К. Иосида

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

BAND 123

FUNCTIONAL ANALYSIS

by

KÔSAKU YOSIDA
Professor of mathematics
at the University of Tokyo

SPRINGER-VERLAG
BERLIN • GÖTTINGEN • HEIDELBERG
1965

К. ИОСИДА

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Перевод с английского

В. М. ВОЛОСОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1967

УДК 517. 43

Это обстоятельный учебник по функциональному анализу, написанный на высоком научном уровне.

Книга отличается последовательностью и систематичностью изложения, широтой охвата предмета (наряду с вопросами, относящимися собственно к функциональному анализу, подробно излагаются его приложения к дифференциальным уравнениям в частных производных и другим областям математики), а также тем, что кроме традиционного материала в ней приводится ряд результатов новейших исследований. Автор — профессор Токийского университета К. Иосида — известный специалист в области функционального анализа. В основу книги положен курс лекций, читавшийся им в течение ряда лет.

Для самостоятельного изучения книги требуется математическая подготовка примерно в объеме 2—3 курсов физико-математических факультетов. Ее можно рекомендовать аспирантам и студентам старших курсов физико-математических специальностей, а также всем, желающим усовершенствовать свои знания по функциональному анализу.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

Предисловие переводчика

В отечественной и переводной литературе по функциональному анализу, весьма обширной в настоящее время, имеется довольно много книг учебного характера и монографий. Здесь можно, например, упомянуть книги А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина [2*] [1]), В. И. Смирнова [1*], Л. А. Люстерника, В. И. Соболева [1*], Г. Е. Шилова [3*], Ф. Рисса, Б. С. Надя [3], Б. З. Вулиха [1*], Л. В. Канторовича, Г. П. Акилова [1], Н. И. Ахиезера, И. М. Глазмана [1], И. М. Гельфанда (с соавторами) [1], [3], [5], такие сочинения энциклопедического характера, как книги Н. Данфорда, Дж. Шварца [1], Э. Хилле, Р. Филлипса [1], Н. Бурбаки [2] и ряд других.

И тем не менее книга К. Иосида будет, как мы считаем, полезной и нужной для читателей, обладающих достаточной математической подготовкой (примерно в объеме программы 2—3 курсов физико-математических факультетов) и желающих углубить свои знания по функциональному анализу. Дело в том, что от обычных учебников курс профессора К. Иосида отличается более широким охватом различных разделов функционального анализа, современным, близким к уровню развития науки самых последних лет подходом к изложению материала и большим числом интересных приложений. Так, например, с самого начала широко используется понятие полунормы, рассматриваются такие вопросы, как теорема Хёрмандера о гипоэллиптических операторах, отрицательные нормы Лакса, ядерные операторы и пространства, теория почти-периодических функций на топологических группах, ряд задач теории марковских процессов, интегрирование уравнения диффузии в евклидовом и римановом пространствах и некоторые другие задачи, не являющиеся традиционными для учебника общего типа.

Часть содержания книги, в особенности двух последних глав (эргодическая теория, диффузионные процессы и эволюционные уравнения), непосредственно связана с собственными научными интересами автора. Последнее обстоятельство в известной степени определило

---

[1]) Здесь и далее ссылки относятся к списку литературы в конце книги. Звездочкой отмечены дополнительные названия, внесенные переводчиком в основной авторский список. — *Прим. перев.*

и выбор приложений, значительная часть которых относится к вышеупомянутым разделам математики. Многие результаты, вошедшие в книгу, раньше можно было найти лишь в специальных журналах (в особенности это относится к некоторым японским авторам); ряд результатов ранее не публиковался. С другой стороны, от больших по объему монографий, посвященных специальным вопросам и доступных лишь квалифицированным математикам, эта книга отличается последовательным изложением материала, постепенным нарастанием сложности и трудности изучаемых проблем, достаточно детальным рассмотрением основных понятий и, как правило, подробными доказательствами — именно теми чертами, которые делают эту книгу учебником повышенного типа, преследующим в первую очередь цели подготовки читателя к изучению специальной литературы и самостоятельной научной работе.

Следует отметить серьезный недостаток книги — в ней почти совсем нет упражнений для самостоятельного решения. Это обстоятельство, а также весь стиль изложения, рассчитанный на сравнительно квалифицированного читателя, делает книгу трудной для первоначального ознакомления с основами функционального анализа. Поэтому можно порекомендовать в качестве предварительной подготовки познакомиться с книгами А. Н. Колмогорова, С. В. Фомина [2*] или Л. А. Люстерника, В. И. Соболева [1*]. При работе над книгой может также оказаться полезным справочник „Функциональный анализ" (см. Н. Я. Виленкин и др. [2*]) в особенности при затруднениях с терминологией.

Несмотря на обилие включенных в книгу вопросов и широту охвата различных разделов функционального анализа, некоторые важные в теоретическом и прикладном плане проблемы остались в книге не затронутыми. Читатель не найдет в ней, например, теорем о неподвижных точках, нелинейных операторных уравнений, теории операторов в пространствах с конусом; такие важные понятия, как положительные операторы и функционалы, рассмотрены недостаточно подробно. Понятно, впрочем, что на нынешнем уровне развития функционального анализа никакой учебник не может охватить всех важных вопросов. Для изучения таких разделов читателю придется обратиться к другим книгам, в частности, упомянутые выше вопросы подробно освещены в книгах М. А. Красносельского [1*], [2*].

При переводе этой книги мы старались по возможности максимально приблизить терминологию к нормам, принятым в отечественной литературе. Текст перевода снабжен рядом примечаний, касающихся главным образом терминологии и обозначений и поясняющих детали формулировок некоторых определений и доказательств теорем.

В. М. Волосов

Предисловие

В основу этой книги положены лекции, читавшиеся автором в Токийском университете в течение последних десяти лет. Книга была задумана как учебник по курсу функционального анализа, охватывающему общую теорию линейных операторов в функциональных пространствах и ее важнейшие приложения в различных областях современного и классического анализа. Ее можно использовать и для самостоятельного изучения предмета.

Предварительные сведения, необходимые для чтения этой книги, приводятся (с доказательством или без) в введении в разделах „Теория множеств“, „Топологические пространства“, „Пространства с мерой“, „Линейные пространства“. Далее, начиная с главы, посвященной понятию полунормы, излагается общая теория банаховых и гильбертовых пространств, которые рассматриваются в тесной связи с теорией обобщенных функций С. Л. Соболева и Л. Шварца. В основном этот курс адресован студентам старших курсов, но мы надеемся, что книга будет полезна и тем, кто занимается исследовательской работой в области теоретической и прикладной математики. При желании читатель может после изучения гл. IX („Аналитическая теория полугрупп“) перейти прямо к гл. XIII („Эргодическая теория и диффузионные процессы“) и к гл. XIV („Интегрирование эволюционных уравнений“). Такие разделы теории, как „Слабые топологии и сопряженность в локально выпуклых линейных топологических пространствах“ и „Ядерные пространства“, представлены в виде приложений соответственно к гл. V и X. Читатель, интересующийся в первую очередь приложениями теории линейных операторов, может опустить этот материал при первом чтении книги.

При работе над книгой автор пользовался ценными советами и критическими замечаниями многих своих друзей. Автор чрезвычайно признателен госпоже К. Хилле, любезно взявшей на себя труд прочитать рукопись и корректуры книги. Без ее помощи было бы

трудно преодолеть стилистические трудности языка, не являющегося для автора родным. Автор также многим обязан своим старым друзьям профессорам Иельского университета Э. Хилле и Какутани и профессору Станфордского университета Филлипсу, ценными советами и указаниями которых автор пользовался при работе над рукописью этой книги во время своего пребывания в 1962 г. в Иельском и Станфордском университетах. Профессор С. Ито и доктор Коматсу из Токийского университета во многом помогли автору при чтении корректуры, исправляя ошибки и улучшая изложение. Автор выражает им всем свою глубокую благодарность.

Автор благодарен также профессору Гейдельбергского университета Шмидту и профессору Калифорнийского университета (Беркли) Като, чья поддержка постоянно воодушевляла автора, когда он писал эту книгу.

Косаку Иосида

Токио, сентябрь 1964 г.

Введение

В этой главе мы хотим ввести некоторые понятия и сформулировать ряд теорем, которые в дальнейшем будут постоянно использоваться. Эти понятия и теоремы относятся к теории множеств, топологическим пространствам, пространствам с мерой и линейным пространствам.

1. Теория множеств

Множества. Запись $x \in X$ означает, что x является *элементом* множества X; $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X. Множество, состоящее из всех x, обладающих некоторым свойством P, мы обозначим через $\{x; P\}$. Таким образом, $\{y; y = x\}$ — это множество, состоящее из единственного элемента x; такое множество будет обозначаться символом $\{x\}$. *Пустым* называется множество, не содержащее ни одного элемента, оно обозначается символом $\emptyset$. Если каждый элемент множества X принадлежит также и множеству Y, то X называется *подмножеством* множества Y, и это отношение выражается записью $X \subseteq Y$ или $Y \supseteq X$. Если $\mathfrak{X}$ — множество, элементами которого служат множества X, то множество всех x, таких, что $x \in X$ для некоторого $X \in \mathfrak{X}$, называется *объединением* множеств X из $\mathfrak{X}$; оно обозначается $\bigcup\limits_{X \in \mathfrak{X}} X$. *Пересечение* множеств X из $\mathfrak{X}$ определяется как множество всех x, принадлежащих каждому из множеств $X \in \mathfrak{X}$; оно обозначается $\bigcap\limits_{X \in \mathfrak{X}} X$. Два множества называются *непересекающимися*, если их пересечение пусто. Если последовательность $\{X_n\}_{n=1, 2, \ldots}$ состоит из попарно непересекающихся множеств, то для обозначения их объединения будет также применяться символ $\sum\limits_{n-1}^{\infty} X_n$.

Отображения. Термины *отображение*, *функция* и *преобразование* употребляются в дальнейшем как синонимы. Символ $f\colon X \to Y$ означает, что f — однозначная функция, *областью определения* которой служит множество X, а *область значений* содержится в множестве Y; каждому элементу $x \in X$ функция f ставит в соответствие однозначно определенный элемент $f(x)=y\in Y$. Для двух отображений $f\colon X\to Y$ и $g\colon Y\to Z$ мы можем определить их *композицию* $gf\colon X\to Z$ с помощью соотношения $(gf)(x)=g(f(x))$. Символ $f(M)$ обозначает множество $\{f(x);\ x\in M\}$, при этом $f(M)$ называется *образом* множества M при отображении f. Символ $f^{-1}(N)$ обозначает множество $\{x;\ f(x)\in N\}$, которое называется *прообразом* множества N при отображении f. Ясно, что

$$Y_1=f\left(f^{-1}(Y_1)\right)\quad \text{для всех}\quad Y_1\subseteq f(X);$$

$$X_1\subseteq f^{-1}(f(X_1))\quad \text{для всех}\quad X_1\subseteq X.$$

Если $f\colon X\to Y$ и для каждого $y\in f(X)$ существует только один элемент $x\in X$, такой, что $f(x)=y$, то говорят, что для f существует *обратное отображение* или что f является *взаимно однозначным отображением*. Обратное отображение имеет область определения $f(X)$ и область значений X; оно определяется соотношением $x=f^{-1}(y)=f^{-1}(\{y\})$.

Область определения и область значений отображения f обозначаются соответственно $D(f)$ и $R(f)$. Таким образом, если f имеет обратное отображение, то

$$f^{-1}(f(x))=x\quad \text{для всех}\quad x\in D(f);$$

$$f\left(f^{-1}(y)\right)=y\quad \text{для всех}\quad y\in R(f).$$

Говорят, что функция f отображает множество X *на* множество Y, если $f(X)=Y$. Если же $f(X)\subseteq Y$, то говорят, что f отображает X *в* Y. Функция f называется *продолжением* функции g, а g — *сужением* f, если $D(f)$ содержит $D(g)$ и $f(x)=g(x)$ для всех x из $D(g)$.

Лемма Цорна

Определение. Пусть P — некоторое множество элементов a, b, ... Предположим, что для некоторых пар (a, b) элементов множества P определено бинарное отношение $a\prec b$, обладающее следующими свойствами:

$a\prec a$,

если $a\prec b$ и $b\prec a$, то $a=b$,

если $a\prec b$ и $b\prec c$, то $a\prec c$ (транзитивность).

Тогда говорят, что множество P *частично упорядочено* [1]) отношением $\prec$.

[1]) Иногда частично упорядоченным называют множество, удовлетворяющее только первому и третьему из указанных условий. — *Прим. перев.*

Примеры. Если P — множество всех подмножеств некоторого данного множества X, то отношение включения множеств ($A \subseteq B$) частично упорядочивает P. Множество всех комплексных чисел $z = x + iy$, $w = u + iv$, ... станет частично упорядоченным, если положить $z \prec w$ при $x \leqslant u$ и $y \leqslant v$.

Определение. Пусть P — некоторое частично упорядоченное множество элементов $a, b, \ldots$. Если $a \prec c$ и $b \prec c$, то c называется *мажорантой* элементов a и b. Если, кроме того, $c \prec d$ для всякой мажоранты d элементов a и b, то c называется *верхней гранью* этих элементов; в этом случае мы пишем $c = \sup(a, b)$ или $a \vee b$. Такой элемент множества P единствен, если он существует. Аналогичным образом определяются *миноранта* и *нижняя грань* элементов a и b; последняя обозначается $\inf(a, b)$ или $a \wedge b$. Если для каждой пары (a, b) элементов частично упорядоченного множества P существуют верхняя и нижняя грани $a \vee b$ и $a \wedge b$, то множество P называется *структурой*.

Пример. Совокупность всех подмножеств M некоторого фиксированного множества B становится структурой, если отношение частичного упорядочения $M_1 \prec M_2$ определить с помощью включения множеств $M_1 \subseteq M_2$.

Определение. Частично упорядоченное множество P называется *линейно упорядоченным*, если для всякой пары (a, b) элементов множества P выполняется одно из двух соотношений $a \prec b$ или $b \prec a$. Всякое подмножество частично упорядоченного множества частично упорядочено тем же отношением порядка; оно может оказаться линейно упорядоченным этим отношением. Если множество P частично упорядочено, а S — некоторое подмножество множества P, то элемент $m \in P$ называется мажорантой подмножества S, когда $s \prec m$ для всякого $s \in S$. Если некоторый элемент $m \in P$ обладает тем свойством, что из соотношений $p \in P$ и $m \prec p$ следует равенство $p = m$, то m называется *максимальным элементом*.

Лемма Цорна. Пусть P — непустое частично упорядоченное множество, такое, что всякое его линейно упорядоченное подмножество имеет в P мажоранту. Тогда P содержит по крайней мере один максимальный элемент.

Известно, что лемма Цорна эквивалентна аксиоме выбора (аксиоме Цермело) теории множеств.

2. Топологические пространства

Открытые и замкнутые множества

Определение. Система τ подмножеств множества X определяет в X *топологию*, если она содержит пустое множество, множество X, объединение множеств любой подсистемы системы τ и пересечение любого конечного числа множеств из τ. Множества системы τ называются *открытыми множествами топологического пространства* $(X;\ \tau)$; мы часто будем опускать символ τ и говорить о топологическом пространстве X. В дальнейшем мы всегда, кроме тех случаев, когда это особо оговаривается, будем предполагать, что топологическое пространство X удовлетворяет следующей *аксиоме отделимости Хаусдорфа.*

Для каждой пары (x_1, x_2) различных точек x_1, x_2 пространства X существуют непересекающиеся открытые множества G_1, G_2, такие, что $x_1 \in G_1$, $x_2 \in G_2$.

Окрестностью точки x пространства X называется всякое множество, содержащее открытое множество, которому принадлежит x. Окрестность подмножества M пространства X определяется как множество, являющееся окрестностью для каждой точки множества M. Точка x пространства X называется *точкой накопления*, или *предельной точкой*, некоторого подмножества M пространства X, если всякая ее окрестность содержит по крайней мере одну точку $m \in M$, отличную от x.

Определение. Всякое подмножество M топологического пространства X можно рассматривать как топологическое пространство, если за открытые подмножества множества M принять пересечения вида $M \cap G$, где G — открытые множества пространства X. Введенная таким способом топология называется *относительной топологией* M как подмножества топологического пространства X.

Определение. Множество M топологического пространства X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Легко видеть, что M замкнуто в том и только том случае, когда множество $M^C = X - M$, называемое *дополнением* множества M, является открытым. Выражение вида $A - B$ обозначает здесь и далее совокупность всех точек $x \in A$, не принадлежащих множеству B. Если $M \subseteq X$ — некоторое подмножество пространства X, то пересечение всех замкнутых подмножеств из X, содержащих M, называется *замыканием* множества M; мы будем обозначать его M^a (верхний индекс „a“ — первая буква немецкого термина „abgeschlossen“ — замкнутый).

Множество M^a, очевидно, замкнуто и $M \subseteq M^a$; нетрудно видеть, что $M = M^a$ тогда и только тогда, когда множество M замкнуто

Метрические пространства

Определение. Пусть X и Y — некоторые множества. Символом $X \times Y$ мы обозначим множество всех упорядоченных пар вида (x, y), где $x \in X$, $y \in Y$. Мы будем называть его *произведением* множеств X и Y. Множество X называется *метрическим пространством*, если в области $X \times X$ определена функция d, множество значений которой принадлежит полю R^1 вещественных чисел, удовлетворяющая следующим условиям:

$d(x_1, x_2) \geqslant 0$; $d(x_1, x_2) = 0$ тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$;

$d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1)$;

$d(x_1, x_3) \leqslant d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3)$ (неравенство треугольника).

Функция d называется *расстоянием* или *метрикой* пространства X. Каждой точке x_0 метрического пространства X и всякому положительному числу r мы сопоставим множество

$$S(x_0; r) = \{x \in X;\ d(x, x_0) < r\},$$

которое называется *открытым шаром* радиуса r с центром в точке x_0. Множество M метрического пространства X мы назовем „открытым", если вместе со всякой точкой $x_0 \in M$ оно содержит также и некоторый шар с центром в точке x_0. Совокупность всех таких „открытых" множеств удовлетворяет аксиоме открытых множеств, сформулированной в определении топологического пространства.

Таким образом, метрическое пространство X является топологическим. Нетрудно заметить, что точка x_0 метрического пространства X является предельной точкой некоторого множества M в том и только том случае, когда для всякого $\varepsilon > 0$ существует по крайней мере одна точка $m \neq x_0$ множества M, такая, что $d(m, x_0) < \varepsilon$. Евклидово n-мерное пространство R^n становится метрическим, если положить

$$d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2\right)^{1/2}, \quad \text{где } x = (x_1, \ldots, x_n),\ y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Непрерывные отображения

Определение. Пусть f: $X \to Y$ — некоторое отображение топологического пространства X в топологическое пространство Y. Отображение f называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если любой окрестности U точки $f(x_0)$ соответствует некоторая окрестность V точки x_0, такая, что $f(V) \subseteq U$. Отображение f называется *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке своей области определения $D(f) = X$.

Теорема. Пусть X, Y — топологические пространства и f: $X \to Y$. Отображение f непрерывно тогда и только тогда, когда прообраз при этом отображении всякого открытого множества из Y представляет собой открытое множество из X.

Доказательство. Если отображение f непрерывно и U — открытое множество из Y, то множество $V = f^{-1}(U)$ представляет собой окрестность всякой точки $x_0 \in X$, удовлетворяющей условию $f(x_0) \in U$, т. е. является окрестностью всякой входящей в него точки и, следовательно, открытым множеством. Обратно, если для всякого открытого множества $U \ni f(x_0)$ пространства Y соответствующее множество $V = f^{-1}(U)$ пространства X открыто, то отображение f по определению непрерывно в точке $x_0 \in X$.

Бикомпактность

Определение. Говорят, что система множеств G_α, $\alpha \in A$, *покрывает* множество X, если X содержится как подмножество в объединении $\bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$. Подмножество M топологического пространства X называется *бикомпактным* [1]), если всякая система открытых множеств пространства X, покрывающая M, содержит конечную подсистему, которая также покрывает множество M.

Из приведенной выше теоремы следует, что *непрерывный образ бикомпактного множества бикомпактен.*

Предложение 1. Бикомпактные подмножества топологического пространства замкнуты.

Доказательство. Предположим, что бикомпактное множество M топологического пространства X имеет предельную точку x_0, не принадлежащую M. По аксиоме отделимости Хаусдорфа для всякой точки $m \in M$ существуют непересекающиеся открытые множества $G_{m,\, x_0}$ и $G_{x_0,\, m}$ пространства X, такие, что $m \in G_{m,\, x_0}$, $x_0 \in G_{x_0,\, m}$. Система множеств $\{G_{m,\, x_0};\ m \in M\}$ очевидно покрывает M. В силу бикомпактности множества M существует конечная подсистема $\{G_{m_i,\, x_0};\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, покрывающая M. Тогда множество $\bigcap_{i=1}^{n} G_{x_0,\, m_i}$ не пересекается с M. Но поскольку x_0 — предельная точка множества M, открытое множество $\bigcap_{i=1}^{n} G_{x_0,\, m_i} \ni x_0$ должно содержать некоторую точку $m \in M$, отличную от x_0. Таким образом, мы приходим к противоречию, и поэтому множество M должно быть замкнутым.

Предложение 2. Замкнутое подмножество M_1 бикомпактного множества M топологического пространства X бикомпактно.

Доказательство. Пусть $\{G_\alpha\}$ — произвольная система открытых множеств пространства X, покрывающая M_1. Так как множество M_1 замкнуто, то $M_1^C = X - M_1$ есть открытое множество пространства X. Поскольку $M_1 \subseteq M$, система открытых множеств, состоящая из всех множеств $\{G_\alpha\}$ и множества M_1^C, покрывает M. Множество M биком-

[1]) Автор применяет здесь термин compact — компактный; в русской математической литературе такие множества часто называют бикомпактными. — *Прим. перев.*

пактно, поэтому система, состоящая из M_1^C и выбранных подходящим образом множеств $\{G_{\alpha_i};\ i=1, 2, \ldots, n\}$, покрывает M. Таким образом, система $\{G_{\alpha_i};\ i=1, 2, \ldots, n\}$ покрывает M_1, и поэтому M_1 — бикомпактное множество.

Определение. Подмножество топологического пространства называется *относительно бикомпактным*, если его замыкание бикомпактно. Топологическое пространство называется *локально бикомпактным*, если каждая точка этого пространства имеет бикомпактную окрестность.

Теорема. Всякое локально бикомпактное пространство X может быть вложено в бикомпактное пространство Y, отличающееся от X одним дополнительным элементом, причем это вложение можно осуществить так, чтобы относительная топология пространства X как подмножества пространства Y совпадала с исходной топологией в X. Такое пространство Y называется *одноточечным бикомпактным расширением пространства* X.

Доказательство. Пусть y — некоторый элемент, отличный от точек пространства X. Обозначим через $\{U\}$ класс всех открытых множеств пространства X, для которых множества $U^C = X - U$ бикомпактны. Заметим, что само пространство X принадлежит классу $\{U\}$. Пусть Y — множество, состоящее из всех точек пространства X и элемента y. Открытыми множествами пространства Y мы назовем множества, которые либо не содержат y и представляют собой открытые подмножества пространства X, либо содержат элемент y, и их пересечения с множеством X входят в класс $\{U\}$. Нетрудно заметить, что при этом множество Y становится топологическим пространством и относительная топология в X совпадает с первоначальной топологией.

Пусть теперь $\{V\}$ — некоторое семейство открытых множеств, покрывающее Y. Тогда среди множеств семейства $\{V\}$ имеется некоторое множество вида $U_0 \cup \{y\}$, где $U_0 \in \{U\}$. Согласно определению класса $\{U\}$, множество U_0^C бикомпактно как подмножество пространства X. Это множество покрывается системой множеств вида $V \cap X$, где $V \in \{V\}$. Поэтому некоторая конечная подсистема $V_1 \cap X$, $V_2 \cap X, \ldots, V_n \cap X$ покрывает U_0^C. Следовательно, система, состоящая из множеств $V_1, V_2, \ldots, V_n$ и множества $U_0 \cup \{y\}$, покрывает Y, т. е. пространство Y бикомпактно.

Теорема Тихонова

Определение. Пусть каждому элементу α из некоторого множества индексов A поставлено в соответствие некоторое топологическое пространство X_α. *Произведение* $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ множеств X_α определяется как множество всех функций f, заданных в области A, таких, что

$f(\alpha) \in X_\alpha$ для каждого $\alpha \in A$. Мы будем писать $f = \prod\limits_{\alpha \in A} f(\alpha)$ и называть $f(\alpha)$ α-координатой функции f. В случае когда A — множество целых чисел $(1, 2, \ldots, n)$, произведение $\prod\limits_{k=1}^{n} X_k$ обычно записывают в виде $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$. Определим теперь „открытые" множества произведения $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ как всевозможные множества вида $\prod\limits_{\alpha \in A} G_\alpha$, где G_α — открытые множества пространств X_α, совпадающие с X_α для всех, кроме конечного числа, значений α. Тем самым в произведении $\prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ вводится топология, называемая *тихоновской*. Пространство $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$, топологизированное таким способом, называется *тихоновским произведением*.

Теорема Тихонова. Произведение $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$ системы бикомпактных топологических пространств X_α бикомпактно.

Замечание. Известно, что всякое замкнутое ограниченное множество точек вещественной числовой прямой R^1 бикомпактно по отношению к топологии, которая определяется функцией расстояния $d(x, y) = |x - y|$ (теорема Больцано — Вейерштрасса). Отметим кстати, что в общем случае подмножество M метрического пространства называется *ограниченным*, если оно содержится в некотором шаре $S(x_0, r)$ этого пространства. Из теоремы Тихонова, в частности, следует, что множество

$$-\infty < a_i \leqslant x_i \leqslant b_i < \infty \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

(параллелепипед), лежащее в n-мерном евклидовом пространстве R^n, бикомпактно. Отсюда видно, что пространство R^n локально бикомпактно.

Доказательство теоремы Тихонова. Система множеств называется *центрированной*, если пересечение множеств любой ее конечной подсистемы непусто. Рассматривая дополнения открытых множеств, образующих покрытие пространства X, нетрудно заметить, что топологическое пространство бикомпактно тогда и только тогда, когда для любой центрированной системы $\{M_\alpha;\ \alpha \in A\}$ подмножеств этого пространства пересечение $\bigcap\limits_{\alpha \in A} M_\alpha^a$ непусто.

Пусть теперь $\{S\}$ — некоторая центрированная система подмножеств S пространства $X = \prod\limits_{\alpha \in A} X_\alpha$. Рассмотрим систему $\{N\}$ подмножеств N пространства X, обладающую следующими свойствами:

(1) система $\{S\}$ содержится в системе $\{N\}$ как подсистема;

(2) система $\{N\}$ центрированная;

(3) система $\{N\}$ максимальна в том смысле, что она не является собственной подсистемой никакой другой центрированной системы, содержащей систему $\{S\}$ в качестве подсистемы.

Существование такой максимальной системы $\{N\}$ можно доказать с помощью леммы Цорна или принципа трансфинитной индукции.

Для каждого множества N системы $\{N\}$ определим множество $N_\alpha = \{f(\alpha);\ f \in N\} \subseteq X_\alpha$. Через $\{N_\alpha\}$ мы обозначим систему $\{N_\alpha;\ N \in \{N\}\}$. Система $\{N_\alpha\}$, как и $\{N\}$, является центрированной. Поскольку множество X_α бикомпактно, существует по крайней мере одна точка $p_\alpha \in X_\alpha$, такая, что $p_\alpha \in \bigcap_{N \in \{N\}} N_\alpha^a$. Мы должны теперь показать, что точка $p = \prod_{\alpha \in A} p_\alpha$ принадлежит множеству $\bigcap_{N \in \{N\}} N^a$.

Поскольку точка вида p_{α_0} принадлежит пересечению $\bigcap_{N \in \{N\}} N_{\alpha_0}^a$, всякое открытое множество G_{α_0} пространства X_{α_0}, содержащее p_{α_0}, пересекается с каждым множеством $N_{\alpha_0} \in \{N_{\alpha_0}\}$. Поэтому открытое множество

$$G^{(\alpha_0)} = \left\{x;\ x = \prod_{\alpha \in A} x_\alpha, \text{ где } x_{\alpha_0} \in G_{\alpha_0}\right\}$$

пространства X должно пересекаться с каждым множеством N системы $\{N\}$. Согласно свойству (3) максимальности системы $\{N\}$, множество $G^{(\alpha_0)}$ должно принадлежать $\{N\}$. Поэтому пересечение любого конечного числа множеств типа $G^{(\alpha_0)}$ при $\alpha_0 \in A$ также должно принадлежать системе $\{N\}$ и, следовательно, такое множество пересекается с каждым множеством $N \in \{N\}$. Всякое открытое множество пространства X, содержащее точку p, по определению содержит некоторое пересечение указанного выше типа; отсюда мы заключаем, что точка $p = \prod_{\alpha \in A} p_\alpha$ должна принадлежать пересечению $\bigcap_{N \in \{N\}} N^a$.

Теорема Урысона

Предложение. Бикомпактное пространство X является ***нормальным***, т. е. для любых непересекающихся замкнутых множеств F_1 и F_2 из X существуют такие непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2, что $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$.

Доказательство. Для всякой пары элементов (x, y), таких, что $x \in F_1$, $y \in F_2$, существуют такие непересекающиеся открытые множества $G(x, y)$ и $G(y, x)$, что $x \in G(x, y)$, $y \in G(y, x)$. Множество F_2 как замкнутое подмножество бикомпактного пространства X бикомпактно, поэтому, выбрав произвольный фиксированный элемент x, мы можем покрыть F_2 конечным числом открытых множеств вида

$G(y_1, x), G(y_2, x), \ldots, G(y_{n(x)}, x)$. Положим

$$G_x = \bigcup_{j=1}^{n(x)} G(y_j, x) \quad \text{и} \quad G(x) = \bigcap_{j=1}^{n(x)} G(x, y_j).$$

Тогда для этих непересекающихся открытых множеств G_x и $G(x)$ справедливы соотношения $F_2 \subseteq G_x$, $x \in G(x)$. Множество F_1 также бикомпактно и поэтому может быть покрыто конечным числом открытых множеств $G(x_1), G(x_2), \ldots, G(x_k)$. Тогда, как нетрудно видеть, множества

$$G_1 = \bigcup_{j=1}^{k} G(x_j) \quad \text{и} \quad G_2 = \bigcap_{j=1}^{k} G_{x_j}$$

удовлетворяют условиям нашего предложения.

Следствие. Бикомпактное пространство X является *регулярным*, т. е. для всякого непустого открытого множества G_1' из X существует непустое открытое множество G_2', такое, что $(G_2')^a \subseteq G_1'$.

Доказательство. Положим $F_1 = (G_1')^C$ и $F_2 = \{x\}$, где $x \in G_1'$. За множество G_2' можно теперь принять множество G_2, построенное при доказательстве предыдущего предложения.

Теорема Урысона. Пусть A, B — непересекающиеся замкнутые подмножества нормального пространства X. Тогда существует такая вещественная непрерывная функция $f(t)$, заданная на множестве X, что

$$0 \leqslant f(t) \leqslant 1 \text{ на } X, \quad f(t) = 0 \text{ на } A, \quad f(t) = 1 \text{ на } B.$$

Доказательство. Сначала убедимся в том, что каждому рациональному числу вида $r = k/2^n$ $(k = 0, 1, \ldots, 2^n)$ можно поставить в соответствие некоторое открытое множество $G(r)$ таким образом, что (1) $A \subseteq G(0)$, $B = G(1)^C$ и (2) $G(r)^a \subseteq G(r')$ при любых значениях $r < r'$. Это доказывается с помощью индукции по n. Так как пространство X нормально, то при $n = 0$ существуют непересекающиеся открытые множества G_0 и G_1, такие, что $A \subseteq G_0$, $B \subseteq G_1$, и остается лишь положить $G_0 = G(0)$. Допустим теперь, что множества $G(r)$ построены для чисел r вида $k/2^{n-1}$ и условия (2) при этом выполняются. Возьмем некоторое целое нечетное значение $k > 0$. В этом случае $G((k-1)/2^n)^a \subseteq G((k+1)/2^n)$, так как числа $(k-1)/2^n$ и $(k+1)/2^n$ имеют вид $k'/2^{n-1}$, где $0 \leqslant k' \leqslant 2^{n-1}$. Следовательно, поскольку X — нормальное пространство, существует открытое множество G, удовлетворяющее условиям $G((k-1)/2^n)^a \subseteq G$, $G^a \subseteq G((k+1)/2^n)$. Полагая $G(k/2^n) = G$, мы завершаем доказательство по индукции.

Определим теперь функцию $f(t)$ соотношениями

$$f(t)=0 \quad \text{на множестве } G(0),$$

$$f(t)=\sup_{t\notin G(r)} r \quad \text{для всякой точки } t\in G(0)^C.$$

Тогда по условию (1) $f(t)=0$ на множестве A и $f(t)=1$ на множестве B. Остается убедиться в непрерывности функции f. Для всякого $t_0\in X$ и любого положительного целого числа n выберем такое значение r, чтобы выполнялось условие $f(t_0)<r<f(t_0)+2^{-n-1}$. Положим $G=G(r)\cap G(r-2^{-n})^{aC}$ (при этом мы условимся, что $G(s)\neq\emptyset$, если $s<0$, и $G(s)=X$, если $s>1$). Открытое множество G содержит точку t_0, так как из неравенства $f(t_0)<r$ следует, что $t_0\in G(r)$, а из соотношения $(r-2^{-n-1})<f(t_0)$ вытекает, что $t_0\in G(r-2^{-n-1})^C\subseteq G(r-2^{-n})^{aC}$. Далее, если $t\in G$, то $t\in G(r)$, и поэтому $f(t)\leqslant r$; кроме того, $t\in G(r-2^{-n})^{aC}\subseteq G(r-2^{-n})^C$ и, следовательно, $r-2^{-n}\leqslant f(t)$. Таким образом, мы показали, что для точек $t\in G$ выполняется неравенство $|f(t)-f(t_0)|\leqslant 1/2^n$, откуда и следует непрерывность функции f.

Теорема Стоуна — Вейерштрасса

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами. Пусть $f(x)$ — вещественная или комплексная непрерывная функция, заданная на замкнутом интервале $[0, 1]$. Тогда существует последовательность многочленов $P_n(x)$, которая при $n\to\infty$ равномерно сходится к $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$. Следуя С. Бернштейну, можно положить

$$P_n(x)=\sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) x^p(1-x)^{n-p}. \tag{1}$$

Доказательство. Дифференцируя тождество

$$(x+y)^n=\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p y^{n-p}$$

по переменной x и умножая на x, мы получаем соотношение

$$nx(x+y)^{n-1}=\sum_{p=0}^{n} pC_n^p x^p y^{n-p}.$$

Аналогично, дифференцируя указанное тождество по x дважды и умножая на x^2, получаем формулу

$$n(n-1)x^2(x+y)^{n-2}=\sum_{p=0}^{n} p(p-1)C_n^p x^p y^{n-p}.$$

Полагая

$$r_p(x) = C_n^p x^p (1-x)^{n-p}, \tag{2}$$

мы выводим соотношения

$$\sum_{p=0}^{n} r_p(x) = 1, \quad \sum_{p=0}^{n} p r_p(x) = nx, \quad \sum_{p=0}^{n} p(p-1) r_p(x) = n(n-1)x^2. \tag{3}$$

Следовательно,

$$\sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) = n^2x^2 \sum_{p=0}^{n} r_p(x) - 2nx \sum_{p=0}^{n} p r_p(x) + $$
$$+ \sum_{p=0}^{n} p^2 r_p(x) = n^2x^2 - 2nx \cdot nx + (nx + n(n-1)x^2) = nx(1-x). \tag{4}$$

Так как $f(x)$ — непрерывная функция, то $|f(x)| \leqslant M < \infty$ на отрезке $[0, 1]$. В силу равномерной непрерывности $f(x)$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$|f(x) - f(x')| < \varepsilon, \quad \text{когда} \quad |x - x'| < \delta. \tag{5}$$

Из формулы (3) мы заключаем, что

$$\left| f(x) - \sum_{p=0}^{n} f(p/n) r_p(x) \right| = \left| \sum_{p=0}^{n} (f(x) - f(p/n)) r_p(x) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \left| \sum_{|p-nx| \leqslant \delta n} \right| + \left| \sum_{|p-nx| > \delta n} \right|.$$

Для первого слагаемого в правой части последнего неравенства мы, учитывая формулы (3) и неравенство $r_p(x) \geqslant 0$, выводим оценку

$$\left| \sum_{|p-nx| \leqslant \delta n} \right| \leqslant \varepsilon \sum_{p=0}^{n} r_p(x) = \varepsilon.$$

Для второго слагаемого из формулы (4) и условия $|f(x)| \leqslant M$ вытекает неравенство

$$\left| \sum_{|p-nx| > \delta n} \right| \leqslant 2M \sum_{|p-nx| > \delta n} r_p(x) \leqslant \frac{2M}{n^2\delta^2} \sum_{p=0}^{n} (p-nx)^2 r_p(x) =$$
$$= \frac{2Mx(1-x)}{n\delta^2} \leqslant \frac{M}{2\delta^2 n} \to 0 \ (\text{при} \ n \to \infty).$$

Из приведенных оценок и следует утверждение теоремы.

Теорема Стоуна — Вейерштрасса. Пусть X — бикомпактное пространство и $C(X)$ — множество всех вещественных непрерывных функций, определенных на X. Через B обозначим подмножество множества $C(X)$, удовлетворяющее следующим трем условиям: (1) если $f, g \in B$, то произведение $f \cdot g$ и линейные комбинации

$\alpha f + \beta g$ с вещественными коэффициентами α, β также принадлежат B, (2) постоянная функция 1 принадлежит B и (3) предел f_∞ всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций, принадлежащих подмножеству B, также принадлежит B. Тогда $B = C(X)$ в том и только в том случае, когда для любой пары (s_1, s_2) различных точек пространства X существует функция x из множества B, удовлетворяющая условию $x(s_1) \neq x(s_2)$ (в этом случае говорят, что множество B *разделяет точки* пространства X).

Доказательство. Необходимость указанного условия следует из того, что бикомпактное пространство нормально, и поэтому по теореме Урысона существует такая непрерывная вещественная функция x, что $x(s_1) \neq x(s_2)$.

Для доказательства достаточности удобно ввести обозначения, принятые в теории структур:

$$(f \vee g)(s) = \max(f(s), g(s)), \quad (f \wedge g)(s) = \min(f(s), g(s)),$$
$$|f|(s) = |f(s)|.$$

Согласно предыдущей теореме, существует последовательность полиномов $\{P_n\}$, такая, что

$$||t| - P_n(t)| < \frac{1}{n} \quad \text{при} \quad -n \leqslant t \leqslant n.$$

Следовательно, $||f(s)| - P_n(f(s))| < 1/n$, если $-n \leqslant f(s) \leqslant n$. Отсюда, согласно условию (3), следует, что $|f| \in B$, если $f \in B$, так как всякая функция $f(s) \in B \subseteq C(X)$ ограничена на бикомпактном пространстве X. Поэтому, учитывая соотношения

$$f \vee g = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2} \quad \text{и} \quad f \wedge g = \frac{f+g}{2} - \frac{|f-g|}{2},$$

мы заключаем, что множество B замкнуто по отношению к структурным операциям $\vee$ и $\wedge$.

Пусть элемент $h \in C(X)$ и точки $s_1, s_2 \in X$ выбраны произвольно, но так, что $s_1 \neq s_2$. Тогда мы можем найти функцию $f_{s_1 s_2} \in B$, такую, что $f_{s_1 s_2}(s_1) = h(s_1)$ и $f_{s_1 s_2}(s_2) = h(s_2)$. В самом деле, выберем функцию $g \in B$ так, что $g(s_1) \neq g(s_2)$, и возьмем такие вещественные числа α и β, что функция $f_{s_1 s_2} = \alpha g + \beta$ удовлетворяет условиям

$$f_{s_1 s_2}(s_1) = h(s_1) \quad \text{и} \quad f_{s_1 s_2}(s_2) = h(s_2).$$

Пусть теперь заданы произвольное $\varepsilon > 0$ и точка $t \in X$. Тогда для всякой точки $s \in X$ существует окрестность $U(s)$, такая, что $f_{st}(u) > h(u) - \varepsilon$ для всех $u \in U(s)$. Пусть далее множества $U(s_1)$, $U(s_2)$, ..., $U(s_n)$ покрывают бикомпактное пространство X; положим

$$f_t = f_{s_1 t} \vee \dots \vee f_{s_n t}.$$

Тогда $f_t \in B$ и $f_t(u) > h(u) - \varepsilon$ для всех точек $u \in X$. Кроме того, $f_t(t) = h(t)$, так как $f_{s_j t}(t) = h(t)$. Следовательно, существует такая окрестность $V(t)$ точки t, что $f_t(u) < h(u) + \varepsilon$ при всех $u \in V(t)$. Пусть множества $V(t_1), V(t_2), \ldots, V(t_k)$ покрывают бикомпактное пространство X. Определим функцию f соотношением

$$f = f_{t_1} \wedge \cdots \wedge f_{t_k}.$$

Тогда $f \in B$ и $f(u) > h(u) - \varepsilon$ для всех точек $u \in X$, ибо $f_{t_j}(u) > h(u) - \varepsilon$ для $u \in X$. Кроме того, для любой точки $u \in X$ и, в частности, для $u \in V(t_i)$ справедливы неравенства $f(u) \leqslant f_{t_i}(u) < h(u) + \varepsilon$.

Таким образом мы показали, что $|f(u) - h(u)| < \varepsilon$ на множестве X, откуда и следует наше утверждение.

Попутно мы доказали два следствия.

Следствие 1 (Какутани — Крейн). Пусть X — бикомпактное пространство и $C(X)$ — совокупность всех вещественных непрерывных функций, заданных на X. Обозначим через B подмножество множества $C(X)$, удовлетворяющее следующим условиям: (1) если $f, g \in B$, то $f \vee g$, $f \wedge g$ и линейные комбинации $\alpha f + \beta g$ с вещественными коэффициентами α, β принадлежат B; (2) постоянная функция 1 принадлежит B; (3) предел f_∞ всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций из множества B также принадлежит B. Тогда $B = C(X)$ в том и только в том случае, когда множество B разделяет точки пространства X.

Следствие 2. Пусть X — бикомпактное пространство и $C(X)$ — множество всех комплексных непрерывных функций, определенных на X. Пусть подмножество B множества $C(X)$ удовлетворяет следующим условиям: (1) если $f, g \in B$, то произведение $f \cdot g$ и линейные комбинации $\alpha f + \beta g$ с комплексными коэффициентами α, β принадлежат B, (2) постоянная функция 1 принадлежит B, (3) предел f_∞ всякой равномерно сходящейся последовательности $\{f_n\}$ функций, принадлежащих множеству B, также принадлежит B. Тогда $B = C(X)$ в том и только в том случае, когда множество B удовлетворяет следующим условиям: (4) B разделяет точки пространства X; (5) если $f(s) \in B$, то комплексно сопряженная функция $\overline{f}(s)$ также принадлежит B.

Теорема Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами. Пусть X — окружность единичного круга пространства R^2. Множество X представляет собой бикомпактное пространство по отношению к обычной топологии, и всякая комплексная непрерывная функция, заданная на X, может быть представлена некоторой заданной в области $-\infty < x < \infty$ непрерывной функцией $f(x)$, имеющей по x период 2π. Если за множество B, о котором говорится в следствии 2, принять совокупность всех тех функций, заданных на пространстве X, которые являются линейными комбинациями с комплексными коэффициентами тригонометрических функций

$$e^{inx} \, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

а также тех функций, которые являются пределами равномерно сходящихся последовательностей таких линейных комбинаций, то мы получим *теорему Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами*: Всякая непрерывная комплексная функция $f(x)$ периода 2π может быть равномерно аппроксимирована *тригонометрическими полиномами* вида $\sum\limits_n c_n e^{inx}$.

Полные пространства

По определению последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X сходится к пределу $x \in X$, если $\lim\limits_{n \to \infty} d(x_n, x) = 0$. Из неравенства треугольника $d(x_n, x_m) \leqslant d(x_n, x) + d(x_m, x)$ мы заключаем, что сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ из пространства X удовлетворяет *условию Коши*

$$\lim_{n, m \to \infty} d(x_n, x_m) = 0. \tag{1}$$

Определение. Всякая последовательность элементов метрического пространства X, удовлетворяющая условию (1), называется *фундаментальной последовательностью*. Метрическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность этого пространства сходится к пределу, являющемуся точкой пространства X.

Нетрудно заметить, что, согласно неравенству треугольника, предел последовательности $\{x_n\}$, если он существует, является единственным.

Определение. Подмножество M топологического пространства X называется *неплотным* в X, если его замыкание M^a не содержит никаких непустых открытых множеств пространства X. Множество M называется *плотным в* X, если $M^a = X$ [1]). Говорят, что M является *множеством первой категории*, если его можно представить в виде счетного объединения множеств, каждое из которых неплотно в X; в противном случае M называется множеством второй категории.

[1]) Аналогично определяются множества, плотные или неплотные в произвольном подмножестве $B \subseteq X$. Множества, плотные или неплотные во всем пространстве X, называются также соответственно *всюду плотными* и *нигде не плотными*. — *Прим. перев.*

Теорема Бэра о категориях

Теорема Бэра — Хаусдорфа. Всякое непустое полное метрическое пространство является множеством второй категории.

Доказательство. Пусть $\{M_n\}$ — последовательность замкнутых множеств, объединение которых образует полное метрическое пространство X. Предположив, что ни одно из множеств M_n не содержит непустых открытых подмножеств, мы придем к противоречию. В самом деле, в этом случае множество M_1^C — открытое и $M_1^{Ca} = X$; следовательно, M_1^C содержит замкнутый шар $S_1 = \{x;\ d(x_1, x) \leqslant r_1\}$, центр которого x_1 может быть выбран сколь угодно близким к любой точке пространства X. При этом мы можем считать, что $0 < r_1 < 1/2$. Те же рассуждения показывают, что открытое множество M_2^C содержит замкнутый шар $S_2 = \{x;\ d(x_2, x) \leqslant r_2\}$, принадлежащий S_1 и такой, что $0 < r_2 < 1/2^2$. Повторяя эти рассуждения, мы получим последовательность $\{S_n\}$ замкнутых шаров $S_n = \{x;\ d(x_n, x) \leqslant r_n\}$, обладающих следующими свойствами:

$$0 < r_n < \frac{1}{2^n}, \qquad S_{n+1} \subseteq S_n, \qquad S_n \cap M_n = \emptyset \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность $\{x_n\}$ центров этих шаров является фундаментальной, так как $x_m \in S_n$ для любых значений $n < m$, и поэтому $d(x_n, x_m) \leqslant r_n < 1/2^n$. Пусть точка x_∞ — предел последовательности $\{x_n\}$. Ее существование гарантируется условием полноты пространства X. Из соотношений $d(x_n, x_\infty) \leqslant d(x_n, x_m) + d(x_m, x_\infty) \leqslant$ $\leqslant r_n + d(x_m, x_\infty) \to r_n$ (при $m \to \infty$) мы заключаем, что $x_\infty \in S_n$ при всех значениях n. Следовательно, точка x_∞ не принадлежит ни одному из множеств M_n и поэтому не содержится в объединении $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n = X$, что противоречит условию $x_\infty \in X$.

Теорема Бэра 1. Пусть M — множество первой категории в бикомпактном топологическом пространстве X. Тогда дополнение $M^C = X - M$ плотно в X.

Доказательство. Мы должны показать, что M^C пересекается со всяким непустым открытым множеством G пространства X. Множество M можно представить в виде $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, где M_n — неплотные замкнутые множества. Поскольку множество $M_1 = M_1^a$ неплотно, открытое множество M_1^C пересекается с G. Пространство X, будучи бикомпактным, регулярно, следовательно, существует непустое открытое множество G_1, такое, что $G_1^a \subseteq G \cap M_1^C$. Таким же способом мы можем выбрать непустое открытое множество G_2, удовлетворяющее условию $G_2^a \subseteq G_1 \cap M_2^C$. Повторяя это построение, мы получим последовательность непустых открытых множеств $\{G_n\}$, для которых выполняются соотношения

$$G^a_{n+1} \subseteq G_n \cap M^C_{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Последовательность замкнутых множеств $\{G^a_n\}$ монотонна[1]) по n и поэтому центрирована. Ввиду бикомпактности пространства X существует точка $x \in X$, такая, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G^a_n$. Из условия $x \in G^a_1$ следует, что $x \in G$, а из соотношений $x \in G^a_{n+1} \subseteq G_n \cap M^C_{n+1}$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$; $G_0 = G$) мы заключаем, что $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} M^C_n = M^C$. Итак, мы показали, что множество $G \cap M^C$ непусто.

Теорема Бэра 2. Пусть $\{x_n(t)\}$ — последовательность вещественных непрерывных функций, заданных на топологическом пространстве X. Предположим, что в каждой точке t пространства X существует конечный предел этой последовательности:

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t).$$

Тогда совокупность всех точек разрыва функции x образует множество первой категории.

Доказательство. Для любого множества M пространства X обозначим через M^i объединение всех открытых множеств, содержащихся в M. Множество M^i называется *внутренностью*[2]) множества M.

Положим $P_m(\varepsilon) = \{t \in X;\ |x(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon,\ \varepsilon > 0\}$, $G(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} P^i_m(\varepsilon)$. Нетрудно убедиться в том, что множество $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$ совпадает с множеством точек непрерывности функции $x(t)$. В самом деле, допустим, что функция $x(t)$ непрерывна в некоторой точке $t = t_0$. Покажем, что $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. Поскольку $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$, существует такой номер m, что $|x(t_0) - x_m(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$. В силу непрерывности функций $x(t)$ и $x_m(t)$ в точке $t = t_0$, существует открытое множество $U_{t_0} \ni t_0$, такое, что $|x(t) - x(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$, $|x_m(t) - x_m(t_0)| \leqslant \varepsilon/3$ при любых $t \in U_{t_0}$. Поэтому для $t \in U_{t_0}$ выполняется неравенство

$$|x(t) - x_m(t)| \leqslant |x(t) - x(t_0)| + |x(t_0) - x_m(t_0)| + |x_m(t_0) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon.$$

---

[1]) Последовательность $\{M_i\}$ множеств M_i ($i = 1, 2, \ldots$) называется монотонной, если $M_i \subseteq M_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots$) или $M_i \supseteq M_{i+1}$ ($i = 1, 2 \ldots$). — *Прим. перев.*

[2]) Множество M^i называют также *открытым ядром* множества M. — *Прим. перев.*

Отсюда следует, что $t_0 \in P^i_m(\varepsilon)$, и поэтому $t_0 \in G(\varepsilon)$. Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$.

Обратно, пусть $t_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ имеем $t_0 \in G(\varepsilon/3)$, и, значит, существует m, при котором $t_0 \in P^i_m(\varepsilon/3)$. Следовательно, найдется открытое множество $U_{t_0} \ni t_0$, такое, что для всех точек $t \in U_{t_0}$ выполняется неравенство $|x(t) - x_m(t)| \leqslant \varepsilon/3$. Отсюда, учитывая, что функция $x_m(t)$ непрерывна, а $\varepsilon > 0$ произвольно, мы заключаем, что функция $x(t)$ непрерывна в точке $t = t_0$.

Теперь после этих предварительных рассуждений введем множество

$$F_m(\varepsilon) = \{t \in X;\ |x_m(t) - x_{m+k}(t)| \leqslant \varepsilon\ (k = 1, 2, \ldots)\}.$$

Оно замкнуто, так как все функции $x_n(t)$ непрерывны. Кроме того, $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} F_m(\varepsilon)$, так как $\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x(t)$. По той же причине $F_m(\varepsilon) \subseteq P_m(\varepsilon)$. Следовательно, $F^i_m(\varepsilon) \subseteq P^i_m(\varepsilon)$, и поэтому $\bigcup_{m=1}^{\infty} F^i_m(\varepsilon) \subseteq G(\varepsilon)$. С другой стороны, для любого замкнутого множества F множество $(F - F^i)$ замкнуто и неплотно. Значит, $X - \bigcup_{m=1}^{\infty} F^i_m(\varepsilon) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \left(F_m(\varepsilon) - F^i_m(\varepsilon)\right)$ — множество первой категории. Поэтому его подмножество $G(\varepsilon)^C = X - G(\varepsilon)$ также является множеством первой категории. Отсюда следует, что множество всех точек разрыва функции $x(t)$, которое можно выразить в виде $X - \bigcap_{n=1}^{\infty} G(1/n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} G(1/n)^C$, представляет собой множество первой категории.

Теорема. Подмножество M полного метрического пространства X относительно бикомпактно тогда и только тогда, когда оно *вполне ограничено*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$ множества M, такая, что всякая точка этого множества удалена не более чем на ε по крайней мере от одной из точек $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Другими словами, множество M вполне ограничено, если для каждого $\varepsilon > 0$ его можно покрыть конечной системой шаров радиуса $< \varepsilon$, центры которых принадлежат M.

Доказательство. Предположим, что множество M не является вполне ограниченным. В таком случае существуют положительное число ε и бесконечная последовательность $\{m_n\}$ точек множества M, такие, что $d(m_i, m_j) \geqslant \varepsilon$ для всех $i \neq j$. Поэтому если покрыть бикомпактное множество M^a системой открытых шаров, радиусы которых меньше ε, то никакая ее конечная подсистема не может покрывать множество M^a, ибо такая подсистема не может покрывать его бесконечное подмножество $\{m_i\} \subseteq M \subseteq M^a$. Значит, всякое относительно бикомпактное подмножество пространства X должно быть вполне ограниченным.

Обратно, пусть M — вполне ограниченное подмножество полного метрического пространства X. Тогда его замыкание M^a полно и вполне ограничено. Мы должны показать, что M^a бикомпактно. С этой целью мы сначала убедимся в том, что всякая бесконечная последовательность точек $\{p_n\}$ множества M^a содержит подпоследовательность $\{p_{(n)'}\}$, сходящуюся к некоторой точке множества M^a. Множество M вполне ограничено, поэтому для любого $\varepsilon > 0$ существуют точка $q_\varepsilon \in M^a$ и подпоследовательность $\{p_{n'}\}$ последовательности $\{p_n\}$, такие, что $d(p_{n'}, q_\varepsilon) < \varepsilon/2$ для всех выбранных значений n'. Поэтому $d(p_{n'}, p_{m'}) \leqslant d(p_{n'}, q_\varepsilon) + d(q_\varepsilon, p_{m'}) < \varepsilon$ при всех n', m'. Положим $\varepsilon = 1$ и построим соответствующую последовательность $\{p_{i'}\}$, а затем для $\varepsilon = 1/2$ применим предыдущие рассуждения к последовательности $\{p_{i'}\}$. В результате мы получим такую подпоследовательность $\{p_{n''}\}$ последовательности $\{p_{n'}\}$, что для всех выбранных значений индексов

$$d(p_{n'}, p_{m'}) < 1, \quad d(p_{n''}, p_{m''}) < \frac{1}{2}.$$

Повторяя это построение, мы получим подпоследовательность $\{p_{n^{(k+1)}}\}$ последовательности $\{p_{n^{(k)}}\}$, причем для всех выбранных значений индексов

$$d(p_{n^{(k+1)}}, p_{m^{(k+1)}}) < \frac{1}{2^k}.$$

Теперь подпоследовательность $\{p_{(n)'}\}$ первоначальной последовательности $\{p_n\}$ определяется при помощи диагонального процесса

$$p_{(n)'} = p_{n^{(n)}};$$

она, очевидно, удовлетворяет условию $\lim\limits_{n, m \to \infty} d(p_{(n)'}, p_{(m)'}) = 0$. Поэтому, учитывая полноту множества M^a, можно утверждать, что существует точка $p \in M^a$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} d(p_{(n)'}, p) = 0.$$

Теперь мы покажем, что множество M^a бикомпактно. Заметим, что существует счетное семейство $\{F\}$ открытых множеств F пространства X, обладающее следующим свойством: для любого открытого множества U пространства X и всякой точки $x \in U \cap M^a$

найдется множество $F \in \{F\}$, такое, что $x \in F \subseteq U$. Это утверждение можно доказать следующим образом. При любом заданном $\varepsilon > 0$ множество M^a, поскольку оно вполне ограничено, можно покрыть конечной системой открытых шаров радиуса ε с центрами, принадлежащими M^a. Полагая последовательно $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$ и рассматривая счетное семейство соответствующих конечных систем открытых шаров, мы и получим требуемое семейство $\{F\}$ открытых множеств.

Пусть $\{U\}$ — любая система открытых множеств, покрывающая M^a. Через $\{F^*\}$ мы обозначим подсемейство семейства $\{F\}$, определенное следующим условием: $F \in \{F^*\}$ в том и только в том случае, когда $F \in \{F\}$ и существует множество $U \in \{U\}$, такое, что $F \subseteq U$. Из этого свойства семейства $\{F^*\}$ и того факта, что система $\{U\}$ покрывает множество M^a, мы можем заключить, что счетное семейство открытых множеств $\{F^*\}$ покрывает M^a. Построим теперь подсистему $\{U^*\}$ системы $\{U\}$, а именно выберем для каждого из множеств $F \in \{F^*\}$ ровно по одному множеству $U^* \in \{U\}$, такому, что $F \subseteq U^*$. Тогда $\{U^*\}$ — счетное семейство открытых множеств, покрывающее M^a. Мы должны показать, что некоторая конечная подсистема системы $\{U^*\}$ покрывает множество M^a. Пусть множества семейства $\{U^*\}$ занумерованы в последовательность $U_1, U_2, \ldots$. Допустим, что ни при каком значении n конечное объединение $\bigcup_{j=1}^{n} U_j$ не покрывает множество M^a. В таком случае при каждом n должна существовать точка $x_n \in \left(M - \bigcup_{k=1}^{n} U_k\right)$. Как было показано выше, последовательность $\{x_n\}$ содержит подпоследовательность $\{x_{(n)'}\}$, сходящуюся к некоторой точке, скажем x_∞, множества M^a. Тогда $x_\infty \in U_N$ при некотором N, и поэтому $x_n \in U_N$ для бесконечного числа значений n и, в частности, для некоторого $n > N$. Но это противоречит тому, что по построению $x_n \in \left(M - \bigcup_{k=1}^{n} U_k\right)$. Итак, мы доказали, что множество M^a бикомпактно.

3. *Пространства с мерой*

Меры

Определение. Пусть S — некоторое множество. Пара вида $(S, \mathfrak{B})$ называется *σ-алгеброй* [1]) или *σ-аддитивным семейством* подмножеств множества S, если $\mathfrak{B}$ — семейство подмножеств множества S,

[1]) Говорят также „σ-кольцо“ или „σ-поле“. — *Прим. перев.*

удовлетворяющее следующим условиям:

$$S \in \mathfrak{B}; \tag{1}$$

$$\text{если} \quad B \in \mathfrak{B}, \quad \text{то} \quad B^C = (S - B) \in \mathfrak{B}; \tag{2}$$

$$\text{если} \quad B_j \in \mathfrak{B} \, (j = 1, 2, \ldots), \quad \text{то} \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathfrak{B} \quad (\sigma\text{-}\textit{аддитивность})^{1)}. \tag{3}$$

Пусть $(S, \mathfrak{B})$ есть σ-алгебра подмножеств множества S.

Тогда тройка $(S, \mathfrak{B}, m)$ называется *пространством с мерой*, если m — неотрицательная σ-аддитивная мера, т. е. функция, определенная на $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$m(B) \geqslant 0 \quad \text{для всякого } B \in \mathfrak{B}; \tag{4}$$

$m\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} m(B_j)$ для всякой последовательности $\{B_j\}$ попарно непересекающихся подмножеств из $\mathfrak{B}$ (свойство *счетной аддитивности*, или σ-*аддитивности*, меры m); (5)

множество S можно представить в виде счетного объединения множеств $B_j \in \mathfrak{B}$, таких, что $m(B_j) < \infty$ $(j = 1, 2, \ldots)$ (свойство σ-*финитности*). (6)

Значение $m(B)$ называется *m-мерой* множества B, а множества $B \in \mathfrak{B}$ называются *$\mathfrak{B}$-измеримыми*.

Измеримые функции

Определение. Вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, определенная на множестве S, называется *$\mathfrak{B}$-измеримой* (или, короче, *измеримой*), если выполняется следующее условие:

для всякого открытого множества G вещественной прямой R^1 (или комплексной плоскости C^1) множество $\{s;\ x(s) \in G\}$ принадлежит $\mathfrak{B}$. (7)

Функция $x(s)$ может принимать значение ∞.

Определение. Говорят, что некоторое свойство P, относящееся к точкам s множества S, выполняется *почти всюду* по мере m (сокращенно *m-п. в.*), если оно выполняется для всех s, за исключением

---

[1]) Из (1), (2), (3) следует, что пересечение счетного числа множеств $B_j \in \mathfrak{B}$ тоже входит в $\mathfrak{B}$: $\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j = \left(\bigcap_{j=1}^{\infty} B_j^C\right)^C \in \mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

некоторого множества, принадлежащего семейству $\mathfrak{B}$ и имеющего m-меру нуль.

Вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, определенная m-п. в. на множестве S и удовлетворяющая условию (7), называется *$\mathfrak{B}$-измеримой функцией, заданной m-п. в. на множестве S* или, короче, *$\mathfrak{B}$-измеримой функцией*.

Теорема Егорова. Если B — такое $\mathfrak{B}$-измеримое множество, что $m(B) < \infty$, и если $\{f_n(s)\}$ — некоторая последовательность $\mathfrak{B}$-измеримых функций, принимающих конечные значения m-п. в. на B, сходящаяся m-п. в. на B к конечной $\mathfrak{B}$-измеримой функции $f(s)$, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\mathfrak{B}$-измеримое подмножество $E \subseteq B$, такое, что $m(B - E) \leqslant \varepsilon$, и на множестве E последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится к $f(s)$ равномерно.

Доказательство. Удаляя, если это окажется необходимым, из множества B некоторое множество m-меры нуль, мы можем считать, что функции $f_n(s)$ принимают конечные значения и последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится к $f(s)$ всюду на B.

Множество $B_n = \bigcap\limits_{k=n+1}^{\infty} \{s \in B;\ |f(s) - f_k(s)| < \varepsilon\}$ является $\mathfrak{B}$-измеримым, и $B_n \subseteq B_k$, если $n < k$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(s) = f(s)$ на B, мы имеем $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Поэтому в силу σ-аддитивности меры m

$$\begin{aligned}
m(B) &= m\{B_1 + (B_2 - B_1) + (B_3 - B_2) + \ldots\} = \\
&= m(B_1) + m(B_2 - B_1) + m(B_3 - B_2) + \ldots = \\
&= m(B_1) + (m(B_2) - m(B_1)) + (m(B_3) - m(B_2)) + \ldots = \\
&= \lim_{n\to\infty} m(B_n).
\end{aligned}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} m(B - B_n) = 0$, и поэтому для любого произвольно заданного положительного числа η существует достаточно большой номер k_0, такой, что $m(B - B_k) < \eta$ при $k \geqslant k_0$.

Таким образом, для всякого положительного целого числа k существуют множество $C_k \subseteq B$, такое, что $m(C_k) \leqslant \varepsilon/2^k$, и такой номер N_k, что

$$|f(s) - f_n(s)| < \frac{1}{2^k} \text{ для всех } \quad n > N_k \text{ и } s \in B - C_k.$$

Положим $E = B - \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} C_k$. Тогда мы получим

$$m(B - E) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m(C_k) \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon,$$

и при этом на множестве E последовательность $\{f_n(s)\}$ сходится равномерно.

Интегралы

Определение. Вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, определенная на множестве S, называется *простой*, если она принимает конечное отличное от нуля постоянное значение на каждом из некоторого конечного числа, скажем n, попарно непересекающихся $\mathfrak{B}$-измеримых множеств B_j и равна нулю на $S - \bigcup_{j=1}^{n} B_j$. Значение простой функции $x(s)$ на B_j обозначим через x_j. Простая функция $x(s)$ называется *m-интегрируемой* на множестве S, если $\sum_{j=1}^{n} |x_j| m(B_j) < \infty$; величина $\sum_{j=1}^{n} x_j m(B_j)$ называется *m-интегралом* функции $x(s)$ по множеству S. Этот интеграл мы будем обозначать через $\int_S x(s) m(ds)$, или, короче, $\int_S x(s)$, или $\int x(s)$ в тех случаях, когда это не может привести к недоразумению. Произвольная вещественная (или комплексная) функция $x(s)$, заданная m-п. в. на множестве S, называется *m-интегрируемой* по S, если существует последовательность $\{x_n(s)\}$ простых интегрируемых функций, сходящаяся m-п. в. к функции $x(s)$, и при этом

$$\lim_{n, k \to \infty} \int_S |x_n(s) - x_k(s)| m(ds) = 0.$$

Нетрудно показать, что при этих условиях существует конечный предел $\lim_{n \to \infty} \int_S x_n(s) m(ds)$, который не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности $\{x_n(s)\}$. По определению за интеграл функции $x(s)$ по S относительно меры m принимается предел $\lim_{n \to \infty} \int_S x_n(s) m(ds)$. Этот интеграл мы будем обозначать через $\int_S x(s) m(ds)$; иногда будем использовать сокращенные обозначения $\int x(s) m(ds)$ или $\int x(s)$.

Свойства интеграла

(1) Если $x(s)$ и $y(s)$ интегрируемы, то функция $\alpha x(s)+\beta y(s)$ также интегрируема и

$$\int_S (\alpha x(s)+\beta y(s))\, m(ds) = \alpha \int_S x(s)\, m(ds) + \beta \int_S y(s)\, m(ds).$$

(2) Функция $x(s)$ интегрируема тогда и только тогда, когда интегрируема функция $|x(s)|$.

(3) Если $x(s)$ интегрируема и $x(s) \geqslant 0$ m-п. в., то $\int_S x(s)\, m(ds) \geqslant 0$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда m-п. в. $x(s)=0$.

(4) Если функция $x(s)$ интегрируема, то для произвольного множества $B \in \mathfrak{B}$ за m-интеграл $\int_B x(s)\, m(ds)$ по B принимается величина

$$\int_B x(s)\, m(ds) \equiv \int_S C_B(s)\, x(s)\, m(ds),$$

где $C_B(s)$ — *характеристическая функция* множества B, т. е.

$$C_B(s)=1 \text{ для } s \in B \text{ и } C_B(s)=0 \text{ для } s \in S-B.$$

При этом функция $X(B) \equiv \int_B x(s)\, m(ds)$, определенная на множествах $B \in \mathfrak{B}$, является σ-аддитивной, т. е. для любой последовательности попарно непересекающихся множеств $\{B_j\}$, принадлежащих $\mathfrak{B}$, справедливо равенство

$$X\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} X(B_j).$$

(5) Функция $X(B)$, определенная выше, *абсолютно непрерывна* относительно меры m, т. е. если $m(B)=0$, то $X(B)=0$. Это условие эквивалентно требованию $\lim\limits_{m(B)\to 0} X(B)=0$, причем сходимость равномерна по $B \in \mathfrak{B}$.

Лемма Лебега — Фату. Пусть $\{x_n(s)\}$ — некоторая последовательность вещественных интегрируемых функций. Если существует вещественная интегрируемая функция $x(s)$, такая, что $x(s) \geqslant x_n(s)$ почти всюду для $n=1, 2, \ldots$ (или $x(s) \leqslant x_n(s)$ почти всюду для

$n = 1, 2, \ldots$), то

$$\int_S \left(\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(s)\right) m(ds) \geqslant \overline{\lim_{n\to\infty}} \int_S x_n(s)\, m(ds)$$

$$\left(\text{или} \int_S \left(\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n(s)\right) m(ds) \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}} \int_S x_n(s)\, m(ds)\right);$$

в случае когда функция $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n(s)$ $\left(\text{или } \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n(s)\right)$ неинтегрируема, мы полагаем $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_S x_n(s)\, m(ds) = -\infty$ $\left(\text{или } \underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \int\limits_S x_n(s)\, m(ds) = \infty\right)$.

Определение. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ и $(S', \mathfrak{B}', m')$ — два пространства с мерой. Обозначим через $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$ наименьшую σ-алгебру подмножеств множества $S \times S'$, содержащую все множества вида $B \times B'$, где $B \in \mathfrak{B}$, $B' \in \mathfrak{B}'$. Доказано, что существует единственная σ-финитная σ-аддитивная неотрицательная мера $m \times m'$, определенная на $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$, такая, что

$$(m \times m')(B \times B') = m(B)\, m'(B').$$

Мера $m \times m'$ называется *произведением мер* m и m'. Далее можно обычным способом определить $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$-измеримые функции $x(s, s')$, заданные на множестве $S \times S'$, и $m \times m'$-интегрируемые функции $x(s, s')$. Величина интеграла по $S \times S'$ от $m \times m'$-интегрируемой функции $x(s, s')$ будет обозначаться через

$$\iint\limits_{S\times S'} x(s, s')(m \times m')(ds\, ds') \quad \text{или} \quad \iint\limits_{S\times S'} x(s, s')\, m(ds)\, m'(ds').$$

Теорема Фубини—Тонелли. Некоторая $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$-измеримая функция $x(s, s')$ тогда и только тогда $m \times m'$-интегрируема по $S \times S'$, когда по крайней мере один из повторных интегралов

$$\int_{S'} \left\{ \int_S |x(s, s')|\, m(ds) \right\} m'(ds') \quad \text{или} \quad \int_S \left\{ \int_{S'} |x(s, s')|\, m'(ds') \right\} m(ds)$$

конечен, причем в этом случае

$$\iint\limits_{S\times S'} x(s, s')\, m(ds)\, m'(ds') = \int_{S'} \left\{ \int_S x(s, s')\, m(ds) \right\} m'(ds') =$$
$$= \int_S \left\{ \int_{S'} x(s, s')\, m'(ds') \right\} m(ds).$$

Топологические меры

Определение. Пусть S — некоторое локально бикомпактное пространство, например n-мерное евклидово пространство R^n или какое-нибудь его замкнутое подмножество. *Бэровскими подмножествами* пространства S называются элементы наименьшей σ-алгебры подмножеств пространства S, содержащей все бикомпактные G_δ-множества этого пространства, т. е. все его бикомпактные множества, являющиеся пересечениями счетного числа открытых множеств этого пространства. *Борелевскими подмножествами* пространства S называются элементы наименьшей σ-алгебры подмножеств пространства S, содержащей все бикомпактные множества этого пространства.

Если S — некоторое замкнутое подмножество евклидова пространства R^n, то его бэровские и борелевские подмножества совпадают, так как в R^n всякое бикомпактное (замкнутое ограниченное) множество представляет собой G_δ-множество. Если, в частности, S — это вещественная прямая R^1 или замкнутый интервал из R^1, то бэровские (борелевские) подмножества можно определить как элементы наименьшей σ-алгебры подмножеств пространства S, содержащей все полуоткрытые интервалы вида $(a, b] \in S$.

Определение. Пусть S — локально бикомпактное пространство. Неотрицательной *мерой Бэра* (*Бореля*) на S называется σ-аддитивная мера, определенная для всех бэровских (борелевских) подмножеств пространства S таким образом, что мера каждого бикомпактного множества конечна. Мера Бореля m называется *регулярной*, если для каждого борелевского множества B справедливо соотношение

$$m(B) = \inf_{U \supseteq B} m(U),$$

где нижняя грань берется по всем открытым множествам U, содержащим B. Таким же образом можно определить регулярность меры Бэра, но при этом оказывается, что она всегда регулярна. Доказано, что всякая мера Бэра может быть единственным образом продолжена до некоторой регулярной меры Бореля. Поэтому мы будем далее рассматривать лишь меры Бэра.

Определение. Комплексная функция $f(s)$, заданная на локально бикомпактном пространстве S, называется *бэровской функцией* на этом пространстве, если для каждого бэровского множества B комплексной плоскости C^1 множество $f^{-1}(B)$ является бэровским множеством в S. Если S представляется в виде счетного объединения бикомпактных множеств, то всякая непрерывная функция оказывается бэровской. Всякая бэровская функция измерима по отношению к σ-алгебре всех бэровских подмножеств пространства S.

Мера Лебега

Определение. Предположим, что S — вещественная прямая R^1 или какой-нибудь ее замкнутый интервал. Пусть $F(x)$ — некоторая монотонная неубывающая функция на S, непрерывная справа:

$F(x) = \inf\limits_{x<y} F(y)$. На полуоткрытых интервалах $(a, b]$ определим функцию m соотношением $m((a, b]) = F(b) - F(a)$. Такая функция m может быть единственным образом продолжена до некоторой неотрицательной меры Бэра на S. Продолженная мера m оказывается конечной (т. е. $m(S) < \infty$) тогда и только тогда, когда функция F ограничена. Если m — мера Бэра, определенная таким способом с помощью функции $F(s) = s$, то она называется *мерой Лебега*. Мера Лебега в пространстве R^n строится из n одномерных мер Лебега при помощи образования произведения мер.

Для меры Лебега и соответствующего ей *интеграла Лебега* справедливы следующие две важные теоремы.

Теорема 1. Пусть M — бэровское множество в пространстве R^n с конечной мерой Лебега $|M|$. Обозначим через $B \ominus C$ множество $B \ominus C = B \cup C - B \cap C$, которое называется *симметрической разностью* множеств B и C. Тогда

$$\lim_{|h| \to 0} |(M + h) \ominus M| = 0,$$

где $M + h = \{x \in R^n;\ x = m + h,\ m \in M\}$, $m = (m_1, \ldots, m_n)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $m + h = (m_1 + h_1, \ldots, m_n + h_n)$ и $|h| = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} h_j^2\right)^{1/2}$.

Теорема 2. Пусть G — открытое множество из R^n. Для любой интегрируемой по Лебегу функции $f(x)$, заданной на G, и произвольного $\varepsilon > 0$ существует определенная в G непрерывная функция $C_\varepsilon(x)$, такая, что множество $\{x \in G;\ C_\varepsilon(x) \neq 0\}^a$ представляет собой бикомпактное подмножество множества G и

$$\int\limits_G |f(x) - C_\varepsilon(x)|\, dx < \varepsilon \text{ [1]}.$$

Замечание. Пусть m — некоторая мера Бэра на локально бикомпактном пространстве S. Подмножество Z пространства S называется множеством *m-меры нуль*, если для всякого $\varepsilon > 0$ можно указать такое бэровское множество B, содержащее Z, что $m(B) < \varepsilon$. Меру m можно распространить на класс *m-измеримых множеств* (так мы будем называть множества, отличающиеся от бэровских множеством m-меры нуль). Если некоторое условие выполняется во всех точках, кроме тех, которые образуют множество m-меры

---

[1] Интеграл $\int\limits_G \varphi(x)\, dx$ обозначает здесь и далее интеграл Лебега. — *Прим. перев.*

нуль, то говорят, что это условие справедливо почти всюду по мере m (m-п. в.). На функцию, которая m-п. в. совпадает с бэровской функцией, можно также распространить понятие интегрируемости.

4. *Линейные пространства*

Линейные пространства

Определение. Множество X называется *линейным пространством* над некоторым полем K, если выполняются следующие условия:

X — аддитивная абелева группа; (1)

определена операция *умножения на скаляр*: каждому элементу $x \in X$ и всякому $\alpha \in K$ поставлен в соответствие некоторый элемент множества X, обозначаемый αx, причем

$$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y \quad (\alpha \in K;\ x,\ y \in X), \tag{2}$$
$$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x \quad (\alpha,\ \beta \in K;\ x \in X),$$
$$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x) \quad (\alpha,\ \beta \in K;\ x \in X),$$
$1 \cdot x = x$ (1 обозначает здесь единичный элемент поля K).

В дальнейшем мы будем рассматривать линейные пространства только над полем R^1 вещественных чисел или над полем C^1 комплексных чисел и в зависимости от этого соответствующее линейное пространство будет называться *вещественным* или *комплексным*. Итак, далее мы под линейным пространством понимаем вещественное или комплексное линейное пространство. Элементы поля коэффициентов мы будем обозначать греческими буквами, а элементы пространства X — латинскими. Нулевой элемент пространства X (так мы называем нулевой элемент аддитивной абелевой группы X) и число нуль обозначаются одним и тем же символом 0; это не вызывает никаких неудобств, поскольку $0 \cdot x=(\alpha-\alpha)x=\alpha x-\alpha x=0$. Элемент аддитивной абелевой группы X, являющийся *обратным* для элемента x, обозначается $-x$; легко видеть, что $-x=(-1)x$.

Определение. Элементы линейного пространства X называются также векторами этого пространства. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ пространства X называются *линейно независимыми*, если из соотношения $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j=0$ следует, что $\alpha_1=\alpha_2= \ldots =\alpha_n=0$. Векторы называются *линейно зависимыми*, если это соотношение выполняется, когда хотя бы один из коэффициентов α_j отличен от 0. Если в X имеется n линейно независимых векторов, но любые

$n+1$ векторов линейно зависимы, то пространство X называется *n-мерным.* Если же число линейно независимых векторов бесконечно, то говорят, что X — бесконечномерное пространство. Всякая совокупность n линейно независимых векторов n-мерного линейного пространства X называется его *базисом*; при этом всякий вектор x из X единственным образом представляется в виде $x=\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j$, где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — базис пространства X. Подмножество M линейного пространства X называется *линейным подпространством* или, короче, *подпространством*, если при любых $x, y \in M$ всякая линейная комбинация $\alpha x+\beta y$ также принадлежит M. Множество M является, следовательно, линейным пространством над тем же полем коэффициентов, что и пространство X.

Линейные операторы и линейные функционалы

Определение. Пусть X, Y — линейные пространства над одним и тем же полем коэффициентов K. Отображение $T: x \to y = T(x) \equiv Tx$, определенное на некотором линейном подпространстве D пространства X и принимающее значения из Y, называется *линейным*, если

$$T(\alpha x_1+\beta x_2)=\alpha(Tx_1)+\beta(Tx_2).$$

В частности, из этого определения следует, что

$$T\cdot 0=0, \qquad T(-x)=-(Tx).$$

Введем следующие обозначения:

$$D=D(T); \quad \{y \in Y;\ y=Tx,\ x \in D(T)\}=R(T);$$
$$\{x \in D(T);\ Tx=0\}=N(T).$$

Множества $D(T)$, $R(T)$ и $N(T)$ называются соответственно *областью определения*, *областью значений* и *нуль-подпространством* (*ядром*) отображения T. Отображение T называется также *линейным оператором*, действующим из области $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, или *линейным преобразованием* области $D(T)$ в область $R(T) \in Y$, или, несколько грубо, *линейным оператором из X в Y*. Если область значений $R(T)$ содержится в скалярном поле K, то T называется *линейным функционалом*, заданным на $D(T)$. Если линейный оператор T отображает $D(T)$ на $R(T)$ взаимно однозначно, то *обратное отображение* T^{-1} определяется как линейное отображение области $R(T)$ на $D(T)$, удовлетворяющее условиям

$$T^{-1}Tx=x \quad \text{для} \quad x \in D(T); \qquad TT^{-1}y=y \quad \text{для} \quad y \in R(T);$$

T^{-1} называется также *обратным оператором* или *обращением* оператора T. Поскольку $T(x_1-x_2)=Tx_1-Tx_2$, справедливо следующее утверждение.

Предложение. Линейный оператор T имеет обратный оператор T^{-1} тогда и только тогда, когда из соотношения $Tx = 0$ следует, что $x = 0$.

Определение. Пусть T_1 и T_2 — линейные операторы, причем их области определения $D(T_1)$ и $D(T_2)$ принадлежат линейному пространству X, а области значений $R(T_1)$ и $R(T_2)$ содержатся в линейном пространстве Y. Тогда по определению $T_1 = T_2$ в том и только в том случае, когда $D(T_1) = D(T_2)$ и $T_1x = T_2x$ для всех $x \in D(T_1) = D(T_2)$. Если $D(T_1) \subseteq D(T_2)$ и $T_1x = T_2x$ для всех $x \in D(T_1)$, то оператор T_2 называется *расширением*, или *продолжением*, оператора T_1, а T_1 называется *сужением* T_2; в этом случае мы будем писать $T_1 \subseteq T_2$.

Замечание по поводу обозначений. Численное значение $T(x)$ линейного функционала T в некоторой точке $x \in D(T)$ мы иногда будем обозначать через $\langle x, T \rangle$, т. е.

$$T(x) \equiv \langle x, T \rangle.$$

Факторпространства

Предложение. Пусть M — некоторое линейное подпространство линейного пространства X. Два вектора x_1, $x_2 \in X$ называются *эквивалентными относительно подпространства* M (или *сравнимыми по модулю* M), если $(x_1 - x_2) \in M$; в этом случае мы пишем $x_1 \equiv x_2 \pmod M$. Из этого определения вытекают следующие свойства:

(1) $x \equiv x \pmod M$;

(2) если $x_1 \equiv x_2 \pmod M$, то $x_2 \equiv x_1 \pmod M$;

(3) если $x_1 \equiv x_2 \pmod M$ и $x_2 \equiv x_3 \pmod M$, то $x_1 \equiv x_3 \pmod M$.

Доказательство. Свойство (1) очевидно, так как $x - x = 0 \in M$. Утверждение (2) следует из того, что если $(x_1 - x_2) \in M$, то $(x_2 - x_1) = -(x_1 - x_2) \in M$. Наконец, (3) справедливо потому, что если $(x_1 - x_2) \in M$ и $(x_2 - x_3) \in M$, то $(x_1 - x_3) = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \in M$.

Совокупность всех векторов пространства X, сравнимых по модулю M с некоторым фиксированным вектором x, мы будем обозначать через ξ_x. Тогда в соответствии со свойствами (2) и (3) все векторы из ξ_x взаимно сравнимы по модулю M. Множество ξ_x называется *классом эквивалентности по модулю* M, а каждый отдельный вектор из ξ_x называется *представителем* класса ξ_x. Класс полностью определяется любым из своих представителей, т. е. из соотношения $y \in \xi_x$ вытекает, что $\xi_x = \xi_y$. Следовательно, всякие два класса ξ_x, ξ_y либо не пересекаются (если $y \notin \xi_x$), либо совпадают (если $y \in \xi_x$). Таким образом, все пространство X разбивается на классы ξ_x векторов, взаимно эквивалентных по модулю M.

Теорема. Если в совокупности всех классов эквивалентности определить сложение классов и умножение класса на скаляр формулами

$$\xi_x + \xi_y = \xi_{x+y}, \qquad \alpha\xi_x = \xi_{\alpha x},$$

то это множество классов можно рассматривать как новое линейное пространство.

Доказательство. Приведенные выше определения операций над классами не зависят от выбора представителей x, y соответственно классов ξ_x, ξ_y. В самом деле, если $(x_1 - x) \in M$, $(y_1 - y) \in M$, то

$$(x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y) \in M,$$
$$(\alpha x_1 - \alpha x) = \alpha (x_1 - x) \in M.$$

Таким образом, мы показали, что $\xi_{x_1+y_1} = \xi_{x+y}$ и $\xi_{\alpha x_1} = \xi_{\alpha x}$.

Итак, вышеуказанные операции определены однозначно, и при этом выполняются все аксиомы линейного пространства.

Определение. Линейное пространство, построенное таким способом (пространство классов эквивалентности), называется *фактор-пространством* пространства X по подпространству M и обозначается X/M.

Литература

Топологические пространства: Александров — Хопф [1], Бурбаки [1], Келли [1].

Пространства с мерой: Халмош [1], Сакс [1].

ГЛАВА I

Полунормы

Полунорма вектора линейного пространства является некоторым аналогом понятия длины. Чтобы ввести в бесконечномерном линейном пространстве топологию, удобную для приложений к задачам классического и современного анализа, иногда необходимо использовать систему бесконечного числа полунорм. Одна из больших заслуг математиков группы Бурбаки состоит в том, что они показали, как важно для функционального анализа изучение *локально выпуклых пространств*, определяемых с помощью системы полунорм, удовлетворяющих *аксиоме отделимости*. В случае когда такая система полунорм сводится к единственной полунорме, соответствующее линейное пространство называется *нормированным линейным пространством*. Если, кроме того, это пространство полно по отношению к топологии, определенной указанной полунормой, то оно называется *банаховым пространством*. Понятие полного нормированного линейного пространства независимо друг от друга ввели около 1922 г. С. Банах и Н. Винер. Некоторое видоизменение понятия нормы, которое мы в данной книге называем *квазинормой*, было предложено М. Фреше. Мы рассмотрим также некоторый специальный вид предельного перехода — *индуктивный предел* локально выпуклых пространств, который используется при изучении *обобщенных функций*, или *распределений*; соответствующая теория была развита Л. Шварцем на основе обобщения понятия функции, предложенного С. Л. Соболевым.

1. Полунормы и локально выпуклые линейные топологические пространства

Как было сказано во введении, понятие полунормы играет важную роль при изучении линейных топологических пространств. Мы начнем с определения полунормы.

Определение 1. Вещественная функция $p(x)$, заданная на линейном пространстве X, называется *полунормой*, если выполняются следующие условия:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad (\textit{полуаддитивность}), \tag{1}$$

$$p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x). \tag{2}$$

Пример 1. Евклидово n-мерное пространство R^n точек $x=(x_1, \ldots, x_n)$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ является n-мерным линейным пространством относительно операций

$$x+y=(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n).$$

В этом пространстве функция $p(x)=\max_{1\leqslant y\leqslant n}|x_j|$ представляет собой полунорму. Как будет показано далее, функция $p(x)=\left(\sum_{j=1}^{n}|x_j|^q\right)^{1/q}$ при $q\geqslant 1$ тоже является полунормой в R^n.

Предложение 1. Всякая полунорма $p(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$p(0)=0; \tag{3}$$

$$p(x_1-x_2)\geqslant|p(x_1)-p(x_2)|; \quad \text{в частности,} \quad p(x)\geqslant 0. \tag{4}$$

Доказательство. Имеем $p(0)=p(0\cdot x)=0\cdot p(x)=0$. В силу полуаддитивности $p(x_1-x_2)+p(x_2)\geqslant p(x_1)$, и поэтому $p(x_1-x_2)\geqslant \geqslant p(x_1)-p(x_2)$. Таким образом, $p(x_1-x_2)=|-1|\cdot p(x_2-x_1)\geqslant \geqslant p(x_2)-p(x_1)$, откуда следует (4).

Предложение 2. Пусть $p(x)$—некоторая полунорма в X, c—любое положительное число. Тогда множество $M=\{x\in X;\ p(x)\leqslant c\}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$M\ni 0; \tag{5}$$

M выпукло, т. е. если $x, y\in M$ и $0<\alpha<1$, то

$$\alpha x+(1-\alpha)y\in M; \tag{6}$$

M уравновешено, т. е. если $x\in M$ и $|\alpha|\leqslant 1$, то $\alpha x\in M$; (7)

M является *поглощающим*, т. е. для любого $x\in X$

существует такое $\alpha>0$, что $\alpha^{-1}x\in M$; (8)

$$p(x)=\inf_{\alpha>0,\ \alpha^{-1}x\in M}\alpha c. \tag{9}$$

Доказательство. Свойство (5) следует из (3); (7) и (8) вытекают из (2). Утверждение (6) является следствием полуаддитивности (1) и условия (2). Наконец, справедливость соотношения (9) вытекает из эквивалентности следующих трех предложений:

$$[\alpha^{-1}x \in M] \rightleftarrows [p(\alpha^{-1}x) \leqslant c] \rightleftarrows [p(x) \leqslant \alpha c] \quad (\alpha > 0).$$

Определение 2. Функционал

$$p_M(x) = \inf_{\alpha > 0,\ \alpha^{-1}x \in M} \alpha \tag{9'}$$

называется *функционалом Минковского*[1]) выпуклого уравновешенного поглощающего множества M пространства X.

Предложение 3. Пусть некоторое семейство $\{p_\gamma(x);\ \gamma \in \Gamma\}$ полунорм линейного пространства X удовлетворяет следующей *аксиоме отделимости*:

$$\begin{gathered}\text{для всякого } x_0 \neq 0 \text{ существует полунорма } p_{\gamma_0}(x) \\ \text{из этого семейства, такая, что } p_{\gamma_0}(x_0) \neq 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Выберем некоторую конечную систему полунорм из этого семейства, скажем $p_{\gamma_1}(x)$, $p_{\gamma_2}(x)$, $\ldots$, $p_{\gamma_n}(x)$, и систему n положительных чисел ε_1, ε_2, $\ldots$, ε_n и рассмотрим множество

$$U = \{x \in X;\ p_{\gamma_j}(x) \leqslant \varepsilon_j \ (j = 1, 2, \ldots, n)\}. \tag{11}$$

Тогда U — выпуклое уравновешенное поглощающее множество. Будем теперь рассматривать множества вида U как окрестности вектора $x = 0$ пространства X; за окрестности любого другого вектора x_0 примем по определению множества вида

$$x_0 + U = \{y \in X;\ y = x_0 + u,\ u \in U\}. \tag{12}$$

Рассмотрим множество G пространства X, содержащее некоторую окрестность каждой из своих точек. Тогда совокупность $\{G\}$ всех таких подмножеств G удовлетворяет аксиоме открытых множеств, приведенной в § 2 введения.

Доказательство. Сначала мы покажем, что всякое множество G_0 вида $G_0 = \{x \in X;\ p_\gamma(x) < c\}$ является открытым в смысле данного выше определения. Пусть $x_0 \in G_0$ и $p_\gamma(x_0) = \beta < c$. Тогда окрестность $x_0 + U$ точки x_0, где $U = \{x \in X;\ p_\gamma(x) \leqslant 2^{-1}(c - \beta)\}$, содержится в G_0, так как если $u \in U$, то $p_\gamma(x_0 + u) \leqslant p_\gamma(x_0) + p_\gamma(u) < \beta + (c - \beta) = c$.

---

[1]) Применяется также название *опорная функция* (или *функция Минковского*). — *Прим. перев.*

Следовательно, для всякой точки $x_0 \in X$ существует открытое множество вида $x_0 + G_0$, содержащее x_0.

Ясно, что объединение любого числа и пересечение конечного числа определенных выше открытых множеств также являются открытыми множествами.

Таким образом, нам остается лишь показать, что выполняется аксиома отделимости Хаусдорфа: если $x_1 \neq x_2$, то существуют непересекающиеся открытые множества G_1 и G_2, такие, что

$$x_1 \in G_1, \qquad x_2 \in G_2. \tag{13}$$

Так как окрестность любой точки x_i определяется соотношением (12), достаточно доказать (13) для случая $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$. Согласно (10), мы можем выбрать $p_{\gamma_2}(x)$ так, что $p_{\gamma_2}(x) = \alpha > 0$. Тогда множество $G_1 = \{x \in X;\ \ p_{\gamma_2}(x) < \alpha/2\}$, как было показано выше, — открытое. Разумеется, $G_1 \ni 0 = x_1$. Остается показать, что множества G_1 и $G_2 = x_2 + G_1$ не имеют общих точек. Допустим противное: пусть существует $y \in G_1 \cap G_2$. Так как $y \in G_2$, то $y = x_2 + g = x_2 - (-g)$, где g — некоторая точка, принадлежащая G_1, и поэтому из неравенства (4) следует, что $p_{\gamma_2}(y) \geqslant p_{\gamma_2}(x_2) - p(-g) \geqslant \alpha - 2^{-1}\alpha = \alpha/2$, поскольку $-g$, так же как и g, принадлежит G_1. Но $y \in G_1$, и поэтому $p_{\gamma_2}(y) < \alpha/2$. Полученное противоречие доказывает наше утверждение.

Предложение 4. Если принять определенные выше множества G за открытые, то X станет *линейным топологическим* пространством, т. е. линейным и одновременно топологическим пространством, для которого непрерывны отображения $X \times X \to X$: $(x, y) \to x + y$ и $K \times X \to X$: $(\alpha, x) \to \alpha x$. Кроме того, каждая из полунорм $p_\gamma(x)$ есть непрерывная функция на X.

Доказательство. Для любой окрестности U точки $x = 0$ существует окрестность V этой же точки, такая, что

$$V + V = \{w \in X;\ \ w = v_1 + v_2, \ \text{ где } \ v_1, \ v_2 \in V\} \subseteq U,$$

так как полунорма полуаддитивна. Следовательно, отображение $(x, y) \to x + y$ непрерывно при $x = x_0$, $y = y_0$, так как

$$(x + y) - (x_0 + y_0) = (x - x_0) + (y - y_0).$$

Для любой окрестности U точки $x = 0$ и всякого скаляра $\alpha \neq 0$ множество $\alpha U = \{x \in X;\ \ x = \alpha u,\ u \in U\}$ в свою очередь является окрестностью точки $x = 0$. Поэтому из соотношения (2) и равенства

$$\alpha x - \alpha_0 x_0 = \alpha (x - x_0) - (\alpha - \alpha_0)\, x_0$$

мы заключаем, что отображение $(\alpha, x) \to \alpha x$ непрерывно при $\alpha = \alpha_0$, $x = x_0$.

Непрерывность полунормы $p_\gamma(x)$ во всякой точке $x = x_0$ следует из неравенства $|p_\gamma(x) - p_\gamma(x_0)| \leqslant p_\gamma(x - x_0)$.

Определение 3. Линейное топологическое пространство X называется *локально выпуклым линейным топологическим пространством*, или, короче, *локально выпуклым пространством*, если всякое открытое множество этого пространства, содержащее точку $x = 0$, содержит также некоторое выпуклое уравновешенное и поглощающее открытое множество.

Предложение 5. Функционал Минковского $p_M(x)$ всякого выпуклого уравновешенного и поглощающего подмножества M линейного пространства X представляет собой некоторую полунорму на X.

Доказательство. Так как M — выпуклое множество, из включений

$$\frac{x}{p_M(x)+\varepsilon} \in M, \qquad \frac{y}{p_M(y)+\varepsilon} \in M \text{ при любом } \varepsilon > 0$$

следует, что

$$\frac{p_M(x)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{x}{p_M(x)+\varepsilon} + \frac{p_M(y)+\varepsilon}{p_M(x)+p_M(y)+2\varepsilon} \cdot \frac{y}{p_M(y)+\varepsilon} \in M,$$

и поэтому $p_M(x+y) \leqslant p_M(x) + p_M(y) + 2\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon > 0$ взято произвольно, отсюда следует, что функция $p_M(x)$ полуаддитивна. Аналогично, из того что M — уравновешенное множество, вытекает соотношение $p_M(\alpha x) = |\alpha| p_M(x)$. Таким образом, доказана следующая

Теорема. Всякое линейное пространство X, топологизированное указанным выше способом с помощью некоторого семейства полунорм $p_\gamma(x)$, удовлетворяющего аксиоме отделимости (10), является локально выпуклым пространством, в котором каждая полунорма $p_\gamma(x)$ непрерывна. Обратно, всякое локально выпуклое пространство представляет собой некоторое линейное топологическое пространство, топологизированное с помощью семейства полунорм, за которые можно принять функционалы Минковского выпуклых уравновешенных и поглощающих открытых множеств пространства X[1]).

Определение 4. Пусть $f(x)$ — комплексная функция, заданная на некотором открытом множестве Ω пространства R^n. *Носителем*

---

[1]) Для дальнейшего полезна следующая эквивалентная формулировка этого предложения: топология всякого локально выпуклого линейного топологического пространства X может быть определена семейством полунорм, состоящим из всех непрерывных в этой топологии полунорм, заданных на X. — *Прим. перев.*

supp(f) функции $f(x)$ называется наименьшее замкнутое множество (топологического пространства Ω), содержащее множество $\{x \in \Omega;\ f(x) \neq 0\}$. Иными словами, носитель $f(x)$ — это наименьшее замкнутое множество пространства Ω, вне которого функция $f(x)$ тождественно равна нулю.

Определение 5. Обозначим через $C^k(\Omega)$ $(0 \leqslant k \leqslant \infty)$ совокупность всех комплексных функций, определенных на множестве Ω, которые имеют непрерывные частные производные до порядка k включительно (бесконечно дифференцируемых, если $k=\infty$). Символом $C_0^k(\Omega)$ обозначим подмножество функций из $C^k(\Omega)$, носители которых являются бикомпактными подмножествами Ω (мы назовем их функциями с *бикомпактными носителями*). Классический пример функции из множества $C_0^\infty(R^n)$ представляет собой функция $f(x)$, определяемая условиями

$$f(x)=\begin{cases} \exp(|x|^2-1)^{-1} & \text{при} \quad |x|=\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{1/2}<1, \\ 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 1. \end{cases} \tag{14}$$

Пространство $\mathfrak{E}^k(\Omega)$

Множество $C^k(\Omega)$ является линейным пространством относительно операций

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x), \qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x).$$

Для всякого бикомпактного подмножества K из Ω и любого неотрицательного целого числа $m \leqslant k$ $(m<\infty$ при $k=\infty)$ определим полунорму

$$p_{K\ m}(f)=\sup_{|s| \leqslant m,\ x \in K} |D^s f(x)|, \qquad f \in C^k(\Omega),$$

где

$$s=(s_1, s_2, \ldots, s_n), \qquad |s|=|(s_1, s_2, \ldots, s_n)|=\sum_{j=1}^{n} s_j,$$

$$D^s f(x)=\frac{\partial^{s_1+s_2+\ldots+s_n}}{\partial x_1^{s_1}\, \partial x_2^{s_2} \ldots \partial x_n^{s_n}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Тогда введение в множестве $C^k(\Omega)$ топологии, определяемой построенным выше семейством полунорм, превращает его в локально выпуклое топологическое пространство, которое мы обозначим через $\mathfrak{E}^k(\Omega)$.

Предельный переход $\lim_{h\to\infty} f_h = f$ в этом пространстве $\mathfrak{C}^k(\Omega)$ совпадает с равномерной сходимостью $\lim_{h\to\infty} D^s f_h(x) = D^s f(x)$ на всяком бикомпактном подмножестве K множества Ω при любом значении s, $|s| \leqslant k$ ($|s| < \infty$, если $k = \infty$).

Предложение 6[1]**.** Пространство $\mathfrak{C}^k(\Omega)$ является метрическим.

Доказательство. Пусть $K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots \subseteq K_n \subseteq \ldots$ — некоторая монотонно возрастающая последовательность бикомпактных подмножеств из Ω, такая, что $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. Определим для каждого положительного целого числа h функцию расстояния

$$d_h(f, g) \equiv \sum_{m=0}^{k} 2^{-m} p_{K_h, m}(f-g) \cdot \left(1 + p_{K_h, m}(f-g)\right)^{-1}.$$

Тогда сходимость $\lim_{s\to\infty} f_s = f$ в пространстве $\mathfrak{C}^k(\Omega)$ определяется расстоянием

$$d(f, g) = \sum_{h=1}^{\infty} 2^{-h} d_h(f, g) \cdot (1 + d_h(f, g))^{-1}.$$

Мы должны еще показать, что функции $d_h(f, g)$ и $d(f, g)$ удовлетворяют неравенству треугольника. Для $d_h(f, g)$ неравенство треугольника выводится следующим образом: полуаддитивность полунормы $p_{K_h, m}(f)$ позволяет заключить, что неравенство треугольника

$$d_h(f, g) \leqslant d_h(f, \varphi) + d_h(\varphi, g) \quad (f, \varphi, g \in \mathfrak{C}^k(\Omega))$$

выполняется, если при любых комплексных α, β и γ справедливо неравенство

$$|\alpha-\beta| \cdot (1 + |\alpha-\beta|)^{-1} \leqslant |\alpha-\gamma|(1 + |\alpha-\gamma|)^{-1} + \\ + |\gamma-\beta|(1 + |\gamma-\beta|)^{-1}.$$

Это последнее неравенство нетрудно вывести из другого неравенства, справедливого для любых неотрицательных вещественных α, β и γ:

$$(\alpha+\beta)(1+\alpha+\beta)^{-1} \leqslant \alpha(1+\alpha)^{-1} + \beta(1+\beta)^{-1}.$$

Для функции $d(f, g)$ неравенство треугольника доказывается аналогичным образом.

Определение 6. Пусть X — линейное пространство, а $\{X_\alpha\}$ — семейство линейных подпространств из X, такое, что X есть объединение множеств X_α. Предположим, что все X_α — локально выпук-

---

[1]) Если в топологическом пространстве X можно ввести метрику, при которой топология X как метрического пространства совпадает с исходной топологией, то говорят, что пространство X *метризуемо*. Предложение 6 утверждает, что пространство $\mathfrak{C}^k(\Omega)$ метризуемо. — *Прим. перев.*

лые линейные топологические пространства, причем для любых α_1, α_2 выполняется следующее условие: если $X_{\alpha_1} \subseteq X_{\alpha_2}$, то топология в X_{α_1} совпадает с относительной топологией X_{α_1} как подмножества пространства X_{α_2}. Назовем „открытыми" множествами те и только те выпуклые уравновешенные и поглощающие множества U пространства X, для которых пересечения вида $U \cap X_\alpha$ со всеми $X_\alpha \in \{X_\alpha\}$ представляют собой открытые множества пространства X_α, содержащие нулевой вектор $x=0$ этого пространства. Если X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, топология в котором определена указанным выше образом, то X называется *индуктивным пределом* [1]) пространств X_α.

Замечание. Выберем из каждого пространства X_α некоторую выпуклую уравновешенную окрестность U_α вектора $x=0$ этого пространства. Тогда *выпуклая оболочка* объединения $V = \bigcup\limits_\alpha U_\alpha$, т. е. множество

$$U = \left\{ u \in X;\ u = \sum_{j=1}^{n} \beta_j v_j,\ v_j \in V,\ \beta_j \geqslant 0\ (j = 1, 2, \ldots, n), \right.$$
$$\left. \sum_{j=1}^{n} \beta_j = 1,\ n \text{ — произвольное конечное целое число} \right\},$$

очевидно, является выпуклым, уравновешенным и поглощающим, и при этом пересечения $U \cap X_\alpha$ представляют собой выпуклые и уравновешенные окрестности вектора $x=0$ пространства X_α для всех X_α. Совокупность всех таких множеств U, соответствующих произвольному выбору окрестностей U_α, представляет собой *фундаментальную систему окрестностей* нулевого вектора $x=0$ индуктивного предела X пространств X_α, т. е. всякая окрестность нулевого вектора индуктивного предела X пространств X_α содержит некоторое множество U, принадлежащее построенной выше совокупности. Этот факт оправдывает приведенное выше определение индуктивного предела [2]).

---

[1]) Другие определения индуктивного предела см. в книгах Бурбаки [2], Канторович — Акилов [1]. — *Прим. перев.*

[2]) Определение „оправдывается" в том смысле, что пространство X, построенное указанным способом, действительно является в силу приведенных рассуждений локально выпуклым линейным топологическим пространством, так как если в качестве множеств U_α выбрать *открытые* выпуклые уравновешенные и поглощающие окрестности нулевых векторов пространств X_α, то соответствующие множества типа U будут открытыми выпуклыми уравновешенными и поглощающими окрестностями нулевого вектора пространства X, и при этом всякая окрестность (в том числе и открытая) нулевого вектора пространства X будет содержать некоторое множество типа U. — *Прим. перев.*

Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$

Операции

$$(f_1+f_2)(x)=f_1(x)+f_2(x), \qquad (\alpha f)(x)=\alpha f(x)$$

позволяют рассматривать $C_0^\infty(\Omega)$ как линейное пространство. Обозначим через $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ множество всех функций $f\in C_0^\infty(\Omega)$, таких, что $\operatorname{supp}(f)\subseteq K$, где K — любое бикомпактное подмножество из Ω. Определим в $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ семейство полунорм

$$p_{K,m}(f)=\sup_{|s|\leqslant m,\ x\in K}|D^s f(x)|, \text{ где } m<\infty.$$

Тогда $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ превращается в локально выпуклое линейное топологическое пространство, причем если $K_1\subseteq K_2$, то топология $\mathfrak{D}_{K_1}(\Omega)$ совпадает с относительной топологией $\mathfrak{D}_{K_1}(\Omega)$ как подмножества пространства $\mathfrak{D}_{K_2}(\Omega)$. Индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, где K пробегает совокупность всех бикомпактных подмножеств из Ω, является локально выпуклым линейным топологическим пространством. Топологизированное таким способом множество $C_0^\infty(\Omega)$ мы обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)$. Следует заметить, что определенная в $\mathfrak{D}(\Omega)$ функция

$$p(f)=\sup_{x\in\Omega}|f(x)|$$

— это одна из полунорм, определяющих топологию в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$. В самом деле, если мы положим $U=\{f\in C_0^\infty(\Omega);\ p(f)\leqslant 1\}$, то пересечение $U\cap\mathfrak{D}_K(\Omega)$ совпадает с множеством $U_K=\Big\{f\in\mathfrak{D}_K(\Omega);$ $p_K(f)=\sup_{x\in K}|f(x)|\leqslant 1\Big\}$.

Предложение 7. Сходимость $\lim_{h\to\infty} f_h=0$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$ означает, что выполняются следующие два условия: (1) в Ω существует бикомпактное подмножество K, такое, что $\operatorname{supp}(f_h)\subseteq K$ $(h=1, 2, \ldots)$; (2) для любого дифференциального оператора D^s последовательность $\{D^s f_h(x)\}$ сходится к 0 равномерно на множестве K.

Доказательство. Ясно, что достаточно доказать лишь утверждение (1). Допустим противное и предположим, что существуют последовательность $\{x^{(k)}\}$ точек множества Ω, не имеющая предельных точек в Ω, и подпоследовательность $\{f_{h_j}(x)\}$ последовательности $\{f_h(x)\}$, такая, что $f_{h_j}(x^{(j)})\neq 0$. Тогда полунорма

$$p(f)=\sum_{k=1}^{\infty} 2\sup_{x\in K_k-K_{k-1}}\left|f(x)/f_{h_k}(x^{(k)})\right|,$$

где монотонно возрастающая последовательность бикомпактных подмножеств K_j множества Ω удовлетворяет условию $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$, причем $x^{(k)} \in K_k - K_{k-1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $K_0 = \emptyset$, определяет некоторую окрестность $U = \{f \in C_0^\infty(\Omega);\ p(f) \leqslant 1\}$ нулевого вектора пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$. Но, с другой стороны, ни одна из функций f_{h_k} не содержится в U. Это противоречие и доказывает наше утверждение.

Следствие. Сходимость $\lim_{h\to\infty} f_h = f$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$ означает, что выполняются следующие два условия: (1) в Ω существует такое бикомпактное подмножество K, что $\operatorname{supp}(f_h) \subseteq K$ $(h = 1, 2, \ldots)$; (2) для любого дифференциального оператора D^s последовательность $\{D^s f_h(x)\}$ сходится к $D^s f(x)$ равномерно на K.

Предложение 8 (теорема об аппроксимации). Всякая непрерывная функция $f \in C_0^0(R^n)$ может быть равномерно аппроксимирована в пространстве R^n функциями из $C_0^\infty(R^n)$.

Доказательство. Пусть $\theta_1(x)$ — функция, определенная соотношением (14); положим

$$\theta_a(x) = h_a^{-1}\theta_1(x/a),$$

$$\text{где } a > 0 \text{ и } h_a > 0 \text{ выбраны так, что } \int_{R^n} \theta_a(x)\,dx = 1. \tag{15}$$

Определим теперь *регуляризацию* f_a функции f

$$f_a(x) \equiv \int_{R^n} f(x-y)\,\theta_a(y)\,dy = \int_{R^n} f(y)\,\theta_a(x-y)\,dy, \tag{16}$$

где $x - y = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n)$. Интеграл (16) сходится, так как f и θ_a имеют бикомпактные носители. Кроме того, поскольку

$$f_a(x) = \int_{\operatorname{supp}(f)} f(y)\,\theta_a(x-y)\,dy,$$

носитель функции f_a будет содержаться в сколь угодно малой окрестности носителя $\operatorname{supp}(f)$ при достаточно малом $a > 0$. Далее, дифференцируя под знаком интеграла, мы получаем

$$D^s f_a(x) = D_x^s f_a(x) = \int_{R^n} f(y)\,D_x^s\theta_a(x-y)\,dy, \tag{17}$$

и поэтому f_a принадлежит $C_0^\infty(R^n)$. Наконец, поскольку

$$\int\limits_{R^n} \theta_a(x-y)\,dy = 1,$$

имеем ($\varepsilon > 0$)

$$|f_a(x) - f(x)| \leqslant \int\limits_{R^n} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{|f(y)-f(x)| \leqslant \varepsilon} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy + $$

$$+ \int\limits_{|f(y)-f(x)| > \varepsilon} |f(y) - f(x)|\,\theta_a(x-y)\,dy.$$

Первое слагаемое в правой части не превосходит ε, а второе при достаточно малых $a > 0$ обращается в нуль. В самом деле, в силу равномерной непрерывности f как непрерывной функции с бикомпактным носителем существует столь малое $a > 0$, что из условия $|f(y) - f(x)| > \varepsilon$ следует неравенство $|y - x| > a$. Тем самым наше предложение доказано.

2. Нормы и квазинормы

Определение 1. Локально выпуклое пространство называется *нормированным*, если его топология определяется единственной полунормой, принимающей нулевое значение только при $x = 0$.

Таким образом, линейное пространство X называется нормированным, если каждому $x \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* вектора x, такое, что выполняются следующие условия:

$$\|x\| \geqslant 0; \quad \|x\| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0; \tag{1}$$

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad (\textit{неравенство треугольни а}); \tag{2}$$

$$\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|. \tag{3}$$

Топология нормированного линейного пространства X определяется, следовательно, метрикой

$$d(x, y) \equiv \|x - y\|. \tag{4}$$

В самом деле, нетрудно убедиться в том, что функция $d(x, y)$ удовлетворяет *аксиоме расстояния*:

$$d(x, y) \geqslant 0; \quad d(x, y) = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = y;$$

$$d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y) \text{ (неравенство треугольника)};$$

$$d(x, y) = d(y, x).$$

Действительно, $d(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = d(y, x)$ и $d(x, y) = \|x-y\| = \|x-z+z-y\| \leqslant \|x-z\| + \|z-y\| = d(x, z) + d(z, y)$ согласно (1), (2), (3) и (4).

Сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ в нормированном пространстве X мы будем обозначать записью $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или просто $x_n \to x$ и будем при этом говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *сильно сходится* к элементу x. Термин „сильная“ сходимость вводится, чтобы отличить этот вид предельного перехода от „слабой“ сходимости, которая будет определена позже.

Предложение 1. В нормированном линейном пространстве X выполняются следующие условия:

$$\text{если } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ то } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|; \tag{5}$$

$$\text{если } \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \text{ то } s\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha_n x_n = \alpha x; \tag{6}$$

$$\text{если } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y,$$

$$\text{то } s\text{-}\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y. \tag{7}$$

Доказательство. Условия (5), (6) и (7) уже доказаны, поскольку X — локально выпуклое пространство, топологизированное с помощью единственной полунормы $p(x) = \|x\|$. Однако можно провести и прямое доказательство. По определению полунормы

$$\|x - y\| \geqslant |\|x\| - \|y\||, \tag{8}$$

откуда следует (5). Свойство (7) вытекает из неравенства $\|(x + y) - (x_n + y_n)\| = \|(x - x_n) + (y - y_n)\| \leqslant \|x - x_n\| + \|y - y_n\|$. Наконец, из неравенств $\|\alpha x - \alpha_n x_n\| \leqslant \|\alpha x - \alpha_n x\| + \|\alpha_n x - \alpha_n x_n\| \leqslant |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x\| + |\alpha_n| \cdot \|x - x_n\|$ и ограниченности последовательности $\{\alpha_n\}$ мы выводим (6).

Определение 2. Линейное пространство X называется *квазинормированным линейным пространством*, если каждому элементу $x \in X$ поставлено в соответствие вещественное число $\|x\|$, называемое *квазинормой* [1]) вектора x, таким образом, что выполняются условия (1), (2) и

$$\|-x\|=\|x\|, \quad \lim_{\alpha_n\to 0}\|\alpha_n x\|=0 \quad \text{и} \quad \lim_{\|x_n\|\to 0}\|\alpha x_n\|=0. \tag{3'}$$

Предложение 2. В квазинормированном линейном пространстве X выполняются условия (5), (6) и (7).

Доказательство. Ясно, что в доказательстве нуждается лишь соотношение (6). Из доказательства предыдущего предложения видно, что для этого необходимо доказать следующее утверждение:

$$\begin{gathered}\text{если } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|=0, \text{ то } \lim_{n\to\infty}\|\alpha x_n\|=0,\\ \text{причем сходимость равномерна по } \alpha \text{ на всяком}\\ \text{ограниченном множестве значений } \alpha.\end{gathered} \tag{9}$$

Мы приводим здесь не опубликованное ранее доказательство утверждения (9), принадлежащее Какутани. Рассмотрим функционал $p_n(\alpha)=\|\alpha x_n\|$, определенный на линейном пространстве R^1 вещественных чисел, в котором норма определена как абсолютная величина. Из неравенства треугольника для $p_n(\alpha)$ и условия (3′) следует, что функционал $p_n(\alpha)$ непрерывен в R^1. Значит, из условия $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(\alpha)=0$, согласно (3′) и теореме Егорова (введение, § 3), можно заключить, что существует некоторое измеримое по Бэру множество A вещественной прямой R^1, обладающее следующим свойством:

$$\begin{gathered}\text{мера Лебега } |A| \text{ множества } A \text{ положительна}\\ \text{и } \lim_{n\to\infty} p_n(\alpha)=0 \text{ при } \alpha\in A, \text{ причем сходимость}\\ \text{равномерна по } \alpha\in A.\end{gathered} \tag{10}$$

Так как мера Лебега на вещественной прямой непрерывна относительно сдвига, имеем

$$|(A+\sigma)\ominus A|\to 0 \quad \text{при} \quad \sigma\to 0,$$

где через $B\ominus C$ обозначена симметрическая разность $B\cup C - B\cap C$. Поэтому существует такое положительное число σ_0, что при $|\sigma|\leqslant\sigma_0$ справедливо неравенство $|(A+\sigma)\ominus A|<|A|/2$ и, следовательно, $|(A+\sigma)\cap A|>0$. Таким образом, для любого вещественного числа σ,

[1]) Термин „квазинорма“ иногда употребляется в несколько ином смысле (см., например, Плеснер [1*]). Величину, названную здесь квазинормой, называют иногда просто нормой (например, Данфорд — Шварц [1]). — *Прим. перев.*

удовлетворяющего условию $|\sigma| \leqslant \sigma_0$, справедливо представление

$$\sigma = \alpha - \alpha', \quad \text{где} \quad \alpha \in A, \quad \alpha' \in A.$$

Но тогда на основании неравенства $p_n(\sigma) = p_n(\alpha - \alpha') \leqslant p_n(\alpha) + p_n(\alpha')$ мы можем заключить, что

$$\lim_{n\to\infty} p_n(\sigma) = 0 \text{ равномерно относительно } \sigma, \text{ для которых } |\sigma| \leqslant \sigma_0.$$

Пусть M — произвольное положительное число. Тогда, выбирая некоторое положительное число $k \geqslant M/\sigma_0$ и учитывая, что $p_n(k\sigma) \leqslant \leqslant kp_n(\sigma)$, мы устанавливаем, что условие (9) действительно выполняется при $|\alpha| \leqslant M$.

Замечание. Приведенное выше доказательство легко модифицировать так, что оно будет применимо и для комплексных квазинормированных пространств X.

Как и в случае нормированных линейных пространств, предельный переход $\lim\limits_{n\to\infty} \|x - x_n\| = 0$ в квазинормированном линейном пространстве мы будем записывать в виде $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ или просто $x_n \to x$ и будем говорить, что последовательность $\{x_n\}$ *сильно сходится к* x.

Пример. Пусть в локально выпуклом пространстве X топология определена с помощью счетного числа полунорм $p_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда X является квазинормированным пространством с квазинормой

$$\|x\| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} p_n(x)(1 + p_n(x))^{-1}.$$

В самом деле, в этом случае сходимость $\lim\limits_{h\to\infty} p_n(x_h) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ эквивалентна тому, что $s\text{-}\lim\limits_{h\to\infty} x_h = 0$ по отношению к определенной выше квазинорме $\|x\|$.

3. Примеры нормированных линейных пространств

Пример 1. Пространство $C(S)$. Пусть S — некоторое топологическое пространство. Рассмотрим множество $C(S)$ всех вещественных (или комплексных) ограниченных непрерывных функций $x(s)$, заданных на S. Множество $C(S)$ с операциями

$$(x + y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

и нормой
$$\|x\| = \sup_{s \in S} x(s)$$

образует нормированное линейное пространство. В этом пространстве формула $s\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = x$ означает равномерную сходимость последовательности $\{x_n(s)\}$ к $x(s)$.

Пример 2. Пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ или, короче, $L^p(S)$ $(1 \leqslant p < \infty)$. Обозначим через $L^p(S)$ совокупность всех вещественных (или комплексных) $\mathfrak{B}$-измеримых функций $x(s)$, заданных m-п. в. на S, таких, что $|x(s)|^p$ m-интегрируемы по S. Множество $L^p(S)$ с операциями
$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

является линейным пространством. Действительно, сумма $(x(s) + y(s))$ принадлежит $L^p(S)$, если обе функции $x(s)$ и $y(s)$ принадлежат $L^p(S)$; это следует из неравенства $|x(s) + y(s)|^p \leqslant 2^p(|x(s)|^p + |y(s)|^p)$. Норму в пространстве $L^p(S)$ мы определим соотношением
$$\|x\| = \left(\int_S |x(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p}. \tag{1}$$

Полуаддитивность этой нормы выражается неравенством
$$\left(\int_S |x(s) + y(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p} \leqslant \leqslant \left(\int_S |x(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p} + \left(\int_S |y(s)|^p \, m(ds)\right)^{1/p}, \tag{2}$$

которое называется *неравенством Минковского*. При $p = 1$ оно очевидно. Для доказательства неравенства Минковского в общем случае $1 < p < \infty$ нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. Пусть $1 < p < \infty$. Определим *сопряженный с p показатель p'* соотношением
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \tag{3}$$

Тогда для любых двух неотрицательных чисел a и b выполняется неравенство
$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}, \tag{4}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $a = b^{1/(p-1)}$.

Доказательство. Функция $f(c) = \frac{c^p}{p} + \frac{1}{p'} - c$ при $c \geqslant 0$ принимает минимальное значение только в точке $c = 1$, и это значение равно 0. Полагая $c = ab^{1/(p-1)}$, мы получаем неравенство (4).

Доказательство неравенства (2). Докажем сначала *неравенство Гёльдера*

$$\int |x(s)\,y(s)| \leqslant \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} \cdot \left(\int |y(s)|^{p'}\right)^{1/p'} \tag{5}$$

$\left(\text{для удобства мы пишем } \int z(s) \text{ вместо } \int\limits_S z(s)\,m(ds)\right)$. С этой целью допустим, что оба выражения $A = \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p}$ и $B = \left(\int |y(s)|^{p'}\right)^{1/p'}$ отличны от нуля, так как в противном случае почти всюду $x(s)\,y(s) = 0$, и тогда формула (5), очевидно, справедлива. Подставляя $a = |x(s)|/A$ и $b = |y(s)|/B$ в неравенство (4) и интегрируя, мы получаем

$$\frac{\int |x(s)\,y(s)|}{AB} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{A^p}{A^p} + \frac{1}{p'}\,\frac{B^{p'}}{B^{p'}} = 1,$$

откуда следует (5).

Теперь в силу (5) мы имеем

$$\begin{aligned}
\int |x(s) + y(s)|^p \leqslant \int |x(s) + y(s)|^{p-1} \cdot |x(s)| &+ \\
+ \int |x(s) + y(s)|^{p-1} \cdot |y(s)| &\leqslant \\
\leqslant \left(\int |x(s) + y(s)|^{p'(p-1)}\right)^{1/p'} \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} &+ \\
+ \left(\int |x(s) + y(s)|^{p'(p-1)}\right)^{1/p'} \left(\int |y(s)|^p\right)^{1/p}&.
\end{aligned}$$

Так как $p'(p-1) = p$, из последнего неравенства вытекает (2).

Замечание 1. Знак равенства в формуле (2) имеет место тогда и только тогда, когда существует такая неотрицательная постоянная c, что $x(s) = cy(s)$ m-п. в. (или $y(s) = cx(s)$ m-п. в.). Последнее следует из того, что, согласно лемме 1, в неравенстве Гёльдера (5) знак равенства может быть в том и только в том случае, когда m-п. в. $|x(s)\,y(s)| \geqslant 0$ и $|x(s)| = c \cdot |y(s)|^{1/(p-1)}$ $\left(\text{или } |y(s)| = c \cdot |x(s)|^{1/(p-1)}\right)$.

Замечание 2. Условие $\|x\| = \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} = 0$ эквивалентно требованию, что $x(s) = 0$ m-п. в. Будем поэтому считать всякие две функции из $L^p(S)$ эквивалентными, если их значения m-п. в. совпадают. При таком соглашении $L^p(S)$ становится нормированным линейным пространством. Предельное соотношение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ в пространстве $L^p(S)$ иногда называют *сходимостью в среднем порядка p* последовательности функций $x_n(s)$ к функции $x(s)$.

Пример 3. Пространство $L^\infty(S)$. Определенная на множестве S $\mathfrak{B}$-измеримая функция $x(s)$ называется *существенно ограниченной*, если существует такая постоянная α, что m-п. в. $|x(s)| \leqslant \alpha$. Нижняя грань таких чисел α называется существенной верхней гранью для $|x(s)|$ и обозначается символом

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)| \quad \text{или} \quad \operatorname*{essential\,sup}_{s \in S} |x(s)|.$$

Пространство $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ или, короче, $L^\infty(S)$ — это множество всех $\mathfrak{B}$-измеримых существенно ограниченных функций, заданных m-п. в. в S. Введение операций

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

и нормы

$$\|x\| = \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)|$$

превращает это множество в нормированное линейное пространство, если условиться считать всякие две функции из $L^\infty(S)$, значения которых совпадают m-п. в., эквивалентными.

Теорема 1. Пусть полная мера $m(S)$ множества S конечна. Тогда для всякой функции $x(s) \in L^\infty(S)$ имеем

$$\lim_{p\to\infty} \left(\int_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p} = \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)|. \tag{6}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\left(\int_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p} \leqslant m(S)^{1/p} \operatorname*{vrai\,max}_{s \in S} |x(s)|,$$

откуда $\overline{\lim\limits_{p\to\infty}} \left(\int\limits_S |x(s)|^p\right)^{1/p} \leqslant \operatorname*{vrai\,max}\limits_{s \in S} |x(s)|$. Но по определению величины $\operatorname*{vrai\,max}\limits_{s \in S} |x(s)|$ для всякого $\varepsilon > 0$ существует множество B положительной m-меры, в каждой точке которого выполняется неравенство $|x(s)| \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{s \in S} |x(s)| - \varepsilon$. Следовательно,

$$\left(\int\limits_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p} \geqslant (m(B))^{1/p} \left(\operatorname{vrai}\max_{s \in S} |x(s)| - \varepsilon\right).$$

Поэтому $\varliminf\limits_{p \to \infty} \left(\int |x(s)|^p\right)^{1/p} \geqslant \operatorname{vrai}\max\limits_{s \in S} |x(s)| - \varepsilon$ и соотношение (6) действительно справедливо.

Пример 4. Рассмотрим *дискретное топологическое пространство* S, состоящее из счетного множества точек, обозначенных $1, 2, \ldots$. Термин „дискретное“ означает здесь, что каждая точка множества $S = \{1, 2, \ldots\}$ представляет собой открытое множество пространства S. Определим линейные подпространства (c_0), (c) и $(l^p)(1 \leqslant p < \infty)$ пространства $C(\{1, 2, \ldots\})$.

(c_0): Рассмотрим некоторую ограниченную последовательность $\{\xi_n\}$ вещественных или комплексных чисел. Такая последовательность определяет на дискретном пространстве $S = \{1, 2, \ldots\}$ непрерывную функцию $x(n) = \xi_n$. Назовем $x = \{\xi_n\}$ вектором с компонентами ξ_n. Совокупность всех векторов $x = \{\xi_n\}$, удовлетворяющих условию $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = 0$, образует нормированное линейное пространство (c_0) с нормой

$$\|x\| = \sup_n |x(n)| = \sup_n |\xi_n|.$$

(c): Совокупность всех векторов $x = \{\xi_n\}$, для которых существуют конечные пределы $\lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$, образует нормированное линейное пространство (c) с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x(n)| = \sup\limits_n |\xi_n|$.

$(l^p)(1 \leqslant p < \infty)$: Множество всех векторов $x = \{\xi_n\}$, для которых $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p < \infty$, образует нормированное линейное пространство (l^p) с нормой $\|x\| = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^p\right)^{1/p}$. Как абстрактное линейное пространство (l^p) является линейным подпространством пространства $C(\{1, 2, \ldots\})$. Оно является также частным случаем пространства $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$, когда $m(\{1\}) = m(\{2\}) = \ldots = 1$.

$(l^\infty) = (m)$: По аналогии с общим случаем пространства $L^\infty(S)$ обозначим через (l^∞) или (m) линейное пространство $C(\{1, 2, \ldots\})$ с нормой $\|x\| = \sup\limits_n |x(n)| = \sup\limits_n |\xi_n|$.

Пространство мер. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств множества S. Рассмотрим множество $A(S, \mathfrak{B})$ всех вещественных (или комплексных) функций $\varphi(B)$, заданных на $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

$$|\varphi(B)| \neq \infty \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}, \tag{7}$$

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} B_j\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(B_j) \text{ для всякой последовательности } \{B_j\} \text{ попарно непересекающихся множеств из } \mathfrak{B}. \tag{8}$$

Вещественные функциии $\varphi(B)$, удовлетворяющие этим условиям, мы будем называть *обобщенными*[1]) мерами. Пространство $A(S, \mathfrak{B})$ мы назовем *пространством обобщенных* (соответственно *комплексных*) мер, определенных на $(S, \mathfrak{B})$.

Лемма 2. Рассмотрим некоторую вещественную функцию $\varphi \in A(S, \mathfrak{B})$. *Полная вариация* функции φ на S, определяемая формулой

$$V(\varphi; S) = \overline{V}(\varphi; S) + |\underline{V}(\varphi; S)|, \tag{9}$$

конечна; здесь

$$\overline{V}(\varphi; B) = \sup_{\substack{B_1 \subset B, \\ B_1 \in \mathfrak{B}}} \varphi(B_1) \quad \text{и} \quad \underline{V}(\varphi; B) = \inf_{\substack{B_1 \subset B, \\ B_1 \in \mathfrak{B}}} \varphi(B_1) \tag{10}$$

— соответственно *положительная* и *отрицательная вариации* функции φ на подмножестве $B \in \mathfrak{B}$.

Доказательство. Поскольку $\varphi(\emptyset) = 0$ (это следует из условий (7) и (8)), имеем $\overline{V}(\varphi; B) \geqslant 0 \geqslant \underline{V}(\varphi; B)$. Допустим, что $V(\varphi; S) = \infty$. Тогда существует такая убывающая последовательность $\{B_n\}$ множеств из $\mathfrak{B}$, что

$$V(\varphi; B_n) = \infty, \qquad |\varphi(B_n)| \geqslant n - 1.$$

Это можно доказать по индукции. Выберем $B_1 = S$ и допустим, что множества $B_2, B_3, \ldots, B_k$ определены так, что для них указанные условия выполняются. По первому из этих условий при $n = k$ существует такое множество $B \in \mathfrak{B}$, что $B \subseteq B_k$, $|\varphi(B)| \geqslant |\varphi(B_k)| + k$. Поэтому остается лишь положить $B_{k+1} = B$ для случая $V(\varphi; B) = \infty$ и $B_{k+1} = B_k - B$, если $V(\varphi; B) < \infty$. В самом деле, в последнем случае $V(\varphi; B_k - B) = \infty$ и $|\varphi(B_k - B)| \geqslant |\varphi(B)| - |\varphi(B_k)| \geqslant k$, что завершает доказательство по индукции. Так как последовательность $\{B_n\}$ убывает, имеем

$$S - \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \sum_{n=1}^{\infty} (S - B_n) =$$
$$= (S - B_1) + (B_1 - B_2) + (B_2 - B_3) + \ldots + (B_n - B_{n+1}) + \ldots,$$

---

[1]) Автор применяет здесь термин signed measure. Вещественные функции типа $\varphi(B)$ называют также зарядами. — *Прим. перев.*

откуда в силу счетной аддитивности функции φ

$$\varphi\left(S-\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right)=\varphi(S-B_1)+\varphi(B_1-B_2)+\varphi(B_2-B_3)+\ldots=$$
$$=[\varphi(S)-\varphi(B_1)]+[\varphi(B_1)-\varphi(B_2)]+[\varphi(B_2)-\varphi(B_3)]+\ldots=$$
$$=\varphi(S)-\lim_{n\to\infty}\varphi(B_n)=\infty \text{ или } -\infty,$$

что противоречит условию (7).

Теорема 2 (разложение Жордана). Пусть $\varphi\in A(S, \mathfrak{B})$ — вещественная функция. Тогда положительная вариация $\overline{V}(\varphi; B)$, отрицательная вариация $\underline{V}(\varphi; B)$ и полная вариация $V(\varphi; B)$ счетно аддитивны на множествах $B\in\mathfrak{B}$. Кроме того, имеет место *разложение Жордана*

$$\varphi(B)=\overline{V}(\varphi; B)+\underline{V}(\varphi; B) \quad \text{для любого} \quad B\in\mathfrak{B}. \tag{11}$$

Доказательство. Пусть $\{B_n\}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathfrak{B}$. Для любого множества $B\in\mathfrak{B}$, такого, что $B\subseteq\sum_{n=1}^{\infty}B_n$, справедливо неравенство $\varphi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(B\cap B_n)\leqslant\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi; B_n)$, и, следовательно, $\overline{V}\left(\varphi; \sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi; B_n)$. С другой стороны, если $C_n\in\mathfrak{B}$ — некоторое подмножество множества B_n $(n=1, 2, \ldots)$, то $\overline{V}\left(\varphi; \sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqslant\varphi\left(\sum_{n=1}^{\infty}C_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(C_n)$, и поэтому $\overline{V}\left(\varphi; \sum_{n=1}^{\infty}B_n\right)\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\overline{V}(\varphi; B_n)$. Отсюда вытекает свойство счетной аддитивности для $\overline{V}(\varphi; B)$; для $\underline{V}(\varphi; B)$ и $V(\varphi; B)$ оно доказывается аналогичным образом. Чтобы вывести разложение (11), заметим, что для любого множества $C\in\mathfrak{B}$, такого, что $C\subseteq B$, справедливо неравенство $\varphi(C)=\varphi(B)-\varphi(B-C)\leqslant\varphi(B)-\underline{V}(\varphi; B)$, откуда $\overline{V}(\varphi; B)\leqslant\leqslant\varphi(B)-\underline{V}(\varphi; B)$. Точно так же получаем, что $\underline{V}(\varphi; B)\geqslant\varphi(B)-\overline{V}(\varphi; B)$. Эти неравенства и приводят к формуле (11).

Теорема 3 (разложение Хана). Пусть $\varphi\in A(S, \mathfrak{B})$ — некоторая обобщенная мера. Тогда существует такое множество $P\in\mathfrak{B}$, что

$$\varphi(B)\geqslant 0 \quad \text{для любого} \quad B\subseteq P, \quad B\in\mathfrak{B};$$
$$\varphi(B)\leqslant 0 \quad \text{для любого} \quad B\subseteq P^C=S-P, \quad B\in\mathfrak{B}.$$

Представление $S=P+(S-P)$ называется *разложением Хана* множества S относительно функции φ.

Доказательство. Для каждого положительного целого n выберем множество $B_n \in \mathfrak{B}$, такое, что $\varphi(B_n) \geqslant \overline{V}(\varphi; S) - 2^{-n}$. Тогда из (11) вытекает, что

$$\underline{V}(\varphi; B_n) \geqslant -2^{-n} \quad \text{и} \quad \overline{V}(\varphi; S - B_n) \leqslant 2^{-n}. \tag{12}$$

Последнее неравенство в (12) выводится из соотношений

$$\overline{V}(\varphi; S - B_n) = \overline{V}(\varphi; S) - \overline{V}(\varphi; B_n) \quad \text{и} \quad \overline{V}(\varphi; B_n) \geqslant \varphi(B_n).$$

Положим теперь[1])

$$P = \varliminf_{n \to \infty} B_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} B_n.$$

Тогда

$$S - P = \varlimsup_{n \to \infty} (S - B_n) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} (S - B_n) \subseteq \bigcup_{n=k}^{\infty} (S - B_n)$$

при любом значении k. Поэтому в силу σ-аддитивности функции $\overline{V}(\varphi; B)$ получаем

$$\overline{V}(\varphi; S - P) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} \overline{V}(\varphi; S - B_n) \leqslant 2^{-(k-1)},$$

откуда следует, что $\overline{V}(\varphi; S - P) = 0$. С другой стороны, отрицательная вариация $\underline{V}(\varphi; B)$ является неположительной мерой, и поэтому, учитывая (12) и повторяя рассуждения, аналогичные приведенным выше, получаем неравенство

$$|\underline{V}(\varphi; P)| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} |\underline{V}(\varphi; B_n)| = 0,$$

откуда следует, что $\underline{V}(\varphi; P) = 0$. Это завершает доказательство теоремы.

---

[1]) *Верхним пределом* $\varlimsup_{n \to \infty} A_n$ последовательности $\{A_n\}$ множеств $A_n \subseteq S$ $(n = 1, 2, \ldots)$ называется множество, содержащее те и только те точки из S, которые входят в бесконечное число множеств A_n. *Нижним пределом* $\varliminf_{n \to \infty} A_n$ называется множество, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат всем множествам A_n, за исключением, быть может, конечного числа. Из этих определений вытекает, что $\varlimsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n$ и $\varliminf_{n \to \infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n$. — *Прим. перев.*

Следствие. Полная вариация $V(\varphi;\ S)$ обобщенной меры φ определяется формулой

$$V(\varphi;\ S)=\sup_{\sup|x(s)|\leqslant 1}\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right|^{1)}, \tag{13}$$

где $x(s)$ пробегает все $\mathfrak{B}$-измеримые функции, заданные на S, для которых $\sup\limits_{s\in S}|x(s)|\leqslant 1$.

Доказательство. Если мы положим $x(s)=1$ при $s\in P$ и $x(s)=-1$ при $s\in S-P$, то в правой части (13) получится $V(\varphi;\ B)$. С другой стороны, как нетрудно видеть,

$$\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right|\leqslant\sup_{s\in S}|x(s)|\cdot\int_S V(\varphi;\ ds)=\sup_{s\in S}|x(s)|\cdot V(\varphi;\ S);$$

тем самым формула (13) доказана.

Пример 5. Пространство $A(S;\ \mathfrak{B})$. Множество $A(S;\ \mathfrak{B})$ заданных на $\mathfrak{B}$ обобщенных мер φ, в котором определены операции

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(B)=\alpha_1\varphi_1(B)+\alpha_2\varphi_2(B),\qquad B\in\mathfrak{B},$$

где α_1, α_2 вещественны, является вещественным линейным пространством. Линейное пространство $A(S;\ \mathfrak{B})$ с нормой, определяемой формулой

$$\|\varphi\|=V(\varphi;\ S)=\sup_{\sup|x(s)|\leqslant 1}\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right|, \tag{14}$$

является нормированным линейным пространством.

Пример 6. Множество $A(S;\ \mathfrak{B})$ комплексных мер φ с операциями

$$(\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2)(B)=\alpha_1\varphi_1(B)+\alpha_2\varphi_2(B),\qquad B\in\mathfrak{B},$$

где α_1, α_2 — комплексные числа, является комплексным линейным пространством. Оно становится нормированным линейным пространством, если ввести норму

$$\|\varphi\|=\sup_{\sup|x(s)|\leqslant 1}\left|\int_S x(s)\varphi(ds)\right|, \tag{15}$$

где верхняя грань берется по всем комплексным $\mathfrak{B}$-измеримым функциям, заданным на S, для которых $\sup\limits_{s\in S}|x(s)|\leqslant 1$. Правую часть формулы (15) мы будем называть *полной вариацией* функции φ на S и обозначать $V(\varphi;\ S)$.

---

[1]) В § 3 введения был определен m-интеграл $\int\limits_B x(s)\,m(ds)$ для неотрицательных мер m; для обобщенных и комплексных мер φ интеграл $\int\limits_B x(s)\varphi(ds)$ строится совершенно аналогично. — *Прим. перев.*

4. Примеры квазинормированных линейных пространств

Пример 1. Пространство $\mathfrak{C}^k(\Omega)$. Определенное в § 1 гл. I линейное пространство $\mathfrak{C}^k(\Omega)$ станет квазинормированным, если за квазинорму принять $\|x\| = d(x, 0)$, где $d(x, y)$ — определенная ранее функция расстояния.

Пример 2. Пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Пусть $m(S) < \infty$ и $M(S, \mathfrak{B}, m)$ — множество всех комплексных $\mathfrak{B}$-измеримых функций $x(s)$, определенных на множестве S и таких, что $|x(s)| < \infty$ m-п. в. Множество $M(S, \mathfrak{B}, m)$ с алгебраическими операциями

$$(x+y)(s) = x(s) + y(s), \qquad (\alpha x)(s) = \alpha x(s)$$

и квазинормой

$$\|x\| = \int_S |x(s)|(1 + |x(s)|)^{-1}\, m(ds) \tag{1}$$

(при условии, что $x = y$ тогда и только тогда, когда m-п. в. $x(s) = y(s)$) образует квазинормированное линейное пространство. Неравенство треугольника для квазинормы $\|x\|$ следует из соотношений

$$\frac{|\alpha+\beta|}{1+|\alpha+\beta|} \leqslant \frac{|\alpha|+|\beta|}{1+|\alpha|+|\beta|} \leqslant \frac{|\alpha|}{1+|\alpha|} + \frac{|\beta|}{1+|\beta|}.$$

Как показывает следующее утверждение, при такой квазинорме отображение $\{\alpha, x\} \to \alpha x$ непрерывно.

Предложение. Сходимость $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ в пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$ эквивалентна *асимптотической сходимости* (или *сходимости по мере*) в S последовательности функций $\{x_n(s)\}$ к $x(s)$, т. е. сходимости

$$\lim_{n\to\infty} m\{s \in S;\ |x(s) - x_n(s)| \geqslant \varepsilon\} = 0 \quad \text{для любого } \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Доказательство. Соотношение (2) следует из неравенства

$$\frac{\delta}{1+\delta} m(B_\delta) \leqslant \|x\| \leqslant m(B_\delta) + \frac{\delta}{1+\delta} m(S - B_\delta),$$

где

$$B_\delta = \{s \in S;\ |x(s)| \geqslant \delta\} \quad (\delta > 0).$$

Замечание. Нетрудно видеть, что эквивалентная топология в пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$ может быть введена и с помощью квазинормы

$$\|x\| = \inf_{\varepsilon > 0} \operatorname{arc\,tg}[\varepsilon + m\{s \in S;\ |x(s)| \geqslant \varepsilon\}]. \tag{1'}$$

Пример 3. Пространство $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. В линейном пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (гл. I, § 1) можно ввести квазинорму, полагая $\|x\| = d(x, 0)$, где $d(x, y)$ — функция расстояния [1]), определенная в гл. I, § 1.

5. *Предгильбертовы пространства*

Определение 1. Вещественное или комплексное нормированное линейное пространство X называется ***предгильбертовым***, если его норма удовлетворяет условию

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

Теорема 1 (Фреше, фон Нейман, Йордан). В вещественном предгильбертовом пространстве X определим функцию двух переменных

$$(x, y) = 4^{-1}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right). \tag{2}$$

Эта функция обладает следующими свойствами:

$$(\alpha x, y) = \alpha(x, y) \quad (\alpha \in R^1), \tag{3}$$

$$(x+y, z) = (x, z) + (y, z), \tag{4}$$

$$(x, y) = (y, x), \tag{5}$$

$$(x, x) = \|x\|^2. \tag{6}$$

Доказательство. Соотношения (5) и (6) очевидны. Из (1) и (2) мы выводим, что

$$(x, z) + (y, z) = 4^{-1}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + \|y+z\|^2 - \right.$$
$$\left. - \|y-z\|^2\right) = 2^{-1}\left(\left\|\frac{x+y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x+y}{2} - z\right\|^2\right) = 2\left(\frac{x+y}{2}, z\right). \tag{7}$$

Взяв $y = 0$, мы получим $(x, z) = 2\left(\frac{x}{2}, z\right)$, так как $(0, z) = 0$ согласно (2). Отсюда при помощи соотношения (7) мы получаем свойство (4). Кроме того, из предыдущего ясно, что свойство (3) выполняется для рациональных α вида $\alpha = m/2^n$. В нормированном линейном пространстве функции $\|\alpha x + y\|$ и $\|\alpha x - y\|$ непрерывны по α. Следовательно, и функция $(\alpha x, y)$, согласно (2), непрерывна по α. Тем самым свойство (3) доказано для всех вещественных значений α.

Следствие (фон Нейман, Йордан). Определим в комплексном нормированном линейном предгильбертовом пространстве X функцию

$$(x, y) = (x, y)_1 + i(x, iy)_1,$$

---

[1]) Имеется в виду метрика типа той, что использовалась в доказательстве предложения 6. — *Прим. перев.*

где

$$i=\sqrt{-1}, \quad (x, y)_1 \equiv 4^{-1}\left(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2\right). \tag{8}$$

Для этой функции выполняются условия (4), (6) и, кроме того,

$$(\alpha x, y)=\alpha(x, y) \quad (\alpha \in C^1), \tag{3'}$$

$$(x, y)=\overline{(y, x)} \tag{5'}$$

(черта означает комплексно сопряженное число).

Доказательство. Пространство X является вещественным предгильбертовым пространством, поэтому соотношения (4) и (3′) выполняются при вещественных α. Из (8) мы получаем, что $(y, x)_1=(x, y)_1$, $(ix, iy)_1=(x, y)_1$, откуда $(y, ix)_1=(-iiy, ix)_1=-(iy, x)_1=$ $=-(x, iy)_1$. Итак,

$$(y, x)=(y, x)_1+i(y, ix)_1=(x, y)_1-i(x, iy)_1=\overline{(x, y)}.$$

Точно так же мы получаем

$$(ix, y)=(ix, y)_1+i(ix, iy)_1=-(x, iy)_1+i(x, y)_1=i(x, y),$$

и, следовательно, свойство (3′) доказано. Наконец, утверждение (6) справедливо потому, что

$$(x, x)_1=\|x\|^2 \text{ и } (x, ix)_1=4^{-1}\left(|1+i|^2-|1-i|^2\right)\|x\|^2=0.$$

Теорема 2. Если в вещественном (или комплексном) линейном пространстве X каждой паре элементов $x, y \in X$ поставлено в соответствие некоторое вещественное (соответственно комплексное) число (x, y), причем функция (x, y) удовлетворяет условиям (3′), (4), (5′) и дополнительному требованию

$$(x, x) \geqslant 0; \ (x, x)=0 \text{ тогда и только тогда, когда } x=0, \tag{9}$$

то X представляет собой вещественное (соответственно комплексное)[1]) предгильбертово пространство.

Доказательство. Для всякого вещественного числа α мы из (3′), (4) и (5′) выводим соотношение

$$(x+\alpha(x, y) y, x+\alpha(x, y) y)=\|x\|^2+2\alpha|(x, y)|^2+$$
$$+\alpha^2|(x, y)|^2\|y\|^2 \geqslant 0, \qquad \text{где } \|x\|=+(x, x)^{1/2};$$

таким образом, $|(x, y)|^4-\|x\|^2 \cdot|(x, y)|^2 \cdot\|y\|^2 \leqslant 0$. Отсюда мы получаем *неравенство Шварца*

$$|(x, y)| \leqslant\|x\| \cdot\|y\|, \tag{10}$$

---

[1]) Имеется в виду пространство X с нормой, определяемой формулой (6): $\|x\|^2=(x, x)$. — *Прим. перев.*

в котором знак равенства имеет место в том и только в том случае, когда x и y линейно зависимы (это следует из второй части условия (9)).

Из (10) для нормы $\|x\|$ выводится неравенство треугольника

$$\|x+y\|^2=(x+y,\ x+y)=$$
$$=\|x\|^2+(x,\ y)+(y,\ x)+\|y\|^2\leqslant(\|x\|+\|y\|)^2.$$

Наконец, соотношение (1) легко проверяется, и это завершает доказательство теоремы.

Определение 2. Число $(x,\ y)$, определенное выше, называется *скалярным* (или *внутренним*) *произведением* двух векторов x и y предгильбертова пространства X.

Пример 1. Пространство $L^2(S,\ \mathfrak{B},\ m)$ является предгильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(x,\ y)=\int\limits_S x(s)\overline{y(s)}\,m(ds).$$

Пример 2. Нормированное линейное пространство (l^2) является предгильбертовым пространством со скалярным произведением

$$(\{\xi_n\},\ \{\eta_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta}_n.$$

Пример 3. Пусть Ω — открытая область пространства R^n и k — произвольное неотрицательное целое число, $0\leqslant k<\infty$. Совокупность функций $f\in C^k(\Omega)$, для которых

$$\|f\|_k\equiv\Bigl(\sum_{|j|\leqslant k}\int\limits_{\Omega}|D^jf(x)|^2\,dx\Bigr)^{1/2}<\infty, \tag{11}$$

где $dx=dx_1\,dx_2\,\ldots\,dx_n$ — мера Лебега в R^n, образует предгильбертово пространство $\widehat{H}^k(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(f,\ g)_k=\sum_{|j|\leqslant k}\int\limits_{\Omega}D^jf(x)\cdot D^j\overline{g(x)}\,dx. \tag{12}$$

Пример 4. Рассмотрим пространство $C_0^k(\Omega)$, где $0\leqslant k<\infty$, а Ω — открытая область в R^n. Если ввести в этом пространстве скалярное произведение (12) и норму (11), то получится предгильбертово пространство, которое мы обозначим $\widehat{H}_0^k(\Omega)$.

Пример 5. Пусть G — открытая ограниченная область комплексной z-плоскости. Через $A^2(G)$ обозначим множество всех голоморфных функций $f(z)$, определенных в области G, таких, что

$$\|f\|\equiv\Bigl(\int\limits_G\int|f(z)|^2\,dx\,dy\Bigr)^{1/2}<\infty\quad(z=x+iy). \tag{13}$$

Множество $A^2(G)$ с нормой (13), алгебраическими операциями

$$(f+g)(z)=f(z)+g(z), \qquad (\alpha f)(z)=\alpha f(z) \quad (\alpha \in C^1)$$

и скалярным произведением

$$(f, g)=\iint_G f(z)\overline{g(z)}\,dx\,dy \tag{14}$$

представляет собой предгильбертово пространство.

Пример 6. Класс H-L^2 Харди — Лебега. Обозначим через H-L^2 совокупность всех функций $f(z)$, голоморфных внутри единичного круга $\{z;\ |z|<1\}$ комплексной z-плоскости, таких, что

$$\sup_{0<r<1}\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)<\infty. \tag{15}$$

Тогда если $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ — разложение $f(z)$ в ряд Тейлора, то функция

$$F(r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{n,m=0}^{\infty}\int_0^{2\pi} c_n\bar{c}_m r^{n+m} e^{i(n-m)\theta}\,d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2 r^{2n}$$

монотонно возрастает по r в области $0<r<1$ и ограничена сверху. Поэтому, как нетрудно проверить, величина

$$\|f\|=\sup_{0<r<1}\left[\frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2\,d\theta\right)\right]^{1/2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2} \tag{16}$$

представляет собой норму, для которой выполняется условие (1), так как пространство (l^2) предгильбертово.

Замечание. Зададим произвольную последовательность $\{c_n\}\in(l^2)$ и рассмотрим функцию

$$f(z)=f(re^{i\theta})=\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n=\sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{in\theta}, \qquad |z|<1.$$

Согласно неравенству Шварца,

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty} c_n z^n\right|\leqslant\left(\sum_{n=k}^{\infty}|c_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=k}^{\infty} r^{2n}\right)^{1/2},$$

поэтому ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ равномерно сходится во всяком круге $|z|\leqslant\rho$, где $0<\rho<1$. Следовательно, функция $f(z)$ голоморфна в единичном круге $|z|<1$, и при этом для нее выполняется условие (15), т. е. $f(z)$ принадлежит классу H-L^2. Тем самым доказана следующая

Теорема 3. Соотношение

$$H\text{-}L^2 \ni f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \leftrightarrow \{c_n\} \in (l^2)$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями класса Харди — Лебега H-L^2 и элементами предгильбертова пространства (l^2). При этом

$$\text{если } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \leftrightarrow \{c_n\}, \quad g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n \leftrightarrow \{d_n\},$$

$$\text{то } f(z) + g(z) \leftrightarrow \{c_n + d_n\}, \quad \alpha f(z) \leftrightarrow \{\alpha c_n\} \text{ и } \|f\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2\right)^{1/2}.$$

Таким образом, H-L^2 как предгильбертово пространство изоморфно (l^2).

6. Непрерывность линейных операторов

Предложение 1. Пусть X и Y — линейные топологические пространства над одним и тем же полем K. Для того чтобы линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, был непрерывным всюду в $D(T)$, необходимо и достаточно, чтобы этот оператор был непрерывным в точке $x = 0$ ($x = 0$ — нулевой вектор).

Доказательство. Это утверждение следует из линейности оператора T и равенства $T \cdot 0 = 0$.

Теорема 1. Пусть X, Y — локально выпуклые пространства, а $\{p\}$, $\{q\}$ — системы полунорм, определяющие топологию соответственно в X и Y. Тогда линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, непрерывен в том и только в том случае, когда для каждой полунормы $q \in \{q\}$ существуют полунорма $p \in \{p\}$ и положительное число β, такие, что

$$q(Tx) \leqslant \beta p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{1}$$

Доказательство. Условие (1) является достаточным, так как $T \cdot 0 = 0$, и поэтому из (1) вытекает непрерывность оператора T в точке $x = 0 \in D(T)$, а это означает, что оператор T непрерывен всюду на $D(T)$.

Докажем необходимость этого условия. Если оператор T непрерывен в точке $x = 0$, то для всякой полунормы $q \in \{q\}$ и любого положительного числа ε найдутся полунорма $p \in \{p\}$ и положительное число δ, такие, что из соотношений $x \in D(T)$ и $p(x) \leqslant \delta$ следует неравенство $q(Tx) \leqslant \varepsilon$. Пусть x — произвольная точка из $D(T)$.

Выберем такое положительное число λ, что $\lambda p(x) \leqslant \delta$. Тогда $p(\lambda x) \leqslant \delta$, $\lambda x \in D(T)$, и поэтому $q(T(\lambda x)) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, $q(Tx) \leqslant \varepsilon/\lambda$. Итак, если $p(x) = 0$, то можно выбрать λ сколь угодно большим, и тогда $q(Tx) = 0$; если же $p(x) \neq 0$, то мы возьмем $\lambda = \delta/p(x)$; таким образом, в любом случае $q(Tx) \leqslant \beta p(x)$, где $\beta = \varepsilon/\delta$.

Следствие 1. Пусть X — локально выпуклое пространство, а f — некоторый линейный функционал на $D(f) \subseteq X$. Функционал f непрерывен тогда и только тогда, когда существуют полунорма p из системы $\{p\}$, определяющей топологию в X, и положительное число β, такие, что

$$|f(x)| \leqslant \beta p(x) \quad \text{для всех} \quad x \in D(f). \tag{2}$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из того, что абсолютная величина $|\alpha|$ образует систему полунорм, определяющих обычную топологию поля вещественных или комплексных чисел α.

Следствие 2. Пусть X, Y — нормированные линейные пространства. Линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, непрерывен тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная β, что

$$\|Tx\| \leqslant \beta \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{3}$$

Следствие 3. Рассмотрим два нормированных линейных пространства X и Y. Линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y, имеет непрерывный обратный оператор T^{-1} тогда и только тогда, когда существует такая положительная постоянная γ, что

$$\|Tx\| \geqslant \gamma \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{4}$$

Доказательство. При выполнении условия (4) из соотношения $Tx = 0$ следует, что $x = 0$, и поэтому обратный оператор T^{-1} существует. Его непрерывность вытекает из предыдущего следствия 2 и неравенства (4)[1]).

Определение 1. Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y. Определим величину

$$\|T\| \equiv \inf_{\beta \in B} \beta, \quad \text{где} \quad B = \{\beta;\ \|Tx\| \leqslant \beta \|x\| \quad \text{для всех} \quad x \in X\}. \tag{5}$$

Из линейности отображения T и следствия 2 вытекает, что

$$\|T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\| = \sup_{\|x\| = 1} \|Tx\|. \tag{6}$$

---

[1]) Необходимость условия (4) здесь совершенно очевидна — она следует из условия непрерывности обратного оператора T^{-1}. — *Прим. перев.*

Величина $\|T\|$ называется ***нормой*** оператора T. Непрерывный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y, называется также *ограниченным линейным оператором*, действующим из X в Y, так как для такого оператора T норма $\|Tx\|$ ограничена на *единичном шаре* $\{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ пространства X.

Определение 2. Пусть T и S — линейные операторы, причем

$$D(T) \subseteq X, \quad D(S) \subseteq X \quad \text{и} \quad R(T) \subseteq Y, \quad R(S) \subseteq Y.$$

Определим для операторов операции сложения и умножения на скаляр:

$$(T+S)(x) = Tx + Sx \quad \text{для} \quad x \in D(T) \cap D(S), \qquad (\alpha T)(x) = \alpha(Tx).$$

Пусть T — линейный оператор из $D(T) \subseteq X$ в Y, а S — линейный оператор из $D(S) \subseteq Y$ в Z. Тогда *произведение* ST операторов T, S определяется формулой

$$(ST)x = S(Tx) \quad \text{для} \quad x \in \{x;\ x \in D(T) \quad \text{и} \quad Tx \in D(S)\};$$

$T+S$, αT и ST являются, очевидно, линейными операторами.

Замечание. Произведения ST и TS не обязательно совпадают даже в том случае, когда $X = Y = Z$. В качестве примера рассмотрим линейные операторы $Tx = tx(t)$ и $Sx(t) = \sqrt{-1}\,\frac{d}{dt}x(t)$, действующие из $L^2(R^1)$ в $L^2(R^1)$. В этом примере мы получаем ***перестановочное соотношение*** $(ST - TS)x(t) = \sqrt{-1}\,x(t)$.

Предложение 2. Если T и S — ограниченные линейные операторы, отображающие нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y, то

$$\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|, \quad \|\alpha T\| = |\alpha| \cdot \|T\|. \tag{7}$$

Если T — ограниченный линейный оператор, действующий из нормированного линейного пространства X в нормированное линейное пространство Y, а S — ограниченный линейный оператор, действующий из Y в нормированное линейное пространство Z, то

$$\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|. \tag{8}$$

Доказательство. Мы докажем лишь последнее неравенство; соотношения (7) доказываются аналогично. Имеем $\|STx\| \leqslant \|S\| \cdot \|Tx\| \leqslant \leqslant \|S\| \cdot \|T\| \cdot \|x\|$; таким образом, $\|ST\| \leqslant \|S\| \cdot \|T\|$.

Следствие. Пусть T — ограниченный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в X. Тогда

$$\|T^n\| \leqslant \|T\|^n, \tag{9}$$

где T^n определяется по индукции формулой $T^n = TT^{n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$; $T^0 = I$ — ***тождественный оператор***, отображающий каждый элемент x в себя, т. е. $Ix = x$.

7. Ограниченные множества и борнологические пространства

Определение 1. Подмножество B линейного топологического пространства X называется *ограниченным*, если оно *поглощается* каждой окрестностью U элемента $x=0$, т. е. если для каждого U найдется такая положительная константа α, что $\alpha^{-1}B \subseteq U$. Символ $\alpha^{-1}B$ обозначает здесь множество $\alpha^{-1}B = \{x \in X;\ x = \alpha^{-1}b,\ b \in B\}$.

Предложение. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Тогда непрерывный линейный оператор, отображающий X в Y, переводит всякое ограниченное множество пространства X в ограниченное множество пространства Y.

Доказательство. Обозначим через B произвольное ограниченное множество пространства X; пусть V — некоторая окрестность точки $y=0$ пространства Y. В силу непрерывности оператора T существует такая окрестность U точки $x=0$ пространства X, что $TU = \{Tu;\ u \in U\} \subseteq V$. Выберем теперь такое $\alpha > 0$, что $B \subseteq \alpha U$. Тогда $TB \subseteq T(\alpha U) = \alpha(TU) \subseteq \alpha V$. Это показывает, что TB — ограниченное множество пространства Y.

Определение 2. Локально выпуклое пространство X называется *борнологическим*, когда выполняется следующее условие:

если уравновешенное выпуклое множество M пространства X поглощает всякое ограниченное множество из X, то M является окрестностью нуля пространства X. (1)

Теорема 1. Локально выпуклое пространство X является борнологическим тогда и только тогда, когда всякая полунорма на X, ограниченная на каждом ограниченном множестве, непрерывна.

Доказательство. Заметим сначала, что полунорма $p(x)$ пространства X непрерывна тогда и только тогда, когда она непрерывна при $x=0$. Это следует из свойства полуаддитивности: $p(x-y) \geqslant |p(x)-p(y)|$ (гл. I, § 1 (4)).

Необходимость. Пусть полунорма $p(x)$ пространства X ограничена на всяком ограниченном множестве из X. Множество $M = \{x \in X;\ p(x) \leqslant 1\}$ выпукло и уравновешенно. Если B — некоторое ограниченное множество из X, то $\sup\limits_{b \in B} p(b) = \alpha < \infty$, и поэтому $B \subseteq \alpha M$. По предположению пространство X — борнологическое, следовательно, множество M является окрестностью нуля. Отсюда видно, что полунорма $p(x)$ непрерывна при $x=0$.

Достаточность. Пусть M — выпуклое уравновешенное множество из X, которое поглощает всякое ограниченное множество пространства X. Пусть p — функционал Минковского множества M.

Тогда функционал p ограничен на каждом ограниченном множестве, поскольку множество M по предположению поглощает каждое ограниченное множество. Следовательно, функционал $p(x)$ при сделанных предположениях непрерывен. Поэтому $M_1 = \{x \in X;\ p(x) < 1/2\}$ — открытое множество, принадлежащее множеству M и содержащее точку $x = 0$. Отсюда следует, что M — окрестность нуля.

Пример 1. Всякое нормированное линейное пространство является борнологическим.

Доказательство. Пусть X — нормированное линейное пространство. Тогда единичный шар $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ является ограниченным множеством в X. Пусть некоторая полунорма $p(x)$, заданная на X, ограничена на S, т. е. $\sup\limits_{x \in S} p(x) = \alpha < \infty$. Тогда для любого $y \neq 0$ имеем

$$p(y) = p\left(\|y\| \cdot \frac{y}{\|y\|}\right) = \|y\| \cdot p\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \leqslant \alpha \|y\|.$$

Таким образом, полунорма p непрерывна при $y = 0$ и, следовательно, непрерывна в любой точке $x \in X$.

Замечание. Как будет показано далее, квазинормированное линейное пространство $M(S;\ \mathfrak{B})$ не является локально выпуклым. Поэтому квазинормированное пространство не обязательно должно быть борнологическим. Тем не менее справедлива следующая

Теорема 2. Линейный оператор T, действующий из одного квазинормированного линейного пространства в другое такое пространство, непрерывен тогда и только тогда, когда T переводит ограниченные множества в ограниченные.

Доказательство. Как было показано в гл. I, § 2 (предложение 2), квазинормированное пространство является линейным топологическим пространством. Поэтому необходимость сформулированного условия следует из предыдущего предложения; остается доказать достаточность.

Пусть T отображает ограниченные множества в ограниченные. Предположим, что $s\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} x_k = 0$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k\| = 0$, и поэтому существует такая последовательность целых чисел $\{n_k\}$, что

$$\lim_{k \to \infty} n_k = \infty, \text{ в то время как } \lim_{k \to \infty} n_k \|x_k\| = 0.$$

Мы можем, например, выбрать n_k следующим образом:

n_k равно наибольшему целому числу, не превосходящему $\|x_k\|^{-1/2}$, если $x_k \neq 0$; $\quad n_k = k$, если $x_k = 0$.

Теперь мы имеем $\|n_k x_k\| = \|x_k + x_k + \ldots + x_k\| \leqslant n_k \|x_k\|$, откуда $s\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} n_k x_k = 0$. Но в квазинормированном пространстве последовательность $\{n_k x_k\}$, сходящаяся к $x = 0$, является ограниченной. Отсюда в силу сделанных предположений $\{T(n_k x_k)\} = \{n_k T x_k\}$ — тоже ограниченная последовательность. Поэтому

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} Tx_k = s\text{-}\lim_{k\to\infty} n_k^{-1}\left(T\left(n_k x_k\right)\right) = 0,$$

и, таким образом, оператор T непрерывен при $x = 0$, а следовательно, непрерывен всюду.

Теорема 3. Пусть X — некоторое борнологическое пространство. Если линейный оператор T, действующий из X в локально выпуклое линейное топологическое пространство Y, отображает всякое ограниченное множество в ограниченное, то он непрерывен.

Доказательство. Обозначим через V некоторую выпуклую уравновешенную окрестность нуля пространства Y. Пусть p — функционал Минковского множества V. Рассмотрим функцию $q(x) = p(Tx)$; она является полунормой в X, ограниченной на всяком ограниченном множестве из X, поскольку всякое ограниченное множество из Y поглощается указанной окрестностью V. Так как пространство X — борнологическое, полунорма q непрерывна. Поэтому множество $\{x \in X;\ Tx \in V^a\} = \{x \in X;\ q(x) \leqslant 1\}$ является окрестностью нуля пространства X. Таким образом, непрерывность оператора T доказана.

8. Обобщенные функции и обобщенные производные

Непрерывный линейный функционал, заданный на локально выпуклом линейном топологическом пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$, введенном в § 1 гл. I, представляет собой „распределение“ или „обобщенную функцию“ Л. Шварца. Для исследования обобщенных функций нам потребуется такая теорема.

Теорема 1. Пусть B — некоторое ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Тогда в Ω существует такое бикомпактное подмножество K, что

$$\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K \text{ для всех } \varphi \in B, \tag{1}$$

$$\sup_{x \in K,\, \varphi \in B} |D^j\varphi(x)| < \infty \text{ для всякого дифференциального оператора } D^j. \tag{2}$$

Доказательство. Допустим, что существуют последовательность функций $\{\varphi_i\} \subseteq B$ и последовательность точек $\{p_i\}$, такие, что: (1°) последовательность $\{p_i\}$ не имеет в Ω предельных точек; (2°) $\varphi_i(p_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда

$$p(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} i\,|\varphi(p_i)|/|\varphi_i(p_i)|$$

представляет собой непрерывную полунорму на всяком пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ (гл. I, § 1). Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ множество $\{\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega);\ p(\varphi) \leqslant \varepsilon\}$ является окрестностью нуля пространства

$\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Так как $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, то множество $\{\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega);\ p(\varphi) \leqslant \varepsilon\}$ является окрестностью нуля в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Поэтому функция p непрерывна в точке 0 этого пространства, а следовательно, и всюду в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Таким образом, полунорма p ограничена на ограниченном множестве B, принадлежащем $\mathfrak{D}(\Omega)$. В то же время $p(\varphi_i) \geqslant i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Это доказывает справедливость утверждения (1).

Допустим теперь, что (1) имеет место, а (2) не выполняется. Тогда существуют дифференциальный оператор D^{j_0} и последовательность функций $\{\varphi_i\} \subseteq B$, такие, что $\sup\limits_{x \in K} |D^{j_0}\varphi_i(x)| > i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Поэтому если мы положим

$$p(\varphi) = \sup_{x \in K} |D^{j_0}\varphi(x)| \quad \text{для} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega),$$

то $p(\varphi)$ будет непрерывной полунормой пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ и $p(\varphi_i) > i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Таким образом, последовательность $\{\varphi_i\} \subseteq B$ не может быть ограниченной в $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ и тем более в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Полученное противоречие показывает, что условие (2) тоже выполняется.

Теорема 2. Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$ является борнологическим.

Доказательство. Пусть $q(\varphi)$ — некоторая полунорма пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$, ограниченная на каждом ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$. В силу теоремы 1 из § 7 гл. I нам нужно лишь доказать, что полунорма q непрерывна в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Для этого покажем, что q непрерывна на пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, где K — любое бикомпактное подмножество из Ω. Поскольку $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, мы сможем заключить отсюда, что q непрерывна на $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Но полунорма q действительно непрерывна на любом пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. В самом деле, при сделанных предположениях она ограничена на всяком ограниченном множестве квазинормированного линейного пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ и, следовательно, по теореме 2 предыдущего параграфа непрерывна на $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Таким образом, полунорма q непрерывна и на $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Теперь мы можем дать определение *обобщенной функции.*

Определение 1. Линейный функционал T, заданный и непрерывный на пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$, называется *обобщенной функцией*, или *распределением*, в области Ω. Величина $T(\varphi)$ называется значением обобщенной функции T на *основной функции* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$.

Из теоремы 1 § 7 гл. I и предыдущей теоремы 2 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1. Для того чтобы линейный функционал T, заданный на $\mathfrak{D}(\Omega)$, был обобщенной функцией в Ω, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен на любом ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$, т. е. на всяком множестве $B \in \mathfrak{D}(\Omega)$, удовлетворяющем условиям (1) и (2).

Доказательство. Это следует из того, что функционал $T(\varphi)$ непрерывен тогда и только тогда, когда непрерывна полунорма $|T(\varphi)|$.

Следствие. Линейный функционал T, заданный в пространстве $C_0^\infty(\Omega)$, представляет собой обобщенную функцию в области Ω тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

каждому бикомпактному подмножеству K из Ω соответствуют положительная постоянная C и положительное целое k, такие, что $|T(\varphi)| \leqslant C \sup\limits_{|j| \leqslant k,\, x \in K} |D^j \varphi(x)|$ (3) для всех $\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega)$.

Доказательство. Функционал T, непрерывный на индуктивном пределе $\mathfrak{D}(\Omega)$ пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, должен быть непрерывным на каждом пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Отсюда вытекает необходимость условия (3). Достаточность этого условия очевидна, так как из него следует, что функционал T ограничен на всяком ограниченном множестве, принадлежащем $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Замечание. Приведенное выше следствие весьма полезно для приложений, так как его можно принять за удобное определение обобщенной функции.

Пример 1. Пусть комплексная функция $f(x)$, заданная почти всюду в области Ω, является *локально интегрируемой* в Ω по отношению к мере Лебега $dx = dx_1 \ldots dx_n$ в R^n, т. е. для любого бикомпактного подмножества K из Ω имеем $\int\limits_K |f(x)| dx < \infty$. Тогда формула

$$T_f(\varphi) = \int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{4}$$

определяет в Ω обобщенную функцию T_f[1]).

Пример 2. Пусть $m(B)$ есть σ-конечная σ-аддитивная комплексная мера, заданная на бэровских подмножествах B открытого множества Ω пространства R^n. Тогда формула

$$T_m(\varphi) = \int\limits_\Omega \varphi(x)\, m(dx), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{5}$$

определяет в Ω обобщенную функцию T_m.

---

[1]) Обобщенные функции вида T_f, соответствующие локально интегрируемым функциям f, в математической литературе на русском языке называются *регулярными*. В дальнейшем автор часто отождествляет регулярную обобщенную функцию T_f и функцию f (смысл и правомерность такого отождествления выясняются в замечании к определению 2 и в ходе дальнейшего изложения) и пишет $T = f$, имея в виду, что $T = T_f$. — *Прим. перев.*

Пример 3. В примере 2 можно, в частности, положить

$$T_{\delta_p}(\varphi)=\varphi(p), \quad \text{где } p \text{ — произвольная фиксированная точка из } \Omega, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega). \tag{6}$$

Формула (6) определяет в Ω обобщенную функцию T_{δ_p}, которая называется *δ-функцией Дирака*, сосредоточенной в точке $p \in \Omega$. В частном случае, когда $p=0$ (начало координат в R^n), мы будем обозначать T_{δ_0} через T_δ или просто δ.

Определение 2. Множество всех обобщенных функций в Ω мы обозначим через $\mathfrak{D}(\Omega)'$. Это множество с операциями

$$(T+S)(\varphi)=T(\varphi)+S(\varphi), \quad (\alpha T)(\varphi)=\alpha T(\varphi) \tag{7}$$

образует линейное пространство. Пространство $\mathfrak{D}(\Omega)'$ называется *пространством обобщенных функций* в Ω или *сопряженным* к $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Замечание. *Две обобщенные функции* T_{f_1} *и* T_{f_2} *равны* (т. е. $T_{f_1}(\varphi)=T_{f_2}(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$) *тогда и только тогда, когда почти всюду* $f_1(x)=f_2(x)$. Если это утверждение доказано, то можно установить взаимно однозначное соответствие $f \longleftrightarrow T_f$ между множеством всех локально интегрируемых на Ω функций и некоторым подмножеством пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ (функции f_1 и f_2, для которых $f_1(x)=f_2(x)$ почти всюду, считаются эквивалентными), при котором

$$T_{f_1}+T_{f_2}=T_{f_1+f_2}, \quad \alpha T_f=T_{\alpha f}. \tag{7'}$$

В этом смысле понятие обобщенной функции действительно является обобщением понятия локально интегрируемой функции. Для того чтобы доказать сформулированное выше утверждение, достаточно убедиться в том, что если $\int\limits_\Omega f(x)\varphi(x)\,dx=0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то локально интегрируемая функция f почти всюду в открытой области Ω пространства R^n обращается в нуль. Введем меру Бэра $\mu(B)=\int\limits_B f(x)\,dx$ [1]; тогда последнее условие означает, что $\int\limits_\Omega \varphi(x)\mu(dx)=0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$. Отсюда на основании предложения 8 § 1 гл. I следует, что $\int\limits_\Omega \varphi(x)\mu(dx)=0$ для всех $\varphi \in C_0^0(\Omega)$. Пусть B — некоторое бикомпактное G_δ-множество, принадлежащее Ω, т. е. $B=\bigcap\limits_{n=1}^\infty G_n$, где

[1]) Здесь и далее под мерами Бэра подразумеваются произвольные (в том числе и комплексные) σ-аддитивные функции множеств, определенные на бэровских подмножествах B области Ω. — *Прим. перев.*

G_n — открытые относительно бикомпактные множества из Ω. По теореме Урысона из § 2 введения существует непрерывная функция $f_n(x)$, такая, что $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ для $x \in \Omega$, $f_n(x) = 1$ при $x \in G^a_{n+2}$ и $f_n(x) = 0$, когда $x \in G^a_n - G_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ (не ограничивая общности, можно считать, что $\{G_n\}$ — монотонно убывающая последовательность открытых относительно бикомпактных множеств из Ω, причем $G^a_{n+2} \subseteq G_{n+1}$). Полагая $\varphi = f_n$ и $n \to \infty$, мы видим, что $\mu(B) = 0$ для всех бикомпактных G_δ-множеств B из области Ω. Бэровские множества области Ω входят в наименьшую σ-алгебру подмножеств, содержащую бикомпактные G_δ-множества области Ω. Отсюда, вследствие σ-аддитивности меры Бэра μ, мы можем заключить, что μ обращается в нуль для всех бэровских множеств из Ω. Следовательно, функция f (так называемая плотность меры μ) почти всюду в Ω равна нулю.

При помощи следующего предложения мы сможем определить операцию дифференцирования обобщенных функций.

Предложение 2. Если T — некоторая обобщенная функция в Ω, то формула

$$S(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(\Omega), \tag{8}$$

определяет в Ω другую обобщенную функцию S.

Доказательство. Легко проверить, что S — линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$, ограниченный на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Определение 3. Обобщенная функция S, определенная формулой (8), называется *обобщенной производной* от T (по переменной x_1). Мы будем писать

$$S = \frac{\partial}{\partial x_1} T; \tag{9}$$

таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right). \tag{10}$$

Замечание. Определенное выше понятие представляет собой обобщение обычного понятия производной. В самом деле, если функция f непрерывно дифференцируема по x_1, то

$$\frac{\partial}{\partial x_1} T_f(\varphi) = -T_f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right) = -\int \underset{\Omega}{\ldots} \int f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} dx_1 \ldots dx_n =$$
$$= \int \underset{\Omega}{\ldots} \int \frac{\partial}{\partial x_1} f(x) \varphi(x) dx_1 \ldots dx_n = T_{\frac{\partial f}{\partial x_1}}(\varphi);$$

это можно получить при помощи интегрирования по частям, учитывая, что функция $\varphi(x)$ тождественно равна нулю вне некоторого бикомпактного подмножества области Ω.

Следствие. Всякая обобщенная функция T в Ω бесконечно дифференцируема в смысле приведенного выше определения и

$$(D^j T)(\varphi) = (-1)^{|j|} T(D^j \varphi), \qquad (11)$$

$$\text{где } |j| = \sum_{i=1}^{n} j_i, \qquad D^j = \frac{\partial^{|j|}}{\partial x_1^{j_1} \dots \partial x_n^{j_n}}.$$

Пример 1. *Функция Хевисайда* $H(x)$ определяется соотношениями

$$H(x) = 1 \quad \text{при} \quad x \geqslant 0 \quad \text{и} \quad H(x) = 0 \quad \text{при} \quad x < 0. \qquad (12)$$

Мы имеем

$$\frac{d}{dx} T_H = T_{\delta_0}, \qquad (12')$$

где T_{δ_0} есть *δ-функция Дирака*, сосредоточенная в начале координат пространства R^1. В самом деле, для всякой функции $\varphi \in \mathfrak{D}(R^1)$

$$\left(\frac{d}{dx} T_H\right)(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} H(x) \varphi'(x)\, dx =$$

$$= -\int_{0}^{\infty} \varphi'(x)\, dx = -[\varphi(x)]_0^{\infty} = \varphi(0).$$

Пример 2. Пусть функция $f(x)$ имеет ограниченную и непрерывную производную в открытом множестве $R^1 - \bigcup_{j=1}^{k} x_j$ пространства R^1. *Скачком* функции $f(x)$ в точке $x = x_j$ назовем величину $s_j = f(x_j + 0) - f(x_j - 0)$. Так как

$$\left(\frac{d}{dx} T_f\right)(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi'(x)\, dx = \sum_j \varphi(x_j) s_j + \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) \varphi(x)\, dx,$$

то

$$\frac{d}{dx} T_f = T_{f'} + \sum_j s_j \delta_{x_j}, \qquad (12'')$$

где функционал $\delta_{x_j} \equiv T_{\delta_{x_j}}(\varphi)$ определяется формулой (6).

Пример 3. Пусть $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — непрерывно дифференцируемая функция на замкнутой ограниченной области $\Omega \subseteq R^n$ с гладкой границей S. Продолжим функцию f на все пространство R^n, полагая $f=0$ вне области Ω. Интегрируя по частям, получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_j} T_f\right)(\varphi) = -\int\limits_{\Omega} f(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{S} f(x)\varphi(x)\cos(\nu,\ x_j)\,dS + \int\limits_{\Omega}\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi(x)\,dx,$$

где ν — *внутренняя нормаль* к границе S, $(\nu,\ x_j)=(x_j,\ \nu)$ — угол между положительным направлением оси x_j и нормалью ν, а dS — элемент поверхности. Отсюда

$$\frac{\partial}{\partial x_j} T_f = T_{\frac{\partial f}{\partial x_j}} + T_S,\ \text{где}\ T_S(\varphi) = \int\limits_{S} f(x)\cos(\nu,\ x_j)\,\varphi(x)\,dS. \qquad (12''')$$

Следствие. Если функция $f(x)=f(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ принадлежит классу C^2 на множестве Ω и равна нулю вне Ω, то из формулы $(12''')$ и соотношения $\frac{\partial}{\partial \nu} = \sum\limits_{j}\frac{\partial}{\partial x_j}\cos(x_j,\ \nu)$ вытекает *формула Грина*

$$(\Delta T_f)(\varphi) = T_{\Delta f}(\varphi) + \int\limits_{S}\frac{\partial f}{\partial \nu}\varphi(x)\,dS - \int\limits_{S} f(x)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS, \qquad (12'''')$$

где $\Delta = \sum\limits_{j=1}^{n}\partial^2/\partial x_j^2$ — оператор Лапласа.

Предложение 3. Если T — обобщенная функция в Ω и $f\in C^\infty(\Omega)$, то соотношение

$$S(\varphi) = T(f\varphi), \qquad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega), \qquad (13)$$

определяет в Ω другую обобщенную функцию S.

Доказательство. Дифференцируя произведение $f\varphi$ при помощи формулы Лейбница, нетрудно убедиться в том, что S — линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$, ограниченный на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Определение 4. Обобщенная функция S, определенная формулой (13), называется *произведением* обобщенной функции T на функцию f.

Формула Лейбница. Обозначим функционал S, определенный в (13), через fT; тогда

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(fT) = \frac{\partial f}{\partial x_j}T + f\frac{\partial T}{\partial x_j}, \qquad (14)$$

поскольку, согласно формуле Лейбница для производной $\partial(f\varphi)/\partial x_j$,

$$-T\left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right) = T\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\varphi\right) - T\left(\frac{\partial}{\partial x_j}(f\varphi)\right).$$

Формулу (14) можно обобщить следующим образом.

Пусть $P(\xi)$ — некоторый полином относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Рассмотрим линейный дифференциальный оператор в частных производных $P(D)$ с постоянными коэффициентами, который получается, если в многочлен $P(\xi)$ подставить вместо переменных ξ_j операторы $i^{-1}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ (мнимый коэффициент i^{-1} вводится для удобства изложения теории преобразования Фурье в гл. VI).

Теорема 3 (*Формула Хёрмандера* — обобщенная формула Лейбница). Имеет место формула

$$P(D)(fT) = \sum_{(\alpha)\geqslant 0} \frac{1}{(\alpha)!} D_\alpha f \cdot P^{(\alpha)}(D)T, \tag{15}$$

где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$, $1 \leqslant \alpha_j \leqslant n$, $(\alpha) = k$ при $k \neq 0$,

$$P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{(\alpha)}}{\partial\xi_{\alpha_1}\,\partial\xi_{\alpha_2}\ldots\partial\xi_{\alpha_k}} P(\xi), \qquad D_\alpha = \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha_j}}, \tag{16}$$

$$P^{(0)}(\xi) = P(\xi), \qquad D_0 = I \text{ при } (\alpha) = 0. \tag{17}$$

Доказательство. Повторное применение формулы (14) дает тождество вида

$$P(D)(fT) = \sum_{(\alpha)\geqslant 0} D_\alpha f \cdot Q_\alpha(D)T, \tag{18}$$

где $Q_\alpha(D)$ — дифференциальные операторы, явный вид которых мы должны найти. Не ограничивая общности, можно допустить, что эти операторы выбраны инвариантными относительно перестановки индексов α. В самом деле, этого всегда можно добиться, деля каждое слагаемое, относящееся к данному значению (α), на число таких слагаемых, повторяя каждое новое слагаемое нужное число раз и перегруппировывая полученные таким способом члены.

Так как (18) — тождество, мы можем подставить в него $f(x) = e^{i\langle x, \xi\rangle}$ и $T = e^{i\langle x, \eta\rangle}$, где $\langle x, \xi\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\xi_j$, $\langle x, \eta\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\eta_j$. Тогда, применяя очевидную формулу

$$P(D)\,e^{i\langle x, \xi\rangle} = P(\xi)\,e^{i\langle x, \xi\rangle}, \tag{19}$$

мы получим соотношение

$$P(\xi+\eta) = \sum_{\alpha} \xi^\alpha Q_\alpha(\eta), \quad \text{где} \quad \xi^\alpha = \prod_j \xi_{\alpha_j}.\ ^{1)}$$

---

[1]) При выводе этой формулы используются следующие очевидные свойства регулярного функционала T_ψ, соответствующего непрерывно дифференцируемой функции ψ: $DT_\psi = T_{(D\psi)}$ и $fT_\psi = T_{(\psi f)}$. — *Прим. перев.*

С другой стороны, по формуле Тейлора

$$P(\xi+\eta)=\sum_{\alpha}\frac{1}{(\alpha)!}\xi^{\alpha}P^{(\alpha)}(\eta),$$

откуда следует, что $Q_{\alpha}(\eta)=\frac{1}{(\alpha)!}P^{(\alpha)}(\eta)$.

9. B-пространства и F-пространства

В квазинормированном линейном пространстве X из равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$ вытекает в силу неравенства треугольника $\|x_n-x_m\|\leqslant\|x_n-x\|+\|x-x_m\|$, что последовательность $\{x_n\}$ удовлетворяет *условию Коши*

$$\lim_{n,\, m\to\infty}\|x_n-x_m\|=0, \tag{1}$$

т. е. является *фундаментальной*.

Определение 1. Квазинормированное (соответственно нормированное) линейное пространство X мы будем называть F-пространством (соответственно B-пространством), если оно полно, т. е. если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X сильно сходится к некоторой точке x_{∞} этого пространства:

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_{\infty}\|=0, \qquad x_{\infty}\in X. \tag{2}$$

Предел x_{∞}, если он существует, определяется однозначно; это следует из неравенства треугольника $\|x-x'\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n-x'\|$. Полное предгильбертово пространство называется *гильбертовым*.

Замечание. Термины F-пространство и B-пространство — это сокращения названий *пространство Фреше* и *пространство Банаха*. Заметим, что в книгах Бурбаки пространством Фреше называются локально выпуклые пространства, являющиеся квазинормированными и полными.

Предложение 1. Пусть Ω — некоторое открытое множество пространства R^n. Обозначим через $\mathfrak{E}(\Omega)=C^{\infty}(\Omega)$ локально выпуклое пространство, наделенное квазинормой в соответствии с предложением 6 § 1 гл. I. Пространство $\mathfrak{E}(\Omega)$ является F-пространством.

Доказательство. Условие $\lim\limits_{n,\, m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$ в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$ означает, что для любого бикомпактного подмножества K из Ω и всякого дифференциального оператора D^{α} последовательность $\{D^{\alpha}f_n(x)\}$ сходится при $n\to\infty$ равномерно на множестве K. Следовательно, существует такая функция $f(x)\in C^{\infty}(\Omega)$, что

$\lim\limits_{n\to\infty} D^\alpha f_n(x) = D^\alpha f(x)$ равномерно на K. Поскольку D^α и K здесь произвольны, отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$, что и требовалось доказать.

Предложение 2. Пространство $L^p(S) = L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ является B-пространством. В частности, $L^2(S)$ и (l^2) — гильбертовы пространства.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n,\,m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$ в $L^p(S)$. Тогда можно выбрать такую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, что

$$\sum_k \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| < \infty.$$

Применяя неравенство треугольника и лемму Лебега — Фату к последовательности функций

$$y_t(s) = |x_{n_1}(s)| + \sum_{k=1}^{t} |x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)| \in L^p(S),$$

мы видим, что

$$\int_\Omega \left(\lim_{t\to\infty} (y_t(s))^p\right) m(ds) \leqslant \varliminf_{t\to\infty} \|y_t\|^p \leqslant \left(\|x_{n_1}\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|\right)^p.$$

Поэтому почти всюду существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} y_t(s)$. Следовательно, почти всюду существует конечный предел $\lim\limits_{t\to\infty} x_{n_{t+1}}(s) = x_\infty(s)$ и $x_\infty(s) \in L^p(S)$, так как $|x_{n_{t+1}}(s)| \leqslant \lim\limits_{t\to\infty} y_t(s) \in L^p(S)$. Применяя лемму Лебега — Фату еще раз, получаем

$$\|x_\infty - x_{n_k}\|^p = \int_\Omega \left(\lim_{t\to\infty} |x_{n_t}(s) - x_{n_k}(s)|^p\right) m(ds) \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{l=k}^{\infty} \|x_{n_{l+1}} - x_{n_l}\|\right)^p.$$

Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_\infty - x_{n_k}\| = 0$. Используя теперь неравенство треугольника и условие сходимости Коши (1), мы убеждаемся в том, что

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|x_\infty - x_n\| \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} \|x_\infty - x_{n_k}\| + \varlimsup_{k,\,n\to\infty} \|x_{n_k} - x_n\| = 0.$$

Этим завершается доказательство нашего утверждения. Одновременно мы доказали важное

Следствие. Всякая последовательность $\{x_n\} \in L^p(S)$, удовлетворяющая условию сходимости Коши (1), содержит некоторую подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, такую, что

$$\text{конечный предел } \lim_{k\to\infty} x_{n_k}(s) = x_\infty(s) \text{ существует почти всюду,}$$

$$x_\infty(s) \in L^p(S) \text{ и } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x_\infty. \tag{3}$$

Замечание. При доказательстве предыдущего предложения и следствия мы предполагали, что $1 \leqslant p < \infty$. Однако полученные результаты справедливы и для $p = \infty$, причем доказательство в этом случае оказывается даже более простым. Мы предлагаем читателю самостоятельно провести это доказательство.

Предложение 3. Пространство $A^2(G)$ является гильбертовым пространством.

Доказательство. Пусть $\{f_n(z)\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из $A^2(G)$. Так как $A^2(G)$ — линейное подпространство гильбертова пространства $L^2(G)$, существует такая подпоследовательность $\{f_{n_k}(z)\}$, что

$$\text{конечный предел } \lim_{k\to\infty} f_{n_k}(z) = f_\infty(z) \text{ существует почти всюду,}$$

$$f_\infty \in L^2(G) \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \int_G |f_\infty(z) - f_n(z)|^2\, dx\, dy = 0.$$

Мы должны показать, что функция $f_\infty(z)$ голоморфна в области G. Для этого допустим, что круг $|z - z_0| \leqslant \rho$ содержится в G. Разложение Тейлора $f_n(z) - f_m(z) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j (z - z_0)^j$ дает

$$\|f_n - f_m\|^2 \geqslant \int_{|z-z_0|\leqslant\rho} |f_n(z) - f_m(z)|^2\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^\rho \left(\int_0^{2\pi} \sum_j c_j r^j e^{ij\theta} \sum_k \bar{c}_k r^k e^{-ik\theta}\, d\theta \right) r\, dr =$$

$$= \sum_j 2\pi \int_0^\rho |c_j|^2 r^{2j+1}\, dr = 2\pi \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{2j+2} |c_j|^2 (2j+2)^{-1} \geqslant$$

$$\geqslant \pi |c_0|^2 \rho^2 = \pi\rho^2 |f_n(z_0) - f_m(z_0)|^2. \tag{4}$$

Отсюда вытекает, что и сама последовательность $\{f_n(z)\}$ равномерно сходится во всяком замкнутом круге, содержащемся в области G. Поскольку функции $f_n(z)$ голоморфны в G, то и $f_\infty(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ — голоморфная функция во всей области G.

Предложение 4. При условии $m(S) < \infty$ пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ является F-пространством.

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — некоторая фундаментальная последовательность элементов пространства $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Так как сходимость в $M(S, \mathfrak{B}, m)$ — это сходимость по мере, то можно выбрать из $\{x_n(s)\}$ такую подпоследовательность $\{x_{n_k}(s)\}$, что

$$m(B_k) \leqslant 2^{-k} \quad \text{для} \quad B_k = \{s \in S;\ 2^{-k} \leqslant |x_{n_{k+1}}(s) - x_{n_k}(s)|\}.$$

Последовательность

$$x_{n_k}(s) = x_{n_1}(s) + \sum_{j=1}^{k-1} \left(x_{n_{j+1}}(s) - x_{n_j}(s)\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

сильно сходится к некоторой функции, принадлежащей $M(S, \mathfrak{B}, m)$. В самом деле, если $s \notin \bigcup_{j=t}^{\infty} B_j$, то $\sum_{j=t}^{\infty} |x_{n_{j+1}}(s) - x_{n_j}(s)| \leqslant$ $\leqslant \sum_{j=t}^{\infty} 2^{-j} \leqslant 2^{1-t}$, и $m\left(\bigcup_{j=t}^{\infty} B_j\right) \leqslant \sum_{j=t}^{\infty} m(B_j) \leqslant \sum_{j=t}^{\infty} 2^{-j} \leqslant 2^{1-t}$; поэтому, полагая $t \to \infty$, мы видим, что последовательность $\{x_{n_k}(s)\}$ сходится m-п. в. к некоторой функции $x_\infty(s) \in M(S, \mathfrak{B}, m)$. Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty} \|x_{n_k} - x_\infty\| = 0$, а так как $\lim\limits_{n, m\to\infty} \|x_n - x_m\| = 0$, то мы получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_\infty\| = 0$.

Пространство (s). Совокупность (s) всех числовых последовательностей $\{\xi_n\}$ с квазинормой

$$\|\{\xi_n\}\| = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} |\xi_j| / (1 + |\xi_j|)$$

и операциями

$$\{\xi_n\} + \{\eta_n\} = \{\xi_n + \eta_n\}, \qquad \alpha\{\xi_n\} = \{\alpha\xi_n\}$$

образует F-пространство. Доказательство полноты для пространства (s) проводится так же, как для пространства $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Квазинорма

$$\|\{\xi_n\}\| = \inf_{\varepsilon > 0} \operatorname{arc\,tg} \{\varepsilon + \text{количество чисел } \xi_n, \text{ удовлетворяющих неравенству } |\xi_n| > \varepsilon\}$$

определяет в пространстве (s) эквивалентную топологию.

Замечание. Ясно, что пространства $C(S)$, (c_0) и (c) являются B-пространствами. Полнота пространства (l^p) следует из полноты $L^p(S)$. Таким образом, по теореме 3 § 5 гл. I пространство H-L^2, так же как и (l^2), является гильбертовым.

Пространства Соболева $W^{k,p}(\Omega)$. Пусть Ω — открытое множество в R^n и k — некоторое положительное целое число. Обозначим через $W^{k,p}(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ совокупность всех комплексных функций $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, заданных на Ω, таких, что f и все ее обобщенные производные $D^s f$ порядка $|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j \leqslant k$ принадлежат $L^p(\Omega)$ [1]). Множество $W^{k,p}(\Omega)$ с операциями

$$(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x), \qquad (\alpha f)(x) = \alpha f(x)$$

и нормой

$$\| f \|_{k,p} = \left(\sum_{|s| \leqslant k} \int_{\Omega} | D^s f(x) |^p dx \right)^{1/p}, \qquad dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

образует нормированное линейное пространство, если считать всякие две функции f_1 и f_2 одним вектором пространства $W^{k,p}(\Omega)$, когда $f_1(x) = f_2(x)$ почти всюду в области Ω. Нетрудно заметить также, что $W^{k,2}(\Omega)$ — это предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g)_{k,2} = \left(\sum_{|s| \leqslant k} \int_{\Omega} D^s f(x) \cdot \overline{D^s g(x)}\, dx \right).$$

Предложение 5. Пространство $W^{k,p}(\Omega)$ является B-пространством. В частности, $W^k(\Omega) \equiv W^{k,2}(\Omega)$ — это гильбертово пространство с нормой $\| f \|_k = \| f \|_{k,2}$ и скалярным произведением $(f, g)_k = (f, g)_{k,2}$.

Доказательство. Пусть $\{f_h\}$ — фундаментальная последовательность элементов пространства $W^{k,p}(\Omega)$. Тогда последовательность $\{D^s f_h\}$ при любом дифференциальном операторе D^s, для которого $|s| \leqslant k$, является фундаментальной последовательностью пространства $L^p(\Omega)$. Поэтому в силу полноты $L^p(\Omega)$ существуют такие функции $f^{(s)} \in L^p(\Omega)$ $(|s| \leqslant k)$, что $\lim_{h \to \infty} \int_{\Omega} | D^s f_h(x) - f^{(s)}(x) |^p dx = 0.$ Применяя неравенство Гёльдера (гл. I, § 3) к бикомпактным множествам, принадлежащим Ω, нетрудно убедиться в том, что f_h — локально интегрируемая функция на Ω. Следовательно, для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$T_{D^s f_h}(\varphi) = \int_{\Omega} D^s f_h(x) \cdot \varphi(x)\, dx = (-1)^{|s|} \int_{\Omega} f_h(x)\, D^s \varphi(x)\, dx.$$

---

[1]) Обобщенные производные для функций ввел С. Л. Соболев (см., например, [2]). — *Прим. перев.*

Используя неравенство Гёльдера еще раз, мы, учитывая равенство $\lim\limits_{h\to\infty}\int\limits_{\Omega}|f_h(x)-f^{(0)}(x)|^p\,dx=0$, получаем

$$\lim_{h\to\infty} T_{D^s f_h}(\varphi)=(-1)^{|s|}\,T_{f^{(0)}}(D^s\varphi)=D^sT_{f^{(0)}}(\varphi).$$

Аналогично, принимая во внимание равенство $\lim\limits_{h\to\infty}\int\limits_{\Omega}|D^sf_h(x)-$ $-f^{(s)}(x)|^p\,dx=0$, находим

$$\lim_{h\to\infty} T_{D^s f_h}(\varphi)=T_{f^{(s)}}(\varphi).$$

Следовательно, $D^sT_{f^{(0)}}=T_{f^{(s)}}$, а это означает, что обобщенная производная $D^sf^{(0)}$ равна $f^{(s)}$. Это показывает, что $\lim\limits_{h\to\infty}\|f_h-f^{(0)}\|_{k,p}=0$ и, таким образом, пространство $W^{k,p}(\Omega)$ полно.

10. Пополнение

Полнота F-пространств (и B-пространств) играет важную роль в функциональном анализе, поскольку к таким пространствам можно применить теоремы Бэра о категориях, которые приводились в введении. Следующая теорема о *пополнении* будет часто использоваться в этой книге.

Теорема (о пополнении). Пусть X — квазинормированное линейное пространство; допустим, что оно не полно. Тогда X изоморфно и изометрично плотному линейному подпространству некоторого F-пространства $\tilde{X}$, т. е. существует взаимно однозначное соответствие $x\longleftrightarrow\tilde{x}$ между X и некоторым плотным линейным подпространством из $\tilde{X}$, такое, что

$$(\widetilde{x+y})=\tilde{x}+\tilde{y},\qquad (\widetilde{\alpha x})=\alpha\tilde{x},\qquad \|\tilde{x}\|=\|x\|. \tag{1}$$

Пространство $\tilde{X}$ определяется однозначно с точностью до изометрического изоморфизма и называется *пополнением* пространства X.

Если X — нормированное пространство, то $\tilde{X}$ является B-пространством.

Доказательство. Доказательство этой теоремы опирается на идею Кантора, которая используется при построении вещественных чисел на базе множества рациональных чисел.

Совокупность всех фундаментальных последовательностей $\{x_n\}$ пространства X можно разбить на классы эквивалентных последовательностей, полагая $\{x_n\}\sim\{y_n\}$, если $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-y_n\|=0$. Класс, содержащий последовательность $\{x_n\}$, обозначим через $\{x_n\}'$. Совокупность $\tilde{X}$ всех таких классов $\tilde{x} = \{x_n\}'$ с операциями

$$\{x_n\}' + \{y_n\}' = \{x_n + y_n\}', \quad \alpha\{x_n\}' = \{\alpha x_n\}'$$

является линейным пространством. Так как $|\,\|x_n\| - \|x_m\|\,| \leqslant \|x_n - x_m\|$, то предел $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$ существует. Положим

$$\|\{x_n\}'\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Нетрудно заметить, что приведенные определения векторной суммы $\{x_n\}' + \{y_n\}'$, умножения на скаляр $\alpha\{x_n\}'$ и величины $\|\{x_n\}'\|$ не зависят от конкретного выбора представителей классов $\{x_n\}'$ и $\{y_n\}'$. Например, если $\{x_n\} \sim \{x_n'\}$, то

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n'\| + \lim_{n\to\infty} \|x_n' - x_n\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n'\|.$$

Аналогично получаем неравенство $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n'\| \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$, откуда $\|\{x_n'\}\| = \|\{x_n'\}'\|$.

Покажем, что $\|\{x_n\}'\|$ — квазинорма. Для этого мы должны убедиться в том, что

$$\lim_{\alpha\to 0} \|\alpha\{x_n\}'\| = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{\|\{x_n\}'\|\to 0} \|\alpha\{x_n\}'\| = 0.$$

Первое из этих соотношений эквивалентно равенству

$$\lim_{\alpha\to 0} \lim_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0,$$

а второе — условию $\lim\limits_{n\to\infty} \|\alpha x_n\| = 0$. Оба эти требования выполняются, так как функция $\|\alpha x\|$ непрерывна по обеим переменным α и x.

