задача имеет четыре решения. Радиусы окружностей с центрами в вершинах, соответственно противоположных сторонам 5, 6 и 7, могут быть равны: 1) 4, 3, 2; 2) 9, 2, 3; 3) 2, 9, 4; 4) 3, 4, 9. **366.** Возможны три треугольника со сторонами: 2, 3 и 4; 2, 4 и 5; 3, 4 и 5. **367.** Диагональ равна 2,8.

4.4 **416.** $AM : MD = 38 : 33$. **417.** 0,6. 418. $KM : MP = 3 : 1$. **419.** 2,5 или 0,5. **420.** 2, $3\frac{3}{5}$, $4\frac{1}{2}$. **421.** 140°. **422.** 80° или 60°. **423.** 60°. 424. 11. **425.** 5. **426.** 7 или 9. **427.** $AD = 4$.

8 класс

5.1 **479.** 20° и 160°. **492.** Три треугольника, или треугольник и четырёхугольник, или один пятиугольник. **493.** 3. **497.** а) 65°, 4°; б) 89°, 88°. **498.** Нет, не следует. **503.** 60°. 519. Для всех пунктов ответ один: 360°. **521.** $\angle ABC = 65°$, $\angle ACB = 35°$, $\angle CAB = 80°$. **527.** а) 40°, 40°, 100°; б) 80°, 80°, 20° или 50°, 50°, 80°. **528.** 140°. **529.** б) $\angle MKC = \frac{\alpha}{2}$, $\angle KMC = \frac{\beta}{2}$, $\angle KCM = 180° - \frac{\alpha + \beta}{2}$. **532.** 36°, 72°, 72°. **534.** 36°, 72°, 72° или 90°, 45°, 45°. 539. 40°, 90°, 50°. **544.** α или (180° – α). **546.** а) 80°, 70°, 30°; б) 30°, 40°, 110°. **550.** 180°. **551.** $90° + \frac{\alpha}{2}$. **552.** 20°, 30°, 130°. **553.** $\angle KPM = 45°$. **554.** 90° – α. **560.** $\angle AKM = \alpha$. **561.** а) $\angle OA_4A_5 = \angle OA_5A_4 = 80°$, $\angle A_4A_1A_5 = 30°$; б) 70°, 10°, 100°. **562.** 12°, 132°, 36°. **565.** $\angle ACB_1 = 60°$, $\angle KPM = 120°$.

5.2 **568.** 30°, 45°, 105°. **569.** 65°, 85°, 30°. **570.** 120°. **572.** $AC = 1$. **573.** 30° или 150°. **574.** 79°, 1°. **576.** $\angle ABC = 112°$, $\angle BCD = 77°$, $\angle CDA = 68°$, $\angle DAB = 103°$. **579.** 140°. **580.** 52°. **581.** Задача имеет четыре решения. Углы A, B, C и D четырёхугольника могут быть равными соответственно следующим величинам: 1) 80°, 60°, 100°, 120°; 2) 60°, 80°, 100°, 120°; 3) 120°, 100°, 60°, 80°; 4) 100°, 120°, 80°, 60°. **582.** В первом случае сумма углов равна 180°, во втором 540°. **585.** 2.

5.3 **588.** 48°. **589.** 66°. **590.** 30°, 40°, 110°.

5.4 **621.** 50°, 60°, 70°. **622.** 44°. **623.** 25°, 40°, 115°. **625.** $AB = 1$. **627.** $\angle BA_1C = \alpha$, $\angle BC_1A = \beta$, $\angle A_1BC_1 = 180° - \alpha - \beta$. **630.** 3 и 4. **634.** 1 для пунктов а) и б). **635.** 1,5 и 3,5. 640. 20°.