Чтобы доказать полноту построенного здесь пространства $\tilde{X}$, допустим, что $\{\tilde{x}_k\} = \{\{x_n^{(k)}\}\}$ — произвольная фундаментальная последовательность из $\tilde{X}$. Для каждого k мы можем выбрать такое значение n_k, что

$$\left\| x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| < k^{-1} \quad \text{при} \quad m > n_k. \tag{2}$$

Далее можно показать, что последовательность $\{\tilde{x}_k\}$ сходится к классу, содержащему фундаментальную последовательность элементов пространства X вида

$$\left\{ x_{n_1}^{(1)},\ x_{n_2}^{(2)},\ \ldots,\ x_{n_k}^{(k)},\ \ldots \right\}. \tag{3}$$

Чтобы убедиться в этом, обозначим через $\overline{x_{n_k}^{(k)}}$ класс, содержащий последовательность

$$\left\{ x_{n_k}^{(k)},\ x_{n_k}^{(k)},\ \ldots,\ x_{n_k}^{(k)},\ \ldots \right\}. \tag{4}$$

Из неравенства (2) следует, что

$$\left\| \tilde{x}_k - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| = \lim_{m \to \infty} \left\| x_m^{(k)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| \leqslant k^{-1}, \tag{5}$$

и поэтому

$$\left\| x_{n_k}^{(k)} - x_{n_m}^{(m)} \right\| = \left\| \bar{x}_{n_k}^{(k)} - \bar{x}_{n_m}^{(m)} \right\| \leqslant \left\| \bar{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k \right\| + \\ + \left\| \tilde{x}_k - \tilde{x}_m \right\| + \left\| \tilde{x}_m - \bar{x}_{n_m}^{(m)} \right\| \leqslant \left\| \tilde{x}_k - \tilde{x}_m \right\| + k^{-1} + m^{-1}.$$

Отсюда видно, что (3) — это фундаментальная последовательность элементов пространства X. Пусть $\tilde{x}$ — класс, содержащий последовательность (3). Тогда из неравенства (5) вытекает неравенство

$$\left\| \tilde{x} - \tilde{x}_k \right\| \leqslant \left\| \tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| + \left\| \bar{x}_{n_k}^{(k)} - \tilde{x}_k \right\| \leqslant \left\| \tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| + k^{-1}.$$

Как было показано выше,

$$\left\| \tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| \leqslant \lim_{p \to \infty} \left\| x_{n_p}^{(p)} - x_{n_k}^{(k)} \right\| \leqslant \lim_{p \to \infty} \left\| \tilde{x}_p - \tilde{x}_k \right\| + k^{-1};$$

следовательно, мы доказали, что $\lim\limits_{k \to \infty} \left\| \tilde{x} - \bar{x}_{n_k}^{(k)} \right\| = 0$, и, таким образом, $\lim\limits_{k \to \infty} \left\| \tilde{x} - \tilde{x}_k \right\| = 0$.

Приведенное доказательство показывает, что соответствие

$$X \ni x \longleftrightarrow \tilde{x} = \{x, x, \ldots, x, \ldots\}' = \bar{x}$$

действительно является изометрическим изоморфизмом и образ пространства X в $\tilde{X}$ является плотным в $\tilde{X}$. Последнее утверждение этой теоремы вполне очевидно.

Пример пополнения. Пусть Ω — открытое множество в R^n и $k < \infty$. Пополнение пространства $C_0^k(\Omega)$ с нормой

$$\| f \|_k = \left(\sum_{|s| \leqslant k} \int_{\Omega} | D^s f(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}$$

мы обозначим через $H_0^k(\Omega)$. Таким образом, $H_0^k(\Omega)$ — это пополнение предгильбертова пространства $\hat{H}_0^k(\Omega)$, которое было определено в § 5 гл. I (пример 4). Поэтому $H_0^k(\Omega)$ — гильбертово пространство. Пополнение предгильбертова пространства $\hat{H}^k(\Omega)$, которое определялось в § 5 гл. I (пример 3), мы обозначим через $H^k(\Omega)$.

Элементы пространства $H_0^k(\Omega)$ можно выделить с помощью следующей процедуры: пусть $\{f_h\}$ — последовательность из $C_0^k(\Omega)$, фундаментальная по норме $\| f \|_k$. Тогда в силу полноты пространства $L^2(\Omega)$

существуют такие функции $f^{(s)}(x) \in L^2(\Omega)$ $\left(|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j \leqslant k\right)$, что

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\Omega} |f^{(s)}(x) - D^s f_h(x)|^2 \, dx = 0 \qquad (dx = dx_1 \, dx_2 \, \ldots \, dx_n).$$

Так как скалярное произведение — это непрерывная функция по норме $L^2(\Omega)$, то для любой основной функции $\varphi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ справедливы соотношения[1])

$$T_{f^{(s)}}(\varphi) = \lim_{h \to \infty} \langle D^s f_h, \varphi \rangle = \lim_{h \to \infty} (-1)^{|s|} T_{f_h}(D^s \varphi) =$$
$$= (-1)^{|s|} \lim_{h \to \infty} \langle f_h, D^s \varphi \rangle = (-1)^{|s|} \langle f^{(0)}, D^s \varphi \rangle = \left(D^s T_{f^{(0)}}\right)(\varphi).$$

Поэтому $f^{(s)} \in L^2(\Omega)$ и, следовательно, $f(s)$ является обобщенной производной функции $f^{(0)}: f^{(s)} = D^s f^{(0)}$.

Итак, мы доказали, что гильбертово пространство $H_0^k(\Omega)$ является линейным подпространством гильбертова пространства $W^k(\Omega)$ (пространства Соболева). Вообще говоря, $H_0^k(\Omega)$ является собственным подпространством пространства $W^k(\Omega)$. Однако справедливо следующее

Предложение. $H_0^k(R^n) = W^k(R^n)$.

Доказательство. Мы знаем, что пространство $W^k(R^n)$ состоит из всех таких функций $f(x) \in L^2(R^n)$, обобщенные производные которых $D^s f(x)$ $\left(|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j \leqslant k\right)$ также принадлежат $L^2(R^n)$, причем норма в $W^k(R^n)$ определена формулой

$$\|f\|_k = \left(\sum_{|s| \leqslant k} |D^s f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2}.$$

Пусть $f \in W^k(R^n)$. Определим функции f_N следующим образом:

$$f_N(x) = \alpha_N(x) f(x),$$

где функции $\alpha_N(x) \in C_0^\infty(R^n)$ $(N = 1, 2, \ldots)$ выбраны так, что $\alpha_N(x) = 1$ при $|x| \leqslant N$ и $\sup\limits_{x \in R^n;\ |s| \leqslant k;\ N = 1, 2, \ldots} |D^s \alpha_N(x)| < \infty$.

Тогда по формуле Лейбница

$$D^s f(x) - D^s f_N(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \leqslant N$$

и $D^s f(x) - D^s f_N(x)$ равняется линейной комбинации членов вида

$$D^t \alpha_N(x) \cdot D^u f(x), \quad \text{где} \quad |u| + |t| \leqslant k, \quad \text{при} \quad |x| > N.$$

---

[1]) Определение символа $\langle\ ,\ \rangle$ см. в § 4 введения. — *Прим. перев.*

Следовательно, поскольку $D^s f \in L^2(R^n)$ при $|s| \leqslant k$, мы видим, что $\lim\limits_{N\to\infty} \| D^s f_N - D^s f \|_0 = 0$, и поэтому $\lim\limits_{N\to\infty} \| f_N - f \|_k = 0$.

Таким образом, теперь достаточно показать, что для любой функции $f \in W^k(R^n)$ с бикомпактным носителем существует такая последовательность $\{f_p(x)\} \subseteq C_0^\infty(R^n)$, что $\lim\limits_{p\to\infty} \| f_p - f \|_k = 0$. С этой целью рассмотрим регуляризацию (гл. I, § 1 (16)) функции f:

$$f_a(x) = \int\limits_{R^n} f(y)\,\theta_a(x-y)\,dy, \qquad a > 0.$$

Дифференцируя, находим, что

$$D^s f_a(x) = \int\limits_{R^n} f(y)\, D_x^s \theta_a(x-y)\,dy = (-1)^{|s|} \int\limits_{R^n} f(y)\, D_y^s \theta_a(x-y)\,dy =$$

$$= (D^s T_f)(\theta_{a,x}) = \int\limits_{R^n} D^s f(y) \cdot \theta_a(x-y)\,dy,$$

где

$$\theta_{a,x}(y) = \theta_a(x-y), \qquad |s| \leqslant k.$$

Отсюда, используя неравенство Шварца, получаем

$$\int\limits_{R^n} | D^s f_a(x) - D^s f(x) |^2\,dx \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{R^n} \theta_a(x-y)\,dy \right) \int\limits_{R^n} \left[\int\limits_{R^n} | D_y^s f(y) - D_x^s f(x) |^2\, \theta_a(x-y)\,dy \right] dx =$$

$$= \int\limits_{|\varepsilon| \leqslant a} \left[\int\limits_{R^n} | D_y^s f(y) - D_y^s f(y+\varepsilon) |^2\,dy \right] \theta_a(\varepsilon)\,d\varepsilon,$$

где

$$y + \varepsilon = (y_1 + \varepsilon_1,\ y_2 + \varepsilon_2,\ \ldots,\ y_n + \varepsilon_n).$$

Мы знаем, что внутренний интеграл в последнем выражении справа стремится к 0 при $\varepsilon \to 0$ (теорема 1 из § 3 введения); следовательно, $\lim\limits_{a\to 0} \int\limits_{R^n} | D^s f_a(x) - D^s f(x) |^2\,dx = 0$. Таким образом, $\lim\limits_{a\to 0} \| f_a - f \|_k = 0$, откуда и вытекает существование последовательности $\{f_p\} \in C_0^\infty(R^n)$, такой, что $\lim\limits_{p\to\infty} \| f_p - f \|_k = 0$. Поэтому пополнение $H_0^k(R^n)$ пространства $C_0^k(R^n)$ по норме $\| \ \|_k$ совпадает с пространством $W^k(R^n)$.

Следствие. $H_0^k(R^n) = H^k(R^n) = W^k(R^n)$.

11. Факторпространства B-пространств

Пусть X — некоторое нормированное линейное пространство, а M — замкнутое линейное подпространство в X. Рассмотрим факторпространство X/M, т. е. пространство, элементами которого служат классы эквивалентности ξ по модулю M. Поскольку M замкнуто, эти классы ξ также замкнуты в X.

Предложение. Положим

$$\|\xi\| = \inf_{x \in \xi} \|x\|; \tag{1}$$

тогда $\|\xi\|$ удовлетворяет всем аксиомам, определяющим норму.

Доказательство. Если $\xi = 0$, то класс ξ совпадает с M и содержит нулевой вектор пространства X. В этом случае из (1) следует, что $\|\xi\| = 0$. Допустим теперь, что для некоторого ξ мы имеем $\|\xi\| = 0$. Тогда из (1) вытекает, что этот класс содержит последовательность $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = 0$, поэтому нулевой вектор пространства X в силу замкнутости класса ξ в X принадлежит ξ. Это означает, что $\xi = M$ и, следовательно, ξ — нулевой вектор пространства X/M.

Теперь предположим, что $\xi, \eta \in X/M$. По определению (1) для любого $\varepsilon > 0$ существуют такие векторы $x \in \xi$, $y \in \eta$, что

$$\|x\| \leqslant \|\xi\| + \varepsilon, \quad \|y\| \leqslant \|\eta\| + \varepsilon.$$

Следовательно, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\| + 2\varepsilon$. С другой стороны, $(x+y) \in (\xi+\eta)$, и поэтому, согласно (1), $\|\xi+\eta\| \leqslant \|x+y\|$. Таким образом, $\|\xi+\eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\| + 2\varepsilon$. Так как ε произвольно, мы приходим к неравенству треугольника $\|\xi+\eta\| \leqslant \|\xi\| + \|\eta\|$.

Наконец, нетрудно проверить, что аксиома $\|\alpha\xi\| = |\alpha| \cdot \|\xi\|$ также выполняется.

Определение. Пространство X/M с нормой (1) называется *нормированным факторпространством.*

Теорема. Если X есть B-пространство, а M — замкнутое линейное подпространство в X, то нормированное факторпространство X/M тоже является B-пространством.

Доказательство. Пусть $\{\xi_n\}$ — фундаментальная последовательность в X/M. Тогда $\{\xi_n\}$ содержит такую подпоследовательность $\{\xi_{n_k}\}$, что $\left\|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\right\| < 2^{-k-2}$. Далее по определению (1) нормы пространства X/M в каждом из классов $\left(\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\right)$ можно выбрать такой вектор y_k, что

$$\|y_k\| < \left\|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}\right\| + 2^{-k-2} < 2^{-k-1},$$

Пусть $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$. Тогда ряд $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \cdots$ сходится по норме; следовательно, в силу полноты пространства X он сходится к некоторому элементу $x \in X$. Пусть ξ — класс, содержащий x. Мы докажем, что $\xi = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$.

Обозначим через s_k частичные суммы $x_{n_1} + y_1 + y_2 + \ldots + y_k$ написанного выше ряда. Тогда $\lim\limits_{k\to\infty} \|x - s_k\| = 0$. Но, с другой стороны, из соотношений $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$, $y_p \in (\xi_{n_{p+1}} - \xi_{n_p})$ следует, что $s_k \in \xi_{n_k}$, и поэтому, согласно (1),

$$\|\xi - \xi_{n_k}\| \leqslant \|x - s_k\| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Учитывая теперь тот факт, что последовательность $\{\xi_n\}$ фундаментальная, и применяя неравенство $\|\xi - \xi_n\| \leqslant \|\xi - \xi_{n_k}\| + \|\xi_{n_k} - \xi_n\|$, мы получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \|\xi - \xi_n\| = 0$, что и требовалось доказать.

12. Разбиение единицы

В следующем параграфе мы введем понятие носителя обобщенной функции. Для этого мы определим здесь *разбиение единицы* и докажем его существование.

Предложение. Пусть G — открытое множество в R^n. Пусть семейство $\{U\}$ открытых подмножеств U из G образует *базу открытых множеств* в G, т. е. всякое открытое подмножество из G можно представить в виде объединения открытых множеств, входящих в семейство $\{U\}$.

Тогда из семейства $\{U\}$ можно выделить систему открытых множеств, обладающую следующими свойствами:

объединение множеств этой системы совпадает с G; (1)

всякое бикомпактное подмножество множества G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств этой системы. (2)

Определение 1. Систему открытых множеств, удовлетворяющую условиям (1) и (2), мы назовем *локально конечным* открытым покрытием области G, соответствующим системе $\{U\}$.

Доказательство предложения. Множество G можно представить в виде объединения счетного числа бикомпактных подмножеств, например, всех замкнутых шаров из G с рациональными радиусами и центрами.

Поэтому существует последовательность бикомпактных подмножеств K_r, такая, что (1°) $K_r \subseteq K_{r+1}$ $(r = 1, 2, \ldots)$; (2°) G является объединением множеств K_r; (3°) каждое множество K_r содержится во внутренности K_{r+1}^i множества K_{r+1}. Положим

$$U_r = K_{r+1}^i - K_r \quad \text{и} \quad V_r = K_r - K_{r-1}^i,$$

причем условимся, что $K_0 \equiv K_{-1} = \emptyset$ (пустое множество). По построению множества U_r открыты, а V_r бикомпактны, причем $G = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} V_r$. Для каждой точки $x \in V_r$ выберем теперь такое открытое множество $U(x; r) \in \{U\}$, что $x \in U(x; r) \subseteq U_r$. Так как V_r бикомпактно, существует такая конечная система точек $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(h_r)}$ множества V_r, что $V_r \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{h_r} U(x^{(i)}; r)$. Тогда система открытых множеств $U(x^{(i)}; r)$ $(r = 1, 2, \ldots; 1 \leqslant i \leqslant h_r)$ образует локально конечное открытое покрытие множества G, соответствующее системе $\{U\}$, так как всякое бикомпактное множество из G имеет непустые пересечения лишь с конечным числом множеств U_r.

Теорема (*разбиение единицы*). Пусть G — открытое множество в пространстве R^n. Допустим, что семейство открытых множеств $\{G_i; i \in I\}$ покрывает G, т. е. $G = \bigcup\limits_{i \in I} G_i$. Тогда существует такая система функций $\{\alpha_j(x); j \in J\}$ класса $C_0^\infty(R^n)$, что

для каждого $j \in J$ носитель $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в некотором множестве G_i; (3)

$$0 \leqslant \alpha_j(x) \leqslant 1 \quad \text{для каждого} \quad j \in J; \tag{4}$$

$$\sum_{j \in J} \alpha_j(x) \equiv 1 \quad \text{для всех} \quad x \in G\,[1]. \tag{5}$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x^{(0)} \in G$ и выберем множество G_i, содержащее $x^{(0)}$. Пусть замкнутый шар $S(x^{(0)}; r)$ с центром $x^{(0)}$ и радиусом r лежит в G_i. Построим, как в § 1 гл. I (14), функцию $\beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) \in C_0^\infty(R^n)$, обладающую следующими свойствами:

$$\beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) > 0 \text{ при } |x - x^{(0)}| < r, \quad \beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) = 0 \text{ при } |x - x^{(0)}| \geqslant r.$$

Положим $U_{x^{(0)}}^{(r)} = \{x; \beta_{x^{(0)}}^{(r)}(x) \neq 0\}$. Тогда $U_{x^{(0)}}^{(r)} \subseteq G_i$, $\bigcup\limits_{x^{(0)} \in G,\, r > 0} U_{x^{(0)}}^{(r)} = G$ и, кроме того, множества $\operatorname{supp}\left(\beta_{x^{(0)}}^{(r)}\right)$ бикомпактны.

---

[1]) Далее доказано, что при каждом $x \in G$ отлично от нуля лишь конечное число функций $\alpha_j(x)$, $j \in J$, поэтому запись $\sum\limits_{j \in J} \alpha_j(x)$ имеет смысл. — *Прим. перев.*

Согласно доказанному предложению, существует локально конечное открытое покрытие $\{U_j;\ j\in J\}$ множества G, соответствующее базе $\{U^{(r)}_{x^{(0)}};\ x^{(0)}\in G,\ r>0\}$ открытых множеств из G. Пусть $\beta_j(x)$ — любая функция семейства $\{\beta^{(r)}_{x^{(0)}}(x)\}$, определяющая множество U_j. Тогда, поскольку $\{U_j;\ j\in J\}$ — локально конечное открытое покрытие множества G, для каждой фиксированной точки $x\in G$ имеется лишь конечное число функций $\beta_j(x)$, отличных от нуля в x. Поэтому сумма $s(x)=\sum\limits_{j\in J}\beta_j(x)$ действительно определена на множестве G и положительна в каждой точке x области G. Следовательно, функции

$$\alpha_j(x)=\beta_j(x)/s(x)\qquad(j\in J)$$

удовлетворяют условию теоремы.

Определение 2. Система функций $\{\alpha_j(x);\ j\in J\}$, определенная выше, называется *разбиением единицы*, соответствующим покрытию $\{G_i;\ i\in I\}$.

13. Обобщенные функции с бикомпактными носителями

Определение 1. Мы будем говорить, что обобщенная функция $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ обращается в нуль на открытом множестве U области Ω, если $T(\varphi)=0$ для всякой функции $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$, носитель которой содержится в U. *Носителем* $\operatorname{supp}(T)$ обобщенной функции T мы назовем наименьшее замкнутое подмножество F из Ω, такое, что обобщенная функция T обращается в нуль на множестве $\Omega-F$.

Чтобы обосновать это определение, мы должны доказать существование наибольшего открытого множества в Ω, на котором обобщенная функция T обращается в нуль. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 1. Если обобщенная функция $T\in\mathfrak{D}(\Omega)'$ обращается в нуль на каждом множестве U_i некоторого семейства $\{U_i;\ i\in I\}$ открытых множеств области Ω, то T обращается в нуль на множестве $U=\bigcup\limits_{i\in I}U_i$.

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ — функция, для которой $\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq U$. Построим разбиение единицы $\{\alpha_j(x);\ j\in J\}$, соответствующее покрытию множества Ω, состоящему из всех множеств семейства $\{U_i;\ i\in I\}$ и множества $\Omega-\operatorname{supp}(\varphi)$. Тогда $\varphi=\sum\limits_{j\in J}\alpha_j\varphi$ — конечная сумма, и поэтому $T(\varphi)=\sum\limits_{j\in J}T(\alpha_j\varphi)$. Если носитель $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в некотором множестве U_i, то по предположению $T(\alpha_j\varphi)=0$; если $\operatorname{supp}(\alpha_j)$ содержится в $\Omega-\operatorname{supp}(\varphi)$, то $\alpha_j\varphi=0$ и, следовательно, $T(\alpha_j\varphi)=0$. Таким образом, $T(\varphi)=0$.

Предложение 1. Подмножество B пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$ ограничено тогда и только тогда, когда для любого дифференциального оператора D^j и всякого бикомпактного подмножества K из Ω семейство функций $\{D^j f(x);\ f \in B\}$ равномерно ограничено на K.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует из определения полунорм, с помощью которых в пространстве $\mathfrak{E}(\Omega)$ вводится топология.

Предложение 2. Линейный функционал T на $\mathfrak{E}(\Omega)$ непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен на каждом ограниченном множестве пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{E}(\Omega)$ — квазинормированное линейное пространство, это утверждение следует из теоремы 2 § 7 гл. I.

Предложение 3. Обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ с бикомпактным носителем может быть единственным образом продолжена до непрерывного линейного функционала T_0 на $\mathfrak{E}(\Omega)$, такого, что $T_0(f) = 0$ для всякой функции $f \in \mathfrak{E}(\Omega)$, обращающейся в нуль в некоторой окрестности носителя $\operatorname{supp}(T)$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{supp}(T) = K$, где K — бикомпактное подмножество области Ω. Для каждой точки $x^0 \in K$ и произвольного $\varepsilon > 0$ выберем шар $S(x^0;\ \varepsilon)$ с центром x^0 радиуса $\varepsilon > 0$. При любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ бикомпактное множество K покрывается конечным числом шаров вида $S(x^0;\ \varepsilon)$, где $x^0 \in K$. Пусть $\{\alpha_j(x);\ j \in J\}$ — разбиение единицы, соответствующее этой конечной системе шаров. Тогда функция $\psi = \sum\limits_{\operatorname{supp}(\alpha_j) \cap K' \neq \emptyset} \alpha_j(x)$, где K' — любая бикомпактная окрестность множества K, содержащаяся во внутренности упомянутой выше конечной системы шаров, удовлетворяет следующему условию:

$$\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega) \text{ и } \psi(x) = 1 \text{ в некоторой окрестности множества } K.$$

Определим теперь значения функционала $T_0(f)$ для функций $f \in C^\infty(\Omega)$ соотношением $T_0(f) = T(\psi f)$. Это определение не зависит от выбора функции ψ. В самом деле, если функция $\psi_1 \in C_0^\infty(\Omega)$ равна 1 в некоторой окрестности множества K, то для любой функции $f \in C^\infty(\Omega)$ функция $(\psi - \psi_1) f \in \mathfrak{D}(\Omega)$ обращается в нуль в окрестности множества K и, таким образом, $T(\psi f) - T(\psi_1 f) = T((\psi - \psi_1) f) = 0$.

Применяя формулу Лейбница для дифференцирования ψf, нетрудно заметить, что если f пробегает ограниченное множество пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$, то ψf пробегает ограниченное множество пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$. Таким образом, поскольку обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ ограничена на ограниченных множествах из $\mathfrak{D}(\Omega)$, функционал T_0 ограничен на ограниченных множествах пространства $\mathfrak{E}(\Omega)$. Следовательно, по теореме 2 § 7 гл. I, о которой мы упоминали выше, T_0 — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{E}(\Omega)$. Пусть теперь функция $f \in \mathfrak{E}(\Omega)$ обращается в нуль в некоторой окрестности $U(K)$ множества K. Тогда, выбирая функцию $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$, которая обращается в нуль на множестве $\Omega - U(K)$, мы убеждаемся в том, что $T_0(f) = T(\psi f) = 0$.

Предложение 4. Пусть K' — носитель функции ψ, определенной выше при построении функционала T_0. Тогда существуют такие постоянные C и k, что

$$|T_0(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K'} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Доказательство. Так как T — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$, то для всякого бикомпактного множества K' из Ω существуют такие постоянные C' и k', что

$$|T(\varphi)| \leqslant C' \sup_{|j| \leqslant k',\ x \in K'} |D^j \varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_{K'}(\Omega)$$

(см. следствие предложения 1 в § 8 гл. I). Но для любой функции $g \in C^\infty(\Omega)$ мы имеем $\varphi = \psi g \in \mathfrak{D}_{K'}(\Omega)$. Поэтому, дифференцируя с применением формулы Лейбница, мы получаем

$$\sup_{|j| \leqslant k',\ x \in K'} |D^j(\psi g)(x)| \leqslant C'' \sup_{|j| \leqslant k',\ x \in K'} |D^j g(x)|,$$

где постоянная C'' не зависит от выбора g. Полагая теперь $g = f$ и $k = k'$, мы убеждаемся в справедливости утверждения.

Предложение 5. Пусть S_0 — линейный функционал на $C^\infty(\Omega)$, такой, что для некоторой постоянной C, положительного целого числа k и бикомпактного подмножества K области Ω имеем

$$|S_0(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Тогда сужение функционала S_0 на $C_0^\infty(\Omega)$ представляет собой обобщенную функцию T, носитель которой содержится в K.

Доказательство. Заметим, что если функция f тождественно равна нулю в некоторой окрестности множества K, то $S_0(f) = 0$. Поэтому если функция $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ равна 1 в окрестности множества K, то

$$S_0(f) = S_0(\psi f) \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Легко видеть, что если f пробегает некоторое ограниченное множество функций из пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$, то, согласно формуле Лейбница, ψf пробегает некоторое множество функций $\{\psi f\}$, которое содержится в множестве вида

$$\left\{g \in C^\infty(\Omega); \quad \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j g(x)| = C_k < \infty\right\}.$$

Таким образом, функционал $S_0(\psi f) = T(f)$ ограничен на ограниченных множествах пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$, и поэтому T — непрерывный линейный функционал на $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Тем самым мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2. Совокупность всех обобщенных функций в Ω с бикомпактными носителями совпадает с пространством $\mathfrak{E}(\Omega)'$ всех непрерывных линейных функционалов на $\mathfrak{E}(\Omega)$, т. е. с пространством, *сопряженным* к $\mathfrak{E}(\Omega)$. Линейный функционал T на $C^\infty(\Omega)$ принадлежит $\mathfrak{E}(\Omega)'$ тогда и только тогда, когда для некоторых постоянных C и k и бикомпактного подмножества K из Ω мы имеем

$$|T(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Теперь мы докажем теорему, в которой дается общий вид обобщенных функций с носителями, состоящими из одной-единственной точки.

Теорема 3. Пусть открытое множество Ω пространства R^n содержит начало координат. Тогда всякая обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(\Omega)'$, носитель которой состоит из одной точки — начала координат, может быть представлена в виде конечной линейной комбинации δ-функций Дирака, сосредоточенных в точке $x=0$, и их производных.

Доказательство. По предыдущей теореме 2 для всякой такой обобщенной функции T существуют константы C и k и бикомпактное подмножество K области Ω, содержащее начало координат, такие, что

$$|T(f)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant k,\ x \in K} |D^j f(x)| \quad \text{для всех} \quad f \in C^\infty(\Omega).$$

Докажем, что если $D^j f(0) = 0$ для всех значений j, таких, что $|j| \leqslant k$, то $T(f) = 0$. С этой целью выберем функцию $\psi \in C^\infty(\Omega)$, равную 1 в некоторой окрестности нуля, и положим

$$f_\varepsilon(x) = f(x)\,\psi(x/\varepsilon).$$

Так как $f = f_\varepsilon$ в окрестности начала координат, то $T(f) = T(f_\varepsilon)$. По формуле Лейбница производная функции f_ε порядка $\leqslant k$ представляет собой линейную комбинацию членов вида $|\varepsilon|^{-j} D^j\psi \cdot D^i f$, где $|i| + |j| \leqslant k$. Поскольку, согласно сделанным предположениям, $D^i f(0) = 0$ при $|i| \leqslant k$, мы, применяя формулу Тейлора, находим, что производная порядка $|s|$ от f_ε является величиной $O(\varepsilon^{k+1-|s|})$ на носителе функции $\psi(x/\varepsilon)$. Поэтому при $\varepsilon \downarrow 0$ [1]) производные функции f_ε порядка $\leqslant k$ стремятся к нулю равномерно в окрестности начала координат. Следовательно, $T(f) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T(f_\varepsilon) = 0$. Для произвольной функции $f \in \mathfrak{D}(\Omega)$ обозначим через f_k сумму членов ее тейлоровского разложения в окрестности начала координат до

[1]) Стрелки $\downarrow$ и $\uparrow$ обозначают здесь и далее приближения к предельному значению соответственно слева и справа. — *Прим. перев.*

порядка k включительно. Тогда, как было показано выше,

$$T(f)=T(f_k)+T(f-f_k)=T(f_k)+0=T(f_k).$$

Это показывает, что T является линейной комбинацией линейных функционалов, значения которых определяются значениями производных порядка не выше k функции f в начале координат; тем самым доказано утверждение теоремы.

14. Прямое произведение обобщенных функций

Сначала мы докажем следующую теорему об аппроксимации.

Теорема 1. Пусть $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in R^n$, $y=(y_1, y_2, \ldots, y_m)\in R^m$, $z=x\times y=(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m)\in R^{n+m}$. Тогда для всякой функции $\varphi(z)=\varphi(x, y)\in C_0^\infty(R^{n+m})$ можно выбрать такие функции $u_{ij}(x)\in C_0^\infty(R^n)$ и $v_{ij}(y)\in C_0^\infty(R^m)$, что последовательность функций

$$\varphi_i(z)=\varphi_i(x, y)=\sum_{j=1}^{k_i} u_{ij}(x)\, v_{ij}(y) \tag{1}$$

при $i\to\infty$ стремится в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ к функции $\varphi(z)=\varphi(x, y)$.

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая $m=n=1$. Положим

$$\Phi(x, y, t)=$$
$$=\left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\varepsilon, \eta)\exp\left(-((x-\xi)^2+(y-\eta)^2)/4t\right)d\xi\, d\eta \tag{2}$$

при $t>0$ и $\Phi(x, y, 0)=\varphi(x, y)$.

Замена переменных $\xi_1=(\xi-x)/2\sqrt{t}$, $\eta_1=(\eta-y)/2\sqrt{t}$ приводит функцию Φ к виду

$$\Phi(x, y, t)=\left(\sqrt{\pi}\right)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x+2\xi_1\sqrt{t},\ y+2\eta_1\sqrt{t}\right)e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}\,d\xi_1\, d\eta_1.$$

Отсюда, поскольку $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi_1^2-\eta_1^2}\,d\xi_1\, d\eta_1=\pi$, получаем

$$\Phi(x, y, t)-\varphi(x, y)|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sqrt{\pi}\right)^{-2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\varphi\left(x+2\xi\sqrt{t},\ y+2\eta\sqrt{t}\right)-\varphi(x, y)\right|e^{-\xi^2-\eta^2}\,d\xi\, d\eta\leqslant$$
$$\leqslant\pi^{-1}\left\{\iint\limits_{\xi^2+\eta^2\geqslant T^2}+\iint\limits_{\xi^2+\eta^2<T^2}\right\}.$$

Так как функция φ ограничена, а функция $e^{-\xi^2-\eta^2}$ интегрируема в R^2, то первый интеграл в правой части последнего неравенства стремится к нулю при $T \uparrow \infty$. Второй интеграл стремится к нулю, когда $t \downarrow 0$, при любом фиксированном $T > 0$. Таким образом, мы доказали, что $\lim\limits_{t \downarrow 0} \Phi(x, y, t) = \varphi(x, y)$ равномерно по (x, y) в R^2.

Теперь, учитывая бикомпактность носителя $\operatorname{supp}(\varphi)$ и вычисляя частные производные, мы с помощью формулы интегрирования по частям находим

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(2\sqrt{\pi t}\right)^{-2} \frac{\partial^{m+k}\varphi(\xi, \eta)}{\partial \xi^m \partial \eta^k} e^{-[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]/4t}\, d\xi\, d\eta \qquad \text{при} \quad t > 0$$

и

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}\varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \qquad \text{при} \quad t = 0.$$

Таким образом, мы, как и выше, получаем, что

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \frac{\partial^{m+k}\varphi(x, y)}{\partial x^m \partial y^k} \quad \text{равномерно по } (x, y). \tag{3}$$

Нетрудно видеть, что функция $\Phi(x, y, t)$, определенная формулой (2), может быть при $t > 0$ продолжена как голоморфная функция на комплексные значения x и y в области $|x| < \infty$, $|y| < \infty$. Поэтому для любого заданного $\gamma > 0$ функцию $\Phi(x, y, t)$ при фиксированном $t > 0$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\Phi(x, y, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m} c_{s,m}(t)\, x^s y^{m-s},$$

который абсолютно и равномерно сходится в области $|x| \leqslant \gamma$, $|y| \leqslant \gamma$ и может быть почленно продифференцирован:

$$\frac{\partial^{m+k}\Phi(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^k} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{m_1} c_{s,m}(t) \frac{\partial^{m+k} x^s y^{m_1-s}}{\partial x^m \partial y^k}.$$

Выберем произвольную последовательность $\{t_i\}$ положительных чисел t_i, такую, что $t_i \downarrow 0$. Согласно доказанному выше, для каждого значения t_i мы можем взять такой полином $P_i(x, y)$, представляющий собой отрезок ряда $\sum\limits_{m=0}^{\infty} \sum\limits_{s=0}^{m} c_{s,m}(t_i)\, x^s y^{m-s}$, что в топологии пространства $\mathfrak{E}(R^2)$

$$\lim_{i \to \infty} P_i(x, y) = \varphi(x, y),$$

т. е. на всяком бикомпактном подмножестве K пространства R^2 мы имеем $\lim_{i\to\infty} D^s P_i(x, y) = D^s\varphi(x, y)$ равномерно на множестве K для любого дифференциального оператора D^s. Выберем теперь такие функции $\rho(x)\in C_0^\infty(R^1)$ и $\sigma(y)\in C_0^\infty(R^1)$, что $\rho(x)\sigma(y)=1$ на множестве $\operatorname{supp}(\varphi(x, y))$. Тогда, как нетрудно видеть, функции $\varphi_i(x, y)=\rho(x)\sigma(y)P_i(x, y)$ удовлетворяют условиям теоремы.

Замечание. Совокупность всех функций, принадлежащих $\mathfrak{D}(R^{n+m})$, которые представимы в виде

$$\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(x)\psi_j(y), \quad \text{где} \quad \varphi_j(x)\in\mathfrak{D}(R^n), \qquad \psi_j(y)\in\mathfrak{D}(R^m),$$

мы будем обозначать через $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$. Согласно доказанной выше теореме 1, множество $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$ плотно в $\mathfrak{D}(R^{n+m})$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$. Линейное подпространство $\mathfrak{D}(R^n)\times\mathfrak{D}(R^m)$ пространства $\mathfrak{D}(R^{n+m})$, снабженное относительной топологией, называется *прямым произведением* пространств $\mathfrak{D}(R^n)$ и $\mathfrak{D}(R^m)$.

Теперь мы можем определить *прямое произведение* обобщенных функций. Для того чтобы явно указать независимые переменные $x=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функции $\varphi(x)\in\mathfrak{D}(R^n)$, мы будем обозначать пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ через $(\mathfrak{D}_x)$. Точно так же пространство $\mathfrak{D}(R^m)$, состоящее из функций $\psi(y)$ $(y=(y_1, y_2, \ldots, y_m))$, мы обозначим через $(\mathfrak{D}_y)$. Аналогично через $(\mathfrak{D}_{x\times y})$ мы обозначим пространство $\mathfrak{D}(R^{n+m})$, состоящее из функций $\chi(x, y)$. Соответственно символом $T_{(x)}$ мы будем обозначать обобщенные функции $T\in\mathfrak{D}(R^n)'=(\mathfrak{D}_x)'$, чтобы подчеркнуть, что T применяется к функциям $\varphi(x)$ переменной x.

Теорема 2. Пусть $T_{(x)}\in(\mathfrak{D}_x)'$, $S_{(y)}\in(\mathfrak{D}_y)'$. Тогда можно единственным способом определить обобщенную функцию $W=W_{(x\times y)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$, такую, что

$$W(u(x)v(y)) = T_{(x)}(u(x))\,S_{(y)}(v(y)) \quad \text{для} \quad u\in(\mathfrak{D}_x),\ v\in(\mathfrak{D}_y), \tag{4}$$

$$W(\varphi(x, y)) = S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y))) = T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x, y))) \quad \text{для} \quad \varphi\in(\mathfrak{D}_{x\times y}) \tag{5}$$

(теорема Фубини).

Замечание. Обобщенная функция W называется *прямым произведением*, или *тензорным произведением*, обобщенных функций $T_{(x)}$ и $S_{(y)}$. Мы будем писать

$$W = T_{(x)}\times S_{(y)} = S_{(y)}\times T_{(x)}. \tag{6}$$

Доказательство теоремы 2. Пусть $\mathfrak{B}=\{\varphi(x, y)\}$ — ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_{x\times y})$. Для фиксированной точки $y^{(0)}$

множество $\{\varphi(x, y^{(0)}); \varphi\in\mathfrak{B}\}$ представляет собой ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_x)$. Покажем, что

$$\{\psi(y^{(0)});\ \psi(y^{(0)})=T_{(x)}(\varphi(x, y^{(0)})),\ \varphi\in\mathfrak{B}\} \tag{7}$$

является ограниченным множеством пространства $(\mathfrak{D}_{y^{(0)}})$. Доказательство проводится следующим образом.

Поскольку $\mathfrak{B}$ — ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_{x\times y})$, существуют такие бикомпактные множества $K_x\in R^n$ и $K_y\in R^m$, что

$$\operatorname{supp}(\varphi)\subseteq\{(x, y)\in R^{n+m};\quad x\in K_x,\ y\in K_y\}\quad \text{для всех}\quad \varphi\in\mathfrak{B}.$$

Отсюда следует, что $\varphi(x, y^{(0)})=0$ и $\psi(y^{(0)})=T_{(x)}(\varphi(x, y^{(0)}))=0$, так как $y^{(0)}\notin K_y$. Таким образом,

$$\operatorname{supp}(\psi)\subseteq K_y\quad \text{для всех}\quad \varphi\in\mathfrak{B}. \tag{8}$$

Теперь мы должны убедиться в том, что для любого дифференциального оператора D_y, действующего в R^m, выполняется условие

$$\sup_{y,\,\psi}|D_y\psi(y)|<\infty\quad \text{при}\quad \psi(y)=T_{(x)}(\varphi(x, y)),\quad \varphi\in\mathfrak{B}. \tag{9}$$

Чтобы доказать это, возьмем, например, оператор $D_{y_1}=\partial/\partial y_1$. Тогда, поскольку $T_{(x)}$ — линейный функционал,

$$\frac{\psi(y_1+h, y_2, \ldots, y_m)-\psi(y_1, y_2, \ldots, y_m)}{h}=$$
$$=T_{(x)}\left\{\frac{\varphi(x, y_1+h, y_2, \ldots, y_m)-\varphi(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)}{h}\right\}.$$

Если φ пробегает множество $\mathfrak{B}$, то функции переменных x, стоящие в фигурных скобках при значениях параметра $y\in R^m$ и таких h, что $|h|\leqslant 1$, образуют в пространстве $(\mathfrak{D}_x)$ ограниченное множество. Это видно из того, что $\mathfrak{B}$ — ограниченное множество пространства $(\mathfrak{D}_{x\times y})$. Поэтому, полагая $h\to 0$ и применяя предложение 1 из § 8 гл. I, мы видим, что условие (9) действительно имеет место.

Итак, на основании того же предложения 1 мы можем заключить, что множество значений

$$\{S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y)));\ \varphi\in\mathfrak{B}\} \tag{10}$$

ограничено. Следовательно, упомянутое предложение 1 показывает, что равенство

$$W^{(1)}(\varphi)=S_{(y)}(T_{(x)}(\varphi(x, y))) \tag{11}$$

определяет некоторую обобщенную функцию $W^{(1)}\in(\mathfrak{D}_{x\times y})'$. Аналогично соотношение

$$W^{(2)}(\varphi)=T_{(x)}(S_{(y)}(\varphi(x, y))) \tag{12}$$

задает обобщенную функцию $W^{(2)} \in (\mathfrak{D}_{x \times y})'$. Ясно, что

$$W^{(1)}(u(x)\,v(y)) = W^{(2)}(u(x)\,v(y)) = T_{(x)}(u(x)) \cdot S_{(y)}(v(y)) \qquad (13)$$

для $u \in (\mathfrak{D}_x)$ и $v \in (\mathfrak{D}_y)$.

Поэтому из предыдущей теоремы 1, учитывая непрерывность обобщенных функций $W^{(1)}$ и $W^{(2)}$, мы заключаем, что $W^{(1)} = W^{(2)}$. Это и доказывает нашу теорему, так как можно положить $W = W^{(1)} = W^{(2)}$ [1]).

Литература к главе I

О локально выпуклых линейных топологических пространствах и банаховых пространствах см. Бурбаки [2], Гротендик [1], Кёте [1], Банах [1], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1]. По поводу обобщенных функций см. Шварц Л. [1], Гельфанд — Шилов [1], Хёрмандер [6], Фридман [1] [2]).

[1]) Ясно, что условие (5) определяет W единственным образом. — *Прим. перев.*

[2]) О нормированных пространствах см. также Дэй [1*]. — *Прим. перев.*

ГЛАВА II

Приложения теоремы Бэра — Хаусдорфа

Свойство полноты B-пространств (и F-пространств) позволяет применить к ним теорему Бэра — Хаусдорфа (см. введение) и установить такие важные принципы функционального анализа, как *теорема о равномерной ограниченности*, *теорема о резонансе*, *теорема об открытости отображения* и *теорема о замкнутом графике*. Основные результаты, составляющие содержание этих теорем, принадлежат Банаху [1]. Свойство *почленной дифференцируемости последовательности обобщенных функций* следует из теоремы о равномерной ограниченности.

1. Теорема о равномерной ограниченности

Теорема 1 (о равномерной ограниченности). Пусть X — линейное топологическое пространство, непредставимое в виде объединения счетного числа своих замкнутых неплотных подмножеств. Предположим, что на X определено семейство непрерывных отображений $\{T_a;\ a \in A\}$ пространства X в квазинормированное линейное пространство Y. Пусть для всякого $a \in A$ и любых $x,\ y \in X$ выполняются неравенства

$$\|T_a(x+y)\| \leqslant \|T_a x\| + \|T_a y\| \quad \text{и} \quad \|T_a(\alpha x)\| = \|\alpha T_a x\| \quad \text{при} \quad \alpha \geqslant 0.$$

Если множество $\{T_a x;\ a \in A\}$ ограничено при всяком фиксированном $x \in X$, то $s\text{-}\lim\limits_{x \to 0} T_a x = 0$ равномерно относительно $a \in A$.

Доказательство. Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ и всякого положительного целого n рассмотрим множество $X_n = \Big\{x \in X;\ \sup\limits_{a \in A} \{\|n^{-1}T_a x\| + \|n^{-1}T_a(-x)\|\} \leqslant \varepsilon\Big\}$. Ввиду непрерывности отображений T_a каждое из множеств X_n замкнуто. Из предположения, что множество $\{\|T_a x\|;\ a \in A\}$ ограничено, получаем $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. Отсюда в силу предположений, сделанных относительно пространства X, следует, что какое-то из множеств X_n, скажем X_{n_0}, должно содержать окрестность вида $U = x_0 + V$ некоторой точки $x_0 \in X$, где V — такая окрестность нуля пространства X, что $V = -V$. При этом для точек

$x \in V$ справедливо неравенство $\sup\limits_{a \in A} \| n_0^{-1} T_a(x_0 + x) \| \leqslant \varepsilon$. Поэтому

$$\| T_a(n_0^{-1}x) \| = \| T_a(n_0^{-1}(x_0 + x - x_0)) \| \leqslant \| n_0^{-1} T_a(x_0 + x) \| + \\ + \| n_0^{-1} T_a(-x_0) \| \leqslant 2\varepsilon \quad \text{при} \quad x \in V, \ a \in A.$$

Тем самым теорема доказана, так как операция αx умножения на скаляр в линейном топологическом пространстве непрерывна по обеим переменным α и x.

Следствие 1 (теорема о резонансе). Пусть $\{T_a;\ a \in A\}$ — семейство ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y. Тогда если множество $\{\| T_a x \|;\ a \in A\}$ ограничено при каждом фиксированном $x \in X$, то и множество $\{\| T_a \|;\ a \in A\}$ ограничено.

Доказательство. По теореме о равномерной ограниченности для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из условия $\| x \| \leqslant \delta$ вытекает неравенство $\sup\limits_{a \in A} \| T_a x \| \leqslant \varepsilon$. Поэтому $\sup\limits_{a \in A} \| T_a \| \leqslant \varepsilon/\delta$, что и доказывает наше утверждение.

Следствие 2. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y. Предположим, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = Tx$ существует при каждом фиксированном $x \in X$. Тогда T — тоже ограниченный линейный оператор, отображающий X в Y, причем

$$\| T \| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| T_n \|. \tag{1}$$

Доказательство. Ограниченность последовательности $\{\| T_n x \|\}$ при каждом фиксированном $x \in X$ вытекает из непрерывности нормы. Поэтому, согласно предыдущему следствию, $\sup\limits_{n \geqslant 1} \| T_n \| < \infty$, откуда $\| T_n x \| \leqslant \sup\limits_{n \geqslant 1} \| T_n \| \cdot \| x \|$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Итак, еще раз используя непрерывность нормы, мы получаем

$$\| Tx \| = \lim_{n \to \infty} \| T_n x \| \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \| T_n \| \cdot \| x \|,$$

что и приводит к неравенству (1). Наконец, ясно, что T — линейный оператор.

Определение. Оператор T, полученный описанным выше способом, называется *сильным пределом* последовательности $\{T_n\}$ (говорят также, что последовательность $\{T_n\}$ *сильно сходится* к T). В этом случае мы будем писать $T = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_n$.

Теперь мы докажем теорему о существовании для ограниченного линейного оператора ограниченного обратного оператора.

Теорема 2 (К. Нейман). Пусть T—ограниченный линейный оператор, отображающий B-пространство X в себя. Допустим, что $\|I-T\|<1$, где I — тождественное отображение ($Ix\equiv x$). Тогда для T существует единственный обратный ограниченный линейный оператор T^{-1}, который выражается следующим *рядом К. Неймана*:

$$T^{-1}x = s\text{-}\lim_{n\to\infty}(I+(I-T)+(I-T)^2+\ldots+(I-T)^n)\,x, \quad x\in X. \tag{2}$$

Доказательство. Для любого $x\in X$ справедливо неравенство

$$\left\|\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right\| \leqslant \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n x\| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{k}\|(I-T)^n\|\cdot\|x\| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}\|(I-T)\|^n\cdot\|x\|.$$

Ряд в правой части этого неравенства сходится, так как $\|I-T\|<1$. Поэтому из полноты пространства X следует существование ограниченного линейного оператора, равного пределу $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{k}(I-T)^n$. Этот оператор является обратным для T, как следует из равенства

$$T\cdot s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x = s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-(I-T))\left(\sum_{n=0}^{k}(I-T)^n x\right) =$$
$$= x - s\text{-}\lim_{k\to\infty}(I-T)^{k+1}x = x$$

и аналогичного равенства $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}(I-T)^n\right)Tx = x$.

2. Теорема Витали — Хана — Сакса

Эта теорема относится к сходящимся последовательностям мер. Она опирается на следующее

Предложение. Пусть $(S,\mathfrak{B},m)$ — некоторое пространство с мерой. Обозначим через $\mathfrak{B}_0$ совокупность всех множеств $B\in\mathfrak{B}$, для которых $m(B)<\infty$. Всякие два множества B_1 и B_2 из $\mathfrak{B}$ условимся считать эквивалентными, если $m(B_1\ominus B_2)=0$; введем функцию расстояния

$$d(B_1, B_2) = m(B_1\ominus B_2), \quad \text{где } B_1\ominus B_2 = B_1\cup B_2 - B_1\cap B_2. \tag{1}$$

Множество $\mathfrak{B}_0$ (с метрикой (1)) образует метрическое пространство, которое мы обозначим через $(\mathfrak{B}_0)$. Элементами этого пространства служат классы $\overline{B}$ множеств $B_1\in\mathfrak{B}_0$, таких, что $m(B\ominus B_1)=0$. Пространство $(\mathfrak{B}_0)$ является полным метрическим пространством.

Доказательство. Обозначим через $C_B(s)$ характеристическую функцию множества B:

$$C_B(s)=1 \quad \text{при} \quad s \in B, \quad C_B(s)=0 \text{ при } \quad s \notin B.$$

Тогда

$$d(B_1, B_2)=\int_S |C_{B_1}(s)-C_{B_2}(s)|\, m(ds). \tag{2}$$

Таким образом, метрическое пространство $(\mathfrak{B}_0)$ можно отождествить с некоторым подмножеством B-пространства $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. Допустим, что некоторая последовательность $\{C_{B_n}(s)\}$, где $B_n \in \mathfrak{B}_0$, удовлетворяет условию

$$\lim_{n,\, k\to\infty} d(B_n, B_k)=\lim_{n,\, k\to\infty}\int_S |C_{B_n}(s)-C_{B_k}(s)|\, m(ds)=0.$$

Тогда так же, как при доказательстве полноты пространства $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, можно выбрать такую подпоследовательность $\{C_{B_{n'}}(s)\}$, что m-п. в. существует предел $\lim\limits_{n'\to\infty} C_{B_{n'}}(s)=C(s)$ и $\lim\limits_{n'\to\infty}\int_S |C(s)-C_{B_{n'}}(s)|\, m(ds)=0$.

Очевидно, что $C(s)$ — это характеристическая функция некоторого множества $B_\infty \in \mathfrak{B}_0$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} d(B_\infty, B_n)=0$.

Это и показывает, что пространство $(\mathfrak{B}_0)$ полно.

Теорема (Витали — Хан — Сакс). Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — некоторое пространство с мерой. Пусть $\{\lambda_n(B)\}$ — последовательность комплексных мер, таких, что их полные вариации $|\lambda_n|(S)$ конечны при $n=1, 2, \ldots$. Допустим, что все меры $\lambda_n(B)$ m-абсолютно непрерывны и что для каждого множества $B \in \mathfrak{B}$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(B)= =\lambda(B)$. Тогда меры $\lambda_n(B)$ являются равностепенно (по n) m-абсолютно непрерывными, т. е. если $m(B)\to 0$, то $\lambda_n(B)\to 0$ равномерно по n. При условии $m(S)<\infty$ мера $\lambda(B)$ σ-аддитивна на $\mathfrak{B}$.

Доказательство. Каждая мера λ_n порождает на пространстве $(\mathfrak{B}_0)$ однозначную функцию $\overline{\lambda}_n(\overline{B})=\lambda_n(B)$; однозначность вытекает из m-абсолютной непрерывности меры $\lambda_n(B)$, в силу которой значение $\lambda_n(B)$ не зависит от выбора множества B из класса $\overline{B}$. Непрерывность функций $\overline{\lambda}_n(\overline{B})$ эквивалентна m-абсолютной непрерывности меры $\lambda_n(B)$, т. е. каждое из этих свойств влечет за собой другое.

Следовательно, при любом $\varepsilon>0$ множества

$$F_k(\varepsilon)=\left\{\overline{B};\quad \sup_{n\geqslant 1}|\overline{\lambda}_k(\overline{B})-\overline{\lambda}_{k+n}(\overline{B})|\leqslant\varepsilon\right\}$$

замкнуты в $(\mathfrak{B}_0)$, и в силу предположения $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(B) = \lambda(B)$ мы имеем $(\mathfrak{B}_0) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} F_k(\varepsilon)$. Так как полное метрическое пространство $(\mathfrak{B}_0)$ есть множество второй категории, по крайней мере одно множество $F_{k_0}(\varepsilon)$ содержит непустое открытое множество, принадлежащее $(\mathfrak{B}_0)$. Это означает, что существуют такой класс $\overline{B}_0 \in (\mathfrak{B}_0)$ и такое число $\eta > 0$, что из неравенства $d(B, B_0) \leqslant \eta$ следует неравенство

$$\sup_{n \geqslant 1} |\overline{\lambda}_{k_0}(\overline{B}) - \overline{\lambda}_{k_0+n}(\overline{B})| \leqslant \varepsilon.$$

С другой стороны, любое множество $B \in \mathfrak{B}_0$, для которого $m(B) \leqslant \eta$, может быть представлено в виде $B = B_1 - B_2$, где $d(B_1, B_0) \leqslant \eta$, $d(B_2, B_0) \leqslant \eta$. Например, можно положить $B_1 = B \cup B_0$, $B_2 = B_0 - B \cap B_0$. Таким образом, если $m(B) \leqslant \eta$ и $k \geqslant k_0$, то

$$|\lambda_k(B)| \leqslant |\lambda_{k_0}(B)| + |\lambda_{k_0}(B) - \lambda_k(B)| \leqslant |\lambda_{k_0}(B)| + \\ + |\lambda_{k_0}(B_1) - \lambda_k(B_1)| + |\lambda_{k_0}(B_2) - \lambda_k(B_2)| \leqslant |\lambda_{k_0}(B)| + 2\varepsilon.$$

Отсюда, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ и m-абсолютной непрерывности λ_{k_0}, мы заключаем, что если $m(B) \to 0$, то $\lambda_n(B) \to 0$ равномерно по n. Это означает, что и $\lambda(B) \to 0$ при $m(B) \to 0$. С другой стороны, ясно, что функция λ обладает свойством *конечной аддитивности*, т. е. $\lambda\left(\sum\limits_{j=1}^{n} B_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n} \lambda(B_j)$. Отсюда и из доказанного равенства $\lim\limits_{m(B)\to 0} \lambda(B) = 0$ вытекает, что функция λ также и σ-аддитивна, если $m(S) < \infty$.

Следствие 1. Пусть $\{\lambda_n(B)\}$ — последовательность комплексных мер на S, таких, что их полные вариации $|\lambda_n|(S)$ конечны при каждом n. Если для каждого $B \in \mathfrak{B}$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n(B)$, то функции $\{\lambda_n(B)\}$ оказываются σ-аддитивными равномерно относительно n, т. е. $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_n(B_k) = 0$ равномерно по n для всякой убывающей последовательности $\{B_k\}$ множеств $B_k \in \mathfrak{B}$, такой, что $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset$.

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$m(B) = \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} \mu_j(B), \quad \text{где} \quad \mu_j(B) = \lambda_j(B)/|\lambda_j|(S).$$

Она σ-аддитивна, так как λ_j обладают этим свойством, и, кроме того, $0 \leqslant m(B) \leqslant 1$. Каждая из функций λ_j и μ_j m-абсолютно непрерывна. Следовательно, по доказанной выше теореме $\lim\limits_{k\to\infty}\lambda_n(B_k)=0$ равномерно по n, так как $\lim\limits_{k\to\infty} m(B_k)=0$.

Следствие 2. Функция $\lambda(B)$, фигурирующая в доказанной выше теореме, является σ-аддитивной и m-абсолютно непрерывной и в том случае, когда $m(S)=\infty$.

3. Почленная дифференцируемость последовательности обобщенных функций

Исследование сходимости последовательностей обобщенных функций проводится очень просто. Это показывает следующая

Теорема. Пусть $\{T_n\}$ — последовательность обобщенных функций $T_n\in\mathfrak{D}(\Omega)'$. Пусть для каждой функции $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\varphi)=T(\varphi)$. Тогда T — тоже обобщенная функция, принадлежащая $\mathfrak{D}(\Omega)'$. В этом случае мы будем называть T пределом последовательности $\{T_n\}$ в пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)'$ и писать $T=\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

Доказательство. Линейность функционала T очевидна. Пусть K — любое бикомпактное подмножество области Ω. Тогда каждая обобщенная функция T_n определяет некоторый линейный функционал на F-пространстве $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Кроме того, эти функционалы непрерывны. В самом деле, используя предложение 1 из § 8 гл. I, нетрудно показать, что они ограничены на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Поэтому, согласно теореме о равномерной ограниченности, линейный функционал T ограничен на всяком ограниченном множестве из $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Таким образом, T оказывается непрерывным линейным функционалом на любом пространстве вида $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Так как $\mathfrak{D}(\Omega)$ — индуктивный предел пространств $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, функционал T должен быть непрерывным линейным функционалом и на пространстве $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Следствие (теорема о почленной дифференцируемости). Пусть $T=\lim\limits_{n\to\infty} T_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$. Тогда для любого дифференциального оператора D^j справедливо соотношение $D^jT=\lim\limits_{n\to\infty} D^jT_n(\mathfrak{D}(\Omega)')$.

Доказательство. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} T_n=T\ (\mathfrak{D}(\Omega)')$, то

$$\lim_{n\to\infty} T_n\left((-1)^{|j|}D^j\varphi\right)=T\left((-1)^{|j|}D^j\varphi\right)$$

для всякой функции $\varphi\in\mathfrak{D}(\Omega)$. Поэтому

$$(D^jT)(\varphi)=\lim_{n\to\infty}(D^jT_n)(\varphi)\quad \text{для любой функции}\quad \varphi\in\mathfrak{D}(\Omega).$$

4. Теорема о сгущении особенностей

Теорему Бэра — Хаусдорфа можно применить для доказательства существования функций с различными особенностями. Например, можно доказать существование непрерывной функции, не имеющей ни в одной точке конечной производной.

Теорема Вейерштрасса. На отрезке $[0, 1]$ существует непрерывная вещественная функция $x(t)$, которая ни в одной точке t_0 отрезка $[0, 1/2]$ не имеет конечной производной $x'(t_0)$.

Доказательство. Функция $x(t)$ обладает в точке $t = t_0$ конечными правыми верхним и нижним производными числами в том и только в том случае, когда существует такое положительное целое n, что

$$\sup_{2^{-1} > h > 0} h^{-1} |x(t_0 + h) - x(t_0)| \leqslant n.$$

Обозначим через M_n совокупность всех функций $x(t) \in C[0, 1]$, удовлетворяющих написанному выше условию в некоторой точке t_0 отрезка $[0, 1/2]$; различным функциям $x(t)$ могут соответствовать разные точки t_0 отрезка $[0, 1/2]$. Теперь достаточно показать, что всякое множество типа M_n неплотно в $C[0, 1]$. Действительно, если это так, то множество $C[0, 1] - \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ непусто, поскольку, согласно теореме Бэра — Хаусдорфа, полное метрическое пространство $C[0, 1]$ не может быть множеством первой категории.

Легко видеть, что из определения нормы пространства $C[0, 1]$ и бикомпактности отрезка $[0, 1/2]$ следует замкнутость множеств M_n в $C[0, 1]$. Далее для всякого полинома $z(t)$ и произвольного $\varepsilon > 0$ мы можем найти функцию $y(t) \in C[0, 1] - M_n$, для которой $\sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} |z(t) - y(t)| = \|z - y\| \leqslant \varepsilon$. Можно, например, выбрать в качестве $y(t)$ непрерывную функцию, график которой представляет собой ломаную линию. Следовательно, согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами, множества M_n неплотны в $C[0, 1]$.

Приведенная ниже *теорема о сгущении особенностей*, установленная Банахом [1] и Штейнгаузом, опирается на следующее утверждение.

Теорема (Банах). Рассмотрим некоторую последовательность ограниченных линейных операторов $\{T_n\}$, отображающих B-пространство X в нормированные линейные пространства Y_n. Тогда множество

$$B = \left\{ x \in X;\ \overline{\lim_{n \to \infty}} \|T_n x\| < \infty \right\}$$

либо совпадает с X, либо является в пространстве X множеством первой категории.

Доказательство. Покажем, что если B является множеством второй категории, то $B=X$. По определению множества B для всякого $x\in B$ справедливо соотношение $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{n\geqslant 1}\|k^{-1}T_nx\|=0$. Значит, для любого $\varepsilon>0$

$$B\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k,\quad\text{где}\quad B_k=\Big\{x\in X;\ \sup_{n\geqslant 1}\|k^{-1}T_nx\|\leqslant\varepsilon\Big\}.$$

Ввиду непрерывности операторов T_n каждое множество B_k замкнуто. Поэтому если B — множество второй категории, то одно из множеств B_k, скажем B_{k_0}, содержит некоторый шар положительного радиуса. Иными словами, существуют точка $x_0\in X$ и число $\delta>0$, такие, что $\sup\limits_{n\geqslant 1}\|k_0^{-1}T_nx\|\leqslant\varepsilon$ при $\|x-x_0\|\leqslant\delta$. Следовательно, полагая $x-x_0=y$, мы при условии $\|y\|\leqslant\delta$ получаем неравенство $\|k_0^{-1}T_ny\|\leqslant\|k_0^{-1}T_nx\|+\|k_0^{-1}T_nx_0\|\leqslant 2\varepsilon$. Таким образом,

$$\sup_{n\geqslant 1,\ \|z\|\leqslant k_0^{-1}\delta}\|T_nz\|\leqslant 2\varepsilon,$$

и поэтому $B=X$.

Следствие (теорема о сгущении особенностей). Пусть $\{T_{p,q}\}$ $(q=1,2,\ldots)$ — последовательность ограниченных линейных операторов, отображающих B-пространство X в нормированное линейное пространство Y_p $(p=1,2,\ldots)$. Допустим, что для каждого p существует такая точка $x_p\in X$, что $\varlimsup\limits_{q\to\infty}\|T_{p,q}x_p\|=\infty$. Тогда множество

$$B=\Big\{x\in X;\quad \varlimsup_{q\to\infty}\|T_{p,q}x\|=\infty\quad\text{для всех}\quad p=1,2,\ldots\Big\}$$

является множеством второй категории.

Доказательство. При каждом фиксированном p множество $B_p=\Big\{x\in X;\ \varlimsup\limits_{q\to\infty}\|T_{p,q}x\|<\infty\Big\}$ является множеством первой категории — это вытекает из сделанных предположений и предыдущей теоремы. Поэтому $B=X-\bigcup\limits_{p=1}^{\infty}B_p$ должно быть множеством второй категории.

На этом результате основывается общий метод построения функций с разного рода особенностями.

Пример. Существует вещественная непрерывная функция $x(t)$ периода 2π, такая, что *частичная сумма* ее *ряда Фурье*

$$f_q(x;\ t)=\sum_{k=0}^{q}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(s)K_q(s,\ t)\,ds,\qquad (1)$$

где $K_q(s, t) = \sin\left((q+2^{-1})(s-t)\right)/2\sin 2^{-1}(s-t)$, удовлетворяет условию

$$\overline{\lim_{q\to\infty}}\,|f_q(x;\ t)| = \infty \text{ на множестве } P \subseteq [0,\ 2\pi] \text{ мощности континуума.} \quad (2)$$

Более того, множество P можно выбрать так, чтобы оно содержало любую счетную последовательность $\{t_j\} \subseteq [0,\ 2\pi]$.

Доказательство. Множество всех вещественных непрерывных функций $x(t)$ периода 2π с нормой $\|x\| = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 2\pi} |x(t)|$ образует вещественное B-пространство, которое мы обозначим $C_{2\pi}$. Из (1) следует, что при всяком заданном значении $t_0 \in [0,\ 2\pi]$ функцию $f_q(x;\ t)$ можно рассматривать как ограниченный линейный функционал на $C_{2\pi}$. Кроме того, норма этого функционала $f_q(x;\ t_0)$ равна величине

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_q(s,\ t_0)|\, ds \text{ — полной вариации функции } \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{t} K_q(s,\ t_0)\, dt. \quad (3)$$

Нетрудно заметить, что выражение (3) стремится к ∞ при $q\to\infty$ для всякой фиксированной точки t_0.

Поэтому если мы возьмем произвольную счетную плотную последовательность $\{t_j\} \subseteq [0,\ 2\pi]$, то, согласно предыдущему следствию, множество

$$B = \left\{x \in C_{2\pi};\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\,|f_q(x;\ t)| = \infty \quad \text{для} \quad t = t_1,\ t_2,\ \ldots\right\}$$

будет множеством второй категории. Отсюда следует, что множество B непусто, так как пространство $C_{2\pi}$ полно. Покажем, что для любой функции $x \in B$ множество

$$P = \left\{t \in [0,\ 2\pi];\ \overline{\lim_{q\to\infty}}\,|f_q(x;\ t)| = \infty\right\}$$

имеет мощность континуума. С этой целью положим

$$F_{m,q} = \{t \in [0,\ 2\pi];\ |f_q(x;\ t)| \leqslant m\}, \qquad F_m = \bigcap_{q=1}^{\infty} F_{m,q}.$$

Так как функция $x(t)$ и тригонометрические функции непрерывны, множества $F_{m,q}$, а следовательно, и F_m замкнуты в отрезке $[0,\ 2\pi]$. Если мы сможем показать, что $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m$ — множество первой категории в отрезке $[0,\ 2\pi]$, то отсюда будет следовать, что $P = \left([0,\ 2\pi] - \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} F_m\right) \ni \{t_j\}$ является множеством второй категории. Действительно, в этом случае P не может быть счетным множеством, а поэтому, согласно известной *гипотезе континуума*, должно иметь мощность континуума.

Таким образом, для завершения доказательства мы должны убедиться в том, что каждое F_m является множеством первой категории в $[0, 2\pi]$. Допустим, что некоторое F_{m_0} представляет собой множество второй категории. Будучи замкнутым множеством в $[0, 2\pi]$, F_{m_0} должно содержать некоторый замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$ отрезка $[0, 2\pi]$. Но тогда $\sup\limits_{q \geqslant 1} |f_q(x; t)| \leqslant m_0$ для всех значений $t \in [\alpha, \beta]$, а это противоречит тому факту, что множество P содержит плотное подмножество $\{t_j\}$ отрезка $[0, 2\pi]$.

Замечание. Тот факт, что множество P имеет мощность континуума, можно доказать и не прибегая к гипотезе континуума; см., например, Хаусдорф [1].

5. Теорема об открытости отображения

Теорема (теорема Банаха об открытости отображения). Пусть T — непрерывный линейный оператор, отображающий F-пространство X на F-пространство Y. Тогда T отображает каждое открытое множество пространства X на открытое множество пространства Y.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующее

Предложение. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Рассмотрим непрерывный линейный оператор T, отображающий X в Y. Предположим, что область значений $R(T)$ оператора T является множеством второй категории в Y. Тогда каждой окрестности U нуля пространства X соответствует некоторая окрестность V нуля пространства Y, такая, что $V \subseteq (TU)^a$.

Доказательство. Пусть W — такая окрестность нуля пространства X, что $W = -W$ и $W + W \subseteq U$. Для любого $x \in X$ имеем $x/n \to 0$ при $n \to \infty$, поэтому $x \in nW$ для достаточно больших значений n. Следовательно, $X = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (nW)$ и $R(T) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} T(nW)$. Поскольку $R(T)$ — множество второй категории в Y, существует такое целое положительное n_0, что множество $(T(n_0 W))^a$ содержит некоторое непустое открытое множество. Так как $(T(nW))^a = n(T(W))^a$, а множества $n(T(W))^a$ и $(T(W))^a$ гомеоморфны, то множество $(T(W))^a$ тоже содержит некоторое непустое открытое множество. Пусть $y_0 = Tx_0$, где $x_0 \in W$ — точка этого открытого множества. Тогда, поскольку отображение $x \to -x_0 + x$ является гомеоморфизмом, существует такая окрестность V нуля пространства Y, что $V \subseteq -y_0 + (T(W))^a$. Элементы множества $-y_0 + T(W)$ представляются в виде $-y_0 + Tw = T(w - x_0)$, где $w \in W$. Но $w - x_0 \in W + W \subseteq U$, так как $W = -W$ и $W + W \subseteq U$.

Поэтому $-y_0 + T(W) \subseteq T(U)$, и, следовательно, переходя к замыканиям, мы получаем $-y_0 + (T(W))^a \subseteq (T(U))^a$, откуда $V \subseteq -y_0 + (T(W))^a \subseteq (T(U))^a = (TU)^a$.

Доказательство теоремы. Будучи полным метрическим пространством, Y представляет собой множество второй категории. Поэтому, согласно доказанному выше предложению, замыкание образа при отображении T всякой окрестности нуля пространства X содержит некоторую окрестность нуля пространства Y.

Обозначим через X_ε, Y_ε шары соответственно в пространствах X, Y с центром в начале координат и радиусами $\varepsilon > 0$. Положим $\varepsilon_i = \varepsilon/2^i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$. Тогда, как было показано выше, существует такая последовательность положительных чисел $\{\eta_i\}$, что

$$\lim_{i\to\infty} \eta_i = 0 \quad \text{и} \quad Y_{\eta_i} \subseteq \left(TX_{\varepsilon_i}\right)^a \quad (i = 0, 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Выберем произвольную точку $y \in Y_{\eta_0}$. Мы покажем, что существует такая точка $x \in X_{2\varepsilon_0}$, что $Tx = y$. Из условия (1) при $i = 0$ следует существование такой точки $x_0 \in X_{\varepsilon_0}$, что $\| y - Tx_0 \| < \eta_1$. Так как $(y - Tx_0) \in Y_{\eta_1}$, то снова из условия (1) при $i = 1$ мы заключаем, что существует точка $x_1 \in X_{\varepsilon_1}$, для которой $\| y - Tx_0 - Tx_1 \| < \eta_2$. Повторяя этот процесс, мы придем к такой последовательности $\{x_i\}$ элементов $x_i \in X_{\varepsilon_i}$, что

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right) \right\| < \eta_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Из неравенств $\left\| \sum_{k=m+1}^{n} x_k \right\| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \| x_k \| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \varepsilon_k \leqslant \left(\sum_{k=m+1}^{n} 2^{-k} \right) \varepsilon_0$ вытекает, что последовательность $\left\{ \sum_{k=0}^{n} x_k \right\}$ фундаментальна. Поэтому существует $s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} x_k = x \in X$, так как пространство X полно. Кроме того,

$$\| x \| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=0}^{n} x_k \right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \| x_k \| \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \right) \varepsilon_0 = 2\varepsilon_0.$$

Оператор T непрерывен, поэтому $y = Tx$. Тем самым мы показали, что всякий шар вида $X_{2\varepsilon_0}$ отображается оператором T на некоторое множество, содержащее шар Y_{η_0}.

Пусть теперь G — непустое открытое множество в X и $x \in G$. Пусть U — такая окрестность нуля пространства X, что $x + U \subseteq G$. Через V обозначим окрестность нуля пространства Y, удовлетворяющую условию $TU \supseteq V$. Тогда $TG \supseteq T(x + U) = Tx + TU \supseteq Tx + V$. Следовательно, множество TG содержит окрестность каждой своей точки. Это показывает, что оператор T отображает открытые множества пространства X на открытые множества пространства Y.

Следствие. Если непрерывный линейный оператор T взаимно однозначно отображает одно F-пространство на другое F-пространство, то обратный оператор T^{-1} тоже непрерывен.

6. Теорема о замкнутом графике

Определение 1. Пусть X и Y — линейные топологические пространства над одним и тем же скалярным полем. Тогда произведение $X \times Y$ с операциями

$$\{x_1, y_1\} + \{x_2, y_2\} = \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}, \qquad \alpha \{x, y\} = \{\alpha x, \alpha y\}$$

представляет собой линейное пространство. Если определить открытые множества в этом пространстве как множества вида

$$G_1 \times G_2 = \{ \{x, y\}; \, x \in G_1, \, y \in G_2\},$$

где G_1, G_2 — открытые множества соответственно в X, Y, то $X \times Y$ будет линейным топологическим пространством. Если, кроме того, X и Y — квазинормированные линейные пространства, то $X \times Y$ с квазинормой

$$\| \{x, y\} \| = (\| x \|^2 + \| y \|^2)^{1/2}, \tag{1}$$

является квазинормированным пространством.

Предложение 1. Если X и Y — два B-пространства (F-пространства), то $X \times Y$ также является B-пространством (F-пространством).

Доказательство. Утверждение вытекает из эквивалентности соотношения $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} \{x_n, y_n\} = \{x, y\}$ и равенств $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y$.

Определение 2. *Графиком* $G(T)$ линейного оператора T, действующего из $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, называется множество $\{ \{x, Tx\}, \, x \in D(T)\}$ пространства $X \times Y$. Пусть X, Y — линейные топологические пространства. Оператор T называется *замкнутым линейным оператором*, если его график $G(T)$ образует замкнутое линейное подпространство пространства $X \times Y$. Если X и Y — квазинормированные линейные пространства, то линейный оператор T, действующий из $D(T) \subseteq X$ в Y, замкнут тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\text{если } \{x_n\} \subseteq D(T), \quad s\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n = x \text{ и } s\text{-}\lim_{n \to \infty} Tx_n = y,$$
$$\text{то} \quad x \in D(T) \text{ и } Tx = y. \tag{2}$$

Таким образом, понятие замкнутого линейного оператора является обобщением понятия ограниченного линейного оператора. Говорят, что линейный оператор T, отображающий множество $D(T) \subseteq X$ в пространство Y, *допускает замкнутое расширение*, если замыкание графика $G(T)$ в $X \times Y$ представляет собой график некоторого линейного оператора, скажем S, отображающего некоторую область $D(S) \subseteq X$ в Y.

Предложение 2. Если X, Y — квазинормированные линейные пространства, то оператор T допускает замкнутое расширение тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие:

$$\text{если} \quad \{x_n\} \subseteq D(T), \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tx_n = y,$$
$$\text{то} \quad y = 0. \tag{3}$$

Доказательство. Необходимость условия (3) очевидна, так как если замыкание графика $G(T)$ в пространстве $X \times Y$ служит графиком $G(S)$ некоторого линейного оператора S, то $y = S \cdot 0 = 0$. Докажем его достаточность. Определим линейный оператор S следующим образом:

$x \in D(S)$ тогда и только тогда, когда существует такая последовательность $\{x_n\} \subseteq D(T)$, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и существует $s\text{-}\lim Tx_n = y$; положим $Sx = y$ (4)

и назовем его *наименьшим замкнутым расширением оператора* T. Из условия (3) следует, что y однозначно определяется по x. Остается лишь доказать, что оператор S замкнут. Пусть $w_n \in D(S)$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} w_n = w$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sw_n = u$. Тогда существует последовательность $\{x_n\} \subseteq D(T)$, такая, что $\|w_n - x_n\| \leqslant n^{-1}$, $\|Sw_n - Tx_n\| \leqslant n^{-1}$ ($n=1, 2, \ldots$). Отсюда $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} w_n$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Sw_n = u$, и поэтому $w \in D(S)$, $Sw = u$.

Пример замкнутого оператора, не являющегося непрерывным. Положим $X = Y = C[0, 1]$. Обозначим через D множество всех функций $x(t) \in X$, для которых $x'(t) \in X$. Определим оператор T на $D(T) = D$ равенством $Tx = x'$. Оператор T не является непрерывным, потому что, например, для функций $x_n(t) = t^n$

$$\|x_n\| = 1, \quad \|Tx_n\| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |x_n'(t)| = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |nt^{n-1}| = n \quad (n=1, 2, \ldots).$$

Однако этот оператор замкнут. В самом деле, пусть $\{x_n\} \subseteq D(T)$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$. Тогда $x_n'(t)$ равномерно сходится к $y(t)$, а $x_n(t)$ равномерно сходится к $x(t)$ при $n \to \infty$. Следовательно, функция $x(t)$ имеет непрерывную производную $y(t)$. Отсюда вытекает, что $x \in D(T)$ и $Tx = y$.

Примеры операторов, допускающих замкнутые расширения. Обозначим через D_x линейный дифференциальный оператор

$$D_x = \sum_{|j| \leqslant k} c_j(x) D^j \tag{5}$$

с коэффициентами $c_j(x) \in C^k(\Omega)$, где Ω — открытое множество пространства R^n. Рассмотрим множество D всех функций $f(x) \in L^2(\Omega) \cap C^k(\Omega)$, для которых $D_x f(x) \in L^2(\Omega)$. Определим линейный оператор T, отображающий область $D(T) = D \subseteq L^2(\Omega)$ в пространство $L^2(\Omega)$, формулой $(Tf)(x) = D_x f(x)$. Этот оператор T допускает замкнутое расширение. Действительно, пусть $\{f_h\} \subseteq D$ такая последовательность, что $s\text{-}\lim\limits_{h \to \infty} f_h = 0$, $s\text{-}\lim\limits_{h \to \infty} D_x f_h = g$. Для любой функции $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega)$ с помощью интегрирования по частям можно вывести равенство

$$\int_\Omega D_x f(x) \varphi(x)\, dx = \int_\Omega f(x) \cdot D'_x \varphi(x)\, dx, \tag{6}$$

где D'_x — дифференциальный оператор, *формально сопряженный* к D_x:

$$D'_x \varphi(x) = \sum_{|j| \leqslant k} (-1)^{|j|} D^j (c_j(x) \varphi(x)). \tag{7}$$

Формула (6) следует из того, что проинтегрированный член, возникающий при интегрировании по частям, обращается в нуль, так как $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega)$. Поэтому в силу непрерывности скалярного произведения в пространстве $L^2(\Omega)$ мы, полагая в формуле (6) $f = f_h$ и переходя к пределу при $h \to \infty$, получаем равенство

$$\int_\Omega g(x) \varphi(x)\, dx = \int_\Omega 0 \cdot D'_x \varphi(x)\, dx = 0. \tag{8}$$

Так как функция $\varphi(x) \in C_0^k(\Omega)$ выбиралась произвольно, то $g(x) = 0$ почти всюду, т. е. $g = 0$ как элемент пространства $L^2(\Omega)$.

Предложение 3. Обратный оператор T^{-1} замкнутого линейного оператора из $D(T) \subseteq X$ в Y, если он существует, является замкнутым линейным оператором.

Доказательство. Графиком оператора T^{-1} служит множество $\{\{Tx, x\};\ x \in D(T)\}$, принадлежащее пространству $Y \times X$. Поэтому утверждение следует из того, что отображение $\{x, y\} \to \{y, x\}$ пространства $X \times Y$ на $Y \times X$ является гомеоморфизмом.

Теперь мы докажем *теорему Банаха о замкнутом графике*.

Теорема 1. Всякий замкнутый линейный оператор T, отображающий F-пространство X в F-пространство Y, непрерывен.

Доказательство. График $G(T)$ оператора T представляет собой замкнутое линейное подпространство F-пространства $X \times Y$. Так как пространство $X \times Y$ полно, множество $G(T)$ является F-пространством. Соотношение $U\{x, Tx\} = x$ определяет взаимно однозначное непрерывное линейное отображение U F-пространства $G(T)$ на F-пространство X. Следовательно, по теореме об открытости отображения обратное к U отображение U^{-1} непрерывно. Равенство $V\{x, Tx\} = Tx$ определяет в свою очередь линейное непрерывное отображение V пространства $G(T)$ на множество $R(T) \subseteq Y$. Итак, оператор $T = VU^{-1}$, отображающий пространство X в Y, непрерывен.

Следующая теорема о сравнении двух линейных операторов принадлежит Хёрмандеру.

Теорема 2. Рассмотрим B-пространства X_i $(i = 0, 1, 2; X_0 = X)$ и линейные операторы T_i $(i = 1, 2)$, отображающие области $D(T_i) \subseteq X$ в пространства X_i. Тогда если оператор T_1 замкнут, а оператор T_2 допускает замкнутое расширение, причем $D(T_1) \subseteq D(T_2)$, то существует такая постоянная C, что

$$\| T_2 x \| \leqslant C (\| T_1 x \|^2 + \| x \|^2)^{1/2} \quad \text{для всех } x \in D(T_1). \tag{9}$$

Доказательство. График $G(T_1)$ оператора T_1 представляет собой замкнутое подпространство пространства $X \times X_1$. Следовательно, отображение

$$G(T_1) \ni \{x, T_1 x\} \to T_2 x \in X_2 \tag{10}$$

определяет линейный оператор, отображающий B-пространство $G(T_1)$ в B-пространство X_2. Докажем, что этот оператор замкнут. Допустим, что последовательность $\{x_n, T_1 x_n\}$ сильно сходится в $G(T_1)$, а последовательность $T_2 x_n$ сильно сходится в X_2. Поскольку оператор T_1 замкнут, существует такой элемент $x \in D(T_1)$, что $x = s\text{-}\lim_{n \to \infty} x_n$ и $T_1 x = s\text{-}\lim_{n \to \infty} T_1 x_n$. По предположению $x \in D(T_2)$, а так как оператор T_2 допускает замкнутое расширение, то предел $s\text{-}\lim_{n \to \infty} T_2 x_n$ существует и непременно равен $T_2 x$. Значит, отображение (10) замкнуто, а следовательно, по теореме о замкнутом графике оно должно быть непрерывным. Это и доказывает справедливость неравенства (9).

7. Об одном приложении теоремы о замкнутом графике (теорема Хёрмандера)

Всякое обобщенное решение[1] $u \in L^2$ уравнения Лапласа

$$\Delta u = f \in L^2$$

[1]) Обобщенные решения ввел С. Л. Соболев (см., например, [2]). — *Прим. перев.*

представляет собой функцию класса C^∞ после поправки на некотором множестве меры нуль из области, где $f \in C^\infty$. Этот результат известен под названием *леммы Вейля*; он играет важную роль в современной теории потенциала, см. Вейль Г. [1]. Обобщениям леммы Вейля посвящена обширная литература. Исследования Хёрмандера [1] представляются в этой области наиболее многообещающими. Мы начнем изложение с принадлежащего Хёрмандеру определения гипоэллиптического оператора.

Определение 1. Пусть Ω — открытая область пространства R^n. Говорят, что функция $u(x)\,(x \in \Omega)$ принадлежит классу $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, если для любого открытого подмножества $\Omega' \subseteq \Omega$, замыкание которого бикомпактно в Ω, выполняется условие $\int\limits_{\Omega'} |u(x)|^2\,dx < \infty$. Линейный дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами вида

$$P(D) = P\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_2},\ \ldots,\ \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_n}\right), \tag{1}$$

где $P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ — многочлен от $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, называется *гипоэллиптическим*, если всякое обобщенное решение $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ уравнения $P(D)u = f$ является функцией класса C^∞ после поправки на множестве меры нуль, принадлежащем области, где $f \in C^\infty$.

Теорема (Хёрмандер). Если оператор $P(D)$ гипоэллиптичен, то для сколь угодно большой положительной постоянной C_1 существует такая положительная постоянная C_2, что любое решение $\zeta = \xi + i\eta$ алгебраического уравнения $P(\zeta) = 0$ удовлетворяет следующему условию:

$$\text{если}\quad |\eta| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\eta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C_2, \quad\text{то}\quad |\zeta| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\zeta_j|^2\right)^{1/2} \leqslant C_1. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть U — совокупность всех обобщенных решений [1]) $u \in L^2(\Omega')$ уравнения $P(D)u = 0$, т. е. множество таких функций $u \in L^2(\Omega')$, что

$$\int\limits_{\Omega'} uP'(D)\varphi\,dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(\Omega'), \tag{3}$$

---

[1]) Из условия (3) и правил дифференцирования обобщенных функций следует, что обобщенное решение $u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega')$ уравнения $P(D)u = 0$ определяется равенством $(P(D)T_u)\varphi = 0$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\Omega')$. — *Прим. перев.*

где *сопряженный к $P(D)$ дифференциальный оператор $P'(D)$* определяется многочленом

$$P'(\xi) = P(-\xi_1, -\xi_2, \ldots, -\xi_n). \tag{4}$$

Можно показать, что U — замкнутое линейное подпространство пространства $L^2(\Omega')$. Действительно, линейность U следует из линейности оператора $P(D)$. Возьмем теперь последовательность $\{u_h\} \subseteq U$, такую, что $s\text{-}\lim_{h\to\infty} u_h = u$ в $L^2(\Omega')$. Тогда вследствие непрерывности скалярного произведения в $L^2(\Omega')$

$$0 = \lim_{h\to\infty} \int_{\Omega'} u_h P'(D)\varphi\,dx = \int_{\Omega'} uP'(D)\varphi\,dx, \quad \text{т. е. } u \in U.$$

Таким образом, U — действительно замкнутое линейное подпространство пространства $L^2(\Omega')$ и поэтому является B-пространством.

Так как оператор $P(D)$ — гипоэллиптический, мы можем считать, что всякая функция $u \in U$ в области Ω' принадлежит классу C^∞. Пусть Ω_1' — любая открытая подобласть с бикомпактным замыканием в Ω'. Тогда для любой функции $u \in U$ функция $\partial u/\partial x_k$ принадлежит C^∞ в Ω_1' $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Согласно результатам предыдущего параграфа, отображение

$$U \ni u \to \frac{\partial u}{\partial x_k} \in L^2(\Omega_1') \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

определяет замкнутый линейный оператор. Следовательно, по теореме о замкнутом графике существует такая положительная постоянная C, что

$$\int_{\Omega_1'} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right|^2 dx \leqslant C \int_{\Omega'} |u|^2\,dx \qquad \text{для всех } u \in U.$$

Если применить это неравенство к функции $u(x) = e^{i\langle x,\,\zeta\rangle}$, где $\zeta = \xi + i\eta = (\xi_1 + i\eta_1, \xi_2 + i\eta_2, \ldots, \xi_n + i\eta_n)$ — некоторое решение уравнения $P(\zeta) = 0$ и $\langle x, \zeta\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j\zeta_j$, то получится соотношение

$$\sum_{k=1}^{n} |\zeta_k|^2 \int_{\Omega_1'} e^{-2\langle x,\,\eta\rangle}\,dx \leqslant C \int_{\Omega'} e^{-2\langle x,\,\eta\rangle}\,dx.$$

Отсюда следует, что величина $|\zeta|$ ограничена, если ограничена $|\eta|$,

Замечание. Позже мы докажем, что из условия (2) следует гипоэллиптичность оператора $P(D)$. Этот результат также принадлежит Хёрмандеру. Отсюда, в частности, видно, что лемма Вейля является непосредственным следствием результатов Хёрмандера. Действительно, корни алгебраического уравнения $-\sum_{j=1}^{n} \zeta_j^2 = 0$ удовлетворяют условию (2).

Литература к главе II

Банах [1], Бурбаки [2], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1], Хёрмандер [6].

ГЛАВА III

Ортогональная проекция и теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала

1. Ортогональная проекция

В предгильбертовом пространстве можно ввести понятие *ортогональности* двух векторов. Это позволяет отождествить гильбертово пространство с его *сопряженным*, т. е. с пространством заданных на нем ограниченных линейных функционалов. Этот результат составляет содержание теоремы Ф. Рисса [1] о представлении, на которую по существу опирается вся теория гильбертовых пространств.

Определение 1. Рассмотрим произвольные векторы x, y предгильбертова пространства X. Если $(x, y) = 0$, то мы будем говорить, что вектор x *ортогонален* вектору y, и писать $x \perp y$. Если $x \perp y$, то и $y \perp x$; кроме того, $x \perp x$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Пусть M — некоторое подмножество предгильбертова пространства X. Через $M^{\perp}$ мы обозначим совокупность всех векторов пространства X, ортогональных каждому вектору $m \in M$.

Теорема 1. Пусть M—замкнутое линейное подпространство гильбертова пространства X. Тогда $M^{\perp}$ также образует замкнутое линейное подпространство пространства X и называется в этом случае *ортогональным дополнением* подпространства M. Всякий вектор $x \in X$ может быть единственным образом представлен в виде

$$x = m + n, \quad \text{где} \quad m \in M \text{ и } n \in M^{\perp}. \tag{1}$$

Элемент m в формуле (1) называется *ортогональной проекцией* вектора x на подпространство M; мы будем обозначать этот элемент через $P_M x$. Оператор P_M мы будем называть оператором проектирования, или *проектором*, на подпространство M. При этом, так как $M \subseteq (M^{\perp})^{\perp}$, справедливо соотношение

$$x = P_M x + P_{M^{\perp}} x, \quad \text{т. е. } I = P_M + P_{M^{\perp}}. \tag{1'}$$

Доказательство. Множество $M^{\perp}$ представляет собой линейное подпространство, поскольку скалярное произведение (x, y) является линейной функцией x. Множество $M^{\perp}$ замкнуто, потому что скалярное произведение непрерывно. Единственность разложения (1) следует из того, что единственный вектор, ортогональный самому себе,— это нулевой вектор.

При доказательстве существования разложения (1) мы можем считать, что $M \neq X$ и $x \notin M$, ибо если $x \in M$, то всегда существует тривиальное разложение с $m = x$ и $n = 0$. Итак, поскольку M замкнуто и $x \notin M$, мы имеем

$$d \equiv \inf_{m \in M} \|x - m\| > 0.$$

Пусть $\{m_n\} \subseteq M$ — *минимизирующая последовательность*, т. е. $\lim_{n\to\infty} \|x - m_n\| = d$. Эта последовательность фундаментальная. В самом деле, используя равенство $\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$, справедливое для элементов всякого предгильбертова пространства (см. формулу (1) § 5 гл. I), мы получаем

$$\begin{aligned}\|m_k - m_n\|^2 &= \|(x-m_n) - (x-m_k)\|^2 = \\ &= 2(\|x-m_n\|^2 + \|x-m_k\|^2) - \|2x - m_n - m_k\|^2 = \\ &= 2(\|x-m_n\|^2 + \|x-m_k\|^2) - 4\|x - (m_n+m_k)/2\|^2 \leqslant \\ &\leqslant 2(\|x-m_n\|^2 + \|x-m_k\|^2 - 4d^2) \to \\ &\qquad (\text{так как } (m_n+m_k)/2 \in M) \\ &\to 2(d^2+d^2) - 4d^2 = 0 \quad \text{при } k,\ n\to\infty.\end{aligned}$$

Так как гильбертово пространство X полно, существует такой элемент $m \in X$, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} m_n = m$. При этом $m \in M$, поскольку M замкнуто. Кроме того, в силу непрерывности нормы $\|x - m\| = d$.

Запишем теперь x в виде $x = m + (x - m)$. Если мы положим $n = x - m$, то остается лишь показать, что $n \in M^{\perp}$. Для всякого элемента $m' \in M$ и любого вещественного числа α мы имеем $(m + \alpha m') \in M$, и поэтому

$$\begin{aligned}d^2 \leqslant \|x - m - \alpha m'\|^2 &= (n - \alpha m',\ n - \alpha m') = \\ &= \|n\|^2 - \alpha(n,\ m') - \alpha(m',\ n) - \alpha^2\|m'\|^2.\end{aligned}$$

Отсюда, так как $\|n\| = d$, мы получаем $0 \leqslant -2\alpha \operatorname{Re}(n,\ m') + \alpha^2\|m'\|^2$ для всех вещественных α. Следовательно, $\operatorname{Re}(n,\ m') = 0$ для всякого элемента $m' \in M$. Заменяя m' на im', мы получаем, что $\operatorname{Im}(n,\ m') = 0$, и, таким образом, $(n,\ m') = 0$ для любого вектора $m' \in M$.

Следствие. Для любого замкнутого линейного подпространства M гильбертова пространства X справедлива формула $M = M^{\perp\perp} \equiv (M^{\perp})^{\perp}$.

Теорема 2. Проектор $P = P_M$ является ограниченным линейным оператором, причем

$$P = P^2 \qquad (\textit{идемпотентность оператора } P), \tag{2}$$

$$(Px,\ y) = (x,\ Py) \text{ для любых } x,\ y \in X \qquad (\textit{симметричность оператора } P). \tag{3}$$

Обратно, ограниченный линейный оператор P, отображающий гильбертово пространство X в X и удовлетворяющий условиям (2) и (3), является проектором на подпространство $M = R(P)$.

Доказательство. Свойство (2) следует из определения ортогональной проекции. При помощи представления (1′), учитывая, что $P_M x \perp P_{M^\perp} y$, мы выводим равенство

$$(P_M x, y) = (P_M x, P_{M^\perp} y + P_M y) = (P_M x, P_M y) = \\ = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M y) = (x, P_M y).$$

Далее пусть $y = x + z$, $x \in M$, $z \in M^\perp$ и $w = u + v$, $u \in M$, $v \in M^\perp$; тогда $y + w = (x+u) + (z+v)$, где $(x+u) \in M$, $(z+v) \in M^\perp$, и поэтому в силу единственности разложения (1) $P_M(y + w) = P_M y + P_M w$. Аналогично устанавливается, что $P_M(\alpha y) = \alpha P_M y$. Таким образом, P_M — линейный оператор. Ограниченность оператора P_M следует из неравенства

$$\|x\|^2 = \|P_M x + P_{M^\perp} x\|^2 = (P_M x + P_{M^\perp} x, P_M x + P_{M^\perp} x) = \\ = \|P_M x\|^2 + \|P_{M^\perp} x\|^2 \geqslant \|P_M x\|^2.$$

Отсюда, в частности, видно, что

$$\|P_M\| \leqslant 1. \tag{4}$$

Обратное утверждение теоремы доказывается следующим образом. Так как P — линейный оператор, множество $M = R(P)$ представляет собой линейное подпространство: Условие $x \in M$ эквивалентно существованию такого элемента $y \in X$, что $x = Py$, а это в свою очередь, согласно (2), эквивалентно соотношению $x = Py = P^2 y = Px$. Значит, условие $x \in M$ эквивалентно равенству $x = Px$. Подпространство M замкнуто; в самом деле, если $x_n \in M$ и $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, то вследствие непрерывности P и условия $x_n = Px_n$ имеем $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Px_n = Py$, т. е. $y = Py$.

Остается показать, что $P = P_M$. Если $x \in M$, то $Px = x = P_M x$, а если $y \in M^\perp$, то $P_M y = 0$. В последнем случае, кроме того, $(Py, Py) = (y, P^2 y) = (y, Py) = 0$, и поэтому $Py = 0$. Следовательно, для любого элемента $y \in X$ мы имеем

$$Py = P(P_M y + P_{M^\perp} y) = PP_M y + PP_{M^\perp} y = \\ = P_M y + 0, \quad \text{т. е. } Py = P_M y.$$

Операторы проектирования характеризуются также следующей теоремой.

Теорема 3. Для того чтобы ограниченный линейный оператор P, отображающий гильбертово пространство X в себя, был проектором, необходимо и достаточно, чтобы P удовлетворял условиям $P=P^2$ и $\|P\|\leqslant 1$.

Доказательство. Мы должны доказать лишь достаточность этих условий. Положим $M=R(P)$ и $N=N(P)=\{y;\ Py=0\}$. Рассуждения, использованные при доказательстве предыдущей теоремы 2, позволяют установить, что множество M замкнуто и что условие $x\in M$ эквивалентно равенству $x=Px$. Множество N вследствие непрерывности оператора P тоже образует замкнутое линейное подпространство. В разложении $x=Px+(I-P)x$ мы имеем $Px\in M$ и $(I-P)x\in N$; последнее очевидным образом следует из тождества $P(I-P)=P-P^2=0$.

Теперь мы должны показать, что $N=M^{\perp}$. В силу равенства $P=P^2$ для всякого $x\in X$ мы имеем $y=Px-x\in N$. Поэтому, в частности, если $x\in N^{\perp}$, то $Px=x+y$, где $(x, y)=0$. Но тогда $\|x\|^2\geqslant\|Px\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$, откуда $y=0$. Итак, мы доказали, что для $x\in N^{\perp}$ справедливо равенство $x=Px$, т. е. $N^{\perp}\subseteq M=R(P)$. Обратно, пусть $z\in M=R(P)$, так что $z=Pz$. Тогда имеет место ортогональное разложение $z=y+x$, $y\in N$, $x\in N^{\perp}$, и поэтому $z=Pz=Py+Px=Px=x$, где последнее равенство доказано выше. Отсюда следует, что $M=R(P)\subseteq N^{\perp}$. Таким образом, $M=N^{\perp}$ и $N=M^{\perp}$, поскольку $N=(N^{\perp})^{\perp}$.

2. „Почти ортогональные" элементы

В произвольном нормированном линейном пространстве, вообще говоря, нельзя ввести понятие ортогональности; можно, однако, доказать следующее утверждение.

Теорема (Ф. Рисс [2]). Пусть X — некоторое нормированное линейное пространство, а M — его произвольное замкнутое линейное подпространство. Допустим, что $M\neq X$. Тогда для любого $\varepsilon>0$, удовлетворяющего неравенству $0<\varepsilon<1$, существует такой элемент $x_\varepsilon\in X$, что

$$\|x_\varepsilon\|=1 \text{ и } \operatorname{dis}(x_\varepsilon, M)\equiv\inf_{m\in M}\|x_\varepsilon-m\|\geqslant 1-\varepsilon. \tag{1}$$

Такие элементы x_ε мы называем „почти ортогональными" подпространству M.

Доказательство. Пусть $y\in X-M$. Тогда $\operatorname{dis}(y, M)=$ $=\inf\limits_{m\in M}\|y-m\|=\alpha>0$, так как M — замкнутое множество. Поэтому существует такой элемент $m_\varepsilon\in M$, что $\|y-m_\varepsilon\|\leqslant\alpha\left(1+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)$.

Вектор $x_\varepsilon = (y - m_\varepsilon)/\|y - m_\varepsilon\|$ удовлетворяет условию $\|x_\varepsilon\| = 1$ и

$$\|x_\varepsilon - m\| = \|y - m_\varepsilon\|^{-1} \cdot \|y - m_\varepsilon - \|y - m_\varepsilon\| \cdot m\| \geqslant$$
$$\geqslant \|y - m_\varepsilon\|^{-1} \alpha \geqslant \left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)^{-1} = (1 - \varepsilon).$$

Следствие 1. Допустим, что в нормированном линейном пространстве X имеется последовательность замкнутых линейных подпространств M_n, удовлетворяющая условиям $M_n \subseteq M_{n+1}$ и $M_n \neq M_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда существует такая последовательность $\{y_n\}$, что

$$y_n \in M_n, \quad \|y_n\| = 1 \text{ и } \operatorname{dis}(y_{n+1}, M_n) \geqslant \frac{1}{2} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

Следствие 2. Единичный шар $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$ B-пространства X бикомпактен тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно.

Доказательство. Достаточность этого условия следует из теоремы Больцано — Вейерштрасса, согласно которой всякое ограниченное замкнутое множество в R^n бикомпактно. Необходимость доказывается следующим образом. Предположим, что шар S бикомпактен в бесконечномерном B-пространстве X. Тогда, используя предыдущее следствие, можно построить последовательность $\{y_n\}$, удовлетворяющую условиям $\|y_n\| = 1$ и $\|y_m - y_n\| \geqslant 1/2$ при $m > n$, а это, очевидно, противоречит предположению о бикомпактности шара S.

3. Теорема Асколи—Арцела

Следующая теорема позволяет привести пример относительно бикомпактного бесконечного подмножества бесконечномерного B-пространства.

Теорема (Асколи — Арцела). Пусть S — произвольное бикомпактное метрическое пространство, и пусть $C(S)$ обозначает B-пространство всех вещественных (или комплексных) непрерывных функций $x(s)$ на S с нормой $\|x\| = \sup_{s \in S} |x(s)|$. Тогда последовательность $\{x_n(s)\} \subseteq C(S)$ относительно бикомпактна в $C(S)$, если она удовлетворяет следующим условиям:

функции $x_n(s)$ *равномерно ограничены* (по n), т. е.

$$\sup_{n \geqslant 1} \sup_{s \in S} |x_n(s)| < \infty; \tag{1}$$

функции $x_n(s)$ *равностепенно непрерывны* (по n), т. е.

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{n \geqslant 1,\ \operatorname{dis}(s', s'') \leqslant \delta} |x_n(s') - x_n(s'')| = 0. \tag{2}$$

Доказательство. По теореме Больцано — Вейерштрасса всякая ограниченная последовательность комплексных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность. Следовательно, при любом фиксированном s из последовательности $\{x_n(s)\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. С другой стороны, поскольку метрическое пространство S бикомпактно, существует счетное плотное подмножество $\{s_n\} \subseteq S$, такое, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется конечное подмножество $\{s_{n_j};\ 1 \leqslant n_j \leqslant k(\varepsilon)\}$ множества $\{s_n\}$, удовлетворяющее условию

$$\sup_{s \in S} \inf_{1 \leqslant n_j \leqslant k(\varepsilon)} \operatorname{dis}(s, s_{n_j}) \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Этот факт доказывается следующим образом. Так как множество S бикомпактно, оно вполне ограничено (см. § 2 введения). Поэтому для любого $\delta > 0$ существует конечная система точек из S, такая, что всякая точка множества S удалена на расстояние $\leqslant \delta$ от некоторой точки этой системы. Придавая δ значения $1, 2^{-1}, 3^{-1}, \ldots$ и объединяя соответствующие конечные системы, мы получаем последовательность $\{s_n\}$, обладающую требуемым свойством.

При помощи диагонального процесса можно выбрать из $\{x_n(s)\}$ подпоследовательность $\{x_{n'}(s)\}$, сходящуюся одновременно во всех точках $s_1, s_2, \ldots, s_k, \ldots$. Так как функции $x_n(s)$ равностепенно непрерывны, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при $\operatorname{dis}(s', s'') \leqslant \delta$ для всех значений $n = 1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $|x_n(s') - x_n(s'')| \leqslant \varepsilon$. Поэтому для любой точки $s \in S$ найдется номер j, $j \leqslant k(\delta)$, такой, что

$$|x_{n'}(s) - x_{m'}(s)| \leqslant |x_{n'}(s) - x_{n'}(s_{n_j})| + |x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})| +$$
$$+ |x_{m'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})| \leqslant 2\varepsilon + |x_{n'}(s_{n_j}) - x_{m'}(s_{n_j})|.$$

Следовательно, $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \max\limits_{s} |x_{n'}(s) - x_{m'}(s)| \leqslant 2\varepsilon$, т. е. $\lim\limits_{n', m' \to \infty} \|x_{n'} - x_{m'}\| = 0$; отсюда нетрудно вывести утверждение теоремы.

4. *Ортогональный базис. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля*

Определение 1. Множество S векторов предгильбертова пространства X называется *ортогональным семейством* (*системой*), если $x \perp y$ для любой пары различных векторов x, y, принадлежащих S. Если, кроме того, $\|x\| = 1$ для всех $x \in S$, то S называется *ортонормированным* (*ортонормальным*) *семейством* (системой). Ортонормированное семейство S гильбертова пространства X называется *полной ортонормированной системой*, или *ортонормированным базисом*, пространства X, если S не является собственным подмножеством никакой другой ортонормированной системы пространства X.

Теорема 1. Во всяком гильбертовом пространстве X, содержащем хотя бы один ненулевой вектор, имеется по крайней мере одна полная ортонормированная система. Кроме того, для любой ортонормированной системы S пространства X существует полная ортонормированная система, содержащая S как подмножество.

Доказательство (опирающееся на лемму Цорна). Пусть S — некоторая ортонормированная система в X. Такие системы в X обязательно существуют: например, если $x \neq 0$, то можно рассматривать в качестве такой системы вектор $x/\|x\|$. Рассмотрим совокупность $\{S\}$ всех ортонормированных систем, содержащих S как подмножество; множество $\{S\}$ станет частично упорядоченным, если положить $S_1 \prec S_2$, когда $S_1 \subseteq S_2$. Пусть $\{S'\}$ — некоторая линейно упорядоченная подсистема системы $\{S\}$; множество $\bigcup\limits_{S' \in \{S'\}} S'$ является ортонормированной системой и служит мажорантой системы $\{S'\}$. Тогда по лемме Цорна существует максимальный элемент S_0 системы $\{S\}$. Ортонормированная система S_0 содержит S и в силу свойства максимальности должна быть полной ортонормированной системой.

Теорема 2. Пусть $S = \{x_\alpha;\ \alpha \in A\}$ — некоторая полная ортонормированная система гильбертова пространства X. Для любого элемента $f \in X$ определим его *коэффициенты Фурье* (по отношению к системе S) формулой

$$f_\alpha = (f,\ x_\alpha). \tag{1}$$

Тогда справедливо *равенство Парсеваля*

$$\|f\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала мы докажем *неравенство Бесселя*

$$\sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2 \leqslant \|f\|^2. \tag{2'}$$

Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — любая конечная система индексов α. Для всякой конечной системы комплексных чисел $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_n}$ ввиду ортонормированности системы $\{x_\alpha\}$ имеет место равенство

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 &= \left(f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j},\ f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right) = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} \bar{f}_{\alpha_j} - \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_{\alpha_j} f_{\alpha_j} + \sum_{j=1}^{n} |c_{\alpha_j}|^2 = \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j}|^2 + \sum_{j=1}^{n} |f_{\alpha_j} - c_{\alpha_j}|^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Поэтому минимум выражения $\left\| f - \sum_{j=1}^{n} c_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2$ при фиксированных значениях $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ достигается, когда $c_{\alpha_j} = f_{\alpha_j}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом,

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \| f \|^2 - \sum_{j=1}^{n} | f_{\alpha_j} |^2$$

$$\text{и, следовательно,} \quad \sum_{j=1}^{n} | f_{\alpha_j} |^2 \leqslant \| f \|^2. \tag{4}$$

Поскольку индексы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ были выбраны произвольно, мы заключаем, что $f_\alpha \neq 0$ не более чем для счетного множества элементов α, скажем для $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, так что неравенство Бесселя (2′) действительно выполняется. Покажем теперь, что $f = s\text{-}\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$. Прежде всего последовательность $\left\{ \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\}$ фундаментальна, так как в силу ортонормированности системы $\{x_\alpha\}$

$$\left\| \sum_{j=k}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 = \left(\sum_{j=k}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, \sum_{j=k}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right) = \sum_{j=k}^{n} | f_{\alpha_j} |^2,$$

а последнее выражение, как следует из неравенства (4), стремится к нулю при $k \to \infty$. Положим $f' = s\text{-}\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}$ и покажем, что вектор $(f - f')$ ортогонален к каждому вектору системы S. В силу непрерывности скалярного произведения

$$(f - f', x_{\alpha_j}) = \lim_{n \to \infty} \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha_k} x_{\alpha_k}, x_{\alpha_j} \right) = f_{\alpha_j} - f_{\alpha_j} = 0,$$

и если $\alpha \neq \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$, то

$$(f - f', x_\alpha) = \lim_{n \to \infty} \left(f - \sum_{k=1}^{n} f_{\alpha_k} x_{\alpha_k}, x_\alpha \right) = 0 - 0 = 0.$$

Таким образом, вследствие полноты ортонормированной системы $S = \{x_\alpha\}$ непременно $(f - f') = 0$. Отсюда, учитывая непрерывность нормы и неравенство (4), мы получаем

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left\| f - \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} \right\|^2 =$$

$$= \| f \|^2 - \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} \| f_{\alpha_j} \|^2 = \| f \|^2 - \sum_{\alpha \in A} | f_\alpha |^2,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. Справедлива формула

$$f = \sum_{j=1}^{\infty} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j} = s\text{-}\lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} f_{\alpha_j} x_{\alpha_j}, \tag{5}$$

которая называется *разложением Фурье* элемента $f \in X$.

Следствие 2. Обозначим через $l^2(A)$ пространство $L^2(A, \mathfrak{B}, m)$, в котором $m(\{\alpha\}) = 1$ для каждой точки α множества A. Тогда гильбертово пространство X *изометрически изоморфно* гильбертову пространству $l^2(A)$, а именно соответствие

$$X \ni f \longleftrightarrow \{f_\alpha\} \in l^2(A) \tag{6}$$

взаимно однозначно и удовлетворяет условиям

$$(f + g) \longleftrightarrow \{f_\alpha + g_\alpha\}, \ \beta f \longleftrightarrow \{\beta f_\alpha\} \ \text{и} \ \|f\|^2 = \|\{f_\alpha\}\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |f_\alpha|^2. \tag{7}$$

Пример. Множество функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int};\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\right\}$ образует полную ортонормированную систему в гильбертовом пространстве $L^2(0, 2\pi)$.

Доказательство. Требуется доказать лишь полноту этой системы. Из (3) следует, что

$$\left\| f - \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} c_j e^{ijt} \right\|^2 \geqslant \left\| f - \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{2\pi} f_j e^{ijt} \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=-n}^{n} |f_j|^2,$$

где $f_j = (f, e^{ijt})$.

Если функция $f \in L^2(0, 2\pi)$ непрерывна и периодична с периодом 2π, то левая часть этого неравенства может быть сделана сколь угодно малой согласно теореме Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций тригонометрическими полиномами (см. § 2 введения). Таким образом, множество всех конечных линейных комбинаций вида $\sum_j c_j e^{ijt}$ плотно по норме в подпространстве пространства $L^2(0, 2\pi)$, состоящем из всех непрерывных функций периода 2π. Последнее же подпространство плотно по норме в пространстве $L^2(0, 2\pi)$. Следовательно, всякая функция $f \in L^2(0, 2\pi)$, ортогональная ко всем функциям системы $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}\right\}$, должна совпадать с нулевым вектором пространства $L^2(0, 2\pi)$. Тем самым доказано, что функции $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}$ образуют полную ортонормированную систему в $L^2(0, 2\pi)$.

5. Ортогонализация (по Шмидту)

Теорема (теорема Шмидта об ортогонализации). Пусть задана конечная или счетная последовательность $\{x_j\}$ линейно независимых векторов предгильбертова пространства X. Тогда можно построить ортонормированную систему той же мощности, что и $\{x_j\}$, порождающую[1]) то же линейное подпространство, что и $\{x_j\}$.

Доказательство. Ясно, что $x_1 \neq 0$. Определим векторы $y_1, y_2, \ldots$ и $u_1, u_2, \ldots$ следующими рекуррентными соотношениями:

$$
\begin{array}{ll}
y_1 = x_1, & u_1 = y_1/\|y_1\|, \\
y_2 = x_2 - (x_2, u_1)\,u_1, & u_2 = y_2/\|y_2\|, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_{n+1} = x_{n+1} - \sum_{j=1}^{n} (x_{n+1}, u_j)\,u_j, & u_{n+1} = y_{n+1}/\|y_{n+1}\|, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

Если $\{x_j\}$ — конечное множество, то этот процесс на некотором шаге заканчивается. В противном случае он продолжается неограниченно. Заметим, что $y_n \neq 0$, так как векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ линейно независимы. Таким образом, векторы u_n определены корректно. По индукции легко установить, что каждый вектор u_n является линейной комбинацией векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и, обратно, каждый вектор x_n есть линейная комбинация векторов $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Поэтому замкнутые линейные подпространства, натянутые на векторы $x_1, x_2, \ldots$ и $u_1, u_2, \ldots$, совпадают.

Так как $\|u_1\| = 1$, то $y_2 \perp u_1$, и поэтому $u_2 \perp u_1$. Аналогично из условия $\|u_1\| = 1$ следует, что $y_3 \perp u_1$ и, следовательно, $u_3 \perp u_1$. Повторяя эти рассуждения, мы убеждаемся в том, что вектор u_1 ортогонален к $u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$. Далее из условия $\|u_2\| = 1$ мы заключаем, что $y_3 \perp u_2$ и, следовательно, $u_3 \perp u_2$. Продолжая эти рассуждения, мы видим, что $u_k \perp u_m$ при любых $k > m$. Таким образом, множество $\{u_j\}$ образует ортонормированную систему.

Следствие. Допустим, что гильбертово пространство X *сепарабельно*, т. е. в нем имеется счетное плотное подмножество. Тогда в пространстве X существует полная ортонормированная система, содержащая не более чем счетное множество элементов[2]).

---

[1]) Замыкание множества всех конечных линейных комбинаций $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ $(n = 1, 2, \ldots;\ x_j \in A)$, где A — подмножество линейного топологического пространства X, образует замкнутое линейное подпространство в X, которое называют натянутым на A. Говорят также, что A порождает это подпространство. — *Прим. перев.*

[2]) Заметим, что никакая ортонормированная система сепарабельного гильбертова пространства X не может содержать более чем счетное множество элементов. — *Прим. перев.*

Доказательство. Допустим, что счетная последовательность $\{a_j\}$ векторов пространства X образует в X плотное множество. Пусть x_1 — первый отличный от нуля элемент последовательности $\{a_j\}$, x_2 — первый из элементов a_j, не лежащий в замкнутом подпространстве, натянутом на вектор x_1, наконец, x_n — первый из элементов a_j, не принадлежащих замкнутому подпространству, натянутому на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. Ясно, что замкнутые линейные подпространства, натянутые на векторы $\{a_j\}$ и $\{x_j\}$, совпадают со всем пространством X, так как множество $\{a_j\}$ плотно в X. Применяя теперь к системе $\{x_j\}$ процесс ортогонализации по Шмидту, мы получим ортонормированную систему $\{u_j\}$, которая не более чем счетна и порождает пространство X.

Система $\{u_j\}$ полная, так как в противном случае существовал бы ненулевой вектор, ортогональный ко всем элементам u_j и поэтому ко всему пространству X, натянутому на векторы u_j.

Пример ортогонализации. Примем за множество S интервал (a, b) и рассмотрим вещественное гильбертово пространство $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$, где $\mathfrak{B}$ — совокупность всех бэровских подмножеств интервала (a, b). Применяя к системе одночленов

$$1, \ s, \ s^2, \ s^3, \ \ldots, \ s^n, \ \ldots$$

процесс ортогонализации, мы получим систему так называемых *полиномов Чебышева*

$$P_0(s) = \mathrm{const}, \ P_1(s), \ P_2(s), \ P_3(s), \ \ldots, \ P_n(s), \ \ldots,$$

удовлетворяющих условиям

$$\int_a^b P_i(s) P_j(s)\, m(ds) = \delta_{ij}$$

($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). В частном случае, когда $a = -1$, $b = 1$ и $m(ds) = ds$, получается система *полиномов Лежандра*. Если $a = -\infty$, $b = \infty$ и $m(ds) = e^{-s^2} ds$, мы получаем *полиномы Эрмита*, и, наконец, при $a = 0$, $b = \infty$ и $m(ds) = e^{-s}\, ds$ получаются *полиномы Лагерра*.

Нетрудно заметить, что в случае $-\infty < a < b < \infty$ ортонормированная система $\{P_j(s)\}$ будет полной. В самом деле, можно рассуждать так же, как при доказательстве полноты тригонометрической системы (см. пример в § 4). Нужно только вместо теоремы Вейерштрасса об аппроксимации тригонометрическими полиномами воспользоваться теоремой Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими многочленами. По поводу доказательства полноты систем полиномов Эрмита и Лагерра мы отсылаем читателя к работам Сегё [1] или Иосида [1].

6. Теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала

Теорема (теорема Ф. Рисса). Пусть на гильбертовом пространстве X задан ограниченный линейный функционал f. Тогда существует однозначно определенный вектор y_f пространства X, такой, что

$$f(x)=(x, y_f) \quad \text{для всех} \quad x \in X \ \text{и} \ \|f\|=\|y_f\|. \tag{1}$$

Обратно, если $y \in X$ — произвольный вектор, то формула

$$f_y(x)=(x, y) \quad \text{для всех} \quad x \in X \tag{2}$$

определяет на пространстве X ограниченный линейный функционал f_y, причем $\|f_y\|=\|y\|$.

Доказательство. Единственность вектора y_f очевидна, так как если $(x, z)=0$ для всех $x \in X$, то $z=0$. Чтобы доказать его существование, рассмотрим *нуль-многообразие* $N=N(f)=\{x \in X; f(x)=0\}$ функционала f. Так как f—непрерывный линейный функционал, то N представляет собой замкнутое линейное подпространство. Утверждение теоремы тривиально, когда $N=X$: в этом случае можно положить $y_f=0$. Допустим, что $N \neq X$. Тогда существует элемент $y_0 \neq 0$, принадлежащий ортогональному дополнению $N^{\perp}$ (теорема 1, § 1, гл. III). Определим y_f соотношением

$$y_f=(\overline{f(y_0)}/\|y\|^2)\, y_0. \tag{3}$$

Покажем, что этот вектор y_f удовлетворяет условию теоремы. Если $x \in N$, то обе части равенства $f(x)=(x, y_f)$ равны нулю. Если x имеет вид $x=\alpha y_0$, то

$$(x, y_f)=(\alpha y_0, y_f)=\left(\alpha y_0, \frac{\overline{f(y_0)}}{\|y_0\|^2}\, y_0\right)=\alpha f(y_0)=f(\alpha y_0)=f(x).$$

Поскольку функционал $f(x)$ и скалярное произведение (x, y_f) зависят от x линейно, равенство $f(x)=(x, y_f)$ будет доказано, если мы убедимся в том, что пространство X натянуто на вектор y_0 и подпространство N Чтобы доказать последнее утверждение, мы, учитывая, что $f(y_f) \neq 0$, напишем тождество

$$x=\left(x-\frac{f(x)}{f(y_f)}\, y_f\right)+\frac{f(x)}{f(y_f)}\, y_f.$$

Первое слагаемое в правой части принадлежит N, так как

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f(y_f)}\, y_f\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(y_f)}\, f(y_f)=0;$$

таким образом, пространство X натянуто на N и y_0 и представление $f(x)=(x, y_f)$ доказано.

Используя это представление, мы получаем

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(x, y_f)| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|x\| \cdot \|y_f\| = \|y_f\|;$$

кроме того,

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)| \geqslant |f(y_f/\|y_f\|)| = \left(\frac{y_f}{\|y_f\|}, y_f\right) = \|y_f\|.$$

Отсюда

$$\|f\| = \|y_f\|.$$

Заключительное утверждение теоремы вытекает из неравенства $|f_y(x)| = |(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

Следствие 1. Пусть X — гильбертово пространство. Совокупность X' всех ограниченных линейных функционалов на X представляет собой гильбертово пространство, причем существует взаимно однозначное соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ между X' и X, при котором сохраняется норма. Это соответствие позволяет отождествить X' с X как абстрактное множество.

Однако нельзя отождествить X' и X как линейные пространства, так как соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ является *сопряженно-линейным*:

$$(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2) \longleftrightarrow (\overline{\alpha}_1 y_{f_1} + \overline{\alpha}_2 y_{f_2}), \tag{4}$$

где α_1 и α_2 — комплексные числа.

Доказательство. Нетрудно проверить, что множество X' со скалярным произведением $(f_1, f_2) = \overline{(y_{f_1}, y_{f_2})}$ действительно образует гильбертово пространство и утверждение следствия 1 становится очевидным.

Следствие 2. Всякий непрерывный линейный функционал T, заданный на гильбертовом пространстве X', можно отождествить с однозначно определенным элементом t пространства X с помощью формулы

$$T(f) = f(t) \quad \text{для всех} \quad f \in X'. \tag{5}$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из того, что произведение двух сопряженно-линейных преобразований является линейным преобразованием.

Определение. Пространство X' называется *сопряженным* к X. Мы можем, следовательно, отождествить гильбертово пространство X с его *вторым сопряженным* $X'' = (X')'$, как показывает следствие 2. Это свойство гильбертовых пространств называется *рефлексивностью*.

Следствие 3. Пусть X — гильбертово пространство, а X' — его сопряженное. Тогда для любого множества F из X', плотного в X', имеет место формула

$$\|x_0\| = \sup_{f \in F,\ \|f\| \leqslant 1} |f(x_0)|, \qquad x_0 \in X. \tag{6}$$

Доказательство. Можно допустить, что $x_0 \neq 0$, так как в противном случае формула (6) очевидна. Ввиду того что $(x_0, x_0/\|x_0\|) = \|x_0\|$, существует ограниченный линейный функционал f_0 на X, такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(x_0) = \|x_0\|$. Так как $f(x_0) = (x_0, y_f)$ непрерывно по y_f и соответствие $f \longleftrightarrow y_f$ сохраняет норму, мы видим, что формула (6) действительно имеет место вследствие плотности подмножества F в X'.

Замечание. Первоначальное определение Гильберта относилось к пространству (l^2) (см. Гильберт [1]). Аксиоматическое определение (гл. I, § 9) гильбертова пространства в предположении его сепарабельности дал фон Нейман [1]. Приведенную выше теорему о представлении линейного функционала без предположения о том, что рассматриваемое гильбертово пространство сепарабельно, доказал Ф. Рисс [1]. В этой работе Рисса было подчеркнуто, что вся теория гильбертовых пространств может быть развита на основе этой теоремы.

7. Теорема Лакса — Мильграма

Теорема Лакса — Мильграма [1], представляющая собой вариант теоремы Рисса о представлении линейного функционала, оказалась полезной в ряде исследований последних лет, относящихся к вопросам существования решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Теорема (Лакс, Мильграм). Пусть X — гильбертово пространство, и пусть $B(x, y)$ — комплексный функционал, заданный на гильбертовом пространстве $X \times X$ и обладающий свойствами

полуторалинейности:

$$B(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 B(x_1, y) + \alpha_2 B(x_2, y),$$
$$B(x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \bar{\beta}_1 B(x, y_1) + \bar{\beta}_2 B(x, y_2), \tag{1}$$

ограниченности: существует такая положительная постоянная γ, что

$$|B(x, y)| \leqslant \gamma \|x\| \cdot \|y\|, \tag{2}$$

положительности: существует положительная постоянная δ, такая, что

$$B(x, x) \geqslant \delta \|x\|^2. \tag{3}$$

Тогда существует определенный единственным образом ограниченный линейный оператор S, обладающий ограниченным обратным линейным оператором S^{-1}, такой, что

$$(x, y) = B(x, Sy) \text{ для всех } x \text{ и } y \in X \text{ и } \|S\| \leqslant \delta^{-1}, \ \|S^{-1}\| \leqslant \gamma. \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим через D совокупность всех элементов $y \in X$, для которых существует такой элемент y^*, что $(x, y) = B(x, y^*)$ для всех $x \in X$. Множество D непусто: $0 \in D$, ибо $0^* = 0 \cdot y^*$. Элемент y^* однозначно определяется элементом y. В самом деле, если w — такой элемент, что $B(x, w) = 0$ для всех x, то $w = 0$, поскольку $0 = B(w, w) \geqslant \delta \|w\|^2$. Так как скалярное произведение (x, y) и функционал $B(x, y)$ полуторалинейны, равенство $Sy = y^*$ определяет линейный оператор S с областью определения $D(S) = D$. Оператор S непрерывен, и $\|Sy\| \leqslant \delta^{-1} \|y\|$ $(y \in D(S))$, потому что

$$\delta \|Sy\|^2 \leqslant B(Sy, Sy) = (Sy, y) \leqslant \|Sy\| \cdot \|y\|.$$

Область $D = D(S)$ образует в X замкнутое линейное подпространство. Это доказывается следующим образом: если $y_n \in D(S)$ и $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} y_n = y_\infty$, то, согласно доказанной выше непрерывности оператора S, $\{Sy_n\}$ — фундаментальная последовательность, поэтому существует предел $z = s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} Sy_n$. Скалярное произведение тоже непрерывно, поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} (x, y_n) = (x, y_\infty)$. Кроме того, ввиду условия (2) $\lim\limits_{n \to \infty} B(x, Sy_n) = B(x, z)$, и так как $(x, y_n) = B(x, Sy_n)$, то $(x, y_\infty) = B(x, z)$, следовательно, $y_\infty \in D$ и $Sy_\infty = z$, а это и означает, что $D = D(S)$ — замкнутое линейное подпространство.

Итак, первая часть теоремы, т. е. существование оператора S, будет доказана, если мы убедимся в том, что $D(S) = X$. Для этого допустим, что $D(S) \neq X$. Тогда существует такой вектор $w_0 \in X$, что $w_0 \neq 0$ и $w_0 \in D(S)^\perp$. Рассмотрим линейный функционал $F(z) = B(z, w_0)$, заданный на X. Функционал $F(z)$ непрерывен, так как $|F(z)| = |B(z, w_0)| \leqslant \gamma \|z\| \cdot \|w_0\|$. Поэтому, согласно теореме Рисса, существует вектор $w_0' \in X$, такой, что $B(z, w_0) = F(z) = (z, w_0')$ для всех $z \in X$. Это показывает, что $w_0' \in D(S)$ и $Sw_0' = w_0$. Но поскольку $\delta \|w_0\|^2 \leqslant B(w_0, w_0) = (w_0, w_0') = 0$, мы получаем $w_0 = 0$, что противоречит первоначальному допущению.

Докажем теперь существование обратного оператора S^{-1}. Из условия $Sy = 0$ следует, что $(x, y) = B(x, Sy) = 0$ для всех $x \in X$, откуда $y = 0$. Как и выше, можно показать, что для всякого $y \in X$ существует такой вектор y', что $(z, y') = B(z, y)$ для всех $z \in X$. Следовательно, $y = Sy'$ и оператор S^{-1} определен на всем пространстве X. Так как $|(z, S^{-1}y)| = |B(z, y)| \leqslant \gamma \|z\| \cdot \|y\|$, то $\|S^{-1}\| \leqslant \gamma$.

Конкретные приложения теоремы Лакса—Мильграма мы рассмотрим в дальнейших главах. В следующих черырех параграфах мы приведем несколько примеров непосредственных приложений теоремы Рисса.

8. Одно доказательство теоремы Лебега — Никодима[1]

Эта теорема формулируется следующим образом.

Теорема (Лебег — Никодим). Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой и $\nu(B)$ — некоторая σ-конечная σ-аддитивная неотрицательная мера, заданная на семействе $\mathfrak{B}$. Если мера ν m-абсолютно непрерывна, то существует неотрицательная m-измеримая функция $p(s)$, такая, что

$$\nu(B) = \int_B p(s)\, m(ds) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}, \text{ для которых } \nu(B) < \infty. \tag{1}$$

Более того, „плотность"[2] $p(s)$ меры $\nu(B)$ (по отношению к мере $m(B)$) определена однозначно в том смысле, что любые две из них совпадают m-п. в.

Доказательство (фон Нейман [2]). Легко видеть, что функция $\rho(B) = m(B) + \nu(B)$ представляет собой σ-конечную σ-аддитивную неотрицательную меру, заданную на $\mathfrak{B}$. Пусть $\{B_n\}$ — последовательность множеств из $\mathfrak{B}$, такая, что $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, $B_n \subseteq B_{n+1}$ и $\rho(B_n) < \infty$ для $n = 1, 2, \ldots$. Если мы сможем доказать теорему для всякого множества $B \subseteq B_n$ (при произвольном фиксированном n) и построить плотность $p_n(s)$, то теорема будет верна для любых множеств $B \in \mathfrak{B}$. В самом деле, в этом случае функцию $p(s)$ можно определить следующим образом:

$$p(s) = p_1(s) \quad \text{при} \quad s \in B_1; \quad p(s) = p_{n+1}(s) \quad \text{при} \quad s \in B_{n+1} - B_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, мы можем без ограничения общности считать, что $\rho(S) < \infty$. Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$. Формула

$$f(x) = \int_S x(s)\, \nu(ds), \quad x \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho),$$

определяет ограниченный линейный функционал на $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$, так как

$$|f(x)| \leqslant \int_S |x(s)|\, \nu(ds) \leqslant \left(\int_S |x(s)|^2 \nu(ds)\right)^{1/2} \cdot \left(\int_S 1 \cdot \nu(ds)\right)^{1/2} \leqslant \leqslant \|x\|_\rho (\nu(S))^{1/2},$$

[1]) Эту теорему обычно связывают с именами Лебега, Радона и Никодима. Исторические и библиографические справки по этому вопросу можно найти в книге Данфорда — Шварца [1] (стр. 256). — *Прим. перев.*

[2]) Функцию $p(s)$ называют „производной Радона — Никодима функции $\nu(B)$ по мере m" и обозначают через $d\nu/dm$. — *Прим. перев.*

где $\|x\|_\rho = \left(\int\limits_S |x(s)|^2 \rho(ds)\right)^{1/2}$. Тогда по теореме Рисса существует единственный элемент $y \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$, такой, что

$$\int\limits_S x(s)\nu(ds) = \int\limits_S x(s)\overline{y(s)}\rho(ds) = \\ = \int\limits_S x(s)\overline{y(s)}m(ds) + \int\limits_S x(s)\overline{y(s)}\nu(ds)$$

для всех $x \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$. Выбирая в качестве x неотрицательные функции и рассматривая вещественные части обеих частей последнего равенства, мы можем считать $y(s)$ также вещественной функцией; тогда для всех неотрицательных функций $x(s) \in L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$

$$\int\limits_S x(s)(1 - y(s))\nu(ds) = \int\limits_S x(s)y(s)m(ds). \tag{2}$$

Покажем, что ρ-п. в. $0 \leqslant y(s) < 1$. Для этого положим $E_1 = \{s;\ y(s) < 0\}$ и $E_2 = \{s;\ y(s) \geqslant 1\}$. Пусть $x(s)$ в формуле (2) — характеристическая функция $C_{E_1}(s)$ множества E_1. Тогда левая часть (2) будет неотрицательной, а поэтому $\int\limits_{E_1} y(s)m(ds) \geqslant 0$. Отсюда вытекает, что $m(E_1) = 0$, а следовательно, $\nu(E_1) = 0$ и $\rho(E_1) = 0$, так как функция ν m-абсолютно непрерывна. Таким же способом, принимая за $x(s)$ характеристическую функцию $C_{E_2}(s)$, можно показать, что $\rho(E_2) = 0$. Следовательно, $0 \leqslant y(s) < 1$ ρ-п. в. на S.

Пусть функция $x(s)$ $\mathfrak{B}$-измерима и ρ-п. в. неотрицательна. Тогда, поскольку $\rho(S) < \infty$, „усеченные“ функции $x_n(s) \equiv \min(x(s), n)$ тоже принадлежат $L^2(S, \mathfrak{B}, \rho)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и

$$\int\limits_S x_n(s)(1 - y(s))\nu(ds) = \int\limits_S x_n(s)y(s)m(ds) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Эти интегралы монотонно возрастают с ростом n, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S x_n(s)(1 - y(s))\nu(ds) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S x_n(s)y(s)m(ds) = L \leqslant \infty. \tag{4}$$

Так как подинтегральные функции ρ-п. в. неотрицательны, по лемме Лебега — Фату

$$\begin{aligned} L &\geqslant \int\limits_S \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n(s)(1 - y(s)))\nu(ds) = \int\limits_S x(s)(1 - y(s))\nu(ds), \\ L &\geqslant \int\limits_S \underline{\lim}_{n\to\infty}(x_n(s)y(s))m(ds) = \int\limits_S x(s)y(s)m(ds) \end{aligned} \tag{5}$$

при условии, что когда функция $x(s)(1-y(s))$ не является ν-интегрируемой, соответствующая правая часть считается равной ∞; то же относится к функции $x(s)y(s)$. Если функция $x(s)y(s)$ m-интегрируема, то по лемме Лебега — Фату

$$L \leqslant \int_S \overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n(s)y(s))\,m(ds) = \int_S x(s)y(s)\,m(ds). \tag{6}$$

Эта формула верна и в том случае, когда функция $x(s)y(s)$ не является m-интегрируемой, если считать, что $L=\infty$. При том же условии справедливо неравенство

$$L \leqslant \int_S x(s)(1-y(s))\,\nu(ds). \tag{7}$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_S x(s)(1-y(s))\,\nu(ds) = \int_S x(s)y(s)\,m(ds) \tag{8}$$

для всех $\mathfrak{B}$-измеримых и ρ-п. в. неотрицательных функций $x(s)$, при условии, что если одна из частей этого равенства обращается в ∞, то и другая часть равна ∞.

Теперь положим

$$x(s)(1-y(s)) = z(s), \quad y(s)(1-y(s))^{-1} = p(s).$$

Тогда (при тех же условиях, что и для формулы (8))

$$\int_S z(s)\,\nu(ds) = \int_S z(s)\,p(s)\,m(ds) \tag{9}$$

для всякой $\mathfrak{B}$-измеримой и ρ-п. в. неотрицательной функции $z(s)$. Если теперь за $z(s)$ принять характеристическую функцию $C_B(s)$ множества $B\in\mathfrak{B}$, то получится формула

$$\nu(B) = \int_B p(s)\,m(ds),$$

справедливая для всех $B\in\mathfrak{B}$. Заключительное утверждение теоремы легко выводится из определения (1) плотности $p(s)$.

Замечание. Прямое доказательство теоремы Лебега — Никодима, основанное на разложении Хана (теорема 3, гл. I, § 3), можно найти в работе Иосида [2]. Это доказательство воспроизведено в книге Халмоша [1]. См. также Сакс [1], Данфорд — Шварц [1].

9. Воспроизводящее ядро

Пусть A — некоторое абстрактное множество, и пусть система X комплексных функций, заданных на A, образует гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(f, g) = (f(a), g(a))_a\,[1]. \tag{1}$$

Комплексная функция $K(a, b)$, определенная в области $A \times A$, называется *воспроизводящим ядром* пространства X, если выполняется следующее условие:

$$\begin{gathered}\text{для любого фиксированного значения } b \in A \text{ функция}\\ K(a, b) \text{ принадлежит } X \text{ как функция переменной } a,\end{gathered} \tag{2}$$

$$f(b) = (f(a), K(a, b))_a \text{ и, следовательно, } \overline{f(b)} = (K(a, b), f(a))_a. \tag{3}$$

Следующая теорема относится к вопросу о существовании воспроизводящего ядра.

Теорема 1 (Ароншайн [1], Бергман [1]). Для того чтобы существовало воспроизводящее ядро K пространства X, необходимо и достаточно, чтобы для любого $y_0 \in A$ существовала положительная постоянная C_{y_0}, зависящая от y_0, такая, что

$$|f(y_0)| \leqslant C_{y_0} \|f\| \text{ для всех } f \in X. \tag{4}$$

Доказательство. Применяя к выражению $f(y_0) = (f(x), K(x, y_0))_x$ неравенство Шварца, мы видим, что

$$|f(y_0)| \leqslant \|f\| \cdot (K(x, y_0), K(x, y_0))_x^{1/2} = \|f\| \cdot K(y_0, y_0)^{1/2}, \tag{5}$$

откуда вытекает необходимость условия (4). Для доказательства достаточности применим теорему Рисса к линейному функционалу $F_{y_0}(f) = f(y_0)$, заданному для функций $f \in X$. Тогда в пространстве X существует единственный вектор $g_{y_0}(x)$, такой, что для каждой функции $f \in X$

$$f(y_0) = F_{y_0}(f) = (f(x), g_{y_0}(x))_x.$$

Таким образом, функция $g_{y_0}(x) = K(x, y_0)$ является воспроизводящим ядром пространства X. Из приведенного доказательства видно, что воспроизводящее ядро определяется единственным образом.

Следствие. Имеет место формула

$$\sup_{\|f\| \leqslant 1} |f(y_0)| = (K(y_0, y_0))^{1/2}, \tag{6}$$

---

[1]) Запись $(f(a), g(a))_a$ отмечает, что соответствующие функции принадлежат X как функции переменной a (они могут зависеть еще от каких-то параметров). — *Прим. перев.*

причем верхняя грань достигается для функции

$$f_0(x) = \rho K(x, y_0)/(K(y_0, y_0))^{1/2}, \qquad |\rho| = 1. \tag{7}$$

Доказательство. Знак равенства в неравенстве Шварца (5) появляется в том и только в том случае, когда $f(x)$ и $K(x, y_0)$ линейно зависимы. Из двух условий $f(x) = \alpha K(x, y_0)$ и $\|f\| = 1$ мы получаем

$$1 = |\alpha|(K(x, y_0), K(x, y_0))_x^{1/2} = |\alpha|(K(y_0, y_0))^{1/2},$$

$$\text{т. е. } |\alpha| = (K(y_0, y_0))^{-1/2}.$$

Отсюда ясно, что равенство в формуле (5) достигается для функции $f_0(x)$.

Пример. Рассмотрим гильбертово пространство $A^2(G)$. Для всякой функции $f \in A^2(G)$ и любой точки $z \in G$ (см. гл. I, § 9 (4)) мы имеем

$$|f(z_0)|^2 \leqslant (\pi r^2)^{-1} \int\limits_{|z-z_0| \leqslant r} |f(z)|^2 \, dx\, dy \quad (z = x + iy).$$

Поэтому в пространстве $A^2(G)$ имеется воспроизводящее ядро. Обозначим его через $K_G(z, z')$. Ядро $K_G(z, z')$ называется *ядром Бергмана* области G комплексной плоскости.

Следующая теорема Бергмана иллюстрирует роль ядра $K_G(z, z')$ в теории конформных отображений.

Теорема 2. Пусть G — односвязная ограниченная открытая область комплексной плоскости, и пусть z_0 — произвольная точка этой области. По теореме Римана существует единственная регулярная функция $w = f(z; z_0)$ переменной z, отображающая взаимно однозначно и конформно область G на круг $|w| \leqslant \rho_G$ комплексной w-плоскости таким образом, что

$$f_0(z_0; z_0) = 0; \qquad \left.\frac{df_0(z; z_0)}{dz}\right|_{z=z_0} = 1.$$

Ядро Бергмана $K_G(z; z_0)$ связано с функцией $f_0(z; z_0)$ соотношением

$$f_0(z; z_0) = (K_G(z_0; z_0))^{-1} \int\limits_{z_0}^{z} K_G(t; z_0)\, dt, \tag{8}$$

где интеграл берется по любой спрямляемой дуге, лежащей в области G и соединяющей точки z_0 и z.

Доказательство. Положим

$$A_1^2(G) = \{f(z);\ f(z) \text{ голоморфна в } G,\ f'(z) \in A^2(G),$$
$$f(z_0) = 0 \text{ и } f'(z_0) = 1\}$$

и для производной функции $f \in A_1^2(G)$ рассмотрим число

$$\|f'\|^2 \equiv \int_G |f'(z)|^2\, dx\, dy, \quad z = x + iy. \tag{9}$$

Если через $z = \varphi(w)$ обозначить функцию, обратную к $w = f_0(z;\ z_0)$, то для всякой функции $f \in A_1^2(G)$

$$\|f'\|^2 = \int\limits_{|w| < \rho_G}\int |f'(\varphi(w))|^2 \cdot |\varphi'(w)|^2\, du\, dv, \quad w = u + iv,$$

так как из условий Коши — Римана

$$x_u = y_v, \qquad x_v = -y_u$$

следует, что

$$dx\, dy = \frac{\partial(x,\ y)}{\partial(u,\ v)}\, du\, dv + (x_u y_v - y_u x_v)\, du\, dv = \\ = (x_u^2 + y_u^2)\, du\, dv = |\varphi'(w)|^2\, du\, dv.$$

Пусть $f \in A_1^2(G)$; разложим в степенной ряд выражение $F(w) = f(\varphi(w))$:

$$F(w) = f(\varphi(w)) = w + \sum_{n=2}^{\infty} c_n w^n \quad \text{при} \quad |w| < \rho_G.$$

Тогда $F'(w) = f'(\varphi(w))\varphi'(w) = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty} nc_n w^{n-1}$, и поэтому

$$\|f'\|^2 = \int\limits_{|w| < \rho_G}\int \left| 1 + \sum_{n=2}^{\infty} nc_n w^{n-1} \right|^2 du\, dv =$$

$$= \int_0^{\rho_G} dr \left\{ \int_0^{2\pi} \left(r + \sum_{n=2}^{\infty} n^2 |c_n|^2 r^{2n-1}\right) d\theta \right\} = \pi\rho_G^2 + \sum_{n=2}^{\infty} \pi n |c_n|^2 \rho_G^{2n}.$$

Отсюда видно, что $\underset{f \in A_1^2(G)}{\operatorname{minimum}} \|f'\| = \sqrt{\pi}\,\rho_G$, и этот минимум достигается тогда и только тогда, когда $F(w) = f(\varphi(w)) = w$, т. е. тогда и только тогда, когда $f(z) = f_0(z;\ z_0)$.

Для любой функции $f \in A_1^2(G)$ положим $g(z) = f(z)/\|f'\|$. Тогда $\|g'\| = 1$. Рассмотрим множество

$$\tilde{A}^2(G) = \{g(z);\ g(z) \text{ голоморфна в } G; \\ g(z_0) = 0,\ g'(z_0) > 0 \text{ и } \|g'\| = 1\}.$$

Из сказанного выше следует[1]), что

$$\underset{g \in \widetilde{A}^2(G)}{\text{maximum}}\, g'(z_0) = \frac{1}{\| f_0' \|} = \left(\sqrt{\pi}\, \rho_G\right)^{-1},$$

и этот максимум достигается тогда и только тогда, когда функция $g(z)$ равна функции

$$g_0(z) = f_0(z;\ z_0)/\| f_0' \| = f_0(z;\ z_0)/\sqrt{\pi}\, \rho_G.$$

Используя (7), находим

$$g_0'(z) = \left(\sqrt{\pi}\, \rho_G\right)^{-1} \frac{df_0(z;\ z_0)}{dz} = \lambda K_G(z;\ z_0)/(K_G(z_0;\ z_0))^{1/2}, \quad |\lambda| = 1.$$

Отсюда, полагая $z = z_0$, получаем

$$\left(\lambda \sqrt{\pi}\, \rho_G\right)^{-1} = K_G(z_0;\ z_0)/(K_G(z_0;\ z_0))^{1/2} = (K_G(z_0;\ z_0))^{1/2};$$

тем самым доказана формула

$$\frac{df_0(z;\ z_0)}{dz} = K_G(z;\ z_0)/K_G(z_0;\ z_0).$$

10. Отрицательная норма по Лаксу

Обозначим через $H_0^s(\Omega)$ пополнение предгильбертова пространства $C_0^\infty(\Omega)$ со скалярным произведением $(\varphi,\ \psi)_s$ и нормой $\|\varphi\|_s$, определенными формулами

$$(\varphi,\ \psi)_s = \sum_{|j| \leqslant s} \int_\Omega D^j\varphi(x) \cdot \overline{D^j\psi(x)}\, dx, \quad \|\varphi\|_s = (\varphi,\ \varphi)_s^{1/2}. \tag{1}$$

Каждый элемент $b \in H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ определяет на пространстве $H_0^s(\Omega)$ непрерывный линейный функционал

$$f_b(w) = (w,\ b)_0, \quad w \in H_0^s(\Omega). \tag{2}$$

Согласно неравенству Шварца,

$$|(w,\ b)_0| \leqslant \|w\|_0 \cdot \|b\|_0 \leqslant \|w\|_s \cdot \|b\|_0.$$

Определим теперь для элементов $b \in H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ *отрицательную норму*

$$\|b\|_{-s} = \sup_{w \in H_0^s(\Omega),\ \|w\|_s \leqslant 1} |f_b(w)| = \sup_{w \in H_0^s(\Omega),\ \|w\|_s \leqslant 1} |(w,\ b)_0|. \tag{3}$$

---

[1]) Действительно, всякой функции $g(z) \in \widetilde{A}^2(G)$ соответствует единственная функция $f(z) = g(z)/g'(z_0) \in A_1^2(G)$, такая, что $g(z) = f(z)/\|f'\|$, поэтому $\underset{g \in \widetilde{A}^2(G)}{\text{maximum}}\, g'(z_0) = \left(\underset{f \in A_1^2(G)}{\text{minimum}}\, \|f\|\right)^{-1}$. — *Прим. перев.*

Из этого определения видно, что

$$\|b\|_{-s} \leqslant \|b\|_0, \tag{4}$$

а так как $\|b\|_{-s} \geqslant \left|(w/\|w\|_s,\ b)_0\right|$, то

$$\left|(w,\ b)_0\right| \leqslant \|w\|_s \cdot \|b\|_{-s}. \tag{5}$$

Следовательно,

$$\|b\|_{-s} = \|f_b\|_{-s} = \sup_{\|w\|_s \leqslant 1} \left|(w,\ b)_0\right| \quad \text{для любого} \quad b \in H_0^0(\Omega). \tag{3'}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема 1 (П. Лакс [2]). Сопряженное к $H_0^s(\Omega)$ пространство $H_0^s(\Omega)'$ можно отождествить с пополнением пространства $H_0^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ по отрицательной норме.

Для доказательства нам потребуется следующее

Предложение. Множество F всех непрерывных линейных функционалов вида f_b, заданных в $H_0^s(\Omega)$, плотно в гильбертовом пространстве $H_0^s(\Omega)'$, сопряженном к пространству $H_0^s(\Omega)$.

Доказательство. Множество F *тотально* на $H_0^s(\Omega)$ в том смысле, что если для некоторого фиксированного $w \in H_0^s(\Omega)$ мы имеем $f_b(w) = 0$ для всех $b \in H_0^0(\Omega)$, то $w = 0$. Это следует из того, что всякий элемент $w \in H_0^s(\Omega)$ в то же время является элементом пространства $H_0^0(\Omega)$.

Допустим, что множество F не является плотным в гильбертовом пространстве $H_0^s(\Omega)'$; тогда во втором сопряженном пространстве $H_0^s(\Omega)'' = \left(H_0^s(\Omega)'\right)'$ найдется такой элемент $T \neq 0$, что $T(f_b) = 0$ для всех $f_b \in F$. В силу рефлексивности гильбертова пространства $H_0^s(\Omega)$ в нем найдется элемент $t \in H_0^s(\Omega)$, такой, что $T(f) = f(t)$ для всех $f \in H_0^s(\Omega)'$. Поэтому $T(f_b) = f_b(t) = 0$ при всех $b \in H_0^0(\Omega)$. Множество F, как показано выше, тотально, следовательно, $t = 0$, а это противоречит тому, что $T \neq 0$.

Следствие. Имеет место формула, двойственная к (3'):

$$\|w\|_s = \sup_{b \in H_0^0(\Omega),\ \|b\|_{-s} \leqslant 1} \left|(w,\ b)_0\right| \quad \text{для всех} \quad w \in H_0^s(\Omega). \tag{6}$$

Доказательство. Так как множество $F = \{f_b;\ b \in H_0^0(\Omega)\}$ плотно в $H_0^s(\Omega)'$, это утверждение вытекает из следствия 3 § 6 гл. III.

Доказательство теоремы 1. Множество F плотно в сопряженном пространстве $H_0^s(\Omega)'$, и соответствие

$$F \ni f_b \leftrightarrow b \in H_0^0(\Omega), \quad \|f_b\|_{-s} = \|b\|_{-s},$$

взаимно однозначно и сохраняет отрицательную норму. Отсюда вытекает теорема 1.

Обозначим пополнение пространства $H_0^0(\Omega)$ по отрицательной норме $\|b\|_{-s}$ через $H_0^{-s}(\Omega)$. Тогда

$$H_0^s(\Omega)' = H_0^{-s}(\Omega). \tag{7}$$

Для всякого непрерывного линейного функционала f на $H_0^s(\Omega)$ обозначим через $\langle w, f\rangle$ его значение в точке $w \in H_0^s(\Omega)$. Таким образом, для всякого элемента $b \in H_0^0(\Omega)$

$$f_b(w) = (w, b)_0 = \langle w, f_b\rangle = \langle w, b\rangle, \quad w \in H_0^s(\Omega), \tag{8}$$

а неравенство (5) можно записать в виде

$$|\langle w, b\rangle| \leqslant \|w\|_s \cdot \|b\|_{-s}; \tag{9}$$

при этом получается обобщенное неравенство Шварца.

Докажем теперь следующую теорему.

Теорема 2 (П. Лакс [2]). Всякий непрерывный линейный функционал $g(b)$ на $H_0^{-s}(\Omega)$ может быть представлен с помощью некоторого фиксированного элемента $w \in H_0^s(\Omega)$ в виде

$$g(b) = g_w(b) = \langle \overline{w, b}\rangle. \tag{10}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$H_0^s(\Omega)' = H_0^{-s}(\Omega), \quad H_0^{-s}(\Omega)' = H_0^s(\Omega). \tag{11}$$

Доказательство. Если $b \in H_0^0(\Omega)$, то $\langle w, b\rangle = f_b(w) = (w, b)_0$. Так как множество $F = \{f_b;\ b \in H_0^0(\Omega)\}$ плотно в гильбертовом пространстве $H_0^s(\Omega)'$, то, как следует из (9), выражение $\langle \overline{w, b}\rangle = (b, w)_0$ при всяком фиксированном $w \in H_0^s(\Omega)$ определяет линейный функционал g_w, непрерывный на плотном подмножестве F пространства $H_0^s(\Omega)'$. Норму этого функционала на множестве F обозначим через $\|g_w\|_s$. Тогда ввиду (6)

$$\|g_w\|_s = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |(b, w)_0| = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |(w, b)_0| = \|w\|_s. \tag{12}$$

Вследствие непрерывности мы можем продолжить функционал g_w, определенный на F, до непрерывного линейного функционала на пополнении множества F (по отрицательной норме), т. е. функционал g_w может быть продолжен до непрерывного линейного функционала на пространстве $H_0^s(\Omega)' = H_0^{-s}(\Omega)$. Это продолжение мы по-прежнему будем обозначать через g_w. Итак,

$$\|g_w\| = \sup_{\|b\|_{-s} \leqslant 1} |g_w(b)| = \|w\|_s. \tag{13}$$

Следовательно, принимая во внимание полноту пространства $H_0^s(\Omega)$, мы можем рассматривать совокупность G всех непрерывных линейных функционалов g_w на $H_0^{-s}(\Omega)$ как замкнутое линейное подпространство из $H_0^{-s}(\Omega)'$, имея в виду соответствие $g_w \longleftrightarrow w$. Если это замкнутое подпространство G не является плотным в $H_0^{-s}(\Omega)'$, то найдется непрерывный линейный функционал $f \neq 0$ на $H_0^{-s}(\Omega)'$, такой, что $f(g_w) = 0$ для всех $g_w \in G$. Но так как гильбертово пространство $H_0^{-s}(\Omega)$ рефлексивно, такой функционал f определяется соотношением $f(g_w) = g_w(f_0)$, $f_0 \in H_0^{-s}(\Omega)$, и поэтому элемент f_0, согласно (3′), должен быть равен нулю. Последнее противоречит тому, что $f \neq 0$. Тем самым доказано, что $H_0^{-s}(\Omega)' = H_0^s(\Omega)$.

Замечание. П. Лакс ввел понятие отрицательной нормы, имея в виду использовать его при исследовании вопроса о существовании производных (в обычном смысле) у обобщенных решений линейных дифференциальных уравнений в частных производных. Проблемы, связанные с дифференцируемостью обобщенных решений, мы рассмотрим в дальнейших главах. Следует заметить, что понятие отрицательной нормы можно также естественным образом ввести с помощью преобразования Фурье. Это было сделано Лере [1] раньше, чем П. Лаксом. Более подробно мы коснемся этих вопросов в главе, посвященной преобразованию Фурье.

11. Локальная структура обобщенных функций

Всякая обобщенная функция локально совпадает с обобщенной производной некоторой функции. Точнее справедлива следующая

Теорема (Л. Шварц [1]). Пусть в некоторой области $\Omega \subseteq R^n$ задана обобщенная функция T. Тогда для любого бикомпактного подмножества $K \subset \Omega$ существуют положительное целое число $m_0 = m_0(T, K)$ и функция $f(x) = f(x;\ T,\ K,\ m_0) \in L^2(K)$, такие, что

$$T(\varphi) = \int_K f(x) \frac{\partial^{nm_0}\varphi(x)}{\partial x_1^{m_0}\, \partial x_2^{m_0} \ldots \partial x_n^{m_0}}\, dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{1}$$

Доказательство. Согласно следствию § 8 гл. I, существуют положительная постоянная C и положительное целое m, такие, что

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sup_{|j| \leqslant m,\ x \in K} |D^j\varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega). \tag{2}$$

Поэтому найдется такое положительное δ, что

$$\text{из неравенства } p_m(\varphi) \equiv \sup_{|j| \leqslant m,\ x \in K} |D^j \varphi(x)| \leqslant \delta, \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega),$$

$$\text{следует неравенство } |T(\varphi)| \leqslant 1. \tag{3}$$

Введем обозначение

$$\frac{\partial^s}{\partial x^s} = \frac{\partial^{sn}}{\partial x_1^s \partial x_2^s \ldots \partial x_n^s} \tag{4}$$

и покажем, что существует положительная постоянная ε, такая, что при $m_0 = m + 1$

$$\text{из неравенства } \int_\Omega \left| \frac{\partial^{m_0} \varphi(x)}{\partial x^{m_0}} \right|^2 dx \leqslant \varepsilon, \quad \varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega),$$

$$\text{следует неравенство } p_m(\varphi) \leqslant \delta. \tag{5}$$

Это можно доказать при помощи повторного применения неравенства

$$|\psi(x)| \leqslant \int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} |\partial \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)/\partial y| \, dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} dy \right)^{1/2} \times$$

$$\times \left(\int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} |\partial \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)/\partial y|^2 \, dy \right)^{1/2} =$$

$$= t^{1/2} \left(\int_{K \cap (-\infty,\, x_i)} |\partial \psi(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n)/\partial y|^2 \, dy \right)^{1/2},$$

где t — *диаметр* множества K, т. е. максимальное расстояние между двумя точками бикомпактного множества K.

Рассмотрим отображение $\varphi(x) \to \psi(x) = \partial^{m_0} \varphi(x)/\partial x^{m_0}$ пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ в себя. С помощью интегрирования легко убедиться в том, что если $\psi(x) = 0$, то $\varphi(x) = 0$. Таким образом, это отображение взаимно однозначно. Поэтому функционал $T(\varphi)$ $(\varphi \in \mathfrak{D}_K(\Omega))$ определяет линейный функционал $S(\psi) = T(\varphi)$, где $\psi(x) = \partial^{m_0} \varphi(x)/\partial x^{m_0}$. Из (3) и (5) видно, что S — непрерывный линейный функционал на предгильбертовом пространстве X, состоящем из функций ψ указанного вида, с нормой $\|\psi\| = \left(\int_K |\psi(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$. Следовательно, по теореме Рисса о представлении линейного функционала в пополнении пространства X существует единственным образом определенная функция $f(x)$, такая, что

$$T(\varphi)=S(\psi)=\int_K \left(\frac{\partial^{m_0}\varphi(x)}{\partial x^{m_0}}\right)\cdot f(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{D}_K(\Omega).$$

Поскольку пополнение пространства X содержится в $L^2(K)$ как замкнутое линейное подпространство, теорема тем самым доказана.

Литература к главе III

Общее изложение теории гильбертовых пространств можно найти в книгах: Ахиезер — Глазман [1], Данфорд — Шварц [2], Надь [1], Рисс — Надь [3], Стоун [1].

ГЛАВА IV

Теоремы Хана — Банаха

В гильбертовом пространстве естественным образом вводится понятие ортогональных координат относительно ортогонального базиса — за эти координаты принимаются значения ограниченных линейных функционалов, определяемых векторами базиса. Это наводит на мысль рассматривать непрерывные линейные функционалы в линейном топологическом пространстве как обобщенные координаты. Вопрос о существовании нетривиальных непрерывных линейных функционалов в общем локально выпуклом линейном топологическом пространстве решается с помощью теорем Хана — Банаха о продолжении функционала.

1. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в вещественных линейных пространствах

Теорема (Хан [2], Банах [1]). Пусть X — вещественное линейное пространство и $p(x)$ — вещественная функция, заданная на X и удовлетворяющая следующим условиям:

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y) \quad \text{(полуаддитивность)}, \tag{1}$$

$$p(\alpha x)=\alpha p(x) \quad \text{для} \quad \alpha \geqslant 0. \tag{2}$$

Пусть M — вещественное линейное подпространство в X и f_0 — вещественный линейный функционал, заданный на M:

$$f_0(\alpha x+\beta y)=\alpha f_0(x)+\beta f_0(y) \text{ для } x, y \in M \text{ и вещественных } \alpha, \beta. \tag{3}$$

Пусть f_0 удовлетворяет неравенству $f_0(x) \leqslant p(x)$ на M. Тогда существует вещественный линейный функционал F, определенный на X, такой, что 1) F служит продолжением f_0, т. е. $F(x)=f_0(x)$ для всех $x \in M$; 2) $F(x) \leqslant p(x)$ на X.

Доказательство. Предположим сначала, что пространство X натянуто на M и некоторый элемент $x_0 \notin M$, т. е.

$$X=\{x=m+\alpha x_0;\ m \in M,\ \alpha \text{ — вещественные числа}\}.$$

Так как $x_0 \notin M$, представление элементов $x \in X$ в виде $x=m+\alpha x_0$ определяется однозначно. Следовательно, полагая

$$F(x)=F(m+\alpha x_0) \equiv f_0(m)+\alpha c,$$

где c — произвольное вещественное число, мы получим вещественный линейный функционал F на X, являющийся продолжением f_0. Мы должны теперь выбрать c таким, что $F(x) \leqslant p(x)$, т. е. $f_0(m) + \alpha c \leqslant p(m + \alpha x_0)$. Последнее неравенство эквивалентно следующим двум условиям:

$$f_0\left(\frac{m}{\alpha}\right) + c \leqslant p\left(x_0 + \frac{m}{\alpha}\right) \quad \text{для} \quad \alpha > 0,$$

$$f_0\left(\frac{m}{-\alpha}\right) - c \leqslant p\left(-x_0 + \frac{m}{-\alpha}\right) \quad \text{для} \quad \alpha < 0.$$

Чтобы выполнялись эти условия, мы выберем c так, что

$$f_0(m') - p(m' - x_0) \leqslant c \leqslant p(m'' + x_0) - f_0(m'')$$

для всех m', $m'' \in M$. Такой выбор возможен, поскольку

$$f_0(m') + f_0(m'') = f_0(m' + m'') \leqslant p(m' + m'') =$$
$$= p(m' - x_0 + m'' + x_0) \leqslant p(m' - x_0) + p(m'' + x_0).$$

Итак, остается лишь выбрать c между двумя числами

$$\sup_{m' \in M} [f_0(m') - p(m' - x_0)] \quad \text{и} \quad \inf_{m'' \in M} [p(m'' + x_0) - f_0(m'')].$$

Рассмотрим теперь семейство всех вещественных линейных продолжений g функционала f_0, для которых при всех x из области определения g выполняется неравенство $g(x) \leqslant p(x)$. Мы можем частично упорядочить это семейство, полагая $h \succ g$, если функционал h служит продолжением g. Тогда по лемме Цорна существует максимальное линейное продолжение g функционала f_0, для которого неравенство $g(x) \leqslant p(x)$ выполняется при всех x из области определения g. Остается показать, что область определения $D(g)$ функционала g совпадает с пространством X. Если бы это было не так, мы могли бы, приняв $D(g)$ за подпространство M, а сам функционал g за f_0, построить продолжение F функционала g, удовлетворяющее неравенству $F(x) \leqslant p(x)$ для всех x из области определения F. Но это противоречит максимальности линейного продолжения g.

Следствие. Если на вещественном линейном пространстве X задана функция $p(x)$, удовлетворяющая условиям (1) и (2), то существует определенный на X линейный функционал f, такой, что

$$-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x). \tag{4}$$

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x_0 \in X$ и определим множество $M = \{x;\ x = \alpha x_0,\ \alpha$ — любые вещественные числа$\}$. Положим $f_0(\alpha x_0) = \alpha p(x_0)$. Тогда f_0 представляет собой вещественный линейный функционал с областью определения M. На множестве M неравенство $f_0(x) \leqslant p(x)$ выполняется. В самом деле, если $\alpha > 0$, то $\alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$, а если $\alpha < 0$, то

$\alpha p(x_0) \leqslant -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0)$, поскольку $0 = p(0) \leqslant p(x_0) + p(-x_0)$. Значит, существует линейный функционал f, определенный на пространстве X, такой, что $f(x) = f_0(x)$ на M и $f(x) \leqslant p(x)$ на X. Поскольку $-f(x) = f(-x) \leqslant p(-x)$, мы получаем $-p(-x) \leqslant f(x) \leqslant p(x)$.

2. Обобщенный предел

Понятие последовательности $\{x_n\}$ счетного числа элементов x_n можно обобщить, вводя понятие *обобщенной последовательности элементов*, соответствующих *направленному множеству* индексов, которое может быть и несчетным. При этом возникает понятие *предела обобщенной последовательности*, или *обобщенного предела по направленному множеству*, обобщающее понятие предела последовательности.

Определение. Частично упорядоченное множество A элементов $\alpha, \beta, \ldots$ называется *направленным множеством*, если оно удовлетворяет следующему условию

$$\begin{gathered}\text{для всякой пары } \alpha, \beta \text{ элементов множества } A\\ \text{существует такой элемент } \gamma \in A, \text{ что } \alpha \prec \gamma,\ \beta \prec \gamma.\end{gathered} \tag{1}$$

Допустим, что каждой точке α направленного множества A поставлено в соответствие некоторое множество $f(\alpha)$ вещественных чисел; $f(\alpha)$, таким образом, представляет собой вещественную функцию, не обязательно однозначную, заданную на направленном множестве A. Такая функция $f(\alpha)$ называется *обобщенной последовательностью.*

Если для любого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\alpha_0 \in A$, такой, что из соотношения $\alpha_0 \prec \alpha$ вытекает неравенство $|f(\alpha) - a| \leqslant \varepsilon$, где a — некоторое вещественное число, причем это неравенство справедливо для всех значений f в точке α, то a называется *пределом обобщенной последовательности* $f(\alpha)$, или *обобщенным пределом* $f(\alpha)$ *по направленному множеству* A. Для обозначения этого предела мы будем применять запись

$$\lim_{\alpha \in A} f(\alpha) = a.$$

Пример. Рассмотрим некоторое *разбиение* Δ отрезка $[0, 1]$:

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1.$$

Совокупность P всех разбиений вида Δ отрезка $[0, 1]$ становится направленным множеством, если ввести отношение частичного упорядочения следующим образом: пусть разбиение Δ' имеет вид $0 = t'_0 < t'_1 < \ldots < t'_m = 1$; тогда запись $\Delta \prec \Delta'$ означает, что $n \leqslant m$ и что каждое из чисел t_i равно некоторому из t'_j. Пусть

$x(t)$ — вещественная непрерывная функция, заданная на $[0, 1]$. За $f(\Delta)$ примем множество вещественных чисел вида

$$\sum_{j=0}^{n-1}(t_{j+1}-t_j)\,x(t'_j),$$

где t'_j — произвольная точка отрезка $[t_j, t_{j+1}]$.

Таким образом, $f(\Delta)$ — это множество всех *интегральных сумм Римана* для функции $x(t)$, относящихся к разбиению Δ. Интеграл Римана $\int\limits_0^1 x(t)\,dt$ представляет собой не что иное, как обобщенный предел $f(\Delta)$ по направленному множеству P.

Следующая теорема связана с существованием предела обобщенной последовательности.

Теорема (Банах). Пусть $x(\alpha)$ — вещественная ограниченная функция, определенная на направленном множестве A. Совокупность всех таких функций с операциями

$$(x+y)(\alpha)=x(\alpha)+y(\alpha), \qquad (\beta x)(\alpha)=\beta x(\alpha)$$

образует вещественное линейное пространство, которое мы обозначим через X. На пространстве X можно определить линейный функционал (обозначим его $\operatorname*{LIM}\limits_{\alpha\in A} x(\alpha)$), удовлетворяющий неравенствам

$$\varliminf_{\alpha\in A} x(\alpha)\leqslant \operatorname*{LIM}_{\alpha\in A} x(\alpha)\leqslant \varlimsup_{\alpha\in A} x(\alpha),$$

где

$$\varliminf_{\alpha\in A} x(\alpha)\equiv\sup_{\alpha}\inf_{\alpha\succ\beta} x(\beta), \qquad \varlimsup_{\alpha\in A} x(\beta)\equiv\inf_{\alpha}\sup_{\alpha\succ\beta} x(\beta).$$

Если обобщенный предел $\lim\limits_{\alpha\in A} x(\alpha)$ существует, то

$$\operatorname*{LIM}_{\alpha\in A} x(\alpha)=\lim_{\alpha\in A} x(\alpha).$$

Доказательство. Положим $p(x)=\varlimsup\limits_{\alpha\in A} x(\alpha)$. Как нетрудно проверить, функция $p(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Хана — Банаха. Следовательно, существует определенный на X линейный функционал f, такой, что $-p(-x)\leqslant f(x)\leqslant p(x)$ при $x\in X$. Нетрудно убедиться в том, что $\varliminf\limits_{\alpha\in A} x(\alpha)=-p(-x)$, поэтому, полагая $\operatorname*{LIM}\limits_{\alpha\in A} x(\alpha)=f(x)$, мы завершаем доказательство теоремы.

3. Полные локально выпуклые линейные топологические пространства

Определение. По аналогии с числовыми обобщенными последовательностями можно определить обобщенные последовательности $\{x_\alpha\}$ элементов линейного топологического пространства X. Говорят, что обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ *сходится к элементу* x пространства X, если для всякой окрестности $U(x)$ элемента x существует такой индекс α_0, что $x_\alpha \in U(x)$ для всех индексов $\alpha \succ \alpha_0$. Обобщенная последовательность $\{x_\alpha\}$ называется *фундаментальной*, если каждой окрестности $U(0)$ нулевого вектора пространства X можно сопоставить такой индекс α_0, что $(x_\alpha - x_\beta) \in U(0)$ для всех индексов α, $\beta \succ \alpha_0$. Линейное топологическое пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная обобщенная последовательность, принадлежащая X, сходится к некоторому элементу $x \in X$ в смысле приведенного выше определения.

Замечание. Можно ослабить условие полноты и потребовать только, чтобы каждая обычная последовательность из X, фундаментальная как обобщенная последовательность, сходилась к некоторому элементу $x \in X$. В этом случае пространство называется *секвенциально полным*. Для нормированных линейных пространств эти определения полноты эквивалентны. В общем случае, однако, не всякое секвенциально полное пространство является полным.

Пример локально выпуклого секвенциально полного линейного топологического пространства. Допустим, что некоторая последовательность $\{f_h(x)\}$ функций пространства $\mathfrak{D}(\Omega)$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{h, k \to \infty} (f_h - f_k) = 0$. Согласно следствию из предложения 7, гл. I, § 1, мы тем самым предполагаем, что в области Ω существует бикомпактное подмножество K, такое, что $\operatorname{supp}(f_h) \subseteq K$ $(h = 1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{h, k \to \infty} (D^s f_h(x) - D^s f_k(x)) = 0$ равномерно на K для любого дифференциального оператора D^s. Тогда, применяя теорему Асколи — Арцела, легко доказать существование такой функции $f \in \mathfrak{D}(\Omega)$, что $\lim\limits_{h \to \infty} D^s f_h(x) = D^s f(x)$ равномерно на множестве K для всякого дифференциального оператора D^s. Таким образом, в $\mathfrak{D}(\Omega)$ существует предел $\lim\limits_{h \to \infty} f_h = f$, и, следовательно, пространство $\mathfrak{D}(\Omega)$ секвенциально полно. Точно так же можно доказать, что и пространство $\mathfrak{E}(\Omega)$ секвенциально полно.

Как и в случае нормированного линейного пространства, справедлива следующая

Теорема. Всякое локально выпуклое линейное топологическое пространство X может быть вложено в некоторое локально выпуклое полное линейное топологическое пространство, в котором X образует плотное подмножество.

Доказательства этой теоремы мы не приводим. Литература по этому вопросу указана в книге Дьедонне [1]. См. также Кёте [1].

4. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в комплексных линейных пространствах

Теорема (Боненблюст — Собчик). Пусть X — комплексное линейное пространство и $p(x)$ — некоторая определенная на X полунорма. Пусть M — комплексное линейное подпространство в X и f — заданный на M комплексный линейный функционал, такой, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ на M. Тогда существует определенный на всем пространстве X комплексный линейный функционал F, такой, что (1) F служит продолжением f; (2) $|F(x)| \leqslant p(x)$ на X.

Доказательство. Заметим, что если в комплексном линейном пространстве ограничиться умножением векторов лишь на вещественные числа, то это пространство можно рассматривать как вещественное. Если $f(x) = g(x) + ih(x)$, где $g(x)$ и $h(x)$ — соответственно вещественная и мнимая части $f(x)$, то g и h — вещественные линейные функционалы, определенные на M. При этом

$$|g(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x) \quad \text{и} \quad |h(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x \in M.$$

Так как для каждого $x \in M$

$$g(ix) + ih(ix) = f(ix) = if(x) = i(g(x) + ih(x)) = -h(x) + ig(x),$$

то

$$h(x) = -g(ix) \quad \text{для всех} \quad x \in M.$$

По теореме, доказанной в § 1 этой главы, мы можем продолжить g до вещественного линейного функционала G, определенного во всем пространстве X и удовлетворяющего условию $G(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X$. Следовательно, $-G(x) = G(-x) \leqslant p(-x) = p(x)$, и поэтому $|G(x)| \leqslant p(x)$. Определим теперь функционал

$$F(x) = G(x) - iG(ix).$$

Легко видеть, что F — комплексный линейный функционал, определенный на X, так как $F(ix) = G(ix) - iG(-x) = G(ix) + iG(x) = iF(x)$. Функционал F служит продолжением f, поскольку при $x \in M$

$$F(x) = G(x) - iG(ix) = g(x) - ig(ix) = g(x) + ih(x) = f(x).$$

Чтобы доказать неравенство $|F(x)| \leqslant p(x)$, запишем $F(x)$ в виде $F(x) = re^{-i\theta}$. Тогда $|F(x)| = e^{i\theta}F(x) = F(e^{i\theta}x)$, и выражение $F(e^{i\theta}x)$ оказывается вещественным и неотрицательным. Поэтому $|F(x)| = |G(e^{i\theta}x)| \leqslant p(e^{i\theta}x) = |e^{i\theta}| \, p(x) = p(x)$.

5. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в нормированных линейных пространствах

Теорема 1. Пусть X — нормированное линейное пространство, M — его линейное подпространство, а f_1 — непрерывный линейный функционал, заданный на M. Тогда существует определенный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал f, такой, что 1) f служит продолжением f_1; 2) $\|f_1\| = \|f\|$.

Доказательство. Положим $p(x) = \|f_1\| \cdot \|x\|$. Тогда $p(x)$ — непрерывная полунорма, определенная на всем пространстве X, причем $|f_1(x)| \leqslant p(x)$ на M. По теореме предыдущего параграфа существует определенный на всем пространстве X линейный функционал f, служащий продолжением f_1 и удовлетворяющий условию $|f(x)| \leqslant p(x)$. Таким образом, $\|f\| \leqslant \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} p(x) = \|f_1\|$. С другой стороны, поскольку f — продолжение f_1, справедливо неравенство $\|f\| \geqslant \|f_1\|$. В результате мы получаем $\|f_1\| = \|f\|$.

Приложение к проблеме моментов

Теорема 2. Пусть X — нормированное линейное пространство. Допустим, что заданы последовательность элементов $\{x_n\} \in X$, последовательность комплексных чисел $\{\alpha_n\}$ и положительное число γ. Тогда для того чтобы существовал определенный во всем пространстве X непрерывный линейный функционал f, такой, что $f(x_i) = \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и $\|f\| \leqslant \gamma$, необходимо и достаточно, чтобы для всякого положительного целого n и любых комплексных $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ удовлетворялось неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| \leqslant \gamma \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i \right\|.$$

Доказательство. Необходимость этого условия следует из определения нормы $\|f\|$. Докажем его достаточность. Рассмотрим множество

$$X_1 = \left\{ z;\ z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i, \text{ где } n \text{ и } \beta_i \text{ произвольны} \right\}.$$

Если имеются два представления вида

$$z = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i'=1}^{m} \beta_{i'} x_{i'},$$

одного и того же элемента $z \in X_1$, то по условию теоремы

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i - \sum_{i'=1}^{m} \beta_{i'} \alpha_{i'} \right| \leqslant \gamma \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i - \sum_{i'=1}^{m} \beta_{i'} x_{i'} \right\| = 0.$$

Поэтому формула $f_1\left(\sum_{i=1}^{n}\beta_i x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\alpha_i$ определяет на множестве X_1 непрерывный линейный функционал f_1. Для завершения доказательства остается лишь, используя теорему 1, продолжить f_1 до непрерывного линейного функционала f на X, такого, что $\|f\|=\|f_1\|$.

Замечание. В § 9 будет показано, что всякий непрерывный линейный функционал f на пространстве $C[0, 1]$ может быть представлен в виде

$$f(x)=\int_0^1 x(t)\,m(dt),$$

где m — единственным образом определенная мера Бэра на интервале $[0, 1]$. Поэтому если мы возьмем $x_j(t)=t^{j-1}$ $(j=1, 2, \ldots)$, то теорема 2 даст условие разрешимости так называемой *проблемы моментов*

$$\int_0^1 t^{j-1}m(dt)=\alpha_j \quad (j=1, 2, \ldots).$$

6. Существование нетривиальных непрерывных линейных функционалов

Теорема 1. Пусть X — вещественное или комплексное линейное топологическое пространство, x_0 — его произвольная точка и $p(x)$ — непрерывная полунорма на X. Тогда существует определенный на X непрерывный линейный функционал F, такой, что $F(x_0)=p(x_0)$ и $|F(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$.

Доказательство. Обозначим через M множество всех элементов вида αx_0 и определим функционал f на M формулой $f(\alpha x_0)=\alpha p(x_0)$. Тогда f — линейный функционал на M, причем выполняется условие $|f(\alpha x_0)|=|\alpha p(x_0)|=p(\alpha x_0)$. Согласно теореме из § 4, существует продолжение F функционала f, такое, что $|F(x)|\leqslant p(x)$ при всех $x\in X$. Следовательно, функционал $F(x)$ непрерывен в точке $x=0$ вместе с полунормой $p(x)$, и, следовательно, как линейный функционал он непрерывен во всех точках пространства X.

Следствие 1. Пусть X — локально выпуклое пространство, а $x_0\neq 0$ — некоторый его элемент. Тогда существует непрерывная полунорма $p(x)$ на X, такая, что $p(x_0)\neq 0$. Поэтому, согласно теореме 1, существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0)=p(x_0)\neq 0 \quad \text{и} \quad |f_0(x)|\leqslant p(x) \quad \text{при} \quad x\in X.$$

Следствие 2. Пусть X — нормированное линейное пространство, а $x_0 \neq 0$ — некоторый его элемент. Тогда существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0) = \|x_0\| \quad \text{и} \quad \|f_0\| = 1.$$

Доказательство. Примем за $p(x)$ норму $\|x\|$ и применим следствие 1. Тогда $\|f_0\| \leqslant 1$, так как $|f_0(x)| \leqslant \|x\|$. Но, с другой стороны, $f_0(x_0) = \|x_0\|$, и поэтому $\|f_0\| = 1$.

Замечание. Следующая теорема доказывается так же, как предыдущая, с использованием теоремы из § 1.

Теорема 1′. Пусть X — вещественное линейное топологическое пространство, x_0 — некоторая его точка, а $p(x)$ — вещественный непрерывный функционал на X, такой, что

$$p(x+y) \leqslant p(x) + p(y) \quad \text{и} \quad p(\alpha x) = \alpha p(x) \quad \text{для} \quad \alpha \geqslant 0.$$

Тогда существует непрерывный вещественный линейный функционал F на X, такой, что $F(x_0) = p(x_0)$ и $-p(-x) \leqslant F(x) \leqslant p(x)$ при $x \in X$.

Теорема 2. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Пусть M — линейное подпространство в X, а f — непрерывный линейный функционал на M. Тогда существует непрерывный линейный функционал F на X, представляющий собой продолжение f.

Доказательство. Так как функционал f непрерывен на множестве M и пространство X — локально выпуклое, существует открытая выпуклая уравновешенная окрестность U точки $x = 0$ пространства X, такая, что $|f(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in M \cap U$. Обозначим через p функционал Минковского множества U. Тогда p представляет собой непрерывную полунорму пространства X и $U = \{x;\ p(x) < 1\}$. Для каждой точки $x \in M$ выберем число $\alpha > 0$ таким, что $\alpha > p(x)$. Тогда $p(x/\alpha) < 1$, и поэтому $|f(x/\alpha)| \leqslant 1$, т. е. $|f(x)| \leqslant \alpha$. Переходя к пределу при $\alpha \downarrow p(x)$, мы видим, что $|f(x)| \leqslant p(x)$ при $x \in M$. Поэтому, согласно теореме из § 4, существует определенный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал F, служащий продолжением f, причем $|F(x)| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$.

Теорема 3 (Мазур). Пусть X — вещественное или комплексное локально выпуклое линейное топологическое пространство и M — некоторое его замкнутое выпуклое уравновешенное подмножество. Тогда для любой точки $x_0 \notin M$ существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что $f_0(x_0) > 1$ и $|f_0(x)| \leqslant 1$ на M.

Доказательство. Ввиду того что подмножество M замкнуто, существует выпуклая уравновешенная окрестность V точки $x = 0$, такая, что $M \cap (x_0 + V) = \emptyset$. Из того, что окрестность V уравновешенная и выпуклая, вытекает, что $\left(M + \frac{V}{2}\right) \cap \left(x_0 + \frac{V}{2}\right) = \emptyset$. Так как множество $\left(x_0+\frac{V}{2}\right)$ является окрестностью точки x_0, замыкание U множества $\left(M+\frac{V}{2}\right)$ не содержит x_0. Поскольку $M\ni 0$, замкнутое выпуклое уравновешенное множество U представляет собой окрестность нуля, так как U содержит как подмножество множество $V/2$. Пусть p — функционал Минковского для U. Множество U замкнуто, поэтому для любой точки $x_0 \notin U$ выполняется неравенство $p(x_0)>1$; кроме того, $p(x)\leqslant 1$, если $x\in U$.

Отсюда на основании следствия 1 теоремы 1 мы заключаем, что существует непрерывный линейный функционал f_0, заданный во всем пространстве X, такой, что $f_0(x_0)=p(x_0)>1$ и $|f_0(x)|\leqslant p(x)$ для всех $x\in X$. Поэтому, в частности, $|f_0(x)|\leqslant 1$ на M.

Следствие. Пусть M — замкнутое линейное подпространство локально выпуклого линейного топологического пространства X. Тогда для любой точки $x_0\in X-M$ существует заданный на всем пространстве X непрерывный линейный функционал f_0, такой, что $f_0(x_0)>1$ и $f_0(x)=0$ на M. Кроме того, если X — нормированное линейное пространство и $\operatorname{dis}(x_0, M)>d>0$, то можно выбрать функционал f_0 так, что $\|f_0\|\leqslant 1/d$.

Доказательство. Первая часть утверждения вытекает из линейности подпространства M. Для доказательства заключительной части следует положить $U=\{x;\ \operatorname{dis}(x, M)\leqslant d\}$ в доказательстве теоремы 3.

Замечание. Следующая теорема доказывается так же, как предыдущая, с использованием теоремы 1′.

Теорема 3′ (Мазур). Пусть X — локально выпуклое вещественное линейное топологическое пространство и M — его замкнутое выпуклое подмножество, такое, что $M\ni 0$. Тогда для любой точки $x_0\notin M$ существует определенный на всем пространстве X непрерывный вещественный линейный функционал f_0, такой, что $f_0(x_0)>1$ и $f_0(x)\leqslant 1$ на M.

Теорема 4 (Мазур). Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и M — некоторая выпуклая уравновешенная окрестность нуля в X. Тогда для любой точки $x_0\notin M$ существует непрерывный линейный функционал f_0 на X, такой, что

$$f_0(x_0)\geqslant \sup_{x\in M}|f_0(x)|.$$

Доказательство. Обозначим через p функционал Минковского множества M. Тогда $p(x_0)\geqslant 1$ и $p(x)\leqslant 1$ для $x\in M$. Функционал p непрерывен, так как M — окрестность нуля в X. Поэтому, согласно следствию 1 теоремы 1, существует такой непрерывный линейный функционал f_0 на X, что $f_0(x_0)=p(x_0)\geqslant 1$ и $|f_0(x)|\leqslant p(x)\leqslant 1$ при $x\in M$.

Теорема 5 (Хелли). Пусть X — некоторое B-пространство и $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — конечная система ограниченных линейных функционалов на X. Зададим произвольно n чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Для того чтобы при каждом $\varepsilon > 0$ нашелся элемент $x_\varepsilon \in X$, удовлетворяющий условиям

$$f_i(x_\varepsilon) = \alpha_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{и} \quad \|x_\varepsilon\| \leqslant \gamma + \varepsilon$$

(γ — произвольное положительное число), необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе n чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ выполнялось неравенство

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leqslant \gamma \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|.$$

Доказательство. Необходимость этого условия вытекает из определения нормы непрерывного линейного функционала. Докажем его достаточность. Без ограничения общности можно допустить, что функционалы f_j линейно независимы, так как в противном случае из $\{f_j\}$ можно выбрать подсистему линейно независимых функционалов, порождающих то же линейное подпространство, что и $\{f_j\}$.

Рассмотрим отображение $x \to \varphi(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ пространства X на гильбертово пространство $l^2(n)$, состоящее из всех векторов вида $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, с нормой $\|x\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{1/2}$. По теореме об открытости отображения (гл. II, § 5) при любом $\varepsilon > 0$ образ $\varphi(S_\varepsilon)$ шара $S_\varepsilon = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon\}$ содержит нулевой вектор пространства $l^2(n)$ в качестве своей внутренней точки. Предположим, что элемент $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ не принадлежит $\varphi(S_\varepsilon)$. Тогда, согласно приведенной выше теореме Мазура, существует непрерывный линейный функционал F на пространстве $l^2(n)$, такой, что

$$F((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) \geqslant \sup_{\|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon} |F(\varphi(x))|.$$

Так как $l^2(n)$ — гильбертово пространство, функционал F определяется некоторым элементом $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in l^2(n)$ таким образом, что $F((\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j$. Следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \beta_j \geqslant \left|\sum_{j=1}^{n} f_j(x) \beta_j\right| \quad \text{при} \quad \|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon.$$

Но верхняя грань правой части последнего неравенства при $\|x\| \leqslant \gamma + \varepsilon$ равна $(\gamma + \varepsilon) \left\|\sum_{j=1}^{n} f_j \beta_j\right\|$, а это противоречит условию теоремы. Полученное противоречие и доказывает наше утверждение.

7. Операторные топологии

Пусть X, Y — локально выпуклые линейные топологические пространства над одним и тем же скалярным полем (полем вещественных или комплексных чисел). Обозначим через $L(X, Y)$ совокупность всех непрерывных линейных операторов, отображающих X в Y. Множество $L(X, Y)$ с операциями

$$(\alpha T+\beta S)x=\alpha Tx+\beta Sx, \quad \text{где} \quad T, S \in L(X, Y) \quad \text{и} \quad x \in X,$$

образует линейное пространство. В этом линейном пространстве можно ввести различные топологии.

(1) Топология простой сходимости. Эта топология соответствует сходимости в каждой точке пространства X [1]; она определяется семейством полунорм вида

$$p(T)=p(T;\ x_1, x_2, \ldots, x_n;\ q)=\sup_{1 \leqslant j \leqslant n} q(Tx_j),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольно выбранная конечная система элементов пространства X, а q — любая непрерывная полунорма на Y. Пространство $L(X, Y)$ с такой топологией мы будем обозначать через $L_s(X, Y)$ [1]. Ясно, что это локально выпуклое линейное топологическое пространство.

(2) Топология ограниченной сходимости. Эта топология соответствует равномерной сходимости на ограниченных множествах, принадлежащих X [2]. Она определяется семейством полунорм вида

$$p(T)=p(T;\ B;\ q)=\sup_{x \in B} q(Tx),$$

где B — произвольное ограниченное множество из X, а q — любая непрерывная ограниченная полунорма на Y. Пространство $L(X, Y)$ с такой топологией мы обозначим через $L_b(X, Y)$. Ясно, что это локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Всякое конечное множество точек пространства X ограничено, поэтому топология простой сходимости *слабее*, чем топология ограниченной сходимости, в том смысле, что открытые множества пространства $L_s(X, Y)$ принадлежат семейству открытых множеств пространства $L_b(X, Y)$, но не наоборот.

---

[1]) Эта топология соответствует сходимости в каждой точке $x \in X$ в том смысле, что условие существования в пространстве $L_s(X, Y)$ обобщенного предела $\lim_{\alpha \in A} T_\alpha = T$ в этом случае эквивалентно сходимости $\lim_{\alpha \in A} T_\alpha x = Tx$ для всех $x \in X$. — *Прим. перев.*

[2]) При такой топологии условие $\lim_{\alpha \in A} T_\alpha = T$ эквивалентно равномерной относительно значений $x \in B$ сходимости $\lim_{\alpha \in A} T_\alpha x = Tx$ обобщенной последовательности $T_\alpha x$ на всяком ограниченном множестве $B \subseteq X$. — *Прим. перев.*

Определение 1. В случае когда X и Y — нормированные линейные пространства, топологию в $L_s(X, Y)$ обычно называют *сильной операторной топологией*, а топологию в $L_b(X, Y)$ — *равномерной операторной топологией* [1]).

Сопряженные пространства. Слабая и слабая* топологии

Определение 1′. В частном случае, когда Y является полем вещественных или комплексных чисел с обычной топологией, $L(X, Y)$ называется пространством, *сопряженным* к X, и обозначается через X'. Пространство X', таким образом, состоит из всех непрерывных линейных функционалов на X. Топологию простой сходимости в пространстве X' мы будем называть в этом случае *слабой* топологией* [2]). Сопряженное к X пространство X', топологизированное таким способом, мы назовем *слабым* сопряженным пространством*; иногда мы будем обозначать его через X'_{w^*}. Топологию ограниченной сходимости в пространстве X' мы назовем *сильной топологией*. Пространство X' с такой топологией мы иногда будем обозначать X'_s и называть *сильным сопряженным пространством*.

Определение 2. Для любых $x \in X$ и $x' \in X'$ обозначим символом $\langle x, x' \rangle$ или $x'(x)$ значение функционала x' в точке x. Таким образом, слабая* топология в X', т. е. топология пространства X'_{w^*}, определяется семейством полунорм вида

$$p(x') = p(x'; x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |\langle x_j, x' \rangle|,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — произвольная конечная система элементов пространства X. Сильная топология в X', т. е. топология пространства X'_s, определяется системой полунорм вида

$$p(x') = p(x'; B) = \sup_{x \in B} |\langle x, x' \rangle|,$$

где B — произвольное ограниченное множество пространства X.

Теорема 1. Если X — нормированное линейное пространство, то его сильное сопряженное X'_s представляет собой B-пространство с нормой

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |f(x)|.$$

---

[1]) Существуют и другие интересные и важные для приложений типы операторных топологий (см., например, Данфорд — Шварц [1], Бурбаки [2]). — *Прим. перев.*

[2]) Если X — нормированное пространство, то „слабая* топология" в X', согласно приведенным ранее определениям, — это „сильная операторная топология" в X'. — *Прим. перев.*

Доказательство. Обозначим через B произвольное ограниченное множество из X. Тогда $\sup_{b\in B}\|b\|=\beta<\infty$, и поэтому из неравенства $\|f\|\leqslant\alpha$ следует, что $p(f;B)=\sup_{b\in B}|f(b)|\leqslant\sup_{\|x\|\leqslant\beta}|f(x)|\leqslant\alpha\beta$. С другой стороны, единичный шар $S=\{x;\ \|x\|\leqslant 1\}$ пространства X является ограниченным множеством, и поэтому $\|f\|=p(f;\ S)$. Это показывает, что топология пространства X'_s эквивалентна топологии, определяемой нормой $\|f\|$.

Полнота пространства X'_s доказывается следующим образом. Пусть последовательность $\{f_n\}$, принадлежащая X'_s, удовлетворяет условию $\lim_{n,m\to\infty}\|f_n-f_m\|=0$. Тогда для любого $x\in X$ мы имеем $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\|f_n-f_m\|\cdot\|x\|\to 0$ при $n, m\to\infty$, следовательно, существует конечный предел $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$. Линейность функционала f вполне очевидна. Его непрерывность вытекает из того, что $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ равномерно на единичном шаре S. Отсюда же следует, что $\lim_{n\to\infty}\|f_n-f\|=0$.

Следующая теорема доказывается совершенно аналогично.

Теорема 2. Если X, Y — нормированные линейные пространства, то равномерная операторная топология пространства $L_b(X, Y)$ определяется нормой оператора

$$\|T\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|.$$

Определение 3. Назовем *слабой топологией* локально выпуклого линейного топологического пространства X топологию, определяемую семейством полунорм вида

$$p(x)=p(x;\ x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n)=\sup_{1\leqslant j\leqslant n}|\langle x,\ x'_j\rangle|,$$

где $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — произвольная конечная система элементов пространства X'. Пространство X с такой топологией мы будем иногда обозначать через X_w.

8. Вложение пространства X во второе сопряженное пространство X''

Сначала докажем следующую теорему.

Теорема 1 (Банах). Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и X' — его сопряженное. Линейный функционал $f(x')$ на X' имеет вид

$$f(x')=\langle x_0,\ x'\rangle,$$

где x_0 — некоторая точка из X, тогда и только тогда, когда функционал f непрерывен в слабой* топологии пространства X'.

Доказательство. Необходимость приведенного условия очевидна, так как выражение $|\langle x_0, x'\rangle|$ представляет собой одну из полунорм, определяющих в X' слабую* топологию. Достаточность доказывается следующим образом. Из непрерывности функционала $f(x')$ в слабой* топологии пространства X' вытекает, что существует конечная система точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$, такая, что $|f(x')| \leqslant \sup\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |\langle x_j, x'\rangle|$. Поэтому

$$\text{если } f_i(x') \equiv \langle x_i, x'\rangle = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \text{ то } f(x') = 0.$$

Рассмотрим линейное отображение $L: X' \to l^2(n)$, определенное формулой

$$L(x') = (f_1(x'), \quad f_2(x'), \ldots, f_n(x')).$$

Из условия $L(x_1') = L(x_2')$ вытекает равенство $L(x_1' - x_2') = 0$, а это означает, что $f_i(x_1' - x_2') = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, следовательно, $f(x_1' - x_2') = 0$. Поэтому формула

$$F(L(x')) = F(f_1(x'), f_2(x'), \ldots, f_n(x')) = f(x')$$

определяет непрерывное линейное отображение F, заданное на подпространстве $L(X')$ пространства $l^2(n)$. Это отображение может быть продолжено до непрерывного линейного функционала, определенного на всем пространстве $l^2(n)$. Такое продолжение возможно, так как пространство $l^2(n)$ конечномерно (этот случай, очевидно, проще, чем продолжение функционала в бесконечномерном линейном пространстве, так что нет необходимости привлекать теорему Хана — Банаха). Это продолжение мы обозначим той же буквой F. Если элементы пространства $l^2(n)$ записывать в виде

$$(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j, \text{ где } e_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, 0, \ldots, 0),$$

причем 1 стоит в выражении для e_i на i-м месте, то ясно, что

$$F(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{j=1}^{n} y_j \alpha_j, \qquad \alpha_j = F(e_j).$$

Поэтому

$$f(x') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_j, x'\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, x'\right\rangle,$$

и достаточность сформулированного условия доказана.

Следствие. Для каждой точки $x_0 \in X$ формула $f_0(x') = \langle x_0, x'\rangle$ определяет на пространстве X_s' непрерывный линейный функционал

$f_0(x')$ [1]. При этом отображение

$$x_0 \to f_0 = Jx_0$$

пространства X в пространство $(X'_s)'_s$ удовлетворяет условию

$$J(x_1 + x_2) = Jx_1 + Jx_2, \qquad J(\alpha x) = \alpha Jx.$$

Теорема 2. Если X — нормированное линейное пространство, то отображение J *изометрично*, т. е. $\|Jx\| = \|x\|$.

Доказательство. Так как $|f_0(x')| = |\langle x_0, x'\rangle| \leqslant \|x_0\| \cdot \|x'\|$, то $\|f_0\| \leqslant \|x_0\|$. С другой стороны, если $x_0 \neq 0$, то, согласно следствию 2 теоремы 1, § 6, существует такой элемент $x'_0 \in X'$, что $\langle x_0, x'_0\rangle = \|x_0\|$ и $\|x'_0\| = 1$. Поэтому $f_0(x'_0) = \langle x_0, x'_0\rangle = \|x_0\|$, откуда $\|f_0\| \geqslant \|x_0\|$. Тем самым мы показали, что $\|Jx\| = \|x\|$.

Замечание. Пространство $(X'_s)'_s$ как сильное сопряженное к X'_s представляет собой B-пространство. Следовательно, нормированное линейное пространство X можно рассматривать как линейное подпространство B-пространства $(X'_s)'_s$, вложенное с помощью отображения $x \to Jx$. Поэтому сильное замыкание [2] множества JX в B-пространстве $(X'_s)'_s$ дает конкретную реализацию пополнения пространства X.

Определение 4. Нормированное линейное пространство X называется *рефлексивным*, если оно может быть отождествлено со своим вторым сопряженным пространством $(X'_s)'_s$ с помощью определенного выше соответствия $x \to Jx$. Мы уже знаем (гл. III, § 6), что гильбертовы пространства рефлексивны. Как замечено выше, $(X'_s)'_s$ является B-пространством, поэтому всякое рефлексивное нормированное пространство должно быть B-пространством.

Теорема 3. Пусть X — некоторое B-пространство и x''_0 — произвольный ограниченный линейный функционал на X'_s. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и всякой конечной системы элементов $f_1, f_2, \ldots, f_n$ пространства X'_s существует элемент $x_0 \in X$, такой, что

$$\|x_0\| \leqslant \|x''_0\| + \varepsilon \quad \text{и} \quad f_j(x_0) = x''_0(f_j) \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

---

[1] Функционал $f_0(x') = \langle x_0, x'\rangle$, как было показано, непрерывен в слабой* топологии X'_{w^*}, поэтому он непрерывен и в более сильной топологии X'_s. — *Прим. перев.*

[2] То есть замыкание в сильной топологии пространства $(X'_s)'_s$. — *Прим перев.*

Доказательство. Применяя теорему Хелли (теорема 5, § 6), мы устанавливаем, что для любой системы чисел $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j\alpha_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\beta_j x_0''(f_j)\right| = \left|x_0''\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j\right)\right| \leqslant \gamma\left\|\sum_{j=1}^{n}\beta_j f_j\right\|,$$

$$\text{где } \gamma = \|x_0''\|, \quad \alpha_j = x_0''(f_j).$$

Применяя эту теорему еще раз, мы находим элемент $x_0 \in X$, для которого $\|x_0\| \leqslant \gamma + \varepsilon = \|x_0''\| + \varepsilon$ и $x_0(f_j) = \alpha_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Следствие. Единичный шар $S = \{x \in X; \ \|x\| \leqslant 1\}$ B-пространства X является плотным в единичном шаре пространства $(X_s')_s'$ в слабой* топологии пространства $(X_s')'$.

9. Примеры сопряженных пространств

Пример 1. Пространство $(c_0)' = (l^1)$.

Всякому элементу $f \in (c_0)'$ соответствует единственным образом определенный элемент $y_f = \{\eta_n\} \in (l^1)$, такой, что

$$\langle x, f\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n \quad \text{и} \quad \|f\| = \|y_f\| \tag{1}$$

для всех $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$. Обратно, каждый элемент $y = \{\eta_n\} \in (l^1)$ определяет некоторый элемент $f_y \in (c_0)'$, такой, что

$$\langle x, f_y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n \quad \text{и} \quad \|f_y\| = \|y\| \tag{1'}$$

для всех $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$.

Доказательство. Определим вектор e_k формулой

$$e_k = (\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{k-1}, 1, 0, 0, \ldots) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Для любых $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$ и $f \in (c_0)'$

$$\langle x, f\rangle = \lim_{k\to\infty}\left\langle\sum_{n=1}^{k}\xi_n e_n, f\right\rangle = \lim_{k\to\infty}\sum_{n=1}^{k}\xi_n\eta_n, \quad \eta_n = f(e_n),$$

так как $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{k}\xi_n e_n = x$. Положим $\eta_n = \xi_n|\eta_n|$ при $\eta_n \neq 0$ и $\varepsilon_n = \infty$ при $\eta_n = 0$. Выберем точку $x^{(n_0)} = \{\xi_n\} \in (c_0)$ так, что $\xi_n = \varepsilon_n^{-1}$ при $n \leqslant n_0$ и $\xi_n = 0$ при $n > n_0$. Тогда $\|x^{(n_0)}\| = 1$, и поэтому $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} |\langle x, f\rangle| \geqslant |\langle x^{(n_0)}, f\rangle| = \sum\limits_{n=1}^{n_0} |\eta_n|$. Полагая $n_0 \to \infty$, мы видим, что $y_f = \{\eta_n\} \in (l^1)$ и $\|y_f\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \leqslant \|f\|$.

Обратно, если $y = \{\eta_n\} \in (l^1)$, то $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n\eta_n\right| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$ для всех $x = \{\xi_n\} \in (c_0)$, и поэтому y определяет элемент $f_y \in (c_0)'$, для которого $\|f_y\| \leqslant \|y\|$.

Пример 2. Пространство $(c)' = (l^1)$.

Всякий элемент $x = \{\xi_n\} \in (c)$ можно представить в виде $x = \xi_0 e_0 + s\text{-}\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{k} (\xi_n - \xi_0) e_n$, где $\xi_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n$, $e_0 = \{1, 1, 1, \ldots\}$. Таким образом, для всякого элемента $f \in (c)'$

$$\langle x, f\rangle = \xi_0 \langle e_0, f\rangle + \lim_{k \to \infty} \left\langle \sum_{n=1}^{k} (\xi_n - \xi_0) e_n, f \right\rangle =$$

$$= \xi_0 \eta_0' + \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_n - \xi_0) \eta_n, \qquad (2)$$

где $\eta_0' = \langle e_0, f\rangle$ и $\eta_n = \langle e_n, f\rangle$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Как и в предыдущем примере, выберем точку $x^{(n_0)} = \{\xi_n\} \in (c_0) \subseteq (c)$, для которой

$$\|x^{(n_0)}\| \leqslant 1, \ \xi_0 = \lim_{n \to \infty} \xi_n = 0 \ \text{и} \ \langle x^{(n_0)}, f\rangle = \sum_{n=1}^{n_0} |\eta_n|.$$

Тогда $\{\eta_n\}^{\infty} \in (l^1)$, так как $|\langle x^{(n_0)}, f\rangle| \leqslant \|x^{(n_0)}\| \cdot \|f\|$. Положим теперь

$$\eta_0' - \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n = \eta_0.$$

Из условия (2) получаем

$$\langle x, f\rangle = \xi_0\eta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n\eta_n, \ \text{где} \ x = \{\xi_n\} \in (c) \ \text{и} \ \xi_0 = \lim_{n \to \infty} \xi_n. \qquad (2')$$

Положим снова $\eta_n = \varepsilon_n |\eta_n|$ при $\eta_n \neq 0$ и $\varepsilon_n = \infty$ при $\eta_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Возьмем элемент $x = \{\xi_n\} \in (c)$, такой, что

$$\xi_n = \varepsilon_n^{-1} \ \text{при} \ n \leqslant n_0 \ \text{и} \ \xi_n = \varepsilon_0^{-1} \ \text{при} \ n > n_0.$$

В этом случае $\|x\| \leqslant 1$, $\xi_0 = \lim\limits_{n \to \infty} \xi_n = \varepsilon_0^{-1}$ и $\langle x, f\rangle = |\eta_0| + \sum\limits_{n=1}^{n_0} |\eta_n| + \varepsilon_0^{-1} \sum\limits_{n=n_0+1}^{\infty} \eta_n$. Поэтому $|\eta_0| + \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\eta_n| \leqslant \|f\|$.

Обратно, если выбрать $y=\{\eta_n\}_0^\infty$ так, что $\|y\|=|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|<\infty$, то элемент

$$\eta_0\cdot\lim_{n\to\infty}\xi_n+\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n,$$

где $x=\{\xi_n\}_1^\infty\in(c)$, определит вектор $f_y\in(c)'$, такой, что $\|f_y\|\leqslant|\eta_0|+\sum_{n=1}^{\infty}|\eta_n|$.

Таким образом, мы показали, что $(c)'=(l^1)$.

Пример 3. Пространство $L^p(S,\mathfrak{B},m)'=L^q(S,\mathfrak{B},m)$ $(1\leqslant p<\infty$ и $p^{-1}+q^{-1}=1)$.

Всякому элементу $f\in L^p(S)'$ соответствует некоторый элемент $y_f\in L^q(S)$, такой, что

$$\langle x,f\rangle=\int_S x(s)\,y_f(s)\,m(ds)\ \text{для всех}\ x\in L^p(S)\ \text{и}\ \|f\|=\|y_f\|. \tag{3}$$

Обратно, произвольная точка $y\in L^q(S)$ определяет некоторый элемент $f_y\in L^p(S)'$, такой, что

$$\langle x,f_y\rangle=\int_S x(s)\,y(s)\,m(ds)\ \text{для всех}\ x\in L^p(S)\ \text{и}\ \|f_y\|=\|y\|. \tag{3'}$$

Доказательство. Пусть $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j$, где множества B_j удовлетворяют условию $0<m(B_j)<\infty$; положим $B^{(n)}\equiv\bigcup_{j=1}^{n}B_j$. При любом фиксированном n характеристическая функция $C_B(s)$ всякого множества $B\subseteq B^{(n)}$ [1]) принадлежит $L^p(S)$. Поэтому функция множества $\psi(B)=\langle C_B,f\rangle$ σ-аддитивна и m-абсолютно непрерывна на множествах $B\subseteq B^{(n)}$. По теореме Лебега — Никодима (гл. III, § 8) существует функция $y_n(s)\in L^1(B^{(n)},\mathfrak{B}^{(n)},m)$, такая, что

$$\psi(B)=\int_B y_n(s)\,m(ds)\ \text{для всех}\ B\subseteq B^{(n)},$$

где $\mathfrak{B}^{(n)}$ — это семейство множеств вида $\mathfrak{B}^{(n)}=\{B\cap B^{(n)};\ B\in\mathfrak{B}\}$. Поэтому, полагая $y(s)=y_n(s)$ для $s\in B^{(n)}$, мы получаем

$$\langle C_B,f\rangle=\int_B y(s)\,m(ds)\quad\text{для всех}\ B\in\mathfrak{B}^{(n)}\quad(n=1,2,\ldots).$$

[1]) Здесь и далее подразумевается, что множества $B\subseteq B^{(n)}$, о которых идет речь, принадлежат $\mathfrak{B}$. — *Прим. перев.*

Следовательно, для всякой простой функции x

$$\langle x, f\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds). \tag{4}$$

Выберем $x \in L^p(S)$ и положим

$$x_n(s) = \begin{cases} x(s) & \text{при } |x(s)| \leqslant n, \ s \in B^{(n)}, \\ 0 & \text{при других значениях } s. \end{cases}$$

Разобьем множество точек $\{z;\ |z| \leqslant n\}$ комплексной плоскости на конечное число непересекающихся бэровских множеств $M_{n,k,t}$ $(t = 1, 2, \ldots, d_{k,n})$ диаметра $\leqslant 1/k$. Для каждой из функций $x_n(s) \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ определим функцию $x_{n,k}(s)$ следующим условием:

для точек s, в которых $x_n(s) \in M_{n,k,t}$, значение $x_{n,k}(s)$ равно постоянной z, выбранной так, что z принадлежит замыканию $M^a_{n,k,t}$ множества $M_{n,k,t}$ и $|z| = \inf\limits_{w \in M_{n,k,t}} |w|$.

Тогда $|x_{n,k}(s)| \leqslant |x_n(s)|$ и $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k}(s) = x_n(s)$, поэтому, согласно лемме Лебега — Фату, $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} x_{n,k} = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Применяя лемму Лебега — Фату еще раз, находим, что

$$\langle x_n, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle x_{n,k}, f\rangle = \lim_{k\to\infty} \int_S x_{n,k}(s)\, y(s)\, m(ds) =$$

$$= \int_S \lim_{k\to\infty} x_{n,k}(s)\, y(s)\, m(ds) = \int_S x_n(s)\, y(s)\, m(ds). \tag{5}$$

Так как $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, мы видим, что $\langle x, f\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, f\rangle$. Для всякого комплексного числа z положим $a(z) = e^{-i\theta}$ при $z = re^{i\theta}$ и $a(0) = 0$. Тогда $\|x\| \geqslant \|(|x_n| \cdot a(y))\|$ и, следовательно,

$$\|f\| \cdot \|x\| \geqslant \langle |x_n|\, a(y), f\rangle = \int_S |x_n(s)| \cdot |y(s)|\, m(ds).$$

Отсюда на основании леммы Лебега — Фату мы заключаем, что $\|f\| \cdot \|x\| \geqslant \int_S |x(s)| \cdot |y(s)|\, m(ds)$ и, таким образом, функция $x(s)\, y(s)$ принадлежит $L^1(S)$. Поэтому, полагая в формуле (5) $n \to \infty$, мы получаем соотношение

$$\langle x, f\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds) \qquad \text{для всех } x \in L^p(S).$$

Покажем теперь, что $y \in L^q(S)$. С этой целью определим функции $y_n(s)$:

$$y_n(s) = \begin{cases} y(s) & \text{при } s \in B^{(n)},\ |y(s)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при других значениях } s. \end{cases}$$

Тогда $y_n \in L^q(S)$ и, как было доказано выше,

$$\|f\| \cdot \|x\| \geqslant \langle |x| \cdot a(y), f\rangle = \int_S |x(s)| \cdot |y(s)|\, m(ds) \geqslant$$
$$\geqslant \int_S |x(s)| \cdot |y_n(s)|\, m(ds).$$

Полагая $x(s) = |y_n(s)|^{q/p}$ и применяя неравенство Гёльдера, получаем

$$\int_S |x(s)| \cdot |y_n(s)|\, m(ds) = \left(\int_S |x(s)|^p\, m(ds)\right)^{1/p} \cdot \left(\int_S |y_n(s)|^q\, m(ds)\right)^{1/q}.$$

Отсюда $\|f\| \geqslant \|y_n\| = \left(\int_S |y_n(s)|^q\, m(ds)\right)^{1/q}$ при $p > 1$, а при $p = 1$ мы имеем $\|f\| \geqslant \|y_n\| = \operatorname*{essential\ sup}_{s \in S} |y_n(s)|$.

Полагая $n \to \infty$ и применяя лемму Лебега — Фату, мы находим, что $y \in L^q(S)$ и $\|f\| \geqslant \|y\|$. С одной стороны, всякая точка $y \in L^q(S)$ определяет с помощью формулы $\langle x, f\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds)$ некоторый элемент $f \in L^p(S)'$ (это вытекает из неравенства Гёльдера). При этом неравенство Гёльдера показывает, что $\|f\| \leqslant \|y\|$. Итак, доказательство закончено.

Замечание. Попутно мы доказали, что

$$(l^p)' = (l^q) \qquad (1 \leqslant p < \infty,\ p^{-1} + q^{-1} = 1).$$

Пример 4. Допустим, что пространство с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, такое, что $m(S) < \infty$, обладает следующим свойством: для любого множества $B \in \mathfrak{B}$, мера которого удовлетворяет неравенству $0 < m(B) = \delta < \infty$, и произвольного положительного целого n существует подмножество B_n в B, такое, что $\delta(n+1)^{-1} \leqslant m(B_n) \leqslant \delta n^{-1}$. Тогда не существует никакого непрерывного линейного функционала, принадлежащего пространству $M(S, \mathfrak{B}, m)'$, кроме тождественно равного нулю.

Доказательство. Всякий элемент $x \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ принадлежит пространству $M(S, \mathfrak{B}, m)$, и топология в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ сильнее, чем в $M(S, \mathfrak{B}, m)$, поэтому сужение любого функционала $f \in M(S, \mathfrak{B}, m)'$ на $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ определяет непрерывный линейный функционал

$f_0 \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$. Таким образом, существует функция $y \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$, такая, что

$$\langle x, f\rangle = \langle x, f_0\rangle = \int_S x(s)\, y(s)\, m(ds) \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(S, \mathfrak{B}, m).$$

Так как множество $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ плотно в $M(S, \mathfrak{B}, m)$ в топологии пространства $M(S, \mathfrak{B}, m)$, то из условия $f \neq 0$ вытекает, что $f_0 \neq 0$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что множество $B = \{s;\ |y(s)| \geqslant \varepsilon\}$ имеет меру $m(B) = \delta > 0$. Пусть $B_n \subseteq B$ — множество, указанное в условии теоремы. Положим $y(s) = re^{i\theta}$ для $s \in B$ и введем функцию $x_n(s): x_n(s) = e^{-i\theta}$ при $s \in B_n$ и $x_n(s) = 0$ при прочих значениях s. Тогда функции $z_n(s) = nx_n(s)$ сходятся по мере к нулю, т. е. $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ в пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$. Но, с другой стороны,

$$\lim_{n\to\infty} \langle z_n, f\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle z_n, f_0\rangle = \lim_{n\to\infty} \int_S z_n(s)\, y(s)\, m(ds) \geqslant \delta\varepsilon > 0,$$

что противоречит непрерывности функционала f. Итак, предположение $f \neq 0$ приводит к противоречию.

Пример 5. Пространство $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$.

Пусть задан некоторый элемент $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$. Для всякого множества $B \in \mathfrak{B}$ определим функцию $\psi(B) = f(C_B)$, где $C_B(s)$ — характеристическая функция множества B. Тогда выполняются следующие условия:

$$\text{если } B_1 \cap B_2 = \emptyset, \text{ то } \psi(B_1 + B_2) = \psi(B_1) + \psi(B_2), \tag{6}$$

т. е. функция ψ *конечно аддитивна*;

вещественная часть $\psi_1(B)$ и мнимая часть $\psi_2(B)$ функции $\psi(B)$ имеют ограниченные полные вариации, т. е.

$$\sup_B |\psi_i(B)| < \infty \quad (i = 1, 2); \tag{7}$$

если $m(B) = 0$, то $\psi(B) = 0$, т. е. функция ψ *m-абсолютно непрерывна*. (8)

Условие (6) следует из линейности функционала f, а (7) и (8) вытекают из неравенства $|\psi(B)| \leqslant \|f\| \cdot \|C_B\|$.

Для произвольной точки $x \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ рассмотрим разбиение круга $\{z;\ |z| \leqslant \|x\|\}$ комплексной плоскости z на конечное число непересекающихся бэровских множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, диаметры которых не превосходят некоторого положительного числа ε. Положим $B_i = \{s \in S;\ x(s) \in A_i\}$. При любом выборе точек $\alpha_i \in A_i$ справедливы неравенства

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i C_{B_i} \right\| \leqslant \varepsilon,$$

и поэтому

$$\left| f(x) - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(B_i) \right| \leqslant \| f \| \cdot \varepsilon.$$

Пусть теперь $n \to \infty$ так, что при этом $\varepsilon \downarrow 0$; тогда

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \psi(B_i) \tag{9}$$

независимо от способа разбиения $\{z;\ |z| \leqslant \|x\|\} = \sum_{i=1}^{n} A_i$ и выбора точек $\alpha_i \in A_i$. Предел, стоящий в правой части выражения (9), называется *интегралом Радона* функции $x(s)$ по *конечно аддитивной* мере ψ. Таким образом,

$$f(x) = \int_S x(s)\psi(ds) \text{ (интеграл Радона)}$$

$$\text{для всех } x \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m), \tag{10}$$

и поэтому

$$\|f\| = \sup_{\operatorname{ess\,sup} |x(s)| \leqslant 1} \left| \int_S x(s)\psi(ds) \right|. \tag{11}$$

Справедливо и обратное, а именно если функция ψ удовлетворяет условиям (6), (7) и (8), то выражение (10) определяет некоторый элемент $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$, и при этом имеет место формула (11).

Мы доказали, следовательно, что $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)'$ — это пространство, состоящее из всех функций множества ψ, удовлетворяющих условиям (6), (7) и (8), с нормой, определяемой формулой (11). Правая часть формулы (11) называется *полной вариацией* функции ψ.

Замечание. Из полученных результатов следует, что при $1 < p < \infty$ пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ рефлексивно. Однако пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, вообще говоря, не является рефлексивным.

Пример 6. Пространство $C(S)'$.

Пусть S — бикомпактное топологическое пространство. Тогда пространство $C(S)'$, сопряженное пространству $C(S)$ комплексных непрерывных функций на S, можно представить следующим образом: каждому элементу $f \in C(S)'$ соответствует единственным образом определенная комплексная мера Бэра μ на S, такая, что

$$f(x) = \int_S x(s)\mu(ds) \quad \text{для всех } x \in C(S), \tag{12}$$

и поэтому

$$\|f\| = \sup_{\sup_S |x(s)| \leqslant 1} \left| \int_S x(s)\mu(ds) \right|, \tag{13}$$

где выражение в правой части равно полной вариации меры μ на множестве S.

Обратно, всякая мера Бэра μ на S, такая, что правая часть формулы (13) для нее конечна, определяет при помощи формулы (12) непрерывный линейный функционал $f \in C(S)'$, и его норма выражается формулой (13). Более того, если мы возьмем вещественный функционал f на вещественном B-пространстве $C(S)$, то соответствующая мера μ тоже будет вещественной. Если же, кроме того, функционал f *положителен*, т. е. $f(x) \geqslant 0$ для всех неотрицательных функций $x(s)$, то и соответствующая мера μ оказывается *положительной*, т. е. $\mu(B) \geqslant 0$ для всякого множества $B \in \mathfrak{B}$.

Замечание. Сформулированный выше результат известен как теорема Рисса — А. А. Маркова — Какутани и представляет собой одну из основных теорем теории топологических мер. Доказательство можно найти в курсах теории меры, например в книгах: Халмош [1], Данфорд — Шварц [1].

Литература к главе IV

По поводу теорем Хана — Банаха и связанных с ними вопросов см. Банах [1], Бурбаки [2], Кёте [1].

Важную роль выпуклых множеств в нормированном линейном пространстве заметил Мазур [2]. Доказательство теоремы Хелли, приведенное в этой книге, принадлежит Мимура [не опубликовано].

ГЛАВА V

Сильная сходимость и слабая сходимость

В этой главе мы рассмотрим некоторые важные проблемы, относящиеся к сильной, слабой и слабой* сходимости, включая вопросы, связанные со сравнением сильной и слабой измеримости, сильной и слабой аналитичности и пр. Мы познакомимся также с теорией интегрирования функций, принимающих значения в B-пространстве, т. е. с интегралами Бохнера. В приложении к этой главе излагается общая теория слабых топологий и сопряженности в локально выпуклых линейных топологических пространствах.

1. Слабая сходимость и слабая сходимость*

Слабая сходимость

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного пространства X называется *слабо сходящейся*, если для каждого функционала $f \in X'_s$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)$. Если существует такой элемент $x_\infty \in X$, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_\infty)$ для всех $f \in X'_s$, то говорят, что последовательность $\{x_n\}$ *слабо сходится к элементу* x_∞. В этом случае, согласно теореме Хана — Банаха (следствие 2 теоремы 1, гл. IV, § 6), элемент x_∞ определен единственным образом; мы будем писать $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ или „$x_n \to x_\infty$ слабо". Пространство X называется *секвенциально слабо полным*[1]), если всякая слабо сходящаяся последовательность его элементов слабо сходится к некоторому элементу этого пространства.

Пример. Пусть $\{x_n(s)\}$ — последовательность равномерно ограниченных непрерывных функций из $C[0, 1]$, сходящаяся к некоторой разрывной функции $z(s)$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда, поскольку $C[0, 1]'$ — пространство мер Бэра на $[0, 1]$ с ограниченными полными вариациями,

[1]) Автор применяет здесь термин „секвенциально слабо полное пространство", который обычно используется, чтобы отличить этот вид полноты от понятия полноты, связанного со сходимостью фундаментальных обобщенных последовательностей. Для нормированных пространств эти понятия эквивалентны. — *Прим. перев.*

последовательность $\{x_n(s)\}$ представляет собой пример слабо сходящейся последовательности из $C[0, 1]$, которая не сходится слабо ни к какому элементу пространства $C[0, 1]$.

Теорема 1. (1°) Если $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, то $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$; обратное, вообще говоря, неверно. (2°) Всякая слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ сильно ограничена[1]; в частности, если $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$, то последовательность $\{\|x_n\|\}$ ограничена и $\|x_\infty\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\|$.

Доказательство. (1°) Первое утверждение вытекает из неравенства $|f(x_n) - f(x_\infty)| \leqslant \|f\| \cdot \|x_n - x_\infty\|$. Тот факт, что обратное утверждение неверно, можно продемонстрировать на примере последовательности $\{x_n\}$ из гильбертова пространства (l^2) вида

$$x_n = \{\xi_m^{(n)}\}, \text{ где } \xi_m^{(n)} = \delta_{n, m} \quad (\delta_{n, m} = 0 \text{ при } n \neq m, \ \delta_{n, n} = 1).$$

Действительно, значение всякого непрерывного линейного функционала из $(l^2)'$ в точке $x = \{\xi_n\}$ имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \xi_n \bar{\eta}_n$, где $\{\eta_n\} \in (l^2)$. Поэтому $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, но последовательность $\{x_n\}$ не сходится сильно к нулю, так как $\|x_n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

(2°) Рассмотрим последовательность непрерывных линейных функционалов X_n, определенных на B-пространстве X'_s формулой $X_n(f) = \langle x_n, f\rangle$. Применяя к ней теорему о резонансе (гл. II, § 1), мы получим доказательство второго утверждения теоремы.

Теорема 2 (Мазур). Пусть $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ в нормированном линейном пространстве X. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такая *выпуклая комбинация* $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \left(\alpha_j \geqslant 0, \ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\right)$ элементов x_j, что $\left\| x_\infty - \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \leqslant \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим совокупность M_1 всех элементов вида $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, для которых $\alpha_j \geqslant 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$. Заменяя x_∞ и x_j соответственно на $(x_\infty - x_1)$ и $(x_j - x_1)$, мы можем считать, что $0 \in M_1$. Предположим, что $\|x_\infty - u\| > \varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$ и всякого $u \in M_1$. Множество $M = \{v \in X;\ \|v - u\| \leqslant \varepsilon/2$ для некоторого $u \in M_1\}$ представляет собой выпуклую окрестность нуля в X, и для всех $v \in M$ выполняется условие $\|x_\infty - v\| > \varepsilon/2$. Обозначим

---

[1]) То есть ограничена по норме: $\sup\limits_n \|x_n\| < \infty$. — *Прим. перев.*

через $p(y)$ функционал Минковского множества M. Так как $x_\infty = \beta^{-1}u_0$, где $p(u_0)=1$ и $0<\beta<1$, то $p(x_\infty)=\beta^{-1}>1$. Рассмотрим вещественное линейное подпространство $X_1=\{x\in X;\ x=\gamma u_0,\ -\infty<\gamma<\infty\}$ и положим $f_1(x)=\gamma$ для $x=\gamma u_0\in X_1$. Вещественный линейный функционал f_1 на X_1 удовлетворяет условию $f_1(x)\leqslant p(x)$ при $x\in X_1$. Поэтому, согласно теореме Хана — Банаха (гл. IV, § 1), существует вещественное линейное продолжение f функционала f_1, определенное на вещественном линейном нормированном пространстве X, такое, что $f(x)\leqslant p(x)$ на X. Функционал Минковского $p(x)$ непрерывен по x, так как M — окрестность нуля. Поэтому f представляет собой непрерывный вещественный линейный функционал, заданный на вещественном линейном нормированном пространстве X. Кроме того,

$$\sup_{x\in M_1} f(x)\leqslant \sup_{x\in M} f(x)\leqslant \sup_{x\in M} p(x)=1<\beta^{-1}=f\left(\beta^{-1}u_0\right)=f(x_\infty).$$

Поэтому, как нетрудно видеть, элемент x_∞ не может быть слабой предельной точкой множества M_1, а это противоречит предположению $x_\infty = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 3. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ элементов нормированного линейного пространства X слабо сходилась к некоторому элементу $x_\infty\in X$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два условия: (1°) $\sup\limits_n \|x_n\|<\infty$; (2°) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_\infty)$ для каждого f из некоторого сильно плотного подмножества D' пространства X'_s.

Доказательство. Ясно, что требуется доказать лишь достаточность. Для любого $g\in X'_s$ и произвольного $\varepsilon>0$ существует элемент $f\in D'$, такой, что $\|g-f\|<\varepsilon$. Поэтому

$$|g(x_n)-g(x_\infty)|\leqslant|g(x_n)-f(x_n)|+|f(x_n)-f(x_\infty)|+$$
$$+|f(x_\infty)-g(x_\infty)|\leqslant\varepsilon\|x_n\|+|f(x_n)-f(x_\infty)|+\varepsilon\|x_\infty\|,$$

откуда $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,|g(x_n)-g(x_\infty)|\leqslant 2\varepsilon \sup\limits_{1\leqslant n}\|x_n\|$. Это показывает, что $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)=g(x_\infty)$.

Теорема 4. Для того чтобы последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ слабо сходилась к некоторому элементу $x_\infty\in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\|x_n\|\}$ была ограничена и чтобы для любого множества $B\in\mathfrak{B}$ существовал конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_B x_n(s)\,m(ds)$.

Доказательство. Необходимость приведенных требований очевидна, так как характеристические функции $C_B(s)$ множеств $B\in\mathfrak{B}$ принадлежат $L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)=L^1(S, \mathfrak{B}, m)'$.

Докажем достаточность. По теореме Витали — Хана — Сакса функция множества $\psi(B)=\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_B x_n(s)\,m(ds)$ $(B\in\mathfrak{B})$ σ-аддитивна и m-абсолютно непрерывна. Поэтому, согласно теореме Лебега — Никодима, существует элемент $x_\infty\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$, такой, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_B x_n(s)\,m(ds)=\int_B x_\infty(s)\,m(ds)\quad \text{для всех}\quad B\in\mathfrak{B}.$$

Следовательно, для всякого разбиения вида $S=\sum\limits_{j=1}^{k}B_j$ множества S, где $B_j\in\mathfrak{B}$, выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\int_S x_n(s)\,y(s)\,m(ds)=\int_S x_\infty(s)\,y(s)\,m(ds),$$

где $y(s)$ — функция вида $y(s)=\sum\limits_{j=1}^{k}\alpha_j C_{B_j}(s)$. Такие функции $y(s)$ образуют сильно плотное подмножество пространства $L^\infty(S,\mathfrak{B},m)=L^1(S,\mathfrak{B},m)'$, поэтому, согласно доказанной ранее теореме 3, условия теоремы 4 достаточны для слабой сходимости $\{x_n\}$ к элементу $x_\infty\in X$.

Теорема 5. Пусть в пространстве $L^1(S,\mathfrak{B},m)$ последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к элементу $x_\infty\in L^1(S,\mathfrak{B},m)$. Эта последовательность сильно сходится к x_∞ тогда и только тогда, когда последовательность $\{x_n(s)\}$ сходится к $x_\infty(s)$ по m-мере на всяком $\mathfrak{B}$-измеримом множестве B, для которого $m(B)<\infty$.

Замечание. Говорят, что последовательность $\{x_n(s)\}$ сходится к $x_\infty(s)$ по m-мере на множестве B, если для всякого $\varepsilon>0$ m-мера множества $\{s\in B;\ |x_n(s)-x_\infty(s)|\geqslant\varepsilon\}$ стремится к нулю при $n\to\infty$ (см. предложение в гл. I, § 4). Пространство (l^1) представляет собой пример пространства вида $L^1(S,\mathfrak{B},m)$, в котором $S=\{1,2,\ldots\}$ и $m(\{n\})=1$ для $n=1,2,\ldots$. В этом случае $(l^1)'=(l^\infty)$, и слабая сходимость последовательности $\{x_n\}$ $(x_n=(\xi_1^{n},\xi_2^{(n)},\ldots,\xi_k^{(n)},\ldots))$ к точке $x_\infty=(\xi_1^{(\infty)},\xi_2^{(\infty)},\ldots,\xi_k^{(\infty)},\ldots)$ означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}\xi_k^{(n)}=\xi_k^{(\infty)}$ $(k=1,2,\ldots)$. Последнее нетрудно обнаружить, выбирая функционал $f\in(l^1)'$ так, что $f(x)=\langle x,f\rangle=\xi_k$ для $x=\{\xi_j\}\in(l^1)$. Значит, в данном частном случае последовательность $\{x_n\}$ действительно сходится к x_∞ по m-мере на каждом $\mathfrak{B}$-измеримом множестве B конечной m-меры. Мы получаем такое

Следствие (И. Шур). Если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится в пространстве (l^1) к некоторому элементу $x_\infty\in(l^1)$, то $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_\infty$.

Доказательство теоремы 5. Необходимость условия теоремы очевидна, так как из сильной сходимости в пространстве $L^1(S,\mathfrak{B},m)$

следует сходимость по m-мере. Докажем достаточность. Последовательность $\{x_n - x_\infty\}$ слабо сходится к $x = 0$, поэтому

$$\lim_{n\to\infty} \int_B (x_n(s) - x_\infty(s))\, m(ds) = 0 \quad \text{для всякого} \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{1}$$

Рассмотрим последовательность неотрицательных мер вида

$$\psi_n(B) = \int_B |x_n(s) - x_\infty(s)|\, m(ds), \quad B \in \mathfrak{B}.$$

Тогда

$$\lim_{k\to\infty} \psi_n(B_k) = 0 \text{ равномерно по } n \text{ для всякой убывающей}$$
$$\text{последовательности } \{B_k\} \subseteq \mathfrak{B}, \text{ такой, что } \bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = \emptyset. \tag{2}$$

Действительно, в противном случае нашлось бы такое $\varepsilon > 0$, что каждому k соответствовало бы некоторое n_k, такое, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$ и $\psi_{n_k}(B_k) > \varepsilon$. Тогда либо

$$\int_{B_k} \left| \operatorname{Re}\left(x_{n_k}(s) - x_\infty(s)\right) \right| m(ds) > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

либо

$$\int_{B_k} \left| \operatorname{Im}\left(x_{n_k}(s) - x_\infty(s)\right) \right| m(ds) > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}},$$

и поэтому существуют множества $B_k' \subseteq B_k$, такие, что

$$\left| \int_{B_k'} \left(x_{n_k}(s) - x_\infty(s)\right) m(ds) \right| > \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Но это противоречит тому, что меры, образующие последовательность $\{\varphi_n(B)\}$, $\varphi_n(B) = \int_B (x_n(s) - x_\infty(s))\, m(ds)$, согласно условию (1), m-абсолютно непрерывны равномерно относительно n (см. доказательство теоремы Витали — Хана — Сакса в гл. II, § 2).

Пусть теперь B_0 — произвольное множество семейства $\mathfrak{B}$ меры $m(B_0) < \infty$. Покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n(B_0) = 0. \tag{3}$$

Допустим, что существуют $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{\psi_{n'}\}$ из $\{\psi_n\}$, такие, что

$$\psi_{n'}(B_0) > \varepsilon \quad (n' = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Согласно условию теоремы, последовательность $\{(x_n(s) - x_\infty(s)\}$ сходится по m-мере к $x=0$ на множестве B_0. Поэтому найдутся подпоследовательность $\{(x_{n''}(s) - x_\infty(s))\}$ последовательности $\{(x_{n'}(s) - x_\infty(s))\}$ и множества $B''_n \subseteq B_0$, такие, что $m(B''_n) \leqslant 2^{-n}$ и $|x_{n''}(s) - x_\infty(s)| < \varepsilon/m(B_0)$ при $s \in (B_0 - B''_n)$. Положим $B_k = \bigcup\limits_{n=k}^{\infty} B''_n$. Тогда множества B_k образуют убывающую последовательность, такую, что

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k\right) \leqslant \sum_{n=k}^{\infty} m(B''_n) \leqslant 2^{-k+1} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots),$$

и поэтому $m\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k\right) = 0$. Таким образом, используя следствие из теоремы Витали — Хана — Сакса, мы можем на основании условия (1) заключить, что $\lim\limits_{k\to\infty} \psi_n(B_k) = 0$ равномерно по n. Значит,

$$\psi_{n''}(B_0) \leqslant \psi_{n''}(B''_n) + \varepsilon\,[m(B_0)]^{-1} \cdot m(B_0 - B''_n).$$

Но при $n \to \infty$ правая часть этого неравенства имеет предел, не превосходящий ε, что противоречит условию (4). Полученное противоречие доказывает (3).

Возьмем теперь последовательность $\{B'_k\}$ множеств $B'_k \subseteq \mathfrak{B}$, такую, что $m(B'_k) < \infty$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ и $S = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B'_k$. Тогда

$$\int_S |x_n(s) - x_\infty(s)|\, m(ds) = \int\limits_{\bigcup_{k=1}^{t} B'_k} + \int\limits_{S - \bigcup_{k=1}^{t} B'_k}.$$

Первое слагаемое в правой части, согласно (3), стремится к нулю при $n \to \infty$ и всяком фиксированном t. Второй интеграл стремится к нулю при $t \to \infty$ равномерно по n (это вытекает из (2)). Тем самым мы доказали, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ в пространстве $L^1(S,\ \mathfrak{B},\ m)$.

В следующей теореме рассматривается аналогичная ситуация для пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$.

Теорема 6. Рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ обобщенных функций, принадлежащих пространству $\mathfrak{D}(\Omega)'$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ в слабой* топологии пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$ и в сильной топологии пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$.

Доказательство. Сильная топология пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ определяется (см. определение 1, гл. IV, § 7) семейством полунорм вида

$$p_B(T) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{B}} |T(\varphi)|,$$

где $\mathfrak{B}$ — любое ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$.

Слабая * топология пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ определяется семейством полунорм вида

$$p_F(T) = \sup_{\varphi \in \mathfrak{F}} |T(\varphi)|, \quad \text{где } \mathfrak{F} \text{ — любое конечное множество в } \mathfrak{D}(\Omega).$$

Таким образом, предел $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = T$ в слабой * топологии пространства $\mathfrak{D}(\Omega)'$ — это в точности то же самое, что предел $\lim\limits_{n \to \infty} T_n = T(\mathfrak{D}(\Omega)')$, определенный в гл. II, § 3.

Пусть теперь $\mathfrak{B}$ — произвольное ограниченное множество в $\mathfrak{D}(\Omega)$. Тогда в области Ω найдется бикомпактное множество K, такое, что $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq K$ для любого элемента $\varphi \in \mathfrak{B}$ и $\sup\limits_{x \in K, \varphi \in \mathfrak{B}} |D^j \varphi(x)| < \infty$ для всякого дифференциального оператора D^j (теорема 1, гл. I, § 8). Поэтому, согласно теореме Асколи — Арцела, множество $\mathfrak{B}$ бикомпактно в $\mathfrak{D}_K(\Omega)$. Применяя к последовательности $\{T_n - T\}$ теорему о равномерной ограниченности, мы обнаруживаем, что для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность U нуля пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$, такая, что

$$\sup_{n;\, \varphi \in U} |(T_n - T)(\varphi)| < \varepsilon.$$

Бикомпактное подмножество $\mathfrak{B}$ пространства $\mathfrak{D}_K(\Omega)$ можно покрыть конечной системой множеств вида $\varphi_i + U$, где $\varphi_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Следовательно,

$$|(T_n - T)(\varphi_i + u)| \leqslant |(T_n - T)(\varphi_i)| + |(T_n - T)(u)| \leqslant$$
$$\leqslant |(T_n - T)(\varphi_i)| + \varepsilon \quad \text{для всех} \quad u \in U.$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} (T_n - T)(\varphi_i) = 0$ для $i = 1, 2, \ldots, k$, то

$$\lim_{n \to \infty} (T_n - T)(\varphi) = 0$$

равномерно относительно $\varphi \in \mathfrak{B}$. Это и доказывает нашу теорему.

Теорема 7. Всякое рефлексивное B-пространство X слабо секвенциально полно.

Доказательство. Пусть последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X слабо сходится. Каждая точка x_n определяет с помощью формулы $X_n(x') = \langle x_n, x' \rangle$ на пространстве X'_s непрерывный линейный функционал X_n. Поскольку X'_s есть B-пространство (теорема 1, гл. IV, § 8), мы можем применить теорему о резонансе. Поэтому конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} X_n(x')$ (который существует согласно условию теоремы) определяет на пространстве X'_s некоторый непрерывный линейный функционал. Так как пространство X рефлексивно, существует такой элемент $x_\infty \in X$, что $\langle x_\infty, x'\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} X_n(x') = \lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, x'\rangle$, а это означает, что $x_\infty = w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Теорема 8. Пусть X — гильбертово пространство. Если последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X слабо сходится к $x_\infty \in X$, то $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x_\infty\|$.

Доказательство. Необходимость следует из непрерывности нормы. Достаточность вытекает из равенства

$$\|x_n - x_\infty\|^2 = (x_n - x_\infty, x_n - x_\infty) = \\ = \|x_n\|^2 - (x_n, x_\infty) - (x_\infty, x_n) + \|x_\infty\|^2.$$

Действительно, при $n \to \infty$ предел правой части равен $\|x_\infty\|^2 - \|x_\infty\|^2 - \|x_\infty\|^2 + \|x_\infty\|^2 = 0$.

Слабая* сходимость

Определение 2. Последовательность элементов $\{f_n\}$ пространства X'_s, сопряженного нормированному линейному пространству X, называется *слабо* сходящейся*, если для каждой точки $x \in X$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Говорят, что последовательность $\{f_n\}$ *слабо* сходится к элементу* $f_\infty \in X'_s$, если $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f_\infty(x)$ для всех $x \in X$. В последнем случае мы будем писать $w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_\infty$ или „$f_n \to f_\infty$ *слабо**“.

Теорема 9. (1°) Если $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_\infty$, то $w^*\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f_\infty$; обратное, вообще говоря, неверно. (2°) Если X есть B-пространство, то всякая слабо* сходящаяся последовательность $\{f_n\} \subseteq X'_s$ слабо* сходится к некоторому элементу $f_\infty \in X'_s$ и $\|f_\infty\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Доказательство. (1°) Первая часть этого утверждения следует из того, что $|f_n(x) - f_\infty(x)| \leqslant \|f_n - f_\infty\| \cdot \|x\|$. Тот факт, что обратное утверждение в общем случае неверно, обнаруживается на примере, приведенном в доказательстве теоремы 1.

(2°) Согласно теореме о резонансе, $f_\infty(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ есть непрерывный линейный функционал на X и $\|f_\infty\| \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} \|f_n\|$.

Теорема 10. Если X есть B-пространство, то последовательность $\{f_n\} \subseteq X'_s$ слабо* сходится к некоторому элементу $f_\infty \in X'_s$

тогда и только тогда, когда выполняются следующие два условия: (1°) последовательность $\{\|f_n\|\}$ ограничена; (2°) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)=f_\infty(x)$ на всяком сильно плотном подмножестве в X.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 3.

Сильное и слабое замыкания

Теорема 11. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, M — его замкнутое линейное подпространство. Тогда множество M замкнуто в слабой топологии пространства X.

Доказательство. Если это не так, то существует некоторая точка $x_0\in X-M$, являющаяся предельной точкой множества M в слабой топологии пространства X. Но тогда, согласно следствию теоремы 3 из гл. IV, § 6, найдется такой непрерывный линейный функционал f_0 на X, что $f_0(x_0)=1$ и $f_0(x)=0$ при $x\in M$. Поэтому x_0 не может быть предельной точкой множества M в слабой топологии пространства X.

2. Слабая компактность в рефлексивных B-пространствах[1]*). Равномерная выпуклость*

Теорема 1. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная по норме последовательность элементов рефлексивного B-пространства X. Тогда из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X[2]).

Мы докажем эту теорему в предположении, что пространство X сепарабельно, поскольку в конкретных приложениях этой теоремы обычно приходится иметь дело с сепарабельными функциональными пространствами. Общий случай несепарабельного пространства будет рассмотрен в приложении.

Лемма. Если сильное сопряженное пространство X'_s нормированного линейного пространства X сепарабельно, то и пространство X сепарабельно.

---

[1]) Множество A топологического пространства X называется *компактным*, если любая его сеть (обобщенная последовательность) содержит подсеть, сходящуюся к некоторому $x\in A$. Если это относится только к обычным последовательностям, то множество называют *„секвенциально компактным“*. Если каждая сеть содержит подсеть, сходящуюся к некоторому $x\in X$, не обязательно принадлежащему A, то множество A называют *относительно компактным*. В зависимости от рассматриваемой топологии говорят о *сильной*, *слабой* и т. п. компактности. В метрических пространствах понятия компактности и секвенциальной компактности совпадают. Отметим, что в метрическом пространстве для бикомпактности множества необходимо и достаточно, чтобы оно было замкнутым и относительно компактным. — *Прим. перев.*

[2]) Здесь, таким образом, говорится о слабой относительной секвенциальной компактности ограниченных по норме множеств рефлексивного B-пространства. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $\{x'_n\}$ — счетная последовательность, сильно плотная на поверхности единичной сферы $\{x' \in X'_s;\ \|x'\| = 1\}$ пространства X'_s. Выберем точки $x_n \in X$ так, что $\|x_n\| = 1$ и $|\langle x_n, x'_n\rangle| \geqslant \frac{1}{2}$. Обозначим через M замкнутое линейное подпространство пространства X, натянутое на точки последовательности $\{x_n\}$. Предположим, что $M \neq X$, и возьмем некоторый элемент $x_0 \in X - M$. Согласно следствию теоремы 3 (теоремы Мазура), гл. IV, § 6, существует такой элемент $x'_0 \in X'_s$, что $\|x'_0\| = 1$, $\langle x_0, x'_0\rangle \neq 0$ и $\langle x, x'_0\rangle = 0$ для всех $x \in M$. Поэтому $\langle x_n, x'_0\rangle = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, $1/2 \leqslant |\langle x_n, x'_n\rangle| \leqslant |\langle x_n, x'_n\rangle - \langle x_n, x'_0\rangle| + |\langle x_n, x'_0\rangle|$, откуда $1/2 \leqslant \|x_n\| \cdot \|x'_n - x'_0\| = \|x'_n - x'_0\|$. Но это противоречит тому, что последовательность $\{x'_n\}$ сильно плотна на поверхности единичной сферы пространства X'_s. Отсюда вытекает, что $M = X$, и, стало быть, линейные комбинации элементов последовательности $\{x_n\}$ с рациональными коэффициентами образуют плотное множество в X. Это и доказывает лемму.

Доказательство теоремы 1. Мы уже говорили, что пространство X предполагается сепарабельным, а потому и пространство $(X'_s)'_s = X$ сепарабельно. Но тогда по предыдущей лемме пространство X'_s тоже сепарабельно. Выберем счетную последовательность $\{x'_n\}$, сильно плотную в пространстве X'_s. Последовательность $\{x_n\}$ ограничена по норме, поэтому последовательность $\{\langle x_n, x'_1\rangle\}$ ограничена. Следовательно, можно выбрать подпоследовательность $\{x_{n_1}\} \subseteq \{x_n\}$ так, чтобы последовательность $\{x_{n_1}, x'_1\}$ сходилась. Последовательность $\{\langle x_{n_1}, x'_2\rangle\}$ тоже ограничена, и поэтому существует подпоследовательность $\{x_{n_2}\} \subseteq \{x_{n_1}\}$, такая, что сходится последовательность $\{\langle x_{n_2}, x'_2\rangle\}$. Продолжая такое построение, мы придем к последовательности $\{x_{n_{i+1}}\} \subseteq \{x_{n_i}\}$, для которой числовая последовательность $\{\langle x_{n_{i+1}}, x'_j\rangle\}$ сходится при значениях $j = 1, 2, \ldots, i+1$. Следовательно, диагональная подпоследовательность $\{x_{n_n}\}$ первоначальной последовательности $\{x_n\}$ обладает тем свойством, что для нее сходятся числовые последовательности $\{\langle x_{n_n}, x'_j\rangle\}$ при $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому, согласно теореме 3 предыдущего параграфа, для всякого $x' \in X'$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_{n_n}, x'\rangle$ [1]). Но тогда по теореме 7 предыдущего параграфа существует и принадлежащий пространству X предел $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_{n_n}$.

[1]) Ссылка на теорему 3, гл. V, § 1, здесь не вполне точна. Применяя метод, аналогичный использованному при доказательстве упомянутой теоремы, мы можем следующим образом показать, что конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_{n_n}, x'\rangle$

Теорема Мильмана

Д. П. Мильман показал, что B-пространство рефлексивно, если оно *равномерно выпукло*, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что из условий $\|x\| \leqslant 1$, $\|y\| \leqslant 1$ и $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$ $(x, y \in X)$ следует неравенство $\|x + y\| \leqslant 2(1 - \delta)$. Всякое предгильбертово пространство равномерно выпукло, как видно из формулы

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Известно, что пространства L^p и (l^p) равномерно выпуклы при $1 < p < \infty$ (см. Кларксон [1]).

Теорема 2 (Мильман [1]). Всякое равномерно выпуклое B-пространство X рефлексивно.

Доказательство (принадлежащее Какутани). Выберем некоторый элемент $x_0'' \in (X_s')_s'$, такой, что $\|x_0''\| = 1$. Тогда найдется последовательность $\{f_n\} \subseteq X_s'$, такая, что $\|f_n\| = 1$, $x_0''(f_n) \geqslant 1 - n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По теореме 5, гл. IV, § 6, для любого n существует такой элемент $x_n \in X$, что

$$f_i(x_n) = x_0''(f_i) \, (i = 1, 2, \ldots, n) \text{ и } \|x_n\| \leqslant \|x_0''\| + n^{-1} = 1 + n^{-1}.$$

Поскольку

$$1 - n^{-1} \leqslant x_0''(f_n) = f_n(x_n) \leqslant \|f_n\| \cdot \|x_n\| = \|x_n\| \leqslant 1 + n^{-1},$$

мы имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 1$.

Если допустить, что последовательность $\{x_n\}$ не сходится сильно, то найдутся такое $\varepsilon > 0$ и такие номера $n_1 < m_1 < n_2 < m_2 < \ldots$ $\ldots < n_k < m_k < \ldots$, что $\varepsilon \leqslant \|x_{n_k} - x_{m_k}\|$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Отсюда, учитывая, что пространство X равномерно выпукло и $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = 1$, мы заключаем, что $\overline{\lim\limits_{k \to \infty}} \|x_{n_k} + x_{m_k}\| \leqslant 2(1 - \delta(\varepsilon)) < 2$. Но $n_k < m_k$,

---

существует при любом $x' \in X'$:

$$\left|\langle x_{n_n}, x'\rangle - \langle x_{m_m}, x'\rangle\right| \leqslant \left|\langle x_{n_n}, x'\rangle - \langle x_{n_n}, x_j'\rangle\right| + \left|\langle x_{n_n}, x_j'\rangle - \langle x_{m_m}, x_j'\rangle\right| + \left|\langle x_{m_m}, x_j'\rangle - \langle x_{m_m}, x'\rangle\right| \leqslant$$
$$\leqslant \|x' - x_j'\| \cdot \|x_{n_n}\| + \left|\langle x_{n_n}, x_j'\rangle - \langle x_{m_m}, x_j'\rangle\right| + \|x_j' - x'\| \cdot \|x_{m_m}\|.$$

Первое и последнее слагаемые можно сделать сколь угодно малыми, выбирая из $\{x_n'\}$ элемент x_j', достаточно близкий по норме к x' (это возможно в силу плотности $\{x_n'\}$ и ограниченности норм $\|x_n\|$), а второе слагаемое стремится к нулю при $n, m \to \infty$. Таким образом, последовательность $\{\langle x_{n_n}, x'\rangle\}$ фундаментальна при всяком $x' \in X'$ и имеет поэтому конечный предел. — *Прим. перев.*

поэтому $f_{n_k}(x_{n_k}) = f_{n_k}(x_{m_k}) = x_0''(f_{n_k})$ и, следовательно,

$$2(1 - n_k^{-1}) \leqslant 2x_0''(f_{n_k}) = f_{n_k}(x_{n_k} + x_{m_k}) \leqslant \| f_{n_k} \| \cdot \| x_{n_k} + x_{m_k} \|.$$

Ввиду того что $\| f_{n_k} \| = 1$, мы получаем неравенство

$$\varlimsup_{k\to\infty} \| x_{n_k} + x_{m_k} \| \geqslant 2,$$

что противоречит предыдущему неравенству $\varlimsup\limits_{k\to\infty} \| x_{n_k} + x_{m_k} \| < 2$.

Мы доказали, таким образом, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ существует и при этом

$$\| x_0 \| = 1, \quad f_i(x_0) = x_0''(f_i) \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{1}$$

Покажем теперь, что решение уравнения (1) единственно. В самом деле, если существует элемент $\hat{x}_0 \neq x_0$, удовлетворяющий уравнению (1), то из равномерной выпуклости пространства X следует, что $\| \hat{x}_0 + x_0 \| < 2$. Кроме того, $f_i(\hat{x}_0 + x_0) = 2x_0''(f_i)$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$. Поэтому

$$2(1 - i^{-1}) \leqslant 2x_0''(f_i) = f_i(\hat{x}_0 + x_0) \leqslant \| f_i \| \cdot \| \hat{x}_0 + x_0 \| = \| \hat{x}_0 + x_0 \|,$$

откуда $\| \hat{x}_0 + x_0 \| \geqslant \lim\limits_{i\to\infty} 2(1 - i^{-1}) = 2$, что противоречит неравенству $\| \hat{x}_0 + x_0 \| < 2$.

Наконец, пусть f_0 — произвольная точка пространства X_s'. Если мы убедимся в том, что $f_0(x_0) = x_0''(f_0)$, то отсюда будет следовать, что $(X_s')_s' \subseteq X$, и тем самым рефлексивность пространства X будет доказана. Чтобы показать, что $f_0(x_0) = x_0''(f_0)$, возьмем вместо последовательности $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ последовательность $f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots$ и повторим построение, проведенное выше. Это даст нам элемент $\hat{x}_0 \in X$, такой, что

$$\| \hat{x}_0 \| = 1, \quad f_i(\hat{x}_0) = x_0''(f_i) \qquad (i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,\ \ldots).$$

Но тогда, как показывают предыдущие рассуждения, $\hat{x}_0 = x_0$, и это завершает доказательство теоремы.

3. Теорема Данфорда и теорема Гельфанда — Мазура

Определение 1. Пусть Z — открытая область комплексной плоскости. Отображение $x(\zeta)$, определенное в области Z, со значениями в некотором B-пространстве X называется *слабо голоморфным* по ζ в области Z, если для каждого элемента $f \in X'$ числовая функция

$$f(x(\zeta)) = \langle x(\zeta),\ f \rangle$$

переменной ζ голоморфна в Z.

Теорема 1 (Данфорд [2]). Если функция $x(\zeta)$ слабо голоморфна в области Z, то существует отображение $x'(\zeta)$, определенное в области Z и принимающее значения из X, такое, что для всякой точки $\zeta_0 \in Z$

$$s\text{-}\lim_{h\to\infty} h^{-1}(x(\zeta_0+h)-x(\zeta_0))=x'(\zeta_0).$$

Иными словами, слабая голоморфность влечет за собой *сильную голоморфность*.

Доказательство. Пусть C — произвольная спрямляемая жорданова дуга, ограничивающая замкнутую ограниченную область $\overline{C}$, целиком лежащую в области Z. Пусть $\zeta_0 \in \overline{C}-C$. Обозначим через Z_0 произвольную открытую область, содержащую ζ_0, замыкание которой лежит во внутренности области $\overline{C}$. По теореме об интегральном представлении голоморфной функции

$$f(x(\zeta_0))=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(x(\zeta))}{\zeta-\zeta_0}\,d\zeta.$$

Поэтому если две несовпадающие точки ζ_0+h и ζ_0+g принадлежат области Z_0, то

$$(h-g)^{-1}\left\{\frac{f(x(\zeta_0+h))-f(x(\zeta_0))}{h}-\frac{f(x(\zeta_0+g))-f(x(\zeta_0))}{g}\right\}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_C f(x(\zeta))\left\{\frac{1}{(\zeta-\zeta_0-h)(\zeta-\zeta_0-g)(\zeta-\zeta_0)}\right\}d\zeta.$$

По предположению расстояние от области Z_0 до кривой C положительно. Следовательно, для любого фиксированного элемента $f \in X'$ абсолютная величина правой части последнего равенства равномерно ограничена, когда точки ζ_0, ζ_0+h и ζ_0+g пробегают область Z_0. Отсюда по теореме о резонансе

$$\sup_{\zeta_0,\ \zeta_0+h,\ \zeta_0+g\in Z_0}\frac{1}{|h-g|}\left\|\left\{\frac{x(\zeta_0+h)-x(\zeta_0)}{h}-\frac{x(\zeta_0+g)-x(\zeta_0)}{g}\right\}\right\|<\infty.$$

Ввиду полноты пространства X функция $x(\zeta)$ оказывается сильно голоморфной в каждой точке $\zeta_0 \in Z$.

Следствие 1 (обобщение интегральной теоремы Коши). Из сильной голоморфности функции $x(\zeta)$ следует ее сильная непрерывность. Поэтому можно естественным образом определить криволинейный интеграл $\int_C x(\zeta)\,d\zeta$ со значением из X. Можно показать, что $\int_C x(\zeta)\,d\zeta=0$ для замкнутой кривой C (0 — нулевой вектор пространства X).

Доказательство. Так как всякий функционал $f \in X'$ линеен и непрерывен, имеем

$$f\left(\int_C x(\zeta)\,d\zeta\right) = \int_C f(x(\zeta))\,d\zeta.$$

Правая часть равна нулю согласно интегральной теореме Коши. Так как элемент $f \in X'$ выбирается произвольно, то в силу следствия 2 теоремы 1, гл. IV, § 6, $\int_C x(\zeta)\,d\zeta = 0$, что и требовалось доказать.

Из приведенного утверждения можно вывести ряд следствий, аналогичных известным теоремам теории функций комплексного переменного.

Следствие 2 (обобщение интегральной формулы Коши). Для всякой внутренней точки ζ_0 области $\overline{C}$

$$x(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x(\zeta)}{\zeta - \zeta_0}\,d\zeta.$$

Следствие 3 (разложение Тейлора). Для всякой внутренней точки ζ_0 замкнутой области $\overline{C}$ ряд Тейлора функции $x(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = \zeta_0$ сильно сходится внутри круга с центром в точке ζ_0, целиком лежащего в области $\overline{C}$:

$$x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} (\zeta - \zeta_0)^n x^{(n)}(\zeta_0),$$

где

$$x^{(n)}(\zeta_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{x(\zeta)}{(\zeta - \zeta_0)^{n+1}}\,d\zeta.$$

Следствие 4 (обобщение теоремы Лиувилля). Если функция $x(\zeta)$ сильно голоморфна на всей комплексной плоскости $|\zeta| < \infty$ и $\sup\limits_{|\zeta|<\infty} \|x(\zeta)\| < \infty$, то $x(\zeta)$ представляет собой постоянный вектор $x(0)$.

Доказательство. Взяв в качестве кривой C окружность $|\zeta| = r$, мы при $r \to \infty$ получаем

$$\|x^{(n)}(0)\| = \frac{n!}{2\pi} \sup_{|\zeta|<\infty} \|x(\zeta)\| \int_C \frac{|d\zeta|}{r^{n+1}} \to 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому тейлоровское разложение $x(\zeta)$ в окрестности точки $\zeta = 0$ сводится к единственному постоянному члену $x(0)$.

Следствие 4 мы используем далее для доказательства теоремы Гельфанда — Мазура.

Определение 2. Коммутативное поле X над полем комплексных чисел называется *нормированным полем*, если оно является B-пространством и при этом выполняются следующие условия:

$$\begin{gathered}\|e\|=1, \text{ где } e \text{ — единица умножения в поле } X,\\ \|xy\|\leqslant\|x\|\cdot\|y\|, \text{ где } xy \text{ — умножение в поле } X.\end{gathered}\tag{1}$$

Теорема 2 (Гельфанд [2] — Мазур [1]). Всякое нормированное поле X изометрически изоморфно полю комплексных чисел, т. е. любой элемент x поля X имеет вид $x=\xi e$, где ξ — комплексное число.

Доказательство. Допустим противное: существует такой элемент $x\in X$, что $(x-\xi e)\neq 0$ для всех комплексных чисел ξ. Так как X — поле, ненулевой элемент $(x-\xi e)$ имеет обратный $(x-\xi e)^{-1}\in X$.

Покажем, что функция $(x-\lambda e)^{-1}$ сильно голоморфна по λ в области $|\lambda|<\infty$. В самом деле,

$$\begin{aligned}&h^{-1}\left((x-(\lambda+h)\,e)^{-1}-(x-\lambda e)^{-1}\right)=\\&\quad=h^{-1}(x-(\lambda+h)\,e)^{-1}\left\{e-(x-(\lambda+h)\,e)(x-\lambda e)^{-1}\right\}=\\&\quad=h^{-1}(x-(\lambda+h)\,e)^{-1}\left\{e-e+h\,(x-\lambda e)^{-1}\right\}=\\&\quad=(x-(\lambda+h)\,e)^{-1}(x-\lambda e)^{-1}.\end{aligned}$$

С другой стороны, в силу условий (1) ряд $y^{-1}\left(e+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(hy^{-1})^n\right)$, где $y=(x-\lambda e)$, сходится при достаточно малых значениях $|h|$. Умножая этот ряд на $(y-he)$, мы видим, что он определяет обратный к $(y-he)$ элемент $(y-he)^{-1}=y^{-1}(e-hy^{-1})^{-1}$. Поскольку сумма этого ряда сильно непрерывна по h, функция $(x-\lambda e)^{-1}$ сильно голоморфна по λ и ее производная[1]) равна $(x-\lambda e)^{-2}$

Далее, если $|\lambda|\geqslant 2\|x\|$, то, как и выше,

$$(x-\lambda e)^{-1}=-\lambda^{-1}\left(e-\lambda^{-1}x\right)^{-1}=-\lambda^{-1}\left(e+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^{-1}x\right)^n\right),$$

откуда

$$\|(x-\lambda e)^{-1}\|\leqslant|\lambda|^{-1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(1/2)^n\right)\to 0 \quad \text{при} \quad |\lambda|\to\infty.$$

Кроме того, функция $(x-\lambda e)^{-1}$, будучи непрерывной по λ, ограничена в бикомпактной области $|\lambda|\leqslant 2\|x\|$ комплексной плоскости λ. Тогда, согласно теореме Лиувилля, $(x-\lambda e)^{-1}$ обращается в постоянный вектор $x^{-1}=(x-0\cdot e)^{-1}$. Но, как показано выше, $s\text{-}\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}(x-\lambda e)^{-1}=0$, поэтому $x^{-1}=0$, откуда $e=x^{-1}x=0$, что невозможно.

---

[1]) Под производной здесь понимается функция типа $x'(\zeta_0)$, фигурирующая в формулировке теоремы 1. — *Прим. перев.*

4. Слабая и сильная измеримость. Теорема Петтиса

Определение 1. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой и $x(s)$ — отображение, определенное на S, со значениями из B-пространства X. Отображение $x(s)$ называется *слабо $\mathfrak{B}$-измеримым*, если для любого элемента $f \in X'$ числовая функция $f(x(s)) = \langle x(s), f\rangle$ переменной s $\mathfrak{B}$-измерима. Отображение $x(s)$ называется *простым*, если оно принимает постоянные отличные от нуля значения на каждом из множеств B_j, образующих конечную систему непересекающихся $\mathfrak{B}$-измеримых множеств, причем $m(B_j) < \infty$, и $x(s) = 0$ при $s \in S - \bigcup_j B_j$. Отображение $x(s)$ называется *сильно $\mathfrak{B}$-измеримым*, если существует последовательность $\{x_n(s)\}$ простых отображений, сильно сходящаяся $x(s)$ m-п. в. на S.

Определение 2. Функция (отображение) $x(s)$ называется *сепарабельнозначной*, если область ее значений $\{x(s);\ s \in S\}$ сепарабельна. Она называется *m-почти сепарабельнозначной*, если существует $\mathfrak{B}$-измеримое множество B_0 m-меры нуль, такое, что множество $\{x(s);\ s \in S - B_0\}$ сепарабельно.

Теорема (Петтис [1]). Для того чтобы функция $x(s)$ была сильно $\mathfrak{B}$-измеримой, необходимо и достаточно, чтобы она была слабо $\mathfrak{B}$-измеримой и m-почти сепарабельнозначной.

Доказательство. Необходимость этого условия доказывается следующим образом. Всякое сильно $\mathfrak{B}$-измеримое отображение является и слабо $\mathfrak{B}$-измеримым, так как простые функции слабо $\mathfrak{B}$-измеримы и в силу сильной $\mathfrak{B}$-измеримости $x(s)$ существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, такая, что $s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n(s) = x(s)$ для всех s, за исключением некоторого множества $B_0 \in \mathfrak{B}$ m-меры нуль. Объединение областей значений функций $x_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ счетно, а замыкание этого множества сепарабельно и содержит область значений $\{x(s);\ s \in S - B_0\}$.

Докажем теперь достаточность. Не ограничивая общности, можно допустить, что сама область значений $\{x(s);\ s \in S\}$ сепарабельна. Поэтому можно считать пространство X сепарабельным: если это не так, то вместо X можно рассматривать наименьшее замкнутое линейное подпространство, содержащее область значений функции $x(s)$. Покажем сначала, что числовая функция $\|x(s)\|$ $\mathfrak{B}$-измерима. Для этого мы используем лемму, которая будет доказана ниже. Эта лемма утверждает, что пространство X', сопряженное сепарабельному B-пространству, удовлетворяет следующему условию:

существует последовательность $\{f_n\} \subseteq X'$, $\|f_n\| \leqslant 1$, такая, что для всякого элемента $f_0 \in X'$, $\|f_0\| \leqslant 1$, можно выбрать подпоследовательность $\{f_{n'}\} \subseteq \{f_n\}$, обладающую тем свойством, что (1)

$$\lim_{n'\to\infty} f_{n'}(x) = f_0(x) \text{ для всех } x \in X.$$

Рассмотрим множества

$$A=\{s;\ \|x(s)\|\leqslant a\} \quad \text{и} \quad A_f=\{s;\ |f(x(s))|\leqslant a\},$$

где a — произвольное вещественное число и $f\in X'$. Если мы сможем показать, что $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{f_j}$, то в силу слабой $\mathfrak{B}$-измеримости $x(s)$ функция $\|x(s)\|$ будет $\mathfrak{B}$-измеримой.

Очевидно, что $A\subseteq\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f$. Но, согласно следствию 2 теоремы 1, гл. IV, § 6, для всякого фиксированного значения s существует элемент $f_0\in X'_s$, такой, что $\|f_0\|=1$ и $f_0(x(s))=\|x(s)\|$. Поэтому имеет место и обратное включение $A\supseteq\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f$, т. е. $A=\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f$. Согласно лемме, мы имеем $\bigcap_{\|f\|\leqslant 1}A_f=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{f_j}$, и поэтому $A=\bigcap_{j=1}^{\infty}A_{f_j}$.

Поскольку область значений $\{x(s);\ s\in S\}$ сепарабельна, эту область для любого целого положительного n можно покрыть счетной системой открытых шаров $S_{j,n}$ $(j=1, 2, \ldots)$ радиуса $\leqslant 1/n$. Пусть центры сфер $S_{j,n}$ находятся в точках $x_{j,n}$. Как показано выше, функция $\|x(s)-x_{j,n}\|$ $\mathfrak{B}$-измерима как функция переменной s. Следовательно, множества $B_{j,n}=\{s\in S;\ x(s)\in S_{j,n}\}$ $\mathfrak{B}$-измеримы и $S=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_{j,n}$. Определим функции $x_n(s)$, полагая

$$x_n(s)=x_{i,n}, \quad \text{когда} \quad s\in B'_{i,n}\equiv B_{i,n}-\bigcup_{j=1}^{i-1}B_{j,n}.$$

Тогда, поскольку $S=\sum_{i=1}^{\infty}B'_{i,n}$, для каждой точки $s\in S$ справедливо неравенство $\|x(s)-x_n(s)\|<1/n$. Каждая из функций $x_n(s)$ сильно $\mathfrak{B}$-измерима, так как множества B'_{in} $\mathfrak{B}$-измеримы. Отсюда следует, что функция $x(s)$, равная сильному пределу последовательности $\{x_n(s)\}$, тоже сильно $\mathfrak{B}$-измерима.

Доказательство леммы. Пусть последовательность $\{x_n(s)\}$ сильно плотна в пространстве X. Рассмотрим отображение $f\to\varphi_n(f)=\{f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)\}$ единичного шара $S'=\{f\in X';\ \|f\|\leqslant 1\}$ пространства X' в n-мерное гильбертово пространство $l^2(n)$ векторов $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ с нормой $\|(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)\|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\xi_j|^2\right)^{1/2}$. Пространство $l^2(n)$ сепарабельно, поэтому для каждого фиксированного n существует последовательность $\{f_{n,k}\}$ $(k=1, 2, \ldots)$ из S', такая, что множество $\{\varphi_n(f_{n,k}),\ k=1, 2, \ldots\}$ плотно в образе $\varphi_n(S')$ шара S'.

Итак, мы показали, что для любого элемента $f_0 \in S'$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{f_{n, m_n}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что $|f_{n, m_n}(x_i) - f_0(x_i)| < 1/n$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} f_{n, m_n}(x_i) = f_0(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и, следовательно, по теореме 10, гл. V, § 1, $\lim\limits_{n \to \infty} f_{n, m_n}(x) = f_0(x)$ для всех $x \in X$.

5. Интеграл Бохнера

Допустим, что на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ задана простая функция $x(s)$, принимающая значения в B-пространстве X. Пусть $x(s)$ принимает значение $x_i \neq 0$ на множестве $B_i \in \mathfrak{B}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где B_i не пересекаются, $m(B_i) < \infty$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и, кроме того, $x(s) = 0$ при $s \in \left(S - \sum\limits_{i=1}^{n} B_i\right)$. Тогда можно определить m-интеграл $\int\limits_S x(s)\, m(ds)$ функции $x(s)$ по множеству S, полагая его равным $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i m(B_i)$. Далее с помощью предельного перехода можно построить m-интеграл для функций более широкого класса. Дадим теперь точные определения.

Определения. Функция $x(s)$, определенная на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$ и принимающая значения в B-пространстве X, называется *m-интегрируемой по Бохнеру*, если существует последовательность простых функций $\{x_n(s)\}$, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-п. в. в S так, что при этом

$$\lim_{n \to \infty} \int\limits_S \|x(s) - x_n(s)\|\, m(ds) = 0. \tag{1}$$

Для любого множества $B \in \mathfrak{B}$ *m-интеграл Бохнера* функции $x(s)$ по множеству B определяется как

$$\int\limits_B x(s)\, m(ds) \equiv s\text{-}\lim_{n \to \infty} \int\limits_S C_B(s)\, x_n(s)\, m(ds), \tag{2}$$

где $C_B(s)$ — характеристическая функция множества B.

Для обоснования корректности этого определения нужно убедиться в том, что сильный предел, стоящий в правой части (2), действительно существует и что величина этого предела не зависит от выбора аппроксимирующей последовательности функций $\{x_n(s)\}$.

Обоснование корректности определения. Функция $x(s)$ сильно $\mathfrak{B}$-измерима, и поэтому условие (1) имеет смысл, так как $\mathfrak{B}$-измеримость функции $\|x(s) - x_n(s)\|$ была установлена в процессе доказательства теоремы Петтиса. Предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_B x_n(s)\,m(ds)$ существует, так как пространство X полно и

$$\left\|\int\limits_B x_n(s)\,m(ds)-\int\limits_B x_k(s)\,m(ds)\right\|=\left\|\int\limits_B (x_n(s)-x_k(s))\,m(ds)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant\int\limits_B\|x_n(s)-x_k(s)\|\,m(ds)\leqslant\int\limits_S\|x_n(s)-x(s)\|\,m(ds)+$$
$$+\int\limits_S\|x(s)-x_k(s)\|\,m(ds).$$

Независимость предела от выбора аппроксимирующей последовательности вполне очевидна, так как из двух различных аппроксимирующих последовательностей можно образовать одну последовательность, аппроксимирующую ту же самую функцию $x(s)$.

Теорема 1 (Бохнер [1]). Для того чтобы сильно $\mathfrak{B}$-измеримая функция $x(s)$ была m-интегрируемой по Бохнеру, необходимо и достаточно, чтобы норма $\|x(s)\|$ была m-интегрируемой.

Доказательство. Докажем необходимость условия теоремы. Мы имеем $\|x(s)\|\leqslant\|x_n(s)\|+\|x(s)-x_n(s)\|$. Из условия (1) и m-интегрируемости нормы $\|x_n(s)\|$ следует, что норма $\|x(s)\|$ тоже m-интегрируема и

$$\int\limits_B\|x(s)\|\,m(ds)\leqslant\int\limits_B\|x_n(s)\|\,m(ds)+\int\limits_B\|x(s)-x_n(s)\|\,m(ds).$$

Более того, поскольку

$$\int\limits_B\big|\|x_n(s)\|-\|x_k(s)\|\big|\,m(ds)\leqslant\int\limits_B\|x_n(s)-x_k(s)\|\,m(ds),$$

то в силу условия (1) предел $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_B\|x_n(s)\|\,m(ds)$ существует и

$$\int\limits_B\|x(s)\|\,m(ds)\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int\limits_B\|x_n(s)\|\,m(ds).$$

Докажем достаточность. Пусть $\{x_n(s)\}$ — произвольная последовательность простых функций, сильно сходящаяся к $x(s)$ m-п. в. Введем вспомогательные функции $y_n(s)$:

$$y_n(s)=\begin{cases} x_n(s), & \text{если } \|x_n(s)\|\leqslant\|x(s)\|(1+n^{-1}),\\ 0, & \text{если } \|x_n(s)\|>\|x(s)\|(1+n^{-1}).\end{cases}$$

Полученная последовательность простых функций $\{y_n(s)\}$ удовлетворяет неравенствам $\|y_n(s)\|\leqslant\|x(s)\|\cdot(1+n^{-1})$ и, кроме того,

$\lim\limits_{n\to\infty} \|x(s) - y_n(s)\| = 0$ m-п. в. Так как функция $\|x(s)\|$ m-интегрируема, то к функциям $\|x(s) - y_n(s)\| \leqslant 2\|x(s)\|(1+n^{-1})$ можно применить лемму Лебега — Фату; мы получим

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \|x(s) - y_n(s)\| \, m(ds) = 0,$$

откуда следует, что функция $x(s)$ m-интегрируема по Бохнеру.

Следствие 1. Приведенное выше доказательство показывает, что

$$\int\limits_B \|x(s)\| \, m(ds) \geqslant \left\| \int\limits_B x(s) \, m(ds) \right\|,$$

и поэтому интеграл $\int\limits_B x(s) \, m(ds)$ m-абсолютно непрерывен в том смысле, что

$$s\text{-}\lim_{m(B)\to 0} \int\limits_B x(s) \, m(ds) = 0.$$

Свойство конечной аддитивности $\int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{n} B_j} x(s) \, m(ds) = \sum\limits_{j=1}^{n} \int\limits_{B_j} x(s) \, m(ds)$ интеграла очевидно, а так как интеграл $\int\limits_B \|x(s)\| m(ds)$ σ-аддитивен, то и интеграл $\int\limits_B x(s) \, m(ds)$ σ-аддитивен, т. е.

$$\text{если} \quad B = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \quad \text{и} \quad m(B_j) < \infty \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{то} \quad \int\limits_{\sum\limits_{j=1}^{\infty} B_j} x(s) \, m(ds) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{B_j} x(s) \, m(ds).$$

Следствие 2. Пусть ограниченный линейный оператор T определен на B-пространстве X и действует в B-пространство Y. Если функция $x(s)$, принимающая значения в пространстве X, m-интегрируема по Бохнеру, то функция $Tx(s)$ со значениями из Y тоже m-интегрируема по Бохнеру и

$$\int\limits_B Tx(s) \, m(ds) = T \int\limits_B x(s) \, m(ds).$$

Доказательство. Выберем произвольную последовательность простых функций $\{y_n(s)\}$, удовлетворяющую условию

$$\|y_n(s)\| \leqslant \|x(s)\| \cdot (1+n^{-1}) \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n(s) = x(s) \qquad m\text{-п. в.}$$

Так как линейный оператор T непрерывен, то $\int\limits_B Ty_n(s)\, m(ds) = T\int\limits_B y_n(s)\, m(ds)$. Более того, из непрерывности T следует, что

$$\|Ty_n(s)\| \leqslant \|T\| \cdot \|y_n(s)\| \leqslant \|T\| \cdot \|x(s)\| \cdot (1+n^{-1})$$
$$\text{и} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} Ty_n(s) = Tx(s) \quad m\text{-п. в.}$$

Следовательно, функции $Tx(s)$ тоже m-интегрируемы по Бохнеру и

$$\int\limits_B Tx(s)\, m(ds) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \int\limits_B Ty_n(s)\, m(ds) =$$
$$= s\text{-}\lim_{n\to\infty} T\int\limits_B y_n(s)\, m(ds) = T\int\limits_B x(s)\, m(ds).$$

Теорема 2 (Бохнер [1]). Пусть S есть n-мерное евклидово пространство, $\mathfrak{B}$ — семейство бэровских множеств этого пространства и $m(B)$ — мера Лебега множества B. Если функция $x(s)$ m-интегрируема по Бохнеру, а $P(s_0;\, \alpha)$ обозначает n-мерный куб с центром $s_0 \in S$ и сторонами длины 2α, то

$$s\text{-}\lim_{\alpha \downarrow 0} (2\alpha)^{-n} \int\limits_{P(s_0;\, \alpha)} x(s)\, m(ds) = x(s_0) \text{ для } m\text{-почти всех точек } s_0 \in S.$$

Эту теорему называют теоремой о дифференцировании интеграла Бохнера.

Доказательство. Введем обозначение

$$D(x;\, s_0,\, \alpha) = (2\alpha)^{-n} \int\limits_{P(s_0;\, \alpha)} x(s)\, m(ds).$$

Если $\{x_n(s)\}$ — последовательность простых функций, таких, что $\|x_n(s)\| \leqslant \|x(s)\| \cdot (1+n^{-1})$ и m-п. в. $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n(s) = x(s)$, то

$$D(x;\, s_0,\, \alpha) - x(s_0) = D(x - x_k;\, s_0,\, \alpha) + D(x_k;\, s_0,\, \alpha) - x(s_0),$$

и поэтому

$$\overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \|D(x;\, s_0,\, \alpha) - x(s_0)\| \leqslant \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} D(\|x - x_k\|;\, s_0,\, \alpha) +$$
$$+ \overline{\lim_{\alpha \downarrow 0}} \|D(x_k;\, s_0,\, \alpha) - x_k(s_0)\| + \|x_k(s_0) - x(s_0)\|.$$

Первый предел в правой части содержит интеграл Лебега от числовой функции и m-п. в. равен $\| x(s_0) - x_k(s_0) \|$. Второй член m-п. в. равен нулю, так как функция $x_k(s)$ простая. Следовательно,

$$\overline{\lim_{\alpha \to 0}} \| D(x;\ s_0,\ \alpha) - x(s_0) \| \leqslant 2 \| x_k(s_0) - x(s_0) \|$$

для m-почти всех значений s_0. Полагая $k \to \infty$, мы получаем утверждение теоремы 2.

Замечание. В отличие от известных свойств числовых функций произвольная σ-аддитивная и m-абсолютно непрерывная функция множества, принимающая значения в некотором B-пространстве, не обязательно должна быть представима в виде некоторого m-интеграла Бохнера. Это подтверждается следующим примером.

Пример. Пусть $S = [0, 1]$, $\mathfrak{B}$ — семейство бэровских множеств отрезка $[0, 1]$, $m(B)$ — мера Лебега множества $B \in \mathfrak{B}$. Рассмотрим совокупность $m\ [1/3, 2/3]$ всех вещественных ограниченных функций $\xi = \xi(\theta)$, заданных на замкнутом интервале $[1/3, 2/3]$, с нормой $\| \xi \| = \sup\limits_{\theta} | \xi(\theta) |$. Определим на отрезке $[0, 1]$ функцию $x(s) = \xi(\theta; s)$, принимающую значения из множества $m\ [1/3, 2/3]$:

> графиком на s, y-плоскости вещественной функции $y = y_\theta(s)$, равной θ-координате $\xi(\theta; s)$ функции $x(s)$, является ломаная линия, соединяющая три точки $(0, 0)$, $(\theta, 1)$ и $(1, 0)$ в указанном порядке.

Тогда если $s \neq s'$, то

$$\| (s - s')^{-1} (x(s) - x(s')) \| = \sup_{\theta} | (s - s')^{-1} (\xi(\theta; s) - \xi(\theta; s') | \leqslant 3,$$

т. е. функция $x(s)$ удовлетворяет *условию Липшица* (по норме). Рассматривая выражение $(x(s) - x(s'))$ как функцию интервала с концами s и s', принимающую значения из множества $m\ [1/3, 2/3]$, мы можем, как это обычно делается, построить σ-аддитивную m-абсолютно непрерывную функцию множества $x(B)$, определенную на бэровских множествах отрезка $[0, 1]$.

Если функция $x(B)$ может быть представлена в виде m-интеграла Бохнера, то, как вытекает из предыдущей теоремы, функция $x(s)$ должна быть m-п. в. сильно дифференцируемой [1]) по s. Обозначим соответствующую сильную производную $x'(s)$ через $\eta(\theta; s)$; ее значения принадлежат множеству $m\ [1/3, 2/3]$. Тогда для всякого

---

[1]) Здесь и далее дифференцируемость понимается как существование предела $x'(s) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{x(s+h) - x(s)}{h}$. В зависимости от топологии, в которой рассматривается этот предел, возникают понятия „сильной“, „слабой“ (и т. п.) дифференцируемости и производной $x'(s)$. — *Прим. перев.*

$\theta \in [1/3, 2/3]$ m-п. в. по переменной s выполняется условие

$$0 = \lim_{h \to 0} \| h^{-1}(x(s+h) - x(s)) - x'(s) \| \geqslant$$
$$\geqslant \lim_{h \to 0} | h^{-1}(\xi(\theta; s+h) - \xi(\theta; s)) - \eta(\theta; s) |.$$

Это означает, что функция $\xi(\theta; s)$ дифференцируема m-п. в. по s при всех значениях $\theta \in [1/3, 2/3]$, что противоречит ее построению.

Литература к главе V

Банах [1], Данфорд — Шварц [1], Хилле — Филлипс [1].

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ V

Слабые топологии и сопряженность в локально выпуклых линейных топологических пространствах

Изложение построено так, что читатель может пропустить это приложение при первом чтении и приступить непосредственно к изучению следующих глав.

1. Поляры

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Для каждого множества $M \subseteq X$ определим его (*правую*) *поляру* M^0 формулой

$$M^0 = \left\{ x' \in X'; \ \sup_{x \in M} |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1 \right\}. \tag{1}$$

Аналогично для всякого множества $M' \subseteq X'$ определим его (*левую*) *поляру* ${}^0M'$ формулой

$${}^0M' = \left\{ x \in X; \ \sup_{x' \in M'} |\langle x, x' \rangle| \leqslant 1 \right\} = X \cap (M')^0, \tag{2}$$

где пространство X рассматривается как вложенное во второе сопряженное $(X'_s)'_s$. За фундаментальную систему окрестностей нуля в X, определяющих слабую топологию пространства X, можно принять систему множеств вида ${}^0M'$, где M' пробегает все конечные множества из X'. Фундаментальной системой окрестностей нуля в слабой * топологии пространства X' служит система множеств вида M^0, где M пробегает все конечные множества из X. Наконец, фундаментальной системой окрестностей нуля, определяющих сильную топологию пространства X', является семейство множеств вида M^0, где M пробегает совокупность всех ограниченных множеств из X.

Предложение. Поляра M^0 представляет собой уравновешенное выпуклое множество, замкнутое в слабой* топологии пространства X'.

Доказательство. Линейный функционал $f(x') = \langle x, x' \rangle$ непрерывен в слабой* топологии пространства X' при любом фиксированном значении $x \in X$. Поэтому множество $M^0 = \bigcap\limits_{m \in M} \{m\}^0$ замкнуто в слабой* топологии пространства X'. Уравновешенность и выпуклость множества M^0 очевидны.

Об одном приложении теоремы Тихонова

Теорема 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и A — некоторая выпуклая и уравновешенная окрестность нуля в X. Тогда поляра A^0 бикомпактна в слабой* топологии пространства X'.

Доказательство. Обозначим через $p(x)$ функционал Минковского множества A. Для произвольных фиксированных значений $x \in X$ рассмотрим на комплексной плоскости C шары $S_x = \{z \in C;\ |z| \leqslant \leqslant p(x)\}$ и их тихоновское произведение $S = \prod\limits_{x \in X} S_x$. Множество S, согласно теореме Тихонова, бикомпактно. Всякий элемент $x' \in X'$ определяется совокупностью значений $x'(x) = \langle x, x' \rangle$, $x \in X$. Так как $x \in (p(x) + \varepsilon) A$ при любом $\varepsilon > 0$, то из условия $x' \in X'$ следует, что $\langle x, x' \rangle = \langle (p(x) + \varepsilon) a, x' \rangle$, где a — некоторый элемент из A. Поэтому если $x' \in A^0$, то $|x'(x)| \leqslant p(x) + \varepsilon$, т. е. $x'(x) \in S_x$. Таким образом, множество A^0 можно рассматривать как подмножество в S. Более того, нетрудно проверить, что топология, индуцированная на поляре A^0 слабой* топологией пространства X', совпадает с топологией, индуцированной на множестве A^0 топологией тихоновского произведения $S = \prod\limits_{x \in X} S_x$.

Итак, для нашей цели достаточно показать, что A^0 — замкнутое подмножество в S. Допустим, что $y = \prod\limits_{x \in X} y(x)$ — некоторый элемент замыкания множества A^0 в слабой* топологии пространства S. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и любые две точки $x_1, x_2 \in X$. Совокупность всех $u = \prod\limits_{x \in X} u(x) \in S$, таких, что

$$|u(x_1) - y(x_1)| < \varepsilon, \ |u(x_2) - y(x_2)| < \varepsilon \ \text{и} \ |u(x_1 + x_2) - y(x_1 + x_2)| < \varepsilon,$$

образует окрестность элемента y в пространстве S. Эта окрестность содержит некоторую точку $x' \in A^0$, и, поскольку x' — непрерывный линейный функционал на X, имеют место неравенства

$$|y(x_1 + x_2) - y(x_1) - y(x_2)| \leqslant |y(x_1 + x_2) - \langle x_1 + x_2, x' \rangle| + \\ + |\langle x_1, x' \rangle - y(x_1)| + |\langle x_2, x' \rangle - y(x_2)| < 3\varepsilon.$$

Отсюда видно, что $y(x_1+x_2)=y(x_1)+y(x_2)$. Точно так же можно убедиться в том, что $y(\beta x)=\beta y(x)$, поэтому y — линейный функционал на X. Из представления $y=\prod_{x\in X} y(x)\in S$ следует, что $|y(x)|\leqslant p(x)$. Функционал $p(x)$ непрерывен, поэтому $y(x)$ — это непрерывный линейный функционал, т. е. $y\in X'$. С другой стороны, y представляет собой предельную точку множества A^0 в слабой* топологии, и, следовательно, для любого $\varepsilon>0$ и произвольного $a\in A$ найдется такой элемент $x'\in A^0$, что $|y(a)-\langle a, x'\rangle|\leqslant\varepsilon$. Значит, $|y(a)|\leqslant|\langle a, x'\rangle|+\varepsilon\leqslant 1+\varepsilon$, откуда $|y(a)|\leqslant 1$, т. е. $y\in A^0$.

Следствие. Единичный шар $S^*=\{x'\in X';\ \|x'\|\leqslant 1\}$ пространства X'_s, сопряженного нормированному линейному пространству X, бикомпактен в слабой* топологии пространства X'.

Об одном приложении теоремы Мазура

Теорема 2. Пусть M — выпуклое уравновешенное замкнутое множество в локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Тогда $M={}^0(M^0)$.

Доказательство. Ясно, что $M\subseteq{}^0(M^0)$. Если существует элемент $x_0\in{}^0(M)^0-M$, то по теореме Мазура (теорема 3, § 6, гл. IV) найдется элемент $x'_0\in X'$, такой, что $\langle x_0, x'_0\rangle>1$ и $|\langle x, x'_0\rangle|\leqslant 1$ для всех $x\in M$. Последнее неравенство показывает, что $x'_0\in M^0$, поэтому элемент x_0 не может принадлежать множеству ${}^0(M^0)$.

2. *Бочечные пространства*

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство. Всякое выпуклое уравновешенное поглощающее замкнутое множество такого пространства называется *бочкой*. Если каждая бочка пространства X является окрестностью нуля, то пространство X называется *бочечным*.

Теорема 1. Если локально выпуклое линейное топологическое пространство X не является множеством первой категории, то X представляет собой бочечное пространство.

Доказательство. Пусть T — некоторая бочка пространства X. Так как множество T — поглощающее, X можно представить в виде объединения замкнутых множеств $nT=\{nt;\ t\in T\}$, где n принимает все положительные целые значения. Если X не является множеством первой категории, то по крайней мере одно из множеств nT содержит внутреннюю точку. Следовательно, и множество T содержит некоторую внутреннюю точку x_0. Если $x_0=0$, то T оказывается окрестностью нуля в X. Если же $x_0\neq 0$, то $-x_0\in T$, потому что множество T — уравновешенное. Поэтому точка $-x_0$, так же как и x_0, является внутренней для T. Отсюда вытекает, что множество T, будучи выпуклым, содержит $0=(x_0-x_0)/2$ как внутреннюю точку, и теорема доказана.

Следствие 1. Все локально выпуклые F-пространства и, в частности, все B-пространства и пространство $\mathfrak{E}(R^n)$ являются бочечными.

Следствие 2. Метрическое линейное пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$ является бочечным.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_k\}$ — последовательность элементов пространства $\mathfrak{D}_K(R^n)$, фундаментальная относительно функции расстояния

$$\operatorname{dis}(\varphi, \psi)=\sum_{m=0}^{\infty} 2^{-m} \frac{p_m(\varphi-\psi)}{1+p_m(\varphi-\psi)}, \text{ где } p_m(\varphi)=\sup_{|j|\leqslant m,\, x\in K} |D^j\varphi(x)|.$$

Функции $D^j\varphi_k(x)$ последовательности $\{D^j\varphi_k(x)\}$ при любом дифференциальном операторе D^j равностепенно непрерывны и равномерно ограничены, т. е.

$$\lim_{|x^1-x^2|\downarrow 0}\ \sup_{k\geqslant 1} |D^j\varphi_k(x^1)-D^j\varphi_k(x^2)|=0 \quad \text{и} \quad \sup_{x\in K,\, k\geqslant 1} |D^j\varphi_k(x)|<\infty.$$

Это следует из неравенства $\sup\limits_{x\in K,\, k\geqslant 1}\left|\frac{\partial}{\partial x_s} D^j\varphi_k(x)\right|<\infty$, справедливого для всякой координаты x_s. По теореме Асколи — Арцела существует подпоследовательность $\{D^j\varphi_{k'}(x)\}$, равномерно сходящаяся на множестве K. При помощи диагонального процесса мы можем построить такую подпоследовательность $\{\varphi_{k''}(x)\}$ последовательности $\{\varphi_k(x)\}$, что последовательность $\{D^j\varphi_{k''}(x)\}$ равномерно сходится на множестве K при любом дифференциальном операторе D^j. Поэтому

$$\lim_{k''\to\infty} D^j\varphi_{k''}(x)=D^j\varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x)=\lim_{k''\to\infty}\varphi_{k''}(x),$$

причем эти предельные переходы равномерны на множестве K. Это означает, что метрическое пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$ полно и поэтому не может быть множеством первой категории.

Замечание. (1) Из приведенного доказательства следует, что всякое ограниченное множество пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ относительно бикомпактно в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^n)$. В самом деле, любое ограниченное множество $B\subseteq\mathfrak{D}(R^n)$ должно содержаться в некотором пространстве вида $\mathfrak{D}_K(R^n)$, где K — бикомпактное множество в R^n. Кроме того, из ограниченности B вытекает равномерная ограниченность и равностепенная непрерывность функций $\{D^j\varphi;\ \varphi\in B\}$ при любом операторе D^j. (2) Совершенно аналогично можно убедиться в том, что всякое замкнутое множество пространства $\mathfrak{E}(R^n)$ относительно бикомпактно в нем.

Следствие 3. Пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ является бочечным.

Доказательство. Пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ является индуктивным пределом пространств $\{\mathfrak{D}_K(R^n)\}$, когда K пробегает все бикомпактные подмножества пространства R^n. Поэтому наше утверждение вытекает из следующего предложения.

Предложение. Допустим, что некоторое локально выпуклое линейное топологическое пространство X является индуктивным пределом своих бочечных подпространств X_α, $\alpha \in A$. Тогда X — бочечное пространство.

Доказательство. Обозначим через V некоторую бочку пространства X. В силу непрерывности тождественного отображения $T_\alpha : x \to x$ подпространства X_α в X прообраз $T_\alpha^{-1}(V) = V \cap X_\alpha$, так же как и множество V, замкнут. Поэтому множество $V \cap X_\alpha$ образует бочку в X_α. Поскольку пространство X_α — бочечное, множество $V \cap X_\alpha$ является окрестностью нуля в X_α. Следовательно, множество V является окрестностью нуля в X, ибо X — индуктивный предел подпространств X_α.

Теорема 2. Пусть X — бочечное пространство. Тогда определенное в § 8 гл. IV отображение $x \to Jx$ пространства X в $(X'_s)'_s$ является топологическим отображением пространства X на JX, при условии, что в JX взята его относительная топология как подмножества пространства $(X'_s)'_s$.

Доказательство. Рассмотрим в пространстве X'_s произвольное ограниченное множество B'. Тогда поляра $(B')^0 = \{x'' \in (X'_s)'_s;\ \sup\limits_{x' \in B'} |\langle x', x''\rangle| \leqslant 1\}$ множества B' является окрестностью нуля в $(X'_s)'_s$ и, кроме того, выпуклым уравновешенным и поглощающим множеством, замкнутым в $(X'_s)'_s$.

Поэтому $(B')^0 \cap X = {}^0(B')$ — это выпуклое уравновешенное и поглощающее множество в X. Как поляра множество ${}^0(B')$ замкнуто в слабой топологии пространства X и, следовательно, замкнуто в исходной топологии X. Таким образом, множество ${}^0(B') = (B')^0 \cap X$ образует бочку в пространстве X и поэтому является окрестностью нуля в X. Отсюда следует, что отображение $x \to Jx$ пространства X в $(X'_s)'_s$ непрерывно, так как топология пространства $(X'_s)'_s$ определяется фундаментальной системой окрестностей нуля вида $(B')^0$, где B' пробегает все ограниченные множества пространства X'.

Пусть теперь U — произвольная выпуклая уравновешенная и замкнутая окрестность нуля в X. Тогда, как показано в предыдущем параграфе, $U = {}^0(U^0)$. Значит, $JU = JX \cap (U^0)^0$. С другой стороны, U^0 — ограниченное множество пространства X'_s, ибо для всякого ограниченного множества $B \subseteq X$ существует такое $\alpha > 0$, что $\alpha B \subseteq U$ и, следовательно, $(\alpha B)^0 \supseteq U^0$. Это означает, что множество $(U^0)^0$ является окрестностью элемента $0 \in (X'_s)'_s$. Поэтому образ JU окрестности U точки $0 \in X$ представляет собой окрестность нуля подпространства JX в его относительной топологии как подмножества пространства $(X'_s)'_s$.

3. Полурефлексивность и рефлексивность

Определение 1. Локально выпуклое линейное топологическое пространство X называется *полурефлексивным*, если всякий непрерывный линейный функционал, заданный на пространстве X'_s, может быть представлен в виде

$$\langle x, x' \rangle, \text{ где } x \text{ — некоторый элемент из } X. \tag{1}$$

Таким образом, пространство X полурефлексивно в том и только в том случае, когда

$$X_w = (X'_s)'_{w^*}. \tag{2}$$

Определение 2. Локально выпуклое линейное топологическое пространство X называется *рефлексивным*, если

$$X = (X'_s)'_s. \tag{3}$$

Согласно теореме 2 предыдущего параграфа, справедливо

Предложение 1. Полурефлексивное бочечное пространство рефлексивно.

Из определения 2 вытекает

Предложение 2. Пространство, сильно сопряженное рефлексивному пространству, рефлексивно.

Теорема 1. Для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство X было полурефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякое замкнутое ограниченное множество в X было бикомпактным в слабой топологии этого пространства.

Доказательство. Пусть пространство X полурефлексивно, и пусть $B \subseteq X$ — некоторое замкнутое ограниченное множество. Рассмотрим множество $N = \bigcup_{|\alpha| \leqslant 1} \alpha B$ и обозначим через $\mathrm{Conv}(N)$ *выпуклую оболочку* множества N, т. е. совокупность всех выпуклых комбинаций $x = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j n_j \left(\alpha_j \geqslant 0, \ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1, \ k = 1, 2, \ldots\right)$ элементов n_j множества N. Замыкание $T = \mathrm{Conv}(N)^a$ множества $\mathrm{Conv}(N)$ образует в пространстве X замкнутое выпуклое уравновешенное и ограниченное множество. Но тогда по теореме 2 из § 1 этого приложения $T = {}^0(T^0)$. Множество T ограничено в X, поэтому T^0 — окрестность нуля в X'_s. Следовательно, по теореме 1 из § 1 этого приложения множество $(T^0)^0$ бикомпактно в слабой * топологии пространства $(X'_s)'_{w^*}$. Отсюда, учитывая полурефлексивность пространства X, мы заключаем, что множество $T = {}^0(T^0)$ бикомпактно в слабой топологии пространства X.

Обратимся теперь к доказательству достаточности. Выберем произвольный элемент $x'' \in (X'_s)'_s$. Из сильной непрерывности x'' на X'_s

следует, что в пространстве X существует ограниченное множество B, такое, что

$$|\langle x', x''\rangle| \leqslant 1 \text{ для всех } x' \in B^0, \text{ т. е. } x'' \in (B^0)^0.$$

Мы можем, не ограничивая общности, считать множество B выпуклым уравновешенным и замкнутым в X. По условию теоремы множество B бикомпактно в слабой топологии пространства X. Следовательно, $B = B^{wa}$, где B^{wa} обозначает замыкание B в слабой топологии пространства X. Поскольку X_w можно вложить в $(X'_s)'_{w^*}$ как линейное топологическое подпространство, справедливо включение $(B^0)^0 \supseteq \supseteq B^{wa} = B$. Поэтому остается показать, что x'' — предельная точка множества B в пространстве $(X'_s)'_{w^*}$. Рассмотрим отображение $x \to \varphi(x) = \{\langle x, x'_1\rangle, \ldots, \langle x, x'_n\rangle\}$ пространства X в $l^2(n)$, где $x'_1, \ldots, x'_n \in X'$. Образ $\varphi(B)$ выпуклого и слабо бикомпактного множества B будет при этом выпуклым и бикомпактным. Если элемент $\{\langle x'_1, x''\rangle, \ldots, \langle x'_n, x''\rangle\}$ не принадлежит $\varphi(B)$, то по теореме Мазура найдется такая точка $\{c_1, \ldots, c_n\} \in l^2(n)$, что

$$\sup_{b \in B} \left|\sum_i c_i \langle b, x'_i\rangle\right| \leqslant 1 \quad \text{и} \quad \left(\sum_i c_i \langle x'_i, x''\rangle\right) > 1.$$

Но тогда $\sum_i c_i x'_i \in B^0$, а это означает, что x'' не принадлежит множеству $(B^0)^0$.

Теорема 2. Для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы оно было бочечным и чтобы всякое ограниченное замкнутое множество в нем было бикомпактно в слабой топологии пространства X. В частности, пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ и $\mathfrak{E}(R^n)$ рефлексивны.

Доказательство. Достаточность сформулированных условий уже доказана. Докажем, что первое условие необходимо.

Пусть T — некоторая бочка пространства X. Мы должны показать, что T поглощает всякое ограниченное множество B пространства X, т. е. $B^0 \supseteq \alpha T^0\,(\alpha > 0)$. В самом деле, если это так, то множество T^0 ограничено в X'_s, поскольку B^0 — окрестность точки $0 \in X'_s$. Согласно предложению и теореме 2 из § 1 этого приложения, $T = {}^0(T^0)$. По условиям теоремы пространство X рефлексивно, поэтому ${}^0(T^0) = (T^0)^0$ и, следовательно, $T = (T^0)^0$. Таким образом, бочка T является окрестностью точки $0 \in X = (X'_s)'_s$. Поэтому пространство X — бочечное.

Убедимся теперь в том, что всякая бочка T пространства X поглощает любое ограниченное множество $B \subseteq X$. По условиям теоремы замкнутое выпуклое и уравновешенное множество

$K = \mathrm{Conv}\left(\bigcup_{|\alpha| \leqslant 1} \alpha B\right)^a$ бикомпактно в слабой топологии X. Положим $Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} nK$ и обозначим через $p(x)$ функционал Минковского множества K. Тогда, поскольку K слабо бикомпактно в Y, функционал $p(x)$ определяет в Y норму. Это означает, что система $\{\alpha K\}$ $(\alpha > 0)$ образует фундаментальную систему окрестностей нормированного линейного пространства Y и Y является B-пространством, потому что множество K бикомпактно. Следовательно, пространство Y—бочечное. С другой стороны, так как K ограничено в X, топология, определяемая в пространстве Y нормой $p(x)$, сильнее, чем относительная топология Y как подмножества пространства X. Множество T как бочка пространства X замкнуто в X. Следовательно, множество $T \cap Y$ замкнуто в Y относительно топологии, определяемой нормой $p(x)$. Поэтому множество $T \cap Y$ — бочка B-пространства Y, и, следовательно, оно является окрестностью нуля в B-пространстве Y. Таким образом, мы доказали, что $T \cap Y$ и тем более T поглощает множество $K \supseteq B$.

4. Теорема Эберлейна — Шмульяна

Эта теорема имеет ряд очень важных приложений.

Теорема (Эберлейн — Шмульян). Для того чтобы B-пространство X было рефлексивным, необходимо и достаточно, чтобы всякая сильно ограниченная последовательность его элементов содержала подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке пространства X.

Для доказательства нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 1. Если сильно сопряженное X'_s к B-пространству X сепарабельно, то и само пространство X сепарабельно.

Лемма 2 (Банах). Для того чтобы линейное подпространство M' сопряженного X' к B-пространству X было замкнуто в слабой* топологии, необходимо и достаточно, чтобы M' содержало все слабо* предельные точки всякого сильно ограниченного подмножества из M'.

Лемма 1 уже доказана в § 2 гл. V.

Необходимость условия леммы 2 очевидна; остается доказать его достаточность.

Доказательство (Хилле — Филлипс [1]). Из условия следует, что множество M' сильно замкнуто. Пусть точка $x'_0 \notin M'$. Можно показать, что для всякой постоянной C, удовлетворяющей неравенству $0 < C < \inf_{x' \in M'} \|x' - x'_0\|$, найдется элемент $x_0 \in X$, такой, что $\|x_0\| \leqslant 1/C$ и

$$\langle x_0, x'_0 \rangle = 1, \quad \langle x_0, x' \rangle = 0 \text{ для всех } x' \in M'. \tag{1}$$

Отсюда следует, что сильно замкнутое множество M' должно содержать все свои слабо* предельные точки.

Для доказательства существования x_0 возьмем возрастающую последовательность чисел $\{C_n\}$, такую, что $C_1 = C$ и $\lim\limits_{n\to\infty} C_n = \infty$. Тогда найдется конечное подмножество σ_1 единичного шара $S = \{x \in X;\ \|x\| \leqslant 1\}$, такое, что из неравенств $\|x' - x_0'\| \leqslant C_2$ и $\sup\limits_{x\in\sigma_1} |\langle x, x'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_1$ следует, что $x' \notin M'$. Действительно, если это не так, то каждому конечному подмножеству σ шара S соответствует элемент $x_\sigma' \in M'$, такой, что

$$\|x_\sigma' - x_0'\| \leqslant C_2 \quad \text{и} \quad \sup_{x\in\sigma} |\langle x, x_\sigma'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_1.$$

Эти множества σ мы можем частично упорядочить с помощью отношения включения; обозначим слабые* замыкания множеств $\{x_{\sigma'}';\ \sigma' \succ \sigma\}$ через N_σ'. Ясно, что множества N_σ' образуют центрированное семейство. Но в то же время, поскольку множество M' содержит слабо* предельные точки всех своих сильно ограниченных подмножеств, из следствия теоремы 1 § 1 этого приложения вытекает, что множество

$$M_{C'}' = \{x' \in M';\ \|x'\| \leqslant C'\}$$

слабо* бикомпактно. Следовательно, $N_\sigma' \subseteq M_{C'}'$ при $C' = C_2 + \|x_0'\|$, и поэтому найдется элемент $x_1' \in \bigcap\limits_\sigma N_\sigma' \subseteq M'$. Значит, $\sup\limits_{x\in S} |\langle x, x_1'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_1$, откуда $\|x_1' - x_0'\| \leqslant C_1$ вопреки предположению $0 < C_1 < \inf\limits_{x'\in M'} \|x' - x_0'\|$. Итак, множество σ_1 существует.

Повторяя эти рассуждения, мы можем построить последовательность конечных подмножеств $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ шара S, такую, что

$$\text{если } \|x' - x_0'\| \leqslant C_k \text{ и } \sup_{x\in\sigma_i} |\langle x, x'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C_i$$

$$(i = 1, 2, \ldots, k-1), \text{ то } x' \notin M'.$$

Но тогда, поскольку $\lim\limits_{i\to\infty} C_i = \infty$, мы видим, что если

$$|\langle x, x'\rangle - \langle x, x_0'\rangle| \leqslant C \text{ для всех } x \in \left(\frac{C}{C_j}\right)\sigma_j \quad (j = 1, 2, \ldots),$$

то $x' \notin M'$. Занумеруем последовательно точки множеств $(C/C_j)\sigma_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$; мы получим последовательность $\{x_n\}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и, следовательно, $L(x') = \{\langle x_n, x'\rangle\}$ — это ограниченное линейное отображение пространства X_s' в B-пространство (c_0).

Мы знаем, что точка $\{\langle x_n, x'_0\rangle\} \in (c_0)$ лежит на расстоянии $> C$ от линейного подпространства $L(M')$. Поэтому, согласно следствию теоремы 3, гл. IV, § 6, существует непрерывный линейный функционал $\{\alpha_n\} \in (c_0)' = (l^1)$, такой, что

$$\|\{\alpha_n\}\| = \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| \leqslant \frac{1}{C}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x'_0\rangle = 1$$

$$\text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \langle x_n, x'\rangle = 0 \qquad \text{для всех } x' \in M'.$$

Ясно, что элемент $x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ удовлетворяет условию (1).

Следствие. Пусть $\langle x', x''_0\rangle = F(x')$ — линейный функционал, определенный на сопряженном X' к B-пространству X. Если множество $N(F) = N(x''_0) = \{x' \in X';\ F(x') = 0\}$ слабо* замкнуто, то существует элемент $x_0 \in X$, такой, что

$$F(x') = \langle x', x''_0\rangle = \langle x_0, x'\rangle \qquad \text{для всех } x' \in X'. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что $N(F) \neq X'$, так как в противном случае мы могли бы взять $x_0 = 0$. Пусть $x'_0 \in X'$ — такой элемент, что $F(x'_0) = 1$. Так же, как в лемме 2, можно показать (см. (1)), что найдется элемент $x_0 \in X$, для которого

$$\langle x_0, x'_0\rangle = 1 \text{ и } \langle x_0, x'\rangle = 0 \text{ для всех } x' \in N(F). \tag{3}$$

Поэтому для всякой точки $x' \in X'$ функционал

$$x' - F(x')\,x'_0 = y' \in X'$$

удовлетворяет условию $F(y') = 0$, т. е. $y' \in N(F)$. Отсюда, используя (3), мы получаем условие (2).

Доказательство теоремы. *Необходимость.* Пусть $\{x_n\}$ — последовательность из X, такая, что $\|x_n\| = 1$. Сильное замыкание X_0 линейного подпространства, натянутого на элементы последовательности $\{x_n\}$, является сепарабельным B-пространством и, следовательно, бочечным пространством. Покажем, что пространство X_0 рефлексивно. Всякое ограниченное сильно замкнутое множество B_0 в X_0 является также ограниченным и сильно замкнутым в X, поэтому B_0 бикомпактно в слабой топологии X, так как X по предположению рефлексивно. В то же время X_0 как сильно замкнутое линейное подпространство пространства X замкнуто в слабой топологии X (теорема 3, гл. IV, § 6). Следовательно, множество B_0 бикомпактно в слабой топологии пространства X_0. Поэтому, согласно теореме 2 предыдущего параграфа, пространство X_0 рефлексивно. Таким образом, $X_0=((X_0)'_s)'_s$. По лемме 1 пространство $(X_0)'_s$ сепарабельно. Пусть $\{x'_n\}$—сильно плотная последовательность в пространстве $(X_0)'_s$. Тогда слабая топология пространства X_0 определяется счетной системой полунорм $p_m(x)=|\langle x, x'_m\rangle|$ $(m=1, 2, \ldots)$. Отсюда нетрудно получить, что последовательность $\{x_n\}$, бикомпактная в слабой топологии X_0, слабо секвенциально компактна и в X_0, и в X. Итак, остается лишь выбрать из $\{x_n\}$ такую подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, чтобы для $m=1, 2, \ldots$ существовал конечный предел $\lim\limits_{n'\to\infty}\langle x_{n'}, x'_m\rangle$.

Достаточность. Обозначим через M произвольное ограниченное множество в X и предположим, что всякая бесконечная последовательность элементов множества M содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу пространства X. Мы должны показать, что замыкание $\overline{M}$ множества M в слабой топологии пространства X слабо бикомпактно в X. В самом деле, тогда пространство X будет рефлексивным по теореме 2 предыдущего параграфа. Поскольку $X_w \subseteq (X'_s)'_{w^*}$, мы имеем $\overline{M}=\overline{\overline{M}}\cap X_w$, где через $\overline{\overline{M}}$ обозначено замыкание множества $\overline{M}$ в слабой* топологии пространства $(X'_s)'_{w^*}$. Обозначим через S'_r шар радиуса $r>0$ с центром в точке $0\in X'_s$. При помощи соответствия

$$\overline{\overline{M}}\ni m \longleftrightarrow \{\langle x', m\rangle;\ \|x'\|\leqslant 1\}\in\prod_{x'\in S'_1} I_{x'},$$

где

$$I_{x'}=\left\{z;\ |z|\leqslant\sup_{m\in\overline{\overline{M}}}|\langle x', m\rangle|\right\},$$

множество $\overline{\overline{M}}$ можно отождествить с некоторым замкнутым подмножеством тихоновского произведения $\prod\limits_{x'\in S'_1} I_{x'}$. По теореме Тихонова множество $\prod\limits_{x'\in S'_1} I_{x'}$ бикомпактно, и поэтому $\overline{\overline{M}}$ бикомпактно в слабой* топологии пространства $(X'_s)'$. Остается, таким образом, лишь убедиться в том, что $\overline{\overline{M}}\subseteq X_w$.

Пусть $x''_0\in(X'_s)'$—предельная точка множества $\overline{M}$ в слабой* топологии пространства $(X'_s)'$. Чтобы доказать включение $x''_0\in X_w$, нужно только показать, что множество $N(x''_0)=\{x'\in X';\ \langle x', x''_0\rangle=0\}$ слабо* замкнуто. Действительно, если это так, то по доказанному выше следствию найдется такой элемент $x_0\in X$, что $\langle x', x''_0\rangle=\langle x_0, x'\rangle$

для всех $x' \in X'$. Сначала мы покажем, что

для каждого конечного множества $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ пространства X' существует такой элемент $z \in \overline{M}$, что

$$\langle x'_j, x''_0\rangle = \langle z, x'_j\rangle \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Это утверждение доказывается следующим образом. Так как элемент x''_0 входит в слабое* замыкание множества $\overline{M}$, найдутся такие $z_m \in \overline{M}$, что

$$|\langle z_m, x'_j\rangle - \langle x_j, x''_0\rangle| \leqslant \frac{1}{m} \quad (j = 1, 2, \ldots, n; \ m = 1, 2, \ldots).$$

Согласно предположениям, из $\{z_m\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $z \in X$, поэтому $z \in \overline{M}$, так как слабое замыкание множества $\overline{M}$ содержится в $\overline{M}$. Таким образом, утверждение (4) доказано.

Далее, если для всякого $r > 0$ множество $N(x''_0) \cap S'_r$ слабо* замкнуто, то, согласно лемме 2, и множество $N(x''_0)$ слабо* замкнуто. Пусть y'_0 принадлежит слабому* замыканию множества $N(x''_0) \cap S'_1$. Нужно показать, что $y'_0 \in N(x''_0) \cap S'_1$. С этой целью возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и построим три последовательности

$$\{z_n\} \subseteq \overline{M}, \ \{x_n\} \subseteq M \quad \text{и} \quad \{y'_n\} \subseteq N(x''_0) \cap S'_1$$

следующим образом: согласно (4), можно выбрать $z_1 \in \overline{M}$ так, что $\langle z_1, y'_0\rangle = \langle y'_0, x''_0\rangle$. Так как z_1 принадлежит слабому замыканию множества M, можно выбрать $x_1 \in M$ так, что $|\langle x_1, y'_0\rangle - \langle z_1, y'_0\rangle| \leqslant \varepsilon/4$. Наконец, поскольку y'_0 лежит в слабом* замыкании множества $N(x''_0) \cap S'_1$, можно найти элемент $y'_1 \in N(x''_0) \cap S'_1$, такой, что $|\langle x_1, y'_1\rangle - \langle x_1, y'_0\rangle| \leqslant \varepsilon/4$. Повторяя эти рассуждения и принимая во внимание (4), мы получим последовательности

$$\{z_n\} \subseteq \overline{M}, \qquad \{x_n\} \subseteq M \quad \text{и} \quad \{y'_n\} \subseteq N(x''_0) \cap S'_1,$$

обладающие такими свойствами:

$$\begin{aligned}
&\langle z_1, y'_0\rangle = \langle y'_0, x''_0\rangle, \\
&\langle z_n, y'_m\rangle = \langle y'_m, x''_0\rangle = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots, n-1), \\
&|\langle x_n, y'_m\rangle - \langle z_n, y'_m\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \quad (m = 0, 1, \ldots, n-1), \\
&|\langle x_i, y'_n\rangle - \langle x_i, y'_0\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).
\end{aligned} \tag{5}$$

Отсюда видно, что

$$|\langle y_0', x_0''\rangle - \langle x_i, y_n'\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

Так как $\{x_n\} \subseteq M$, из $\{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторой точке $x \in \overline{M}$. Без ограничения общности можно допустить, что сама последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к $x \in \overline{M}$. Отсюда на основании (5) мы заключаем, что $|\langle x, y_m'\rangle| \geqslant \varepsilon/4$. Так как $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, то по теореме Мазура (теорема 2, гл. V, § 1) существует выпуклая комбинация $u = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$ $\left(\alpha_j \geqslant 0, \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = 1\right)$, такая, что $\|x - u\| \leqslant \varepsilon/4$. В силу (6) получаем

$$|\langle y_0', x_0''\rangle - \langle u, y_n'\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |\langle y_0', x_0''\rangle - \langle x_j, y_n'\rangle| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$|\langle y_0', x_0''\rangle| \leqslant |\langle y_0', x_0''\rangle - \langle u, y_n'\rangle| + |\langle u, y_n'\rangle - \langle x, y_n'\rangle| + |\langle x, y_n'\rangle| \leqslant \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \|u - x\| \cdot \|y_n'\| + \frac{\varepsilon}{4} \leqslant \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $\langle y_0', x_0''\rangle = 0$, откуда $y_0' \in N(x_0'')$. Вспоминая, что множество S_1' замкнуто в слабой* топологии, мы, наконец, получаем $y_0' \in N(x_0'') \cap S_1'$.

Замечание. Существует обширная литература, посвященная слабым топологиям и сопряженности в B-пространствах; см., например, библиографию в книге Данфорда — Шварца [1].

Параграфы 1—3 этого приложения дают модифицированное и упрощенное изложение материала, имеющегося в книгах Бурбаки [1] и Гротендика [1]. Интересно отметить, что приемы, необходимые для доказательства столь глубокой теоремы Эберлейна [1] — Шмульяна [1], имеются в той или иной форме уже в книге Банаха [1].

ГЛАВА VI

Преобразование Фурье и дифференциальные уравнения

Преобразование Фурье представляет собой один из сильнейших методов исследования в классическом и современном анализе. В последние годы область применения метода Фурье значительно расширилась в связи с развитием теории обобщенных функций Соболева [1] и Л. Шварца [1]. В работах Эренпрейса, Мальгранжа и особенно Хёрмандера [6] этот метод успешно применяется к исследованию линейных дифференциальных уравнений с частными производными.

1. Преобразование Фурье быстро убывающих функций

Определение 1. Обозначим через $\mathfrak{S}(R^n)$ совокупность всех функций $f \in C^\infty(R^n)$, удовлетворяющих условию

$$\sup_{x \in R^n} |x^\beta D^\alpha f(x)| < \infty \quad \left(x^\beta = \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j}\right) \tag{1}$$

при произвольных $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$, где α_j, β_j — неотрицательные целые числа. Такие функции мы будем называть *быстро убывающими* (при $x \to \infty$).

Пример. Функция $\exp(-|x|^2)$ и все функции $f \in C_0^\infty(R^n)$ — быстро убывающие.

Предложение 1. Множество $\mathfrak{S}(R^n)$ с алгебраическими операциями сложения функций и умножения функций на комплексные числа и с топологией, определяемой системой полунорм вида

$$p(f) = \sup_{x \in R^n} |P(x) D^\alpha f(x)|, \quad \text{где} \quad P(x) \text{ — полином,} \tag{2}$$

образует локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Предложение 2. Множество $\mathfrak{S}(R^n)$ замкнуто по отношению к действию линейных дифференциальных операторов в частных производных с полиномиальными коэффициентами.

Предложение 3. Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в пространстве $\mathfrak{S}(R^n)$ в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{S}(R^n)$; выберем такую функцию $\psi \in C_0^\infty(R^n)$, что $\psi(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$

имеем $f_\varepsilon(x) = f(x)\psi(\varepsilon x) \in C_0^\infty(R^n)$. Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, мы видим, что выражение

$$D^\alpha (f_\varepsilon(x) - f(x)) = D^\alpha \{f(x)(\psi(\varepsilon x) - 1)\}$$

представляет собой линейную комбинацию конечного числа членов вида

$$D^\beta f(x)\cdot(\varepsilon)^{|\gamma|}\{D^\gamma\psi(y)\}_{y=\varepsilon x}, \quad \text{где} \quad |\beta|+|\gamma|=|\alpha|, \quad |\gamma|>0,$$

и слагаемого $D^\alpha f(x)(\psi(\varepsilon x)-1)$. Отсюда видно, что при $\varepsilon \downarrow 0$ функция $f_\varepsilon(x)$ стремится к $f(x)$ в топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)$.

Определение 2. Для всякой функции $f \in \mathfrak{S}(R^n)$ определим ее *преобразование Фурье* $\hat{f}$ формулой

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-i\langle\xi,\, x\rangle} f(x)\,dx, \tag{3}$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\langle\xi, x\rangle = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j x_j$ и $dx = dx_1\,dx_2 \ldots dx_n$. Функция

$$\tilde{g}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{i\langle x,\, \xi\rangle} g(\xi)\,d\xi, \tag{4}$$

где $g \in \mathfrak{S}(R^n)$, называется *обратным преобразованием Фурье* функции g.

Предложение 4. Преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ линейно и непрерывно отображает пространство $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя. Обратное преобразование Фурье $g \to \tilde{g}$ также отображает $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя линейно и непрерывно.

Доказательство. Формально дифференцируя (3) под знаком интеграла, мы получаем

$$D^\alpha\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,\, x\rangle}(-i)^{|\alpha|}x^\alpha f(x)\,dx. \tag{5}$$

Интеграл в правой части, согласно (1), сходится равномерно по ξ, поэтому такое дифференцирование допустимо. Следовательно, $\hat{f} \in C^\infty(R^n)$. Интегрируя по частям равенство (3), мы находим, что[1])

$$(i)^{|\beta|}\xi^\beta\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,\, x\rangle}D^\beta f(x)\,dx. \tag{6}$$

Отсюда

$$(i)^{|\beta|+|\alpha|}\xi^\beta D^\alpha\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\langle\xi,\, x\rangle}D^\beta\left(x^\alpha f(x)\right)dx, \tag{7}$$

[1]) Здесь и далее подразумевается $\int\limits_{R^n}$. — *Прим. перев.*

а это и означает, что отображение $f \to \hat{f}$ непрерывно в топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)$. Отображение $g \to \tilde{g}$ рассматривается аналогично.

Теорема 1 (формула обращения Фурье). Имеет место следующая *формула обращения Фурье*:

$$\tilde{\hat{f}}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\langle x, \xi\rangle} \hat{f}(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{8}$$

$$\text{т. е. } \tilde{\hat{f}} = f \text{ и аналогично } \hat{\tilde{f}} = f. \tag{8'}$$

Отсюда вытекает, в частности, что преобразование Фурье взаимно однозначно и взаимно непрерывно отображает пространство $\mathfrak{S}(R^n)$ *на* себя, и обратное преобразование Фурье представляет собой, таким образом, отображение, обратное преобразованию Фурье.

Доказательство. Справедливо следующее соотношение:

$$\int g(\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+y)\, dy \quad (f,\ g \in \mathfrak{S}(R^n)). \tag{9}$$

Действительно, левая часть этого равенства равна

$$\int g(\xi) \left\{ (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle \xi, y\rangle} f(y)\, dy \right\} e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int \left\{ \int g(\xi) e^{-i\langle \xi, y-x\rangle} d\xi \right\} f(y)\, dy =$$
$$= \int \hat{g}(y-x) f(y)\, dy = \int \hat{g}(y) f(x+y)\, dy.$$

Возьмем теперь произвольное $\varepsilon > 0$ и заменим $g(\xi)$ функцией $g(\varepsilon\xi)$; тогда

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\langle y, \xi\rangle} g(\varepsilon\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n/2} \varepsilon^{-n} \int g(z) e^{-i\langle y, z/\varepsilon\rangle} dz = \varepsilon^{-n} \hat{g}(y/\varepsilon).$$

Следовательно, в силу (9)

$$\int g(\varepsilon\xi) \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi = \int \hat{g}(y) f(x+\varepsilon y)\, dy.$$

Далее, следуя Ф. Риссу, положим $g(x) = e^{-|x|^2/2}$; тогда при $\varepsilon \downarrow 0$ получится равенство

$$g(0) \int \hat{f}(\xi) e^{i\langle x, \xi\rangle} d\xi = f(x) \int \hat{g}(y)\, dy.$$

Как известно,

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-|x|^2/2} e^{-i\langle y, x\rangle} dx = e^{-|y|^2/2}, \tag{10}$$

$$(2\pi)^{-n/2} \int e^{-|x|^2/2} dx = 1, \tag{10'}$$

т. е. $\int \hat{g}(y)\,dy = (2\pi)^{n/2}$. Кроме того, $g(0) = 1$. Подставляя эти выражения в предыдущее равенство, мы и получаем соотношение (8).

Замечание. Для полноты изложения приведем здесь вывод формулы (10). Напишем очевидное тождество

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2/2} e^{-iut}\,dt = e^{-u^2/2}(2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-(t+iu)^2/2}\,dt.$$

Возьмем теперь криволинейный интеграл от функции $e^{-z^2/2}$, которая голоморфна по переменной $z = t + iu$, по замкнутому контуру, состоящему из следующих четырех направленных отрезков, расположенных в указанном порядке:

$$\overrightarrow{-\lambda,\ \lambda}; \quad \overrightarrow{\lambda,\ \lambda + iv}; \quad \overrightarrow{\lambda + iv,\ -\lambda + iv}; \quad \overrightarrow{-\lambda + iv,\ -\lambda},$$

где $v > 0$. По теореме Коши этот интеграл равен нулю. Таким образом,

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-(t+iu)^2/2}\,dt = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\lambda}^{\lambda} e^{-t^2/2}\,dt +$$
$$+ (2\pi)^{-1/2} \int_{v}^{0} e^{-(-\lambda+iu)^2/2}\, i\,du + (2\pi)^{-1/2} \int_{0}^{v} e^{-(\lambda+iu)^2/2}\, i\,du.$$

Второй и третий члены в правой части стремятся к нулю при $\lambda \to \infty$. Отсюда, используя (10′), мы получаем

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} e^{-iut}\,dt = e^{-u^2/2}(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,dt = e^{-u^2/2}.$$

Мы вывели формулу (10) для $n = 1$; случай произвольного n без труда сводится к рассмотренному.

Следствие (равенство Парсеваля [1])). Имеют место следующие равенства:

$$\int \hat{f}(\xi)\, g(\xi)\,d\xi = \int f(x)\,\hat{g}(x)\,dx, \tag{11}$$

$$\int f(\xi)\,\overline{g}(\xi)\,d\xi = \int \tilde{f}(x)\,\overline{\overline{g}}(x)\,dx, \tag{12}$$

$$(\widehat{f * g}) = (2\pi)^{n/2} \hat{f} \cdot \hat{g} \quad \text{и} \quad (2\pi)^{n/2}(\widehat{f \cdot g}) = \hat{f} * \hat{g}, \tag{13}$$

---

[1]) Равенством Парсеваля обычно называют формулу (12). — *Прим. перев.*

где *свертка* $f*g$ функций f и g определяется формулой

$$(f*g)(x) \equiv \int f(x-y)\,g(y)\,dy = \int g(x-y)\,f(y)\,dy. \qquad (14)$$

Доказательство. Формула (11) получается из (9), если положить $x=0$. Соотношение (12) получается из (11), так как преобразование Фурье функции $\bar{g}$ равно $\bar{\tilde{g}}$. Далее имеем

$$(2\pi)^{-n/2}\int (f*g)(x)\,e^{-i\langle\xi,\,x\rangle}\,dx =$$

$$= (2\pi)^{-n/2}\int g(y)\,e^{-i\langle\xi,\,y\rangle}\left\{\int f(x-y)\,e^{-i\langle\xi,\,x-y\rangle}\,dx\right\}dy =$$

$$= (2\pi)^{n/2}\,\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi). \qquad (15)$$

Функции $\hat{f}$ и $\hat{g}$ принадлежат $\mathfrak{S}(R^n)$, поэтому $\hat{f}\hat{g}\in\mathfrak{S}(R^n)$, т. е. правая часть (15) принадлежит $\mathfrak{S}(R^n)$. Нетрудно заметить, что свертка $f*g$ двух функций из $\mathfrak{S}(R^n)$ тоже принадлежит $\mathfrak{S}(R^n)$. Тем самым первая из формул (13) доказана. Вторая формула (13) выводится аналогично формуле (9) с помощью соотношения (15).

Теорема 2 (формула Пуассона). Пусть $\varphi\in\mathfrak{S}(R^1)$ и $\hat{\varphi}\in\mathfrak{S}(R^1)$ — преобразование Фурье функции φ. Тогда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(2\pi n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{\varphi}(n). \qquad (16)$$

Доказательство. Положим $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi(x+2\pi n)$. Так как функция $\varphi(x)$ быстро убывает на бесконечности, нетрудно показать, что этот ряд абсолютно сходится, а его сумма $f(x)$ принадлежит C^∞, причем $f(x+2\pi)\equiv f(x)$. В частности, ряды в правой и левой части формулы (16) абсолютно сходятся. Остается лишь доказать, что их суммы совпадают.

Коэффициенты Фурье c_k функции $f(x)$ по отношению к полной ортонормальной системе $\left\{(2\pi)^{-1/2}e^{-ikx};\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots\right\}$ гильбертова пространства $L^2(0,\,2\pi)$ равны

$$c_k = (2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_0^{2\pi}\varphi(x+2\pi n)\,e^{-ikx}\,dx =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(2\pi)^{-1/2}\int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)}\varphi(x)\,e^{-ikx}\,dx = \hat{\varphi}(k).$$

Следовательно, поскольку $f \in L^2(0, 2\pi)$,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) = \underset{s \uparrow \infty}{\text{l. i. m.}} \sum_{k=-s}^{s} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}\ ^{1)}.$$

Но $\hat{\varphi}(x) \in \mathfrak{S}(R^n)$, поэтому ряд $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx}$ сходится абсолютно. Отсюда

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi(x + 2\pi n) \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx};$$

полагая $x = 0$, мы получаем формулу (16).

Пример. Из формулы (10) получаем

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx^2} e^{-ixy}\, dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} e^{-ixy/\sqrt{2t}} (2t)^{-1/2}\, dx =$$

$$= (2t)^{-1/2} e^{-y^2/4t}, \quad t > 0.$$

Применяя (16), мы выводим так называемую θ-*формулу*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-4t\pi^2 n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (2t)^{-1/2} e^{-n^2/4t}, \quad t > 0. \tag{17}$$

2. Преобразование Фурье медленно растущих обобщенных функций

Определение 1. Непрерывный линейный функционал T, определенный на множестве $\mathfrak{S}(R^n)$, называется *медленно растущей обобщенной функцией* (*в* R^n). Совокупность всех медленно растущих обобщенных функций мы обозначим через $\mathfrak{S}(R^n)'$. Сопряженное к $\mathfrak{S}(R^n)$ пространство $\mathfrak{S}(R^n)'$, снабженное сильной топологией сопряженного пространства, представляет собой локально выпуклое линейное топологическое пространство.

Предложение 1. Поскольку $C_0^\infty(R^n)$ содержится как подмножество в пространстве $\mathfrak{S}(R^n)$, а топология пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ сильнее, чем топология $\mathfrak{S}(R^n)$, то сужение всякой медленно растущей обобщенной функции на $C_0^\infty(R^n)$ представляет собой обобщенную

---

[1]) Здесь l. i. m. обозначает предел в среднем, т. е.

$$\lim_{s \to \infty} \int_0^{2\pi} \left[f(x) - \sum_{k=-s}^{s} \hat{\varphi}(k)\, e^{ikx} \right]^2 dx = 0.$$

Это следует из общего результата, установленного в гл. III, § 4, следствие 1, формула (5). — *Прим. перев.*

функцию в R^n. Две различные медленно растущие обобщенные функции, суженные на $C_0^\infty(R^n)$, определяют две различные обобщенные функции в R^n, так как множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $\mathfrak{S}(R^n)$ по отношению к топологии $\mathfrak{S}(R^n)$. Следовательно, обобщенная функция из $\mathfrak{S}(R^n)'$, равная нулю на $C_0^\infty(R^n)$, должна обратиться в нуль на $\mathfrak{S}(R^n)$. Таким образом,

$$\mathfrak{S}(R^n)' \subseteq \mathfrak{D}(R^n)'. \tag{1}$$

Пример 1. Обобщенная функция, заданная в R^n, носитель которой бикомпактен, принадлежит пространству $\mathfrak{S}(R^n)'$. Поэтому

$$\mathfrak{E}(R^n)' \subseteq \mathfrak{S}(R^n)'. \tag{2}$$

Пример 2. Неотрицательная σ-финитная мера $\mu(dx)$, σ-аддитивная на бэровских множествах пространства R^n, называется *медленно возрастающей мерой*, если для некоторого неотрицательного k

$$\int_{R^n} (1+|x|^2)^{-k}\mu(dx) < \infty. \tag{3}$$

Такая мера μ определяет медленно растущую обобщенную функцию T_μ:

$$T_\mu(\varphi) = \int_{R^n} \varphi(x)\mu(dx), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \tag{4}$$

В самом деле, условие $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$ означает, что $\varphi(x) = O\left((1+|x|^2)^{-k}\right)$ при $|x| \to \infty$.

Пример 3. Как частный случай примера 2 можно рассматривать медленно растущую обобщенную функцию вида

$$T_f(\varphi) = \int_{R^n} \varphi(x) f(x)\, dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n), \tag{4'}$$

определяемую произвольной функцией f пространства $L^p(R^n)(p \geqslant 1)$. В самом деле, функция $f \in L^p(R^n)$ порождает медленно возрастающую меру $\mu(dx) = |f(x)|\,dx$; в этом можно убедиться, применяя к интегралу

$$\int_{R^n} (1+|x|^2)^{-k} f(x)\, dx$$

неравенство Гёльдера.

Определение 2. Функция $f \in C^\infty(R^n)$ называется *медленно возрастающей* (при $x \to \infty$), если для всякого дифференциального оператора D^j существует такое неотрицательное целое N, что

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^{-N} |D^j f(x)| = 0. \tag{5}$$

Совокупность всех медленно возрастающих функций мы будем обозначать через $\mathfrak{O}_M(R^n)$. Множество $\mathfrak{O}_M(R^n)$ с алгебраическими операциями сложения функций и умножения их на комплексные числа и топологией, определяемой системой полунорм вида

$$p(f)=p_{h, D^j}(f)=\sup_{x\in R^n}|h(x)D^jf(x)|, \qquad f\in\mathfrak{O}_M(R^n), \tag{6}$$

где $h(x)$ — произвольная функция из $\mathfrak{S}(R^n)$, а D^j — произвольный дифференциальный оператор, образует локально выпуклое линейное топологическое пространство. Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, легко видеть, что $h(x)D^jf(x)\in\mathfrak{S}(R^n)$ и, следовательно, полунормы $p_{h, D^j}(f)$ конечны для каждой функции $f\in\mathfrak{O}_M(R^n)$. Кроме того, если $p_{h, D^j}(f)=0$ для всех $h\in\mathfrak{S}(R^n)$ и любых операторов D^j, то $f(x)\equiv 0$. Последнее нетрудно установить, если положить $D=I$ и взять $h\in\mathfrak{D}(R^n)$.

Предложение 2. Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $\mathfrak{O}_M(R^n)$ в топологии пространства $\mathfrak{O}_M(R^n)$.

Доказательство. Пусть $f\in\mathfrak{O}_M(R^n)$. Выберем такую функцию $\psi\in C_0^\infty(R^n)$, что $\psi(x)=1$ при $|x|\leqslant 1$. Тогда $f_\varepsilon(x)=f(x)\psi(\varepsilon x)\in C_0^\infty(R_n)$ при любом $\varepsilon>0$. Как в предложении 3, § 1, гл. VI, нетрудно показать, что $f_\varepsilon(x)$ стремится к $f(x)$ в топологии пространства $\mathfrak{O}_M(R^n)$ при $\varepsilon\downarrow 0$. Это и доказывает наше предложение.

Предложение 3. Всякая функция $f\in\mathfrak{O}_M(R^n)$ определяет медленно растущую обобщенную функцию

$$T_f(\varphi)=\int_{R^n} f(x)\varphi(x)\,dx, \qquad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{7}$$

Определение 3. Как и в случае обобщенных функций в R^n, мы можем определить производную медленно растущей обобщенной функции T формулой

$$D^jT(\varphi)=(-1)^{|j|}T(D^j\varphi), \qquad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n), \tag{8}$$

так как отображение $\varphi(x)\to D^j\varphi(x)$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя линейно и непрерывно в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$. Можно также определить умножение функции $f\in\mathfrak{O}_M(R^n)$ на обобщенную функцию $T\in\mathfrak{S}(R^n)'$

$$(fT)(\varphi)=T(f\varphi), \qquad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n), \tag{9}$$

поскольку отображение $\varphi(x)\to f(x)\varphi(x)$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ в себя линейно и непрерывно в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$.

Преобразование Фурье медленно растущих обобщенных функций

Определение 4. Так как отображение $\varphi(x)\to\hat{\varphi}(x)$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ на себя линейно и непрерывно в топологии $\mathfrak{S}(R^n)$, мы можем определить *преобразование Фурье* $\hat{T}$ медленно растущей обобщенной функции T как медленно растущую обобщенную функцию вида

$$\hat{T}(\varphi)=T(\hat{\varphi}), \qquad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{10}$$

Пример 1. Если $f\in L^1(R^n)$, то

$$\hat{T}_f=T_{\hat{f}}, \quad \text{где} \quad \hat{f}(x)=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}f(\xi)\,d\xi; \tag{11}$$

это получается при помощи изменения порядка интегрирования:

$$\hat{T}_f(\varphi)=\int f(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=(2\pi)^{-n/2}\int_{R^n} f(x)\left\{\int_{R^n} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\varphi(\xi)\,d\xi\right\}dx.$$

Замечание. Ясно, что определенное таким способом преобразование Фурье медленно растущей обобщенной функции является обобщением обычного преобразования Фурье для функций.

Предложение 4 (формула обращения Фурье). Введем обозначение

$$\check{f}(x)=f(-x). \tag{12}$$

Тогда формулу обращения Фурье из предыдущего § 1 можно записать в виде

$$\hat{\hat{f}}=\check{f}, \qquad f\in\mathfrak{S}(R^n). \tag{13}$$

Следствие 1 (формула обращения Фурье для обобщенных функций). Для медленно растущих обобщенных функций формула обращения имеет следующий вид:

$$\hat{\hat{T}}=\check{T}, \quad \text{где} \quad \check{T}(\varphi)=T(\check{\varphi}). \tag{14}$$

В частности, преобразование $T\to\hat{T}$ линейно отображает пространство $\mathfrak{S}(R^n)'$ на себя.

Доказательство. По определению имеем

$$\hat{\hat{T}}(\varphi)=T(\hat{\hat{\varphi}})=T(\check{\varphi})=\check{T}(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n).$$

Следствие 2. Преобразование Фурье $T\to\hat{T}$ и обратное ему преобразование представляют собой линейные отображения пространства $\mathfrak{S}(R^n)'$ на себя, непрерывные по отношению к слабой* топологии $\mathfrak{S}(R^n)'$:

$$\left.\begin{aligned} &\text{если} \quad \lim_{h\to\infty}T_h(\varphi)=T(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n),\\ &\text{то} \quad \lim_{h\to\infty}\hat{T}_h(\varphi)=\hat{T}(\varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi\in\mathfrak{S}(R^n). \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Обращение преобразования Фурье $T \to \hat{T}$ определяется *обратным преобразованием Фурье* $T \to \tilde{T}$, где

$$\tilde{T}(\varphi) = T(\tilde{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \tag{10'}$$

Пример 2. Имеют место формулы [1])

$$\hat{T}_\delta = (2\pi)^{-n/2} T_1, \qquad \hat{T}_1 = (2\pi)^{n/2} T_\delta. \tag{16}$$

Доказательство. Мы имеем $\hat{T}_\delta(\varphi) = T_\delta(\hat{\varphi}) = \hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} 1 \cdot \varphi(y)\, dy = (2\pi)^{-n/2} T_1(\varphi)$. Кроме того,

$$T_\delta = \check{T}_\delta = \hat{\hat{T}}_\delta = (2\pi)^{-n/2} \hat{T}_1.$$

Пример 3. Имеем

$$\widehat{\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)} = i x_j \hat{T}, \tag{17}$$

$$\widehat{(i x_j T)} = -\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}\right), \tag{18}$$

где x_j — координата в пространстве R^n.

Доказательство. Используя формулу (5), § 1, гл. VI, получаем

$$\widehat{\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)}(\varphi) = \left(\frac{\partial T}{\partial x_j}\right)(\hat{\varphi}) = -T\left(\frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial x_j}\right) = -T\left(\widehat{-i x_j \varphi(x)}\right) = T\left(\widehat{i x_j \varphi}\right) = (i x_j \hat{T})(\varphi).$$

По формуле (6), § 1, гл. VI, находим

$$\widehat{(i x_j T)}(\varphi) = (i x_j T)(\hat{\varphi}) = T(i x_j \hat{\varphi}) = T\left(\widehat{\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}}\right) = \hat{T}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = -\left(\frac{\partial \hat{T}}{\partial x_j}\right)(\varphi).$$

Теорема Планшереля. Если $f \in L^2(R^n)$, то преобразование Фурье $\hat{T}_f$ обобщенной функции T_f определяется некоторой функцией $\hat{f} \in L^2(R^n)$, т. е.

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}}, \quad \text{где} \quad \hat{f} \in L^2(R^n), \tag{19}$$

и

$$\|\hat{f}\| = \left(\int\limits_{R^n} |\hat{f}(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = \left(\int\limits_{R^n} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} = \|f\|. \tag{20}$$

[1]) Здесь T_1 обозначает регулярную обобщенную функцию T_f с $f \equiv 1$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Из формулы (12) предыдущего § 1 следует, что $\|\hat{\varphi}\| = \|\varphi\|$. Применяя далее неравенство Шварца, получаем

$$|\hat{T}_f(\varphi)| = |T_f(\hat{\varphi})| = \left| \int\limits_{R^n} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx \right| \leqslant \|f\|\,\|\hat{\varphi}\| = \|f\|\cdot\|\varphi\|. \quad (21)$$

По теореме Рисса о представлении функционалов в пространстве $L^2(R^n)$ должна существовать единственная функция $\hat{f} \in L^2(R^n)$, такая, что

$$\hat{T}_f(\varphi) = \int\limits_{R^n} \varphi(x)\,\hat{f}(x)\,dx = T_{\hat{f}}(\varphi),$$

а это означает, что

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} f(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n). \quad (22)$$

Кроме того, поскольку $\mathfrak{S}(R^n)$ плотно в пространстве $L^2(R^n)$ в топологии $L^2(R^n)$, из неравенства (21) следует, что $\|f\| \geqslant \|\hat{f}\|$. Таким образом, $\|\hat{\hat{f}}\| \leqslant \|\hat{f}\| \leqslant \|f\|$. Но, с другой стороны, из (13) и (22) вытекает, что

$$\int\limits_{R^n} \hat{\hat{f}}(x)\,\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} \hat{f}(x)\,\hat{\varphi}(x)\,dx = \int\limits_{R^n} f(-x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{S}(R^n),$$

и поэтому почти всюду выполняется равенство

$$\hat{\hat{f}}(x) = f(-x) = \check{f}(x). \quad (23)$$

Следовательно, $\|\hat{\hat{f}}\| = \|f\|$. Отсюда, принимая во внимание неравенство $\|\hat{\hat{f}}\| \leqslant \|\hat{f}\| \leqslant \|f\|$, мы получаем формулу (20).

Определение 5. Функцию $\hat{f}(x) \in L^2(R^n)$, построенную при доказательстве теоремы Планшереля, мы назовем *преобразованием Фурье* функции $f(x) \in L^2(R^n)$.

Следствие 1. Для любой функции $f \in L^2(R^n)$

$$\hat{f}(x) = \underset{h\uparrow\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\,(2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x| \leqslant h} e^{-i\langle x,\,y\rangle} f(y)\,dy. \quad (24)$$

Доказательство. Положим

$$f_h(x) = f(x) \quad \text{при } |x| \leqslant h \quad \text{и} \quad f_h(x) = 0 \quad \text{при } |x| > h.$$

Тогда $\lim\limits_{h\to\infty} \| f_h - f \| = 0$, и поэтому по формуле (20) $\lim\limits_{h\to\infty} \| \hat{f}_h - \hat{f} \| = 0$. Последнее означает, что $\hat{f}(x) = \underset{h\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ \hat{f}_h(x)$ почти всюду. По формуле (22)

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_h(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} f_h(x)\hat{\varphi}(x)\,dx =$$
$$= \int\limits_{|x|\leqslant h} f(x)\left\{(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} e^{-i\langle x,\, y\rangle}\varphi(y)\,dy\right\}dx.$$

Из неравенства Шварца следует, что функция $f_h(x)$ интегрируема в области $|x| \leqslant h$, поэтому, изменяя порядок интегрирования, мы находим, что

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_h(x)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{R^n} (2\pi)^{-n/2}\left\{\int\limits_{|x|\leqslant h} e^{-i\langle x,\, y\rangle} f(x)\,dx\right\}\varphi(y)\,dy.$$

Следовательно, почти всюду $\hat{f}_h(x) = (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{|x|\leqslant h} e^{-i\langle x,\, y\rangle} f(y)\,dy$, откуда получается формула (24).

Следствие 2. Преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ отображает пространство $L^2(R^n)$ на себя взаимно однозначно, и при этом

$$(f,\ g) = (\hat{f},\ \hat{g}) \quad \text{для всех} \quad f,\ g \in L^2(R^n). \tag{25}$$

Доказательство. Обратное преобразование Фурье $f \to \tilde{f}$ для функций из $L^2(R^n)$ определяется формулой

$$\tilde{f}(x) = \underset{h\to\infty}{\text{l. i. m.}}\ (2\pi)^{-n/2}\int\limits_{|y|\leqslant h} e^{i\langle x,\, y\rangle} f(y)\,dy; \tag{26}$$

оно отображает $L^2(R^n)$ в себя так, что $\|\hat{f}\| = \|f\|$. Ясно, что отображение $f \to \tilde{f}$ обратно отображению $f \to \hat{f}$. Отсюда следует, что преобразование Фурье $f \to \hat{f}$ действительно отображает пространство $L^2(R^n)$ на себя взаимно однозначно и сохраняет норму.

Используя равенство

$$(x,\ y) = 4^{-1}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2) + 4^{-1}i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2)$$

и учитывая линейность преобразования Фурье, мы получаем (25).

Теорема Парсеваля для преобразования Фурье обобщенных функций. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции из $L^2(R^n)$, и пусть $\hat{f}_1(u)$ и $\hat{f}_2(u)$ — их преобразования Фурье. Тогда

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)\,du = \int\limits_{R^n} f_1(x) f_2(-x)\,dx, \tag{27}$$

откуда

$$\int\limits_{R^n} \hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)e^{i\langle u, x\rangle}\,dx = \int\limits_{R^n} f_1(y) f_2(x-y)\,dy. \tag{28}$$

Таким образом, если произведение $\hat{f}_1(u)\hat{f}_2(u)$, так же как и оба сомножителя, принадлежит $L^2(R^n)$, то оно является преобразованием Фурье выражения

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} f_1(y) f_2(x-y)\,dy. \tag{29}$$

Последнее утверждение справедливо и в том случае, если допустить, что функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и (29) принадлежат $L^2(R^n)$.

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{R^n} \overline{f_2(-x)}\,e^{-i\langle u, x\rangle}\,dx = \overline{\hat{f}_2(u)}.$$

Отсюда, используя (25), мы получаем (27). Рассматривая выражение $\overline{f_2(x-y)}$ как функцию переменной y, зависящую от параметра x, мы видим, что преобразование Фурье этой функции равно произведению $\overline{\hat{f}_2(u)}\,e^{i\langle u, x\rangle}$, также зависящему от параметра x. Отсюда, используя (25), мы получаем (28). Остальная часть утверждения вытекает из (28), так как $\hat{\hat{f}} = f$.

Отрицательная норма. В главе I, § 9, было приведено определение пространства Соболева $W^{k,2}(\Omega)$. Пусть $f(x) \in W^{k,2}(R^n)$. Поскольку $f(x) \in L^2(R^n)$, выражение $|f(x)|\,dx$ определяет в пространстве R^n медленно возрастающую меру. Это позволяет определить преобразование Фурье $\hat{T}_f$ медленно растущей обобщенной функции T_f. По формуле (17)

$$\widehat{D^\alpha T_f} = (i)^{|\alpha|}\prod_{j=1}^{n} x_j^{\alpha_j}\hat{T}_f\,.$$

Согласно определению пространства $W^{k,2}(R^n)$, $D^\alpha T_f \in L^2(R^n)$ при всех $|\alpha| \leqslant k$[1]. Поэтому, применяя теорему Планшереля, доказанную для функций из $L^2(R^n)$, мы получаем

$$\|\widehat{D^\alpha T_f}\|_0 = \|D^\alpha T_f\|_0, \quad \text{где } \|\ \|_0 \text{ — норма в пространстве } L^2(R^n).$$

---

[1]) Запись $D^\alpha T_f \in L^2(R^n)$ (и другие подобные ей) надо понимать в том смысле, что $D^\alpha T_f$ — регулярный функционал вида T_ψ, где $\psi \in L^2(R^n)$ (ясно, что здесь ψ — обобщенная производная $D^\alpha f$). — *Прим. перев.*

Следовательно, $(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f \in L^2(R^n)$, и поэтому нетрудно показать, что норма $\|f\|_k = \left(\sum_{|\alpha|\leqslant k} \int_{R^n} |D^\alpha T_f|^2 dx\right)^{1/2}$ эквивалентна норме

$$\|(1+|x|^2)^{k/2}\hat{T}_f\|_0 = \|f\|'_k \tag{30}$$

в том смысле, что существуют две положительные постоянные c_1 и c_2, для которых

$$c_1 \leqslant \|f\|_k/\|f\|'_k \leqslant c_2 \quad \text{при всех } f \in W^{k,2}(R^n).$$

Таким образом, мы можем перенормировать пространство $W^{k,2}(R^n)$, введя норму $\|f\|'_k$, и пространство $W^{k,2}(R^n)$ можно определить как совокупность всех функций $f \in L^2(R^n)$ с конечной нормой $\|f\|'_k$. Преимущество такого определения состоит в том, что теперь можно рассматривать также отрицательные показатели k. Тогда, как и в случае пространства $L^2(R^n)$ с обычной мерой Лебега dx, сопряженным к перенормированному таким способом пространству $W^{k,2}(R^n)$ является пространство $W^{-k,2}(R^n)$ с нормой $\|f\|'_{-k}$. Это заметил Л. Шварц [5] еще до того, как П. Лакс [2] ввел понятие отрицательной нормы.

3. *Свертки*

Определим *свертку* двух функций $f, g \in C(R^n)$, одна из которых обладает бикомпактным носителем, формулой

$$(f*g)(x) = \int_{R^n} f(x-y)g(y)\,dy = \int_{R^n} f(y)g(x-y)\,dy = (g*f)(x) \tag{1}$$

(ср. со случаем, когда $f, g \in \mathfrak{S}(R^n)$, гл. VI, § 1). По аналогии с формулой (1) назовем *сверткой* обобщенной функции $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и функции $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ (или обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$ и функции $\varphi \in \mathfrak{E}(R^n)$) выражение

$$(T*\varphi)(x) = T_{[y]}(\varphi(x-y))\,^{1)}, \tag{2}$$

где символ $T_{[y]}$ указывает на то, что T применяется к основной функции переменной y.

Предложение 1. Мы имеем $(T*\varphi)(x) \in C^\infty(R^n)$ и $\operatorname{supp}(T*\varphi) \subseteq \operatorname{supp}(T) + \operatorname{supp}(\varphi)$, т. е.

$$\operatorname{supp}(T*\varphi) \subseteq \{w \in R^n;\ w = x+y,\ x \in \operatorname{supp}(T),\ y \in \operatorname{supp}(\varphi)\}.$$

---

[1]) Отметим для дальнейшего, что если $T = T_\psi$ — регулярная обобщенная функция, то $(T*\varphi)(x) = (T_\psi * \varphi)(x) = T_{\psi\,[y]}[\varphi(x-y)] = \int \psi(y)\varphi(x-y)\,dy = (\psi*\varphi)(x)$. — *Прим. перев.*

Кроме того,

$$D^{\alpha}(T*\varphi)=T*(D^{\alpha}\varphi)=(D^{\alpha}T)*\varphi. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\varphi\in\mathfrak{D}(R^n)$ (или $\varphi\in\mathfrak{E}(R^n)$). Если $\lim\limits_{h\to\infty}x^h=x$, то $\lim\limits_{h\to\infty}\varphi(x^h-y)=\varphi(x-y)$ в пространстве $\mathfrak{D}(R^n)$ функций независимой переменной y (или в пространстве $\mathfrak{E}(R^n)$). Следовательно, обобщенная функция $T_{[y]}(\varphi(x-y))=(T*\varphi)(x)$ непрерывна по x. Отношение включения для носителей, указанное в формулировке предложения, вытекает из того, что $T_{[y]}(\varphi(x-y))=0$, если только носители T и $\varphi(x-y)$ как функции от y не пересекаются. Пусть e_j — единичный вектор пространства R^n вдоль оси x_j; рассмотрим выражение

$$T_{[y]}((\varphi(x+he_j-y)-\varphi(x-y))/h).$$

При $h\to 0$ функция, стоящая под знаком функционала, сходится как функция от y в пространстве $\mathfrak{D}(R^n)$ (или в пространстве $\mathfrak{E}(R^n)$) к $(\partial\varphi/\partial x_j)(x-y)$. Тем самым мы показали, что

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(T*\varphi)(x)=\left(T*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x).$$

Наконец,

$$\left(T*\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\right)(x)=T_{[y]}\left(-\frac{\partial\varphi(x-y)}{\partial y_j}\right)=\frac{\partial T_{[y]}}{\partial y_j}(\varphi(x-y))=\left(\frac{\partial T}{\partial x_j}*\varphi\right)(x),$$

откуда и следует формула (3).

Предложение 2. Если φ и ψ принадлежат пространству $\mathfrak{D}(R^n)$ и $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$ (или $\varphi\in\mathfrak{E}(R^n)$, $\psi\in\mathfrak{D}(R^n)$ и $T\in\mathfrak{E}(R^n)'$), то

$$(T*\varphi)*\psi=T*(\varphi*\psi). \tag{4}$$

Доказательство. Аппроксимируем функцию $(\varphi*\psi)(x)$ суммой Римана вида

$$f_h(x)=h^{-n}\sum_k\varphi(x-kh)\psi(kh),$$

где $h>0$, а k пробегает все точки пространства R^n с целыми координатами. Тогда при $h\downarrow 0$ функция

$$D^{\alpha}f_h(x)=h^{-n}\sum_k D^{\alpha}\varphi(x-kh)\psi(kh),$$

где D^{α} — произвольный дифференциальный оператор, сходится равномерно по x на всяком бикомпактном множестве точек x к функции $((D^{\alpha}\varphi)*\psi)(x)=(D^{\alpha}(\varphi*\psi))(x)$. Поэтому, учитывая, что T — непрерывный линейный функционал, мы получаем

$$\begin{aligned}(T*(\varphi*\psi))(x)&=\lim_{h\downarrow 0}(T*f_h)(x)=\\&=\lim_{h\downarrow 0}h^{-n}\sum_k(T*\varphi)(x-kh)\psi(kh)=((T*\varphi)*\psi)(x),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Определение. Пусть функция $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$ неотрицательна, $\int\limits_{R^n} \varphi\, dx = 1$ и $\operatorname{supp}(\varphi) \subseteq \{x \in R^n;\ |x| \leqslant 1\}$. В качестве примера такой функции можно взять

$$\varphi = \exp\left\{\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) \Big/ \int\limits_{|x|<1} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) dx\right\} \text{ при } |x|<1,$$

$$\text{и } \varphi(x) = 0 \quad \text{при} \quad |x| \geqslant 1.$$

Выражение вида $\varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)\,(\varepsilon > 0)$ мы обозначим через $\varphi_\varepsilon(x)$ и назовем свертку $T * \varphi_\varepsilon$ *усреднением* для $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ (или $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$).

Теорема 1. Пусть $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ (или $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$). Тогда $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}(T * \varphi_\varepsilon) = T$ в слабой* топологии пространства $\mathfrak{D}(R^n)'$ (или $\mathfrak{E}(R^n)'$).

Для доказательства нам понадобится

Лемма. Для любой функции $\psi \in \mathfrak{D}(R^n)$ (или $\psi \in \mathfrak{E}(R^n)$) в пространстве $\mathfrak{D}(R^n)$ (или $\mathfrak{E}(R^n)$) справедливо соотношение $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \psi * \varphi_\varepsilon = \psi$.

Доказательство. Заметим, что

$$\operatorname{supp}(\psi * \varphi_\varepsilon) \subseteq \operatorname{supp}(\psi) + \operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \operatorname{supp}(\psi) + \varepsilon\,^{1)}.$$

По формуле (3) имеем $D^\alpha(\psi * \varphi_\varepsilon) = (D^\alpha\psi) * \varphi_\varepsilon$. Следовательно, мы должны показать, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}(\psi * \varphi_\varepsilon)(x) = \psi(x)$ равномерно на всяком бикомпактном множестве точек x. Поскольку $\int \varphi_\varepsilon(y)\, dy = 1$, имеем

$$(\psi * \varphi_\varepsilon)(x) - \psi(x) = \int\limits_{R^n} \{\psi(x-y) - \psi(x)\}\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy.$$

Отсюда получается утверждение леммы, так как $\varphi_\varepsilon(x) \geqslant 0$ $\int\limits_{R^n} \varphi_\varepsilon(y)\, dy = 1$ и функция $\psi(x)$ равномерно непрерывна на всяком бикомпактном множестве точек x.

Доказательство теоремы 1. Так как $\check{\psi}(x) = \psi(-x)$, то

$$T(\psi) = (T * \check{\psi})(0). \tag{5}$$

Поэтому мы должны теперь показать, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}((T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi})(0) = (T * \check{\psi})(0)$. Но, согласно соотношению (4), $(T * \varphi_\varepsilon) * \check{\psi} = T * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi})$. Следовательно, по формуле (5) $(T * \varphi_\varepsilon)(\psi) = T((\varphi_\varepsilon * \check{\psi})\check{})$. Применяя теперь доказанную выше лемму, находим, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}(T * \varphi_\varepsilon)(\psi) = T((\check{\psi})\check{}) = T(\psi)$, что и требовалось доказать.

---

[1]) Эта запись означает, что $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon) = \{y \in R^n, |y| \leqslant \varepsilon\}$. — *Прим. перев.*

Докажем теперь теорему, характеризующую операцию свертки.

Теорема 2 (Л. Шварц). Пусть L — непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$, удовлетворяющее условию [1])

$$L\tau_h\varphi = \tau_h L\varphi \quad \text{для всех} \quad h \in R^n \quad \text{и} \quad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n), \tag{6}$$

где τ_h — оператор сдвига, определяемый формулой

$$\tau_h\varphi(x) = \varphi(x - h). \tag{7}$$

Тогда существует единственным образом определенная обобщенная функция $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$, такая, что $L\varphi = T * \varphi$. Обратно, для всякой обобщенной функции $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$ формула $L\varphi = T * \varphi$ определяет непрерывное линейное отображение L пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$, удовлетворяющее условию (6).

Доказательство. Так как преобразование $\varphi \to \check{\varphi}$ отображает пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ линейно и непрерывно на себя, то линейное отображение $T : \check{\varphi} \to (L\varphi)(0)$ определяет обобщенную функцию $T \in \mathfrak{D}(R^n)'$. Следовательно, по формуле (5) $(L\varphi)(0) = T(\check{\varphi}) = (T * \varphi)(0)$. Если здесь заменить φ на $\tau_h\varphi$ и использовать условие (6), то получится соотношение $(L\varphi)(h) = (T * \varphi)(h)$, которое и нужно было вывести. Обратное утверждение теоремы без труда доказывается с помощью определения (2), предложения 1 и свойства (5).

Следствие. Пусть $T_1 \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$. Тогда свертку $T_1 * T_2$ можно определить как обобщенную функцию при помощи непрерывного линейного отображения L пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$ следующим образом:

$$(T_1 * T_2) * \varphi = L(\varphi) = T_1 * (T_2 * \varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n). \tag{8}$$

Доказательство. Преобразование $\varphi \to T_2 * \varphi$ отображает непрерывно и линейно пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ в себя, потому что носитель $\operatorname{supp}(T_2)$ бикомпактен. Следовательно, оператор $\varphi \to T_1 * (T_2 * \varphi)$ линейно и непрерывно отображает $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$. Нетрудно проверить, что L удовлетворяет условию (6).

Замечание. Из (4) видно, что если обобщенная функция T_2 определяется некоторой функцией из $\mathfrak{D}(R^n)$, то определение свертки $T_1 * T_2$ согласуется с приведенными ранее определениями.

Заметим, что свертку $T_1 * T_2$ можно определить также формулой

$$(T_1 * T_2)(\varphi) = (T_{1(x)} \times T_{2(y)})(\varphi(x + y)), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n), \tag{8'}$$

где $T_{1(x)} \times T_{2(y)}$ — прямое произведение T_1 и T_2. По этому поводу см. Л. Шварц [1].

---

[1]) О дифференциальных операторах, инвариантных относительно сдвига, см. Хёрмандер [7*]. — *Прим. перев.*

Теорема 3. Пусть $T_1 \in \mathfrak{D}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$. Тогда при помощи непрерывного линейного отображения L

$$\mathfrak{D}(R^n) \ni \varphi \to T_2 * (T_1 * \varphi) \in \mathfrak{E}(R^n)$$

можно определить другую „свертку“ $T_2 \boxed{*} T_1$ формулой

$$(T_2 \boxed{*} T_1) * \varphi = L(\varphi), \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n).$$

Можно доказать, что операция свертки коммутативна в том смысле, что $T_2 \boxed{*} T_1 = T_1 * T_2$.

Доказательство. Преобразование $\varphi \to T_1 * \varphi$ отображает непрерывно и линейно пространство $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$. Поэтому преобразование $\varphi \to T_2 * (T_1 * \varphi)$ определяет непрерывное линейное отображение пространства $\mathfrak{D}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$. Таким образом, свертка $T_2 \boxed{*} T_1$ определена корректно. Далее, для любых двух функций φ_1, $\varphi_2 \in \mathfrak{D}(R^n)$, учитывая предложение 2, мы получаем равенства

$$(T_1 * T_2) * (\varphi_1 * \varphi_2) = T_1 * (T_2 * (\varphi_1 * \varphi_2)) = T_1 * ((T_2 * \varphi_1) * \varphi_2) =$$
$$= T_1 * (\varphi_2 * (T_2 * \varphi_1)) = (T_1 * \varphi_2) * (T_2 * \varphi_1),$$

так как операция свертки функций коммутативна и множество $\operatorname{supp}(T_2 * \varphi_1)$ бикомпактно, поскольку $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$. Аналогично

$$(T_2 \boxed{*} T_1) * (\varphi_1 * \varphi_2) = T_2 * (T_1 * (\varphi_1 * \varphi_2)) = T_2 * ((T_1 * \varphi_2) * \varphi_1) =$$
$$= T_2 * (\varphi_1 * (T_1 * \varphi_2)) = (T_2 * \varphi_1) * (T_1 * \varphi_2).$$

Таким образом, $(T_1 * T_2) * (\varphi_1 * \varphi_2) = (T_2 \boxed{*} T_1) * (\varphi_1 * \varphi_2)$. Отсюда, согласно (5) и доказанной ранее лемме, следует, что $(T_1 * T_2)(\varphi) = (T_2 \boxed{*} T_1)(\varphi)$ для всех $\varphi \in \mathfrak{D}(R^n)$, а это и означает, что $(T_1 * T_2) = (T_2 \boxed{*} T_1)$.

Следствие. Если по крайней мере две из трех обобщенных функций T_1, T_2, T_3 имеют бикомпактные носители, то

$$T_1 * (T_2 * T_3) = (T_1 * T_2) * T_3. \tag{9}$$

Кроме того,

$$D^\alpha (T_1 * T_2) = (D^\alpha T_1) * T_2 = T_1 * (D^\alpha T_2). \tag{10}$$

Доказательство. Из определения свертки $T_1 * T_2$ и свойства (5) получаем

$$(T_1 * (T_2 * T_3))(\varphi) = ((T_1 * (T_2 * T_3)) * \check{\varphi})(0) =$$
$$= (T_1 * ((T_2 * T_3) * \check{\varphi}))(0) = (T_1 * (T_2 * (T_3 * \check{\varphi})))(0);$$

аналогично

$$((T_1 * T_2) * T_3)(\varphi) = (T_1 * (T_2 * (T_3 * \check{\varphi})))(0),$$

откуда следует (9).

Правило дифференцирования (10) доказывается следующим образом. Используя равенство (3), находим, что

$$(D^\alpha T_\delta) * \varphi = T_\delta * (D^\alpha \varphi) = D^\alpha (T_\delta * \varphi) = D^\alpha \varphi, \tag{11}$$

откуда

$$(D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi) = T * ((D^\alpha T_\delta) * \varphi) = (T * D^\alpha T_\delta) * \varphi,$$

т. е. в силу (5)

$$D^\alpha T = (D^\alpha T_\delta) * T. \tag{12}$$

Теперь, используя свойства коммутативности (теорема 3) и ассоциативности (9), мы и выводим требуемое равенство

$$D^\alpha (T_1 * T_2) = (D^\alpha T_\delta) * (T_1 * T_2) = ((D^\alpha T_\delta) * T_1) * T_2 = (D^\alpha T_1) * T_2 =$$
$$= (D^\alpha T_\delta) * (T_2 * T_1) = ((D^\alpha T_\delta) * T_2) * T_1 = (D^\alpha T_2) * T_1.$$

Преобразование Фурье свертки. Докажем сначала одну теорему, уточнением которой служит теорема Пэли — Винера в следующем параграфе.

Теорема 4. Преобразование Фурье обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$ определяется функцией

$$\hat{T}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} T_{[x]}(e^{-i\langle x, \xi\rangle}). \tag{13}$$

Доказательство. При $\varepsilon \downarrow 0$ обобщенная функция $T_\varepsilon = T * \varphi_\varepsilon$ стремится к T в слабой* топологии пространства $\mathfrak{E}(R^n)'$, и тем более в слабой топологии $\mathfrak{S}(R^n)'$. Это следует из доказанной ранее леммы и равенства

$$(T * \varphi_\varepsilon)(\psi) = (T * (\varphi_\varepsilon * \check{\psi}))(0) = T_{[x]}((\varphi_\varepsilon * \check{\psi})(-x)).$$

Так как преобразование Фурье непрерывно в слабой* топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)'$, то $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\widehat{T * \varphi_\varepsilon}) = \hat{T}$ в слабой* топологии $\mathfrak{S}(R^n)'$. Таким образом, для обобщенной функции, определяемой функцией $(T * \varphi_\varepsilon)(x)$, формула (13) очевидна. Следовательно,

$$(2\pi)^{n/2}(\widehat{T * \varphi_\varepsilon})(\xi) = (T * \varphi_\varepsilon)_{[x]}(e^{-i\langle x, \xi\rangle});$$

в силу (5) правая часть равна $(T_{[x]} * (\varphi_\varepsilon * e^{-i\langle x, \xi\rangle}))(0) = T_{[x]}(\check{\varphi}_\varepsilon * e^{-i\langle x, \xi\rangle})$. Последнее выражение при $\varepsilon \downarrow 0$ стремится к $T_{[x]}(e^{i\langle x, \xi\rangle})$ равномерно по ξ на всяком ограниченном множестве точек ξ комплексного n-мерного пространства. Теорема 4 доказана.

Теорема 5. Если свертка обобщенной функции $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ с функцией $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$ определена соотношением $(T * \varphi)(x) = T_{[y]}(\varphi(x-y))$, то линейное отображение $L: \varphi \to T * \varphi$ пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ в $\mathfrak{E}(R^n)$ характеризуется непрерывностью и инвариантностью относительно сдвига: $\tau_h L = L \tau_h$.

Доказательство. Теорема доказывается аналогично теореме 2.

Теорема 6. Если $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$ и $\varphi \in \mathfrak{S}(R^n)$, то

$$\widehat{(T * \varphi)} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{\varphi} \hat{T}. \tag{14}$$

Если $T_1 \in \mathfrak{S}(R^n)'$ и $T_2 \in \mathfrak{E}(R^n)'$, то

$$\widehat{(T_1 * T_2)} = (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_2 \cdot \hat{T}_1; \tag{15}$$

последнее имеет смысл, так как по теореме 4 обобщенная функция $\hat{T}_2$ регулярна и определяется некоторой функцией.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathfrak{S}(R^n)$. Тогда преобразование Фурье функции $\hat{\varphi} \cdot \psi$ равно (формула (13), гл. VI, § 1) выражению $(2\pi)^{-n/2}\, \hat{\hat{\varphi}} * \hat{\psi} = (2\pi)^{-n/2}\, \check{\varphi} * \hat{\psi}$. Поэтому

$$\widehat{(T * \varphi)}(\psi) = (T * \varphi)(\hat{\psi}) = ((T * \varphi) * \overset{\times}{\hat{\psi}})(0) = (T * (\varphi * \overset{\times}{\hat{\psi}}))(0) =$$
$$= T((\varphi * \overset{\times}{\hat{\psi}})^{\check{}}) = T(\check{\varphi} * \hat{\psi}) = T\left((2\pi)^{n/2} (\hat{\varphi} \cdot \psi)^{\hat{}}\right) =$$
$$= (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}(\hat{\varphi}\psi) = (2\pi)^{n/2}\, \hat{\varphi}\hat{T}(\psi),$$

откуда и следует (14).

Пусть ψ_ε — усреднение $T_2 * \varphi_\varepsilon$. Тогда преобразование Фурье свертки $T_1 * \psi_\varepsilon = T_1 * (T_2 * \varphi_\varepsilon) = (T_1 * T_2) * \varphi_\varepsilon$ равно, согласно формуле (14), выражению

$$(2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_1 \cdot \hat{\psi}_\varepsilon = (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_1 \cdot (2\pi)^{n/2}\, \hat{T}_2 \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon = (2\pi)^{n/2}\, \widehat{(T_1 * T_2)} \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon.$$

Полагая $\varepsilon \downarrow 0$ и учитывая, что $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{\varphi}_\varepsilon(x) = 1$, мы получаем (15).

4. Теоремы Пэли — Винера. Преобразование Лапласа

Для преобразования Фурье функций класса $C_0^\infty(R^n)$ справедлива

Теорема Пэли — Винера для функций. Целая голоморфная функция $F(\zeta) = F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ от n комплексных переменных $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ является *преобразованием Фурье — Лапласа*

$$F(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{-i\langle \zeta, x \rangle} f(x)\, dx \tag{1}$$

функции $f \in C_0^\infty(R^n)$, носитель которой $\operatorname{supp}(f)$ содержится в шаре $|x| \leqslant B$ пространства R^n, тогда и только тогда, когда для любого целого N существует положительная постоянная C_N, такая, что

$$|F(\zeta)| \leqslant C_N (1 + |\zeta|)^{-N} e^{B |\operatorname{Im} \zeta|}. \tag{2}$$

Доказательство. Необходимость следует из формулы

$$\prod_{j=1}^{n} (i\zeta_j)^{\beta_j} F(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x| \leqslant B} e^{-i\langle\zeta, x\rangle} D^{\beta} f(x)\, dx,$$

которая получается интегрированием по частям.

Докажем достаточность. Положим

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} F(\xi)\, d\xi. \tag{3}$$

При условии (2) выражение (3) имеет смысл. Как и в случае функций из $\mathfrak{S}(R^n)$, можно показать, что преобразование Фурье $\hat{f}(\xi)$ функции $f(x)$ равно $F(\xi)$ и $f(x) \in C_0^{\infty}(R^n)$; последнее вытекает из формулы дифференцирования

$$D^{\beta} f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{i\langle x, \xi\rangle} \prod_{j=1}^{n} (i\xi_j)^{\beta_j} F(\xi)\, d\xi \tag{4}$$

при выполнении условия (2). Условие (2) и теорема Коши позволяют перейти в формуле (3) к интегрированию в комплексной области и получить

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} e^{i\langle x, \xi + i\eta\rangle} F(\xi + i\eta)\, d\xi \tag{3'}$$

при любом вещественном η вида $\eta = \alpha x/|x|$, где $\alpha > 0$. Полагая $N = n + 1$, мы получаем отсюда неравенство

$$|f(x)| \leqslant C_N e^{B|\eta| - \langle x, \eta\rangle} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} (1 + |\xi|)^{-N}\, d\xi.$$

Если $|x| > B$, то, полагая $\alpha \uparrow +\infty$, мы находим, что $f(x) = 0$. Следовательно, $\operatorname{supp}(f) \subseteq \{x \in R^n;\ |x| \leqslant B\}$. Теорема доказана.

Эту теорему можно распространить на обобщенные функции с бикомпактными носителями.

Теорема Пэли — Винера для обобщенных функций из $\mathfrak{E}(R^n)'$ (Л. Шварц). Для того чтобы целая голоморфная функция $F(\zeta) = F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ от n комплексных переменных $\zeta_j = \xi_j + i\eta_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ определяла преобразование Фурье — Лапласа [1])

---

[1]) Имеется в виду функция $F(\zeta) = F(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ комплексных переменных ζ_i, которая при вещественных значениях $\zeta_i = x_i$ обращается в функцию $F(x_1, \ldots, x_n)$, определяющую преобразование Фурье $\hat{T}$ обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)' : \hat{T} = T_F$. — *Прим. перев.*

некоторой обобщенной функции $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$, необходимо и достаточно, чтобы существовали положительные постоянные B, N и C, такие, что

$$|F(\zeta)| \leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{B|\operatorname{Im}\zeta|}. \tag{5}$$

Доказательство. Необходимость следует из того (теорема 2, гл. I, § 13), что если $T \in \mathfrak{E}(R^n)'$, то существуют такие положительные постоянные C, B и N, что

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{|\beta| \leqslant N} \sup_{|x| \leqslant B} |D^\beta \varphi(x)| \quad \text{для всех} \quad \varphi \in \mathfrak{E}(R^n).$$

Остается только положить $\varphi(x) = e^{-i\langle x, \xi\rangle}$ и применить формулу (13) предыдущего параграфа.

Перейдем к доказательству достаточности. При выполнении неравенства (5) $F(\xi)$ принадлежит $\mathfrak{S}(R^n)'$, и поэтому определяет преобразование Фурье некоторой обобщенной функции $T \in \mathfrak{S}(R^n)'$. По формуле (14) предыдущего параграфа преобразование Фурье обобщенной функции $T_\varepsilon = T * \varphi_\varepsilon$ равно $(2\pi)^{n/2}\hat{T} \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon$. Поскольку носитель $\operatorname{supp}(\varphi_\varepsilon)$ лежит в шаре $|x| \leqslant \varepsilon$ пространства R^n, по предыдущей теореме

$$|\hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)| \leqslant C' \cdot e^{\varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Кроме того, обобщенная функция $\hat{T}$ определяется функцией $F(\xi)$, поэтому обобщенная функция $(2\pi)^{n/2}\hat{T} \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon$ определяется функцией $(2\pi)^{n/2} F(\xi) \cdot \hat{\varphi}_\varepsilon(\xi)$. Последняя функция может быть аналитически продолжена на все комплексное n-мерное пространство, и это продолжение удовлетворяет оценке типа (5) с постоянной $B+\varepsilon$ вместо B. Таким образом, по предыдущей теореме $\operatorname{supp}(T_\varepsilon) = \operatorname{supp}(T * \varphi_\varepsilon)$ принадлежит шару $|x| \leqslant B+\varepsilon$ пространства R^n. Отсюда, полагая $\varepsilon \downarrow 0$ и используя лемму из предыдущего параграфа, мы видим, что носитель $\operatorname{supp}(T)$ принадлежит шару $|x| \leqslant B$ пространства R^n.

Замечание. Приведенная выше формулировка и доказательство теоремы Пэли — Винера взяты из книги Хёрмандера [2].

Преобразование Фурье и преобразование Лапласа. Пусть $g(t) \in L^2(0, \infty)$. Тогда, как показывает неравенство Шварца, при $x > 0$

$$g(t)e^{-tx} \in L^1(0, \infty) \cap L^2(0, \infty).$$

Применяя теорему Планшереля, мы получаем для преобразования Фурье

$$f(x+iy) = (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty g(t)e^{-tx}e^{-ity}\,dt =$$

$$= (2\pi)^{-1/2} \int_0^\infty g(t)e^{-t(x+iy)}\,dt \qquad (x>0) \tag{6}$$

неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dy = \int_0^{\infty} |g(t)|^2 e^{-2tx}\,dx \leqslant \int_0^{\infty} |g(t)|^2\,dt. \qquad (7)$$

Функция $f(x+iy)$ голоморфна по переменной $z=x+iy$ в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(z)=x>0$. Это можно установить, дифференцируя (6) под знаком интеграла; такое дифференцирование законно, поскольку $g(t)\,te^{-tz}$ как функция переменной t принадлежит $L^1(0,\infty)$ и $L^2(0,\infty)$ при $\operatorname{Re}(z)=x>0$ [1]). Тем самым мы доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $g(t)\in L^2(0,\infty)$. Тогда (*одностороннее*) *преобразование Лапласа*

$$f(z)=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty} g(t)e^{-tz}\,dt \qquad (\operatorname{Re}(z)>0) \qquad (6')$$

принадлежит так называемому *классу Харди — Лебега* $H^2(0)$, т. е. (1°) функция $f(z)$ голоморфна в правой полуплоскости $\operatorname{Re}(z)>0$; (2°) для каждого фиксированного $x>0$ функция $f(x+iy)$ как функция от y принадлежит $L^2(-\infty,\infty)$, и при этом

$$\sup_{x>0}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2\,dy\right)<\infty. \qquad (7')$$

Эта теорема допускает следующее обращение.

Теорема 2 (Пэли—Винер). Пусть $f(z)\in H^2(0)$. Тогда для $f(x+iy)$ существует *граничная функция* $f(iy)\in L^2(-\infty,\infty)$ в том смысле, что

$$\lim_{x\downarrow 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(iy)-f(x+iy)|^2\,dy=0, \qquad (8)$$

---

[1]) Если доопределить $g(t)$ на $(-\infty,\infty)$, полагая $g(t)=0$ для $t<0$, то к функции $g(t)\,e^{-tx}$ можно при $x>0$ применить теорему Планшереля и следствие 1 из этой теоремы. В этом случае существует функция $f(x+iy)=$ $=\widehat{(ge^{-tx})}=\underset{h\uparrow\infty}{\text{l. i. m.}}\,(2\pi)^{-1/2}\int_0^h e^{-tx}g(t)e^{-ity}\,dt$. Поскольку $g(t)e^{-tx}\in L^1(0,\infty)$, интеграл сходится к f в обычном смысле: $f=(2\pi)^{-1/2}\int_0^{\infty} e^{-tx}g(t)\,e^{-ity}\,dt$. Применяя к f формулу (20) (§ 2, гл. VI), мы и получаем неравенство (7). — *Прим. перев.*

и при этом обратное преобразование Фурье

$$g(t) = (2\pi)^{-1/2} \underset{N \to \infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}} \int_{-N}^{N} f(iy) e^{ity} dy \tag{9}$$

обращается в нуль при $t < 0$, а сама функция $f(z)$ получается как преобразование Лапласа функции $g(t)$.

Доказательство. Пространство $L^2(-\infty, \infty)$ локально слабо бикомпактно, поэтому существуют последовательность $\{x_n\}$ и функция $f(iy) \in L^2(-\infty, \infty)$, такие, что

$$x_n \downarrow 0 \quad \text{и} \quad w\text{-}\lim_{n \to \infty} f(x_n + iy) = f(iy).$$

Так как

$$\int_{-N}^{N} \left\{ \int_{+0}^{\delta} |f(x+iy)|^2 dx \right\} dy \leqslant \int_{+0}^{\delta} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+iy)|^2 dy \right\} dx < \infty$$

при любых $\delta > 0$ и $N > 0$, то для всякого $\delta > 0$ можно найти такую последовательность $\{N_k\}$, что

$$\lim_{k \to \infty} N_k = \infty \quad \text{и} \quad \lim_{k \to \infty} \int_{+0}^{\delta} |f(x \pm iN_k)|^2 dx = 0.$$

Применяя неравенство Шварца, мы обнаруживаем, что

$$\lim_{k \to \infty} \int_{+0}^{\delta} |f(x \pm iN_k)| dx = 0. \tag{10}$$

Отсюда вытекает формула

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{z - it} dt \quad (\mathrm{Re}(z) > 0); \tag{11}$$

ее можно вывести следующим образом. По теореме Коши об интегральном представлении

$$f(z) = (2\pi i)^{-1} \int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\mathrm{Re}(z) > 0), \tag{12}$$

где контур интегрирования C, охватывающий точку z, можно составить из направленных отрезков

$$\overrightarrow{x_0 - iN_k,\ x_1 - iN_k}, \qquad \overrightarrow{x_1 - iN_k,\ x_1 + iN_k},$$

$$\overrightarrow{x_1 + iN_k,\ x_0 + iN_k}, \qquad \overrightarrow{x_0 + iN_k,\ x_0 - iN_k},$$

$$x_0 < \mathrm{Re}(z) < x_1, \qquad -N_k < \mathrm{Im}(z) < N_k.$$

Полагая $k \to \infty$ и принимая во внимание (10), получаем

$$f(z) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_0 + it)}{z - (x_0 + it)} dt + (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x_1 + it)}{(x_1 + it) - z} dt.$$

При $x_1 \to \infty$ второе слагаемое в правой части стремится к нулю; это видно из (7′) и неравенства Шварца. Полагая в первом слагаемом $x_0 = x_n$, мы при $n \to \infty$ получаем формулу (11). Аналогично выводится равенство

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{it - z} dt = 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(z) < 0. \tag{13}$$

Определим теперь вспомогательную функцию $h(x)$:

$h(x) = 0$ при $x \leqslant 0$ и $h(x) = e^{-zx}$ при $x > 0$ $(\operatorname{Re}(z) > 0)$.

Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{ixt} dx = \int_{0}^{\infty} e^{ixt - zx} dx = (z - it)^{-1},$$

откуда по теореме Планшереля

$$\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{N \to \infty} (2\pi)^{-1} \int_{-N}^{N} \frac{e^{-itx}}{z - it} dt = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x < 0, \\ e^{-zx} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Re}(z) > 0. \tag{14}$$

Точно так же получаем

$$\operatorname*{l.\,i.\,m.}_{N \to \infty} (2\pi)^{-1} \int_{-N}^{N} \frac{e^{-itx}}{z - it} dt = \begin{cases} -e^{-zx} & \text{при} \quad x < 0, \\ 0 & \text{при} \quad x > 0, \end{cases} \quad \operatorname{Re}(z) < 0. \tag{14′}$$

Теперь, применяя к выражению (11) равенство Парсеваля (27) из гл. VI, § 2, мы видим, что функция $f(z)$ действительно представляет собой одностороннее преобразование Лапласа функции $g(t)$, определяемой формулой (9). Применяя равенство Парсеваля к выражению (13), мы находим также, что $g(t) = 0$ при $t < 0$.

Докажем, наконец, что имеет место формула (8).

Складывая (11) и (13), мы получаем для функции $f(z)$ представление в виде *интеграла Пуассона*

$$f(z) = f(x + iy) = \frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(it)}{(t - y)^2 + x^2} dt \quad \text{для всех} \quad x > 0. \tag{15}$$

Учитывая, что

$$\frac{x}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(t - y)^2 + x^2} = 1, \tag{16}$$

мы находим, что

$$|f(x+iy)-f(iy)| \leqslant \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|}{s^2+x^2}\,ds, \text{ где } f^+(y)=f(iy).$$

Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x+iy)-f(iy)|^2\,dy \leqslant \left(\frac{x}{\pi}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|}{s^2+x^2}\,ds\right\}^2 dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x^2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+x^2}\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|f^+(s+y)-f^+(y)|^2}{s^2+x^2}\,ds\right)dy \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ds}{s^2+x^2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f^+(s+y)-f^+(y)|^2\,dy\right\} = \frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(f^+;\, s)}{s^2+x^2}\,ds,$$

где функция $\mu(f^+;\, s)$ непрерывна по s, обращается в нуль при $s=0$ и $0 \leqslant \mu(f^+;\, s) \leqslant 4\,\|f^+\|^2$.

Чтобы показать, что правая часть стремится к нулю при $x \downarrow 0$, зададим призвольное $\varepsilon > 0$ и выберем такое $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, чтобы при $|s| \leqslant \delta$ выполнялось неравенство $\mu(f^+;\, s) \leqslant \varepsilon$. Разобьем интеграл на три слагаемых:

$$\frac{x}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu(f^+;\, s)}{s^2+x^2}\,ds = \frac{x}{\pi}\left\{\int_{-\infty}^{-\delta}+\int_{-\delta}^{\delta}+\int_{\delta}^{\infty}\right\} = I_1+I_2+I_3.$$

Из (16) видно, что $|I_2| \leqslant \varepsilon$; кроме того,

$$|I_j| \leqslant 4\pi^{-1}\,\|f^+\|^2 \operatorname{arc\,ctg}(\delta/x) \qquad (j=1,\ 3).$$

Отсюда ясно, что интеграл слева стремится к нулю при $x \downarrow 0$. Это и доказывает теорему.

Замечание 1. Первоначальная формулировка и доказательство этой теоремы имеются в работе Пэли — Винера [1]. По поводу одностороннего преобразования Лапласа медленно растущих обобщенных функций см. Л. Шварц [2].

Замечание 2. Сато [1] принадлежит удачная идея определить „обобщенную функцию“ как „граничное значение аналитической функции“. Эту идею можно пояснить следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех функций $\varphi(z)$, определенных и регулярных в верхней и нижней полуплоскостях комплексной z-плоскости, и пусть $\mathfrak{R}$ — совокупность всех функций, регулярных на всей комплексной плоскости. Множество $\mathfrak{B}$ представляет собой кольцо по сложению и умножению функций, а $\mathfrak{R}$ — подкольцо кольца $\mathfrak{B}$. Сато называет класс вычетов $(\operatorname{mod}\mathfrak{R})$, содержащий функцию $\varphi(z)$, „обобщенной функцией" $\widehat{\varphi}(x)$ на вещественной оси R^1, определяемой функцией $\varphi(x)$. „Обобщенная производная" $d\widehat{\varphi}(x)/dx$ обобщенной функции $\widehat{\varphi}(x)$ естественным образом определяется как класс вычетов (mod $\mathfrak{R}$), содержащий производную $d\varphi(z)/dz$. Так, например, „дельта-функция $\delta(x)$" при таком определении — это класс вычетов (mod $\mathfrak{R}$), содержащий функцию $-(2\pi i)^{-1} z^{-1}$. Теория Сато „обобщенных функций многих переменных" допускает следующую весьма интересную топологическую интерпретацию. Пусть M — вещественное n-мерное аналитическое многообразие и X — комплексификация M. Тогда n-мерная группа относительных когомологий $H^n(X \bmod (X - M))$ с коэффициентами в пучке ростков регулярных функций, заданных в X, приводит к понятию „обобщенной функции на M". Таким образом, класс относительных когомологий является естественным определением „обобщенной функции".

Замечание 3. Более подробное изложение преобразования Фурье обобщенных функций можно найти в книгах Л. Шварца [1] и Гельфанда — Шилова [1]. В последней книге, кроме пространств типа $\mathfrak{D}(R^n)$, $\mathfrak{S}(R^n)$ и $\mathfrak{O}_M(R^n)$, вводится еще целый ряд классов основных функций, для которых определяются обобщенные функции и изучаются преобразования Фурье соответствующих обобщенных функций. См. также Фридман [1] и Хёрмандер [6].

5. Теорема Титчмарша

Теорема (Титчмарш). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные вещественные или комплексные функции, определенные в области $0 \leqslant x < \infty$, такие, что выражение

$$(f * g)(x) \equiv \int_0^x f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_0^x g(x-y)\, f(y)\, dy \equiv (g * f)(x) \quad (1)$$

обращается тождественно в нуль. Тогда по крайней мере одна из функций $f(x)$ или $g(x)$ должна тождественно равняться нулю.

Существуют различные доказательства этой важной теоремы, например, принадлежащие Титчмаршу [1], а также Краму и Дюфреснуа. Доказательство, которое мы даем здесь, принадлежит Рылль-Нардзевскому [1]; оно приводится также в книге Микусинского [1]. Это доказательство элементарно в том смысле, что в нем не используется теория функций комплексного переменного.

Лемма 1 (Фрагмен). Если функция $g(u)$ непрерывна в отрезке $0 \leqslant u \leqslant T$, то для t из области $0 \leqslant t \leqslant T$ имеет место формула

$$\lim_{x \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} \int_0^T e^{kx(t-u)} g(u)\, du = \int_0^t g(u)\, du. \quad (2)$$

Доказательство. Напишем очевидное разложение

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} (k!)^{-1} e^{kx(t-u)} = 1 - \exp\left(e^{-x(t-u)}\right).$$

При любых фиксированных x и t ряд слева сходится равномерно относительно u в отрезке $0 \leqslant u \leqslant T$, поэтому его можно почленно интегрировать. Выполняя интегрирование и применяя лемму Лебега — Фату, мы получаем формулу (2).

Лемма 2. Если функция $f(t)$ непрерывна при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\left| \int\limits_0^T e^{nt} f(t)\, dt \right| \leqslant M$ для значений $n = 1, 2, \ldots$, где положительная постоянная M не зависит от n, то функция $f(t)$ тождественно равна нулю в отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Воспользуемся неравенством

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_0^T \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-u)} f(T-u)\, du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left| \int\limits_0^T e^{kn(T-u)} f(T-u)\, du \right| \leqslant M\left(\exp\left(e^{-n(T-t)}\right) - 1\right).$$

Если $t < T$, то выражение справа стремится к нулю при $n \to \infty$. Поэтому, полагая $g(u) = f(T-u)$ и применяя лемму 1, мы видим, что $\int\limits_0^t f(T-u)\, du = 0$ при всех $0 \leqslant t \leqslant T$. Так как функция f непрерывна, отсюда следует, что $f(t) \equiv 0$ для всех t из отрезка $0 \leqslant t \leqslant T$.

Следствие 1. Если функция $g(x)$ непрерывна при $1 \leqslant x \leqslant X$ и существует такое положительное число N, что

$$\left| \int\limits_1^X x^n g(x)\, dx \right| \leqslant N \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

то $g(x) \equiv 0$ при $1 \leqslant x \leqslant X$.

Доказательство. Полагая $x = e^t$, $X = e^T$ и $xg(x) = f(t)$, мы получаем по лемме 2, что $f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$. Поэтому и $xg(x) = 0$ при $1 \leqslant x \leqslant X$. Отсюда следует, что $g(x) = 0$ при $1 \leqslant x \leqslant X$.

Следствие 2 (теорема Лерха). Пусть функция $f(t)$ непрерывна в области $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\int\limits_0^T t^n f(t)\, dt = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$; тогда $f(t) = 0$ при всех значениях $t \in [0, T]$.

Доказательство. Пусть t_0 — произвольная точка интервала $(0, T)$; положим $t = t_0 x$, $T = t_0 X$, $f(t) = g(x)$. Тогда

$$t_0^{n+1} \int_0^X x^n g(x)\,dx = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

и поэтому $\left| \int_1^X x^n g(x)\,dx \right| = \left| \int_0^1 x^n g(x)\,dx \right| \leqslant \int_0^1 |g(x)|\,dx = N$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Применяя следствие 1, мы видим, что $g(x) = 0$ для $1 \leqslant x \leqslant X$, откуда $f(t) = 0$ при $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Так как t_0 — произвольная точка интервала $(0, T)$, то $f(t) = 0$ на всем отрезке $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство теоремы Титчмарша. Докажем сначала эту теорему в частном случае, когда $f = g$: если функция $f(t)$ непрерывна и $(f * f)(t) \equiv \int_0^t f(t-u) f(u)\,du = 0$ при всех значениях $0 \leqslant t \leqslant 2T$, то $f(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Производя в равенстве

$$\int_0^{2T} e^{n(2T-t)} \left(\int_0^t f(u) f(t-u)\,du \right) dt = 0$$

замену переменных $u = T - v$, $t = 2T - v - w$, мы получаем

$$\iint_\Delta e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\,dv\,dw = 0,$$

где Δ — треугольник $v + w \geqslant 0$, $v \leqslant T$, $w \leqslant T$ на плоскости v, w. Обозначим через Δ' треугольник вида $v + w \leqslant 0$, $v \geqslant -T$, $w \geqslant -T$. Тогда объединение $\Delta + \Delta'$ представляет собой квадрат $-T \leqslant v, w \leqslant T$. Полученное выше равенство показывает, что интеграл от функции $e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)$ по квадрату $\Delta + \Delta'$ равен интегралу от этой же функции по области Δ'. Интеграл по $\Delta + \Delta'$ представляет собой произведение двух однократных интегралов, а в интеграле по Δ' выполняется неравенство $e^{n(v+w)} \leqslant 1$. Поэтому

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\,du \right|^2 = \left| \iint_{\Delta+\Delta'} e^{n(v+w)} f(T-v) f(T-w)\,dv\,dw \right| \leqslant$$

$$\leqslant \iint_{\Delta'} |f(T-v) f(T-w)|\,dv\,dw \leqslant 2T^2 \cdot A^2,$$

где A — максимум $|f(t)|$ при $0 \leqslant t \leqslant 2T$, а $2T^2$ — площадь треугольника Δ'. Отсюда

$$\left| \int_{-T}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqslant \sqrt{2}\, T \cdot A$$

и, кроме того, $\left| \int_{-T}^{0} e^{nu} f(T-u)\, du \right| \leqslant TA$. Таким образом,

$$\left| \int_{0}^{T} e^{nu} f(T-u)\, du \right| = \left| \int_{-T}^{T} - \int_{-T}^{0} \right| \leqslant (1+\sqrt{2})\, TA \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

и в силу следствия 2 $f(t) = 0$ для всех $t \in [0, T]$.

Теперь мы можем доказать теорему Титчмарша для общего случая. Допустим, что $\int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = 0$ при $0 \leqslant t < \infty$. Тогда для всех значений $0 \leqslant t < \infty$

$$\int_0^t (t-u) f(t-u)\, g(u)\, du + \int_0^t f(t-u)\, u g(u)\, du = $$
$$= t \int_0^t f(t-u)\, g(u)\, du = 0.$$

Это можно записать в виде

$$(f_1 * g)(t) + (f * g_1)(t) = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty),$$

где

$$f_1(t) = t f(t), \quad g_1(t) = t g(t).$$

Следовательно,

$$[f * \{g_1 * (f_1 * g + f * g_1)\}](t) = 0,$$

и поэтому

$$[(f * g) * (f_1 * g_1)](t) + [(f * g_1) * (f * g_1)](t) = 0.$$

Последнее означает, что $[(f * g_1) * (f * g_1)](t) = 0$, так как $(f * g)(t) = 0$. Это приводит к рассмотренному выше частному случаю; мы видим, что $(f * g_1)(t) = 0$, т. е.

$$\int_0^t f(t-u)\, u g(u)\, du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Из этого равенства, применяя аналогичные рассуждения, мы получаем

$$\int_0^t f(t-u)\, u^2 g(u)\, du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty).$$

Повторяя эти рассуждения, мы находим, что

$$\int_0^t f(t-u)\,u^n g(u)\,du = 0 \qquad (0 \leqslant t < \infty,\ n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Отсюда, согласно следствию 2,

$$f(t-u)\,g(u) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant u \leqslant t < \infty.$$

Если предположить, что имеется точка u_0, в которой $g(u_0) \neq 0$, то $f(t-u_0) = 0$ при всех $t \geqslant u_0$, т. е. $f(v) = 0$ для всех $v \geqslant 0$. Поэтому либо $f(v) = 0$ при всех $v \geqslant 0$, либо $g(v) = 0$ при всех $v \geqslant 0$.

6. Операторное исчисление Микусинского

В своей книге „Electromagnetic Theory" (London, 1899) физик Хевисайд ввел операционное исчисление и успешно применял его к обыкновенным дифференциальным уравнениям, связанным с задачами электротехники. В этом исчислении встречались операторы, точный смысл которых был не вполне ясен. Интерпретация таких операторов, предложенная самим Хевисайдом, приводит к ряду трудностей. Интерпретация, предложенная его последователями, основывается на теории преобразований Лапласа, поэтому при таком подходе остается неясным, насколько в действительности широка область применимости операционного метода. Предложенная Микусинским теория, основанная на операции, обратной свертке, позволяет придать операционному исчислению простую и ясную форму, допускающую приложение к обыкновенным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами, а также к некоторым уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, разностным и интегральным уравнениям.

Операция, обратная свертке. Обозначим через C совокупность всех непрерывных комплексных функций $f(t)$, определенных при $0 \leqslant t < \infty$. В этом параграфе мы будем обозначать функции символом $\{f(t)\}$ или f, а через $f(t)$ — значение функции f в точке t. Свертку вида $\left\{\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds\right\}$ функций f и g мы будем обозначать через $\{f(t)\} \cdot \{g(t)\}$ или $f \cdot g$:

$$\{f(t)\} \cdot \{g(t)\} = \{(f * g)(t)\} = \left\{\int_0^t f(t-s)\,g(s)\,ds\right\}. \tag{1}$$

Как было показано в гл. VI, § 3,

$$f \cdot g = g \cdot f \quad \text{(коммутативность)}, \tag{2}$$

$$f \cdot (g \cdot h) = (f \cdot g) \cdot h \quad \text{(ассоциативность)}. \tag{3}$$

Кроме операции „умножения“ $f \cdot g$, определенной как свертка f и g, мы можем ввести также операцию сложения

$$\{f(t)\} + \{g(t)\} = \{f(t) + g(t)\}. \tag{4}$$

При этом выполняется распределительный закон

$$h \cdot (f + g) = h \cdot f + h \cdot g. \tag{5}$$

Множество C образует *кольцо* по сложению $f + g$ и умножению $f \cdot g$. *Нулем* в этом кольце служит функция, тождественно равная нулю; мы будем обозначать ее через 0; C — это *кольцо без делителей нуля*, т. е. если $f \cdot g = 0$ в C, то по крайней мере одна из функций f или g равна 0. Последнее вытекает из доказанной выше теоремы Титчмарша. Введем операцию, обратную „умножению“ $f \cdot g = f * g$, как *операцию, обратную свертке*, т. е. определим „отношение“ $f/g = \dfrac{f}{g}$ двух функций f, $g \in C$, где $g \neq 0$, следующим образом:

$$\begin{aligned} &\text{равенство } a/b = c/d \text{ эквивалентно } a \cdot d = b \cdot c, \\ &\text{в частности, } a/b = c \text{ эквивалентно } a = b \cdot c, \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \tag{7}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}, \tag{8}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c} \quad (c \neq 0). \tag{9}$$

Мы получаем коммутативное поле Q.

Оператор. Отношение a/b мы будем называть „оператором“. Всякий элемент $a \in C$ представляет собой пример оператора, так как его можно отождествить, согласно (9), с $a \cdot b/b \, (b \neq 0)$ [1]).

Единица или δ-оператор. Оператор $c/c \, (c \neq 0)$ представляет собой *единицу* операции умножения в поле Q. Действительно, согласно (7) и (9), имеем

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{a}{b}. \tag{10}$$

Кроме того, по правилу (6) $c/c = b/b$. Мы будем называть c/c *единицей*, или *δ-оператором*, и обозначать через 1:

$$1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}. \tag{11}$$

---

[1]) Если в C существует функция φ, такая, что $f = g \cdot \varphi$, то „отношение“ f/g обозначает функцию φ. Если для f и g такой функции φ нет, то „отношение“ f/g формально присоединяется к C как „обобщенный“ элемент поля Q или „оператор“ (по терминологии Микусинского). См. Микусинский [1], [2*]. — *Прим. перев.*

Заметим, что оператор $1 = c/c$ не принадлежит множеству C; в самом деле, примем за c функцию $\{1\}$. Если допустить, что $\{1\}/\{1\} = \{f(t)\} \in C$, то должно получиться равенство

$$\{1\} \cdot \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t 1 \cdot f(s)\, ds \right\} = \left\{ \int_0^t f(s)\, ds \right\} = \{1\},$$

которое, очевидно, неверно.

Оператор интегрирования. Обозначим через h оператор, определяемый функцией $\{1\}$:

$$h = \{1\}, \tag{12}$$

и назовем h *оператором интегрирования*. В самом деле, это название оправдывается тем, что для любой функции $f \in C$, как мы уже видели выше,

$$h \cdot \{f(t)\} = \{1\} \cdot \{f(t)\} = \left\{ \int_0^t f(s)\, ds \right\}. \tag{13}$$

Замечание. В книге Микусинского, на которую мы уже ссылались, для функции $\{1\}$ применяется символ l. Мы будем использовать для этой цели символ h в честь Хевисайда. Всякую локально интегрируемую функцию $\{f(t)\}$ $(t \geqslant 0)$ можно отождествить с оператором $\left\{ \int_0^t f(s)\, ds \right\} \Big/ h$. Таким образом, отношения в поле Q представляют собой „обобщенные функции".

Скалярный оператор. Пусть α — произвольное комплексное число и $\{\alpha\}$ — функция, тождественно равная α. Оператор

$$[\alpha] = \{\alpha\}/\{1\} = \{\alpha\}/h \tag{14}$$

называется *скалярным оператором*, так как

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha + \beta], \quad [\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha\beta], \quad [\alpha] \cdot \{f(t)\} = \{\alpha f(t)\}. \tag{15}$$

Доказательство. Имеем

$$[\alpha] + [\beta] = \frac{\{\alpha\}}{h} + \frac{\{\beta\}}{h} = \frac{\{\alpha + \beta\}}{h} = [\alpha + \beta],$$

$$[\alpha] \cdot [\beta] = \frac{\{\alpha\} \cdot \{\beta\}}{h^2} = \frac{\{\alpha\beta t\}}{h^2} = \frac{h \cdot \{\alpha\beta\}}{h^2} = \frac{\{\alpha\beta\}}{h} = [\alpha\beta],$$

$$[\alpha] \cdot \{f(t)\} = \frac{\{\alpha\} \cdot \{f(t)\}}{h} = \frac{\left\{ \int_0^t \alpha f(s)\, ds \right\}}{h} = \frac{h \cdot \{\alpha f(t)\}}{h} = \{\alpha f(t)\}.$$

Замечание. Как следствие мы получаем формулу

$$[\alpha] \cdot \frac{\{a(t)\}}{\{b(t)\}} = \frac{\{\alpha a(t)\}}{\{b(t)\}}, \tag{16}$$

т. е. действие оператора $[\alpha]$ в точности совпадает с умножением на скаляр α. Поэтому скалярный оператор $\{1\}/\{1\}$ можно отождествить с оператором 1, а оператор $[\alpha]$ — с числом α.