6.1 **651.** У прямоугольника и ромба две оси симметрии, у квадрата — четыре. **655.** 4 см и 6 см. **656.** 50°. **657.** 40°. **670.** а) Нет, не верно; б) верно; в) нет, не верно; г) нет, не верно; д) верно. **671.** Нет. **672.** 1. **673.** 2. **678.** 45°. **679.** 90°. **681.** 40° или 50°. **683.** $AD = BC = 4$, $AB = CD = 3$. **686.** Задача имеет восемь решений. Стороны исходного параллелограмма равны 1 и 5; 4 и 5; 3 и 7; 4 и 7; 3 и 8; 5 и 8; 5 и 7; 2 и 7. **696.** 60° и 60°.

6.2 **711.** 10 см. **712.** 4 и 6. **713.** $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$. **714.** 6 см и 15 см. **715.** В 2 раза. **724.** $3\frac{3}{4}$. **727.** $\frac{1}{2}|a - b|$. **739.** $4\frac{1}{2}$. **740.** $\frac{2a + b}{3}$, $\frac{a + 2b}{3}$. **746.** 60° и 120°. **747.** $\frac{(b + d) - (a + c)}{2}$. **748.** $0{,}5P$. **756.** $\frac{1}{2}$.

6.3 **781.** Нет. **788.** $\frac{1}{2}$. **789.** k. **790.** 30°. **791.** $\frac{1}{2}$. **792.** $\frac{1}{3}$. **794.** $7\frac{1}{2}$. **797.** 2. **798.** 2. **799.** 120°. **801.** 8 и 27. **804.** 4. **805.** 1. **806.** 4,2. **809.** $\sqrt{ab}$. **810.** $\frac{2ab}{a + b}$. **811.** $a\frac{r}{R}$. **812.** а) $\frac{3}{8}\sqrt{3}$ и $\frac{5}{8}\sqrt{3}$ или $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ и $\frac{5}{2}\sqrt{3}$; б) $\frac{3}{8}\sqrt{5}$ и $\frac{5}{8}\sqrt{5}$. **813.** а) Бóльшая сторона равна $\frac{\sqrt{5} + 1}{2}$. Точка M находится на расстояниях $\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\frac{5-\sqrt{5}}{10}$ соответственно от левой и нижней сторон исходного прямоугольника. **814.** $\triangle ABD \backsim \triangle DAC$. **815.** а) 19,52; б) 38; в) такая пирамида невозможна.

$\boxed{7.1}$ **825.** $2\frac{2}{5}$, $1\frac{4}{5}$, $3\frac{1}{5}$. **826.** $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$. **831.** 5 и 12. **833.** 1 и 4. **834.** 13. **835.** $\sqrt{5}$. **849.** $a\frac{\sqrt{3}}{2}$, $a\frac{\sqrt{3}}{3}$, $a\frac{\sqrt{3}}{6}$. **850.** $\frac{5}{7}a$. **851.** $a\sqrt{2}$. **852.** $\sqrt{5}$. **857.** Высота равна $\frac{4}{9}\sqrt{110}$ и делит сторону на отрезки $3\frac{7}{9}$, $5\frac{2}{9}$. **858.** $7\frac{1}{2}$. **860.** 90°. **861.** $6\frac{18}{25}$. **863.** $\frac{a+b}{2}$. **864.** 9. **865.** 15°. **866.** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. **868.** $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