Оператор дифференцирования. Обозначим оператор $1/h$ символом s:

$$s = 1/h = 1/\{1\}. \tag{17}$$

Оператор s называется *оператором дифференцирования*, потому что если функция $f = \{f(t)\} \in C$ имеет непрерывную производную $f' = \{f'(t)\}$, то

$$sf = f' + f(0), \quad \text{где} \quad f(0) = \{f(0)\}/h. \tag{18}$$

Доказательство. Умножим обе части равенства

$$\{f(t)\} = \{f(0)\} + \left\{ \int\limits_0^t f'(s)\,ds \right\} = h \cdot f(0) + h \cdot \{f'(t)\}$$

на s и используем то, что $s \cdot h = h \cdot s = 1$.

Следствие 1. Если функция $f = \{f(t)\}$ имеет непрерывную производную n-го порядка $f^{(n)} = \{f^{(n)}(t)\}$, то

$$f^{(n)} = s^n \cdot f - s^{n-1} \cdot f(0) - s^{n-2} \cdot f'(0) - \ldots - s \cdot f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0), \tag{19}$$

где $f^{(j)}(0)$ — оператор умножения на $f^{(j)}(0)$, т. е. $f^{(j)}(0) = \{f^{(j)}(0)\}/h$.

Доказательство. При $n = 2$ мы имеем

$$s^2 \cdot f = s \cdot (s \cdot f) = s \cdot (f' + f(0)) =$$
$$= s \cdot f' + s \cdot f(0) = f'' + f'(0) + s \cdot f(0).$$

В общем случае доказательство проводится по индукции.

Следствие 2. Имеет место формула

$$1/(s - \alpha) = \{e^{\alpha t}\} \tag{20}$$

и более общее соотношение

$$\frac{1}{(s-\alpha)^n} = \left\{ \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha t} \right\} \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{21}$$

Доказательство. Согласно (18), $s \cdot \{e^{\alpha t}\} = \{\alpha e^{\alpha t}\} + 1 = \alpha \cdot \{e^{\alpha t}\} + 1$; таким образом, формула (20) доказана. Далее,

$$1/(s-\alpha)^2 = \{e^{\alpha t}\} \cdot \{e^{\alpha t}\} = \left\{ \int_0^t e^{\alpha(t-s)} e^{\alpha s}\, ds \right\} = \left\{ e^{\alpha t} \int_0^t ds \right\} = \left\{ \frac{t}{1!} e^{\alpha t} \right\}.$$

Продолжая таким образом, получим общую формулу (21).

Приложение к интегрированию линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Мы проиллюстрируем эти приложения на примерах.

Пример 1. Требуется решить уравнение

$$x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$$

Решение. Запишем это уравнение в операторной форме

$$x''(t) - x'(t) - 6x(t) = 2/s.$$

Тогда, учитывая (19), получаем

$$s^2 \cdot x - s \cdot x(0) - x'(0) - s \cdot x + x(0) - 6x = 2/s.$$

Подставляя начальные значения, мы приходим к уравнению

$$s^2 x - s - s \cdot x + 1 - 6x = 2/s, \quad \text{т. е.} \quad (s^2 - s - 6) \cdot x = s - 1 + 2/s.$$

Теперь применяем формулу (20):

$$x = \frac{s^2 - s + 2}{s \cdot (s-3) \cdot (s+2)} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} =$$
$$= \left\{ -\frac{1}{3} + \frac{8}{15} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t} \right\}.$$

Пример 2. Пусть λ — произвольная отличная от нуля постоянная. Требуется решить уравнение

$$x''(t) + \lambda^2 x(t) = 0, \quad x(0) = \alpha, \quad x'(0) = \beta.$$

Решение. В операторной форме это уравнение запишется так:

$$s^2 \cdot x - \alpha s - \beta + \lambda^2 x = 0, \quad \text{т. е.} \quad (s^2 + \lambda^2) \cdot x = \alpha s + \beta.$$

Разлагая на простейшие дроби, получаем

$$x = \frac{\alpha s + \beta}{s^2 + \lambda^2} = \frac{\gamma}{s + i\lambda} + \frac{\delta}{s - i\lambda},$$

где $\alpha s+\beta=\gamma(s-i\lambda)+\delta(s+i\lambda)$, т. е.

$$\gamma=2^{-1}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right),\quad \delta=2^{-1}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right).$$

Следовательно,

$$x=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s+i\lambda}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)\frac{1}{s-i\lambda}=$$
$$=\left\{\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{-i\lambda t}+\frac{1}{2}\left(\alpha-\frac{i\beta}{\lambda}\right)e^{i\lambda t}\right\}=\left\{\alpha\cos\lambda t+\frac{\beta}{\lambda}\sin\lambda t\right\}.$$

Пример 3. Требуется решить систему уравнений

$$x'(t)-\alpha x(t)-\beta y(t)=\beta e^{\alpha t},\quad y'(t)+\beta x(t)-\alpha y(t)=0$$

с начальными условиями $x(0)=0$, $y(0)=1$.

Решение. Решая уравнения в операторной форме

$$s\cdot x-\alpha x-\beta y=\beta/(s-\alpha),\quad s\cdot y-1+\beta x-\alpha y=0,$$

получаем

$$x=\frac{2\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2},\qquad y=\frac{(s-\alpha)^2-\beta^2}{(s-\alpha)\cdot((s-\alpha)^2+\beta^2)},$$

откуда

$$x=\frac{1}{i}\left\{\frac{1}{s-\alpha-i\beta}-\frac{1}{s-\alpha+i\beta}\right\}=\frac{1}{i}\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}-e^{(\alpha-i\beta)t}\right\}=\left\{2e^{\alpha t}\sin\beta t\right\},$$

$$y=\frac{2(s-\alpha)}{(s-\alpha)^2+\beta^2}-\frac{1}{s-\alpha}=\frac{1}{s-\alpha-i\beta}+\frac{1}{s-\alpha+i\beta}-\frac{1}{s-\alpha}=$$
$$=\left\{e^{(\alpha+i\beta)t}+e^{(\alpha-i\beta)t}-e^{\alpha t}\right\}=\left\{e^{\alpha t}(2\cos\beta t-1)\right\}.$$

Дальнейшее развитие этого метода и приложения см. у Микусинского [1], [2*], а также Эрдейи [1].

7. *Лемма Соболева*

Всякая обобщенная функция бесконечно дифференцируема в обобщенном смысле (см. гл. 1, § 8). Поэтому дифференцируемость в обобщенном смысле не связана непосредственно с обычной дифференцируемостью. Однако имеет место следующий результат, весьма важный для современного подхода к уравнениям в частных производных.

Теорема (лемма Соболева). Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n. Допустим, что функция $u(x)$ принадлежит $W^k(G)$ при $k>2^{-1}n+\sigma$, где σ — неотрицательное целое число. Таким образом, мы предполагаем, что все обобщенные производные функции $u(x)$ до порядка k включительно принадлежат $L^2(G)$. Тогда для всякого открытого подмножества G_1 области G, замыкание которого G_1^a образует бикомпактное подмножество области G, существует такая функция $u_1(x) \in C^\sigma(G_1)$, что почти всюду в G_1 выполняется равенство $u(x) = u_1(x)$.

Доказательство. Выберем из $C_0^\infty(R^n)$ функцию $\alpha(x)$, удовлетворяющую условиям

$$G_1 \subseteq \operatorname{supp}(\alpha) \subseteq G, \ 0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1 \ \text{и} \ \alpha(x) = 1 \ \text{при} \ x \in G_1.$$

Определим на пространстве R^n вспомогательную функцию $v(x)$:

$$v(x) = \alpha(x)\, u(x) \ \text{при} \ x \in G; \ v(x) = 0 \ \text{при} \ x \in R^n - G.$$

Тогда $v(x) = u(x)$ при всех $x \in G_1$. Так как функция $v(x)$ локально интегрируема в R^n, она определяет некоторую обобщенную функцию, принадлежащую $\mathfrak{D}(R^n)'$. Из предположения $u \in W^k(G)$ следует, что обобщенные производные $D^s v(x) \in L^2(R^n)$ при $|s| \leqslant k$. Например, обобщенная производная

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(v) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha u) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \cdot u + \alpha \frac{\partial}{\partial x_j} u$$

принадлежит $L^2(R^n)$, потому что обе функции u и $\partial u / \partial x_j$ принадлежат $L^2(G)$, а функция $\alpha(x)$ бесконечно дифференцируема и ее носитель содержится в некотором бикомпактном подмножестве открытой области G.

Преобразование Фурье $v(x) \to \hat{v}(y)$ приводит к равенству

$$\widehat{(D^s v)}(y) = (i)^{|s|} y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_n^{s_n} \cdot \hat{v}(y).$$

По теореме Планшереля преобразование Фурье сохраняет L^2-норму, поэтому $\widehat{(D^s v)}(y) \in L^2(R^n)$ при $|s| \leqslant k$. Таким образом,

$$\hat{v}(y)\, y_1^{s_1} y_2^{s_2} \ldots y_n^{s_n} \in L^2(R^n) \ \text{при} \ |s| \leqslant k. \tag{1}$$

В частности,

$$\hat{v}(y) \in L^2(R^n). \tag{1'}$$

Возьмем систему неотрицательных целых чисел $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Из (1) следует, что

$$\hat{v}(y) y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots y_n^{q_n} \ \text{интегрируема по} \ R^n \ \text{при всех} \ |q| + \frac{n}{2} < k. \tag{2}$$

В самом деле, возьмем любое положительное число C. Применяя неравенство Шварца, получаем

$$\int\limits_{|y|\leqslant C} \left|\hat{v}(y)\, y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots y_n^{q_n}\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{|y|\leqslant C} \left| y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots y_n^{q_n}\right|^2 dy \cdot \int\limits_{|y|\leqslant C} |\hat{v}(y)|^2 dy \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\int\limits_{|y|> C} \left|\hat{v}(y)\, y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots y_n^{q_n}\right| dy \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int\limits_{|y|> C} \left|(1+|y|^2)^{-k/2}\, y_1^{q_1} y_2^{q_2} \ldots y_n^{q_n}\right|^2 dy \times \right.$$

$$\left. \times \int\limits_{|y|> C} \left|\hat{v}(y)(1+|y|^2)^{k/2}\right|^2 dy \right)^{1/2}.$$

Второй сомножитель в правой части последнего неравенства, согласно (1), конечен. Первый множитель тоже конечен, если

$$2|q| - 2k + n - 1 < -1, \text{ т. е. если } k > \frac{n}{2} + |q|,$$

так как

$$dy = dy_1\, dy_2 \ldots dy_n = r^{n-1}\, dr\, d\Omega_n, \tag{3}$$

где $d\Omega_n$ — элемент гиперповерхности единичной сферы пространства R^n с центром в начале координат. По теореме Планшереля

$$v(x) = \underset{h\to\infty}{\mathrm{l.\,i.\,m.}}\, (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|y|\leqslant h} \hat{v}(y) \exp(i\langle y,\ x\rangle)\, dy;$$

поэтому, так же как при доказательстве полноты пространства $L^2(R^n)$, мы можем выбрать последовательность $\{h'\}$ положительных целых чисел h так, что для почти всех точек $x \in R^n$

$$v(x) = \lim_{h'\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|y|\leqslant h'} \hat{v}(y) \exp(i\langle y,\ x\rangle)\, dy.$$

Но, как показано выше, функция $\hat{v}(y)$ интегрируема по всему пространству R^n, поэтому правая часть последнего равенства равна

$$v_1(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{R^n} \hat{v}(y) \exp(i\langle x,\ y\rangle)\, dy,$$

т. е. $v(x)$ для почти всех значений $x \in R^n$ совпадает с $v_1(x)$. Условие (2) позволяет дифференцировать выражение для $v_1(x)$ под знаком интеграла до порядка σ включительно, причем результат дифференцирования непрерывен по x. Полагая $u_1(x) = v_1(x)$ при $x \in G_1$, мы завершаем доказательство теоремы.

Замечание. Первоначальное доказательство этой теоремы, принадлежащее С. Л. Соболеву, можно найти в работах Соболева [1], [2], Канторовича — Акилова [1].

8. Неравенство Гординга

Рассмотрим интегральную квадратичную форму для функции $u(x)=u(x_1, x_2, \ldots, x_n)\in C^\infty$, имеющей бикомпактный носитель, принадлежащий ограниченной области G пространства R^n:

$$B[u, u]=\sum_{|s|, |t|\leqslant m}(c_{st}D^s u, D^t u)_0, \tag{1}$$

где комплекснозначные коэффициенты c_{st} непрерывны в замыкании G^a области G, а $(u, v)_0$ — скалярное произведение в $L^2(G)$.

Имеет место следующая

Теорема (Гординг [1]). Для того чтобы существовали положительные постоянные c, C, такие, что неравенство

$$\| u\|_m^2 \leqslant c \operatorname{Re} B[u, u]+C\| u\|_0^2 \tag{2}$$

выполняется при всех функциях $u\in C_0^\infty(G)$, достаточно, чтобы для некоторой положительной постоянной c_0

$$\operatorname{Re}\sum_{|s|, |t|=m} c_{st}\xi^s\xi^t \geqslant c_0|\xi|^{2m} \tag{3}$$

для всех $x\in G$ и всех вещественных векторов $\xi=(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$.

Замечание. Неравенство (2) называется *неравенством Гординга.* Если условие (3) выполняется и коэффициенты $c_{st}\in C^m$ в области G^a, то дифференциальный оператор

$$L=\sum_{|s|, |t|\leqslant m} D^t c_{st}D^s \tag{4}$$

называется *сильно эллиптическим* в G.

Доказательство. Сначала мы покажем, что для всякого $\varepsilon>0$ найдется постоянная $C(\varepsilon)>0$, такая, что для любой функции $u\in C_0^\infty(G)$ выполняется неравенство

$$\| u\|_{m-1}^2 \leqslant \varepsilon\| u\|_m^2 + C(\varepsilon)\| u\|_0. \tag{5}$$

Чтобы убедиться в этом, мы будем считать, что $u\in C_0^\infty(R^n)$, полагая $u=0$ вне G. Применяя преобразование Фурье и теорему Планшереля, получаем

$$\| D^s u\|_0^2=\| \widehat{(D^s u)}\|_0^2=\int_{R^n}\Big|\prod_{j=1}^n y_j^{s_j}\hat{u}(y)\Big|^2 dy.$$

Таким образом, неравенство (5) следует из того, что выражение

$$\left(\sum_{|s| \leqslant m-1} \prod_{j=1}^{n} y_j^{2s_j}\right) \Big/ \left(C + \sum_{|t| \leqslant m} \prod_{j=1}^{n} y_j^{2t_j}\right),$$

где $|s| = \sum_{j=1}^{n} s_j$, $|t| = \sum_{j=1}^{n} t_j$, стремится к нулю равномерно относительно переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ при $C \uparrow \infty$.

Допустим, что коэффициенты c_{st} постоянны и отличны от нуля только при $|s| = |t| = m$. Применяя преобразование Фурье $u(x) \to \hat{u}(\xi)$ и теорему Планшереля, а также учитывая (3), мы приходим к неравенству

$$\operatorname{Re} B[u, u] = \operatorname{Re} \int \sum_{s, t} c_{st} \xi^s \xi^t |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant$$
$$\geqslant \int c_0 |\xi|^{2m} |\hat{u}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant c_1 \left(\|u\|_m^2 - \|u\|_{m-1}^2\right),$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u. Таким образом, в данном частном случае условие (2) выполняется, так как справедливо условие (5).

Теперь перейдем к случаю переменных коэффициентов c_{st}. Вначале допустим, что носитель функции u содержится в некотором шаре достаточно малого радиуса с центром в начале координат. Используя полученный ранее результат, мы приходим к неравенству

$$c_0' \|u\|_m^2 \leqslant \operatorname{Re} B[u, u] + \operatorname{Re} \sum_{|s| = |t| = m} \int (c_{st}(0) - c_{st}(x)) D^s u \cdot D^t \bar{u} \, dx -$$
$$- \operatorname{Re} \sum_{|s| + |t| \leqslant 2m} \int c_{st}(x) D^s u \cdot D^t \bar{u} \, dx + C(\varepsilon) \|u\|_0^2,$$

где $c_0' > 0$ — некоторая постоянная, не зависящая от u. Если носитель функции u расположен в столь малом шаре, что колебания функций c_{st} в пределах этого множества достаточно малы, то второе слагаемое в правой части будет не больше чем $2^{-1} c_0' \|u\|_m^2$. Третье слагаемое в правой части не превосходит величины $\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}$, умноженной на некоторую положительную постоянную. Следовательно,

$$2^{-1} c_0' \|u\|_m^2 \leqslant \operatorname{Re} B[u, u] + \text{constant} \cdot \|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1} + C(\varepsilon) \|u\|_0^2,$$

где „constant“ здесь и далее обозначает положительные постоянные. Тогда, поскольку неравенство

$$2|\alpha| \cdot |\beta| \leqslant \varepsilon |\alpha|^2 + \varepsilon^{-1} |\beta|^2 \qquad (6)$$

выполняется при любом $\varepsilon > 0$, мы получаем оценку вида

$$\|u\|_m^2 \leqslant \text{constant} \cdot \operatorname{Re} B[u, u] + \text{constant} \cdot \|u\|_{m-1}^2 + C(\varepsilon) \cdot \|u\|_0^2,$$

откуда, учитывая (5), мы выводим условие (2).

Наконец, перейдем к общему случаю. Построим разбиение единицы в области G:

$$1 = \sum_{j=1}^{N} \omega_j^2, \quad \omega_j \in C_0^\infty(G) \quad \text{и} \quad \omega_j(x) \geqslant 0 \quad \text{при } x \in G,$$

так, чтобы носители всех функций ω_j были заключены в достаточно малом шаре с центром в начале координат. Тогда, применяя правило Лейбница дифференцирования произведения функций, неравенство Шварца и выведенную ранее оценку, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} B[u, u] &= \operatorname{Re} \sum_{s,t} \int c_{st} D^s u D^t \bar{u}\, dx = \operatorname{Re} \sum_{s,t} \sum_j \int \omega_j^2 c_{st} D^s u D^t \bar{u}\, dx = \\ &= \operatorname{Re} \sum_j \sum_{s,t} c_{st} D^s(\omega_j u) D^t(\overline{\omega_j u})\, dx + O(\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}) \geqslant \\ &\geqslant \sum_j \text{constant}\left(\|\omega_j u\|_m^2 - \|\omega_j u\|_{m-1}^2\right) + O\left(\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}\right) \geqslant \\ &\geqslant \text{constant} \cdot \|u\|_m^2 + O\left(\|u\|_m \cdot \|u\|_{m-1}\right). \end{aligned}$$

Далее, применяя неравенство (5), мы приходим к условию (2). Заметим, что постоянные c, C в формуле (2) зависят от области G, так как они связаны с c_0 и c_{st}.

9. Теорема Фридрихса

Рассмотрим сильно эллиптический оператор

$$L = \sum_{|s|,\,|t| \leqslant m} D^s c_{st}(x) D^t \tag{1}$$

с вещественными коэффициентами $c_{st}(x) \in C^\infty$, определенными в ограниченной открытой области G пространства R^n. Пусть функция $f(x)$ с локально интегрируемым квадратом определена в области G. Функция $u(x)$ с локально интегрируемым квадратом в области G называется *обобщенным решением* уравнения

$$Lu = f, \tag{2}$$

если

$$(u, L^*\varphi)_0 = (f, \varphi)_0, \quad \text{где} \quad L^* = \sum_{|s|,\,|t| \leqslant m} (-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st}(x) D^s, \tag{3}$$

для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Выражение $(f, g)_0$ обозначает здесь скалярное произведение в гильбертовом пространстве $L^2(G)$. Обобщенные решения, таким образом, понимаются в смысле теории обобщенных функций.

В отношении дифференцируемости обобщенных решений справедлив следующий важный результат.

Теорема (Фридрихс [1]). В области $G_1 \Subset G$, где функция f имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка p включительно, всякое обобщенное решение уравнения (2) обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $(2m+p)$ включительно. Иными словами, если f принадлежит $W^p(G_1)$, то обобщенное решение u уравнения (2) принадлежит $W^{p+2m}(G_1)$.

Следствие. Если $p = \infty$, то по лемме Соболева существует такая функция $u_0(x) \in C^\infty(G_1)$, что $u(x) = u_0(x)$ для почти всех $x \in G_1$. Поэтому после поправки на множестве меры нуль обобщенное решение $u(x)$ уравнения (2) будет принадлежать C^∞ во всякой подобласти области G, в которой $f(x) \in C^\infty$. Следовательно, такое исправленное решение в области, где $f(x) \in C^\infty$, представляет собой *классическое решение* (т. е. решение в смысле обычного, а не обобщенного дифференцирования) дифференциального уравнения (2).

Замечание. Если $L = \Delta$ (оператор Лапласа), то сформулированное выше следствие совпадает с леммой Вейля (см. гл. II, § 7). Имеется обширная литература, касающаяся обобщений леммы Вейля для произвольных эллиптических операторов L; такие обобщения часто называют теоремами Вейля — Шварца. Мы ограничимся здесь указанием на работы П. Лакса [2] и Ниренберга [1], [2].

Приведенное ниже доказательство принадлежит автору (не опубликовано). Сходное доказательство предложил Берс [1]. Следует заметить, что всякую недифференцируемую локально интегрируемую функцию $f(x)$ можно рассматривать как обобщенное решение *гиперболического уравнения*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 0;$$

это следует из формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y\, \partial x} dy \right\} dx = 0 \quad \left(\varphi(x, y) \in C_0^\infty(R^2)\right).$$

Доказательство теоремы Фридрихса. Для наших целей достаточно ограничиться рассмотрением вещественных функций. Мы можем также допустить, что сильно эллиптический оператор L удовлетворяет неравенству Гординга

$$\begin{aligned} &(\varphi, L^*\varphi)_0 \geqslant \delta \|\varphi\|_m^2 \qquad (\delta > 0), \\ &|(\varphi, L^*\psi)_0| \leqslant \gamma \|\varphi\|_m \cdot \|\psi\|_m \qquad (\gamma > 0) \end{aligned} \tag{4}$$

для любых φ, $\psi \in C_0^\infty(G)$. Если это не так, можно заменить L оператором $I + \alpha L$, подобрав подходящую константу $\alpha \neq 0$. Второе из написанных неравенств легко выводится с помощью интегрирования по частям. Мы считаем здесь, что все производные коэффициентов $c_{st}(x)$ до порядка m включительно ограничены в области G, так что постоянные δ и γ не зависят от выбора основных функций φ, $\psi \in C_0^\infty(G)$.

Предположим, что область G_1 представляет собой параллелепипед

$$0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi \qquad (j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{5}$$

и что все коэффициенты оператора L и функции f периодичны по каждой из переменных x_j с периодом 2π. При этих условиях можно считать, что функции $\varphi(x)$ заданы на бикомпактном пространстве без границы, а именно на n-мерном торе G_1, определяемом формулой (5), и обобщенные функции, принадлежащие $C^\infty(G_1)'$, соответствуют пространству основных функций $\varphi \in C^\infty(G_1)$, состоящему из всех функций $\varphi(x) = \varphi(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \in C^\infty$, периодических по каждой из переменных x_j с периодом 2π. Заметим, что, поскольку G_1 — область без границы, нет необходимости накладывать дополнительные ограничения на носители основных функций $\varphi(x)$.

Условие $v \in W^q(G_1)$ в наших предположениях означает, что для коэффициентов Фурье v_k функции $v(x)$, входящих в разложение Фурье

$$v(x) \sim \sum_k v_k \exp(ik \cdot x)$$

$$\left(k = (k_1,\ \ldots,\ k_n), \qquad x = (x_1,\ \ldots,\ x_n) \quad \text{и} \quad k \cdot x = \sum_{j=1}^n k_j x_j\right), \tag{6}$$

выполняется условие

$$\sum_k |v_k|^2 (1 + |k|^2)^q < \infty \qquad \left(|k|^2 = \sum_{j=1}^n k_j^2\right). \tag{7}$$

В самом деле, интегрируя по частям, мы легко обнаруживаем, что коэффициенты Фурье обобщенной производной $D^s v$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$(D^s v(x),\ \exp(ik \cdot x))_0 = (-1)^{|s|}(v(x),\ D^s \exp(ik \cdot x))_0 =$$
$$= (-1)^{|s|} \prod_{j=1}^n k_j^{s_j} v_k, \quad \text{где} \quad s = (s_1,\ s_2,\ \ldots,\ s_n).$$

Применяя теперь равенство Парсеваля к коэффициентам Фурье функции $D^q v \in L^2(G_1)$, мы получаем соотношение (7).

Для дальнейшего удобно ввести пространства $W^q(G_1)$ с любыми целыми показателями q, считая, что последовательность $\{w_k;\ k = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)\}$ комплексных чисел w_k, обладающая свойством

$w_k = \overline{w}_{-k}$, принадлежит $W^q(G_1)$, если для нее выполняется требование (7). В таком пространстве $W^q(G_1)$ можно ввести норму $\| \{w_k\} \|_q = \left(\sum_k |w_k|^2 (1 + |k|^2)^q \right)^{1/2}$. Если применить равенство Парсеваля к полной ортонормированной системе $\{(2\pi)^{-n/2} \exp(ik \cdot x)\}$ пространства $L^2(G_1)$, то легко обнаружить, что при $q \geqslant 0$ норма $\| v \|_q = \left(\sum_{|s| \leqslant q} \int_{G_1} |D^s v(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}$ эквивалентна норме $\| \{v_k\} \|_q$, где $v(x) \sim \sum_k v_k \exp(ik \cdot x)$.

Из приведенного доказательства неравенства (7) видно, что если $f \in W^p(G_1)$, то $D^s f \in W^{p-|s|}(G_1)$ и $\varphi f \in W^p(G_1)$ для функций $\varphi \in C_0^\infty(G_1)$. Следовательно,

$$\text{если } f \in W^p(G_1), \text{ то для любого дифференциального оператора } N \text{ порядка } q \text{ с коэффициентами из } C_0^\infty(G_1) \text{ мы имеем } Nf \in W^{p-|q|}(G_1). \tag{8}$$

Для того чтобы доказать теорему в рассматриваемом сейчас случае периодических функций, мы сначала покажем, что можно, не ограничивая общности, считать обобщенное решение $u \in L^2(G_1) = W^0(G_1)$ уравнения (2) принадлежащим $W^m(G_1)$. Это можно обосновать следующим образом. Положим

$$u(x) \sim \sum_k u_k \exp(ik \cdot x), \qquad v(x) \sim \sum_k u_k (1 + |k^2|)^{-m} \exp(ik \cdot x),$$

где $u(x)$ — рассматриваемое решение. Тогда, как нетрудно заметить, $v(x) \in W^{2m}(G_1)$ и v представляет собой обобщенное решение уравнения $(I - \Delta)^m v = u$, где Δ — оператор Лапласа $\sum_{j=1}^n \partial^2 / \partial x_j^2$. Поэтому функция $v(x)$ оказывается обобщенным решением сильно эллиптического уравнения порядка $4m$:

$$L(I - \Delta)^m v = f. \tag{2'}$$

Если мы покажем, что предположения $u \in W^m$, $Lu = f$, где L — оператор m-го порядка, влекут за собой условие $u \in W^{2m+p}$, то обобщенное решение $v \in W^{2m}(G_1)$ уравнения порядка $4m$ на самом деле будет принадлежать $W^{4m+p}(G_1)$. Тогда из условия (8) будет следовать, что $u = (I - \Delta)^m v$ принадлежит $W^{4m+p-2m}(G_1) = W^{p+2m}(G_1)$. Таким образом, допущение $u \in W^m(G_1)$, где u — рассматриваемое обобщенное решение уравнения (2), не ограничивает общности (здесь число m равно половине порядка $2m$ оператора L). Итак, будем считать, что $u \in W^m(G_1)$.

Неравенство Гординга (4) выполняется для операторов L и $(I-\Delta)^m$, поэтому мы можем применить теорему Лакса — Мильграма (гл. III, § 7), а именно билинейные формы, определенные на $C^\infty(G_1)$:

$$(\varphi, \psi)' = (\varphi, L^*\psi)_0 \quad \text{и} \quad (\varphi, \psi)'' = (\varphi, (I-\Delta)^m \psi)_0, \tag{9}$$

можно продолжить до непрерывных билинейных форм, определенных на $W^m(G_1)$, таким образом, чтобы для любых $\varphi, \psi \in W^m(G_1)$ выполнялось условие

$$(T'\varphi, \psi)' = (\varphi, \psi)_m, \qquad (T''\varphi, \psi)'' = (\varphi, \psi)_m,$$

где T' и T'' — взаимно непрерывные взаимно однозначные линейные отображения пространства $W^m(G_1)$ на себя. Но тогда $T_m = T''(T')^{-1}$ — это взаимно непрерывное взаимно однозначное линейное отображение $W^m(G_1)$ на себя, такое, что

$$(\varphi, \psi)' = (T_m\varphi, \psi)'' \quad \text{для всех} \quad \varphi, \psi \in W^m(G_1). \tag{10}$$

Можно показать, что

для любого $j \geqslant 1$ оператор T_m отображает $W^{m+j}(G_1)$ на себя взаимно однозначно и взаимно непрерывно. (11)

В самом деле,

$$\left(\varphi, L^*(I-\Delta)^j\psi\right)_0 = \left(T_m\varphi, (I-\Delta)^{m+j}\psi\right)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi, \psi \in C^\infty(G_1).$$

С другой стороны, если применить теорему Лакса — Мильграма к сильно эллиптическим операторам $(I-\Delta)^j L$ и $(I-\Delta)^{m+j}$, то можно установить, что существует взаимно непрерывное взаимно однозначное линейное отображение T_{m+j} пространства $W^{m+j}(G_1)$ на себя, такое, что

$$(\varphi, L^*(I-\Delta)^j\psi)_0 = \left(T_{m+j}\varphi, (I-\Delta)^{m+j}\psi\right)_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi, \psi \in C^\infty(G_1).$$

Поэтому функция $w = (T_{m+j} - T_m)\varphi$ при любом выборе $\varphi \in C^\infty(G_1)$ является обобщенным решением уравнения $(I-\Delta)^{m+j} w = 0$. Но такое решение $w(x)$ должно тождественно равняться нулю. Действительно, коэффициенты Фурье w_k функции $w(x)$ удовлетворяют условию

$$0 = \left((I-\Delta)^{m+j} w(x), \exp(ik\cdot x)\right)_0 = \left(w(x), (I-\Delta)^{m+j}\exp(ik\cdot x)\right)_0 =$$
$$= (1+|k|^2)^{m+j}(w(x), \exp(ik\cdot x))_0 = (1+|k|^2)^{m+j} w_k,$$

и поэтому $w_k = 0$ для всех значений k. Таким образом, разность $(T_{m+j} - T_m)$ обращается в нуль на $C^\infty(G_1)$. Множество $C^\infty(G_1)$ плотно в $W^{m+j}(G_1) \subseteq W^m(G_1)$, так как множество тригонометрических полиномов $\sum_{|k|<\infty} w_k \exp(ik\cdot x)$ плотно в пространстве $W^{m+j}(G_1)$. Поэтому $T_{m+j} = T_m$ на пространстве $W^{m+j}(G_1)$.

Теперь мы можем доказать теорему о дифференцируемости для рассматриваемого периодического случая. Для $\psi \in C^\infty(G_1)$ выполняется условие

$$(f, \psi)_0 = (u, L^*\psi)_0 = (u, \psi)' = (T_m u, \psi)'' = (T_m u, (I - \Delta)^m \psi)_0.$$

Следовательно, для функций

$$T_m u \sim \sum_k c_k \exp(ik \cdot x), \qquad \psi(x) \sim \sum_k \psi_k \exp(ik \cdot x)$$

мы, применяя равенство Парсеваля, получаем

$$(T_m u, (I - \Delta)^m \psi)_0 = \sum_k c_k (1 + |k|^2)^m \bar{\psi}_k = \sum_k f_k \bar{\psi}_k.$$

Так как функция $\psi \in C^\infty(G_1)$ выбиралась произвольно, то $c_k (1 + |k|^2)^m = f_k$, и поэтому $T_m u \in W^{p+2m}(G_1)$, ибо $f \in W^p(G_1)$. Отсюда, согласно (11), $u \in W^{p+2m}(G_1)$. Следует отметить, что полученный нами вывод о том, что $u \in W^{p+2m}(G_1)$, верен даже тогда, когда $0 \geqslant p \geqslant (1 - m)$, т. е. когда $\{f_k\} \in W^p(G)$ со значением p из отрезка $0 \geqslant p \geqslant (1 - m)$. Действительно, $p + 2m \geqslant m + 1$, и поэтому можно использовать условие (11).

Теперь нужно провести заключительную часть доказательства, относящуюся к общему случаю непериодических функций. Следующие далее рассуждения принадлежат П. Лаксу [2].

Мы хотим сейчас доказать теорему о дифференцируемости в общем случае для некоторой окрестности произвольной точки x^0 области G. Пусть $\beta(x) \in C_0^\infty(G)$ — функция, равная тождественно единице в некоторой окрестности точки x^0. Обозначим βu через u'. Функция u' служит обобщенным решением уравнения

$$Lu' = \beta f + Nu, \tag{12}$$

где N — некоторый дифференциальный оператор порядка не выше $(2m - 1)$, коэффициенты которого, так же как и функция β, обращаются в нуль вне некоторой окрестности V точки x^0, причем оператор N нужно применять к u в обобщенном смысле. Обобщенную функцию $\beta f + Nu$ обозначим через f'.

Пусть параллелепипед G_1 содержит окрестность V; представим себе, что коэффициенты оператора L изменяются по прежнему закону внутри V, а вне окрестности V становятся периодическими, не теряя свойств дифференцируемости и эллиптичности. Такое видоизменение оператора L обозначим через L'. Тогда функция u' будет обобщенным решением уравнения

$$L'u' = f', \quad \text{где} \quad f' = \beta f + Nu, \tag{13}$$

в области G. К этому обобщенному решению u' можно применить результаты, полученные ранее для периодического случая. Мы можем допустить, что обобщенное решение u' принадлежит $W^m(G_1)$. Поскольку оператор N имеет порядок не выше $(2m-1)$ и его коэффициенты обращаются в нуль вне окрестности V, выражение $f' = \beta f + Nu$, согласно (8), должно удовлетворять условию

$$f' \in W^{p'}(G_1), \text{ где } p' = \min(p,\ m-(2m-1)) = \min(p,\ 1-m) \geqslant 1-m.$$

Поэтому для обобщенного решения u' уравнения (13) выполняется условие

$$u' \in W^{p''}(G_1), \qquad \text{где} \quad p'' = \min(p+2m,\ 1-m+2m) = \min(p+2m,\ m+1).$$

Следовательно, в некоторой окрестности V точки x^0 функция u имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка $p'' \geqslant (m+1)$. Значит, выражение $f' = \beta f + Nu$ обладает в окрестности точки x^0 интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка

$$p''' = \min(p,\ p'' - (2m-1)) \geqslant \min(p,\ 2-m).$$

Еще раз применяя полученный выше результат, мы найдем, что u' в некоторой окрестности точки x^0 имеет интегрируемые с квадратом обобщенные производные до порядка

$$p^{(4)} = \min(p+2m,\ 2-m+2m) = \min(p+2m,\ m+2).$$

Повторяя этот процесс, мы установим, что в некоторой окрестности точки x^0 функция u обладает интегрируемыми с квадратом обобщенными производными до порядка $p+2m$ включительно.

10. Теорема Мальгранжа — Эренпрейса

В вопросах, связанных с существованием решений, между обыкновенными дифференциальными уравнениями и уравнениями в частных производных имеется заметное различие. Классический результат Пеано утверждает, что для существования решения обыкновенного дифференциального уравнения $dy/dx = f(x, y)$ достаточно лишь одного условия — непрерывности функции f. Это утверждение распространяется также на уравнения высших порядков и на системы уравнений. Однако для уравнений в частных производных дело обстоит совсем не так. В 1957 г. Леви [1] построил уравнение

$$-i\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} - 2(x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_3),$$

которое вовсе не имеет решений, даже при $f \in C^\infty$, если только функция f не аналитическая. Пример Леви привел Хёрмандера [3] к развитию систематического метода построения линейных дифференциальных уравнений в частных производных, не имеющих решений. Важно, таким образом, выделить классы линейных уравнений в частных производных, для которых решения существуют.

Обозначим через $P(\xi)$ многочлен относительно переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, и пусть $P(D)$ — линейный дифференциальный оператор, который получается при замене переменных ξ_j операторами $D_j = i^{-1} \dfrac{\partial}{\partial x_j}$. Оператор $P(D)$ можно записать в виде

$$P(D) = \sum_{m \geqslant (\alpha) \geqslant 0} c_\alpha D_\alpha, \quad \text{где} \quad D_\alpha = \prod_{j=1}^{k} D_{\alpha_j}, \quad D_0 = I,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k), \quad \text{причем} \quad 1 \leqslant \alpha_j \leqslant n, \quad \text{и} \quad (\alpha) = k.$$

Определение 1. *Фундаментальным решением*, соответствующим оператору $P(D)$, называется обобщенная функция E в R^n, такая, что

$$P(D)E = \delta = T_\delta.$$

Важность понятия фундаментального решения заключается в том, что выражение

$$u = E * f, \quad \text{где} \quad f \in C_0^\infty(R^n),$$

удовлетворяет уравнению

$$P(D)u = f.$$

В самом деле, из правила дифференцирования (10), § 3, гл. VI следует, что $P(D)u = (P(D)E) * f = \delta * f = f$.

Пример. Пусть $P(D)$ — оператор Лапласа $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \dfrac{\partial^2}{\partial x_j^2}$ в пространстве R^n при $n \geqslant 3$. Тогда обобщенная функция

$$E = T_g, \quad \text{где} \quad g(x) = \frac{1}{(2-n) S_n} |x|^{2-n}$$

(S_n — площадь поверхности единичной сферы в R^n), является фундаментальным решением для Δ.

Доказательство. Переходя к сферическим координатам ($dx = |x|^{n-1} d|x| \cdot dS_n$), мы видим, что функция $g(x)$ локально интегрируема в пространстве R^n. Следовательно,

$$\Delta T_{|x|^{2-n}}(\varphi) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x| \geqslant \varepsilon} |x|^{2-n} \cdot \Delta\varphi \, dx, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(R^n).$$

Выберем два положительных числа ε и $R > \varepsilon$ так, чтобы носитель $\operatorname{supp}(\varphi)$ содержался внутри шара $|x| \leqslant R$. Рассмотрим область

$G: \varepsilon \leqslant |x| \leqslant R$ пространства R^n и применим формулу Грина; мы получим

$$\int_G (|x|^{2-n} \cdot \Delta\varphi - \Delta |x|^{2-n}\varphi)\, dx = \int_S \left(|x|^{2-n} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} - \frac{\partial |x|^{2-n}}{\partial\nu} \cdot \varphi\right) dS,$$

где S — граница области G, состоящая из двух частей: $|x| = \varepsilon$ и $|x| = R$, а ν — внешняя нормаль к поверхности S. Поскольку на поверхности $|x| = R$ функция φ обращается в нуль, мы, учитывая, что $\Delta |x|^{2-n} = 0$ при $x \neq 0$ и что $-\dfrac{\partial}{\partial\nu} = \dfrac{\partial}{\partial |x|}$ в точках внутренней граничной поверхности $|x| = \varepsilon$, получаем

$$\int_{R^n} |x|^{2-n} \Delta\varphi\, dx = -\int_{|x|=\varepsilon} \varepsilon^{2-n} \frac{\partial\varphi}{\partial |x|}\, dS + \int_{|x|=\varepsilon} (2-n)\varepsilon^{1-n} \varphi\, dS.$$

При $\varepsilon \downarrow 0$ выражение $\partial\varphi/\partial |x| = \sum_{j=1}^{n} (x_j/|x|) \cdot \partial\varphi/\partial x_j$ ограничено, и площадь поверхности $|x| = \varepsilon$ равна $S_n \varepsilon^{n-1}$. Поэтому первое слагаемое в правой части стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$. Используя непрерывность функции φ, мы с помощью аналогичных рассуждений устанавливаем, что второй член справа стремится при $\varepsilon \downarrow 0$ к величине $(2-n) S_n \cdot \varphi(0)$. Это показывает, что T_g является фундаментальным решением для оператора Лапласа Δ.

Существование фундаментального решения для всякого линейного дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами доказали независимо Мальгранж [1] и Эренпрейс [1] в 1954—1955 гг. В приведенном ниже изложении этих результатов мы следуем Хёрмандеру [4].

Определение 2. Положим

$$\tilde{P}(\xi) = \Big(\sum_{|\alpha| \geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2\Big)^{1/2},$$

$$\text{где} \quad P^{(\alpha)}(\xi) = D_\xi^\alpha P(\xi), \qquad D_\xi^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n}}{\partial\xi_1^{\alpha_1}\, \partial\xi_2^{\alpha_2} \ldots \partial\xi_n^{\alpha_n}}. \tag{1}$$

Мы будем говорить, что дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами $Q(D)$ *слабее*, чем $P(D)$, если

$$\tilde{Q}(\xi) \leqslant C\tilde{P}(\xi), \qquad \xi \in R^n, \tag{2}$$

где C — некоторая положительная постоянная.

Теорема 1. Если Ω — ограниченная область пространства R^n и $f \in L^2(\Omega)$, то в области Ω существует такое решение u уравнения $P(D)u = f$, что $Q(D)u \in L^2(\Omega)$ для всех операторов Q, которые слабее оператора P. Здесь подразумевается, что операторы $P(D)$ и $Q(D)$ применяются к функции u в обобщенном смысле.

Доказательство опирается на следующую теорему.

Теорема 2. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое фундаментальное решение E, соответствующее оператору $P(D)$, что

$$|(E*u)(0)| \leqslant C \sup_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \int_{R^n} (|\hat{u}(\xi+i\eta)|/\tilde{P}(\xi))\, d\xi, \quad u \in C_0^\infty(R^n), \tag{3}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от u, а $\hat{u}$ — преобразование Фурье — Лапласа функции u:

$$\hat{u}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} e^{-i\langle x, \zeta\rangle} u(x)\, dx, \qquad \zeta = \xi + i\eta.$$

Правая часть неравенства (3) при этом, согласно теореме Пэли — Винера (гл. VI, § 4), оказывается конечной.

Вывод теоремы 1 из теоремы 2. Заменим функцию u в формуле (3) выражением $Q(D)u*v$, где u и v принадлежат $C_0^\infty(R^n)$. Тогда из формулы (10) § 3 гл. VI получаем

$$|(Q(D)E*u*v)(0)| = |(E*Q(D)u*v)(0)| \leqslant CN(Q(D)u*v),$$

где

$$N(u) \equiv \sup_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \int_{R^n} (|\hat{u}(\xi+i\eta)|/\tilde{P}(\xi)) \cdot d\xi.$$

Преобразование Фурье — Лапласа выражения $Q(D)u*v$, согласно формулам (17) § 2 гл. VI и (15) § 3 гл. VI, равно $(2\pi)^{n/2} Q(\zeta)\hat{u}(\zeta)\hat{v}(\zeta)$. Так как по формуле Тейлора

$$Q(\xi+i\eta) = \sum_\alpha \frac{1}{(\alpha)!}(-\eta)^\alpha D_\alpha Q(\xi), \quad \text{где } (-\eta)^\alpha = \prod_j (-\eta_{\alpha_j}), \tag{4}$$

условие (2) приводит к неравенству

$$|Q(\xi+i\eta)|/\tilde{P}(\xi) \leqslant C' \quad \text{при } |\eta| \leqslant \varepsilon \quad \text{и} \quad \xi \in R^n,$$

где постоянная C' может зависеть от ε. Следовательно,

$$N(Q(D)u*v) \leqslant (2\pi)^{n/2} C' \sup_{|\eta| \leqslant \varepsilon} \int_{R^n} |\hat{u}(\xi+i\eta)\hat{v}(\xi+i\eta)|\, d\xi.$$

Обозначая через $\|\ \|$ норму в пространстве $L^2(R^n)$ и используя теорему Парсеваля для преобразований Фурье, мы получаем

$$\int_{R^n} |\hat{u}(\xi+i\eta)|^2 d\xi = \int_{R^n} |u(x)|^2 e^{2\langle x, \eta\rangle} dx \leqslant \|u(x)e^{\varepsilon|x|}\|^2 \text{ при } |\eta| \leqslant \varepsilon;$$

для функции $\hat{v}$ имеет место аналогичная оценка. Поэтому, в силу неравенства Шварца,

$$N(Q(D)u * v) \leqslant C'' \| u(x) e^{\varepsilon |x|} \| \cdot \| v(x) e^{\varepsilon |x|} \|$$

$$\text{для всех } u, v \in C_0^\infty(R^n),$$

где C'' — постоянная, которая может зависеть от ε.

В результате мы приходим к соотношению

$$\left| \int_{R^n} (Q(D)E * u)(x) v(-x)\, dx \right| \leqslant (CC'') \| ue^{\varepsilon |x|} \| \cdot \| ve^{\varepsilon |x|} \|$$

$$(u, v \in C_0^\infty(R^n)). \tag{5}$$

Условимся теперь через $L^2_\varepsilon(R^n)$ обозначать гильбертово пространство функций $w(x)$ с нормой

$$\left(\int_{R^n} |w(x)|^2 e^{\varepsilon |x|} dx \right)^{1/2} = \| w(x) e^{\varepsilon |x|} \|.$$

Множество $C_0^\infty(R^n)$ плотно в $L^2_\varepsilon(R^n)$, и, как легко показать, $L^2_{-\varepsilon}(R^n)$ представляет собой пространство, сопряженное к $L^2_\varepsilon(R^n)$, поэтому, разделив обе части неравенства (5) на $\| v(x) e^{\varepsilon |x|} \|$ и взяв верхнюю грань по всем функциям $v \in C_0^\infty(R^n)$, мы получаем неравенство

$$\| (Q(D)E * u)(x) e^{-\varepsilon |x|} \| \leqslant (CC'') \| u(x) e^{\varepsilon |x|} \|, \quad u \in C_0^\infty(R^n).$$

Это означает, что отображение

$$u \to Q(D)E * u \tag{6}$$

можно продолжить с $C_0^\infty(R^n)$ на $L^2_\varepsilon(R^n)$, так что это продолжение будет непрерывно и линейно отображать пространство $L^2_\varepsilon(R^n)$ в $L^2_{-\varepsilon}(R^n)$. Итак, для завершения доказательства теоремы 1 нам остается лишь положить $f_1 = f$ в области Ω, $f_1 = 0$ в области $R^n - \Omega$ и принять за решение u функцию $u = E * f_1$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются три леммы.

Лемма 1 (Мальгранж). Пусть $f(z)$ — функция, голоморфная в области $|z| \leqslant 1$ комплексной плоскости z, а $p(z)$ — полином, коэффициент которого при старшем члене равен A. Тогда

$$|Af(0)| \leqslant (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta}) p(e^{i\theta})|\, d\theta. \tag{7}$$

Доказательство. Обозначим через z_j нули полинома $p(z)$, лежащие внутри единичного круга $|z|<1$, и запишем $p(z)$ в виде

$$p(z)=q(z)\prod_j \frac{z-z_j}{\bar{z}_j z_j - 1}.$$

Тогда функция $q(z)$ регулярна в единичном круге и $|p(z)|=|q(z)|$ при $|z|=1$. Следовательно,

$$(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})\,p(e^{i\theta})|\,d\theta=(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})\,q(e^{i\theta})|\,d\theta \geqslant$$

$$\geqslant (2\pi)^{-1}\left|\int_{-\pi}^{\pi}f(e^{i\theta})\,q(e^{i\theta})\,d\theta\right|=|f(0)\,q(0)|.$$

Лемма 1 следует из того, что величина $|q(0)/A|$ равна произведению абсолютных величин нулей функции $p(z)$, не лежащих внутри единичного круга.

Лемма 2. Пусть выполняются условия леммы 1 и, кроме того, степень многочлена $p(z)$ не превосходит m, тогда

$$|f(0)\,p^{(k)}(0)|\leqslant\frac{m!}{(m-k)!}(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})\,p(e^{i\theta})|\,d\theta. \tag{8}$$

Доказательство. Мы можем, не ограничивая общности, предположить, что степень многочлена $p(z)$ равна m и

$$p(z)=\prod_{j=1}^{m}(z-z_j).$$

Применяя предыдущую лемму к многочлену $\prod_{j=1}^{k}(z-z_j)$ и голоморфной функции $f(z)\cdot\prod_{j=k+1}^{m}(z-z_j)$, мы получим

$$\left|f(0)\prod_{j=k+1}^{m}z_j\right|\leqslant(2\pi)^{-1}\int_{-\pi}^{\pi}|f(e^{i\theta})\,p(e^{i\theta})|\,d\theta.$$

Такое же неравенство имеет место, если в левой части взять произведение любых $(m-k)$ чисел, выбранных из m чисел z_j. Производная $p^{(k)}(0)$ состоит из $m!/(m-k)!$ слагаемых такого типа, умноженных на $(-1)^{m-k}$, откуда и вытекает неравенство (8).

Лемма 3. Пусть функция $F(\zeta)=F(\zeta_1, \zeta_2, \ldots; \zeta_n)$ голоморфна в области $|\zeta|=\left(\sum_{j=1}^{n}|\zeta_j|^2\right)^{1/2}<\infty$ и степень полинома

$P(\zeta)=P(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ не превосходит m. Пусть $\Phi(\zeta)=\Phi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — неотрицательная интегрируемая функция с бикомпактным носителем, зависящая лишь от $|\zeta_1|, |\zeta_2|, \ldots, |\zeta_n|$. Тогда

$$|F(0)D_\alpha P(0)| \int\limits_{|\zeta|<\infty} |\zeta|^{(\alpha)}\Phi(\zeta)\,d\zeta \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m!}{(m-(\alpha))!} \int\limits_{|\zeta|<\infty} |F(\zeta)P(\zeta)|\,\Phi(\zeta)\,d\zeta, \quad (9)$$

где $d\zeta$ — мера Лебега $d\xi_1\,d\eta_1 \ldots d\xi_n\,d\eta_n$ $(\zeta_k=\xi_k+i\eta_k)$.

Доказательство. Возьмем произвольную целую голоморфную функцию $f(z)$ и применим неравенство (8) к функциям $f(rz)$ и $p(rz)$, где $r>0$. Это приводит к неравенствам вида

$$|f(0)\,p^{(k)}(0)|\cdot r^k \leqslant \frac{m!}{(m-k)!}(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})\,p(re^{i\theta})|\,d\theta.$$

Пусть $\psi(r)$ — произвольная неотрицательная интегрируемая функция с бикомпактным носителем. Умножая обе части последнего неравенства на $2\pi r\psi(r)$ и интегрируя по r, мы получаем новое неравенство

$$|f(0)\,p^{(k)}(0)|\int |t|^k\,\psi(|t|)\,dt \leqslant \frac{m!}{(m-k)!}\int |f(t)\,p(t)|\,\psi(|t|)\,dt, \quad (10)$$

где $dt=r\,dr\,d\theta$ и интегрирование распространяется на всю комплексную t-плоскость. Теперь можно легко доказать лемму 3, применяя неравенство (10) последовательно к каждой из переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$.

Доказательство теоремы 2. Положим $P(D)u=v$, где $u\in C_0^\infty(R^n)$. Тогда $P(\zeta)\hat{u}(\zeta)=\hat{v}(\zeta)$. Применим лемму 3, взяв $F(\zeta)=\hat{u}(\xi+\zeta)$, многочлен $P(\xi+\zeta)$ (вместо $P(\zeta)$) и положив $|\Phi(\zeta)|=1$ при $|\zeta|\leqslant\varepsilon$ и $\Phi(\zeta)=0$ при $|\zeta|>\varepsilon$. Так как $\tilde{P}(\xi)\leqslant\sum\limits_\alpha |D^\alpha P(\xi)|$, мы выводим из (9) неравенство

$$|\hat{u}(\xi)\tilde{P}(\xi)|\leqslant C_1\int\limits_{|\zeta|\leqslant\varepsilon} |\hat{u}(\xi+\zeta)P(\xi+\zeta)|\,d\zeta = C_1\int\limits_{|\zeta|\leqslant\varepsilon} |\hat{v}(\xi+\zeta)|\,d\zeta.$$

Используя формулу обращения Фурье, мы получаем отсюда неравенство

$$|u(0)|\leqslant(2\pi)^{-n/2}\int|\hat{u}(\xi)|\,d\xi\leqslant C_1'\int\limits_{|\zeta|\leqslant\varepsilon}\left[\int|(\hat{v}(\xi+\zeta)|/\tilde{P}(\xi))\,d\xi\right]d\zeta\leqslant$$
$$\leqslant C_1'\int\left[\int\limits_{\xi'^2+\eta'^2\leqslant\varepsilon^2}(|\hat{v}(\xi+\xi'+i\eta')|/\tilde{P}(\xi))\,d\xi'\,d\eta'\right]d\xi.$$

С другой стороны,

$$\tilde{P}(\xi+\xi')/\tilde{P}(\xi)\leqslant C_2 \quad \text{при} \quad |\xi'|\leqslant\varepsilon,$$

так как

$$D^\alpha P(\xi+\xi')=\sum_\beta \frac{(\xi')^\beta}{(\beta)!} D^{\alpha+\beta}P(\xi),$$

поэтому величина $|D^\alpha P(\xi+\xi')|/\tilde{P}(\xi)$ ограничена, когда $|\xi'|\leqslant\varepsilon$. Значит,

$$|u(0)|\leqslant C_1'C_2\int\left[\int\limits_{\xi'^2+\eta'^2\leqslant\varepsilon^2}(|\hat{v}(\xi+\xi'+i\eta')|/\tilde{P}(\xi+\xi'))\,d\xi'\,d\eta'\right]d\xi\leqslant$$

$$\leqslant C_3\|v\|', \tag{11}$$

где

$$\|v\|'=\int\limits_{|\eta|\leqslant\varepsilon}\left[\int(|\hat{v}(\xi+i\eta)|/\tilde{P}(\xi))\,d\xi\right]d\eta \qquad \left(u\in C_0^\infty(R^n)\right)$$

и C_3 — постоянная, зависящая только от ε.

Заметим кстати, что из теоремы Пэли — Винера гл. VI, § 4, вытекает, что функция $\|v\|'$ ограничена. Рассмотрим теперь пространство $\tilde{C}_0^\infty(R^n)$— пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)$ по отношению к норме $\|v\|'$. Тогда по теореме Хана — Банаха о продолжении линейный функционал $L: v=P(D)u\to u(0)$ (где $u\in C_0^\infty(R^n)$) может быть продолжен до некоторого непрерывного линейного функционала, заданного на пространстве $\tilde{C}_0^\infty(R^n)$. Как и в случае пространства $L^1(R^n)$, мы заключаем, что существует ограниченная почти всюду по мере $(\tilde{P}(\xi))^{-1}\,d\xi\,d\eta$ бэровская функция $k(\xi+i\eta)$, такая, что продолжение линейного функционала L представляется в виде

$$L(v)=\int\limits_{|\eta|\leqslant\varepsilon}\left[\int(\hat{v}(\xi+i\eta)\,k(\xi+i\eta)/\tilde{P}(\xi))\,d\xi\right]d\eta. \tag{12}$$

Когда последовательность функций $v_h(x)\in C_0^\infty(R^n)$ стремится к нулю при $h\to\infty$ в топологии пространства $\mathfrak{D}(R^n)$, последовательность $v_h(x)\,e^{i\langle x,\eta\rangle}$ тоже стремится к нулю в топологии $\mathfrak{D}(R^n)$ равномерно относительно η при $|\eta|\leqslant\varepsilon$. Поэтому, как и в § 1 гл. VI, нетрудно показать, что при $|\eta|\leqslant\varepsilon$ выражение $\hat{v}_h(\xi+i\eta)$ как функция переменной ξ стремится к нулю в топологии пространства $\mathfrak{S}(R^n)$ равномерно относительно η. Поэтому в силу (12) функционал L определяет обобщенную функцию $T\in\mathfrak{D}(R^n)'$. Таким образом, по формуле (5) из § 3 гл. VI

$$L(v)=(T*\check{v})(0)=(\check{T}*v)(0). \tag{13}$$

Полагая $E=\check{T}$, мы получаем доказательство теоремы 2; при этом неравенство (3) следует из (11).

11. Дифференциальные операторы с переменными коэффициентами

Теорема существования, доказанная в предыдущем параграфе, может быть распространена и на некоторые линейные дифференциальные операторы вида

$$P(x, D) = \sum_{\alpha} a_{\alpha}(x) D_{\alpha}, \tag{1}$$

где коэффициенты $a_{\alpha}(x)$ непрерывны в ограниченной открытой области Ω пространства R^n.

Допустим, что оператор $P(x, D)$ удовлетворяет в области Ω условию

$$\sup_{x, y \in \Omega, \xi \in R^n} \tilde{P}(x, \xi)/\tilde{P}(y, \xi) < \infty, \tag{2}$$

где $\tilde{P}(x, \xi) = \left(\sum_{\alpha} |P^{(\alpha)}(x, \xi)|^2\right)^{1/2}$, а x рассматривается как параметр.

Примеры. Дифференциальный оператор $P(x, D) = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} D^s a_{s,t}(x) D^t$ с вещественными ограниченными принадлежащими C^{∞} коэффициентами $a_{s, t}(x) = a_{t, s}(x)$, заданными в области Ω, называется *сильно эллиптическим* в Ω (см. гл. VI, § 9), если существует такая положительная постоянная δ, что

$$\sum_{|s|, |t| = m} \xi^s a_{s, t}(x) \xi^t \geqslant \delta \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2\right)^m \quad \text{в области } \Omega. \tag{3}$$

В этом случае, как нетрудно видеть, оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условию (2). Допустим теперь, что оператор $P(x, D)$ сильно эллиптичен в открытой области Ω пространства R^{n-1}. Тогда оператор

$$\frac{\partial}{\partial x_n} - P(x, D), \tag{4}$$

рассматриваемый в топологическом произведении $\Omega \times \{x_n;\ 0 < x_n\}$, называется *параболическим оператором*. Нетрудно проверить, что оператор (4) удовлетворяет условию (2) в области $\Omega \times \{x_n;\ 0 < x_n\}$.

Теорема (Хёрмандер [5]). Допустим, что $P(x, D)$ удовлетворяет условию (2) в ограниченной открытой области Ω пространства R^n. Тогда для любой точки $x^0 \in \Omega$ существует открытая подобласть Ω_1 области Ω, такая, что $x^0 \in \Omega_1$ и уравнение $P(x, D) u = f$ при всякой функции $f \in L^2(\Omega_1)$ имеет обобщенное решение $u \in L^2(\Omega_1)$, для которого $Q(D) u \in L^2(\Omega_1)$, где $Q(D)$ — любой оператор, который слабее, чем $P(x, D)$, в каждой фиксированной точке $x \in \Omega_1$.

Доказательство. Введем обозначение $P(x^0, D) = P_0(D)$. Совокупность всех дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами, которые слабее $P_0(D)$, образует конечномерное линейное пространство, ибо степени многочленов $Q(\xi)$ для таких операторов $Q(D)$ не могут превосходить степени многочлена, соответствующего оператору $P_0(D)$. Поэтому существуют операторы $P_1(D), P_2(D), \ldots$ $\ldots, P_N(D)$, образующие базис этого пространства. Следовательно,

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D), \qquad b_j(x^0) = 0, \tag{5}$$

где коэффициенты $b_j(x)$ непрерывны в области Ω и определены единственным образом.

Как было установлено в предыдущем параграфе, существует ограниченный линейный оператор T, действующий из $L^2(\Omega_1)$ в $L^2(\Omega_1)$, такой, что

$$P_0(D) Tf = f \text{ для всех } f \in L^2(\Omega_1), \tag{6}$$

и все операторы $P_j(D)T$ ограничены как операторы, отображающие пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя. Здесь Ω_1 может быть любой открытой подобластью области Ω. При этом мы должны принять за Tf сужение $E * f_1$ на область Ω_1, где $f_1 = f$ в Ω_1 и $f_1 = 0$ в $R^n - \Omega_1$.

Уравнение $P(x, D) u = f$ эквивалентно уравнению

$$P_0(D) u + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) u = f. \tag{7}$$

Мы будем искать его решение в виде $u = Tv$. Подставляя это выражение в (7) и используя (6), получаем

$$v + \sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) Tv = f. \tag{8}$$

Обозначим сумму норм ограниченных линейных операторов $P_j(D)T$, отображающих пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя, через C. Поскольку функции $b_j(x)$ непрерывны и $b_j(x^0) = 0$, мы можем выбрать область $\Omega_1 \ni x^0$ столь малой, что

$$C |b_j(x)| < \frac{1}{N} \text{ для всех } x \in \Omega_1 \quad (j = 1, 2, \ldots, N).$$

Можно также считать, что написанное выше неравенство выполняется для всех точек x, принадлежащих бикомпактному замыканию области Ω_1. Тогда норма оператора $\sum_{j=1}^{N} b_j(x) P_j(D) T$ меньше 1, и поэтому уравнение (8) можно решить с помощью ряда Неймана (теорема 2, гл. II, § 1)

$$v = \left(I + \sum_{j=1}^{N} b_j P_j(D) T \right)^{-1} f = Af,$$

где A — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $L^2(\Omega_1)$ в себя. Следовательно, функция $u = TAf$ и будет искомым решением уравнения $P(x, D)u = f$.

§ 12. Гипоэллиптические операторы. Теорема Хёрмандера

В гл. II, § 7, мы определили понятие гипоэллиптичности оператора и доказали теорему Хёрмандера, утверждающую, что если оператор $P(D)$ — гипоэллиптический, то для любой сколь угодно большой положительной постоянной C_1 найдется такая положительная постоянная C_2, что все решения $\zeta = \xi + i\eta$ алгебраического уравнения $P(\zeta) = 0$ обладают таким свойством:

$$\text{из неравенства } |\eta| < C_1 \text{ вытекает неравенство } |\xi| < C_2. \tag{1}$$

Для доказательства обратного предложения, а именно что из условия (1) следует гипоэллиптичность оператора $P(D)$, нам потребуется следующая лемма.

Лемма (Хёрмандер [1]). Если выполнено условие (1), то

$$\sum_{|\alpha|>0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \Big/ \sum_{|\alpha|\geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2 \to 0 \quad \text{при } |\xi| \to \infty, \ \xi \in R^n. \tag{2}$$

Доказательство. Сначала мы покажем, что для всякого вещественного вектора $\Theta \in R^n$

$$P(\xi + \Theta)/P(\xi) \to 1 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty, \ \xi \in R^n. \tag{3}$$

Без ограничения общности можно допустить, что система координат в пространстве R^n выбрана так, что $\Theta = (1, 0, 0, \ldots, 0)$. Тогда по условию (1)

$$P(\xi + i\eta) \neq 0 \quad \text{при} \quad |\eta| < C_1 \text{ и } |\xi| > C_2.$$

Следовательно, если $|\xi| \geqslant C_1 + C_2$ и $P(\zeta') = 0$, то $|\xi - \zeta'| \geqslant C_1$. Действительно, полагая $\zeta' = \xi' + i\eta'$, мы находим, что выполняется по крайней мере одно из двух неравенств $|\eta'| \geqslant C_1$ или $|\xi'| < C_2$, так что $|\xi - \xi'| \geqslant C_1$. Возьмем теперь произвольные фиксированные значения переменных $\xi_2, \ldots, \xi_n$ и обозначим через t_k такие числа, что векторы $(t_k, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ представляют собой нули многочлена P. Тогда

$$P(\xi) = C \prod_{k=1}^{m} (\xi_1 - t_k), \quad C \neq 0.$$

Поэтому если $|\xi| \geqslant C_1 + C_2$, то $|t_k - \xi_1| \geqslant C_1$ и, следовательно, выражение

$$\frac{P(\xi + \Theta)}{P(\xi)} = \prod_{k=1}^{m} \frac{\xi_1 + 1 - t_k}{\xi_1 - t_k} = \prod_{k=1}^{m} \left(1 + \frac{1}{\xi_1 - t_k}\right)$$

удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{P(\xi+\Theta)}{P(\xi)}-1\right|\leqslant mC_1^{-1}\left(1+C_1^{-1}\right)^{m-1} \quad \text{при } |\xi|\geqslant C_1+C_2.$$

При достаточно больших значениях C_2 мы можем взять сколь угодно большие значения C_1, откуда и вытекает (3).

По формуле Тейлора

$$P(\xi+\eta)=\sum_{(\alpha)}\frac{1}{(\alpha)!}P^{(\alpha)}(\xi)\,\eta^{\alpha},\quad P^{(\alpha)}(\xi)=(i)^{(\alpha)}D_\alpha P(\xi),\quad D_\alpha=\prod_{j=1}^{(\alpha)}D_{\alpha_j},$$

и поэтому

$$\sum_{i=1}^{k}t_iP(\xi+\eta^{(i)})=\sum_{(\alpha)}\frac{1}{(\alpha)!}P^{(\alpha)}(\xi)\sum_{i=1}^{k}t_i(\eta^{(i)})^{\alpha}, \tag{4}$$

где $\eta^{(i)}$ — произвольные вещественные векторы и t_i — любые комплексные числа. Величины k, t_i и $\eta^{(i)}$ можно подобрать так, чтобы коэффициенты $\sum\limits_{i=1}^{k}t_i(\eta^{(i)})^{\alpha}$ $((\alpha)\leqslant m)$ принимали любые заданные значения и зависели от α симметрично. В самом деле, в противном случае должны были бы существовать постоянные C_α $((\alpha)\leqslant m)$, симметричные как функции α и не все равные нулю, такие, что $\sum\limits_{(\alpha)}C_\alpha\eta^\alpha=0$ при любых η, что невозможно. Итак,

$$P^{(\alpha)}(\xi)=\sum_{i=1}^{k}t_iP(\xi+\eta^{(i)}) \text{ при вещественных значениях } \eta^{(i)}.$$

Но при $(\alpha)\neq 0$ главные члены в правой части должны уничтожиться, и поэтому $\sum\limits_{i=1}^{k}t_i=0$. Отсюда, учитывая (3), мы получаем условие (2).

Следствие. Допустим, что полиномы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ удовлетворяют условию (2). Тогда многочлен $P(\xi)=P_1(\xi)P_2(\xi)$ тоже удовлетворяет (2). Если, кроме того, операторы $Q_j(D)$ слабее, чем $P_j(D)$ $(j=1,\ 2)$, то оператор $Q_1(D)Q_2(D)$ слабее, чем $P(D)$.

Доказательство. Применяя формулу Лейбница дифференцирования произведения функций, мы видим, что $P^{(\alpha)}(\xi)$ представляет собой линейную комбинацию произведений производных многочленов $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ порядков, в сумме не превосходящих (α). Следовательно, условие (2) выполняется и для многочлена $P(\xi)$. Второе утверждение этого следствия доказывается аналогичным образом.

Теперь мы можем доказать теорему Хёрмандера.

Теорема (Хёрмандер [1]). Для того чтобы оператор $P(D)$ был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (2).

Доказательство. Необходимость следует из результатов гл. II, § 7 и только что доказанной леммы. Перейдем к доказательству достаточности.

Обозначим через Ω произвольную открытую подобласть пространства R^n. Мы будем говорить, что обобщенная функция $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ принадлежит классу $H^k_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, если при любой функции $\varphi_0 \in C_0^\infty(\Omega)$ преобразование Фурье $\widehat{u_0}$ функции $u_0 = \varphi_0 u$ удовлетворяет (см. гл. VI, § 2) условию

$$\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^k |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi < \infty, \quad \text{т. е.} \quad u_0 = \varphi_0 u \in W^{k,\,2}(R^n). \tag{5}$$

По лемме Соболева (гл. VI, § 7) достаточность условия этой теоремы следует из такого утверждения:

$$\begin{gathered}\text{если полином } P(\xi) \text{ удовлетворяет условию (2) и обоб-}\\ \text{щенная функция } u \in \mathfrak{D}(\Omega)' \text{ такова, что } P(D)\,u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega),\\ \text{где } s \text{ — некоторое положительное число, то функция } u\\ \text{принадлежит } H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega).\end{gathered} \tag{6}$$

В самом деле, если утверждение (6) справедливо и $P(D)\,u \in C^\infty$ в области Ω, то $P(D)\,u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ при любом положительном s — это вытекает из формулы Лейбница дифференцирования произведения функций.

Доказательство утверждения (6) опирается на две леммы.

Лемма 1. Если $f \in W^{k,\,2}(R^n)$ и $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ $\left(k \gtreqless 0\right)$, то $\psi f \in W^{k,\,2}(R^n)$.

Лемма 2. Пусть многочлен $P(\xi)$ удовлетворяет условию (2). Тогда можно указать такую положительную постоянную μ, что $|P^{(\alpha)}(\xi)\,\xi^\mu|/|P(\xi)| \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ $(\xi \in R^n)$ для любого $\alpha \neq 0$.

Доказательство леммы 1 будет дано ниже, а лемму 2 мы здесь доказывать не будем (читатель может обратиться к книгам Хёрмандера [6] и Фридмана [1]).

Закончим теперь доказательство теоремы. Выберем из Ω две произвольные открытые подобласти Ω_1 и Ω_0, такие, что их замыкания Ω_1^a и Ω_0^a бикомпактны и $\Omega_1^a \subsetneqq \Omega_0$, $\Omega_0^a \subseteqq \Omega$. По теореме Шварца (гл. III, § 11) всякая обобщенная функция $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$, если ее рассматривать как обобщенную функцию, принадлежащую пространству $\mathfrak{D}(\Omega_0)'$, представляет собой обобщенную производную вида $D^t v$ некоторой функции $v \in L^2(\Omega_0)$. Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\Omega_0)$ — такая функция, что $\varphi(x) = 1$ в области Ω_1. Тогда $u = u_0 = D^t \varphi v$ как обобщенная функция принадлежит $\mathfrak{D}(\Omega_1)'$. Поскольку $\varphi v \in L^2(R^n)$, существует такое целое k, возможно отрицательное, что

$$P^{(\alpha)}(D)\,u_0 = P^{(\alpha)}(D)\,D^t\varphi v \in W^{k,2}(R^n) \quad \text{для всех} \quad \alpha. \tag{7}$$

Применяя лемму 1 и обобщенную формулу Лейбница (см. гл. I, § 8), мы получаем

$$P(D)\,\varphi_1 u_0 = \varphi_1 P(D)\,u_0 + \sum_{(\alpha)>0} \frac{1}{(\alpha)!} D_\alpha \varphi_1 \cdot P^{(\alpha)}(D)\,u_0. \tag{8}$$

Отсюда, так как $P(D)\,u_0 \in H^s_{\text{loc}}(\Omega)$, мы заключаем, что для любой функции $\varphi_1 \in C_0^\infty(\Omega_1)$

$$P(D)\,\varphi_1 u_0 \in W^{k_1,2}(R^n), \quad \text{где} \quad k_1 = \min(s,\ k). \tag{9}$$

Следовательно, преобразование Фурье $\hat{u}_1(\xi)$ функции $u_1(x) = \varphi_1(x)\,u_0(x)$ удовлетворяет неравенству

$$\int_{R^n} |P(\xi)\,\hat{u}_1(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{k_1}\,d\xi < \infty, \tag{10}$$

откуда по лемме 2

$$\int_{R^n} \left|P^{(\alpha)}(\xi)\,\hat{u}_1(\xi)\right|^2 \left(1+|\xi|^2\right)^{k_1+\mu} d\xi < \infty,$$

$$\text{т. е.} \quad P^{(\alpha)}(D)\,u_1 \in W^{k_1+\mu,2}(R^n) \quad \text{при всех} \quad \alpha \neq 0. \tag{11}$$

Пусть Ω_2 — открытая подобласть области Ω_1, такая, что замыкание Ω_2^a бикомпактно и содержится в Ω_1. Тогда для всякой функции $\varphi_2 \in C_0^\infty(\Omega_2)$ мы можем с помощью (8) и (11) доказать, что

$$P(D)\,\varphi_2 u_1 \in W^{k_2,2}(R^n) \quad \text{при} \quad k_2 = \min(s,\ k_1+\mu),$$

и поэтому

$$P^{(\alpha)}(D)\,\varphi_2 u_1 \in W^{k_2+\mu,2}(R^n) \quad \text{при всех} \quad \alpha \neq 0.$$

Повторяя приведенные рассуждения конечное число раз, мы приходим к выводу, что для всякой открытой подобласти Ω' из Ω, замыкание которой бикомпактно и содержится в Ω, справедливо включение

$$P^{(\alpha)}(D)\,\varphi u \in W^{s,2}(R^n) \quad \text{для любых} \quad \alpha \neq 0 \ \text{и} \ \varphi \in C_0^\infty(\Omega').$$

Если теперь выбрать такое α, чтобы $P^{(\alpha)}(\xi) = \text{constant} \neq 0$, то $\varphi u \in W^{s,2}(R^n)$, что и требовалось доказать.

Доказательство леммы 1. Преобразование Фурье функции ψf имеет вид (теорема 6, гл. VI, § 3)

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{R^n} \hat{\psi}(\eta)\,\hat{f}(\xi-\eta)\,d\eta;$$

таким образом, мы должны доказать, что

$$\int_{R^n} (1+|\eta|^2)^s \left| \int_{R^n} \hat{\psi}(\eta) \hat{f}(\xi-\eta)\, d\eta \right|^2 d\xi < \infty$$

при любом значении $s > 0$. Используя полученные ранее соотношения и неравенство Шварца, мы можем мажорировать этот интеграл выражением

$$\int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s \left[\int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)|\, d\eta \cdot \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)| \cdot |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\eta \right] d\xi =$$

$$= \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)|\, d\eta \left[\int_{R^n} \int_{R^n} (1+|\xi|^2)^s |\hat{\psi}(\eta)| \cdot |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\xi\, d\eta \right]. \tag{12}$$

Так как

$$\frac{1+|\xi|^2}{1+|\xi-\eta|^2} \leqslant 4(1+|\eta|^2), \quad 4(1+|\xi|^2) \geqslant \frac{1+|\xi-\eta|^2}{1+|\eta|^2},$$

то

$$(1+|\xi|^2)^s \leqslant 4^{|s|}(1+|\eta|^2)^{|s|}(1+|\xi-\eta|^2)^s. \tag{13}$$

С помощью (13) правая часть (12) оценивается сверху: она не превосходит величины $\int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)|\, d\eta$, умноженной на

$$4^{|s|} \int_{R^n} |\hat{\psi}(\eta)|(1+|\eta|^2)^{|s|} d\eta \cdot \left(\int_{R^n} (1+|\xi-\eta|^2)^s |\hat{f}(\xi-\eta)|^2 d\xi \right).$$

Этот последний интеграл сходится, так как $f \in W^{s,2}(R^n)$ и $\hat{\psi}(\eta) \in \mathfrak{S}(R^n)$. Лемма 1, таким образом, доказана, и это завершает доказательство теоремы.

Замечания о некоторых дальнейших исследованиях

1. Линейный дифференциальный оператор $P(x, D)$, коэффициенты которого принадлежат $C^\infty(\Omega)$, называется *формально гипоэллиптическим* в $\Omega \subseteq R^n$, если он удовлетворяет следующим двум условиям: (1) оператор $P(x^0, D)$ гипоэллиптический при каждом фиксированном $x^0 \in \Omega$; (2) $P(x^0, \xi) = O(P(x', \xi))$ при $|\xi| \to \infty$ $(\xi \in R^n)$ для любых фиксированных x^0, $x' \in \Omega$. Хёрмандер [5] и Мальгранж [2] доказали, что для таких операторов всякое обобщенное решение $u \in \mathfrak{D}(\Omega)'$ уравнения $P(x, D)u = f$ будет принадлежать C^∞ после поправки на множестве меры нуль, лежащем в открытом подмножестве множества Ω, где $f \in C^\infty$. Доказательство, приведенное выше для операторов с постоянными коэффициентами, можно

изменить так, что оно будет применимо к операторам такого типа; см., например, Петре [1].

2. И. Г. Петровский [1] показал, что все обобщенные решения $u \in \mathfrak{D}(R^n)'$ уравнения $P(D)u=0$ являются аналитическими функциями в пространстве R^n тогда и только тогда, когда однородная часть $P_m(\xi)$ многочлена $P(\xi)$, состоящая из членов высшей степени m, не обращается в нуль при $\xi \in R^n$. Если это условие выполняется, говорят, что оператор $P(D)$ является (*аналитически*) *эллиптическим*. Показано также, что в этом случае показатель m должен быть четным, а оператор $P(D)$ — гипоэллиптическим. Отметим, что гипоэллиптичность таких операторов $P(D)$ может быть также установлена с помощью теоремы Фридрихса (гл. VI, § 9). В самом деле, если $P_m(\xi)$ не обращается в нуль, то с помощью преобразования Фурье легко убедиться в том, что один из операторов $P(D)$ или $-P(D)$ сильно эллиптичен. Доказательство теоремы Петровского см., например, в работах Хёрмандера [6], Трева [1], Морри — Ниренберга [1].

ГЛАВА VII

Сопряженные операторы

1. *Сопряженные операторы в локально выпуклых линейных топологических пространствах*

Обобщение понятия *транспонированной матрицы* приводит к понятию *сопряженного оператора.*

Теорема 1. Пусть X, Y — локально выпуклые линейные топологические пространства, и пусть X'_s, Y'_s — их сильные сопряженные. Пусть T — линейный оператор, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в Y. Рассмотрим точки $\{x', y'\}$ произведения $X'_s \times Y'_s$, удовлетворяющие условию

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, x' \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in D(T). \tag{1}$$

Элементы x' однозначно определяются элементами y' тогда и только тогда, когда область $D(T)$ плотна в пространстве X.

Доказательство. В силу линейности задачи мы должны рассмотреть следующее условие:

$$\text{если } \langle x, x' \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(T), \text{ то } x' = 0.$$

Таким образом, достаточность вытекает из непрерывности линейного функционала x'. Допустим, что $D(T)^a \neq X$. Тогда по теореме Хана — Банаха найдется такой элемент $x'_0 \neq 0$, что $\langle x, x'_0 \rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$, а это неверно. Полученное противоречие доказывает необходимость приведенного условия.

Определение 1. Из доказанной теоремы следует, что соотношение (1) определяет некоторый линейный оператор $T' : T'y' = x'$ тогда и только тогда, когда $D(T)^a = X$. Оператор T' в этом случае называется *сопряженным* к T. Его область определения $D(T')$ представляет собой совокупность всех $y' \in Y'_s$, для которых существуют элементы $x' \in X'_s$, удовлетворяющие условию (1) и $T'y' = x'$. Таким образом, T' — линейный оператор, действующий из области $D(T') \subseteq Y'_s$ в пространство X'_s, такой, что

$$\langle Tx, y' \rangle = \langle x, T'y' \rangle \quad \text{для всех} \quad x \in D(T) \quad \text{и} \quad y' \in D(T'). \tag{2}$$

Теорема 2. Если $D(T) = X$ и оператор T непрерывен, то оператор T' линейно и непрерывно отображает пространство Y'_s в X'_s.

Доказательство. Выражение $\langle Tx, y' \rangle$ при любом $y' \in Y'_s$ представляет собой непрерывный линейный функционал, заданный для

$x \in X$, поэтому найдется такой элемент $x' \in X'_s$, что $T'y' = x'$. Пусть B — некоторое ограниченное множество в X. Тогда, поскольку оператор T непрерывен, образ $T \cdot B = \{Tx;\ x \in B\}$ представляет собой ограниченное множество в Y. Поэтому, в силу определяющего соотношения $\langle Tx,\ y' \rangle = \langle x,\ x' \rangle$, если элемент y' стремится к нулю в топологии ограниченной сходимости пространства Y' (см. гл. IV, § 7), то соответствующий элемент x' тоже стремится к $0 \in X'$ в топологии ограниченной сходимости пространства X'. Это означает, что линейный оператор T', действующий из Y'_s в X'_s, непрерывен.

Пример 1. Пусть $X = Y$ есть n-мерное евклидово пространство с (l^2)-нормой. Для произвольного непрерывного линейного оператора $T \in L(X,\ X)$ положим

$$Tx = y, \quad \text{где} \quad x = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n) \quad \text{и} \quad y = (y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n).$$

Тогда $y_i = \sum_{j=1}^{n} t_{ij} x_j$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, и поэтому для элементов $z = (z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n) \in X'$

$$\langle Tx,\ z \rangle = \langle y,\ z \rangle = \sum_j y_j z_j = \sum_i \left(\sum_j t_{ij} x_j \right) z_i = \sum_j x_j \left(\sum_i t_{ij} z_i \right).$$

Таким образом, $T'z = w$, где $w_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} z_i$ $(j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Это показывает, что матрицей оператора T' служит *транспонированная матрица* оператора T.

Пример 2. Пусть $X = Y$ — вещественное гильбертово пространство (l^2). Определим операторы $T_n \in L(X,\ X)$:

$$T_n(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_k,\ \ldots) = (x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \ldots).$$

Тогда из равенства

$$\langle T_n(x_1,\ x_2,\ \ldots),\ (z_1,\ z_2,\ \ldots) \rangle = x_n z_1 + x_{n+1} z_2 + x_{n+2} z_3 + \ldots$$

мы находим, что

$$T'_n(z_1,\ z_2,\ \ldots) = (\overbrace{0,\ 0,\ \ldots,\ 0}^{n-1},\ z_1,\ z_2,\ \ldots).$$

Таким образом, $\|T_n(x_1,\ x_2,\ \ldots)\| = \left(\sum_{m=n}^{\infty} x_m^2 \right)^{1/2} \to 0$ при $n \to \infty$ и $\|T'_n(z_1,\ z_2,\ \ldots)\| = \|(z_1,\ z_2,\ \ldots)\|$. Отсюда вытекает

Предложение 1. Отображение $T \to T'$ пространства $L(X,\ Y)$ в пространство $L(Y'_s,\ X'_s)$ в общем случае может и не быть непрерывным в топологии простой сходимости пространства операторов, т. е. из условия $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$ может и не следовать, что $\lim\limits_{n\to\infty} T'_n y' = T'y'$ для всех $y' \in Y'$ в топологии сильного сопряженного пространства X'_s.

Теорема 2′. Пусть T — ограниченный линейный оператор, отображающий нормированное линейное пространство X в нормированное линейное пространство Y. Тогда сопряженный оператор T' представляет собой ограниченный линейный оператор, действующий из Y'_s в X'_s, и

$$\|T\| = \|T'\|. \tag{3}$$

Доказательство. Из определяющего равенства $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, x'\rangle$ мы выводим

$$\|T'y'\| = \|x'\| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle x, x'\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\langle Tx, y'\rangle| \leqslant$$
$$\leqslant \|y'\|\cdot \sup_{\|x\|\leqslant 1} \|Tx\| \leqslant \|y'\|\cdot\|T\|;$$

это означает, что $\|T'\| \leqslant \|T\|$. Обратное неравенство доказывается следующим образом. Для всякого элемента $x_0 \in X$ найдется функционал $f_0 \in Y'$, такой, что $\|f_0\| = 1$ и $f_0(Tx_0) = \langle Tx_0, f_0\rangle = \|Tx_0\|$. Поэтому элемент $f'_0 = T'f_0$ удовлетворяет равенству $\langle x_0, f'_0\rangle = \|Tx_0\|$ и, следовательно,

$$\|Tx_0\| = \langle x_0, T'f_0\rangle \leqslant \|T'\|\cdot\|f_0\|\cdot\|x_0\| = \|T'\|\cdot\|x_0\|,$$
$$\text{т. е. } \|T\| \leqslant \|T'\|.$$

Теорема 3. (1°) Если операторы T и S принадлежат $L(X, Y)$, то $(\alpha T + \beta S)' = (\alpha T' + \beta S')$. (2°) Рассмотрим линейные операторы T, S, области определения $D(T)$, $D(S)$ и области значений $R(T)$ и $R(S)$ которых принадлежат X. Тогда если $S \in L(X, X)$ и $D(T)^a = X$, то

$$(ST)' = T'S'. \tag{4}$$

Если, кроме того, $D(TS)^a = X$, то

$$(TS)' \supseteq S'T', \text{ т. е. } (TS)' \text{ — расширение оператора } S'T'. \tag{5}$$

Доказательство. Утверждение (1°) очевидно. Докажем (2°). Если $y \in D((ST)')$, то для любого $x \in D(T) = D(ST)$ выполняется равенство $\langle Tx, S'y\rangle = \langle STx, y\rangle = \langle x, (ST)'y\rangle$. Это показывает, что $S'y \in D(T')$ и $T'S'y = (ST)'y$, т. е. $(ST)' \subseteq T'S'$. Обратно, пусть $y \in D(T'S')$, т. е. $S'y \in D(T')$. Тогда для любого $x \in D(T) = D(ST)$ справедливо равенство $\langle STx, y\rangle = \langle Tx, S'y\rangle = \langle x, T'S'y\rangle$. Последнее означает, что $y \in D((ST)')$ и $(ST)'y = T'S'y$, поэтому $T'S' \subseteq (ST)'$. Таким образом, формула (4) доказана.

Чтобы доказать включение (5), возьмем $y \in D(S'T') = D(T')$. Тогда $\langle TSx, y\rangle = \langle Sx, T'y\rangle = \langle x, S'T'y\rangle$ для всех $x \in D(TS)$. Отсюда $y \in D((TS)')$ и $(TS)'y = S'T'y$, т. е. $S'T' \subseteq (TS)'$.

2. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве

Обобщение понятия *транспонированной комплексно сопряженной матрицы* приводит к понятию *сопряженного оператора в гильбертовом пространстве*.

Определение 1. Пусть линейный оператор T отображает область $D(T) \subseteq X$ в Y, где X и Y — гильбертовы пространства. Допустим, что $D(T)^a = X$, и обозначим через T' оператор, сопряженный к T. Таким образом, $\langle Tx, y'\rangle = \langle x, T'y'\rangle$ для всех $x \in D(T)$, $y' \in D(T')$. Обозначим через J_X взаимно однозначное сохраняющее норму сопряженно-линейное отображение $X'_s \ni f \longleftrightarrow y_f \in X$, определенное в следствии 1 § 6 гл. III. Обратное отображение обозначим через J_Y. Тогда

$$\langle Tx, y'\rangle = y'(Tx) = (Tx, J_Y y'),$$
$$\langle x, T'y'\rangle = (T'y')(x) = (x, J_X T'y').$$

Следовательно,

$$(Tx, J_Y y') = (x, J_X T'y'), \text{ т. е. } (Tx, y) = \left(x, J_X T' J_Y^{-1} y\right).$$

В частном случае, когда $X = Y$, мы будем писать

$$J_X T' J_X^{-1} = T^*$$

и называть T^* *оператором, сопряженным* к оператору T, отображающему гильбертово пространство X на себя.

Замечание. Если X — конечномерное комплексное гильбертово пространство (l^2), то, как и в примерах предыдущего параграфа, легко убедиться в том, что оператору T^* соответствует матрица, транспонированная и комплексно сопряженная к матрице оператора T.

Как и в предыдущем параграфе, можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Оператор T^* существует тогда и только тогда, когда $D(T)^a = X$. Если это условие выполнено, то оператор T^* определяется следующим образом: элемент $y \in X$ принадлежит $D(T^*)$ тогда и только тогда, когда существует элемент $y^* \in X$, такой, что

$$(Tx, y) = (x, y^*) \text{ для всех } x \in D(T). \tag{1}$$

При этом $T^*y = y^*$.

Эту теорему можно сформулировать в других терминах, если использовать понятие графика $G(A)$ линейного оператора A (определение см. в § 6 гл. II).

Теорема 2. Определим непрерывный линейный оператор V, отображающий пространство $X \times X$ в себя:

$$V\{x, y\} = \{-y, x\}. \tag{2}$$

Тогда для того чтобы множество $(VG(T))^{\perp}$ было графиком некоторого линейного оператора, необходимо и достаточно, чтобы $D(T)^a = X$.

В этом случае

$$G(T^*) = (VG(T))^{\perp}. \tag{3}$$

Доказательство. Условие $\{-Tx, x\} \perp \{y, y^*\}$ эквивалентно равенству $(Tx, y) = (x, y^*)$. Поэтому теорема 2 следует из теоремы 1.

Следствие. Оператор T^* — это замкнутый линейный оператор, так как ортогональное дополнение всякого линейного подпространства образует замкнутое линейное подпространство.

Теорема 3. Пусть T — линейный оператор, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в пространство X, причем $D(T)^a = X$. Тогда для того чтобы оператор T допускал замкнутое линейное расширение, необходимо и достаточно, чтобы существовал оператор $T^{**} = (T^*)^*$, т. е. чтобы $D(T^*)^a = X$.

Доказательство. *Достаточность.* По определению $T^{**} \supseteq T$, поэтому оператор $T^{**} = (T^*)^*$, согласно предыдущему следствию, замкнут.

Необходимость. Пусть S — замкнутое расширение оператора T. Тогда график $G(S)$ содержит $G(T)^a$ как замкнутое линейное подпространство, поэтому $G(T)^a$ представляет собой график некоторого линейного оператора. Ввиду непрерывности скалярного произведения $G(T)^a = G(T)^{\perp\perp} = (G(T)^{\perp})^{\perp}$; кроме того, так как $VG(T^*) = G(T)^{\perp}$, мы получаем $(VG(T^*))^{\perp} = G(T)^{\perp\perp}$. Поэтому $(VG(T^*))^{\perp}$ — это график некоторого линейного оператора. Значит, согласно теореме 2, $D(T^*)^a = X$, и оператор T^{**} существует.

Следствие. Если для оператора T выполняется условие $D(T)^a = X$, то этот оператор является замкнутым и линейным тогда и только тогда, когда $T = T^{**}$.

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна. Необходимость вытекает из доказанной выше формулы $G(T)^a = G(T^{**})$. В самом деле, равенство $G(T) = G(T)^a$ показывает, что $T = T^{**}$.

Теорема 4. Если линейный оператор T определен во всем пространстве X и замкнут, то он непрерывен.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы о замкнутом графике.

Теорема 5. Если T — ограниченный линейный оператор, то T^* — тоже ограниченный линейный оператор и

$$\|T\| = \|T^*\|. \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство проводится так же, как в предыдущем параграфе.

3. Симметрические и самосопряженные операторы

Эрмитовой матрицей называется матрица, совпадающая со своей транспонированной комплексно сопряженной матрицей. Известно, что такую матрицу можно привести к диагональному виду с помощью поворота в комплексном векторном пространстве, на котором эта матрица действует как линейный оператор. Обобщение понятия эрмитовой матрицы приводит к понятию самосопряженного оператора в гильбертовом пространстве.

Определение 1. Пусть X — гильбертово пространство. Линейный оператор T, действующий из области $D(T) \subseteq X$ в пространство X, называется *симметрическим*[1]), если $T^* \supseteq T$, т. е. если T^* служит расширением оператора T. Заметим, что если оператор T^* существует, то $D(T)^a = X$.

Предложение 1. Если оператор T — симметрический, то T^{**} — тоже симметрический.

Доказательство. Так как оператор T симметрический, имеем $D(T^*) \supseteq D(T)$ и $D(T)^a = X$. Поэтому $D(T^*)^a = X$ и, следовательно, оператор $T^{**} = (T^*)^*$ существует. Оператор T^{**} безусловно является расширением T, так что $D(T^{**}) \supseteq D(T)$. Еще раз используя, что $D(T)^a = X$, мы видим, что $D(T^{**})^a = X$, и поэтому существует оператор $T^{***} = (T^{**})^*$. Поскольку $T^* \supseteq T$, имеем $T^{**} \subseteq T^*$, и поэтому $T^{***} \supseteq T^{**}$. Отсюда следует, что T^{**} — симметрический оператор.

Следствие. Всякий симметрический оператор T обладает замкнутым симметрическим расширением $T^{**} = (T^*)^*$.

Определение 2. Линейный оператор T называется *самосопряженным*, если $T = T^*$.

Предложение 2. Всякий самосопряженный оператор замкнут. Если симметрический оператор определен во всем пространстве, то он является ограниченным и самосопряженным.

Доказательство. Будучи сопряженным самому себе, самосопряженный оператор замкнут. Второе утверждение следует из того, что определенный во всем пространстве замкнутый оператор ограничен (теорема о замкнутом графике).

Пример 1 (интегральный оператор типа Гильберта — Шмидта). Пусть $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Рассмотрим пространство $L^2(a, b)$. Через $K(s, t)$ обозначим комплексную функцию, измеримую в области $a \leqslant s, t \leqslant b$ и удовлетворяющую условию

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 ds\, dt < \infty.$$

Для функций $x(t) \in L^2(a, b)$ определим оператор K формулой

$$(K \cdot x)(s) = \int_a^b K(s, t)\, x(t)\, dt.$$

---

[1]) Симметрические операторы называют также эрмитовыми. — *Прим. перев.*

Из неравенства Шварца и теоремы Фубини — Тонелли следует, что

$$\int_a^b |(K\cdot x)(s)|^2\,ds \leqslant \int_a^b\int_a^b |K(s,\,t)|^2\,dt\,ds \int_a^b |x(t)|^2\,dt.$$

Таким образом, K — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $L^2(a,\,b)$ в себя, причем

$$\|K\| \leqslant \left(\int_a^b\int_a^b |K(s,\,t)|^2\,ds\,dt\right)^{1/2}.$$

Нетрудно показать, что оператор K^* определяется формулой $(K^*y)(t) = \int_a^b \overline{K(s,\,t)}\,y(s)\,ds$. Таким образом, оператор K будет самосопряженным в том и только в том случае, когда $K(s,\,t) = \overline{K(t,\,s)}$ почти всюду в области изменения переменных $t,\,s$.

Пример 2 (оператор координаты в квантовой механике). Пусть $X = L^2(-\infty,\,\infty)$. Обозначим через D множество $D = \{x(t);\ x(t)$ и $t\cdot x(t)$ принадлежат $L^2(-\infty,\,\infty)\}$. Тогда оператор T, определенный на множестве D формулой $Tx(t) = t\cdot x(t)$, является самосопряженным.

Доказательство. Ясно, что $D^a = X$, так как линейные комбинации характеристических функций конечных интервалов образуют в $L^2(-\infty,\,\infty)$ сильно плотное множество. Пусть $y \in D(T^*)$; положим $T^*y = y^*$. Тогда для всех $x \in D = D(T)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} t x(t)\,\overline{y(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\overline{y^*(t)}\,dt.$$

Если за $x(t)$ принять характеристическую функцию интервала $[\alpha,\,t_0]$, то $\int_\alpha^{t_0} t\cdot\overline{y(t)}\,dt = \int_\alpha^{t_0} y^*(t)\,dt$, и поэтому, дифференцируя, мы находим, что почти всюду $t_0\cdot\overline{y(t_0)} = \overline{y^*(t_0)}$. Таким образом, $y \in D$ и $T^*y(t) = t\cdot y(t)$. Обратно, ясно, что если $y \in D$, то $y \in D(T^*)$ и $T^*y(t) = t\cdot y(t)$.

Пример 3 (оператор импульса в квантовой механике). Пусть $X = L^2(-\infty,\,\infty)$. Обозначим через D совокупность всех абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций $x(t) \in L^2(-\infty,\,\infty)$, обладающих производными $x'(t) \in L^2(-\infty,\,\infty)$. Тогда формула $Tx(t) = i^{-1}x'(t)$ определяет в области D самосопряженный линейный оператор.

Доказательство. Определим семейство непрерывных функций $x_n(t)$, заданных при $t \in (-\infty, \infty)$ и зависящих от параметра α:

$$x_n(t) = 1 \quad \text{при} \quad t \in [\alpha, t_0],$$
$$x_n(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \leqslant \alpha - n^{-1} \quad \text{и} \quad t \geqslant t_0 + n^{-1},$$
$$x_n(t) \text{ — линейная функция на отрезках } [\alpha - n^{-1}, \alpha] \text{ и } [t_0, t_0 + n^{-1}].$$

Линейные комбинации функций вида $x_n(t)$ со всевозможными значениями α, t_0 и n образуют в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ плотное множество. Поэтому и множество D плотно в X.

Пусть $y \in D(T^*)$ и $T^*y = y^*$. Тогда для всех $x \in D$

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1} x'(t) \overline{y(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{y^*(t)}\, dt.$$

Если за $x(t)$ принять функцию $x_n(t)$, то

$$n \int_{\alpha - n^{-1}}^{\alpha} i^{-1} \overline{y(t)}\, dt - n \int_{t_0}^{t_0 + n^{-1}} i^{-1} \overline{y(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_n(t) y^*(t)\, dt.$$

Отсюда, полагая $n \to \infty$, мы получаем, что $i^{-1}(\overline{y(\alpha)} - \overline{y(t_0)}) = \int_{\alpha}^{t_0} \overline{y^*(t)}\, dt$ для почти всех значений α и t_0. Из неравенства Шварца следует, что функция $y^*(t)$ интегрируема на всяком конечном интервале. Значит, функция $y(t_0)$ абсолютно непрерывна по t_0 на любом конечном интервале, и поэтому $i^{-1}y'(t_0) = y^*(t_0)$ при почти всех t_0. Следовательно, $y \in D$ и $T^*y(t) = i^{-1}y'(t)$. Обратно, пусть $y \in D$. Тогда, интегрируя по частям, мы обнаруживаем, что

$$\int_a^b i^{-1} x'(t) \overline{y(t)}\, dt = i^{-1} [x(t) \overline{y(t)}]_a^b + \int_a^b x(t) \overline{(i^{-1} y'(t))}\, dt.$$

Из интегрируемости произведения $x(t)\overline{y(t)}$ в области $(-\infty, \infty)$ мы заключаем, что $\lim\limits_{a \downarrow -\infty,\, b \uparrow \infty} \left| [x(t) \overline{y(t)}]_a^b \right| = 0$, откуда

$$\int_{-\infty}^{\infty} i^{-1} x'(t) \overline{y(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \overline{(i^{-1} y'(t))}\, dt.$$

Значит, $y \in D(T^*)$ и $T^*y(t) = i^{-1}y'(t)$.

Теорема 1. Если самосопряженный оператор T имеет обратный оператор T^{-1}, то T^{-1} тоже оказывается самосопряженным оператором.

Доказательство. Равенство $T=T^*$ эквивалентно соотношению $(VG(T))^{\perp}=G(T)$. Кроме того, $G(T^{-1})=V\,G(-T)$. Поэтому, учитывая, что $(-T)^*=-T^*=-T$, получаем $(VG(-T))^{\perp}=G(-T)$, и, следовательно,

$$(VG(T^{-1}))^{\perp}=G(-T)^{\perp}=(VG(-T))^{\perp\,\perp}=VG(-T)=G(T^{-1}).$$

Последнее означает, что $(T^{-1})^*=T^{-1}$. В этом доказательстве мы использовали тот факт, что $(VG(-T))^a=VG(-T)$ вследствие замкнутости оператора $(-T)$.

Следствие. Если для симметрического оператора T в гильбертовом пространстве X выполняется условие $D(T)=X$ или условие $R(T)=X$, то этот оператор самосопряженный.

Доказательство. Случай $D(T)=X$ уже был рассмотрен. Обратимся к условию $R(T)=X$. Если $Tx=0$, то $0=(Tx, y)=(x, Ty)$ для всех $y\in D(T)$. Так как $R(T)=X$, то из полученных соотношений следует, что $x=0$. Поэтому обратный оператор T^{-1} существует и непременно является симметрическим, как и T. Но $D(T^{-1})=R(T)=X$, и поэтому определенный во всем пространстве симметрический оператор T^{-1} должен быть самосопряженным. Тогда по теореме 1 и оператор $T=(T^{-1})^{-1}$ будет самосопряженным.

Самосопряженные операторы можно строить при помощи замкнутого линейного оператора. Точнее, справедлива

Теорема 2 (фон Нейман [5]). Если замкнутый линейный оператор T, заданный в гильбертовом пространстве X, удовлетворяет условию $D(T)^a=X$, то операторы T^*T и TT^* оказываются самосопряженными, а операторы $(I+T^*T)$ и $(I+TT^*)$ (тоже самосопряженные) обладают ограниченными обратными линейными операторами.

Доказательство. Мы знаем, что множества $G(T)$ и $VG(T^*)$ образуют в произведении $X\times X$ замкнутые линейные подпространства, ортогональные друг другу и порождающие пространство $X\times X$. Таким образом, для всякого $h\in X$ имеет место однозначно определенное разложение

$$\{h, 0\}=\{x, Tx\}+\{-T^*y, y\}, \text{ где } x\in D(T),\ y\in D(T^*). \tag{1}$$

Поэтому $h=x-T^*y$, $0=Tx+y$. Следовательно,

$$x\in D(T^*T) \quad \text{и} \quad x+T^*Tx=h. \tag{2}$$

Вследствие единственности разложения (1) элемент x однозначно определяется элементом h, и поэтому существует определенный во всем пространстве X обратный оператор $(I+T^*T)^{-1}$.

Для любых $h, k\in X$ положим

$$x=(I+T^*T)^{-1}h, \qquad y=(I+T^*T)^{-1}k.$$

Тогда x и y принадлежат области $D(T^*T)$, и так как оператор T замкнут, то $(T^*)^* = T$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\left(h,\ (I+T^*T)^{-1}k\right) &= ((I+T^*T)x,\ y) = (x,\ y) + (T^*Tx,\ y) = \\ &= (x,\ y) + (Tx,\ Ty) = (x,\ y) + (x,\ T^*Ty) = \\ &= (x,\ (I+T^*T)y) = \left((I+T^*T)^{-1}h,\ k\right),\end{aligned}$$

откуда вытекает, что $(I+T^*T)^{-1}$ — самосопряженный оператор. При этом оператор $(I+T^*T)^{-1}$ как самосопряженный оператор, определенный во всем пространстве, ограничен. По теореме 1 обратный к нему оператор $(I+T^*T)$ тоже является самосопряженным. Поэтому и оператор T^*T самосопряжен.

Поскольку оператор T замкнут, $(T^*)^* = T$, и из доказанного выше вытекает, что $TT^* = (T^*)^*T^*$ — самосопряженный оператор и оператор $(I+TT^*)$ обладает ограниченным линейным обратным. Теорема доказана.

Теперь мы приведем пример несамосопряженного симметрического оператора.

Пример 4. Пусть $X = L^2(0,\ 1)$. Обозначим через D совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0,\ 1)$, удовлетворяющих условиям $x(0) = x(1) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0,\ 1)$. Тогда оператор T_1, определенный формулой $T_1x(t) = i^{-1}x'(t)$ в области $D = D(T_1)$, является симметрическим, но не самосопряженным.

Доказательство. Мы докажем, что $T_1^* = T_2$, где оператор T_2 определяется условием

$$T_2x(t) = i^{-1}x'(t) \quad \text{для} \quad x(t) \in D(T_2),$$

$$D(T_2) = \{x(t) \in L^2(0,\ 1);\ x(t) \text{ — абсолютно непрерывные функции, такие, что } x'(t) \in L^2(0,\ 1)\}.$$

Множество $D = D(T_1)$ плотно в $L^2(0,\ 1)$, поэтому оператор T_1^* существует. Пусть $y \in D(T_1^*)$ и $T_1^*y = y^*$. Тогда для любой функции $x \in D = D(T_1)$

$$\int_0^1 i^{-1}x'(t)\overline{y(t)}\,dt = \int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt.$$

Интегрируя по частям и вспоминая, что $x(0) = x(1) = 0$, находим

$$\int_0^1 x(t)\overline{y^*(t)}\,dt = -\int_0^1 x'(t)\overline{Y^*(t)}\,dt, \quad \text{где } Y^*(t) = \int_0^t y^*(s)\,ds.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $x(1)=\int_0^1 x'(t)\,dt=0$, мы получаем, что для любой постоянной c

$$\int_0^1 x'(t)\left(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\overline{c}\right)dt=0 \quad \text{при всех } x\in D(T_1).$$

С другой стороны, для всякой функции $z(t)\in L^2(0,1)$ функция $Z(t)=\int_0^t z(t)\,dt-t\int_0^1 z(t)\,dt$ безусловно принадлежит $D(T_1)$. Поэтому, принимая $Z(t)$ за $x(t)$, мы получаем

$$\int_0^1\left\{z(t)-\int_0^1 z(t)\,dt\right\}\left(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\overline{c}\right)dt=0.$$

Если теперь выбрать постоянную c так, что $\int_0^1\left(Y^*(t)-i^{-1}y(t)-c\right)dt=0$, то окажется, что

$$\int_0^1 z(t)\left(\overline{Y^*(t)}-\overline{i^{-1}y(t)}-\overline{c}\right)dt=0.$$

Следовательно, ввиду произвольности $z\in L^2(0,1)$ должно выполняться равенство $Y^*(t)=\int_0^t y^*(t)\,dt=i^{-1}y(t)+c$. Значит, $y\in D(T_2)$ и $T_2y=y^*$. Это и показывает, что $T_1^*\subseteq T_2$. При помощи интегрирования по частям можно также получить, что $T_2\subseteq T_1^*$, и поэтому $T_2=T_1^*$.

Теорема 3. Если оператор H ограничен и самосопряжен, то

$$\|H\|=\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Hx,x)|. \tag{3}$$

Доказательство. Положим $\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(Hx,x)|=\gamma$. Так как $|(Hx,x)|\leqslant\|Hx\|\cdot\|x\|$, имеем $\gamma\leqslant\|H\|$. Для любого вещественного λ

$$|(H(y\pm\lambda z),\,y\pm\lambda z)|=|(Hy,y)\pm 2\lambda\operatorname{Re}(Hy,z)+\lambda^2(Hz,z)|\leqslant\gamma\|y\pm\lambda z\|^2.$$

Следовательно,

$$|4\lambda\operatorname{Re}(Hy,z)|\leqslant\gamma(\|y+\lambda z\|^2+\|y-\lambda z\|^2)=2\gamma(\|y\|^2+\lambda^2\|z\|^2).$$

Взяв $\lambda = \|y\|/\|z\|$, мы приходим к неравенству $|\mathrm{Re}(Hy, z)| \leqslant \gamma \|y\| \cdot \|z\|$. Подставляя $ze^{i\theta}$ вместо z, мы выводим соотношение $|(Hy, z)| \leqslant \leqslant \gamma \|y\| \cdot \|z\|$, откуда $(Hy, Hy) = \|Hy\|^2 \leqslant \gamma \|y\| \cdot \|Hy\|$, т. е. $\|H\| \leqslant \gamma$.

4. Унитарные операторы. Преобразование Кэли

Симметрический оператор, вообще говоря, может и не быть ограниченным. При исследовании свойств симметрического оператора H существенную роль играет непрерывный оператор $(H - iI)(H + iI)^{-1}$, который называется *преобразованием Кэли* оператора H. Мы начнем с определения понятия изометрического оператора.

Определение 1. Ограниченный линейный оператор T, отображающий гильбертово пространство X в себя, называется *изометрическим*, если он не изменяет величины скалярного произведения:

$$(Tx, Ty) = (x, y) \text{ для всех } x, y \in X. \tag{1}$$

Если, в частности, $R(T) = X$, то изометрический оператор T называется *унитарным* оператором.

Предложение 1. Для ограниченного линейного оператора T условие (1) эквивалентно другому условию изометрии:

$$\|Tx\| = \|x\| \text{ для всех } x \in X. \tag{2}$$

Доказательство. Совершенно ясно, что из (1) вытекает условие (2).

Допустим теперь, что выполняется (2). Тогда

$$4\,\mathrm{Re}(Tx, Ty) = \|T(x+y)\|^2 - \|T(x-y)\|^2 = \\ = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,\mathrm{Re}(x, y).$$

Заменяя y на iy, мы видим, что $4\,\mathrm{Im}(Tx, Ty) = 4\,\mathrm{Im}(x, y)$; таким образом, действительно из требования (2) следует (1).

Предложение 2. Ограниченный линейный оператор T, отображающий гильбертово пространство X в себя, является унитарным тогда и только тогда, когда $T^* = T^{-1}$.

Доказательство. Если оператор T унитарный, то условие (2) обеспечивает существование обратного оператора, и при этом $D(T^{-1}) = R(T) = X$. Далее из условия (1) следует, что $T^*T = I$, и поэтому $T^* = T^{-1}$. Обратно, если оператор T удовлетворяет условию $T^* = T^{-1}$, то $T^*T = I$, откуда следует инвариантность скалярного произведения. Кроме того, $R(T) = D(T^{-1}) = D(T^*) = X$, так как $T^* = T^{-1}$, и, следовательно, оператор T унитарный.

Пример 1. Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$. Тогда оператор T, определяемый условием $Tx(t) = x(t + a)$, где a — произвольное вещественное число, представляет собой унитарный оператор, заданный в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Пример 2. Преобразование Фурье пространства $L^2(R^n)$ на себя является унитарным, так как при этом скалярное произведение $(f, g) = \int_{R^n} f(x)\overline{g(x)}\,dx$ не меняется.

Определение 2. Пусть X — гильбертово пространство. Линейный оператор T, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в X и обладающий тем свойством, что $D(T)^a = X$, называется *нормальным*, если

$$TT^* = T^*T. \tag{3}$$

Самосопряженные и унитарные операторы являются нормальными.

Преобразование Кэли

Теорема 1 (фон Нейман [1]). Пусть H — замкнутый симметрический линейный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда существует непрерывный (не обязательно определенный во всем пространстве X) обратный оператор $(H+iI)^{-1}$, а оператор

$$\begin{gathered} U_H = (H - iI)(H+iI)^{-1} \\ \text{с областью определения } D(U_H) = D\left((H+iI)^{-1}\right) \end{gathered} \tag{4}$$

является замкнутым и *изометрическим* $\left(\|U_H x\| = \|x\|\right)$; кроме того, существует обратный оператор $(I - U_H)^{-1}$ и

$$H = i(I + U_H)(I - U_H)^{-1}. \tag{5}$$

Поэтому, в частности, множество $D(H) = R(I - U_H)$ плотно в X.

Определение 3. Оператор U_H называется *преобразованием Кэли* оператора H.

Доказательство теоремы 1. Для любого элемента $x \in D(H)$

$$((H \pm iI)x, (H \pm iI)x) = (Hx, Hx) \pm (Hx, ix) \pm (ix, Hx) + (x, x).$$

Из свойства симметрии оператора H следует, что $(Hx, ix) = -i(Hx, x) = -i(x, Hx) = -(ix, Hx)$, и поэтому

$$\|(H \pm iI)x\|^2 = \|Hx\|^2 + \|x\|^2. \tag{6}$$

Следовательно, равенство $(H + iI)x = 0$ означает, что $x = 0$, и поэтому существует обратный оператор $(H+iI)^{-1}$. Этот оператор оказывается непрерывным, так как $\|(H+iI)x\| \geqslant \|x\|$. Из (6) видно, что $\|U_H y\| = \|y\|$, т. е. оператор U_H изометричен.

Убедимся в том, что оператор U_H замкнут. В самом деле, пусть $(H+iI)x_n = y_n \to y$ и $(H - iI)x_n = z_n \to z$ при $n \to \infty$. Тогда, используя равенство (6), мы видим, что $\|y_n - y_m\|^2 = \|H(x_n - x_m)\|^2 + \|x_n - x_m\|^2$, откуда $(x_n - x_m) \to 0$, $H(x_n - x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$.

Оператор H замкнут, поэтому $x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n \in D(H)$ и $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Hx_n = Hx$. Таким образом, $(H+iI)\,x_n \to y = (H+iI)\,x$, $(H-iI)\,x_n \to z = (H-iI)\,x$ и, следовательно, $U_H y = z$, а это и означает, что оператор U_H замкнут.

Из равенств $y = (H+iI)\,x$ и $U_H y = (H-iI)\,x$ мы выводим соотношения $2^{-1}(I-U_H)\,y = ix$ и $2^{-1}(I+U_H)\,y = Hx$. Поэтому если $(I-U_H)\,y = 0$, то $x = 0$, откуда $(I+U_H)\,y = 2Hx = 0$. Но тогда $y = 2^{-1}((I-U_H)\,y + (I+U_H)\,y) = 0$. Следовательно, обратный оператор $(I-U_H)^{-1}$ действительно существует. Эти же вычисления показывают, что

$$Hx = 2^{-1}(I+U_H)\,y = i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}x,$$

$$\text{т. е.}\quad H = i(I+U_H)(I-U_H)^{-1}.$$

Теорема 2 (фон Нейман [1]). Пусть U — замкнутый изометрический оператор, такой, что $R(I-U)^a = X$. Тогда существует единственным образом определенный замкнутый симметрический оператор H, для которого U служит преобразованием Кэли.

Доказательство. Убедимся сначала в существовании обратного оператора $(I-U)^{-1}$. Допустим, что $(I-U)\,y = 0$. Для любого $z = (I-U)\,w \in R(I-U)$ в силу изометричности оператора U мы имеем $(y,\ w) = (Uy,\ Uw)$. Следовательно,

$$(y,\ z) = (y,\ w) - (y,\ Uw) = (Uy,\ Uw) - (y,\ Uw) = (Uy - y,\ Uw) = 0.$$

Поскольку $R(I-U)^a = X$, из последнего равенства следует, что $y = 0$. Поэтому обратный оператор $(I-U)^{-1}$ существует. Положим $H = i(I+U)(I-U)^{-1}$. Тогда множество $D(H) = D\big((I-U)^{-1}\big) = R(I-U)$ плотно в X. Покажем, что H — симметрический оператор. Возьмем произвольные элементы $x,\ y \in D(H) = R(I-U)$ и положим $x = (I-U)\,u$, $y = (I-U)\,w$, где $u,\ w \in X$. Тогда $(Uu,\ Uw) = (u,\ w)$, и поэтому

$$(Hx,\ y) = (i(I+U)\,u,\ (I-U)\,w) = i((Uu,\ w) - (u,\ Uw)) =$$
$$= ((I-U)\,u,\ i(I+U)\,w) = (x,\ Hy),$$

т. е. оператор H симметрический. Теперь нужно показать, что $U_H = U$. Для элемента $x = (I-U)\,u$ имеет место равенство $Hx = i(I+U)\,u$, и поэтому $(H+iH)\,x = 2iu$, $(H-iI)\,x = 2iUu$. Таким образом, $D(U_H) = \{2iu;\ u \in D(U)\} = D(U)$ и $U_H(2iu) = 2iUu = U(2iu)$, откуда $U_H = U$.

Для завершения доказательства теоремы 2 покажем, что оператор H замкнут. В самом деле, оператор H отображает множество всех элементов вида $(I-U)\,u$ на множество элементов вида $i(I+U)\,u$. Если две последовательности вида $(I-U)\,u_n$ и $i(I+U)\,u_n$ сходятся при $n \to \infty$, то последовательности u_n и Uu_n тоже сходятся при $n \to \infty$. Так как U — замкнутый оператор, то

$$u_n \to u, \qquad (I-U)u_n \to (I-U)u; \qquad i(I+U)u_n \to i(I+U)u.$$

Отсюда и следует, что оператор H — замкнутый.

Следующая теорема касается структуры оператора, сопряженного симметрическому оператору.

Теорема 3 (фон Нейман [1]). Пусть H — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве X. Положим

$$X_H^+ = D(U_H)^\perp, \qquad X_H^- = R(U_H)^\perp, \tag{7}$$

где $U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ — преобразование Кэли оператора H. Тогда

$$X_H^+ = \{x \in X;\ H^*x = ix\}, \qquad X_H^- = \{x \in X;\ H^*x = -ix\}, \tag{8}$$

и всякий элемент $x \in D(H^*)$ представляется единственным образом в виде

$$x = x_0 + x_1 + x_2, \quad \text{где} \quad x_0 \in D(H),\ x_1 \in X_H^+,\ x_2 \in X_H^-,$$

так что

$$H^*x = Hx_0 + ix_1 + (-ix_2). \tag{9}$$

Доказательство. Если $x \in D(U_H)^\perp = D\big((H+iI)^{-1}\big)^\perp$, то $(x, (H+iI)y) = 0$ при всех $y \in D(H)$. Следовательно, $(x, Hy) = -(x, iy) = (ix, y)$, и поэтому $x \in D(H^*)$, $H^*x = ix$. Из последнего условия вытекает, что $(x, (H+iI)y) = 0$ для всех $y \in D(H)$, т. е. $x \in D\big((H+iI)^{-1}\big)^\perp = D(U_H)^\perp$. Тем самым доказано первое из соотношений (8); второе доказывается аналогично.

Множества $D(U_H)$ и $R(U_H)$ образуют в X замкнутые линейные подпространства, так как U_H — замкнутый изометрический оператор. Следовательно, всякий элемент $x \in X$ единственным образом разлагается в сумму элемента из $D(U_H)$ и элемента из $D(U_H)^\perp$. Рассматривая такое ортогональное разложение элемента $(H^* + iI)x$, мы получаем

$$(H^* + iI)x = (H + iI)x_0 + x', \quad \text{где} \quad x_0 \in D(H), \quad x' \in D(U_H)^\perp.$$

Но $(H + iI)x_0 = (H^* + iI)x_0$, так как $x_0 \in D(H)$ и $H \subseteq H^*$. Кроме того, поскольку $x' \in D(U_H)^\perp$ и имеет место формула (8), $H^*x' = ix'$. Таким образом,

$$x' = (H^* + iI)x_1, \qquad x_1 = (2i)^{-1}x' \in D(U_H)^\perp,$$

и поэтому

$$(H^* + iI)x = (H^* + iI)x_0 + (H^* + iI)x_1,$$

где

$$x_0 \in D(H), \quad x_1 \in D(U_H)^\perp.$$

Следовательно, учитывая (8), мы видим, что $(x - x_0 - x_1) \in R(U_H)^{\perp}$, так как $H^*(x - x_0 - x_1) = -i(x - x_0 - x_1)$. Тем самым доказывается свойство (9). Остается доказать единственность разложения (9). Это делается следующим образом. Допустим, что $0 = x_0 + x_1 + x_2$, где $x_0 \in D(H)$, $x_1 \in D(U_H)^{\perp}$, $x_2 \in R(U_H)^{\perp}$. Тогда, так как $H^* x_0 = H x_0$, $H^* x_1 = i x_1$, $H^* x_2 = -i x_2$, мы имеем

$$0 = (H^* + iI)\,0 = (H^* + iI)(x_0 + x_1 + x_2) = (H + iI)\,x_0 + 2i x_1.$$

Отсюда $(H + iI)\,x_0 = 0$, $2ix_1 = 0$, так как всякий элемент пространства X единственным образом разлагается в сумму элементов множеств $D(U_H)$ и $D(U_H)^{\perp}$. Эти рассуждения показывают, что существует обратный оператор $(H + iI)^{-1}$, и поэтому $x_0 = 0$ и $x_2 = 0 - x_0 - x_1 = 0 - 0 - 0 = 0$. Поэтому разложение вида (9) единственно для любого элемента множества $D(H^*)$.

Следствие. Замкнутый симметрический линейный оператор H в гильбертовом пространстве X является самосопряженным тогда и только тогда, когда оператор U_H (преобразование Кэли оператора H) унитарен.

Доказательство. Условие $D(H) = D(H^*)$ эквивалентно требованию $D(U_H)^{\perp} = R(U_H)^{\perp} = \{0\}$. Последнее же соотношение в свою очередь эквивалентно тому, что оператор U_H унитарен, т. е. отображает пространство X на себя взаимно однозначно и изометрично.

5. Операторы с замкнутой областью значений

Теорема Банаха [1] об операторах, имеющих замкнутую область значений, формулируется следующим образом.

Теорема. Рассмотрим два B-пространства X и Y; пусть T — замкнутый оператор, действующий из X в Y, такой, что $D(T)^a = X$. Тогда следующие четыре утверждения эквивалентны:

$$\text{множество } R(T) \text{ замкнуто в } Y; \tag{1}$$

$$\text{множество } R(T') \text{ замкнуто в } X'; \tag{2}$$

$$R(T) = N(T')^{\perp} \equiv \{y \in Y;\ \langle y, y^* \rangle = 0 \text{ для всех } y^* \in N(T')\}; \tag{3}$$

$$R(T') = N(T)^{\perp} \equiv \{x^* \in X',\ \langle x, x^* \rangle = 0 \text{ для всех } x \in N(T)\}\,^{1)}. \tag{4}$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы мы разобьем на пять этапов.

I. Доказательство эквивалентности $(1) \longleftrightarrow (2)$ можно свести к частному случаю, когда T — непрерывный линейный оператор, такой, что $D(T) = X$.

---

[1]) Здесь $N(T)$ и $N(T')$ — нуль-многообразия операторов T и T', т. е. $N(T) = \{x \in X;\ Tx = 0\}$, $N(T') = \{y^* \in Y';\ T'y^* = 0\}$. — *Прим. перев.*

График $G = G(T)$ оператора T образует в пространстве $X \times Y$ замкнутое линейное подпространство, поэтому множество G с нормой $\|\{x, y\}\| = \|x\| + \|y\|$ пространства $X \times Y$ является B-пространством. Определим равенством

$$S\{x, Tx\} = Tx$$

непрерывный линейный оператор S, отображающий пространство G в Y. Тогда сопряженный к S оператор S' линейно и непрерывно отображает Y' в G', и при этом

$$\langle\{x, Tx\}, S'y^*\rangle = \langle S\{x, Tx\}, y^*\rangle = \langle Tx, y^*\rangle = \langle\{x, Tx\}, \{0, y^*\}\rangle,$$
$$x \in D(T), \ y^* \in Y'.$$

Следовательно, функционал $S' \ y^* - \{0, y^*\} \in (X \times Y)' = X' \times Y'$ обращается в нуль во всех точках области G. Но условие $\langle\{x, Tx\}, \{x^*, y_1^*\}\rangle = 0 \left(x \in D(T), \ y_1^* \in Y', x^* \in X'\right)$ эквивалентно требованию $\langle x, x^*\rangle = \langle -Tx, \ y_1^*\rangle \, (x \in D(T))$, т. е. равенству $-T'y_1^* = x^*$. Поэтому

$$S' \cdot y^* = \{0, y^*\} + \{-T'y_1^*, y_1^*\} = \{-T'y_1^*, y^* + y_1^*\}, \ y^* \in Y'.$$

Так как элемент y^* был выбран произвольно, мы видим, что $R(S') = R(-T') \times Y' = R(T') \times Y'$. Поэтому множество $R(S')$ замкнуто в пространстве $X' \times Y'$ тогда и только тогда, когда $R(T')$ замкнуто в X', и так как $R(S) = R(T)$, множество $R(S)$ замкнуто в Y тогда и только тогда, когда $R(T)$ замкнуто в Y. Таким образом, действительно достаточно доказать эквивалентность условий $(1) \longleftrightarrow (2)$ в частном случае ограниченного линейного оператора S вместо исходного оператора T.

II. Пусть T — ограниченный линейный оператор, отображающий B-пространство X в B-пространство Y. Докажем, что в этом случае $(1) \rightarrow (2)$.

Мы будем рассматривать T как ограниченный линейный оператор T_1, отображающий пространство X в B-пространство $Y_1 = R(T)^a = R(T)$. Нужно показать, что справедливо утверждение (2). Для элементов $y_1^* \in Y_1'$ оператор T_1' определяется соотношением

$$\langle T_1x, y_1^*\rangle = \langle Tx, y_1^*\rangle = \langle x, T_1'y_1^*\rangle, \qquad x \in D(T_1) = D(T) = X.$$

По теореме Хана — Банаха функционал y_1^* может быть продолжен до функционала $y^* \in Y'$ таким образом, что $\langle Tx, y_1^*\rangle = \langle Tx, y^*\rangle$ $(x \in D(T) = X)$. Следовательно, $T_1'y_1^* = T'y_1^*$, и поэтому $R(T_1') = R(T')$. Таким образом, мы можем, не ограничивая общности, считать, что $R(T) = Y$. Тогда по теореме об открытости отображения (гл. II, § 5) найдется такое $c > 0$, что для каждого $y \in Y$ существует элемент $x \in X$, удовлетворяющий условиям $Tx = y$, $\|x\| \leqslant c\|y\|$. Поэтому для всякого y^* из $D(T')$

$$|\langle y, y^*\rangle| = |\langle Tx, y^*\rangle| = |\langle x, T'y^*\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|T'y^*\| \leqslant c\|y\| \cdot \|T'y^*\|.$$

Следовательно,

$$\|y^*\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} |\langle y, y^*\rangle| \leqslant c\|T'y^*\|,$$

и, таким образом, обратный оператор $(T')^{-1}$ существует и непрерывен. Более того, оператор $(T')^{-1}$, будучи обратным к непрерывному линейному оператору, является замкнутым линейным оператором. Отсюда видно, что область $D((T')^{-1}) = R(T')$ должна быть замкнутой в X'.

III. Пусть X и Y — два B-пространства и T — ограниченный линейный оператор, отображающий X в Y. Тогда (2)→(1).

Как и на втором этапе доказательства, будем рассматривать T как ограниченный линейный оператор T_1, отображающий X в B-пространство $Y_1 = R(T)^a$. Условие $T_1'y_1^* = 0$ влечет за собой соотношение

$$\langle T_1x, y_1^*\rangle = \langle Tx, y_1^*\rangle = \langle x, T_1'y_1^*\rangle = 0, \quad x \in D(T_1) = D(T) = X,$$

а это означает, что $y_1^* = 0$, так как множество $R(T_1) = R(T)$ плотно в пространстве $Y_1 = R(T)^a$. Таким образом, должен существовать оператор, обратный к T_1'. Как было показано, множество $R(T') = R(T_1')$ замкнуто, поэтому T_1' — непрерывный линейный оператор, отображающий B-пространство $(R(T)^a)' = Y_1'$ на B-пространство $R(T_1')$ взаимно однозначно. Тогда по теореме об открытости отображения оператор $(T_1')^{-1}$ непрерывен.

Теперь мы докажем, что множество $R(T)$ замкнуто. С этой целью достаточно показать, что утверждение

> существует такая положительная постоянная ε, что образ $\{T_1x;\ \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ множества $\{x;\ \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ не является плотным ни в каком шаре вида $\|y\| \leqslant n^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ пространства $Y_1 = R(T)^a = R(T_1)^a$,

приводит к противоречию.

В самом деле, если это утверждение неверно, то, как показывает доказательство теоремы об открытости отображения, $R(T_1) = R(T) = Y_1$. Итак, допустим, что существует последовательность $\{y_n\} \subseteq Y_1$, такая, что

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = 0, \qquad y_n \notin \{T_1x;\ \|x\| \leqslant \varepsilon\}^a \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\{T_1x;\ \|x\| \leqslant \varepsilon\}^a$ — замкнутое выпуклое уравновешенное множество B-пространства Y_1, то по теореме Мазура (гл. IV, § 6) существуют определенные на B-пространстве Y_1 непрерывные линейные функционалы f_n, такие, что

$$f_n(y_n) > \sup_{\|x\| \leqslant \varepsilon} |f_n(T_1 x)| \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому $\|T_1' f_n\| < \varepsilon^{-1} \|f_n\| \cdot \|y_n\|$, а так как $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то оператор T_1' не может иметь непрерывного обратного. Последний вывод неверен, и, следовательно, множество $R(T)$ должно быть замкнутым.

IV. Покажем, что (1)$\to$(3). Во-первых, очевидно, что соотношение

$$\langle Tx, y^* \rangle = \langle x, T'y^* \rangle, \quad x \in D(T), \quad y^* \in D(T')$$

влечет за собой включение $R(T) \subseteq N(T')^{\perp}$. Покажем, что если условие (1) выполняется, то $N(T')^{\perp} \subseteq R(T)$. Для этого предположим, что существует некоторый элемент $y_0 \in N(T')^{\perp}$, не принадлежащий $R(T)$. Тогда по теореме Хана — Банаха найдется такой элемент $y_0^* \in Y'$, что $\langle y_0, y_0^* \rangle \neq 0$ и $\langle Tx, y_0^* \rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$. Отсюда мы заключаем, что $\langle x, T'y_0^* \rangle = 0$ $(x \in D(T))$ и, следовательно, $T'y_0^* = 0$, т. е. $y_0 \notin N(T')^{\perp}$. Но последнее неверно, и поэтому $N(T')^{\perp} \subseteq R(T)$. Импликация (3)$\to$(1) очевидна, так как множество $N(T')^{\perp}$ замкнуто вследствие непрерывности выражения $\langle y, y^* \rangle$ по переменной y.

V. Убедимся в том, что (2)$\to$(4). Включение $R(T') \subseteq N(T)^{\perp}$ получается так же, как в случае утверждения (3). Докажем, что из (2) следует включение $N(T)^{\perp} \subseteq R(T')$. С этой целью возьмем элемент $x^* \in N(T)^{\perp}$ и для всякого элемента вида $y = Tx$ определим функционал $f_1(y)$ формулой $f_1(y) = \langle x, x^* \rangle$. Это однозначная функция y, так как из равенства $Tx = Tx'$ следует, что $(x - x') \in N(T)$, и, поскольку $x^* \in N(T)^{\perp}$, имеем $\langle (x - x'), x^* \rangle = 0$. Поэтому $f_1(y)$ — действительно линейный функционал, определенный для элементов вида $y = Tx$. Из утверждения (2) следует (1), поэтому, применяя теорему об открытости отображения к оператору S, построенному на первом этапе доказательства, мы можем выбрать решения x_n уравнений $y_n = Tx_n$ при произвольно заданных значениях y_n таким образом, чтобы из соотношения $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ вытекало условие $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Итак, $f_1(y) = \langle x, x^* \rangle$ — непрерывный линейный функционал, определенный на множестве $Y_1 = R(T)$. Пусть $f \in Y'$ — продолжение функционала f_1. Тогда

$$f(Tx) = f_1(Tx) = \langle x, x^* \rangle.$$

Это показывает, что $T'f = x^*$. Следовательно, $N(T)^{\perp} \subseteq R(T')$.

Тот факт, что из (4) следует (2), очевиден, так как $\langle x, x^*\rangle$ — непрерывный линейный функционал относительно x.

Следствие 1. Пусть X и Y — два B-пространства и T — замкнутый линейный оператор, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в Y, такой, что $D(T)^a = X$. В этом случае

$$R(T) = Y \text{ тогда и только тогда, когда оператор } T' \text{ имеет непрерывный обратный;} \tag{5}$$

$$R(T') = X' \text{ тогда и только тогда, когда оператор } T \text{ имеет непрерывный обратный.} \tag{6}$$

Доказательство. Предположим, что $R(T) = Y$. Тогда если $T'y^* = 0$, то в силу условия $\langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T'y^*\rangle\,(x \in D(T))$ мы имеем $y^* = 0$, откуда следует существование обратного оператора $(T')^{-1}$. Так как $R(T) = Y$ и выполняется условие (2), множество $R(T')$ замкнуто; таким образом, по теореме о замкнутом графике оператор $(T')^{-1}$ непрерывен.

Допустим, что оператор T' имеет непрерывный обратный. Тогда $N(T') = \{0\}$, и поэтому, согласно (3), $R(T) = Y$.

Предположим, что $R(T') = X'$. Тогда если $Tx = 0$, то ввиду соотношения $\langle Tx, y^*\rangle = \langle x, T'y^*\rangle$ $(y^* \in D(T'))$ можно утверждать, что $x = 0$, т. е. оператор T имеет обратный оператор T^{-1}. Так как справедливо утверждение (1) и $R(T') = X'$, то множество $R(T)$ замкнуто; по теореме о замкнутом графике оператор T^{-1} должен быть непрерывным.

Наконец, предположим, что оператор T имеет непрерывный обратный T^{-1}. В этом случае $N(T) = \{0\}$ и из (4) следует, что $R(T') = X'$.

Следствие 2. Пусть X — гильбертово пространство со скалярным произведением (u, v) и T — замкнутый линейный оператор, такой, что область определения $D(T) \subseteq X$ плотна в X и $R(T) \subseteq X$. Допустим, что существует такая положительная постоянная c, что

$$\operatorname{Re}(Tu, u) \geqslant c\|u\|^2 \quad \text{для всех} \quad u \in D(T). \tag{7}$$

Тогда $R(T^*) = X$.

Доказательство. Неравенство Шварца показывает, что

$$\|Tu\| \cdot \|u\| \geqslant \operatorname{Re}(Tu, u) \geqslant c\|u\|^2 \quad \text{для всех} \quad u \in D(T).$$

Поэтому $\|Tu\| \geqslant c\|u\|$ $(u \in D(T))$ и, следовательно, существует непрерывный обратный оператор T^{-1}. Применяя предыдущее следствие, мы видим, что $R(T') = X$. Таким образом, $R(T^*) = R(T') = X$.

Замечание. Линейный оператор T, отображающий область $D(T) \subseteq X$ в X, называется *диссипативным*, если

$$\operatorname{Re}(Tu, u) \leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad u \in D(T). \tag{8}$$

Условие (7) означает, таким образом, что оператор $(-T)$ „строго" диссипативен.

Литература к главе VII

Общие сведения, касающиеся гильбертовых пространств, см. в работах М. Стоуна [1], Ахиезера — Глазмана [1], Данфорда — Шварца [5].

Теорема об операторах с замкнутой областью значений по существу доказана еще в работе Банаха [1].

ГЛАВА VIII

Резольвента и спектр

Пусть область определения $D(T)$ и область значений $R(T)$ линейного оператора T лежат в одном и том же комплексном линейном топологическом пространстве X. Рассмотрим линейный оператор

$$T_\lambda = \lambda I - T,$$

где λ — произвольное комплексное число, а I — тождественный оператор. Исследование множества тех значений λ, при которых оператор T_λ не имеет обратного оператора, и изучение свойств оператора, обратного к T_λ, в тех случаях, когда он существует, составляют содержание так называемой *спектральной теории операторов*.

Нам предстоит, таким образом, изучить общую теорию операторов, обратных операторам типа T_λ.

1. Резольвента и спектр

Определение. Если при $\lambda = \lambda_0$ область значений $R(T_{\lambda_0})$ плотна в пространстве X и оператор T_{λ_0} обладает непрерывным обратным оператором $(\lambda_0 I - T)^{-1}$, то говорят, что комплексное число λ_0 принадлежит *резольвентному множеству* $\rho(T)$ оператора T. Оператор $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ мы обозначим через $R(\lambda_0; T)$ и назовем *резольвентой* оператора T в точке $\lambda = \lambda_0$. Совокупность всех комплексных чисел λ, не принадлежащих резольвентному множеству $\rho(T)$, называется *спектром* оператора T; это множество мы обозначим через $\sigma(T)$. Спектр $\sigma(T)$ можно разбить на три попарно непересекающихся множества $P_\sigma(T)$, $C_\sigma(T)$ и $R_\sigma(T)$, определяемых следующими условиями:

$P_\sigma(T)$ — множество комплексных чисел λ, при которых оператор T_λ не имеет обратного; $P_\sigma(T)$ называется *точечным спектром* оператора T.

$C_\sigma(T)$ — множество комплексных чисел λ, при которых оператор T_λ обладает обратным оператором с плотной в X областью определения, но оператор T_λ^{-1} не является непрерывным; $C_\sigma(T)$ называется *непрерывным спектром* оператора T.

$R_\sigma(T)$ — множество комплексных чисел λ, таких, что T_λ имеет обратный оператор, область определения которого не является плотной в X; $R_\sigma(T)$ называется *остаточным спектром* оператора T.

Из приведенных определений, учитывая линейность оператора T, мы выводим следующее

Предложение. Для того чтобы $\lambda_0 \in P_\sigma(T)$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $Tx = \lambda_0 x$ имело ненулевое решение $x \neq 0$. В этом случае число λ_0 называется *собственным значением* оператора T, а решение x — *собственным вектором* оператора T, соответствующим собственному значению λ_0. Нуль-подпространство $N(\lambda_0 I - T)$ оператора T_{λ_0} называется *собственным подпространством* оператора T, соответствующим собственному значению λ_0. Оно состоит из вектора $x = 0$ и всех собственных векторов, соответствующих λ_0. Размерность собственного подпространства, соответствующего λ_0, называется *кратностью* собственного значения λ_0.

Теорема. Пусть X — комплексное B-пространство и T — замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат X. Тогда при любом $\lambda_0 \in \rho(T)$ резольвента $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве X.

Доказательство. Поскольку λ_0 принадлежит резольвентному множеству $\rho(T)$, множество $R(\lambda_0 I - T) = D\left((\lambda_0 I - T)^{-1}\right)$ плотно в X, причем существует такая положительная постоянная c, что

$$\|(\lambda_0 I - T)x\| \geqslant c\|x\| \quad \text{при всех} \quad x \in D(T).$$

Мы должны показать, что $R(\lambda_0 I - T) = X$. Предположим, что для некоторой последовательности $\{x_n\} \subseteq X$ существует предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda_0 I - T)x_n = y$. Тогда из написанного выше неравенства следует, что предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ тоже существует. Так как оператор T — замкнутый, то $(\lambda_0 I - T)x = y$. Поэтому $R(\lambda_0 I - T) = X$, ибо, согласно предположениям теоремы, $R(\lambda_0 I - T)^a = X$.

Пример 1. Если пространство X конечномерно, то всякому ограниченному линейному оператору T соответствует некоторая матрица (t_{ij}). Как известно, собственными значениями оператора T являются в этом случае корни так называемого *векового*, или *характеристического, уравнения* матрицы (t_{ij}):

$$\det(\lambda\delta_{ij} - t_{ij}) = 0, \tag{1}$$

где $\det(A)$ обозначает определитель матрицы A [1]).

[1]) Заметим, что кратность *характеристического корня* λ_0 как корня уравнения (1) может оказаться большей или равной (но не меньшей), чем кратность собственного значения λ_0, определенная как размерность соответствующего собственного подпространства. — *Прим. перев.*

Пример 2. Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$ и оператор T определяется формулой

$$T \cdot x(t) = tx(t).$$

Здесь, таким образом, $D(T) = \{x(t);\ x(t),\ tx(t) \in L^2(-\infty, \infty)\}$ и $Tx(t) = tx(t)$ для $x(t) \in D(T)$. Тогда всякое вещественное число λ_0 принадлежит непрерывному спектру $C_\sigma(T)$.

Доказательство. Условие $(\lambda_0 I - T)x = 0$ означает здесь, что $(\lambda_0 - t)x(t) = 0$ почти всюду, и поэтому почти всюду $x(t) = 0$. Следовательно, при любом вещественном λ_0 оператор $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ существует. Все функции $y(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, обращающиеся тождественно в нуль в некоторой окрестности точки $t = \lambda_0$ (эти окрестности могут быть разными для различных функций $y(t)$), входят поэтому в область определения $D((\lambda_0 I - T)^{-1})$. Следовательно, множество $D((\lambda_0 I - T)^{-1})$ плотно в $L^2(-\infty, \infty)$. С другой стороны, легко видеть, что оператор $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ не является ограниченным на совокупности таких функций $y(t)$.

Пример 3. Примем за X гильбертово пространство (l^2) и определим оператор T_0 условием

$$T_0(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Тогда число $\lambda = 0$ принадлежит остаточному спектру оператора T, так как множество $R(T_0)$ не является плотным в X.

Пример 4. Обозначим через H самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве X. Тогда всякое комплексное число λ, для которого $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, входит в резольвентное множество $\rho(H)$ и резольвента $R(\lambda; H)$ представляет собой ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий оценке

$$\|R(\lambda; H)\| \leqslant \frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda)|}. \tag{2}$$

Кроме того,

$$\operatorname{Im}((\lambda I - H)x,\ x) = \operatorname{Im}(\lambda)\|x\|^2 \quad \text{для всех} \quad x \in D(H). \tag{3}$$

Доказательство. Если $x \in D(H)$, то скалярное произведение (Hx, x) вещественно, так как $(Hx, x) = (x, Hx) = \overline{(Hx, x)}$. Отсюда следует условие (3). Применяя далее неравенство Шварца, мы приходим к неравенству

$$\|(\lambda I - H)x\| \cdot \|x\| \geqslant |((\lambda I - Hx),\ x)| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda)| \cdot \|x\|^2, \tag{4}$$

откуда видно, что

$$\|(\lambda I - H)x\| \geqslant |\operatorname{Im}(\lambda)| \cdot \|x\|, \qquad x \in D(H). \tag{5}$$

Следовательно, если $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, то обратный оператор $(\lambda I - H)^{-1}$ существует. Кроме того, область значений $R(\lambda I - H)$ плотна в X, если выполняется условие $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$. В самом деле, в противном случае должен был бы существовать элемент $y \neq 0$, ортогональный $R(\lambda I - H)$, и для этого y при всех $x \in D(H)$ выполнялось бы условие $((\lambda I - H)x, y) = 0$, что эквивалентно требованию $(x, (\bar{\lambda} I - H)y) = 0$ для всех $x \in D(H)$. Но область определения $D(H)$ самосопряженного оператора H плотна в X, поэтому из условия $(x, (\bar{\lambda} I - H)y) = 0$ при всех $x \in D(H)$ вытекает, что $(\bar{\lambda} I - H)y = 0$, т. е. $Hy = \bar{\lambda} y$, а это противоречит тому, что значение (Hy, y) вещественно.

Таким образом, по доказанной выше теореме при всяком комплексном λ, для которого $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$, резольвента $R(\lambda; H)$ представляет собой ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий оценке (2).

2. Резольвентное уравнение и спектральный радиус

Теорема 1. Пусть T — замкнутый линейный оператор, область определения и область значений которого принадлежат комплексному B-пространству X. Тогда резольвентное множество $\rho(T)$ образует открытую область комплексной плоскости и функция $R(\lambda; T)$ голоморфна по λ в каждой из компонент области ρT (компонентой называется максимальное связное подмножество).

Доказательство. По теореме предыдущего параграфа резольвента $R(\lambda; T)$ при всяком $\lambda \in \rho(T)$ представляет собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве X. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$; рассмотрим ряд

$$S(\lambda) = R(\lambda_0; T)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0; T)^n\right\}. \tag{1}$$

Этот ряд сходится по норме операторов в круге $\|R(\lambda_0; T)\| \cdot |\lambda_0 - \lambda| < 1$ комплексной плоскости и определяет внутри этого круга голоморфную функцию переменной λ. Если умножить $S(\lambda)$ слева или справа на $(\lambda - \lambda_0)I + (\lambda_0 I - T) = (\lambda I - T)$, то получится тождественный оператор I; это означает, что ряд $S(\lambda)$ представляет резольвенту $R(\lambda; T)$. Тем самым показано, что при любом $\lambda_0 \in \rho(T)$ существует круговая окрестность точки λ_0, принадлежащая $\rho(T)$, в которой резольвента $R(\lambda; T)$ голоморфна.

Теорема 2. Если λ и μ принадлежат $\rho(T)$ и если операторы $R(\lambda; T)$ и $R(\mu; T)$ определены во всем пространстве X и непрерывны, то справедливо равенство

$$R(\lambda; T) - R(\mu; T) = (\mu - \lambda) R(\lambda; T) R(\mu; T), \tag{2}$$

которое называется *резольвентным уравнением* [1]).

---

[1]) Равенство (2) называют также *тождеством Гильберта*. — *Прим. перев.*

Доказательство. Непосредственные вычисления дают

$$R(\lambda;\ T)=R(\lambda;\ T)(\mu I-T)R(\mu;\ T)=R(\lambda;\ T)\{(\mu-\lambda)I+\\ +(\lambda I-T)\}R(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)+R(\mu;\ T).$$

Теорема 3. Если ограниченный линейный оператор T отображает комплексное B-пространство X в себя, то существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}=r_\sigma(T). \tag{3}$$

Предел $r_\sigma(T)$ называется *спектральным радиусом* оператора T; для него имеет место оценка

$$r_\sigma(T)\leqslant\|T\|. \tag{4}$$

Если $|\lambda|>r_\sigma(T)$, то резольвента $R(\lambda;\ T)$ существует и представляется рядом вида

$$R(\lambda;\ T)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}, \tag{5}$$

который сходится по норме операторов.

Доказательство. Положим $\inf\limits_{n\geqslant 1}\|T^n\|^{1/n}=r$. Достаточно показать, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqslant r$. Для каждого $\varepsilon>0$ выберем такое целое положительное число m, что $\|T^m\|^{1/m}\leqslant r+\varepsilon$. Далее для произвольного целого n обозначим через q величину, удовлетворяющую условиям $n=pm+q$, $0\leqslant q\leqslant(m-1)$ (p — целое). Тогда, используя неравенство $\|AB\|\leqslant\|A\|\cdot\|B\|$, мы получаем

$$\|T^n\|^{1/n}\leqslant\|T^m\|^{p/n}\cdot\|T\|^{q/n}\leqslant(r+\varepsilon)^{mp/n}\|T\|^{q/n}.$$

Поскольку $pm/n\to 1$ и $q/n\to 0$ при $n\to\infty$, должно выполняться неравенство $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqslant r+\varepsilon$. Так как ε было выбрано произвольно, отсюда следует, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T^n\|^{1/n}\leqslant r$, что и доказывает существование предела $r_\sigma(T)=\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}$.

Поскольку $\|T^n\|\leqslant\|T\|^n$, мы имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\|T^n\|^{1/n}\leqslant\|T\|$. Отсюда следует, что ряд (5) сходится по норме операторов при $\lambda>r_\sigma(T)$. В самом деле, если $|\lambda|\geqslant r_\sigma+\varepsilon$, где $\varepsilon>0$, то, согласно (3), $\|\lambda^{-n}T^n\|\leqslant(r_\sigma(T)+\varepsilon)^{-n}\cdot\left(r_\sigma(T)+2^{-1}\varepsilon\right)^n$ для достаточно больших значений n, откуда видно, что ряд (5) сходится. Умножая этот ряд на $(\lambda I-T)$ слева или справа, мы получаем тождественный оператор I, поэтому резольвента $R(\lambda;\ T)$ действительно представляется рядом (5).

Следствие. Для всякого ограниченного линейного оператора T, отображающего B-пространство X в себя, резольвентное множество $\rho(T)$ непусто.

Теорема 4. Для всякого ограниченного линейного оператора $T \in L(X, X)$ (где X — некоторое B-пространство) имеет место формула

$$r_\sigma(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|. \tag{6}$$

Доказательство. По теореме 3 имеем $r_\sigma(T) \geqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Поэтому остается лишь установить неравенство $r_\sigma(T) \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$.

Функция $R(\lambda; T)$, согласно теореме 1, голоморфна по λ при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. Поэтому она обладает однозначно определенным разложением в ряд Лорана по положительным и неположительным степеням λ, сходящимся по норме операторов при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$. По теореме 3 этот ряд Лорана должен совпадать с рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$. Следовательно, $\lim\limits_{n \to \infty} \|\lambda^{-n} T^n\| = 0$ при $|\lambda| > \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, и поэтому для любого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших значениях n выполняется неравенство $\|T^n\| \leqslant \leqslant \left(\varepsilon + \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|\right)^n$. Это показывает, что

$$r_\sigma(T) = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|.$$

Следствие. Если $|\lambda| < r_\sigma(T)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ расходится.

Доказательство. Обозначим через r наименьшее неотрицательное число, такое, что при $|\lambda| > r$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{-n} T^{n-1}$ сходится по норме операторов. Существование такого числа $r \geqslant 0$ доказывается так же, как в случае обычных числовых рядов по степеням λ^{-1}. Тогда при $|\lambda| > r$ мы имеем $\lim\limits_{n \to \infty} \|\lambda^{-n} T^n\| = 0$, и поэтому, как и при доказательстве неравенства $r_\sigma(T) \leqslant \sup\limits_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$, мы приходим к неравенству $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n} \leqslant r$. Это и показывает, что $r_\sigma(T) \leqslant r$.

3. Статистическая эргодическая теорема

Статистическая эргодическая теорема, о которой будет идти речь в этом параграфе, позволяет для частного класса непрерывных линейных операторов построить собственное подпространство, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$ Мы рассмотрим здесь статистическую эргодическую теорему и ее доказательство с точки зрения спектральной теории в формулировке, предложенной автором этой книги. Краткий исторический очерк развития эргодической теории в связи со статистической механикой будет приведен в гл. XIII.

Теорема 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и T — непрерывный линейный оператор, отображающий пространство X в себя. Допустим, что

> семейство операторов $\{T^n;\ n=1, 2, \ldots\}$ *равностепенно непрерывно* в том смысле, что для всякой непрерывной полунормы q на X существует такая непрерывная полунорма q' на X, что
>
> $$\sup_{n\geqslant 1} q(T^n x) \leqslant q'(x) \text{ для всех } x \in X. \tag{1}$$

Тогда замыкание $R(I-T)^a$ области значений $R(I-T)$ удовлетворяет условию

$$R(I-T)^a = \left\{ x \in X;\ \lim_{n\to\infty} T_n x = 0,\ T_n = n^{-1}\sum_{m=1}^{n} T^m \right\}, \tag{2}$$

откуда, в частности,

$$R(I-T)^a \cap N(I-T) = \{0\}. \tag{3}$$

Доказательство. Так как $T_n(I-T) = n^{-1}(T - T^{n+1})$, из условия (1) следует, что если $w \in R(I-T)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} T_n w = 0$. Допустим теперь, что $z \in R(I-T)^a$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q' на X и любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $w \in R(I-T)$, что $q'(z-w) < \varepsilon$. Поэтому если за q и q' принять полунормы, фигурирующие в условии (1), то $q(T_n(z-w)) \leqslant n^{-1}\sum\limits_{m=1}^{n} q(T^m(z-w)) \leqslant$ $\leqslant q'(z-w) < \varepsilon$. Следовательно, $q(T_n z) \leqslant q(T_n w) + q(T_n(z-w)) \leqslant$ $\leqslant q(T_n w) + \varepsilon$, и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} T_n z = 0$. Это показывает, что $R(I-T)^a \subseteq$ $\subseteq \left\{ x \in X;\ \lim\limits_{n\to\infty} T_n x = 0 \right\}$.

Обратно, допустим, что элемент $x \in X$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = 0$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n, что $q(x-(x-T_n x)) =$ $= q(T_n x) < \varepsilon$. Но

$$x - T_n x = n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(I - T^m)\,x =$$

$$= n^{-1}\sum_{m=1}^{n}(I-T)(I + T + T^2 + \ldots + T^{m-1})\,x,$$

поэтому $(x - T_n x) \in R(I - T)$. Значит, элемент x должен принадлежать замыканию $R(I - T)^a$.

Теорема 2 (статистическая эргодическая теорема). Пусть выполняется условие (1). Допустим, что для некоторого элемента $x \in X$ можно выбрать подпоследовательность $\{T_{n'}x\}$ последовательности $\{T_n x\}$, для которой существует слабый предел

$$w\text{-}\lim_{n' \to \infty} T_{n'} x = x_0 \in X. \tag{4}$$

Тогда $Tx_0 = x_0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = x_0$.

Доказательство. Так как $TT_n - T_n = n^{-1}(T^{n+1} - T)$, из (1) следует, что $\lim\limits_{n \to \infty} (TT_n x - T_n x) = 0$. Поэтому для любого элемента $f \in X'$ предел $\lim\limits_{n' \to \infty} \langle TT_{n'}x, f\rangle = \lim\limits_{n' \to \infty} \langle T_{n'}x, T'f\rangle$ существует и равен $\lim\limits_{n' \to \infty} \langle T_{n'}x, f\rangle = \langle x_0, f\rangle$. Следовательно, $\langle x_0, f\rangle = \langle Tx_0, f\rangle$. Поскольку функционал $f \in X'$ был выбран произвольно, последнее означает, что $Tx_0 = x_0$.

Из равенства $T^m x = T^m x_0 + T^m (x - x_0) = x_0 + T^m (x - x_0)$ мы выводим соотношение $T_n x = x_0 + T_n (x - x_0)$. Но $x - x_0 = w\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} (x - T_{n'}x)$ и, как доказано выше, $(x - T_{n'}x) \in R(I - T)$. Поэтому, применяя теорему 11 из § 1 гл. V, мы видим, что $(x - x_0) \in R(I - T)^a$. Отсюда по теореме 1 $\lim\limits_{n \to \infty} T_n (x - x_0) = 0$, и мы доказали, что $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = x_0$.

Следствие. Пусть выполняется условие (1) и ограниченные множества рассматриваемого пространства X слабо секвенциально компактны [1]). Тогда для любого $x \in X$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} T_n x = x_0 \in X$, и оператор T_0, определенный равенством $T_0 x = x_0$, представляет собой непрерывный линейный оператор, такой, что

$$T_0 = T_0^2 = TT_0 = T_0 T, \tag{5}$$

$$R(T_0) = N(I - T), \tag{6}$$

$$N(T_0) = R(I - T)^a = R(I - T_0). \tag{7}$$

Кроме того, пространство X можно следующим образом представить в виде *прямой суммы* [2]):

$$X = R(I - T)^a \oplus N(I - T), \tag{8}$$

т. е. всякий элемент $x \in X$ единственным образом может быть записан в виде суммы элемента из $R(I - T)^a$ и элемента из $N(I - T)$.

---

[1]) См. стр. 178. — *Прим. перев.*

[2]) Запись $A = B \oplus C$ (*прямая сумма*), где A, B, C — подпространства некоторого линейного пространства X, в общем случае означает, что $A = \{x \in X;\ x = y + z,\ y \in B,\ x \in C$, представление $x = y + z$ единственно$\}$. — *Прим. перев.*

Доказательство. Очевидно, что T_0 — линейный оператор. Его непрерывность вытекает из того, что последовательность $\{T_n\}$, согласно условию (1), равностепенно непрерывна. Далее, поскольку $Tx_0 = x_0$, ясно, что $TT_0 = T_0$, откуда $T^n T_0 = T_0$, $T_n T_0 = T_0$ и, следовательно, $T_0^2 = T_0$. С другой стороны, $T_n - T_n T = n^{-1}(T - T^{n+1})$, и поэтому из условия (1) следует, что $T_0 = T_0 T$. Свойство (6) доказывается следующим образом. Пусть $Tx = x$; тогда $T^n x = x$, $T_n x = x$, поэтому $T_0 x = x$ и $x \in R(T_0)$. Обратно, если $x \in R(T_0)$, то из равенства $T_0^2 = T_0$ следует, что $T_0 x = x$, а так как $TT_0 = T_0$, то $Tx = TT_0 x = T_0 x = x \in N(I - T)$. Таким образом, собственное подпространство оператора T, соответствующее собственному значению $\lambda = 1$, совпадает с $R(T_0)$. Тем самым свойство (6) доказано. Далее по теореме 1 $N(T_0) = R(I - T)^a$. Но из равенства $T_0^2 = T_0$ следует, что $R(I - T_0) \subseteq N(T_0)$, и если $x \in N(T_0)$, то $x = x - T_0 x \in R(I - T_0)$. Поэтому $N(T_0) = R(I - T_0)$. Из условий (6) и (7) выводится разложение (8) и без труда устанавливается его единственность, так как $I = (I - T_0) + T_0$.

Замечание. Собственное подпространство $N(\lambda I - T)$ оператора T, соответствующее собственному значению λ, для которого $|\lambda| = 1$, можно рассматривать как область значений $R(T(\lambda))$, где оператор $T(\lambda)$ определен соотношением

$$T(\lambda)x = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda} T\right)^m x.$$

Статистическая эргодическая теорема фон Неймана. Пусть $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой, и пусть P — взаимно однозначное отображение множества S на себя, *сохраняющее меру*, т. е. $P \cdot B \in \mathfrak{B}$ тогда и только тогда, когда $B \in \mathfrak{B}$ и $m(P \cdot B) = m(B)$.

Определим линейный оператор T, отображающий пространство $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ на себя, равенством

$$(Tx)(s) = x(Ps), \quad x \in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \quad (s \in S). \tag{9}$$

Используя условие сохранения меры при преобразовании P, нетрудно убедиться в том, что T — унитарный оператор, и поэтому выполняется условие (1) равностепенной непрерывности, так как $\|T^n\| = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Поскольку ограниченные множества гильбертова пространства $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ слабо секвенциально компактны, наши рассуждения приводят к *статистической эргодической теореме фон Неймана*: при указанных выше условиях для любого $x \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ предел

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m x = x_0 \in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \tag{10}$$

существует и $Tx_0 = x_0$.

Замечание. Приведенные здесь теоремы 1 и 2 взяты из работы Иосида [3]. См. также Какутани [1] и Рисс [4]. Статистическая эргодическая теорема фон Неймана опубликована в работе фон Неймана [3].

4. Обобщение эргодических теорем Хилле о псевдорезольвентах

Хилле ввел понятие псевдорезольвенты, обобщающее понятие резольвенты. При доказательстве эргодических теорем для псевдорезольвент можно использовать ту же идею, что и при установлении эргодических теорем в предыдущем параграфе (см. Иосида [4], Като [1]). Эти эргодические теоремы можно рассматривать как обобщение абелевых [1]) эргодических теорем Хилле (см. Хилле и Филлипс [1]).

Мы начнем с определения псевдорезольвенты.

Определение. Рассмотрим алгебру [2]) $L(X, X)$ всех непрерывных линейных операторов, отображающих локально выпуклое комплексное линейное топологическое пространство X в себя. Всякая функция J_λ, заданная на некотором множестве $D(J)$ комплексной λ-плоскости, принимающая значения из $L(X, X)$ и удовлетворяющая условию

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\lambda J_\mu \quad \text{(резольвентное уравнение)}, \tag{1}$$

называется *псевдорезольвентой.*

Предложение. Все псевдорезольвенты J_λ, $\lambda \in D(J)$, имеют общее нуль-подпространство, которое мы обозначим через $N(J)$, и общую область значений $R(J)$. Аналогично все операторы $(I - \lambda J_\lambda)$, $\lambda \in D(J)$, имеют общее нуль-подпространство $N(I - J)$ и общую область значений $R(I - J)$. Кроме того, умножение псевдорезольвент коммутативно:

$$J_\lambda J_\mu = J_\mu J_\lambda \quad (\lambda, \mu \in D(J)). \tag{2}$$

Доказательство. Меняя ролями λ и μ в равенстве (1), мы находим, что

$$J_\mu - J_\lambda = (\lambda - \mu) J_\mu J_\lambda = -(\mu - \lambda) J_\mu J_\lambda,$$

откуда следует свойство (2). Первая часть утверждения следует из (1) и (2). Утверждения, относящиеся к оператору $(I - \lambda J_\lambda)$, вытекают

---

[1]) Теоремами *абелева* типа называют предложения, устанавливающие существование некоторого „сильного" предела в предположении существования „слабого" предела. Противоположные по характеру теоремы, устанавливающие существование „слабого" предела в предположении, что этот предел может быть получен некоторым „более сильным" способом, называются теоремами *тауберова* типа. — *Прим. перев.*

[2]) *Алгеброй* называется множество X, являющееся одновременно векторным пространством над некоторым скалярным полем K и кольцом и удовлетворяющее условию $\alpha(xy) = (\alpha x) y = x(\alpha y)$ $(x, y \in X, \alpha \in K)$, где xy — операция умножения в кольце. — *Прим. перев.*

из равенства

$$(I-\lambda J_\lambda)=(I-(\lambda-\mu)J_\lambda)(I-\mu J_\mu), \tag{1'}$$

которое представляет собой видоизменение условия (1).

Теорема 1. Псевдорезольвента J_λ служит резольвентой некоторого линейного оператора A в том и только в том случае, когда $N(J)=\{0\}$; при этом множество $R(J)$ совпадает с областью определения $D(A)$ оператора A.

Доказательство. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Предположим, что $N(J)=\{0\}$. В этом случае обратный оператор J_λ^{-1} существует при всех $\lambda\in D(J)$. Тогда

$$\lambda I-J_\lambda^{-1}=\mu I-J_\mu^{-1}\quad(\lambda,\ \mu\in D(J)). \tag{3}$$

В самом деле, из (1) и (2) видно, что

$$J_\lambda J_\mu\left(\lambda I-J_\lambda^{-1}-\mu I+J_\mu^{-1}\right)=(\lambda-\mu)J_\lambda J_\mu-J_\lambda J_\mu\left(J_\lambda^{-1}-J_\mu^{-1}\right)=$$
$$=(\lambda-\mu)J_\lambda J_\mu-(J_\mu-J_\lambda)=0.$$

Теперь можно положить

$$A=\left(\lambda I-J_\lambda^{-1}\right). \tag{4}$$

Тогда $J_\lambda=(\lambda I-A)^{-1}$ для всех $\lambda\in D(J)$.

Лемма 1. Допустим, что существует последовательность $\{\lambda_n\}$ комплексных чисел из области $D(J)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n=0 \text{ и семейство операторов } \{\lambda_n J_{\lambda_n}\}$$
$$\text{равностепенно непрерывно.} \tag{5}$$

Тогда

$$R(I-J)^a=\left\{x\in X;\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x=0\right\} \tag{6}$$

и, следовательно,

$$N(I-J)\cap R(I-J)^a=\{0\}. \tag{7}$$

Доказательство. Из (1) следует, что

$$\lambda J_\lambda(I-\mu J_\mu)=\left(1-\mu(\mu-\lambda)^{-1}\right)\lambda J_\lambda-\lambda(\lambda-\mu)^{-1}\mu J_\mu. \tag{8}$$

Отсюда видно, что если $x\in R(I-\mu J_\mu)=R(I-J)$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x=0$, так как имеет место условие (5). Пусть $y\in R(I-J)^a$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и произвольного $\varepsilon>0$ найдется такой элемент $x\in R(I-J)$, что $q(y-x)<\varepsilon$. По условию (5) для всякой непрерывной полунормы q' на X можно указать такую непрерывную полунорму q на X, что выполняются неравенства

$$q'\left(\lambda_n J_{\lambda_n}(y-x)\right)\leqslant q(y-x)\quad(n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}y=0$, поскольку $\lambda_n J_{\lambda_n}y=\lambda_n J_{\lambda_n}x+\lambda_n J_{\lambda_n}(y-x)$.

Обратно, допустим, что для некоторого элемента $x \in X$ выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = 0$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и любого $\varepsilon > 0$ существует такое λ_n, что $q\left(x - \left(x - \lambda_n J_{\lambda_n} x\right)\right) < \varepsilon$. Следовательно, элемент x должен принадлежать области $R\left(I - \lambda_n J_{\lambda_n}\right)^a = R(I - J)^a$. Лемма доказана.

Лемма 1′. Предположим, что существует такая числовая последовательность $\{\lambda_n\} \subseteq D(J)$, что

$$\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = \infty \text{ и семейство операторов } \left\{\lambda_n J_{\lambda_n}\right\} \text{ равностепенно непрерывно.} \tag{5′}$$

Тогда

$$R(J)^a = \left\{x \in X;\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x\right\} \tag{6′}$$

и, следовательно,

$$N(J) \cap R(J)^a = \{0\}. \tag{7′}$$

Доказательство. Из условия (1) мы получаем соотношение

$$\lambda J_\lambda J_\mu = \frac{\mu}{\lambda} \lambda J_\lambda J_\mu - \frac{1}{\lambda} \lambda J_\lambda + J_\mu.$$

Поэтому если $x \in R(J_\mu) = R(J)$, то, согласно (5′), $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x$. Пусть $y \in R(J)^a$. Тогда для любой непрерывной полунормы q на X и всякого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $x \in R(J)$, что $q(y - x) < \varepsilon$. Из условия (5′) следует, что для всякой непрерывной полунормы q' на X найдется такая непрерывная полунорма q на X, что

$$q'\left(\lambda_n J_{\lambda_n}(y - x)\right) \leqslant q(y - x) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Следовательно, из условия (5′) и равенства

$$\lambda_n J_{\lambda_n} y - y = \left(\lambda_n J_{\lambda_n} x - x\right) + (x - y) + \lambda_n J_{\lambda_n}(y - x)$$

можно заключить, что $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} y = y$.

Обратно, пусть для элемента $x \in X$ выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x = x$. Тогда для всякой непрерывной полунормы q на X и произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое значение λ_n, что $q\left(x - \lambda_n J_{\lambda_n} x\right) < \varepsilon$. Поэтому элемент x должен принадлежать области $R\left(J_{\lambda_n}\right)^a = R(J)^a$.

Теорема 2. Предположим, что выполняется условие (5). Допустим, что для некоторого $x \in X$ можно выбрать такую подпоследовательность $\{n'\}$ последовательности $\{n\}$, что существует слабый предел

$$w\text{-}\lim_{n'\to\infty} \lambda_{n'} J_{\lambda_{n'}} x = x_h \in X. \tag{9}$$

Тогда $x_h = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n J_{\lambda_n} x$, $x_h \in N(I - J)$ и $x_p = (x - x_h) \in R(I - J)^a$.

Доказательство. Полагая в равенстве (1′) $\mu=\lambda_{n'}$ и $n'\to\infty$, мы видим, что ввиду условия (5) $(I-\lambda J_\lambda)x=(I-\lambda J_\lambda)(x-x_h)$, т. е. $(I-\lambda J_\lambda)x_h=0$. Поэтому $x_h\in N(I-J)$ и

$$\lambda_n J_{\lambda_n}x=x_h+\lambda_n J_{\lambda_n}(x-x_h). \tag{10}$$

Итак, остается лишь показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}(x-x_h)=0$, а для этого по лемме 1 достаточно проверить, что $(x-x_h)\in R(I-J)^a$. Но $\left(x-\lambda_n J_{\lambda_n}x\right)\in R(I-J)$, откуда, согласно теореме 11, гл. V, § 1, вытекает, что $(x-x_h)\in R(I-J)^a$.

Следствие 1. Допустим, что ограниченные множества в X слабо секвенциально компактны; пусть выполняется условие (5). Тогда

$$X=N(I-J)\oplus R(I-J)^a. \tag{11}$$

Доказательство. Для любого $x\in X$ положим $x_h=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x$ и $x_p=(x-x_h)$. Тогда x_h и x_p служат однозначно определенными компонентами разложения x по формуле (11):

$$x=x_h+x_p,\quad x_h\in N(I-J),\quad x_p\in R(I-J)^a.$$

Теорема 2′. Пусть выполняется условие (5′). Допустим, что для некоторого элемента $x\in X$ можно выбрать подпоследовательность $\{n'\}$ последовательности $\{n\}$, такую, что существует слабый предел

$$w\text{-}\lim_{n'\to\infty}\lambda_{n'}J_{\lambda_{n'}}x=x_{h'}\in X. \tag{9′}$$

Тогда $x_{h'}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x$ и $x_{h'}\in R(J)^a$, $x_{p'}=(x-x_{h'})\in N(J)$.

Доказательство. Полагая в условии (8) $\mu=\lambda_{n'}$ и $n'\to\infty$, мы на основании (5′) заключаем, что $\lambda J_\lambda(x-x_{h'})=0$, а это означает, что $(x-x_{h'})\in N(J)$. Поэтому

$$\lambda_n J_{\lambda_n}x=\lambda_n J_{\lambda_n}x_{h'}. \tag{10′}$$

Таким образом, остается лишь показать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x_{h'}=x_{h'}$, а для этого, согласно лемме 1′, достаточно убедиться в том, что $x_{h'}\in R(J)^a$. Но $\lambda_{n'}J_{\lambda_{n'}}x_{h'}\in R(J)$, и поэтому, согласно теореме 11, гл. V, § 1, $x_{h'}\in R(J)^a$.

Следствие 1′. Пусть выполняется условие (5′), и ограниченные множества в X слабо секвенциально компактны. Тогда

$$X=N(J)\oplus R(J)^a. \tag{11′}$$

Доказательство. Для произвольного $x\in X$ компонентами разложения $x=x_{h'}+x_{p'}$ служат элементы $x_{h'}=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n J_{\lambda_n}x$ и $x_{p'}=(x-x_{h'})$ $(x_{h'}\in R(J)^a,\ x_{p'}\in N(J))$.

Замечание. Из полученных результатов вытекает такое следствие: в рефлексивном B-пространстве X псевдорезольвента J_λ, удовлетворяющая условию (5′), служит резольвентой некоторого замкнутого линейного оператора A с плотной областью определения тогда и только тогда, когда $R(J)^a = X$. Этот результат принадлежит Като [1]. Доказательство легко получить при помощи теоремы Эберлейна, согласно которой ограниченные множества B-пространства X слабо секвенциально компактны тогда и только тогда, когда оно рефлексивно.

5. Среднее значение почти-периодической функции

В качестве приложения статистической эргодической теоремы мы приведем доказательство существования среднего значения почти-периодической функции.

Определение 1. Множество G элементов $g, h, \ldots$ называется *группой*, если в G для любой пары элементов (g, h) определено произведение gh, удовлетворяющее следующим условиям:

$$gh \in G; \tag{1}$$

$$(gh)k = g(hk) \text{ (ассоциативность)}; \tag{2}$$

существует единственный элемент $e \in G$, такой, что $eg = ge = g$ для всех $g \in G$; элемент e называется *единицей* группы G; (3)

для всякого $g \in G$ существует единственный элемент $g^{-1} \in G$, такой, что $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; элемент g^{-1} называется *обратным* к g. (4)

Ясно, что элемент g служит обратным для g^{-1}, так что $(g^{-1})^{-1} = g$. Если для всех $g, h \in G$ выполняется условие $gh = hg$, то группа называется *коммутативной*, или *абелевой*.

Пример. Множество всех комплексных матриц порядка n, определители которых равны единице, является группой по отношению к операции умножения матриц. Это так называемая *комплексная унимодулярная группа* порядка n. Единицей в этой группе служит единичная матрица, а элементом, обратным к a, является обратная матрица a^{-1}. Аналогично определяется *вещественная унимодулярная группа*. При $n \geqslant 2$ эти группы некоммутативны.

Определение 2 (фон Нейман [4]). Рассмотрим некоторую абстрактную группу G. Заданная на G комплексная функция $f(g)$ называется *почти-периодической*[1]) на G, если выполняется следующее условие:

множество функций $\{f_s(g, h);\ s \in G\}$, где $f_s(g, h) = f(gsh)$, заданных на произведении $G \times G$, вполне ограничено в топологии равномерной сходимости на $G \times G$ (т. е. по метрике $d(f_1(g, h), f_2(g, h)) = \sup\limits_{g, h \in G} |f_1 - f_2|$). (5)

[1]) Элементарное определение почти-периодической (по Бору) функции приводится в § 10 гл. XI. — *Прим. перев.*

Пример. Пусть G — множество R^1 всех вещественных чисел с групповой операцией, определенной как сложение; это так называемая *аддитивная группа вещественных чисел*. Функция $f(g)=e^{i\alpha g}$, где α — вещественное число и $i=\sqrt{-1}$, является почти-периодической на R^1. Это следует из равенства $f(gsh)=e^{i\alpha g}\cdot e^{i\alpha s}\cdot e^{i\alpha h}$ и того факта, что множество $\{e^{i\alpha t};\ t\in R^1\}$ вполне ограничено как множество комплексных чисел, равных по модулю единице.

Предложение 1. Пусть $f(g)$ — почти-периодическая функция, определенная на группе G. Следуя А. Вейлю, определим функцию

$$\operatorname{dis}(s, u)=\sup_{g,\,h\in G}|f(gsh)-f(guh)| \qquad (s, u\in G). \tag{6}$$

Тогда

$$\operatorname{dis}(s, u)=\operatorname{dis}(asb, aub) \tag{7}$$

при любых a, $b\in G$.

Доказательство. Утверждение следует из определения (6) и свойств группы.

Следствие 1. Множество E всех элементов $s\in G$, удовлетворяющих условию $\operatorname{dis}(s, e)=0$, образует *инвариантную подгруппу*[1] группы G, т. е. обладает следующими свойствами:

$$\text{если } e_1, e_2\in E, \text{ то } e_1e_2\in E \text{ и } ae_1a^{-1}\in E \text{ для любого элемента } a\in G. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $\operatorname{dis}(e_1, e)=0$ и $\operatorname{dis}(e_2, e)=0$. Тогда из условия (7) и неравенства треугольника (которое здесь, как нетрудно проверить, выполняется) получаем

$$\operatorname{dis}(e_1e_2, e)\leqslant\operatorname{dis}(e_1e_2, e_1e)+\operatorname{dis}(e_1e, e)=0+0=0,$$

т. е. $\operatorname{dis}(e_1e_2, e)=0$. Аналогично если $\operatorname{dis}(e_1, e)=0$, то

$$\operatorname{dis}(ae_1a^{-1}, e)=\operatorname{dis}(ae_1a^{-1}, aea^{-1})=0.$$

Следствие 2. Условимся записью $s\equiv u\ (\operatorname{mod} E)$ обозначать тот факт, что $su^{-1}\in E$ $(s, u\in G)$. Тогда условие $s\equiv u\ (\operatorname{mod} E)$ эквивалентно равенству $\operatorname{dis}(s, u)=0$.

Доказательство. Утверждение следует из равенств

$$\operatorname{dis}(su^{-1}, e)=\operatorname{dis}(s, eu)=\operatorname{dis}(s, u).$$

Следствие 3. Отношение $s\equiv u\ (\operatorname{mod} E)$ является отношением эквивалентности, т. е. обладает следующими свойствами:

$$s\equiv s\ (\operatorname{mod} E), \tag{9}$$

$$\text{если } s\equiv u\ (\operatorname{mod} E), \text{ то } u\equiv s\ (\operatorname{mod} E), \tag{10}$$

$$\text{если } s_1\equiv s_2\ (\operatorname{mod} E) \text{ и } s_2\equiv s_3\ (\operatorname{mod} E), \text{ то } s_1\equiv s_3\ (\operatorname{mod} E). \tag{11}$$

[1]) Эту подгруппу называют также *нормальным делителем* группы G. — *Прим. перев.*

Доказательство. Это вытекает из неравенства треугольника и следствия 2.

Теперь мы можем определить *факторгруппу по подгруппе* E, или *группу классов вычетов* по модулю E, которую мы обозначим через G/E, аналогично тому, как определялось факторпространство линейного пространства. Обозначим через ξ_x множество всех элементов группы G, эквивалентных относительно подгруппы E фиксированному элементу $x \in G$, т. е. *класс вычетов* $(\operatorname{mod} E)$, содержащий элемент $x \in G$. Совокупность всех классов вычетов ξ_x с операцией умножения

$$\xi_x \xi_y = \xi_{xy} \tag{12}$$

образует группу G/E. Для обоснования корректности определения (12) произведения $\xi_x \xi_y$ нужно показать, что

$$\text{если } x_1 \equiv x_2 (\operatorname{mod} E), \ y_1 \equiv y_2 (\operatorname{mod} E), \ \text{то } x_1 y_1 \equiv x_2 y_2 (\operatorname{mod} E). \tag{13}$$

Это вытекает из свойства (7) и следствия 2:

$$\begin{aligned}\operatorname{dis}(x_1 y_1, x_2 y_2) &\leqslant \operatorname{dis}(x_1 y_1, x_2 y_1) + \operatorname{dis}(x_2 y_1, x_2 y_2) = \\ &= \operatorname{dis}(x_1, x_2) + \operatorname{dis}(y_1, y_2) = 0 + 0 = 0, \ \text{т. е. } \operatorname{dis}(x_1 y_1, x_2 y_2) = 0.\end{aligned}$$

Поскольку функция $f(x)$, фигурирующая в определении (6), принимает одно и то же постоянное значение на всех элементах класса ξ_x, мы можем рассматривать $f(x)$ как функцию $F(\xi_x)$, заданную на факторгруппе G/E.

Следствие 4. Факторгруппа G/E с функцией расстояния

$$d(\xi_x, \xi_y) = \operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y) = \operatorname{dis}(x, y) \tag{14}$$

образует метрическое пространство.

Доказательство. Если $x \equiv x_1 (\operatorname{mod} E)$ и $y = y_1 (\operatorname{mod} E)$, то

$$\operatorname{dis}(x, y) \leqslant \operatorname{dis}(x, x_1) + \operatorname{dis}(x_1, y_1) + \operatorname{dis}(y_1, y) = 0 + \operatorname{dis}(x_1, y_1) + 0.$$

Аналогично $\operatorname{dis}(x_1, y_1) \leqslant \operatorname{dis}(x, y)$, откуда $\operatorname{dis}(x, y) = \operatorname{dis}(x_1, y_1)$. Это показывает, что функция расстояния (14) в пространстве G/E определена корректно.

Следствие 5. Группа G/E является *топологической группой* по отношению к метрике $\operatorname{dis}(\xi_x, \xi_y)$, т. е. операция умножения $\xi_x \xi_y$ непрерывна как отображение пространства $(G/E) \times (G/E)$ на G/E и операция ξ_x^{-1} непрерывна как отображение группы G/E на себя[1]).

---

[1]) Группа H, являющаяся в то же время топологическим пространством X, называется *топологической группой*, если отображение $X \times X \ni \{x, y\} \to xy^{-1} \in X$ непрерывно. В следствии 5 используется, очевидно, эквивалентное определение. — *Прим. перев.*

Доказательство. Из (7) следует, что

$$\operatorname{dis}(su,\ s'u') \leqslant \operatorname{dis}(su,\ s'u) + \operatorname{dis}(s'u,\ s'u') = \operatorname{dis}(s,\ s') + \operatorname{dis}(u,\ u')$$

и

$$\operatorname{dis}(s^{-1},\ u^{-1}) = \operatorname{dis}(ss^{-1}u,\ su^{-1}u) = \operatorname{dis}(u,\ s) = \operatorname{dis}(s,\ u).$$

Приведенные рассуждения позволяют установить следующую теорему.

Теорема 1 (А. Вейль). Топологическая группа G/E с метрикой (14) представляет собой вполне ограниченное метрическое пространство, и функция $f(x)$ порождает функцию $F(\xi_x)(=f(x))$, которая равномерно непрерывна на группе G/E.

Доказательство. Равномерная непрерывность функции $F(\xi_x)$ следует из неравенства

$$|F(\xi_x) - F(\xi_y)| = |f(x) - f(y)| \leqslant \operatorname{dis}(x,\ y) = \operatorname{dis}(\xi_x,\ \xi_y).$$

Тот факт, что пространство G/E вполне ограничено, вытекает из почти-периодичности функции $f(x)$ и свойств (7) и (14).

Таким образом, при помощи этой теоремы теория почти-периодических функций сводится к изучению равномерно непрерывных функций $f(g)$, заданных на вполне ограниченной топологической группе G, метризованной с помощью функции расстояния $\operatorname{dis}(g_1,\ g_2)$, удовлетворяющей условию (7). Это обстоятельство мы и используем для доказательства существования среднего значения почти-периодической функции.

Поскольку пространство G вполне ограничено, для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная система точек $g_1, g_2, \ldots, g_n$, такая, что $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{dis}(g,\ g_i) \leqslant \varepsilon$ для всех $g \in G$. Придавая ε значения $1,\ 2^{-1},\ 3^{-1},\ \ldots$ и объединяя соответствующие конечные системы точек $g_1, \ldots, g_n$, мы получаем счетное множество $\{g_i\}$ точек G, плотное в G. Выберем произвольную последовательность положительных чисел α_j, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$. Обозначим через $C(G)$ совокупность всех равномерно непрерывных комплексных функций $h(g)$, заданных на G. Множество $C(G)$ с операциями сложения функций, умножения функций на комплексные числа и с нормой $\|h\| = \sup\limits_{g \in G} |h(g)|$ образует B-пространство. Определим оператор T, отображающий $C(G)$ в себя, формулой

$$(T \cdot h)(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h(g_j g). \tag{15}$$

По условию равномерной непрерывности функции $h(g)$ на G для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что из неравенства $\operatorname{dis}(g,\ g') \leqslant \delta$ следует неравенство $|h(g) - h(g')| \leqslant \varepsilon$. Отсюда, согласно (7), мы получаем неравенство $|h(g_j g) - h(g_j g')| \leqslant \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots)$ при $\operatorname{dis}(g, g') \leqslant \delta$. Следовательно, T — ограниченный линейный оператор, отображающий пространство $C(G)$ в себя, так как $\alpha_j > 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j = 1$. Аналогичные рассуждения показывают, что функции $h_n(g)$, определяемые равенствами

$$h_n(g) = n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m h)(g) \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{16}$$

(их можно представить в форме $h_n(g) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j h(g'_j g)$, $\beta_j > 0$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$), равномерно ограничены и равностепенно непрерывны (относительно n). Поэтому, согласно теореме Асколи — Арцела, последовательность $\{h_n(g)\}$ содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся на множестве G.

Таким образом, согласно статистической эргодической теореме, существует такая функция $h^*(g) \in C(G)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{g \in G} |h_n(g) - h^*(g)| = 0 \quad \text{и} \quad Th^* = h^*. \tag{17}$$

Предложение 2. Полученная выше функция $h^*(g)$ тождественно равна постоянной.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать функции $h(g)$ и $h^*(g)$ вещественными. Допустим, что существуют точка $g_0 \in G$ и положительная постоянная δ, такие, что

$$h^*(g_0) \leqslant \beta - 2\delta, \quad \text{где} \quad \beta = \sup_{g \in G} h^*(g).$$

Функция $h^*(g)$ равномерно непрерывна, поэтому найдется такое положительное число ε, что из условия $\operatorname{dis}(g', g'') \leqslant \varepsilon$ будет вытекать неравенство $|h^*(g') - h^*(g'')| \leqslant \delta$. В частности, $h^*(g'') \leqslant \beta - \delta$ при $\operatorname{dis}(g_0, g'') \leqslant \varepsilon$. Так как построенная ранее последовательность $\{g_j\}$ плотна в G, для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой индекс n, что для любой точки $g \in G$ справедливо неравенство $\min\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{dis}(g, g_j) \leqslant \varepsilon$. Следовательно, согласно (7), для любой точки $g \in G$

$$\min_{1 \leqslant j \leqslant n} \operatorname{dis}(g_0, g_j g) \leqslant \varepsilon.$$

Допустим, что этот минимум достигается при $j = j_0$. Тогда

$$h^*(g) = (Th^*)(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h^*(g_j g) \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_{j_0}(\beta - \delta) + (1 - \alpha_{j_0})\beta = \beta - \alpha_{j_0}\delta < \beta$$

вопреки тому, что точка g выбиралась совершенно произвольно. Поэтому функция $h^*(g)$ тождественно равна постоянной.

Определение 3. Постоянное значение $h^*(g)$ мы назовем *левым средним значением* функции $h(g)$ и обозначим его через $M_g^l(h(g))$:

$$M_g^l(h(g)) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m h)(g). \tag{18}$$

Теорема 2 (фон Нейман). Среднее значение M_g^l обладает следующими свойствами:

1° $M_g^l(\alpha h(g)) = \alpha M_g^l(h(g))$;
2° $M_g^l(h_1(g) + h_2(g)) = M_g^l(h_1(g)) + M_g^l h_2(g))$;
3° $M_g^l(1) = 1$;
4° если $h(g) \geqslant 0$ на множестве G, то $M_g^l(h(g)) \geqslant 0$; если, кроме того, $h(g) \not\equiv 0$, то $M_g^l(h(g)) > 0$;
5° $|M_g^l(h(g))| \leqslant M_g^l(|h(g)|)$;
6° $M_g^l(\overline{h(g)}) = \overline{M_g^l(h(g))}$;
7° $M_g^l(h(ga)) = M_g^l(h(g))$;
8° $M_g^l(h(ag)) = M_g^l(h(g))$;
9° $M_g^l(h(g^{-1})) = M_g^l(h(g))$.

Доказательство. Свойства 1° — 3° и первая часть 4°, а также 5° и 6° следуют непосредственно из определения (18); свойство 7° легко доказывается с помощью предложения 2. Докажем равенство 8°.

Определим линейный оператор T' формулой

$$(T'h)(g) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j h(gg_j).$$

Это позволяет по аналогии с $M_g^l(h(g))$ определить *правое среднее значение* $M_g^r(h(g))$ функции $h(g)$. Функционал $M_g^r(h(g))$ удовлетворяет условиям 1° — 3°, первой части 4°, условиям 5°, 6° и 8°. Остается лишь показать, что правое и левое средние значения совпадают. По определению левого среднего значения для всякого $\varepsilon > 0$ существуют последовательность элементов $\{k_j\} \subseteq G$ и последовательность положительных чисел β_j, удовлетворяющих условию $\sum_{j=1}^{\infty} \beta_j = 1$, такие, что

$$\sup_{g\in G} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j h(k_j g) - M_g^l(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{19}$$

Аналогично существуют последовательность элементов $\{s_j\} \subseteq G$ и последовательность положительных чисел $\gamma_j \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j = 1 \right)$, такие, что

$$\sup_{g \in G} \left| \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j h(gs_j) - M_g^r(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon. \tag{20}$$

Из условия 7° и неравенства (19) мы получаем

$$\sup_{g \in G} \left| \sum_{i,j} \gamma_i \beta_j h(k_j g s_i) - M_g^l(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon;$$

точно так же из (20) и условия 8° находим

$$\sup_{g \in G} \left| \sum_{i,j} \gamma_i \beta_j h(k_j g s_i) - M_g^r(h(g)) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Из этих неравенств видно, что $M_g^l(h(g)) = M_g^r(h(g))$.

Заметим, что линейный функционал $M_g(h(g))$, заданный на $C(G)$, однозначно определяется условиями 1°—3°, первой частью 4° и 5°—7° (или 8°). В самом деле, согласно (20),

$$M_g^r(h(g)) - \varepsilon \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i h(gs_i) \leqslant M_g^r(h(g)) + \varepsilon$$

для вещественных функций $h(g)$.

Поэтому для вещественной функции $h(g)$ значение функционала $M_g(h(g))$ должно совпадать с правым средним $M_g^r(h(g))$, а следовательно, и с левым средним $M_g^l(h(g))$. Поэтому $M_g = M_g^r = M_g^l$. Так как $M_g = M_g^r$, то для M_g справедливо утверждение 8°. Кроме того, линейный функционал $M_g^l(h(g^{-1}))$ удовлетворяет условиям 1°—3°, первой части 4°, 5°, 6° и 8°, поэтому $M_g^l(h(g^{-1})) = M_g^r(h(g)) = M_g^l(h(g))$, т. е. имеет место равенство 9°.

Наконец, докажем вторую часть утверждения 4°. Допустим, что $h(g_0) > 0$. Так как пространство G вполне ограничено, для любого $\varepsilon > 0$ существует конечная система элементов $s_1, s_2, \ldots, s_n$, такая, что

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \sup_{g \in G} |h(gs_i) - h(gs)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad s \in G.$$

Это следует из равномерной непрерывности функции $h(g)$ и равенства $\operatorname{dis}(gs_i, gs) = \operatorname{dis}(s_i, s)$. Следовательно, при $\varepsilon = h(g_0)/2$ для всякого $s \in G$ найдется такой индекс i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, что

$$h(g_0 s_i^{-1} s) \geqslant h(g_0)/2.$$

Отсюда, поскольку функция $h(g)$ неотрицательна, мы получаем

$$\sum_{i=1}^{n} h\left(g_0 s_i^{-1} s\right) \geqslant h\left(g_0\right)/2 > 0 \quad \text{для всех} \quad s \in G.$$

Взяв правые средние значения от обеих частей этого неравенства, мы приходим к неравенству

$$M_g^r\left(\sum_{i=1}^{r} h\left(g_0 s_i^{-1} s\right)\right) = n M_s^r(h(s)) \geqslant h(g_0)/2 > 0,$$

которое и доказывает вторую часть утверждения 4°.

Замечания. Идея введения метрики (14) восходит к работе А. Вейля [1]. Приложение статистической эргодической теоремы к доказательству существования среднего значения почти-периодической функции принадлежит автору настоящей книги. См. также Маак [1] [1]).

6. Резольвента сопряженного оператора

Лемма 1. Пусть X и Y — комплексные B-пространства и T — линейный оператор, такой, что $D(T)^a = X$ и $R(T) \subseteq Y$. Тогда оператор $(T')^{-1}$ существует в том и только в том случае, когда $R(T)^a = Y$.

Доказательство. Если $T' y_0^* = 0$, то

$$\langle x, T' y_0^* \rangle = \langle Tx, y_0^* \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(T),$$

откуда $y_0^*\left(R(T)^a\right) = 0$. Значит, из условия $R(T)^a = Y$ следует, что $y_0^* = 0$, и поэтому оператор T' обладает обратным оператором. С другой стороны, если $y_0 \notin R(T)^a$, то по теореме Хана — Банаха существует такой линейный функционал $y_0^* \in Y'$, что $y_0^*(y_0) = 1$ и $y_0^*\left(R(T)^a\right) = 0$. Следовательно, $\langle Tx, y_0^* \rangle = 0$ для всех $x \in D(T)$, и поэтому $y_0^* \in D(T')$ и $T' y_0^* = 0$, в то время как $y_0^*(y_0) \neq 0$, т. е. $y_0^* \neq 0$. Таким образом, условие $R(T)^a \neq Y$ приводит к выводу, что оператор T' не имеет обратного.

Теорема 1 (Филлипс [2]). Пусть линейный оператор T имеет обратный оператор и $D(T)^a = X$, $R(T)^a = Y$, где X и Y — два B-пространства. Тогда

$$(T')^{-1} = \left(T^{-1}\right)'. \tag{1}$$

---

[1]) По элементарной теории почти-периодических функций см. также Б. М. Левитан [1*]. — *Прим. перев.*

При этом оператор T^{-1}, определенный на пространстве Y, ограничен тогда и только тогда, когда оператор T замкнут и оператор $(T')^{-1}$ ограничен на пространстве X'_s.

Доказательство. Оператор $(T^{-1})'$ существует, так как множество $D(T^{-1})=R(T)$ плотно в Y. Существование оператора $(T')^{-1}$ следует из леммы 1. Докажем равенство (1). Если $y\in R(T)$ и $y^*\in D(T')$, то

$$\langle y,\ y^*\rangle=\langle TT^{-1}y,\ y^*\rangle=\langle T^{-1}y,\ T'y^*\rangle.$$

Это означает, что $R(T')\subseteq D((T^{-1})')$ и $(T^{-1})'(T'y^*)=y^*$ для всех $y^*\in D(T')$. Таким образом, $(T^{-1})'$ служит расширением оператора $(T')^{-1}$. Далее, если $x\in D(T)$, то

$$\langle x,\ x^*\rangle=\langle T^{-1}Tx,\ x^*\rangle=\langle Tx,\ (T^{-1})'x^*\rangle \quad \text{для всех} \quad x^*\in D((T^{-1})').$$

Поэтому $R((T^{-1})')\subseteq D(T')$ и $T'(T^{-1})'x^*=x^*$ для всех $x^*\in D((T^{-1})')$. Следовательно, $(T^{-1})'$ — сужение оператора $(T')^{-1}$. Отсюда вытекает справедливость равенства (1).

Если, кроме того, T^{-1} — ограниченный оператор на Y, то и оператор $(T^{-1})'$ ограничен. Очевидно также, что при этих условиях оператор T замкнут. Обратно, если оператор $(T')^{-1}$ ограничен на пространстве X'_s, а оператор T замкнут, то для всех $x\in R(T)$ и $x^*\in X'$, согласно (1), справедлива оценка

$$|\langle T^{-1}x,\ x^*\rangle|=|\langle x,\ (T^{-1})'x^*\rangle|=|\langle x,\ (T')^{-1}\ x^*\rangle|\leqslant \leqslant\|(T')^{-1}\|\cdot\|x^*\|\cdot\|x\|.$$

Отсюда, поскольку оператор T^{-1} при указанных условиях замкнут и $R(T)^a=Y$, оператор T^{-1} должен быть ограниченным.

Лемма 2. Пусть T — линейный оператор, такой, что $D(T)^a=X$ и $R(T)\subseteq Y$, где X и Y—два B-пространства. Если множество $R(T')$ слабо* плотно в X', то оператор T имеет обратный.

Доказательство. Допустим, что существует элемент $x_0\neq 0$, для которого $Tx_0=0$. Тогда

$$\langle x_0,\ T'y^*\rangle=\langle Tx_0,\ y^*\rangle=0 \text{ для всех } y^*\in D(T').$$

Это показывает, что слабое* замыкание множества $R(T')$ является собственным подпространством в X', вопреки условию теоремы. Поэтому обратный оператор T^{-1} существует.

Теорема 2 (Филлипс [2]). Пусть X — комплексное B-пространство и T — замкнутый линейный оператор, такой, что $D(T)^a=X$ и $R(T)\subseteq X$. Тогда

$$\rho(T)=\rho(T') \text{ и } R(\lambda;\ T)'=R(\lambda;\ T') \text{ для всех } \lambda\in\rho(T). \tag{2}$$

Доказательство. Если $\lambda \in \rho(T)$, то по теореме 1 $\lambda \in \rho(T')$ и $R(\lambda;\ T)' = R(\lambda;\ T')$. Если $\lambda \in \rho(T')$, то по лемме 2 оператор $(\lambda I - T)$ имеет обратный $(\lambda I - T)^{-1}$, и оба эти оператора замкнуты. Из леммы 1 следует, что множество $D\left((\lambda I - T)^{-1}\right) = R(\lambda I - T)$ сильно плотно в Y. Поэтому, согласно теореме 1, $\lambda \in \rho(T)$. Теорема доказана.

7. *Операторное исчисление*

Рассмотрим ограниченный линейный оператор $T \in L(X, X)$, где X — комплексное B-пространство. Мы определим функцию $f(T)$ от оператора T формулой, аналогичной интегральной формуле Коши:

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_C f(\lambda) R(\lambda;\ T)\, d\lambda.$$

Для этого обозначим через $F(T)$ совокупность всех комплексных функций $f(\lambda)$, голоморфных в некоторой окрестности спектра $\sigma(T)$ оператора T. Эти окрестности не обязательно связны и могут зависеть от $f(\lambda)$. Пусть $f \in F(T)$, и пусть открытое множество $U \supseteq \sigma(T)$ комплексной плоскости содержится в области голоморфности функции f. Допустим также, что граница Γ этого множества состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, ориентированных в положительном направлении. Тогда ограниченный линейный оператор $f(T)$ определяется формулой

$$f(T) = (2\pi i)^{-1} \int\limits_\Gamma f(\lambda) R(\lambda;\ T)\, d\lambda\ ^{1)}. \tag{1}$$

Согласно интегральной теореме Коши, значение $f(T)$ зависит только от функции f и оператора T и не зависит от выбора области U.

Следующая теорема служит основой *операторного исчисления.*

Теорема (Данфорд). Если функции f и g принадлежат множеству $F(T)$ и α, β — произвольные комплексные числа, то справедливы следующие утверждения:

$$\alpha f + \beta g \in F(T) \text{ и } \alpha f(T) + \beta g(T) = (\alpha f + \beta g)(T); \tag{2}$$

$$f \cdot g \in F(T) \text{ и } f(T) \cdot g(T) = (f \cdot g)(T); \tag{3}$$

если разложение Тейлора $f(\lambda) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n \lambda^n$ функции f сходится в окрестности U спектра $\sigma(T)$, то $f(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n T^n$ (сходимость понимается в смысле топологии, определяемой нормой оператора); (4)

[1]) Автор называет правую часть (1) *интегралом Данфорда.* — *Прим. перев.*

пусть функции $f_n \in F(T)$ $(n=1, 2, \ldots)$ голоморфны в некоторой фиксированной окрестности U спектра $\sigma(T)$; если последовательность функций $f_n(\lambda)$ равномерно сходится в области U к функции $f(\lambda)$, то последовательность $f_n(T)$ сходится к $f(T)$ в топологии, определяемой нормой оператора; (5)

если $f \in F(T)$, то $f \in F(T')$ и $f(T') = f(T)'$. (6)

Доказательство. Утверждение (2) очевидно.

Доказательство утверждения (3). Пусть U_1 и U_2 — открытые окрестности спектра $\sigma(T)$, границы Γ_1 и Γ_2 которых состоят из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и пусть $U_1+\Gamma_1 \subsetneqq U_2$, а множество $U_2+\Gamma_2$ содержится в области голоморфности функций f и g. Используя резольвентное уравнение и интегральную формулу Коши, мы получаем

$$f(T)g(T) = -(4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)R(\lambda;\ T)\,d\lambda \cdot \int_{\Gamma_2} g(\mu)R(\mu;\ T)\,d\mu =$$

$$= -(4\pi^2)^{-1} \int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} f(\lambda)g(\mu)(\mu-\lambda)^{-1}(R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T))\,d\lambda\,d\mu =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{\Gamma_1} f(\lambda)R(\lambda;\ T)\left\{(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_2}(\mu-\lambda)^{-1}g(\mu)\,d\mu\right\}d\lambda -$$

$$-(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_2} g(\mu)R(\mu;\ T)\left\{(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1}(\mu-\lambda)^{-1}f(\lambda)\,d\lambda\right\}d\mu =$$

$$= (2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} f(\lambda)g(\lambda)R(\lambda;\ T)\,d\lambda = (f\cdot g)(T).$$

Доказательство утверждения (4). По предположению область U содержит внутри некоторый круг вида $\{\lambda;\ |\lambda| \leqslant r_\sigma(T)+\varepsilon,\ \varepsilon>0\}$, где $r_\sigma(T)$ — спектральный радиус оператора T (теорема 4, гл. VIII, § 2). Поэтому степенной ряд $f(\lambda)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\alpha_n\lambda^n$ равномерно сходится в круге $C=\{\lambda;\ |\lambda|\leqslant r_\sigma(T)+\varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon>0$. Отсюда, используя разложение резольвенты в ряд Лорана $R(\lambda;\ T)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda^{-n}T^{n-1}$ (гл. VIII, § 2, (5)) и интегральную формулу Коши, мы выводим равенство

$$f(T)=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_C}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\lambda^k\right)R(\lambda;\ T)\,d\lambda=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\int_{\Gamma_C}\lambda^k R(\lambda;\ T)\,d\lambda=$$

$$=(2\pi i)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Gamma_C}\lambda^{k-n}T^{n-1}\,d\lambda=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k T^k,$$

где Γ_C — граница круга C, что и требовалось доказать.

Утверждение (5) выводится из (1), а (6) доказывается с помощью (1) и формулы (2) предыдущего параграфа.

Следствие 1 (теорема об отображении спектра). Если функция f принадлежит множеству $F(T)$, то $f(\sigma(T))=\sigma(f(T))$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(T)$. Определим вспомогательную функцию g формулой $g(\mu)=(f(\lambda)-f(\mu))/(\lambda-\mu)$. По предыдущей теореме $f(\lambda)I-f(T)=(\lambda I-T)g(T)$. Поэтому если оператор $(f(\lambda)I-f(T))$ имеет ограниченный обратный B, то $g(T)B$ будет ограниченным оператором, обратным $(\lambda I-T)$. Таким образом, из условия $\lambda\in\sigma(T)$ следует, что $f(\lambda)\in\sigma(f(T))$. Обратно, пусть $\lambda\in\sigma(f(T))$; предположим, что $\lambda\notin f(\sigma(T))$. Тогда функция $g_1(\mu)=$ $=(f(\mu)-\lambda)^{-1}$ принадлежит $F(T)$ и, следовательно, по предыдущей теореме $g_1(T)(f(T)-\lambda I)=I$, а это противоречит предположению о том, что $\lambda\in\sigma(f(T))$.

Следствие 2. Если $f\in F(T)$, $g\in F(f(T))$ и $h(\lambda)=g(f(\lambda))$, то функция h принадлежит $F(T)$ и $h(T)=g(f(T))$.

Доказательство. Включение $h\in F(T)$ вытекает из следствия 1. Пусть U_1—открытая окрестность множества $\sigma(f(T))$, граница которой Γ_1 состоит из конечного числа спрямляемых жордановых дуг, и множество $U_1+\Gamma_1$ содержится в области голоморфности функции g. Пусть U_2 — окрестность множества $\sigma(T)$, граница которой Γ_2 состоит из конечного числа спрямляемых жордановых кривых, и множество $U_2+\Gamma_2$ содержится в области голоморфности функции f, причем $f(U_2+\Gamma_2)\subseteq U_1$. Тогда

$$R(\lambda;\ f(T))=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_2}(\lambda-f(\mu))^{-1}R(\mu;\ T)\,d\mu$$

при всех значениях $\lambda\in\Gamma_1$, так как оператор, стоящий в правой части (обозначим его через S), удовлетворяет, согласно свойству (3), уравнению $(\lambda I-f(T))S=S(\lambda I-f(T))=I$. Применяя формулу

Коши, мы получаем

$$g(f(T))=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_1} g(\lambda)R(\lambda;\ f(T))\,d\lambda=$$
$$=(-4\pi^2)^{-1}\int_{\Gamma_1}\int_{\Gamma_2} g(\lambda)(\lambda-f(\mu))^{-1}R(\mu;\ T)\,d\mu\,d\lambda=$$
$$=(2\pi i)^{-1}\int_{\Gamma_2} R(\mu;\ T)\,g(f(\mu))\,d\mu=h(T),$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Идея построения операторного исчисления на основе формулы (1) восходит к работам Пуанкаре по теории непрерывных групп (1899 г.). Приведенное здесь изложение операторного исчисления заимствовано из книги Данфорда — Шварца [1]. В следующей главе, посвященной полугруппам, мы распространим формулу (1) на неограниченные замкнутые операторы.

8. Изолированные особые точки резольвенты

Пусть λ_0 — изолированная особая точка резольвенты $R(\lambda;\ T)$ замкнутого линейного оператора T, отображающего комплексное B-пространство X в себя. Тогда резольвенту $R(\lambda;\ T)$ можно разложить в ряд Лорана

$$R(\lambda;\ T)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n A_n,\quad A_n=(2\pi i)^{-1}\int_C (\lambda-\lambda_0)^{-n-1}R(\lambda;\ T)\,d\lambda, \tag{1}$$

где C — граница круга $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\varepsilon$ достаточно малого радиуса $\varepsilon>0$, не содержащего никаких других особых точек резольвенты, кроме $\lambda=\lambda_0$, причем интегрирование выполняется в направлении положительного обхода C, т. е. против часовой стрелки. С помощью резольвентного уравнения можно доказать следующую теорему.

Теорема 1. Все операторы A_n $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots)$ взаимно перестановочны (т. е. $A_{n_1}A_{n_2}=A_{n_2}A_{n_1}$; $n_1,\ n_2=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$) и являются ограниченными линейными операторами. При этом

$$\begin{aligned}
TA_k&=A_kT && (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),\\
A_kA_m&=0 && \text{при}\quad k\geqslant 0,\ m\leqslant -1,\\
A_n&=(-1)^nA_0^{n+1} && \text{при}\quad n\geqslant 1,\\
A_{-p-q+1}&=A_{-p}A_{-q} && \text{при}\quad p,\ q\geqslant 1.
\end{aligned} \tag{2}$$

Доказательство. Ограниченность операторов A_n, их взаимная перестановочность и перестановочность с оператором T вытекают непосредственно из интегрального представления (1).

Подставим разложение (1) резольвенты $R(\lambda;\ T)$ в резольвентное уравнение $R(\lambda;\ T)-R(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R(\lambda;\ T)R(\mu;\ T)$. Это приводит к формуле

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \frac{(\lambda-\lambda_0)^k-(\mu-\lambda_0)^k}{(\lambda-\lambda_0)-(\mu-\lambda_0)}=-\sum_{k,\ m=-\infty}^{\infty}{}' A_k A_m (\lambda-\lambda_0)^k(\mu-\lambda_0)^m.$$

Коэффициенты при A_n в левой части можно записать в виде

$$(\lambda-\lambda_0)^{n-1}+(\lambda-\lambda_0)^{n-2}(\mu-\lambda_0)+\ldots+(\mu-\lambda_0)^{n-1} \quad \text{при} \quad n\geqslant 1,$$

$$-\{(\lambda-\lambda_0)^{-n}(\mu-\lambda_0)^{-1}+(\lambda-\lambda_0)^{-n+1}(\mu-\lambda_0)^{-2}+\ldots$$
$$\ldots+(\lambda-\lambda_0)^{-1}(\mu-\lambda_0)^{-n}\} \quad \text{при} \quad n<0.$$

Отсюда следует, что слагаемые, содержащие произведения вида $(\lambda-\lambda_0)^k(\mu-\lambda_0)^m$ со значениями $k\geqslant 0$ и $m\leqslant -1$, должны обратиться в нуль, и поэтому $A_kA_m=0$ при $k\geqslant 0$, $m\leqslant -1$. Следовательно, функции

$$R^+(\lambda;\ T)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda-\lambda_0)^n \quad \text{и} \quad R^-(\lambda;\ T)=\sum_{n=-\infty}^{-1}A_n(\lambda-\lambda_0)^n$$

должны каждая в отдельности удовлетворять резольвентному уравнению. Подставляя в резольвентное уравнение

$$R^+(\lambda;\ T)-R^+(\mu;\ T)=(\mu-\lambda)R^+(\lambda;\ T)R^+(\mu;\ T)$$

разложение $R^+(\lambda;\ T)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n(\lambda-\lambda_0)^n$, мы получаем

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_p(h^p-k^p)=(k-h)\left(\sum_{p=0}^{\infty}A_ph^p\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}A_qk^q\right),$$

где $h=(\lambda-\lambda_0)$, $k=(\mu-\lambda_0)$.

Разделив обе части этого равенства на $(k-h)$, мы приходим к равенству

$$-\sum_{p=1}^{\infty}A_p(h^{p-1}+h^{p-2}k+\ldots+k^{p-1})=\sum_{p,\ q=0}^{\infty}h^pk^qA_pA_q,$$

откуда следует, что $-A_{p+q+1}=A_pA_q$ $(p,\ q\geqslant 0)$. Отсюда, в частности, имеем

$$A_1=-A_0^2,\ A_2=-A_1A_0=(-1)^2A_0^3,\ \ldots,\ A_n=(-1)^nA_0^{n+1}\quad (n\geqslant 1).$$

Аналогично из резольвентного уравнения для функции $R^-(\lambda;\ T)$ мы, полагая $(\lambda-\lambda_0)^{-1}=h$, $(\mu-\lambda_0)^{-1}=k$, найдем

$$\sum_{p=1}^{\infty}A_{-p}(h^{p-1}+h^{p-2}k+\ldots+k^{p-1})=\sum_{p,\ q=1}^{\infty}h^{p-1}k^{q-1}A_{-p}A_{-q},$$

откуда $A_{-p-q+1}=A_{-p}A_{-q}$ $(p, q\geqslant 1)$. Это дает, в частности,

$$A_{-1}=A_{-1}^2,\quad A_{-2}=A_{-1}A_{-2},\ \ldots,\ A_{-n}=A_{-1}A_{-n}\qquad (n\geqslant 1).$$

Теорема доказана.

Теорема 2. Имеют место формулы

$$\begin{aligned} A_n&=(T-\lambda_0 I)\,A_{n+1}\quad \text{при}\quad n\geqslant 0,\\ (T-\lambda_0 I)\,A_{-n}&=A_{-(n+1)}=(T-\lambda_0 I)^n A_{-1}\quad \text{при}\quad n\geqslant 1,\\ (T-\lambda_0 I)\,A_0&=A_{-1}-I. \end{aligned}\tag{3}$$

Доказательство. Из интегрального представления оператора A_k видно, что область значений $R(A_k)$ принадлежит области определения оператора T, поэтому оператор A_k можно умножать слева на T. Утверждение теоремы вытекает из тождества

$$I=(\lambda I-T)\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(\lambda-\lambda_0)^k=$$
$$=\{(\lambda-\lambda_0)I+(\lambda_0 I-T)\}\sum_{k=-\infty}^{\infty}A_k(\lambda-\lambda_0)^k,$$

если приравнять коэффициенты, стоящие слева и справа при одинаковых степенях $(\lambda-\lambda_0)$.

Теорема 3. Если λ_0 — полюс порядка m резольвенты $R(\lambda;\,T)$, то λ_0 является собственным значением оператора T. Кроме того,

$$R(A_{-1})=N((\lambda_0 I-T)^n)\ \text{ и }\ R(I-A_{-1})=R((\lambda_0 I-T)^n)\ \text{ при }\ n\geqslant m. \tag{4}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$X=N((\lambda_0 I-T)^n)\oplus R((\lambda_0 I-T)^n)\quad \text{при}\quad n\geqslant m. \tag{5}$$

Доказательство. Поскольку A_{-1} — ограниченный линейный оператор, удовлетворяющий условию $A_{-1}^2=A_{-1}$, то, как нетрудно видеть,

$$N(A_{-1})=R(I-A_{-1}). \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} &X_1=N(A_{-1})=R(I-A_{-1}),\\ &X_2=R(A_{-1}),\quad N_n=N((\lambda_0 I-T)^n),\\ &R_n=R((\lambda_0 I-T)^n). \end{aligned}\tag{7}$$

Допустим, что $x\in N_n$, где $n\geqslant 1$. Тогда из равенства $(T-\lambda_0 I)^n A_{n-1}=$ $=(T-\lambda_0 I)\,A_0=A_{-1}-I$ видно, что

$$0=A_{n-1}(T-\lambda_0 I)^n x=(T-\lambda_0 I)^n A_{n-1}x=(T-\lambda_0 I)\,A_0 x=A_{-1}x-x,$$

откуда $x = A_{-1}x \in X_2$. Следовательно, при $n \geqslant 1$ множество N_n принадлежит X_2. Обратно, пусть $x \in X_2$. Тогда $x = A_{-1}y$, и так как $A_{-1} = A^2_{-1}$, то $x = A_{-1}A_{-1}y = A_{-1}x$. Поэтому $(T - \lambda_0 I)^n x = A_{-(n+1)}x$, поскольку $(T - \lambda_0 I)^n A_{-1} = A_{-(n+1)}$. По условию теоремы $A_{-(n+1)} = 0$ при $n \geqslant m$, поэтому $X_2 \subseteq N_n$ при $n \geqslant m$. Эти рассуждения показывают, что

$$N_n = X_2 \quad \text{при} \quad n \geqslant m. \tag{8}$$

Далее по условиям теоремы $A_{-m} \neq 0$ и $(T - \lambda_0 I) A_{-m} = A_{-(m+1)} = 0$; значит, число λ_0 является собственным значением оператора T.

Так как $(T - \lambda_0 I)^n A_{n-1} = A_{-1} - I$, то $X_1 = N(A_{-1}) = R(I - A_{-1}) \subseteq R_n$. Если $n \geqslant m$, то из условия $x \in R_n \cap N_n$ следует, что $x = 0$. Действительно, если $x = (\lambda_0 I - T)^n y$ и $(\lambda_0 I - T)^n x = 0$, то, согласно (8), $y \in N_{2n} = N_n$, и поэтому $x = 0$. Предположим теперь, что $x \in R_n$ при $n \geqslant m$, и представим элемент x в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 = (I - A_{-1}) x \in X_1$, $x_2 = A_{-1}x \in X_2$. Тогда $x_2 = x - x_1 \in R_n$, так как $X_1 \subseteq R_n$. Но из условия (8) видно, что $x_2 \in X_2 = N_n$, и поэтому $x_2 \in R_n \cap N_n$, т. е. $x_2 = 0$. Это показывает, что $x = x_1 \in X_1$. Тем самым мы доказали, что $R_n = X_1$ при $n \geqslant m$.

Теорема 4. Допустим, что T — такой ограниченный линейный оператор, что подпространство $X_2 = R(A_{-1})$ пространства X конечномерно. Тогда λ_0 является полюсом резольвенты $R(\lambda; T)$.

Доказательство. Обозначим через $x_1, x_2, \ldots, x_k$ базис линейного пространства X_2. Векторы $x_1, Tx_1, T^2x_1, \ldots, T^kx_1$ принадлежат X_2 и линейно зависимы. Поэтому существует не равный тождественно нулю полином $P_1(\lambda)$, такой, что $P_1(T)x_1 = 0$. Точно так же существуют не равные тождественно нулю полиномы $P_2(\lambda), \ldots, P_k(\lambda)$, такие, что $P_j(T)x_j = 0$ $(j = 2, 3, \ldots, k)$. Тогда для полинома $P(\lambda) = \prod_{j=1}^{k} P_j(\lambda)$ мы получаем соотношения $P(T)x_j = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, и поэтому $P(T)x = 0$ при любом $x \in X_2$.

Разложим полином $P(\lambda)$ на множители. Это разложение всегда можно записать в виде $P(\lambda) = \alpha \prod_{j=0}^{s} (\lambda - \lambda_j)^{\nu_j}$ $(\alpha \neq 0)$, где $\nu_0 \geqslant 0$, $\nu_j \geqslant 1$ и $\lambda_j \neq \lambda_0$ при $j > 0$. Теперь покажем, что $(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x = 0$ для всякого вектора $x \in X_2$. В самом деле, предположим, что это не так; пусть $x_0 \in X_2$ — вектор, для которого $(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x_0 \neq 0$. Тогда, поскольку $P(T)x_0 = 0$, мы видим, что существуют по крайней мере одно значение $\lambda = \lambda_j$ $(j \neq 0)$ и полином $Q(\lambda)$, такие, что

$$(T - \lambda_j I) Q(T) (T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x_0 = 0,$$

и при этом $y = Q(T)(T - \lambda_0 I)^{\nu_0} x_0 \neq 0$. Поэтому $y \in X_2$ представляет собой собственный вектор оператора T, соответствующий собственному значению λ_j. Следовательно, $(\lambda I - T) y = (\lambda - \lambda_j) y$. Умножая обе части этого равенства на $R(\lambda; T)$, мы получаем соотношение $y = (\lambda - \lambda_j) R(\lambda; T) y$, откуда следует, что

$$y = A_{-1} y = (2\pi i)^{-1} \int_C R(\lambda; T) y \, d\lambda = (2\pi i)^{-1} \int_C (\lambda - \lambda_j)^{-1} y \, d\lambda = 0,$$

где C — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке λ_0. Таким образом, мы приходим к противоречию, и, следовательно, должно существовать целое положительное m, такое, что $(T - \lambda_0 I)^m X_2 = 0$. Поскольку $X_2 = R(A_{-1})$ и $(T - \lambda_0 I)^n A_{-1} = A_{-(n+1)}$, мы видим, что $A_{-(n+1)} = 0$ для всех $n \geqslant m$, т. е. λ_0 является полюсом резольвенты $R(\lambda; T)$.

Литература

Материал § 6 взят из книги Филлипса [2]; изложенное в § 8 заимствовано из работ Нагумо [1] и А. Тейлора [1]. Некоторые результаты, приведенные в этих параграфах, могут быть обобщены на локально выпуклые линейные топологические пространства. См., например, § 13 следующей главы [1]).

[1]) По спектральной теории линейных операторов см. также А. И. Плеснер [1*]. — *Прим. перев.*

ГЛАВА IX

Аналитическая теория полугрупп

Аналитическая теория полугрупп ограниченных линейных операторов, заданных в B-пространстве, изучает функции экспоненциального типа в бесконечномерных функциональных пространствах. Эта теория связана с задачей определения ограниченной операторнозначной функции $T(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющей уравнению

$$T(t+s) = T(t) \cdot T(s), \qquad T(0) = I.$$

Этой проблеме были посвящены исследования Хилле [2] и Иосида [5], опубликованные в 1948 г. [1])

Для решения этой задачи использовалось понятие ***инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $T(t)$***, который определяется как

$$A = s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} t^{-1}(T(t) - I).$$

Порождение полугруппы $T(t)$ оператором A изучалось в терминах спектральных свойств инфинитезимального оператора.

Основные результаты теории полугрупп, как будет далее показано, представляют собой естественное обобщение теорем Стоуна [2], относящихся к однопараметрической группе унитарных операторов в гильбертовом пространстве. В гл. XIV будут рассмотрены приложения теории полугрупп к исследованию ***стохастических процессов*** и ***уравнений эволюционного типа***, включая уравнение диффузии, волновое уравнение и уравнение Шрёдингера.

В этой главе теория полугрупп непрерывных линейных операторов будет развита не только для банаховых пространств, но и для общих локально выпуклых линейных топологических пространств.

1. Полугруппы класса (C_0)

Предложение (Э. Хилле). Пусть X — некоторое B-пространство и $T_t \in L(X, X)$, $t \geqslant 0$, — однопараметрическое семейство операторов, обладающее следующим ***полугрупповым свойством***:

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad \text{при всех } t, \ s > 0. \tag{1}$$

1) Исторический очерк развития теории полугрупп и подробная библиография имеются в книге Данфорд — Шварц [1], а также у Хилле — Филлипса [1]. — *Прим. перев.*

Если для всякого положительного числа a функция $p(t)=\ln\|T_t\|$ ограничена сверху на интервале вида $(0, a)$, то

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln\|T_t\| = \inf_{t>0} t^{-1}\ln\|T_t\|. \tag{2}$$

Доказательство. Из неравенства $\|T_{t+s}\| = \|T_tT_s\| \leqslant \|T_t\|\cdot\|T_s\|$ следует, что $p(t+s)\leqslant p(t)+p(s)$. Пусть $\beta=\inf\limits_{t>0} t^{-1}p(t)$. Очевидно, β либо конечно, либо равно $-\infty$. Допустим сейчас, что β — конечное число. Для произвольного $\varepsilon>0$ выберем такое число $a>0$, что $p(a)\leqslant(\beta+\varepsilon)a$. Возьмем произвольное значение $t>0$ и обозначим через n целое число, удовлетворяющее неравенству $na\leqslant t<(n+1)a$. Тогда

$$\beta\leqslant\frac{p(t)}{t}\leqslant\frac{p(na)}{t}+\frac{p(t-na)}{t}\leqslant\frac{na}{t}\,\frac{p(a)}{a}+\frac{p(t-na)}{t}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{na}{t}(\beta+\varepsilon)+\frac{p(t-na)}{t}.$$

По предположению величина $p(t-na)$ ограничена сверху при $t\to\infty$. Полагая $t\to\infty$, мы выводим из последнего неравенства формулу $\beta=\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}p(t)$. Случай, когда $\beta=-\infty$, рассматривается совершенно аналогично.

Определение 1. Пусть семейство операторов $\{T_t;\ t\geqslant 0\}\subseteq L(X, X)$ удовлетворяет условиям

$$T_t\cdot T_s = T_{t+s} \quad \text{для всех } t,\ s\geqslant 0, \tag{1'}$$

$$T_0 = I, \tag{3}$$

$$s\text{-}\lim_{t\to t_0} T_tx = T_{t_0}x \ \text{ для любого } t_0\geqslant 0 \text{ и любого } x\in X. \tag{4}$$

В этом случае мы будем называть семейство $\{T_t\}$ *полугруппой класса* (C_0).

С помощью доказанного выше предложения можно показать, что всякая полугруппа $\{T_t\}$ класса (C_0) подчиняется требованию

$$\|T_t\|\leqslant Me^{\beta t}, \qquad 0\leqslant t<\infty, \tag{5}$$

где $M>0$ и $\beta<\infty$ — некоторые постоянные.

Доказательство этого свойства совсем просто. Нужно только показать, что для всякого интервала вида $(0, a)$ $(\infty>a>0)$ нормы $\|T_t\|$ ограничены при $t\in(0, a)$. Допустим противное и предположим, что существует такая последовательность $\{t_n\}\subseteq(0, a)$, что $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t_0\leqslant a$ и $\|T_{t_n}\|>n$. Тогда, согласно теореме о резонансе, последовательность $\|T_{t_n}x\|$ должна оказаться неограниченной по крайней мере при каком-то одном $x \in X$, что противоречит условию сильной непрерывности (4).

Замечание. Умножая операторы семейства $\{T_t\}$ на множитель $e^{-\beta t}$, мы, очевидно, получим новую полугруппу класса (C_0), которая будет удовлетворять условию *равномерной ограниченности*

$$\|T_t\| \leqslant M \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty. \tag{6}$$

Если, в частности, $M \leqslant 1$, т. е.

$$\|T_t\| \leqslant 1 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant t < \infty, \tag{7}$$

то полугруппа $\{T_t\}$ называется *сжимающей полугруппой класса* (C_0).

Следующая теорема относится к условию сильной непрерывности (4).

Теорема. Пусть семейство $\{T_t,\ t \geqslant 0\}$ операторов $T_t \in L(X, X)$ удовлетворяет требованиям (1′) и (3); тогда свойство (4) эквивалентно условию

$$w\text{-}\lim_{t \downarrow 0} T_t x = x \quad \text{для каждого } x \in X. \tag{8}$$

Доказательство. Допустим, что условие (8) выполняется. Обозначим через x_0 произвольный фиксированный элемент пространства X. Покажем, что $s\text{-}\lim\limits_{t \to t_0} T_t x_0 = T_{t_0} x_0$ при любом $t_0 \geqslant 0$. Для этого рассмотрим функцию $x(t) = T_t x_0$. Во всякой точке $t_0 \geqslant 0$ функция $x(t)$ слабо непрерывна справа, так как $w\text{-}\lim\limits_{t \downarrow t_0} T_t x_0 = w\text{-}\lim\limits_{h \downarrow 0} T_h T_{t_0} x_0 = T_{t_0} x_0$. Убедимся теперь в том, что нормы $\|T_t x_0\|$ ограничены в некоторой окрестности $t = 0$. В самом деле, если допустить противное, то должна существовать такая последовательность $\{t_n\}$, что $t_n \downarrow 0$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \|T_{t_n} x_0\| = \infty$; это противоречит следствию 1, гл. II, § 1, условия которого ввиду слабой непрерывности функции $x(t) = T_t x_0$ справа выполняются. Следовательно, как показывает условие (1′), функция $T_t x_0 = x(t)$ ограничена на всяком бикомпактном множестве значений t. Более того, функция $x(t)$ оказывается слабо измеримой. Это вытекает из того, что всякая непрерывная справа вещественная функция $f(t)$ измерима по Лебегу; это можно показать, основываясь на том факте, что множество $\{t;\ f(t) < \alpha\}$ при любом значении α представляется в виде объединения интервалов с положительными длинами. Пусть $\{t_n\}$ — совокупность всех положительных рациональных чисел. Рассмотрим всевозможные конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_j \beta_j x(t_j)$, где β_j — рациональные числа (если X — комплексное линейное пространство, то в качестве β_j берутся числа вида $\beta_j = a_j + ib_j$ с рациональными a_j, b_j). Эти комбинации образуют счетное множество $M = \{x_n\}$, такое, что множество $\{x(t);\ t \geqslant 0\}$ содержится в сильном замыкании M. Действительно, предположив противное, мы нашли бы число t', такое, что $x(t')$ не принадлежит M^a. Но множество M^a

является замкнутым линейным подпространством пространства X, и поэтому, согласно теореме 11, гл. V, § 1, оно слабо замкнуто. Поэтому предположение $x(t') \notin M^a$ противоречит слабой непрерывности справа функции $x(t)$, т. е. условию $x(t') = w\text{-}\lim\limits_{t_n \downarrow t'} x(t_n)$.

Теперь мы можем применить теорему Петтиса (гл. V, § 4), и, следовательно, функция $x(t)$ оказывается сильно измеримой. Поскольку норма $\|x(t)\|$ ограничена на всяком бикомпактном множестве точек t, можно рассматривать интеграл Бохнера $\int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt$, для которого справедливо неравенство

$$\left\| \int\limits_\alpha^\beta x(t)\,dt \right\| \leqslant \int\limits_\alpha^\beta \|x(t)\|\,dt \quad \text{для всех } 0 \leqslant \alpha \leqslant \beta < \infty.$$

Интеграл $\int\limits_\alpha^\beta x(t+s)\,dt = \int\limits_{\alpha+s}^{\beta+s} x(t)\,dt$ сильно непрерывен по s, так как функция $x(t)$ ограничена по норме на всяком бикомпактном множестве значений t. Это свойство Данфорд [3] использовал для доказательства сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t > 0$. Мы будем здесь следовать доказательству Данфорда.

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем числа α, η, β и ξ так, чтобы $0 \leqslant \alpha < \eta < \beta < \xi - \varepsilon < \xi$. Так как $x(\xi) = T_\xi x_0 = T_\eta T_{\xi-\eta} x_0 = T_\eta x(\xi - \eta)$, то

$$(\beta - \alpha)\,x(\xi) = \int\limits_\alpha^\beta x(\xi)\,d\eta = \int\limits_\alpha^\beta T_\eta x(\xi - \eta)\,d\eta.$$

Ввиду (1′), (3) и ограниченности $\|T_t\|$ в некоторой окрестности $t = 0$, вытекающей из следствия 1, гл. II, § 1, справедливо неравенство $\sup\limits_{\alpha \leqslant \eta \leqslant \beta} \|T_\eta\| < \infty$. Поэтому из соотношения

$$(\beta - \alpha)\,\{x(\xi \pm \varepsilon) - x(\xi)\} = \int\limits_\alpha^\beta T_\eta \{x(\xi \pm \varepsilon - \eta) - x(\xi - \eta)\}\,d\eta$$

следует оценка

$$(\beta - \alpha)\,\|x(\xi \pm \varepsilon) - x(\xi)\| \leqslant \sup_{\alpha \leqslant \eta \leqslant \beta} \|T_\eta\| \cdot \int\limits_{\xi-\beta}^{\xi-\alpha} \|x(\tau \pm \varepsilon) - x(\tau)\|\,d\tau.$$

Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$ — это нетрудно обнаружить, аппроксимируя $x(\tau)$ простыми функциями.

Мы установили, таким образом, сильную непрерывность функции $x(t)$ при $t > 0$. Непрерывность $x(t)$ в точке $t = 0$ доказывается следующим образом. Для любого положительного рационального числа t_n имеем $T_t x(t_n) = T_t T_{t_n} x_0 = x(t + t_n)$. Отсюда на основании сильной непрерывности функции $x(t)$ при $t > 0$, которая была доказана выше, мы заключаем, что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x(t_n) = x(t_n)$. Каждое значение $x_m \in M$ представляет собой некоторую конечную линейную комбинацию элементов вида $x(t_n)$, и поэтому $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} T_t x_m = x_m$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Но, с другой стороны, для любого значения $t \in [0, 1]$

$$\|x(t) - x_0\| \leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \|T_t(x_0 - x_m)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|T_t x_m - x_m\| + \|x_m - x_0\| + \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\| \cdot \|x_0 - x_m\|.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{t \downarrow 0}} \|x(t) - x_0\| \leqslant \left(1 + \sup\limits_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|T_t\|\right) \cdot \|x_m - x_0\|$, так что $s\text{-}\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = x_0$, поскольку $\inf\limits_{x_m \in M} \|x_0 - x_m\| = 0$.

2. Равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0) в локально выпуклых пространствах. Примеры полугрупп

Мы перейдем теперь к изучению полугрупп в общих локально выпуклых пространствах.

Определение. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и $\{T_t\}$, $t \geqslant 0$, $T_t \in L(X, X)$, — однопараметрическое семейство операторов, для которого выполняются следующие требования:

$$T_t T_s = T_{t+s}, \quad T_0 = I, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to t_0} T_t x = T_{t_0} x \quad \text{для всех} \quad t_0 \geqslant 0 \quad \text{и любого} \quad x \in X, \tag{2}$$

семейство $\{T_t\}$ *равностепенно непрерывно* (последнее условие означает, что для всякой непрерывной на пространстве X полунормы $p(x)$ существует непрерывная полунорма $q(x)$, такая, что $p(T_t x) \leqslant q(x)$ для всех значений $t \geqslant 0$ и всех элементов $x \in X$). (3)

В этом случае мы будем говорить, что в локально выпуклом пространстве X определена *равностепенно непрерывная полугруппа класса* (C_0).

Полугруппы $\{T_t\}$, удовлетворяющие условиям (1′), (3), (4) и (6) предыдущего параграфа представляют собой пример равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0).

Приведем теперь примеры конкретных полугрупп.

Пример 1. Возьмем пространство $C[0, \infty]$ ограниченных и равномерно непрерывных вещественных (или комплексных) функций $x(s)$, заданных в промежутке $[0, \infty)$. Определим на $C[0, \infty]$ с помощью формулы

$$(T_t x)(s) = x(t+s)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$. Условие (1) здесь, очевидно, выполняется. Свойство (2) вытекает из равномерной непрерывности функций $x(s)$. Наконец, $\|T_t\| \leqslant 1$, так что $\{T_t\}$ — это сжимающая полугруппа класса (C_0), и условие (3), очевидно, выполняется. В этом примере можно заменить $C[0, \infty]$ пространством $C[-\infty, \infty]$ или $L^p(-\infty, \infty)$.

Пример 2. Возьмем пространство $C[-\infty, \infty]$. Рассмотрим гауссовскую плотность вероятностей

$$N_t(u) = (2\pi t)^{-1/2} e^{-u^2/2t}, \qquad -\infty < u < \infty, \quad t > 0.$$

Определим операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя:

$$(T_t x)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, x(u)\, du \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$(T_t x)(s) = x(s) \qquad\qquad \text{при} \quad t = 0.$$

Каждый оператор T_t непрерывен, так как $\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = 1$, и поэтому

$$\|T_t x\| \leqslant \|x\| \cdot \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, du = \|x\|.$$

По определению $T_0 = I$, а полугрупповое свойство $T_t T_s = T_{t+s}$ следует из известной формулы теории гауссовских случайных величин:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi(t+t')}} e^{-u^2/2(t+t')} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t'}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)^2/2t} \cdot e^{-v^2/2t'}\, dv.$$

Эту формулу можно вывести, применяя преобразование Фурье и используя формулы (10) и (13) гл. VI, § 1. Чтобы убедиться в сильной непрерывности функции T_t по переменной t, заметим, что

$$x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\, x(s)\, du.$$

Поэтому

$$(T_t x)(s) - x(s) = \int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\,(x(u) - x(s))\, du,$$

а это выражение заменой переменной $(s-u)/\sqrt{t}=z$ приводится к интегралу

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\bigl(x(s-\sqrt{t}\,z)-x(s)\bigr)\,dz \qquad (N_1=N_t|_{t=1}).$$

Так как функция $x(s)$ равномерно непрерывна в промежутке $(-\infty, \infty)$, для любого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое, что $|x(s_1)-x(s_2)|\leqslant\varepsilon$ при условии $|s_1-s_2|\leqslant\delta$. Разбивая написанный выше интеграл на слагаемые, мы приходим к неравенству

$$|(T_tx)(s)-x(s)|\leqslant \int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|\leqslant\delta} N_1(z)\,|x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)|\,dz+$$
$$+\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,|x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)|\,dz\leqslant\varepsilon\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|\leqslant\delta} N_1(z)\,dz+$$
$$+2\|x\|\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,dz\leqslant\varepsilon+2\|x\|\int\limits_{|\sqrt{t}\cdot z|>\delta} N_1(z)\,dz.$$

Второй член в правой части этой суммы стремится к нулю при $t\to 0$, так как интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\,dz$ сходится. Таким образом, $\limsup\limits_{t\downarrow 0}\sup\limits_{s}|(T_tx)(s)-x(s)|=0$ и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{t\downarrow 0} T_tx=x$. Тем самым, учитывая теорему предыдущего параграфа, мы доказали равенство (2).

В этом примере можно заменить пространство $C[-\infty, \infty]$ на $L^p(-\infty, \infty)$. Рассмотрим случай пространства $L^1(-\infty, \infty)$. Тогда по теореме Фубини

$$\|T_tx\|\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} N_t(s-u)\,|x(u)|\,ds\,du\leqslant\|x\|.$$

Сильная непрерывность доказывается так же, как в предыдущем примере:

$$\|T_tx-x\|=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\bigl(x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)\bigr)\,dz\right|ds\leqslant$$
$$\leqslant\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\left[\int_{-\infty}^{\infty}|x(s-\sqrt{t}\cdot z)-x(s)|\,ds\right]dz\leqslant$$
$$\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} N_1(z)\,dz\cdot\|x\|.$$

Отсюда по лемме Лебега — Фату

$$\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \| T_t x - x \| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} N_1(z) \left(\overline{\lim_{t \downarrow 0}} \int_{-\infty}^{\infty} | x(s - \sqrt{t} \cdot z) - x(s) | ds \right) dz = 0,$$

так как интеграл Лебега непрерывен по параметру в смысле сходимости в среднем — это легко показать, аппроксимируя $x(s)$ простыми функциями.

Пример 3. Рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$. Пусть $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Определим равенством

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - k\mu)$$

операторы T_t, $t \geqslant 0$, отображающие пространство $C[-\infty, \infty]$ в себя. Тогда

$$\begin{aligned}
(T_w(T_t x))(s) &= e^{-\lambda w} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\lambda w)^m}{m!} \left[e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} x(s - k\mu - m\mu) \right] = \\
&= e^{-\lambda(w+t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left[p! \sum_{m=0}^{p} \frac{(\lambda w)^m}{m!} \frac{(\lambda t)^{p-m}}{(p-m)!} x(s - p\mu) \right] = \\
&= e^{-\lambda(w+t)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} (\lambda w + \lambda t)^p x(s - p\mu) = (T_{w+t} x)(s),
\end{aligned}$$

т. е. полугрупповое свойство имеет место. Нетрудно также убедиться в том, что определенные здесь операторы T_t образуют сжимающую полугруппу класса (C_0).

3. Инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0)

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t; t \geqslant 0\}$ класса (C_0) определена на локально выпуклом линейном топологическом пространстве X. Предположим, что X — *секвенциально полное* пространство. *Инфинитезимальный производящий оператор* A полугруппы $\{T_t\}$ мы определим как предел

$$Ax = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x. \tag{1}$$

Таким образом, A — линейный оператор с областью определения

$$D(A) = \left\{ x \in X;\ \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x \ \text{ существует в } X \right\},$$

и $Ax = \lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)x$ для $x \in D(A)$. Множество $D(A)$ не пусто, поскольку вектор $x = 0$ во всяком случае принадлежит $D(A)$. В действительности же область $D(A)$ существенно шире. Имеет место следующая

Теорема 1. Множество $D(A)$ плотно в пространстве X.

Доказательство. Положим $\varphi_n(s) = ne^{-ns}$, $n > 0$. Рассмотрим умноженное на *n преобразование Лапласа* функции T_s

$$C_{\varphi_n}x = \int_0^\infty \varphi_n(s)\, T_s x\, ds \quad \text{для} \quad x \in X, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Обычная конструкция интеграла Римана от числовых функций может быть перенесена на функции со значениями из локально выпуклого секвенциально полного пространства X, если вместо абсолютной величины числа использовать определенные на X непрерывные полунормы p.

Сходимость несобственного интеграла следует из равностепенной непрерывности полугруппы T_t, соотношения

$$p(\varphi_n(s)\, T_s x) = ne^{-ns}\, p(T_s x)$$

и секвенциальной полноты пространства X.

Из неравенства

$$p\left(C_{\varphi_n}x\right) \leqslant \int_0^\infty ne^{-ns} p(T_s x)\, ds \leqslant \sup_{s \geqslant 0} p(T_s x)$$

можно заключить, что C_{φ_n} — это непрерывный линейный оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Покажем, что

$$R\left(C_{\varphi_n}\right) \subseteq D(A) \quad \text{для любого} \quad n > 0 \tag{3}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} C_{\varphi_n}x = x \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{4}$$

Из этого, очевидно, будет следовать, что множество $\bigcup_{n=1}^{\infty} R\left(C_{\varphi_n}\right)$ и тем более область $D(A)$ плотны в X.

Для доказательства утверждения (3) мы используем формулу

$$h^{-1}(T_h - I)\, C_{\varphi_n}x = h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s)\, T_h T_s x\, ds - h^{-1}\int_0^\infty \varphi_n(s)\, T_s x\, ds.$$

Линейность и непрерывность оператора T_h позволяют изменять порядок операций в форме $T_h \int_0^\infty \ldots = \int_0^\infty T_h \ldots$, поэтому

$$h^{-1}(T_h - I) C_{\varphi_n} x = h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_{s+h} x \, ds - h^{-1} \int_0^\infty \varphi_n(s) T_s x \, ds =$$

$$= \frac{e^{nh}-1}{h} n \int_h^\infty e^{-n\sigma} T_\sigma x \, d\sigma - \frac{1}{h} n \int_0^h e^{-ns} T_s x \, ds =$$

$$= \frac{e^{nh}-1}{h} \left\{ C_{\varphi_n} x - \int_0^h n e^{-n\sigma} T_\sigma x \, d\sigma \right\} - \frac{1}{h} \int_0^h \varphi_n(s) T_s x \, ds.$$

Выражение $\varphi_n(s) T_s x$ непрерывно по s, значит второе слагаемое в правой части последнего выражения стремится к $-\varphi_n(0) T_0 x = -nx$ при $h \downarrow 0$. Эти же соображения показывают, что первое слагаемое в правой части стремится к $nC_{\varphi_n} x$ при $h \downarrow 0$. Следовательно, $C_{\varphi_n} x$ принадлежит $D(A)$ и

$$AC_{\varphi_n} x = n(C_{\varphi_n} - I) x, \qquad x \in X. \tag{5}$$

Теперь выведем формулу (4). Так как $\int_0^\infty n e^{-ns} ds = 1$, то

$$C_{\varphi_n} x - x = n \int_0^\infty e^{-ns} (T_s x - x) \, ds,$$

$$p(C_{\varphi_n} x - x) \leqslant n \int_0^\infty e^{-ns} p(T_s x - x) \, ds = n \int_0^\delta \ldots + n \int_\delta^\infty \ldots = J_1 + J_2,$$

где $\delta > 0$ — произвольное положительное число. Для любого $\varepsilon > 0$ мы, поскольку функция $T_s x$ непрерывна по s, можем выбрать $\delta > 0$, такое, что $p(T_s x - x) \leqslant \varepsilon$ при $0 \leqslant s \leqslant \delta$. Поэтому

$$J_1 \leqslant \varepsilon n \int_0^\delta e^{-ns} ds \leqslant \varepsilon n \int_0^\infty e^{-ns} ds = \varepsilon.$$

При фиксированном значении $\delta > 0$

$$J_2 \leqslant n \int_\delta^\infty e^{-ns} (p(T_s x) + p(x)) \, ds \to 0 \quad \text{при} \quad n \uparrow \infty,$$

так как множество $\{T_s x\}$ равномерно ограничено при $s \geqslant 0$. Отсюда и вытекает справедливость соотношения (4).

Определение. Определим для полугруппы операцию дифференцирования D_t формулой

$$D_tT_tx = \lim_{h\to 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)\,x,$$

имея в виду те значения $x \in X$, при которых предел, написанный в правой части, существует.

Теорема 2. Если $x \in D(A)$, то $x \in D(D_tT_t)$ и

$$D_tT_tx = AT_tx = T_tAx, \qquad t \geqslant 0. \tag{7}$$

Таким образом, оператор A перестановочен с оператором T_t, или, как говорят, операторы A и T_t *коммутируют* друг с другом.

Доказательство. Если $x \in D(A)$, то, поскольку оператор T_t непрерывен,

$$T_tAx = T_t \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)\,x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_tT_h - T_t)\,x =$$
$$= \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)\,x = \lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h - I)\,T_tx = AT_tx.$$

Следовательно, если $x \in D(A)$, то $T_tx \in D(A)$ и $T_tAx = AT_tx = \lim\limits_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_{t+h} - T_t)\,x$. Мы, таким образом, показали, что правая производная от T_tx (в смысле определения (6)) существует при всех $x \in D(A)$. Теперь мы убедимся в том, что и левая производная тоже существует и совпадает с правой производной.

С этой целью выберем произвольный функционал $f_0 \in X'$. Тогда из приведенных выше рассуждений следует, что при всяком фиксированном значении x числовая функция $f_0(T_tx) = \langle T_tx, f_0\rangle$ непрерывна по t при $t \geqslant 0$ и обладает правой производной $d^+f_0(T_tx)/dt$, равной значению $f_0(AT_tx) = f_0(T_tAx)$. Отсюда мы заключаем, что производная $d^+f_0(T_tx)/dt$ непрерывна по t. Ниже доказывается известная

Лемма. Если хотя бы одно из производных чисел

$$\overline{D}^+f(t), \quad \underline{D}^+f(t), \quad \overline{D}^-f(t) \quad \text{или} \quad \underline{D}^-f(t)$$

непрерывной вещественной функции $f(t)$ является конечной непрерывной функцией от t, то $f(t)$ дифференцируема и ее производная непрерывна и совпадает со значениями $\overline{\underline{D}}^{\pm}f(t)$.

Применяя эту лемму, мы видим, что функция $f_0(T_tx)$ дифференцируема по t и

$$f_0(T_tx - x) = f_0(T_tx) - f_0(T_0x) = \int_0^t (d^+f_0(T_sx)/ds)ds =$$
$$= \int_0^t f_0(T_sAx)\,ds = f_0\left(\int_0^t T_sAx\,ds\right).$$

Так как функционал $f_0 \in X'$ был взят совершенно произвольно, то отсюда вытекает, что

$$T_t x - x = \int_0^t T_s A x \, ds \quad \text{для каждого } x \in D(A).$$

Функция $T_s A x$ непрерывна по s, и поэтому последнее равенство означает, что выражение $T_t x$ дифференцируемо по t в топологии пространства X и

$$D_t T_t x = \lim_{h \to 0} h^{-1} \int_t^{t+h} T_s A x \, ds = T_t A x.$$

Утверждение (7) тем самым доказано.

Доказательство леммы. Покажем вначале, что условие $\overline{D}^+ f(t) \geqslant 0$ при $a \leqslant t \leqslant b$ влечет за собой неравенство $f(b) - f(a) \geqslant 0$. Допустим противное, пусть $f(b) - f(a) < -\varepsilon(b-a)$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное положительное число. Тогда для функции $g(t) = f(t) - f(a) + \varepsilon(t-a)$ справедливо неравенство $\overline{D}^+ g(a) = \overline{D}^+ f(a) + \varepsilon > 0$, а так как $g(a) = 0$, то при некотором значении $t_0 > a$, лежащем вблизи точки a, $g(t_0) > 0$. Поскольку функция $g(t)$ непрерывна и $g(b) < 0$, найдется такое значение t_1 ($a < t_0 < t_1 < b$), что $g(t_1) = 0$ и $g(t) < 0$ при $t_1 < t < b$. Значит, $\overline{D}^+ g(t_1) \leqslant 0$, что противоречит условию $\overline{D}^+ g(t_1) = \overline{D}^+ f(t_1) + \varepsilon > 0$.

Применяя далее аналогичные рассуждения к функциям вида $f(t) - \alpha t$ и $\beta t - f(t)$, мы приходим к следующему заключению: если одно из выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\alpha \leqslant \overline{\underline{D}}^{\pm} f(t) \leqslant \beta \text{ на некотором сегменте } [t_1, t_2],$$

то $\alpha \leqslant (f(t_2) - f(t_1))/(t_2 - t_1) \leqslant \beta$. Следовательно, точные верхние и нижние грани функций $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ на любом отрезке вида $[t_1, t_2]$ одинаковы. Это и приводит к заключению о том, что если для непрерывной вещественной функции $f(t)$ хотя бы одно из четырех выражений $\overline{\underline{D}}^{\pm} f(t)$ непрерывно на сегменте $[t_1, t_2]$, то все четыре производных числа совпадают и равны производной $f'(t)$, что и требовалось доказать.

4. Резольвента инфинитезимального производящего оператора A

Теорема 1. Оператор $(nI - A)$ при значениях $n > 0$ обладает обратным оператором $R(n; A) = (nI - A)^{-1} \in L(X, X)$, и

$$R(n; A)\, x = \int_0^\infty e^{-ns} T_s x \, ds \quad \text{при всех} \quad x \in X. \tag{1}$$

Иными словами, все вещественные положительные числа принадлежат резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A.

Доказательство. Убедимся сначала в том, что оператор $(nI-A)^{-1}$ существует. Для этого допустим, что имеется такой элемент $x_0 \neq 0$, что $(nI-A)x_0=0$, т. е. $Ax_0=nx_0$. Возьмем непрерывный линейный функционал $f_0 \in X'$, такой, что $f_0(x_0)=1$, и положим $\varphi(t)==f_0(T_t x_0)$. По теореме 2 предыдущего параграфа функция $\varphi(t)$ дифференцируема, так как по предположению $x_0 \in D(A)$, и

$$\frac{d\varphi(t)}{dt}=f_0(D_t T_t x_0)=f_0(T_t A x_0)=f_0(T_t n x_0)=n\varphi(t).$$

Если мы решим это дифференциальное уравнение при начальном условии $\varphi(0)=f_0(x_0)=1$, то получим $\varphi(t)=e^{nt}$. Но функция $\varphi(t)=f_0(T_t x_0)$ ограничена по t, так как выражение $T_t x_0$ равномерно ограничено при $t \geqslant 0$, а функционал f_0 непрерывен. Полученное противоречие показывает, что обратный оператор $(nI-A)^{-1}$ должен существовать.

По формуле (5) предыдущего параграфа $AC_{\varphi_n}x=n(C_{\varphi_n}-I)x$, и поэтому $(nI-A)C_{\varphi_n}x=nx$ для всех $x \in X$. Оператор $(nI-A)$ отображает, таким образом, область $R(C_{\varphi_n}) \subseteq D(A)$ на все пространство X взаимно однозначно. Поэтому тем более этот оператор отображает множество $D(A)$ на пространство X однозначно в обе стороны, так как обратный оператор $(nI-A)^{-1}$, как было показано, существует. Следовательно, $R(C_{\varphi_n})=D(A)$ и $(nI-A)^{-1}=n^{-1}C_{\varphi_n}$. Теорема доказана.

Следствие 1. Правая полуплоскость комплексной λ-плоскости является резольвентным множеством $\rho(A)$ оператора A, и

$$R(\lambda;\ A)x=(\lambda I-A)^{-1}x=\int_0^\infty e^{-\lambda t}T_t x\,dt$$

$$\text{при}\quad \operatorname{Re}(\lambda)>0 \quad \text{и любом}\quad x \in X. \tag{2}$$

Доказательство. При фиксированном вещественном значении τ операторы $\{e^{-i\tau t}T_t;\ t \geqslant 0\}$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Инфинитезимальный производящий оператор этой полугруппы, как нетрудно заметить, равен $(A-i\tau I)$. Поэтому для любого $\sigma>0$ резольвента $R(\sigma+i\tau;\ A)=((\sigma+i\tau)I-A)^{-1}$ существует и

$$R((\sigma+i\tau)I-A)x=\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)s}T_s x\,ds \quad \text{при всех}\quad x \in X. \tag{2'}$$

Следствие 2. Имеют место следующие утверждения:

$$D(A) = R\big((\lambda I - A)^{-1}\big) = R(R(\lambda;\ A)) \quad \text{при} \quad \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \tag{3}$$

$$AR(\lambda;\ A)x = R(\lambda;\ A)Ax = (\lambda R(\lambda;\ A) - I)x \quad \text{при} \quad x \in D(A), \tag{4}$$

$$AR(\lambda;\ A)x = (\lambda R(\lambda;\ A) - I)x \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{5}$$

$$\lim_{\lambda \uparrow \infty} \lambda R(\lambda;\ A)x = x \quad \text{при} \quad x \in X. \tag{6}$$

Доказательство. Эти утверждения с очевидностью вытекают из условия (4) предыдущего параграфа и определения резольвенты $R(\lambda;\ A) \equiv (\lambda I - A)^{-1}$.

Следствие 3. Инфинитезимальный производящий оператор A обладает следующим свойством:

$$\text{если } x_h \in D(A) \quad \text{и} \quad \lim_{h \to \infty} x_h = x \in X, \quad \lim_{h \to \infty} Ax_h = y \in X,$$
$$\text{то } x \in D(A) \quad \text{и} \quad Ax = y.$$

В этом смысле оператор A можно назвать замкнутым оператором (ср. гл. II, § 6).

Доказательство. Положим $(I - A)x_h = z_h$. Тогда $\lim\limits_{h \to \infty} z_h = x - y$. Отсюда, вследствие непрерывности оператора $(I - A)^{-1}$,

$$\lim_{h \to \infty} (I - A)^{-1} z_h = (I - A)^{-1}(x - y),$$

т. е. $x = (I - A)^{-1}(x - y)$, $(I - A)x = x - y$. Это и показывает, что $y = Ax$.

Теорема 2. Семейство операторов

$$\{(\lambda R(\lambda;\ A))^n\} \tag{7}$$

равностепенно непрерывно относительно значений $\lambda > 0$ и $n = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Из резольвентного уравнения (гл. VIII, § 2, (2))

$$R(\mu;\ A) - R(\lambda;\ A) = (\lambda - \mu)R(\mu;\ A)R(\lambda;\ A),$$

учитывая, что, как показывает условие (2), $\lim\limits_{\mu \to \lambda} R(\mu;\ A)y = R(\lambda;\ A)y$ $(y \in X)$, мы получаем

$$\lim_{\mu \to \lambda} (\mu - \lambda)^{-1}(R(\mu;\ A) - R(\lambda;\ A))x =$$
$$= dR(\lambda;\ A)x/d\lambda = -R(\lambda;\ A)^2 x, \quad x \in X.$$

Следовательно, резольвента $R(\lambda;\ A)x$ бесконечно дифференцируема по λ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ и

$$d^n R(\lambda;\ A)x/d\lambda^n = (-1)^n n!\, R(\lambda;\ A)^{n+1} x \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{8}$$

С другой стороны, дифференцируя равенство (2) n раз по λ, мы видим, что

$$d^n R(\lambda;\ A)\,x/d\lambda^n = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}(-t)^n T_t x\,dt. \tag{9}$$

Дифференцирование под знаком интеграла в (9) оправдано, так как семейство $\{T_t x\}$ равномерно ограничено по t и $\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\,dt = (n!)/\lambda^{n+1}$ при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$. Таким образом,

$$(\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1}x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t^n T_t x\,dt$$

$$\text{для всех } x \in X \text{ и } \operatorname{Re}(\lambda) > 0, \tag{10}$$

и поэтому для всякой непрерывной на X полунормы p и произвольных $\lambda > 0$, $n > 0$

$$p\left((\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1}x\right) \leqslant \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} t^n\,dt \cdot \sup_{t\geqslant 0} p(T_t x) = \sup_{t\geqslant 0} p(T_t x). \tag{11}$$

Отсюда ввиду равностепенной непрерывности семейства $\{T_t\}$ и следует справедливость теоремы 2.

5. Примеры инфинитезимальных производящих операторов

В дальнейшем нам потребуется определенный для любого $n > 0$ оператор

$$J_n = (I - n^{-1}A)^{-1} = nR(n;\ A), \tag{1}$$

для которого, очевидно, выполняется условие

$$AJ_n = n(J_n - I). \tag{2}$$

Пример 1. Рассмотрим полугруппу операторов вида $(T_t x)(s) = x(t+s)$, определенных на пространстве $C[0, \infty]$. Полагая

$$y_n(s) = (J_n x)(s) = n\int\limits_0^\infty e^{-nt}x(t+s)\,dt = n\int\limits_s^\infty e^{-n(t-s)}x(t)\,dt,$$

получаем

$$y_n'(s) = -ne^{-n(s-s)}x(s) + n^2\int\limits_s^\infty e^{-n(t-s)}x(t)\,dt = -nx(s) + ny_n(s).$$

Сравнивая полученное равенство с общей формулой (2)

$$(AJ_nx)(s) = n((J_n - I)x)(s),$$

мы находим, что $Ay_n(s) = y'_n(s)$. Поскольку $R(J_n) = R(R(n; A)) = D(A)$, отсюда следует, что

$$Ay(s) = y'(s) \quad \text{при любом} \quad y \in D(A).$$

Обратно, пусть теперь обе функции $y(s)$ и $y'(s)$ принадлежат пространству $C[0, \infty]$. Покажем, что $y \in D(A)$ и $Ay(s) = y'(s)$. С этой целью определим с помощью соотношения

$$y'(s) - ny(s) = -nx(s)$$

вспомогательную функцию $x(s)$. Полагая $(J_nx)(s) = y_n(s)$, мы, согласно полученным выше результатам, получим равенство

$$y'_n(s) - ny_n(s) = -nx(s).$$

Значит, функция $w(s) = y(s) - y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $w'(s) = nw(s)$, и поэтому $w(s) = Ce^{ns}$. Но функция w должна принадлежать $C[0, \infty]$, а это может быть только при значении $C = 0$. Следовательно, $y(s) = y_n(s) \in D(A)$ и $Ay(s) = y'(s)$.

Таким образом, область определения $D(A)$ оператора A совпадает с множеством всех функций $y \in C[0, \infty]$, первые производные которых также принадлежат пространству $C[0, \infty]$, и для таких функций $Ay = y'$. Это означает, что дифференциальный оператор d/ds представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы заданных на функциональном пространстве $C[0, \infty]$ операторов сдвига по аргументу t.

Пример 2. Мы покажем сейчас, что оператор двукратного дифференцирования d^2/ds^2 является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы интегральных операторов с гауссовским ядром. Рассмотрим пространство $C[-\infty, \infty]$ и определим следующим образом операторы T_t:

$$(T_tx)(s) = (2\pi t)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-v)^2/2t} x(v)\, dv \quad \text{при} \quad t > 0,$$

$$(T_tx)(s) = x(s), \text{ когда } t = 0.$$

Вводя переменную σ по формуле $t = \sigma^2/n$, мы находим

$$y_n(s) = (J_nx)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left[\int_0^{\infty} n(2\pi t)^{-1/2} e^{-nt-(s-v)^2/2t}\, dt \right] dv =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x(v) \left[2\sqrt{n} \int_0^{\infty} (2\pi)^{-1/2} e^{-\sigma^2 - n(s-v)^2/2\sigma^2}\, d\sigma \right] dv.$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\infty} e^{-(\sigma^2+c/\sigma^2)}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}, \quad c = \sqrt{n}|s-v|/\sqrt{2} > 0, \tag{3}$$

вывод которой мы приведем позже, получаем

$$y_n(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(v)(n/2)^{1/2} e^{-\sqrt{2n}\,|s-v|}\, dv.$$

Так как функция $x(v)$ по предположению непрерывна и ограничена, мы можем дважды продифференцировать $y_n(s)$ под знаком интеграла:

$$y_n'(s) = n\int_s^{\infty} x(v) e^{-\sqrt{2n}(v-s)}\, dv - n\int_{-\infty}^{s} x(v) e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\, dv,$$

$$y_n''(s) = n\left\{-x(s) - x(s) + \sqrt{2}\sqrt{n}\int_s^{\infty} x(v) e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\, dv + \right.$$

$$\left. + \sqrt{2}\sqrt{n}\int_{-\infty}^{s} x(v) e^{-\sqrt{2n}(s-v)}\, dv\right\} = -2nx(s) + 2ny_n(s).$$

Сравнивая полученные выражения с общей формулой (2)

$$(Ay_n)(s) = (AJ_n x)(s) = n((J_n - I)x)(s) = n(y_n(s) - x(s)),$$

мы находим, что $Ay_n(s) = y_n''(s)/2$. Таким образом, поскольку $R(J_n) = R(R(n;\ A)) = D(A)$, мы доказали, что $Ay(s) = y''(s)/2$ для всякой функции $y \in D(A)$. Обратно, допустим теперь, что функция $y(s)$ и ее вторая производная $y''(s)$ принадлежат пространству $C[-\infty, \infty]$. Введем вспомогательную функцию $x(s)$:

$$y''(s) - 2ny(s) = -2nx(s).$$

Полагая $y_n(s) = (J_n x)(s)$, мы, как показано выше, получаем

$$y_n''(s) - 2ny_n(s) = -2nx(s).$$

Тогда функция $w(s) = y(s) - y_n(s)$ удовлетворяет уравнению $w''(s) - 2nw(s) = 0$, и поэтому $w(s) = C_1 e^{\sqrt{2n}\, s} + C_2 e^{-\sqrt{2n}\, s}$. Функция $w(s)$ по предположению должна быть ограниченной в промежутке $(-\infty, \infty)$, а это возможно только в том случае, когда C_1 и C_2 равны нулю. Отсюда вытекает, что $y(s) = y_n(s)$, и поэтому $y \in D(A)$, $(Ay)(s) = y''(s)/2$.

Итак, *дифференциальный оператор* $\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор полугруппы определенных на функциональном пространстве $C[-\infty, \infty]$ интегральных операторов с ядром типа плотности вероятности гауссовского распределения.

Вывод формулы (3). Известно, что

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Введем в этот интеграл новую переменную интегрирования σ. $x = \sigma - c/\sigma$. Тогда получится соотношение

$$\sqrt{\pi}/2 = \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma - c/\sigma)^2}(1 + c/\sigma^2)\,d\sigma = e^{2c}\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}(1 + c/\sigma^2)\,d\sigma =$$

$$= e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\,d\sigma + \int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\cdot\frac{c}{\sigma^2}\,d\sigma\right\}.$$

Полагая в последнем интеграле $\sigma = c/t$, мы и находим, что

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} = e^{2c}\left\{\int_{\sqrt{c}}^\infty e^{-(\sigma^2 + c^2/\sigma^2)}\,d\sigma - \int_{\sqrt{c}}^0 e^{-(c^2/t^2 + t^2)}\,dt\right\} = e^{2c}\int_0^\infty e^{-(t^2 + c^2/t^2)}\,dt.$$

Упражнение. Показать, что для полугруппы $\{T_t\}$ определенных на пространстве $C[-\infty, \infty]$ операторов

$$(T_t x)(s) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^\infty \frac{(\lambda t)^k}{k!}\,x(s - k\mu) \qquad (\lambda,\ \mu > 0)$$

инфинитезимальным производящим оператором служит оператор A вида

$$(Ax)(s) = \lambda\,\{x(s - \mu) - x(s)\},$$

который называется *разностным оператором*.

6. Показательная функция непрерывного линейного оператора, степени которого равностепенно непрерывны

Предложение. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть линейный оператор $B \in L(X, X)$, и предположим, что степени этого оператора, образующие семейство $\{B^k;\ k = 1, 2, \ldots\}$, равностепенно непрерывны. Тогда для каждого элемента $x \in X$ ряд

$$\sum_{k=0}^\infty (k!)^{-1}(tB)^k x \qquad (t \geqslant 0) \tag{1}$$

сходится.

Доказательство. Для всякой непрерывной на X полунормы p, согласно допущениям, сделанным относительно свойств операторов B^k, существует непрерывная определенная на пространстве X полунорма q, такая, что

$$p(B^k x) \leqslant q(x) \text{ для всех } k > 0 \text{ и всех } x \in X.$$

Следовательно,

$$p\left(\sum_{k=n}^{m} (tB)^k x/k!\right) \leqslant \sum_{k=n}^{m} t^k p(B^k x)/k! \leqslant q(x) \cdot \sum_{k=n}^{m} t^k/k!.$$

Таким образом, последовательность частичных сумм $\left\{\sum_{k=0}^{m} (tB)^k x/k!\right\}$ фундаментальна, а так как пространство X секвенциально полно по предположению, то эта последовательность сходится. Предел этой последовательности и представляет собой сумму ряда (1).

Следствие 1. Отображение $x \to \sum_{k=0}^{\infty} (tB)^k x/k!$ определяет при каждом значении $t \geqslant 0$ непрерывный линейный оператор. Мы обозначим этот оператор через $\exp(tB)$.

Доказательство. Используя равностепенную непрерывность семейства $\{B^k\}$, нетрудно показать, что операторы $B_n = \sum_{k=0}^{n} (tB)^k/k!$ равностепенно (относительно t) непрерывны при изменении t на любом бикомпактном множестве числовой оси. В самом деле,

$$p(B_n x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} t^k p(B^k x)/k! \leqslant q(x) \cdot \sum_{k=0}^{n} t^k/k! \leqslant e^t \cdot q(x).$$

Поэтому и предел $\exp(tB)$ последовательности $\{B_n\}$ удовлетворяет неравенству

$$p(\exp(tB)\, x) \leqslant \exp(t) \cdot q(x) \qquad (t \geqslant 0), \tag{2}$$

а это говорит о непрерывности оператора $\exp(tB)$.

Следствие 2. Рассмотрим два оператора B и C, принадлежащих $L(X, X)$, степени которых образуют равностепенно непрерывные семейства $\{B^k\}$ и $\{C^k\}$. Пусть, кроме того, $BC = CB$. Тогда

$$\exp(tB) \cdot \exp(tC) = \exp(t(B + C)). \tag{3}$$

Доказательство. Очевидно, что

$$p((B + C)^k x) \leqslant \sum_{s=0}^{k} C_k^s p(B^{k-s} C^s x) \leqslant \sum_{s=0}^{k} C_k^s q(C^s x) \leqslant 2^k \sup_{0 \leqslant s} q(C^s x).$$

Следовательно, операторы семейства $\{2^{-k}(B + C)^k\}$ равностепенно непрерывны, и поэтому можно определить функцию $\exp(t(B + C))$. Используя теперь свойство перестановочности $BC = CB$, мы можем представить ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} (t(B+C))^k x/k!$$

в виде $\left(\sum_{k=0}^{\infty} (tB)^k/k!\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} (tC)^k x/k!\right)$, как и в случае обычных числовых рядов вида $\sum_{k=0}^{\infty} (t(b+c))^k/k!$.

Следствие 3. Для всякого элемента $x \in X$

$$\lim_{h \downarrow 0} h^{-1}(\exp(hB) - I)x = Bx. \tag{4}$$

Поэтому, используя полугрупповое свойство

$$\exp((t+h)B) = \exp(tB) \cdot \exp(hB), \tag{5}$$

справедливость которого следует из предыдущих рассуждений, мы можем определить оператор дифференцирования

$$D_t \exp(tB)x = \exp(tB) \cdot Bx = B\exp(tB)x. \tag{6}$$

Доказательство. Как и раньше, для произвольной непрерывной на X полунормы p мы получаем неравенство

$$p\left(h^{-1}(\exp(hB) - I)x - Bx\right) \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1} p\left(B^k x\right)/k! \leqslant$$

$$\leqslant q(x) \cdot \sum_{k=2}^{\infty} h^{k-1}/k!,$$

где q — некоторая непрерывная полунорма. Выражение, стоящее здесь справа, стремится к нулю при $h \downarrow 0$, что и доказывает наше утверждение.

7. Представление равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) с помощью соответствующего инфинитезимального производящего оператора

Докажем следующую основную теорему.

Теорема. Предположим, что локально выпуклое линейное топологическое пространство X секвенциально полно. Рассмотрим линейный оператор A с плотной в X областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A) \subseteq X$. Допустим, что при $n = 1, 2, \ldots$ существует резольвента $R(n; A) = (nI - A)^{-1} \in L(X, X)$. Тогда, для того чтобы оператор A был инфинитезимальным производящим оператором некоторой единственным образом определенной равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0), необходимо и достаточно, чтобы операторы семейства $\{(I-n^{-1}A)^{-m}\}$ были равностепенно непрерывны относительно значений $n=1, 2, \ldots$ и $m=0, 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Необходимость условий уже доказана. Перейдем к доказательству достаточности. Введем оператор

$$J_n=(I-n^{-1}A)^{-1} \tag{1}$$

и покажем, что при выполнении условий теоремы

$$\lim_{n\to\infty} J_n x = x \quad \text{для любого} \quad x \in X. \tag{2}$$

Действительно, для $x \in D(A)$ имеем $AJ_nx=J_nAx=n(J_n-I)x$, и поэтому выражение $J_nx-x=n^{-1}J_n(Ax)$ стремится к нулю при $n\to\infty$, так как множество $\{J_n(Ax)\}$ равномерно ограничено относительно значений $n=1, 2, \ldots$. Поскольку область $D(A)$ плотна в X и операторы семейства $\{J_n\}$ равностепенно (относительно n) непрерывны, $\lim\limits_{n\to\infty} J_nx=x$ для всякого $x\in X$.

Положим

$$T_t^{(n)}=\exp(tAJ_n)=\exp(tn(J_n-I))=\exp(-nt)\exp(ntJ_n),\ t\geqslant 0. \tag{3}$$

Множество $\{J_n^k\}$ степеней операторов J_n равномерно (относительно n и k) ограничено, поэтому можно определить выражение вида $\exp(tnJ_n)$. Следовательно, согласно оценке (2) предыдущего параграфа,

$$p(\exp(ntJ_n)\,x)\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}(nt)^k(k!)^{-1}\,p\left(J_n^kx\right)\leqslant\exp(nt)\cdot q(x).$$

Это означает, что операторы семейства $\{T_t^{(n)}\}$ равностепенно непрерывны при $t\geqslant 0$ и $n=1, 2, \ldots$, т. е.

$$p\left(T_t^{(n)}x\right)\leqslant q(x). \tag{4}$$

Заметим теперь, что $J_nJ_m=J_mJ_n$ при $n, m>0$. Таким образом, оператор J_n перестановочен с любым из операторов $T_t^{(m)}$. Поэтому, используя равенство $D_tT_t^{(n)}x=AJ_nT_t^{(n)}x=T_t^{(n)}AJ_nx$, вытекающее из результатов предыдущего параграфа, мы получаем

$$p\left(T_t^{(n)}x-T_t^{(m)}x\right)=p\left(\int_0^t D_s\left(T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}x\right)ds\right)=$$

$$=p\left(\int_0^t T_{t-s}^{(m)}T_s^{(n)}\left(AJ_n-AJ_m\right)x\,ds\right). \tag{5}$$

Отсюда следует, что если $x \in D(A)$, то существует непрерывная на X полунорма $\tilde{q}$, такая, что

$$p\left(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x\right) \leqslant \int_0^t \tilde{q}((AJ_n - AJ_m)x)\,ds = t\tilde{q}((J_nA - J_mA)x).$$

Поэтому, учитывая доказанное выше равенство (2), мы приходим к выводу, что равномерно относительно значений t, изменяющихся на любом фиксированном бикомпактном множестве числовой оси,

$$\lim_{n,\, m \to \infty} p\left(T_t^{(n)}x - T_t^{(m)}x\right) = 0.$$

Так как область $D(A)$ плотна в секвенциально полном пространстве X, а операторы семейства $\{T_t^{(n)}\}$ равностепенно непрерывны относительно $t \geqslant 0$ и n, мы приходим к выводу, что при каждом $x \in X$ равномерно относительно значений $t \geqslant 0$, принадлежащих любому фиксированному бикомпактному множеству числовой оси, существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} T_t^{(n)}x = T_tx$. Поэтому семейство $\{T_t\}$ равностепенно непрерывно при $t \geqslant 0$, и в связи с установленной равномерной (относительно t) сходимостью выражение T_tx непрерывно по t при $t \geqslant 0$.

Покажем теперь, что операторы T_t обладают полугрупповым свойством $T_tT_s = T_{t+s}$. Из равенства $T_{t+s}^{(n)} = T_t^{(n)}T_s^{(n)}$ мы выводим неравенство

$$\begin{aligned}
p(T_{t+s}x - T_tT_sx) &\leqslant p\left(T_{t+s}x - T_{t+s}^{(n)}x\right) + p\left(T_{t+s}^{(n)}x - T_t^{(n)}T_s^{(n)}x\right) + \\
&\quad + p\left(T_t^{(n)}T_s^{(n)}x - T_t^{(n)}T_sx\right) + p\left(T_t^{(n)}T_sx - T_tT_sx\right) \leqslant \\
&\leqslant p\left(T_{t+s}x - T_{t+s}^{(n)}x\right) + q\left(T_s^{(n)}x - T_sx\right) + \\
&\quad + p\left(\left(T_t^{(n)} - T_t\right)T_sx\right) \to 0
\end{aligned}$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $p(T_{t+s}x - T_tT_sx) = 0$ при произвольном выборе непрерывной на пространстве X полунормы p, а это и означает, что $T_{t+s} = T_tT_s$.

Обозначим через $\hat{A}$ инфинитезимальный производящий оператор построенной равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0). Мы должны показать, что $\hat{A} = A$. Возьмем элемент $x \in D(A)$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} T_t^{(n)}AJ_nx = T_tAx$, причем здесь имеет место равномерная относительно t сходимость на всяком бикомпактном множестве значений t. В самом деле, из неравенства (4) видно, что

$$\begin{aligned}
p\left(T_tAx - T_t^{(n)}AJ_nx\right) &\leqslant p\left(T_tAx - T_t^{(n)}Ax\right) + p\left(T_t^{(n)}Ax - T_t^{(n)}AJ_nx\right) \leqslant \\
&\leqslant p\left(\left(T_t - T_t^{(n)}\right)Ax\right) + q(Ax - J_nAx).
\end{aligned}$$

и выражение в правой части этого неравенства стремится к нулю при $n \to \infty$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} J_n A x = Ax$. Из приведенных рассуждений следует, что

$$T_t x - x = \lim_{n\to\infty} \left(T_t^{(n)} x - x\right) = \lim_{n\to\infty} \int_0^t T_s^{(n)} A J_n x \, ds =$$

$$= \int_0^t \left(\lim_{n\to\infty} T_s^{(n)} A J_n x\right) ds = \int_0^t T_s A x \, ds,$$

и поэтому предел $\lim\limits_{t \downarrow 0} t^{-1}(T_t x - x) = \lim\limits_{t\downarrow 0} t^{-1} \int_0^t T_s A x \, ds$ существует и равен Ax. Мы тем самым доказали, что если $x \in D(A)$, то $x \in D(\hat{A})$ и $Ax = \hat{A}x$, т. е. оператор $\hat{A}$ служит расширением A. Оператор $\hat{A}$ как инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$ обладает тем свойством, что при $n > 0$ оператор $(nI - \hat{A})$ отображает область $D(\hat{A})$ на пространство X взаимно однозначно. Но, согласно сделанным предположениям, оператор $(nI - A)$ отображает взаимно однозначно область $D(A)$ на X. Поэтому расширение $\hat{A}$ оператора A должно совпадать с A.

Обратимся, наконец, к доказательству единственности полугруппы $\{T_t\}$. Предположим, что некоторая равностепенно непрерывная полугруппа $\{\tilde{T}_t\}$ класса (C_0) имеет оператор A в качестве инфинитезимального производящего оператора. Рассмотрим полугруппу $T_t^{(n)}$. Так как оператор A коммутирует с $\tilde{T}_t$, мы видим, что и операторы AJ_n и $T_s^{(n)}$ перестановочны с $\tilde{T}_t$. Поэтому для элементов $x \in D(A)$ мы, как и при выводе формулы (5), получаем равенство

$$p\left(T_t^{(n)} x - \tilde{T}_t x\right) = p\left(\int_0^t D_s\left(\tilde{T}_{t-s} T_s^{(n)} x\right) ds\right) =$$

$$= p\left(\int_0^t \left(-\tilde{T}_{t-s} T_s^{(n)}\right)(A - AJ_n)\, x \, ds\right). \tag{6}$$

Отсюда, учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty} AJ_n x = Ax$ для всех $x \in D(A)$, мы, используя доказательство существования $\lim\limits_{n\to\infty} T_t^{(n)} x$ $(x \in X)$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_t^{(n)} x = \tilde{T}_t x$ для всех $x \in X$. Следовательно, $T_t x = \tilde{T}_t x$ для всех $x \in X$, т. е. $T_t = \tilde{T}_t$, и полугруппа $\{T_t\}$ определяется, таким образом, однозначно.

Замечание. Приведенное выше доказательство показывает, что если оператор A является инфинитезимальным производящим оператором равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0), то

$$T_t x = \lim_{n\to\infty} \exp\left(tA\left(I - n^{-1}A\right)^{-1}\right)x, \qquad x \in X, \tag{7}$$

причем в (7) имеет место равномерная относительно t сходимость на всяком бикомпактном множестве значений t. Это — *теорема о представлении* для полугрупп.

Следствие 1. Если X является B-пространством, то условия последней теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-m}\right\| \leqslant C \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots;\ m = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{8}$$

где положительная постоянная C не зависит от n и m. В частном случае, когда полугруппа $\{T_t\}$ сжимающая, эти условия можно сформулировать так: $D(A)^a = X$ и существует резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$, удовлетворяющая оценке

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-1}\right\| \leqslant 1 \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{9}$$

(Последнее утверждение называют *теоремой Хилле—Иосида.*)

Замечание. Условие (9) ввели независимо Хилле [2] и Иосида [5]. Это требование было обобщено в форме (8) Феллером [1], Филлипсом [3] и Миядера [1]. Заметим, что в (8) и (9) не обязательно рассматривать значения $n = 1,\ 2,\ \ldots$; достаточно, чтобы эти условия выполнялись для всех достаточно больших n. Распространение теории полугрупп на локально выпуклые линейные топологические пространства, рассмотренное в этой книге, было предложено Л. Шварцем [3].

Следствие 2. Пусть X — некоторое B-пространство и семейство $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ ограниченных линейных операторов из $L(X,\ X\}$ удовлетворяет условиям

$$T_t T_s = T_{t+s} \quad (t,\ s \geqslant 0), \quad T_0 = I, \tag{10}$$

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} T_t x = x \quad \text{для всех} \quad x \in X, \tag{11}$$

$$\|T_t\| \leqslant Me^{\beta t} \ \text{для всех } t \geqslant 0, \text{ где постоянные } M > 0 \text{ и } \beta \geqslant 0 \text{ не зависят от } t. \tag{12}$$

Тогда оператор $(A - \beta I)$ служит, очевидно, инфинитезимальным производящим оператором равностепенно непрерывной полугруппы $\{S_t = e^{-\beta t}T_t;\ t \geqslant 0\}$, где оператор A определяется соотношением $Ax = s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} t^{-1}(T_t - I)\,x$. Отсюда на основании следствия 1 мы заключаем, что замкнутый линейный оператор A с областью определения $D(A)^a = X$ и областью значений $R(A) \subseteq X$ является инфинитезимальным производящим оператором полугруппы $\{T_t\}$, удовлетворяющей условиям (10), (11) и (12), в том и только в том случае, когда существует резольвента $(I - n^{-1}(A - \beta I))^{-1}$ и

$$\left\|(I - n^{-1}(A - \beta I))^{-m}\right\| \leqslant M \text{ для } m = 1, 2, \ldots \text{ и всех достаточно больших } n. \tag{13}$$

Это условие можно переписать в виде неравенства

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-n}\right\| \leqslant M(1 - n^{-1}\beta)^{-m} \text{ для } m = 1, 2, \ldots \text{ и всех достаточно больших } n. \tag{13$'$}$$

В частности, если полугруппа $\{T_t\}$ удовлетворяет требованиям (10), (11) и

$$\|T_t\| \leqslant e^{\beta t} \quad \text{при всех} \quad t \geqslant 0, \tag{14}$$

то (13′) можно заменить неравенством

$$\left\|(I - n^{-1}A)^{-1}\right\| \leqslant (1 - n^{-1}\beta)^{-1} \text{ для всех достаточно больших } n. \tag{13$''$}$$

Приложение теоремы о представлении для полугрупп к доказательству теоремы Вейерштрасса об аппроксимации непрерывных функций полиномами. Рассмотрим полугруппу операторов $(T_t x)(s) = x(t + s)$, определенную на пространстве $C[0, \infty]$. По теореме о представлении

$$(T_t x)(s) = x(t + s) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \exp(tAJ_n x)(s) =$$

$$= s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!}(AJ_n)^m x(s),$$

причем предельный переход $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}$ происходит равномерно относительно t на всяком бикомпактном множестве значений t. Из этого результата легко выводится теорема Вейерштрасса о полиномиальной аппроксимации непрерывной функции. Возьмем произвольную функцию $z(t)$, непрерывную в замкнутом интервале $[0, 1]$. Предположим, что функция $x(s) \in C[0, \infty]$, и пусть $x(s) = z(s)$ при $s \in [0, 1]$. Подставим в представление полугруппы значение $s = 0$; тогда получится равенство

$$(T_t x)(0) = x(t) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} t^m (AJ_n)^m x(0)/m!,$$

где предельный переход равномерен относительно t при $t \in [0, 1]$. Отсюда следует, что функция $z(t)$ является пределом последовательности полиномов, равномерно сходящейся на сегменте $t \in [0, 1]$.

8. Сжимающие полугруппы и диссипативные операторы

При изучении сжимающих полугрупп Люмер и Филлипс использовали некоторый аналог скалярного произведения. По терминологии этих авторов инфинитезимальные производящие операторы таких полугрупп называются *диссипативными операторами*[1]).

Предложение (Люмер). Во всяком нормированном линейном пространстве X (вещественном или комплексном) каждой паре $\{x, y\}$ элементов этого пространства можно поставить в соответствие число $[x, y]$ (вещественное или комплексное в зависимости от типа пространства) таким образом, что

$$[x+y, z]=[x, z]+[y, z], \qquad [\lambda x, y]=\lambda[x, y],$$
$$[x, x]=\|x\|^2, \qquad |[x, y]|\leqslant\|x\|\|y\|. \tag{1}$$

Функция $[x, y]$ называется *полускалярным произведением*.

Доказательство. Согласно следствию 2 теоремы 1 гл. IV, § 6, для всякого $x_0\in X$ существует по крайней мере один ограниченный линейный функционал $f_{x_0}\in X'$, такой, что $\|f_{x_0}\|=\|x_0\|$ и $\langle x_0, f_{x_0}\rangle=$ $=\|x_0\|^2$. Выберем для каждого $x_0\in X$ такой функционал f_{x_0} какимнибудь однозначным способом и положим

$$[x, y]=\langle x, f_y\rangle. \tag{2}$$

Ясно, что этим определяется полускалярное произведение.

Определение. Допустим, что в комплексном (или вещественном) B-пространстве X определено полускалярное произведение $[x, y]$. Линейный оператор A с областью определения $D(A)$ и областью значений $R(A)$, лежащими в пространстве X, называется *диссипативным* (по отношению к $[x, y]$), если выполняется условие

$$\operatorname{Re}[Ax, x]\leqslant 0 \quad \text{для всех} \quad x\in D(A). \tag{3}$$

Пример. Возьмем в качестве X гильбертово пространство. Тогда симметрический оператор A, для которого $(Ax, x)\leqslant 0$ при всех $x\in X$, является диссипативным оператором по отношению к $[x, y]=$ $=(x, y)$, где (x, y) — это обычное скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

Теорема (Филлипс и Люмер). Пусть область определения $D(A)$ и область значений $R(A)$ линейного оператора A принадлежат комплексному (или вещественному) B-пространству X и $D(A)^a=X$. Тогда оператор A порождает определенную на пространстве X сжимающую полугруппу класса (C_0) в том и только в том случае, если он диссипативен (по отношению ко всем полускалярным произведениям $[x, y]$) и $R(I-A)=X$.

---

[1]) Для гильбертовых пространств определение диссипативного оператора приводилось на стр. 289. — *Прим. перев.*

Доказательство. Докажем достаточность указанных условий. Допустим, что оператор A диссипативен. Выберем произвольное число $\lambda > 0$. Тогда обратный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует, и $\|(\lambda I - A)^{-1} y\| \leqslant \lambda^{-1} \|y\|$ при $y \in D((\lambda I - A)^{-1})$. В самом деле, если $y = \lambda x - Ax$, то

$$\lambda \|x\|^2 = \lambda [x, x] \leqslant \operatorname{Re}(\lambda [x, x] - [Ax, x]) = \\ = \operatorname{Re}[y, x] \leqslant \|y\| \cdot \|x\|, \quad (4)$$

так как оператор A диссипативен. По условию теоремы $R(I - A) = X$, так что значение $\lambda = 1$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(A)$ оператора A, и из (4) следует, что $\|R(1; A)\| \leqslant 1$. Если $|\lambda - 1| < 1$, то резольвента $R(\lambda; A)$ существует и представляется в виде

$$R(\lambda; A) = R(1; A)(I + (\lambda - 1) R(1; A))^{-1} = \\ = R(1; A) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} ((1 - \lambda) R(1; A))^n$$

(см. теорему 1 гл. VIII, § 2). Кроме того, из (4) следует, что $\|R(\lambda; A)\| \leqslant \lambda^{-1}$ при значениях $\lambda > 0$, для которых $|\lambda - 1| < 1$. Следовательно, применяя формулу

$$R(\mu; A) = R(\lambda; A)(I + (\mu - \lambda) R(\lambda; A))^{-1},$$

которая справедлива при значениях $\mu > 0$, удовлетворяющих неравенству $|\mu - \lambda| \cdot \|R(\lambda; A)\| < 1$, мы убеждаемся в том, что резольвента $R(\mu; A)$ существует и $\|R(\mu; A)\| \leqslant \mu^{-1}$. Повторяя этот процесс, мы устанавливаем, что резольвента $R(\lambda; A)$ существует для всех значений $\lambda > 0$ и удовлетворяет оценке $\|R(\lambda; A)\| \leqslant \lambda^{-1}$. По предположению множество $D(A)$ плотно, и поэтому, применяя следствие 1 предыдущего параграфа, мы обнаруживаем, что оператор A порождает сжимающую полугруппу класса (C_0).

Перейдем к доказательству необходимости условий теоремы. Пусть $\{T_t;\ t \geqslant 0\}$ — сжимающая полугруппа класса (C_0). В этом случае

$$\operatorname{Re}[T_t x - x, x] = \operatorname{Re}[T_t x, x] - \|x\|^2 \leqslant \|T_t x\| \cdot \|x\| - \|x\|^2 \leqslant 0.$$

Таким образом, для элементов x, принадлежащих области определения $D(A)$ инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $\{T_t\}$,

$$\operatorname{Re}[Ax, x] = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \operatorname{Re}\{t^{-1} [T_t x - x, x]\} \leqslant 0.$$

Поэтому оператор A диссипативен. Кроме того, $\operatorname{Re}(I - A) = D(R(1; A)) = X$, так как A — это инфинитезимальный производящий оператор сжимающей полугруппы класса (C_0).

Следствие. Если область определения $D(A) \subseteq X$ замкнутого линейного оператора A плотна в B-пространстве X и $R(A) \subseteq X$, причем как оператор A, так и сопряженный ему оператор A' диссипативны, то A порождает некоторую сжимающую полугруппу класса (C_0).

Доказательство. Достаточно показать, что $R(I - A) = X$. Но оператор $(I - A)^{-1}$ замкнут, как и оператор A, и ограничен, поэтому область $R(I - A)$ образует в пространстве X замкнутое линейное подпространство. Следовательно, если предположить, что $R(I - A) \neq X$, то должен существовать нетривиальный функционал $x' \in X'$, такой, что

$$\langle (x - Ax), x' \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in D(A).$$

Но это означает, что $x' - A'x' = 0$, что противоречит диссипативности оператора A', поскольку $x' \neq 0$.

Замечание. Дальнейшие сведения о диссипативных операторах см. Люмер — Филлипс [1]. См. также Като [6].

9. Равностепенно непрерывные группы класса (C_0). Теорема Стоуна

Определение. Равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса (C_0) мы назовем *равностепенно непрерывной группой класса* (C_0), если существует равностепенно непрерывная полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ класса (C_0), удовлетворяющая следующему условию. Если определить операторы S_t формулой

$$S_t = \begin{cases} T_t & \text{при} \quad t \geqslant 0, \\ \hat{T}_{(-t)} & \text{при} \quad t \leqslant 0, \end{cases}$$

то семейство $\{S_t, \ -\infty < t < \infty\}$ операторов S_t обладает групповым свойством

$$S_t S_s = S_{t+s} \qquad (-\infty < t, \ s < \infty), \quad S_0 = I. \tag{1}$$

Теорема. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть область определения $D(A) \subseteq X$ некоторого линейного оператора A плотна в X и $R(A) \subseteq X$. Тогда A служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой равностепенно непрерывной группы класса (C_0) операторов $S_t \in L(X, X)$[1]), удовлетворяющих условию (1),

[1]) Оператор A считается по определению инфинитезимальным производящим оператором группы $\{S_t\}$, если A порождает полугруппу $\{S_t; t \geqslant 0\}$, а оператор $(-A)$ порождает полугруппу $\{S_{(-t)}; t \geqslant 0\}$. — *Прим. перев.*

в том и только в том случае, когда операторы $(I - n^{-1}A)^{-m}$ определены во всем пространстве X при любых значениях $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$ и $m = 1, 2, \ldots$ и равностепенно непрерывны относительно указанных значений индексов n и m.

Доказательство. *Необходимость.* Положим $T_t = S_t$ при $t \geqslant 0$ и $\hat{T}_t = S_{-t}$ для значений $t \geqslant 0$. Обозначим через A и $\hat{A}$ соответственно инфинитезимальные производящие операторы полугрупп $\{T_t\}$ и $\{\hat{T}_t\}$. Мы должны показать, что $\hat{A} = -A$. Допустим, что $x \in D(\hat{A})$; тогда, полагая $x_h = h^{-1}(\hat{T}_h - I)x$ и используя равностепенную непрерывность T_h, мы для любой непрерывной на X полунормы p найдем такую непрерывную полунорму q, что одновременно для всех $h \geqslant 0$ и любых $x \in D(A)$ будет выполняться неравенство

$$p(T_h x_h - \hat{A}x) \leqslant p(T_h x_h - T_h \hat{A}x) + p((T_h - I)\hat{A}x) \leqslant \\ \leqslant q(x_h - \hat{A}x) + p((T_h - I)\hat{A}x).$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{h \downarrow 0} T_h x_h = \hat{A}x$, т. е. условие $x \in D(\hat{A})$ влечет за собой равенство $\hat{A}x = \lim\limits_{h \downarrow 0} T_h\left(h^{-1}(\hat{T}_h - I)\right)x = \lim\limits_{h \downarrow 0} h^{-1}(I - T_h)x = -Ax$. Следовательно, оператор $-A$ представляет собой расширение оператора $\hat{A}$. Применяя аналогичное построение, можно показать, что $\hat{A}$ служит расширением оператора A. Поэтому $\hat{A} = -A$.

Достаточность. Допустим, что оператор A удовлетворяет условиям теоремы. Для значений $t \geqslant 0$ определим операторы T_t и $\hat{T}_t$ с помощью следующих соотношений:

$$T_t x = \lim_{n \to \infty} T_t^{(n)} x \equiv \lim_{n \to \infty} \exp\left(tA(I - n^{-1}A)^{-1}\right)x,$$
$$\hat{T}_t x = \lim_{n \to \infty} \hat{T}_t^{(n)} x \equiv \lim_{n \to \infty} \exp\left(t\hat{A}(I - n^{-1}\hat{A})^{-1}\right)x,$$

где $\hat{A} = -A$. Операторы T_t и $\hat{T}_t$, как нетрудно видеть, образуют равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0). При $t \geqslant 0$ ввиду свойства равностепенной (относительно n) непрерывности $\{T_t^{(n)}\}$ для всякой непрерывной на X полунормы p найдется такая непрерывная полунорма q, что

$$p\left(T_t\hat{T}_t x - T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x\right) \leqslant p\left(T_t\hat{T}_t x - T_t^{(n)}\hat{T}_t x\right) + p\left(T_t^{(n)}\hat{T}_t x - T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x\right) \leqslant \\ \leqslant p\left(\left(T_t - T_t^{(n)}\right)\hat{T}_t x\right) + q\left(\hat{T}_t x - \hat{T}_t^{(n)}x\right).$$

Поэтому $\lim\limits_{n \to \infty} T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}x = T_t\hat{T}_t x$. Таким образом, исходя из равностепенной непрерывности $T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)}$, мы установили равностепенную непрерывность операторов $T_t\hat{T}_t$. С другой стороны, поскольку операторы $(I-n^{-1}A)^{-1}$ и $(I-m^{-1}A)^{-1}$ перестановочны, $T_t^{(n)}\hat{T}_s^{(m)}=\hat{T}_s^{(m)}T_t^{(n)}$. Значит, $(T_t^{(n)}\hat{T}_t^{(n)})(T_s^{(n)}\hat{T}_s^{(n)})=T_{t+s}^{(n)}\hat{T}_{t+s}^{(n)}$, и поэтому операторы $(T_t\hat{T}_t)$ при $t\geqslant 0$ обладают полугрупповым свойством $(T_t\hat{T}_t)(T_s\hat{T}_s)=T_{t+s}\hat{T}_{t+s}$; следовательно, $\{T_t\hat{T}_t\}$ — это равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Если $x\in D(\hat{A})=D(A)$, то

$$\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h\hat{T}_h-I)x=\lim_{h\downarrow 0} T_h h^{-1}(\hat{T}_h-I)x+\lim_{h\downarrow 0} h^{-1}(T_h-I)x=$$
$$=\hat{A}x+Ax=0,$$

и, таким образом, инфинитезимальный производящий оператор A_1 полугруппы $\{T_t\hat{T}_t\}$ обращается в нуль для каждого $x\in D(\hat{A})$. Этот оператор A_1 должен быть замкнутым, так как оператор $(I-A_1)$ является обратным оператором для непрерывного линейного оператора $(I-A_1)^{-1}\in L(X, X)$. А так как A_1 обращается в нуль на плотном подмножестве $D(\hat{A})=D(A)$ пространства X, то A_1 — это нулевой оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Отсюда вытекает, что $(T_t\hat{T}_t)x=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\left(t\cdot 0\cdot (I-n^{-1}\cdot 0)^{-1}\right)x=x$, и поэтому $T_t\hat{T}_t=I$. Следовательно, положив $S_t=T_t$ при $t\geqslant 0$ и $S_{-t}=\hat{T}_t$ при $t\geqslant 0$, мы получим равностепенно непрерывную группу операторов S_t, $-\infty<t<\infty$, для которой оператор A служит инфинитезимальным производящим оператором.

Следствие 1. В случае когда X является B-пространством, условия этой теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a=X$ и существует резольвента $(I-n^{-1}A)^{-1}$, удовлетворяющая оценке

$$\left\|(I-n^{-1}A)^{-m}\right\|\leqslant M \tag{2}$$

для всех $m=1, 2, \ldots$ и всех достаточно больших $|n|$ ($n\gtrless 0$), где $M>0$ — независимая постоянная.

Для группы S_t, удовлетворяющей неравенству

$$\|S_t\|\leqslant Me^{\beta|t|} \quad \text{для всех} \quad t\in(-\infty, \infty) \qquad (\beta\geqslant 0),$$

условия теоремы сводятся к следующим: $D(A)^a=X$ и резольвента $(I-n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем для всех $m=1, 2, \ldots$ и достаточно больших $|n|$ ($n\gtrless 0$) справедливо неравенство

$$\left\|(I-n^{-1}A)^{-m}\right\|\leqslant M(1-|n^{-1}|\beta)^{-m}. \tag{3}$$

Для частного случая, когда $\|S_t\|\leqslant e^{\beta|t|}$ при всех $t\in(-\infty, \infty)$, условия теоремы можно сформулировать так: $D(A)^a=X$ и резольвента $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует, причем

$$\|(I - n^{-1}A)^{-1}\| \leqslant (1 - |n^{-1}|\beta)^{-1} \tag{4}$$

для всех достаточно больших $|n|$ $(n \gtrless 0)$.

Доказательство проводится так же, как для следствия 1 и следствия 2, § 7, гл. IX.

Следствие 2 (теорема Стоуна). Пусть $\{U_t, -\infty < t < \infty\}$ — группа класса (C_0) унитарных операторов U_t, заданных в гильбертовом пространстве X. Тогда инфинитезимальный производящий оператор A этой группы представляется в виде iH, где H — некоторый самосопряженный оператор.

Доказательство. Так как U_t — унитарные операторы, то $(U_t x, y) = \left(x, U_t^{-1}y\right) = (x, U_{-t}y)$, и поэтому

$$(Ax, y) = (x, -Ay) \quad \text{для всех} \quad x, y \in D(A).$$

Последнее означает, что оператор $-iA \equiv H$ симметрический. Так как A — инфинитезимальный производящий оператор группы $\{U_t\}$, то оператор $(I - n^{-1}A)^{-1} = (I - n^{-1}iH)$ должен быть ограниченным линейным оператором, для которого выполняется неравенство $\|(I - n^{-1}iH)^{-1}\| \leqslant 1$ при $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$. Полагая $n = \pm 1$, мы видим, что преобразование Кэли оператора H представляет собой унитарный оператор, и поэтому оператор H самосопряженный.

Замечание. Если оператор A имеет вид $A = iH$, где H — самосопряженный оператор, заданный в гильбертовом пространстве X, то условие (4) следствия 1, как можно показать, используя теорию преобразования Кэли, выполняется. Следовательно, оператор A представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой сжимающей полугруппы U_t, определенной в пространстве X. Нетрудно обнаружить, что операторы U_t будут в этом случае унитарными. В самом деле, сжимающий оператор U_t, отображающий гильбертово пространство X в себя, обладает при этих условиях обратным оператором $U_t^{-1} = U_{-t}$. Оператор U_t^{-1} отображает пространство X в себя и тоже является в данном случае сжимающим оператором. Поэтому оператор U_t должен быть унитарным.

10. Голоморфные полугруппы

В этом параграфе мы введем один важный класс полугрупп, а именно полугруппы операторов T_t, которые как функции параметра t могут быть голоморфно продолжены на некоторый сектор комплексной плоскости, содержащий положительную вещественную полуось t. Вначале нам потребуется следующая

Лемма. Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть $\{T_t; t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ —

некоторая равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Предположим, что $T_tX \subseteq D(A)$ при всех $t \geqslant 0$, где $D(A)$ — область определения инфинитезимального производящего оператора A полугруппы $\{T_t\}$. Тогда для всех $x \in X$ функция T_tx бесконечно дифференцируема по t при $t > 0$ и

$$T_t^{(n)}x = \left(T'_{t/n}\right)^n x \quad \text{для всех} \quad t > 0, \tag{1}$$

где $T'_t = D_tT_t$, $T''_t = D_tT'_t$, ..., $T_t^{(n)} = D_tT_t^{(n-1)}$, а D_t — оператор дифференцирования.

Доказательство. Если $t > t_0 > 0$, то $T'_tx = AT_tx = T_{t-t_0}AT_{t_0}x$, так как операторы A и T_s перестановочны при $s \geqslant 0$. Таким образом, $T'_tX \subseteq T_{t-t_0}X \subseteq D(A)$ при $t > 0$, и поэтому производная T''_tx существует для всех $t > 0$ и $x \in X$. Оператор A замкнут, следовательно,

$$T''_tx = D_t(AT_t)x = A \cdot \lim_{n\to\infty} n(T_{t+1/n} - T_t)x =$$
$$= A(AT_t)x = AT_{t/2}AT_{t/2}x = \left(T'_{t/2}\right)^2 x.$$

Повторяя эти рассуждения, мы и получим формулу (1). Лемма доказана.

Возьмем теперь некоторое комплексное локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X и заданную в нем равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t;\, t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ класса (C_0). Для такой полугруппы рассмотрим следующие три условия:

(I) $T_tx \in D(A)$ при всех значениях $t > 0$, и существует такая положительная постоянная C, что операторы семейства $\left\{(CtT'_t)^n\right\}$ равностепенно (относительно значений $n \geqslant 0$ и $t \in (0, 1]$) непрерывны.

(II) Функция T_t допускает *слабо голоморфное продолжение* T_λ, определяемое формулой

$$T_\lambda x = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - t)^n T_t^{(n)}x/n! \ \text{в области} \ |\arg\lambda| < \operatorname{arc\,tg}(Ce^{-1}), \tag{2}$$

и семейство операторов $\left\{e^{-\lambda}T_\lambda\right\}$ равностепенно непрерывно относительно λ в области $|\arg\lambda| \leqslant \operatorname{arc\,tg}\left(2^{-k}Ce^{-1}\right)$, (3)
где k — некоторое положительное число.

(III) Существует такая положительная постоянная C_1, что операторы семейства $\{(C_1\lambda R(\lambda;\, A))^n\}$ равностепенно непрерывны относительно $n \geqslant 0$ и значений λ в области $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 1 + \varepsilon$, где ε — некоторое положительное число (здесь A — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$).

Имеет место следующая

Теорема. Условия (I), (II) и (III) попарно эквивалентны.

Доказательство. Импликация (I) → (II). Возьмем произвольную непрерывную полунорму p, определенную на пространстве X. Тогда по предположению найдется такая непрерывная на X полунорма q, что $p\left(\left(tT'_t\right)^n x\right) \leqslant C^{-n} q(x)$ $(C > 0)$ для $1 \geqslant t > 0$, $n \geqslant 0$ и всех $x \in X$. Следовательно, согласно (1), при значениях $t > 0$

$$p\left((\lambda - t)^n T_t^{(n)} x/n!\right) \leqslant \frac{|\lambda - t|^n n^n}{t^n n!} \cdot \frac{1}{C^n} \cdot p\left(\left(\frac{t}{n} C T'_{t/n}\right)^n x\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{|\lambda - t|}{t} C^{-1} e\right)^n \cdot q(x), \quad \text{когда} \quad 0 \leqslant t/n \leqslant 1.$$

Поэтому ряд в правой части (2) сходится при $|\arg \lambda| < \operatorname{arctg}(Ce^{-1})$, и функция $T_\lambda x$ вследствие секвенциальной полноты пространства X действительно оказывается определенной для всех $x \in X$. При этом, очевидно, для любых $x \in X$ и $f \in X'$ числовая функция $f(T_t x)$ $(t > 0)$ допускает голоморфное продолжение $f(T_\lambda x)$ в области $|\arg \lambda| < \operatorname{arctg}(Ce^{-1})$, т. е. функция $T_\lambda x$ оказывается *слабо голоморфной*. Применяя теорему Хана — Банаха, мы видим, что $T_\lambda x$ представляет собой продолжение $T_t x$ в области $|\arg \lambda| < \operatorname{arctg}(Ce^{-1})$. Положим теперь $S_t = e^{-t} T_t$. Тогда $S'_t = e^{-t} T'_t - e^{-t} T_t$, откуда ввиду неравенства $0 \leqslant te^{-t} \leqslant 1$ $(t \geqslant 0)$ и условия (I) следует, что семейство операторов $\left\{\left(2^{-k} C t S'_t\right)^n\right\}$ при некотором $k > 0$ равностепенно непрерывно относительно значений $t > 0$ и $n \geqslant 0$, так как операторы семейства $\{T_t\}$ равностепенно непрерывны относительно $t > 0$. Таким образом, $\{S_t\}$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0), такая, что $S_t X \subseteq D(A - I) = D(A)$ при $t > 0$, где $(A - I)$ — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы S_t. Применяя к S_t тот же способ рассуждений, который использовался для T_t, мы можем показать, что $e^{-\lambda} T_\lambda$ представляет собой слабо голоморфное продолжение функции $S_t = e^{-t} T_t$ и удовлетворяет оценке (3).

Попутно мы можем получить такое

Следствие (Хилле). Если при тех же условиях X является комплексным B-пространством и $\overline{\lim\limits_{t \downarrow 0}} \| tT'_t \| < e^{-1}$, то $X = D(A)$.

Доказательство. При любом фиксированном значении $t > 0$

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \| (t/n) T'_{t/n} \| < e^{-1},$$

и поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - t)^n T_t^{(n)} x/n! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda - t)^n}{t^n} \cdot \frac{n^n}{n!} \left(\frac{t}{n} T'_{t/n}\right)^n x$$

сильно сходится в некотором секторе вида

$$\{\lambda;\ |\lambda - t|/t < 1 + \delta\}$$

(δ — некоторое положительное число) комплексной λ-плоскости. Точка $\lambda = 0$ является внутренней точкой этого сектора, откуда и следует наше утверждение.

Импликация (II) → (III). По формуле (10), § 4, гл. IX

$$(\lambda R(\lambda;\ A))^{n+1}x = \frac{\lambda^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-\lambda t}t^n T_t x\, dt \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}(\lambda) > 0,\ x \in X. \tag{4}$$

Следовательно, полагая $S_t = e^{-t}T_t$, мы получаем

$$((\sigma+1+i\tau)R(\sigma+1+i\tau;\ A))^{n+1}x = \\ = \frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)t}t^n S_t x\, dt, \quad \sigma > 0.$$

Возьмем значение $\tau < 0$. Так как подинтегральное выражение слабо голоморфно, мы можем, используя оценку (3) и интегральную теорему Коши, перейти от интегрирования по вещественной полуоси $0 \leqslant t < \infty$ к интегрированию по лучу $re^{i\theta}$ $(0 \leqslant r < \infty)$, содержащемуся в секторе $0 < \arg\lambda < \operatorname{arctg}\left(2^{-k}Ce^{-1}\right)$ комплексной λ-плоскости. Это дает нам выражение

$$((\sigma+1+i\tau)R(\sigma+1+i\tau;\ A))^{n+1}x = \\ = \frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{-(\sigma+i\tau)re^{i\theta}}r^n e^{in\theta}S_{re^{i\theta}}xe^{i\theta}\, dr,$$

и, следовательно, по формулам (3)

$$p\left(((\sigma+1+i\tau)R(\sigma+1+i\tau;\ A))^{n+1}x\right) \leqslant \\ \leqslant \sup_{0<r<\infty} p\left(S_{re^{i\theta}}x\right)\frac{(\sigma+1+i\tau)^{n+1}}{n!}\int_0^\infty e^{(-\sigma\cos\theta+\tau\sin\theta)r}r^n\, dr \leqslant \\ \leqslant q'(x)\frac{|\sigma+1+i\tau|^{n+1}}{|\tau\sin\theta-\sigma\cos\theta|^{n+1}},$$

где q' — некоторая непрерывная полунорма, заданная на X. Аналогичная оценка легко устанавливается и при $\tau > 0$. Отсюда, используя условие (7) § 4 этой главы, мы и выводим условие (III).

Импликация (III) → (I). Для любой непрерывной полунормы p, определенной на пространстве X, существует такая непрерывная на X полунорма q, что

$$p\left((C_1\lambda R(\lambda;\ A))^n x\right) \leqslant q(x) \quad \text{при} \quad \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 1+\varepsilon,\ \varepsilon > 0,\ n \geqslant 0.$$

Поэтому если $\mathrm{Re}(\lambda_0) \geqslant 1+\varepsilon$, то

$$p((\lambda-\lambda_0)^n R(\lambda_0;\ A)^n x) \leqslant \frac{|\lambda-\lambda_0|^n}{(C_1|\lambda_0|)^n}q(x) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Таким образом, при $|\lambda - \lambda_0|/C_1|\lambda_0| < 1$ резольвента $R(\lambda;\ A)$ существует и определяется рядом

$$R(\lambda;\ A)\,x = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n R(\lambda_0;\ A)^{n+1} x,$$

и при этом

$$p(R(\lambda;\ A)\,x) \leqslant \left(1 - C_1^{-1}|\lambda_0|^{-1} \cdot |\lambda - \lambda_0|\right)^{-1} q(R(\lambda_0;\ A)\,x).$$

Следовательно, согласно (III), существует такой угол $\theta_0 \in (\pi/2,\ \pi)$, что в секторах $\pi/2 \leqslant \arg\lambda \leqslant 0$ и $-\theta_0 \leqslant \arg\lambda \leqslant -\pi/2$, а также в области $\operatorname{Re}(\lambda) \geqslant 0$ при достаточно больших значениях $|\lambda|$ резольвента $R(\lambda;\ A)$ существует и удовлетворяет неравенству

$$p(R(\lambda;\ A)\,x) \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\, q'(x), \tag{5}$$

где q' — некоторая непрерывная на X полунорма. Поэтому интеграл

$$\hat{T}_t x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda \qquad (t > 0,\ x \in X) \tag{6}$$

будет сходиться, если за контур интегрирования C_2 принять кривую $\lambda = \lambda(\sigma)$ $(-\infty < \sigma < \infty)$, где функция $\lambda(\sigma)$ выбрана так, что $\lim\limits_{|\sigma| \uparrow \infty} |\lambda(\sigma)| = \infty$ и

$$\frac{\pi}{2} + \varepsilon \leqslant \arg\lambda(\sigma) \leqslant \theta_0, \qquad -\theta_0 \leqslant \arg\lambda(\sigma) \leqslant -\frac{\pi}{2} - \varepsilon,$$

когда соответственно $\sigma \uparrow \infty$ и $\sigma \downarrow -\infty$ ($\varepsilon > 0$ — некоторое положительное число), а при небольших значениях $|\sigma|$ кривая $\lambda(\sigma)$ лежит в правой полуплоскости комплексной λ-плоскости.

Покажем, что $\hat{T}_t$ совпадает с самой полугруппой T_t. Для этого сначала убедимся в том, что $\lim\limits_{t \downarrow 0} \hat{T}_t x = x$ для всех $x \in D(A)$. Возьмем произвольный элемент $x_0 \in D(A)$ и выберем комплексное число λ_0, лежащее справа от контура интегрирования C_2. Обозначим $(\lambda_0 I - A)\,x_0$ через y_0. Тогда, используя резольвентное уравнение, мы находим, что

$$\begin{aligned}
\hat{T}_t x_0 = \hat{T}_t R(\lambda_0;\ A)\, y_0 &= (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} R(\lambda;\ A)\, R(\lambda_0;\ A)\, y_0\, d\lambda = \\
&= (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda;\ A)\, y_0\, d\lambda - \\
&- (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda_0;\ A)\, y_0\, d\lambda.
\end{aligned}$$

Второй интеграл в правой части обращается в нуль, в чем нетрудно убедиться, смещая влево контур интегрирования. Следовательно,

$$\hat{T}_t x_0 = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda;\ A)\, y_0\, d\lambda, \quad y_0 = (\lambda_0 I - A)\, x_0.$$

Условие (5) позволяет перейти здесь под знаком интеграла к пределу при $t \downarrow 0$, и это приводит к равенству

$$\lim_{t \downarrow 0} \hat{T}_t x_0 = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} (\lambda_0 - \lambda)^{-1} R(\lambda;\ A)\, y_0\, d\lambda, \quad y_0 = (\lambda_0 I - A)\, x_0.$$

Для того чтобы оценить последний интеграл, образуем замкнутый контур интегрирования, состоящий из дуги круга $|\lambda| = r$, лежащей справа от C_2, и части контура C_2, стягиваемой этой дугой, а оставшуюся часть контура C_2 отбросим. При $r \uparrow \infty$ интеграл по отброшенной части контура C_2 и по дуге окружности стремится ввиду (5) к нулю. Поэтому интересующий нас интеграл равен вычету подинтегральной функции относительно точки λ_0, т. е. равен $R(\lambda_0;\ A)\, y_0 = x_0$. Мы показали таким образом, что $\lim\limits_{t \downarrow 0} \hat{T}_t x_0 = x_0$ при $x_0 \in D(A)$.

Докажем теперь, что $\hat{T}'_t x = A\hat{T}_t x$ при $t > 0$ и $x \in X$. Так как $R(\lambda;\ A)\, X = D(A)$ и $AR(\lambda;\ A) = \lambda R(\lambda;\ A) - I$, то интеграл $(2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} AR(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda$ сходится из-за наличия множителя $e^{\lambda t}$. Аппроксимируя интеграл (6) суммой Римана и используя тот факт, что A — замкнутый оператор $\left(\text{т. е. если } \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x \text{ и } \lim\limits_{n \to \infty} Ax_n = y,\right.$ $\left.\text{то } x \in D(A) \text{ и } Ax = y\right)$, нетрудно установить, что написанный выше интеграл равен $A\hat{T}_t x$. Таким образом,

$$A\hat{T}_t x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} AR(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Но, с другой стороны, дифференцируя (6) под знаком интеграла, мы получаем

$$\hat{T}'_t x = (2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda;\ A)\, x\, d\lambda, \qquad t > 0. \tag{7}$$

Последние два интеграла отличаются друг от друга на слагаемое $(2\pi i)^{-1} \int_{C_2} e^{\lambda t} x\, d\lambda$, которое равно нулю, так как величина последнего интеграла не меняется при смещении контура интегрирования влево.

Мы показали, следовательно, что функция $\hat{x}(t) = \hat{T}_t x_0$ $(x_0 \in D(A))$ удовлетворяет условиям 1) $\lim\limits_{t \downarrow 0} \hat{x}(t) = x_0$, 2) $d\hat{x}(t)/dt = A\hat{x}(t)$ при

$t > 0$ и 3) при $t \uparrow \infty$ функция $\hat{x}(t)$ имеет экспоненциальный порядок роста (это вытекает из (6)). Но, поскольку $x_0 \in D(A)$ и полугруппа $\{T_t\}$ равностепенно относительно значений $t \geqslant 0$ непрерывна, функция $x(t) = T_t x_0$ удовлетворяет условиям $\lim\limits_{t \downarrow 0} x(t) = x_0$, $dx(t)/dt = Ax(t)$ при $t \geqslant 0$, и при этом $x(t)$ ограничена при $t \geqslant 0$. Введем функцию $y(t) = \hat{x}(t) - x(t)$. Тогда $\lim\limits_{t \downarrow 0} y(t) = 0$, $dy(t)/dt = Ay(t)$ при $t > 0$ и $y(t)$ имеет экспоненциальный порядок роста при $t \uparrow \infty$. Поэтому при достаточно больших положительных значениях $\operatorname{Re}(\lambda)$ можно рассматривать преобразование Лапласа

$$L(\lambda;\ y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} y(t)\, dt.$$

Используя замкнутость оператора A и аппроксимируя написанный ниже интеграл суммой Римана, мы находим, что

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y'(t)\, dt = \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} Ay(t)\, dt = A \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\, dt,$$
$$0 \leqslant \alpha < \beta < \infty.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y'(t)\, dt = e^{-\lambda\beta} y(\beta) - e^{-\lambda\alpha} y(\alpha) + \lambda \int_\alpha^\beta e^{-\lambda t} y(t)\, dt.$$

При $\alpha \downarrow 0$ и $\beta \uparrow \infty$ этот интеграл стремится к $\lambda L(\lambda;\ y)$, так как $y(0) = 0$, а $y(\beta)$ имеет при $\beta \uparrow \infty$ экспоненциальный порядок роста. Еще раз используя замкнутость оператора A, мы находим, что $AL(\lambda;\ y) = \lambda L(\lambda;\ y)$ при достаточно больших положительных $\operatorname{Re}(\lambda)$. Поскольку при $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$ обратный оператор $(\lambda I - A)^{-1}$ существует, мы обнаруживаем, что $L(\lambda;\ y) = 0$ при достаточно больших положительных значениях $\operatorname{Re}(\lambda)$. Следовательно, для любого непрерывного линейного функционала $f \in X'$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(y(t))\, dt = 0 \text{ при достаточно больших положительных } \operatorname{Re}(\lambda).$$

Положим $\lambda = \sigma + i\tau$ и введем функцию

$$g_\sigma(t) = \begin{cases} e^{-\sigma t} f(y(t)) & \text{при } t \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } t < 0. \end{cases}$$

Тогда из полученного выше равенства вытекает, что преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau t} g_\sigma(t)\, dt$$

тождественно обращается в нуль в области $-\infty < \tau < \infty$. Следовательно, по формуле обращения Фурье функция $g_\sigma(t)$ тождественно равна нулю. Таким образом, $f(y(t)) = 0$, и поэтому по теореме Хана — Банаха $y(t) \equiv 0$.

Мы видим теперь, что $\hat{T}_t x = T_t x$ при всех $t > 0$ и $x \in D(A)$. Область $D(A)$ плотна в X и $\hat{T}_t$, $T_t \in L(X, X)$, откуда ясно, что $\hat{T}_t x = T_t x$ при всех $t > 0$ и $x \in X$. Доопределяя $\hat{T}_t$ при $t = 0$ как $\hat{T}_0 = I$, мы получаем совпадение $\hat{T}_t = T_t$ для всех $t \geqslant 0$. Используя теперь формулу (7), мы находим, что

$$T'_t x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} \lambda R(\lambda; A) x \, d\lambda \qquad (t > 0),$$

и поэтому, учитывая (1) и (5), получаем

$$\left(T'_{t/n}\right)^n x = T_t^{(n)} x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{\lambda t} \lambda^n R(\lambda; A) x \, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Следовательно,

$$\left(t T'_t\right)^n x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{C_2} e^{n\lambda t} (t\lambda)^n R(\lambda; A) x \, d\lambda, \qquad t > 0.$$

Отсюда на основании (III)

$$p\left(\left(t T'_t\right)^n x\right) \leqslant (2\pi)^{-1} q(x) \int\limits_{C_2} \left| e^{n\lambda t} \right| \cdot t^n \cdot |\lambda|^{n-1} \cdot d|\lambda|.$$

При $0 < t \leqslant 1$ последний интеграл мажорируется величиной C_3^n, где C_3 — некоторая положительная постоянная. Эту оценку можно получить, разбивая путь интегрирования C_2 на две части, лежащие соответственно в областях $\mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0$ и $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$, и используя известное интегральное представление гамма-функции. Отсюда и вытекает условие равностепенной непрерывности, фигурирующее в (I).

Замечание. Результаты этого раздела принадлежат Иосида [6]. См. также Хилле — Филлипс [1] и Хилле [3].

11. Дробные степени замкнутых операторов

Пусть X — некоторое B-пространство и $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Введем функцию

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{z\lambda - tz^\alpha} dz & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0, \\ \qquad 0 & \text{при} \quad \lambda < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\sigma > 0$, $t > 0$, $0 < \alpha < 1$ и ветвь функции z^α выбрана так, что $\mathrm{Re}(z^\alpha) > 0$ при $\mathrm{Re}(z) > 0$. Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной z-плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (1) обеспечивается множителем e^{-tz^α}. Следуя Бохнеру [2] и Филлипсу [5], мы можем показать, что операторы, определяемые формулами

$$\hat{T}_{t,\alpha}x \equiv \hat{T}_t x = \begin{cases} \int\limits_0^\infty f_{t,\alpha}(s) T_s x\, ds & \text{при} \quad t > 0, \\ x & \text{при} \quad t = 0, \end{cases} \tag{2}$$

образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Более того, можно показать, что полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ голоморфна (Иосида [8], Балакришнан [1]). Инфинитезимальный производящий оператор $\hat{A} = \hat{A}_\alpha$ полугруппы $\{\hat{T}_t\}$ оказывается связанным с инфинитезимальным оператором полугруппы $\{T_t\}$ соотношением

$$\hat{A}_\alpha x = -(-A)^\alpha x \quad \text{для всех} \quad x \in D(A), \tag{3}$$

где нецелые степени $(-A)^\alpha$ оператора $(-A)$ определяются равенством

$$(-A)^\alpha x = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^\infty \lambda^{\alpha-1} (\lambda I - A)^{-1} (-Ax)\, d\lambda \quad \text{для} \quad x \in D(A), \tag{4}$$

или эквивалентной формулой

$$(-A)^\alpha x = \Gamma(-\alpha)^{-1} \int\limits_0^\infty \lambda^{-\alpha-1} (T_\lambda - I)\, x\, d\lambda, \qquad x \in D(A). \tag{5}$$

Формулы (4) и (5) установлены Балакришнаном. Для резольвенты оператора $\hat{A}_\alpha$ известна следующая формула Като:

$$(\mu I - \hat{A}_\alpha)^{-1} = \frac{\sin \alpha\pi}{\pi} \int\limits_0^\infty (rI - A)^{-1} \frac{r^\alpha}{\mu^2 - 2\mu r^\alpha \cos \alpha\pi + r^{2\alpha}}\, dr. \tag{6}$$

Эти результаты говорят о том, что среди равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0) содержится обширный класс голоморфных полугрупп.

Для доказательства перечисленных результатов мы приведем ряд предложений, касающихся свойств функции $f_{t,\alpha}(\lambda)$.

Предложение 1. Имеет место представление

$$e^{-ta^\alpha} = \int\limits_0^\infty e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)\, d\lambda \qquad (t > 0,\ a > 0). \tag{7}$$

Доказательство. Используя множитель $e^{-z^{\alpha}t}$, обеспечивающий сходимость интеграла (1), нетрудно убедиться в том, что функция $f_{t,\alpha}(\lambda)$ имеет экспоненциальный порядок роста. По интегральной теореме Коши интеграл (1) не зависит от выбора значений $\sigma > 0$. Выберем $a > \sigma = \operatorname{Re}(z) > 0$; тогда по теореме о вычетах

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda a} f_{t,\alpha}(\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[\frac{e^{\lambda(z-a)}}{z-a}\right]_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} e^{-z^{\alpha}t}\,dz =$$

$$= \frac{-1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{1}{z-a}\,e^{-z^{\alpha}t}\,dz = e^{-ta^{\alpha}}.$$

Предложение 2. При всех $\lambda > 0$

$$f_{t,\alpha}(\lambda) \geqslant 0 \qquad (\lambda > 0). \tag{8}$$

Доказательство. Положим $a^{\alpha} = g(a)$, $e^{-tx} = h(x)$; тогда

$$(-1)^{n-1} g^{(n)}(a) \geqslant 0 \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad g(a) \geqslant 0$$

и $\quad (-1)^n h^{(n)}(x) \geqslant 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$ при $a \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$.

Следовательно, функция $k(a) = h(g(a)) = e^{-ta^{\alpha}}$ и ее производные удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned}(-1)^n k^{(n)}(a) = (-1)\,h'(x)(-1)^{n-1} g^{(n)}(a) &+ \\ + \sum_{(p)} D^{(n)}_{(p_0 p_1 \ldots p_\nu)}(-1)^{p_0} h^{(p_0)}(x) &\times \\ \times (-1)^{p_1} g^{(p_1+1)}(a) \ldots (-1)^{p_\nu} g^{(p_\nu+1)}(a) &\geqslant 0\end{aligned} \tag{9}$$

(здесь коэффициенты $D^{(n)}_{(p_0 p_1 \ldots p_\nu)} \geqslant 0$, $p_0 \geqslant 2$, $p_1 \geqslant 0, \ldots, p_\nu \geqslant 0$, причем $p_0 \leqslant \sum_{j=1}^{\nu} p_j = n$ (ν произвольно, $n = 1, 2, \ldots$)).

Доказательство предложения 2 легко выводится теперь из *формулы обращения Поста — Уиддера*

$$f_{t,\alpha}(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{\lambda}\right)^{n+1} k^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda}\right), \qquad \lambda > 0, \tag{10}$$

которую мы далее установим. Действительно, из (9) и (10) вытекает, что $f_{t,\alpha}(\lambda) \geqslant 0$ при $\lambda > 0$.

Обратимся к выводу формулы (10). Дифференцируя равенство (7) n раз, находим

$$k^{(n)}\left(\frac{n}{\lambda}\right) = (-1)^n \int_0^{\infty} s^n e^{-sn/\lambda} f_{t,\alpha}(s)\,ds.$$

Подставим это выражение в правую часть (10) и покажем, что предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+1}}{e^n n!} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty \left[\frac{s}{\lambda} \exp\left(1 - \frac{s}{\lambda}\right)\right]^n f_{t,\alpha}(s)\,ds$$

равен $f_{t,\alpha}(\lambda)$. По формуле Стирлинга

$$\lim_{n\to\infty} n^n \sqrt{2\pi n}/e^n n! = 1,$$

и поэтому нам нужно доказать, что

$$f_{t,\alpha}(\lambda_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{(2\pi)^{-1}}{\lambda_0} \int_0^\infty n^{1/2} \left[\frac{s}{\lambda_0} \exp\left(1 - \frac{s}{\lambda_0}\right)\right]^n f_{t,\alpha}(s)\,ds, \qquad (11)$$

где $\lambda_0 > 0$ — произвольное фиксированное положительное число. Зафиксируем теперь какое-нибудь положительное число $\eta < \lambda_0$ и разобьем интеграл в правой части (11) на три слагаемых:

$$\int_0^\infty = \int_0^{\lambda_0-\eta} + \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} + \int_{\lambda_0+\eta}^\infty = J_1 + J_2 + J_3.$$

Поскольку функция xe^{1-x} монотонно возрастает на сегменте $[0, 1]$ от 0 до 1 и функция $f_{t,\alpha}$ ограничена по s, мы видим, что $\lim\limits_{n\to\infty} J_1 = 0$. В промежутке $[1, \infty]$ функция xe^{1-x} монотонно убывает от 1 до нуля, и поэтому

$$\frac{\lambda_0+\eta}{\lambda_0} \exp\left(1 - \frac{\lambda_0+\eta}{\lambda_0}\right) < \beta < 1,$$

а так как $f_{t,\alpha}(s)$ при $s \uparrow \infty$ растет экспоненциально, то

$$|J_3| \leqslant n^{1/2} e^{n_0} \beta^{n-n_0} \int_0^\infty \left(\frac{s}{\lambda_0}\right)^{n_0} \exp\left(-\frac{n_0 s}{\lambda_0}\right) |f_{t,\alpha}(s)|\,ds \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Функция $f_{t,\alpha}(s)$ непрерывна по s, поэтому для всякого положительного $\varepsilon > 0$ можно выбрать $\eta > 0$ столь малым, чтобы при $\lambda_0 - \eta \leqslant s \leqslant \lambda_0 + \eta$ выполнялось неравенство $f_{t,\alpha}(\lambda_0) - \varepsilon \leqslant f_{t,\alpha}(s) \leqslant f_{t,\alpha}(\lambda_0) + \varepsilon$. Таким образом,

$$(f_{t,\alpha}(\lambda_0) - \varepsilon) J_0 \leqslant J_2 \leqslant (f_{t,\alpha}(\lambda_0) + \varepsilon) J_0, \qquad (12)$$

где

$$J_0 = \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} n^{1/2} \left[\frac{s}{\lambda_0} \exp\left(1 - \frac{s}{\lambda_0}\right)\right]^n ds. \qquad (13)$$

Приведенные рассуждения можно, в частности, применить к функции

$$k(a)=a^{-1}=\int_0^\infty e^{-\lambda a}\,d\lambda,$$

(в этом случае $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$ и $k^{(n)}(n/\lambda_0)=(-1)^n n!(\lambda_0/n)^{n+1}$). Подставляя эту функцию в (10), мы легко убеждаемся в том, что для $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$ формула (10) справедлива. Равенство (11) эквивалентно (10), и поэтому оно тоже должно выполняться при $f_{t,\alpha}(\lambda)\equiv 1$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} J_1=0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} J_3=0$ при любой функции $f_{t,\alpha}$, отсюда следует, что

$$1=\lim_{n\to\infty}(2\pi\lambda_0)^{-1}J_0.$$

Это последнее соотношение позволяет на основании неравенств (12) установить справедливость формулы (11) в общем случае. Из (11) вытекает эквивалентная формула (10).

Предложение 3. Имеют место тождества

$$\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda)\,d\lambda=1, \tag{14}$$

$$f_{t+s,\alpha}(\lambda)=\int_0^\infty f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)\,f_{s,\alpha}(\mu)\,d\mu. \tag{15}$$

Доказательство. Функция $f_{t,\alpha}(\lambda)$ неотрицательна, и к интегралу (7) можно применить лемму Лебега — Фату:

$$\int_0^\infty \varliminf_{a\downarrow 0}\left(e^{-\lambda a}f_{t,\alpha}(\lambda)\right)d\lambda\leqslant \varliminf_{a\downarrow 0} e^{-ta^\alpha}=1.$$

Следовательно, функция $f_{t,\alpha}(\lambda)$ интегрируема по λ в промежутке $(0,\infty)$, поэтому, применяя лемму Лебега — Фату и равенство (7) еще раз, мы и получаем (14). Далее из (7) мы выводим

$$\int e^{-\lambda a}\left\{\int f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)\,f_{s,\alpha}(\mu)\,d\mu\right\}d\lambda=$$
$$=\int e^{-(\lambda-\mu)a}f_{t,\alpha}(\lambda-\mu)\,d(\lambda-\mu)\cdot\int e^{-\mu a}f_{s,\alpha}(\mu)\,d\mu=$$
$$=e^{-ta^\alpha}\cdot e^{-sa^\alpha}=e^{-(t+s)a^\alpha}=\int e^{-\lambda a}f_{t+s,\alpha}(\lambda)\,d\lambda,\qquad a>0.$$

Теперь, используя обращение преобразования Лапласа, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе, мы и получаем формулу (15).

Предложение 4. Для производной функции $f_{t,\alpha}$ по переменной t выполняется равенство

$$\int_0^\infty \frac{\partial f_{t,\alpha}(\lambda)}{\partial t}\,d\lambda = 0, \qquad t > 0. \tag{16}$$

Доказательство. Перейдем в формуле (1) от интегрирования по прямой $z = \sigma > 0$ к контуру, состоящему из двух лучей $z = re^{-i\theta}$ $(0 < r < \infty)$ и $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < \infty)$[1], где $\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \pi$; тогда для функции $f_{t,\alpha}$ получится выражение

$$f_{t,\alpha}(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cos\theta - tr^\alpha\cos\alpha\theta)\times$$
$$\times\sin(sr\sin\theta - tr^\alpha\sin\alpha\theta + \theta)\,dr. \tag{17}$$

Аналогично, переходя в формуле

$$\frac{\partial f_{t,\alpha}(\lambda)}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{z\lambda - z^\alpha t}(-z^\alpha)\,dz$$

к интегрированию по лучам $z = re^{-i\theta}$ и $z = re^{i\theta}$ $(0 < r < \infty)$, мы получаем равенство

$$f'_{t,\alpha}(s) = \frac{\partial f_{t,\alpha}(s)}{\partial t} = \frac{(-1)}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cos\theta - tr^\alpha\cos\alpha\theta)\times$$
$$\times\sin(sr\sin\theta - tr^\alpha\sin\alpha\theta + \alpha\theta + \theta)\,r^\alpha\,dr. \tag{18}$$

Выберем теперь значение $\theta = \theta_\alpha = \pi/(1+\alpha)$; тогда

$$f'_{t,\alpha}(s) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha)\sin((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha)\,r^\alpha\,dr. \tag{19}$$

Выражение (19) показывает, что производная $f'_{t,\alpha}(s)$ интегрируема по s в промежутке $(0, \infty)$, так как под знаком интеграла в (19) содержится множитель вида $r^\alpha (0 < \alpha < 1)$. Это позволяет продифференцировать выражение (14) по t под знаком интеграла, что и приводит к соотношению (16).

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 1. Семейство операторов $\{\hat{T}_t\}$ образует голоморфную полугруппу.

---

[1] Луч $re^{-i\theta}$ проходится из бесконечности к началу координат, а луч $re^{i\theta}$ — из начала координат в бесконечность. — *Прим. перев.*

Доказательство. Тот факт, что $\{\hat{T}_t\}$ обладает полугрупповым свойством $\hat{T}_t\hat{T}_s = \hat{T}_{t+s}$ $(t, s > 0)$, вполне очевиден вследствие (2) и (15). Из определения (2) и равенства (17) следует, что

$$\hat{T}_t x = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty T_s x\, ds \int_0^\infty \exp\left((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha\right) \times \\ \times \sin\left((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha + \theta_\alpha\right) dr, \tag{20}$$

где $\theta = \theta_\alpha = \pi/(1+\alpha)$. Переходя в (20) к новым переменным

$$s = vt^{1/\alpha}, \quad r = ut^{-1/\alpha}, \tag{21}$$

мы получаем

$$\hat{T}_t x = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_{vt^{1/\alpha}} x\, dv \int_0^\infty \exp\left((uv + u^\alpha)\cos\theta_\alpha\right) \times \\ \times \sin\left((uv - u^\alpha)\sin\theta_\alpha + \theta_\alpha\right) du. \tag{20$'$}$$

Внутренний интеграл в (20′) равен $\pi f_{1,\alpha}(v)$, поэтому, используя (14) и равномерную (относительно значений $t \geqslant 0$) ограниченность множества $\{\|T_t x\|\}$, мы устанавливаем оценку

$$\|\hat{T}_t x\| \leqslant \sup_{t \geqslant 0}\|T_t x\| \int_0^\infty f_{1,\alpha}(v)\, dv = \sup_{t \geqslant 0}\|T_t x\|. \tag{22}$$

Так как функция $f_{1,\alpha}(v)$ интегрируема в промежутке $[0, \infty)$, то можно перейти в (20′) к пределу при $t \downarrow 0$, откуда ввиду (14) мы получаем

$$s\text{-}\lim_{t \downarrow 0} \hat{T}_t x = \int_0^\infty f_{1,\alpha}(v)\, dv \cdot x = x.$$

Таким образом, $\{\hat{T}_t\}$ — равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0), и для нее справедлива оценка (22).

Поскольку функция $f'_{t,\alpha}(s) = \partial f_{t,\alpha}(s)/\partial t$ интегрируема по промежутку $[0, \infty)$ и операторы полугруппы $\{T_t\}$ равностепенно непрерывны, мы можем продифференцировать выражение (2) по t под знаком интеграла

$$\hat{T}'_t x = \int_0^\infty f'_{t,\alpha}(s)\, T_s x\, ds = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty T_s x\, ds \int_0^\infty \exp\left((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha\right) \times \\ \times \sin\left((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha\right) r^\alpha\, dr. \tag{23}$$

Делая в (23) замену переменных (21), находим

$$\hat{T}'_t x = \int_0^\infty \left(T_{vt^{1/\alpha}} x\right) f'_{1,\alpha}(v)\, dv \cdot t^{-1}.$$

Отсюда следует оценка

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}} \| t\hat{T}'_t \| < \infty,$$

так как операторы семейства $\{T_t\}$ равностепенно непрерывны относительно значений $t \geqslant 0$ и интеграл от функции $f'_{1,\alpha}(v)$ по промежутку $[0, \infty)$ сходится. Полученная оценка говорит о том, что полугруппа $\{\hat{T}_t\}$ голоморфна.

Теорема 2. Инфинитезимальный производящий оператор $\hat{A}_\alpha$ полугруппы $\{\hat{T}_t\}$ связан с соответствующим оператором полугруппы $\{T_t\}$ формулой (3), в которой выражение $(-A)^\alpha$ определяется равенством (4) или эквивалентным соотношением (5). Кроме того, имеет место представление (6).

Доказательство. Из формул (16) и (23) мы получаем

$$\hat{T}'_t x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (T_s - I)\, x\, ds \int_0^\infty \exp\left((sr + tr^\alpha)\cos\theta_\alpha\right) \times$$
$$\times \sin\left((sr - tr^\alpha)\sin\theta_\alpha\right) r^\alpha\, dr. \qquad (24)$$

Если $x \in D(A)$, то $s\text{-}\lim_{s\downarrow 0} s^{-1}(T_s - I)\, x = Ax$, и нормы $\|(T_s - I)\, x\|$ равномерно ограничены по s при $s \geqslant 0$. Поэтому, переходя в (24) к пределу при $t \downarrow 0$, мы находим, что

$$s\text{-}\lim_{t\downarrow 0} \hat{T}'_t x = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty (T_s - I)\, x\, ds \int_0^\infty \exp(sr\cos\theta_\alpha) \sin(sr\sin\theta_\alpha)\, r^\alpha\, dr =$$
$$= (-\Gamma(-\alpha))^{-1} \int_0^\infty s^{-\alpha-1}(T_s - I)\, x\, ds.$$

Действительно, если учесть, что $(\alpha + 1)\theta_\alpha = \pi$, то известные из теории Γ-функций формулы

$$\Gamma(z) = c^z \int_0^\infty e^{-cr} r^{z-1}\, dr \qquad (\operatorname{Re}(z) > 0,\ \operatorname{Re}(c) > 0) \qquad (25)$$

и

$$\Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \pi/\sin\pi z \qquad (26)$$

приводят к следующему результату:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \exp(sr\cos\theta_\alpha)\sin(sr\sin\theta_\alpha)\,r^\alpha\,dr = (\pi i)^{-1}\operatorname{Im}\left\{\int_0^\infty e^{-r(-se^{i\theta_\alpha})}r^\alpha\,dr\right\} =$$

$$= (\pi i)^{-1}\operatorname{Im}\left((-se^{i\theta_\alpha})^{-\alpha-1}\right)\Gamma(1+\alpha) = s^{-\alpha-1}\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)\,\Gamma(1+\alpha) =$$

$$= s^{-\alpha-1}\frac{-\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha)} = (-\Gamma(-\alpha))^{-1}s^{-\alpha-1}.$$

Теперь, учитывая, что функция $\hat{T}_t x$ непрерывна в точке $t=0$, а инфинитезимальный производящий оператор $\hat{A}_\alpha$ замкнут, и используя равенство $\hat{T}'_t x = \hat{A}_\alpha \hat{T}_t x$ (при $t>0$), мы выводим формулу

$$\hat{A}_\alpha x = (-\Gamma(-\alpha))^{-1}\int_0^\infty s^{-\alpha-1}(T_s - I)\,x\,ds \quad \text{для} \quad x\in D(A).$$

Отсюда, из формул $(tI-A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-ts}T_s\,ds$ и (25), (26) получаем

$$\hat{A}_\alpha x = \Gamma(-\alpha)^{-1}\Gamma(1+\alpha)^{-1}\int_0^\infty\left\{\int_0^\infty e^{-st}t^\alpha\,dt\right\}(I-T_s)\,x\,ds =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^\alpha\left((tI-A)^{-1} - t^{-1}I\right)x\,dt =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty t^{\alpha-1}(tI-A)^{-1}Ax\,dt \quad \text{для всех} \quad x\in D(A).$$

Полагая, наконец, в формулах (17) и (2) $\theta=\pi$, находим

$$(\mu I - \hat{A}_\alpha)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\mu t}\hat{T}_t\,dt =$$

$$= \pi^{-1}\int_0^\infty dr\int_0^\infty e^{-sr}T_s\,ds\int_0^\infty \exp(-\mu t - tr^\alpha\cos\alpha\pi)\sin(tr^\alpha\sin\alpha\pi)\,dt =$$

$$= \pi^{-1}\int_0^\infty (rI-A)^{-1}\left\{\int_0^\infty \exp(-\mu t - tr^\alpha\cos\alpha\pi)\sin(tr^\alpha\sin\alpha\pi)\,dt\right\}dr =$$

$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^\infty (rI-A)^{-1}\frac{r^\alpha}{\mu^2 - 2r^\alpha\mu\cos\alpha\pi + r^{2\alpha}}\,dr.$$

Замечание. Формула (2) была предложена Бохнером [2] без подробного доказательства. См. также Филлипс [5]. Тот факт, что операторы $\hat{T}_t$ образуют голоморфную полугруппу, доказали Иосида [8], Балакришнан [1] и Като [2]. Формулы (4) и (5) принадлежат Балакришнану, который показал, что для замкнутого оператора A, удовлетворяющего условию

$$\begin{gathered}\text{резольвента } R(\lambda;\ A)=(\lambda I-A)^{-1}\\ \text{существует при } \operatorname{Re}(\lambda)>0 \\ \text{и} \sup_{\operatorname{Re}(\lambda)>0} |\operatorname{Re}(\lambda)|\cdot\|R(\lambda;\ A)\|<\infty,\end{gathered}\tag{27}$$

формула (4) определяет линейный оператор $(-A)^{\alpha}$. Он показал также, что $(-A)^{\alpha}$ обладает обычными свойствами выражений с дробными степенями. А именно справедлива

Теорема 3. Пусть замкнутый линейный оператор A удовлетворяет требованию (27). Тогда формула (4) определяет линейный оператор $(-A)^{\alpha}$, обладающий следующими свойствами:

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x=(-A)^{\alpha+\beta}x \text{ при } x\in D(A^2) \text{ и } \alpha,\ \beta>0,\ \alpha+\beta<1, \tag{28}$$

$$s\text{-}\lim_{\alpha\uparrow 1}(-A)^{\alpha}x=-Ax \quad \text{для } x\in D(A), \tag{29}$$

$$\text{если } s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow 0}\lambda R(\lambda;\ A)x=0, \quad \text{то } s\text{-}\lim_{\alpha\downarrow 0}(-A)^{\alpha}x=x. \tag{30}$$

При этом если за A принять инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы $\{T_t\}$ класса (C_0), то

$$(A_{\alpha})_{\beta}=A_{\alpha\beta}, \tag{31}$$

где через A_{α} обозначен оператор $\hat{A}_{\alpha}$, определяемый формулой Като (6).

Замечание. Формулу (31) установил Ватанабе [1].

Доказательство. Согласно (27), величина $\|r^{\alpha-1}(rI-A)^{-1}(-Ax)\|$ имеет при $r\uparrow\infty$ порядок $O(r^{\alpha-2})$, и, поскольку $(rI-A)^{-1}(-Ax)=$ $=x-r(rI-A)^{-1}x$, эта норма ввиду (27) при $r\downarrow 0$ представляет собой величину порядка $O(r^{\alpha-1})$. Поэтому интеграл в правой части формулы (4) будет сходиться.

Вполне очевидно, что $(-A)^{\beta}x\in D(A)$ для $x\in D(A^2)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно аппроксимировать интеграл суммами Римана и использовать свойство замкнутости оператора A. Поэтому мы можем определить выражение $(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x$:

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x =$$
$$= \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\lambda^{\beta-1}\mu^{\alpha-1}R(\lambda;\ A)R(\mu;\ A)A^2x\,d\lambda\,d\mu.$$

Разбивая путь интегрирования на две части, для которых соответственно $\lambda \geqslant \mu$ и $\lambda < \mu$, мы получаем

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^1\left(\sigma^{\beta-1}+\sigma^{\alpha-1}\right)d\sigma\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha+\beta-1}R(\lambda\sigma;\ A)R(\lambda;\ A)A^2x\,d\lambda.$$

Для элементов $x\in D(A)$ можно воспользоваться равенством

$$R(\lambda;\ A)(-A) = I - \lambda R(\lambda;\ A)$$

и резольвентным уравнением

$$R(\lambda;\ A) - R(\mu;\ A) = (\mu-\lambda)R(\lambda;\ A)R(\mu;\ A),$$

что приводит к формуле

$$(-A)^{\alpha}(-A)^{\beta}x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\cdot s\text{-}\lim_{t\uparrow 1}\int_0^t\left(\sigma^{\beta-1}+\sigma^{\alpha-1}\right)(1-\sigma)^{-1}d\sigma\times$$
$$\times\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha+\beta-1}\left(-\sigma R(\lambda\sigma;\ A)+R(\lambda;\ A)\right)(-Ax)\,d\lambda =$$
$$= \int_0^{\infty}\left(\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\cdot\frac{\sin\beta\pi}{\pi}\int_0^1\frac{\sigma^{\beta-1}+\sigma^{\alpha-1}-\sigma^{-\alpha}-\sigma^{-\beta}}{1-\sigma}d\sigma\right)\times$$
$$\times\lambda^{\alpha+\beta-1}R(\lambda;\ A)(-Ax)\,d\lambda.$$

Выражение, стоящее справа в круглых скобках под знаком интеграла, оказывается равным $\pi^{-1}\sin\pi(\alpha+\beta)$ — чтобы вычислить эту величину, достаточно разложить множитель $(1-\sigma)^{-1}$ в ряд по степеням σ. Мы получаем, таким образом, формулу (28).

Для вывода равенства (29) используем формулу $\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}(1+\lambda)^{-1}d\lambda = \pi/\sin\alpha\pi$. Это приводит к следующему результату:

$$(-A)^{\alpha}x - (-A)x = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}\left(R(\lambda;\ A)-\frac{1}{\lambda+1}I\right)(-Ax)\,d\lambda.$$

Зафиксируем некоторое произвольное значение $C>0$ и разобьем путь интегрирования на две части: от нуля до C и от C до ∞. При фиксированном C интеграл, соответствующий первой части, стремится к нулю при $\alpha\uparrow 1$, так как выражение $R(\lambda;\ A)(-Ax)=$ $=x-\lambda R(\lambda;\ A)x$ ограничено (по норме) при $\lambda>0$. Второй интеграл не превосходит по норме выражения

$$\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha)}C^{\alpha-1}\sup_{\lambda\geqslant C}\left\|\left(\lambda R(\lambda;\ A)-\frac{\lambda}{\lambda+1}I\right)(-Ax)\right\|.$$

Но $x-\lambda R(\lambda;\ A)x=R(\lambda;\ A)(-Ax)$, и поэтому, учитывая (27), мы видим, что $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\uparrow\infty}\lambda R(\lambda;\ A)x=x$. Поэтому предел

$$s\text{-}\lim_{\alpha\uparrow 1}\frac{\sin\alpha\pi}{\pi(1-\alpha)}C^{\alpha-1}\sup_{\lambda\geqslant C}\left\|\left(\lambda R(\lambda;\ A)-\frac{\lambda}{\lambda+1}I\right)(-Ax)\right\|$$

может быть сделан сколь угодно малым, если выбрать достаточно большое значение C. Отсюда и вытекает (29).

Для доказательства формулы (30) мы опять разобьем интеграл на две части, соответствующие промежуткам от нуля до C и от C до ∞. В силу условия (27) второй интеграл будет стремиться к нулю при $\alpha\downarrow 0$. Поскольку $R(\lambda;\ A)(-Ax)=x-\lambda R(\lambda;\ A)x$ и по предположению $s\text{-}\lim\limits_{\lambda\downarrow 0}\lambda R(\lambda;\ A)x=0$, первый интеграл при достаточно малых значениях $C>0$ будет близок к величине $(\alpha\pi)^{-1}\sin\alpha\pi\cdot C^{\alpha}x$, которая стремится к x при $\alpha\downarrow 0$. Отсюда и следует формула (30).

Покажем теперь, что если оператор A порождает равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t\}$ класса (C_0), то имеет место свойство (31). Используя представление (6), мы получаем

$$(\mu I-(A_\alpha)_\beta)^{-1}=\int_0^\infty\int_0^\infty(2\pi i)^{-2}\left(\frac{1}{\mu-\lambda^\beta e^{-i\pi\beta}}-\frac{1}{\mu-\lambda^\beta e^{i\pi\beta}}\right)\times$$
$$\times\left(\frac{1}{\lambda-\zeta^\alpha e^{-i\pi\alpha}}-\frac{1}{\lambda-\zeta^\alpha e^{i\pi\alpha}}\right)(\zeta I-A)^{-1}\,d\lambda\,d\zeta.$$

Этот двойной интеграл, как нетрудно показать, абсолютно сходится по норме, и поэтому можно изменить порядок интегрирования. Это дает нам формулу (31), так как внутренний (после изменения порядка интегрирования) интеграл приводится к виду

$$(2\pi i)^{-2}\int_l\frac{1}{\mu-z^\beta}\left(\frac{1}{z-\zeta^\alpha e^{-i\pi\alpha}}-\frac{1}{z-\zeta^\alpha e^{i\pi\alpha}}\right)dz,$$

где в качестве контура l можно взять берега разреза комплексной z-плоскости, проходящего по отрицательной части вещественной оси, и равен выражению

$$(2\pi i)^{-}\left(\frac{-1}{\mu-\zeta^{\alpha\beta}e^{-i\pi\alpha\beta}}-\frac{-1}{\mu-\zeta^{\alpha\beta}e^{i\pi\alpha\beta}}\right).$$

Пример дробной степени оператора. Если $\alpha = 1/2$, то, взяв значение $\theta = \pi$, мы получаем из формулы (17) выражение

$$f_{t,1/2}(s) = \pi^{-1} \int_0^\infty e^{-sr} \sin\left(tr^{1/2}\right) dr = \pi^{-1} \sqrt{\pi}\, t \left(2^3 \sqrt{s}\right)^{-3} e^{-t^2/4s}. \tag{32}$$

Возьмем полугруппу $\{T_t\}$, образованную интегральными операторами с *ядром Гаусса* (типа гауссовского распределения вероятностей):

$$(T_t x)(u) = \frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-v)^2/4s} x(v)\, dv, \quad x \in C[-\infty, \infty].$$

Тогда

$$\left(\hat{T}_{t,1/2} x\right)(u) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^\infty x(v) \frac{t}{4\pi s^2} e^{-((u-v)^2+t^2)/4s}\, ds \right\} dv =$$

$$= \frac{t}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + (u-v)^2} x(v)\, dv,$$

т. е. операторы $\hat{T}_{t,1/2}$ — это интегральные операторы с *ядром Пуассона*. Инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы $\{T_t\}$ представляет собой в этом случае дифференциальный оператор d^2/ds^2, в то время как инфинитезимальным оператором $\hat{A}$, порождающим полугруппу $\hat{T}_t$, служит сингулярный интегральный оператор [1])

$$\left(\hat{A}_{1/2} x\right)(s) = s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s-v) - x(s)}{v^2 + h^2}\, dv,$$

а не дифференциальный оператор d/ds [2]).

---

[1]) Действительно, согласно формуле (1), гл. IX, § 3, производящий оператор полугруппы $\{\hat{T}_{t,1/2}\}$ определяется выражением

$$\left(\hat{A}_{1/2} x\right)(s) = s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left(\hat{T}_{h,1/2} - I\right) x(s) =$$

$$= s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left\{ \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)\, dt}{h^2 + (s-t)^2} - x(s) \right\} =$$

$$= s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} h^{-1} \left\{ \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)\, dt}{h^2 + (s-t)^2} - \frac{h}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s)\, dt}{h^2 + (s-t)^2} \right\} =$$

$$= s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t) - x(s)}{h^2 + (s-t)^2}\, dt = s\text{-}\lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(s-v) - x(s)}{v^2 + h^2}\, dv.$$

— *Прим. перев.*

[2]) Это не противоречит доказанным выше теоремам, так как свойство (28) было установлено в предположении, что $\alpha + \beta < 1$. — *Прим. перев.*

12. Сходимость последовательностей полугрупп. Теорема Троттера—Като

Обозначим через $\exp(tA)$ полугруппу класса (C_0), для которой оператор A служит инфинитезимальным производящим оператором.

Следующая теорема относится к вопросу о сходимости последовательности полугрупп.

Теорема 1. Рассмотрим комплексное локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X. Пусть $\{\exp(tA_n)\} \subseteq L(X, X)$ — некоторая последовательность равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0), такая, что операторы семейства $\{\exp(tA_n)\}$ равностепенно непрерывны относительно $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$, т. е. для всякой непрерывной полунормы $p(x)$, заданной на X, существует такая непрерывная на X полунорма $q(x)$, что

$$p(\exp(tA_n)x) \leqslant q(x) \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0, \; x \in X \text{ и } n = 1, 2, \ldots . \tag{1}$$

Допустим, что для некоторого комплексного числа λ_0, у которого $\operatorname{Re}(\lambda_0) > 0$, выполняется условие

$$\begin{gathered} \lim_{n\to\infty} R(\lambda_0;\; A_n)\, x = J(\lambda_0)\, x \text{ существует при всех } x \in X \\ \text{и при этом область значений } R(J(\lambda_0)) \text{ плотна в } X. \end{gathered} \tag{2}$$

Тогда оператор $J(\lambda_0)$ представляет собой резольвенту инфинитезимального производящего оператора A некоторой равностепенно непрерывной полугруппы $\{\exp(tA)\}$ класса (C_0), определенной в пространстве X, и

$$\lim_{n\to\infty} \exp(tA_n)\, x = \exp(tA)\, x \quad \text{при всяком } x \in X. \tag{3}$$

Кроме того, на всяком бикомпактном множестве значений t в формуле (3) имеет место равномерная (относительно t) сходимость.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая

Лемма. Пусть операторы $T_t = \exp(tA)$, заданные в пространстве X, образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0). Тогда для всякой непрерывной на X полунормы $p(x)$ найдется такая непрерывная заданная на пространстве X полунорма $q(x)$, что

$$\begin{gathered} p\left(T_t x - (I - tn^{-1}A)^{-n}\, x\right) \leqslant (2n)^{-1} t^2 q(A^2 x) \\ \text{для всех} \quad x \in D(A^2) \quad \text{и} \quad n = 1, 2, \ldots . \end{gathered} \tag{4}$$

Доказательство. Обозначим оператор $(I - n^{-1}tA)^{-n}$ через $T(t, n)$. Мы знаем (см. гл. IX, § 7), что семейство $\{T(t, n)\}$ равностепенно непрерывно относительно значений $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Кроме того (см. гл. IX, § 4), для любого $x \in D(A)$

$$D_t T(t, n) = (I - n^{-1}tA)^{-n-1} Ax = A(I - n^{-1}tA)^{-n-1} x,$$
$$D_t Tx = T_t Ax = AT_t x.$$

Следовательно, поскольку операторы T_t и $T(t, n)$ перестановочны,

$$T_t x - T(t, n)x = \int_0^t [D_s T(t-s, n) T_s x]\, ds =$$
$$= \int_0^t T(t-s, n) T_s \left(Ax - \left(I - \frac{t-s}{n} A\right)^{-1} Ax\right) ds, \quad x \in D(A). \tag{5}$$

Поэтому если $x \in D(A^2)$, то, ввиду того что

$$(I - m^{-1}A)^{-1} Ax = -m\left(I - (I - m^{-1}A)^{-1}\right)x,$$

имеем

$$p(T_t x - T(t, n)x) \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^t p\left[T(t-s, n) T_s (I - n^{-1}(t-s)A)^{-1} \frac{s-t}{n} A^2 x\right] ds.$$

Отсюда, учитывая, что полунорма $q(x)$ непрерывна в X и ее выбор не зависит от x и n, мы получаем

$$p(T_t x - T(t, n)x) \leqslant (2n)^{-1} t^2 q(A^2 x).$$

Следствие. При любых $s > 0$ и $t \geqslant 0$ для всякой непрерывной полунормы $p(x)$ можно указать такую непрерывную на X полунорму $q_1(x)$, не зависящую от t и s, что

$$p(T_t x - (I - sA)^{-[t/s]} x) \leqslant sq_1(Ax) + \frac{ts}{2} q(A^2 x) \text{ при всех } x \in D(A^2), \tag{6}$$

где $[t/s]$ — целая часть t/s (наибольшее целое число, не превосходящее t/s).

Доказательство. Полагая $t = ns$, получаем

$$p(T_{ns} x - (I - sA)^{-n} x) \leqslant 2^{-1} stq(A^2 x).$$

Если $t = ns + u$, где $0 \leqslant u < s$ и $n = [t/s]$, то

$$p(T_t x - T_{ns} x) = p\left(\int_{ns}^t T'_\sigma x\, d\sigma\right) \leqslant \int_{ns}^t p(T_\sigma Ax)\, d\sigma \leqslant sq_1(Ax).$$

Таким образом, следствие доказано.

Доказательство теоремы 1. Формула (1) и оценка (11) из § 4 гл. IX показывают, что при рассматриваемых условиях семейство

$\{(\mathrm{Re}(\lambda) R(\lambda; A_n))^m\}$ равностепенно непрерывно (относительно значений $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$). Отсюда и из условия (2) следует, что существует некоторый оператор A, такой, что $J(\lambda_0) = (\lambda_0 I - A)^{-1}$ и

$$\lim_{n\to\infty} R(\lambda; A_n)x = R(\lambda; A)x \text{ при всех } \mathrm{Re}(\lambda) > 0, \tag{7}$$
причем сходимость равномерна относительно λ на всяком бикомпактном множестве из правой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$.

Для того чтобы доказать сформулированное утверждение, обратим внимание на то, что

$$R(\lambda; A_n)x = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m R(\lambda_0; A_n)^{m+1} x \quad (\text{при } |\lambda - \lambda_0|/\mathrm{Re}(\lambda_0) < 1),$$

причем написанный здесь ряд, в силу равностепенной непрерывности операторов семейства $\{(\mathrm{Re}(\lambda_0) R(\lambda_0; A_n))^m\}$ относительно значений $n = 1, 2, \ldots$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$, сходится равномерно в области $|\lambda - \lambda_0|/\mathrm{Re}(\lambda_0) \leqslant 1 - \varepsilon$, $n = 1, 2, \ldots$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое фиксированное достаточно малое положительное число. Следовательно, для любого $\delta > 0$ существуют такое значение m_0 и такая непрерывная на X полунорма $q(x)$, что

$$p(R(\lambda; A_n)x - R(\lambda; A_{n'})x) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{m=0}^{m_0} |\lambda_0 - \lambda|^m p(R(\lambda_0; A_n)^{m_0+1}x - R(\lambda_0; A_{n'})^{m_0+1}x) + 2\delta q(x)$$
$$\text{для всех } x \in X.$$

Поэтому, учитывая условие (2), мы видим, что равномерный предел $\lim_{n\to\infty} R(\lambda; A_n)x = J(\lambda)x$ существует при $|\lambda - \lambda_0|/\mathrm{Re}(\lambda_0) \leqslant 1 - \varepsilon$. Это обстоятельство позволяет расширить область сходимости последовательности $\{R(\lambda; A_n)\}$, и, таким образом, последовательность $\{R(\lambda; A_n)\}$ сходится при $n \to \infty$ к $J(\lambda)x$ при $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, а на всяком бикомпактном множестве значений λ, лежащем в правой полуплоскости $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, эта сходимость равномерна. Отсюда следует, что оператор $J(\lambda)$ является псевдорезольвентой, поскольку он, очевидно, так же как и $R(\lambda; A_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяет резольвентному уравнению. Но в данном случае $R(J(\lambda_0))^a = X$, и по эргодической теореме о псевдорезольвентах (гл. VIII, § 4) оператор $J(\lambda)$ служит резольвентой некоторого замкнутого оператора A, так что $J(\lambda) = R(\lambda; A)$ и область $D(A) = R(R(\lambda; A))$ плотна в пространстве X.

Эти рассуждения показывают, что операторы $\exp(tA)$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0) в пространстве X.

Мы должны теперь убедиться в справедливости утверждения (3). Из (6) следует, что при любом $x \in X$ и произвольных $s > 0$, $t \geqslant 0$

$$p\left((\exp(tA_n) - (I - sA_n))^{-[t/s]}(I - A_n)^{-2}x\right) \leqslant$$
$$\leqslant sq_1\left(A_n(I - A_n)^{-2}x\right) + 2^{-1}tsq\left(A_n^2(I - A_n)^{-2}x\right).$$

Операторы

$$A_n(I - A_n)^{-1} = (I - A_n)^{-1} - I,$$
$$A_n(I - A_n)^{-2} = A_n(I - A_n)^{-1}(I - A_n)^{-1},$$
$$A_n^2(I - A_n)^{-2} = \left(A_n(I - A_n)^{-1}\right)^2$$

равностепенно непрерывны относительно значений $n = 1, 2, \ldots$. С другой стороны, из (7) вытекает, что

$$\lim_{n \to \infty} (I - sA_n)^{-[t/s]}(I - A_n)^{-2}x = (I - sA)^{-[t/s]}(I - A)^{-2}x,$$

причем сходимость в этом равенстве равномерна по s и t, если значения $s > 0$ отграничены от 0 и ∞, а t изменяется на произвольном бикомпактном множестве из $[0, \infty)$. Кроме того, из условия (6) видно, что

$$p\left(\left(\exp(tA) - (I - sA)^{-[t/s]}\right)(I - A)^{-2}x\right) \leqslant$$
$$\leqslant sq_1\left(A(I - A)^{-2}x\right) + 2^{-1}tsq\left(A^2(I - A)^{-2}x\right)$$

при любых $x \in X$, $s > 0$ и $t \geqslant 0$. Поэтому, выбирая величину $s > 0$ достаточно малой, мы приходим к заключению, что

$$\lim_{n \to \infty} \exp(tA_n)y = \exp(tA)y \quad \text{при всех } y \in R(1;\ A)^2X,$$

и при этом сходимость равномерна относительно значений t из всякого бикомпактного множества в $[0, \infty)$. Поскольку множество $R(1;\ A)^2X$ плотно в X, мы видим, что условие (3) выполняется, так как полугруппы $\exp(tA)$ и $\exp(tA_n)$ равностепенно непрерывны относительно значений $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть последовательность $\{\exp(tA_n)\}$ равностепенно непрерывных полугрупп класса (C_0), заданных в пространстве X, равностепенно непрерывна относительно значений $t \geqslant 0$ и $n = 1, 2, \ldots$. Если для каждого элемента $x \in X$ существует предел

$$\lim_{n \to \infty} \exp(tA_n)x = \exp(tA)x,$$

причем последовательность $\{\exp(tA_n)x\}$ сходится к $\exp(tA)x$ равномерно на всяком бикомпактном множестве значений $t \geqslant 0$, то

$$\lim_{n \to \infty} R(\lambda;\ A_n)x = R(\lambda;\ A)x \text{ для всякого } x \in X \text{ и } \mathrm{Re}(\lambda) > 0,$$

причем последовательность $\{R(\lambda;\ A_n)x\}$ сходится равномерно на всяком бикомпактном множестве из правой полуплоскости $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$.

Доказательство. Имеет место представление

$$R(\lambda;\ A)x - R(\lambda;\ A_n)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}(\exp(tA) - \exp(tA_n))\,x\,dt.$$

Разбивая путь интегрирования на два участка $[0,\ C]$ и $[C,\ \infty)$ $(C > 0)$, мы легко устанавливаем справедливость утверждения теоремы.

Замечание. Для случая банахова пространства X теорема 1 была доказана Троттером [1]. В этой работе доказательство того факта, что оператор $J(\lambda)$ есть резольвента $R(\lambda;\ A)$, проведено не вполне четко. Последнее было отмечено Като. Доказательство, приведенное в этом параграфе, использует конструкцию, которую применил Като при модификации теоремы Троттера для случая B-пространств (доказательство Като не опубликовано).

13. Сопряженные полугруппы. Теорема Филлипса

Рассмотрим локально выпуклое секвенциально полное линейное топологическое пространство X, и пусть $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X,\ X)$ — некоторая равностепенно непрерывная полугруппа класса (C_0). Тогда семейство $\{T_t^*;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X',\ X')$, где звездочкой обозначены сопряженные операторы, как это видно из теоремы 3 § 1 гл. VII, обладает полугрупповым свойством: $T_t^* \cdot T_s^* = T_{t+s}^*$, $T_0^* = I^*$ (I^* — тождественный оператор из $L(X',\ X')$). Но $\{T_t^*,\ t \geqslant 0\}$ может, вообще говоря, и не быть полугруппой класса (C_0). Дело в том, что отображение $T_t \to T_t^*$ не обязательно должно сохранять непрерывность по переменной t (см. предложение 1 § 1 гл. VII). Мы можем, однако, показать, что операторы семейства $\{T^*\}$ равностепенно непрерывны относительно значений $t \geqslant 0$.

Предложение 1. Если семейство $\{S_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X,\ X)$ равностепенно непрерывно относительно значений $t \geqslant 0$, то операторы $S_t^* \in \{S_t^*;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X',\ X')$ тоже равностепенно непрерывны относительно $t \geqslant 0$.

Доказательство. Из предположений теоремы следует, что множество $\bigcup_{t \geqslant 0} S_t \cdot B$ ограничено в пространстве X при любом выборе ограниченного множества $B \subseteq X$. Обозначим через U' и V' поляры множеств B и $\bigcup_{t \geqslant 0} S_t \cdot B$:

$$U' = \left\{x' \in X';\ \sup_{b \in B} |\langle b,\ x'\rangle| \leqslant 1\right\},\quad V' = \left\{x' \in X';\ \sup_{\substack{b \in B,\\ t \geqslant 0}} |\langle S_t b,\ x'\rangle| \leqslant 1\right\}.$$

Тогда U' и V' представляют собой некоторые окрестности вектора $x' = 0$ пространства X'_s. Из неравенства $|\langle S_t b, x'\rangle| = |\langle b, S^*_t x'\rangle| \leqslant 1$ (при $b \in B$, $x' \in V'$) мы заключаем, что $S^*_t V' \subseteq U'$ для всех $t \geqslant 0$. Это и говорит о том, что семейство $\{S^*_t\}$ равностепенно непрерывно относительно значений $t \geqslant 0$.

Обозначим через A инфинитезимальный производящий оператор полугруппы T_t. Тогда $D(A)^a = X$, $R(A) \subseteq X$ и при $\lambda > 0$ существует резольвента $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$, причем

операторы $\{\lambda^m (\lambda I - A)^{-m}\}$ равностепенно непрерывны относительно значений $\lambda > 0$ и $m = 0, 1, \ldots$. (1)

Теперь мы можем доказать следующее

Предложение 2. При значениях $\lambda > 0$ существует резольвента $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ и

$$(\lambda I^* - A^*)^{-1} = \left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \tag{2}$$

(ср. с теоремой 2, гл. VIII, § 6).

Доказательство. Воспользуемся равенством $(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$. Оператор $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \in L(X', X')$ существует, поскольку $(\lambda I - A)^{-1} \in L(X, X)$. Покажем, что оператор $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ существует и равен $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*$. Для этого допустим, что найдется такой элемент $x' \in X'$, что $(\lambda I^* - A^*)x' = 0$. Тогда $0 = \langle x, (\lambda I^* - A^*)x'\rangle = \langle (\lambda I - A)x, x'\rangle$ для всех $x \in D(A)$. Но $R(\lambda I - A) = X$, и поэтому мы видим, что $x' = 0$. Это означает, что оператор $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ существует. Для элементов $x \in X$, $x' \in D(A^*)$

$$\langle x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1} x, (\lambda I^* - A^*)x'\rangle.$$

Таким образом, мы имеем $D\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right) \supseteq R(\lambda I^* - A^*)$ и $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* (\lambda I^* - A^*)x' = x'$ для всякого $x' \in D(A^*)$. Отсюда следует, что $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \supseteq (\lambda I^* - A^*)^{-1}$. С другой стороны, если $x \in D(A)$ и $x' \in D\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right)$, то

$$\langle x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)x, x'\rangle = \langle (\lambda I - A)x, \left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* x'\rangle.$$

Следовательно, $D(A^*) = D((\lambda I - A)^*) \supseteq R\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right)$ и $(\lambda I - A)^*\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* x' = x'$ при любом $x' \in D\left(\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^*\right)$, т. е. $\left((\lambda I - A)^{-1}\right)^* \subseteq (\lambda I^* - A^*)^{-1}$. Мы, таким образом, доказали утверждение (2).

Далее, имеет место

Теорема. Пусть пространство X', сильно сопряженное некоторому локально выпуклому секвенциально полному линейному топологическому пространству X, тоже секвенциально полно. Рассмотрим равностепенно непрерывную полугруппу $\{T_t;\ t \geqslant 0\} \subseteq L(X, X)$ класса (C_0) с инфинитезимальным производящим оператором A. Обозначим через X^+ замыкание $D(A^*)^a$ области $D(A^*)$ в сильной топологии сопряженного пространства X'. Пусть T_t^+ — сужение оператора T_t^* на область X^+. Тогда $T_t^+ \in L(X^+, X^+)$ и операторы семейства $\{T_t^+;\ t \geqslant 0\}$ образуют равностепенно непрерывную полугруппу класса (C_0), инфинитезимальный производящий оператор A^+ которой представляет собой наибольшее из сужений оператора A^* с областями определения и значений, принадлежащими пространству X^+.

Замечание. Р. Филлипс [2] доказал сформулированную выше теорему для частного случая B-пространства X. Приведенное здесь обобщение этого результата принадлежит Коматсу [4].

Доказательство теоремы. Используя равностепенную непрерывность семейства $\{\lambda^m R(\lambda; A)^m\}$ относительно значений $\lambda > 0$ и $m = 0, 1, 2, \ldots$, а также резольвентное уравнение $R(\lambda; A) - R(\mu; A) = (\mu - \lambda) R(\lambda; A) R(\mu; A)$, мы на основании предложений 1 и 2 устанавливаем, что

$$(\lambda I^* - A^*)^{-1} - (\mu I^* - A^*)^{-1} = (\mu - \lambda)(\lambda I^* - A^*)^{-1}(\mu I^* - A^*)^{-1} \tag{3}$$

и что

$$\text{операторы } \{\lambda^m (\lambda I^* - A^*)^{-m}\} \text{ равностепенно непрерывны относительно } \lambda > 0 \text{ и } m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

Поэтому, обозначая через $J(\lambda)$ сужение оператора $(\lambda I^* - A^*)^{-1}$ на область X^+, мы находим, что

$$J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda) J(\lambda) J(\mu) \tag{3'}$$

и что

$$\text{семейство } \{\lambda^m J(\lambda)^m\} \text{ равностепенно непрерывно относительно } \lambda > 0 \text{ и } m = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4'}$$

Так как пространство X' секвенциально полно, то на основании (4′) мы аналогично тому, как это делалось в § 7 гл. IX, заключаем, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda J(\lambda) x = x$ при всех $x \in X^+$. Таким образом, $R(J(\lambda))^a = X^+$, и поэтому, согласно условию (7′), гл. VIII, § 4, $N(J(\lambda)) = \{0\}$. Отсюда вытекает, что псевдорезольвента $J(\lambda)$ должна быть резольвентой некоторого замкнутого линейного оператора A^+, заданного в пространстве X^+. Поскольку X^+ секвенциально полно и выполняется требование (4′), A^+ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) операторов $T_t^+ \in L(X^+, X^+)$. Для любых элементов $x \in X$ и $y' \in X^+$

$$\langle (I - m^{-1}tA)^{-m} x, y' \rangle = \langle x, (I^* - m^{-1}tA^+)^{-m} y' \rangle,$$

и поэтому на основании результатов предыдущего параграфа, устремляя $m \to \infty$, мы устанавливаем равенство $\langle T_t x, y' \rangle = \langle x, T_t^+ y' \rangle$. Значит, $T_t^* y' = T_t^+ y'$, а это и показывает, что оператор T_t^+ является сужением оператора T_t^* на область X^+.

В заключение покажем, что A^+ служит наибольшим из сужений оператора A^*, области определения и значений которых принадлежат X^+. Из проведенного выше построения оператора A^+ видно, что он представляет собой сужение оператора A^*. Допустим, что $x' \in D(A^*)$ и что $x' \in X^+$, $A^* x' \in X^+$. Тогда $(\lambda I^* - A^*) x' \in X^+$ и, следовательно, $(\lambda I^* - A^+)^{-1} (\lambda I^* - A^*) x' = x'$. Применяя к обеим частям последнего равенства оператор $(\lambda I^* - A^+)$, мы находим, что $A^* x' = A^+ x'$. Это говорит о том, что A^+ является наибольшим из всех сужений оператора A^*, области определения и области значений которых принадлежат пространству X^+.

ГЛАВА X

Вполне непрерывные операторы

Пусть X и Y — комплексные B-пространства и S — единичный шар пространства X. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется *вполне непрерывным*, если образ TS шара S относительно бикомпактен в пространстве Y. Для вполне непрерывных операторов удается получить полное решение задачи о собственных значениях; классическая теория Фредгольма, относящаяся к линейным интегральным уравнениям, переносится на линейное функциональное уравнение $Tx - \lambda x = y$ с комплексным параметром λ. В этой главе мы изложим теорию вполне непрерывных операторов, следуя работам Рисса [2] и Шаудера [1].

1. Бикомпактные множества в B-пространствах

Всякое бикомпактное множество в линейном топологическом пространстве должно быть ограниченным. Обратное, вообще говоря, неверно; мы знаем (гл. III, § 2), что замкнутый единичный шар нормированного линейного пространства X сильно бикомпактен тогда и только тогда, когда пространство X конечномерно. Пусть S — бикомпактное метрическое пространство S, и пусть $C(S)$ — это B-пространство всех вещественных или комплексных непрерывных функций $x(s)$ на S с нормой $\|x\| = \sup_{s \in S} |x(s)|$. Мы знаем (гл. III, § 3), что подмножество $\{x_\alpha(s)\} \subset C(S)$ сильно относительно бикомпактно в $C(S)$ тогда и только тогда, когда функции $x_\alpha(s) \subseteq \{x_\alpha(s)\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны (относительно α). Для пространства $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$, $1 \leqslant p < \infty$, имеет место следующая

Теорема (Фреше — Колмогоров). Пусть S — вещественная прямая, $\mathfrak{B}$ есть σ-алгебра бэровских подмножеств B пространства S и $m(B) = \int\limits_B dx$ — обычная мера Лебега множества B. Тогда подмножество K пространства $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ сильно относительно бикомпактно в том и только в том случае, когда выполняются условия

$$\sup_{x \in K} \| x \| = \sup_{x \in K} \left(\int_S | x(s) |^p \, ds \right)^{1/p} < \infty, \tag{1}$$

$$\lim_{t \to 0} \int_S | x(t+s) - x(s) |^p \, ds = 0 \text{ равномерно по } x \in K, \tag{2}$$

$$\lim_{\alpha \uparrow \infty} \int_{|s| > \alpha} |x(s)|^p \, ds = 0 \text{ равномерно по } x \in K. \tag{3}$$

Доказательство. Допустим, что множество K сильно относительно бикомпактно. Тогда K ограничено, и поэтому условие (1) выполняется. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. Тогда найдется конечная система функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$, принадлежащих L^p, такая, что для всякой функции $f \in K$ существует индекс j, при котором $\| f - f_j \| \leqslant \varepsilon$. В противном случае можно было бы построить бесконечную последовательность $\{f_j\} \subseteq K$, удовлетворяющую неравенствам $\| f_j - f_i \| > \varepsilon$ при $j \neq i$, что противоречит относительной бикомпактности множества K. Исходя из определения интеграла Лебега, выберем систему $g_1, g_2, \ldots, g_n$ простых функций, таких, что $\| f_j - g_j \| \leqslant \varepsilon$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Так как всякая простая функция $g_j(x)$ обращается в нуль вне некоторого достаточно большого интервала, мы для достаточно больших значений α имеем

$$\left(\int_\alpha^\infty | f(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | f(s) |^p \, ds \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_\alpha^\infty | f(s) - g_j(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | f(s) - g_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p} +$$

$$+ \left(\int_\alpha^\infty | g_j(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | g_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \| f - g_j \| + \left(\int_\alpha^\infty | g_j(s) |^p \, ds + \int_{-\infty}^{-\alpha} | g_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p}.$$

Отсюда вытекает условие (3), так как $\| f - g_j \| \leqslant \| f - f_j \| + \| f_j - g_j \| \leqslant 2\varepsilon$. Доказательство условия (2) опирается на тот известный факт, что для характеристической функции $C_I(s)$ конечного интервала I справедливо равенство $\lim_{t \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} | C_I(s+t) - C_I(s) |^p \, ds = 0$ (§ 3 введения). Последнее означает, что условие (2) выполняется для простых функций $g_j(s)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, для любой функции $f \in K$

$$\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f_j(s+t)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_j(s+t)-g_j(s+t)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\overline{\lim_{t\to 0}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g_j(s+t)-g_j(s)|^p\,ds\right)^{1/p}+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|g_j(s)-f_j(s)|^p\,ds\right)^{1/p}+$$

$$+\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f_j(s)-f(s)|^p\,ds\right)^{1/p}\leqslant\varepsilon+\varepsilon+0+\varepsilon+\varepsilon,$$

если функция f_j выбрана так, что $\|f-f_j\|\leqslant\varepsilon$. Это неравенство доказывает условие (2).

Перейдем к доказательству достаточности. Определим оператор сдвига T_t равенством $(T_t f)(s)=f(t+s)$. Условие (2) означает, что $s\text{-}\lim\limits_{t\to 0} T_t f=f$ равномерно в области $f\in K$. Определим среднее значение формулой $(M_a f)(s)=(2a)^{-1}\int_{-a}^{a}(T_t f)(s)\,dt$. Используя неравенство Гёльдера и теорему Фубини — Тонелли, мы приходим к неравенству

$$\|M_a f-f\|\leqslant\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-a}^{a}(2a)^{-1}|f(s+t)-f(s)|\,dt\right\}^p ds\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant(2a)^{-1}\left(\int_{-\infty}^{\infty}dt\int_{-a}^{a}|f(s+t)-f(s)|^p\,dt\cdot(2a)^{p/p'}\,ds\right)^{1/p}\leqslant$$

$$\leqslant\left((2a)^{-1}\int_{-a}^{a}dt\int_{-\infty}^{\infty}|f(s+t)-f(s)|^p\,ds\right)^{1/p},\quad\text{если}\quad 1\leqslant p<\infty.$$

Таким образом,

$$\|M_a f-f\|\leqslant\sup_{|t|\leqslant a}\|T_t f-f\|,$$

и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{a\downarrow 0} M_a f=f$ равномерно в области $f\in K$. Итак, достаточно доказать относительную бикомпактность множества $\{M_a f;\ f\in K\}$ для достаточно малого фиксированного $a>0$.

Покажем, что при фиксированном $a > 0$ функции семейства $\{(M_a f)(s);\ f \in K\}$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны. Как и выше, мы имеем

$$(M_a f)(s_1) - (M_a f)(s_2) | \leqslant (2a)^{-1} \int_{-a}^{a} | f(s_1 + t) - f(s_2 + t) | \, dt \leqslant$$

$$\leqslant \left((2a)^{-1} \int_{-a}^{a} | f(s_1 + t) - f(s_2 + t) |^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Это неравенство и условие (2) показывают, что функции семейства $\{(M_a f)(s);\ f \in K\}$ равностепенно непрерывны при фиксированном $a > 0$. Равномерная ограниченность доказывается аналогично. Таким образом, по теореме Арцела — Асколи для любых $a > 0$, $\alpha > 0$ и $\varepsilon > 0$ можно указать конечное число функций $M_a f_1, M_a f_2, \ldots, M_a f_n$, где $f_j \in K$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, таких, что для всякой функции $f \in K$ найдется номер j, при котором $\sup\limits_{|s| \leqslant \alpha} | (M_a f)(s) - (M_a f_j)(s) | < \varepsilon$. Норма $\| M_a f - M_a f_j \|$ удовлетворяет неравенству

$$\| M_a f - M_a f_j \|^p \leqslant \int_{-\alpha}^{\alpha} | (M_a f)(s) - (M_a f_j)(s) |^p \, ds +$$

$$+ \int_{|s| > \alpha} | (M_a f)(s) - (M_a f_j)(s) |^p \, ds. \qquad (4)$$

Согласно неравенству Минковского, второе слагаемое в правой части не превосходит

$$\left(\| M_a f - f \| + \left(\int_{|s| > \alpha} | f(s) - f_j(s) |^p \, ds \right)^{1/p} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_{|s| > \alpha} | f_j(s) - (M_a f_j)(s) |^p \, ds \right)^{1/p} \right)^p.$$

Величина $\| M_a f - f \|$ сколь угодно мала при достаточно малом $a > 0$, и в силу условия (3) интегралы $\int\limits_{|s| > \alpha} | f(s) - f_j(s) |^p \, ds$ и $\int\limits_{|s| > \alpha} | f_j(s) - (M_a f_j)(s) |^p \, ds$ могут быть сделаны сколь угодно малыми для достаточно больших значений $\alpha > 0$, если $a > 0$ ограничено. Первый член в правой части неравенства (4) при соответствующем значении индекса j не превосходит $2\alpha\varepsilon^p$. Указанные оценки равномерны относительно $f \in K$. Отсюда следует, что множество $\{M_a f;\ f \in K\}$ относительно бикомпактно в пространстве L^p при достаточно малом $a > 0$.

2. Вполне непрерывные операторы и ядерные операторы

Определение 1. Пусть X, Y — два B-пространства и S — единичный шар в X. Оператор $T \in L(X, Y)$ называется *вполне непрерывным*, если образ $T \cdot S$ шара S относительно бикомпактен в пространстве Y.

Пример 1. Пусть $K(x, y)$ — вещественная или комплексная непрерывная функция, заданная в области $-\infty < a \leqslant x, y \leqslant b < \infty$. *Интегральный оператор* K вида

$$(Kf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y) dy \tag{1}$$

вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L(C[a, b], C[a, b])$.

Доказательство. Ясно, что K отображает $C[a, b]$ в $C[a, b]$. Положим $\sup\limits_{x, y} |K(x, y)| = M$. Тогда $\|Kf\| \leqslant (b - a) M \|f\|$, т. е. функции, принадлежащие множеству KS, равномерно ограничены. Согласно неравенству Шварца,

$$|(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)|^2 \leqslant \int_a^b |K(x_1, y) - K(x_2, y)|^2 dy \cdot \int_a^b |f(y)|^2 dy,$$

откуда видно, что функции, образующие множество KS, равностепенно непрерывны, т. е.

$\lim\limits_{\delta \downarrow 0} \sup\limits_{|x_1 - x_2| \leqslant \delta} |(Kf)(x_1) - (Kf)(x_2)| = 0$ равномерно в области $f \in S$

Таким образом, по теореме Асколи — Арцела (гл. III, § 3), множество KS относительно бикомпактно в пространстве $C[a, b]$.

Пример 2. Пусть вещественная или комплексная функция $K(x, y)$, заданная на множестве $(S, \mathfrak{B}, m) \times (S, \mathfrak{B}, m)$, где $(S, \mathfrak{B}, m)$ — пространство с мерой, $\mathfrak{B}$-измерима по каждому из аргументов x и y, причем

$$\int_S \int_S |K(x, y)|^2 m(dx) m(dy) < \infty. \tag{2}$$

Такая функция K называется *ядром Гильберта — Шмидта*. Определим *интегральный оператор Гильберта — Шмидта*

$$(Kf)(x) = \int_S K(x, y) f(y) m(dy), \qquad f \in L^2(S) = L^2(S, \mathfrak{B}, m), \tag{3}$$

принадлежащий $L(L^2(s), L^2(S))$. Интегральный оператор Гильберта — Шмидта вполне непрерывен.

Доказательство. Выберем из единичного шара пространства $L^2(S)$ произвольную последовательность $\{f_n\}$. Мы должны показать, что последовательность $\{Kf_n\}$ относительно бикомпактна в $L^2(S)$. Поскольку ограниченные множества гильбертова пространства $L^2(S)$ слабо секвенциально компактны, мы можем без ограничения общности считать, что $\{f_n\}$ слабо сходится к некоторому элементу $f \in L^2(S)$; в противном случае можно выбрать подходящую подпоследовательность. Согласно условию (2) и теореме Фубини—Тонелли, мы имеем

$$\int_S |K(x, y)|^2 m(dy) < \infty \quad \text{для } m\text{-почти всех } x \in S.$$

Следовательно, для таких x

$$\lim_{n\to\infty} (Kf_n)(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S K(x, y) f_n(y) m(dy) = \lim_{n\to\infty} (f_n(\cdot), \overline{K(x, \cdot)}) =$$
$$= (f(\cdot), \overline{K(x, \cdot)}) = \int_S K(x, y) f(y) m(dy);$$

с другой стороны, согласно неравенству Шварца,

$$|(Kf_n)(x)|^2 \leqslant \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) \int_S |f_n(y)|^2 m(dy) \leqslant$$
$$\leqslant \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) \quad \text{для } m\text{-почти всех } x \in S. \tag{4}$$

Следовательно, по лемме Лебега—Фату $\lim\limits_{n\to\infty} \int_S |(Kf_n)(x)|^2 m(dx) = \int_S |(Kf)(x)|^2 m(dx)$. Если мы покажем теперь, что $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Kf_n = Kf$, то, согласно теореме 8 гл. V, § 1, отсюда и из полученного выше будет следовать, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Kf_n = Kf$. Как и в случае (4), для любой функции $h \in L^2(S)$ выполняется неравенство

$$\int_S |(Kh)(x)|^2 m(dx) \leqslant \int_S \int_S |K(x, y)|^2 m(dy) m(dx) \cdot \int_S |h(y)|^2 m(dy),$$

и поэтому

$$\|K\| \leqslant \left(\int_S \int_S |K(x, y)|^2 m(dx) m(dy)\right)^{1/2}. \tag{5}$$

Таким образом, из условия $w\text{-}\lim_{n\to\infty} f_n = f$ мы получаем $w\text{-}\lim_{n\to\infty} Kf_n = Kf$, так как для любой функции $g \in L^2(S)$

$$\lim_{n\to\infty}(Kf_n, g) = \lim_{n\to\infty}(f_n, K^*g) = (f, K^*g) = (Kf, g)\,^{1)}.$$

Теорема. (1°) Линейная комбинация вполне непрерывных операторов представляет собой вполне непрерывный оператор. (2°) Произведение вполне непрерывного оператора и ограниченного линейного оператора (при любом порядке сомножителей) является вполне непрерывным оператором. Иными словами, множество вполне непрерывных операторов, принадлежащих $L(X, X)$, образует замкнутый двусторонний идеал алгебры операторов $L(X, X)$. (3°) Если последовательность $\{T_n\} \subset L(X, Y)$ вполне непрерывных операторов сходится в равномерной операторной топологии к некоторому оператору T, т. е. $\lim_{n\to\infty}\|T - T_n\| = 0$, то оператор T вполне непрерывен.

Доказательство. Утверждение (1°) и первая часть утверждения (2°) следуют непосредственно из определения вполне непрерывного оператора. Замкнутость идеала вполне непрерывных операторов алгебры $L(X, X)$ в равномерной операторной топологии вытекает из (3°).

Докажем (3°). Выберем из замкнутого единичного шара S пространства X произвольную последовательность $\{x_h\}$. Так как операторы T_n вполне непрерывны, мы можем при помощи диагонального процесса построить такую подпоследовательность $\{x_{h'}\}$, что предел $s\text{-}\lim_{h'\to\infty} T_n x_{h'}$ существует для каждого фиксированного n. Тогда

$$\|Tx_{h'} - Tx_{k'}\| \leqslant \|Tx_{h'} - T_n x_{h'}\| + \|T_n x_{h'} - T_n x_{k'}\| +$$
$$+ \|T_n x_{k'} - Tx_{k'}\| \leqslant \|T - T_n\| + \|T_n x_{h'} - T_n x_{k'}\| + \|T_n - T\|,$$

и поэтому $\overline{\lim}_{h',\,k'\to\infty}\|Tx_{h'} - Tx_{k'}\| \leqslant 2\,\|T - T_n\|$. Значит, последовательность $\{Tx_{k'}\}$ элементов B-пространства Y фундаментальна, что и доказывает утверждение (3°).

Ядерные операторы. Рассмотрим приложение доказанной теоремы к ядерным операторам, введенным Гротендиком [2].

Определение 2. Пусть X, Y—два B-пространства и оператор T принадлежит $L(X, Y)$. Если существуют последовательности $\{f'_n\} \subseteq X'$, $\{y_n\} \subseteq Y$ и последовательность чисел $\{c_n\}$, такие, что

$$\sup_n \|f'_n\| < \infty, \quad \sup_n \|y_n\| < \infty, \quad \sum_n |c_n| < \infty$$
$$\text{и}\quad Tx = s\text{-}\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} c_n \langle x, f'_n\rangle y_n \quad \text{при всяком } x \in X, \tag{6}$$

[1]) Через K^* здесь обозначен интегральный оператор с ядром $K^*(x, y) = \overline{K(y, x)}$, сопряженный оператору K. — *Прим. перев.*

то оператор T называется *ядерным оператором*, отображающим X в Y.

Замечание. Существование предела, указанного в условии (6), очевидно, так как

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} c_j \langle x, f'_j \rangle y_j \right\| \leqslant \sum_{j=n}^{m} |c_j| \cdot \|x\| \cdot \|f'_j\| \cdot \|y_j\| \leqslant \text{const} \sum_{j=n}^{m} |c_j| \cdot \|x\|.$$

Условие ядерности (6) требует, чтобы $s\text{-}\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{m} c_n \langle x, f'_n \rangle y_n$ был равен Tx для каждого фиксированного элемента $x \in X$.

Предложение. Ядерный оператор T вполне непрерывен.

Доказательство. Определим оператор T_n формулой

$$T_n x = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x, f'_j \rangle y_j. \tag{7}$$

Так как его область значений $R(T_n)$ конечномерна, то, применяя теорему Больцано — Вейерштрасса, нетрудно показать, что оператор T_n вполне непрерывен. Кроме того, из (6) и неравенства

$$\|Tx - T_n x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j \langle x, f'_j \rangle y_j \right\| \leqslant \text{const} \sum_{j=n+1}^{\infty} |c_j| \cdot \|x\|$$

видно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T - T_n\| = 0$, и поэтому оператор T должен быть вполне непрерывным.

Пример ядерного оператора. Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n; рассмотрим гильбертово пространство $H_0^k(G)$. Пусть $(k - j) > n$. Тогда отображение

$$H_0^k(G) \ni \varphi \to \varphi \in H_0^j(G) \tag{8}$$

определяется ядерным оператором, принадлежащим $L(H_0^h(G), H_0^j(G))$.

Доказательство. Мы можем допустить, что область G содержится внутри прямоугольного параллелепипеда P:

$$0 \leqslant x_j \leqslant 2\pi \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Напомним, что $H_0^k(G)$ — это пополнение пространства $\hat{H}_0^k(G) = C_0^k(G)$ по норме $\|\varphi\|_k = \left(\sum\limits_{|s| \leqslant k} \int\limits_G |D^s \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2}$ (см. гл. I, § 10). Продолжим функции, принадлежащие $\hat{H}_0^k(G)$, на все пространство R^n, полагая их равными нулю в области $P - G$, так, чтобы они были периодическими с периодом 2π по каждой из переменных x_s. Функции

$$f_\beta(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(i\beta x), \tag{9}$$

где $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ — набор из n целых чисел и $\beta x = \sum\limits_{s=1}^{n} \beta_s x_s$, образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L^2(P) = H_0^0(P)$. Обозначим через $D^s\varphi$ $\left(\varphi \in H_0^k(G)\right)$ обобщенные производные. При $|s| \leqslant k$ разложение Фурье для функций $D^s\varphi(x)$ $\left(\varphi \in \hat{H}_0^k(G)\right)$ в пространстве $L^2(P)$ имеет вид

$$D^s\varphi(x) = \sum_\beta (D^s\varphi, f_\beta)_0 f_\beta, \text{ где } (\psi, f_\beta)_0 = \int\limits_P \psi(x) \overline{f_\beta(x)}\, dx. \tag{10}$$

Используя формулу

$$(D^s\varphi, f_\beta)_0 = (-1)^{|s|} (\varphi, D^s f_\beta)_0 = \prod_{m=1}^{n} (i\beta_m)^{s_m} (\varphi, f_\beta)_0$$

и равенство Парсеваля

$$\sum_\beta |(D^s\varphi, f_\beta)_0|^2 = \int\limits_P |D^s\varphi(x)|^2\, dx \leqslant \|\varphi\|_k^2 \qquad (|s| \leqslant k),$$

мы получаем неравенство

$$\left|\left(\varphi, (1 + |\beta|^2)^{k/2} f_\beta\right)_0\right|^2 \leqslant \text{const} \sum_{|s| \leqslant k} |(D^s\varphi, f_\beta)_0|^2 \leqslant \text{const} \|\varphi\|_k^2.$$

Следовательно, функционал $f'_\beta \in H_0^k(G)'$, определяемый соотношением

$$\langle \varphi, f'_\beta \rangle = (\varphi, (1 + |\beta|^2)^{k/2} f_\beta)_0,$$

удовлетворяет условию $\sup\limits_\beta \|f'_\beta\| < \infty$. Кроме того, для функционалов

$$y_\beta = (1 + |\beta|^2)^{-j/2} f_\beta$$

выполняется условие $\sup\limits_\beta \|y_\beta\|_j < \infty$, так как $D^s f_\beta = \prod\limits_{t=1}^{n} (i\beta_t)^{s_t} f_\beta$. Ввиду того что для положительных целых чисел β_s при условии

$(k-j)/n>1$ имеет место неравенство

$$\sum_{\beta}\frac{1}{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)^{k-j}}=\sum_{\beta}\left(\frac{1}{(\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n)^n}\right)^{(k-j)/n}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\beta}\left(\frac{1}{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}\right)^{(k-j)/n}=$$

$$=\sum_{\beta_1}\left(\frac{1}{\beta_1}\right)^{(k-j)/n}\sum_{\beta_2}\left(\frac{1}{\beta_2}\right)^{(k-j)/n}\ldots\sum_{\beta_n}\left(\frac{1}{\beta_n}\right)^{(k-j)/n}<\infty,$$

справедлива оценка

$$\sum_{\beta}|c_\beta|<\infty,\quad \text{где } c_\beta=(1+|\beta|^2)^{(j-k)/2}.$$

Таким образом, мы получили разложение Фурье

$$\varphi=\sum_{\beta}c_\beta\langle\varphi,\ f'_\beta\rangle y_\beta,$$

что завершает доказательство.

Замечание. Если для заданного ограниченного линейного оператора $K\in L(L^2(S),\ L^2(S))$ существует полная ортонормированная система собственных функций $\{\varphi_j\}$, удовлетворяющих уравнениям $K\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$ $(j=1,\ 2,\ \ldots)$, то из разложения Фурье

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}(f,\ \varphi_j)\varphi_j,\qquad f\in L^2(S),$$

вытекает, что

$$Kf=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(f,\ \varphi_j)\varphi_j.$$

Таким образом, если все собственные значения $\lambda_j>0$ и $\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j<\infty$, то из написанного выше представления видно, что оператор K ядерный. Поскольку $\lambda_j=(K\varphi_j,\ \varphi_j)$, то возникает вопрос о сходимости ряда вида $\sum_{j=1}^{\infty}|K\varphi_j,\ \varphi_j|$. Если K — интегральный оператор, определенный ядром

$$K(x,\ y)=\int_S\overline{K_2(z,\ x)}K_1(z,\ y)\,m(dz),$$

где $K_1(x,\ y)$ и $K_2(x,\ y)$ — ядра типа Гильберта — Шмидта, то условие $\sum_{j=1}^{\infty}|(K\varphi_j,\ \varphi_j)|<\infty$ выполняется. Действительно, в этом случае

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \varphi_j)| = \sum_{j=1}^{\infty} \left|(K_2^* K_1 \varphi_j, \varphi_j)\right| = $$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} |(K_1\varphi_j, K_2\varphi_j)| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \| K_1\varphi_j \|^2 \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \| K_2\varphi_j \|^2\right)^{1/2}.$$

Используя равенство Парсеваля, мы получаем оценку

$$\sum_{j=1}^{\infty} \| K_1\varphi_j \|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \int_S \left| \int_S K_1(z, y)\varphi_j(y)\, m(dy) \right|^2 m(dz) =$$
$$= \int_S \sum_{j=1}^{\infty} \left| \int_S K_1(z, y)\varphi_j(y)\, m(dy) \right|^2 m(dz) =$$
$$= \int_S \left\{ \int_S |K_1(z, y)|^2\, m(dy) \right\} m(dz) < \infty.$$

Аналогично $\sum_{j=1}^{\infty} \| K_2\varphi_j \|^2 < \infty$, откуда следует, что $\sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \varphi_j)| < \infty$.

Для ограниченного линейного оператора K, определенного в сепарабельном гильбертовом пространстве X и удовлетворяющего условию $\sup\limits_{\{\varphi_j\}, \{\psi_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \psi_j)| < \infty$, где $\{\varphi_j\}$ и $\{\psi_j\}$ — произвольные полные ортонормированные системы пространства X, величина $\sup\limits_{\{\varphi_j\}, \{\psi_j\}} \sum_{j=1}^{\infty} |(K\varphi_j, \psi_j)|$ называется *следовой нормой*. Если оператор K с неотрицательными собственными значениями при любом выборе ортонормированного базиса $\{\varphi_j\}$ пространства X удовлетворяет условию $\sum_{j=1}^{\infty} (K\varphi_j, \varphi_j) < \infty$, то K называется *оператором с конечным следом* [1]). По общей теории операторов указанных типов и ядерных операторов см. работы Гельфанда — Виленкина [3] и Шаттена [1].

[1]) Числа $c_{ik} = (K\varphi_i, \varphi_k)$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$, где $\{\varphi_j\}$ — ортонормированный базис сепарабельного гильбертова пространства X, образуют (по определению) матрицу оператора K в базисе $\{\varphi_j\}$. Величина $\sum_{j=1}^{\infty} (K\varphi_j, \varphi_j) = \sum_{j=1}^{\infty} c_{jj} < \infty$ называется *следом* матрицы оператора K с конечным следом. — *Прим. перев.*

3. Теорема Реллиха — Гординга

Теорема (Гординг [1]). Пусть G — ограниченная открытая область пространства R^n. Если оператор $T \in L\left(H_0^k(G),\ H_0^k(G)\right)$ при $j < k$ удовлетворяет неравенству

$$\|T\varphi\|_k \leqslant C\|\varphi\|_j \quad \text{для всех} \quad \varphi \in H_0^k(G), \qquad \text{где } C > 0 \text{ — некоторая постоянная,} \tag{1}$$

то он вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L\left(H_0^k(G),\ H_0^k(G)\right)$.

Доказательство. Из определения пространства $H_0^k(G)$ (гл. I, § 10) вытекает, что достаточно убедиться в справедливости следующего утверждения: если для некоторой последовательности $\{\varphi_\nu\} \subseteq \widehat{H}_0^k(G) = C_0^k(G)$ выполняется неравенство $\|\varphi_\nu\|_k \leqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, то последовательность $\{T\varphi_\nu\}$ содержит подпоследовательность, сильно сходящуюся в пространстве $H_0^k(G)$. Преобразование Фурье $\widehat{\varphi}_\nu(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_G \varphi_\nu(x) \exp(-ix\xi)\, dx$, согласно неравенству Шварца, удовлетворяет условию

$$|\widehat{\varphi}_\nu(\xi)|^2 \leqslant (2\pi)^{-n} \int\limits_G dx \int\limits_G |\varphi_\nu(x)|^2 dx \leqslant (2\pi)^{-n} \int\limits_G dx,$$

и, следовательно, функции $\{\widehat{\varphi}_\nu(\xi)\}$ равномерно ограничены относительно $\xi \in R^n$ и $\nu = 1, 2, \ldots$. Так как нормы $\|\varphi_\nu\|_0$ ограничены в совокупности, мы можем считать, что некоторая подпоследовательность $\{\varphi_{\nu'}\}$ слабо сходится в пространстве $L^2(G) = H_0^0(G)$. Для всякого фиксированного $\xi \in R^n$ функция $\exp(-ix\xi)$ принадлежит $L^2(G)$, поэтому последовательность ограниченных функций $\widehat{\varphi}_{\nu'}(\xi) = \left(\varphi_{\nu'},\ (2\pi)^{-n/2} \exp(-ix\xi)\right)_0$ сходится в каждой точке ξ. Отсюда, учитывая условие (1) и равенство Парсеваля для преобразования Фурье (гл. VI, § 2), мы получаем

$$\|T\varphi_{\nu'} - T\varphi_{\mu'}\|_k^2 = \|T(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\|_k^2 \leqslant C^2 \|\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}\|_j^2 =$$

$$= C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \|D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\|_0^2 = C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \|\widehat{\left(D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'})\right)}\|_0^2 =$$

$$= C^2 \sum_{|s| \leqslant j} \left\| \prod_{t=1}^{n} (i\xi_t)^{s_t} (\widehat{\varphi}_{\nu'} - \widehat{\varphi}_{\mu'})(\xi) \right\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{|s|\leqslant j} \int_{|\xi|\leqslant r} \left| \prod_{t=1}^{n} \xi_t^{s_t} (\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)) \right|^2 d\xi +$$

$$+ C^2 C_1 \int_{|\xi|>r} |\xi|^{2j} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi,$$

где C_1 — положительная постоянная. При всяком фиксированном $r > 0$ первое слагаемое в правой части стремится к нулю, когда ν', $\mu' \to \infty$ — это вытекает из леммы Лебега — Фату. Второй член в правой части при $r > 1$ не превосходит выражения

$$C^2 C_1 r^{2j-2k} \int_{|\xi|>r} |\xi|^{2k} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 C_1 r^{2j-2k} \int_{R^n} |\xi|^{2k} |\hat{\varphi}_{\nu'}(\xi) - \hat{\varphi}_{\mu'}(\xi)|^2 d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \sum_{|s|\leqslant k} \| (\widehat{D^s\varphi_{\nu'} - D^s\varphi_{\mu'}}) \|_0^2 =$$

$$= C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \sum_{|s|\leqslant k} \| D^s(\varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'}) \|_0^2 =$$

$$= C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k} \| \varphi_{\nu'} - \varphi_{\mu'} \|_k^2 \leqslant 4C^2 C_1 C_2 r^{2j-2k},$$

где $C_2 > 0$ — некоторая постоянная. При $j < k$ последний член стремится к нулю, когда $r \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{\nu', \mu' \to \infty} \| T\varphi_{\nu'} - T\varphi_{\mu'} \|_k = 0.$$

Теорема доказана.