$\boxed{7.2}$ **917.** а) $\cos\alpha = \pm\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{3}{4}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \pm\frac{4}{3}$; б) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; в) $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$. **919.** $\frac{2\sqrt{30}+1}{12}$ и $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{12}$. **920.** $3\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\frac{3}{\sqrt{2}}$. **921.** $-\frac{13}{20}$, $\frac{111}{120}$, $\frac{89}{100}$. **923.** а) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}$, $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$; б) $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ или $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. **926.** а) Остроугольный; б) тупоугольный; в) прямоугольный; г) тупоугольный; д) остроугольный; е) такой треугольник невозможен. **927.** $\frac{3+\sqrt{37}}{2}$. **941.** $3\sqrt{10}$. **942.** $8\sqrt{\frac{2}{15}}$. **943.** 6, $\frac{1}{4}\sqrt{274}$. **944.** $-3+\sqrt{22}$. **946.** $\frac{\sqrt{14}}{12}$. **947.** $\sin 15° = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\cos 15° = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 15° = 2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15° = 2+\sqrt{3}$. **948.** $\sin 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$, $\cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$. **949.** $\sqrt{\frac{2}{3}}$. **950.** $\frac{ab}{2h}$. **951.** $\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$, $2(\sqrt{3}-1)$. **952.** $\frac{b^2}{2h}$, $\frac{a^2+4h^2}{8h}$, $\frac{b^2}{\sqrt{4b^2-a^2}}$. **953.** $\frac{5}{6}\sqrt{13}$. **954.** $\frac{4}{3}\sqrt{\frac{46}{15}}$. **956.** $\frac{\sqrt{10}}{4}$. **957.** $\sqrt{2}$. **958.** $2\left(2R\sin\alpha + r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)$. **959.** $2a(1+\cos\alpha)$. **960.** $\frac{ab}{c}$. **961.** $\frac{a}{2\sin\alpha}$. **962.** $\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}}$.

$\boxed{7.3}$ **973.** 3. **974.** Окружность радиусом $\sqrt{CA\cdot CB}$ с центром в C, за исключением двух точек, в которых эта окружность пересекается с AB.

975. $2\frac{1}{2}$ и 2. **976.** 1 : 6. **978.** 3. **979.** $4\sqrt{2}$. **980.** 1 : 7. **981.** $\sqrt{2}$. **982.** $3\sqrt{3}$.

983. 90°. **984.** 1,1. **985.** 1 : 4. **987.** 2. **989.** $\frac{128}{63}$.

8.1 **991.** 140°, 20°, 160°. **993.** а) 55°, 65°, 60°; б) 5°, 15°, 160°. **995.** $\angle BJC = 90° + \frac{\alpha}{2}$, $\angle BJ_aC = 90° - \frac{\alpha}{2}$, $\angle BJ_bC = \frac{\alpha}{2}$. **996.** 10°. **1002.** $180° - \alpha$ или α.

1010. $\frac{3}{4}$. **1017.** $\frac{5}{8}a$.

8.2 **1031.** 4 : 3. **1032.** 1 : 2. **1035.** $\frac{1}{6}\sqrt{145}$. **1036.** $\frac{\sqrt{2380}}{11}$, $\frac{\sqrt{2380}}{17}$.

1037. а) $p = \frac{9}{2}$, $l = \frac{8}{3}$; б) $p = 5$, $l = 1$; в) $m = \frac{2}{3}$, $l = 5$; г) $m = \frac{1}{2}$, $p = 3$; д) $k = \frac{1}{4}$, $p = 15$; е) $k = \frac{1}{3}$, $m = 2$. **1038.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{1}{12}$; в) $\frac{5}{4}$. **1039.** $\sqrt{ab}$.

1040. $\sqrt{ab}$. **1041.** $\sqrt{ab}$. **1042.** $\sqrt{ab}$. **1043.** $\sqrt{ab}$. **1044.** $\sqrt{ab}$. **1045.** $\sqrt{ab}$.

1046. $\sqrt{ab}$. **1048.** $\frac{ab}{a - b}$.

8.4 **1071.** 8. **1075.** $2\sqrt{30}$.

8.5 **1085.** 4. **1088.** $\angle AOB = 2C$, $\angle AJB = 90° + \frac{1}{2}C$. **1089.** 60°.

1093. $\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}$. **1094.** 30°. **1095.** 2.

8.6 **1100.** а) $\frac{1}{3}$; б) $\sqrt{2} - 1$. **1101.** $\frac{R^2 - a^2}{2R}$. **1102.** $\frac{2}{\sqrt{5}}R$. **1103.** $\frac{2R}{\sqrt{10}}$.

1105. $\frac{4Rr(R - r)}{(R + r)^2}$. **1106.** 4, 3, 5. **1107.** $\sqrt{l^2 - (R + r)^2}$. **1108.** $2 \pm \sqrt{3}$.