4. Теорема Шаудера

Теорема (Шаудер). Оператор $T \in L(X, Y)$ вполне непрерывен тогда и только тогда, когда он обладает вполне непрерывным сопряженным оператором T'.

Доказательство. Пусть S, S' — замкнутые единичные шары соответственно в пространствах X и Y'. Допустим, что оператор $T \in L(X, Y)$ вполне непрерывен. Выберем из множества S' произвольную последовательность $\{y'_j\}$. Функции $F_j(y) = \langle y, y'_j \rangle$ $(y \in Y)$ равностепенно непрерывны в том смысле, что

$$|F_j(y) - F_j(z)| = |\langle y - z, y'_j \rangle| \leqslant \|y - z\| \qquad (y, z \in Y).$$

Кроме того, на любом ограниченном множестве значений y функции $F_j(y) \in \{F_j(y)\}$ равномерно ограничены относительно j, так как

$|F_j(y)|\leqslant\|y\|$. К последовательности $\{F_j(y)\}$ функций, определенных на бикомпактном множестве $(T\cdot S)^a$, можно применить теорему Асколи — Арцела, согласно которой существует подпоследовательность $\{F_{j'}(y)\}$, равномерно сходящаяся в области $y\in(T\cdot S)^a$. Таким образом, поскольку $F_{j'}(Tx)=\langle Tx,\ y'_{j'}\rangle=\langle x,\ T'y'_{j'}\rangle$, последовательность $\{\langle x,\ T'y'_{j'}\rangle\}$ равномерно сходится на шаре $x\in S$, и поэтому последовательность $\{T'\cdot y'_{j'}\}$ сходится в сильной топологии пространства X'. Тем самым доказано, что оператор T' вполне непрерывен.

Обратно, пусть T' — вполне непрерывный оператор. Тогда по доказанному выше оператор T'' вполне непрерывен. Поэтому множество $T''\cdot S''$, где S'' — замкнутый единичный шар в пространстве X'', относительно бикомпактно. Мы знаем, что пространство Y может быть изометрически вложено в Y'' (теорема 2 гл. IV, § 8). Отождествляя Y с образом в Y'' при этом вложении, мы видим, что $T\cdot S\subseteq T''\cdot S''$. Значит, множество $T\cdot S$ относительно бикомпактно в сильной топологии Y'', а поэтому и в сильной топологии пространства Y. Итак, мы показали, что оператор T вполне непрерывен.

5. Теория Рисса — Шаудера

Для дальнейшего рассмотрения потребуется следующая

Лемма (Рисс [2]). Пусть вполне непрерывный оператор V принадлежит $L(X,\ X)$, где X — некоторое B-пространство. Тогда при любом комплексном $\lambda_0\neq 0$ область значений $R(\lambda_0 I-V)$ сильно замкнута.

Доказательство. Можно считать, что $\lambda_0=1$. Возьмем произвольную сходящуюся последовательность $\{y_n\}\subseteq R(I-V)$, пределом которой служит некоторый элемент $y\in X$. Последовательности $\{y_n\}$ соответствует последовательность $\{x_n\}\subseteq X$, такая, что $y_n=(I-V)x_n$. Если последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то, поскольку оператор V вполне непрерывен, найдется подпоследовательность $\{x_{n'}\}$, для которой последовательность $\{Vx_{n'}\}$ сильно сходится. Так как $x_{n'}=y_{n'}+Vx_{n'}$, то последовательность $\{x_{n'}\}$ сходится к некоторому $x\in X$, и поэтому $y=(I-V)x\in R(I-V)$.

Рассмотрим теперь случай, когда последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, т. е. не ограничено множество $\{\|x_n\|\}$. Положим $T=(I-V)$ и введем последовательность чисел $\alpha_n=\operatorname{dis}(x_n,\ N(T))$, где $N(T)=\{x;\ Tx=0\}$. Выберем из множества $N(T)$ такие элементы w_n, что $\alpha_n\leqslant\|x_n-w_n\|\leqslant(1+n^{-1})\alpha_n$. Тогда $T(x_n-w_n)=Tx_n$, и поэтому, если последовательность $\{\alpha_n\}$ окажется ограниченной, мы сможем при помощи тех же рассуждений, что и выше, доказать включение $y\in R(T)=R(I-V)$. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$.

Поскольку элементы $z_n = (x_n - w_n)/\|x_n - w_n\|$ удовлетворяют условиям $\|z_n\| = 1$ и $s\text{-}\lim_{n\to\infty} Tz_n = 0$, можно, как и выше, показать, что найдется такая подпоследовательность $\{z_{n'}\}$, для которой $s\text{-}\lim_{n'\to\infty} z_{n'} = w_0$ и $s\text{-}\lim_{n'\to\infty} Tz_{n'} = 0$. Это означает, что $w_0 \in N(T)$. Если положить $u_n = z_n - w_0$, то в равенстве

$$x_{n'} - w_{n'} - w_0 \| x_{n'} - w_{n'} \| = u_{n'} \| x_{n'} - w_{n'} \|$$

второе и третье слагаемые левой части принадлежат $N(T)$, откуда $\|u_{n'}\| \cdot \|x_{n'} - w_{n'}\| \geqslant \alpha_{n'}$. Но это приводит к противоречию, так как $s\text{-}\lim_{n'\to\infty} u_{n'} = 0$, $\|x_n - w_n\| \leqslant (1 + n^{-1})\alpha_n$ и $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \infty$.

Теперь мы можем перейти к изложению *теории Рисса — Шаудера*. Сформулируем результаты этой теории в виде трех теорем.

Теорема 1. Рассмотрим вполне непрерывный оператор $V \in L(X, X)$. Если $\lambda_0 \neq 0$ не является собственным значением V, то λ_0 принадлежит резольвентному множеству оператора V.

Доказательство. По доказанной выше лемме и условиям теоремы оператор $T_{\lambda_0} = (\lambda_0 I - V)$ осуществляет взаимно однозначное отображение пространства X на множество $R(T_{\lambda_0})$, сильно замкнутое в X. Поэтому, согласно следствию теоремы об открытости отображения из § 5 гл. II, оператор T_{λ_0} имеет непрерывный обратный. Покажем, что $R(T_{\lambda_0}) = X$. Допустим противное, тогда топологический образ $X_1 = T_{\lambda_0}X$ пространства X будет замкнутым собственным подпространством в X. Построим последовательность $X_2 = T_{\lambda_0}X_1$, $X_3 = T_{\lambda_0}X_2, \ldots$; тогда X_{n+1} представляет собой замкнутое собственное подпространство в X_n ($X_0 = X$; $n = 0, 1, 2, \ldots$). По теореме Рисса из гл. III, § 2 в этом случае должна существовать такая последовательность $\{y_n\}$, что $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dis}(y_n, X_{n+1}) \geqslant 1/2$. Поэтому если $n > m$, то

$$\lambda_0^{-1}(Vy_m - Vy_n) = y_m + \{-y_n - (T_{\lambda_0}y_m - T_{\lambda_0}y_n)/\lambda_0\} = y_m - y,$$

где

$$y = \{y_n + (T_{\lambda_0}y_m - T_{\lambda_0}y_n)/\lambda_0\} \in X_{m+1}.$$

Но тогда $\|Vy_n - Vy_m\| \geqslant |\lambda_0|/2$, что невозможно, так как оператор V вполне непрерывен.

Теорема 2. Пусть V — вполне непрерывный оператор, принадлежащий $L(X, X)$. Тогда (1) его спектр представляет собой не более чем счетное множество точек комплексной плоскости, не имеющее предельных точек, за исключением, быть может, точки $\lambda = 0$; (2) каждое отличное от нуля число, принадлежащее спектру оператора V, является собственным значением V конечной кратности; (3) отличное от нуля число является собственным значением оператора V тогда и только тогда, когда оно одновременно является собственным значением сопряженного оператора V'.

Доказательство. По теореме 1 всякое отличное от нуля число, принадлежащее спектру оператора V, должно быть собственным значением V. То же самое верно и для сопряженного оператора V', так как по теореме Шаудера оператор V' вполне непрерывен одновременно с V. Резольвентные множества операторов V и V' совпадают (гл. VIII, § 6), и тем самым утверждение (3) полностью доказано. Так как собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям оператора V, линейно независимы, доказательство утверждений (1) и (2) будет закончено, если мы приведем к противоречию следующее предположение:

существует последовательность $\{x_n\}$ линейно независимых векторов, таких, что $Vx_n = \lambda_n x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \neq 0$.

Для этого рассмотрим замкнутые подпространства X_n, натянутые на векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$. По теореме Рисса (гл. III, § 2) найдется такая последовательность $\{y_n\}$, что $y_n \in X_n$, $\|y_n\| = 1$ и $\operatorname{dis}(y_n, X_{n-1}) \geqslant 1/2$ $(n = 2, 3, \ldots)$. При $n > m$

$$\lambda_n^{-1}Vy_n - \lambda_m^{-1}Vy_m = y_n + \left(-y_m - \lambda_n^{-1}T_{\lambda_n}y_n + \lambda_m^{-1}T_{\lambda_m}y_m\right) = y_n - z,$$

где

$$z = \left(y_m + \lambda_n^{-1}T_{\lambda_n}y_n - \lambda_m^{-1}T_{\lambda_m}y_m\right) \in X_{n-1}.$$

В самом деле, если $y_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j$, то $y_n - \lambda_n^{-1}Vy_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j x_j - \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j \lambda_n^{-1}\lambda_j x_j \in X_{n-1}$. Аналогично можно показать, что $T_{\lambda_m}y_m \in X_m$. Из приведенного построения следует, что $\left\|\lambda_n^{-1}Vy_n - \lambda_m^{-1}Vy_m\right\| \geqslant 1/2$, а это противоречит предположению о том, что оператор V вполне непрерывен, и условию $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda \neq 0$.

Теорема 3. Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — собственное значение вполне непрерывного оператора $V \in L(X, X)$. По предыдущей теореме λ_0 служит также и собственным значением сопряженного оператора V'. Можно доказать следующие утверждения: (1) кратности λ_0 как собственного значения оператора V и оператора V' одинаковы; (2) уравнение $(\lambda_0 I - V)x = y$ при заданном значении $y \in X$ допускает решение $x \in X$ в том и только в том случае, когда $y \in N(\lambda_0 I' - V')^{\perp}$[1]), т. е.

[1]) Здесь $N(\lambda_0 I' - V')^{\perp} = \{y \in X;\ \langle y, f\rangle = 0,\ f \in N(\lambda_0 I' - V')\}$ $(N(\lambda_0 I' - V') = \{f \in X';\ V'f = \lambda_0 f\})$. — *Прим. перев.*

тогда и только тогда, когда для всякого непрерывного линейного функционала $f \in X'$, удовлетворяющего уравнению $V'f = \lambda_0 f$, справедливо равенство $\langle y, f \rangle = 0$; (3) для того чтобы уравнение $(\lambda_0 I' - V'f) = g$ при заданном $g \in X'$ допускало решение $f \in X'$, необходимо и достаточно, чтобы $g \in N(\lambda_0 I - V)^{\perp}$, т. е. чтобы для всякого элемента $x \in X$, удовлетворяющего уравнению $Vx = \lambda_0 x$, выполнялось соотношение $\langle x, g \rangle = 0$.

Доказательство. Так как собственное значение $\lambda_0 \neq 0$ представляет собой изолированную особую точку резольвенты $R(\lambda; V) = (\lambda I - V)^{-1}$, то $R(\lambda; V)$ можно разложить в ряд Лорана

$$R(\lambda; V) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n A_n.$$

Нас интересует вычет $A_{-1} = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} R(\lambda; V)\, d\lambda$. Как было установлено в гл. VIII, § 8, оператор A_{-1} идемпотентен, т. е. $A_{-1}^2 = A_{-1}$. Полагая $(\lambda I - V)^{-1} = (\lambda^{-1} I - V_\lambda)$, мы найдем из равенства $(\lambda I - V)(\lambda^{-1} I + V_\lambda) = I$, что $V_\lambda = V(\lambda^{-1} V_\lambda + \lambda^{-2} I)$, и поэтому оператор V_λ вполне непрерывен вместе с оператором V. Следовательно,

$$A_{-1} = (2ni)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} R(\lambda; V)\, d\lambda =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} \lambda^{-1}\, d\lambda \cdot I + (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} V_\lambda\, d\lambda = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} V_\lambda\, d\lambda.$$

Отсюда на основании теоремы из § 2 гл. X мы заключаем, что оператор A_{-1} вполне непрерывен.

Так как $A_{-1}X = A_{-1}(A_{-1}X)$ и оператор A_{-1} вполне непрерывен, единичный шар нормированного линейного пространства $A_{-1}X$ относительно бикомпактен. Таким образом, по теореме Рисса из гл. III, § 2, область значений $R(A_{-1})$ конечномерна. С другой стороны, если $x \neq 0$ и $Vx = \lambda_0 x$, то $(\lambda I - V)^{-1} x = (\lambda - \lambda_0)^{-1} x$, так как $(\lambda I - V)x = (\lambda - \lambda_0)x$. Значит, $A_{-1}x = (2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} (\lambda - \lambda_0)^{-1}\, d\lambda \cdot x = x$ и, следовательно, условие $Vx = \lambda_0 x$, $x \neq 0$, эквивалентно условию $Vx = \lambda_0 x$, $0 \neq x \in R(A_{-1})$. Аналогичные рассуждения показывают, что уравнение $V'f = \lambda_0 f$, $f \neq 0$, эквивалентно условию $V'f = \lambda_0 f$, $0 \neq f \in R(A'_{-1})$. Но пространства $R(A_1)$ и $R(A'_{-1})$ должны иметь одинаковые размерности. Действительно, если $A'_{-1}f = g$, то $A'_{-1}g = A'_{-1}(A'_{-1}f) = g$, а последнее равенство эквивалентно условию

$\langle x, g\rangle = \langle A_{-1}x, g\rangle$ для всех $x \in X$; поэтому g можно рассматривать как функционал, заданный на конечномерном пространстве $R(A_{-1})$.

Далее по известной теореме теории матриц уравнение $Vx = \lambda_0 x$ (в пространстве $R(A_{-1})$) и уравнение с транспонированной матрицей $V'f = \lambda_0 f$ (в пространстве $R(A'_{-1})$) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Таким образом, утверждение (1) полностью доказано. Утверждения (2) и (3) вытекают из леммы и теоремы об операторах с замкнутой областью значений (гл. VII, § 5).

Обобщение теории Рисса — Шаудера. Допустим, что степень V^n оператора $V \in L(X, X)$ при некотором положительном целом значении n представляет собой вполне непрерывный оператор. Тогда по теореме об отображении спектра (гл. VIII, § 7) $\sigma(V^n) = \sigma(V)^n$[1], и, поскольку оператор V^n вполне непрерывен, множество $\sigma(V^n)$ должно быть конечным или счетным, причем в последнем случае оно может иметь предельную точку только в нуле. Тем же условиям должно удовлетворять и множество $\sigma(V)$. Поскольку оператор V^n вполне непрерывен, оператор

$$(2\pi i)^{-1} \int\limits_{|\lambda - \lambda_0| = \varepsilon} R(\lambda; V^n)\, d\lambda$$

при всяком $\lambda_0 \neq 0$ из $\sigma(V^n)$ и достаточно малом ε имеет конечномерную область значений. Следовательно (гл. VIII, § 8), λ_0 служит полюсом резольвенты $R(\lambda; V^n)$. Но $(\lambda^n I - V^n) = (\lambda - V)(\lambda^{n-1} I + \lambda^{n-2} V + \ldots + V^{n-1})$, и поэтому

$$(\lambda^n I - V^n)^{-1} (\lambda^{n-1} I + \ldots + V^{n-1}) = (\lambda I - V)^{-1}.$$

Последнее означает, что всякое число $\lambda_0 \neq 0$, принадлежащее множеству $\sigma(V^n)$, является полюсом резольвенты $R(\lambda; V)$ и, следовательно, собственным значением оператора V. Этот факт позволяет распространить теорию Рисса — Шаудера на операторы V, какая-либо степень V^n которых вполне непрерывна. Это обобщение весьма важно с точки зрения приложений к некоторым конкретным задачам теории интегральных уравнений, таким, как задача Дирихле для потенциалов; см., например, Келлог [1]. Можно показать, что для значения $\lambda_0 = 1$ изложенная выше теория применима также к операторам $V \in L(X, X)$, для которых существуют положительное целое m и вполне непрерывный оператор $K \in L(X, X)$, такие, что $\|K - V^m\| < 1$; см. по этому поводу Иосида [9]. Заметим, что если ядра $K_1(s, t)$ и $K_2(s, t)$ ограничены и измеримы в области $0 \leqslant s, t \leqslant 1$, то интегральный

[1]) Здесь $\sigma(V)^n \equiv \{\lambda;\ \lambda = \mu^n,\ \mu \in \sigma(V)\}$. — *Прим. перев.*

оператор T, определяемый соотношением

$$x(s) \to (Tx)(s) = (K_1 K_2 x)(s), \quad \text{где} \quad (K_j x)(s) = \int_0^1 K_j(s, t)\, x(t)\, dt,$$

вполне непрерывен как оператор, принадлежащий $L(L^1(0, 1), L^1(0, 1))$. См. Иосида — Мимура — Какутани [10].

6. Задача Дирихле

Пусть G — открытая ограниченная область пространства R^n, и пусть

$$L = \sum_{|s|, |t| \leqslant m} D^s c_{st}(x) D^t$$

— сильно эллиптический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами $c_{st}(x) = c_{ts}(x) \in C^\infty(G^a)$. Мы будем рассматривать здесь только вещественные функции. Пусть заданы $f \in L^2(G)$ и $u_1 \in H^m(G)$. Рассмотрим обобщенное решение $u_0 \in L^2(G)$ уравнения

$$Lu = f, \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$(u_0 - u_1) \in H_0^m(G).$$

Последнее условие означает, что каждая из обобщенных производных

$$(D^j u_0 - D^j u_1), \quad |j| \leqslant m, \tag{2}$$

представляет собой предел в метрике пространства $L^2(G)$ некоторой последовательности вида $\{D^j \varphi_{h, j}\}$, где $\varphi_{h, j} \in C_0^\infty(G)$ (гл. I, § 10). Таким образом, грубо говоря, оно дает *граничное условие*

$$D^j u_0 = D^j u_1 \text{ на границе } \Gamma \text{ области } G \text{ при } |j| \leqslant m. \tag{3}$$

В этом смысле задача (1) называется *задачей Дирихле* для оператора L.

Мы изложим здесь эту задачу в том виде, в каком она была сформулирована и решена Гордингом [1].

Сначала решим задачу

$$u + \alpha L u = f, \quad (u - u_1) \in H_0^m(G), \tag{4}$$

где положительная постоянная α выбрана так, что для всех $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется неравенство Гординга

$$(\varphi + \alpha L^* \varphi, \varphi)_0 \geqslant \delta \|\varphi\|_m^2. \tag{5}$$

Здесь $L^* = \sum_{|s|,\ |t| \leqslant m} (-1)^{|s|+|t|} D^t c_{st}(x) D^s$, а δ — некоторая положительная постоянная. Такое α существует, если предположить, что коэффициенты $c_{st}(x)$ непрерывны в замыкании G^a области G. Выполняя m-кратное интегрирование по частям, мы получим также неравенство

$$|(\varphi + \alpha L^*\varphi,\ \psi)_0| \leqslant \gamma \|\varphi\|_m \cdot \|\psi\|_m \text{ для любых } \varphi,\ \psi \in C_0^\infty(G), \tag{6}$$

где γ — другая положительная постоянная, не зависящая от φ и ψ.

Аналогичным способом выводится равенство

$$(L^*\varphi,\ u_1)_0 = \sum_{s,\ t} \left((-1)^{|s|+|t|}\ D^t c_{st} D^s \varphi,\ u_1\right)_0 = \sum_{s,\ t} (-1)^{|s|}\ (c_{st} D^s \varphi,\ D^t u_1)_0,$$

справедливое при любых $u_1 \in H^m(G)$ и $\varphi \in C_0^\infty(G)$. Учитывая, что коэффициенты c_{st} ограничены в области G^a, и применяя неравенство Шварца, мы получаем

$$|(L^*\varphi,\ u_1)_0| \leqslant \eta \sum_{|s|,\ |t| \leqslant m} \|D^s\varphi\|_0 \cdot \|D^t u_1\|_0 \qquad \left(\eta = \sup_{s,\ t;\ x} |c_{st}(x)|\right).$$

Выражение в правой части не превосходит произведения нормы $\|\varphi\|_m$ на некоторую положительную постоянную.

Эти рассуждения показывают, что линейный функционал

$$F(\varphi) = \left(\varphi + \alpha L^*\varphi,\ u_1\right)_0, \qquad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

может быть продолжен до ограниченного линейного функционала, определенного в области $H_0^m(G)$, которая является пополнением $C_0^\infty(G)$ по норме $\|\varphi\|_m$. Аналогично, исходя из неравенств

$$|(\varphi,\ f)_0| \leqslant \|\varphi\|_0 \cdot \|f\|_0 \leqslant \|\varphi\|_m \cdot \|f\|_0,$$

мы приходим к выводу, что линейный функционал $(\varphi,\ f)_0$ $\left(\varphi \in C_0^\infty(G)\right)$ можно продолжить до ограниченного линейного функционала, определенного для функций $\varphi \in H_0^m(G)$. По теореме Рисса о представлении линейных функционалов для гильбертова пространства $H_0^m(G)$ существует такая зависящая от f и u_1 функция $f' \in H_0^m(G)$, что

$$(\varphi,\ f)_0 - (\varphi + \alpha L^*\varphi,\ u_1)_0 = (\varphi,\ f')_m \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Применяя к гильбертову пространству $H_0^m(G)$ теорему Лакса — Мильграма (гл. III, § 7), мы находим, что

$$(\varphi,\ f)_0 - \left(\varphi + \alpha L^*\varphi,\ u_1\right)_0 = \left(\varphi,\ f'\right)_m = B\left(\varphi,\ Sf'\right), \quad Sf' \in H_0^m(G), \tag{7}$$

где

$$B(\varphi,\ \psi) = (\varphi + \alpha L^*\varphi,\ \psi)_0 \quad \text{для} \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \qquad \psi \in H_0^m(G). \tag{8}$$

Это означает, что

$$(\varphi, f)_0 = (\varphi + \alpha L^*\varphi, u_1 + Sf')_0 \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G),$$

и, таким образом, функция $u_0 = u_1 + Sf' \in L^2(G)$ представляет собой интересующее нас решение уравнения (4).

Перейдем теперь к исходному уравнению (1). Если функция $u_0 \in L^2(G)$ удовлетворяет условию (1), то для функции $u_2 = u_0 - u_1 \in H_0^m(G)$ имеем

$$(u_0, L^*\varphi)_0 = (u_1, L^*\varphi)_0 + (u_2, L^*\varphi)_0 = (f, \varphi)_0, \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Интегрируя, как и выше, по частям, мы приходим к неравенствам

$$|(u_1, L^*\varphi)_0| \leqslant a\|\varphi\|_m \quad (a > 0 \text{ — постоянная}),$$
$$|(f, \varphi)_0| \leqslant \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \leqslant \|f\|_0 \cdot \|\varphi\|_m.$$

К линейному функционалу $(f, \varphi)_0 - (u_1, L^*\varphi)_0$ в пространстве $H_0^m(G)$, заданному на функциях $\varphi \in C_0^\infty(G)$, можно применить теорему Рисса о представлении. Следовательно, существует единственным образом определенная функция $v \in H_0^m(G)$, такая, что

$$(f, \varphi)_0 - (u_1, L^*\varphi)_0 = (v, \varphi)_m \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G).$$

Применяя к $(v, \varphi)_m$ теорему Лакса — Мильграма, мы получаем такой оператор S_1 $(S_1 v \in H_0^m(G))$, что

$$(v, \varphi)_m = B(S_1 v, \varphi) \quad \text{для всех} \quad \varphi \in C_0^\infty(G), \quad v \in H_0^m(G).$$

Таким образом, задача Дирихле (1) эквивалентна следующей задаче: для заданной функции $S_1 v \in H_0^m(G)$ найти решение $u_2 \in H_0^m(G)$ уравнения

$$(u_2, L^*\varphi)_0 = B(S_1 v, \varphi), \quad \varphi \in C_0^\infty(G). \tag{1'}$$

Для произвольно заданной функции $u \in L^2(G) = H_0^0(G)$ справедливо неравенство

$$|(u, \varphi)_0| \leqslant \|u\|_0 \cdot \|\varphi\|_0 \leqslant \|u\|_0 \cdot \|\varphi\|_m.$$

Таким образом, по теореме Рисса о представлении линейного функционала в гильбертовом пространстве $H_0^m(G)$ существует единственным образом определенная функция $u' = Tu \in H_0^m(G)$, такая, что для всякой функции $\varphi \in C_0^\infty(G)$

$$(u, \varphi)_0 = (u', \varphi)_m \quad \text{и} \quad \|u'\|_m \leqslant \|u\|_0.$$

Поэтому на основании теоремы Лакса — Мильграма мы получаем

$$(u, \varphi)_0 = (u', \varphi)_m = B(S_1 u', \varphi) = B(S_1 Tu, \varphi), \quad \|S_1 Tu\|_m \leqslant \delta^{-1}\|u\|_0. \tag{9}$$

Таким образом, согласно (1′), для всех функций $\varphi \in C_0^\infty(G)$ выполняется равенство

$$B(u_2\varphi) = (u_2, \varphi + \alpha L^*\varphi)_0 = (u_2, \varphi)_0 + \alpha (u_2, L^*\varphi)_0 = \\ = B(S_1Tu_2, \varphi) + \alpha B(S_1, v, \varphi),$$

т. е.

$$B(u_2 - S_1Tu_2 - \alpha S_1 v, \varphi) = 0.$$

Так как $B(\varphi, \varphi) > 0$ при $\varphi \neq 0$, имеем

$$u_2 - S_1Tu_2 = \alpha S_1 v. \qquad (1'')$$

Правая часть $\alpha S_1 v \in H_0^m(G)$ представляет собой известную функцию. Условие $\| S_1Tu \|_m \leqslant \delta^{-1} \| u \|_0$ говорит о том, что оператор S_1T, отображающий пространство $H_0^m(G)$ в себя, вполне непрерывен (теорема Реллиха — Гординга из § 3 гл. X). Поэтому можно применить изложенную ранее теорию Рисса — Шаудера. Это приводит к следующей альтернативе:

> либо однородное уравнение $u - S_1Tu = 0$ обладает нетривиальным решением $u \in H_0^m(G)$, либо неоднородное уравнение $u - S_1Tu = w$ при всяком $w \in H_0^m(G)$ имеет единственное решение $u \in H_0^m(G)$.

Первая возможность соответствует случаю, когда $(u, \varphi + \alpha L^*\varphi)_0 = (u, \varphi)_0$, т. е. случаю $Lu = 0$. Возвращаясь к исходному уравнению (1), мы можем сформулировать такой результат.

Теорема. Имеет место следующая альтернатива: (1°) либо однородное уравнение $Lu = 0$ имеет нетривиальное решение $u \in H_0^m(G)$; (2°) либо для всякой функции $f \in L^2(G)$ и произвольной функции $u_1 \in H^m(G)$ существует единственное решение $u_0 \in L^2(G)$ уравнения $Lu = f$, удовлетворяющее граничному условию $u - u_1 \in H_0^m(G)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ К ГЛАВЕ X

Ядерное пространство Гротендика

Понятие ядерного оператора, определенное в гл. X, § 2 для B-пространств, можно следующим образом обобщить для локально выпуклых пространств.

Предложение 1. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство, и пусть Y — некоторое B-пространство. Допустим, что существуют равностепенно непрерывная последовательность $\{f'_j\}$ непрерывных линейных функционалов на X, ограниченная последовательность $\{y_j\}$ элементов пространства Y и последовательность $\{c_j\}$ неотрицательных чисел, такая, что $\sum_{j=1}^{n} c_j < \infty$. Тогда равенство

$$T \cdot x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j \tag{1}$$

определяет на пространстве X непрерывный линейный оператор T, действующий из X в Y.

Доказательство. В силу равностепенной непрерывности последовательности $\{f'_j\}$ существует непрерывная полунорма p на X, такая, что $\sup_j |\langle x, f'_j\rangle| \leqslant p(x)$ для всех $x \in X$. Поэтому при $m > n$

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j \right\| \leqslant p(x) \cdot \sup_{j\geqslant 1} \|y_j\| \cdot \sum_{j=n}^{m} c_j.$$

Это неравенство показывает, что правая часть формулы (1) существует и определяет на X непрерывный линейный оператор T, действующий из X в B-пространство Y.

Определение 1. Оператор T вида (1) мы назовем *ядерным оператором*, отображающим локально выпуклое пространство X в B-пространство Y.

Следствие. Ядерный оператор T является вполне непрерывным [1]) в том смысле, что он отображает всякую окрестность нуля в X в относительно бикомпактное множество пространства Y.

Доказательство. Определим оператор T_n формулой

$$T_n \cdot x = \sum_{j=1}^{n} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j.$$

Оператор T_n вполне непрерывен, так как образ множества $V = \{x;\ p(x) \leqslant 1\}$ пространства X при отображении T_n относительно бикомпактен в Y. С другой стороны,

$$\|Tx - T_n x\| = \left\| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j \langle x, f'_j\rangle y_j \right\| \leqslant p(x) \sup_{j\geqslant 1} \|y_j\| \sum_{j=n+1}^{\infty} c_j,$$

и поэтому последовательность $\{T_n x\}$ сильно и равномерно сходится в области V к Tx. Это и означает, что оператор T вполне непрерывен.

Приведем типичный пример ядерного оператора (ср. § 2, гл. X).

---

[1]) В предыдущих разделах понятие вполне непрерывного оператора определялось лишь для отображений B-пространств друг в друга. — *Прим. перев.*

Пример. Пусть K — бикомпактное множество пространства R^n. Тогда при $(k-j) > n$ тождественное отображение T пространства $H_0^k(K)$ в $H_0^j(K)$ является ядерным оператором.

Предложение 2. Пусть X — локально выпуклое линейное топологическое пространство и V — выпуклая уравновешенная окрестность нуля в X. Рассмотрим функционал Минковского $p_V(x) = \inf\limits_{x/\lambda \in V,\, \lambda > 0} \lambda$ множества V. Как известно, $p_V(x)$ представляет собой непрерывную полунорму на X. Положим

$$N_V = \{x \in X;\ p_V(x) = 0\} = \{x \in X;\ \lambda x \in V \text{ для всех } \lambda > 0\}.$$

Тогда N_V является замкнутым линейным подпространством пространства X и факторпространство $X_V = X/N_V$ с нормой

$$\|\tilde{x}\|_V = p_V(x), \text{ где } \tilde{x} \text{ — класс вычетов по подпространству } N_V, \text{ содержащий элемент } x, \tag{2}$$

является линейным нормированным пространством.

Доказательство. Пусть $(x - x_1) \in N_V$. Тогда $p_V(x_1) \leqslant p_V(x) + p_V(x_1 - x) = p_V(x)$; точно так же $p_V(x) \leqslant p_V(x_1)$. Таким образом, если x и x_1 принадлежат одному и тому же классу вычетов по подпространству N_V, то $p_V(x) = p_V(x_1)$. Ясно, что $\|\tilde{x}\|_V \geqslant 0$ и $\|\tilde{0}\|_V = 0$. Кроме того, если $\|\tilde{x}\|_V = 0$, то для $x \in \tilde{x}$ справедливо включение $x \in N_V$ и, следовательно, $\tilde{x} = \tilde{0}$. Неравенство треугольника получается здесь непосредственно: $\|\tilde{x} + \tilde{y}\|_V = p_V(x+y) \leqslant p_V(x) + p_V(y) = \|\tilde{x}\|_V + \|\tilde{y}\|_V$ $(x \in \tilde{x},\ y \in \tilde{y})$. Наконец, $\|\alpha\tilde{x}\|_V = p_V(\alpha x) = |\alpha|\, p_V(x) = |\alpha| \cdot \|\tilde{x}\|_V$ $(x \in \tilde{x})$, и доказательство закончено.

Следствие. Эквивалентность двух условий

$$(p_{V_1} \leqslant p_{V_2}) \leftrightarrow (V_2 \subseteq V_1) \tag{3}$$

позволяет определить *каноническое отображение*

$$X_{V_2} \to X_{V_1} \qquad (V_2 \subseteq V_1),$$

ставя в соответствие классу $\tilde{x}_{V_2} (\operatorname{mod} N_{V_2})$, содержащему x, класс $\tilde{x}_{V_1} (\operatorname{mod} N_{V_1})$, содержащий x. Это отображение непрерывно, так как

$$\|\tilde{x}_{V_2}\|_{V_2} = p_{V_2}(x) \geqslant p_{V_1}(x) = \|\tilde{x}_{V_1}\|_{V_1}.$$

Перейдем теперь к понятию ядерного пространства, которое ввел Гротендик [2].

Определение 2. Локально выпуклое линейное топологическое пространство X называется ***ядерным пространством***, если для всякой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X существует такая выпуклая уравновешенная окрестность $U \subseteq V$ нуля, что каноническое отображение

$$T\colon\ X_U \to \hat{X}_V, \tag{4}$$

где $\hat{X}_V$ — пополнение нормированного линейного пространства X_V, является ядерным.

Пример 1. Рассмотрим топологическое произведение $R^A \equiv \equiv \prod_{\alpha \in A} R_\alpha$, $R_\alpha \equiv R$, где R — вещественная прямая, A — некоторое множество; R^A представляет собой множество всех конечных вещественных функций, заданных на A, топологизированное системой полунорм

$$p_a(x) = |x(a)|, \quad a \in A. \tag{5}$$

Пространство R^A является ядерным пространством.

Доказательство. В данном случае множество N_V состоит из всех функций $x(a) \in R^A$, таких, что для некоторого конечного множества $\{a_j \in A;\ j = 1, 2, \ldots, n\}$ мы имеем $x(a_j) = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Следовательно, пространство $X_V = R^A/N_V$ совпадает с пространством функций $x_V(a)$, удовлетворяющих условию $x_V(a) = 0$ для $a \neq a_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, с нормой

$$\| x_V(a) \|_V = \sup_{1 \leqslant j \leqslant n} |x(a_j)|.$$

Пусть N_U — совокупность всех функций $x(a) \in R^A$, таких, что $x(a_\alpha) = 0$ при $\alpha \in A'$, где A' — любое конечное множество целых чисел, содержащее числа $1, 2, \ldots, n$. Тогда $U \subsetneqq V$ и каноническое отображение $X_U = R^A/N_U \to \widehat{R^A}/N_V = X_V$ является ядерным. В самом деле, это отображение является непрерывным линейным отображением с конечномерной областью значений.

Пример 2. Всякое ядерное B-пространство X должно быть конечномерным.

Доказательство. В B-пространстве X для любой выпуклой уравновешенной окрестности нуля V пространство X_V совпадает, очевидно, с X. Таким образом, если B-пространство X — ядерное, то тождественный оператор $X \to X$ вполне непрерывен, и поэтому, согласно теореме Рисса (гл. III, § 2), пространство X должно быть конечномерным.

Пример 3. Пусть K — некоторое бикомпактное множество в R^n. Тогда пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$, определенное в гл. I, § 1, является ядерным.

Доказательство. Как в гл. I, § 1, пусть

$$p_{K,k}(f) = \sup_{x \in K,\ |s| \leqslant k} |D^s f(x)|$$

есть одна из полунорм, определяющих топологию в $\mathfrak{D}_K(R^n)$. Положим $V_k = \{f \in \mathfrak{D}_K(R^n);\ p_{K,k}(f) \leqslant 1\}$. Тогда $N_{V_k} = \{0\}$ и $X_{V_k} = = X/N_{V_k} = \mathfrak{D}_K(R^n)/N_{V_k}$ — не что иное, как пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$, нормированное при помощи $p_{K,k}$. Если $(k-j)>n$, то, как и в примере, приведенном после следствия из определения 1, нетрудно показать, что каноническое отображение X_{V_k} в X_{V_j} осуществляется ядерным оператором. Следовательно, пространство $\mathfrak{D}_K(R^n)$ ядерное.

Теорема 1. Для того чтобы локально выпуклое линейное топологическое пространство X было ядерным, необходимо и достаточно, чтобы для любой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X каноническое отображение $X \to \widehat{X}_V$ было ядерным.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть $U \subseteq V$ — выпуклая уравновешенная окрестность элемента $x=0 \in X$, такая, что каноническое отображение $X_U \to \widehat{X}_V$ является ядерным. Каноническое отображение T: $X \to \widehat{X}_V$ можно представить как произведение канонического отображения $X \to \widehat{X}_U$ и ядерного канонического отображения $X_U \to \widehat{X}_V$. Поэтому оператор T должен быть ядерным.

Достаточность. Допустим, что каноническое отображение T: $X \to \widehat{X}_V$ определяется ядерным оператором

$$Tx = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \langle x, f'_j \rangle y_j.$$

Множество $U_\alpha = \{x \in X;\ |\langle x, f'_j \rangle| \leqslant \alpha$ при $j=1, 2, \ldots\}$ при любом $\alpha>0$ представляет собой выпуклую уравновешенную окрестность нуля в пространстве X, так как семейство $\{f'_j\} \subseteq X'$ равностепенно непрерывно. Кроме того,

$$\|Tx\|_V = \Big\|\sum_j c_j \langle x, f'_j \rangle y_j\Big\|_V \leqslant \alpha \sup_j \|y_j\|_V \sum_j c_j \quad \text{для всех} \quad x \in U_\alpha.$$

Выберем теперь столь малое $\alpha>0$, чтобы правая часть последнего неравенства стала меньше 1. Тогда $\|Tx\|_V<1$ и $U_\alpha \subseteq V$. Каждый из функционалов f'_j можно рассматривать как элемент сопряженного пространства X'_{U_α}, и поэтому

$$Tx = Tz = \sum_j c_j \langle x, f'_j \rangle y_j \quad \text{при} \quad (x-z) \in N_{U_\alpha}.$$

Следовательно, каноническое отображение $X_{U_\alpha} \to \widehat{X}_V$ определяется ядерным оператором

$$\tilde{x}_{U_\alpha} \to \sum_j c_j \langle \tilde{x}_{U_\alpha}, f'_j \rangle y_j.$$

Теорема 2. Пусть X — ядерное локально выпуклое линейное топологическое пространство. Тогда для всякой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X найдется такая выпуклая уравновешенная окрестность $W \subseteq V$ нуля в X, что пространство $\widehat{X}_W$ будет гильбертовым.

Доказательство. Ядерное каноническое отображение $X_U \to \widehat{X}_V$ ($U \subsetneqq V$), определяемое оператором

$$T\tilde{x}_U = \sum_j c_j \langle \tilde{x}_U, f'_j \rangle y'_j,$$

можно представить в виде произведения двух операторов α: $X_U \to (l^2)$ и β: $(l^2) \to \widehat{X}_V$ следующего вида:

$$\alpha:\ \tilde{x}_U \to \{c_j^{1/2} \langle \tilde{x}_U, f'_j \rangle\},$$

$$\beta:\ \{\xi_j\} \to \sum_j c_j^{1/2} \xi_j y_j.$$

Непрерывность оператора α вытекает из неравенства

$$\sum_j | c_j^{1/2} \langle \tilde{x}_U, f'_j \rangle |^2 \leqslant \left(\sup_j \| f'_j \| \cdot \| \tilde{x}_U \|_U\right)^2 \cdot \sum_j c_j,$$

а непрерывность β доказывается с помощью соотношений

$$\left\| \sum_j c_j^{1/2} \xi_j y_j \right\|_V^2 \leqslant \sum_j c_j \| y_j \|_V^2 \sum_j | \xi_j |^2 \leqslant \sup_j \| y_j \|_V^2 \cdot \| \{\xi_j\} \|_{(l^2)}^2 \sum_j c_j.$$

Обозначим через U_2 прообраз в (l^2) единичного шара пространства $\widehat{X}_V$ при отображении β. Множество U_2 служит окрестностью нуля пространства (l^2) и поэтому содержит некоторый шар S с центром в точке $0 \in (l^2)$. Пусть W — прообраз в X этого шара S при непрерывном отображении $\tilde{\alpha}$, определенном как произведение непрерывного канонического отображения $X \to X_U$ и непрерывного отображения α: $X_U \to (l^2)$. Тогда ясно, что $W \subsetneqq V$, и, следовательно, для любого класса $\tilde{x}_W \in X_W$

$$\| \tilde{x}_W \|_W = \inf_{x/\lambda \in W,\ \lambda > 0} \lambda = \inf_{\tilde{\alpha}x/\lambda \in S,\ \lambda > 0} \lambda = \| \tilde{\alpha} x \|_{(l^2)} / r$$

($r > 0$ — радиус сферы S).

Так как $\| \quad \|_{(l^2)}$ — норма в гильбертовом пространстве (l^2), то X_W — предгильбертово пространство. Следовательно, $\widehat{X}_W$ (пополнение X_W) представляет собой гильбертово пространство.

Следствие. Пусть X — ядерное локально выпуклое пространство. Тогда для любой выпуклой уравновешенной окрестности V нуля в X существуют такие выпуклые уравновешенные окрестности W_1 и W_2 нуля в X, что

$W_2 \subseteq W_1 \subseteq V$, $\widehat{X}_{W_1}$ и $\widehat{X}_{W_2}$ — гильбертовы пространства и канонические отображения $X \to \widehat{X}_{W_2}$, $\widehat{X}_{W_2} \to \widehat{X}_{W_1}$, $\widehat{X}_{W_1} \to \widehat{X}_V$ являются ядерными.

Таким образом, ядерное локально выпуклое пространство X обладает фундаментальной системой $\{V_\alpha\}$ окрестностей нуля, такой, что пространства $\hat{X}_{V_\alpha}$ являются гильбертовыми.

Некоторые дополнительные сведения о ядерных пространствах. Можно доказать следующие утверждения:

1. Любое линейное подпространство и всякое факторпространство ядерного пространства являются ядерными.

2. Топологическое произведение любого семейства ядерных пространств и индуктивный предел всякой последовательности ядерных пространств также являются ядерными пространствами.

3. Пространство, сильно сопряженное к индуктивному пределу последовательности ядерных пространств, каждое из которых является F-пространством, представляет собой ядерное пространство.

Доказательства этих предложений см. в книге Гротендика [1, стр. 47]. Из свойства 2 вытекает, что пространство $\mathfrak{D}(R^n)$, представляющее собой индуктивный предел последовательности $\{\mathfrak{D}_{K_r}(R^n);\ r=1, 2, \ldots\}$ (здесь через K_r обозначен шар $|x| \leqslant r$ пространства R^n), ядерно. Поэтому, согласно утверждению 3, $\mathfrak{D}(R^n)'$ — тоже ядерное пространство. Ядерными являются также пространства $\mathfrak{E}(R^n)$, $\mathfrak{E}(R^n)'$, $\mathfrak{S}(R^n)$ и $\mathfrak{S}(R^n)'$.

Важность понятия ядерного пространства была отмечена недавно в работе Минлоса [1], который доказал следующее обобщение теоремы Колмогорова о продолжении мер.

Пусть X — ядерное пространство, топология которого определяется счетной системой выпуклых уравновешенных окрестностей нуля, и пусть X' — пространство, сильно сопряженное к X. Множество вида

$$Z' = \{f' \in X';\ a_i < \langle x_i, f' \rangle < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

называется *цилиндрическим множеством* в X'. Допустим, что на семействе всех цилиндрических множеств определена неотрицательная функция множества μ_0, и эта функция σ-аддитивна на цилиндрических множествах Z', соответствующих фиксированным точкам $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда при некоторых условиях *совместности* и *непрерывности* функция μ_0 может быть единственным способом продолжена до неотрицательной σ-аддитивной функции множества, определенной на наименьшем σ-аддитивном семействе множеств из X', содержащем все цилиндрические множества из X'.

Доказательство и приложение этих результатов см. в книге Гельфанда — Виленкина [3].

ГЛАВА XI

Нормированные кольца и спектральное представление линейных операторов

Линейное пространство A над некоторым скалярным полем (F) называется *алгеброй* или *кольцом* над полем (F), если для каждой пары элементов $x, y \in A$ однозначно определено произведение $xy \in A$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$\begin{aligned} (xy)z &= x(yz) \qquad \text{(ассоциативность)}, \\ x(y+z) &= xy+xz \qquad \text{(дистрибутивность)}, \\ \alpha\beta(xy) &= (\alpha x)(\beta y). \end{aligned} \tag{1}$$

Если существует элемент $e \in A$, называемый *единицей* алгебры, такой, что $ex = xe = x$ для всех $x \in A$, то A называется *алгеброй с единицей*. Единица e алгебры A, если она существует, определяется однозначно. Действительно, если допустить, что e' — другая единица алгебры A, то $ee' = e = e'$. Если операция умножения xy *коммутативна*, т. е. $xy = yx$ для любой пары $x, y \in A$, то A называется *коммутативной алгеброй*. Пусть A — некоторая алгебра с единицей e. Если для данного элемента $x \in A$ существует такой элемент $x' \in A$, что $xx' = x'x = e$, то x' называется элементом, *обратным* к x. Если элемент x', обратный к x, существует, то он определен единственным образом. В самом деле, если x'' — другой элемент, обратный к x, то

$$x''(xx') = x''e = x'' = (x''x)x' = ex' = x'.$$

Элемент x', обратный к x (если он существует), будет обозначаться через x^{-1}.

Алгебра называется *банаховой алгеброй* или, кратко, *B-алгеброй*, если она является B-пространством и выполняется условие

$$\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|. \tag{2}$$

Неравенство

$$\|x_ny_n - xy\| \leqslant \|x_n(y_n - y)\| + \|(x_n - x)y\| \leqslant \leqslant \|x_n\| \cdot \|(y_n - y)\| + \|(x_n - x)\| \cdot \|y\|$$

показывает, что произведение xy непрерывно по совокупности переменных x, y.

Пример 1. Пусть X — некоторое B-пространство. Пространство $L(X, X)$ с операциями сложения операторов $T+S$ и умножения операторов TS образует B-алгебру с единицей. Единицей алгебры $L(X, X)$ служит тождественный оператор I, а нормой элемента T алгебры $L(X, X)$ является норма оператора $\|T\|$.

Пример 2. Пусть S — бикомпактное топологическое пространство. Пространство $C(S)$ является B-алгеброй с операциями $(x_1+x_2)(s) = x_1(s)+x_2(s)$, $(\alpha x)(s)=\alpha x(s)$, $(x_1x_2)(s)=x_1(s)x_2(s)$ и нормой $\|x\|=\sup\limits_{s\in S}|x(s)|$.

Пример 3. Обозначим через B совокупность всех непрерывных функций $x(s)$ на отрезке $0\leqslant s\leqslant 1$, представимых в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье

$$x(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi ins}, \quad \text{где} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty. \tag{3}$$

Нетрудно убедиться в том, что множество B с обычными операциями сложения и умножения функций и нормой

$$\|x\|=\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| \tag{4}$$

представляет собой коммутативную B-алгебру с единицей.

В двух последних примерах единицей служит функция $e(s)\equiv 1$ и $\|e\|=1$. В дальнейшем мы будем рассматривать коммутативные B-алгебры с единицей e, для которых

$$\|e\|=1. \tag{5}$$

Такие алгебры мы будем называть *нормированными кольцами.*

Исторические замечания. Понятие банаховой алгебры ввел в анализ Нагумо [1]. Он показал, что теоремы Коши теории функций комплексной переменной могут быть распространены на функции со значениями из B-алгебры, и применил эту теорию к исследованию резольвенты ограниченного линейного оператора в окрестности изолированной особой точки. В результате оказалось возможным абстрактное изложение этого вопроса, данное нами в гл. VIII, § 8, этой книги. Иосида [11] доказал, что связная группа, вложенная в некоторую B-алгебру, является группой Ли в том и только в том случае, когда она локально бикомпактна. Этот результат обобщает соответствующий результат фон Неймана [6] по теории матричных групп; ср. Хилле — Филлипс [1], где воспроизводится результат Иосида [11].

Начало развитию *теории идеалов* нормированных колец было положено Гельфандом [2]. Он показал, что нормированное кольцо может быть представлено как кольцо непрерывных функций, заданных на пространстве *максимальных идеалов* рассматриваемого кольца. Это представление позволяет изучить спектральное разложение ограниченных нормальных операторов в гильбертовом пространстве, не прибегая к интегрированию (см. Иосида [12]). Результаты, относящиеся к этому вопросу, будут изложены в дальнейших параграфах. *Гельфандовское представление* позволяет также дать новое доказательство тауберовой теоремы Винера [2]. Мы приведем это доказательство в последнем параграфе этой главы. Более подробное изложение теории банаховых алгебр можно найти в работах Наймарка [1], Риккарта [1], Гельфанда — Райкова — Шилова [5].

1. Максимальные идеалы нормированного кольца

Мы будем рассматривать здесь коммутативные B-алгебры B с единицей e, такие, что $\|e\| = 1$.

Определение 1. Подмножество J алгебры B называется ее *идеалом*, если $(\alpha x + \beta y) \in J$ и $zx \in J$ для любых $x, y \in J$ и всякого $z \in B$. Сама алгебра B и множество $\{0\}$ образуют идеалы B. Идеалы, отличные от B и $\{0\}$, называются *нетривиальными*. Нетривиальный идеал J называется *максимальным идеалом*, если он не входит как собственное подмножество ни в какой другой нетривиальный идеал.

Предложение 1. Всякий нетривиальный идеал J_0 алгебры B содержится в некотором максимальном идеале J.

Доказательство. Обозначим через $[J_0]$ совокупность всех нетривиальных идеалов, содержащих J_0. Упорядочим множество $[J_0]$ с помощью отношения включения, полагая $J_1 \prec J_2$, если J_1 является подмножеством в J_2. Допустим, что $\{J_\alpha\}$ — линейно упорядоченное подмножество из $[J_0]$, и положим $J_\beta = \bigcup\limits_{J_\alpha \in \{J_\alpha\}} J_\alpha$. Покажем, что J_β — мажоранта для $\{J_\alpha\}$. Действительно, если $x, y \in J_\beta$, то найдутся идеалы J_{α_1} и J_{α_2}, такие, что $x \in J_{\alpha_1}$, $y \in J_{\alpha_2}$. Множество $\{J_\alpha\}$ линейно упорядочено, поэтому $J_{\alpha_1} \prec J_{\alpha_2}$ либо $J_{\alpha_1} \succ J_{\alpha_2}$, т. е. элементы x и y оба принадлежат J_{α_1} либо J_{α_2}. Поэтому либо $(x-y) \in J_{\alpha_2} \subseteq J_\beta$, либо $(x-y) \in J_{\alpha_1} \subseteq J_\beta$, и аналогично либо $zx \in J_{\alpha_2} \subseteq J_\beta$, либо $zx \in J_{\alpha_1} \subseteq J_\beta$ при всяком $z \in B$. Это показывает, что J_β — идеал. Элемент e не входит ни в один из идеалов J_α, поэтому он не содержится и в $J_\beta = \bigcup\limits_{J_\alpha \in \{J_\alpha\}} J_\alpha$. Следовательно, идеал J_β не тривиален и содержит все идеалы J_α. Отсюда по лемме Цорна мы заключаем, что должен существовать по крайней мере один максимальный идеал, содержащий J_0.

Следствие. Для того чтобы элемент x алгебры B обладал обратным элементом $x^{-1} \in B$ $(x^{-1}x = xx^{-1} = e)$, необходимо и достаточно, чтобы x не содержался ни в каком максимальном идеале.

Доказательство. Если элемент $x^{-1} \in B$ существует, то всякий идеал $J \ni x$ должен содержать элемент $xx^{-1} = e$, и тогда J совпадает с самой алгеброй B. Обратно, если x не содержится ни в каком максимальном идеале, то идеал $xB = \{xb;\ b \in B\} \neq \{0\}$ должен совпадать с B, так как в противном случае нашелся бы по крайней мере один максимальный идеал, содержащий $xB \ni x = xe$. Так как $xB = B$, существует такой элемент $b \in B$, что $xb = e$. Из коммутативности алгебры B следует, что $xb = bx = e$, т. е. $b = x^{-1}$.

Предложение 2. Всякий максимальный идеал J является замкнутым линейным подпространством в B.

Доказательство. Так как алгебраические операции (сложение, умножение и умножение на скаляры) непрерывны в B, сильное замыкание J^a идеала J также представляет собой идеал, содержащий J. Допустим, что $J^a \neq J$. Тогда $J^a = B$, ибо идеал J максимален. Поэтому $e \in J^a$ и, следовательно, найдется такой элемент $x \in J$, что $\| e - x \| < 1$. Этот элемент x имеет обратный x^{-1}, который можно записать в виде ряда Неймана

$$e + (e - x) + (e - x)^2 + \ldots .$$

В самом деле, неравенство $\| (e - x) \|^n \leqslant \| e - x \|^n$ обеспечивает сходимость этого ряда к некоторому элементу из B, и этот элемент является обратным к x, что обнаруживается, если ряд Неймана умножить на $x = e - (e - x)$. Из приведенных рассуждений следует, что $e = x^{-1}x \in J$, т. е. J не может быть максимальным идеалом. Таким образом, $J^a = J$.

Предложение 3. Для элементов идеала J алгебры B определим следующее отношение:

$$\begin{gathered} x \equiv y \,(\operatorname{mod} J), \quad \text{или} \quad x \sim y \,(\operatorname{mod} J), \quad \text{или просто} \quad x \sim y, \\ \text{если } (x - y) \in J. \end{gathered} \tag{1}$$

Это отношение является отношением эквивалентности, т. е.

$$\begin{gathered} x \sim x \quad (\text{рефлексивность}); \\ \text{если} \quad x \sim y, \quad \text{то} \quad y \sim x \quad (\text{симметрия}); \\ \text{если } x \sim y \text{ и } y \sim z, \text{ то } x \sim z \text{ (транзитивность)}. \end{gathered}$$

Обозначим через $\bar{x}$ множество $\{y;\ (y - x) \in J\}$; оно называется *классом эквивалентности* $(\operatorname{mod} J)$, *содержащим* x. Тогда классы $(\overline{x + y})$, $\overline{\alpha x}$ и $(\overline{xy})$ определяются независимо от выбора элементов x и y соответственно из классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Доказательство. Мы должны показать, что если $x \sim x'$, $y \sim y'$, то $(x + y) \sim (x' + y')$, $\alpha x \sim \alpha x'$ и $xy \sim x'y'$. Эти утверждения очевидны, так как J—идеал. Например, если $(x - x') \in J$ и $(y - y') \in J$, то $xy - x'y' = (x - x')\,y + x'(y - y') \in J$.

Следствие. Множество всех классов $\bar{x} \pmod{J}$ с операциями

$$\bar{x}+\bar{y}=(\overline{x+y}), \qquad \alpha\bar{x}=\overline{\alpha x}, \qquad \bar{x}\bar{y}=\overline{xy} \tag{2}$$

образует алгебру.

Определение 2. Построенная выше алгебра называется *алгеброй классов вычетов алгебры B по идеалу J* и обозначается через B/J. Отображение $x \to \bar{x}$ алгебры B на $\bar{B}=B/J$ удовлетворяет условиям (2) и является, таким образом, *гомоморфизмом*.

Предложение 4. Пусть J — максимальный идеал алгебры B. Тогда $\bar{B}=B/J$ является *полем*, т. е. каждый отличный от нуля элемент $\bar{x}\in\bar{B}$ имеет обратный элемент $\bar{x}^{-1}\in\bar{B}$, такой, что $\bar{x}^{-1}\bar{x}=\bar{x}\bar{x}^{-1}=\bar{e}$.

Доказательство. Допустим, что для некоторого элемента $\bar{x}\neq 0$ обратного $\bar{x}^{-1}$ не существует. Тогда множество $\bar{x}\bar{B}=\{\bar{x}\bar{b};\ \bar{b}\in\bar{B}\}$ является идеалом в $\bar{B}$, который нетривиален, так как он не содержит $\bar{e}$, но содержит $\bar{x}\neq 0$. Прообраз идеала при гомоморфизме является идеалом. Отсюда следует, что алгебра B содержит некоторый нетривиальный идеал, в который идеал J входит как собственное подмножество. Это противоречит максимальности идеала J.

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема. Пусть B — нормированное кольцо над полем комплексных чисел, и пусть J — некоторый максимальный идеал в B. Тогда алгебра $\bar{B}=B/J$ изоморфна полю комплексных чисел, т. е. каждый элемент $\bar{x}\in\bar{B}$ единственным образом представляется в виде $\bar{x}=\xi\bar{e}$, где ξ — некоторое комплексное число.

Доказательство. Покажем, что алгебра $\bar{B}=B/J$ с нормой

$$\|\bar{x}\|=\inf_{x\in\bar{x}}\|x\| \tag{3}$$

образует нормированное кольцо. Если мы докажем это, то отсюда будет следовать, что B/J — нормированное поле, и тогда по теореме Гельфанда — Мазура (гл. V, § 3) нормированное поле $\bar{B}=B/J$ изоморфно полю комплексных чисел.

Ясно, что $\|\alpha\bar{x}\|=|\alpha|\cdot\|\bar{x}\|$; кроме того,

$$\|\bar{x}+\bar{y}\|=\inf_{x\in\bar{x},\ y\in\bar{y}}\|x+y\|\leqslant\inf_{x\in\bar{x}}\|x\|+\inf_{y\in\bar{y}}\|y\|=\|\bar{x}\|+\|\bar{y}\|.$$

Неравенство $\|\bar{x}\bar{y}\|\leqslant\|\bar{x}\|\cdot\|\bar{y}\|$ выводится аналогичным способом. Если $\|\bar{x}\|=0$, то найдется такая последовательность $\{x_n\}\subseteq\bar{x}$, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$. Поэтому $(x-x_n)\in J$ для любого $x\in\bar{x}$ и, следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty}(x-x_n)=x$. Это показывает, что $x\in J^a=J$, т. е.

$\bar{x}=\bar{0}$. Значит, равенство $\|\bar{x}\|=0$ эквивалентно равенству $\bar{x}=\bar{0}$. Из определения нормы $\|\bar{x}\|$ видно, что $\|\bar{e}\|\leqslant\|e\|=1$. Если $\|\bar{e}\|<1$, то существует элемент $x\in J$, для которого $\|e-x\|<1$. Как при доказательстве предложения 2, мы убеждаемся в существовании обратного элемента x^{-1}, что противоречит следствию из предложения 1. Таким образом, $\|\bar{e}\|=1$. Наконец, поскольку B — банахово пространство и идеал J, согласно предложению 2, является замкнутым подпространством в B, факторпространство $\bar{B}=B/J$ полно по отношению к норме (3) (гл. I, § 11). Теорема доказана.

Следствие. Обозначим число ξ, фигурирующее в представлении $\bar{x}=\xi\bar{e}$, через $x(J)$. Таким образом, для каждого $x\in B$ мы получаем комплексную функцию $x(J)$, определенную на множестве $\{J\}$ всех максимальных идеалов алгебры B. При этом

$$\begin{gathered}(x+y)(J)=x(J)+y(J),\quad(\alpha x)(J)=\alpha x(J),\\(xy)(J)=x(J)\,y(J)\quad\text{и}\quad e(J)\equiv 1.\end{gathered}\tag{4}$$

Кроме того,

$$\sup_{J\in\{J\}}|x(J)|\leqslant\|x\|,\tag{5}$$

и

$$\begin{gathered}\text{из равенства}\ \sup_{J\in\{J\}}|x(J)|=0\ \text{вытекает равенство}\ x=0\\ \text{тогда и только тогда, когда}\ \bigcap_{J\in\{J\}}J=\{0\}.\end{gathered}\tag{6}$$

Доказательство. Отображение $x\to\bar{x}=x(J)\bar{e}$ алгебры B на алгебру классов вычетов $\bar{B}=B/J$ является гомоморфизмом, т. е. выполняются условие (2), а следовательно, и условие (4). Неравенство (5) выводится следующим образом:

$$|\xi|=|\xi|\cdot\|\bar{e}\|=\|\bar{x}\|=\inf_{x\in\bar{x}}\|x\|\leqslant\|x\|.$$

Свойство (6) очевидно, так как $x(J)=0$ тождественно на $\{J\}$ тогда и только тогда, когда $x\in\bigcap\limits_{J\in\{J\}}J$.

Определение 3. Представление

$$x\to x(J)\tag{7}$$

коммутативного нормированного кольца B с помощью кольца функций $x(J)$, заданных на множестве $\{J\}$ всех максимальных идеалов J алгебры B, называется ***гельфандовским представлением*** кольца B.

2. Радикал кольца. Полупростые кольца

Определение 1. Пусть B — нормированное кольцо над полем комплексных чисел и $\{J\}$ — совокупность всех его максимальных идеалов J. Идеал $R = \bigcap\limits_{J \in \{J\}} J$ называется *радикалом* кольца B. Нормированное кольцо B, радикал которого $R = \bigcap\limits_{J \in \{J\}} J$ совпадает с идеалом $\{0\}$, называется *полупростым*.

Теорема 1. Для всякого элемента $x \in B$ существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n}$, и

$$\lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} = \sup_{J \in \{J\}} |x(J)|. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $\alpha = \sup\limits_{J \in \{J\}} |x(J)|$. Из неравенства $\|x^n\| \geqslant \|x^n(J)\| = |x(J)|^n$ следует, что $\|x^n\| \geqslant \alpha^n$, и поэтому

$$\varliminf_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} \geqslant \alpha.$$

Мы должны показать, что $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} \leqslant \alpha$.

Выберем число β так, что $|\beta| > \alpha$. Тогда $x(J) - \beta \neq 0$ для всякого максимального идеала $J \in \{J\}$, а это означает, что $(x - \beta e) \notin J$. Поэтому существует обратный элемент $(\beta e - x)^{-1}$. Обозначим β^{-1} через λ. Обратный элемент $(\beta e - x)^{-1} = \lambda (e - \lambda x)^{-1}$ существует при любом λ, удовлетворяющем условию $|\lambda| < \alpha^{-1}$. Кроме того, как и в теореме 1 гл. VIII, § 2, мы видим, что функция $\lambda (e - \lambda x)^{-1}$ голоморфна по λ при $|\lambda| < \alpha^{-1}$. Поэтому можно написать для $\lambda (e - x\lambda)^{-1}$ разложение Тейлора

$$\lambda (e - x\lambda)^{-1} = \lambda (e + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots + \lambda^n x_n + \ldots).$$

Ряд Неймана $(e - \lambda x)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \lambda^n x^n$ сходится при $\|\lambda x\| < 1$, следовательно, $x_n = x^n$. В силу сходимости написанного выше ряда Тейлора

$$\lim_{n \to \infty} \|\lambda^n x_n\| = 0 \quad \text{при} \quad |\lambda| < \alpha^{-1}.$$

Таким образом, $\|x^n\| = |\lambda|^{-n} \cdot \|\lambda^n x_n\| < |\lambda|^{-n}$ при достаточно больших n, если $|\lambda| < \alpha^{-1}$, и поэтому

$$\varlimsup_{n \to \infty} \|x^n\|^{1/n} \leqslant |\lambda|^{-1}$$

при всяком λ, удовлетворяющем условию $|\lambda|^{-1} > \alpha$, т. е.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \|x^n\|^{1/n} \leqslant \alpha.$$

Теорема доказана.

Следствие. Радикал $R = \bigcap\limits_{J \in \{J\}} J$ нормированного кольца B совпадает с множеством всех *обобщенных нильпотентных элементов* $x \in B$, которые определяются условием

$$\lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} = 0. \tag{2}$$

Определение 2. *Спектром* элемента $x \in B$ называется совокупность всех комплексных чисел λ, для которых в кольце B не существует обратного элемента $(x - \lambda e)^{-1}$.

Если λ принадлежит спектру элемента x, то существует такой максимальный идеал J, что $(x - \lambda e) \in J$. Обратно, если элемент $(x - \lambda e)$ входит в некоторый максимальный идеал J, то обратного элемента $(x - \lambda e)^{-1}$ не существует. Таким образом, справедлива следующая

Теорема 2. Спектр элемента $x \in B$ совпадает с совокупностью всех значений, принимаемых функцией $x(J)$ на множестве $\{J\}$, состоящем из всех максимальных идеалов J нормированного кольца B.

Введение топологии в пространстве максимальных идеалов. Приложение теоремы Тихонова. Для каждого элемента $J_0 \in \{J\}$ определим фундаментальную систему его окрестностей следующим образом:

$$\{J \in \{J\};\ |x_i(J) - x_i(J_0)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)\}, \tag{3}$$

где $\varepsilon_i > 0$, $n > 0$, $x_i \in B$ выбраны произвольно. Тогда $\{J\}$ становится топологическим пространством, и каждая функция $x(J)$ $(x \in B)$, определенная на $\{J\}$, непрерывна в этой топологии. Мы должны лишь проверить выполнение аксиомы отделимости. Пусть J_0, $J_1 \in \{J\}$ и $J_0 \neq J_1$; покажем, что найдутся окрестность V_0 идеала J_0 и окрестность V_1 идеала J_1, пересечение которых $V_0 \cap V_1$ пусто. Пусть $x_0 \in J_0$, $x_0 \notin I_1$. Тогда $x_0(J_0) = 0$ и $x_0(J_1) = \alpha \neq 0$. Окрестности

$$V_0 = \left\{J \in \{J\};\ |x_0(J)| < \frac{|\alpha|}{2}\right\}, \quad V_1 = \left\{J \in \{J\};\ |x_0(J) - (x_0(J_1)| < \frac{|\alpha|}{2}\right\}$$

не пересекаются.

Теорема 3. Пространство $\{J\}$, топологизированное таким способом, бикомпактно.

Доказательство. Поставим в соответствие каждому элементу $x \in B$ бикомпактное множество точек комплексной плоскости z

$$K_x = \{z;\ |z| \leqslant \|x\|\}.$$

Тогда топологическое произведение

$$S = \prod_{x \in B} K_x,$$

согласно теореме Тихонова, бикомпактно (см. введение). Каждому максимальному идеалу $J_0 \in \{J\}$ сопоставим точку

$$\prod_{x \in B} x(J_0) = s(J_0) \in S.$$

Это соответствие определяет взаимно однозначное отображение $J_0 \to s(J_0)$ пространства $\{J\}$ на некоторое подмножество S_1 пространства S. Топология пространства $\{J\}$ совпадает при этом с относительной топологией S_1 как подмножества пространства S. Следовательно, если мы сумеем доказать, что S_1 является замкнутым подмножеством бикомпактного пространства S, то отсюда будет следовать, что его топологический образ $\{J\}$ бикомпактен.

Для того чтобы доказать замкнутость S_1, рассмотрим произвольную предельную точку $\omega = \prod_{x \in B} \lambda_x \in S$ множества S_1 в пространстве S. Покажем, что отображение $x \to \lambda_x$ представляет собой гомоморфизм алгебры B в поле комплексных чисел (K). Если это будет доказано, то вследствие изоморфности алгебры B/J_0 и поля (K) мы сможем утверждать, что идеал $J_0 = \{x;\ \lambda_x = 0\}$ алгебры B максимален и $(x - \lambda_x e) \in J_0$, т. е. $x(J_0) = \lambda_x$. Отсюда будет следовать, что предельная точка $\omega = \prod_{x \in B} \lambda_x = \prod_{x \in B} x(J_0)$ принадлежит S_1.

Итак, мы должны доказать, что

$$\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y, \quad \lambda_{\alpha x} = \alpha\lambda_x, \quad \lambda_{xy} = \lambda_x\lambda_y, \qquad \lambda_e = 1.$$

Покажем, например, что $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$ (прочие свойства устанавливаются аналогичным способом). Поскольку $\omega = \prod_{x \in B} \lambda_x$ — предельная точка множества S_1, для любого $\varepsilon > 0$ существует такой максимальный идеал J, что

$$|\lambda_x - x(J)| < \varepsilon, \quad |\lambda_y - y(J)| < \varepsilon, \quad |\lambda_{x+y} - (x+y)(J)| < \varepsilon.$$

Но так как $(x+y)(J) = x(J) + y(J)$ и $\varepsilon > 0$ выбрано произвольно, отсюда вытекает, что $\lambda_{x+y} = \lambda_x + \lambda_y$.

Мы можем теперь сформулировать результаты приведенного выше исследования гельфандовского представления $x \to x(J)$ нормированного кольца B в виде следующей теоремы.

Теорема 4. Всякое нормированное кольцо B над полем комплексных чисел гомоморфно отображается на кольцо функций $x(J)$, заданных на бикомпактном пространстве $\{J\}$ максимальных идеалов J кольца B. Радикал R кольца B состоит из тех и только тех элементов, которые при гомоморфизме $x \to x(J)$ переходят в функцию, тождественно равную нулю на $\{J\}$. Гомоморфизм $x \to x(J)$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда кольцо B полупростое.

Приложение теоремы Стоуна — Вейерштрасса

Полученное выше кольцо функций $x(J)$ плотно в пространстве всех непрерывных комплексных функций, заданных на $\{J\}$, в топологии равномерной сходимости, если кольцо B *симметрично* в следующем смысле:

$$\text{для всякого } x \in B \text{ существует элемент } x^* \in B, \\ \text{такой, что } x^*(J) = \overline{x(J)} \text{ на } \{J\}. \tag{4}$$

Примеры гельфандовских представлений

Пример 1. Пусть $B = C(S)$, где S — произвольное бикомпактное топологическое пространство, а J_0 — некоторый максимальный идеал B-алгебры $C(S)$. Тогда найдется такая точка $s_0 \in S$, что $x(s_0) = 0$ для всех $x \in J_0$. Действительно, если допустить противное, то для любой точки $s_\alpha \in S$ найдется элемент $x_\alpha \in J_0$, такой, что $x_\alpha(s_\alpha) \neq 0$. Так как функции $x_\alpha(s)$ непрерывны, существуют окрестности V_α точек s_α, такие, что $x_\alpha(s) \neq 0$ в V_α. Поскольку рассматриваемое пространство S бикомпактно, можно выделить конечную систему окрестностей $V_{\alpha_1}, V_{\alpha_2}, \ldots, V_{\alpha_n}$, покрывающую S: $\bigcup_{j=1}^{n} V_{\alpha_j} = S$. Но тогда функция

$$x(s) = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_{\alpha_i}(s)}\, x_{\alpha_i}(s) \in J_0$$

не обращается в нуль ни в одной точке $s \in S$, и поэтому существует элемент x^{-1}, $x^{-1}(s) = x(s)^{-1}$, обратный элементу $x \in J_0$, что противоречит максимальности идеала J_0. Итак, существует такая точка $s_0 \in S$, что $x(s_0) = 0$ для всех $x \in J$, и поэтому идеал J_0 содержится в максимальном идеале $J' = \{x \in B,\ x(s_0) = 0\}$. Но так как идеал J_0 по предположению максимален, то $J_0 = J'$. Таким образом, между элементами J пространства $\{J\}$ максимальных идеалов нормированного кольца $B = C(S)$ и точками $s \in S$ можно установить взаимно однозначное соответствие.

Пример 2. Пусть B — множество всех функций $x(s)$, заданных на отрезке $0 \leqslant s \leqslant 1$, которые разлагаются в абсолютно сходящиеся ряды Фурье

$$x(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i s n}, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty.$$

Множество B с операциями $(x+y)(s)=x(s)+y(s)$, $xy(s)=x(s)\,y(s)$, $(\alpha x)(s)=\alpha x(s)$ и нормой $\|x\|=\sum\limits_j |c_j|$ образует нормированное кольцо. Пусть J_0—некоторый максимальный идеал кольца B. Положим $e^{2\pi is}=x_1$. Тогда $x_1^{-1}=e^{-2\pi is}$ и $|x_1(J_0)|=1$, так как $|x_1(J_0)|\leqslant\leqslant\|x_1\|=1$ и $|x_1^{-1}(J_0)|=|x_1(J_0)^{-1}|\leqslant\|x_1^{-1}\|=1$. Следовательно, найдется такое значение $s_0\in[0\ 1]$, что $x_1(J_0)=e^{2\pi is_0}$. Таким образом, для элемента $x_n=e^{2\pi isn}=x_1^n$ выполняется условие $x_n(J_0)=e^{2\pi is_0n}$, и поэтому $x(J_0)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{2\pi is_0n}=x(s_0)$. Итак, для всякого максимального идеала J_0 кольца B существует такая точка s_0 $(0\leqslant s_0\leqslant 1)$, что гомоморфизм $x\to x(J_0)$ определяется равенством $x(J_0)=x(s_0)$ для всех $x\in B$. Ясно также, что отображение $x\to x(s_0)$ определяет гомоморфизм алгебры B в поле комплексных чисел. Следовательно, пространство максимальных идеалов кольца B можно отождествить с пространством $\{e^{2\pi is};\ 0\leqslant s\leqslant 1\}$.

Следствие (теорема Винера). Если сумма абсолютно сходящегося ряда Фурье $x(s)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_ne^{2\pi isn}$ не обращается в нуль на отрезке $[0,\ 1]$, то функция $1/x(s)$ тоже разлагается в абсолютно сходящийся ряд Фурье. В самом деле, x не принадлежит никакому максимальному идеалу нормированного кольца, рассмотренного в примере 2.

Пример 3. Положим $B_1=C[0,\ 1]$ и определим для функций $x,\ y\in B_1$ операции и норму следующим образом:

$$(x+y)(s)=x(s)+y(s),\quad (\alpha x)(s)=\alpha x(s),$$

$$(xy)(s)=\int\limits_0^s x(s-t)\,y(t)\,dt,\quad \|x\|=\sup_{s\in[0,\ 1]}|x(s)|.$$

Тогда B_1 образует коммутативную B-алгебру без единицы. Присоединим к ней формально единицу e как символ, определенный правилами $ex=xe=x$, $\|e\|=1$, и положим $B=\{z=\lambda e+x;\ x\in B_1\}$. Множество B с операциями

$$(\lambda_1e+x_1)+(\lambda_2e+x_2)=(\lambda_1+\lambda_2)\,e+(x_1+x_2),$$

$$\alpha(\lambda e+x)=\alpha\lambda e+\alpha x,$$

$$(\lambda_1e+x_1)(\lambda_2e+x_2)=\lambda_1\lambda_2e+\lambda_1x_2+\lambda_2x_1+x_1x_2$$

и нормой

$$\|\lambda e+x\|=|\lambda|+\|x\|$$

представляет собой нормированное кольцо. Возьмем произвольный элемент $x\in B_1$ и положим $M=\sup\limits_{s\in S}|x(s)|=\|x\|$. По индукции получаем [1])

$$|x^2(s)| \leqslant M^2 s, \quad |x^3(s)| \leqslant M^3 \frac{s^2}{2}, \ \ldots, \ |x^n(s)| \leqslant M^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!}, \ \ldots .$$

Таким образом, всякий элемент $x \in B_1$ является обобщенным нильпотентным элементом кольца B, поскольку $\lim_{n \to \infty} (n!)^{1/n} = \infty$.

3. Спектральное разложение ограниченных нормальных операторов

Пусть X — гильбертово пространство, и пусть система M ограниченных нормальных операторов, принадлежащих $L(X, X)$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\text{если } T, S \in M, \quad \text{то} \quad TS = ST \text{ (перестановочность);} \tag{1}$$

$$\text{если } T \in M, \quad \text{то} \quad T^* \in M. \tag{2}$$

Например, система M, состоящая из некоторого ограниченного нормального оператора $T \in L(X, X)$ и сопряженного ему оператора T^*, очевидно, удовлетворяет условиям (1) и (2).

Пусть M' — совокупность всех операторов из $L(X, X)$, коммутирующих с каждым из операторов $T \in M$, и пусть $B = M'' = (M')'$ — множество всех операторов из $L(X, X)$, коммутирующих со всяким оператором $S \in M'$.

Предложение 1. Всякий элемент семейства B является нормальным оператором. Множество B с операциями сложения операторов, умножения операторов и умножения операторов на числа, операторной нормой $\|T\|$ и единицей I (I — тождественный оператор) представляет собой нормированное кольцо над полем комплексных чисел.

Доказательство. Из условия (1) видно, что $M \subseteq M'$, поэтому $M' \supseteq M''$. Следовательно, $M''' = (M'')' \supseteq M''$, и, таким образом, $B = M''$ — коммутативная алгебра. Тождественный оператор I принадлежит B и служит единицей алгебры B. Из условия (2) вытекает, что всякий оператор, принадлежащий B, должен быть нормальным. Поскольку произведение операторов TS и операция $T \to T^*$ перехода к сопряженному оператору непрерывны по отношению к норме операторов, нормированное кольцо B полно по операторной норме.

Теорема 1. Гельфандовское представление

$$B \ni T \to T(J) \tag{3}$$

устанавливает изоморфизм нормированного кольца B и алгебры $C(\{J\})$ всех непрерывных комплексных функций $T(J)$, определенных на

[1]) Степени $x^k(s)$ понимаются здесь в смысле определенного выше умножения. — *Прим. перев.*

бикомпактном пространстве $\{J\}$ всех максимальных идеалов J алгебры B, причем

$$\|T\| = \sup_{J \in \{J\}} |T(J)|; \tag{4}$$

значения $T(J)$ вещественны при всех $J \in \{J\}$ тогда и только тогда, когда оператор T самосопряженный; (5)

$T(J) \geqslant 0$ при всех $J \in \{J\}$ тогда и только тогда, когда оператор T самосопряженный и *положительный*, т. е. $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$. (6)

Доказательство. Покажем сначала, что для всякого нормального ограниченного оператора T выполняется равенство

$$\|T^2\| = \|T\|^2. \tag{7}$$

Если оператор T нормален, то оператор $H = TT^* = T^*T$ является самосопряженным. Поэтому, согласно теореме 3 гл. VII, § 3,

$$\|T\|^2 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Tx, Tx) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(T^*Tx, x)| = \|H\| = \|T^*T\| = \|TT^*\|.$$

Поскольку $(T^*)^2 = (T^2)^*$, оператор T^2 является нормальным, как и T. Таким образом, $\|T^2\|^2 = \|T^{*2}T^2\|$, что ввиду перестановочности $TT^* = T^*T$ равно $\|(T^*T)^2\| = \|H^2\|$. Поскольку H^2 — самосопряженный оператор, можно опять применить теорему 3 гл. VII, § 3:

$$\|H^2\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, Hx) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} |(H^2x, x)| = \|H^2\|.$$

Следовательно, $\|T^2\|^2 = \|H^2\| = \|H\|^2 = (\|T\|^2)^2$, т. е. $\|T^2\| = \|T\|^2$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$, как мы знаем ((3), § 2, гл. VIII), существует; поэтому из (7) видно, что $\|T\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$. Применяя теперь теоремы 1 и 4 предыдущего параграфа, мы убеждаемся в том, что отображение (3) является изоморфизмом и выполняется условие (4).

Доказательство свойства (5). Пусть самосопряженный оператор $T \in B$ при некотором $J_0 \in \{J\}$ удовлетворяет условию $T(J_0) = a + ib$, где $b \neq 0$. Тогда самосопряженный оператор $S = (T - aI)/b \in B$ удовлетворяет уравнению $(I + S^2)(J_0) = 1 + i^2 = 0$, и поэтому оператор $(I + S^2)$ не имеет в B обратного элемента. Но по теореме 2, гл. VII, § 3, оператор $(I + S^2)$ должен иметь обратный оператор, непременно принадлежащий B. Полученное противоречие говорит о том, что для самосопряженного оператора $T \in B$ функция $T(J)$ должна быть вещественной. Допустим теперь, что некоторый оператор $T \in B$ не является самосопряженным. Представим T в виде

$$T = \frac{T + T^*}{2} + i\,\frac{T - T^*}{2i}.$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой самосопряженный оператор, поэтому $(T - T^*)/2i$ — тоже самосопряженный оператор, отличный от нуля. Поскольку отображение (3) определяет изоморфизм, найдется такой максимальный идеал $J_0 \in \{J\}$, что $\frac{T - T^*}{2i}(J_0) \neq 0$. Следовательно, значение $T(J_0) = \frac{T + T^*}{2}(J_0) + i\frac{T - T^*}{2i}(J_0)$ не вещественно.

Доказательство свойства (6). Покажем сначала, что

$$T^*(J) = \overline{T(J)} \text{ при всех } J \in \{J\}. \tag{8}$$

Это ясно, так как самосопряженным операторам $(T + T^*)/2$ и $(T - T^*)/2i$ соответствуют вещественные функции. Отсюда и из условия (4), согласно результатам предыдущего параграфа, следует, что нормированное кольцо B может быть представлено как кольцо всех непрерывных комплексных функций на $\{J\}$, удовлетворяющих условиям (5) и (8). Допустим, что $T(J) \geqslant 0$ при всех $J \in \{J\}$. Тогда функция $S(J) = T(J)^{1/2}$ непрерывна на $\{J\}$. Поэтому, так как представление (3) дает изоморфизм, $S^2 = T$. Согласно (5), мы имеем $S = S^*$. Значит, $(Tx, x) = (S^2x, x) = (Sx, Sx) \geqslant 0$. Для того чтобы доказать теперь, что условие $(Tx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$ влечет за собой неравенство $T(J) \geqslant 0$, $J \in \{J\}$, положим $T_1(J) = \max(T(J), 0)$ и $T_2(J) = T_1(J) - T(J)$. Тогда по доказанному выше операторы T_1 и T_2 оба принадлежат B и являются самосопряженными и положительными: $(T_jx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in X$ $(j = 1, 2)$. Кроме того, $T_2 = T_1 - T$ и $T_1T_2 = 0$, так как $T_1(J)T_2(J) = 0$.

Итак, мы имеем

$$0 \leqslant (TT_2x, T_2x) = (-T_2^2x, T_2x) = -(T_2^3x, x) = -(T_2T_2x, T_2x) \leqslant 0.$$

Значит, $(T_2^3x, x) = 0$, и по теореме 3 гл. VII, § 3, должно быть $T_2^3 = 0$, а так как $\|T_2\| = \lim_{n\to\infty} \|T_2^n\|^{1/n}$, отсюда следует, что $T_2 = 0$. Таким образом, мы показали, что $T = T_1$ и $T(J) \geqslant 0$ при всех $J \in \{J\}$.

Условимся в дальнейшем писать $T \geqslant 0$, если T — самосопряженный положительный оператор. Будем также писать $S \geqslant T$, если $(S - T) \geqslant 0$.

Теорема 2. Пусть $\{T_n\} \in B$ — последовательность самосопряженных операторов, такая, что

$$0 \leqslant T_1 \leqslant T_2 \leqslant \ldots \leqslant T_n \leqslant \ldots \leqslant S \in B. \tag{9}$$

Тогда при любом $x \in X$ существует предел $s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_nx = Tx$, т. е. существует предел $T = s\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n$, и, кроме того, $T \in B$, $S \geqslant T \geqslant T_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Доказательство. Заметим прежде всего, что, согласно (6),

$$\text{если } E,\ F \in B \text{ и } E \geqslant 0,\ F \geqslant 0, \text{ то } E + F \geqslant 0 \text{ и } EF \geqslant 0. \tag{10}$$

Поэтому $0 \leqslant T_1^2 \leqslant T_2^2 \leqslant \ldots \leqslant T_n^2 \leqslant \ldots \leqslant S^2$. Следовательно, при любом $x \in X$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} (T_n^2 x, x)$. Кроме того,

$$\lim_{n,\, k\to\infty} (T_{n+k}^2 x, x) = \lim_{n,\, k\to\infty} (T_{n+k} T_n x, x) = \lim_{n\to\infty} (T_n^2 x, x),$$

так как в силу (6) справедливо неравенство $T_{n+k}^2 \geqslant T_{n+k}T_n \geqslant T_n^2$. Таким образом, $\lim\limits_{n,\, m\to\infty} ((T_n - T_m)^2 x, x) = \lim\limits_{n,\, m\to\infty} \| T_n x - T_m x \|^2 = 0$, и предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n x = Tx$ действительно существует. Из доказательства видно, что $T \in B$ и $S \geqslant T \geqslant T_n$.

Теорема 3. Пусть некоторая последовательность вещественных функций $\{T_n(J)\}$, где $T_n \in B$, удовлетворяет условию

$$0 \leqslant T_1(J) \leqslant T_2(J) \leqslant \ldots \leqslant T_n(J) \leqslant \ldots \leqslant a \text{ при } J \in \{J\}, \tag{11}$$

где a — конечная постоянная. Тогда из теоремы 2 и условия (6) следует существование предела $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n = T$. В этом случае

$$D = \{J \in \{J\};\ T(J) \neq \lim_{n\to\infty} T_n(J)\}$$

есть множество первой категории и множество $D^C = \{J\} - D$ плотно в $\{J\}$.

Доказательство. Согласно теореме 2, $T \geqslant T_n$, и поэтому $T(J) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ при $J \in \{J\}$. По теореме Бэра (§ 2 введения) точки разрыва предельной функции $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ образуют множество первой категории. Поэтому если допустить, что D не является множеством первой категории, то найдется по крайней мере одна точка $J_0 \in D$, в которой предел $\lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ непрерывен. Иными словами, существуют положительное число δ и открытое множество $V(J_0) \ni J_0$, принадлежащее $\{J\}$, такие, что

$$T(J) \geqslant \delta + \lim_{n\to\infty} T_n(J) \text{ при всех } J \in V(J_0).$$

Поскольку бикомпактное пространство $\{J\}$ нормально и $T(J) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ при $J \in \{J\}$, мы можем, согласно теореме Урысона, построить открытое множество $V_1(J_0) \ni J_0$ и функцию $W(J) \in C(\{J\})$, такие, что $0 \leqslant W(J) \leqslant \delta$ при всех $J \in \{J\}$, $V_1(J_0)^a \subseteq V(J_0)$, $W(J) = \delta/2$ в области $V_1(J_0)$ и $W(J) = 0$ на множестве $V(J_0)^C$. Следовательно, $T(J) - W(J) \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} T_n(J)$ при всех $J \in \{J\}$, и, согласно (6),

$T - W \geqslant T_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Так как $W(J) \not\equiv 0$, то вследствие изоморфизма (3) $W \neq 0$. Так как $W \geqslant 0$, то, используя (6) еще раз, мы получаем, что $T - W \geqslant s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$, а это противоречит соотношению $T = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n$.

Наконец, поскольку пространство $\{J\}$ бикомпактно, дополнение $D^C = \{J\} - D$ множества первой категории D должно быть плотным в $\{J\}$.

Перейдем теперь к изложению результатов Иосида [12].

Спектральное разложение (спектральное представление) операторов нормированного кольца B

Рассмотрим множество $C'(\{J\})$ всех комплексных ограниченных функций $T'(J)$ на $\{J\}$, таких, что каждая из функций $T'(J)$ отличается от некоторой непрерывной функции $T(J)$ только на множестве первой категории. Условимся отождествлять функции множества $C'(\{J\})$, отличающиеся друг от друга на множестве первой категории. Тогда семейство $C'(\{J\})$ разбивается на соответствующие классы функций. Ввиду того что дополнение всякого множества первой категории плотно в бикомпактном пространстве $\{J\}$, каждый класс T' содержит в точности одну непрерывную функцию $T(J)$, соответствующую вследствие изоморфизма $B \longleftrightarrow C(\{J\})$ некоторому элементу $T \in B$.

Для произвольного оператора $T \in B$ и всякого комплексного числа $z = \lambda + i\mu$ обозначим через E_z элемент из B, который соответствует классу E'_z, содержащему характеристическую функцию $E'(J)$ множества $\{J \in \{J\};\ \operatorname{Re} T(J) < \lambda,\ \operatorname{Im} T(J) < \mu\}$. Ясно, что для всякого $T \in B$ найдется такая последовательность непрерывных функций f_n комплексной переменной, что $E'_z(J) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(T(J))$, и поэтому $E'_z(J) \in C'(\{J\})$. Тогда если

$$\lambda_1 = -\alpha - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n = \alpha = \sup_{J\in\{J\}} |\operatorname{Re} T(J)|,$$

$$\mu_1 = -\beta - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leqslant \mu_2 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n = \beta = \sup_{J\in\{J\}} |\operatorname{Im} T(J)|,$$

$$\left(\sup_j (\lambda_j - \lambda_{j-1})^2 + \sup_i (\mu_i - \mu_{i-1})^2\right)^{1/2} \leqslant \varepsilon \quad (\varepsilon > 0 \text{ произвольно}),$$

то

$$\Bigl| T(J) - \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + i\mu_j)\bigl(E'_{\lambda_j + i\mu_j}(J) + E'_{\lambda_{j-1} + i\mu_{j-1}}(J) - {}$$

$$- E'_{\lambda_{j-1} + i\mu_j}(J) - E'_{\lambda_j + i\mu_{j-1}}(J)\bigr)\Bigr| \leqslant \varepsilon \qquad \text{при всех } J \in \{J\}.$$

Отсюда, согласно определению $E'_z(J)$, мы получаем

$$\Big| T(J) - \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + i\mu_j)\big(E_{\lambda_j+i\mu_j}(J) + E_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}}(J) - E_{\lambda_{j-1}+i\mu_j}(J) - E_{\lambda_j+i\mu_{j-1}}(J)\big)\Big| \leqslant \varepsilon \quad \text{при} \quad J \in \{J\},$$

так как дополнение множества первой категории плотно в бикомпактном пространстве $\{J\}$. Поэтому вследствие (4)

$$\Big\| T - \sum_{j=2}^{n} (\lambda_j + i\mu_j)\big(E_{\lambda_j+i\mu_j} + E_{\lambda_{j-1}+i\mu_{j-1}} - E_{\lambda_{j-1}+i\mu_j} - E_{\lambda_j+i\mu_{j-1}}\big)\Big\| \leqslant \varepsilon.$$

Полученный результат запишем в следующей форме:

$$T = \int\int z\, dE_z. \tag{12}$$

Выражение (12) мы назовем *спектральным разложением* нормального оператора T.

4. Спектральное разложение унитарного оператора

Если унитарный оператор T принадлежит нормированному кольцу B, то, поскольку

$$T(J)\,T^*(J) = T(J)\,\overline{T(J)} = 1, \tag{1}$$

значения, принимаемые функцией $T(J)$ на $\{J\}$, — это комплексные числа, по модулю равные единице. Благодаря этому можно упростить спектральное разложение $\int\int z\, dE_z$ унитарного оператора T.

Характеристическая функция $E'_\theta(J)$ множества $\{J \in \{J\};\ \arg(T(J)) \in (0, \theta)\}$ $(0 < \theta < 2\pi)$ принадлежит $C'(\{J\})$. Полагая $E'_0(J) = 0$ и $E'_{2\pi}(J) = I$, мы получаем

$$\Big| T(J) - \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\big(E'_{\theta_j}(J) - E'_{\theta_{j-1}}(J)\big)\Big| \leqslant \max_j |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_{j-1}}|$$
$$(0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_n = 2\pi).$$

Пусть $E_\theta(J)$ — непрерывная функция, определенная на $\{J\}$ и отличающаяся от $E'_\theta(J)$ лишь на множестве первой категории. Обозначим через E_θ оператор из кольца B, соответствующий $E_\theta(J)$ при изоморфизме $B \ni T \longleftrightarrow T(J)$. Тогда, как и в предыдущем параграфе, мы получим

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} e^{i\theta_j}\left(E_{\theta_j} - E_{\theta_{j-1}}\right)\right\| \leqslant \max_j \left| e^{i\theta_j} - e^{i\theta_{j-1}} \right|.$$

Учитывая, что $e^{2\pi i} = 1$, мы можем записать полученный результат в виде

$$T = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF(\theta), \tag{2}$$

где $F(\theta) = E_{\theta+0} - E_{+0}$ при $0 < \theta < 2\pi$, $F(0) = 0$, $F(2\pi) = I$.

Через $E_{\theta+0}$ здесь обозначен оператор, который определяется условием $E_{\theta+0}x = s\text{-}\lim\limits_{\theta' \downarrow \theta} E_{\theta'}x$ (существование этого предела будет доказано ниже).

Теорема 1. Система операторов $F(\theta)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ удовлетворяет следующим условиям:

каждый из операторов $F(\theta)$ — проекционный оператор, перестановочный со всяким ограниченным линейным оператором, коммутирующим с оператором T; (3)

$$F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta, \theta')); \tag{4}$$

$$F(0) = 0, \quad F(2\pi) = I; \tag{5}$$

$F(\theta + 0) = F(\theta)$ при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$ в том смысле, что $s\text{-}\lim\limits_{\theta' \downarrow \theta} F(\theta')x = F(\theta)x$ для всех $x \in X$. (6)

Доказательство. Достаточно доказать, что операторы E_θ $(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$ удовлетворяют следующим условиям:

каждый оператор E_θ является проекционным оператором и принадлежит B; (3′)

$$E_\theta E_{\theta'} = E_{\min(\theta, \theta')}; \tag{4′}$$

$$E_0 = 0, \qquad E_{2\pi} = I; \tag{5′}$$

$$E_\theta x = s\text{-}\lim_{\theta' \downarrow \theta} E_{\theta'}x \text{ при всех } x \in X \text{ и } 0 \leqslant \theta < 2\pi. \tag{6′}$$

Из определений следует, что $E'_\theta(J) = \overline{E'_\theta(J)}$ и $E'_\theta(J)^2 = E'_\theta(J)$. Поэтому, применяя результаты предыдущего параграфа, мы видим, что $E_\theta = E_\theta^*$ и $E_\theta^2 = E_\theta$; этим доказывается (3′). Свойство (4′) выводится на основании тех же соображений из равенства $E'_\theta(J)E'_{\theta'}(J) = E'_{\min(\theta, \theta')}(J)$; аналогично доказываются и условия (5′). Пусть теперь $\theta_n \downarrow \theta$. Тогда $E'_{\theta_n}(J) \geqslant E'_{\theta_{n+1}}(J) \geqslant E'_\theta(J)$, и поэтому, как было установлено в предыдущем параграфе, предел $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} E_{\theta_n} = E$ существует и $E(J) = E'_\theta(J) = \lim\limits_{\theta_n \downarrow \theta} E'_{\theta_n}(J)$ всюду на $\{J\}$, за исключением, быть может, некоторого множества первой категории. Поэтому $E = E_\theta$.

Пример 1. Рассмотрим линейный оператор T, определяемый условием

$$Ty(s) = e^{i\theta} y(s), \text{ где } y(s) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Оператор T унитарен. Определим операторы $F(\theta)\,(0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$: если $2\pi n < s \leqslant 2\pi(n+1)$ $(n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots,)$, то положим

$$F(\theta)\,y(s) = y(s) \text{ при } s \leqslant \theta + 2\pi n \leqslant 2\pi(n+1),$$

$$F(\theta)\,y(s) = 0 \qquad \text{при } \theta + 2\pi n < s.$$

Легко видеть, что

$$T = \int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF(\theta).$$

Пример 2. Пусть линейный оператор T_1 определяется равенством

$$T_1 x(t) = x(t+1), \qquad x(t) \in L^2(-\infty, \infty).$$

Ясно, что оператор T_1 унитарный. Преобразование Фурье

$$y(s) = Ux(t) = \underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\ (2\pi)^{-1/2} \int_{-n}^{n} e^{-ist} x(t)\, dt$$

определяет оператор U, такой, что $Ux(t+1) = e^{is}Ux(t) = e^{is}y(s)$. Поэтому

$$T_1 x(t) = x(t+1) = U^{-1} e^{is} y(s) = U^{-1} T y(s) = U^{-1} T U x(t),$$

т. е. $T_1 = U^{-1} T U$ (T — оператор из предыдущего примера). Таким образом,

$$T_1 = \int_0^{2\pi} e^{\theta i}\, dF_1(\theta), \text{ где } F_1(\theta) = U^{-1} F(\theta)\, U.$$

Единственность спектрального разложения. Поскольку $T^{-1} = T^*$ и $T^{-1}(J) = T^*(J) = T(J)^{-1}$, нетрудно установить, что

$$T^{-1} = \int_0^{2\pi} e^{-i\theta}\, dF(\theta). \tag{7}$$

Пусть $\max\limits_j |e^{i\theta_j} - e^{i\theta_{j-1}}| < \varepsilon$. Тогда из соотношения

$$T = \sum_j e^{i\theta_j} (F(\theta_j) - F(\theta_{j-1})) + \delta, \qquad \|\delta\| < \varepsilon,$$

мы получаем, используя свойство (4), равенство

$$T^2 = \sum_j e^{2i\theta_j} (F(\theta_j) - F(\theta_{j-1})) + \delta',$$

где

$$\|\delta'\| \leqslant \|(T - \delta)\delta\| + \|\delta(T - \delta)\| + \|\delta^2\| \leqslant$$
$$\leqslant (\|T\| + \varepsilon)\varepsilon + \varepsilon(\|T\| + \varepsilon) + \varepsilon^2.$$

Отсюда

$$T^2 = \int_0^{2\pi} e^{2i\theta}\, dF(\theta),$$

и вообще

$$T^n = \int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, dF(\theta) \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{8}$$

Если теперь допустить, что имеется другое спектральное разложение $T = \int\limits_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF_1(\theta)$, удовлетворяющее условиям (3) — (6), то для всякой функции $p(\theta)$, представляющей собой полином относительно $e^{i\theta}$ и $e^{-i\theta}$,

$$\int_0^{2\pi} p(\theta)\, d((F(\theta)x, y) - (F_1(\theta)x, y)) = 0 \qquad (x, y \in X).$$

Это равенство по непрерывности справедливо и для всякой непрерывной функции $p(\theta)$, такой, что $p(0) = p(2\pi)$. Выберем некоторые значения θ_0 и θ_1, $0 < \theta_0 < \theta_1 < 2\pi$, и определим для достаточно больших целых $n > 0$ непрерывные функции $p_n(\theta)$ следующего вида:

$$p_n(\theta) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 \ \text{и}\ \theta_1 + \frac{1}{n} \leqslant \theta < 2\pi,$$

$$p_n(\theta) = 1 \quad \text{при} \quad \theta_0 + \frac{1}{n} \leqslant \theta \leqslant \theta_1,$$

$$p_n(\theta) \text{ — линейные функции при } \theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + \frac{1}{n}$$
$$\text{и } \theta_1 \leqslant \theta \leqslant \theta_1 + \frac{1}{n}.$$

Тогда, учитывая условие (6), мы при $n \to \infty$ получим равенство

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} p_n(\theta)\, d\,[(F(\theta)x,\ y) - (F_1(\theta)x,\ y)] =$$
$$= \left[(F(\theta)x,\ y) - (F_1(\theta)x,\ y)\right]_{\theta_0}^{\theta_1} = 0,$$

справедливое для всех $x,\ y \in X$. Следовательно, полагая $\theta_0 \downarrow 0$ и используя условия (5) и (6), мы получаем, что $F(\theta_1) = F_1(\theta)$. Это и показывает, что спектральное разложение унитарного оператора определяется единственным образом.

5. Разложение единицы

Определение 1. Семейство проекционных операторов $\{E(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$, определенных в гильбертовом пространстве X, называется *разложением единицы*, если оно удовлетворяет следующим условиям:

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda,\ \mu)), \tag{1}$$

$$E(-\infty) = 0,\quad E(+\infty) = I,\ \text{где}\ E(-\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda\downarrow-\infty} E(\lambda)x$$
$$\text{и}\ E(+\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda\uparrow\infty} E(\lambda)x, \tag{2}$$

$$E(\lambda+0) = E(\lambda),\qquad \text{где}\ E(\lambda+0)x = s\text{-}\lim_{\mu\downarrow\lambda} E(\mu)x. \tag{3}$$

Предложение 1. При любых $x,\ y \in X$ функция $(E(\lambda)x,\ y)$ представляет собой функцию от λ ограниченной вариации.

Доказательство. Пусть $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n$. Из условия (1) следует, что $E(\alpha,\ \beta] \equiv E(\beta) - E(\alpha)$ — проекционный оператор. Учитывая это соображение, мы с помощью неравенства Шварца получаем

$$\sum_j |(E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x,\ y)| = \sum_j |(E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x,\ E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x\| \cdot \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y\| \leqslant$$
$$\leqslant \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]x\|^2\Big)^{1/2} \cdot \Big(\sum_j \|E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j]y\|^2\Big)^{1/2} =$$
$$= (\|E(\lambda_1,\ \lambda_n]x\|^2)^{1/2} \cdot (\|E(\lambda_1,\ \lambda_n]y\|^2)^{1/2} \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

В самом деле, согласно свойству *ортогональности*

$$E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j] \cdot E(\lambda_{j-1},\ \lambda_j] = 0 \qquad (i \neq j), \tag{4}$$

вытекающему из условия (1), имеем

$$\| x \|^2 \geqslant \| E(\lambda_n, \ \lambda_m] x \|^2 = \sum_{l=n}^{m-1} \| E(\lambda_l, \ \lambda_{l+1}] x \|^2 \qquad (5)$$

при $m > n$.

Следствие. При всяком λ, $-\infty < \lambda < \infty$, существуют операторы $E(\lambda + 0) = s\text{-}\lim\limits_{\lambda' \downarrow \lambda} E(\lambda')$ и $E(\lambda - 0) = s\text{-}\lim\limits_{\lambda' \uparrow \lambda} E(\lambda')$.

Доказательство. Из неравенства (5) видно, что если $\lambda_n \uparrow \lambda$, то

$$\lim_{j, \, k \to \infty} \| E(\lambda_j, \ \lambda_k] x \|^2 = 0,$$

и аналогичное соотношение справедливо при $\lambda_n \downarrow \lambda$.

Предложение 2. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная комплексная функция, определенная при $\lambda \in (-\infty, \infty)$, и пусть $x \in X$. Тогда при $-\infty < \alpha < \beta < \infty$ можно определить интеграл

$$\int_\alpha^\beta f(\lambda) \, dE(\lambda) \, x$$

как s-lim римановых сумм

$$\sum_j f(\lambda'_j) E(\lambda_j, \ \lambda_{j+1}] x, \quad \text{где} \quad \alpha = \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = \beta,$$
$$\lambda'_j \in (\lambda_j, \ \lambda_{j+1}],$$

когда $\max\limits_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j|$ стремится к нулю.

Доказательство. Функция $f(\lambda)$ равномерно непрерывна на бикомпактном интервале $[\alpha, \beta]$. Пусть $|f(\lambda) - f(\lambda')| \leqslant \varepsilon$ при $|\lambda - \lambda'| \leqslant \delta$ для всех $\lambda, \lambda' \in [\alpha, \beta]$. Рассмотрим два различных разбиения сегмента $[\alpha, \beta]$:

$$\alpha = \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = \beta, \qquad \max_j |\lambda_{j+1} - \lambda_j| \leqslant \delta,$$
$$\alpha = \mu_1 < \ldots < \mu_m = \beta, \qquad \max_j |\mu_{j+1} - \mu_j| \leqslant \delta,$$

и построим суперпозицию

$$\alpha = \nu_1 < \ldots < \nu_p = \beta, \qquad p \leqslant m + n,$$

этих разбиений. Тогда если $\mu'_k \in (\mu_k, \ \mu_{k+1}]$, то

$$\sum_j f(\lambda'_j) E(\lambda_j, \ \lambda_{j+1}] x - \sum_k f(\mu'_k)(\mu_k, \ \mu_{k+1}] x =$$
$$= \sum_s \varepsilon_s E(\nu_s, \ \nu_{s+1}] x, \qquad \text{где } |\varepsilon_s| \leqslant 2\varepsilon.$$

Следовательно, как и при выводе неравенства (5), квадрат нормы левой части не превосходит величины

$$\varepsilon^2 \Big\| \sum_s E(\nu_s, \nu_{s+1}]\, x \Big\|^2 = \varepsilon^2 \| E(\alpha, \beta]\, x \|^2 \leqslant \varepsilon^2 \| x \|^2,$$

откуда и вытекает справедливость предложения 2.

Следствие. Можно определить интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$ как предел $\underset{\alpha \downarrow -\infty,\ \beta \uparrow \infty}{s\text{-}\lim} \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$, если последний существует.

Теорема 1. Для заданного $x \in X$ следующие три условия эквивалентны[1]):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \text{ существует;} \tag{6}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} | f(\lambda) |^2 \, d \| E(\lambda)\, x \|^2 < \infty; \tag{7}$$

формула $F(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)\, y,\ x)$ определяет ограниченный линейный функционал. (8)

Доказательство. Мы докажем импликации (6)$\to$(8)$\to$(7)$\to$(6).

(6)$\to$(8). Аппроксимируем интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x$ суммой Римана; скалярное произведение элемента y на эту сумму определяет ограниченный линейный функционал от y. Отсюда на основании теоремы о резонансе и равенства $(y,\ E(\lambda)\, x) = (E(\lambda)\, y,\ x)$ мы получаем (8).

(8)$\to$(7). Применим оператор $E(\alpha, \beta]$ к римановой сумме, аппроксимирующей интеграл $y = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)\, x$. Используя свойство (1), мы находим, что $y = E(\alpha, \beta]\, y$. Применяя (1) еще раз, получаем

$$\overline{F(y)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)\, x,\ y) = \lim_{\alpha' \downarrow -\infty,\ \beta' \uparrow \infty} \int\limits_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)\, x,\ y) =$$

[1]) Интеграл (6) определен в предложении 2. Интегралы (7) и (8) в случае непрерывной функции $f(\lambda)$ строятся аналогично. — *Прим. перев.*

$$= \lim_{\alpha' \downarrow -\infty,\ \beta' \uparrow \infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)x,\ E(\alpha,\ \beta]\,y) =$$

$$= \lim_{\alpha' \downarrow -\infty,\ \beta' \uparrow \infty} \int_{\alpha'}^{\beta'} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\alpha,\ \beta]\,E(\lambda)x,\ y) =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)x,\ y) = \|y\|^2.$$

Следовательно, $\|y\|^2 \leqslant \|F\| \cdot \|y\|$, т. е. $\|y\| \leqslant \|F\|$. С другой стороны, аппроксимируя римановыми суммами интеграл

$$y = \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)\, x,$$

мы получаем, согласно (1), равенство

$$\|y\|^2 = \left\| \int_{\alpha}^{\beta} \overline{f(\lambda)}\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 = \int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2,$$

откуда $\int_{\alpha}^{\beta} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 \leqslant \|F\|^2$. Полагая $\alpha \downarrow -\infty$ и $\beta \uparrow \infty$, мы приходим к неравенству (7).

(7) $\to$ (6). При $\alpha' < \alpha < \beta < \beta'$ мы, как и выше, получаем

$$\left\| \int_{\alpha'}^{\beta'} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x - \int_{\alpha}^{\beta} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, x \right\|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{\alpha'}^{\alpha} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 + \int_{\beta}^{\beta'} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2.$$

Таким образом, (6) следует из (7).

Теорема 2. Пусть $f(\lambda)$ — непрерывная вещественная функция. Тогда равенство

$$(Hx,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x,\ y), \tag{9}$$

$$\text{где } x \in D = \left\{ x;\ \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty \right\}$$

и $y \in X$ — произвольный элемент,

определяет самосопряженный оператор H с областью определения $D(H)=D$ и $HE(\lambda)\supseteq E(\lambda)H$, т. е. оператор $HE(\lambda)$ служит расширением оператора $E(\lambda)H$.

Доказательство. Для любого $y\in X$ и произвольного $\varepsilon>0$ найдутся такие значения α и β $(-\infty<\alpha<\beta<\infty)$, что $\|y-E(\alpha,\beta]y\|<\varepsilon$. Кроме того,

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(\alpha,\beta]y\|^2=\int_{\alpha}^{\beta}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2.$$

Следовательно, $E(\alpha,\beta]y\in D$ и, согласно (2), $D^a=X$. Оператор H симметрический, поскольку

$$f(\lambda)=\overline{f(\lambda)} \quad \text{и} \quad (E(\lambda)x,\ y)=\overline{(E(\lambda)y,\ x)}.$$

Если $y\in D(H^*)$, то ввиду соотношения (1) и включения $E(\alpha,\beta]z\in D$ при всяком $z\in X$ имеем

$$(z,\ E(\alpha,\beta]y^*)=(E(\alpha,\beta]z,\ H^*y)=$$
$$=(HE(\alpha,\beta]z,\ y)=\int_{\alpha}^{\beta}f(\lambda)\,d(E(\lambda)z,\ y),$$

где $y^*=H^*y$. Отсюда по теореме о резонансе выражение

$$\lim_{\alpha\downarrow-\infty,\ \beta\uparrow\infty}(z,\ E(\alpha,\beta]y^*)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d(E(\lambda)z,\ y)=F(z)$$

представляет собой ограниченный линейный функционал. Следовательно, по предыдущей теореме

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)y\|^2<\infty, \quad \text{т. е.} \quad y\in D.$$

Таким образом, $D=D(H)\supseteq D(H^*)$. Поскольку оператор H симметрический, $H\subseteq H^*$, и поэтому $H=H^*$, т. е. оператор H самосопряженный.

Пусть, наконец, $x\in D(H)$. Применяя оператор $E(\mu)$ к суммам Римана, аппроксимирующим интеграл $Hx=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,dE(\lambda)x$, мы в силу (1) получаем

$$E(\mu)Hx=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d(E(\mu)E(\lambda)x)=$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,d(E(\lambda)E(\mu)x)=HE(\mu)x.$$

Следствие 1. В частном случае $f(\lambda)=\lambda$ мы имеем

$$(Hx,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda d(E(\lambda)x,\ y),\quad x\in D(H),\quad y\in X. \tag{10}$$

Это равенство мы запишем в символической форме

$$H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\, dE(\lambda)$$

и будем называть последнее выражение *спектральным разложением* или *спектральным представлением* самосопряженного оператора H.

Следствие 2. Для оператора $H=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)\,dE(\lambda)$, определяемого формулой (9), справедливо равенство

$$\|Hx\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2 \quad \text{для всех } x\in D(H). \tag{11}$$

В частности, если H — самосопряженный ограниченный оператор, то

$$(H^n x,\ y)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\lambda)^n d(E(\lambda)x,\ y) \text{ для всех } x,\ y\in X \tag{12}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказательство. Поскольку $E(\lambda)Hx=HE(\lambda)x$ для всех $x\in D(H)$, мы, согласно (1), имеем

$$\begin{aligned}(Hx,\ Hx)&=\int f(\lambda)\,d(E(\lambda)x,\ Hx)=\int f(\lambda)\,d(HE(\lambda)x,\ x)=\\&=\int f(\lambda)\,d_\lambda\left\{\int f(\mu)\,d_\mu(E(\mu)E(\lambda)x,\ x)\right\}=\\&=\int f(\lambda)\,d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda}f(\mu)\,d(E(\mu)x,\ x)\right\}=\int f(\lambda)^2 d\|E(\lambda)x\|^2.\end{aligned}$$

Последнее утверждение следствия доказывается аналогично.

Пример. Легко видеть, что оператор H умножения на независимую переменную

$$Hx(t)=tx(t),\quad x(t)\in L^2(-\infty,\ \infty),$$

допускает спектральное разложение $H=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$, где

$$E(\lambda)x(t)=\begin{cases}x(t) & \text{при } t\leqslant\lambda,\\ 0 & \text{при } t>\lambda.\end{cases} \tag{13}$$

В самом деле,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 |x(t)|^2 dt = \|Hx\|^2,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(E(\lambda)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d_\lambda \int_{-\infty}^{\lambda} x(t)\overline{y(t)}dt = \int_{-\infty}^{\infty} tx(t)\overline{y(t)}dt = (Hx, y).$$

6. Спектральное разложение самосопряженного оператора

Теорема 1. Всякий самосопряженный оператор H, определенный в гильбертовом пространстве X, допускает единственное спектральное разложение.

Доказательство. Преобразование Кэли $U = U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ самосопряженного оператора H является унитарным (гл. VII, § 4). Пусть $U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} dF(\theta)$ — спектральное разложение оператора U. Тогда

$$F(2\pi - 0) = s\text{-}\lim_{\theta \downarrow 0} F(2\pi - \theta) = F(2\pi) = I.$$

Действительно, в противном случае проекционный оператор $F(2\pi) - F(2\pi - 0)$ не был бы нулевым. Тогда существовал бы такой элемент $y \neq 0$, что

$$(F(2\pi) - F(2\pi - 0))\, y = y.$$

Но, поскольку $F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta, \theta'))$,

$$Uy = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d(F(\theta)(F(2\pi) - F(2\pi - 0)))\, y = (F(2\pi) - F(2\pi - 0))\, y = y.$$

Последнее означает, что $(y, z) = (Uy, Uz) = (y, Uz)$ и, следовательно, $(y, z - Uz) = 0$ для всех $z \in X$. Область значений $R(I - U)$, где U — преобразование Кэли самосопряженного оператора H, как мы знаем (гл. VII, § 4), плотна в X. Поэтому $y = 0$, что противоречит сделанному предположению.

Положим

$$\lambda = -\operatorname{ctg}\theta, \qquad E(\lambda) = F(\theta);$$

таким образом устанавливается топологическое соответствие между областями $0 < \theta < 2\pi$ и $-\infty < \lambda < \infty$, и поэтому $E(\lambda)$, так же как и $F(\theta)$, представляет собой разложение единицы. Покажем теперь, что самосопряженный оператор

$$H' = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$$

совпадает с оператором H. Так как $H = i(I+U)(I-U)^{-1}$, мы должны лишь убедиться в том, что

$$(H'(y-Uy),\ x) = (i(y+Uy),\ x) \text{ для всех } x,\ y \in X.$$

Поскольку $D(H')^a = X$, мы можем ограничиться рассмотрением значений x из области $D(H')$. Так как $F(\theta)F(\theta') = F(\min(\theta, \theta'))$, то

$$(y-Uy,\ F(\theta)x) = \int_0^{2\pi} (1-e^{i\theta'})\, d_{\theta'}(F(\theta')y,\ F(\theta)x) =$$

$$= \int_0^{2\pi} (1-e^{i\theta'})\, d_{\theta'}(F(\theta)F(\theta')y,\ x) = \int_0^{\theta} (1-e^{i\theta'})\, d(F(\theta')y,\ x).$$

Поэтому

$$(y-Uy,\ H'x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(y-Uy,\ E(\lambda)x) =$$

$$= -\int_0^{2\pi} \operatorname{ctg}\theta\, d\left\{\int_0^{\theta} (1-e^{i\theta'})\, d(F(\theta')y,\ x)\right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} i(1+e^{i\theta})\, d(F(\theta)y,\ x) = (i(y+Uy),\ x).$$

Доказательство единственности спектрального разложения. Допустим, что оператор $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ допускает другое спектральное разложение $H = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE'(\lambda)$, такое, что $E'(\lambda_0) \neq E(\lambda_0)$ при некотором λ_0. Полагая

$$\lambda = -\operatorname{ctg}\theta, \qquad E'(\lambda) = F'(\theta),$$

мы получаем, что $F'(\theta_0) \neq F(\theta_0)$, где $\lambda_0 = -\operatorname{ctg}\theta_0$. Выполняя вычисления, аналогичные проведенным выше, можно показать, что преобразование Кэли оператора $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE'(\lambda)$ совпадает с $\int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\theta}\, dF'(\theta)$. Таким образом, получается, что унитарный оператор U допускает два различных спектральных представления $U = \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\theta}\, dF(\theta)$ и $U = \int\limits_{0}^{2\pi} e^{i\theta}\, dF'(\theta)$, что противоречит результатам § 4 гл. XI.

Итак, мы доказали (гл. VII, § 3 и 4) следующий важный результат, принадлежащий фон Нейману [1].

Теорема 2. Всякий симметрический оператор H допускает замкнутое симметрическое расширение H^{**}. Замкнутый симметрический оператор H допускает единственное спектральное представление в том и только в том случае, когда он является самосопряженным. Для того чтобы оператор H был самосопряженным, необходимо и достаточно, чтобы его преобразование Кэли было унитарным.

Замечание. В приложениях иногда встречаются операторы H, которые не являются сами самосопряженными, но имеют самосопряженный оператор H^*. Такие операторы H называют *в существенном самосопряженными*. По этому вопросу см. работу Като [7], где рассматриваются операторы Шредингера в квантовой механике.

Спектральное представление квантовомеханического оператора импульса H_1

Оператор H_1 определяется следующим образом:

$$H_1 x(t) = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\, x(t), \quad x(t) \in L_2(-\infty, \infty).$$

Обозначим через U преобразование Фурье

$$x(t) = U \cdot y(s) = \underset{n\to\infty}{\mathrm{l.i.m}}\, (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{-n}^{n} e^{ist} y(s)\, ds.$$

Оператор U унитарный и $U^{-1}x(t) = U^* x(t) = Ux(-t)$. Обозначим через $E(\lambda)$ разложение единицы, определенное формулой (13) § 5 гл. XI, и построим семейство операторов $\{E'(\lambda)\}$, где $E'(\lambda) = UE(\lambda)U^{-1}$. Тогда $\{E'(\lambda)\}$ тоже будет разложением единицы. Мы покажем, что $H_1 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE'(\lambda)$. Если обе функции $y(s)$ и $sy(s)$

принадлежат $L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$, то

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}x(t)=\frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left((2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}y(s)\,ds\right)=$$

$$=(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist}sy(s)\,ds=U(sy(s))=UsU^{-1}x(t),$$

или символически

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dt}=UsU^{-1}. \tag{1}$$

Следовательно, для самосопряженного оператора[1]) $H=s\cdot=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$ мы получаем

$$U^{-1}H_1Uy(s)=s\cdot y(s)=Hy(s)$$

для всех функций $y(s)$, принадлежащих вместе с $sy(s)$ пересечению $L^2(-\infty, \infty) \cap L^1(-\infty, \infty)$.

Для любой функции $y(s)\in D(H)=D(s\cdot)$ обозначим через $y_n(s)$ функцию, которая определяется соотношением $y_n(s)=y(s)$ при $|s|\leqslant n$, $y_n(s)=0$ при $|s|>n$. Ясно, что обе функции $y_n(s)$ и $sy_n(s)$ принадлежат $L^2(-\infty, \infty)\cap L^1(-\infty, \infty)$ и, кроме того, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} Hy_n=Hy$. Так как самосопряженные операторы $U^{-1}H_1U$ и H замкнуты и $(U^{-1}H_1U)\,y_n=Hy_n$, мы находим, что

$$(U^{-1}H_1U)\,y=Hy \quad \text{для всех } y\in D(H).$$

Отсюда видно, что оператор $U^{-1}H_1U$ является самосопряженным расширением самосопряженного оператора H. Переходя к самосопряженному оператору H^*, мы устанавливаем, что $H^*=H$ служит расширением оператора $(U^{-1}H_1U)^*=U^{-1}H_1U$. Следовательно, $U^{-1}H_1U=H$, и поэтому

$$H_1=UHU^{-1}=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d\left(UE(\lambda)U^{-1}\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE'(\lambda).$$

---

[1]) Запись $H=s\cdot$ обозначает здесь оператор умножения на s. — *Прим. перев.*

7. Вещественные и полуограниченные операторы. Теорема Фридрихса

Вещественные операторы и *полуограниченные операторы*, которые определяются ниже, допускают самосопряженные расширения. Теорема Неймана позволяет построить для таких операторов спектральное представление.

Определение 1. Пусть $X = L^2(S, \mathfrak{B}, m)$. Рассмотрим симметрический оператор H, отображающий пространство X в себя. Оператор H называется *вещественным*, если выполняются следующие условия: 1) для $x(s) \in D(H)$ мы имеем $\overline{x(s)} \in D(H)$; 2) оператор H переводит вещественные функции в вещественные.

Пример. Рассмотрим вещественную непрерывную функцию $f(s)$, заданную при $-\infty < s < \infty$. Умножение функций, принадлежащих $L^2(-\infty, \infty)$, на $f(s)$ определяет в пространстве $X = L^2(-\infty, \infty)$ вещественный оператор.

Теорема 1 (фон Нейман [1]). Всякий вещественный оператор H допускает самосопряженное расширение.

Доказательство. Обозначим через $U = U_H$ преобразование Кэли оператора H. Тогда область определения $D(U) = \{(H + iI)x;\ x \in D(H)\}$ состоит из функций, комплексно сопряженных к функциям из области значений $R(U) = \{(H - iI)x;\ x \in D(H)\}$. Поэтому если определить расширение U_1 оператора U соотношениями

$$U_1 = U \text{ в области } D(U),\quad U_1\Big(\sum_\alpha c_\alpha \varphi_\alpha\Big) = \sum_\alpha c_\alpha \overline{\varphi}_\alpha, \text{ где}$$
$\{\varphi_\alpha\}$ — произвольная полная ортонормированная система гильбертова пространства $D(U)^{\perp}$,

то расширение будет унитарным. Поэтому существует такое самосопряженное расширение H_1 оператора H, что $U_1 = U_{H_1}$ (гл. VII, § 4).

Определение 2. Говорят, что симметрический оператор H *полуограничен сверху* (или *полуограничен снизу*), если существует такая вещественная постоянная α, что

$$(Hx, x) \leqslant \alpha \|x\|^2 \text{ (или } (Hx, x) \geqslant \alpha \|x\|^2) \text{ для всех } x \in D(H).$$

Если $(Hx, x) \geqslant 0$ при всех $x \in D(H)$, то H называется *положительным оператором*.

Пример. Пусть функция $q(s)$ непрерывна и неотрицательна в области $(-\infty, \infty)$. Определим для функций $x(s)$ с бикомпактными носителями, принадлежащих C^2, оператор H следующего вида:

$$(Hx)(s) = -x''(s) + q(s)\,x(s).$$

Оператор H, как нетрудно проверить при помощи интегрирования по частям, является положительным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, \infty)$.

Теорема 2 (Фридрихс [3]). Всякий полуограниченный оператор H имеет самосопряженное расширение.

Доказательство (принадлежащее Фрейденталю [1]). Если оператор H полуограничен сверху, то оператор $-H$ полуограничен снизу, поэтому достаточно рассматривать полуограниченные снизу операторы. Если H—такой оператор, то для оператора $H_1 = H + (1-\alpha)I$ при всех $x \in D(H_1)$ выполняется неравенство $(H_1 x, x) \geqslant \|x\|^2$. Так как оператор вида αI самосопряженный, можно считать, что рассматриваемый симметрический оператор H удовлетворяет условию

$$(Hx, x) \geqslant \|x\|^2 \quad \text{при всех} \quad x \in D(H). \tag{1}$$

Введем в области $D(H)$ новое скалярное произведение $(x, y)'$ и соответствующую норму $\|x\|'$, полагая

$$\|x\|' = (Hx, x), \quad (x, y)' = (Hx, y). \tag{2}$$

Так как для симметрического оператора H выполняется условие (1), нетрудно видеть, что множество $D(H)$ с новым скалярным произведением $(x, y)'$ и нормой $\|x\|'$ превращается в предгильбертово пространство. Обозначим через $D(H)'$ пополнение этого предгильбертова пространства.

Покажем, что пространство $D(H)'$, рассматриваемое как абстрактное множество без топологии, является подмножеством множества X, состоящего из всех элементов исходного гильбертова пространства. Фундаментальная последовательность $\{x_n\}'$ в предгильбертовом пространстве $D(H)$ удовлетворяет условиям $\|x_n - x_m\|' \geqslant \|x_n - x_m\|$ и $\lim\limits_{n, m \to \infty} \|x_n - x_m\|' = 0$. Поэтому последовательность $\{x_n\}$ является фундаментальной в исходном гильбертовом пространстве X. Если мы докажем, что для произвольной фундаментальной последовательности $\{y_n\} \subset D(H)'$

$$\begin{aligned} &\text{из соотношения } \lim_{n\to\infty} \|y_n\|' \neq 0 \text{ не может следовать} \\ &\text{равенство } \lim_{n\to\infty} \|y_n\| = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

это будет означать, что отображение

$$\{x_n\}' \to \{x_n\} \tag{4}$$

взаимно однозначно переводит множество всех фундаментальных последовательностей пространства $D(H)$ в некоторое подмножество множества фундаментальных последовательностей пространства X. При этом условимся всякие две фундаментальные последовательности $\{x_n\}'$, $\{z_n\}' \subseteq D(H)$ ($\{x_n\}$, $\{z_n\} \subseteq X$) отождествлять, если $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - z_n\|' = 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - z_n\| = 0\right)$. Так как пространство X полно, то всякую фундаментальную последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ можно отождествить с элементом $x \in X$, таким, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \| = 0$. Следовательно, $D(H)'$ как абстрактное множество (без топологии) можно рассматривать, согласно (4), как подмножество из X.

Докажем теперь (3), вспоминая, что скалярные произведения непрерывны в пространствах $D(H)'$ и X, и поэтому если $\lim\limits_{n,\, m\to\infty} \| x_n - x_m \|' = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \|' = \alpha > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = 0$, то

$$\alpha^2 = \lim_{n,\, m\to\infty} (x_n,\, x_m)' = \lim_{n,\, m\to\infty} (Hx_n,\, x_m) = \lim_{n\to\infty} (Hx_n,\, 0) = 0,$$

что противоречит предположению $\alpha \neq 0$.

Положим далее

$$\tilde{D} = D(H^*) \cap D(H)'. \tag{5}$$

Так как $D(H) \subseteq D(H^*)$, то $D(H) \subseteq \tilde{D} \subseteq D(H^*)$. Поэтому можно определить расширение $\tilde{H}$ оператора H, рассматривая сужение оператора H^* на область $\tilde{D} = D(\tilde{H})$. Остается показать, что $\tilde{H}$ — самосопряженный оператор.

Сначала убедимся в том, что оператор $\tilde{H}$ симметрический. Пусть $x,\ y \in \tilde{D}$; тогда найдутся последовательности $\{x_n\}',\ \{y_n\}' \subseteq D(H)$, такие, что $\| x - x_n \|' \to 0$, $\| y - y_n \|' \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, ввиду непрерывности скалярного произведения в пространстве $D(H)'$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{n,\, m\to\infty} (x_n,\, y_m)' = \lim\limits_{n,\, m\to\infty} (Hx_n,\, y_m) = \lim\limits_{n,\, m\to\infty} (x_n,\, \tilde{H}y_m)$. Общее значение этих пределов равно величине

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} (Hx_n,\, y_m) = \lim_{n\to\infty} (Hx_n,\, y) = \lim_{n\to\infty} (x_n,\, \tilde{H}y) = (x,\, \tilde{H}y),$$

а также величине

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} (Hx_n,\, y_m) = \lim_{m\to\infty} (x,\, Hy_m) = \lim_{m\to\infty} (\tilde{H}x,\, y_m) = (\tilde{H}x,\, y),$$

откуда видно, что $\tilde{H}$ — симметрический оператор. Значит, $\tilde{H} \subseteq (\tilde{H})^*$.

Возьмем теперь произвольные элементы $x \in D(H)$, $y \in X$. Для них верно неравенство

$$|(x,\, y)| \leqslant \| x \| \cdot \| y \| \leqslant \| x \|' \cdot \| y \|,$$

и поэтому выражение $f(x) = (x,\, y)$ определяет на предгильбертовом пространстве $D(H)$ ограниченный линейный функционал. Функционал $f(x)$ можно благодаря непрерывности продолжить до ограниченного линейного функционала, определенного во всем гильбертовом пространстве $D(H)'$. Применяя к гильбертову пространству $D(H)'$ теорему Рисса о представлении линейного функционала, мы убеждаемся в существовании единственного элемента $y' \in D(H)'$, такого, что

$$f(x) = (x, y) = (x, y')' = (Hx, y') \quad \text{для всех} \quad x \in D(H).$$

Это доказывает, что $y' \in D(H^*)$ и $H^*y' = y$. Значит, $y' \in \tilde{D}$ и $\tilde{H}y' = y$. Тем самым мы показали, что $R(\tilde{H}) = X$, и на основании следствия из теоремы 1 гл. VII, § 3, оператор $\tilde{H}$ должен быть самосопряженным.

8. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Крылова — Вайнштейна. Кратность спектра

Теорема 1. Рассмотрим в гильбертовом пространстве X самосопряженный оператор $H = \int \lambda \, dE(\lambda)$. Обозначим через $\sigma(H)$, $P_\sigma(H)$, $C_\sigma(H)$ и $R_\sigma(H)$ соответственно спектр, точечный спектр, непрерывный спектр и остаточный спектр оператора H. Тогда (1°) $\sigma(H)$ есть некоторое множество на вещественной прямой; (2°) $\lambda \in P_\sigma(H)$ в том и только в том случае, когда $E(\lambda_0) \neq E(\lambda_0 - 0)$, и при этом собственное подпространство оператора H, соответствующее собственному значению λ_0, совпадает с $R(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0))$; (3°) включение $\lambda_0 \in C_\sigma(H)$ эквивалентно условию $E(\lambda_0) = E(\lambda_0 - 0)$ и $E(\lambda_1) \neq E(\lambda_2)$ при любых $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$; (4°) множество $R_\sigma(H)$ пусто.

Доказательство. Мы уже знаем, что резольвентное множество $\rho(H)$ самосопряженного оператора H содержит все комплексные числа λ с $\operatorname{Im}(\lambda) \neq 0$ (гл. VIII, § 1). Отсюда вытекает утверждение (1°). Из определения разложения единицы $\{E(\lambda)\}$ следует, что $\lambda_0 I = \lambda_0 \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)$, и поэтому $(H - \lambda_0 I) = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0) \, dE(\lambda)$. Отсюда, как и в следствии 2 теоремы 2 § 5 гл. XI, мы получаем

$$\|(H - \lambda_0 I) x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^2 \, d\|E(\lambda) x\|^2, \quad x \in D(H). \tag{1}$$

Так как $E(-\infty) = 0$, а функция $\|E(\lambda) x\|^2$ непрерывна справа по λ, то $Hx = \lambda_0 x$ в том и только в том случае, когда

$$\begin{aligned} E(\lambda) x &= E(\lambda_0 + 0) x = E(\lambda_0) x \quad && \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_0, \\ E(\lambda) x &= E(\lambda_0 - 0) x = 0 && \text{при} \quad \lambda < \lambda_0, \end{aligned}$$

т. е. $Hx = \lambda_0 x$ тогда и только тогда, когда $(E(\lambda_0) - E(\lambda_0 - 0)) x = x$. Отсюда вытекает утверждение (2°). Докажем теперь (4°). Если $\lambda_0 \in R_\sigma(H)$, то, согласно (1°), λ_0 — вещественное число. Соотношение

$R(H-\lambda_0 I)^a = D\left((H-\lambda_0 I)^{-1}\right)^a \neq X$ показывает, что существует элемент $y \neq 0$, ортогональный к $R(H-\lambda_0 I)$, т. е. $((H-\lambda_0 I)x, y)=0$ для всех $x \in D(H)$. Следовательно, $(Hx, y)=(\lambda_0 x, y)=(x, \lambda_0 y)$, и поэтому $y \in D(H^*)$ и $H^* y=\lambda_0 y$. Это означает, что $Hy=\lambda_0 y$, т. е. λ_0 является собственным значением оператора H. Но отсюда следует, что $\lambda_0 \in R_\sigma(H) \cap P_\sigma(H)$, а множества R_σ и P_σ, как мы знаем, не пересекаются. Поэтому множество $R_\sigma(H)$ пусто.

Пусть теперь вещественное число λ_0 не принадлежит спектру $\sigma(H)$. Тогда существует резольвента $(\lambda_0 I-H)^{-1}$. Значит, оператор $H_{\lambda_0}=(H-\lambda_0 I)$ имеет непрерывный обратный $(H-\lambda_0 I)^{-1}$. Согласно (4°), это условие эквивалентно тому, что $\lambda_0 \in \rho(H)$ и существует такое положительное число α, что

$$\|(H-\lambda_0 I)x\| \geqslant \alpha \cdot \|x\| \quad \text{при всех} \quad x \in D(H).$$

Последнее условие ввиду (1) эквивалентно неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 \geqslant \alpha^2 \|x\|^2 \quad \text{при всех} \quad x \in D(H). \tag{2}$$

Предположим теперь, что $E(\lambda_1)=E(\lambda_2)$, где $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$ и $\lambda_0-\lambda_1=\lambda_2-\lambda_0<\alpha$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 < \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\|E(\lambda)x\|^2 = \alpha^2\|x\|^2,$$

что противоречит неравенству (2). Отсюда с использованием утверждений (1°), (2°), (4°) и (2) мы получаем (3°).

Замечание. В примере из § 5 гл. XI был построен самосопряженный оператор H, непрерывный спектр которого состоит из всех вещественных чисел.

Теорема 2. Пусть H — произвольный ограниченный самосопряженный оператор. Тогда

$$\sup_{\lambda \in \sigma(H)} \lambda = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x), \qquad \inf_{\lambda \in \sigma(H)} \lambda = \inf_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x). \tag{3}$$

Доказательство. Так как величина $(Hx, x)=(x, Hx)=\overline{(Hx, x)}$ — число вещественное, можно рассматривать

$$\alpha_1 = \inf_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x) \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (Hx, x).$$

Пусть $\lambda_0 \in \sigma(H)$. Тогда по теореме 1 для любой пары (λ_1, λ_2) вещественных чисел, таких, что $\lambda_1<\lambda_0<\lambda_2$, существует элемент $y=y_{\lambda_1, \lambda_2} \neq 0$, такой, что $(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y=y$. Можно считать, что

$\|y\|=1$. Следовательно,

$$(Hy,\ y)=\int \lambda d(E(\lambda)y,\ y)=\int \lambda d\|E(\lambda)y\|^2=$$
$$=\int \lambda d\|E(\lambda)(E(\lambda_2)-E(\lambda_1))y\|^2=\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda d\|(E(\lambda)-E(\lambda_1))y\|^2.$$

Полагая $\lambda_1 \uparrow \lambda_0$ и $\lambda_2 \downarrow \lambda_0$, мы найдем, что $(Hy_{\lambda_1,\lambda_2},\ y_{\lambda_1,\lambda_2})\to\lambda_0$. Это показывает, что $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(H)} \lambda=\sup\lambda_0\leqslant\alpha_2$.

Предположим, что $\alpha_2\notin\sigma(H)$. Тогда теорема 1 гарантирует существование пары $(\lambda_1,\ \lambda_2)$ вещественных чисел, таких, что $\lambda_1<\alpha_2<\lambda_2$ и $E(\lambda_2)=E(\lambda_1)$. Поэтому $I=I-E(\lambda_2)+E(\lambda_1)$, $(I-E(\lambda_2))E(\lambda_1)=$ $=E(\lambda_1)(I-E(\lambda_2))=0$, следовательно, либо оператор $(I-E(\lambda_2))$, либо оператор $E(\lambda_1)$ отличен от нулевого. Если $(I-E(\lambda_2))\neq 0$, то найдется такой элемент y с нормой $\|y\|=1$, что $(I-E(\lambda_2))y=y$. В этом случае

$$(Hy,\ y)=\int \lambda d\|E(\lambda)y\|^2=\int \lambda d\|E(\lambda)(I-E(\lambda_2))y\|^2=$$
$$=\int\limits_{\lambda_2}^{\infty} \lambda d\|E(\lambda)y\|^2\geqslant\lambda_2>\alpha_2;$$

в случае $E(\lambda_1)\neq 0$

$$(Hz,\ z)\leqslant\lambda_1<\alpha_2$$

для некоторого элемента z с нормой $\|z\|=1$, удовлетворяющего уравнению $E(\lambda_1)z=z$. Таким образом, предположение о том, что $\alpha_2\notin\sigma(H)$, приводит к противоречию, и мы доказали, что $\sup\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=$ $=\sup\limits_{\|x\|\leqslant 1}(Hx,x)$. Аналогично можно показать, что $\inf\limits_{\lambda\in\sigma(H)}\lambda=\inf\limits_{\|x\|\leqslant 1}(Hx,x)$.

Теорема 3 (Крылов — Вайнштейн). Рассмотрим самосопряженный оператор H и для произвольного элемента $x\in D(H)$ с нормой $\|x\|=1$ определим числа

$$\alpha_x=(Hx,\ x)\quad\text{и}\quad\beta_x=\|Hx\|. \tag{4}$$

Тогда для всякого $\varepsilon>0$ можно указать значение $\lambda_0\in\sigma(H)$, удовлетворяющее неравенству

$$\alpha_x-\left(\beta_x^2-\alpha_x^2\right)^{1/2}-\varepsilon\leqslant\lambda_0\leqslant\alpha_x+\left(\beta_x^2-\alpha_x^2\right)^{1/2}+\varepsilon. \tag{5}$$

Доказательство. Из соотношений

$$\beta_x^2=(Hx,\ Hx)=(H^2x,\ x)=\int \lambda^2 d\|E(\lambda)x\|^2,$$
$$\alpha_x=(Hx,\ x)=\int \lambda d\|E(\lambda)x\|^2,$$
$$\|x\|^2=\int d\|E(\lambda)x\|^2$$

вытекает равенство

$$\beta_x^2-\alpha_x^2=\int \lambda^2 d\,\|E(\lambda)x\|^2-2\alpha_x\int \lambda d\,\|E(\lambda)x\|^2+\\+\alpha_x^2\int d\,\|E(\lambda)x\|^2=\int(\lambda-\alpha_x)^2 d\,\|E(\lambda)x\|^2.$$

Допуская, что функция $\|E(\lambda)x\|^2$ сохраняет постоянное значение в интервале $\lambda\in\left[\alpha_x-\left(\beta_x^2-\alpha_x^2\right)^{1/2}-\varepsilon,\ \alpha_x+\left(\beta_x^2-\alpha_x^2\right)^{1/2}+\varepsilon\right]$, мы приходим к противоречию

$$\beta_x^2-\alpha_x^2\geqslant\left(\left(\beta_x^2-\alpha_x^2\right)^{1/2}+\varepsilon\right)^2>\beta_x^2-\alpha_x^2,$$

что и доказывает теорему[1]).

Замечание. Так называемый *принцип Рэлея* состоит в том, что при вычислении спектра оператора H за приближение принимается величина α_x. Если мы вычислим β_x, то теорема 3 позволит определить верхнюю границу погрешности такого приближения. Конкретные приложения таких оценок погрешностей см. в работе Иосида [1].

Кратность спектра. Мы начнем с изучения спектра самосопряженного оператора H в n-мерном гильбертовом пространстве X_n; такому оператору соответствует самосопряженная матрица $H=\int\lambda\,dE(\lambda)$. Пусть $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_p$ $(p\leqslant n)$ — собственные значения оператора H соответственно кратностей $m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_p$ $\left(\sum\limits_{j=1}^{p}m_j=n\right)$. Обозначим через $x_{j_1},\ x_{j_2},\ \ldots,\ x_{j_{m_j}}$ ортонормированные собственные векторы оператора H, соответствующие собственному значению λ_j $\left(Hx_{j_s}=\lambda_j x_{j_s}\right)$, такие, что система $\left\{x_{j_s};\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ m_j\right\}$ порождает собственное подпространство $E\lambda_j=R(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))$ оператора H, соответствующее собственному значению λ_j. Тогда совокупность векторов $\left\{x_{j_s};\ j=1,\ 2,\ \ldots,\ p;\ s=1,\ 2,\ \ldots,\ m_j\right\}$ образует в пространстве X_n полную ортонормированную систему, и поэтому всякий вектор $y\in X_n$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов x_{j_s}:

$$y=\sum_{j=1}^{p}\sum_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s}. \tag{6}$$

Обозначая через P_{λ_j} оператор $(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))$ проектирования на собственное подпространство E_{λ_j}, мы получаем для любых $\alpha<\beta$

[1]) Так как функция $E(\lambda)$ оказывается не постоянной в промежутке (5), то в нем, согласно теореме 1, найдется по крайней мере одна точка $\lambda_0\in\sigma(H)$. — *Прим. перев.*

соотношения

$$(E(\beta)-E(\alpha))\,y=\sum_{\alpha<\lambda_j\leqslant\beta}\left(\sum_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s}\right)=\sum_{\alpha<\lambda_j\leqslant\beta}P_{\lambda_j}y \qquad (7)$$

и

$$P_{\lambda_j}(E(\beta)-E(\alpha))\,y=\begin{cases}\sum\limits_{s=1}^{m_j}\alpha_{j_s}x_{j_s} & \text{при}\quad \alpha<\lambda_j\leqslant\beta,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda_j\notin(\alpha,\ \beta].\end{cases}$$

Поэтому при фиксированных значениях $\alpha<\beta$ и фиксированном линейном подпространстве M пространства X_n множество

$$\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ y\in M\}$$

не содержит подпространства E_{λ_j}, если размерность $\dim(M)$ подпространства M меньше m_j. Кроме того, можно найти такое подпространство M размерности $\dim(M)=m_j$, чтобы при $\alpha<\lambda_j\leqslant\beta$ множество $\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ y\in M\}$ содержало собственное подпространство E_{λ_j}. В самом деле, таким является, например, подпространство, содержащее векторы $x_{j_1}, x_{j_2}, \ldots, x_{j_{m_j}}$. Отсюда, в частности, следует, что условие $m_1=m_2=\ldots=m_p=1$, $p=n$, имеет место тогда и только тогда, когда существует такой вектор $y\in X_n$, что множество векторов $\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ \alpha<\beta$ произвольны$\}$ порождает все пространство X_n.

Эти рассуждения приводят нас к следующим определениям.

Определение 1. Спектр самосопряженного оператора $H=\int\lambda\,dE(\lambda)$, заданного в некотором гильбертовом пространстве X, называется *простым*, если существует фиксированный вектор $y\in X$, такой, что линейное подпространство, натянутое на множество векторов $\{(E(\beta)-E(\alpha))\,y;\ \alpha<\beta\}$, сильно плотно в пространстве X.

Определение 2. Подпространство $X_1\subseteq X$ гильбертова пространства X называется *порождающим подпространством оператора* H, если сильное замыкание в пространстве X линейного подпространства, натянутого на множество векторов

$$M=\{(E(\beta)-E(\alpha))\,z;\ z\in X_1,\ \alpha<\beta\},$$

совпадает с X, т. е. линейная оболочка M сильно плотна в X. Наименьшее из чисел $\dim(X_1)$, где X_1 пробегает все порождающие подпространства оператора H, называется *общей кратностью спектра самосопряженного оператора* H. Общая кратность спектра оператора вида $B=(E(\beta_0)-E(\alpha_0))\,H$, где α_0 и β_0 — произвольные фиксированные числа, такие, что $\alpha_0<\beta_0$, называется *кратностью спектра самосопряженного оператора* H *в интервале* $(\alpha_0,\ \beta_0]$.

Определение 3. *Кратностью спектра самосопряженного оператора* $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$ *в точке* $\lambda=\lambda_0$ называется предел при $n\to\infty$ последовательности кратностей спектра оператора H в интервалах $(\lambda_0-n^{-1},\ \lambda_0+n^{-1}]$.

Пример. Оператор координаты квантовой механики, т. е. оператор H, определяемый в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$ условием $Hx(t)=tx(t)$, обладает простым спектром.

Доказательство. Мы знаем, что для этого оператора спектральное разложение $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$ определяется функцией $E(\lambda)$ вида

$$E(\lambda)x(t)=\begin{cases} x(t) & \text{при} \quad t\leqslant\lambda, \\ 0 & \text{при} \quad t>\lambda. \end{cases}$$

Возьмем произвольный ряд $\sum\limits_k c_k^2<\infty$ $(c_k>0)$ и определим функцию $y(t)\in L^2(-\infty,\infty)$ условием

$$y(t)=c_k>0 \quad \text{при} \quad k-1<t\leqslant k \qquad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots).$$

Нетрудно заметить, что совокупность всех линейных комбинаций векторов вида $(E(\beta)-E(\alpha))y$ $(\alpha<\beta)$ сильно плотна в множестве всех ступенчатых функций с бикомпактными носителями и, следовательно, сильно плотна в пространстве $L^2(-\infty,\infty)$.

Унитарная эквивалентность самосопряженных операторов. Два самосопряженных оператора H_1 и H_2 в n-мерном гильбертовом пространстве X называются *унитарно эквивалентными*, если существует такая унитарная матрица U, что $H_1=UH_2U^{-1}$. Известно, что операторы H_1 и H_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда эти операторы имеют одни и те же собственные значения соответственно одних и тех же кратностей. Таким образом, собственные значения и их кратности являются *унитарными инвариантами* самосопряженной матрицы.

Исследование вопроса об унитарных инвариантах самосопряженных операторов в бесконечномерных пространствах восходит к работе Хеллингера [1], опубликованной в 1909 г. См. также М. Стоун [1]. В указанных работах рассматривалось сепарабельное гильбертово пространство. Результаты, относящиеся к несепарабельным гильбертовым пространствам, см. в работах Веккен [1], Накано [1], а также Халмош [2]. Иосида [13] доказал следующую теорему.

Пусть H — произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Обозначим через $(H)'$ совокупность всех ограниченных линейных операторов, принадлежащих $L(X, X)$, которые перестановочны с H. Два самосопряженных оператора H_1 и H_2 унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда существует взаимно однозначное отображение T множества $(H_1)'$ на множество $(H_2)'$, устанавливающее изоморфизм колец операторов $(H_1)'$ и $(H_2)'$ таким образом, что $(T\cdot B)^* = T\cdot B^*$ для всякого $B\in(H_1)'$.

Таким образом, алгебраическая структура кольца $(H_1)'$ представляет собой унитарный инвариант самосопряженного оператора H_1.

9. Разложение элемента пространства. Условие отсутствия непрерывного спектра

Пусть $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$ — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Ввиду свойств $E(+\infty)=I$ и $E(-\infty)=0$ с оператором H можно связать представление всякого элемента $x\in X$ в виде

$$x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\lambda_1\downarrow-\infty,\ \lambda_2\uparrow\infty} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} dE(\lambda)\,x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\lambda_1\downarrow-\infty,\ \lambda_2\uparrow\infty} (E(\lambda_2)-E(\lambda_1))\,x,\quad x\in X. \tag{1}$$

Иногда в конкретных случаях легче найти резольвенту $(\lambda I-H)^{-1}$, чем построить спектральное разложение $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$. Тогда вместо разложения (1) удобнее воспользоваться формулой

$$x = \operatorname*{s\text{-}lim}_{\alpha\downarrow-\infty,\ \beta\uparrow\infty}\ \operatorname*{s\text{-}lim}_{v\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}\left[\int_{\alpha}^{\beta} ((u-iv)I-H)^{-1}x\,du + \right.$$
$$\left. + \int_{\beta}^{\alpha} ((u+iv)I-H)^{-1}x\,du\right],\qquad x\in X, \tag{1'}$$

к выводу которой мы сейчас переходим.

Доказательство формулы (1′). Если $v\neq 0$, то

$$((u+iv)I-H)^{-1}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u+iv-\lambda}\, dE(\lambda)\,x$$

для всех $x\in X$. Действительно, аппроксимируя интеграл римановой суммой и учитывая соотношение $E(\lambda)E(\lambda')=E(\min(\lambda,\lambda'))$, мы при $\operatorname{Im}(\mu)\neq 0$ получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)\, dE(\lambda)\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda'-\mu}\, dE(\lambda')\right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)\, d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda'-\mu}\, d_{\lambda'}(E(\lambda)E(\lambda'))\right\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\mu)\, d_\lambda\left\{\int_{-\infty}^{\lambda} \frac{1}{\lambda'-\mu}\, dE(\lambda')\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = I,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu}\, d_\lambda \left\{ E(\lambda) \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda'-\mu)\, dE(\lambda') \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu}\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda'-\mu)\, d_{\lambda'} (E(\lambda) E(\lambda')) \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\mu}\, d_\lambda \left\{ \int_{-\infty}^{\lambda} (\lambda'-\mu)\, dE(\lambda') \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda) = I,$$

откуда видно, что

$$((u+iv)I - H) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u+iv-\lambda}\, dE(\lambda)\, x = x$$

при всех $x \in X$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u+iv-\lambda}\, dE(\lambda)\, x = ((u+iv)I - H)^{-1} x, \quad x \in X.$$

Поэтому

$$\int_{\alpha}^{\beta} ((u-iv)I - H)^{-1} x\, du + \int_{\beta}^{\alpha} ((u+iv)I - H)^{-1} x\, du =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)\, x \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{du}{u-iv-\lambda} + \int_{\beta}^{\alpha} \frac{du}{u+iv-\lambda} \right\} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dE(\lambda)\, x \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} d_u \log(u-iv-\lambda) + \int_{\beta}^{\alpha} d_u \log(u+iv-\lambda) \right\}.$$

Последнее выражение при $v \downarrow 0$ сильно сходится к

$$\int_{\alpha+0}^{\beta-0} 2\pi i\, dE(\lambda)\, x + \pi i (E(\beta) - E(\beta-0))\, x + \pi i ((E(\alpha) - E(\alpha-0))\, x =$$

$$= \pi i (E(\beta) + E(\beta-0))\, x - \pi i (E(\alpha) + E(\alpha-0))\, x,$$

откуда и вытекает формула (1′).

Замечание. В работе Г. Вейля [2] строилось разложение по собственным функциям для дифференциального оператора второго порядка вида

$$-\frac{d^2}{dx^2} + q(x),$$

где $q(x)$ — непрерывная функция на открытом интервале (a, b). Эта задача разрабатывалась далее М. Стоуном [1] и была решена окончательно Титчмаршем [2] и Кодаира [1], которые привели явные формулы для этого разложения. Это разложение представляет собой конкретное применение формулы (1). Трудным моментом в этой теории является вопрос о возможности выбора граничных условий на концах $x=a$ и $x=b$, при которых оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

становится самосопряженным оператором в гильбертовом пространстве $L^2(a, b)$. Эти исследования играют важную роль, поскольку они позволяют выработать единый подход к классическим разложениям теории специальных функций, таким, как разложения в ряды Фурье, представления в виде интегралов Фурье, разложения по полиномам Эрмита, по полиномам Лагерра и бесселевым функциям. Не вдаваясь в подробности, мы отошлем читателя к цитированным выше книге Титчмарша и работе Кодаира. См. также Наймарк [2], Данфорд — Шварц [5] и Иосида [1]. В последней книге дано элементарное изложение этого вопроса.

Если самосопряженный оператор H не имеет непрерывного спектра $C_\sigma(H)$, то разложение (1) можно заменить разложением в ряд. Имеет место

Теорема 1. Пусть $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$ — вполне непрерывный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве X. Тогда (1°) непрерывный спектр $C_\sigma(H)$ не содержит вещественных чисел, за исключением, быть может, нуля; (2°) совокупность всех собственных значений оператора H образует не более чем счетное множество вещественных чисел, не имеющее предельных точек, кроме $\lambda=0$; (3°) собственные подпространства E_{λ_0} оператора H, соответствующие собственным значениям $\lambda_0 \neq 0$, конечномерны.

Доказательство. Рассмотрим произвольный отрезок $[\lambda', \lambda'']$ вещественной оси, не содержащий точки $\lambda=0$. Тогда область значений $R(E(\lambda'')-E(\lambda'))$ конечномерна. Действительно, если допустить противное, то процесс ортогонализации Шмидта (гл. III, § 5) позволяет построить счетную ортонормированную систему $\{x_j\}$, содержащуюся в области $R(E(\lambda'')-E(\lambda'))$. Тогда, согласно неравенству Бесселя

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, x_j)|^2 \leqslant \|f\|^2 \quad \text{для всех } f \in X,$$

существует равный нулю предел $w\text{-}\lim\limits_{j\to\infty} x_j=0$. Но, так как оператор H вполне непрерывен, существует подпоследовательность $\{x_{j'}\}$, для которой $\underset{j'\to\infty}{s\text{-}\lim} Hx_{j'} = \underset{j'\to\infty}{w\text{-}\lim} Hx_{j'} = 0$. С другой стороны,

$$\|Hx_{j'}\|^2 = \int \lambda^2 d\,\|E(\lambda)\,x_{j'}\|^2 = \int \lambda^2 d\,\|E(\lambda)(E(\lambda'')-E(\lambda'))\,x_{j'}\|^2 =$$

$$= \int_{\lambda'}^{\lambda''} \lambda^2 d\,\|(E(\lambda)-E(\lambda'))\,x_{j'}\|^2 \geqslant \|x_{j'}\|^2 \cdot \min(|\lambda'|^2, |\lambda''|^2) =$$

$$= \min(|\lambda'|^2, |\lambda''|^2),$$

что противоречит полученному ранее предельному равенству. Итак, мы показали, что подпространство $R(E(\lambda'')-E(\lambda'))$ конечномерно.

Если непрерывный спектр $C_\sigma(H)$ содержит число $\lambda_0 \neq 0$, то по теореме 1 предыдущего параграфа $\underset{\varepsilon\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\,(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))\,x = 0$ для всех $x \in X$. Как показано выше, при достаточно малых $\varepsilon > 0$ область значений $R(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon))$ конечномерна, причем ее размерность монотонно убывает, когда $\varepsilon \downarrow 0$. Поэтому $(E(\lambda_0+\varepsilon)-E(\lambda_0-\varepsilon)) = 0$ при достаточно малом $\varepsilon > 0$, и, следовательно, по теореме 1 предыдущего параграфа число λ_0 не может входить в непрерывный спектр $C_\sigma(H)$.

Таким образом, теорема доказана.

Следствие 1. Пусть $\{\lambda_j\}$ — система всех отличных от нуля собственных значений самосопряженного оператора H. Тогда для любого элемента $x \in X$ справедлива формула

$$x = (E(0)-E(0-0))\,x + s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} (E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))\,x. \tag{2}$$

Доказательство. Формула (2) вытекает непосредственно из представления (1).

Следствие 2 (теорема Гильберта — Шмидта). Для всякого $x \in X$

$$Hx = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))\,x. \tag{3}$$

Доказательство. Это равенство является следствием непрерывности оператора H и соотношений $H(E(0)-E(0-0)) = 0$ и $H(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))\,x = \lambda_j(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))\,x$. Последнее равенство вытекает из того, что область значений $R(E(\lambda_j)-E(\lambda_j-0))$ совпадает с собственным подпространством E_{λ_j} оператора H, соответствующим собственному значению λ_j.

Замечание. Сильно сходящаяся последовательность (3) сходится равномерно на единичном шаре $\{x;\ \|x\|\leqslant 1\}$. Действительно,

$$\Big\|Hx-\int\limits_{|\lambda|>\varepsilon}\lambda\,dE(\lambda)\,x\Big\|^2=\Big\|\int\limits_{|\lambda|\leqslant\varepsilon}\lambda\,dE(\lambda)\,x\Big\|^2=$$

$$=\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\lambda^2 d\|E(\lambda)\,x\|^2\leqslant\varepsilon^2\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}d\|E(\lambda)\,x\|^2\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon^2\int d\|E(\lambda)\,x\|^2=\varepsilon^2\|x\|^2\leqslant\varepsilon^2.$$

10. Теорема Петера — Вейля — Неймана

Рассмотрим вполне ограниченную топологическую группу G, метризованную с помощью функции расстояния, удовлетворяющей условию (гл. VIII, § 5)

$$\operatorname{dis}(x,\ y)=\operatorname{dis}(axb,\ ayb)\quad \text{для всех } x,\ y,\ a,\ b\in G. \tag{1}$$

Пусть $f(g)$ — равномерно непрерывная ограниченная комплексная функция, определенная на группе G. Для любого $\varepsilon>0$ положим

$$V=\Big\{y\in G;\ \sup_{x\in G}|f(x)-f(y^{-1}x)|<\varepsilon\Big\}. \tag{2}$$

Вследствие непрерывности функции f множество V открыто и содержит единицу e группы G. Поэтому пересечение $U=V\cap V^{-1}$, где $V^{-1}=\{y^{-1},\ y\in V\}$, тоже представляет собой открытое множество, содержащее e. Введем теперь функцию

$$k(x)=2^{-1}\left(k_1(x)+k_1(x^{-1})\right),$$

где

$$k_1(x)=\frac{\operatorname{dis}(x,\ U^C)}{\operatorname{dis}(x,\ e)+\operatorname{dis}(x,\ U^C)}\quad\Big(\operatorname{dis}(x,\ U^C)=\inf_{y\in U^C}\operatorname{dis}(x,\ y)\Big). \tag{3}$$

На основании предыдущего можно утверждать, что

$$\text{функция } k(x) \text{ ограничена и равномерно непрерывна на } G;$$
$$k(x)=k(x^{-1}),\ 0\leqslant k(x)\leqslant 1 \text{ на } G;\ k(e)=1; \tag{4}$$
$$k(x)=0 \text{ для всех } x\in U^C.$$

Следовательно, для любых $x,\ y\in G$ мы получаем неравенство

$$|k(y)(f(x)-f(y^{-1}x))|\leqslant\varepsilon k(y).$$

Взяв от обеих частей этого неравенства средние значения (гл. VIII, § 5 и 6), мы найдем, что

$$|M_y(k(y))f(x) - M_y(k(y)f(y^{-1}x))| \leqslant \varepsilon M_y(k(y)).$$

Поскольку $k(y) \not\equiv 0$ и $k(y) \geqslant 0$, мы имеем $M_y(k(y)) > 0$. Поэтому

$$|f(x) - M_y(k_0(y)f(y^{-1}x))| \leqslant \varepsilon, \text{ где } k_0(x) = k(x)/M_x(k(x)). \tag{5}$$

Вследствие инвариантности $M_y(g(y^{-1})) = M_y(g(y)) = M_y(g(ay)) = M_y(g(ya))$ среднего значения из (5) вытекает оценка

$$|f(x) - M_y(k_0(xy^{-1})f(y))| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех } x \in G. \tag{6}$$

Предложение 1. Обозначим через $C(G)$ совокупность всех равномерно непрерывных ограниченных комплексных функций $h(g)$, заданных на группе G. Множество $C(G)$ с нормой $\|h\|_0 = \sup\limits_{g \in G} |h(g)|$ образует B-пространство. При любых b, $h \in C(G)$ функция

$$(b \times h)(x) = M_y(b(xy^{-1})h(y)) \tag{7}$$

тоже принадлежит пространству $C(G)$.

Доказательство. Поскольку $\operatorname{dis}(x, z) = \operatorname{dis}(axc, azc)$ и функция $b(g)$ равномерно непрерывна, для любого $\delta > 0$ можно указать такое $\eta = \eta(\delta) > 0$, что

$$\sup_y |b(xy^{-1}) - b(x'y^{-1})| \leqslant \delta$$

при всех x, x', удовлетворяющих условию $\operatorname{dis}(x, x') \leqslant \eta$.

Поэтому, как и при выводе неравенства Шварца, мы приходим к неравенству

$$|M_y(b(xy^{-1})h(y)) - M_y(b(x'y^{-1})h(y))|^2 \leqslant$$
$$\leqslant M_y((b(xy^{-1}) - b(x'y^{-1}))^2) \cdot M_y(|h(y)|^2) \leqslant \delta^2 M_y(|h(y)|^2), \tag{8}$$

справедливому при всех x, x', для которых $\operatorname{dis}(x, x') \leqslant \eta$. Отсюда и вытекает справедливость предложения 1.

Предложение 2. Множество $C(G)$ с обычными операциями сложения функций и умножения функций на комплексные числа и скалярным произведением

$$(b, h) = (b \times h^*)(e) = M_y(b(y^{-1})\overline{h(y^{-1})}) = M_y(b(y)\overline{h(y)}), \tag{9}$$

где $h^*(y) = \overline{h(y^{-1})}$, образует предгильбертово пространство. Это предгильбертово пространство мы обозначим через $\widehat{C}(G)$.

Доказательство. Это утверждение доказывается очевидным образом.

Предложение 3. Обозначим через $\tilde{C}(G)$ пополнение предгильбертова пространства $\hat{C}(G)$. Норма гильбертова пространства $\tilde{C}(G)$ определяется как $\|h\|=(h, h)^{1/2}$. Линейное отображение T пространства $\hat{C}(G)$ в себя

$$(Th)(x)=(k_0 \times h)(x), \qquad x \in G, \tag{10}$$

непрерывно в пространстве $\hat{C}(G)$ и может быть продолжено до вполне непрерывного линейного оператора $\tilde{T}$, отображающего гильбертово пространство $\tilde{C}(G)$ в себя.

Доказательство. Мы имеем $M_y(1)=1$, поэтому

$$\|h\|=(h, h)^{1/2}=M_y(h(y)\overline{h(y)})^{1/2} \leqslant \sup_y |h(y)|=\|h\|_0. \tag{11}$$

Непрерывность оператора T в пространстве $\hat{C}(G)$ вытекает из неравенства Шварца для функции (7), и, так как множество $\hat{C}(G)$ плотно в гильбертовом пространстве $\tilde{C}(G)$, можно расширить T до ограниченного линейного оператора $\tilde{T}$ в $\tilde{C}(G)$. Из (8) следует, что оператор T, отображающий $\hat{C}(G)$ в $\hat{C}(G)$, вполне непрерывен — это легко доказывается с помощью теоремы Асколи — Арцела. Таким образом, учитывая (11), мы устанавливаем, что $\tilde{T}$ — это вполне непрерывный оператор, отображающий $\hat{C}(G)$ в $\hat{C}(G)$.

Так как множество $\hat{C}(G)$ плотно в пространстве $\tilde{C}(G)$, продолженный оператор $\tilde{T}$ вполне непрерывен и отображает $\tilde{C}(G)$ в себя.

Теперь мы можем перейти к изложению *теории Петера — Вейля — Неймана*, касающейся представления почти-периодических функций.

Из свойства $k_0(xy^{-1})=k_0(yx^{-1})$ видно, что вполне непрерывный оператор $\tilde{T}$ является самосопряженным в гильбертовом пространстве $\tilde{C}(G)$. Согласно теореме Гильберта — Шмидта предыдущего параграфа,

$$\tilde{T}h=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\sum_{m=1}^{n}\lambda_m P_{\lambda_m}h \text{ равномерно по } h \text{ при } \|h\|\leqslant 1, \tag{12}$$

где $\{\lambda_m\}$ — совокупность всех отличных от нуля собственных значений оператора $\tilde{T}$, а P_{λ_m} — оператор проектирования на собственное подпространство оператора $\tilde{T}$, соответствующее собственному значению λ_m.

Функция $f(g)$, определенная в начале этого параграфа, принадлежит $C(G)$, поэтому $\tilde{T}f=Tf \in C(G)$. Собственные подпространства $R(P_{\lambda_m})=P_{\lambda_m}\cdot\tilde{C}(G)$ конечномерны, следовательно, для каждого собственного значения λ_m существует конечная система $\{h_{m_j}\}$, $j = 1, 2, \ldots, n_m$, элементов пространства $\widetilde{C}(G)$, таких, что всякий элемент $h \in R(P_{\lambda_m}) = P_{\lambda_m}\widetilde{C}(G)$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов $h_{n_j}(j = 1, \ldots, n_m)$. Запишем это разложение в виде

$$P_{\lambda_m}h = \sum_{j=1}^{n_m} c_j h_{m_j}, \quad \text{где } c_j \text{ — комплексные числа.} \tag{13}$$

Тогда $\widetilde{T}h_{m_j} = \lambda_m h_{m_j}$, так как $h_{m_j} \in R(P_{\lambda_m})$. Поэтому, применяя неравенство (8) к оператору T, определяемому формулой (10), мы видим, что элемент $h_{m_j} = \lambda_m^{-1}(\widetilde{T}h_{m_j})$ должен принадлежать $C(G)$. Отсюда, учитывая (13), мы заключаем, что для каждого собственного значения λ_m оператора $\widetilde{T}$ собственное подпространство $R(P_{\lambda_m}) = P_{\lambda_m} \cdot \widetilde{C}(G)$ натянуто на элементы $h_{m_j} \in C(G)$.

Следовательно, согласно (12),

$$(Tf)(x) = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{n} \lambda_m f_m(x) \text{ в сильной топологии пространства } \widetilde{C}(G), \text{ где } f_m = P_{\lambda_m} \cdot f \in C(G) \text{ при каждом } m.$$

Используя теперь для оператора T, заданного выражением (10), неравенство (8), мы видим, что

$$(T^2f)(x) = \lim_{n\to\infty} M_y\left(k_0(xy^{-1})\sum_{m=1}^{n}\lambda_m f_m(y)\right) \text{ равномерно по } x. \tag{14}$$

С другой стороны, поскольку $M_y(k_0(y)) = 1$, из (6) следует, что

$$|M_z(k_0(xz^{-1})f(z)) - M_z(k_0(xz^{-1})M_y(k_0(zy^{-1})f(y)))| \leqslant \varepsilon.$$

Объединяя последнее неравенство с условием (6), получаем

$$|f(x) - M_z(k_0(xz^{-1})M_y(k_0(zy^{-1})f(y)))| \leqslant 2\varepsilon, \tag{15}$$

т. е. $|f(x) - (T^2f)(x)| \leqslant 2\varepsilon$.

Вспоминая теперь, что $TR(P_{\lambda_m}) \subseteq R(P_{\lambda_m})$, мы можем сформулировать полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Функция $f(x)$ может быть равномерно аппроксимирована на множестве G линейными комбинациями собственных функций оператора $\widetilde{T}$, соответствующих отличным от нуля собственным значениям.

Выберем теперь некоторое фиксированное собственное значение $\lambda \neq 0$ оператора $\widetilde{T}$ и обозначим элементы базиса $\{h_j\} \subseteq C(G)$ соответствующего собственного подпространства $P_\lambda \cdot \widetilde{C}(G)$ через $e_1(x)$,

$e_2(x), \ldots, e_k(x)$. Тогда вследствие инвариантности среднего значения мы для всякого элемента $a \in G$ получаем соотношение

$$M_y(k_0(xy^{-1})e_j(ya)) = M_y(k_0(xa \cdot a^{-1}y^{-1})e_j(ya)) = \\ = M_z(k_0(xa \cdot z^{-1})e_j(z)) = (Te_j)(xa) = \lambda e_j(xa).$$

Левая часть представляет собой результат применения оператора T к функции $e_j(ya)$ переменного y, поэтому при любом заданном $a \in G$ функция $e_j(xa)$ переменной x должна единственным образом выражаться в виде линейной комбинации функций $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_k(x)$. Таким образом,

$$e_j(xa) = \sum_{l=1}^{k} d_{jl}(a)e_l(x) \qquad (j = 1, 2, \ldots, k), \tag{16}$$

или в векторных обозначениях

$$e(xa) = D(a)e(x). \tag{16'}$$

Из равенств $e(x \cdot ab) = D(ab)e(x)$, $e(xa \cdot b) = D(b)e(xa) = D(b)D(a)e(x)$ мы, учитывая линейную независимость элементов $e_1(x), e_2(x), \ldots, e_k(x)$, заключаем, что

$$D(ab) = D(b)D(a) \text{ и } D(e) \text{ — единичная матрица порядка } k. \tag{17}$$

Применяя процесс ортогонализации, можно считать, что $\{e_j(x)\}$ — ортонормированная система в $\tilde{C}(G)$. Тогда из (16) следует, что

$$M_x(e_j(xa)e_l^*(x)) = d_{jl}(a), \tag{18}$$

и поэтому элементы $d_{jl}(a)$ матрицы $D(a)$ принадлежат $C(G)$. Ввиду инвариантности среднего значения имеем

$$M_y(e_j(ya)\overline{e_l(ya)}) = M_y(e_j(y)\overline{e_l(y)}) = \delta_{lj}.$$

Следовательно, матрица $D(a)$ определяет линейное преобразование ортонормированной системы $\{e_j(x)\}$ в ортонормированную систему $\{e_j(xa)\}$. Поэтому матрица $D(a)$ должна быть унитарной. Матрица $D(a)'$, транспонированная к $D(a)$, тоже унитарна и

$$D(ab)' = D(a)'D(b)', \ D(e)' \text{ — единичная матрица порядка } k. \tag{17'}$$

Таким образом, матрицы $D(a)'$ дают *унитарное матричное представление группы* G, при котором матричные элементы представляют собой непрерывные функции от a. Полагая $x = e$ в (16), мы замечаем, что каждый элемент $e_j(a)$ является линейной комбинацией матричных элементов представления $D(a)'$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2 (Петер — Вейль — Нейман). Рассмотрим вполне ограниченную топологическую группу G, метризованную с помощью функции расстояния, удовлетворяющей условию $\mathrm{dis}(x, y) = \mathrm{dis}(axb, ayb)$. Пусть $f(g)$ — комплексная ограниченная равномерно непрерывная функция, заданная на группе G. Тогда функцию $f(g)$ можно аппроксимировать равномерно на группе G линейными комбинациями матричных элементов унитарного равномерно непрерывного матричного представления $D(g)'$ группы G.

Вспоминая теорему Вейля из гл. VIII, § 5, мы получаем такое

Следствие. Пусть G — абстрактная группа и $f(g)$ — почти-периодическая функция на G. Функция $f(g)$ может быть равномерно аппроксимирована на группе G линейными комбинациями матричных элементов унитарного матричного представления $D(g)'$ группы G.

Замечание 1. Обозначим через d *порядок* матрицы $D(g)'$ унитарного представления группы G. Каждая матрица вида $D(g)'$ определяет линейное отображение некоторого фиксированного d-мерного гильбертова пространства X_d на себя. Представление $D(g)'$ называется *неприводимым*, если не существует отличного от $\{0\}$ собственного линейного подпространства пространства X_d, инвариантного относительно отображений $D(g)', g \in G$. Если же в X_d существует собственное линейное подпространство $X_{d,1} \neq \{0\}$, инвариантное по отношению ко всем отображениям $D(g)'$, $g \in G$, то представление $D(g)'$ называется *приводимым*. В этом случае ортогональное дополнение $X_{d,1}^{\perp}$ подпространства $X_{d,1}$ в X_d тоже инвариантно относительно всех $D(g)'$, так как матрицы $D(g)'$, $g \in G$, унитарны. Если за базис пространства X_d принять ортонормированную систему, составленную из ортонормированных базисов подпространств $X_{d,1}$ и $X_{d,1}^{\perp}$, то представление $D(g)'$ преобразуется к виду

$$U D(g)' U^{-1} = \begin{pmatrix} D_1(g)' & 0 \\ 0 & D_2(g)' \end{pmatrix},$$

где U — фиксированная унитарная матрица. Таким образом, *приводимое унитарное* представление $D(g)'$ распадается на унитарные представления $D_1(g)'$ и $D_2(g)'$ группы G, соответствующие гильбертовым пространствам $X_{d,1}$ и $X_{d,1}^{\perp}$, в прямую сумму которых разлагается пространство X_d, или, как говорят, приводимое представление $D(g)'$ разлагается в прямую *сумму* представлений $D_1(g)'$ и $D_2(g)'$. Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к некоторой фиксированной унитарной матрице U_d, такой, что представление $U_d D(g)' U_d^{-1}$ разлагается в сумму неприводимых представлений группы G. Следовательно, в формулировках теоремы 2 и следствия мы можем ввести требование, чтобы все матричные представления $D(g)'$ были неприводимыми,

Замечание 2. В частном случае, когда G — аддитивная группа вещественных чисел, неприводимое унитарное представление $D(g)'$ имеет вид

$$D(g)' = e^{i\alpha g}, \text{ где } \alpha \text{ — произвольное вещественное число, } i = \sqrt{-1}. \tag{19}$$

В самом деле, поскольку унитарные матрицы $D(g)'$, $g \in G$, перестановочны, представление $D(g)'$ разлагается на одномерные унитарные представления $\chi(g)$, представляющие собой комплексные решения уравнения

$$\chi(g_1 + g_2) = \chi(g_1) \cdot \chi(g_2), \quad |\chi(g_1)| = 1 \quad (g_1, g_2 \in G), \quad \chi(0) = 1. \tag{20}$$

Непрерывные решения уравнения (20), как известно, имеют вид $\chi(g) = e^{i\alpha g}$. Следовательно, всякая непрерывная почти-периодическая функция $f(g)$, заданная на аддитивной группе G вещественных чисел, может быть равномерно на G аппроксимирована линейными комбинациями функций $e^{i\alpha g}$ с вещественными α. Этот факт составляет содержание основной теоремы *теории почти-периодических* (по Бору) функций. По первоначальному определению Бора [1] непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ называется *почти-периодической*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое положительное число $p = p(\varepsilon)$, что всякий интервал вида $(t, t + p)$ содержит по крайней мере одно значение τ, такое, что

$$|f(x + \tau) - f(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{при всех} \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Бохнер [4] показал, что непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ является почти-периодической по Бору тогда и только тогда, когда выполняется следующее условие: для всякой последовательности вещественных чисел $\{a_n\}$ система функций $\{f_{a_n}(x);\ f_{a_n}(x) = f(x + a_n)\}$ вполне ограничена в топологии равномерной сходимости в интервале $(-\infty, \infty)$. Это утверждение было обобщено фон Нейманом [4] на *почти-периодические функции на группе*. Результаты фон Неймана содержат как частный случай теорию Петера — Вейля [1] непрерывных представлений бикомпактных групп Ли. Результат Бора может быть получен непосредственно из приведенных здесь и ранее результатов, так как если $|s - t| \to 0$, то $[\sup\limits_{a, b} |f(asb) - f(atb)|] \to 0$.

11. Теорема двойственности для некоммутативных бикомпактных групп

Пусть G — *бикомпактная* (*топологическая*) *группа*. Это означает, что группа G является одновременно бикомпактным топологическим пространством, причем отображение

$$(x, y) \to xy^{-1}$$

топологического произведения $G \times G$ на пространство G непрерывно.

Предложение 1. Всякая непрерывная комплексная функция $f(g)$, определенная на бикомпактной группе G, *равномерно непрерывна* в следующем смысле:

для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(e)$ единичного элемента e группы G, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ при всех x, y, для которых $xy^{-1} \in U(e)$ или $x^{-1}y \in U(e)$. (1)

Доказательство. Так как функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке $a \in G$, для любого $\varepsilon > 0$ и всякого элемента $a \in G$ найдется такая окрестность V_a точки a, что для всех $x \in V_a$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$. Рассмотрим окрестность U_a элемента e вида $U_a = V_a a^{-1} = \{va^{-1};\ v \in V_a\}$. Очевидно, что если $xa^{-1} \in U_a$, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$. Обозначим через W_a такую окрестность элемента e, что $W_a^2 \subseteq U_a$, где $W_a^2 = \{w_1 w_2;\ w_i \in W_a\ (i = 1, 2)\}$. Ясно, что система всех открытых множеств вида $W_a \cdot a$, где a — произвольный элемент группы G, покрывает все пространство G. В силу бикомпактности G существует конечное множество $\{a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$, такое, что система открытых множеств $W_{a_i} \cdot a_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$ покрывает G. Обозначим через $U(e)$ пересечение всех открытых множеств системы $\{W_{a_i}\}$. Множество $U(e)$ является, очевидно, окрестностью элемента e. Покажем, что если $xy^{-1} \in U(e)$, то $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon$. Действительно, поскольку система множеств $W_{a_i} \cdot a_i$ покрывает G, найдется такой номер k, что $ya_k^{-1} \in W_{a_k} \subseteq U_{a_k}$, и поэтому $|f(y) - f(a_k)| < \varepsilon/2$. Кроме того, $xa_k^{-1} = xy^{-1}ya_k^{-1} \in U(e) W_{a_k} \subseteq W_{a_k}^2 \subseteq U_{a_k}$, так что $|f(x) - f(a_k)| < \varepsilon/2$. Из последних двух неравенств мы заключаем, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Начиная с окрестности U_a элемента e, обладающей тем свойством, что если $x^{-1}a \in U_a$, то $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$, мы получим такую окрестность $U(e)$ элемента e, что из условия $x^{-1}y \in U(e)$ будет следовать неравенство $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Взяв пересечение построенных выше двух окрестностей вида $U(e)$, мы и получим окрестность, существование которой утверждается в формулировке предложения 1.

Следствие. Всякая непрерывная комплексная функция $f(x)$, заданная на бикомпактной группе G, почти-периодична на G.

Доказательство. Пусть $U(e)$ — окрестность элемента e, фигурирующая в предложении 1. При любом $a \in G$ множество $U(e)a$ представляет собой окрестность элемента a. Система открытых множеств $\{U(e)a;\ a \in G\}$ покрывает бикомпактное пространство G, поэтому некоторая конечная система $\{U(e)a_i;\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ тоже покрывает G. Значит, для всякого $a \in G$ найдется некоторый элемент вида

a_k с номером $k \leqslant n$, такой, что $aa_k^{-1} \in U(e)$. Но так как $(ax)(a_k x)^{-1} = aa_k^{-1}$, отсюда следует, что $\sup\limits_x |f(ax) - f(a_k x)| < \varepsilon$. Аналогично строится конечная система элементов $\{b_j;\ j = 1, 2, \ldots, m\}$, такая, что для любого элемента $b \in G$ существует элемент вида b_j с номером $j \leqslant m$, удовлетворяющий неравенству

$$\sup_{i,x} |f(a_i x b) - f(a_i x b_j)| < \varepsilon.$$

Поэтому для любой пары элементов $a, b \in G$ мы можем найти такие a_k и $b_j (k \leqslant n,\ j \leqslant m)$, что

$$\sup_x |f(axb) - f(a_k x b_j)| < 2\varepsilon.$$

Это показывает, что множество функций $\{f_{a,b}(x);\ f_{a,b}(x) = f(axb),\ a, b \in G\}$ вполне ограничено по норме $\|h\| = \sup\limits_x |h(x)|$. Следовательно, непрерывная функция $f(x)$, заданная на группе G, почти-периодична.

Теперь можно обобщить результаты Петера — Вейля — Неймана, изложенные в предыдущем параграфе, распространив их на непрерывные комплексные функции $f(x)$, заданные на бикомпактной группе G. Для такой функции $f(x)$ и для любого $\varepsilon > 0$ определим множество

$$V = \left\{ y \in G;\quad \sup_x |f(x) - f(y^{-1}x)| < \varepsilon \right\}.$$

Множество V содержит элемент e и ввиду непрерывности функции f является открытым. Пространство G нормально, поэтому, согласно теореме Урысона, существует такая определенная на G непрерывная вещественная функция $k_1(x)$, что

$$0 \leqslant k_1(x) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad x \in G,\ k_1(e) = 1,\ k_1(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in V^C.$$

Тогда непрерывная функция

$$k(x) = 2^{-1}\left(k_1(x) + k_1(x^{-1})\right) \tag{2}$$

удовлетворяет условию $k(x^{-1}) = k(x)$ и

$$0 \leqslant k(x) \leqslant 1 \ \text{при}\ x \in G,\ k(e) = 1,$$
$$k(x) = 0 \ \text{для всех}\ x \in U^C,\ \text{где}\ U = V \cup V^{-1}.$$

Поэтому если обозначить B-пространство всех непрерывных комплексных функций $h(x)$, определенных на группе G, с нормой $\|h\| = \sup\limits_{x \in G} |h(x)|$ через $C(G)$, то можно определить линейный оператор T, отображающий пространство $\widehat{C}(G)$ в себя, полагая

$$(Th)(x) = (k_0 \times h)(x), \qquad x \in G. \tag{3}$$

Здесь, как и в предыдущем параграфе,

$$k_0(x) = k(x)/M_x(k(x)) \tag{4}$$

и $\widehat{C}(G)$ — предгильбертово пространство, которое получается из $C(G)$, если ввести скалярное произведение

$$(b, h) = M_y(b(y)\,\overline{h(y)}) = (b \times h^*)(e), \quad h^*(y) = \overline{h(y^{-1})}. \tag{5}$$

Отсюда, как и в предыдущем параграфе, мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. Всякая непрерывная комплексная функция $f(g)$, заданная на бикомпактной группе G, почти-периодична и может быть равномерно аппроксимирована на G линейными комбинациями матричных элементов непрерывных унитарных неприводимых матричных представлений группы G.

Два матричных представления $A_1(g)$ и $A_2(g)$ группы G мы назовем *эквивалентными*, если существует такая фиксированная невырожденная матрица B, что $B^{-1}A_1(g)B = A_2(g)$ для всех $g \in G$.

Предложение 2 (лемма Шура). Если представления $A_1(g)$ и $A_2(g)$ неприводимы и не эквивалентны, то не существует никакой матрицы B, кроме $B = 0$, для которой тождественно относительно $g \in G$ выполнялось бы условие

$$A_1(g)B = BA_2(g). \tag{6}$$

Здесь подразумевается, что B — прямоугольная матрица, имеющая n_1 строк и n_2 столбцов, где n_1, n_2 — соответственно порядки матриц $A_1(g)$ и $A_2(g)$.

Доказательство. Обозначим через X_1 и X_2 линейные пространства, в которых действуют соответственно линейные преобразования $A_1(g)$ и $A_2(g)$. Матрицу B в (6) можно рассматривать как матрицу линейного отображения $x_2 \to x_1 = Bx_2$ пространства X_2 в X_1. Линейное подпространство пространства X_1, состоящее из векторов вида $x_1 = Bx_2$, *инвариантно* по отношению к преобразованию $A_1(g)$, так как $A_1(g)x_1 = Bx_2'$, где $x_2' = A_2(g)x_2 \in X_2$. Из неприводимости представления $A_1(g)$ мы заключаем, что либо $Bx_2 = 0$ для всех $x_2 \in X_2$, т. е. $B = 0$, либо $X_1 = BX_2$. С другой стороны, множество векторов x_2 пространства X_2, таких, что $Bx_2 = 0$, инвариантно по отношению к преобразованию $A_2(g)$, так как для таких элементов $BA_2(g)x_2 = A_1(g)Bx_2 = 0$. Представление $A_2(g)$ также неприводимо, поэтому либо $Bx_2 = 0$ для всех $x_2 \in X_2$ и тогда $B = 0$, либо $x_2 = 0$ — единственный вектор пространства X_2, такой, что $Bx_2 = 0$. В последнем случае различные векторы пространства X_2 переводятся линейным отображением B в различные векторы пространства X_1. Это означает, что при $B \neq 0$ отображение B-пространства X_2 на X_1 взаимно однозначно. Отсюда следует, что матрица B невырожденная ($n_1 = n_2$)

и представления $A_1(g)$ и $A_2(g)$ эквивалентны, а это противоречит сделанным предположениям.

Предложение 3 (соотношения ортогональности). Пусть $A_1(g) = (a^1_{ij}(g))$ и $A_2(g) = (a^2_{kl}(g))$ — непрерывные унитарные неприводимые матричные представления бикомпактной группы G. Тогда справедливы следующие *соотношения ортогональности*:

$$
\begin{aligned}
&M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^2_{kl}(g)}\right) = 0, \text{ если } A_1(g) \text{ и } A_2(g) \text{ не эквивалентны;}\\
&M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^1_{kl}(g)}\right) = n_1^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl}, \text{ где } n_1 \text{ — порядок матрицы } A_1(g).
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Доказательство. Обозначим порядки матриц $A_1(g)$ и $A_2(g)$ соответственно через n_1 и n_2. Возьмем произвольную прямоугольную матрицу B из n_1 строк и n_2 столбцов и положим $A(g) = A_1(g)BA_2(g^{-1})$. Тогда матрица $A \equiv M_g(A(g))$ удовлетворяет условию $A_1(g)A = AA_2(g)$. В самом деле, в силу инвариантности среднего значения

$$
\begin{aligned}
A_1(y)AA_2(y^{-1}) &= M_g(A_1(y)A_1(g)BA_2(g^{-1})A_2(y^{-1})) = \\
&= M_g(A_1(yg)BA_2((yg)^{-1})) = A.
\end{aligned}
$$

По лемме Шура матрица A должна быть нулевой. Положим $B = (b_{jl})$, где все элементы, кроме одного, скажем b_{jl}, равны нулю. Тогда, согласно условию унитарности $A_2(g^{-1}) = \overline{A(g)'}$, мы получаем

$$M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^2_{kl}(g)}\right) = 0.$$

Далее мы, как и выше, получаем, что $A_1(g)A = AA_1(g)$, где $A = M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1}))$. Обозначим через α любое из собственных значений матрицы A. Для матрицы $(A - \alpha I_{n_1})$, где I_{n_1} — единичная матрица порядка n_1, выполняется равенство

$$A_1(g)(A - \alpha I_{n_1}) = (A - \alpha I_{n_1})A_1(g).$$

Тогда по лемме Шура матрица $(A - \alpha I_{n_1})$ либо невырожденна, либо $(A - \alpha I_{n_1}) = 0$. Первая возможность исключена, так как α — собственное значение A, поэтому $A = \alpha I_{n_1}$. Взяв *след* tr (сумму диагональных элементов) обеих частей равенства

$$A = M_g(A_1(g)BA_1(g^{-1})),$$

находим, что

$$n_1\alpha = \mathrm{tr}(A) = M_g\left(\mathrm{tr}\left(A_1(g)BA_1(g)^{-1}\right)\right) = M_g(\mathrm{tr}(B)) = \mathrm{tr}(B).$$

Выбрав теперь матрицу $B = (b_{jl})$ так, чтобы $b_{jl} = 1$, а все прочие элементы равнялись нулю, мы из равенства

$$M_g\left(A_1(g)BA_1(g^{-1})\right) = n_1^{-1}\,\mathrm{tr}(B)I_{n_1}$$

видим, что

$$M_g\left(a^1_{ij}(g)\overline{a^1_{kl}(g)}\right) = n_1^{-1}\delta_{ik}\delta_{jl}.$$

Следствие. Существует множество $\mathfrak{U}$ взаимно неэквивалентных непрерывных унитарных неприводимых матричных представлений $U(g) = (u_{ij}(g))$ бикомпактной группы G, удовлетворяющее следующим трем условиям:

(1°) для любой пары различных точек $g_1, g_2 \in G$ существует такая матрица $U(g) \in \mathfrak{U}$, что $U(g_1) \neq U(g_2)$;

(2°) если $U(g) \in \mathfrak{U}$, то *комплексно сопряженное представление* $\overline{U}(g)$ тоже входит в $\mathfrak{U}$;

(3°) если $U_1(g), U_2(g) \in \mathfrak{U}$, то произведение представлений $U_1(g) \times U_2(g)$, определенное ниже, разлагается в прямую сумму конечного числа представлений, принадлежащих $\mathfrak{U}$.

Доказательство. Произведение представлений $U_1(g) \times U_2(g)$ определяется следующим образом. Обозначим через $(e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1)$ и $(e_1^2, e_2^2, \ldots, e_m^2)$ ортонормированные базисы конечномерных гильбертовых пространств, в которых действуют соответственно операторы $U_1(g)$ и $U_2(g)$. Произведение этих гильбертовых пространств натянуто на *произведение базисов*, состоящее из nm векторов $e_i^1 \times e_j^2$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$). По отношению к этому базису произведение $U_1(g) \times U_2(g)$ представлений $U_1(g) = (u_{ij}^1(g))$ и $U_2(g) = (u_{kl}^2(g))$ определяется формулой

$$(U_1(g) \times U_2(g))(e_i^1 \times e_j^2) = \sum_{s,t} u_{si}^1(g) u_{tj}^2(g) (e_i^1 \times e_j^2).$$

Рассмотрим максимальную систему $\mathfrak{U}$ взаимно неэквивалентных непрерывных неприводимых унитарных представлений $U(g)$, удовлетворяющую условию (2°). Тогда из теоремы 1 легко выводится условие (1°). Условие (3°) тоже выполняется, так как произведение унитарных представлений унитарно и разлагается на неприводимые представления, принадлежащие семейству $\mathfrak{U}$.

Теперь мы можем перейти к формулировке *теоремы двойственности* (*теоремы Таннака*). Обозначим через $\mathfrak{R}$ совокупность всех *полиномов Фурье*

$$x(g) = \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g),$$

т. е. конечных линейных комбинаций элементов $u_{ij}^{(\alpha)}(g)$, где $(u_{ij}^{(\alpha)}(g)) \in \mathfrak{U}$ и $\gamma_{ij}^{(\alpha)}$ — комплексные числа. Множество $\mathfrak{R}$ с операцией умножения элементов, определенной как умножение функций, представляет собой кольцо с единицей u (единицей служит функция $u(g) \equiv 1$ при $g \in B$); в этом кольце операции сложения элементов и умножения элементов на комплексные числа определяются как операции сложения функций и умножения функций на комплексные числа. Пусть $\mathfrak{T}$ — множество всех *линейных гомоморфизмов* T кольца $\mathfrak{R}$ на поле комплексных чисел, удовлетворяющих условиям

$$Tu = 1, \quad T\bar{x} = \overline{Tx} \quad \text{(черта означает переход к комплексно сопряженным выражениям).} \tag{8}$$

Семейство $\mathfrak{T}$ не пусто, так как каждый элемент $g \in G$ порождает такой гомоморфизм T_g:

$$T_g x = x(g). \tag{9}$$

Из условия (1°) для $\mathfrak{U}$ видно, что

$$\text{если } g_1 \neq g_2, \text{ то } T_{g_1} \neq T_{g_2}. \tag{10}$$

Предложение 4. Множество $\mathfrak{T}$ можно рассматривать как группу, содержащую G в качестве подгруппы.

Доказательство. Определим произведение $T = T_1 \cdot T_2$ в $\mathfrak{T}$ следующим образом. Обозначим через

$$U^{(\alpha)}(g) = \left(u_{ij}^{(\alpha)}(g)\right) \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n_\alpha)$$

представления, входящие в $\mathfrak{U}$. Для элементов $u_{ij}^{(\alpha)}(gh) = \sum\limits_k u_{ik}^{(\alpha)}(g)\, u_{kj}^{(\alpha)}(h)$ положим

$$Tu_{ij}^{(\alpha)} = \sum_k T_1 u_{ik}^{(\alpha)} \cdot T_2 u_{kj}^{(\alpha)}. \tag{11}$$

Из соотношений ортогональности (7) видно, что функции вида $u_{ij}^{(\alpha)}(g)$, где $\left(u_{ij}^{(\alpha)}(g)\right) \in \mathfrak{U}$, линейно независимы на G. Это позволяет линейно продолжить оператор T на все кольцо $\mathfrak{R}$. Нетрудно видеть, что продолжение T принадлежит $\mathfrak{T}$ и что множество $\mathfrak{T}$ с операцией умножения $T = T_1 \cdot T_2$ представляет собой группу. В этой группе $\mathfrak{T}$ единицей служит элемент T_e (e — единица группы G) и $T_g^{-1} = Tg^{-1}$. Группа G, как вытекает из (11) и (10), может быть изоморфно вложена в группу $\mathfrak{T}$ с помощью соответствия $g \longleftrightarrow T_g$.

На самом деле имеет место следующий более тонкий результат.

Теорема 2 (Таннака). Соответствие $g \longleftrightarrow T_g$ определяет изоморфизм групп G и $\mathfrak{T}$, т. е. $G = \mathfrak{T}$ в том смысле, что каждый элемент $T \in \mathfrak{T}$ равен некоторому отображению вида T_g:

$$Tx = x(g) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathfrak{R}. \tag{12}$$

Доказательство. Введем в группе $\mathfrak{T}$ *слабую топологию*, считая множества вида

$$\{T \in \mathfrak{T};\ |Tx_i - T_e x_i| < \varepsilon_i \ (i = 1, 2, \ldots, n)\} \tag{13}$$

окрестностями единичного элемента $T_e \in \mathfrak{T}$. Группа $\mathfrak{T}$ с такой топологией образует бикомпактное топологическое пространство. В самом деле, из условий (8) и (11) видно, что $\sum\limits_s \left|Tu_{si}^{(\alpha)}(g)\right|^2 = (T \cdot T)(1) = 1$, а это означает, что $\mathfrak{T}$ можно рассматривать как замкнутое подмножество топологического произведения

$$\prod_{x \in \mathfrak{R}} \left\{z;\ |z| \leqslant \sup_{T \in \mathfrak{T}} |Tx|\right\}$$

бикомпактных пространств, к которому можно применить теорему Тихонова. Нетрудно видеть, что изоморфное вложение $g \leftrightarrow T_g$ является топологическим отображением, ибо взаимно однозначное непрерывное отображение одного бикомпактного пространства на другое представляет собой топологическое отображение. Таким образом, G можно рассматривать как замкнутую подгруппу бикомпактной группы $\mathfrak{T}$.

Каждый элемент $x(g) \in \mathfrak{R}$ порождает определенную на бикомпактной группе $\mathfrak{T}$ комплексную функцию $x(T) = T \cdot x$, которая непрерывна в слабой топологии пространства $\mathfrak{T}$, причем $x(T_g) = x(g)$. Множество всех таких непрерывных функций $x(T)$ образует кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ непрерывных комплексных функций, заданных на $\mathfrak{T}$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $1 = u(T) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$;

2) для любой пары различных точек $T_1, T_2 \in \mathfrak{T}$ существует такая функция $x(T) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, что $x(T_1) \neq x(T_2)$;

3) если $x(T) \in \mathfrak{R}(\mathfrak{T})$, то комплексно сопряженная функция $\overline{x}(T) = \overline{x(T)}$ также принадлежит $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$.

Допустим теперь, что множество $\mathfrak{T} - G$ не пусто. Так как бикомпактное пространство $\mathfrak{T}$ нормально, мы можем воспользоваться теоремой Урысона и утверждать, что существуют точка $T_0 \in (\mathfrak{T} - G)$ и непрерывная функция $y(T)$, заданная на $\mathfrak{T}$, такие, что

$$y(T) \geqslant 0 \text{ при } T \in \mathfrak{T}, \quad y(g) = y(T_g) = 0 \text{ при } g \in G, \quad y(T_0) = 1. \tag{14}$$

Так как кольцо $\mathfrak{R}(\mathfrak{T})$ удовлетворяет условиям 1) — 3), мы можем (см. введение) применить к нему теорему Стоуна — Вейерштрасса. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $x(g) = \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g) \in \mathfrak{R}$, такая, что $\left| y(T) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(T) \right| < \varepsilon$ при всех $T \in \mathfrak{T}$ и, в частности, $\left| y(g) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g) \right| < \varepsilon$ для всех значений $g \in G$. Мы можем, не ограничивая общности, допустить, что $u_{11}^{(\alpha_0)}(g) = u(g) = 1$ и что $u_{11}^{(\alpha_0)}$ входит в линейную комбинацию $x(g) = \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g)$ (можно считать, что $\gamma_{11}^{(\alpha_0)} = 0$). Взяв от выражений $y(T) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(T)$ и $y(g) - \sum \gamma_{ij}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(g)$ средние значения (соответственно в бикомпактных группах $\mathfrak{T}$ и G) и используя соотношения ортогональности (7), мы получаем

$$\left| M_T(y(T)) - \gamma_{11}^{(\alpha_0)} \right| < \varepsilon, \quad \left| M_g(y(g)) - \gamma_{11}^{(\alpha_0)} \right| < \varepsilon. \tag{15}$$

Но неравенства (15) не могут одновременно выполняться, так как из условия (14) видно, что $M_g(y(g)) = 0$ и $M_T(y(T)) > 0$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Приведенное выше доказательство теоремы Таннака взято из работы Иосида [14]. Первоначальное доказательство см. в работе Таннака [1]. Поскольку непрерывное неприводимое унитарное матричное представление бикомпактной абелевой группы G определяется непрерывной функцией $\chi(g)$ на G, удовлетворяющей условиям

$$\chi(g_1)\chi(g_2)=\chi(g_1, g_2) \quad \text{и} \quad |\chi(g)|=1,$$

из теоремы Таннака вытекает как частный случай известная теорема двойственности Понтрягина [1]. Дальнейшие ссылки см. в книге Наймарка [1].

Замечание 2. При определении средних значений непрерывных функций $f_k(g)$ ($k=1, 2, \ldots, m$) (заданных на G) методом, данным в гл. VIII, § 5, следует заменить прежнюю функцию расстояния метрикой

$$\operatorname{dis}(g_1, g_2)=\sup_{\substack{g,\, h\in G;\\ k=1,\, 2,\, \ldots,\, m}} |f_k(gg_1h)-f_k(gg_2h)|.$$

12. Функции самосопряженных операторов

Пусть $H=\int \lambda\, dE(\lambda)$ — спектральное разложение самосопряженного оператора H, заданного в гильбертовом пространстве X. Для произвольной комплексной бэровской функции $f(\lambda)$ рассмотрим множество

$$D(f(H))\equiv\left\{x\in X;\ \int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)x\|^2<\infty\right\}, \tag{1}$$

где интеграл берется относительно меры Бэра m, определенной формулой $m((\lambda_1, \lambda_2])=\|E(\lambda_2)x\|^2-\|E(\lambda_1)x\|^2$. Как и в случае непрерывных функций $f(\lambda)$, рассмотренных в гл. XI, § 5, нетрудно убедиться в том, что интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y), \quad x\in D(f(H)), \quad y\in X, \tag{2}$$

взятый относительно бэровской меры m, которая определяется соотношением $m((\lambda_1, \lambda_2])=(E(\lambda_2)x, y)-(E(\lambda_1)x, y)$, существует и конечен. Кроме того, выражение (2) как функция аргумента y представляет собой величину, комплексно сопряженную некоторому ограниченному линейному функционалу. Поэтому выражение (2) можно в соответствии с теоремой Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве (§ 6 гл. III) записать в виде скалярного произведения $(f(H)x, y)$, где $z=f(H)x\in X$. Это позволяет с помощью (1) и (2) определить линейный оператор $f(H)$, являющийся функцией самосопряженного оператора H:

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda). \tag{3}$$

Пример 1. Если H — ограниченный самосопряженный оператор и $f(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\lambda^j$, то, как и в гл. XI, § 5,

$$f(H)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dE(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j H^j.$$

Пример 2. Если $f(\lambda)=(\lambda-i)(\lambda+i)^{-1}$, то оператор $f(H)$ совпадает с преобразованием Кэли U_H оператора H. В самом деле, в этом случае $D(f(H))=X$, так как $|f(\lambda)|=1$ при вещественных λ. Кроме того, $E(\lambda_1)E(\lambda_2)=E(\min(\lambda_1,\lambda_2))$, и поэтому если составить произведение ограниченного самосопряженного оператора $(H-iI)^{-1}=$ $=\int(\lambda-i)^{-1}\,dE(\lambda)$ на оператор $f(H)=\int f(\lambda)\,dE(\lambda)$, то получится оператор $(H+iI)^{-1}=\int(\lambda+i)^{-1}\,dE(\lambda)$. Следовательно, $f(H)=U_H$.

Пример 3. Как и в § 5 гл. XI, мы имеем

$$\|f(H)x\|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|f(\lambda)|^2\,d\|E(\lambda)x\|^2 \quad \text{при всех} \quad x\in D(f(H)). \tag{4}$$

Определение. Рассмотрим в гильбертовом пространстве X некоторый линейный оператор A, не обязательно ограниченный, и ограниченный линейный оператор B. Если

$$\text{для всякого } x\in D(A) \text{ мы имеем } Bx\in D(A) \text{ и } ABx=BAx, \tag{5}$$

т. е. если $AB\supseteq BA$, то мы будем писать $B\in(A)'$ и говорить, что оператор B ***перестановочен*** с A. Таким образом, через $(A)'$ обозначается совокупность всех ограниченных линейных операторов, перестановочных с A.

Теорема 1. Для всякой функции $f(H)$ самосопряженного оператора $H=\int\lambda\,dE(\lambda)$, определенного в гильбертовом пространстве X, справедливо соотношение

$$(f(H))'\supseteq(H)', \tag{6}$$

т. е. всякий ограниченный линейный оператор, перестановочный с H, перестановочен и с оператором $f(H)$. (Так как, согласно теореме 2 гл. XI, § 5, $E(\lambda)\in(H)'$, то мы видим, в частности, что всякий оператор $E(\lambda)$ перестановочен с $f(H)$.)

Доказательство. Пусть $S\in(H)'$. Покажем, что оператор S перестановочен со всяким оператором $E(\lambda)$. Для этого убедимся сначала в том, что оператор S перестановочен с преобразованием Кэли U_H оператора H. Возьмем произвольный элемент $x\in D(H)$; тогда, поскольку $S \in (H)'$,

$$S(H+iI)x = (H+iI)Sx, \quad (H-iI)Sx = S(H-iI)x.$$

Полагая $(H+iI)x = y$, мы из первого равенства заключаем, что

$$(H+iI)^{-1}Sy = S(H+iI)^{-1}y \quad \text{для всех} \quad y \in X = R(H+iI).$$

Поэтому

$$S(H-iI)(H+iI)^{-1} = (H-iI)(H+iI)^{-1}S,$$

т. е. $SU_H = U_H S$.

Поскольку оператор S перестановочен с U_H, он перестановочен и с любой его степенью $(U_H)^n = \int\limits_0^{2\pi} e^{ni\theta}\,dF(\theta)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$ и, следовательно,

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{ni\theta} d(SF(\theta)x, y) = \left(S\int\limits_0^{2\pi} e^{ni\theta}\,dF(\theta)x, y\right) = \int\limits_0^{2\pi} e^{ni\theta} d(F(\theta)Sx, y).$$

Отсюда, как и при доказательстве единственности спектрального разложения унитарного оператора в § 4 гл. XI, мы находим, что $SF(\theta) = F(\theta)S$. Это показывает, что $SE(\lambda) = E(\lambda)S$, так как $E(-\operatorname{ctg}\theta) = F(\theta)$. Таким образом, для $x \in D(f(H))$

$$\left(S\int f(\lambda)\,dE(\lambda)x, y\right) = \int f(\lambda)\,d(SE(\lambda)x, y) = \int f(\lambda)\,d(E(\lambda)Sx, y),$$

т. е. $Sf(H) \subseteq f(H)S$.

Доказанная теорема допускает следующее обращение.

Теорема 2 (Нейман — Рисс — Мимура). Пусть самосопряженный оператор H определен в сепарабельном гильбертовом пространстве X. Рассмотрим в X замкнутый линейный оператор T, такой, что $D(T)^a = X$. Для того чтобы оператор T был равен некоторой функции $f(H)$ оператора H, где $f(\lambda)$ — всюду конечная бэровская функция, необходимо и достаточно, чтобы

$$(T)' \supseteq (H)'. \tag{7}$$

Доказательство. Мы должны лишь доказать, что условие (7) является достаточным. Можно считать оператор H ограниченным, ибо в противном случае можно перейти к оператору $H_1 = \operatorname{arctg} H$. Так как $|\operatorname{arctg}\lambda| \leqslant \pi/2$, оператор H_1 является ограниченным и самосопряженным. По теореме 1 оператор $H = \operatorname{tg} H_1$ перестановочен с любым оператором из семейства $(H_1)'$. Таким образом, по условию теоремы

$$(T)' \supseteq (H)' \supseteq (H_1)',$$

Если теорема будет доказана для оператора H_1, то

$$T = f_1(H_1) = f_1(\operatorname{arctg} H) = f_2(H), \quad \text{где} \quad f_2(\lambda) = f_1(\operatorname{arctg} \lambda).$$

Итак, будем считать, что H — ограниченный самосопряженный оператор.

Первый этап. Для всякого фиксированного элемента $x_0 \in D(T)$ мы можем найти такую бэровскую функцию $F(\lambda)$, что $Tx_0 = F(H)\,x_0$. Это построение проводится следующим образом. Обозначим через $M(x_0)$ наименьшее замкнутое линейное подпространство пространства X, натянутое на векторы $x_0, Hx_0, H^2x_0, \ldots, H^nx_0, \ldots$. Пусть L — оператор проектирования на подпространство $M(x_0)$. Тогда $(T)' \ni L$. В самом деле, $HM(x_0) \subseteq M(x_0)$, поэтому $HL = LHL$ и $LH = (HL)^* = (LHL)^* = LHL = HL$, т. е. $L \in (H)'$. Отсюда, согласно условиям теоремы, $(T)' \ni L$.

Следовательно, $Tx_0 = TLx_0 = LTx_0 \in M(x_0)$, и поэтому найдется такая последовательность $\{p_n(\lambda)\}$ полиномов $p_n(\lambda)$, что

$$Tx_0 = s\text{-}\lim_{n \to \infty} p_n(H)\,x_0. \tag{8}$$

Тогда, согласно формуле (4),

$$\| p_n(H)\,x_0 - p_m(H)\,x_0 \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} | p_n(\lambda) - p_m(\lambda) |^2 \, d\,\| E(\lambda)\,x_0 \|^2.$$

Теперь, как и при доказательстве полноты пространства $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$, мы приходим к выводу, что существует бэровская функция $F(\lambda)$ с интегрируемым квадратом относительно меры m, определяемой условием $m((\lambda_1, \lambda_2]) = \|E(\lambda_2)\,x_0\|^2 - \|E(\lambda_1)\,x_0\|^2$, такая, что

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} | F(\lambda) - p_n(\lambda) |^2 \, d\,\| E(\lambda)\,x_0 \|^2 = 0.$$

Следовательно, для оператора $F(H)$ имеет место соотношение

$$\lim_{n \to \infty} \|(F(H) - p_n(H))\,x_0\|^2 = \lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} | F(\lambda) - p_n(\lambda) |^2 \, d\,\| E(\lambda)\,x_0 \|^2 = 0.$$

Это показывает, что $Tx_0 = F(H)\,x_0$. Функция $F(\lambda)$ конечна m-п. в. (имеется в виду мера m, определенная условием $m((\lambda_1, \lambda_2]) = \|E(\lambda_2)\,x_0\|^2 - \|E(\lambda_1)\,x_0\|^2$), поэтому, переопределяя $F(\lambda)$ в тех точках, где $|F(\lambda)| = \infty$, например полагая $F(\lambda) = 0$ в таких точках, мы приходим к всюду конечной бэровской функции $F(\lambda)$, удовлетворяющей поставленным ранее требованиям.

Второй этап. Поскольку пространство X сепарабельно и $D(T)^a = X$, можно выбрать счетную последовательность $\{g_n\} \subseteq D(T)$, сильно плотную в X. Положим

$$f_1 = g_1,\quad f_2 = g_2 - L_1 g_2,\ \ldots,\ f_n = g_n - \sum_{k=1}^{n-1} L_k g_n, \tag{9}$$

где L_k — оператор проектирования на замкнутое линейное подпространство $M(f_k)$.

Согласно первому этапу доказательства, $(T)' \ni L_k$, поэтому

$$L_k g_n \in D(T), \text{ откуда следует, что } f_n \in D(T)\ (n = 1, 2, \ldots). \tag{10}$$

Покажем теперь, что

$$L_i L_k = 0 \quad \text{при} \quad i \neq k \tag{11}$$

и

$$I = \sum_{k=1}^{\infty} L_k. \tag{12}$$

Предположим, что равенство (11) доказано для $i,\ k < n$. Тогда при $i < n$

$$L_i f_n = L_i g_n - L_i \left(\sum_{k=1}^{n-1} L_k g_n \right) = L_i g_n - L_i^2 g_n = L_i g_n - L_i g_n = 0,$$

$$L_i H^{k'} f_n = H^{k'} L_i f_n = 0 \qquad (k' = 1, 2, \ldots).$$

Последнее означает, что подпространства $M(f_n)$ и $M(f_i)$ взаимно ортогональны и, следовательно, $L_i L_n = L_n L_i = 0$. Таким образом, свойство (11) оказывается справедливым для всех значений $i \neq k$.

Введем теперь оператор $P = \sum_{k=1}^{\infty} L_k$ и убедимся в том, что $Pg_n = g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Действительно, из равенств (9) следует, что

$$Pg_n = Pf_n + \sum_{k=1}^{n-1} PL_k g_n.$$

Кроме того, $Pf_n = f_n$, так как $f_n \in M(f_n)$. Поэтому, ввиду того что, как показывает условие (11), $PL_k = L_k$, мы получаем $Pg_n = g_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Но множество $\{g_n\}$ плотно в пространстве X; следовательно, $P = I$.

Третий этап. Выберем такую последовательность $\{c_n\}$ положительных чисел, что существуют пределы

$$s\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} c_n f_n \quad \text{и} \quad s\text{-}\lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n T f_n.$$

Например, можно положить $c_n = 2^{-n}(\|f_n\| + \|Tf_n\|)^{-1}$. Оператор T замкнут; следовательно,

$$x_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n \in D(T) \quad \text{и} \quad Tx_0 = y_0 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n T f_n. \tag{13}$$

Отсюда на основании результатов, установленных на первом этапе доказательства,

$$Tx_0 = F(H)\,x_0. \tag{14}$$

Пусть $B \in (H)'$ — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда по предположению $B \in (T)'$. Согласно теореме 1, оператор $F(H)$ перестановочен с B, поэтому

$$F(H)\,Bx_0 = BF(H)\,x_0 = BTx_0 = TBx_0. \tag{15}$$

Обозначим через $e_n(\lambda)$ характеристическую функцию множества $\{\lambda;\ |F(\lambda)| \leqslant n\}$ и положим

$$B = c_m^{-1} P_n H^k L_m, \quad \text{где} \quad P_n = e_n(H).$$

Докажем, что

$$TP_n = F(H)\,P_n. \tag{16}$$

Для этого заметим, что из условия (11) и включения $f_m \in M(f_m)$ вытекает равенство $L_m x_0 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n L_m f_n = c_m f_m$. Следовательно, учитывая (15), мы приходим к соотношению

$$\begin{aligned} F(H)\,P_n H^k f_m &= F(H)\,c_m^{-1} P_n H^k L_m x_0 = F(H)\,Bx_0 = TBx_0 = \\ &= Tc_m^{-1} P_n H^k L_m x_0 = TP_n H^k f_m, \end{aligned}$$

откуда видно, что для элементов h подпространства, натянутого на векторы $H^k f_m$ при фиксированном m, мы имеем

$$F(H)\,P_n h = TP_n h. \tag{16$'$}$$

Эти векторы h образуют в подпространстве $M(f_m)$ плотное множество, и если индекс m пробегает все положительные целые значения, то множество векторов h будет уже плотно во всем пространстве X. Следовательно, мы построили плотное в пространстве X множество векторов h, для которых выполняется равенство (16′).

По условию (4) операторы P_n ограничены. Из доказанной ниже теоремы 3 (операторное исчисление) следует, что оператор $F(H)\,P_n$ равен операторной функции $F_n(H)$, где

$$F_n(\lambda) = F(\lambda)\,e_n(\lambda) = \begin{cases} F(\lambda) & \text{при} \quad |F(\lambda)| \leqslant n, \\ 0 & \text{при} \quad |F(\lambda)| > n. \end{cases}$$

Таким образом, оператор $F_n(H) = F(H)\,P_n$ ограничен.

Возьмем теперь произвольный элемент $h^* \in X$ и выберем такую последовательность $\{h_j\}$ линейных комбинаций h_j векторов вида $H^k f_m$, что $h^* = s\text{-}\lim\limits_{j\to\infty} h_j$. Из доказанного ранее следует, что такой выбор последовательности $\{h\}$ осуществим. Так как каждый оператор вида

$F(H)P_n$ непрерывен, то

$$F(H)P_nh^* = s\text{-}\lim_{j\to\infty} F(H)P_nh_j.$$

Но $s\text{-}\lim\limits_{j\to\infty} P_nh_j = P_nh^*$, поэтому, принимая во внимание условие (16′), мы видим, что замкнутый оператор T удовлетворяет равенству (16).

Четвертый этап. Пусть $y \in D(F(H))$. Положим $y_n = P_ny$. Поскольку функция $F(\lambda)$ всюду конечна, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} P_n = I$. Следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} P_ny = y$. Таким образом, $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} F(H)P_ny = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} F_n(H)y = F(H)y$ при всех $y \in D(F(H))$, и ввиду свойства (16) мы получаем, что $T \supseteq F(H)$.

Пусть теперь $y \in D(T)$ и $y_n = P_ny$. Тогда

$$Ty_n = TP_ny = F(H)P_ny \quad \text{(согласно (16))},$$
$$TP_ny = P_nTy \quad (\text{так как } P_n = e_n(H) \in (H)').$$

Из приводимой ниже теоремы 3 (операторное исчисление) следует что функция $F(H)$ оператора H представляет собой замкнутый оператор. Поэтому, полагая в написанных выше равенствах $n\to\infty$, мы получаем соотношение $F(H) \supseteq T$. Итак, доказано, что $T = F(H)$.

Операторное исчисление

Теорема 3. (1°) Пусть $\bar{f}(\lambda)$ — функция, комплексно сопряженная к функции $f(\lambda)$. Тогда $D(\bar{f}(H)) = D(f(H))$ и для любых элементов x, $y \in D(f(H)) = D(\bar{f}(H))$

$$(f(H)x, y) = (x, \bar{f}(H)y). \tag{17}$$

(2°) Если $x \in D(f(H))$, $y \in D(g(H))$, то

$$(f(H)x, g(H)y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\bar{g}(\lambda)\,d(E(\lambda)x, y). \tag{18}$$

(3°) Если $x \in D(f(H))$, то $(\alpha f)(H)x = \alpha f(H)x$. Если $x \in D(f(H)) \cap D((g)(H))$, то

$$(f+g)(H)x = f(H)x + g(H)x. \tag{19}$$

(4°) Если $x \in D(f(H))$, то условие $f(H)x \in D(g(H))$ эквивалентно условию $x \in D((f\cdot g)(H))$, где $(f\cdot g)\ (\lambda) = f(\lambda)g(\lambda)$, и

$$g(H)f(H)x = (g\cdot f)(H)x. \tag{20}$$

(5°) Если функция $f(\lambda)$ всюду конечна, то $f(H)$ является нормальным оператором и

$$f(H)^* = \bar{f}(H). \tag{21}$$

В частности, если функция $f(\lambda)$ вещественна и всюду конечна, то оператор $f(H)$ самосопряженный.

Доказательство. (1°) Равенство $D(f(H)) = D(\bar{f}(H))$ очевидно; кроме того,

$$(f(H)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(x, E(\lambda)y) =$$
$$= \overline{(\bar{f}(H)y, x)} = (x, \bar{f}(H)y).$$

(2°) Как уже известно (теорема 1), оператор $E(\lambda)$ при всех λ перестановочен с $g(H)$. Поэтому

$$\begin{aligned}
(f(H)x, g(H)y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, g(H)y) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(x, E(\lambda)g(H)y) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d\overline{(g(H)E(\lambda)y, x)} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d_\lambda\left(\int_{-\infty}^{\infty} \overline{g(\mu)}\, d\overline{(E(\mu)E(\lambda)y, x)}\right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d_\lambda\left(\int_{-\infty}^{\lambda} \overline{g(\mu)}\, d\overline{(y, E(\mu)x)}\right) = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\, d(E(\lambda)x, y).
\end{aligned}$$

Утверждение (3°) очевидно.

(4°) Допустим, что элемент x удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)x\|^2 < \infty.$$

Тогда, поскольку $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu))$, из условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\, d\|E(\lambda)f(H)x\|^2 < \infty$$

ввиду перестановочности $E(\lambda)$ с $f(H)$ следует, что

$$\infty > \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda) f(H) x\|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d\|f(H) E(\lambda) x\|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\mu)|^2 d\|E(\mu) E(\lambda) x\|^2 \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2 d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} |f(\mu)|^2 d\|E(\mu) x\|^2 \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda) f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda) x\|^2.$$

Эти вычисления могут быть проведены в обратном порядке, откуда видно, что при $x \in D(f(H))$ условия $f(H) x \in D(g(H))$ и $x \in D((f \cdot g)(H))$ эквивалентны и

$$(g(H) f(H) x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d(E(\lambda) f(H) x, y) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) d_\lambda \left(\int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu) d(E(\mu) x, y) \right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) f(\lambda) d(E(\lambda) x, y) = ((g \cdot f)(H) x, y).$$

(5°) Положим $h(\lambda) = |f(\lambda)| + \alpha$, $k(\lambda) = h(\lambda)^{-1}$, $g(\lambda) = f(\lambda) h(\lambda)^{-1}$, где α — произвольное целое положительное число. Обе функции $k(\lambda)$ и $g(\lambda)$ ограничены. Поэтому $D(k(H)) = D(g(H)) = X$. Но тогда из (4°) следует, что

$$f(H) = h(H) g(H) = g(H) h(H). \tag{22}$$

Из (1°) и равенства $D(k(H)) = X$ вытекает, что $k(H)^* = k(H)$, т. е. оператор $k(H)$ самосопряженный. Из (4°) видно, что $x = h(H) k(H) x$ для всех $x \in X$ и $x = k(H) h(H) x$ при $x \in D(h(H))$. Следовательно, $h(H) = k(H)^{-1}$. Отсюда на основании теоремы 1 гл. VII, § 3, мы заключаем, что оператор $h(H)$ самосопряженный. Поэтому область определения $D(f(H)) = D(h(H))$ плотна в пространстве X, что позволяет определить сопряженный оператор $f(H)^*$, Покажем, что $f(H)^* = \bar{f}(H)$. Обозначим через $\{y, y^*\}$ произвольную пару элементов $y, y^* \in X$, удовлетворяющих условию $(f(H)x, y) = (x, y^*)$ при всех $x \in D(f(H))$. Тогда, согласно (22) и равенству $g(H)^* = \bar{g}(H)$ (которое следует из (1°)), мы получаем

$$(f(H)x, y) = (g(H)h(H)x, y) = (h(H)x, \bar{g}(H)y).$$

Отсюда для элементов $x \in D(f(H)) = D(h(H))$ с учетом самосопряженности оператора $h(H)$ следует, что

$$\bar{g}(H)y \in D(h(H)) \quad \text{и} \quad h(H)\bar{g}(H)y = y^*.$$

Используя снова условие (22), мы находим, что $\bar{f}(H)y = y^*$, и поэтому $f(H)^* = \bar{f}(H)$. Значит, в силу (4°) оператор $f(H)$ нормальный, т. е. $f(H)^* f(H) = f(H) f(H)^*$. Теорема доказана.

Следствие. Если функция $f(\lambda)$ всюду конечна, то оператор $f(H)$ замкнут.

Доказательство. Это утверждение следует из того, что $f(H)^{**} = \bar{f}(H)^* = \bar{\bar{f}}(H) = f(H)$.

Историческое замечание. Теорема 2 первоначально была доказана фон Нейманом [7] для случая ограниченного самосопряженного оператора T (см. Рисс [5]). Общий случай произвольного замкнутого линейного оператора T был исследован Мимура [2]. Приведенное в этой книге изложение заимствовано из работ Мимура [2] и Надя [1].

13. Теорема Стоуна и теорема Бохнера

Теорема 1 (Стоун). Пусть $\{U_t; -\infty < t < \infty\}$ — произвольная однопараметрическая группа класса (C_0) унитарных операторов в гильбертовом пространстве X. Тогда

$$U_t = f_t(H), \quad \text{где} \quad f_t(\lambda) = \exp(it\lambda), \quad iH = A, \quad H^* = H,$$

$$A \text{ — инфинитезимальный производящий оператор группы } \{U_t\}. \tag{1}$$

Обратно, для любого самосопряженного оператора H, заданного в гильбертовом пространстве X, семейство операторов

$$\{U_t = f_t(H), \quad f_t(\lambda) = \exp(it\lambda), \quad -\infty < t < \infty\}$$

образует однопараметрическую группу класса (C_0) унитарных операторов U_t.

Доказательство. По доказанной ранее теореме о представлении полугрупп

$$U_t x = s\text{-}\lim_{n\to\infty} \exp\left(tiH\left(I - n^{-1}iH\right)^{-1}\right)x,$$

где оператор H определяется условием $iH = A$. Поскольку функция $g(t) = \exp\left(ti\lambda(1 - n^{-1}i\lambda)^{-1}\right)$ по абсолютной величине не превосходит $\exp((-nt\lambda^2)/(n^2+\lambda^2))$, для оператора $H = \int \lambda\, dE(\lambda) = i^{-1}A$ справедливо равенство

$$\exp\left(tiH(I - n^{-1}iH)^{-1}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{ti\lambda}{1 - n^{-1}i\lambda}\right) dE(\lambda)$$

и, кроме того,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\exp\left(\frac{ti\lambda}{1-n^{-1}i\lambda}\right) - \exp(ti\lambda)\right|^2 d\,\|E(\lambda)\,x\|^2 =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left|\exp\left(\frac{-t\lambda^2}{n - i\lambda}\right) - 1\right|^2 d\,\|E(\lambda)\,x\|^2 = 0.$$

Это доказывает, что

$$U_t = f_t(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(it\lambda)\, dE(\lambda).$$

Для доказательства обратного утверждения теоремы заметим, что по теореме 3 предыдущего параграфа

$$f_t(H)^* = f_{-t}(H) \quad \text{и} \quad f_t(H)\, f_s(H) = f_{t+s}(H), \qquad f_0(H) = I.$$

Кроме того, функция $f_t(H)$ сильно непрерывна в точке $t = 0$, так как

$$\|f_t(H)\,x - x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\exp(it\lambda) - 1|^2\, d\,\|E(\lambda)\,x\|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad t \to 0.$$

Таким образом, операторы $U_t = f_t(H)$ образуют однопараметрическую группу унитарных операторов класса (C_0).

Замечание. Первоначальное доказательство этой теоремы см. у М. Стоуна [2]. Ср. с изложением фон Неймана [8]. Другое доказательство этой теоремы, предложенное Хопфом [1], опирается на следующую теорему Бохнера.

Теорема 2 (Бохнер). Для того чтобы непрерывную комплексную функцию $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, можно было представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dv(\lambda), \tag{2}$$

где $v(\lambda)$ — неубывающая непрерывная справа функция, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(t)$ была *положительно определенной* в следующем смысле:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds \geqslant 0 \tag{3}$$

для всякой непрерывной комплексной функции φ с бикомпактным носителем.

Доказательство теоремы 1, данное Хопфом, опирается на то, что функция $f(t)=(U_t x, x)$ удовлетворяет условию (3); это видно из неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(U_{t-s}x,\ x)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(U_t x,\ U_s x)\varphi(t)\overline{\varphi(s)}\,dt\,ds =$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)U_t x\,dt,\ \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(s)U_s x\,ds\right) \geqslant 0.$$

Вывод теоремы 2 из теоремы 1. Обозначим через $\mathfrak{F}$ совокупность всех комплексных функций $x(t)$ $(-\infty<t<\infty)$, которые обращаются в нуль всюду, за исключением, быть может, конечного множества значений t; эти конечные множества могут быть различными для разных функций $x(t)$. Введем в множестве $\mathfrak{F}$ операции

$$\begin{gathered}(x+y)(t)=x(t)+y(t), \qquad (\alpha x)(t)=\alpha x(t),\\ (x,\ y)=\sum_{-\infty<t,\ s<\infty} f(t-s)\,x(t)\overline{y(s)} \text{ для любых } x,\ y\in\mathfrak{F}\end{gathered} \tag{4}$$

[1].

Нетрудно видеть, что при этом для множества $\mathfrak{F}$ выполняются все аксиомы предгильбертова пространства, за исключением требования $x=0$, если $(x,x)=0$. Условие $(x,x)\geqslant 0$ для всех $x\in\mathfrak{F}$ следует непосредственно из положительной определенности функции $f(t)$.

Рассмотрим множество $\mathfrak{N}=\{x\in\mathfrak{F};\ (x,x)=0\}$. Факторпространство $\mathfrak{F}/\mathfrak{N}$ с операциями $\bar{x}+\bar{y}=\overline{(x+y)}$, $\alpha\bar{x}=\overline{(\alpha x)}$ и скалярным произведением $(\bar{x},\ \bar{y})=(x,\ y)$, где $\bar{x}$ — класс вычетов $\operatorname{mod}\mathfrak{N}$, содержащий $x\in\mathfrak{F}$, представляет собой предгильбертово пространство. Пусть $\widehat{X}$ — его пополнение. Определим для элементов $x(t)\in\mathfrak{F}$ оператор сдвига U_τ:

$$(U_\tau x)(t)=x(t+\tau), \qquad x\in\mathfrak{F}. \tag{5}$$

---

[1]) Запись $\sum\limits_{-\infty<t,\ s<\infty} f(t-s)\,x(t)\overline{y(s)}$ означает здесь суммирование по всем значениям t (их число конечно), при которых выражение $f(t-s)\,x(t)\,\bar{y}(s)$ отлично от нуля. — *Прим. перев.*

Операторы U_τ естественным образом распространяются на предгильбертово пространство $X = \mathfrak{F}/\mathfrak{N}$. Эти операторы U_τ удовлетворяют условиям

$$(U_\tau x, U_\tau y) = (x, y), \quad U_\tau U_\sigma = U_{\tau+\sigma} \quad \text{и} \quad U_0 = I, \tag{6}$$

поэтому U_τ можно расширить до унитарных операторов $\hat{U}_\tau$, заданных во всем гильбертовом пространстве $\hat{X}$, которые образуют однопараметрическую группу $\{\hat{U}_\tau; -\infty < \tau < \infty\}$ класса (C_0). Сильная непрерывность операторной функции $\hat{U}_t$ по переменной t вытекает из непрерывности функции $f(t)$.

Применяя к группе $\{\hat{U}_t\}$ теорему Стоуна, мы находим, что $\hat{U}_t = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda}\, dE(\lambda)$. Выберем из множества $\mathfrak{F}$ функцию

$$x_0(t) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t = \tau, \\ 0 & \text{при} \quad t \neq \tau, \end{cases}$$

где значение τ фиксировано. Из соотношений (4) и (5) следует, что $f(\tau) = (U_\tau x_0, x_0)$. Поэтому

$$f(\tau) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} d\, \| E(\lambda)\, \bar{x}_0 \|^2,$$

что и завершает доказательство теоремы Бохнера.

Замечание. Идея использования положительно определенной функции для построения предгильбертова пространства с операциями (4) была использована в работе Надя [3] для исследования ряда интересных задач, относящихся к гильбертовым пространствам.

14. Каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром

Пусть самосопряженный оператор $H = \int \lambda\, dE(\lambda)$, заданный в гильбертовом пространстве X, обладает простым спектром (см. § 8 гл. XI). Тогда существует элемент $y \in X$, такой, что множество $\{(E(\beta) - E(\alpha))\, y;\ \alpha < \beta\}$ порождает линейное подпространство, плотное в X. Положим

$$\sigma(\lambda) = (E(\lambda)\, y, y). \tag{1}$$

Ясно, что $\sigma(\lambda)$ — монотонная невозрастающая ограниченная и непрерывная справа функция. Обозначим через $\sigma(B)$ меру Бэра, определенную на бэровских множествах пространства R^1, которая порождается функцией $\sigma((a, b]) = \sigma(b) - \sigma(a)$. Рассмотрим совокупность

$L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ всех комплексных измеримых по Бэру функций $f(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, удовлетворяющих неравенству

$$\|f\|_\sigma = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \sigma(d\lambda) \right)^{1/2} < \infty.$$

Если условиться считать совпадающими всякие две функции $f, g \in L^2_\sigma$, которые совпадают σ-п. в., и ввести в L^2_σ скалярное произведение $(f, g)_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda)$, то множество L^2_σ превратится в гильбертово пространство, для которого мы сохраним обозначение $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$.

Теорема. Поставим в соответствие каждой функции $f(\lambda) \in L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ вектор $\hat{f}$ гильбертова пространства X, определенный равенством

$$\hat{f} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dE(\lambda)\, y. \tag{2}$$

Соответствие $f(\lambda) \to \hat{f}$ является взаимно однозначным изометрическим отображением пространства $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ на X. Обозначим это отображение через V: $\hat{f} = Vf$. Тогда оператор $H_1 = V^{-1}HV$ в пространстве $L^2_\sigma(-\infty, \infty)$ есть не что иное, как оператор умножения на λ:

$$\begin{gathered} D(H_1) = D(V^{-1}HV) = \{f(\lambda);\ f(\lambda) \text{ и } \lambda f(\lambda) \in L^2_\sigma(\infty, \infty)\} \\ \text{и } (H_1 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \quad \text{при всех} \quad f(\lambda) \in D(H_1). \end{gathered} \tag{3}$$

Доказательство. Так как $E(\lambda)E(\mu) = E(\min(\lambda, \mu))$, мы имеем

$$\begin{aligned} (E(\lambda)y, \hat{f}) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\mu)}\, d_\mu (E(\lambda)y, E(\mu)y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\mu)}\, d_\mu (E(\mu)E(\lambda)y, y) = \\ &= \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(\mu)}\, d(E(\mu)y, y) = \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(\mu)}\, \sigma(d\mu), \end{aligned}$$

и поэтому

$$(\hat{f}, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, d(E(\lambda)y, \hat{g}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\overline{g(\lambda)}\sigma(d\lambda) = (f, g)_\sigma. \tag{4}$$

Отсюда видно, что оператор V отображает область $D(V)=L^2_\sigma(-\infty,\infty)$ на множество $\left\{\hat{f};\ \hat{f}=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dE(\lambda)\,y,\ f\in L^2_\sigma(-\infty,\infty)\right\}$ взаимно однозначно, линейно и изометрично. Следовательно, область значений $R(V)$ является замкнутым подпространством пространства X. Но множество $R(V)$ состоит из элементов вида $\int\limits_{\alpha}^{\beta} dE(\lambda)\,y= =(E(\beta)-E(\alpha))\,y,\quad -\infty<\alpha<\beta<\infty$, и так как по предположению оператор H обладает простым спектром, $R(V)=R(V)^a=X$. Тем самым первая часть теоремы доказана.

Из равенства

$$E(\lambda)\hat{f}=E(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\,dE(\mu)\,y=$$
$$=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\mu)\,d_\mu(E(\lambda)E(\mu)\,y)=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)\,dE(\mu)\,y$$

на основании условия (4) выводится соотношение

$$(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{g})=\int\limits_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)\,\overline{g(\mu)}\,\sigma(d\mu). \tag{5}$$

Таким образом, неравенство $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2 d(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{f})<\infty$, эквивалентное условию $\hat{f}\in D(H)$, равносильно требованию $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,|f(\lambda)|^2\,\sigma(d\lambda)<\infty$. При выполнении последнего условия из соотношения (20) § 12 гл. XI вытекает формула

$$HVf=H\hat{f}=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)\,\hat{f},$$

откуда ввиду условий (4) и (5)

$$(H_1 f,\ g)_\sigma=\left(V^{-1}HVf,\ g\right)_\sigma=(HV\cdot f,\ V\cdot g)=$$
$$=(H\cdot\hat{f},\ \hat{g})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda\,d(E(\lambda)\hat{f},\ \hat{g})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\lambda f(\lambda)\,\overline{g(\lambda)}\,\sigma(d\lambda).$$

С другой стороны,

$$(H_1 f, g)_\sigma = \int_{-\infty}^{\infty} (H_1 f)(\lambda) \overline{g(\lambda)} \sigma(d\lambda).$$

Поэтому

$$(H_1 f)(\lambda) = \lambda f(\lambda) \qquad \sigma\text{-п. в.},$$

что и завершает доказательство.

Замечание. Существует тесная связь между самосопряженными операторами с простым спектром и так называемыми *матрицами Якоби*. См. по этому поводу М. Стоун [1], стр. 275. Каноническая форма самосопряженных операторов, спектр которых не обязательно является простым, рассматривалась фон Нейманом [9] [1]).

15. Индекс дефекта симметрического оператора. Обобщенное разложение единицы

Определение 1. Обозначим через $U = U_H = (H - iI)(H + iI)^{-1}$ преобразование Кэли замкнутого симметрического оператора H, определенного в гильбертовом пространстве X. Рассмотрим подпространства $X_H^+ = D(U_H)^\perp$ и $X_H^- = R(U_H)^\perp$ и обозначим через $m = \dim(X_H^+)$ и $n = \dim(X_H^-)$ соответственно размерности X_H^+ и X_H^-. Пара чисел (m, n) называется *индексом дефекта оператора* H. Для того чтобы симметрический оператор H был самосопряженным, необходимо и достаточно (см. гл. VII, § 4), чтобы его индекс дефекта был равен $(0, 0)$.

Предложение 1. Индекс дефекта (m, n) замкнутого симметрического оператора H можно определить следующим образом: m есть размерность линейного подпространства $\{x \in X;\ H^*x = ix\}$, n — размерность линейного подпространства $\{x \in X;\ H^*x = -ix\}$.

Доказательство. Справедливость этого утверждения с очевидностью вытекает из теоремы 3 § 4 гл. VII.

Пример 1. Пусть $X = L^2(0, 1)$. Обозначим через D совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0, 1)$, таких, что $x(0) = x(1) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0, 1)$. Тогда оператор $T_1 : T_1 x(t) = i^{-1}x'(t)$, заданный в области $D = D(T_1)$, имеет индекс дефекта $(1, 1)$.

Доказательство. Как было показано в примере 4 § 3 гл. VII, оператор $T_1^* = T_2$ определяется условием

$T_2 x(t) = i^{-1}x'(t)$ в области $D(T_2) = \{x(t) \in L^2(0, 1);$ функции $x(t)$ абсолютно непрерывны и $x'(t) \in L^2(0, 1)\}$.

---

[1]) См. также Ахиезер — Глазман [1]. — *Прим. перев.*

Следовательно, решение $y \in L^2(0, 1)$ уравнения $T_1^* y = T_2 y = iy$ определяет обобщенное решение дифференциального уравнения

$$y'(t) = -y(t) \qquad (y,\ y' \in L^2(0, 1)). \tag{1}$$

Функция $z(t) = y(t)\exp(t)$ является тогда обобщенным решением уравнения

$$z'(t) = 0 \qquad (z,\ z' \in L^2(0, 1)). \tag{2}$$

Покажем, что существует такая постоянная C, что $z(t) = C$ при почти всех значениях $t \in (0, 1)$. С этой целью возьмем произвольную функцию $x_0(t) \in C_0^\infty(0, 1)$, удовлетворяющую условию $\int_0^1 x_0(t)\,dt = 1$, и произвольную функцию $x(t) \in C_0^\infty(0, 1)$ и положим

$$u(t) = x(t) - x_0(t)\int_0^1 x(t)\,dt, \qquad w(t) = \int_0^t u(s)\,ds.$$

Так как $\int_0^1 u(s)\,ds = 0$, то $w \in C_0^\infty(0, 1)$. Поэтому, согласно (2),

$$-\int_0^1 z(t)\,w'(t)\,dt = -\int_0^1 z(t)\,u(t)\,dt = 0,$$

т. е.

$$\int_0^1 z(t)\,x(t)\,dt = C\int_0^1 x(t)\,dt, \quad \text{где} \quad C = \int_0^1 z(t)\,x_0(t)\,dt.$$

Отсюда ввиду произвольности выбора функции $x(t) \in C_0^\infty(0, 1)$ следует, что $z(t) = C$ при почти всех значениях $t \in (0, 1)$.

Следовательно, решения уравнения $T^* y = iy$ имеют вид $y(t) = C\exp(-t)$. Таким же способом можно обнаружить, что решения уравнения $T^* y = -iy$ имеют вид $y(t) = C\exp(t)$. Отсюда видно, что оператор T имеет индекс дефекта $(1, 1)$.

Определение 2. Симметрический оператор H, заданный в гильбертовом пространстве X, называется ***максимальным симметрическим оператором***, если не существует никакого собственного симметрического расширения оператора H.

Предложение 2. Всякий максимальный симметрический оператор H замкнут и $H = H^{**}$. Всякий самосопряженный оператор является максимальным симметрическим оператором.

Доказательство. Согласно предложению 1 § 3 гл. VII, оператор H^{**} служит замкнутым симметрическим расширением оператора H, откуда и вытекает первая часть доказываемого предложения. Пусть

H_0 — некоторое симметрическое расширение самосопряженного оператора H. Тогда, поскольку $H \subseteq H_0$ и $H_0 \subseteq H_0^*$, мы имеем $H_0 \subseteq H_0^* \subseteq H^*$, а так как $H = H^*$, то $H \subseteq H_0 \subseteq H$. Это и означает, что самосопряженный оператор H является максимальным симметрическим оператором.

Следствие 1. Всякое максимальное симметрическое расширение H_0 заданного симметрического оператора H является также расширением оператора H^{**}.

Доказательство. Из соотношения $H \subseteq H_0$ следует, что $H_0^* \subseteq H^*$ и $H^{**} \subseteq H_0^{**}$. Значит, в соответствии с предыдущим предложением $H_0 = H_0^{**}$, что и доказывает следствие 1.

Следствие 2. Если симметрический оператор H удовлетворяет условию $H^* = H^{**}$, то единственным его максимальным симметрическим расширением служит самосопряженный оператор H^*.

Доказательство. Оператор H^{**}, будучи самосопряженным, должен быть максимальным симметрическим оператором. Поэтому всякое максимальное симметрическое расширение H_0 оператора H, которое, согласно следствию 1, служит также и симметрическим расширением оператора H^{**}, совпадает с оператором $H^{**} = H^*$.

Теперь мы можем перейти к следующему определению.

Определение 3. Симметрический оператор H, удовлетворяющий условию $H^* = H^{**}$, называется *в существенном самосопряженным*. Этот термин ввел фон Нейман. По терминологии фон Неймана самосопряженный оператор H называется *гипермаксимальным*.

Пример 2. Пусть $X = L^2(-\infty, \infty)$; определим оператор H формулой $Hx(t) = t \cdot x(t)$ для $x(t) \in C_0^0(-\infty, \infty)$. Ясно, что H — симметрический оператор X. Нетрудно показать, что в данном случае H^* есть не что иное, как оператор координаты, определенный в примере 2 § 3 гл. VII, так что оператор H — в существенном самосопряженный. Оператор H, определяемый условием $Hx(t) = i^{-1}x'(t)$ для функций $x(t) \in C_0^1(-\infty, \infty)$, тоже является в существенном самосопряженным оператором, заданным в пространстве $X = L^2(-\infty, \infty)$. В самом деле, в этом случае H^* — оператор импульса, о котором говорилось в примере 3 § 3 гл. VII.

Теорема 1. Допустим, что индекс дефекта (m, n) некоторого замкнутого симметрического оператора H удовлетворяет условию

$$m = m' + p, \qquad n = n' + p \qquad (p > 0).$$

Тогда существует замкнутое симметрическое расширение H' оператора H, индекс дефекта которого равен (m', n').

Доказательство. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_{p+m'}\}$, $\{\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_p, \psi_{p+1}, \ldots, \psi_{p+n'}\}$ — полные ортонормальные системы соответственно подпространств $X_H^+ = D(U_H)^\perp$ и $X_H^- = R(U_H)^\perp$.

Определим изометрическое расширение V оператора U_H, полагая

$$V_x = U_H x \quad \text{при} \quad x \in D(U_H),$$

$$V \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \psi_i \quad \text{для} \quad x = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i \in X_H^+,$$

$$V\left(x + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i\right) = Vx + V \cdot \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i \quad (x \in D(U_H)).$$

Расширение $V \supseteq U_H$ определено, таким образом, в области $D(V) = D(U_H) \oplus \left\{ z \in X;\ z = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varphi_i \right\}$, причем $R(V) = R(U_H) \oplus \left\{ u \in X;\ u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \psi_i \right\}$. По теореме 1, гл. VII, § 4, имеем $R(I - U_H)^a = X$. Отсюда ввиду условия $R(I - V) \supseteq R(I - U_H)$ мы по теореме 2, гл. VII, § 4, можем заключить, что существует единственное замкнутое симметрическое расширение H' оператора H, для которого $V = (H' - iI)(H' + iI)^{-1}$. Индекс дефекта оператора H' равен (m', n'), так как $\dim\left(D(V)^{\perp}\right) = m'$, $\dim\left(R(V)^{\perp}\right) = n'$.

Следствие. Для того чтобы замкнутый симметрический оператор H с индексом дефекта (m, n) был максимальным симметрическим оператором, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одно из чисел m, n равнялось нулю.

Доказательство. Необходимость этого требования вытекает из теоремы 1. Достаточность легко доказывается. Пусть для определенности $m = 0$; тогда $U_{H_0} = U_H$ для любого замкнутого симметрического расширения H_0 оператора H, так как $D(U_H) = X$. Отсюда $H_0 = i(I + U_{H_0})(I - U_{H_0})^{-1} = i(I + U_H)(I - U_H)^{-1} = H$. Аналогично доказывается, что и в случае $n = 0$ оператор H не может иметь собственное замкнутое симметрическое расширение.

Пример 3. Пусть $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots\}$ — произвольная полная ортонормированная система (сепарабельного) гильбертова пространства X. Тогда условие

$$U \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \varphi_{i+1}, \quad \text{где} \quad \sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i|^2 < \infty,$$

определяет замкнутый изометрический оператор U, такой, что $D(U) = X$ и $\dim\left(R(U)^{\perp}\right) = 1$. Если $R(I - U)^a \neq X$, то найдется элемент $x \neq 0$, такой, что $x \in R(I - U)^{\perp}$. Следовательно, $((I - U)x, x) = 0$, и поэтому $(Ux, x) = \|x\|^2 = \|Ux\|^2$. Отсюда

$$\|(I - U)x\|^2 = \|x\|^2 - (Ux, x) - (x, Ux) + \|Ux\|^2 =$$
$$= \|x\|^2 - \|x\|^2 - \|x\|^2 + \|x\|^2 = 0,$$

т. е. $Ux=x$; следовательно, согласно определению оператора U, $x=0$. Полученное противоречие показывает, что $R(I-U)^a=X$. Таким образом, по теореме 2, гл. VII, § 4, оператор U должен быть преобразованием Кэли некоторого замкнутого симметрического оператора H. Индекс дефекта этого оператора H равен (0, 1), поскольку $D(U)=X$, и подпространство $R(U)^{\perp}$ натянуто на вектор φ_1. Итак, оператор H симметричен и максимален, не будучи самосопряженным.

Теорема 2 (Наймарк [3]). Пусть индекс дефекта замкнутого симметрического оператора H_1, заданного в гильбертовом пространстве X_1, равен (m, n). Можно построить гильбертово пространство X, содержащее X_1 как замкнутое линейное подпространство, и замкнутый симметрический оператор H, определенный в X, индекс дефекта которого равен $(m+n, m+n)$, удовлетворяющие условию

$$H_1=P(X_1)HP(X_1),$$

где $P(X_1)$ — оператор проектирования пространства X на подпространство X_1.

Доказательство. Рассмотрим гильбертово пространство X_2 той же размерности, что и X_1. Построим в пространстве X_2 замкнутый симметрический оператор H_2 с индексом дефекта (n, m). Можно, например, положить $X_2=X_1$ и $H_2=-H_1$. В этом случае $\{x\in X_2;\ H_2^*x=ix\}=\{x\in X_1;\ H_1^*x=-ix\}$, $\{x\in X_2;\ H_2^*x=-ix\}=\{x\in X_1;\ H_1^*x=ix\}$, так что индекс дефекта оператора H_2 действительно равен (n, m).

Определим теперь в пространстве $X_1\times X_2$ оператор H вида

$$H\{x, y\}=\{H_1x, H_2y\} \quad \text{при} \quad \{x, y\}\in X_1\times X_2,$$

где

$$x\in D(H_1), \quad y\in D(H_2).$$

Оператор H, заданный в гильбертовом пространстве $X=X_1\times X_2$, как нетрудно заметить, симметричен и замкнут. Условие $H^*\{x, y\}=i\{x, y\}$ (или условие $H^*\{x, y\}=-i\{x, y\}$) означает, что $H_1^*x=ix$, $H_2^*y=iy$ (соответственно $H_1^*x=-ix$, $H_2^*y=-iy$). Следовательно, индекс дефекта оператора H действительно равен $(m+n, m+n)$.

Следствие. Пусть в соответствии с теоремой 1 $\hat{H}$ — самосопряженное расширение построенного выше оператора, и пусть $\hat{H}=\int\lambda\,d\hat{E}(\lambda)$ — спектральное разложение оператора $\hat{H}$. Так как H и тем более $\hat{H}$ служат расширениями оператора H_1, если рассматривать H_1 как оператор в пространстве $X=X_1\times X_2$, то имеет место следующее:

Если $x \in D(H_1) \subseteq X_1 = P(X_1)X$, то $x = P(X_1)x \in D(\hat{H})$ и

$$H_1 x = P(X_1)\hat{H}x = P(X_1)\hat{H}P(X_1)x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dF(\lambda)\, x, \tag{3}$$

где $F(\lambda) = P(X_1)\hat{E}(\lambda)P(X_1)$.

Система[1]) операторов $\{F(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$ удовлетворяет, очевидно, следующим условиям:

$$\begin{gathered} F(\lambda) \text{ при каждом } \lambda \text{ есть самосопряженный оператор в } X_1; \\ \text{если } \lambda_1 < \lambda_2, \text{ то } (F(\lambda_1)x, x) \leqslant (F(\lambda_2)x, x) \text{ при любом } x \in X_1; \\ F(\lambda + 0) = F(\lambda); \\ F(-\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda \downarrow -\infty} F(\lambda)x = 0, \quad x \in X; \\ F(\infty)x = s\text{-}\lim_{\lambda \uparrow \infty} F(\lambda)x = x \quad \text{при всех } x \in X. \end{gathered} \tag{4}$$

Замечание 1. Для замкнутого симметрического оператора H_1 мы получили представление вида

$$H_1 x = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dF(\lambda)\, x \quad \text{при всех} \quad x \in D(H_1),$$

где семейство операторов $\{F(\lambda);\ -\infty < \lambda < \infty\}$ удовлетворяет условиям (4). Это представление мы назовем *обобщенным спектральным разложением* замкнутого симметрического оператора H_1.

Пример 4. Пусть $X_1 = L^2(-\infty, 0)$; обозначим через D_1 совокупность всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(-\infty, 0)$, таких, что $x(0) = 0$ и $x'(t) \in L^2(-\infty, 0)$. Тогда оператор H_1, определенный формулой $H_1 x(t) = i^{-1}x'(t)$ на $D_1 = D(H_1)$, симметричен и максимален, а его индекс дефекта равен (0, 1) (это устанавливается так же, как в примере 1). Положим $X_2 = L^2(0, \infty)$, а в качестве области $D_2 \subseteq X_2$ выберем множество всех абсолютно непрерывных функций $x(t) \in L^2(0, \infty)$, таких, что $x(0) = 0$ и $x'(t) \in L^2(0, \infty)$. Оператор H_2 вида $H_2 x(t) = i^{-1}x'(t)$ при $x(t) \in D_2 = D(H_2)$ представляет собой максимальный симметрический оператор с индексом дефекта (1, 0). Теперь можно положить $X = X_1 \times X_2 = L^2(-\infty, \infty)$, и тогда оператор H, построенный в доказательстве теоремы 2, определяется формулой $Hx(t) = i^{-1}x'(t)$ для функций $x(t) \in L^2(-\infty, \infty)$, таких, что $x(0) = 0$ и $x'(t) \in L^2(-\infty, \infty)$.

---

[1]) Систему операторов $F(\lambda)$, удовлетворяющих условиям (4), называют *обобщенным разложением единицы.* — *Прим. перев.*

Замечание 2. Так как оператор $\hat{H} = \int \lambda \, d\hat{E}(\lambda)$, о котором говорится в теореме 2, служит расширением оператора H_1, для элементов $x \in D(H_1)$ справедливо равенство

$$\|H_1 x\|^2 = \|\hat{H} x\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, \|\hat{E}(\lambda) x\|^2 =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, (\hat{E}(\lambda) x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, (\hat{E}(\lambda) P(X_1) x, P(X_1) x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, (F(\lambda) x, x).$$

Однако из условия $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, (F(\lambda) x, x) < \infty$ не следует, вообще говоря, что $x \in D(H_1)$. Следующая теорема относится к этому вопросу.

Теорема 3. Если H_1 — максимальный симметрический оператор, то условие $x \in D(H_1)$ эквивалентно неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, (F(\lambda) x, x) < \infty, \quad x \in X_1, \tag{5}$$

где $\{F(\lambda)\}$ — обобщенное разложение единицы, соответствующее обобщенному спектральному разложению $\int \lambda \, dF(\lambda)$ оператора H_1 в пространстве X_1.

Доказательство. Вычисления, проведенные в замечании 2, показывают, что условие $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, (F(\lambda) x, x) < \infty$ влечет за собой неравенство $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, \|\hat{E}(\lambda) x\|^2 < \infty$, а это означает, что $x \in D(\hat{H})$. Оператор

$$H' = P(X_1) \hat{H} P(X_1),$$

если его рассматривать как оператор, действующий в пространстве X_1, является симметрическим расширением оператора H_1 и $D(H') = D(\hat{H}) \cap X_1$. Поэтому из свойства максимальности H_1 следует, что $H_1 = H'$. Таким образом, $D(H_1) = D(H') = D(\hat{H}) \cap X_1$ и вследствие равенства $H' = P(X_1) \hat{H} P(X_1)$ условие $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, \|\hat{E}(\lambda) x\|^2 < \infty$ при

$x \in X_1$ влечет за собой включение $x \in D(H_1)$. Без труда также устанавливается, что для любого элемента $x \in D(H_1)$ выполняется неравенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(F(\lambda)x, x) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d\, \|\hat{E}(\lambda)x\|^2 < \infty.$$

Замечание 3. По теореме 1 всякий замкнутый симметрический оператор может быть расширен до некоторого максимального симметрического оператора H_1, и поэтому, применяя к этому расширению теорему 3, мы видим, что условие (5) в этом случае имеет место. Детальное изложение вопросов, касающихся обобщенного спектрального разложения, см. в работах Ахиезера — Глазмана [1] или Надя [3]. Спектральное представление, полученное для самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, может быть с некоторыми модификациями распространено на определенный класс линейных операторов в банаховом пространстве. Эти результаты, принадлежащие Данфорду, можно рассматривать как обобщение „теории элементарных делителей“ для бесконечномерных пространств. См. Данфорд — Шварц [6].

16. Групповое кольцо L^1 и тауберова теорема Винера

Обратимся к еще одному важному приложению гельфандовского представления, а именно к доказательству тауберовой теоремы Винера с помощью функционально-операторного подхода.

Линейное пространство $L^1(-\infty, \infty)$ образует кольцо по отношению к операции умножения, определенной как операция свертки

$$(f \times g)(t) = (f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds. \tag{1}$$

В самом деле, по теореме Фубини — Тонелли

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)\, g(s)\, ds \right| dt \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |f(t-s)|\, dt \int_{-\infty}^{\infty} |g(s)|\, ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|\, dt,$$

так что $(f * g)(t) \in L^1(-\infty, \infty)$, если $f, g \in L^1(-\infty, \infty)$. Полученное неравенство показывает, что

$$\|f \times g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|, \tag{2}$$

где $\| \quad \|$ — норма в пространстве $L^1(-\infty, \infty)$.

Таким образом, мы доказали

Предложение 1. Если формально присоединить к кольцу L^1 единичный элемент e и условиться считать элементами этого кольца символы $\tilde{z}$ вида

$$\tilde{z} = \lambda e + x, \qquad x \in L^1(-\infty, \infty), \tag{3}$$

то L^1 можно рассматривать как нормированное кольцо, в котором операции и норма определяются следующими правилами:

$$\begin{gathered}(\lambda_1 e + x_1) + (\lambda_2 e + x_2) = (\lambda_1 + \lambda_2) e + (x_1 + x_2),\\ \alpha(\lambda e + x) = (\alpha\lambda) e + \alpha x,\\ (\lambda_1 e + x_1) \times (\lambda_2 e + x_2) = \lambda_1\lambda_2 e + \lambda_1 x_2 + \lambda_2 x_1 + x_1 \times x_2,\\ \|\lambda e + x\| = |\lambda| + \|x\|.\end{gathered} \tag{4}$$

Полученное таким способом нормированное кольцо L^1 называется *групповым кольцом* аддитивной группы R^1 вещественных чисел[1]). Наша ближайшая задача состоит в том, чтобы найти все максимальные идеалы этого кольца L^1. Один из этих идеалов — само пространство $L^1(-\infty, \infty) = I_0$, из которого кольцо L^1 было получено присоединением единицы e. Найдем теперь все максимальные идеалы $I \neq I_0$ кольца L^1.

Для произвольного максимального идеала I нормированного кольца L^1 обозначим через $(\tilde{z}, I)$ комплексное число, которое соответствует элементу $\tilde{z}$ при гомоморфизме колец $L^1 \to L^1/I$. Таким образом, $(\tilde{z}, I_0) = \lambda$ для $\tilde{z} = \lambda e + x$, $x \in I_0$.

Рассмотрим максимальный идеал I кольца L^1, отличный от I_0. Тогда существует функция $x \in L^1(-\infty, \infty) = I_0$, такая, что $(x, I) \neq 0$. Положим

$$\chi(\alpha) = (x_\alpha, I)/(x, I), \quad \text{где} \quad x_\alpha(t) = x(t+\alpha). \tag{5}$$

Тогда определенная для всех вещественных значений α функция $\chi(\alpha)$ обладает тем свойством, что $\chi(0) = 1$ и $|\chi(\alpha)| \leqslant \|x\|/|(x, I)|$ (последнее неравенство вытекает из того, что $|(x_\alpha, I)| \leqslant \|x_\alpha\| = \|x\|$). Таким образом, функция $\chi(\alpha)$ ограничена по α. Кроме того,

$$|\chi(\alpha+\delta) - \chi(\alpha)| \leqslant \|x_{\alpha+\delta} - x_\alpha\|/|(x, I)|,$$

откуда видно, что функция $\chi(\alpha)$ непрерывна по α, так как, согласно условию (2) из § 1 гл. X,

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} |x(\alpha+\delta+t) - x(\alpha+t)|\, dt = 0.$$

---

[1]) Общее определение группового кольца абстрактной коммутативной локально бикомпактной топологической группы см., например, в книге Гельфанда — Райкова — Шилова [5]. — *Прим. перев.*

Из очевидного равенства $(x_{\alpha+\beta}\times x)(t)=(x_\alpha\times x_\beta)(t)$ следует, что

$$(x_{\alpha+\beta},\ I)(x,\ I)=(x_\alpha,\ I)(x_\beta,\ I),$$

откуда

$$\chi(\alpha+\beta)=\chi(\alpha)\chi(\beta). \tag{6}$$

Из равенства (6) вытекает, что существует единственное вещественное число $\xi=\xi(I)$, такое, что

$$\chi(\alpha)=\exp(i\cdot\xi(I)\cdot\alpha). \tag{7}$$

Действительно, так как $\chi(n\alpha)=\chi(\alpha)^n$ и функция $\chi(\alpha)$ ограничена, имеем $|\chi(\alpha)|\leqslant 1$. Но $\chi(\alpha)\chi(-\alpha)=\chi(0)=1$, поэтому $|\chi(\alpha)|=1$. Таким образом, функция $\chi(\alpha)$, будучи непрерывным решением уравнения (6) с абсолютной величиной 1, должна иметь вид (7). Из свойства $x_\alpha\times y=x\times y_\alpha$ следует, что $\chi(\alpha)\ (y,\ I)=(y_\alpha,\ I)$, откуда видно, что величина $\xi(I)$ в действительности не зависит от выбора функции $x\in L^1(-\infty,\ \infty)$ и однозначно определяется идеалом I.

Всякое непрерывное решение уравнения (6), абсолютная величина которого тождественно равна единице, называется *непрерывным унитарным характером* аддитивной группы R^1 вещественных чисел.

Характер $\chi(\alpha)$, построенный выше, мы будем называть непрерывным характером группы R^1, порожденным максимальным идеалом $I\neq I_0$.

Покажем теперь, как, зная характер $\chi(\alpha)$, порожденный идеалом I, можно определить максимальный идеал I или, что то же самое, как восстановить величину $(z,\ I)$ по заданному характеру χ.

Для любой функции $y(t)\in L^1(-\infty,\ \infty)$ имеем

$$(x\times y)(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t-s)\,y(s)\,ds=\int_{-\infty}^{\infty}x_{-s}(t)\,y(s)\,ds.$$

Поэтому из свойства (5), учитывая непрерывность гомоморфизма колец $L^1\to L^1/I$, мы получаем

$$(x\times y,\ I)=(x,\ I)(y,\ I)=(x,\ I)\int_{-\infty}^{\infty}\chi(-s)\,y(s)\,ds.$$

Отсюда, ввиду того что $(x,\ I)\neq 0$, мы выводим соотношение

$$(y,\ I)=\int_{-\infty}^{\infty}y(s)\exp(-i\cdot\xi(I)\cdot s)\,ds. \tag{8}$$

Следовательно, для любого элемента $\tilde{z}=\lambda e+x$, где $x\in L^1(-\infty,\ \infty)$,

$$(\tilde{z},\ I)=(\lambda e,\ I)+(x,\ I)=\lambda+\int_{-\infty}^{\infty}x(s)\exp(-i\cdot\xi(I)\cdot s)\,ds. \tag{9}$$

Итак, максимальный идеал I, порождающий данный характер χ, определяется однозначно.

Возьмем теперь произвольный (непрерывный, унитарный) характер $\chi(\alpha) = \exp(i \cdot \xi \cdot \alpha)$ группы R^1 и определим отображение

$$\tilde{z} \to \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} x(s) \exp(-i \cdot \xi \cdot s)\, ds \qquad (\tilde{z} = \lambda e + x,\ x \in L^1(-\infty, \infty)). \tag{10}$$

Ясно, что формула (10) определяет гомоморфизм кольца L^1 на поле комплексных чисел, так как по теореме Фубини — Тонелли

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x_1 \times x_2)(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt.$$

Это означает, что всякий непрерывный характер χ определяет некоторый максимальный идеал I. Мы будем говорить, что идеал I, построенный таким способом, порождается характером χ. Нетрудно заметить, что идеал, порожденный некоторым характером, порождает этот характер и, обратно, характер, порожденный максимальным идеалом, порождает этот идеал. Кроме того, очевидно, что всякий идеал порождается единственным характером и, обратно, всякий характер порождается единственным идеалом.

Тем самым доказана следующая

Теорема 1 (Гельфанд [4], Райков [1]). *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством всех максимальных идеалов $I \neq L^1(-\infty, \infty)$ группового кольца L^1 аддитивной группы R^1 вещественных чисел и множеством всех непрерывных унитарных характеров $\chi(\alpha)$ группы R^1. Это соответствие определяется формулой* (9).

Покажем, что нормированное кольцо L^1 является полупростым или, что то же самое (см. гл. XI, § 2), справедлива

Теорема 2. *В нормированном кольце L^1 не существует обобщенных нильпотентных элементов, отличных от нулевого.*

Доказательство. Пусть $x \in L^1(-\infty, \infty)$ и $y \in L^2(-\infty, \infty)$. Тогда, применяя неравенство Шварца, мы получаем

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s) y(s)\, ds \right| \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)|\, ds \int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)| \cdot |y(s)|^2\, ds \right)^{1/2}.$$

По теореме Фубини — Тонелли левая часть принадлежит $L^2(-\infty, \infty)$ и

$$\| x \times y \|_2 \leqslant \| x \| \cdot \| y \|_2, \tag{11}$$

где $\| \ \|_2$ — норма в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Следовательно, формула

$$(T_x y)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)\, y(s)\, ds \quad \text{для всех} \quad x \in L^1(-\infty, \infty) \tag{12}$$

определяет ограниченный линейный оператор T_x, отображающий пространство $L^2(-\infty, \infty)$ в себя, и, кроме того,

$$\| T_x \|_2 \leqslant \| x \|, \tag{13}$$

$$T_x^* = T_{x^*}, \quad \text{где} \quad x^*(t) = \overline{x(-t)}. \tag{14}$$

Используя теорему Фубини — Тонелли еще раз, мы приходим к заключению, что

$$T_x T_x^* = T_{x \times x^*} = T_{x^* \times x} = T_x^* T_x, \text{ т. е. } T_x \text{—нормальный оператор.} \tag{15}$$

Поэтому (см. гл. XI, § 3) $\| T_x \|_2 = \lim\limits_{n \to \infty} \left(\| T_x^n \|_2 \right)^{1/n}$. Учитывая теперь, что

$$\| \underbrace{x \times x \times x \times \ \ldots \ \times x}_{n \text{ сомножителей}} \| \geqslant \| T_x^n \|_2,$$

мы видим, что если x — обобщенный нильпотентный элемент, то $\| T_x \|_2 = 0$. Основываясь на этом, легко доказать, что в этом случае x — нулевой вектор пространства $L^1(-\infty, \infty)$.

Допустим теперь, что $\tilde{z} = \lambda e + x$, где $x \in L^1(-\infty, \infty)$ — некоторый обобщенный нильпотентный элемент нормированного кольца L^1. Тогда для любого максимального идеала I кольца L^1 должно выполняться соотношение $(\tilde{z}, I) = \lambda + (x, I) = 0$. Следовательно, преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt$$

должно тождественно равняться $-(2\pi)^{-1/2}\lambda$. Отсюда следует, что $\lambda = 0$, так как по известной теореме Римана — Лебега

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt \right| =$$

$$= \left| 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x(t) - x\left(t + \frac{\pi}{\xi}\right) \right] \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant 2^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \left| x(t) - x\left(t + \frac{\pi}{\xi}\right) \right| dt \to 0 \quad \text{при} \quad \xi \to \infty.$$

Таким образом, всякий обобщенный нильпотентный элемент $\tilde{z} \in L^1$ имеет вид $\tilde{z} = 0 \cdot e + x = x$, где $x \in L^1(-\infty, \infty)$, и поэтому, как показано выше, $\tilde{z} = x = 0$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую *тауберову теорему Винера* [2].

Теорема 3. Допустим, что преобразование Фурье

$$(2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt$$

некоторой функции $x(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ не обращается в нуль ни при каком вещественном ξ. Тогда для всякой функции $y(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ и любого $\varepsilon > 0$ можно указать положительное целое число N, комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_N$ и вещественные числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$, такие, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| y(t) - \sum_{j=1}^{N} \alpha_j x(t - \beta_j) \right| dt < \varepsilon. \tag{16}$$

Доказательство. Достаточно, очевидно, показать, что существует такой элемент $\tilde{z} \in L^1$, для которого

$$\| y - x \times \tilde{z} \| \leqslant \varepsilon/2 \text{ }^{1)}. \tag{17}$$

---

¹) Действительно, пусть $\tilde{z} = \lambda e + g$, $g \in L^1(-\infty, \infty)$. Примем за комбинации $\sum_{j=1}^{N} \alpha_j x(t - \beta_j)$ суммы вида $A \equiv \lambda x(t) + \sum_{k=-N_1}^{N_1} x(t - k\mu) \int_{k\mu}^{(k+1)\mu} g(u)\, du$.

Тогда

$$\lim_{\substack{\mu N_1 \to \infty \\ \mu \to 0}} \| x \times \tilde{z} - A \| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\mu \to 0} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} x(t-u) g(u)\, du - \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t - k\mu) \int_{k\mu}^{(k+1)\mu} g(u)\, du \right\| +$$

$$+ \lim_{\substack{\mu N_1 \to \infty \\ \mu \to 0}} \left\| \sum_{|k| \geqslant N_1 + 1} x(t - k\mu) \int_{k\mu}^{(k+1)\mu} g(u)\, du \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{\mu \to 0} \| g \| \cdot \max_{0 \leqslant \delta \leqslant \mu} \int_{-\infty}^{\infty} | x(t+\delta) - x(t) |\, dt + \lim_{\substack{N_1\mu \to \infty \\ \mu \to 0}} \| f \| \int_{|u| \geqslant N_1 \mu} | g(u) |\, du = 0.$$

Покажем сначала, что

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)-y^{(\alpha)}(t)|\,dt=0,$$
$$\text{где } y^{(\alpha)}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}y(t-s)\,\frac{1-\cos\alpha s}{\alpha s^2}\,ds. \tag{18}$$

В самом деле, так как $\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos\alpha s)(\alpha s^2)^{-1}\,ds=\pi$ при $\alpha>0$, то

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|y(t)-y^{(\alpha)}(t)|\,dt\leqslant$$
$$\leqslant(\pi)^{-1}\lim_{\alpha\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos s)}{s^2}\,ds\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|y(t)-y\left(t-\frac{s}{\alpha}\right)\right|dt\right\}=0.$$

Далее, используя равенство

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\alpha}^{\alpha}(1-|\xi|/\alpha)\,e^{i\xi u}\,d\xi=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{0}^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)\cos u\xi\cdot d\xi=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{u}\int_{0}^{\alpha}\left(1-\frac{\xi}{\alpha}\right)d(\sin u\xi)=$$
$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\int_{0}^{\alpha}\frac{\sin u\xi}{u\alpha}\,d\xi=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos u\alpha}{u^2\alpha}$$

и применяя теорему Планшереля (гл. VI, § 2), мы находим, что

$$(2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1-\cos\alpha u}{\alpha u^2}\,e^{-iu\xi}\,du=\begin{cases}1-|\xi|/\alpha & \text{при } |\xi|<\alpha,\\ 0 & \text{при } |\xi|\geqslant\alpha.\end{cases} \tag{19}$$

Поэтому найдется функция вида $\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)$, такая, что $\Big\|x\times\tilde{z}-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)\Big\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, $\Big\|y-\sum_{j=1}^{N}\alpha_j x(t-\beta_j)\Big\|\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$, что и требуется установить. — *Прим. перев.*

Следовательно, согласно равенству Парсеваля для преобразования Фурье, функция $y^{(\alpha)}(t)$ удовлетворяет при $|\xi| \geqslant \alpha$ уравнению

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^{(\alpha)}(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt = 0. \tag{20}$$

Таким образом, без ограничения общности можно считать, что функция $y \in L^1(-\infty, \infty)$ в равенстве (17) удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} y(t) \exp(-i \cdot \xi \cdot t)\, dt = 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \geqslant \alpha, \tag{21}$$

где α — фиксированное достаточно большое положительное число.

Выберем теперь положительное число β и достаточно большое положительное число γ такими, чтобы оба отрезка $[-\beta-\gamma, -\beta+\gamma]$ и $[\beta-\gamma, \beta+\gamma]$ содержали отрезок $[-\alpha, \alpha]$. Обозначим через $C_1(\xi)$ и $C_2(\xi)$ соответственно характеристические функции отрезков $[-\gamma, \gamma]$ и $[-\beta, \beta]$. Тогда

$$u(\xi) = (2\beta)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} C_1(\xi-\eta) C_2(\eta)\, d\eta = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi \in [-\alpha, \alpha], \\ 0 & \text{при достаточно больших } |\xi|, \end{cases} \tag{22}$$

$0 \leqslant u(\xi) \leqslant 1$ для всех вещественных ξ.

Равенство Парсеваля для преобразования Фурье показывает, что

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{2\beta}(2\pi)^{1/2}\, \hat{C}_1(t)\, \hat{C}_2(t).$$

Поэтому, используя теорему Планшереля, мы видим, что функция $\hat{u}(t)$ принадлежит $L^1(-\infty, \infty) \cap L^2(-\infty, \infty)$. Значит, можно применить теорему 1 и, следовательно,

$$f(t) = \hat{u}(t) = (2\pi)^{-1/2}(u, I_t), \tag{23}$$

где I_t — некоторый максимальный идеал, отличный от I_0. Кроме того, по теореме Планшереля, обратное преобразование Фурье функции $f(t)$ равно $u(\xi)$, т. е.

$$u(\xi) = (2\pi)^{-1/2}(f, I_{-\xi}). \tag{24}$$

Выберем теперь элемент кольца L^1, равный $e - (2\pi)^{-1/2} f = \tilde{g}$. Тогда из доказанного выше следует, что

$$\begin{gathered} 0 \leqslant (\tilde{g}, I_\xi) \leqslant 1; \ (\tilde{g}, I_\xi) = 0 \quad \text{при всех } \xi \in [-\alpha, \alpha]; \\ (\tilde{g}, I_\xi) = 1 \ \text{для всех достаточно больших } |\xi|. \end{gathered} \tag{25}$$

С другой стороны, поскольку $x^*(t) = \overline{x(-t)}$, имеет место соотношение $\overline{(x, I_\xi)} = (x^*, I_\xi)$. Таким образом, в соответствии с предположением теоремы $(x^* \times x, I_\xi) = |(x, I_\xi)|^2 > 0$ для всех вещественных значений ξ. Значит, элемент

$$\tilde{g} + x^* \times x \in L^1$$

удовлетворяет условию $(\tilde{g} + x^* \times x, I) > 0$ для всех максимальных идеалов I кольца L^1. Следовательно, в кольце L^1 должен существовать обратный элемент $(\tilde{g} + x^* \times x)^{-1}$. Обозначим через $\tilde{z}$ элемент

$$\tilde{z} = (\tilde{g} + x \times x^*)^{-1} \times x^* \times y. \tag{26}$$

Из (4) следует, что $x \times \tilde{z}$ принадлежит $L^1(-\infty, \infty)$. Кроме того, для всякого вещественного числа ξ

$$(x \times \tilde{z}, I_\xi) = (x, I_\xi)(\tilde{z}, I_\xi) = (x, I_\xi)\frac{(x^*, I_\xi)(y, I_\xi)}{(\tilde{g}, I_\xi) + (x, I_\xi)(x^*, I_\xi)}.$$

Отсюда ввиду условия (25) и предположения $(y, I_\xi) = 0$ при $|\xi| \geqslant \alpha$ мы получаем

$$(x \times \tilde{z}, I_\xi) = (y, I_\xi) \text{ при всех вещественных } \xi.$$

По теореме 2 нормированное кольцо L^1 является полупростым. Следовательно, $x \times \tilde{z} = y$, что и завершает доказательство теоремы 3.

Следствие. Пусть функция $k_1(t)$ принадлежит пространству $L^1(-\infty, \infty)$ и преобразование Фурье этой функции не обращается в нуль ни при каких вещественных значениях аргумента. Возьмем произвольную функцию $k_2(t)$, принадлежащую $L^1(-\infty, \infty)$, и любую функцию $f(t)$, ограниченную и измеримую по Бэру в промежутке $(-\infty, \infty)$. Допустим, что существует такая постоянная C, что

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) f(s)\, ds = C \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t)\, dt. \tag{27}$$

Тогда

$$\lim_{t\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s) f(s)\, ds = C \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t)\, dt. \tag{28}$$

Доказательство. Можно считать, что $C = 0$. Для функций $k_2(t)$ вида $k_2(t) = (x \times k_1)(t)$, где $x(t) \in L^1(-\infty, \infty)$, условие (28), очевидно, выполняется. Нетрудно показать, что равенство (28) справедливо и для таких функций $k_2(t)$, которые можно представить в виде $k_2(t) = s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} k^{(n)}(t)$ в пространстве $L^1(-\infty, \infty)$, где $k^{(n)}(t) \in L^1(-\infty, \infty)$ — функции, для которых соотношение (28) имеет место. В таком случае по теореме 3 равенство (28) выполняется и для произвольной функции $k_2(t) \in L^1(-\infty, \infty)$.

Замечание. Н. Винер [1], [2], [3], применяя это следствие, дал единую трактовку некоторых классических результатов, относящихся к предельным соотношениям для рядов и интегралов, и получил новые доказательства теорем о простых числах. См. также Питт [1]. Приведенное здесь доказательство теоремы 3 заимствовано из работ Фукамия [1] и Сигала [1]. См. также Наймарк [1], Риккарт [1] и библиографию, приведенную в этих книгах. Чтобы проиллюстрировать, насколько широки приложения указанного следствия, мы воспроизводим здесь принадлежащее Винеру доказательство так называемой специальной тауберовой теоремы. В формулировке Литлвуда эта теорема звучит следующим образом.

Теорема 4. Предположим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится при $|x| < 1$ к функции $s(x)$; пусть

$$\lim_{x \to 1-0} s(x) = C. \tag{29}$$

Кроме того, допустим, что

$$\sup_{n \geqslant 1} n |a_n| = K < \infty. \tag{30}$$

Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = C. \tag{31}$$

Доказательство. Положим $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{[x]} a_n$. Так как

$$|f(x) - s(e^{-1/x})| = \left|\sum_{n=1}^{[x]} a_n (1 - e^{-n/x}) - \sum_{n=[x]+1}^{\infty} a_n e^{-n/x}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{[x]} \frac{K}{n} \cdot \frac{n}{x} + \sum_{n=[x]+1}^{\infty} \frac{K}{n} e^{-n/x} \leqslant 2K + K \int_{[x]}^{\infty} e^{-u/x} u^{-1}\, du \leqslant$$

$$\leqslant 2K + K \int_{1}^{\infty} e^{-u} u^{-1}\, du = \text{const},$$

то функция $f(x)$ ограничена.

Поэтому, интегрируя по частям, мы находим, что

$$s(e^{-x}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nx} = \int_{-0}^{\infty} e^{-ux}\, df(u) = \int_{0}^{\infty} x e^{-ux} f(u)\, du.$$

Отсюда

$$C = \lim_{x \to 0} \int_0^\infty x e^{-ux} f(u)\, du = \lim_{\xi \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi} e^{-e^{\eta-\xi}} f(e^\eta) e^\eta\, d\eta. \qquad (31')$$

Последнее соотношение можно переписать в виде

$$\lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t-s) f(e^s)\, ds = C \int_{-\infty}^{\infty} k_1(t)\, dt, \quad \text{где} \quad k_1(t) = e^{-t} e^{-e^{-t}}, \qquad (32)$$

так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t)\, dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} e^{-e^{-t}}\, dt = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1.$$

Кроме того, имеет место равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_1(t) e^{-iut}\, dt = \int_0^\infty x^{iu} e^{-x}\, dx = \Gamma(1+iu) \neq 0.$$

Поэтому мы можем применить доказанное следствие и получить для функции

$$k_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t \leqslant 0, \\ e^{-t} & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$$

предельное соотношение

$$C = C \int_0^\infty e^{-t}\, dt = C \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t)\, dt =$$

$$= \lim_{t \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} k_2(t-s) f(e^s)\, ds = \lim_{x \to \infty} x^{-1} \int_0^x f(y)\, dy.$$

Отсюда следует, что при $\lambda > 0$

$$C = \frac{(1+\lambda)C - C}{\lambda} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\lambda x} \left\{ \int_0^{(1+\lambda)x} f(y)\, dy - \int_0^x f(y)\, dy \right\} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} f(y)\, dy =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left\{ f(x) + \frac{1}{\lambda x} \int_x^{(1+\lambda)x} [f(y) - f(x)]\, dy \right\}. \qquad (33)$$

Из условия (30) видно, что при достаточно больших значениях x

$$\left| \frac{1}{\lambda x} \int_{x}^{(1+\lambda)x} [f(y) - f(x)]\, dy \right| \leqslant \frac{1}{\lambda x} \int_{x}^{(1+\lambda)x} \sum_{n=[x]+1}^{[y]} \frac{K}{n}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=[x]+1}^{[(1+\lambda)x]} \frac{K}{[x]} \leqslant \frac{[\lambda x]\, K}{[x]} \leqslant 2\lambda K.$$

Используя соотношение (33), мы приходим к оценке

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} |f(x) - C| \leqslant 2\lambda K,$$

а так как положительное число λ можно выбрать произвольно, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = C,$$

откуда и вытекает формула (31).

ГЛАВА XII

Другие теоремы о представлении в линейных пространствах

В этой главе мы докажем три теоремы о представлении, относящиеся к линейным пространствам. Первая из них, *теорема Крейна — Мильмана*, утверждает, что непустое выпуклое бикомпактное подмножество K локально выпуклого линейного топологического пространства совпадает с замыканием выпуклой оболочки так называемых *крайних точек* множества K. Две другие теоремы относятся к *функциональным представлениям векторных структур*.

1. Крайние точки. Теорема Крейна — Мильмана

Определение. Пусть K — некоторое подмножество вещественного или комплексного линейного пространства X. Непустое подмножество $M \subseteq K$ называется *крайним подмножеством* K, если выпуклая комбинация вида $\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2$, $0 < \alpha < 1$, двух точек k_1 и k_2 множества K принадлежит M только в том случае, когда обе точки k_1 и k_2 лежат в M. Крайнее подмножество множества K, состоящее из одной точки, называется *крайней точкой* K.

Пример. В трехмерном евклидовом пространстве поверхность замкнутого шара является крайним подмножеством этого шара, а всякая точка этой поверхности представляет собой крайнюю точку.

Теорема (Крейн — Мильман). Всякое непустое бикомпактное выпуклое подмножество K локально выпуклого линейного топологического пространства X содержит по крайней мере одну крайнюю точку.

Доказательство. Само множество K служит крайним подмножеством для K. Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех бикомпактных крайних подмножеств N множества K. Упорядочим $\mathfrak{M}$ с помощью отношения включения. Ясно, что если $\mathfrak{M}_1$ — линейно упорядоченное подмножество в $\mathfrak{M}$, то непустое множество $\bigcap_{M \in \mathfrak{M}_1} M$ служит бикомпактным крайним подмножеством в K, которое представляет собой миноранту для $\mathfrak{M}_1$.

Следовательно, по лемме Цорна семейство $\mathfrak{M}$ содержит минимальный элемент M_0. Допустим, что в M_0 входят две различные точки x_0 и y_0. Тогда на X определен непрерывный линейный функционал f, такой, что $f(x_0) \neq f(y_0)$. Можно считать, что $\operatorname{Re} f(x_0) \neq \operatorname{Re} f(y_0)$. Так как множество M_0 бикомпактно, подмножество

$M_1 = \{x \in M_0;\ \operatorname{Re} f(x) = \inf_{y \in M_0} \operatorname{Re} f(y)\}$ является собственным в M_0. Но, с другой стороны, если k_1 и k_2 — такие две точки из K, что $\alpha k_1 + (1-\alpha) k_2 \in M_1$ при некотором значении α, удовлетворяющем неравенству $0 < \alpha < 1$, то, поскольку M_0 — крайнее подмножество, обе точки k_1 и k_2 должны принадлежать M_0. Из определения множества M_1 вытекает, что k_1 и k_2 лежат в M_1. Следовательно, M_1 является замкнутым крайним собственным подмножеством в M_0. Но последнее заключение противоречит тому, что M_0 — минимальный элемент из $\mathfrak{M}$. Отсюда вытекает, что M_0 состоит из одной точки, которая и является крайней точкой множества K.

Следствие. Пусть K — непустое бикомпактное выпуклое подмножество вещественного локально выпуклого линейного топологического пространства X. Обозначим через E совокупность всех крайних точек множества K. Тогда K совпадает с наименьшим замкнутым множеством, содержащим все *выпуклые комбинации* вида $\sum_i \alpha_i e_i$ $\left(\alpha_i \geqslant 0, \sum_i \alpha_i = 1\right)$ точек $e_i \in E$, т. е. K представляет собой замыкание *выпуклой оболочки* $\operatorname{Conv}(E)$ множества E.

Доказательство. Множество $\operatorname{Conv}(E)^a$ принадлежит K, так как K бикомпактно, выпукло и $E \subseteq K$. Допустим, что существует точка k_0, принадлежащая $(K - \operatorname{Conv}(E)^a)$. В этом случае можно выбрать точку $c \in \operatorname{Conv}(E)^a$ так, что $(k_0 - c) \notin (\operatorname{Conv}(E)^a - c)$. Множество $(\operatorname{Conv}(E)^a - c)$ выпукло, бикомпактно и содержит точку $x = 0$, следовательно, по теореме 3′ гл. IV, § 6, существует непрерывный вещественный функционал f на X, такой, что

$$f(k_0 - c) > 1 \quad \text{и} \quad f(k - c) \leqslant 1 \quad \text{при} \quad (k - c) \in (\operatorname{Conv}(E)^a - c).$$

Положим $K_1 = \{x \in K;\ f(x) = \sup_{y \in K} f(y)\}$. Тогда, поскольку $k_0 \in K$, множество $K_1 \cap E$ должно быть пустым. Кроме того, так как множество K бикомпактно, K_1 представляет собой замкнутое крайнее подмножество в K. С другой стороны, всякое крайнее подмножество множества K_1 является также крайним подмножеством в K, и поэтому любая крайняя точка из K_1 (существование таких точек вытекает из предыдущей теоремы) является также крайней точкой множества K. Но множество $K_1 \cap E$, как было показано, пусто, и мы приходим к противоречию.

Замечание. Приведенные выше теорема и следствие были впервые доказаны Крейном и Мильманом [1]. Данное здесь доказательство заимствовано у Келли [2] [1]). Отметим, что крайними точками единич-

[1]) Приведенное доказательство опирается на теорему 3′, гл. IV, § 6, относящуюся к вещественным пространствам, но доказываемое утверждение справедливо и для комплексных пространств, см., например, Данфорд — Шварц [1]. — *Прим. перев.*

ного шара $S=\{x\in X,\ \|x\|\leqslant 1\}$ гильбертова пространства X служат точки поверхности этого шара, т. е. точки, имеющие норму 1 (см. гл. I, § 5 (1)). Приложения понятия крайних точек к конкретным функциональным пространствам см., например, в книге Гофмана [1].

Простой пример. Обозначим через $C[0,\ 1]$ пространство вещественных непрерывных функций $x(t)$, заданных на сегменте $[0,\ 1]$, с нормой $\|x\|=\max|x(t)|$. Сопряженным пространством $X' = C[0,\ 1]'$ служит пространство вещественных бэровских мер на $[0,\ 1]$ с ограниченными полными вариациями. Единичный шар K пространства X' бикомпактен в слабой * топологии X' (см. теорему 1 из приложения к гл. IV). Нетрудно заметить, что между крайними точками из K и линейными функционалами $f_{t_0}\in X'$ вида $\langle x,\ f_{t_0}\rangle = x(t_0)$, $t_0\in[0,\ 1]$, существует взаимно однозначное соответствие. В таком случае сформулированное следствие означает, что всякий линейный функционал $f\in X'$ может быть представлен как слабый * предел функционалов вида

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x)(t_j),\quad \text{где}\quad \alpha_j>0,\quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_j=1\quad \text{и}\quad t_j\in[0,\ 1].$$

Шоке [1] установил недавно следующий более точный результат: если X — метрическое пространство, то множество E является G_δ-множеством и для любого $x\in K$ существует неотрицательная мера Бэра $\mu_x(B)$, определенная на бэровских множествах B из X, такая, что

$$\mu_x(X-E)=0,\qquad \mu_x(E)=1\quad \text{и}\quad x=\int_E y\mu_x(dy).$$

По поводу единственности μ_x см. Шоке — Мейер [2] и указанную там литературу.

2. Векторные структуры

Понятие „положительности" в применении к конкретным функциональным пространствам весьма важно как в теоретическом отношении, так и для практических приложений. Абстрактная трактовка понятия „положительности" была предложена Риссом [6] и разрабатывалась в дальнейшем многими авторами, в частности, Фрейденталем [2] и Биркгофом [1] [1]). Соответствующие результаты составляют содержание теории *векторных структур*. Мы начнем с определения векторной структуры.

[1]) Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах интенсивно разрабатывался советскими математиками — Л. В. Канторовичем [2*], М. Г. Крейном [3*], [4*] и др. Исторические сведения по этому вопросу и подробную библиографию см., например, в монографии Б. З. Вулиха [2*]. — *Прим. перев.*

Определение 1. Вещественное линейное пространство X называется *векторной структурой*, если X является структурой по отношению частичного упорядочения $x \leqslant y$, удовлетворяющему условиям

$$\text{если } x \leqslant y, \text{ то } x+z \leqslant y+z; \tag{1}$$

$$\text{если } x \leqslant y, \text{ то } \alpha x \leqslant \alpha y \text{ (или } \alpha x \geqslant \alpha y\text{)}$$
$$\text{при всех } \alpha \geqslant 0 \text{ (соответственно } \alpha \leqslant 0\text{)}. \tag{2}$$

Предложение 1. Для произвольного элемента x векторной структуры X определим выражения

$$x^+ = x \vee 0 \quad \text{и} \quad x^- = x \wedge 0. \tag{3}$$

Тогда

$$x \vee y = (x-y)^+ + y, \qquad x \wedge y = -((-x) \vee (-y)). \tag{4}$$

Доказательство. Утверждение следует из того, что взаимно однозначные отображения $x \to x+z$ и $x \to \alpha x$ $(\alpha > 0)$ пространства X на себя сохраняют отношение частичного упорядочения, установленное в X.

Пример. Совокупность $A(S, \mathfrak{B})$ всех вещественных σ-аддитивных функций множества $x(B)$, заданных и конечных на σ-аддитивном семействе $(S, \mathfrak{B})$ множеств $B \subseteq S$, с операциями

$$(x+y)(B) = x(B) + y(B), \qquad (\alpha x)(B) = \alpha x(B)$$

и отношением частичного упорядочения $x \leqslant y$, определяемым условием $x(B) \leqslant y(B)$ при $B \in \mathfrak{B}$, образует векторную структуру. В этом случае x^+ есть не что иное, как положительная вариация $\overline{V}(x; B)$ меры x на множестве B:

$$x^+(B) = \sup_{\substack{N \subseteq B \\ N \in \mathfrak{B}}} x(N) = \overline{V}(x; B). \tag{5}$$

Доказательство. Мы должны показать, что $\overline{V}(x; B) = (x \vee 0)(B)$. Ясно, что $\overline{V}(x; B) \geqslant 0$ и $x(B) \leqslant \overline{V}(x; B)$ на $\mathfrak{B}$. Если $0 \leqslant y(B)$ и $x(B) \leqslant y(B)$ для $B \in \mathfrak{B}$, то $y(B) = y(N) + y(B-N) \geqslant x(N)$ при любом $N \subseteq B$, так что $y(B) \geqslant \overline{V}(x; B)$ на семействе $\mathfrak{B}$.

Предложение 2. Для всякой векторной структуры X выполняются следующие условия:

$$x \overset{\vee}{\wedge} y + z = (x+z) \overset{\vee}{\wedge} (y+z), \tag{6}$$

$$\alpha(x \overset{\vee}{\wedge} y) = (\alpha x) \overset{\vee}{\wedge} (\alpha y) \quad \text{при } \alpha > 0, \tag{7}$$

$$\alpha(x \overset{\vee}{\wedge} y) = (\alpha x) \overset{\wedge}{\vee} (\alpha y) \quad \text{при } \alpha < 0, \tag{8}$$

$$x \wedge y = -(-x) \vee (-y), \; x^- = -(-x)^+, \; x^+ = -(-x)^-. \tag{9}$$

Доказательство. Свойства (6) — (9) вытекают из (1) и (2).

Следствие.

$$x+y=x\vee y+x\wedge y, \text{ в частности } x=x^{+}+x^{-}. \tag{10}$$

Доказательство. Мы имеем

$$x\vee y-x-y=0\vee(y-x)-y=(-y)\vee(-x)=-(y\wedge x).$$

Предложение 3. Всякая векторная структура X обладает следующими свойствами:

$$x \overset{\vee}{\underset{\wedge}{}} y=y \overset{\vee}{\underset{\wedge}{}} x \text{ (коммутативность)}, \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} x\vee(y\vee z)&=(x\vee y)\vee z=\sup(x, y, z), & (12)\\ x\wedge(y\wedge z)&=(x\wedge y)\wedge z=\inf(x, y, z), & (13)\end{aligned}\right\} \text{(ассоциативность)}$$

$$\left.\begin{aligned} (x\wedge y)\vee z&=(x\vee z)\wedge(y\vee z), & (14)\\ (x\vee y)\wedge z&=(x\wedge z)\vee(y\wedge z). & (15)\end{aligned}\right\} \text{(дистрибутивность)}$$

Доказательство. Мы должны доказать только свойство дистрибутивности. Ясно, что $(x\wedge y)\vee z\leqslant x\vee z,\ y\vee z$. Пусть $w\leqslant x\vee z$, $y\vee z$. Тогда $w\leqslant x\vee z=x+z-x\wedge z$, и поэтому $x+z\geqslant w+x\wedge z$. Точно так же $y+z\geqslant w+y\wedge z$. Следовательно,

$$w+(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)=(w+x\wedge z)\wedge(w+y\wedge z)\leqslant$$
$$\leqslant(x+z)\wedge(y+z)=x\wedge y+z,$$

и поэтому

$$w\leqslant(x\wedge y)+z-(x\wedge y)\wedge z=(x\wedge y)\vee z.$$

Тем самым мы установили (14); свойство (15) доказывается при помощи подстановки в (14) соответственно $-x$, $-y$ и $-z$ вместо x, y и z.

Замечание 1. *Дистрибутивное тождество*

$$x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z) \tag{16}$$

в произвольной структуре может и не выполняться. Структуры, удовлетворяющие этому тождеству, называются *дистрибутивными*. *Модулярное тождество*:

$$\text{если } x\leqslant z, \text{ то } x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge z \tag{17}$$

слабее дистрибутивного тождества (15). Структуры, удовлетворяющие условию (17), называются *модулярными*. Рассмотрим некоторую группу G. Совокупность всех инвариантных подгрупп N группы G, частично упорядоченная отношением включения, образует модулярную структуру, если определить $N_1\vee N_2$ как инвариантную подгруппу, порожденную подгруппами N_1 и N_2 [1]), а $N_1 \wedge N_2$ — как инвариантную подгруппу $N_1 \cap N_2$.

Замечание 2. Типичным примером *дистрибутивных структур* являются *булевы алгебры*: дистрибутивная структура B называется булевой алгеброй, если выполняются следующие условия: (1°) в B существуют элементы 0 (*нуль*) и I (*единица*), такие, что $0 \leqslant x \leqslant I$ для любого $x \in B$; (2°) для любого $x \in B$ существует однозначно определенный элемент x', называемый *дополнением* x, такой, что $x \vee x' = I$, $x \wedge x' = 0$. Совокупность всех подмножеств некоторого фиксированного множества, частично упорядоченная отношением включения, представляет собой пример булевой алгебры.

Предложение 4. Определим для векторной структуры X понятие абсолютной величины элемента

$$|x| = x \vee (-x). \tag{18}$$

Тогда

$$|x| \geqslant 0; \qquad |x| = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } x = 0. \tag{19}$$

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \qquad |\alpha x| = |\alpha| \cdot |x|. \tag{20}$$

Доказательство. Справедливо равенство

$$x^+ \wedge (-x^-) = x^+ \wedge (-x)^+ = 0. \tag{21}$$

Действительно, $0 = x - x = x \vee (-x) + x \wedge (-x) \geqslant 2(x \wedge (-x))$, и поэтому ввиду (14) $0 = (x \wedge (-x)) \vee 0 = x^+ \wedge (-x)^+$. Таким образом,

$$x^+ - x^- = x^+ + (-x)^+ = x^+ \vee (-x)^+.$$

С другой стороны, из неравенств $x \vee (-x) \geqslant x \wedge (-x) \geqslant -((-x) \vee x)$ следует, что $x \vee (-x) \geqslant 0$, откуда, согласно (21),

$$x \vee (-x) = (x \vee (-x)) \vee 0 = x^+ \vee (-x)^+ = x^+ + (-x)^+.$$

Итак, мы показали, что

$$x^+ - x^- = x^+ + (-x)^+ = x^+ \vee (-x)^+ = x \vee (-x). \tag{22}$$

Остается доказать (19) и (20). Если $x = x^+ + x^- \neq 0$, то либо x^+, либо $(-x^-) > 0$, так что $|x| = x^+ \vee (-x^-) > 0$. Далее $|\alpha x| = (\alpha x) \vee (-\alpha x) = |\alpha|(x \vee (-x)) = |\alpha|\,|x|$. Из условия $|x| + |y| \geqslant x + y$, $-x-y$ получается неравенство $|x| + |y| \geqslant (x+y) \vee (-x-y) = |x+y|$.

Замечание. Разложение $x = x^+ + x^-$, $x^+ \wedge (-x^-) = 0$, называется *жордановым разложением* элемента x. Элементы x^+, x^-

[1]) Если G — мультипликативная группа, то инвариантная подгруппа, порожденная инвариантными подгруппами N_1, N_2, определяется как подгруппа элементов вида xy ($x \in N_1$, $y \in N_2$). — *Прим. перев.*

и $|x|$ отвечают соответственно *положительной вариации, отрицательной вариации и полной вариации* функции $x(t)$ с ограниченной вариацией.

Предложение 5. Для всякого $y \in X$ имеем

$$|x - x_1| = |x \vee y - x_1 \vee y| + |x \wedge y - x_1 \wedge y|. \tag{23}$$

Доказательство. Для любых $a, b \in X$

$|a-b| = (a-b)^+ - (a-b)^- = a \vee b - b - (a \wedge b - b) = a \vee b - a \wedge b.$

Поэтому правая часть (23), согласно (10), (14) и (15), равна

$$(x \vee y) \vee x_1 - (x \vee y) \wedge (x_1 \vee y) + (x \wedge y) \vee (x_1 \wedge y) - \\ - (x \wedge y) \wedge x_1 = \\ = (x \vee x_1) \vee y - (x \wedge x_1) \vee y + (x \vee x_1) \wedge y - (x \wedge x_1) \wedge y = \\ = x \vee x_1 + y - (x \wedge x_1 + y) = x \vee x_1 - x \wedge x_1 = |x - x_1|.$$

Определение 2. Последовательность $\{x_n\}$ элементов векторной структуры X называется *O-сходящейся* к элементу $x \in X$, $x = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если существует такая последовательность $\{w_n\}$, что $|x - x_n| \leqslant w_n$ и $w_n \downarrow 0$. Здесь $w_n \downarrow 0$ означает, что $w_1 \geqslant w_2 \geqslant \ldots$ и $\bigwedge\limits_{n \geqslant 1} w_n = 0$. Если $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ последовательности $\{x_n\}$ существует, то он определяется однозначно. В самом деле, если допустить, что $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ и $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = y$, то $|x - x_n| \leqslant w_n$, $w_n \downarrow 0$ и $|y - x_n| \leqslant u_n$, $u_n \downarrow 0$. Поэтому $|x - y| \leqslant |x - x_n| + |x_n - y| \leqslant w_n + u_n$ и $(w_n + u_n) \downarrow 0$, так как $w_n + \bigwedge\limits_{n \geqslant 1} u_n \geqslant \bigwedge\limits_{n \geqslant 1} (w_n + u_n)$. Отсюда вытекает, что $x = y$.

Предложение 6. Операции $x + y$, $x \vee y$ и $x \wedge y$ непрерывны по отношению к O-lim.

Доказательство. Пусть $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Тогда $|x + y - x_n - y_n| \leqslant |x - x_n| + |y - y_n|$ и, следовательно, $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$. Из (23) видно, что

$$|x \underset{\wedge}{\vee} y - x_n \underset{\wedge}{\vee} y_n| \leqslant |x \underset{\wedge}{\vee} y - x_n \underset{\wedge}{\vee} y| + |x_n \underset{\wedge}{\vee} y - x_n \underset{\wedge}{\vee} y_n| \leqslant \\ \leqslant |x - x_n| + |y - y_n|,$$

откуда $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \underset{\wedge}{\vee} y_n) = (O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n) \underset{\wedge}{\vee} (O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} y_n)$.

Замечание. При произвольном α

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot x_n = \alpha \cdot O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n.$$

Однако в общем случае

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} \alpha_n x \neq \left(\lim_{n\to\infty} \alpha_n\right) x.$$

Первое соотношение вытекает из равенства $|\alpha x - \alpha x_n| = |\alpha|\,|x - x_n|$. Что касается второго утверждения, то его справедливость устанавливается с помощью следующего контрпримера. Ввведем в двумерном векторном пространстве пар (ξ, η) вещественных чисел ξ и η отношение *лексикографического частичного упорядочения*, полагая $(\xi_1, \eta_1) \geqslant (\xi_2, \eta_2)$ в том и только в том случае, когда либо $\xi_1 > \xi_2$, либо $\xi_1 = \xi_2$ и $\eta_1 \geqslant \eta_2$. В результате, как нетрудно видеть, мы получаем векторную структуру. В этой структуре

$$n^{-1}(1, 0) \geqslant (0, 1) > 0 = (0, 0) \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Поэтому $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}(1, 0) \neq 0$. С помощью жорданова разложения $y = y^+ + y^-$ можно установить, что необходимым и достаточным условием справедливости равенства

$$O\text{-}\lim_{\alpha_n \to \alpha} \alpha_n x = \alpha x \tag{24}$$

является так называемая *аксиома Архимеда*

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} x = 0 \quad \text{для всех } x \geqslant 0. \tag{25}$$

Определение 3. Подмножество $\{x_\alpha\}$ векторной структуры X называется *ограниченным*, если существуют элементы y и z, такие, что $y \leqslant x_\alpha \leqslant z$ для всех x_α. Векторная структура X называется *полной*, если всякое ограниченное множество $\{x_\alpha\}$ из X обладает в X ***верхней гранью*** $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ и ***нижней гранью*** $\inf\limits_\alpha x_\alpha$. Если для всякой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subseteq X$ в векторной структуре X существуют $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ и $\inf\limits_{n\geqslant 1} x_n$, то X называется ***σ-полной*** векторной структурой[1]). В σ-полной векторной структуре X определим ***верхний*** и ***нижний пределы*** ограниченной последовательности

$$O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \inf_m \Big(\sup_{n\geqslant m} x_n\Big), \qquad O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = \sup_m \Big(\inf_{n\geqslant m} x_n\Big). \tag{26}$$

Предложение 7. Для того чтобы существовал предел $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, необходимо и достаточно, чтобы $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = O\text{-}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = x$.

---

[1]) Термины „полная“ и „σ-полная векторная структура“ обычно относят к случаям, когда произвольные множество $\{x_\alpha\} \subseteq X$ или соответственно последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ имеют в X верхние и нижние грани. Если таким свойством обладают ограниченные множества или последовательности, то применяют названия *условно полная* и *условно σ-полная векторная структура*. — *Прим. перев.*

Доказательство. Пусть $|x - x_n| \leqslant w_n$, $w_n \downarrow 0$. Тогда $x - w_n \leqslant \leqslant x_n \leqslant x + w_n$, так что $O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} (x - w_n) = x \leqslant O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant \leqslant O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty}(x + w_n) = x$, откуда $O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} x_n = x$. Аналогично устанавливается, что $O\text{-}\varliminf_{n\to\infty} x_n = x$.

Перейдем к доказательству достаточности. Введем обозначения $u_n = \sup_{m\geqslant n} x_m$, $v_n = \inf_{m\geqslant n} x_m$, $u_n - v_n = w_n$. По предположению $w_n \downarrow 0$. Далее $x_n \leqslant u_n = x + (u_n - x) \leqslant x + (u_n - v_n) = x + w_n$ и аналогично $x_n \geqslant x - w_n$, откуда видно, что $|x - x_n| \leqslant w_n$. Таким образом, $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

Предложение 8. Во всякой σ-полной векторной структуре X выражение αx непрерывно по α, x относительно предельного перехода O-lim.

Доказательство. Пусть $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$; тогда $O\text{-}\lim_{n\to\infty} |\alpha||x - x_n| = 0$. Поскольку $|\alpha x - \alpha_n x_n| \leqslant |\alpha x - \alpha x_n| + +|\alpha x_n - \alpha_n x_n| = |\alpha| \cdot |x - x_n| + |\alpha - \alpha_n||x_n|$, то, полагая $\sup_{n\geqslant 1} |x_n| = y$ и $\sup_{m\geqslant n} |\alpha - \alpha_m| = \beta_n$, мы сводим задачу к доказательству того, что $O\text{-}\lim_{n\to\infty} \beta_n y = 0$. Предел $O\text{-}\lim_{n\to\infty} \beta_n y = z$ существует, так как $y \geqslant 0$ и $\beta_n \downarrow 0$, и $O\text{-}\lim_{n\to\infty} 2^{-1}\beta_n y = 2^{-1}z$. Поэтому для любого n найдется такое n_0, что $\beta_{n_0} \leqslant 2^{-1}\beta_n$. Отсюда видно, что $z = 2^{-1}z$, откуда $z = 0$.

Предложение 9. Для того чтобы существовал предел $O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n$ последовательности $\{x_n\}$ элементов σ-полной векторной структуры X, необходимо и достаточно, чтобы

$$O\text{-}\lim_{n,\, m\to\infty} |x_n - x_m| = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Необходимость условия (27) с очевидностью вытекает из неравенства $|x_n - x_m| \leqslant |x_n - x| + |x - x_m|$. Если положить $|x_n - x_m| = y_{nm}$, то $O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} x_n \leqslant x_m + O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} y_{nm}$, $O\text{-}\varliminf_{n\to\infty} x_n \geqslant \geqslant x_m - O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} y_{nm}$. Таким образом,

$$0 \leqslant O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} x_n - O\text{-}\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant O\text{-}\lim_{m\to\infty} \left(O\text{-}\varlimsup_{n\to\infty} y_{nm} - O\text{-}\varliminf_{n\to\infty} y_{nm}\right) = 0.$$

Отсюда следует достаточность условия (27).

Предложение 10. Векторная структура X является σ-полной тогда и только тогда, когда всякая монотонная ограниченная последовательность $\{x_n\}$ имеет $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n$ в X.

Доказательство. Мы должны доказать лишь достаточность условия теоремы. Пусть $\{z_n\}$ — произвольная ограниченная последовательность из X. Положим $x_n = \sup\limits_{m\leqslant n} z_m$. Тогда по предположению в X существует $\sup\limits_{n\geqslant 1} x_n = z$ и $z = \sup\limits_{n\geqslant 1}\left(\sup\limits_{m\leqslant n} z_m\right)$. Точно так же в X существует

$$\inf_{n\geqslant 1} z_n = \inf_{n\geqslant 1}\left(\inf_{m\leqslant n} z_m\right).$$

3. B-структуры и F-структуры

Определение. Вещественное B-пространство (или F-пространство) называется *B-структурой* (соответственно *F-структурой*), если оно является векторной структурой и

$$\text{неравенство } |x| \leqslant |y| \text{ влечет за собой } \|x\| \leqslant \|y\|. \tag{1}$$

Примеры. Пространства $C(S)$ и $L^p(S)$ образуют B-структуры по естественному отношению частичного упорядочения, когда $x \leqslant y$, если $x(s) \leqslant y(s)$ при $s \in S$ для случая $C(S)$ и $x(s) \leqslant y(s)$ m-п. в. на S для пространства $L^p(S)$. В пространстве $M(S, \mathfrak{B}, m)$, удовлетворяющем условию $m(S) < \infty$, отношение частичного упорядочения можно ввести так же, как и в $L^p(S)$; при этом $M(S, \mathfrak{B}, m)$ оказывается F-структурой. Если аналогичным способом упорядочить пространство $A(S, \mathfrak{B})$ и ввести в нем норму

$$\|x\| = |x|(S),$$

где $|x|(S)$ — полная вариация x на S, то получится B-структура $A(S, \mathfrak{B})$. В силу условия (1) и свойства $|x| = |(|x|)|$

$$\|x\| = \|(|x|)\|^{1)}. \tag{2}$$

В пространстве $A(S, \mathfrak{B})$, кроме того, выполняется условие

$$\text{если } x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \text{ то } \|x+y\| = \|x\| + \|y\|. \tag{3}$$

[1]) Меры $x = x(B)$ $(B \in \mathfrak{B})$ частично упорядочиваются по правилу, указанному в примере гл. XII, § 2. Выражение $|x|$ в левой части равенства $|x| = |(|x|)|$ обозначает абсолютную величину $x(B)$, т. е. полную вариацию x на множествах $B \in \mathfrak{B}$, рассматриваемую как мера, заданная на семействе $\mathfrak{B}$; величина $|(|x|)|$ — это абсолютная величина меры $|x|(B)$, т. е. полная вариация $|x|$ на множествах B как функция, заданная на $\mathfrak{B}$. —*Прим. перев.*

Какутани называет B-структуру, обладающую свойством (3), *абстрактным L^1-пространством.* Из (3) следует, что

$$\text{если } |x| < |y|, \quad \text{то } \|x\| < \|y\|. \tag{4}$$

Норма в векторной структуре $A(S, \mathfrak{B})$ оказывается непрерывной по отношению к предельному переходу O-lim, т. е.

$$\text{если } O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty} \|x_n\| = \|x\|. \tag{5}$$

В самом деле, в $A(S, \mathfrak{B})$ условие $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ эквивалентно существованию последовательности $y_n \in A(S, \mathfrak{B})$, такой, что $y_n(S) \downarrow 0$ и $|x - x_n|(S) \leqslant y_n(S)$. Нетрудно заметить также, что пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ как векторная структура удовлетворяет условиям (4) и (5).

Предложение 1. Всякая σ-полная F-структура X, удовлетворяющая требованиям (4) и (5), является полной. В частности, $A(S, \mathfrak{B})$ и $M(S, \mathfrak{B}, m)$ — полные векторные структуры.

Доказательство. Пусть $\{x_\alpha\} \subseteq X$ — ограниченное множество. Можно, очевидно, допустить, что $0 \leqslant x_\alpha \leqslant x$ для всех α. Покажем, что $\sup\limits_\alpha x_\alpha$ существует. Рассмотрим совокупность $\{z_\beta\}$ всех элементов z_β вида $z_\beta = \bigvee\limits_{j=1}^{n} x_{\alpha_j}$, т. е. множество всех верхних граней всевозможных конечных подмножеств из $\{x_\alpha\}$. Положим $\gamma = \sup\limits_\beta \|z_\beta\|$. Тогда найдется такая последовательность $\{z_{\beta_j}\}$, что $\lim\limits_{j\to\infty} \|z_{\beta_j}\| = \gamma$. Положим $z_n = \sup\limits_{j \leqslant n} z_{\beta_j}$; тогда предел $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} z_n = w$ существует и из определения величины γ и условия (5) следует, что $\|w\| = \gamma$. Покажем теперь, что $w = \sup\limits_\alpha x_\alpha$. Допустим, что $x_\alpha \vee w > w$ при некотором x_α. Тогда, согласно (4), $\|x_\alpha \vee w\| > \|w\| = \gamma$. Но так как $x_\alpha \vee w = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (x_\alpha \vee z_n)$, $x_\alpha \vee z_n \in \{z_\beta\}$, то ввиду (5) имеет место равенство $\|x_\alpha \vee w\| = \lim\limits_{n\to\infty} \|x_\alpha \vee z_n\| \leqslant \gamma$, что противоречит сделанным допущениям. Следовательно, $w \geqslant x_\alpha$ для всех x_α. Предположим, что для некоторого элемента u при всех α выполняется условие $x_\alpha \leqslant u$. Допустим, что $w \wedge u < w$. Тогда вследствие (4) $\|w \wedge u\| < \gamma$, вопреки тому, что $w \wedge u \geqslant z_\beta$ для всех z_β. Таким образом, $w = \sup\limits_\alpha x_\alpha$.

Замечание. В векторной структуре $C(S)$ из условия $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ не следует, вообще говоря, что $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. В $M(S, \mathfrak{B}, m)$ соотношение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ не гарантирует равенства $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Последнее подтверждается следующим примером. Пусть $x_1(s), x_2(s), \ldots$ —

характеристические функции отрезков

$$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{2}\right], \left[0, \frac{1}{4}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{4}\right], \left[\frac{2}{4}, \frac{3}{4}\right], \left[\frac{3}{4}, \frac{4}{4}\right], \left[0, \frac{1}{8}\right], \left[\frac{1}{8}, \frac{2}{8}\right], \ldots,$$

принадлежащих отрезку [0, 1]. Последовательность $\{x_n(s)\} \subseteq M([0, 1])$ сходится по мере к нулю, но она не сходится к нулю почти всюду, т. е. $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, но $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq 0$.

Предложение 2. Пусть X — произвольная F-структура. Допустим, что последовательность $\{x_n\} \subseteq X$ удовлетворяет условию $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ **-сходится к x относительно равномерно*[1]), т. е. из любой подпоследовательности $\{y_n\} \subseteq \{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{y_{n(k)}\} \subseteq \{y_n\}$ и такой элемент $z \in X$, что

$$|y_{n(k)} - x| \leqslant k^{-1}z \quad (k = 1, 2, \ldots). \tag{6}$$

Обратно, если последовательность $\{x_n\}$ **-сходится относительно равномерно к x*, то $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

Доказательство. Не ограничивая общности, можно рассматривать лишь случай $x = 0$. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| = 0$, то найдется такая последовательность $\{n(k)\}$ положительных целых чисел, что $\|ky_{n(k)}\| \leqslant k^{-2}$. Тогда, полагая $z = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |ky_{n(k)}|$, мы убеждаемся в справедливости условия (6). Обратно, допустим, что (6) выполняется для $x = 0$. Тогда $|y_{n(k)}| \leqslant k^{-1}z$, и поэтому $\|y_{n(k)}\| \leqslant \|k^{-1}z\|$. Следовательно, $s\text{-}\lim\limits_{k\to\infty} y_{n(k)} = 0$. Последнее означает, что не может существовать подпоследовательность $\{y_n\}$ последовательности $\{x_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \|y_n\| > 0$.

Замечание. Предложение 2, сформулированное и доказанное выше в абстрактной форме, в применении к F-структуре $M(S, \mathfrak{B}, m)$ выражает, очевидно, тот факт, что при условии $m(S) < \infty$ всякая сходящаяся по мере последовательность из $M(S, \mathfrak{B}, m)$ содержит некоторую подпоследовательность, сходящуюся m-п. в.

[1]) Если из всякой подпоследовательности $\{y_n\} \subseteq \{x_n\}$ можно выбрать подпоследовательность $\{z_n\} \subseteq \{y_n\}$, которая сходится (в том или ином смысле) к x, то говорят, что $\{x_n\}$ **-сходится* (в соответствующем смысле) к x. Если для любого $\varepsilon > 0$, начиная с некоторого номера $N(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|x_n - x| \leqslant \varepsilon u$ $(n \geqslant N(\varepsilon))$, где u — фиксированный элемент из X, то говорят, что $\{x_n\}$ *сходится к x относительно равномерно.* Тип сходимости, определяемый условием (6), представляет собой комбинацию указанных видов сходимости, откуда и происходит его название. — *Прим. перев.*

4. Теорема Банаха о сходимости

Теорема Банаха относится к вопросу о сходимости почти всюду последовательности линейных операторов с областями значений в пространстве измеримых функций. См. Банах [2]. Предлагаемая ниже абстрактная формулировка этой теоремы, выраженная в терминах теории векторных структур, принадлежит Иосида [15].

Теорема. Пусть X — вещественное B-пространство с нормой $\| \ \|$, и пусть Y есть σ-полная F-структура с квазинормой $\| \ \|_1$. Допустим, что

$$\text{из равенства } O\text{-}\lim_{n\to\infty} y_n = y \text{ следует равенство } \lim_{n\to\infty} \| y_n \|_1 = \| y \|_1. \quad (1)$$

Пусть $\{T_n\}$ — некоторая последовательность ограниченных линейных операторов, принадлежащих $L(X, Y)$. Предположим, что

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} | T_n x | \text{ существует для точек } x \in X, \text{ образующих множество } G \text{ второй категории.} \quad (2)$$

Тогда для всякого $x \in X$ существуют оба предела $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, T_n x$ и $O\text{-}\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, T_n x$ и равенство

$$\tilde{T}x = \left(O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x\right) - \left(O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x\right) \quad (3)$$

определяет (не обязательно линейный) непрерывный оператор $\tilde{T}$, действующий из X в Y.

Замечание. Пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ при условии $m(S) < \infty$ удовлетворяет требованию (1), если определить в нем квазинорму $\| y \|_1$ формулой $\| y \|_1 = \int\limits_S | y(s) | (1 + | y(s) |)^{-1} m(ds)$ и считать, что $y_1 \leqslant y_2$ тогда и только тогда, когда $y_1(s) \leqslant y_2(s)$ m-п. в. При таком же способе частичного упорядочения пространство $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$, где $m(S) \leqslant \infty$, тоже удовлетворяет условию (1).

Доказательство теоремы. Положим $T_n x = y_n$, $y'_n = \sup\limits_{n \geqslant m} | y_m |$, $y' = \sup\limits_{n \geqslant 1} | y_n |$ и рассмотрим операторы $V_n x = y'_n$ и $Vx = y'$, определенные по крайней мере для всех $x \in G$ и отображающие G в Y. Из равенства (23), § 2, следует, что каждый из операторов V_n сильно непрерывен вместе с T_k. Согласно (1), $\lim\limits_{n\to\infty} \| V_n x - Vx \|_1 = 0$, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \| k^{-1} V_n x \| = \| k^{-1} Vx \|$; кроме того, $\lim\limits_{k\to\infty} \| k^{-1} Vx \|_1 = 0$, так как выражение αy непрерывно в F-пространстве Y по α, y.

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$

$$G \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k, \quad \text{где } G_k = \left\{ x \in X;\ \sup_{n \geqslant 1} \| k^{-1} V_n x \|_1 \leqslant \varepsilon \right\}. \tag{4}$$

Вследствие сильной непрерывности V_n каждое из множеств G_k сильно замкнуто в пространстве X. По предположению G есть множество второй категории, поэтому некоторое множество вида G_{k_0} должно содержать шар пространства X. Таким образом, найдутся элемент $x_0 \in X$ и число $\delta > 0$, такие, что при $\| x_0 - x \| \leqslant \delta$ выполняется неравенство $\sup\limits_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n x \|_1 \leqslant \varepsilon$. Полагая $z = x_0 - x$, мы видим, что

$$\sup_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n z \|_1 \leqslant \sup_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n x_0 \|_1 + \sup_{n \geqslant 1} \| k_0^{-1} V_n x \|_1 \leqslant 2\varepsilon,$$

и поскольку $V_n(k_0^{-1} z) = k_0^{-1} V_n z$, отсюда вытекает, что

$$\sup_{n \geqslant 1} \| V_n z \|_1 \leqslant 2\varepsilon \ \text{ при } \ \| z \| \leqslant \delta / k_0.$$

Таким образом, $s\text{-}\lim\limits_{\|z\| \to 0} V_n \cdot z = 0$ равномерно относительно n.

Множество G плотно в X, поэтому выражение $V \cdot x$ фактически определено для всех $x \in X$ и сильно непрерывно в точке $x = 0$, причем $V \cdot 0 = 0$. Следовательно, ввиду того что

$$| \tilde{T} \cdot x | \leqslant 2V \cdot x \quad \text{и} \quad \| \tilde{T} x_1 - \tilde{T} x_2 \|_1 \leqslant \| \tilde{T} (x_1 - x_2) \|_1,$$

выражение $\tilde{T} \cdot x$ сильно непрерывно в каждой точке $x \in X$.

Следствие. Если выполняется условие (1), то множество $G = \left\{ x \in X;\ O\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} T_n x \text{ существует} \right\}$ либо совпадает со всем пространством X, либо является множеством первой категории.

Доказательство. Предположим, что G — множество второй категории. Тогда, согласно доказанной теореме, оператор $\tilde{T}$ сильно непрерывен и отображает X в Y. Поэтому множество $G = \{ x \in X;\ \tilde{T} x = 0 \}$ сильно замкнуто в X. А так как, кроме того, G является линейным подпространством в X, то $G = X$, ибо в противном случае G не было бы плотным в X.

5. *Представление векторной структуры при помощи функций точки*

Предположим, что векторная структура X содержит *„единицу"* I, обладающую такими свойствами:

$$I > 0 \ \text{ и для любого } f \in X \text{ существует } \alpha > 0, \ \text{ такое, что } -\alpha I \leqslant f \leqslant \alpha I, \tag{1}$$

Для векторной структуры X такого типа имеет место представление, аналогичное представлению нормированного кольца с помощью функций, заданных на максимальных идеалах.

Назовем элемент $f \in X$ *нильпотентным*, если $n|f| \leqslant I$ ($n = 1, 2, \ldots$). Совокупность R всех нильпотентных элементов $f \in X$ называется *радикалом* векторной структуры X. Из условия (20) § 2 гл. XII видно, что радикал R представляет собой линейное подпространство в X. Кроме того, радикал R является *идеалом* в X в том смысле, что

$$\text{если } f \in R \quad \text{и} \quad |g| \leqslant |f|, \quad \text{то } g \in R. \tag{2}$$

Лемма. Рассмотрим две векторные структуры X_1 и X_2. Линейный оператор T, отображающий X_1 на X_2, называется *гомоморфизмом структур*, если

$$T(x \underset{\wedge}{\vee} y) = (Tx) \underset{\wedge}{\vee} (Ty). \tag{3}$$

Оператор T является гомоморфизмом структур тогда и только тогда, когда множество $N = \{x \in X_1;\ Tx = 0\}$ образует идеал в X_1.

Доказательство. Пусть T — гомоморфизм структур. Пусть $x \in N$ и $|y| \leqslant |x|$. Тогда, поскольку $T(|x|) = T(x \vee -x) = (Tx) \vee \vee (T(-x)) = 0$, мы находим, что $0 \leqslant Ty^+ = T(y^+ \wedge |x|) = Ty^+ \wedge T|x| = 0$, и поэтому $y^+ \in N$. Аналогично устанавливается тот факт, что $y^- \in N$, и, таким образом, $y = y^+ + y^- \in N$.

Предположим теперь, что линейное подпространство $N = \{x \in X_1;\ Tx = 0\}$ является идеалом в X_1. В этом случае линейное пространство X_2 изоморфно факторпространству X_1/N. Мы должны показать, что $\overline{(x \underset{\wedge}{\vee} y)} = \bar{x} \underset{\wedge}{\vee} \bar{y}$, где через $\bar{x}$ обозначен класс элементов пространства X_1, эквивалентных по подпространству N, содержащий x. Для этого заметим, что если $\bar{y} = \bar{z}$, то $y - z \in N$, и тогда, согласно условию (23), § 2 этой главы,

$$|x \underset{\wedge}{\vee} y - x \underset{\wedge}{\vee} z| \leqslant |y - z| \in N,$$

так что класс вычетов $\overline{(x \underset{\wedge}{\vee} y)}$ определяется независимо от выбора элементов x и y соответственно из классов $\bar{x}$ и $\bar{y}$.

Замечание. Утверждение доказанной леммы можно сформулировать следующим эквивалентным способом: пусть N — некоторое линейное подпространство векторной структуры X. Эквивалентность $a \equiv b \pmod N$ произвольных элементов a, b как векторов линейного пространства влечет за собой их эквивалентность $(\operatorname{mod} N)$ как элементов векторной структуры тогда и только тогда, когда N является идеалом в X. Иными словами, для произвольных элементов векторной структуры требование

$$\text{из условия } a \equiv b, \ a' \equiv b' \pmod{N} \text{ следует,}$$
$$\text{что } a \underset{\wedge}{\vee} b \equiv a' \underset{\wedge}{\vee} b' \pmod{N},$$

выполняется в том и только в том случае, когда N — идеал в X.

Идеал N назовем *нетривиальным*, если $N \neq \{0\}$, X. Нетривиальный идеал N называется *максимальным*, если он не содержится как собственное подмножество ни в каком другом идеале, отличном от X. Совокупность всех максимальных идеалов N векторной структуры X обозначим через $\mathfrak{M}$. Векторную структуру, не содержащую нетривиальных идеалов, назовем *простой*. Векторная структура X/N классов элементов из X, эквивалентных по произвольному идеалу $N \in \mathfrak{M}$, является простой. Далее будет показано, что *всякая простая векторная структура с единицей линейно-структурно изоморфна векторной структуре вещественных чисел, причем неотрицательным элементам соответствуют неотрицательные числа, а единице I — число* 1. Векторная структура X линейно-структурно гомоморфна X/N $(N \in \mathfrak{M})$; таким образом каждому элементу $f \in X$ можно поставить в соответствие вещественное число, которое мы обозначим через $f(N)$.

После этих предварительных рассуждений мы можем сформулировать и доказать следующую теорему.

Теорема 1. Радикал R совпадает с идеалом $\bigcap\limits_{N \in \mathfrak{M}} N$.

Доказательство. *Первый этап.* Пусть X — простая векторная структура с единицей I. Тогда $X = \{\alpha I;\ -\infty < \alpha < \infty\}$.

Доказательство. Структура X не может содержать нильпотентных элементов $f \neq 0$, так как в противном случае в X содержался бы нетривиальный идеал $N = \{g;\ |g| \leqslant \eta |f| \text{ при некотором } \eta < \infty\}$. Поэтому, согласно условию (1), для X выполняется *аксиома Архимеда*

$$O\text{-}\lim_{n \to \infty} n^{-1}|x| = 0 \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{4}$$

Предположим, что существует элемент $f_0 \in X$, такой, что $f_0 \neq \gamma I$ при любом вещественном γ. Положим

$$\alpha = \inf_{f_0 \leqslant \alpha' I} \alpha', \qquad \beta = \sup_{\beta' I \leqslant f_0} \beta'.$$

Тогда из (4) вытекает, что $\beta I \leqslant f_0 \leqslant \alpha I$ и $\beta < \alpha$. Следовательно, $(f_0 - \delta I)^+ \neq 0$, $(f_0 - \delta I)^- \neq 0$ при всех $\beta < \delta < \alpha$. Поскольку $x^+ \wedge \wedge (-x^-) = 0$, множество $N_0 = \{g;\ |g| \leqslant \eta (f_0 - \delta I)^+ \text{ при некотором } \eta < \infty\}$ образует нетривиальный идеал, что противоречит сделанным допущениям.

Второй этап. Для всякого нетривиального идеала N_0 найдется максимальный идеал N_1, содержащий N_0.

Доказательство. Обозначим через $\{N_0\}$ совокупность всех нетривиальных идеалов, содержащих N_0. Введем в множестве $\{N_0\}$ отношение порядка, полагая $N_{\alpha_1} \leqslant N_{\alpha_2}$ в том случае, когда N_{α_1} является подмножеством в N_{α_2}. Пусть $\{N_\alpha\}$ — произвольное линейно упорядоченное подмножество из $\{N_0\}$. Положим $N_\beta = \bigcup\limits_{N_\alpha \in \{N_\alpha\}} N_\alpha$. Покажем, что N_β служит мажорантой для $\{N_\alpha\}$. Действительно, если $x, y \in N_\beta$, то существуют идеалы N_{α_1} и N_{α_2}, такие, что $x \in N_{\alpha_1}$ и $y \in N_{\alpha_2}$. Так как подмножество $\{N_\alpha\}$ линейно упорядочено, то $N_{\alpha_1} \subseteq N_{\alpha_2}$ (или $N_{\alpha_1} \supseteq N_{\alpha_2}$), и элементы x и y оба принадлежат N_{α_2} (соответственно N_{α_1}). Это показывает, что $(\gamma x + \delta y) \in N_{\alpha_2} \subseteq N_\beta$ и что из условия $|z| \leqslant |x|$ вытекает включение $z \in N_{\alpha_1} \subseteq N_\beta$. Единица I не входит ни в один идеал N_α и поэтому не содержится в N_β. Таким образом, N_β представляет собой нетривиальный идеал, содержащий каждый из идеалов N_α, т. е. является мажорантой для $\{N_\alpha\}$. Отсюда на основании леммы Цорна мы заключаем, что найдется по крайней мере один максимальный идеал, содержащий N_0.

Третий этап. Покажем, что $R \subseteq \bigcap\limits_{N \in \mathfrak{M}} N$. Пусть $f > 0$ и $nf \leqslant I$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $nf(N) \leqslant I(N) = 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$ для любого $N \in \mathfrak{M}$ и, следовательно, $f(N) = 0$, т. е. $f \in N$.

Четвертый этап. Убедимся в том, что $R \supseteq \bigcap\limits_{N \in \mathfrak{M}} N$. Пусть $f > 0$ не является нильпотентным элементом. Мы должны показать, что найдется идеал $N \in \mathfrak{M}$, не содержащий f. Это доказывается следующим образом.

Так как $f > 0$ — не нильпотентный элемент, найдется такое целое число n, что $nf \nleqslant I$. Мы можем предположить, что $nf \ngeqslant I$, ибо в противном случае $f \notin N$ при любом $N \in \mathfrak{M}$, и наше утверждение оказывается тривиальным. Допустим, что $p = I - (n \cdot f) \wedge I > 0$. В этом случае неравенство $m \cdot p \geqslant I$ не выполняется ни для какого положительного целого m. Действительно, в противном случае $m^{-1}I \leqslant I - (n \cdot f) \wedge I$ и, следовательно,

$$(n \cdot f) \wedge I = (n \cdot f) \wedge (1 - m^{-1}) I.$$

Тогда, согласно условию (6) § 2 гл. XII,

$$(n \cdot f - (1 - m^{-1}) I) \wedge m^{-1}I = (n \cdot f - (1 - m^{-1}) I) \wedge 0 \leqslant 0,$$

откуда в силу дистрибутивности векторной структуры вытекает соотношение

$$0 = \{(n \cdot f - (1 - m^{-1}) I) \wedge m^{-1}I\} \vee 0 = (n \cdot f - (1 - m^{-1}) I)^+ \wedge m^{-1}I.$$

т. е. $(n\cdot f-(1-m^{-1})I)^+\wedge I=0$. Положим $b=(n\cdot f-(1-m^{-1}I)^+$ и допустим, что $b>0$. По условию (1) найдется $\alpha>1$, при котором $b<\alpha I$. Тогда $0<b=b\wedge\alpha I$, и поэтому $0<(\alpha^{-1}b)\wedge I\leqslant b\wedge I$, что противоречит равенству $b\wedge I=0$. Таким образом, $b=0$, т. е. $n\cdot f\leqslant(1-m^{-1})I$. Последнее же противоречит тому, что $n\cdot f\not\leqslant I$. Из приведенных рассуждений видно, что множество $N_0=\{g;\ |g|\leqslant\leqslant\eta|p|$ при некотором $\eta<\infty\}$ образует нетривиальный идеал. Как установлено на втором этапе доказательства, N_0 содержится по крайней мере в одном максимальном идеале N. Но тогда $0=p(N)==1-(n\cdot f(N))\wedge 1$, откуда видно, что $f(N)>0$, т. е. $f\notin N$.

Итак, теорема 1 доказана.

Векторная структура $\overline{X}=X/R$, так же как и X, представляет собой векторную структуру с единицей $\overline{I}$. Идеал $\bigcap_{\overline{N}}\overline{N}$, пересечение всех максимальных идеалов $\overline{N}$ векторной структуры $\overline{X}$, является, согласно теореме 1, нулевым и $\overline{X}$ не содержит отличных от нуля нильпотентных элементов. Следовательно, для $\overline{X}$ выполняется аксиома Архимеда

$$O\text{-}\lim_{n\uparrow\infty} n^{-1}|\overline{f}|=0 \quad \text{для всех} \quad \overline{f}\in\overline{X}. \tag{5}$$

Пусть $\overline{N}$ — произвольный максимальный идеал в $\overline{X}$. Тогда факторпространство $\overline{X}/\overline{N}$ образует простую векторную структуру и, как было показано на первом этапе доказательства теоремы 1, структура $\overline{X}/\overline{N}$ линейно-структурно изоморфна векторной структуре вещественных чисел, причем неотрицательным элементам соответствуют неотрицательные числа, а единице — число 1. Вещественное число, отвечающее элементу $\overline{f}$ при гомоморфизме $\overline{X}\to\overline{X}/\overline{N}$, обозначим через $\overline{f}(\overline{N})$. Через $\overline{\mathfrak{M}}$ обозначим множество всех максимальных идеалов $\overline{X}$. Таким образом, справедлива

Теорема 2. Соответствие $\overline{f}\to\overline{f}(\overline{N})$ определяет линейно-структурно изоморфное отображение структуры X на векторную структуру $F(\overline{\mathfrak{M}})$ ограниченных вещественных функций на $\overline{\mathfrak{M}}$, удовлетворяющее условиям (1°) $|\overline{f}|\to|\overline{f}(\overline{N})|$; (2°) $\overline{I}(\overline{N})\equiv 1$ на $\overline{\mathfrak{M}}$; (3°) $F(\overline{\mathfrak{M}})$ разделяет точки множества $\overline{\mathfrak{M}}$, т. е.

для любых двух различных точек $\overline{N}_1$, $\overline{N}_2$ множества $\overline{\mathfrak{M}}$

существует по крайней мере один элемент $\overline{f}\in\overline{X}$,

такой, что $\overline{f}(\overline{N}_1)\neq\overline{f}(\overline{N}_2)$. (6)

Замечание. Введем топологию в множестве $\overline{\mathfrak{M}}$, принимая множества вида

$$\{\overline{N} \in \overline{\mathfrak{M}};\ |\overline{f}_i(\overline{N}) - \overline{f}_i(\overline{N}_0)| < \varepsilon_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\text{где } -\overline{I} \leqslant \overline{f} \leqslant \overline{I} \text{ для всех } i\}$$

за окрестности точки $\overline{N}_0$. Пространство $\overline{\mathfrak{M}}$ оказывается в этом случае бикомпактным, так как его можно отождествить с некоторым замкнутым множеством, принадлежащим топологическому произведению (той же мощности, что и множество всех элементов $\overline{f} \in \overline{X}$, удовлетворяющих неравенствам $-\overline{I} \leqslant \overline{f} \leqslant \overline{I}$) замкнутых интервалов $[-1, 1]$. Доказательство этого утверждения сходно с доказательством аналогичных фактов для множества всех максимальных идеалов нормированного кольца, приведенным в гл. XI, § 2. Более того, каждая из функций $\overline{f}(\overline{N}) \in F(\overline{\mathfrak{M}})$ непрерывна на бикомпактном пространстве $\overline{\mathfrak{M}}$, топологизированном таким способом. Отсюда на основании теоремы Какутани — Крейна (§ 2 введения) мы можем заключить, что множество $F(\overline{\mathfrak{M}})$ плотно в B-пространстве $C(\overline{\mathfrak{M}})$. Приведенные в этом параграфе две теоремы заимствованы из работы Иосида — Фукамия [16]. См. также Какутани [4] и М. Г. Крейн — С. Г. Крейн [2].

6. Представление векторной структуры при помощи функций множества

Обозначим через X некоторую σ-полную векторную структуру. Выберем произвольный положительный элемент x из X и назовем его *„единицей“* в X. Мы будем обозначать выбранную „единицу“ символом 1, и в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, писать α вместо $\alpha \cdot 1$. Неотрицательный элемент $e \in X$ будем называть „квазиединицей“, если $e \wedge (1 - e) = 0$. Конечные линейные комбинации вида $\sum\limits_i \alpha_i e_i$ квазиединиц e_i мы будем называть „конечнозначными“ элементами, а всякий элемент $y \in X$, который выражается как O-lim последовательности конечнозначных элементов, назовем „абсолютно непрерывным“ (по отношению к единице 1). Всякий элемент $z \in X$, для которого $|z| \wedge 1 = 0$, будет называться „сингулярным“ (по отношению к единице 1).

Приведем абстрактную формулировку известной в теории интегрирования теоремы Радона — Никодима.

Теорема. Всякий элемент из X может быть единственным образом представлен в виде суммы абсолютно непрерывного и сингулярного элементов.

Доказательство. *Первый этап.* Если $f > 0$ и $f \wedge 1 \neq 0$, то найдутся положительное число α и квазиединица $e_\alpha \neq 0$, такие, что

$f \geqslant \alpha e_\alpha$. Например, мы можем положить

$$e_\alpha = \bigvee_{n \geqslant 1} \{n(\alpha^{-1}f - \alpha^{-1}f \wedge 1) \wedge 1\}. \tag{1}$$

Доказательство. Положим $y_\alpha = \alpha^{-1}f - \alpha^{-1}f \wedge 1$. Тогда

$$2e_\alpha \wedge 1 = \left\{ \bigvee_{n \geqslant 1} (2ny_\alpha \wedge 2) \right\} \wedge 1 = e_\alpha,$$

так что e_α — квазиединица. Неравенство $f \geqslant \alpha e_\alpha$ выводится из соотношения

$$ny_\alpha \wedge 1 = n\alpha^{-1}f \wedge [1 + n(\alpha^{-1}f \wedge 1)] - n(\alpha^{-1}f \wedge 1) \leqslant$$
$$\leqslant (n+1)\alpha^{-1}f \wedge (n+1) - n(\alpha^{-1}f \wedge 1) \leqslant \alpha^{-1}f \wedge 1 \leqslant \alpha^{-1}f.$$

Если мы сможем показать, что $y_\alpha \wedge 1 > 0$ для некоторого $\alpha > 0$, то $e_\alpha > 0$ при таком α. Предположим, что такого положительного значения α не существует. Тогда при любом α из интервала $0 < \alpha < 1$

$$\alpha^{-1}(\alpha^{-1}f - \alpha^{-1}f \wedge 1) \wedge \alpha^{-1} = 0.$$

Таким образом, $(f - f \wedge \alpha) \wedge 1 = 0$, и, полагая $\alpha \downarrow 0$, мы находим, что $f \wedge 1 = 0$, а это противоречит предположению $f \wedge 1 \neq 0$.

Второй этап. Пусть $f \geqslant 0$ и $f \geqslant \alpha e$, где $\alpha > 0$, а e — некоторая квазиединица. Тогда при $0 < \alpha' < \alpha$ мы имеем $e_{\alpha'} \geqslant e$ и $f \geqslant \alpha' e_{\alpha'}$, где $e_{\alpha'}$ определяется формулой (1).

Доказательство. Для упрощения выкладок мы, не ограничивая общности, можем положить $\alpha = 1$. При $0 < \delta < 1$

$$\frac{f}{1-\delta} + \frac{e}{1-\delta} \wedge 1 = \left(\frac{f}{1-\delta} + \frac{e}{1-\delta}\right) \wedge \left(1 + \frac{f}{1-\delta}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \left(\frac{f}{1-\delta} + \frac{e}{1-\delta}\right) \wedge \left(1 + \frac{e}{1-\delta}\right) = \frac{f}{1-\delta} \wedge 1 + \frac{e}{1-\delta}.$$

Поскольку e — квазиединица, мы имеем $2e \wedge 1 = e$, $e \wedge 1 = e$. Следовательно, $me \wedge 1 = e$ при $m \geqslant 1$. Так как $1 < (1-\delta)^{-1}$, мы получаем, что $(1-\delta)^{-1} e \wedge 1 = e$. Поэтому из приведенного выше неравенства следует, что

$$\frac{\delta}{1-\delta} e = \frac{e}{1-\delta} - \frac{e}{1-\delta} \wedge 1 \leqslant \frac{f}{1-\delta} - \frac{f}{1-\delta} \wedge 1 = y_{1-\delta},$$

откуда, согласно (1), $e \leqslant e_{1-\delta}$.

Третий этап. Совокупность всех квазиединиц образует *булеву алгебру*: если e_1 и e_2 — квазиединицы, то $e_1 \vee e_2$ и $e_1 \wedge e_2$ — тоже квазиединицы и, кроме того, $0 \leqslant e_i \leqslant 1$. Квазиединица $(1 - e)$ служит дополнением к e, а 0 и 1 являются соответственно наименьшим и наибольшим элементами в множестве всех квазиединиц.

Доказательство. Условие $e \wedge (1-e) = 0$ эквивалентно равенству $2e \wedge 1 = e$. Поэтому если e_1 и e_2 — квазиединицы, то

$$2(e_1 \wedge e_2) \wedge 1 = (2e_1 \wedge 1) \wedge (2e_2 \wedge 1) = e_1 \wedge e_2,$$
$$2(e_1 \vee e_2) \wedge 1 = (2e_1 \wedge 1) \vee (2e_2 \wedge 1) = e_1 \vee e_2,$$

так что $e_1 \wedge e_2$ и $e_1 \vee e_2$ также принадлежат множеству квазиединиц.

Четвертый этап. Пусть $f > 0$. Положим $\bar{f} = \sup \beta e_\beta$, где верхняя грань берется по всем положительным рациональным числам β. Как выяснено на третьем этапе доказательства, верхняя грань конечного множества элементов вида $\beta_i e_{\beta_i}$ представляет собой конечнозначный элемент. Следовательно, элемент $\bar{f}$ абсолютно непрерывен по отношению к единице 1. Покажем, что элемент $g = f - \bar{f}$ сингулярен по отношению к единице 1. Для этого допустим, что он не сингулярен. Тогда, как показано на первом этапе доказательства, найдутся положительное число α и квазиединица e, такие, что $g \geqslant \alpha e$. Поэтому $f \geqslant \alpha e$ и, как показано на втором этапе, существуют число α_1, $0 < \alpha_1 < \alpha$, и квазиединица $e_{\alpha_1} \geqslant e$, такие, что $f \geqslant \alpha_1 e_{\alpha_1}$. Можно считать, что число α_1 рационально. Тогда $\bar{f} \geqslant \alpha_1 e_{\alpha_1}$ и, следовательно, $f = \bar{f} + g \geqslant 2\alpha_1 e_{\alpha_1}$. Применяя снова результаты второго этапа доказательства, найдем число α_1' из промежутка $0 < \alpha_1' < \alpha_1$ и квазиединицу $e_{2\alpha_1'} \geqslant e_{\alpha_1}$, для которых $f \geqslant 2\alpha_1' e_{2\alpha_1'}$. Опять-таки можно допустить, что $2\alpha_1'$ рационально, и тогда $\bar{f} \geqslant 2\alpha_1' e_{2\alpha_1'}$. Отсюда следует, что $f = \bar{f} + g \geqslant 3\alpha_1' e$. Повторяя этот процесс, мы можем доказать, что для любого рационального числа α_n, удовлетворяющего неравенствам $0 < \alpha_n < \alpha$,

$$f \geqslant (n+1)\alpha_n e \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если взять $\alpha_n \geqslant \alpha/2$, то $(n+1)\alpha_n e \geqslant 2^{-1} n\alpha e$. Следовательно, $f \geqslant n\alpha e$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, где $\alpha > 0$, $e > 0$. Но последнее заключение приводит к противоречию, так как по предположению векторная структура X является σ-полной и в ней должна выполняться аксиома Архимеда.

Пятый этап. Напишем жорданово разложение $f = f^+ + f^-$ произвольного элемента $f \in X$. Применяя к каждому из элементов f^+ и f^- результаты четвертого этапа, мы находим, что элемент f разлагается в сумму абсолютно непрерывного и сингулярного элементов. Единственность такого разложения будет установлена, если мы покажем, что всякий элемент $h \in X$, являющийся одновременно сингулярным и абсолютно непрерывным, равен нулю. Но если элемент h абсолютно непрерывен, то $h = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} h_n$, где h_n — конечнозначные элементы, а для каждого конечнозначного элемента h_n существует такое положительное число a_n, что $|h_n| \leqslant a_n \cdot 1$. Так как элемент h одновременно сингулярен, то $|h| \wedge |h_n| = 0$. Поэтому $|h| = |h| \wedge |h| = O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} (|h| \wedge |h_n|) = 0$.

Приложение к теореме Радона — Никодима. Рассмотрим случай $X = A(S, \mathfrak{B})$. Мы уже знаем (предложение 1, гл. XII, § 3), что векторная структура $A(S, \mathfrak{B})$ является σ-полной и в $A(S, \mathfrak{B})$

$$x^+(B) = \sup_{B' \subseteq B} x(B') = \overline{V}(x; B), \tag{2}$$

где $\overline{V}(x; B)$ — положительная вариация x на B. Нам потребуется следующее вспомогательное

Предложение. Пусть $x > 0$ и $z \geqslant 0$ — элементы структуры $A(S, \mathfrak{B})$ и $x \wedge z = 0$. Тогда найдется такое множество $B_0 \in \mathfrak{B}$, что $x(B_0) = 0$ и $z(S - B_0) = 0$.

Доказательство. Так как $x \wedge z = (x - z)^- + z$, то из (2) следует, что

$$(x \wedge z)(B) = \inf_{B' \subseteq B} (x - z)(B') + z(B) = \inf_{B' \subseteq B} [x(B') + z(B - B')]. \tag{3}$$

Отсюда, используя предположение $x \wedge z = 0$, мы находим, что

$$\inf_{B \in \mathfrak{B}} [x(B) + z(S - B)] = (x \wedge z)(S) = 0.$$

Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое множество $B_\varepsilon \in \mathfrak{B}$, что $x(B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$, $z(S - B_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. Положим $B_0 = \bigwedge\limits_{k \geqslant 1} \left(\bigvee\limits_{n \geqslant k} B_{2^{-n}} \right)$. Тогда из σ-аддитивности функций $x(B)$ и $z(B)$ следует, что

$$0 \leqslant x(B_0) = \lim_{k\to\infty} x\left(\bigvee_{n \geqslant k} B_{2^{-n}} \right) \leqslant \lim_{k\to\infty} \sum_{n=k}^{\infty} 2^{-n} = 0,$$

$$0 \leqslant z(S - B_0) = \lim_{k\to\infty} z\left(S - \bigvee_{n \geqslant k} B_{2^{-n}} \right) \leqslant \lim_{k\to\infty} z\left(S - B_{2^{-k}} \right) = 0.$$

Следствие. Пусть e — квазиединица векторной структуры $A(S, \mathfrak{B})$ по отношению к некоторому элементу $x > 0$. Тогда существует множество $B_1 \in \mathfrak{B}$, такое, что

$$e(B) = x(B \cap B_1) \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{B}. \tag{4}$$

Доказательство. Так как $(x - e) \wedge e = 0$, найдется такое множество $B_0 \in \mathfrak{B}$, что $e(B_0) = 0$, $(x - e)(S - B_0) = 0$. Поэтому $e(S - B_0) = x(S - B_0) = e(S)$ и, следовательно, $e(B) = x(B - B_0) = x(B \cap B_1)$, где $B_1 = S - B_0$.

Теперь мы можем доказать теорему Радона — Никодима теории интегрирования. Из следствия видно, что квазиединица e по отношению к элементу $x > 0$ — это не что иное, как *сужение* $e(B) = x(B \cap B_e)$

меры x[1]). Следовательно, всякий конечнозначный элемент из $A(S, \mathfrak{B})$ можно рассматривать как интеграл вида

$$\sum_i \lambda_i \int_{B \cap B_i} x\, ds,$$

т. е. как неопределенный интеграл от простой функции. Значит, абсолютно непрерывные элементы из $A(S, \mathfrak{B})$ представляют собой неопределенные интегралы по отношению к мере $x(B)$. Доказанное выше предложение утверждает, что сингулярному (по отношению к единице x) элементу g соответствует множество $B_0 \in \mathfrak{B}$, такое, что $x(B_0) = 0$, $g(B) = g(B \cap B_0)$ для всех $B \in \mathfrak{B}$. Такую меру $g(B)$ называют *сингулярной* (по отношению к $x(B)$). Мы показали, таким образом, что всякий элемент $f \in A(S, \mathfrak{B})$ представляется в виде суммы неопределенного интеграла (по отношению к $x(B)$) и сингулярной (по отношению к $x(B)$) меры $g(B)$, причем это разложение единственно. Полученный результат и составляет содержание теоремы Радона — Никодима.

Замечание. Приведенная в этом параграфе теорема взята из работы Иосида [6]. Ср. Рисс [6], Фрейденталь [2] и Какутани [5]. По поводу дальнейших ссылок см. Биркгоф Г. [1][2]).

---

[1]) Если $\mathfrak{B}$ есть σ-аддитивное семейство множеств $B \subseteq S$, то семейство $\mathfrak{B}' = \{B' \in \mathfrak{B};\ B' \subseteq B_0\} = \{B' = B_0 \cap B,\ B \in \mathfrak{B}\}$, где $B_0 \in \mathfrak{B}$, называется *сужением* $\mathfrak{B}$ *на* B_0. Соответственно сужение функции множества $x(B)$, заданной на $\mathfrak{B}$, на семейство $\mathfrak{B}'$ называется *сужением* x *на* B_0. Мера $e(B) = x(B \cap B_1)$, которая рассматривается в (4), фактически определена на множествах вида $B' = B \cap B_1$ и является сужением x на B_1. — *Прим. перев.*

[2]) По теории векторных структур см. Канторович [2*], Вулих [2*]; общие сведения по теории структур см. также в книге Куроша [1*]. — *Прим. перев.*

ГЛАВА XIII

Эргодическая теория и теория диффузионных процессов

Эргодическая теория и теория диффузионных процессов представляют собой широкое поле для приложения результатов аналитической теории полугрупп. С математической точки зрения эргодическая теория связана с изучением „временны́х средних“ вида $\lim_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int_0^t T_s\,ds$ для полугрупп операторов T_t, а теория диффузионных процессов изучает стохастические процессы с помощью исследования свойств инфинитезимальных производящих операторов полугрупп, внутренне связанных с рассматриваемыми стохастическими процессами.

1. Марковский процесс с инвариантной мерой

В 1862 г. английский ботаник Броун, наблюдая под микроскопом за движением мельчайших частиц цветочной пыльцы, взвешенных в жидкости, обратил внимание на хаотическое движение этих частиц, беспрестанно меняющих свое положение и направление движения. Для описания такого рода явлений рассматривается так называемая переходная функция $P(t, x, s, E)$; величина $P(t, x, s, E)$ соответствует вероятности того, что частица, занимающая положение x в момент времени t, будет находиться в точке, принадлежащей множеству E, в последующий момент времени s. Введение такой переходной функции основывается на гипотезе о том, что хаотическое движение частиц после момента времени t совершенно не зависит от истории их движения, относящейся ко времени, предшествующему t. Иными словами, предполагается, что хаотическое движение после момента t полностью определяется расположением этих частиц в момент времени t. Это предположение о том, что ансамбль частиц не имеет памяти, приводит к тому, что переходная функция $P(t, x, s, E)$ должна удовлетворять уравнению вида

$$P(t, x, s, E) = \int_S P(t, x, u, dy)\,P(u, y, s, E) \quad \text{при} \quad t < u < s, \qquad (1)$$

где интегрирование выполняется по всему пространству S, занятому хаотическим движением частиц.

Процесс, который развивается во времени в соответствии с переходной функцией $P(t, x, s, E)$, удовлетворяющей уравнению (1), называется *марковским процессом*, а уравнение (1) называется *уравнением Чепмена — Колмогорова*. Понятие марковского процесса является естественным обобщением понятия детерминированного процесса, при котором $P(t, x, s, E)=1$, если $y \in E$ ($y = y(x, t, s)$), и $P(t, x, s, E)=0$, если $y \notin E$, т. е. когда частица, занимающая положение x в момент времени t, в любой последующий фиксированный момент s с вероятностью 1 попадает в положение $y=y(x, t, s)$. Марковский процесс P называют *однородным во времени*, если $P(t, x, s, E)$ как функция t и s зависит только от разности $(s-t)$. В этом случае для изучения процесса приходится рассматривать переходную функцию $P(t, x, E)$, определяющую вероятность перехода частицы из положения x в точку множества E по прошествии t единиц времени. Уравнение (1) приобретает тогда форму

$$P(t+s, x, E)=\int_S P(t, x, dy) P(s, y, E) \quad \text{при} \quad t, s>0. \tag{2}$$

Процесс $P(t, x, E)$ порождает в соответствующем функциональном пространстве X некоторое линейное преобразование T_t, определяемое формулой

$$(T_t f)(x)=\int_S P(t, x, dy) f(y), \qquad f \in X, \tag{3}$$

для которого имеет место *полугрупповое свойство*

$$T_{t+s}=T_t T_s \quad (t, s>0). \tag{4}$$

Основная математическая проблема статистической механики связана с существованием временно́го среднего значения

$$\lim_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int_0^t T_s f\, ds. \tag{5}$$

Рассмотрим в качестве примера детерминированное механическое движение, описываемое некоторой системой уравнений Гамильтона с гамильтонианом, не зависящим явно от времени t. В этом случае траектория движения, выходящая из точки $x \in S$, приходит по прошествии t единиц времени в точку $y_t(x) \in S$, и при этом, согласно классической теореме Лиувилля, отображение $x \to y_t(x)$ множества S на себя оставляет инвариантным так называемый „фазовый объем“ в пространстве S; в этом смысле отображение $x \to y_t(x)$ *сохраняет меру*. Оператор T_t определяется в этом случае как

$$(T_t f)(x)=f(y_t(x)). \tag{6}$$

Известная *эргодическая гипотеза Больцмана* утверждает, что

> среднее по времени движения от некоторой физической величины, связанной с вышеописанным движением, совпадает с ее пространственным средним значением.

Если предположить, что $\int\limits_S dx < \infty$, где dx — элемент фазового объема, то математически эта гипотеза выразится соотношением

$$\lim_{t \uparrow \infty} t^{-1} \int_0^t f(y_s(x))\, ds = \int_S f(x)\,dx \Big/ \int_S dx \quad \text{для всех} \quad f \in X. \tag{7}$$

Естественным обобщением понятия преобразования $x \to y_t(x)$, сохраняющего меру, в случае марковского процесса $P(t, x, E)$ является предположение о существовании так называемой *инвариантной меры* $m(dx)$:

$$\int_S m(dx) P(t, x, E) = m(E) \text{ для всех } t > 0 \text{ и всех } E. \tag{8}$$

Эти предварительные рассуждения приводят нас к следующему определению.

Определение. Пусть $\mathfrak{B}$ — некоторое σ-аддитивное семейство подмножеств B множества S, содержащее само S. Допустим, что при любых $t > 0$, $x \in S$ и произвольном $E \in \mathfrak{B}$ определена функция $P(t, x, E)$, удовлетворяющая требованиям

$$P(t, x, E) \geqslant 0, \quad P(t, x, S) = 1; \tag{9}$$

при любых фиксированных t и x функция $P(t, x, E)$ σ-аддитивна относительно множеств $E \in \mathfrak{B}$; (10)

при фиксированных t и E функция $P(t, x, E)$ $\mathfrak{B}$-измерима по переменной x; (11)

$$P(t+s, x, E) = \int_S P(t, x, dy) P(s, y, E) \tag{12}$$

(уравнение Чепмена — Колмогорова).

При выполнении этих условий говорят, что $P(t, x, E)$ определяет *марковский процесс в фазовом пространстве* $(S, \mathfrak{B})$. В тех случаях, когда мы будем дополнительно предполагать, что $(S, \mathfrak{B}, m)$ образует пространство с мерой m, такое, что выполняется условие

$$\int_S m(dx) P(t, x, E) = m(E) \quad \text{для всех} \quad E \in \mathfrak{B}, \tag{13}$$

$P(t, x, E)$ будет называться *марковским процессом с инвариантной мерой* $m(E)$.

Теорема 1. Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, такой, что $m(S) < \infty$. Норму пространства $X_p = L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ обозначим символом $\|f\|_p$, $p \geqslant 1$. Тогда условие (3) определяет ограниченный линейный оператор $T_t \in L(X_p, X_p)$, такой, что $T_{t+s} = T_t T_s$ $(t, s > 0)$, и при этом

$$\text{оператор } T_t \text{ \textit{положителен} в том смысле, что при } f(x) \geqslant 0 \ m\text{-п. в. также и } (T_t f)(x) \geqslant 0 \ m\text{-п. в.,} \tag{14}$$

$$T_t \cdot 1 = 1, \tag{15}$$

$$\|T_t f\|_p \leqslant \|f\|_p \text{ при } f \in X_p = L^p(S, \mathfrak{B}, m), \text{ когда } p = 1, 2 \text{ и } \infty. \tag{16}$$

Доказательство. Утверждения (14) и (15) очевидны. Пусть $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$. Тогда ввиду (9), (10) и (11) функция $f_t(x) = (T_t f)(x) \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ определена и $\|f_t\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Следовательно, учитывая (9) и (13), мы видим, что для $f \in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$ при значениях $p = 1$ или $p = 2$

$$\|f_t\|_p = \left\{ \int_S m(dx) \left| \int_S P(t, x, dy) f(y) \right|^p \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_S m(dx) \left[\int_S P(t, x, dy) |f(y)|^p \cdot \int_S P(t, x, dy) \cdot 1^p \right] \right\}^{1/p} =$$

$$= \left\{ \int_S m(dy) |f(y)|^p \right\}^{1/p} = \|f\|_p.$$

Возьмем неотрицательную функцию $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ $(p = 1$ или $p = 2)$ и положим ${}_nf(s) = \min(f(s), n)$, где n — целое положительное число. Тогда на основании установленных выше результатов мы приходим к неравенствам $0 \leqslant ({}_nf(s))_t \leqslant ({}_{n+1}f(s))_t$ и $\|({}_nf)_t\|_p \leqslant \|{}_nf\|_p \leqslant \|f\|_p$. Поэтому, полагая $f_t(s) = \lim_{n\to\infty} ({}_nf(s))_t$ и применяя лемму Лебега — Фату, мы находим, что $\|f_t\|_p \leqslant \|f\|_p$, т. е. $f_t \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$. Применяя лемму Лебега — Фату еще раз, получаем неравенство

$$f_t(x) = \lim_{n\to\infty} \int_S P(t, x, dy)({}_nf(y)) \geqslant \int_S P(t, x, dy)\left(\lim_{n\to\infty} ({}_nf(y))\right) = \int_S P(t, x, dy) f(y).$$

Следовательно, функция $f(y)$ интегрируема по отношению к мере $P(t, x_0, dy)$ при тех значениях x_0, для которых $f_t(x_0) \neq \infty$, т. е. m-п. в. относительно переменной x_0. Отсюда по лемме Лебега — Фату

$$\int_S P(t, x_0, dy)\left(\lim_{n\to\infty} ({}_nf(y))\right) = \lim_{n\to\infty} \int_S P(t, x_0, dy)({}_nf(y)).$$

Таким образом, $f_t(x_0)=\int\limits_S P(t, x_0, dy) f(y)$ m-п. в. и $\|f_t\|_p \leqslant \|f\|_p$.

Для произвольного элемента $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ аналогичный результат получается, если применить положительный оператор T_t в отдельности к f^+ и f^-.

Теорема 2 (Иосида). Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, такой, что $m(S)<\infty$. Тогда для любой функции $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при $p=1$ или $p=2$ выполняется утверждение статистической эргодической теоремы

$$\begin{gathered} s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n} T_k f = f^* \text{ существует в } L^p(S, \mathfrak{B}, m) \\ \text{при всех } f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m) \text{ и } T_1 f^* = f; \end{gathered} \tag{17}$$

кроме того,

$$\int\limits_S f(s)\, m(ds) = \int\limits_S f^*(s)\, m(ds). \tag{18}$$

Доказательство. В гильбертовом пространстве $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ утверждение (17) статистической эргодической теоремы выполняется на основании условия (16) и общей статистической эргодической теоремы из гл. VIII, § 3.

Поскольку $m(S)<\infty$, мы замечаем, применяя неравенство Шварца, что всякая функция $f \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ принадлежит пространству $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_2 \cdot m(S)^{1/2}$. Поэтому соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S \left| f^*(s) - n^{-1}\sum_{k=1}^{n} (T_k f)(s) \right| m(ds) = 0$$

статистической эргодической теоремы и равенство $T_1 f^* = f^*$ справедливы для всякой функции $f \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$. Используя еще раз требование $m(S)<\infty$ и равенства

$$0 = \lim_{n\to\infty} \|f - {}_nf\|_1 = \lim_{n\to\infty} \int\limits_S |f(s) - {}_nf(s)|\, m(ds)$$

и

$${}_nf(s) = \min(f(s), n),$$

мы видим, что $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ плотно в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ (в топологии L^1). Это означает, что для любых $f \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и $\varepsilon>0$ найдется такая функция $f_\varepsilon \in L^2(S, \mathfrak{B}, m) \cap L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, что $\|f - f_\varepsilon\|_1 < \varepsilon$. Отсюда на основании (16) мы находим, что

$$\left\| n^{-1}\sum_{k=1}^{n} T_k f - n^{-1}\sum_{k=1}^{n} T_k f_\varepsilon \right\|_1 \leqslant \|f - f_\varepsilon\|_1 \leqslant \varepsilon.$$

Соотношение (17) статистической эргодической теоремы выполняется для f_ε в пространстве $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$, и поэтому полученное выше неравенство показывает, что (17) выполняется также в $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и для функции f.

Поскольку из сильной сходимости вытекает слабая сходимость, условие (18) следует из (17).

Замечание 1. Приведенная выше теорема 2 принадлежит Иосида [17]. См. также работу Какутани [6], где сходимость $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$ m-п. в. доказана для произвольной функции $f\in L^\infty(S, \mathfrak{B}, m)$. Можно показать, что в случае, когда полугруппа T_t сильно непрерывна по t, выражение $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n} T_k f$ в (17) можно заменить на $s\text{-}\lim\limits_{t\uparrow\infty} t^{-1}\int\limits_0^t T_s f\,ds$. Мы не будем здесь приводить деталей последних утверждений, их можно найти в книгах по эргодической теории Хопфа Э. [1] и Джекобса [1]. Укажем также на интересный доклад Какутани [8] о развитии эргодической теории от доклада Э. Хопфа в 1937 г. до Международного конгресса математиков в 1950 г. (Кембридж).

Для обоснования эргодической гипотезы (7), нам придется доказать так называемую *индивидуальную эргодическую теорему*, чтобы убедиться в существовании

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(T_k f)(x) = f^*(x) \quad m\text{-п. в.}$$

В следующем параграфе мы рассмотрим сходимость m-п. в. последовательности вида $n^{-1}\sum\limits_{k=1}^{n}(T_k f)(x)$. Наша цель будет состоять в том, чтобы, используя теорему Банаха о сходимости из § 4 гл. XII, вывести m-п. в. сходимость из сходимости в среднем.

2. Индивидуальная эргодическая теорема и ее приложения

Вначале будет доказана

Теорема 1 (Иосида). Пусть X_1 — некоторая вещественная σ-полная F-структура с квазинормой $\|x\|_1$, такая, что

$$\text{если } O\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{то } \lim_{n\to\infty}\|x_n\|_1 = \|x\|_1. \tag{1}$$

Предположим, что некоторое линейное подпространство X пространства X_1 представляет собой вещественное B-пространство с нормой $\|x\|$, такой, что

$$\text{если } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ в } X, \quad \text{то } s\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ в } X_1. \tag{2}$$

Рассмотрим последовательность $\{T_n\}$ ограниченных линейных операторов, отображающих X в себя, удовлетворяющую следующему условию:

для значений x, образующих в X множество S второй категории, существует верхний предел $O\text{-}\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |T_n x|$. (3)

Допустим, что некоторому $z \in X$ соответствует такой элемент $\bar{z} \in X'$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|T_n z - \bar{z}\| = 0, \tag{4}$$

$$T_n \bar{z} = \bar{z} \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{5}$$

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} (T_n z - T_n T_k z) = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Тогда

$$O\text{-}\lim_{n\to\infty} T_n z = \bar{z}. \tag{7}$$

Доказательство. Положим $z = \bar{z} + (z - \bar{z})$. Определим теперь равенством

$$\tilde{T} x = O\text{-}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x - O\text{-}\underline{\lim_{n\to\infty}}\, T_n x \tag{8}$$

оператор $\tilde{T}$, действующий из S в X_1. Тогда ввиду (5)

$$0 \leqslant \tilde{T} z \leqslant \tilde{T}(z - \bar{z}).$$

Из (6) следует, что $\tilde{T}(z - T_k z) = 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и ввиду (4) $\lim\limits_{k\to\infty} \|(z - \bar{z}) - (z - T_k z)\| = 0$. Поэтому, применяя теорему Банаха из § 4 гл. XII, мы находим, что $\tilde{T}(z - \bar{z}) = 0$. Следовательно, $0 \leqslant \tilde{T} z \leqslant 0$, т. е. $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n z = w$ существует.

Мы должны теперь показать, что $w = \bar{z}$. Из (4) и (2) мы получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n z - \bar{z}\|_1 = 0$. Кроме того, из (1) и условия $O\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} T_n z = w$ следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n z - w\|_1 = 0$. Таким образом, $w = \bar{z}$. Теорема доказана.

Пусть теперь X_1 — вещественное пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$, а X — вещественное пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. При этих условиях справедлива следующая индивидуальная эргодическая теорема.

Теорема 2 (Иосида). Рассмотрим ограниченный линейный оператор T, отображающий пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя, и допустим, что $m(S) < \infty$. Предположим также, что

$$\|T^n\| \leqslant C < \infty \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{9}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m x)(s) \right| < \infty \ m\text{-п. в.} \tag{10}$$

Пусть для некоторого элемента $z \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1}(T^n z)(s) = 0 \ m\text{-п. в.} \tag{11}$$

и

последовательность $\left\{ n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m z \right\}$ содержит подпоследовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $\bar{z} \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$. (12)

Тогда

$$s\text{-}\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m z = \bar{z}, \quad T\bar{z} = \bar{z}, \tag{13}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{m=1}^{n} (T^m z)(s) = \bar{z}(s) \qquad m\text{-п. в.} \tag{14}$$

Доказательство. Возьмем пространство $M(S, \mathfrak{B}, m)$ и будем рассматривать $X_1 = M(S, \mathfrak{B}, m)$ как F-структуру с квазинормой $\|x\|_1 = \int_S |x(s)|(1 + |x(s)|)^{-1} m(ds)$, а в качестве B-структуры X примем $X = L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ с нормой $\|x\| = \int_S |x(s)| m(ds)$. Через T_n обозначим выражение $n^{-1} \sum_{m=1}^{n} T^m$. Условия теоремы 1, как нетрудно проверить, здесь выполняются. Проверим, например, требование (6). Из равенства

$$T_n z - T_n T^k z = n^{-1}(T + T^2 + \ldots + T^n)z - \\ - n^{-1}(T^{k+1} + T^{k+2} + \ldots + T^{k+n}) z$$

и (11) мы находим, что $\lim_{n\to\infty} (T_n z - T_n T^k z)(s) = 0$ m-п. в. для значений $k = 1, 2, \ldots$. Возьмем теперь арифметическое среднее по k; тогда для значений $k = 1, 2, \ldots$ получим, что $\lim_{n\to\infty} (T_n z - T_n T_k z)(s) = 0$ m-п. в. Условия (4) и (5), совпадающие с (13), следуют из статистической эргодической теоремы гл. VIII, § 3.

Замечание. Приведенные выше две теоремы взяты из работ Иосида [15] и [18]. В этих статьях приводятся также некоторые другие эргодические теоремы, вытекающие из теоремы 1.

Следующий результат, принадлежащий Э. Хопфу [3], касается некоторого общего условия, из которого, в частности, вытекает (11).

Теорема 3. Пусть T — некоторый положительный линейный оператор, отображающий вещественное пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя, L^1-норма которого удовлетворяет неравенству $\|T\| \leqslant 1$. Если $f \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и функция $p \in L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ такова, что $p(s) \geqslant 0$ m-п. в., то

$$\lim_{n\to\infty}\left\{(T^n f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n-1}(T^j p)(s)\right\} = 0 \quad m\text{-п. в. на множестве, где } p(s) > 0.$$

Если $m(S) < \infty$ и $T \cdot 1 = 1$, то, полагая $p(s) = 1$, мы получаем из приведенного выше соотношения условие (11).

Доказательство. Достаточно доказать теорему для случая $f \geqslant 0$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$ и рассмотрим функции

$$g_n = T^n f - \varepsilon \cdot \sum_{j=0}^{n-1} T^j p, \quad g_0 = f.$$

Обозначим через $x_n(s)$ характеристические функции множеств $\{s \in S;\ g_n(s) \geqslant 0\}$. Так как $x_n g_n = g_n^+ = \max(g, 0)$ и $g_{n+1} + \varepsilon p = T g_n$, то, учитывая положительность оператора T и неравенство $\|T\| \leqslant 1$, находим

$$\begin{aligned}\int_S g_{n+1}^+ \cdot m(ds) + \varepsilon \int_S x_{n+1} p \cdot m(ds) &= \int_S x_{n+1}(g_{n+1} + \varepsilon p)\, m(ds) = \\ &= \int_S x_{n+1} T g_n \cdot m(ds) \leqslant \int_S x_{n+1} T g_n^+ \cdot m(ds) \leqslant \\ &\leqslant \int_S T g_n^+ \cdot m(ds) \leqslant \int_S g_n^+ \cdot m(ds).\end{aligned}$$

Суммируя полученные неравенства по n, начиная со значения $n = 0$, получаем

$$\int_S g_n^+ \cdot m(ds) + \varepsilon \int_S p \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot m(ds) \leqslant \int_S g_0^+ \cdot m(ds),$$

откуда следует, что

$$\int_S p \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k \cdot m(ds) \leqslant \varepsilon^{-1} \int_S g_0^+ \cdot m(ds).$$

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k(s)$ сходится m-п. в. на множестве, где $p(s) > 0$. Следовательно, на множестве точек, где $p(s) > 0$, должно m-п. в. при достаточно больших значениях n выполняться неравенство $g_n(s) < 0$.

Мы, таким образом, доказали, что $(T^n f)(s) < \varepsilon \sum\limits_{k=0}^{n-1} (T^k p)(s)$ m-п. в. для достаточно больших значений n на множестве, где $p(s) > 0$. Поскольку значение $\varepsilon > 0$ выбиралось произвольно, отсюда вытекает утверждение теоремы.

Следующая теорема, принадлежащая Чакону — Орнстейну [1], касается условия, из которого как частный случай следует (10).

Теорема 4 (Чакон, Орнстейн). Пусть положительный линейный оператор T отображает вещественное пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя и его L^1-норма удовлетворяет неравенству $\|T\|_1 \leqslant 1$. Пусть функции f и p принадлежат $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ и $p(s) \geqslant 0$; тогда

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (T^k f)(s) \Big/ \sum_{k=0}^{\infty} (T^k p)(s) \right\} \text{ конечен } m\text{-п. в.}$$

$$\text{на множестве, где } \sum_{n=0}^{\infty} (T^n p)(s) > 0.$$

Если $m(S) < \infty$ и $T \cdot 1 = 1$, то, полагая $p(s) = 1$, мы получаем из приведенного выше соотношения условие (10).

Для доказательства этой теоремы нам потребуется следующая лемма.

Лемма (Чакон — Орнстейн [1]). Если $f = f^+ + f^-$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n} (T^k f)(s) > 0$$

на некотором множестве B, то найдутся последовательности $\{d_k\}$ и $\{f_k\}$ неотрицательных функций, такие, что для любого N

$$\int_S \sum_{k=0}^{N} d_k \cdot m(ds) + \int_S f_N \cdot m(ds) \leqslant \int_S f^+ \cdot m(ds), \tag{15}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k(s) = -f^-(s) \text{ на множестве } B, \tag{16}$$

$$T^N f^+ = \sum_{k=0}^{N} T^{N-k} d_k + f_N. \tag{17}$$

Доказательство. Обозначим через d_0, f_0, f_{-1} выражения

$$d_0 = 0, \quad f_0 = f^+, \quad f_{-1} = 0$$

и определим по индукции величины

$$f_{i+1}=(Tf_i+f^-+d_0+\ldots+d_i)^+,\quad d_{i+1}=Tf_i-f_{i+1}. \tag{18}$$

Заметим, что

$$f^-+d_0+\ldots+d_i\leqslant 0 \tag{19}$$

и что равенство достигается на множестве, где $f_i(s)>0$, для

$$\begin{aligned}f_i&=(Tf_{i-1}+f^-+d_0+\ldots+d_{i-1})^+=\\&=(Tf_{i-1}-f_i+f^-+d_0+\ldots+d_{i-1}+f_i)^+=\\&=(d_i+f^-+d_0+\ldots+d_{i-1}+f_i)^+.\end{aligned}$$

Из (18) получаем соотношение

$$T^jf^+=\sum_{k=0}^{j}T^{j-k}d_k+f_j. \tag{20}$$

По определению f_i неотрицательны, так же как и d_i в силу (18) и (19). Из (20) мы находим, что

$$\sum_{j=0}^{n}T^jf^+=\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}T^{j-k}d_k+\sum_{j=0}^{n}f_j. \tag{21}$$

Докажем теперь неравенство

$$\sum_{j=0}^{n}T^jf^+\leqslant\sum_{j=0}^{n}d_j-\sum_{j=1}^{n}T^jf^-+\sum_{j=0}^{n}f_j. \tag{22}$$

Для этого заметим, что

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{j}T^{j-k}d_k=\sum_{j=0}^{n}T^j\left(\sum_{k=0}^{n-j}d_k\right)$$

и что вследствие положительности оператора T и условия (19)

$$-T^jf^-\geqslant T^j\left(\sum_{k=0}^{n-j}d_k\right)\quad\text{при}\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{23}$$

Перепишем теперь неравенство (22) в виде

$$\sum_{j=0}^{n}T^j(f^++f^-)\leqslant\sum_{j=0}^{n}(d_j+f_j)+f^-. \tag{24}$$

Теперь мы докажем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty}d_j(s)+f^-(s)\geqslant 0\ m\text{-п. в. на } B. \tag{25}$$

Из замечания, сделанного ранее по поводу условия (19), следует, что (25) переходит в равенство, выполняющееся m-п. в. на множестве $C=\{s \in S;\ f_j(s)>0$ при некотором $j \geqslant 0\}$. Остается лишь убедиться в том, что условие (25) справедливо для множества $B-C$. Последнее утверждение вытекает из того, что вследствие (24) неравенство

$$\sum_{j=0}^{\infty}(d_j+f_j)(s)+f^-(s) \geqslant 0$$

выполняется и на B, и на множестве $B-C$.

Заметим, далее, что условие (17) совпадает с (20) и что (16) вытекает из (19) и (25). Наконец, (15) следует из неравенства

$$\int_S \left(\sum_{k=0}^{j} d_k+f_j\right) m(ds) \geqslant \int_S \left(\sum_{k=0}^{j} d_k+T \cdot f_j\right) m(ds)=$$
$$=\int_S \left(\sum_{k=0}^{j+1} d_k+f_{j+1}\right) m(ds),$$

которое в свою очередь вытекает из условия (18) и предположений, сделанных относительно оператора T. В самом деле, неравенство (15) легко теперь устанавливается с помощью индукции по j, так как $d_0+f_0=f^+$.

Доказательство теоремы 4. Достаточно доказать теорему в предположении, что $f(s) \geqslant 0$ на S, причем нужно установить лишь конечность указанного в теореме верхнего предела в случае, когда $p(s)>0$. Первое из этих замечаний вполне очевидно, а второе доказывается следующим образом. Если допустить, что указанный верхний предел конечен во всякой точке s, в которой $p(s)>0$, то

$$\varlimsup_{n \to \infty} \left\{ \sum_{j=0}^{n} (T^{j+k} f)(s) \Big/ \sum_{j=0}^{n} (T^{j+k} p)(s) \right\} \text{ конечен}$$
$$m\text{-п. в. на множестве, где } (T^k p)(s)>0, \tag{26}$$

откуда следует, что предел $\varlimsup_{n \to \infty} \left\{ \sum_{j=0}^{n} (T^j f)(s) \Big/ \sum_{j=0}^{n} (T^j p)(s) \right\}$ конечен m-п. в. на множестве, где $(T^k p)(s)>0$.

Итак, покажем, что при $f(s) \geqslant 0$ на S верхний предел $\varlimsup_{n \to \infty} \left\{ \sum_{j=0}^{n} (T^j f)(s) \Big/ \sum_{j=0}^{n} (T^j p)(s) \right\}$ конечен в тех точках, где $p(s)>0$.

Для этого допустим противное. Тогда предел

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\{\sum_{j=0}^{n}(T^j f)(s)\Big/\sum_{j=0}^{n}(T^j p)(s)\right\}$$

бесконечен m-п. в. на некотором множестве E положительной m-меры и $p(s)>\beta>0$ на множестве E, где β — некоторая положительная постоянная. Тогда найдется такое положительное значение α, что

$$\sup_n\left\{\sum_{j=0}^{n}\left(T^j\left((f-\alpha p)^+ + (f-\alpha p)^-\right)\right)(s)\right\}>0$$

m-п. в. на множестве E. Заменяя f на $(f-\alpha p)$ и применяя доказанную выше лемму, мы выводим из условий (15) и (16) неравенства

$$\int_S (f-\alpha p)^+ m(ds)\geqslant\int_S\sum_{k=0}^{\infty}d_k m(ds)\geqslant-\int_E(f-\alpha p)^-\,m(ds).$$

Однако при $\alpha\uparrow\infty$ выражение $-\int_E(f-\alpha p)^- m(ds)$ стремится к ∞, а величина $\int_S(f-\alpha p)^+ m(ds)$ при $\alpha\uparrow\infty$ ограничена. Полученное противоречие и завершает доказательство теоремы.

Из доказанных в этом разделе утверждений вытекает

Теорема 5. Пусть положительный линейный оператор T отображает пространство $L^1(S, \mathfrak{B}, m)$ в себя и его L^1-норма удовлетворяет условию $\|T\|_1\leqslant 1$. Если $m(S)<\infty$ и $T\cdot 1=1$, то для любой функции $f\in L^1(S, \mathfrak{B}_1, m)$, для которой последовательность $\left\{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}T^j f\right\}$ сходится в среднем, эта последовательность сходится и m-п. в.

Из теоремы 5 вытекает

Теорема 6. Пусть $P(t, x, E)$ — марковский процесс с инвариантной мерой m, определенный на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, причем $m(S)<\infty$. Тогда для линейных операторов T_t, определяемых равенством $(T_t f)(x)=\int_S P(t, x, dy)f(y)$, справедливы следующие утверждения:

1. (*Статистическая эргодическая теорема*)

Для любой функции $f\in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ в пространстве $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ существует $s\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1}\sum_{k=1}^{n}T_k f=f^*$, и $T_1 f^*=f^*$ $(p=1, 2)$. (27)

2. (*Индивидуальная эргодическая теорема*)

Для любой функции $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при значениях $p=1$ или $p=2$ существует m-п. в. конечный $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} (T_k f)(s)$, равный $f^*(s)$ m-п. в., и, кроме того, $\int\limits_S f(s)\, m(ds) = \int\limits_S f^*(s)\, m(ds)$. (28)

Доказательство. По теореме 2 предыдущего параграфа условие (27) статистической эргодической теоремы выполняется, и поэтому можно применить теорему 5.

Замечание. Если оператор T_t определяется сохраняющим меру преобразованием $x \to y_t(x)$ пространства S на S, то утверждение (27) совпадает со статистической эргодической теоремой фон Неймана [3], а результат (28) — с индивидуальной эргодической теоремой Биркгофа Дж. [1] и Хинчина [1].

Исторические замечания. Первое теоретико-операторное обобщение индивидуальной эргодической теоремы типа Биркгофа — Хинчина было предложено Дубом [1]. Он доказал, что выражение $n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} (T_k f)(x)$ сходится m-п. в., если оператор T_t определяется некоторым марковским процессом $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m на пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, такой, что $m(S)=1$, а функция f является характеристической функцией некоторого множества из $\mathfrak{B}$. Какутани [6] заметил, что метод Дуба можно применить с тем же результатом и в том случае, когда функция f ограничена и $\mathfrak{B}$-измерима. Далее Э. Хопф [2] доказал эту теорему в предположении, что f является m-интегрируемой. Данфорд и Дж. Шварц [4] обобщили результат Хопфа, доказав, что утверждение (28) справедливо для линейных операторов T_t, не увеличивающих норм ни в L^1, ни в L^∞, не предполагая положительности T_t, но при дополнительном ограничении, что $T_k = T_1^k$ и $T_1 \cdot 1 = 1$. Отметим, что в доказательстве Хопфа и Данфорда — Шварца используются идеи доказательства нашей теоремы 1. Чакон и Орнстейн [1] доказали (28) для положительного линейного оператора T_1 с L^1-нормой, не превосходящей 1, без предположения о том, что T_t не увеличивает L^∞-нормы и, более того, не используя теорему 1. При этом, естественно, предполагалось, что $T_k = T_1^k$ и $T_1 \cdot 1 = 1$. Мы не будем углубляться в детали, относящиеся к этому вопросу поскольку в данной главе рассматриваются марковские процессы и для обоснования эргодической теории вполне достаточно теоремы 6, которая вытекает из нашей теоремы 1.

3. Эргодическая гипотеза и H-теорема

Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, определенный в пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B}, m)$, таком, что $m(S) = 1$. Предположим, что процесс $P(t, x, E)$ удовлетворяет следующему *условию эргодичности*:

среднее значение по времени

$$f^*(s) = \lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (T_k f)(x)$$

совпадает m-п. в. со средним значением по пространству, т. е. с величиной

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} \int_S P(k, x, dy) f(y) \tag{1}$$

для всякой функции $f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при значениях $p = 1$ или $p = 2$.

Так как $\int_S f^*(x) m(dx) = \int_S f(x) m(dx)$, то условие (1) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$f^*(x) = \text{const}\ m\text{-п. в. для всякой } f \in L^p(S, \mathfrak{B}, m)\ (p = 1, 2). \tag{1'}$$

Мы приведем здесь три различные интерпретации эргодической гипотезы (1), (1').

1. Обозначим через $\chi_B(x)$ характеристическую функцию множества $B \in \mathfrak{B}$. При выполнении (1') для любых двух множеств $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ *средняя по времени вероятность того, что точки множества B_1 будут перенесены в множество B_2 за k единиц времени, равна произведению $m(B_1)\, m(B_2)$*. Иначе говоря,

$$(\chi^*_{B_2}, \chi_{B_1}) = m(B_1)\, m(B_2). \tag{2}$$

Доказательство. Если $f, g \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$, то из сильной сходимости $n^{-1} \sum_{k=1}^{n} T_k f \to f^*$ в пространстве $L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ следует ввиду (1'), что

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} (T_k f, g) = (f^*, g) = f^*(x) \int_S g(x) m(dx) =$$

$$= \int_S f(x) m(dx) \int_S g(x) m(dx) \quad \text{для } m\text{-п. в. } x.$$

Полагая $f(x) = \chi_{B_2}(x)$, $g(x) = \chi_{B_1}(x)$, мы и получаем (2).

Замечание. Так как множество всех линейных комбинаций функций $\chi_B(x)$ плотно в пространстве $L^p(S, \mathfrak{B}, m)$ при $p=1$ и $p=2$, мы видим, что условие (2) эквивалентно эргодической гипотезе (1′). Соотношение (2) утверждает, что любая часть пространства S равномерно (в смысле *среднего по времени*) переносится в любую другую часть S.

2. Статистическая эргодическая теорема гл. VIII, § 3 утверждает, что область значений $R(T^*)$ отображения $f \to T^*f = f^*$ образует собственное подпространство оператора T_1, соответствующее собственному значению 1. Следовательно, *эргодическая гипотеза* (1′) *фактически утверждает, что подпространство* $R(T^*)$ *одномерно*. Таким образом, эргодическая гипотеза, относящаяся к процессу $P(t, x, E)$, может быть интерпретирована в терминах, относящихся к спектру оператора T_1.

3. Марковский процесс $P(t, x, E)$ называется *метрически транзитивным* или *неразложимым*, если удовлетворяется следующее условие:

S нельзя разложить в сумму непересекающихся множеств B_1, $B_2 \in \mathfrak{B}$, таких, что $m(B_1) > 0$, $m(B_2) > 0$ и $P(1, x, E) = 0$ для всякого $x \in B_i$ и $E \subseteq B_j$ $(i \neq j)$. (3)

Из эргодической гипотезы вытекает условие (3) и, обратно, из (3) следует эргодичность процесса.

Доказательство. Допустим, что условие эргодичности для марковского процесса $P(t, x, E)$ выполняется и что множество S разложено в сумму множеств B_1 и B_2, удовлетворяющих условиям, указанным в (3). Характеристическая функция $\chi_{B_1}(x)$ удовлетворяет уравнению $T_1\chi_{B_1} = \chi_{B_1}$, так как

$$\int_S P(1, x, dy)\chi_{B_1}(y) = P(1, x, B_1) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in B_1, \\ 0 & \text{при } x \notin B_1. \end{cases}$$

Но, поскольку $m(B_1)m(B_2) > 0$, функция $\chi_{B_1}(x) = \chi^*_{B_1}(x)$ не может m-п. в. обратиться в константу.

Допустим теперь, что процесс $P(t, x, E)$ неразложим. Пусть $T_1 f = f$. Покажем, что выражение $f^*(x) = f(x)$ m-п. в. обращается в константу. Поскольку оператор T_1 отображает вещественные функции в вещественные, мы можем, не ограничивая общности, допустить, что функция f вещественна. Если $f(x)$ не обращается m-п. в. в константу, то найдется такая постоянная α, что оба множества

$$B_1 = \{s \in S;\ f(s) > \alpha\} \quad \text{и} \quad B_2 = \{s \in S;\ f(s) \leqslant \alpha\}$$

будут иметь положительные m-меры. Так как $T_1(f - \alpha) = f - \alpha$, то, рассуждая как на стр. 537 в связи с угловой переменной, мы получим, что

$$T_1(f-\alpha)^+ = (f-\alpha)^+, \quad T_1(f-\alpha)^- = (f-\alpha)^-.$$

В результате мы получим, что $P(1, x, E) = 0$ при $x \in B_i$, $E \subseteq B_j$ $(i \neq j)$, а это приводит к противоречию.

Замечание. Понятие метрической транзитивности было введено Дж. Биркгофом и Смитом [2] для случая сохраняющего меру отображения $x \to y_t(x)$ множества S на себя.

Пример эргодического отображения, сохраняющего меру. Возьмем в качестве S *тор*, т. е. множество всех пар $s = \{x, y\}$ вещественных чисел x, y, причем $s = \{x, y\}$ и $s' = \{x', y'\}$ отождествляются, когда $x \equiv x' (\mathrm{mod}\, 1)$ и $y \equiv y' (\mathrm{mod}\, 1)$. Будем считать, что S топологизировано с помощью обычной топологии вещественных чисел для координат x, y. Рассмотрим отображение

$$s = \{x, y\} \to T_t s = s_t = \{x + t\alpha, y + t\beta\}$$

пространства S на себя, которое, очевидно, оставляет инвариантной меру $dx\, dy$, определенную на S. Допустим также, что вещественные числа α, β линейно независимы по модулю 1 в следующем смысле: если какие-нибудь целые числа n, k удовлетворяют уравнению $n\alpha + k\beta \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 1)$, то $n = k = 0$. При указанных условиях отображение $s \to T_t s$ эргодично.

Доказательство. Пусть функция $f(s) \in L^2(S)$ инвариантна относительно преобразования T_1, т. е. равенство $f(s) = f(s_1)$ справедливо $dx\, dy$-п. в. на S. Нам нужно убедиться в том, что $dx\, dy$-п. в. на S справедливо равенство $f(s) = f^*(s) = \mathrm{const}$. Рассмотрим коэффициенты Фурье функций $f(s)$ и $f(s_1) = f(T_1 s)$:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s) \exp(-2\pi i (k_1 x + k_2 y))\, dx\, dy,$$

$$\int_0^1 \int_0^1 f(T_1 s) \exp(-2\pi i (k_1 x + k_2 y))\, dx\, dy.$$

Так как $T_1 s = \{x + \alpha, y + \beta\}$ и мера $dx\, dy$ инвариантна относительно отображения $s \to T_1 s$, последний из этих интегралов совпадает с

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s) \exp(-2\pi i (k_1 x + k_2 y)) \exp(2\pi i (k_1 \alpha + k_2 \beta))\, dx\, dy.$$

Так как коэффициенты Фурье, соответствующие функциям $f(s)$ и $f(T_1 s)$, определяются однозначно, то

$$\exp(2\pi i(k_1\alpha + k_2\beta)) = 1 \text{ при всех } k_1, k_2,$$

$$\text{для которых } \int_0^1 \int_0^1 f(s) \exp(-2\pi i(k_1 x + k_2 y))\, dx\, dy \neq 0.$$

Следовательно, учитывая предположения, сделанные относительно α и β, мы видим, что должно выполняться условие

$$\int_0^1 \int_0^1 f(s) \exp(-2\pi i(k_1 x + k_2 y))\, dx\, dy = 0 \qquad \text{при } k_1^2 + k_2^2 \neq 0.$$

Поэтому выражение $f(s) = f^*(s)$ должно m-п. в. обратиться в константу.

Угловая переменная. Пусть оператор T_t определяется марковским процессом $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m, определенным на $(S, \mathfrak{B}, m)$, причем $m(S) = 1$. Допустим, что функция $f(s) \in L^2(S, \mathfrak{B}, m)$ является собственным вектором оператора T_1, соответствующим собственному значению λ с абсолютной величиной, равной 1:

$$T_1 f = \lambda f, \qquad |\lambda| = 1.$$

Тогда $T_1|f| = |f|$. В самом деле, ввиду положительности оператора T_1 имеем $(T_1|f|)(x) \geqslant |(T_1 f)(x)| = |f(x)|$, т. е.

$$\int_S P(1, x, dy)\,|f(y)| \geqslant |f(x)|.$$

В последнем неравенстве в действительности m-п. в. должно иметь место равенство — это можно установить, интегрируя обе части по мере m и учитывая инвариантность меры m. Следовательно, если процесс $P(t, x, E)$ эргодичен, то функция $|f(x)|$ должна m-п. в. обратиться в константу. Поэтому если мы положим

$$f(x) = |f(x)| \exp(i\Theta(x)), \qquad 0 \leqslant \Theta(x) < 2\pi,$$

то

$$T_1 \exp(i\Theta(x)) = \lambda \exp(i\Theta(x)).$$

В случае, когда $\lambda \neq 1$, выражение $\Theta(x)$ называется *угловой переменной* марковского процесса $P(t, x, E)$.

Гипотеза перемешивания. Рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ с инвариантной мерой m на $(S, \mathfrak{B}, m)$ при условии $m(S) = 1$, и пусть оператор T_t определяется этим процессом. Рассмотрим следующее требование, более сильное, чем эргодическая гипотеза:

$$\lim_{k\to\infty}(T_k f,\ g)=(f^*,\ g)=\int_S f(x)\,m(dx)\int_S g(x)\,m(dx)$$

для всякой пары $\{f,\ g\}$ векторов $f,\ g\in L^2(S,\ \mathfrak{B},\ m)$. (4)

Условие (4) называется *гипотезой перемешивания* для марковского процесса $P(t,\ x,\ E)$. По аналогии со случаем эргодической гипотезы последнее предположение можно интерпретировать следующим образом: *всякая часть множества S в течение достаточно долгого промежутка времени переносится равномерно в любую другую часть S*. По поводу примеров отображений $x\to y_t(x)$, сохраняющих меру и удовлетворяющих условию перемешивания, мы отсылаем читателя к упоминавшейся ранее книге Э. Хопфа.

***H*-теорема.** Пусть $P(t,\ x,\ E)$ — марковский процесс с инвариантной мерой m на $(S,\ \mathfrak{B},\ m)$, такой, что $m(S)=1$. Рассмотрим функцию

$$H(z)=-z\ln z,\quad z\geqslant 0. \tag{5}$$

Может быть доказана следующая

Теорема (Иосида [17]). Пусть неотрицательная функция $f(x)\in L^1(S,\ \mathfrak{B},\ m)$ удовлетворяет неравенству $\int_S f(x)\ln^+ f(x)\,m(dx)<\infty$, где $\ln^+|z|$ равен $\ln|z|$ при $|z|\geqslant 1$ и нулю при $|z|<1$ (в этом случае говорят, что $f(x)$ принадлежит *классу Зигмунда*). Тогда

$$\int_S H(f(x))\,m(dx)\leqslant\int_S H((T_t f)(x))\,m(dx). \tag{6}$$

Доказательство. Так как для функции $H(z)=-z\ln z$ имеем $H''(z)=-\dfrac{1}{z}<0$ при $z>0$, то она является вогнутой. Поэтому

$$\int_S P(t,\ x,\ dy)\,H(f(y))\leqslant H\left(\int_S P(t,\ x,\ dy)\,f(y)\right),$$

т. е. среднее от $H(f(x))$ с весом $P(t,\ x,\ dy)$ не превосходит значения $H(z)$ при z, равном взвешенному среднему от $f(x)$. Интегрируя полученное неравенство относительно меры $m(dx)$ и учитывая инвариантность меры $m(E)$, мы и получаем (6).

Замечание. Из полугруппового свойства $T_{t+s}=T_tT_s$ и неравенства (6) без труда выводится соотношение

$$\int_S H\left(\left(T_{t_1}f\right)(x)\right)m(dx)\leqslant\int_S H\left(\left(T_{t_2}f\right)(x)\right)m(dx)\ \text{при любых}\ t_1<t_2, \tag{6'}$$

которое можно рассматривать как аналог классической *H-теоремы* статистической механики.

4. Эргодическое разложение марковского процесса с локально бикомпактным фазовым пространством

Допустим, что S — некоторое сепарабельное метрическое пространство, ограниченные замкнутые подмножества которого бикомпактны. Обозначим через $\mathfrak{B}$ совокупность всех бэровских подмножеств S и рассмотрим марковский процесс $P(t, x, E)$ на $(S, \mathfrak{B})$. Допустим, что

$$\text{если } f(x) \in C_0^0(S), \text{ то и } f_t(x) = \int_S P(t, x, dy) f(y) \in C_0^0(S). \quad (1)$$

Целью этого параграфа является разложение пространства S на так называемые *эргодическую часть* и *диссипативную часть*. Это разложение можно рассматривать как обобщение результатов Крылова — Боголюбова, относящихся к детерминированному обратимому процессу переноса в бикомпактном метрическом пространстве S (см. Крылов — Боголюбов [1]). Возможность такого обобщения для бикомпактного метрического пространства S при условии (1) была указана в работе Иосида [17], и это обобщение было получено независимо М. Бебутовым [1]. Распространение результатов на случай локально бикомпактного пространства S было дано К. Иосида [19]. Мы будем следовать последней цитированной работе.

Лемма 1. Допустим, что некоторый линейный функционал $L(f)$, определенный на нормированном линейном пространстве $C_0^0(S)$ с нормой $\|f\| = \sup\limits_{x \in S} |f(x)|$, *неотрицателен* в том смысле, что при $f(x) \geqslant 0$ на множестве S выполняется неравенство $L(f) \geqslant 0$. Тогда $L(f)$ можно представить в виде

$$L(f) = \int_S f(x) \varphi(dx) \quad \text{при всех } f \in C_0^0(S) \quad (2)$$

с помощью единственным образом определенной меры $\varphi(E)$, которая σ-аддитивна, неотрицательна для любых бэровских подмножеств E пространства S и удовлетворяет *условию регулярности*

$$\varphi(E) = \inf_G \varphi(G), \quad \text{где } G \supseteq E \text{ — произвольное открытое множество.} \quad (3)$$

Доказательство. Мы отсылаем читателя к книге Халмоша [1].

Неотрицательную σ-аддитивную регулярную меру $\varphi(E)$, определенную на семействе $\mathfrak{B}$ и удовлетворяющую условию $\varphi(S) \leqslant 1$, мы будем называть сейчас *инвариантной мерой* марковского процесса, если

$$\varphi(E) = \int_S \varphi(dx) P(t, x, E) \quad \text{для всех } t > 0 \text{ и } E \in \mathfrak{B}. \quad (4)$$

Докажем следующую лемму.

Лемма 2. Для любой функции $f \in C_0^0(S)$ и произвольной инвариантной меры $\varphi(E)$

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f^*(x) \qquad \left(f_k(x) = \int_S P(k, x, dy) f(y)\right) \tag{5}$$

существует φ-п. в. и

$$\int_S f^*(x)\varphi(dx) = \int_S f(x)\varphi(dx). \tag{6}$$

Утверждение этой леммы следует непосредственно из теоремы 6 предыдущего параграфа.

Допустим теперь, что некоторая последовательность ${}_1f, {}_2f, {}_3f, \ldots$ плотна в нормированном линейном пространстве $C_0^0(S)$. Существование такой последовательности гарантируется предположением, сделанным относительно пространства S. Применяя лемму 2 к последовательности ${}_1f, {}_2f\ {}_3f, \ldots$ и объединяя все множества φ-меры нуль, на которых условия вида (5) не выполняются, мы можем построить такое множество N нулевой φ-меры, что

для всякого $x \notin N$ и любой функции $f \in C_0^0(S)$ существует

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f^*(x). \tag{7}$$

Мы будем говорить, что бэровскому множеству $S' \subseteq S$ соответствует *максимальная вероятность*, если $\varphi(S - S') = 0$ для всякой инвариантной меры φ. Из предыдущего ясно, что таким свойством будет обладать множество S' всех значений x, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(x)$ существует при любом выборе функции $f \in C_0^0(S)$. Следовательно, если существует такая инвариантная мера, что $\varphi(S) > 0$, то найдутся некоторый элемент $g \in C_0^0(S)$ и такая точка x_0, что

$$g^{**}(x_0) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, n^{-1} \sum_{k=1}^{n} g_k(x_0) > 0. \tag{8}$$

В самом деле, если допустить противное, то $f^*(x) = 0$ на множестве S для всех $f \in C_0^0(S)$, и тогда, согласно (6), $\int\limits_S f(x)\varphi(dx) = 0$.