1109. $\frac{R}{4}$, $\frac{R}{18}$. **1110.** $\frac{\sqrt{17} - 2\sqrt{3}}{5}$. **1111.** $\frac{5}{8}$. **1112.** а) $\frac{9}{4}$ и $\frac{9}{2}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{9}{2}$ и $\frac{9}{10}$.

1113. p. **1114.** $\frac{Rr}{(\sqrt{R} \pm \sqrt{r})^2}$.

8.7 **1115.** а) 20°, 100°, 60°; б) 120°, 20°, 40°; в) 30°, 50°, 100°. **1116.** Нет. **1117.** 50°, 60°, 70°. **1118.** а) 2°, 158°, 20°; б) 32°, 18°, 130°; в) 40°, 12°, 128°.

1121. $12\sqrt{13}$, $18\sqrt{13}$. **1122.** 18, $12\sqrt{2}$. **1123.** $\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$. **1124.** 30°.

1125. $3(\sqrt{2} - 1)$. **1126.** 6, 25. **1127.** $\sqrt{3}$. **1128.** $\frac{30 - 5\sqrt{14}}{11}$. **1129.** 45° или 135°. **1130.** $R\sqrt{3}$. **1131.** $\frac{a}{\sqrt{3}}$ и $\frac{a}{2\sqrt{3}}$. **1132.** 3, $13\frac{1}{3}$, $2\frac{38}{41}$. **1133.** 6.

1134. а) $4\frac{4}{5}$; б) $20\frac{4}{5}$. **1135.** $2r\sqrt{3}$ и $2r$. **1136.** 4°. **1137.** 2. **1138.** $\frac{37}{2\sqrt{7}}$.

1139. $\angle ODM = \alpha$. **1140.** 90°. **1141.** $\frac{1}{2}\sqrt{15}$. **1142.** 4. **1143.** $\sqrt{r^2 - \frac{d^2}{4}}$.

1147. Если $a < \frac{\sqrt{3}}{2}$, то решений нет; если $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, то $AC = \frac{1}{2}$; если $\frac{\sqrt{3}}{2} < a < 1$, то $AC = \frac{1 \pm \sqrt{4a^2 - 3}}{2}$; если $a \geqslant 1$, то $AC = \frac{1 + \sqrt{4a^2 - 3}}{2}$.

1148. $3\sqrt{30}$. **1151.** $\sqrt{6}$. **1152.** $\frac{31\sqrt{2353}\sqrt{193}}{504}$. **1157.** 2. **1158.** а) 15°, 100°, 65°; б) 30°, 80°, 70°. **1159.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **1160.** 50°, 60°, 70°. **1161.** 30°, 60°, 90°.

1162. $\sqrt{10} : 4$. **1163.** $\sqrt{13}$. **1164.** $\dfrac{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}{1 + \sin\frac{\alpha}{2}}$. **1165.** $\frac{a + b - 2\sqrt{ab}\cos\alpha}{2\sin\alpha}$.

1166. $\frac{\sin(3\alpha - 180°)}{\sin\alpha}$. **1167.** $\sqrt{3}$. **1168.** 45°. **1169.** $\frac{5}{3}$. **1171.** 3 : 1.

1172. $\frac{\sqrt{6}}{2}$. **1173.** 2. **1176.** 30°, 40°, 110°. **1179.** 80°. **1184.** 80°, 60° и 70°. **1185.** 80°. **1186.** 32°, 52° и 96°. **1187.** 30°, 60° и 90°. **1188.** 30°, 60° и 90°. **1190.** 44°, 68° и 68°. **1191.** 90°. **1192.** 3. **1193.** 3. **1194.** 6. **1195.** 14. **1196.** 279° и 90°. **1197.** 60°, 60° и 60°. **1198.** 17 см. **1199.** а) 50°, 60° и 70°; б) 15°, 40° и 125°. **1200.** 75°. **1202.** 105°, 125° и 130°. **1203.** Равносторонний. **1205.** Нет. **1206.** 6 см. **1207.** 21 см. **1211.** Да (или квадрат). **1214.** 9 см. **1217.** 18 см. **1218.** 26 см. **1219.** 1 : 2. **1221.** BOF и DOA, $k = \frac{1}{3}$. **1222.** Нет. **1223.** Да. **1224.** Да. **1225.** Да. **1227.** 70 см.

1228. $3\sqrt{34}$ см, 15 см. **1229.** $3\sqrt{2}$ см. **1230.** $7\sqrt{2}$ см. **1231.** $\sqrt{2}$ см. **1232.** 26 см. **1233.** 20 см. **1234.** 15 см. **1235.** 20 см. **1237.** 72 см. **1238.** 40 см и 40 см. **1239.** 12 см. **1258.** 9. **1259.** $B_1C + CD_1 = p$. **1260.** $a - b$. **1261.** $a + b$. **1270.** 90°. **1272.** $0{,}5(a - b)$. **1284.** 6. **1285.** 2, 8, 3.

9 класс

10.1 **1298.** Увеличится в k^2 раз. **1301.** d^2.

10.2 **1306.** 1) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **1310.** Площадь такого треугольника может быть сколь угодно большой. **1312.** Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, параллельных AB и симметричных относительно AB. Одна из них проходит через C. **1313.** Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, проходящих через A. Одна из них проходит через середину

BC, а другая параллельна BC. **1314**. а) $4\sqrt{26}$; б) $13\frac{1}{2}$; в) $21\frac{1}{2}$. **1315**. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
1319. $\sqrt{pq}$. **1321**. 25. **1324**. $\frac{pq}{r}$. **1325**. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$. **1326**. 1. **1329**. 6 или $4+\sqrt{2}$. **1332**. $\sqrt{3}$. **1333**. $ab+bc+ca$. **1334**. 1; 3; $1\frac{1}{2}$; $3\frac{1}{2}$.

10.3 **1337**. $\frac{ab\sqrt{2}}{a+b}$. **1338**. $\frac{2ab}{a\sqrt{3}+b}$. **1339**. $\frac{2}{7}$. **1340**. 1 : 14. **1341**. $\frac{11}{12}$.
1343. Если $\angle CBA = 90°$, то задача не имеет решения $\left(\angle CBA = 90°\text{, если } a = b\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. В остальных случаях $CM = \frac{ab}{|2a - b\sqrt{3}|}$. **1344**. $\frac{ab\sqrt{a^2+b^2}}{|a^2-b^2|}$.
1345. 5 : 13. **1346**. 5 : 3 : 2. **1347**. 0,4. **1350**. $\frac{3}{16}S$. **1352**. $\frac{c}{3}$.

10.4 **1354**. $R\sqrt{3}$, $R\sqrt{2}$, R. **1355**. $\frac{a_3}{\sqrt{3}}$ и $\frac{a_3}{2\sqrt{3}}$, $\frac{a_4}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a_4}{2}$, a_6 и $\frac{2a_6}{\sqrt{3}}$. **1361**. $\frac{R\sqrt{6}}{8}$. **1362**. $a_{10} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}R$. **1363**. $a_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$. **1365**. Нет, не следует. Нужный пример даёт нам прямоугольник. **1366**. Нет, не следует. Нужный пример даёт нам ромб.

11.1 **1372**. а) Величина «зазора» более 15 см; б) наибольшее расстояние от верёвки до поверхности земного шара будет более 122 м. **1374**. 3 : 4. **1375**. 57,3 м. **1376**. $\frac{\pi}{18}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{18}$, $\frac{5\pi}{9}$, $\frac{3}{4}\pi$, $\frac{35}{36}\pi$. **1377**. 5°, 30°, 90°, 144°, 45°50′10″, 171°53′49″, 19°6′.

11.2 **1379**. $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, 3, π, $12(2-\sqrt{3})$, $2\sqrt{3}$. **1380**. Площадь круга больше площади квадрата на величину $\frac{4-\pi}{16\pi}$. **1381**. $\sqrt{2\pi\sqrt{3}}$. **1382**. $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$.
1383. $\frac{5}{6}\pi - \sqrt{3}$. **1384**. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$. **1385**. $\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}$. **1386**. $1 + \frac{5\pi}{18}$.
1389. $6\sqrt{3} - 6 - \pi$. **1391**. Возможно. **1392**. $\frac{\pi ab}{4}$.

12.1 **1394**. а) $3\sqrt{2}$; б) $\sqrt{16,01}$; в) 5; г) 0,13. **1397**. (10; 0) и (18; 0).
1398. а) (1; 1); б) $\left(0; \frac{7}{3}\right)$; в) кроме точки, указанной в п. б), имеется ещё одна точка (−8; 13); г) $(1 \pm 4\sqrt{3},\ 1 \pm 3\sqrt{3})$; д) (1, 1).

12.2 **1399**. а) $x^2+y^2+2x-4y-5=0$; б) $x^2+y^2-4x-9=0$; в) $x^2+y^2-2x+4y-17=0$. **1400**. а) $y=2x-7$; б) $y=-3x+4$; в) $3x-2y=9$.

1401. а) $\sqrt{26} + \sqrt{5} + 1$ и $\sqrt{26} - \sqrt{5} - 1$; б) $\frac{\sqrt{10}}{2} + 1 + \frac{\sqrt{410}}{2}$ и $\frac{\sqrt{410}}{2} - 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$; в) $\frac{1}{2}(\sqrt{3} + 3 + \sqrt{6})$ и 0; г) $\frac{1}{2}(5\sqrt{2} + \sqrt{10})$ и $\frac{1}{2}(5\sqrt{2} - \sqrt{10})$. **1402**. а) Точка (2; 3); б) пустое множество; в) окружность с центром $\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right)$ и радиусом $\frac{1}{2}\sqrt{62}$; г) половина окружности с центром (0; 1) и радиусом $\sqrt{5}$, удовлетворяющая условию $y \geqslant 1$; д) две окружности: $x^2 + y^2 = 4$ и $x^2 + y^2 = 1$. **1403**. $3x - 7y - 2 = 0$. **1404**. а) Окружность: $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 12$; б) прямая: $x - y = 3$; в) окружность: $\left(x - \frac{11}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{32}{9}$; г) из условия следует, что $\angle AMB = 60°$. **1406**. а) $y = -\frac{x}{2}$; б) $4x + 3y = 12$; в) $y = x - 1$. **1407**. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{3}{\sqrt{10}}$; в) $\frac{6}{\sqrt{13}}$.

12.3 **1408**. (6; –4); (4; 0); (–2; 4); (7; –10); $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; (0; –2). **1409**. (2; –17); (6; –16); $\left(\frac{13}{6}; -\frac{23}{6}\right)$. **1410**. $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. **1417**. Точки M заполняют отрезок OA, где O — начало координат, $A(3; 4)$.

12.4 **1421**. а) 180°; б) 60°; в) 120°. **1422**. –3; 1; –22. **1424**. а) –33; б) –20; в) 12; г) –10; д) 10. **1425**. $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}; \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$. **1430**. а) Серединный перпендикуляр к AD; б) M — центр квадрата; в) окружность, описанная около квадрата. **1431**. $6R^2$.

12.5 **1432**. Окружность с центром в середине AB и радиусом $\sqrt{\frac{1}{2}}$. **1434**. Прямая, проходящая через середину гипотенузы AB и перпендикулярная ей. **1435**. $\frac{ab}{a+b}$. **1436**. а) Прямая, проходящая через B параллельно l; б) две прямые, параллельные l, на расстояниях 12 и $\frac{8}{3}$ от l, лежащие с той же стороны, что A и B; в) две прямые, параллельные l, удалённые на расстояния $\frac{4}{3}$ и 6 и лежащие по разные стороны от l. **1437**. $\frac{\sqrt{2}}{10}$. **1438**. 6 или 4. **1442**. Отрезок M_1M_2, M_1M_2 проходит через O, перпендикулярен биссектрисе $\angle BOA$, $M_1O = M_2O = \sqrt{2}$. **1445**. Искомое геометрическое место состоит из двух перпендикулярных прямых, проходящих через центр квадрата. **1446**. Искомое геометрическое место состоит из четырёх точек. **1450**. Искомое геометрическое место есть отрезок, соединяющий середины диагоналей данного четырёхугольника.

13.1 **1451**. Нет. **1453**. Таких движений 8. **1454**. $\left(-\frac{17}{5};\ \frac{26}{5}\right)$ или $\left(-\frac{17}{5};\ \frac{4}{5}\right)$. **1455**. Прямые AB и $A'B'$ перпендикулярны.

13.2 **1457**. а) (4; –2); б) (–3; 6); в) (2; 8). **1458**. а) $2x - 3y = 38$; б) $3x + 4y = 8$. **1459**. $\left(-\frac{25}{18};\ \frac{11}{6}\right)$. **1460**. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$; $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\ \frac{1}{2}\right)$. **1461**. а) 6; б) 18; в) 180. **1462**. Центром поворота будет точка пересечения серединных перпендикуляров к отрезкам AA' и BB'. **1464**. Искомое геометрическое место состоит из двух прямых, в которые переходит прямая l при повороте вокруг A на угол 60° в одну и противоположную сторону. **1465**. Шесть симметрий и шесть вращений.

13.3 **1467**. Если отрезки не равны, то таких гомотетий две. **1470**. Середина AB описывает окружность, гомотетичную данной с центром в A и коэффициентом $\frac{1}{2}$.

Предметный указатель

М

Н

О

П

Р

С

Оглавление

8 класс

9 класс

Учебное издание

ГЕОМЕТРИЯ

7—9 классы

Учебник

Зав. редакцией *О. В. Муравина*
Ответственный редактор *Т. С. Зельдман*
Редактор *И. В. Комарова*
Художественный редактор *М. Г. Мицкевич*
Художественное оформление *А. В. Копалин, В. В. Иванюк, Б. А. Гомон*
Технический редактор *И. В. Грибкова*
Компьютерная верстка *С. Л. Мамедова*
Корректор *И. Т. Белугина*

Сертификат соответствия
№ РОСС RU.AE51.H 15488.

Подписано к печати 02.04.12. Формат 60 × 90 $^1/_{16}$.
Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Усл. печ. л. 29,0. Тираж 3000 экз. Заказ № 1027.

ООО «Дрофа». 127018, Москва, Сущевский вал, 49.

Предложения и замечания по содержанию и оформлению книги просим направлять в редакцию общего образования издательства «Дрофа»: 127018, Москва, а/я 79. Тел.: (495) 795-05-41. E-mail: chief@drofa.ru

По вопросам приобретения продукции издательства «Дрофа» обращаться по адресу: 127018, Москва, Сущевский вал, 49.
Тел.: (495) 795-05-50, 795-05-51. Факс: (495) 795-05-52.

Торговый дом «Школьник». 109172, Москва, ул. Малые Каменщики, д. 6, стр. 1А.
Тел.: (499) 911-70-24, 912-15-16, 912-45-76.
Книжный магазин «УЗНАЙ-КА!».
127434, Москва, Дмитровское шоссе, д.25, корп.1.Тел.: (499) 976-48-60.
ООО «Абрис». 129075, Москва, ул.Калибровская, д.31А.
Тел./факс: (495) 981-10-39, 258-82-13, 258-82-14.http://www.textbook.ru
ООО «Разумник». 129110, Москва, Напрудный пер., д.15.
Тел.: (495) 961-50-08.http://www.razumnik.ru
Интернет-магазин «UMLIT.RU». http://www.umlit.ru
Интернет-магазин «Умник и К». http://www.umnikk.ru

Интернет-магазин: http://www.drofa.ru

105005, Москва, ул.Фридриха Энгельса, 46
ОАО «Типография «Новости»