Допустим теперь, что для некоторой функции $g \in C_0^0(S)$ в какой-либо точке x_0 выполняется условие (8). Предположим, что подпоследовательность $\{n'\}$ ряда натуральных чисел выбрана таким образом, что $\lim\limits_{n' \to \infty} (n')^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n'} g_k(x_0) = g^{**}(x_0)$. Применяя диагональный метод, мы можем выбрать из $\{n'\}$ такую последовательность $\{n''\}$, что $\lim\limits_{n'' \to \infty} (n'')^{-1} \sum\limits_{k=1}^{n''} ({}_jf)_k(x_0)$ будет существовать для значений $j = 1, 2, \ldots$. Ввиду плотности последовательности $\{{}_jf\}$ в пространстве $C_0^0(S)$ мы замечаем, что

для всякой функции $f \in C_0^0(S)$ существует

$$\lim_{n'' \to \infty} (n'')^{-1} \sum_{k=1}^{n''} f_k(x_0) = f^{***}(x_0).$$

Если мы теперь положим $f^{***}(x_0) = L_{x_0}(f)$, то

$$L_{x_0}(f) = L_{x_0}(f_1). \tag{9}$$

В самом деле, из условия (1) следует, что $f_1 \in C_0^0(S)$, и поэтому

$$L_{x_0}(f) = \lim_{n'' \to \infty} (n'')^{-1} \sum_{k=1}^{n''} f_{k+1}(x_0) = f_1^{***}(x_0) = L_{x_0}(f_1).$$

По лемме 1 существует такая регулярная мера $\varphi_{x_0}(E)$, что

$$L_{x_0}(f) = f^{***}(x_0) = \int\limits_S f(x)\, \varphi_{x_0}(dx). \tag{10}$$

При этом, конечно,

$$0 \leqslant \varphi_{x_0}(E) \leqslant 1, \tag{11}$$

и поэтому ввиду (9)

$$\int\limits_S f(x)\, \varphi_{x_0}(dx) = \int\limits_S \left(\int\limits_S P(1, x, dy) f(y) \right) \varphi_{x_0}(dx).$$

Пусть теперь функция $f(x)$ стремится к характеристической функции бэровского множества E, тогда, как нетрудно видеть, $\varphi_{x_0}(E)$ оказывается инвариантной мерой. Ввиду (8) и (10) $L_{x_0}(g) = g^{***}(x_0) = \int\limits_S g(x)\, \varphi_{x_0}(dx) > 0$, и поэтому $\varphi_{x_0}(S) > 0$. Таким образом, доказана

Теорема 1. Для того чтобы не существовало никаких инвариантных мер, кроме тривиальной, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{n \to \infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = f^*(x) = 0 \quad \text{на } S \text{ для всякого} \quad f \in C_0^0(S). \tag{12}$$

Определение. Марковский процесс $P(t, x, E)$, определенный в $(S, \mathfrak{B})$ и удовлетворяющий условию (12), мы назовем *диссипативным*.

Пример. Возьмем в качестве пространства S полупрямую $(0, \infty)$ и пусть $\mathfrak{B}$ — семейство всех бэровских подмножеств из промежутка $(0, \infty)$. Тогда равенства

$$P(t, x, E) = 1 \text{ при } (x+t) \in E, \quad P(t, x, E) = 0, \text{ когда } (x+t) \notin E,$$

определяют диссипативный марковский процесс $P(t, x, E)$.

Обратимся теперь к случаю, когда процесс $P(t, x, E)$ не диссипативен. Пусть

$$D = \left\{ x \in S;\ f^*(x) = \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^0(S) \right\}.$$

Так как это множество совпадает с

$$\{x \in S;\ ({}_jf)^*(x) = 0 \text{ при } j = 1, 2, \ldots\},$$

то оно является бэровским множеством. Назовем D *диссипативной частью* S. Мы покажем ниже, что $\varphi(D) = 0$ для всякой инвариантной меры φ, и поэтому, поскольку процесс $P(t, x, E)$ предполагается не диссипативным, множество $S_0 = S - D$ не пусто. Мы уже знаем, что найдется бэровское множество $S_1 \subseteq S_0$ максимальной вероятности, такое, что

всякой точке $x \in S_1$ соответствует некоторая нетривиальная инвариантная мера $\varphi_x(E)$, такая, что $f^*(x) =$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{-1} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \int_{S_1} f(y)\varphi_x(dy) = \int_{S_1} f^*(y)\varphi_x(dy). \tag{13}$$

Для любой инвариантной меры φ выполняется равенство (6), и поэтому ввиду (13)

$$\int_{S_1} f(y)\varphi(dy) = \int_{S_1} \left(\int_{S_1} f(z)\varphi_y(dz) \right) \varphi(dy).$$

Мы приходим, таким образом, к соотношению

$$\varphi(E) = \int_{S_1} \varphi_y(E)\varphi(dy). \tag{14}$$

Тем самым установлена

Теорема 2. Всякая инвариантная мера φ может быть представлена в виде выпуклой комбинации инвариантных мер $\varphi_y(E)$ (здесь y рассматривается как параметр).

С помощью (11) и (14) мы заключаем, что

$$S_2 = \{x \in S;\ x \in S_1,\ \varphi_x(S_1) = 1\}$$

является множеством максимальной вероятности.

Для всякой функции $f \in C_0^0(S)$ и любой инвариантной меры φ имеет место равенство

$$\int_{S_2} \varphi(dx)\left(\int_{S_2} (f^*(y) - f^*(x))^2 \varphi_x(dy)\right) = 0, \tag{15}$$

так как левая часть равна здесь выражению

$$\int_{S_2} \varphi(dx)\left(\int_{S_2} f^*(y)^2 \varphi_x(dy)\right) - 2\int_{S_2} f^*(x)\varphi(dx)\left(\int_{S_2} f^*(y)\varphi_x(dy)\right) +$$
$$+ \int_{S_2} f^*(x)^2 \varphi(dx) \cdot \int_{S_2} \varphi_x(dy) = \int_{S_2} f^*(y)^2 \varphi(dy) -$$
$$- 2\int_{S_2} f^*(x)^2 \varphi(dx) + \int_{S_2} f^*(x)^2 \varphi(dx) = 0,$$

поскольку $S_2 = \{x \in S;\ x \in S_1,\ \varphi_x(S_1) = 1\}$ и справедливы условия (13), (14) и (6). Применяя (15) к последовательности ${}_1f$, ${}_2f$, ${}_3f$, ..., мы видим, что

$$S_3 = \left\{x \in S_2;\ \int_{S_2} (f^*(y) - f^*(x))^2 \varphi_x(dy) = 0 \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^0(S)\right\}$$

является множеством максимальной вероятности.

Мы можем теперь установить так называемое *эргодическое разложение* S. Положим для любого $x \in S_3$

$$E_x = \{y \in S_3;\ f^*(y) = f^*(x) \quad \text{для всех} \quad f \in C_0^0(S)\}. \tag{16}$$

Мы можем теперь доказать, что всякое множество вида E_x содержит некоторое множество $\hat{E}_x$, обладающее следующим свойством:

$$\varphi_x(E_x) = \varphi_x(\hat{E}_x) \quad \text{и} \quad P(1,\ y,\ \hat{E}_x) = 1 \quad \text{при всяком} \quad y \in \hat{E}_x. \tag{17}$$

Доказательство. Из определения множества S_3 видно, что $f^*(y) = f^*(x)$, если вариация меры $\varphi_x(E)$ в точке y отлична от нуля. Следовательно, $\varphi_x(E_x) = \varphi_x(S_3) = 1$. Таким образом, вследствие инвариантности меры φ_x мы получаем

$$1 = \varphi_x(E_x) = \int_{S_3} P(1,\ z,\ E_x)\varphi_x(dz) = \int_{E_x} P(1,\ z,\ E_x)\varphi_x(dz).$$

Так как $0 \leqslant P(1,\ z,\ E_x) \leqslant 1$, то существует бэровское множество $E^1 \subseteq E_x$, такое, что

$$\text{если } \varphi_x(E^1) = \varphi_x(E_x) \quad \text{и} \quad z \in E^1, \quad \text{то} \quad P(1,\ z,\ E_x) = 1.$$

Положим теперь

$$E^2 = \{z \in E^1;\ P(1,\ z,\ E^1) = 1\}.$$

Ввиду того что

$$\int_{E^1} P(1, z, E^1)\varphi_x(dz) = \varphi_x(E^1) = \varphi_x(E_x) = \int_{E^1} P(1, z, E_x)\varphi_x(dz),$$

должно выполняться равенство

$$\int_{E^1} (P(1, z, E_x) - P(1, z, E^1))\varphi_x(dz) = 0.$$

Если $z \in E^2$, то по определению E^2 выполняется равенство $P(1, z, E^1) = 1$, и мы, таким образом, находим, что $\varphi_x(E^1 - E^2) = 0$.

Рассмотрим теперь множество

$$E^3 = \{z \in E^2;\ P(1, z, E^2) = 1\}.$$

Тогда, как и выше, доказывается, что $\varphi_x(E^3) = \varphi_x(E_x)$. Продолжая этот процесс, мы построим такую последовательность множеств $\{E^n\}$, что

$$E_x \supseteq E^1 \supseteq E^2 \supseteq \ldots, \qquad \varphi_x(E^n) = \varphi_x(E_x),$$
$$\text{и } P(1, z, E^n) = 1, \quad \text{если } z \in E^{n+k} \quad (n \geqslant 0,\ k \geqslant 1,\ E^0 = E).$$

В результате мы можем построить множество $\hat{E}_x = \bigcap_{n=1}^{\infty} E^n$, которое и будет обладать нужными свойствами.

Мы, таким образом, приходим к следующей теореме.

Теорема 3. Переходная функция $P(t, y, E)$ определяет на всяком множестве вида $\hat{E}_x$ марковский процесс, который *эргодичен* в следующем смысле:

$\hat{E}_x$ нельзя разложить на две части A и B, такие, что
$\varphi(A) \cdot \varphi(B) > 0$ для какой-либо инвариантной меры φ (18)
и $P(1, a, B) = 0$ при $a \in A$, $P(1, b, A) = 0$, если $b \in B$.

Доказательство. Пусть φ — произвольная инвариантная мера в $\hat{E}_x$, удовлетворяющая условию $\varphi(\hat{E}_x) = 1$. Тогда на основании (14) мы заключаем, что $\varphi(E) = \int_{\hat{E}_x} \varphi(dz)\varphi_z(E)$ при любом $E \subseteq \hat{E}_x$. Так как по определению $\hat{E}_x$ для любой точки $z \in \hat{E}_x$ выполняется равенство $\varphi_z(E) = \varphi_x(E)$, то

$$\varphi(E) = \varphi_x(E) \int_{\hat{E}_x} \varphi(dz) = \varphi_x(E).$$

Таким образом, на $\hat{E}_x$ может быть определена лишь одна-единственная инвариантная мера $\varphi_x(E)$. Отсюда и вытекает эргодичность, выражаемая свойством (18). Действительно, допустим, что $\hat{E}_x$ может быть разбито на две части, удовлетворяющие соответствующим требованиям, в противоположность тому, что утверждает (18). Тогда вследствие инвариантности меры φ

$$\varphi(C) = \int\limits_{\hat{E}_x} P(1, z, C)\varphi(dz) \quad \text{при любом} \quad C \subseteq \hat{E}_x.$$

Определим теперь меру ψ условием

$$\psi(C) = \begin{cases} \varphi(C)/\varphi(A) & \text{при} \quad C \subseteq A, \\ 0 & \text{при} \quad C \subseteq B. \end{cases}$$

Тогда мера ψ окажется, как нетрудно видеть, инвариантной на $\hat{E}_x$, что противоречит однозначной определенности меры φ.

5. Броуновское движение в однородном римановом пространстве

Существует интересная взаимосвязь между марковскими процессами и дифференциальными уравнениями. Уже в начале тридцатых годов А. Н. Колмогоров доказал, что при выполнении некоторых условий регулярности, относящихся к переходной функции $P(t, x, E)$, функция

$$u(t, x) = \int\limits_S P(t, x, dy) f(y)$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению типа *уравнения диффузии*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = b^{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + a^i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} \equiv Au, \quad t > 0, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор A эллиптичен по отношению к локальным координатам $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ точки x фазового пространства S. Мы применяем здесь и далее эйнштейновские сокращенные обозначения, принятые в тензорном исчислении; например, запись $a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$ означает $\sum\limits_{i=1}^{n} a^i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$. По поводу вывода уравнения (1) мы отсылаем читателя к работе А. Н. Колмогорова [1], Основная идея этой работы связана с изучением локальных характеристик марковских процессов.

Следуя идеям работы Хилле, представленной на Скандинавском конгрессе 1949 г. (см. также Хилле [9]) и исследованию Иосида [29] 1948 г., Феллер [2] начал в 1952 г. систематическую разработку этого нового направления в теории вероятностей, используя результаты аналитической теории полугрупп. Его исследования были продолжены Дынкиным [1], [2], К. Ито—Мак-Кином [1], Рэем [1], Хантом [1], Юшкевичем [1], Маруяма [1] и многими молодыми исследователями, в особенности в Японии, СССР и США. Результаты этих исследований составляют содержание так называемой *теории диффузионных процессов.* В настоящее время находится в печати книга К. Ито — Мак-Кина [1], посвященная изложению этой теории [1]). Мы приведем здесь обзор наиболее характерных аспектов этой теории, относящихся главным образом к аналитическим методам.

Рассмотрим локально бикомпактное пространство S, и пусть $\mathfrak{B}$ — совокупность всех бэровских множеств из S. Для того чтобы определить понятие так называемой *однородности в пространстве* марковского процесса $P(t, x, E)$, определенного в пространстве S, мы предположим, что S представляет собой n-мерное ориентированное связное риманово пространство класса C^∞, такое, что полная группа $\mathfrak{G}$ *изометрических преобразований* S на себя, которая является группой Ли, транзитивна на S. Последнее означает, что для каждой пары $\{x, y\}$ точек $x, y \in S$ существует некоторое изометрическое преобразование $M \in \mathfrak{G}$, такое, что $M \cdot x = y$. В этом случае процесс $P(t, x, E)$ называется *однородным в пространстве*, если

$$P(t, x, E) = P(t, M \cdot x, M \cdot E) \text{ для всех } x \in S,\ E \in \mathfrak{B} \text{ и } M \in \mathfrak{G}. \tag{2}$$

Однородный во времени и в пространстве марковский процесс, определенный на S, называется *броуновским движением* на S, если выполняется следующее *условие непрерывности линдеберговского типа*:

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x,\, y) > \varepsilon} P(t, x, dy) = 0 \quad \text{при любых} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{и} \quad x \in S. \tag{3}$$

Предложение. Рассмотрим B-пространство $C(S)$ всех ограниченных и равномерно непрерывных функций $f(x)$, определенных в S, с нормой $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$. Определим семейство операторов $\{T_t\}$ с помощью условия

$$(T_t f)(x) = \begin{cases} \int\limits_S P(t, x, dy) f(y) & \text{при} \quad t > 0, \\ f(x) & \text{при} \quad t = 0. \end{cases} \tag{4}$$

---

[1]) Английское издание этой книги вышло в свет; русский перевод находится в печати. — *Прим. перев.*

Тогда семейство $\{T_t\}$ образует в пространстве $C(S)$ сжимающую полугруппу класса (C_0).

Доказательство. Из условий $P(t, x, E) \geqslant 0$ и $P(t, x, S) = 1$ мы находим, что операторы T_t положительны и

$$|(T_t f)(x)| \leqslant \sup_y |f(y)|.$$

Полугрупповое свойство $T_{t+s} = T_t T_s$ непосредственно следует из уравнения Чепмена — Колмогорова. Если мы теперь определим линейный оператор M' соотношением $(M'f)(x) = f(M \cdot x)$, $M \in \mathfrak{G}$, то оказывается, что

$$T_t M' = M' T_t, \quad t \geqslant 0. \tag{5}$$

В самом деле,

$$(M'T_t f)(x) = (T_t f)(M \cdot x) = \int_S P(t, M \cdot x, dy) f(y) =$$

$$= \int_S P(t, M \cdot x, d(M \cdot y)) f(M \cdot y) = \int_S P(t, x, dy) f(M \cdot y) = (T_t M' f)(x).$$

Возьмем произвольно две точки x и x', и пусть преобразование $M \in \mathfrak{G}$ таково, что $M \cdot x = x'$; тогда

$$(T_t f)(x) - (T_t f)(x') = (T_t f)(x) - (M'T_t f)(x) = T_t(f - M'f)(x).$$

Следовательно, выражение $(T_t f)(x)$ равномерно непрерывно и ограничено, так как функция $f(x)$ по предположению равномерно непрерывна.

Для того чтобы доказать сильную непрерывность оператора T_t по t, достаточно, согласно теореме из гл. IX, § 1, проверить тот факт, что T_t слабо непрерывен справа в точке $t = 0$. Поэтому достаточно показать, что равномерно относительно x существует $\lim_{t \downarrow 0} (T_t f)(x) = f(x)$. Запишем неравенства

$$|(T_t f)(x) - f(x)| = \left| \int_S P(t, x, dy) [f(y) - f(x)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{d(x, y) \leqslant \varepsilon} P(t, x, dy) [f(y) - f(x)] \right| +$$

$$+ \left| \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(t, x, dy) [f(y) - f(x)] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_{d(x, y) \leqslant \varepsilon} P(t, x, dy) [f(y) - f(x)] \right| + 2\|f\| \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(t, x, dy).$$

Первый член в правой части этого неравенства равномерно по x стремится к нулю при $\varepsilon \downarrow 0$, а второй член при любом фиксированном $\varepsilon > 0$ стремится к нулю при $t \downarrow 0$ равномерно относительно x. Последнее утверждение с очевидностью вытекает из условия (3) и требования однородности рассматриваемого процесса в пространстве. Таким образом, действительно $\lim\limits_{t \downarrow 0} (T_t f)(x) = f(x)$ существует и равномерен по x.

Теорема. Выберем произвольно некоторую точку x_0 пространства S. Рассмотрим группу $\mathfrak{G}_0 = \{M \in \mathfrak{G};\ M \cdot x_0 = x_0\} \subseteq \mathfrak{G}$ так называемых *изотропных преобразований*. Предположим, что группа $\mathfrak{G}_0$ бикомпактна. По известной теореме Э. Картана замкнутая подгруппа группы Ли является также группой Ли, поэтому подгруппа $\mathfrak{G}_0$ группы $\mathfrak{G}$ образует группу Ли. Пусть A — инфинитезимальный производящий оператор полугруппы T_t. При указанных здесь условиях имеют место следующие результаты.

1. Если $f \in D(A) \cap C^2(S)$, то в системе координат $\left(x_0^1, x_0^2, \ldots, x_0^n\right)$, соответствующей окрестности точки x_0,

$$(Af)(x_0) = a^i(x_0) \frac{\partial f}{\partial x_0^i} + b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j}, \tag{6}$$

где

$$a^i(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{d(x_0, x_i) \leqslant \varepsilon} \left(x^i - x_0^i\right) P\left(t, x_0, dx\right), \tag{7}$$

$$b^{ij}(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{d(x_0, x) \leqslant \varepsilon} \left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right) P\left(t, x_0, dx\right), \tag{8}$$

и эти пределы существуют независимо от выбора ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$.

2. Множество $D(A) \cap C^2(S)$ „велико“ в том смысле, что для любой функции $h(x)$ класса C^∞ с бикомпактным носителем существует некоторая функция $f(x) \in D(A) \cap C^2(S)$, такая, что значения $f\left(x_0\right)$, $\partial f / \partial x_0^i$, $\partial^2 f / \partial x_0^i \partial x_0^j$ сколь угодно близки соответственно к $h\left(x_0\right)$, $\partial h / \partial x_0^i$, $\partial^2 h / \partial x_0^i \partial x_0^j$.

Доказательство. *Первый этап.* Пусть функция $h(x)$ с бикомпактным носителем принадлежит классу C^∞. Если $f \in D(A)$, то „свертка“

$$(f \otimes h)(x) = \int\limits_{\mathfrak{G}} f(M_y \cdot x) h(M_y \cdot x_0) dy \tag{9}$$

принадлежит классу C^∞ и входит в область $D(A)$ (здесь M_y обозначает элемент общего вида группы $\mathfrak{G}$, а dy — некоторая фиксированная правоинвариантная мера Хаара, определенная на $\mathfrak{G}$ и удовлетворяющая условию $dy = d(y \cdot M)$ при любом $M \in \mathfrak{G}$). Написанный выше интеграл существует, потому что группа $\mathfrak{G}_0$ изотропных преобразований бикомпактна, а функция h обладает бикомпактным носителем.

Ввиду равномерной непрерывности f и бикомпактности носителя функции h мы можем аппроксимировать интеграл (9) равномерно относительно x римановыми суммами вида $\sum_{i=1}^{k} f(M_{y_i}\cdot x)C_i$:

$$(f\otimes h)(x)=s\text{-}\lim_{k\to\infty}\sum_{i=1}^{k} f(M_{y_i}\cdot x)C_i.$$

Поскольку $T_tM'=M't_t$, оператор M' коммутирует с A, т. е. из $f\in D(A)$ следует, что $M'f\in D(A)$ и $AM'f=M'Af$. Полагая $g(x)=(Af)(x)$, мы видим, что $g\in C(S)$ и

$$A\left(\sum_{i=1}^{k} f(M_{y_i}\cdot x)C_i\right)=\sum_{i=1}^{k}(AM'_{y_i}\cdot f)(x)C_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{k}(M'_{y_i}Af)(x)C_i=\sum_{i=1}^{k} g(M_{y_i}\cdot x)C_i,$$

причем правая часть — выражение $\sum_{i=1}^{k} g(M_{y_i}\cdot x)C_i$ — стремится при $k\to\infty$ к величине $(g\otimes h)(x)=(Af\otimes h)(x)$. Ввиду замкнутости инфинитезимального порождающего оператора A свертка $f\otimes h\in D(A)$ и $A(f\otimes h)=Af\otimes h$. Так как $S=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, то можно найти такую координатную окрестность U точки x_0, что для всякого $x\in U$ будет существовать некоторый элемент $M=M(x)\in\mathfrak{G}$, удовлетворяющий следующим двум условиям:

1. $M(x)\cdot x=x_0$.
2. Выражение $M(x)\cdot x_0$ аналитически зависит от координат $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ точки $x\in S$.

Эти утверждения вытекают из того факта, что множество $\{M_y\in\mathfrak{G};\ M_y\cdot x=x_0\}$, представляющее собой один из смежных классов группы $\mathfrak{G}$ по подгруппе Ли $\mathfrak{G}_0$, образует в $\mathfrak{G}$ аналитическое подмногообразие. Следовательно, поскольку мера dy правоинвариантна,

$$(f\otimes h)(x)=\int_G f(M_yM(x)x)\,h(M_yM(x)x_0)\,dy=$$
$$=\int_G f(M_y\cdot x_0)\,h(M_yM(x)\cdot x_0)\,dy.$$

Правая часть последнего соотношения бесконечно дифференцируема в окрестности x_0 и

$$D_x^s(f\otimes h)(x)=\int_G f(M_y\cdot x_0)\,D_x^s h(M_yM(x)\cdot x_0)\,dy. \tag{10}$$

Второй этап. Учитывая, что множество $D(A)$ плотно в $C(S)$, и выбирая соответствующим образом f и h, мы приходим к заключению, что

существуют функции $F^1(x), F^2(x), \ldots, F^n(x) \in D(A)$ класса C^∞, такие, что якобиан $\dfrac{\partial(F^1(x), \ldots, F^n(x))}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} > 0$ в точке x_0, (11)

и при этом

найдется некоторая функция $F_0(x) \in D(A)$ класса C^∞, удовлетворяющая неравенству

$$\left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right)\frac{\partial^2 F_0}{\partial x_0^i \partial x_0^j} \geqslant \sum_{i=1}^n \left(x^i - x_0^i\right)^2. \tag{12}$$

Функции $F^1(x), F^2(x), \ldots, F^n(x)$ мы можем использовать как координаты в некоторой окрестности вида $\{x;\ \mathrm{dis}(x_0, x) < \varepsilon\}$ точки x_0. Обозначим эти новые локальные координаты через $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$. Так как $F^j(x) \in D(A)$, то

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_S P(t, x_0, dx)(F^j(x) - F^j(x_0)) = (AF^j)(x_0) =$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\mathrm{dis}(x, x_0) < \varepsilon} P(t, x_0, dx)(F^j(x) - F^j(x_0))$$

независимо от выбора ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ — это вытекает из условия Линдеберга (3). Следовательно, для координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ $(x^j = F^j)$ существует конечный

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\mathrm{dis}(x, x_0) < \varepsilon} \left(x^j - x_0^j\right) P\left(t, x_0, dx\right) = a^j\left(x_0\right), \tag{13}$$

не зависящий от ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$. Используя условие Линдеберга (3) еще раз и учитывая, что $F_0 \in D(A)$, получаем

$$(AF_0)(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_S P(t, x_0, dx)(F_0(x) - F_0(x_0)) =$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{\mathrm{dis}(x_0, x) \leqslant \varepsilon} P(t, x_0, dx)(F_0(x) - F_0(x_0)) =$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} \left[t^{-1} \int_{\mathrm{dis}(x_0, x) \leqslant \varepsilon} \left(x^i - x_0^i\right) \frac{\partial F_0}{\partial x_0^i} P\left(t, x_0, dx\right) + \right.$$

$$\left. + t^{-1} \int_{\mathrm{dis}(x_0, x) \leqslant \varepsilon} \left(x^i - x_0^i\right)\left(x^j - x_0^j\right) \left(\frac{\partial^2 F_0}{\partial x^i \partial x^j}\right)_{x = x_0 + \theta(x - x_0)} P(t, x_0, dx) \right],$$

где $0 < \theta < 1$. Первый член, стоящий в правой части последнего равенства, имеет предел, равный $a^i(x_0)\dfrac{\partial F_0}{\partial x_0^i}$. Поэтому ввиду положительности $P(t, x, E)$ и условия (12) мы заключаем, что

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x_0, x)\leqslant \varepsilon} \sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i)^2 P(t, x_0, dx) < \infty. \tag{14}$$

Третий этап. Пусть $f \in D(A) \cap C^2$. Используя степенное разложение для выражения $f(x) - f(x_0)$, мы получаем

$$\frac{(T_t f)(x_0) - f(x_0)}{t} = t^{-1} \int\limits_{S} (f(x) - f(x_0)) P(t, x_0, dx) =$$

$$= t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x, x_0) > \varepsilon} (f(x) - f(x_0)) P(t, x_0, dx) +$$

$$+ t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i) \frac{\partial f}{\partial x_0^i} P(t, x_0, dx) +$$

$$+ t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j} P(t, x_0, dx) +$$

$$+ t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) C_{ij}(\varepsilon) P(t, x_0, dx) =$$

$$= C_1(t, \varepsilon) + C_2(t, \varepsilon) + C_3(t, \varepsilon) + C_4(t, \varepsilon),$$

где $C_{ij}(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \downarrow 0$. Из (3) следует, что $\lim\limits_{t\downarrow 0} C_1(t, \varepsilon) = 0$ при фиксированном $\varepsilon > 0$ и что $\lim\limits_{t\downarrow 0} C_2(t, \varepsilon) = a^i(x_0) \dfrac{\partial f}{\partial x_0^i}$ независимо от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Используя условие (14) и неравенство Шварца, мы устанавливаем, что имеет место ограниченная по $t > 0$ сходимость $\lim\limits_{\varepsilon\downarrow 0} C_4(t, \varepsilon) = 0$. Левая часть рассматриваемого равенства имеет при $t \downarrow 0$ конечный предел $(Af)(x_0)$. Поэтому разность

$$\overline{\lim_{t\downarrow 0}}\, C_3(t, \varepsilon) - \underline{\lim_{t\downarrow 0}}\, C_3(t, \varepsilon)$$

может быть сделана сколь угодно малой, если взять достаточно малые $\varepsilon > 0$. Но из (14), (3) и неравенства Шварца вытекает, что эта разность не зависит от ε при достаточно малых $\varepsilon > 0$. Следовательно, независимо от ε при достаточно малых значениях $\varepsilon > 0$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\downarrow 0} C_3(t, \varepsilon)$. Поскольку мы можем выбрать функцию $F \in D(A) \cap C^\infty(S)$ так, чтобы производные $\partial^2 F / \partial x_0^i \partial x_0^j$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ были сколь угодно близки к произвольно выбранным константам α_{ij}, то, применяя рассуждения, аналогичные использованным выше, мы устанавливаем, что существует конечный

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{\operatorname{dis}(x, x_0) \leqslant \varepsilon} (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) P(t, x_0, dx) = b^{ij}(x_0), \qquad (15)$$

и

$$\lim_{t \downarrow 0} C_3(t, \varepsilon) = b^{ij}(x_0) \frac{\partial^2 f}{\partial x_0^i \partial x_0^j}.$$

Тем самым доказательство теоремы завершено.

Замечание. Формулировка и доказательство приведенной выше теоремы взяты из работы Иосида [20]. Следует заметить, что $b^{ij}(x) = b^{ji}(x)$ и

$b^{ij}(x_0) \xi_i \xi_j \geqslant 0$ для всякого вещественного вектора $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, так как

$$(x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) \xi_i \xi_j = \left(\sum_{i=1}^{n} (x^i - x_0^i) \xi_i \right)^2. \qquad (16)$$

Броуновское движение на поверхности трехмерной сферы. В частном случае, когда пространство S есть поверхность трехмерной сферы S^3 и группа $\mathfrak{G}$ является группой вращений S^3, инфинитезимальный производящий оператор A полугруппы, индуцированной броуновским движением на поверхности S, имеет, как можно показать, вид

$A = C\Lambda$, где C — некоторая положительная постоянная,

а Λ — лапласиан на поверхности S^3:

$$\Lambda = \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}. \qquad (17)$$

По существу, таким образом, имеется лишь одно броуновское движение, определенное на поверхности S^3. Подробнее по этому вопросу см. Иосида [27].

6. Обобщенный лапласиан (Феллер)

Пусть, в частности, S — некоторый открытый интервал (r_1, r_2) вещественной прямой (конечный или бесконечный) и $\mathfrak{B}$ — семейство всех бэровских множеств из (r_1, r_2). Рассмотрим определенный на $(S, \mathfrak{B})$ марковский процесс $P(t, x, E)$, удовлетворяющий условию Линдеберга вида

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{|x-y| > \varepsilon} P(t, x, dy) = 0 \quad \text{при всех } x, y \in (r_1, r_2) \text{ и } \varepsilon > 0. \qquad (1)$$

Обозначим через $C[r_1, r_2]$ B-пространство вещественных ограниченных равномерно непрерывных функций $f(x)$, определенных в (r_1, r_2), с нормой $\|f\| = \sup\limits_x |f(x)|$. Тогда равенства

$$\begin{aligned} (T_t f)(x) &= \int\limits_{r_1}^{r_2} P(t, x, dy) f(y) \quad \text{при} \quad t > 0, \\ (T_t f)(x) &= f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \end{aligned} \tag{2}$$

определяют в пространстве $C[r_1, r_2]$ некоторую сжимающую полугруппу положительных операторов $\{T_t\}$. Предположим, что в точке $t = 0$ оператор T_t слабо непрерывен справа, тогда по теореме гл. IX, § 1, $\{T_t\}$ является полугруппой класса (C_0). Приводимые ниже две теоремы Феллера касаются инфинитезимального производящего оператора A полугруппы T_t.

Теорема 1. Оператор A обладает следующими свойствами:

$$A \cdot 1 = 0, \tag{3}$$

A локален в том смысле, что если функция $f \in D(A)$ обращается в нуль в некоторой окрестности точки x_0, то $(Af)(x_0) = 0$, (4)

если функция $f \in D(A)$ имеет в точке x_0 локальный максимум, то $(Af)(x_0) \leqslant 0$. (5)

Доказательство. Свойство (3) вытекает из условия $T_t \cdot 1 = 1$. Из (1) следует, что независимо от достаточно малых значений $\varepsilon > 0$ справедливо предельное соотношение

$$(Af)(x_0) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int\limits_{|x_0 - y| \leqslant \varepsilon} P(t, x_0, dy)(f(y) - f(x_0)).$$

Поэтому вследствие неравенства $P(t, x, E) \geqslant 0$ мы и приходим к условиям (4) и (5).

Теорема 2. Допустим, что линейный оператор A, заданный в некотором линейном подпространстве $D(A)$ пространства $C[r_1, r_2]$, отображающий $C[r_1, r_2]$ в себя, удовлетворяет условиям (3), (4) и (5). Предположим, кроме того, что оператор A *не вырождается* в том смысле, что имеют место следующие два свойства:

существует по крайней мере одна функция $f_0 \in D(A)$, такая, что $(Af_0)(x) > 0$ при всех $x \in (r_1, r_2)$, (6)

уравнение $A \cdot v = 0$ имеет решение v, линейно независимое от функции 1 во всяком подинтервале (x_1, x_2) интервала (r_1, r_2). (7)

Тогда уравнение $A \cdot s = 0$ имеет в (r_1, r_2) строго возрастающее решение $s = s(x)$, такое, что можно определить строго возрастающую (но не обязательно непрерывную или ограниченную) функцию $m = m(x)$, заданную на (r_1, r_2), вида

$$m(x) = \int^{x} \frac{1}{(Af_0)(t)} d\left(D_s^+ f_0(t)\right), \tag{8}$$

так, чтобы имело место представление

$$(Af)(x) = D_m^+ D_s^+ f(x) \text{ при } x \in (r_1, r_2) \text{ для любой функции } f \in D(A). \tag{9}$$

Здесь правые производные D_p^+, определенные относительно строго возрастающей функции $p = p(x)$, понимаются как выражения

$$D_p^+ g(x) = \begin{cases} \lim\limits_{y \downarrow x} \dfrac{g(y+0) - g(x-0)}{p(y+0) - p(x-0)} & \text{в точках непрерывности } p, \\ \dfrac{g(x+0) - g(x-0)}{p(x+0) - p(x-0)} & \text{в точках разрыва } p. \end{cases} \tag{10}$$

Доказательство. *Первый этап.* Пусть функция $u \in D(A)$ удовлетворяет уравнению $A \cdot u = 0$ и $u(x_1) = u(x_2)$, где $r_1 < x_1 < x_2 < r_2$. Тогда функция $u(x)$ должна обратиться в константу в промежутке (x_1, x_2). Действительно, если допустить противное, то мы придем к противоречию. В самом деле, предположим, например, что функция $u(x)$ достигает локального максимума в некоторой внутренней точке x_0 промежутка (x_1, x_2) (случай минимума исследуется аналогичным способом). Тогда найдется некоторое значение $\varepsilon > 0$, такое, что $u(x_0) - \varepsilon \geqslant u(x_1) = u(x_2)$. Возьмем какую-нибудь функцию $f_0 \in D(A)$, удовлетворяющую условию (6). Тогда при достаточно большом значении $\delta > 0$ функция $F(x) = f_0(x) + \delta u(x)$ будет удовлетворять неравенству $F(x_0) > F(x_i)$ $(i = 1, 2)$. Следовательно, функция $F(x)$, определенная в сегменте $[x_1, x_2]$, будет иметь в некоторой внутренней точке x_0' максимум, в то время как $(AF)(x_0') = (Af_0)(x_0') > 0$, что противоречит условию (5).

Второй этап. На основании результатов первого этапа и условия (7) мы заключаем, что существует строго возрастающее непрерывное решение $s(x)$ уравнения $A \cdot s = 0$. С помощью этой функции s мы можем изменить параметризацию рассматриваемого интервала таким образом, чтобы

$$\text{обе функции } 1 \text{ и } x \text{ удовлетворяли уравнению } A \cdot f = 0 \tag{11}$$

(написанное условие будет выполняться в новых переменных, для которых сохранены прежние обозначения). Теперь мы можем показать, что

$$\begin{gathered}\text{если } (Ah)(x) > 0 \text{ для всех } x \text{ из подинтервала } (x_1, x_2) \\ \text{интервала } (r_1, r_2), \text{ то } h(x) \text{ выпукла вниз в } (x_1, x_2).\end{gathered} \tag{12}$$

Действительно, функция $u(x)=h(x)-\alpha x-\beta$, которая удовлетворяет неравенству $(Au)(x)=(Ah)(x)>0$ при всех x из (x_1, x_2), не может иметь локального максимума ни в какой внутренней точке промежутка (x_1, x_2).

Третий этап. Пусть $f\in D(A)$. Тогда из (12) и (6) следует, что для достаточно больших значений $\delta>0$ обе функции $f_1(x)=f(x)+\delta f_0(x)$ и $f_2(x)=\delta f_0(x)$ выпуклы вниз. Функция $f(x)=f_1(x)-f_2(x)$ как разность двух выпуклых функций должна обладать правой производной в каждой точке x промежутка (r_1, r_2). Положим

$$A\cdot f=\varphi,\quad A\cdot f_0=\varphi_0,\quad D_x^+f_0(x)=\mu(x). \tag{13}$$

Для функции $g_t=f-tf_0$ выполняется условие $A\cdot g_t=Af-tAf_0=\varphi-t\varphi_0$. Поэтому на основании (12) мы заключаем,

что если $t<\min\limits_{x_1<x<x_2}\varphi(x)/\varphi_0(x)$, то $g_t(x)$ выпукла вниз в промежутке (x_1, x_2), и поэтому $D_x^+g_t(x)$ в промежутке (x_1, x_2) возрастает.

Применяя такие же рассуждения для случая $t>\max\limits_{x_1<x<x_2}\varphi(x)/\varphi_0(x)$,

мы устанавливаем, что для любого подинтервала (x_1, x_2) из (r_1, r_2) имеют место неравенства

$$\min_{x_1<x<x_2}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}\times\left(D_x^+f_0(x_2)-D_x^+f_0(x_1)\right)\leqslant$$
$$\leqslant D_x^+f(x_2)-D_x^+f(x_1)\leqslant\max_{x_1<x<x_2}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}\times\left(D_x^+f_0(x_2)-D_x^+f_0(x_1)\right).$$

Поскольку функция $\varphi(x)/\varphi_0(x)$ непрерывна, из полученных выше неравенств следует, что

$$D_x^+f(x_2)-D_x^+f(x_1)=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\varphi(x)}{\varphi_0(x)}\,d\left(D_x^+f_0(x)\right).$$

Последнее соотношение и выражает в интегральной форме тот факт, что $A\cdot f=D_m^+D_s^+f$.

Замечание 1. Оператор $D_m^+D_s^+$ мы можем рассматривать как обобщенный лапласиан в том смысле, что операции D_s^+ и D_m^+ отвечают соответственно *обобщенному градиенту* и *обобщенной дивергенции* в одномерном случае. Феллер называет функцию $s=s(x)$ *канонической шкалой*, а $m=m(x)$ — *канонической мерой* марковского процесса, о котором здесь говорилось. Результаты первого этапа доказательства показывают, что функции 1 и s образуют *фундаментальную систему линейно независимых решений* уравнения

$A \cdot v = 0$, так как всякое решение уравнения $A \cdot v = 0$ может быть единственным образом записано в виде линейной комбинации функций 1 и $s(x)$. Каноническая шкала процесса $P(t, x, E)$ определяется с точностью до некоторого линейного преобразования, т. е. всякая другая каноническая шкала s_1 должна иметь вид $s_1 = \alpha s + \beta$, где $\alpha > 0$. Отсюда следует, что каноническая мера m_1, соответствующая s_1, имеет форму $m_1 = \alpha^{-1} m$.

Замечание 2. Теорема 2 указывает представление инфинитезимального производящего оператора A во *внутренней точке* x промежутка (r_1, r_2). Для полного определения оператора A как инфинитезимального производящего оператора сжимающей полугруппы класса (C_0) положительных операторов T_t, действующих из пространства $C[r_1, r_2]$ в $C[r_1, r_2]$, нужно определить *краевые условия*, т. е. *граничные условия* для оператора A в обеих граничных точках r_1 и r_2, чтобы получить полное и конкретное описание области определения $D(A)$ оператора A. Следуя классификации Феллера [2] и [6] (ср. Хилле [6]), граничные точки r_1 (или r_2) подразделяют на так называемые *регулярную границу*, *границу-выход*, *границу-вход* и *естественную границу*. Для описания этой классификации введем следующие четыре величины:

$$\sigma_1 = \iint\limits_{r_1 < y < x < r_1'} dm(x)\, ds(y), \quad \mu_1 = \iint\limits_{r_1 < y < x < r_1'} ds(x)\, dm(y),$$

$$\sigma_2 = \iint\limits_{r_2 > y > x > r_2'} dm(x)\, ds(y), \quad \mu_2 = \iint\limits_{r_2 > y > x > r_2'} ds(x)\, dm(y).$$

Граничная точка r_i $(i = 1, 2)$ называется

регулярной,	если $\sigma_i < \infty$, $\mu_i < \infty$,
границей-выходом	при $\sigma_i < \infty$, $\mu_i = \infty$,
границей-входом	в случае $\sigma_i = \infty$, $\mu_i < \infty$,
естественной границей,	если $\sigma_i = \infty$, $\mu_i = \infty$,

причем указанные условия не зависят от выбора r_1' и r_2'. Для иллюстрации различных случаев рассмотрим следующие простые примеры.

Пример 1. Пусть $D_m^+ D_s^+ = d^2/dx^2$, $S = (-\infty, \infty)$. Здесь можно положить $s = x$ и $m = x$. Следовательно,

$$\sigma_2 = \iint\limits_{\infty > y > x > r_2'} dx\, dy = \int_{r_2'}^{\infty} (y - r_2')\, dy = \infty,$$

$$\mu_2 = \iint\limits_{\infty > y > x > r_2'} dx\, dy = \infty,$$

и, таким образом, точка ∞ является естественной границей. Точно так же и точка $-\infty$ служит естественной границей.

Пример 2. $D_m^+D_s^+ = d^2/dx^2$, $S = (-\infty, 0)$. Мы можем опять положить $s = x$, $m = x$. В этом случае $-\infty$ оказывается естественной границей, а 0 — регулярной границей.

Пример 3. Пусть $D_m^+D_s^+ = x^2 d^2/dx^2 - d/dx$, $S = (0, \infty)$. Строго возрастающее непрерывное решение $s = s(x)$ уравнения $D_m^+D_s^+ s = 0$ можно взять в этом случае в форме $s(x) = \int^x e^{-1/t}\,dt$, и тогда

$$D_s = e^{1/x}\frac{d}{dx}, \quad D_m^+D_s^+ = x^2 e^{-1/x}\frac{d}{dx}e^{1/x}\frac{d}{dx}.$$

Поэтому здесь $ds = e^{-1/x}\,dx$, $dm = x^{-2}e^{1/x}\,dx$. Следовательно,

$$\sigma_1 = \iint\limits_{0<y<x<1} x^{-2}e^{1/x}\,dx e^{-1/y}\,dy = \int_0^1 [-e^{1/x}]_y^1\, e^{-1/y}\,dy < \infty,$$

$$\mu_1 = \iint\limits_{0<y<x<1} e^{-1/x}\,dx y^{-2}e^{1/y}\,dy = \int_0^1 e^{-1/x}\,[-e^{1/y}]_0^x\,dx = \infty.$$

Таким образом, точка 0 — это граница-выход. Аналогично получаем

$$\sigma_2 = \iint\limits_{\infty>y>x>1} e^{1/x}x^{-2}\,dx e^{-1/y}\,dy = \int_1^\infty [-e^{1/x}]_1^y \cdot e^{-1/y}\,dy = \infty,$$

$$\mu_2 = \iint\limits_{\infty>y>x>1} e^{-1/x}\,dx e^{1/y}y^{-2}\,dy = \int_1^\infty e^{-1/x}\,[-e^{1/y}]_x^\infty\,dx = \infty.$$

Поэтому ∞ является естественной границей.

Пример 4. $D_m^+D_s^+ = x^2 d^2/dx^2 + d/dx$, $S = (0, 2)$. Как и выше, мы находим $ds = e^{1/x}\,dx$, $dm = x^{-2}e^{-1/x}\,dx$, и поэтому нетрудно убедиться в том, что 0 служит границей-входом, а точка 2 является регулярной границей.

Вероятностная интерпретация вышеприведенной классификации, предложенная Феллером, заключается в следующем.

Вероятность того, что частица, локализованная в начальный момент времени во внутренней части открытого интервала (r_1, r_2), достигнет по истечении некоторого конечного промежутка времени регулярной границы или границы-выхода, положительна, в то время как частица не может (в вероятностном смысле) прийти в течение конечного промежутка времени ни к границе-входу, ни к естественной границе.

Литература

Работа Феллера [2] была опубликована в 1952 г. Доказательство теоремы 2, приведенное в этом параграфе, заимствовано из статей Феллера [3] и [4]; к этому вопросу относится также и доклад Феллера [5]. Мы отсылаем читателей также к книгам К. Ито—Мак-Кина [1] и Дынкина [3*], а также к другим работам, указанным в библиографии в этих книгах.

7. Расширение диффузионного оператора

Допустим, что возможные состояния некоторой системы, описываемой марковским процессом (не обязательно однородным во времени), представляются точками x некоторого n-мерного риманова пространства R класса C^∞. Обозначим через $P(s, x, t, E)$, $s \leqslant t$, переходную функцию — вероятность того, что точка x, отвечающая некоторому состоянию системы в момент времени s, будет перенесена в некоторый последующий момент времени t в бэровское множество $E \subseteq R$.

Рассмотрим вопрос о форме оператора A_s, определяемого условием

$$(A_s f)(x) = \lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_R P(s, x, s+t, dy)(f(y) - f(x)), \quad f \in C_0^0(R). \tag{1}$$

Условие непрерывности линдеберговского типа записывается для процесса такого вида в форме

$$\lim_{t \downarrow 0} t^{-1} \int_{d(x, y) > \varepsilon} P(s, x, s+t, dy) = 0 \text{ при любом положительном } \varepsilon, \text{ где } d(x, y) \text{ — расстояние по геодезической между точками } x \text{ и } y. \tag{2}$$

Мы, однако, не будем сейчас предполагать, что условие (2) выполняется для рассматриваемого процесса $P(s, x, t, E)$. Имеет место следующая

Теорема. Предположим, что существует такая возрастающая последовательность $\{k\}$ положительных целых чисел, что для некоторой фиксированной пары точек $\{s, x\}$ выполняются следующие условия:

равномерно по k существует

$$\lim_{a \uparrow \infty} k \int_{d(x, y) > a} P(s, x, s+k^{-1}, dy) = 0; \tag{3}$$

выражение $k \int_R \frac{d(x, y)^2}{1 + d(x, y)^2} P(s, x, s+k^{-1}, dy)$

равномерно ограничено относительно k. **(4)**

Допустим, что для некоторой функции $f(x) \in C_0^2(R)$ существует конечный

$$\lim_{k \to \infty} k \left\{ \int_R P(s,\ x,\ s+k^{-1},\ dy) f(y) - f(x) \right\}. \tag{5}$$

Тогда при любом выборе фиксированных локальных координат $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ точки $x \in R$ выполняется соотношение

$$\begin{aligned}(A_s f)(x) = a_j(s,\ x)\frac{\partial f}{\partial x_j} + b_{ij}(s,\ x)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \\ + \overline{\lim_{\varepsilon \downarrow 0}} \int_{d(x,\ y) \geqslant \varepsilon} \left\{ f(y) - f(x) - \frac{\rho(x,\ y)}{1+d(x,\ y)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} \right\} \times \\ \times \frac{1+d(x,\ y)^2}{d(x,\ y)^2} G(s,\ x,\ dy),\end{aligned} \tag{6}$$

где

функция $G(s,\ x,\ E)$ неотрицательна и σ-аддитивна на бэровских множествах $E \subseteq R$ и $G(s,\ x,\ R) < \infty$; (7)

функция $\rho(x,\ y)$ непрерывна по $x,\ y$, и $\rho(x,\ y) = 1$ при $d(x,\ y) \leqslant \delta/2$, $\rho(x,\ y) = 0$ при $d(x,\ y) > \delta$ (δ — некоторая фиксированная положительная константа); (8)

квадратичная форма $b_{ij}(s,\ x)\xi_i\xi_j$ удовлетворяет неравенству $b_{ij}(s,\ x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$. (9)

Замечание. Формула (6) получена в работе Иосида [26]. Эта формула определяет расширение *диффузионного оператора*, имеющего форму эллиптического дифференциального оператора второго порядка, о котором говорилось в предыдущем параграфе. Третье слагаемое в правой части (6) представляет собой сумму бесконечного числа разностных операторов. Появление такого члена объясняется тем, что, как это допускалось, условие (2) Линдеберга может не выполняться. Формула (6) выражает в теоретико-операторной форме факт, который можно рассматривать как полную аналогию результатов Леви — Хинчина — К. Ито, относящихся к так называемым *безгранично делимым законам* теории вероятностей. См. по этому поводу Хилле — Филлипс [1].

Доказательство теоремы. Рассмотрим последовательность неотрицательных σ-аддитивных мер вида

$$G_k(s,\ x,\ E) = k \int_E \frac{d(x,\ y)^2}{1+d(x,\ y)^2} P(s,\ x,\ s+k^{-1},\ dy). \tag{10}$$

Из (3) и (4) следует, что

функция $G_k(s, x, E)$ ограничена равномерно относительно множеств E и индексов k, (11)

равномерно по k существует

$$\lim_{a \uparrow \infty} \int_{d(x, y) \geqslant a} G_k(s, x, dy) = 0. \tag{12}$$

Следовательно, при фиксированных $\{s, x\}$ линейный функционал L_k, определяемый равенством

$$L_k(g) = \int_R G_k(s, x, dy)\, g(y), \quad g \in C_0^0(R),$$

неотрицателен и непрерывен в нормированном линейном пространстве $C_0^0(R)$ с нормой $\|g\| = \sup\limits_x |g(x)|$, причем нормы функционалов L_k равномерно ограничены относительно k.

Так как нормированное линейное пространство $C_0^0(R)$ сепарабельно, мы можем выбрать из последовательности $\{k\}$ такую подпоследовательность $\{k'\}$, чтобы существовал $\lim\limits_{k' \to \infty} L_{k'}(g) = L(g)$ и при этом выражение $L(g)$ представляло собой некоторый неотрицательный линейный функционал в пространстве $C_0^0(R)$. Из леммы, относящейся к теории меры, доказательство которой можно найти в книге Халмоша [1], следует, что в этом случае существует некоторая неотрицательная σ-аддитивная мера $G(s, x, E)$, такая, что $G(s, x, R) < \infty$ и

$$\lim_{k = k' \to \infty} \int_R G_k(s, x, dy)\, g(dy) = \int_R G(s, x, dy)\, g(y) \tag{13}$$

для всех $g \in C_0^0(R)$.

Воспользуемся теперь соотношением

$$k\left[\int_R P(s, x, s + k^{-1}, dy) f(y) - f(x)\right] =$$
$$= \int_R \left\{\left[f(y) - f(x) - \frac{\rho(y, x)}{1 + d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j}\right]\frac{1 + d(y, x)^2}{d(y, x)^2}\right\} \times$$
$$\times G_k(s, x, dy) + \int_R \frac{\rho(y, x)}{d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} G_k(s, x, dy), \tag{14}$$

вытекающим из определения и свойств $G_k(s, x, E)$. Член вида $\{\ldots\}$ в первом интеграле в правой части (14) при достаточно малых значениях $d(y, x)$ можно записать в виде

$$(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} + (y_i - x_i)(y_j - x_j)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_j}\right)\frac{1+d(y, x)^2}{d(y, x)^2},$$

где $X_j = x_j + \theta(y_j - x_j)$, $0 < \theta < 1$. Отсюда следует, что величина $\{\ldots\}$ ограничена и непрерывна по y. Следовательно, ввиду (12) и (13) первое слагаемое в правой части (14) стремится при $k = k' \to \infty$ к $\int\limits_R \{\ldots\} G(s, x, dy)$. Поэтому вследствие (5) существует конечный

$$\lim_{k=k'\to\infty} \int\limits_R \frac{\rho(y, x)}{d(y, x)^2}(y_j - x_j)\frac{\partial f}{\partial x_j} G_k(s, x, dy) = a_j(s, x)\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Отсюда, учитывая (3), мы, полагая

$$b_{ij}(s, x) = \varlimsup_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{k=k'\to\infty} k \int\limits_{d(y, x) \geqslant \varepsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j) P(s, x, s+k^{-1}, dy),$$

получаем формулу (6).

8. Марковские процессы и потенциалы

Пусть равностепенно непрерывная полугруппа $\{T_t\}$ класса (C_0) определена на некотором функциональном пространстве X равенством $(T_t f)(x) = \int\limits_S P(t, x, dy) f(y)$, где $P(t, x, dy)$ — марковский процесс, заданный в пространстве с мерой $(S, \mathfrak{B})$. Обозначим через A инфинитезимальный производящий оператор полугруппы $\{T_t\}$. По аналогии с частным случаем, когда A представляет собой лапласиан, элемент $f \in X$, удовлетворяющий уравнению $A \cdot f = 0$, называется *гармоническим*. Из этого определения следует, что элемент f является гармоническим в том и только в том случае, если $\lambda(\lambda I - A)^{-1} f = f$ при всяком $\lambda > 0$. Если при некотором g элемент $f \in X$ представим в форме $f = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0}(\lambda I - A)^{-1} g$, то f называется *потенциалом*. Название это употребляется потому, что для такого элемента f ввиду замкнутости оператора A справедливо *уравнение Пуассона*

$$A \cdot f = \lim_{\lambda \downarrow 0} A(\lambda I - A)^{-1} g = \lim_{\lambda \downarrow 0}\{-g + \lambda(\lambda I - A)^{-1} g\} = -g.$$

Допустим теперь, что X является векторной структурой и одновременно локально выпуклым линейным топологическим пространством, причем всякая монотонно возрастающая ограниченная последовательность элементов из X слабо сходится к некоторому элементу пространства X, бо́льшему, чем элементы этой последовательности. Предположим также, что резольвента $J_\lambda = (\lambda I - A)^{-1}$

положительна в том смысле, что при $f \geqslant 0$ выполняется неравенство $J_\lambda f \geqslant 0$. Принятые здесь предположения и терминология подсказываются аналогией с частным случаем, когда A представляет собой лапласиан, рассматриваемый в соответствующим образом выбранном функциональном пространстве.

Естественно назвать *субгармоническими* те элементы $f \in X$, для которых выполняется неравенство $A \cdot f \geqslant 0$. Ввиду положительности J_λ субгармонический элемент f при всех значениях $\lambda > 0$ удовлетворяет неравенству $\lambda J_\lambda f \geqslant f$. Мы докажем сейчас теорему, являющуюся аналогом хорошо известной теоремы Рисса, относящейся к обычным субгармоническим функциям (см. Радо [1]).

Теорема. Всякий субгармонический элемент x можно разложить на сумму гармонического элемента x_h и потенциала x_p, где гармоническая часть x_h элемента x равна $x_h = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x$, и x_h представляет собой так называемую *наименьшую гармоническую мажоранту* x в том смысле, что всякий гармонический элемент $x_H \geqslant x$ удовлетворяет неравенству $x_H \geqslant x_h$.

Доказательство (Иосида [4]). Из резольвентного уравнения

$$J_\lambda - J_\mu = (\mu - \lambda) J_\lambda J_\mu \tag{1}$$

мы получаем

$$(I - \lambda J_\lambda) = (I + (\mu - \lambda) J_\lambda)(I - \mu J_\mu). \tag{2}$$

Так как элемент x субгармоничен, то ввиду положительности J_λ

из $\lambda > \mu$ следует, что $\lambda J_\lambda x \geqslant \mu J_\mu x \geqslant x$.

Следовательно, слабый предел $w\text{-}\lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x = x_h$ вследствие предположений, сделанных относительно ограниченных монотонных последовательностей из X, существует. Поэтому, используя эргодическую теорему из гл. VIII, § 4, мы видим, что существует предел $x_h = \lim\limits_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x$ и элемент x_h — гармоничен, т. е. $\lambda J_\lambda x_h = x_h$ для всех $\lambda > 0$. Кроме того,

$$x_p = (x - x_h) = \lim_{\lambda \downarrow 0} (J - \lambda J_\lambda) x =$$
$$= \lim_{\lambda \downarrow 0} (-A)(\lambda I - A)^{-1} x = \lim_{\lambda \downarrow 0} (\lambda I - A)^{-1} (-Ax),$$

откуда следует, что элемент x_p является потенциалом.

Предположим, что некоторый гармонический элемент x_H удовлетворяет неравенству $x_H \geqslant x$. Тогда вследствие положительности λJ_λ и свойств гармонического элемента x_H

$$x_H = \lambda J_\lambda x_H \geqslant \lambda J_\lambda x \text{ и, следовательно, } x_H \geqslant \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda J_\lambda x = x_h.$$

Исследования Ханта и Дуба. Хант [1] предложил условия, при которых линейный оператор, принадлежащий $L(C_0^0(R^n), C_0^0(R^n))$, служит некоторой резольвентой полугруппы, индуцированной марковским процессом $P(t, x, E)$ в пространстве R^n, и рассмотрел также вопросы теории потенциалов, связанных с этим марковским процессом. Мы рекомендуем читателям превосходное изложение теории Ханта в книге Мейера [1]. В исследованиях Дуба [2] изучались граничные значения гармонической функции $f(x)$, когда x стремится к границе в ходе соответствующего марковского процесса. Основной метод исследований Дуба опирается на предельную теорему, относящуюся к систематически развитой им *теории мартингалов* [1]).

---

[1]) По материалу главы XIII см. также на русском языке Феллер [9*], Гихман, Скороход [1*], Дуб [4*], Дынкин [3*], Лоэв [1*], К. Ито [2*]. — *Прим. перев.*

ГЛАВА XIV

Интегрирование эволюционных уравнений

Обычная экспоненциальная функция служит решением следующей задачи с начальными значениями:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha y, \qquad y(0) = y_0.$$

Мы рассмотрим уравнение диффузии

$$\frac{du}{dt} = \Delta u,$$

где $\Delta = \sum_{j=1}^{m} \partial^2/\partial x_j^2$ — лапласиан в R^m. Поставим вопрос об отыскании решения $u = u(x, t)$, $t > 0$, этого уравнения, удовлетворяющего начальному условию $u(x, 0) = f(x)$, где $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ — некоторая заданная функция переменных x. Мы исследуем также волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u, \quad -\infty < t < \infty,$$

с начальными значениями

$$u(x, 0) = f(x), \quad (\partial u/\partial t)_{t=0} = g(x),$$

где f и g — заданные функции. Это уравнение можно записать в векторной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad v = \frac{\partial u}{\partial t},$$

и при этом начальные условия можно взять в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} u(x, 0) \\ v(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x) \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в выбранном подходящим образом функциональном пространстве волновое уравнение приобретает форму уравнения диффузии (или уравнения теплопроводности): в левой части стоит производная по параметру t, играющему роль времени, а в правой — некоторый оператор дифференцирования по пространственным координатам, короче, волновое уравнение приобретает форму, аналогичную уравнению $dy/dt = \alpha y$. Поскольку решение последнего уравнения выражается экспоненциальной функцией, естественно предположить, что уравнение теплопроводности и волновое уравнение можно решить, определив соответствующим образом функции экспоненциального типа от операторов

$$\Delta \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix},$$

рассматривая их в подходящем функциональном пространстве. Эти соображения приводят к идее приложения теории полугрупп к решению задачи Коши общего вида. Заметим, что уравнение Шредингера

$$i^{-1}\, \partial u/dt = Hu = (\Delta + U(x))\, u,$$

где $U(x)$ — некоторая заданная функция, представляет собой другой пример так называемого *эволюционного уравнения* вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \qquad t > 0, \tag{1}$$

где A — некоторый линейный оператор в некотором функциональном пространстве, не обязательно непрерывный.

Уравнение вида (1) можно назвать *однородным во времени эволюционным уравнением*. Интегрирование такого уравнения может быть проведено с помощью теории полугрупп. В трех параграфах этой главы мы рассмотрим некоторые характерные примеры, относящиеся к интегрированию такого рода. Мы распространим также эту теорию интегрирования и на уравнение вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A(t)\, u, \qquad a < t < b, \tag{2}$$

которое естественно назвать *неоднородным во времени эволюционным уравнением*.

1. Интегрирование уравнения диффузии в пространстве $L^2(R^m)$

Рассмотрим уравнение диффузии вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \qquad t > 0, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор

$$A = a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)) \tag{2}$$

строго эллиптичен в m-мерном евклидовом пространстве R^m. Мы предположим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c вещественны и принадлежат функциональному пространству $C^\infty(R^m)$ и что

$$\max\Big(\sup_x |a^{ij}(x)|,\ \sup_x |b^i(x)|,\ \sup_x |c(x)|,$$
$$\sup_x \left|a^{ij}_{x_k}(x)\right|,\ \sup_x \left|b^i_{x_k}(x)\right|,\ \sup_x \left|a^{ij}_{x_k x_s}(x)\right|\Big) = \eta < \infty. \tag{3}$$

Предположение о строгой эллиптичности оператора A означает, что существуют такие положительные постоянные λ_0 и μ_0, что

$$\mu_0 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \geqslant a^{ij}(x)\,\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_0 \sum_{i=1}^m \xi_i^2 \tag{4}$$

при всех $x \in R^m$ и любом вещественном векторе

$$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m).$$

Обозначим через $\widehat{H}_0^1$ пространство всех вещественных функций $f(x) \in C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \left(\int_{R^m} f^2\,dx + \sum_{j=1}^m \int_{R^m} f_{x_j}^2\,dx\right)^{1/2}, \tag{5}$$

и пусть H_0^1 — пополнение $\widehat{H}_0^1$ по норме $\|f\|_1$. Пусть также H_0^0 — пополнение $\widehat{H}_1^0$ по норме

$$\|f\|_0 = \left(\int_{R^m} f^2\,dx\right)^{1/2}. \tag{6}$$

Мы ввели, таким образом, два вещественных гильбертовых пространства H_0^1 и H_0^0, причем H_0^1 и $\widehat{H}_0^1$ плотны в H_0^0 по норме $\|\ \|_0$. Из предложения, доказанного в гл. I, § 10, мы знаем, что H_0^1 совпадает с вещественным пространством Соболева $W^1(R^m)$. Известно также, что H_0^0 совпадает с вещественным гильбертовым пространством $L^2(R^m)$. Обозначим скалярные произведения в гильбертовых пространствах H_0^1 и H_0^0 соответственно через $(f, g)_1$ и $(f, g)_0$.

Для того чтобы проинтегрировать уравнение (1) в комплексном гильбертовом пространстве $L^2(R^m)$ при условиях (3) и (4), нам потребуются некоторые леммы, которые будут также играть важную роль в следующих параграфах.

Лемма 1 (об интегрировании по частям). Пусть $f, g \in \widehat{H}_0^1$. Тогда

$$(Af, g)_0 = -\int_{R^m} a^{ij} f_{x_i} g_{x_j}\,dx - \int_{R^m} a^{ij}_{x_j} f_{x_i} g\,dx +$$
$$+ \int_{R^m} b^i f_{x_i} g\,dx + \int_{R^m} c f g\,dx, \tag{7}$$

т. е. при вычислении $(Af, g)_0$ можно интегрировать по частям, и члены, содержащие производные второго порядка, исчезают.

Доказательство. Из (3) и того факта, что функции f и g принадлежат $\hat{H}_0^1$, мы заключаем, что выражения вида $a^{ij}f_{x_ix_j}g$ интегрируемы по пространству R^m. А так как функции f и g обладают бикомпактными носителями, то

$$\int\limits_{R^m} a^{ij}f_{x_ix_j}g\,dx = -\int\limits_{R^m} a^{ij}f_{x_i}g_{x_j}\,dx - \int\limits_{R^m} a^{ij}_{x_j}f_{x_i}g\,dx.$$

Замечание. Оператор A^*, формально сопряженный оператору A, определяется как

$$(A^*f)(x) = \frac{\partial^2}{\partial x_i\,\partial x_j}(a^{ij}(x)f(x)) - \frac{\partial}{\partial x_i}(b^i(x)f(x)) + c(x)f(x). \tag{8}$$

Как и выше, легко получается следующий результат: если $f, g \in \hat{H}_0^1$, то при вычислении $(A^*f, g)_0$ можно интегрировать по частям, и при этом члены, содержащие производные второго порядка, исчезают, т. е.

$$(A^*f, g)_0 = -\int\limits_{R^m} a^{ij}f_{x_i}g_{x_j}\,dx - \int\limits_{R^m} a^{ij}_{x_i}fg_{x_j}\,dx - \\ - \int\limits_{R^m} b^i fg_{x_i}\,dx + \int\limits_{R^m} cfg\,dx. \tag{7'}$$

Следствие. Существуют такие положительные постоянные $\varkappa$, γ и δ, что при всех достаточно малых положительных значениях α

$$\begin{aligned} &\alpha\delta\|f\|_1^2 \leqslant (f-\alpha Af, f)_0 \leqslant (1+\alpha\gamma)\|f\|_1^2 \quad \text{при} \quad f\in\hat{H}_0^1, \\ &\alpha\delta\|f\|_1^2 \leqslant (f-\alpha A^*f, f)_0 \leqslant (1+\alpha\gamma)\|f\|_1^2 \quad \text{при} \quad f\in\hat{H}_0^1; \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} &|(f-\alpha Af, g)_0| \leqslant (1+\alpha\gamma)\|f\|_1\|g\|_1 \quad \text{при} \quad f, g\in\hat{H}_0^1, \\ &|(f-\alpha A^*f, g)_0| \leqslant (1+\alpha\gamma)\|f\|_1\|g\|_1 \quad \text{при} \quad f, g\in\hat{H}_0^1; \end{aligned} \tag{10}$$

$$|(Af, g)_0 - (f, Ag)_0| \leqslant \varkappa\|f\|_1\|g\|_0 \quad \text{при} \quad f, g\in\hat{H}_0^1. \tag{11}$$

Доказательство. Условия (9) и (10) доказываются с помощью (3), (4), (7), (7′) и с использованием неравенства

$$2\alpha|ab| \leqslant \alpha(\nu|a|^2 + \nu^{-1}|b|^2), \tag{12}$$

которое выполняется при любых положительных α и ν. Действительно, мы можем воспользоваться оценкой

$$\left|\int\limits_{R^m} a^{ij}_{x_j}f_{x_i}g\,dx\right| \leqslant \sum_{i=1}^{m} m\eta(\nu\|f_{x_i}\|_0^2 + \nu^{-1}\|g\|_0^2).$$

Условие (11) выводится из соотношения

$$(Af,\ g)_0-(f,\ Ag)_0=$$
$$=-\int\limits_{R^m}\left(2a^{ij}_{x_i}f_{x_j}g+a^{ij}_{x_ix_j}fg-2b^if_{x_i}g-b^i_{x_i}fg\right)dx.$$

Лемма 2 (о существовании решений уравнения $u-\alpha Au=f$). Пусть положительное число α_0 выбрано так, что утверждения доказанного выше следствия выполняются для значений $0<\alpha\leqslant\alpha_0$. Тогда при любой функции $f(x)\in\hat{H}^1_0$ уравнение

$$u-\alpha Au=f\qquad(0<\alpha\leqslant\alpha_0)\tag{13}$$

имеет однозначно определенное решение $u\in H^1_0\cap C^\infty(R^m)$.

Доказательство. Определим для функций $u,\ v\in\hat{H}^1_0$ билинейный функционал $\hat{B}(u,\ v)=(u-\alpha A^*u,\ v)_0$. Из вышеприведенного следствия вытекает, что

$$\begin{aligned}&|\hat{B}(u,\ v)|\leqslant(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\|v\|_1,\\&\alpha\delta\|u\|^2_1\leqslant\hat{B}(u,\ u).\end{aligned}\tag{14}$$

Поэтому мы можем продолжить $\hat{B}(u,\ v)$ по непрерывности до билинейного функционала $B(u,v)$, определенного для функций $u,\ v\in H^1_0$, так, чтобы выполнялись условия

$$\begin{aligned}&|B(u,\ v)|\leqslant(1+\alpha\gamma)\|u\|_1\|v\|_1,\\&\alpha\delta\|u\|^2_1\leqslant B(u,\ u).\end{aligned}\tag{14$'$}$$

Линейный функционал $F(u)=(u,\ f)_0$, определенный на H^1_0, ввиду неравенств $|(u,\ f)_0|\leqslant\|u\|_0\|f\|_0\leqslant\|u\|_1\|f\|_0$ является ограниченным линейным функционалом. Следовательно, по теореме Рисса об общем виде линейного функционала, если ее применить к H^1_0, найдется единственный элемент $v=v(f)\in H^1_0$, такой, что $(u,\ f)_0=(u,\ v(f))_1$. Применяя теперь к гильбертову пространству H^1_0 теорему Мильграма — Лакса, мы видим, что

$$(u,\ f)_0=(u,\ v(f))_1=B(u,\ Sv(f))\ \text{при всех}\ u\in H^1_0,\tag{15}$$

где S — некоторый ограниченный линейный оператор, отображающий пространство H^1_0 на себя.

Пусть теперь u пробегает $C^\infty_0(R^m)$, и пусть элементы $v_n\in\hat{H}^1_0$ выбраны так, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_n-Sv(f)\|_1=0$. Тогда

$$B(u,\ Sv(f))=\lim_{n\to\infty}B(u,\ v_n)=\lim_{n\to\infty}\hat{B}(u,\ v_n)=$$
$$=\lim_{n\to\infty}(u-\alpha A^*u,\ v_n)_0=(u-\alpha A^*u,\ Sv(f))_0.$$

так как норма $\| \ \|_1$ больше, чем норма $\| \ \|_0$. Следовательно,

$$(u, f)_0 = (u - \alpha A^* u, Sv(f))_0, \tag{15'}$$

т. е. выражение $Sv(f) \in H_0^1$ представляет собой обобщенное решение уравнения (13). Поэтому, учитывая строгую эллиптичность оператора $(I - \alpha A)$ и тот факт, что $f \in C_0^\infty(R^m)$, мы видим, что на основании следствия теоремы Фридрихса из гл. VI, § 9, мы можем считать, что функция $u = Sv(f) \in H_0^1$ является решением уравнения (13), принадлежащим классу $C^\infty(R^m)$. Таким образом, $u = Sv(f) \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$.

Единственность построенного таким способом решения u уравнения (13) устанавливается следующим образом. Пусть функция $u \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ удовлетворяет уравнению $u - \alpha Au = 0$. Тогда $Au \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m) \subseteq H_0^0$, так что выражение $(u - \alpha Au, u)_0$ определено и равно нулю. Допустим, что элементы $u_n \in \hat{H}_0^1$ выбраны так, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| u - u_n \|_1 = 0$. Интегрируя по частям, мы получаем на основании (9) оценку вида

$$0 = (u - \alpha Au, u)_0 = \lim_{n\to\infty} (u - \alpha Au, u_n)_0 \geqslant \alpha\delta \| u \|_1^2,$$

откуда заключаем, что $u = 0$.

Следствие 1. Существуют такие положительные постоянные $\hat{\alpha}_0$ и η_0, что для любой функции $f \in \hat{H}_0^1$ уравнение

$$\alpha u - Au = f \quad (0 < \hat{\alpha}_0 + \lambda_0 + \eta_0 \leqslant \alpha) \tag{16}$$

обладает единственным решением $u = u_f \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ и при этом справедлива оценка

$$\| u_f \|_0 \leqslant (\alpha - \lambda_0 - \eta_0)^{-1} \| f \|_0. \tag{17}$$

Доказательство. Неравенство Шварца приводит к оценке

$$\| (\alpha I - A) u \|_0 \cdot \| u \|_0 \geqslant | ((\alpha I - A) u, u)_0 | \quad \text{при} \quad u \in \hat{H}_0^1. \tag{18}$$

Интегрируя по частям, мы находим

$$((\alpha I - A) u, u)_0 = \alpha \| u \|_0^2 + \int_{R^m} a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} \, dx +$$

$$+ \int_{R^m} a^{ij}_{x_j} u_{x_j} u \, dx - \int_{R^m} b^i u_{x_i} u \, dx - \int_{R^m} c u u \, dx.$$

Следовательно, учитывая (3), (4) и (12), получаем

$$((\alpha I - A)u,\ u)_0 \geqslant \alpha \|u\|_0^2 + \lambda_0(\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2) -$$
$$- m^2\eta\left[\nu(\|u\|_1^2 - \|u\|_0^2) + \nu^{-1}\|u\|_0^2 + m^{-2}\|u\|_0^2\right] =$$
$$= (\alpha - \lambda_0 - m^2\eta(\nu^{-1} - \nu + m^{-2}))\|u\|_0^2 + (\lambda_0 - m^2\eta\nu)\|u\|_1^2.$$

Таким образом, учитывая (18), мы видим, что при значении $\eta_0 = m^2\eta(\nu^{-1} - \nu + m^{-2})$

$$\|(\alpha I - A)u\|_0 \geqslant (\alpha - \lambda_0 - \eta_0)\|u\|_0 \text{ при всех } u \in \hat{H}_0^1, \tag{17'}$$

если выбрать $\nu > 0$ столь малым, чтобы $(\lambda_0 - m^2\eta\nu)$ и η_0 были положительны. Далее, выбирая $\hat{\alpha}_0$ столь большим, чтобы для значений $\alpha \geqslant \hat{\alpha}_0 + \lambda_0 + \eta_0$ можно было применить лемму 2, мы устанавливаем существование решения уравнения (16).

Решение $u = u_f \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ уравнения (16) можно аппроксимировать последовательностью функций, принадлежащих $\hat{H}_0^1$ и сходящихся к u по $\|\ \|_1$-норме. Эти соображения и позволяют вывести оценку (17) из (18) и (17′).

Следствие 2. Будем рассматривать сейчас A как оператор, действующий из области $D(A) = (\alpha I - A)^{-1}\hat{H}_0^1 \subseteq H_0^0$ в H_0^0. Тогда наименьшее замкнутое расширение $\hat{A}$ оператора A в H_0^0 обладает при значениях $\alpha > \hat{\alpha}_0 + \lambda_0 + \eta_0$ резольвентой $(\alpha I - \hat{A})^{-1}$, которая представляет собой оператор, отображающий пространство H_0^0 в себя, и удовлетворяет оценке

$$\|(\alpha I - \hat{A})^{-1}\|_0 \leqslant (\alpha - \lambda_0 - \eta_0)^{-1}. \tag{19}$$

Доказательство. Справедливость этого утверждения с очевидностью вытекает из следствия 1, если учесть тот факт, что множества $D(A)$ и $\hat{H}_0^1$ оба плотны в H_0^0 по норме $\|\ \|_0$.

Мы видим теперь, что, согласно следствию 2 из гл. IX, § 7, $\hat{A}$ представляет собой инфинитезимальный производящий оператор некоторой полугруппы T_t класса (C_0) в B-пространстве H_0^0, для которой при значениях $t \geqslant 0$ выполняется неравенство $\|T_t\|_0 \leqslant e^{(\lambda_0+\eta_0)t}$.

Теперь может быть доказана

Теорема 1. Обозначим через $\hat{H}_0^1$ комплексное пространство всех комплексных функций $f \in C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \left(\int_{R^m} |f|^2 dx + \sum_{j=1}^{m} \int_{R^m} |f_{x_j}|^2 dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Пусть пространства $\widetilde{H}_0^1$ и $\widetilde{H}_0^0$ служат пополнениями комплексного пространства $\widehat{H}_0^1$ соответственно по нормам $\|f\|_1$ и $\|f\|_0$. Мы знаем, что $\widetilde{H}_0^1$ совпадает с комплексным пространством Соболева $W^1(R^m)$ (см. гл. I, § 10). Очевидно также, что $\widetilde{H}_0^0$ есть не что иное, как гильбертово пространство $L^2(R^m)$. Будем рассматривать A как оператор, действующий из области $D(A)=(\alpha I-A)^{-1}\widetilde{H}_0^1 \subseteq L^2(R^m)$ в $L^2(R^m)$. Тогда наименьшее замкнутое расширение $\widetilde{A}$ оператора A в пространстве $L^2(R^m)$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой голоморфной полугруппы T_t класса (C_0), определенной в $L^2(R^m)$, для которой при $t \geqslant 0$ справедлива оценка $\|T_t\|_0 \leqslant e^{(\lambda_0+\eta_0)t}$.

Доказательство. Из предыдущего следствия 2, учитывая вещественность коэффициентов дифференциального оператора A, мы заключаем, что область значений $R(\alpha I-A)=(\alpha I-A)D(A)$ плотна в пространстве $L^2(R^m)$ по норме $\|\ \|_0$ при значениях $\alpha>\widehat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$. Кроме того, если выбрать функцию $(u+iv)\in L^2(R^m)$ так, чтобы $(u+iv)\in D(A)$, то

$$\|(\alpha I-A)(u+iv)\|_0^2=\|(\alpha I-A)u\|_0^2+\|(\alpha I-A)v\|_0^2 \geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^2\left(\|u\|_0^2+\|v\|_0^2\right).$$

Поэтому обратный оператор $(\alpha I-\widetilde{A})^{-1}$ является ограниченным линейным оператором, отображающим $L^2(R^m)$ в себя, и при этом $\|(\alpha I-\widetilde{A})^{-1}\|_0 \leqslant(\alpha-\lambda_0-\eta_0)^{-1}$ для всех значений $\alpha>\widehat{\alpha}_0+\lambda_0+\eta_0$.

Отсюда мы видим, что, учитывая теорему гл. IX, § 10, нам достаточно лишь убедиться в том, что

$$\overline{\lim_{|\tau|\uparrow\infty}}\,|\tau|\,\|((\alpha+i\tau)I-\widetilde{A})^{-1}\|_0<\infty. \tag{20}$$

Для функций $w\in D(A)$ выполняется условие

$$\|((\alpha+i\tau)I-A)w\|_0\|w\|_0 \geqslant |(((\alpha+i\tau)I-A)w,\ w)_0|. \tag{21}$$

Интегрируя теперь по частям, мы, как и при выводе неравенства (17), находим, что

$$|\operatorname{Re}(((\alpha+i\tau)I-A)w,\ w)_0|=$$
$$=\Bigg||\alpha|\|w\|_0^2+\operatorname{Re}\Bigg(\int_{R^m}a^{ij}w_{x_i}\bar{w}_{x_j}\,dx+\int_{R^m}a^{ij}_{x_i}w_{x_j}\bar{w}\,dx-$$
$$-\int_{R^m}b^iw_{x_i}\bar{w}\,dx-\int_{R^m}cw\bar{w}\,dx\Bigg)\Bigg| \geqslant$$
$$\geqslant(\alpha-\lambda_0-\eta_0)\|w\|_0^2+(\lambda_0-m^2\eta\nu)\|w\|_1^2.$$

Точно так же мы получаем, что

$$|\operatorname{Im}(((\alpha+i\tau)I-A)w,\ w)_0| \geqslant \left||\tau|\|w\|_0^2-m^2\eta\left(\|w\|_1^2+m^{-2}\|w\|_0^2\right)\right| \geqslant$$
$$\geqslant(|\tau|-\eta)\|w\|_0^2-m^2\eta\|w\|_1^2.$$

Предположим, что найдется такой элемент $w_0 \in D(A)$, $\|w_0\|_0 \neq 0$, что

$$|\operatorname{Im}(((\alpha + i\tau)I - A)w_0, w_0)_0| < 2^{-1}(|\tau| - \eta)\|w_0\|_0^2$$

при достаточно больших τ (или достаточно больших значениях $-\tau$). Тогда для таких больших τ (или $-\tau$) должно выполняться неравенство

$$m^2\eta\|w_0\|_1^2 > 2^{-1}(|\tau| - \eta)\|w_0\|_0^2,$$

и поэтому

$$|\operatorname{Re}(((\alpha + i\tau)I - A)w_0, w_0)_0| \geqslant (\lambda_0 - m^2\eta\nu)\frac{(|\tau| - \eta)}{2m^2\eta}\|w_0\|_0^2.$$

Теперь мы видим, что утверждение теоремы 1 непосредственно следует из (21).

Теорема 2. При любой функции $f \in L^2(R^m)$ выражение $u(t, x) = (T_t f)(x)$ бесконечно дифференцируемо по t и x при $t > 0$ и $x \in R^m$, и функция $u(t, x)$ удовлетворяет уравнению диффузии (1) и начальному условию $\lim\limits_{t \downarrow 0}\|u(t, x) - f(x)\|_0 = 0$.

Доказательство. Обозначим k-ю сильную производную T_t в пространстве $L^2(R^m)$ по переменной t через $T_t^{(k)}$. Так как T_t — голоморфная полугруппа класса (C_0) в $L^2(R^m)$, то

$$T_t^{(k)}f = \tilde{A}^k T_t f \in L^2(R^m) \quad \text{при} \quad t > 0 \quad (k = 0, 1, \ldots).$$

Оператор $\tilde{A}$ служит наименьшим замкнутым расширением A в $L^2(R^m)$, и поэтому $A^k T_t f \in L^2(R^m)$ при всяком фиксированном $t > 0$ $(k = 0, 1, \ldots)$, если применять оператор A^k в смысле теории обобщенных функций. Поэтому, согласно следствию из теоремы Фридрихса (гл. VI, § 9), при всяком фиксированном значении $t > 0$ функция $u(t, x)$ совпадает с некоторой функцией класса $C^\infty(R^m)$, за исключением, быть может, значений на некотором множестве меры нуль.

Используя теперь оценку $\|T_t\|_0 \leqslant e^{(\lambda_0 + \eta_0)t}$, мы замечаем, что если применить эллиптический дифференциальный оператор

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + A\right)$$

(в смысле теории обобщенных функций) любое количество раз к функции $u(t, x)$, то полученная при этом функция будет локально интегрируема с квадратом в произведении пространств $\{t; 0 < t < \infty\} \times R^m$. Применяя следствие теоремы Фридрихса из гл. VI, § 9 еще раз, мы устанавливаем, что функция $u(t, x)$ совпадает с некоторой функцией класса C^∞ при $t > 0$ и $x \in R^m$ всюду, за исключением, быть может, некоторого множества точек (t, x) меры нуль в произведении пространств $\{t; 0 < t < \infty\} \times R^m$. Таким образом, мы можем рассматривать $u(t, x)$ в этом смысле как классическое решение уравнения (1), удовлетворяющее начальному условию $\lim\limits_{t \downarrow 0}\|u(t, x) - f(x)\|_0 = 0$.

Замечание. Построенное выше решение $u(t, x)$ обладает следующим свойством „единственности продолжения вперед и назад“:

$$\text{если } u(t_0, x) \equiv 0 \text{ на каком-то открытом множестве } G \subsetneqq R^m \text{ при некотором фиксированном } t_0 > 0, \text{ то } u(t, x) = 0 \text{ при всяком } t > 0 \text{ и } x \in G. \tag{22}$$

Доказательство. Из голоморфности полугруппы T_t класса (C_0) следует, что

$$\lim_{n \to \infty} \left\| T_{t_0+h} f - \sum_{k=0}^{n} (k!)^{-1} h^k A^k T_{t_0} f \right\|_0 = 0$$

при достаточно малых значениях h. Поэтому, как и при доказательстве полноты пространства $L^2(R^m)$, можно указать такую подпоследовательность $\{n'\}$ ряда натуральных чисел, что

$$u(t_0 + h, x) = \lim_{n' \to \infty} \sum_{k=0}^{n'} (k!)^{-1} h^k A^k u(t_0, x)$$

$$\text{при почти всех } x \in R^m.$$

Как следует из предположения (22), $A^k u(t_0, x) = 0$ в G, и поэтому $u(t_0 + h, x) = 0$ в области G при достаточно малых h. Повторяя это построение, мы и убеждаемся в справедливости утверждения (22).

Литература

Результаты этого раздела взяты из работы Иосида [21]. В отношении свойства „единственности продолжения вперед и назад“ справедливо более точное утверждение: $u(t, x) = 0$ при всяком $t > 0$ и любых $x \in R^m$. Это следует из результата Мизохата [3], который установил для решений $u(t, x)$ уравнения диффузии свойство „единственности продолжения по пространству“: если $u(t, x) = 0$ при всех $t > 0$ и $x \in G$, то $u(t, x) = 0$ при любых $t > 0$, $x \in R^m$. По поводу голоморфности полугруппы T_t, о которой говорилось выше, см. также Филлипс [6]. Заметим, что свойство единственности продолжения решений уравнения теплопроводности $\partial u / \partial t = \Delta u$ было впервые сформулировано и доказано Ямабе — С. Ито [1].

Существует весьма полное исследование параболических уравнений с помощью методов теории диссипативных операторов. См. по этому поводу Филлипс [7].

2. Интегрирование уравнения диффузии в бикомпактном римановом пространстве

Рассмотрим связное ориентированное m-мерное риманово пространство R класса C^∞ с метрикой

$$ds^2 = g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j. \tag{1}$$

Пусть A — некоторый линейный дифференциальный оператор в частных производных второго порядка с коэффициентами класса C^∞, определенный в R:

$$A = a^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + b^i(x)\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{2}$$

Допустим, что коэффициенты a^{ij} образуют симметричный контравариантный тензор, а величины $b^i(x)$ при преобразовании координат $(x^1, x^2, \ldots, x^m) \to (\overline{x}^1, \overline{x}^2, \ldots, \overline{x}^m)$ преобразуются по правилу

$$\overline{b}^i = b^k \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^k} + a^{kj}\frac{\partial^2 \overline{x}^i}{\partial x^k \partial x^j}, \tag{3}$$

так что значение $(Af)(x)$ определяется однозначно независимо от выбора локальных координат. Мы предположим также, что оператор A *строго эллиптичен* в том смысле, что существуют такие положительные постоянные λ_0 и μ_0, что

$$\mu_0 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \geqslant a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda_0 \sum_{j=1}^m \xi_j^2 \text{ для любого вещественного вектора } (\xi_1, \ldots, \xi_m) \text{ и любого } x \in R^m. \tag{4}$$

Исследуем в целом задачу Коши для уравнения диффузии в пространстве R: найти решение $u(t, x)$, удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au, \quad t > 0, \quad u(0, x) = f(x), \quad \text{где } f(x) \text{ — заданная функция на } R. \tag{5}$$

Докажем следующую теорему.

Теорема. Если R бикомпактно, так что его можно рассматривать как пространство без границы, то уравнение (5) при любой начальной функции $f \in C^\infty(R)$ допускает единственное решение $u(t, x)$, принадлежащее классу C^∞ по переменным (t, x), $t > 0$, $x \in R$. Это решение можно представить в виде

$$u(t, x) = \int_R P(t, x, dy) f(y), \tag{6}$$

где $P(t, x, E)$ — переходная функция некоторого определенного в R марковского процесса.

Доказательство. Обозначим через $C(R)$ B-пространство вещественных непрерывных функций $f(x)$, заданных на R, с нормой $\|f\| = \sup_x |f(x)|$. Покажем сначала, что

$$\text{при любых } f \in C^\infty(R) \text{ и } n > 0 \quad \max_x h(x) \geqslant f(x) \geqslant \min_x h(x), \quad \text{где } h(x) = f(x) - n^{-1}(Af)(x). \tag{7}$$

Пусть функция $f(x)$ достигает максимума в точке $x = x_0$. Выберем локальную систему координат в точке x_0 так, чтобы $a^{ij}(x_0) = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$). Благодаря условию (4) такой выбор действительно возможен. Тогда

$$h(x_0) = f(x_0) - n^{-1}(Af)(x_0) =$$
$$= f(x_0) - n^{-1}b^i(x_0)\frac{\partial f}{\partial x_0^i} - n^{-1}\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2 f}{\partial\left(x_0^i\right)^2} \geqslant f(x_0),$$

поскольку в x_0 как в точке максимума

$$\frac{\partial f}{\partial x_0^i} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial\left(x_0^i\right)^2} \leqslant 0.$$

Таким образом, $\max_x h(x) \geqslant f(x)$. Аналогично можно показать, что $f(x) \geqslant \min_x h(x)$.

Будем теперь рассматривать A как оператор, действующий из $D(A) = C^\infty(R) \subseteq C(R)$ в $C(R)$. Из (7) видно, что обратный оператор $(I - n^{-1}A)^{-1}$ существует при $n > 0$ и $\|(I - n^{-1}A)^{-1}g\| \leqslant \|g\|$ для элементов g из области значений $R(I - n^{-1}A) = (I - n^{-1}A)D(A)$. При достаточно больших n эта область значений сильно плотна в $C(R)$, так как из результатов предыдущего параграфа следует, что для любой функции $g \in C^\infty(R)$ и достаточно больших $n > 0$ уравнение $u - n^{-1}Au = g$ обладает единственным решением $u \in C^\infty(R)$. Действительно, ввиду бикомпактности R к рассматриваемому риманову пространству R без границы можно применить лемму 1 об интегрировании по частям. Далее $C^\infty(R)$ сильно плотно в $C(R)$ — это можно установить, применяя к функциям из $C(R)$ методы, указанные в предложении 8, гл. I, § 1.

Отсюда следует, что наименьшее замкнутое расширение $\bar{A}$ оператора A в $C(R)$ удовлетворяет следующим условиям:

резольвента $(I - n^{-1}\bar{A})^{-1}$ определена при достаточно больших $n > 0$ как ограниченный линейный оператор, отображающий $C(R)$ в себя; (8)

на пространстве R во всех точках, где $h(x) \geqslant 0$, выполняется неравенство $\left((I - n^{-1}\bar{A})^{-1}h\right)(x) \geqslant 0$; (9)

$$(I - n^{-1}\bar{A})^{-1} \cdot 1 = 1. \tag{10}$$

Положительность оператора $(I - n^{-1}\bar{A})^{-1}$, указанная в (9), следует из (7). Уравнение (10) вытекает из того, что $A \cdot 1 = 0$.

Следовательно, $\bar{A}$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой сжимающей полугруппы T_t класса (C_0), определенной на $C(R)$. Как и в предыдущем параграфе, можно показать, что из строгой эллиптичности оператора A вытекает, что при любой функции $f \in C^\infty(R)$ выражение $u(t, x) = (T_t f)(x)$ определяет функцию класса C^∞ по переменным (t, x) при $t > 0$ и $x \in R$, так что $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (5).

Пространством, сопряженным к $C(R)$, служит пространство бэровских мер на R, откуда легко с учетом (9) и (10) выводится заключительное утверждение теоремы.

3. Интегрирование волнового уравнения в евклидовом пространстве R^m

Рассмотрим волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Au, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор

$$A = a^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x) \qquad (a^{ij}(x) = a^{ji}(x)) \tag{2}$$

строго эллиптичен в m-мерном евклидовом пространстве R^m. Допустим, что коэффициенты a^{ij}, b^i и c вещественны, принадлежат C^∞ и удовлетворяют требованиям (3) и (4), гл. IV, § 1. Как и ранее, обозначим через $\hat{H}_0^1$ пространство всех вещественных функций $f(x)$ из $C_0^\infty(R^m)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \left(\int_{R^m} f^2\, dx + \sum_{j=1}^m \int_{R^m} f_{x_j}^2\, dx \right)^{1/2},$$

и пусть H_0^1 и H_0^0 — пополнения $\hat{H}_0^1$ соответственно по нормам $\|f\|_1$ и $\|f\|_0$ $\left(\|f\|_0 = \left(\int_{R^m} f^2\, dx \right)^{1/2} \right)$.

Лемма. Для любой пары элементов $\{f, g\}$ из $\hat{H}_0^1$ уравнение

$$\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} - n^{-1} \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \tag{3}$$

имеет при всяком целом n, таком, что $|n^{-1}|$ достаточно мало, единственное решение $\{u, v\}$, $u, v \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$, удовлетворяющее оценке

$$((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0 (v, v)_0)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant (1 - \beta |n|^{-1})^{-1} ((f - \alpha_0 Af, f)_0 + \alpha_0 (g, g)_0)^{1/2}, \tag{4}$$

где α_0 и β — не зависящие от n и $\{f, g\}$ положительные постоянные.

Доказательство. Пусть $u_1 \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ и $v_1 \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$ — решения соответственно уравнений

$$u_1 - n^{-2}Au_1 = f \quad \text{и} \quad v_1 - n^{-2}Av_1 = g. \tag{5}$$

Существование таких решений при достаточно малых значениях $|n^{-1}|$ было доказано в лемме 2, гл. XIV, § 1. Тогда функции

$$u = u_1 + n^{-1}v_1, \qquad v = n^{-1}Au_1 + v_1 \tag{6}$$

удовлетворяют (3), т. е. $u - n^{-1}v = f$, $v - n^{-1}Au = g$.

Докажем теперь (4). Заметим, что $Au = n(v - g) \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m) \subseteq H_0^0$, и поэтому, ввиду того что $f, g \in C_0^\infty(R^m)$, имеем $Av = n(Au - Af) \in \in H_0^1 \cap C^\infty(R^m) \subseteq H_0^0$. Отсюда вследствие (3)

$$\begin{aligned}(f - \alpha_0 Af, f)_0 &= (u - n^{-1}v - \alpha_0 A(u - n^{-1}v), u - n^{-1}v)_0 = \\ &= (u - \alpha_0 Au, u)_0 - 2n^{-1}(u, v)_0 + \alpha_0 n^{-1}(Au, v)_0 + \\ &\quad + \alpha_0 n^{-1}(Av, u)_0 + n^{-2}(v - \alpha_0 Av, v)_0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\alpha_0(g, g)_0 &= \alpha_0(v - n^{-1}Au, v - n^{-1}Au)_0 = \\ &= \alpha_0(v, v)_0 - \alpha_0 n^{-1}(v, Au)_0 - \alpha_0 n^{-1}(Au, v)_0 + \alpha_0 n^{-2}(Au, Au)_0.\end{aligned}$$

Теперь мы можем, применяя предельный переход, доказать, что условия (9), (10) и (11) из гл. XIV, § 1 выполняются для $f = u$ и $g = v$. Следовательно, согласно неравенству (12) из гл. XIV, § 1, найдется такая положительная постоянная β, что

$$\begin{aligned}&((f - \alpha_0 Af, f)_0 + \alpha_0(g, g)_0)^{1/2} \geqslant \\ &\geqslant ((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0(v, v)_0 - \alpha_0|n^{-1}||(Au, v)_0 - (Av, u)_0| - \\ &\qquad - 2|n^{-1}||(u, v)_0|^{1/2} \geqslant \\ &\geqslant (1 - \beta|n^{-1}|)((u - \alpha_0 Au, u)_0 + \alpha_0(v, v)_0)^{1/2}\end{aligned}$$

при достаточно больших $|n|$.

Полученная выше оценка для решений $\{u, v\}$, принадлежащих $H_0^1 \cap C^\infty(R^m)$, показывает, что эти решения однозначно определяются выбором $\{f, g\}$.

Следствие. Произведение пространств $H_0^1 \times H_0^0$, элементами которого служат векторы

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \{u, v\}', \quad \text{где} \quad u \in H_0^1, \ v \in H_0^0, \tag{7}$$

образует B-пространство с нормой

$$\left\| \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\| = \| \{u, v\}' \| = (B(u, u) + \alpha_0(v, v)_0)^{1/2}, \tag{8}$$

где $B(f, g)$ — продолжение по непрерывности относительно нормы $\| \; \|_1$ билинейного функционала

$$\hat{B}(f, g) = (f - \alpha_0 Af, g)_0,$$

определенного при $f, g \in \hat{H}_0^1$. Мы знаем, что выражение $B(u, u)^{1/2}$ эквивалентно норме $\|u\|_1$ (см. гл. XIV, § 1):

$$\alpha_0\delta\|u\|_1^2 \leqslant B(u, u) \leqslant (1 + \alpha_0\gamma)\|u\|_1^2. \tag{9}$$

Будем рассматривать в качестве области определения $D(\mathfrak{A})$ оператора

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

совокупность векторов $\{u, v\}' \in H_0^1 \times H_0^0$, таких, что элементы $u, v \in H_0^0$ выражаются формулами (6). Тогда доказанная выше лемма говорит о том, что область значений оператора

$$\mathfrak{J} - n^{-1}\mathfrak{A}, \quad \text{где} \quad \mathfrak{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

содержит все векторы вида $\{f, g\}'$, у которых $f, g \in \hat{H}_0^1$. Поэтому наименьшее замкнутое расширение $\overline{\mathfrak{A}}$ оператора $\mathfrak{A}$ в пространстве $H_0^1 \times H_0^0$ обладает тем свойством, что оператор $(\mathfrak{J} - n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})$ с целочисленным параметром n допускает при достаточно больших $|n|$ обращение $(\mathfrak{J} - n^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}$, определенное всюду в $H_0^1 \times H_0^0$ и удовлетворяющее неравенству

$$\|(\mathfrak{J} - u^{-1}\overline{\mathfrak{A}})^{-1}\| \leqslant (1 - \beta|n^{-1}|)^{-1}. \tag{11}$$

Теперь может быть доказана

Теорема. Для любой пары функций $\{f(x), g(x)\}$ из $C_0^\infty(R^m)$ уравнение (1) обладает решением $u(t, x)$ класса C^∞, которое удовлетворяет начальным условиям

$$u(0, x) = f(x), \qquad u_t(0, x) = g(x) \tag{12}$$

и оценке

$$(B(u, u) + \alpha_0(u_t, u_t)_0)^{1/2} \leqslant \exp(\beta|t|)(B(f, f) + \alpha_0(g, g)_0)^{1/2}. \tag{13}$$

Замечание. Формула (9) показывает, что $B(u, u)$ играет роль энергии волны — решения $u(t, x)$ уравнения (1), а величину $(u_t, u_t)_0$ можно рассматривать как кинетическую энергию волны $u(t, x)$. Таким образом, (13) выражает тот факт, что полная энергия волны возрастает не быстрее, чем $\exp(\beta|t|)$, когда $t \to \pm\infty$. Такая *энергетическая оценка* вообще характерна для волновых уравнений.

Доказательство теоремы. Оценка (11) показывает, что $\overline{\mathfrak{A}}$ служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой *группы* T_t класса (C_0) в $H_0^1 \times H_0^0$, которая удовлетворяет условию

$$\|T_t\| \leqslant \exp(\beta|t|), \quad -\infty < t < \infty. \tag{14}$$

По предположению для значений $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\overline{\mathfrak{A}}^k \binom{f}{g} = \mathfrak{A}^k \binom{f}{g} \in C_0^\infty(R^m) \times C_0^\infty(R^m) \subseteq H_0^1 \times H_0^0.$$

Поэтому если положить

$$\binom{u(t, x)}{v(t, x)} = T_t \binom{f(x)}{g(x)},$$

то ввиду перестановочности $\overline{\mathfrak{A}}$ с T_t мы получаем

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}\binom{u(t, x)}{v(t, x)} = \frac{\partial^k T_t}{\partial t^k}\binom{f(x)}{g(x)} = \overline{\mathfrak{A}}^k \binom{u(t, x)}{v(t, x)} \in H_0^1 \times H_0^0$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Здесь через $\partial^k T_t/\partial t^k$ мы обозначаем k-ю сильную производную в пространстве $H_0^1 \times H_0^0$. Учитывая теперь строгую эллиптичность оператора A и то, что $H_0^1 \subseteq H_0^0 = L^2(R^m)$, мы, как и при доказательстве теоремы 2 гл. XIV, § 1, заключаем, что $u(t, x)$ принадлежит по переменным (t, x) при $-\infty < t < \infty$ и $x \in R^m$ классу C^∞ и удовлетворяет уравнению (1) с начальными условиями (12) и оценке (13).

Замечание. Результат, изложенный в этом разделе, взят из работы Иосида [22]. Ср. с работой Лионса [1]. П. Лакс любезно сообщил автору, что метод интегрирования, приведенный в этом разделе, весьма сходен с его методом, указанным в Abstract 180, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **58** (1952), 192. Отметим, что наш метод может быть также модифицирован для интегрирования волнового уравнения в открытой области риманова пространства. Существует и другой подход к интегрированию волновых уравнений, основанный на теории диссипативных полугрупп. По этому поводу см. Филлипс [8] и [9]. Последний метод тесно связан с развитой Фридрихсом [2] теорией симметричных положительных систем. Ср. также Лакс — Филлипс [3].

4. Интегрирование неоднородных во времени эволюционных уравнений в рефлексивном B-пространстве

Обратимся к задаче интегрирования уравнения вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)\,x(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{1}$$

Здесь неизвестная функция $x(t)$ рассматривается как элемент некоторого B-пространства X, зависящий от вещественного параметра t, а $A(t)$ — заданный, вообще говоря, неограниченный линейный оператор с областями определения $D(A(t))$ и значений $R(A(t))$, лежащими в X, которые также могут зависеть от t.

В работах Като [3], [4] была предпринята первая успешная попытка решения задачи об интегрировании уравнения (1). Т. Като ввел следующие предположения:

1. Область определения $D(A(t))$ не зависит от t и сильно плотна в X, и при $\alpha > 0$ существует резольвента $(I - \alpha A(t))^{-1}$ как ограниченный линейный оператор из $L(X, X)$ с нормой, не превосходящей 1.

2. Оператор $B(t, s) = (I - A(t))(I - A(s))^{-1}$ равномерно ограничен по норме при $t \gtreqless s$.

3. Хотя бы при одном значении s функция $B(t, s)$ имеет по t ограниченную по норме вариацию, т. е. для всякого разбиения сегмента $[a, b]$ вида $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$

$$\sum_{j=0}^{n-1} \| B(t_{j+1}, s) - B(t_j, s) \| \leqslant N(a, b) < \infty.$$

4. Хотя бы при одном значении s функция $B(t, s)$ слабо дифференцируема по t и слабая производная $\dfrac{\partial B(t, s)}{\partial t}$ сильно непрерывна по t.

При указанных условиях Т. Като доказал, что предел

$$U(t, s)x_0 = \underset{\max|t_{j+1} - t_j| \to 0}{s\text{-}\lim} \prod_{j=n-1}^{0} \exp((t_{j+1} - t_j) A(t_j)) x_0$$

существует при всех $x_0 \in X$ и дает единственное решение (1) с начальным значением $x(s) = x_0$ по крайней мере при всех $x_0 \in D(A(s))$.

Метод Като представляет собой по существу абстрактное обобщение классического метода ломаных для обыкновенных дифференциальных уравнений $\dfrac{dx(t)}{dt} = a(t)x(t)$. Этот прием весьма прост и естествен по идее, но соответствующее доказательство довольно громоздко, так как рассматривается B-пространство общего типа. Като [3] показал, что его доказательство упрощается для случая рефлексивного B-пространства.

Другой метод интегрирования уравнения (1) был предложен Лионсом [2]. Он предположил, что $A(t)$ — эллиптический дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами, зависящими от t, и построил обобщенное решение $x(t)$, преобразуя уравнение (1) к интегральной форме в конкретных функциональных пространствах, таких, как пространство Соболева $W^{k,2}(\Omega)$ и некоторые его видоизменения.

Мы не приводим здесь детали исследований Като и Лионса, их можно найти в оригинальных работах Като [3], [4] и Лионса [2]. Мы отсылаем читателя также к статье Ладыженской — Вишика [1], в которой используется идея, аналогичная методу Лионса. Заметим, что цитированная книга Лионса содержит весьма полный список литературы (вплоть до 1961 г.), относящейся к интегрированию эволюционных уравнений.

В этом разделе мы изложим метод интегрирования уравнения (1), опирающийся на некоторую лемму единственности и свойство секвенциальной слабой компактности ограниченных множеств рефлексивного B-пространства. Наша основная идея может быть описана следующим образом.

Если оператор $A(t)=A$ не зависит от t и A служит инфинитезимальным производящим оператором некоторой полугруппы T_t класса (C_0) в X, то решение $x(t)$ уравнения

$$\frac{dx(t)}{dt}=Ax(t), \qquad a\leqslant t\leqslant b, \quad x(a)=x_0\in D(A), \tag{2}$$

где $D(A)$ — область определения A, выражается формулой

$$x(t)=T_t\cdot x_0=\exp((t-a)A)x_0=s\text{-}\lim_{n\to\infty}\exp((t-a)A_n)x_0, \tag{3}$$

где $A_n=A(I-n^{-1}A)^{-1}$. Исходя из аналогии с этим случаем, когда A не зависит от времени, предположим, что при наличии зависимости от t оператор $A(t)$ подчиняется следующим двум ограничениям:

$$\begin{gathered}A \text{ при } a\leqslant t\leqslant b \text{ является замкнутым линейным опера-}\\ \text{тором с плотными областью определения } D(A(t))\subseteq X\\ \text{и областью значений } R(A(t))\subseteq X, \text{ причем при } \lambda\geqslant 0\\ \text{существует резольвента } (\lambda I-A(t))^{-1}, \text{ удовлетворяющая}\\ \text{при } \lambda\geqslant M \text{ неравенству } \left\|\left(I-\lambda^{-1}A(t)\right)^{-1}\right\|\leqslant\left(1-\lambda^{-1}M\right)^{-1},\\ \text{где } M \text{ не зависит от } \lambda \text{ и } t,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\begin{gathered}\text{сильная производная } dA(t)^{-1}/dt=B(t) \text{ также суще-}\\ \text{ствует и сильно непрерывна по } t \text{ при } a\leqslant t\leqslant b.\end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим теперь следующую задачу с начальными условиями:

$$dx_n(t)/dt=A_n(t)x_n(t), \ a\leqslant t\leqslant b, \ x_n(a)=A(a)^{-1}y, \tag{6}$$

где y — произвольный элемент из X и $A_n(t)=A(t)(I-n^{-1}A(t))^{-1}=$ $=n(J_n(t)-I)$, $J_n(t)=(I-n^{-1}A(t))^{-1}$. Из (5) следует, что резольвента $J_n(t)$ сильно непрерывно дифференцируема по t, и поэтому $J_n(t)$ равномерно непрерывна по t в операторной норме. Следовательно, задача (6) допускает единственное решение $x_n(t)$, которое, например, можно получить последовательными приближениями, принимая за первое приближение $\exp((t-a)A_n(a))A(a)^{-1}y$. Мы приходим, таким образом, к вопросу об отыскании условий, при которых последовательность $\{x_n(t)\}$ сходится слабо или сильно к решению $x(t)$ задачи с начальными значениями вида

$$dx(t)/dt = A(t)x(t), \quad a \leqslant t \leqslant b, \quad x(a) = A(a)^{-1}y. \tag{1'}$$

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы для некоторых частных случаев получить ответ на этот вопрос.

Лемма. Если решение (1′) существует, то оно должно удовлетворять неравенству вида

$$\|x(t)\| \leqslant \|x(a)\| \cdot \exp((t-a)M). \tag{7}$$

Доказательство. Мы следуем здесь рассуждениям, основная идея которых использовалась Като [3]. При $\delta > 0$

$$\begin{aligned} x(t+\delta) &= x(t) + \delta A(t)x(t) + o(\delta) = \\ &= (I+\delta A(t))(I-\delta A(t))(I-\delta A(t))^{-1}x(t) + o(\delta) = \\ &= (I-\delta A(t))^{-1}x(t) - \delta^2 A(t)(I-\delta A(t))^{-1}A(t)x(t) + o(\delta) = \\ &= (I-\delta A(t))^{-1}x(t) - \delta((I-\delta A(t))^{-1} - I)A(t)x(t) + o(\delta). \end{aligned}$$

Из (4) следует, что $s\text{-}\lim_{\delta\downarrow 0}(I-\delta A(t))^{-1}z = z$ при любом $z \in X$ (см. (2) в § 7 гл. IX). Поэтому из оценки (4) мы получаем

$$\|x(t+\delta)\| \leqslant (1-\delta M)^{-1}\|x(t)\| + o(\delta),$$

и, следовательно, $d^+\|x(t)\|/dt \leqslant M\|x(t)\|$. Это и доказывает лемму.

Теорема 1. Допустим, что X — рефлексивное B-пространство, тогда всякая ограниченная последовательность из X содержит слабо сходящуюся к некоторому элементу из X подпоследовательность. Кроме (4) и (5), потребуем также, чтобы выражение

$$A(t)B(t) = A(t)\left[dA(t)^{-1}/dt\right] \text{ было сильно непрерывным по } t. \tag{8}$$

Тогда существует единственное решение $x(t)$ задачи (1′) и $x(t) = w\text{-}\lim_{n\to\infty} x_n(t)$.

Доказательство. Так как $A_n(t) = n(J_n(t) - I)$ и $\|J_n(t)\| \leqslant (1-n^{-1}M)^{-1}$, то при $\delta > 0$ и $n > M$

$$\begin{aligned} &\|(I-\delta A_n(t))x\| = \|(I-\delta n(J_n(t)-I))x\| \geqslant \\ &\geqslant (1+n\delta)\|x\| - \delta n(1-n^{-1}M)^{-1}\|x\| = (1-\delta M(1-n^{-1}M)^{-1})\|x\|. \end{aligned}$$

Поэтому для достаточно малых $\delta > 0$ существует ограниченное обращение $(I-\delta A_n(t))^{-1}$, удовлетворяющее оценке $\|(I-\delta A_n(t))^{-1}\| \leqslant$

$\leqslant (1 - \delta M(1 - n^{-1}M)^{-1}$. Отсюда, учитывая доказанную лемму, мы видим, что решение $x_n(t)$ задачи (6) удовлетворяет условию

$$\|x_n(t)\| \leqslant \|x_n(a)\| \cdot \exp((t-a)M_1), \quad M_1 \geqslant M(1-n^{-1}M)^{-1}. \tag{9}$$

Таким образом, $x_n(t)$ однозначно определяется начальным условием $x_n(a) = A(a)^{-1}y$, и мы можем положить

$$x_n(t) = U_n(t, a)\, x_n(a) = U_n(t, a)\, A(a)^{-1} y,$$

где

$$\|U_n(t, a)\| \leqslant \exp((t \quad a)M_1). \tag{10}$$

Положим теперь

$$y_n(t) = A_n(t)\, U_n(t, a)\, A(a)^{-1} y = A_n(t)\, x_n(t) = dx_n(t)/dt. \tag{11}$$

Из (5) следует, что оператор $A_n(t)$ сильно непрерывно дифференцируем по t и

$$dA_n(t)/dt = -A_n(t)\, B(t)\, A_n(t), \tag{12}$$

так как

$$\delta^{-1}(A_n(1+\delta) - A_n(t)) = -A_n(t+\delta)\{[A_n(t+\delta)^{-1} - A_n(t)^{-1}]/\delta\}A_n(t),$$
$$A_n(t)^{-1} = A(t)^{-1} - n^{-1}I.$$

Поэтому $y_n(t)$ служит решением задачи с начальным условием вида

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = A_n(t)\, y_n(t) - A_n(t)\, B(t)\, y_n(t), \quad a \leqslant t \leqslant b,$$
$$y_n(a) = J_n(a)\, y. \tag{13}$$

Учитывая (8), мы заключаем, что выражение $A_n(t)\, B(t) = J_n(t)\, A(t)\, B(t)$ сильно непрерывно по t, и поэтому ввиду (4) равномерно ограничено по t и n. Следовательно,

$$\|A_n(t)\, B(t)\| \leqslant C \text{ при } a \leqslant t \leqslant b \text{ и } n > M \quad (C < \infty). \tag{14}$$

При $\delta > 0$ имеем $y_n(t+\delta) = y_n(t) + \delta A_n(t)\, y(t) - \delta A_n(t)\, B(t)\, y_n(t) + o(\delta)$. Отсюда, как и при доказательстве леммы, мы получаем

$$d^+ \|y_n(t)\|/dt \leqslant (M_1 + C)\|y_n(t)\|,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \|y_n(t)\| &\leqslant \|y_n(a)\| \exp((t-a)(M+C)) = \\ &= \|J_n(a)\, y\| \cdot \exp((t-a)(M_1+C)) \leqslant \\ &\leqslant (1 - n^{-1}M)^{-1} \exp((t-a)(M_1+C))\|y\|. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда, поскольку $dx_n(t)/dt = y_n(t)$, мы видим, что функция $x_n(t)$ ограничена и сильно непрерывна по t равномерно относительно t и n. Из рефлексивности X теперь следует, что найдется такая подпоследовательность $\{n'\}$ натурального ряда $\{n\}$, что одновременно для всех $t \in [a, b]$ существует слабый предел $w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} x_{n'}(t) = x(t)$.

Покажем теперь, что

$$x(t) \in D(A(t)) \quad \text{и функция} \quad A(t)\,x(t) = w\text{-}\lim_{n' \to \infty} A_{n'}(t)\,x_{n'}(t) \quad (16)$$
ограничена и сильно измерима по t.

Для этого мы сначала докажем, что $A(t)\,x(t)$ сильно непрерывна по t. В приводимом ниже доказательстве мы используем тот факт, что для сопряженных операторов (см. теорему 1 из гл. VIII, § 6) имеют место соотношения

$$\begin{gathered} J_n(t)' = \left(\left(I - n^{-1}A(t)\right)^{-1}\right)' = \left(I' - n^{-1}A(t)'\right)^{-1}, \\ \left(A(t)^{-1}\right)' = \left(A(t)'\right)^{-1}. \end{gathered} \tag{17}$$

Так как X рефлексивно, то, как будет показано ниже, $D(A(t)')$ сильно плотно в сопряженном пространстве X'. Поэтому из неравенства $\|J_n(t)'\| \leqslant \left(1 - n^{-1}M\right)^{-1}$, которое следует из (4) и (17), вытекает, что $s\text{-}\lim\limits_{n \to \infty} J_n(t)'f' = f'$ при любом $f' \in X'$. Следовательно, поскольку $w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} x_{n'}(t) = x(t)$, мы приходим к тому, что

$$w\text{-}\lim_{n' \to \infty} J_{n'}(t)\,x_{n'}(t) = x(t). \tag{18}$$

Соотношения (17) показывают, что

$$\langle A(t)\,J_n(t)\,x_n(t),\ \left(A(t)^{-1}\right)'f' \rangle = \langle J_n(t)\,x_n(t),\ f' \rangle,$$

и поэтому ввиду (18)

$$\lim_{n \to \infty} \langle A(t)\,J_{n'}(t)\,x_{n'}(t),\ \left(A(t)^{-1}\right)' f' \rangle = \langle x(t),\ f' \rangle. \tag{19}$$

Теперь из (17) мы выводим, что область значений $R\left(\left(A(t)^{-1}\right)'\right) = D(A(t)')$ сильно плотна в X'. Действительно, если допустить противное, то рефлексивность X гарантирует существование такого элемента $w_0 \in X$, $w_0 \neq 0$, что $0 = \langle w_0,\ \left(A(t)^{-1}\right)'f' \rangle = \langle A(t)^{-1}w_0,\ f' \rangle$. Отсюда следует, что $A(t)^{-1}w_0 = 0$, т. е. $w_0 = 0$, что противоречит сделанным допущениям. Поэтому, поскольку функция $y_n(t) = A_n(t)\,x_n(t)$ ограничена по t и n, мы заключаем, что должен существовать слабый предел $w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} A_{n'}(t)\,x_{n'}(t) = u(t)$. Из (19) видно, что $\langle u(t),\ \left(A(t)^{-1}\right)'f' \rangle = \langle x(t),\ f' \rangle$, так что $A(t)^{-1}u(t) = x(t)$.

Из сильной непрерывности $A_n(t)\,x_n(t)$ по t следует, что замыкание множества $\{A_n(t)\,x_n(t);\ a \leqslant t \leqslant b,\ n = 1, 2, \ldots\}$ сепарабельно, и поэтому из слабой измеримости $u(t) = w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} A_{n'}(t)\, x_{n'}(t)$ по t, согласно теореме Петтиса из гл. V, § 4, вытекает сильная измеримость. Чтобы доказать, что $u(t)$ сильно непрерывно по t, перепишем (13) в интегральной форме

$$y_n(t) = U_n(t, a)\, y_n(a) - \int\limits_a^t U_n(t, s)\, A_n(s)\, B(s)\, y_n(s)\, ds. \tag{20}$$

Второй член в правой части (20) равномерно относительно t и n сильно непрерывен по t — это следует из (10), (14) и ограниченности $y_n(t)$ по t и n. Первый член в правой части $U_n(t, a)\, y_n(a)$ будет сильно непрерывным по t равномерно относительно t и n, если выражение $A_n(a)\, y_n(a) = A(a)\, J_n(a)\, J_n(a)\, y$ окажется ограниченным по n. Последнее легко устанавливается способом, который был использован выше при доказательстве сильной непрерывности по t функции $x_n(t) = U_n(t, a)\, x_n(a)$. Но $A_n(a)\, y_n(a) = A(a)\, J_n(a)\, J_n(a)\, y$ ограничено по n, если y принадлежит области $D(A(a))$ определения оператора $A(a)$, которая сильно плотна в X. Отсюда на основании леммы мы заключаем, что первый член в правой части (20) сильно непрерывен по t равномерно относительно t и n при всяком $y \in X$. Итак, функция $y_n(t)$ сильно непрерывна по t равномерно относительно t и n. Это показывает, что слабый предел $u(t) = A(t)\, x(t) = w\text{-}\lim\limits_{n' \to \infty} y_{n'}(t)$ сильно непрерывен по t. Далее, устремляя $n' \to \infty$ в соотношении

$$x_{n'}(t) = x_{n'}(a) + \int\limits_a^t A_{n'}(s)\, x_{n'}(s)\, ds = A(a)^{-1} y + \int\limits_a^t A_{n'}(s)\, x_{n'}(s)\, ds,$$

мы находим, что

$$x(t) = A(a)^{-1} y + \int\limits_a^t A(s)\, x(s)\, ds. \tag{21}$$

Поэтому ввиду сильной непрерывности $u(t) = A(t)\, x(t)$ по t уравнение (1) удовлетворяется. Поскольку решение $x(t)$, согласно лемме, однозначно определяется начальным значением $x(a)$, мы видим, что сама последовательность $\{x_n(t)\}$ должна слабо сходиться к $x(t)$.

Замечание. Приведенный выше результат взят из работы Иосида [28]. Как указал автору Т. Като, из нашего условия (8) следует, что область определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ не зависит от t. Действительно, положим $A(t)\left(dA(t)^{-1}/dt\right) = C(t)$ и пусть $W(t)$—решение уравнения $dW/dt = -C(t)\, W(t)$ с условием $W(a) = I$. Тогда

$$d\left(A(t)^{-1} W(t)\right)/dt = A(t)^{-1} C(t)\, W(t) - A(t)^{-1} C(t)\, W(t) = 0,$$

и поэтому

$$A(a)^{-1}W(a)=A(a)^{-1}=A(t)^{-1}W(t).$$

Это и показывает, что область $D(A(t))=R\left(A(t)^{-1}\right)$ не зависит от t.

Теорема 2. Пусть X — гильбертово пространство. Предположим, что, кроме (4) и (5), $A(t)$ удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

оператор $A(t)$ — самосопряженный и
$$(A(t)x,\ x)\leqslant -\|x\|^2 \text{ при } x\in D(A(t)), \tag{22}$$
существует такая постоянная α, $2^{-1}\leqslant\alpha\leqslant 1$, что функция $(-A(t))^{\alpha}B(t)$ ограничена по t по операторной норме. (23)

Спектральное разложение $A(t)=\int\limits_{-\infty}^{-1}\lambda\,dE_t(\lambda)$ позволяет определить здесь с помощью формулы

$$(-A(t))^{\alpha}=\int\limits_{-\infty}^{-1}(-\lambda)^{\alpha}\,dE_t(\lambda) \tag{24}$$

дробную степень $(-A(t))^{\alpha}$.

При этих условиях последовательность $\{x_n(t)\}$ слабо сходится к единственным образом определенному сильно непрерывному решению интегрального уравнения (21).

Доказательство. Доказательство теоремы 1 показывает, что нам нужно лишь убедиться в равномерной ограниченности $\{y_n(t)\}$ по t и n.

Воспользуемся равенством

$$\frac{d}{dt}\|y_n(t)\|^2=2\,\mathrm{Re}\left(\frac{dy_n(t)}{dt},\ y_n(t)\right)=2\,\mathrm{Re}(A_n(t)y_n(t),\ y_n(t))-$$
$$-2\,\mathrm{Re}(A_n(t)B(t)y_n(t),\ y_n(t)). \tag{25}$$

Так как оператор $-A_n(t)=-A(t)(I-n^{-1}A(t))^{-1}$ самосопряжен и, так же как и $-A(t)$, неотрицателен, неравенство Шварца приводит к условию

$$|\mathrm{Re}(A_n(t)B(t)x,\ x)|\leqslant\left|\left((-A_n(t))^{\alpha}B(t)x,\ (-A_n(t))^{1-\alpha}x\right)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left\|(-A_n(t))^{\alpha}B(t)x\right\|\cdot\|(-A_n(t))^{1-\alpha}x\|\leqslant$$
$$\leqslant 2^{-1}\varepsilon\left\|(-A_n(t))^{\alpha}B(t)x\right\|^2+2^{-1}\varepsilon^{-1}\left\|(-A_n(t))^{1-\alpha}x\right\|^2,$$

которое справедливо при любом $\varepsilon>0$. Так как

$$A_n(t)=A(t)J_n(t)=\int\limits_{-\infty}^{-1}\lambda(1-n^{-1}\lambda)^{-1}\,dE_t(\lambda),$$

спектр $-A_n(t)$ лежит в интервале $\left[(1-\alpha^{-1})^{-1}, \infty\right)$. А так как $2^{-1} \leqslant \alpha \leqslant 1$, мы видим, что если значение $\varepsilon > 0$ выбрано соответствующим образом, то при всех t и n

$$2^{-1}\varepsilon^{-1}\left\|(-A_n(t))^{1-\alpha}x\right\|^2 \leqslant \left\|(-A_n(t))^{1/2}x\right\|^2 = (-A_n(t)x, x).$$

Отсюда мы заключаем на основании (22) и (23), что правая часть (25) меньше, чем

$$2^{-1}\varepsilon\left\|(-A_n(t))^{\alpha}B(t)y_n(t)\right\|^2 =$$
$$= 2^{-1}\varepsilon\left\|J_n(t)^{\alpha}(-A(t))^{\alpha}B(t)y_n(t)\right\|^2 \leqslant K\|y_n(t)\|^2,$$

где K не зависит от t и n.

Следовательно, $\|y_n(t)\| \leqslant \|y_n(a)\| \cdot \exp\left((t-a)K^{1/2}\right)$, и поэтому функция $y_n(t)$ ограничена по t и n.

Замечание. Пусть $X = L^2(0, 1)$ и $A(t)$ — оператор умножения на $-\left(1+|t-s|^{-\beta}\right)$ в пространстве $L^2(0, 1)$:

$$A(t)x(s) = -\left(1+|t-s|^{-\beta}\right)x(s).$$

Если $\beta \geqslant 2$, то, выбирая $\alpha \geqslant 1/2$ так, чтобы $\beta(1-\alpha)-1 \geqslant 0$, мы убеждаемся в том, что условия теоремы (2) выполняются. Аналогичный случай был недавно изучен Танабе [1]. Нам кажется, что метод Танабе не может быть применен к случаю $\beta = 1$. При $\beta = 1$ мы имеем $B(t) = (1+|t-s|)^{-2}$, если $t > s$, и $B(t) = -(1+|t-s|)^{-2}$, если $t < s$. Значит, правая часть (25) в этом случае неположительна, и поэтому $\|y_n(t)\| \leqslant \|y_n(a)\|$. Теорема 2, таким образом, применима и при $\beta = 1$.

Литература. Идея аппроксимации решений уравнения (1) решениями уравнений (6) была впервые предложена автором (см. Иосида [23]). В этой статье не предполагалось, что B-пространство X рефлексивно. Уравнение (1) рассматривалось в пространстве L^1 в предположении, что $A(t)$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, коэффициенты которого подчиняются сильным требованиям гладкости. Доказано, что аппроксимирующие решения $x_n(t) \in L^1$ стремятся при $n \uparrow \infty$ к обобщенному решению дифференциального уравнения (1). Тот факт, что предельная функция $x(t)$ является классическим решением уравнения (1), доказывался с помощью подходящим образом подобранного *параметрикса* уравнения, *сопряженного* (1):

$$-dy(s)/ds = A^*(s)y(s),$$

где $A^*(s)$ — оператор, формально сопряженный $A(s)$ (см., например, Иосида [24] и [25]). Ср. также с работой С. Ито [1]. Как указал Кисынский [1] в замечании при чтении корректуры, требование рефлексивности пространства X в теореме (1) может быть опущено,

5. Метод Танабе и Соболевского

Пусть X — комплексное B-пространство. Рассмотрим в X эволюционное уравнение с заданной *неоднородностью* $f(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + f(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b. \tag{1}$$

В этом случае решение $x(t) \in X$, удовлетворяющее начальному условию $x(a) = x_0 \in X$, формально может быть получено с помощью так называемого *принципа Дюамеля* из решения $\exp((t-a)A)x$ *однородного уравнения* $dx/dt = Ax$:

$$x(t) = \exp((t-a)A)x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A) \cdot f(s)\,ds. \tag{2}$$

Это приводит к мысли о том, что неоднородное во времени уравнение вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \qquad a \leqslant t \leqslant b, \tag{3}$$

может быть решено в пространстве X с помощью следующей формальной процедуры. Перепишем уравнение (3) в виде

$$\frac{dx}{dt} = A(a)x(t) + (A(t) - A(a))x(t). \tag{4}$$

Согласно (2), решение $x(t)$ уравнения (4) с начальным условием $x(a) = x_0$ будет выражаться как решение абстрактного интегрального уравнения

$$x(t) = \exp((t-a)A(a))x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A(s))(A(s) - A(a))x(s)\,ds. \tag{5}$$

Применяя для решения (5) формальный метод последовательных приближений, мы получаем приближенные решения:

$$x_1(t) = \exp((t-a)A(a))x_0,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$x_{n+1}(t) = \exp((t-a)A(a))x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A(s))(A(s) - A(a))x_n(s)\,ds.$$

Таким образом, решение $x(t)$ уравнения (5) будет формально представляться формулой

$$x(t) = \exp((t-a)A(a))x_0 + \int_a^t \exp((t-s)A(s))R(s, a)x_0\,ds, \tag{6}$$

где

$$R(t, s)=\sum_{m=1}^{\infty} R_m(t, s),$$

$$R_1(t, s)=\begin{cases} (A(t)-A(s))\exp((t-s)A(s)) & \text{при } s<t, \\ 0 & \text{при } s \geqslant t, \end{cases} \tag{7}$$

$$R_m(t, s)=\int_s^t R_1(t, \sigma) R_{m-1}(\sigma, s)\, d\sigma \quad (m=2, 3, \ldots).$$

Танабе [2] обосновал описанную выше формальную процедуру интегрирования, используя теорию голоморфных полугрупп (она изложена в гл. IX, § 10). Следуя методу Танабе, мы допустим, что выполняются следующие условия:

$A(t)$ при всяком $t \in [a, b]$ представляет собой замкнутый линейный оператор с плотной в X областью определения и областью значений X, причем резольвентное множество $\rho(A(t))$ оператора $A(t)$ содержит некоторую фиксированную угловую область Θ комплексной λ-плоскости, состоящую из начала координат 0 и множества (8)

$$\{\lambda; -\theta<\arg \lambda<\theta\}, \text{ где } \theta>\frac{\pi}{2}.$$

Резольвента $(\lambda I-A(t))^{-1}$ сильно непрерывна по t, равномерно относительно значений λ из любого бикомпактного множества, лежащего в Θ.

Существуют такие положительные постоянные M и N, что при $\lambda \in \Theta$ и $t \in [a, b]$

$$\|(\lambda I-A(t))^{-1}\| \leqslant N(|\lambda|-M)^{-1}, \tag{9}$$

если $|\lambda|>M$, причем для вещественных значений λ можно положить $N=1$.

Область определения $D(A(t))$ оператора $A(t)$ не зависит от t, так что по теореме о замкнутом графике из гл. II, § 6, оператор $A(t) A(s)^{-1}$ принадлежит $L(X, X)$. Пусть также существует такая положительная постоянная K, что при $s, t, r \in [a, b]$ (10)

$$\|A(t) A(s)^{-1}-A(r) A(s)^{-1}\| \leqslant K|t-r|.$$

При этих условиях может быть доказана следующая

Теорема. При любых $x_0 \in X$ и $s \in [a, b)$ уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt}=A(t) x(t), \qquad x(s)=x_0, \quad s<t \leqslant b, \tag{3'}$$

обладает единственным решением $x(t) \in X$. Это решение выражается формулой

$$x(t) = U(t, s)\, x(s) = U(t, s)\, x_0, \tag{11}$$

где

$$U(t, s) = \exp((t-s) A(s)) + W(t, s),$$

$$W(t, s) = \int_s^t \exp((t-\sigma) A(\sigma))\, R(\sigma, s)\, d\sigma, \tag{12}$$

$R(t, s)$ выражается формулой (7).

Для доказательства нам потребуются следующие три леммы.

Лемма 1. Функция $R(t, s)$ сильно непрерывна при $a \leqslant s < t \leqslant b$, и существует такая постоянная C, что

$$\| R(t, s) \| \leqslant KC \cdot \exp(KC(t-s)). \tag{13}$$

Доказательство. Из (8) и (9) следует, что каждый оператор $A(s)$ порождает некоторую голоморфную полугруппу, определяемую (см. гл. IX, § 10) выражением

$$\exp(tA(s)) = (2\pi i)^{-1} \int_{C'} e^{\lambda t} (\lambda I - A(s))^{-1}\, d\lambda, \tag{14}$$

где C' — гладкий контур, соединяющий в Θ точки $\infty e^{-i\theta}$ и $\infty e^{i\theta}$.

Следовательно, поскольку $A(s)(\lambda I - A(s)) = \lambda (\lambda I - A(s))^{-1} - I$, при $(b-a) > t > 0$

$$\| \exp(tA(s)) \| \leqslant C \text{ и } \| A(s) \exp(tA(s)) \| \leqslant Ct^{-1}, \tag{15}$$

где положительная постоянная C не зависит от $t > 0$ и $s \in [a, b]$. Из (7) следует, что

$$R_1(t, s) = (A(t) - A(s))\, A(s)^{-1} A(s) \exp((t-s) A(s)),\ t > s,$$

и поэтому ввиду (10) и (15)

$$\| R_1(t, s) \| \leqslant KC. \tag{16}$$

Из (8) и (14) с очевидностью следует также, что функция $R_1(t, s)$ сильно непрерывна в области $a \leqslant s < t \leqslant b$. Продолжая этот процесс, мы по индукции заключаем, что

$$\begin{aligned} \| R_m(t, s) \| &\leqslant \int_s^t \| R_1(t, \sigma) \| \cdot \| R_{m-1}(\sigma, s) \|\, d\sigma \leqslant \\ &\leqslant \int_s^t (KC)^m (\sigma - s)^{m-2} ((m-2)!)^{-1}\, d\sigma = \\ &= (KC)^m (t-s)^{m-1} ((m-1)!)^{-1}, \end{aligned}$$

и поэтому (13) действительно выполняется. Аналогичным способом можно доказать сильную непрерывность $R(t, s)$ при $a \leqslant s < t \leqslant b$.

Лемма 2. Для значений $s < \tau < t$ имеет место неравенство

$$\|R(t, s) - R(\tau, s)\| \leqslant C_1\left(\frac{t-\tau}{t-s} + (t-\tau)\ln\frac{t-s}{t-\tau}\right), \tag{17}$$

где положительная постоянная C_1 не зависит от s, τ и t.

Доказательство. Из (7) мы получаем

$$R_1(t, s) - R_1(\tau, s) = (A(t) - A(\tau))\exp((t-s)A(s)) + \\ + (A(\tau) - A(s))[\exp((t-s)A(s)) - \exp((\tau - s)A(s))].$$

Условия (10) и (15) показывают, что норма первого члена в правой части мажорируется величиной $KC(t-\tau)(t-s)^{-1}$. Второй член в правой части может быть записан как

$$(A(\tau) - A(s))\int_{\tau-s}^{t-s}\frac{d}{d\sigma}\exp(\sigma A(s))\,d\sigma = \\ = (A(\tau) - A(s))A(s)^{-1}\int_{\tau-s}^{t-s}A(s)^2\exp(\sigma A(s))\,d\sigma,$$

и ввиду (15)

$$\left\|\int_{\tau-s}^{t-s}A(s)^2\exp(\sigma A(s))\,d\sigma\right\| \leqslant \int_{\tau-s}^{t-s}\|(A(s)\exp(2^{-1}\sigma A(s)))^2\|\,d\sigma \leqslant \\ \leqslant \int_{\tau-s}^{t-s}(2C/\sigma)^2\,d\sigma = 4C^2\left[-\frac{1}{\sigma}\right]_{\tau-s}^{t-s} = 4C^2(t-\tau)(t-s)^{-1}(\tau-s)^{-1}.$$

Таким образом,

$$\|R_1(t, s) - R_1(\tau, s)\| \leqslant KC(1+4C)\frac{t-\tau}{t-s}. \tag{18}$$

С другой стороны, вследствие (7)

$$\sum_{m=2}^{\infty}R_m(t, s) - \sum_{m=2}^{\infty}R_m(\tau, s) = \int_s^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma - \\ - \int_s^\tau R_1(\tau, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma = \\ = \int_\tau^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma + \int_s^\tau (R_1(t, \sigma) - R_1(\tau, \sigma))R(\sigma, s)\,d\sigma.$$

Норма первого слагаемого в правой части последнего равенства мажорируется выражением

$$\int_{\tau}^{t} \|R_1(t, \sigma)\| \cdot \|R(\sigma, s)\| d\sigma \leqslant K^2C^2 \exp(KC(b-a))(t-\tau).$$

Норма второго члена ввиду (13) и (18) не превосходит

$$\int_{s}^{\tau} \|R_1(t, \sigma) - R_1(\tau, \sigma)\| \cdot \|R(\sigma, s)\| d\sigma \leqslant$$

$$\leqslant K^2C^2(1+4C)\exp(KC(b-a)) \int_{s}^{\tau} (t-\tau)(t-\sigma)^{-1} d\sigma =$$

$$= K_1(t-\tau)\ln\frac{t-s}{t-\tau}.$$

Отсюда и следует (17).

Лемма 3. При $s < t$

$$\|A(t)\{\exp((t-s)A(t)) - \exp((t-s)A(s))\}\| \leqslant C_2, \tag{19}$$

где положительная постоянная C_2 не зависит от s и t.

Доказательство. Из (14) получаем

$$A(t)\{\exp((t-s)A(t)) - \exp((t-s)A(s))\} =$$

$$= (2\pi i)^{-1} \int_{C} e^{\lambda(t-s)} A(t)(\lambda I - A(t))^{-1}(A(t) - A(s))(\lambda I - A(s))^{-1} d\lambda.$$

С другой стороны, $A(t)(\lambda I - A(t))^{-1} = \lambda(\lambda I - A(t))^{-1} - I$, и поэтому ввиду (19)

$$\|A(t)(\lambda I - A(t))^{-1}\| \leqslant \frac{|\lambda|}{|\lambda| - M} + 1 \text{ при } \lambda \in \Theta \text{ и } t \in [a, b]. \tag{20}$$

Отсюда с помощью (10) и неравенства

$$\|(A(t) - A(s))(\lambda I - A(s))^{-1}\| \leqslant$$

$$\leqslant \|(A(t) - A(s))A(s)^{-1}\| \cdot \|A(s)(\lambda I - A(s))^{-1}\|$$

мы и получаем (19).

Доказательство теоремы. Перепишем выражение $W(t, s)$ из (12) в следующем виде:

$$W(t, s) = \int_{s}^{t} \exp((t-\tau)A(t))R(t, s)d\tau +$$

$$+ \int_{s}^{t} \{\exp((t-\tau)A(\tau)) - \exp((t-\tau)A(t))\} R(\tau, s)d\tau +$$

$$+ \int_{s}^{t} \exp((t-\tau)A(t))(R(\tau, s) - R(t, s))d\tau.$$

Аппроксимируя интегралы римановыми суммами и используя свойство замкнутости оператора $A(t)$, мы видим, что можно применить $A(t)$ к каждому члену правой части написанного равенства. Действительно, согласно (19), ко второму члену из правой части оператор $A(t)$ можно применить. К третьему члену $A(t)$ можно применить ввиду (15) и (17). Кроме того,

$$A(t)\int_s^t \exp((t-\tau)A(t))R(t, s)\,d\tau = \{\exp((t-s)A(t)) - I\}R(t, s),$$

так как $A(t)\exp((t-\tau)A(t)) = -d\exp((t-\tau)A(t))/d\tau$. Отсюда мы находим, что

$$\begin{aligned}A(t)U(t, s) = A(t)\exp((t-s)A(s)) + \{\exp((t-s)A(t)) - I\}R(t, s) + \\ + \int_s^t A(t)\{\exp((t-\tau)A(\tau)) - \exp((t-\tau)A(t))\}R(\tau, s)\,d\tau + \\ + \int_s^t A(t)\exp((t-\tau)A(t))(R(\tau, s) - R(t, s))\,d\tau. \quad (21)\end{aligned}$$

Приведенные выше рассуждения показывают, что оператор $A(t)U(t, s)$ сильно непрерывен в области $a \leqslant s < t \leqslant b$ и

$$\|A(t)W(t, s)\| \leqslant C_3 \quad \text{и} \quad \|A(t)U(t, s)\| \leqslant C_3(t-s)^{-1}, \quad (22)$$

где положительная постоянная C_3 не зависит от s и t.

Определим теперь для значений $s < (t-h) < t$ выражение

$$U_h(t, s) = \exp((t-s)A(s)) + \int_s^{t-h} \exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau, s)\,d\tau. \quad (23)$$

Голоморфная полугруппа $\exp(tA(u))$ дифференцируема при $t > 0$, и поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s) = A(s)\exp((t-s)A(s)) + \exp(hA(t-h))R(t-h, s) + \\ + \int_s^{t-h} A(\tau)\exp((t-\tau)A(\tau))R(\tau, s)\,d\tau.\end{aligned}$$

Отсюда ввиду (7)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s) - A(t)U_h(t, s) = \exp(hA(t-h))R(t-h, s) - R_1(t, s) - \\ - \int_s^{t-h} R_1(t, \tau)R(\tau, s)\,d\tau. \quad (24)\end{aligned}$$

Из (8), (13) и (14) следует, что $\exp(hA(t-h))R(t-h, s)$ при $h \downarrow 0$ сильно сходится к $R(t, s)$. Поэтому

$$\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\left(\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s)-A(t)U_h(t, s)\right)x_0=$$

$$=\left(R(t, s)-R_1(t, s)-\int_s^t R_1(t, \sigma)R(\sigma, s)\,d\sigma\right)x_0, \quad x_0\in X. \qquad (25)$$

Правая часть (25), как это можно показать, используя (7), обращается в нуль. Так как

$$\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\, A(t)U_h(t, s)x_0=A(t)U(t, s)x_0,$$

то, применяя рассуждения, использованные при выводе (21), мы получаем из (25) соотношение

$$\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\frac{\partial}{\partial t}U_h(t, s)x_0=A(t)U(t, s)x_0 \text{ при } t>0 \text{ и } x_0\in X. \qquad (26)$$

Так как правая часть (26) сильно непрерывна при $t>s$, то интегрируя (26) и учитывая, что $\underset{h\downarrow 0}{s\text{-}\lim}\, U_h(t, s)x_0=U(t, s)x_0$, мы получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t, s)x_0=A(t)U(t, s)x_0 \text{ при } t>s \text{ и } x_0\in X. \qquad (27)$$

Таким образом, $x(t)=U(t, s)x_0$ служит решением уравнения (3′). Единственность полученного решения может быть доказана аналогично тому, как это делалось в предыдущем разделе.

Литературные указания и замечания

Формулировка приведенной выше теоремы и доказательство заимствованы из работы Танабе [2]. Для того чтобы более четко проиллюстрировать идею Танабе, мы несколько усилили условия его теоремы. Так, например, условие (9) можно заменить более слабым требованием

$$\|A(t)A(s)^{-1}-A(r)A(s)^{-1}\|\leqslant K_1|t-r|^{\rho}, \text{ где } 0<\rho<1.$$

По поводу деталей мы отсылаем к цитированной выше работе Танабе, которая представляет собой усовершенствованный вариант статей Танабе [3] и [4]. Следует заметить, что аналогичные методы были независимо развиты советскими математиками. См., например, статью Соболевского [1] и литературу, указанную в этой работе.

Исследования Коматсу. В работе Коматсу [1] сделано одно важное замечание, относящееся к изложенному выше результату Танабе. Пусть Δ — некоторая выпуклая комплексная окрестность вещественного сегмента $[a, b]$, вложенного в комплексную плоскость. Допустим, что оператор $A(t)$ определен при $t \in \Delta$ и удовлетворяет требованиям (8) и (9) (с заменой условия $t \in [a, b]$ на $t \in \Delta$)). Кроме того, допустим, что существует ограниченный линейный оператор A_0, отображающий X взаимно однозначно на область определения D оператора $A(t)$, которая предполагается не зависящей от t, причем функция $B(t) = A(t) A_0$ сильно голоморфна при $t \in \Delta$. При этих предположениях Коматсу показал, что построенный выше оператор $U(t, s)$ сильно голоморфен при $t \in \Delta$, если $|\arg(t-s)| < \theta_0$ при некотором θ_0, $0 < \theta_0 < \pi/2$. Этот результат может быть использован для установления свойства «однозначности продолжения вперед и назад» решений неоднородных во времени уравнений диффузии, о котором говорилось в § 1 гл. XIV. По этому поводу мы отсылаем читателей к работам Коматсу [2], [3] и Котаке — Нарасимхана [1].

Исследования Като. Для того чтобы освободиться от условия независимости области $D(A(t))$ от t, Като [6] доказал, что в приведенной выше теореме условие (10) можно заменить следующим:

при некотором положительном целом k область $D((-A(t))^{1/k})$ не зависит от t. (Здесь $(-A(t))^{1/k}$ — дробная степень, определенная в гл. IX, § 11.) Кроме того, существуют постоянные

$$K_2 > 0 \text{ и } \gamma,\ 1 - k^{-1} < \gamma \leqslant 1, \tag{10'}$$

такие, что

$$\left\| (-A(t))^{1/k} (-A(s))^{1/k} - I \right\| \leqslant K_2 |t-s|^{\gamma}$$

при $s, t \in [a, b]$.

Некоторые результаты последних работ Танабе и Като — Танабе. Имея в виду ту же цель, что и Като в упомянутой выше работе, Танабе [1] разработал метод, позволяющий заменить условие (10) условием

оператор $A(t)^{-1}$ имеет при $a \leqslant t \leqslant b$ сильную первую производную, такую, что при некоторых положительных постоянных K_3 и α выполняется неравенство

$$\left\| \frac{dA(t)^{-1}}{dt} - \frac{dA(s)^{-1}}{ds} \right\| \leqslant K_3 |t-s|^{\alpha}. \tag{10''}$$

Кроме того, существуют такие постоянные $N > 0$ и ρ, $0 < \rho < 1$, что

$$\left\| \frac{\partial}{\partial t} (\lambda I - A(t))^{-1} \right\| \leqslant N |\lambda|^{\rho - 1}.$$

Подробнее по этому поводу см. Като — Танабе [8]. Укажем, что идея этого исследования заключается в использовании выражения $\exp((t-a)A(t))x_0$ в качестве первого приближения вместо функции $\exp((t-a)A(a))x_0$.

Исследования Нельсона, касающиеся фейнмановских интегралов. В работе Нельсона [2] дается интерпретация фейнмановских интегралов, связанная с интегрированием уравнения Шредингера методом полугрупп.

Исследования Агмона и Ниренберга. Агмон и Ниренберг [1] изучали поведение решений уравнения $\frac{1}{i}\frac{du}{dt}-Au=0$ при $t\uparrow\infty$ в некоторых B-пространствах.

Библиография

Агмон (Agmon S.)

[1] (совм. с Ниренбергом (Nirenberg L.)) Properties of solutions of ordinary differential equations in Banach space, *Comm. P. Appl. Math,*. **16** (1963), 121—239.

Акилов Г. П.

[1] См. Канторович — Акилов [1].

Александров П. С.

[1] (совм. с Хопфом (Hopf H.)) Topologie, B. I, Springer, 1935.

Ароншайн (Aronszajn N.)

[1] Theory of reproducing kernels, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **68** (1950), 337—404.

Ахиезер Н. И.

[1] (совм. с Глазманом И. М.) Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.

Балакришнан (Balakrishnan V.)

[1] Fractional powers of closed operators and the semi-groups generated by them, *Pacific J. Math.,* **10** (1960), 419—437.

Банах (Banach S.)

[1] Курс функціонального аналізу, Київ, 1948.
[2] Sur la convergence presque partout de fonctionnelles linéaires, *Bull. Sci. Math. France,* **50** (1926), 27—32, 36—43.

Бебутов М. В.

[1] Markoff chains with a compact state space, *Матем. сб.*, **10** (52) (1942), 213—238.

Бергман (Bergman S.)

[1] The kernel function and the conformal mapping, Math. Surveys, № 5, 1950.

Берс (Bers L.)

[1] Lectures on elliptic equations, Summer Seminar in Appl. Math. Univ. of Colorado, 1957.

Биркгоф Г. (Birkhoff G.)

[1] Теория структур, ИЛ, М., 1952.

Биркгоф Дж. (Birkhoff G. D.)

[1] Proof of the ergodic theorem, *Proc. Mat. Acad. Sci., USA,* **17** (1931), 656—660.

[2] (совм. со Смитом (Smith P. A.)) Structure analysis of surface transformations, *J. Math. Pures et Appliq.*, **7** (1928), 345—379.

Боголюбов Н. Н.

[1] См. Крылов — Боголюбов [1].

Бор (Bohr H.)

[1] Fastperiodische Funktionen, Springer, 1932.

Бохнер (Bochner S.)

[1] Integration von Funktionen, deren Wert die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.*, **20** (1933), 262—276.
[2] Diffusion equations and stochastic processes, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **35** (1949), 369—370.
[3] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akademie-Verlag, 1932.
[4] Beiträge zur Theorie der fastperiodischen Funktionen, *Math. Ann.*, **96** (1927), 119—147.

Браудер (Browder F. E.)

[1] Functional analysis and partial differential equations, I, *Math. Ann.*, **138** (1959), 55—79. (Русский перевод: сб. *Математика*, **4**:**3** (1960), 79—106.) II, *Math. Ann.*, **145** (1962), 81—226.

Бурбаки (Bourbaki N.)

[1] Topologie générale, Hermann, 1940—1942. (Русский перевод: Общая топология. Основные структуры, Физматгиз, М., 1958. Общая топология. Числа и связанные с ними группы и пространства, Физматгиз, М., 1959.)
[2] Топологические векторные пространства, ИЛ, М., 1959.

Ватанабе (Watanabe J.)

[1] On some properties of fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 273—275.

Вейль А. (Weil A.)

[1] Sur les fonctions presque périodiques de von Neumann, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **200** (1935), 38—40.

Вейль Г. (Weyl H.)

[1] The method of orthogonal projection in potential theory, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 414—444.
[2] Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269.
[3] См. Петер — Вейль [1].

Веккен (Wecken F. J.)

[1] Unitärinvariante selbstadjungierte Operatoren, *Math. Ann.*, **116** (1939), 422—455.

Виленкин Н. Я.

[1] См. Гельфанд — Виленкин [3].
[2*] (совм. с Гориным Е. А. и др.) Функциональный анализ, «Наука», М., 1964.

Винер (Wiener N.)

[1] См. Пэли — Винер [1].
[2] Tauberian theorems, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 1—100.
[3] The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge, 1933.

Витали (Vitali G.)

[1] Sull'integrazioni per serie, *Rend. Circ. Mat. di Palermo,* 23 (1907), 137—155.

Вишик М. И.

[1] См. Ладыженская — Вишик [1].

Вулих Б. З.

[1*] Введение в функциональный анализ, Физматгиз, М., 1958.
[2*] Введение в теорию полуупорядоченных пространств, Физматгиз, М. 1961.

Гельфанд И. М.

[1] (совм. с Шиловым Г. Е.) Обобщенные функции, вып. 1—3, Физматгиз, М., 1958.
[2] Нормированные кольца, *Матем. сб.*, 9 (51) (1941), 3—24.
[3] (совм. с Виленкиным Н. Я.) Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып. 4), Физматгиз, М., 1961.
[4] (совм. с Райковым Д. А.) К теории характеров коммутативных топологических групп, *ДАН СССР*, 28 (1940), 195—198.
[5] (совм. с Райковым Д. А. и Шиловым Г. Е.) Коммутативные нормированные кольца, Физматгиз, М., 1960.

Гильберт (Hilbert D.)

[1] Wesen und Ziele einer Analysis der unendlich vielen unabhängigen Variablen, *Rend. Circ. Mat. Palermo,* 27 (1909), 59—74.

Гихман И. И., Скороход А. В.

[1*] Введение в теорию случайных процессов, М., 1965.

Глазман И. М.

[1] См. Ахиезер — Глазман [1].

Гординг (Gårding L.)

[1] Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations, *Math. Scand.,* 1 (1953), 55—72.
[2] Some trends and problems in linear partial differential equations, Int. Congr. of Math. 1958, Edinburgh, 87—102.

Гофман (Hoffman K.)

[1] Банаховы пространства аналитических функций, ИЛ, М., 1963.

Гротендик (Grothendieck A.)

[1] Espaces vectoriels topologiques, sec. éd., Sociedade de Mat. de São Paulo, 1958.
[2] Produits tensoriels topologiques et espaces nuckéaires, Memoirs of Amer. Math. Soc., № 16 (1955).

Данфорд (Dunford N.)

[1] (совм. со Шварцем (Schwartz J.) Линейные операторы, Общая теория, ИЛ, М., 1962.
[2] Uniformity in linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.,* 44 (1938), 305—356.
[3] On one parameter groups of linear transformations, *Ann. of Math.,* 39 (1938), 569—573.

[4] (совм. со Шварцем (Schwartz J.)) Convergence almost everywhere of operator averages, *J. Rat. Mech. Anal.*, **5** (1956), 129—178.
[5] (совм. со Шварцем (Schwartz J.)) Линейные операторы. Спектральная теория, изд-во «Мир», М., 1966.
[6] (совм. со Шварцем (Schwartz J.)) Linear operators, v. 3, Interscience (в печати).

Джекобс (Jacobs K.)

[1] Neuere Methoden und Ergebnisse der Ergodentheorie, Springer, 1960.

Джон (John F.)

[7] Плоские волны и сферические средние в применении к дифференциальным уравнениям с частными производными, ИЛ, М., 1958.

Дуб (Doob J. L.)

[1] Stochastic processes with an integral-valued parameter. *Trans Amer. Math. Soc.*, **44** (1938), 87—150.
[2] Probability theory and the first boundary value problem, *Ill. J. Math.*, 2 (1958), 13—36.
[3] Probability methods applied to the first boundary value problem, Proc. Third Berkley Symp. on Math. Statist. and Prob. **II** (1956), 49—80.
[4*] Вероятностные процессы, ИЛ, М., 1956.

Дьёдонне (Dieudonné J.)

[1] Recent advances in the theory of locally convex vector spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **59** (1953), 495—512.

Дынкин Е. Б.

[1] Марковские процессы и полугруппы операторов, *Теория вероятн. и ее применения*, **1** (1956), 25—37.
[2] Инфинитезимальные операторы марковских процессов, *Теория вероятн. и ее применения*, **1** (1956), 38—60.
[3*] Марковские процессы, М., 1963.

Дэй (Day M. M.)

[1*] Нормированные линейные пространства, ИЛ, М., 1961.

Иосида (Yosida K.)

[1] Lectures on differential and integral equations, Interscience, 1960.
[2] Vector lattices and additive set functions, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 228—232.
[3] Mean ergodic theorem in Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 292—294.
[4] Ergodic theorems for pseudo-resolvents, *Proc. Japan Acad.*, **37** (1961), 422—425.
[5] On the differentiability and the representation of one-parameter semi-groups of linear operators, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1948), 15—21.
[6] Holomorphic semi-groups in a locally convex linear topological space, *Osaka Math. J.*, **15** (1963), 51—57.
[7] (совм. с Какутани (Kakutani S.)) Operator-theoretical treatment of Markoff process and mean ergodic theorems, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 188—228.
[8] Fractional powers of infinitesimal generators and the analyticity of the semi-groups generated by them, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 86—89.

[9] Quasi-completely continuous linear functional operators, *Jap. J. Math.*, **15** (1939), 297—301.
[10] (совм. с Мимура (Mimura Y.) и Какутани (Kakutani S.)) Integral operators with bounded measurable kernel, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 14 (1938), 359—362.
[11] On the group embedded in the metrical complete ring, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 7—26.
[12] Normed rings and spectral theorems, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 356—359.
[13] On the unitary equivalence in general euclid spaces, *Proc. Japan Acad.*, **22** (1946), 242—245.
[14] On the duality theorem of non-commutative compact groups, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **19** (1943), 181—183.
[15] An abstract treatment of the individual ergodic theorems, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 280—284.
[16] (сов. с Фукамия (Fukamiya M.)) On vector lattice with a unit, II, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 18 (1941), 479—482.
[17] Markoff process with a stable distribution, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 43—48.
[18] Ergodic theorems of Birkhoff — Khintchine's type, *Jap. J. Math.*, **17** (1940), 31—36.
[19] Simple Markoff process with a locally compact phase space, *Math. Japonicae*, **1** (1948), 99—103.
[20] Brownian motion in a homogeneous Riemannian space, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 263—270.
[21] An abstract analyticity in time for solutions of a diffusion equation, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 109—113.
[22] An operator-theoretical integration of the wave equation, *J. Math. Soc. Japan*, **8** (1956), 79—92.
[23] Semi-group theory and the integration problem of diffusion equations, Internat. Congress of Math. 1954, Amsterdam, v. 3. (Русский перевод: сборник «Международный математический конгресс в Амстердаме», Физматгиз, М., 1961.)
[24] On the integration of diffusion equations in Riemannian spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3**, 6 (1952).
[25] On the fundamental solution of the parabolic equations in a Riemannian space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, **3** (1952).
[26] An extension of Fokker — Plank's equation, *Proc. Japan Acad.*, **25** (1949), 1—3.
[27] Brownian motion on the surface of 3-sphere, *Ann. of Math. Statist.*, **20** (1949), 292—296.
[28] On the integration of the equation of evolution, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. 1, **9**, part 5 (1963), 397—402.
[29] An operator-theoretical treatment of temporally homogeneous Markoff processes, *J. Math. Soc. Japan*, **1** (1949), 244—253.

Ито К. (Itô K.)
[1] (совм. с Мак-Кином (McKean H. P.)), Diffusion processes and their sample paths, Springer, 1965 (готовится русский перевод).
[2*] Вероятностные процессы, ИЛ, М., вып. 1, 1960, вып. 2, 1963.

Ито С. (Itô S.)
[1] The fundamental solutions of the parabolic differential equations in differentiable manifold, *Osaka Math., J.*, **5** (1953), 75—92.
[2] (совм. с Ямабе (Yamabe H.)) A unique continuation theorem for solutions of a parabolic differential equation, *J. Math. Soc. Japan*, **10** (1958), 314—321.

Какутани (Kakutani S.)

[1] Iteration of linear operations in complex Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **14** (1938), 295—300.
[2] См. Иосида — Мимура — Какутани [10].
[3] Weak topology and regularity of Banach spaces, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **15** (1939), 169—173.
[4] Concrete representation of abstract (M)-spaces, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 994—1024.
[5] Concrete representation of abstract (L)-spaces and the mean ergodic theorem, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 523—537.
[6] Ergodic theorems and the Markoff processes with a stable distribution, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, **16** (1940), 49—54.
[7] См. Иосида — Какутани [7].
[8] Ergodic theory, Proc. Internat. Congress of Math., 1950, Cambridge, v. 2, 128—142.

Канторович Л. В.

[1] (совм. с Акиловым Г. П.) Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, М., 1959.
[2*] (совм. с Вулихом Б. З., Пинскером А. Г.) Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах, Гостехиздат, 1950.

Като (Kato T.)

[1] Remarks on pseudo-resolvents and infinitesimal generators of semi-groups, *Proc. Japan Acad.*, **35** (1959), 467—468.
[2] Note on fractional powers of linear operators, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 94—96.
[3] Integration of the equation of evolution in a Banach space, *J. Math. Soc. of Japan*, **5** (1953), 208—234. (Русский перевод: сб. *Математика*, **2 : 4** (1958), 117—135.)
[4] On linear differential equations in Banach spaces, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **9** (1956), 479—486.
[5] Fractional powers of dissipative operators, *J. Math. Soc. of Japan*, **13** (1961), 246—274; II, ibid., **14** (1962), 242—248.
[6] Abstract evolution equations of parabolic type in Banach and Hilbert spaces, *Nagoya Math. J.*, **19** (1961), 93—125.
[7] Fundamental properties of Hamiltonian operators of Schrödinger type, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **70** (1950), 195—211.
[8] (совм. с Танабе (Tanabe H.)) On the abstract evolution equation, *Osaka Math. J.*, **14** (1962), 107—133.

Келли (Kelley J. L.)

[1] General topology, van Nostrand, 1955.
[2] Note on a theorem of Krein and Milman, *J. Osaka Inst. Sci. Tech.*, Part I, **3** (1951), 1—2.

Келлог (Kellog O. D.)

[1] Foundations of potential theory, Springer, 1929.

Кёте (Köthe G.)

[1] Topologische lineare Räume, B. I, Springer, 1960.

Кисынский (Kisyński J.)

[1] Sur les opérateurs de Green des problèmes de Cauchy abstraits, *Stud Math.*, **23** (1964), 285—328.

К л а р к с о н (Clarkson J. A.)

[1] Uniformly convex spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **40** (1936), 396—414.

К о д а и р а (Kodaira K.)

[1] The eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of *S*-matrices, *Amer. J. of Math.*, **71** (1949), 921—945.

К о л м о г о р о в А. Н.

[1] Об аналитических методах в теории вероятностей, *УМН*, **5** (1938), 5—41.

[2*] (совм. с Ф о м и н ы м С. В.) Элементы теории функций и функционального анализа, Изд. МГУ, вып. 1, 1954; вып. 2, 1960.

К о м а т с у (Komatsu H.)

[1] Abstract analyticity in time and unique continuation property of solutions of a parabolic equation, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, Sect. 1, **9**, Part 1 (1961), 1—11.

[2] A characterization of real analytic functions, *Proc. Japan Acad.*, **36** (1960), 90—93.

[3] A proof of Kotakė — Narasimhan's theorem, *Proc. Japan Acad.*, **38** (1962), 615—618.

[4] Semi-groups of operators in locally convex spaces (в печати).

К о т а к е (Kotakė T.)

[1] Sur l'analyticité de la solution du problème de Cauchy pour certains classes d'opérateurs paraboliques, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 3716—3718.

[2] (совм. с Н а р а с и м х а н о м (Narasimhan M. S.)) Sur la régularité de certains noyaux associés à un opérateur elliptique, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **252** (1961), 1549—1550.

К р а с н о с е л ь с к и й М. А.

[1*] Положительные решения операторных уравнений, Физматгиз, М., 1962.

[2*] Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, 1956.

К р е й н М. Г.

[1] (совм. с М и л ь м а н о м Д. П.) On extreme points of regularly convex sets, *Studia Math.*, **9** (1940), 133—138.

[2] (совм. с К р е й н о м С. Г.) Об одной внутренней характеристике пространства всех непрерывных функций, определенных на хаусдорфовом бикомпактном множестве, *ДАН СССР*, **27**, № 5 (1940), 427—431.

[3*] Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормированих просторах, *Зап. Харьковск. мат. общ.*, (4), **14** (1937), 227—237.

[4*] О линейных операторах, оставляющих инвариантным некоторое коническое множество, *ДАН СССР*, **23** (1937), 749—752.

К р е й н С. Г.

[1] См. К р е й н М. Г. — К р е й н С. Г. [2].

К р ы л о в Н. М.

[1] (совм. с Б о г о л ю б о в ы м Н. Н.) La théorie générale de la mesure dans son application à l'étude des systèmes de la mécanique non linéaires, *Ann. of Math.*, **38** (1937), 65—113.

Курош А. Г.

[1*] Лекции по современной алгебре, Физматгиз, М., 1962.

Ладыженская О. А.

[1] (совм. с Вишиком М. И.) Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений, *УМН*, **11**:6 (72) (1956), 41—97.

Лакс (Lax P. D.)

[1] (совм. с Мильграмом (Milgram A. N.)) Parabolic equations, in Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton, 1954.
[2] On Cauchy's problem for hyperbolic equations and the differentiability of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **8** (1955), 615—633. (Русский перевод: сб. *Математика*, **1**:1 (1957), 43—59.)
[3] (совм. с Филлипсом (Phillips R. S.)) Local boundary conditions for dissipative system of linear partial differential operators, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **13** (1960), 427—455.

Леви (Lewy H.)

[1] An example of a smooth linear partial differential equation without solutions, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 155—158.

Левитан Б. М.

[1*] Почти-периодические функции, М., 1953.

Лере (Leray J.)

[1] Hyperbolic differential equations, Princeton, 1952.

Лионс (Lions J. L.)

[1] Une remarque sur les applications du théorème de Hille — Yosida, *J. Math. Soc. Japan*, **9**, (1957), 62—70.
[2] Equations différentielles opérationnelles, Springer, 1961.
[3] Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionaires d'opérateurs, *J. Math. Soc. Japan*, **14** (1962), 233—241.
[4] Les semi-groups distributions, *Portugaliae Math.*, **19** (1960), 141—164.

Лоэв (Loève M.)

[1*] Теория вероятностей, ИЛ, М., 1962.

Люмер (Lumer G.)

[1] Semi-inner product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 29—43.
[2] (совм. с Филлипсом (Phillips R. S.)) Dissipative operators in a Banach space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 679—698.

Люстерник Л. А., Соболев В. И.

[1*] Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.

Маак (Maak W.)

[1] Fastperiodische Funktionen, Springer, 1950.

Мазур (Mazur S.)

[1] Sur les anneaux linéaires, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **207** (1936), 1025—1027.
[2] Über konvexe Mengen in linearen normierten Räumen, *Stud. Math.*, **5** (1933), 70—84.

Мак-Кин (McKean H.)

[1] См. Ито К. — Мак-Кин [1].

Мальгранж (Malgrange B.)

[1] Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution, *Ann. Inst. Fourier,* **6** (1955—1956), 271—355.

[2] Sur une classe d'opérateurs différentielles hypoelliptiques, *Bull. Soc. Math. France,* **58** (1957), 283—306.

Маруяма (Maruyama G.)

[1] On strong Markoff property, *Mem. Kyushu Univ.,* **13** (1959).

Мейер (Meyer P. A.)

[1] Séminaire de théorie du potentiel, sous la direction de M. Brelot — G. Choquet — J. Deny, Faculté des Science de Paris, 1960—1961.

[2] См. Шоке — Мейер [2].

Мизохата (Mizohata S.)

[1] Hypoellipticité des équations paraboliques, *Bull. Soc. Math. France,* **85** (1957), 15—50.

[2] Analyticité des solutions élémentaires des systèmes hyperboliques et paraboliques, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto,* **32** (1959), 181—212.

[3] Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques, *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto,* Sér. A, **31** (1958), 219—239.

[4] Les problème de Cauchy pour les équations paraboliques, *J. Math. Soc. Japan,* **8** (1956), 269—299.

[5] Systèmes hyperboliques, *J. Math. Soc. Japan,* **11** (1959), 205—233.

Микусинский (Mikusiński J.)

[1] Operational Calculus, Pergamon, 1959. (Русский перевод первого издания: Операторное исчисление, ИЛ, М., 1956.)

Мильграм (Milgram A. N.)

[1] См. Лакс — Мильграм [1].

Мильман Д. П.

[1] О некоторых признаках регулярности пространств типа (*B*), *ДАН СССР,* **20** (1938), 243—246.

[2] См. Крейн М. Г. — Мильман [1].

Мимура (Mimura Y.)

[1] См. Иосида — Мимура — Какутани [10].

[2] Über Funktionen von Funktionaloperatoren in einem Hilbertschen Raum, *Jap. J. Math.,* **13** (1936), 119—128.

Минлос Р. А.

[1] Обобщенные случайные процессы и их продолжение до меры, *Тр. Московского матем. общ.,* **8** (1959), 497—518.

Миядера (Miyadera I.)

[1] Generation of a strongly continuous semi-group of operators, *Tohoku Math. J.,* **4** (1952), 109—121.

М о р р и (M o r r e y C. B.)

[1] (совм. с Н и р е н б е р г о м (N i r e n b e r g L.)) On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **10** (1957), 271—290.

Н а г у м о (N a g u m o M.)

[1] Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, *Jap. J. Math.*, **13** (1936), 61—80.
[2] Re-topologization of functional spaces in order that a set of operators will be continuous, *Proc. Jap. Acad.*, **37** (1961), 550—552.

Н а д ь (N a g y B. von Sz.)

[1] Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes, Springer, 1942.
[2] См. Р и с с — Н а д ь [3].
[3] Prolongements des transformations de l'espace de Hilbert qui sortent de set espace, Acad. Kiado, Budapest, 1955.

Н а й м а р к М. А.

[1] Нормированные кольца, Гостехиздат, М., 1956.
[2] Линейные дифференциальные операторы, Гостехиздат, М., 1954.
[3] О спектральных функциях симметрического оператора, *ИАН СССР*, сер. матем., **17** (1943), 285—296.

Н а к а н о (N a k a n o H.)

[1] Unitärinvariante hypermaximale normale Operatoren, *Ann. of Math.*, **42** (1941), 657—664.

Н а р а с и м х а н (N a r a s i m h a n M. S.)

[1] См. К о т а к е — Н а р а с и м х а н [2].

Н е й м а н (N e u m a n n J. von)

[1] Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131.
[2] On rings of operators, III, *Ann. of Math.*, **41** (1940), 94—161.
[3] Zur Operatorenmethode in der klassischen Mechanik, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 587—643.
[4] Almost periodic functions in a group, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **36** (1934), 445—492.
[5] Uber adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 249—310.
[6] Über die analytischen Eigenschaften von Gruppen linearer Transformationen und ihrer Darstellungen, *Math. Z.*, **30** (1929), 3—42.
[7] Zur Algebra der Funktionaloperatoren und Theorie der normalen Operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 370—427.
[8] Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Ann. of Math.*, **33** (1932), 567—573.

Н е л ь с о н (N e l s o n E.)

[1] Analytic vectors, *Ann. of Math.*, **60** (1959), 572—615.
[2] Feynman integrals and the Schrödinger equations, *J. of Math. Physics*, **5** (1964), 332—343.

Н и р е н б е р г (N i r e n b e r g L.)

[1] Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **8** (1955), 643—674.

[2] On elliptic partial differential equations, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,* **13** (1959), 115—162.
[3] См. Морри — Ниренберг [1].
[4] См. Агмон — Ниренберг [1].

Орнстейн (Ornstein D. S.)

[1] См. Чакон — Орнстейн [1].

Петер (Peter F.)

[1] (совм. с Вейлем Г. (Weyl H.)) Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, *Math. Ann.,* **97** (1927), 737—755.

Петре (Peetre J.)

[1] A proof of the hypoellipticity of formally hypoelliptic differential operators, *Comm. Pure and Appl. Math.,* **16** (1961), 737—747.

Петровский И. Г.

[1] Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles, *Матем. сб.,* **5** (**47**), (1939), 3—70.

Петтис (Pettis B. J.)

[1] On integration in vector spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **44** (1938), 277—304.

Питт (Pitt H. R.)

[1] Tauberian theorems, Tata Inst. of Fund. Research, 1958.

Плеснер А. И.

[1*] Спектральная теория линейных операторов, Физматгиз, М., 1965.

Понтрягин Л. С.

[1] Непрерывные группы, М., 1954.

Пэли (Paley R. E. A. C.)

[1] (совм. с Винером (Wiener N.)) Преобразование Фурье в комплексной области, Физматгиз, М., 1964.

Радо (Rado T.)

[1] Subharmonic functions, Springer, 1937.

Райков Д. А.

[1] См. Гельфанд — Райков [4].
[2] См. Гельфанд — Райков — Шилов [5].

Риккарт (Rickart C. E.)

[1] General theory of Banach algebras, van Nostrand, 1960.

Рисс (Riesz F.)

[1] Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math. Szeged,* **7** (1934), 34—38.
[2] Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.,* **41** (1918), 71—98. (Русский перевод: *УМН,* 1 (1936), 176—199.)
[3] (совм. с Надем (Nagy B. von Sz.)) Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.

[4] Some mean ergodic theorems, *J. London Math. Soc.*, **13** (1938), 274—278.
[5] Sur les fonctions des transformations hermitiennes dans l'espace de Hilbert, *Acta Sci. Math. Szeged,* **7** (1935), 147—159.
[6] Sur la décomposition des opérations linéaires, Proc. Internat. Congress of Math. 1928, Bologna, v. III, 143—148.

Рылль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.)

[1] См. Микусинский [1].

Рэй (Ray D.)

[1] Resolvents, transition functions and strongly Markovian processes, *Ann. of Math.,* **70** (1959), 43—72.

Сакс (Saks S.)

[1] Теория интеграла, ИЛ, М., 1949.
[2] Addition to the note on some functionals, *Trans. Amer. Math. Soc.,* **35** (1933), 967—974.

Сегё (Szegö G.)

[1] Ортогональные многочлены, Физматгиз, М., 1962.

Сигал (Segal I. E.)

[1] The span of the translations of a function in a Lebesgue space, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **30** (1944), 165—169.

Смирнов В. И.

[1*] Курс высшей математики, т. 5, Физматгиз, М., 1959.

Смит (Smith P. A.)

[1] См. Биркгоф — Смит [2].

Соболев С. Л.

[1] Об одной теореме функционального анализа, *Матем. сб.,* **4** (46), (1938), 471—498.
[2] Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950.

Соболевский П. Е.

[1] Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах, *Тр. Моск. матем. общ.*, **10** (1961), 297—350.

Стоун (Stone M. H.)

[1] Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, Colloq. Publ. Amer. Math. Soc., 1932.
[2] On one-parameter unitary groups in Hilbert space, *Ann. of Math.,* **33** (1932), 643—648.

Танабе (Tanabe H.)

[1] Evolution equations of parabolic type, *Proc. Japan Acad.,* **37** (1961), 610—613.
[2] On the equations of evolution in a Banach space, *Osaka Math. J.,* **12** (1960), 365—613.
[3] A class of the equations of evolution in a Banach space, *Osaka Math. J.,* **11** (1959), 121—145.

[4] Remarks on the equations of evolution in a Banach space, *Osaka Math. J.*, **12** (1960), 145—166.
[5] См. Като — Танабе [8].

Таннака (Tannaka T.)

[1] Dualität der nicht-kommutativen bikompakten Gruppen, *Tohoku Math. J.*, **53** (1938), 1—12.

Тейлор (Taylor A.)

[1] Introduction to functional analysis, Wiley, 1958.

Титчмарш (Titchmarsh E. C.)

[1] Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948.
[2] Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, ч. I, ИЛ, М., 1960; ч. II, ИЛ, М., 1961.

Трев (Treves F.)

[1] Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, «Мир», М., 1965.

Троттер (Trotter H. F.)

[1] Approximation of semi-groups of operators, *Pacific J. Math.*, **8** (1958), 887—919.

Феллер (Feller W.)

[1] On the generation of unbounded semi-groups of bounded linear operators, *Ann. of Math.*, **58** (1953), 166—174.
[2] The parabolic differential equation and the associated semi-group of transformations, *Ann. of Math.*, **55** (1952), 468—519. (Русский перевод: сб. *Математика*, **2 : 2** (1958), 120—153.)
[3] On the intrinsic form for second order differential operators, *Ill. J. Math.*, **2**, 1 (1958), 1—18.
[4] Generalized second order differential operators and their lateral conditions, *Ill. J. Math.*, **1**, 4 (1957), 459—504.
[5] Some new connections between probability and classical analysis, Proc. Internat. Congress of Math. 1958, Edinburgh, 69—86.
[6] On differential operators and boundary conditions, *Comm. Pure and App. Math.*, **8** (1955), 203—216.
[7] Boundaries induced by non-negative matrices, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 19—54.
[8] On boundaries and lateral conditions for the Kolmogoroff differential equations, *Ann. of Math.*, **65** (1957), 527—570.
[9*] Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 1, «Мир», М., 1964.

Филлипс (Phillips R. S.)

[1] См. Хилле — Филлипс [1].
[2] The adjoint semi-group, *Pacific J. Math.*, **5** (1955), 269—283.
[3] An inversion formula for Laplace transform and semi-groups of linear operators, *Ann. of Math.*, **59** (1954), 325—356.
[4] См. Люмер — Филлипс [2].
[5] On the generation of semi-groups of linear operators, *Pacific J. Math.*, **2** (1952), 343—369.
[6] On the integration of the diffusion equation with boundaries, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **98** (1961), 62—84.

[7] Dissipative operators and parabolic partial differential operators, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **12** (1959), 249—276.
[8] Dissipative hyperbolic systems, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **86** (1957), 109—173.
[9] Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **90** (1959), 193—254.
[10] См. Лакс — Филлипс [3].

Фойаш (Foias C.)

[1] Remarques sur les semi-groupes distributions d'opérateurs normaux, *Portugaliae Math.*, **19** (1960), 227—242.

Фомин С. В.

[1*] См. Колмогоров — Фомин [2*].

Фрейденталь (Freudenthal H.)

[1] Über die Friedrichssche Fortsetzung halbbeschränkter Hermitescher Operatoren, *Proc. Acad. Amsterdam*, **39** (1936), 832—833.
[2] Teilweise geordnete Modulen, *Proc. Acad. Amsterdam*, **39** (1936), 641—651.

Фридман (Friedman A.)

[1] Generalized functions and partial differential equations, Prentice-Hall, 1963.

Фридрихс (Friedrichs K. O.)

[1] Differentiability of solutions of elliptic partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **5** (1953), 299—326.
[2] Symmetric positive systems of differential equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418.
[3] Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren, I—III, *Math. Ann.*, **109** (1934), 465—487, 685—713; **110** (1935), 777—779.

Фукамия (Fukamiya M.)

[1] Topological methods for Tauberian theorem, *Tohoku Math. J.*, **64** (1949), 77—87.
[2] См. Иосида — Фукамия [16].

Халмош (Halmos P. R.)

[1] Теория меры, ИЛ, М., 1958.
[2] Introduction to Hilbert space and the theory of spectral multiplicity, Chelsea, 1951.

Хан (Hahn H.)

[1] Über Folgen linearer Operatoren, *Monatsh. für Math. und Phys.*, **32** (1922), 3—88.
[2] Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, *J. reine und angew. Math.*, **157** (1927), 214—229.
[3] Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalinvarianten der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *Monatsh. für Math. und Phys.*, 23 (1912), 161—224.

Хант (Hunt G. A.)

[1] Марковские процессы и потенциалы, ИЛ, М., 1962.

Хаусдорф (Hausdorff F.)

[1] Теория множеств, Гостехиздат, М., 1937.

Хелли (Helly E.)

[1] Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, *Monatsh. für Math. und Phys.*, **31** (1921), 60—91.

Хеллингер (Hellinger E.)

[1] Neue Begründung der Theorie quadratischer Formen von unendlich vielen Veränderlichen, *J. reine und angew. Math.*, **136** (1909), 210—271.

Хёрмандер (Hörmander L.)

[1] К теории общих дифференциальных операторов в частных производных, ИЛ, М., 1959.
[2] Lectures on linear partial differential equations, Stanford Univ., 1960.
[3] Linear partial differential equations without solutions, *Math. Ann.*, **140** (1960), 169—173.
[4] Local and global properties of fundamental solutions, *Math. Scand.*, **5** (1957), 27—39.
[5] On the interior regularity of the solutions of partial differential equations, *Comm. Pure and Appl. Math.*, **9** (1958), 197—218.
[6] Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.
[7*] Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, ИЛ, М., 1962.

Хилле (Hille E.)

[1] (совм. с Филлипсом (Phillips R. S.)) Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962. (Второе издание книги [2].)
[2] Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1951.
[3] On the differentiability of semi-groups of operators, *Acta Sci. Math. Szeged*, **12 B** (1950), 19—24.
[4] On the generation of semi-groups and the theory of conjugate functions, *Proc. R. Physiogr. Soc. Lund*, **21** (1951), 1—13.
[5] Une généralization du problème de Cauchy, *Ann. Inst. Fourier*, **4** (1952), 31—48.
[6] The abstract Cauchy problem and Cauchy's problem for parabolic differential equations, *J. d'Analyse Math.*, **3** (1954), 81—196.
[7] Perturbation methods in the study of Kolmogoroff's equations, Proc. Internat. Congress of Math. 1954, Amsterdam, v. III, 365—376.
[8] Linear differential equations in Banach algebras, Proc. Internat. Symposium on Linear Analysis, Jerusalem, 1960, 263—273.
[9] Les probabilités continues en chaine, *C. R. Acad. Sci.*, **230** (1950), 34—35.

Хинчин А. Я.

[1] Zu Birkhoffs Lösung des Ergodenproblems, *Math. Ann.*, **107** (1933), 485—488.

Хопф Г. (Hopf H.)

[1] См. Александров — Хопф [1].

Хопф Э. (Hopf E.)

[1] Ergodentheorie, Springer, 1937.
[2] The general temporally discrete Markoff processes, *J. Rat. Mech. and Anal.*, **3** (1954), 13—45.
[3] On the ergodic theorem for positive linear operators, *J. reine und angew. Math.*, **205** (1961), 101—106.

Чакон (Chacon R. V.)

[1] (совм. с Орнстейном (Ornstein D. S.)) A general ergodic theorem, *Ill. J. Math.*, **4** (1960), 153—160.

Шаттен (Schatten R.)

[1] A theory of cross-spaces, Princeton, 1950.

Шаудер (Schauder J.)

[1] Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, *Stud. Math.*, **2** (1930), 1—6.

Шварц Дж. (Schwartz J.)

[1] См. Данфорд—Шварц [1].
[2] См. Данфорд—Шварц [4].
[3] См. Данфорд—Шварц [5].
[4] См. Данфорд—Шварц [6].

Шварц Л. (Schwartz L.)

[1] Théorie des distributions, I, II, Hermann, Paris, 1950, 1951.
[2] Transformation de Laplace des distributions, *Comm. Sém. Math. de l'Univ. de Lund,* tome suppl. dédié à M. Riesz (1952), 196—206.
[3] Lectures on mixed problems in partial differential equations and the representation of semi-groups, Tata Inst. Fund. Research, 1958.
[4] Les équations d'évolution liées au produit de compositions, *Ann. Inst. Fourier,* **2** (1950—1951), 165—169.
[5] Exposé sur les travaux de Gårding, Séminaire Bourbaki, May, 1952.

Шилов Г. Е.

[1] См. Гельфанд—Шилов [1].
[2] См. Гельфанд—Райков—Шилов [5].
[3*] Математический анализ, второй специальный курс, «Наука», М., 1965.

Шмульян В. Л.

[1] Über lineare topologische Räume, *Матем. сб.*, **7** (49), (1940), 425—448.

Шоке (Choquet G.)

[1] La théorie des représentations intégrales dans les ensembles convexes compacts, *Ann. Inst. Fourier,* **10** (1960), 334—344.
[2] (совм. с Мейером (Meyer P. A.)) Existence et unicité des représentations intégrales dans les convexes compacts quelconques, *Ann, Inst. Fourier,* **13** (1963), 139—154.

Эберлейн (Eberlein W. F.)

[1] Weak compactness in Banach spaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA,* **33** (1947), 51—53.

Эрдейи (Erdélyi A.)

[1] Operational calculus and generalized functions, Reinhart, 1961.

Эренпрейс (Ehrenpreis L.)

[1] Solutions of some problems of division, *Amer. J. Math.,* **76** (1954), 883—903.

Юшкевич А. А.

[1] О строго марковских процессах, *Теория вероятн. и ее применения,* **2:2** (1957), 187—213.

Ямабе (Yamabe H.)

[1] см. Ито С. — Ямабе [2].

Именной указатель

Агмон (Agmon G.) 596
Акилов Г. П. 48, 245
Александров П. С. 39
Ароншайн (Aronszajn N.) 139
Ахиезер Н. И. 147, 289, 478, 485

Балакришнан (Balakrishnan V.) 358, 366
Банах (Banach S.) 41, 102, 103, 109, 120, 148, 161, 171, 194, 201, 206, 284, 289, 509
Бебутов М. В. 539
Бергман (Bergman S.) 139
Берс (Bers L.) 248
Биркгоф Г. (Birkhoff G.) 499, 519
Биркгоф Дж. (Birkhoff G. D.) 533, 536
Боголюбов Н. Н. 539
Бор (Bohr H.) 455
Бохнер (Bochner S.) 190, 192, 358, 366
Бурбаки (Bourbaki N.) 39, 41, 48, 81, 102, 120, 160, 171, 206

Ватанабе (Watanabe J.) 366
Вейль А. (Weil A.) 304, 306, 310
Вейль Г. (Weyl H.) 118, 446, 455
Веккен (Wecken F. J.) 444
Виленкин Н. Я. 388, 405
Винер (Wiener N.) 41, 232, 408, 490, 494
Вишик М. И. 581
Вулих Б. З. 499, 519

Гельфанд И. М. 102, 186, 233, 388, 405, 407, 408, 486, 488
Гильберт (Hilbert D.) 134
Гихман И. И. 563
Глазман И. М. 147, 289, 478, 485
Гординг (Gårding L.) 389, 396
Гофман (Hoffman K.) 499
Гротендик (Grothendieck A.) 102, 206, 384, 401, 405

Данфорд (Dunford N.) 53, 102, 120, 136, 138, 147, 160, 171, 184, 194, 206, 289, 312, 315, 320, 447, 485, 498, 533
Джекобс (Jacobs K.) 525
Дуб (Doob J. L.) 533, 563
Дынкин Е. Б. 546, 558, 563
Дэй (Day M. M.) 102
Дюфреснуа (Dufresnoy J.) 233

Иосида (Yosida K.) 131, 138, 299, 320, 343, 357, 358, 366, 395, 396, 407, 408, 421, 442, 444, 447, 462, 509, 515, 519, 525, 528, 538, 539, 546, 552, 559, 562, 573, 579, 585, 587
Ито К. (Ito K.) 546, 558, 563
Ито С. (Ito S.) 572, 587

Йордан (Jordan P.) 64

Какутани (Kakutani S.) 22, 53, 182, 299, 396, 515, 519, 525, 533
Канторович Л. В. 48, 245, 499, 519
Като (Kato T.) 299, 303, 347, 366, 374, 434, 580—582, 585, 595
Келли (Kelley J. L.) 39, 498
Келлог (Kellog O. D.) 395
Кёте (Köthe G.) 102, 171
Кисынский (Kisyński J.) 587
Кларксон (Clarkson J. A.) 182
Кодаира (Kodaira K.) 447
Колмогоров А. Н. 378, 545
Коматсу (Komatsu H.) 376, 594, 595
Котаке (Kotaké T.) 595
Крам (Crum M. M.) 233
Крейн М. Г. 22, 497—499, 515
Крейн С. Г. 515
Крылов Н. М. 539
Курош А. Г. 519

Ладыженская О. А. 581
Лакс (Lax P. D.) 134, 143, 145, 220, 248, 252, 579

Леви (Lewy H.) 253
Левитан Б. М. 310
Лере (Leray J.) 145
Лионс (Lions J. L.) 579—581
Лоэв (Loéve M.) 563
Люмер (Lumer G.) 345, 347

Маак (Maak W.) 310
Мазур (Mazur S.) 157, 171, 173, 186
Мак-Кин (McKean H.) 546, 558
Мальгранж (Malgrange B.) 207, 255, 257, 267
Маруяма (Maruyama G.) 546
Мейер (Meyer P. A.) 499, 563
Мизохата (Mizohata S.) 573
Микусинский (Mikusiński J.) 237, 238, 242
Мильграм (Milgram A. N.) 134
Мильман Д. П. 182, 497, 498
Мимура (Mimura Y.) 171, 396, 472
Минлос Р. А. 405
Миядера (Miyadera I.) 342
Морри (Morrey C. B.) 268

Нагумо (Nagumo M.) 319, 407
Надь (Nagy B. Sz.) 147, 472, 475, 485
Наймарк М. А. 408, 447, 463, 482, 494
Накано (Nakano H.) 444
Нарасимхан (Narasimhan M. S.) 595
Нейман (Neumann J. von) 64, 134, 277, 281, 299, 303, 308, 407, 434, 436, 455, 472, 473, 478, 533
Нейман К. (Neumann C.) 105
Нельсон (Nelson E.) 596
Ниренберг (Nirenberg L.) 248, 268, 596

Орнстейн (Ornstein D. S.) 529, 533

Петер (Peter F.) 455
Петре (Peetre J.) 268
Петровский И. Г. 268
Петтис (Pettis B. J.) 187
Питт (Pitt H. R.) 494
Плеснер А. И. 53, 319
Понтрягин Л. С. 463
Пэли (Paley E. R. A. C.) 232

Радо (Rado T.) 562
Райков Д. А. 408, 486, 488
Риккарт (Rickart C. E.) 408, 494
Рисс (Riesz F.) 124, 134, 147, 299, 378, 391, 472, 499, 519
Рылль-Нардзевский (Ryll-Nardzewski C.) 233
Рэй (Ray D.) 546

Сакс (Saks S.) 39
Сегё (Szegö G.) 131
Сигал (Segal I.) 494
Скороход А. В. 563
Смит (Smith P. A.) 536
Соболев С. Л. 41, 85, 117, 207, 245
Соболевский П. Е. 594
Стоун (Stone M. H.) 147, 289, 320, 350, 444, 447, 473, 478

Танабе (Tanabe H.) 589, 594, 595
Таннака (Tannaka T.) 362, 461
Тейлор (Taylor A.) 319
Титчмарш (Titchmarsh E. C.) 233, 447
Трев (Trêve F.) 268
Троттер (Trotter H. F.) 374

Феллер (Feller W.) 343, 546, 556—558, 563
Филлипс (Phillips R. S.) 102, 120, 194, 201, 299, 310, 311, 319, 320, 343, 345, 357, 358, 366, 376, 407, 559, 573, 579
Фрейденталь (Freudenthal H.) 347, 499, 519
Фреше (Fréchet M.) 64, 378
Фридман (Friedmann A.) 233, 265
Фридрихс (Friedrichs K.) 248, 347, 579
Фукамия (Fukamiya M.) 494, 515

Халмош (Halmos P. R.) 39, 138, 171, 444, 560
Хан (Hahn H.) 148
Хант (Hunt G. A.) 548, 563
Хаусдорф (Hausdorf F.) 112
Хевисайд (Heaviside O.) 237
Хелли (Helly E.) 158
Хеллингер (Hellinger E.) 444
Хёрмандер (Hörmander L.) 102, 117, 118, 207, 223, 228, 233, 253, 255, 261, 263—265, 267, 268
Хилле (Hille E.) 102, 120, 194, 201, 299, 321, 343, 352, 357, 407, 546, 556, 559

Хинчин А. Я. 533
Хопф Г. (Hopf H.) 39, 538
Хопф Э. (Hopf E.) 473, 474, 525, 528, 533

Чакон (Chacon R. V.) 529, 533

Шаттен (Schatten R.) 388
Шаудер (Schauder J.) 378, 390
Шварц Дж. (Schwartz J.) 53, 102, 120, 136, 138, 147, 160, 171, 194, 206, 289, 315, 447, 485, 498, 533
Шварц Л. (Schwartz L.) 41, 102, 145, 207, 220, 227, 232, 233, 343
Шилов Г. Е. 102, 233, 408, 486
Шмидт (Schmidt E.) 130
Шмульян В. Л. 201, 206
Шоке (Choquet G.) 499

Эберлейн (Eberlein W. F.) 201, 206
Эрдейи (Erdélyi A.) 242
Эренпрейс (Ehrenpreis L.) 207, 255

Юшкевич А. А. 546

Ямабе (Yamabe H.) 573

Предметный указатель

Абсолютно непрерывная функция 32
Аксиома отделимости полунорм 43
— — Хаусдорфа 12
Алгебра 406
σ-алгебра 28
Асимптотическая сходимость 63

База открытых множеств 92
Базис линейного пространства 37
Банахова алгебра (B-алгебра) 406
Банахово пространство (B-пространство) 81
Бикомпактная топологическая группа 456
Бикомпактное множество 14
Борелевские подмножества 34
Борнологическое пространство 71
Бочечное пространство 196
Бочка 196
Булева алгебра 502
Быстро убывающие функции 207
Бэровские подмножества 33
— функции 34

Векторная структура 500
Верхний предел последовательности множеств 61
Вещественный оператор 436
Внутренность множества 25
Воспроизводящее ядро 139
Вполне непрерывный оператор 378, 382
— ограниченное множество 26
В существенном самосопряженный оператор 434, 480
Выпуклая оболочка 48
Выпуклое множество 42

Гельфандовское представление 411
Гильбертово пространство 81
Гипотеза перемешивания 537
Гипоэллиптический оператор 118
График линейного оператора 114
Группа 303
Групповое кольцо 486

Диссипативный марковский процесс 541
— оператор 289, 345

Задача Дирихле 396
Замкнутое множество 12
— расширение 115
Замкнутый линейный оператор 114
Замыкание 12

Идеал 408
Измеримая функция (множество) 29
Изометрический оператор 280
Изометрическое отображение 163
Инвариантная подгруппа 304
Индекс дефекта 478
Индивидуальная эргодическая теорема 533
Индуктивный предел 48
Интеграл Бохнера 189
— Лебега 35
— Пуассона 231
— Радона 170
Интегральный оператор Гильберта — Шмидта 382
m-интегрируемая функция 31
Инфинитезимальный производящий оператор 327

Квазинормированное линейное пространство 52
Класс Харди — Лебега 67, 229
Компактное множество 180
Коэффициенты Фурье 127
Крайняя точка (подмножество) 497
Кратность собственного значения 291
— спектра 443, 444

Лемма Вейля 118
— Лебега — Фату 32
— Соболева 242
— Цорна 11
Линейное отображение (оператор, функционал) 37
— пространство 36
— топологическое пространство 44
Линейно независимые векторы 36
— упорядоченное множество 11

Локально бикомпактное пространство 15
— выпуклое пространство 45
— интегрируемая функция 75
— конечное открытое покрытие 90

Максимальный идеал 408
— симметрический оператор 476
— элемент 11
Марковский процесс 521
— — с инвариантной мерой 522
Медленно возрастающая мера (функция) 213
— растущая обобщенная функция 212
Мера 29
— Бореля 34
— Бэра 34
— Лебега 35
Метрическое пространство 12
Множество меры нуль 35
— первой (второй) категории 23
G_σ-множество 34

Направленное множество 150
Неплотное подмножество 23
Непрерывное отображение 13
Непрерывный спектр 290
— унитарный характер 487
Неприводимое представление 454
Неравенство Бесселя 127
— Гёльдера 56
— Гординга 245
— Минковского 55
— треугольника 51
— Шварца 65
Нетривиальный идеал 408
Нижний предел последовательности множеств 61
Норма вектора 51
— оператора 70
Нормальное пространство 17
Нормальный оператор 281
Нормированное кольцо 407
Нормированное поле 185
— пространство 51
— факторпространство 91
Носитель обобщенной функции 94
— функции 45
Нуль-подпространство оператора 37

Область определения (значений) оператора 37
Обобщенная мера 59
Обобщенная последовательность 150
— производная 77
— функция 74
Обобщенное решение 247
— спектральное разложение 483
Обобщенный нильпотентный элемент 413
Обратное преобразование Фурье 208, 216
Обратный оператор 37
Ограниченное подмножество линейного топологического пространства 71
Ограниченность функционала 134
Ограниченный линейный оператор 70
Одноточечное бикомпактное расширение 15
Окрестность 12
Операторное исчисление Данфорда 312
— — Микусинского 237
Оператор с конечным следом 338
Ортогональный вектор (дополнение, проекция) 121
Ортонормированная система (семейство, базис) 126
Остаточный спектр 291
Открытое множество 12
Относительная топология 12
Относительно бикомпактное подмножество 15
— компактное множество 180
Отрицательная норма 142, 219

Параболический оператор 261
Перестановочное соотношение 70
Плотное подмножество 23
Поглощающее множество 42
Полная вариация функции 59, 62, 170
Полное линейное топологическое пространство 152
— метрическое пространство 23
Положительность функционала 134
Положительный оператор 436
Полугруппа класса (C_0) 321
Полугрупповое свойство 320
Полунорма 41
Полуограниченный оператор 436
Полупростое кольцо 412
Полурефлексивность 199
Полускалярное произведение 345
Полуторалинейность функционала 134
Поляра 194

Пополнение пространства 86
Порождающее подпространство оператора 443
Потенциал 561
Почти-периодическая функция 455
Предгильбертово пространство 64
Предельная точка 12
Преобразование Кэли 280, 281
— Лапласа 229
— Фурье 208, 214, 217
— Фурье — Лапласа 226
Приводимое представление 454
Принцип Рэлея 442
Проблема моментов 155
Проектор 121
Произведение мер 33
— множеств 12, 15
— операторов 70
Производная Радона — Никодима 136
Простая функция 33
Простой спектр 443
Пространства Соболева 84
Пространство мер 58
— с мерой 29
— Фреше (F-пространство) 81
Прямое произведение обобщенных функций 100
Псевдорезольвента 299

Равенство Парсеваля 127, 210
Равномерная операторная топология 160
Равномерно выпуклое пространство 182
— ограниченные функции 125
Равностепенно непрерывная группа класса (C_0) 347
— — полугруппа класса (C_0) 314
— непрерывное семейство операторов 296
— непрерывные функции 125
Радикал 412
Разбиение единицы 92
Разложение единицы 426
— Жордана 60
— Фурье 129
— Хана 60
Разностный оператор 337
Расширение оператора 38
Регулярная обобщенная функция 75
Регулярное пространство 18
Резольвента 290
Резольвентное множество 290
— уравнение 293
Рефлексивность 133, 163, 199
Ряд Неймана 105

Самосопряженный оператор 274
Свертка 211, 220, 224
Секвенциально компактное множество 180
— полное пространство 152
— слабо полное пространство 172
Сепарабельное пространство 190
Сепарабельнозначная функция 187
Сжимающая полугруппа класса (C_0) 322
Сильная измеримость 187
— операторная топология 160
— сходимость 52, 54
— топология 160
Сильно эллиптический оператор 245, 261
Сильный предел 104
Симметрическая разность 35
Симметрический оператор 274
Скалярное произведение 66
Слабая измеримость 187
— сходимость 172
— топология 161
Слабая * сходимость 179
— топология 160
Слабо голоморфное отображение 183
Следовая норма 388
Собственный вектор (значение, подпространство) 291
Сопряженное пространство 133
Сопряженный дифференциальный оператор 119
— оператор 269, 272
Спектр 290, 413
Спектральное разложение нормального оператора 422
— — самосопряженного оператора 431
— — унитарного оператора 422
Спектральный радиус 295
Статистическая эргодическая теорема 297, 532
— — — фон Неймана 298
Структура 11
Сужение оператора 38
Существенно ограниченная функция 57
Сходимость в среднем 57
— по мере 63

Тауберова теорема Винера 490
Теорема Ароншайна — Бергмана 139
— Асколи — Арцела 125
— Банаха о замкнутом графике 116
— — об открытости отображения 112

Теорема Бохнера 473
— Бэра 24, 25
— Бэра — Хаусдорфа 24
— Вейерштрасса 109
— — об аппроксимации непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами 22
— — — — — функций полиномами 19
— Винера 416
— Витали — Хана — Сакса 106
— Гельфанда — Мазура 186
— Гильберта — Шмидта 448
— Данфорда 184
— двойственности Таннака 460
— Егорова 30
— Крейна — Мильмана 497
— Крылова — Вайнштейна 441
— Лакса — Мильграма 134
— Лебега — (Радона) — Никодима 136
— Лерха 234
— Мильмана 182
— о пополнении 86
— — представлении для полугрупп 343
— — равномерной ограниченности 103
— — разбиении единицы 93
— — резонансе 104
— — сгущении особенностей 110
— Парсеваля 218
— Петера — Вейля — Неймана 454
— Планшереля 216
— Пэли — Винера 226, 227, 229
— Радона — Никодима 515
— Реллиха — Гординга 389
— Рисса о представлении линейного функционала 132
— Стоуна 350, 472
— Стоуна — Вейерштрасса 20
— Титчмарша 233
— Тихонова 16
— Троттера — Като 370
— Урысона 18
— Филлипса 374
— Фридрихса 248, 347
— Фубини — Тонелли 33
— Хана — Банаха 148, 153, 154
— Хёрмандера 118, 264
— — о сравнении операторов 117
— Хилле — Иосида 343
— Шаудера 390
— Шмидта об ортогонализации 130
— Эберлейна — Шмульяна 201
Теория Рисса — Шаудера 392

Тихоновское произведение 16
Топологическая группа 305
Топологическое пространство 12
Топология простой (ограниченной) сходимости 159
Тотальное множество 143
Точечный спектр 290
Точка накопления 12

Унимодулярная группа 303
Унитарно эквивалентные операторы 444
Унитарный оператор 280
Уравнение Чепмена — Колмогорова 521
Уравновешенное множество 42
Условие Коши 23
— Линдеберга 546
Усреднение 222

Факторгруппа 305
Факторпространство 39
Формально гипоэллиптический оператор 267
Формула Лейбница 79
— обращения Поста — Уиддера 359
— — Фурье 209, 215
— Хёрмандера 80
Фундаментальная обобщенная последовательность 152
— последовательность 23
— система окрестностей 48
Фундаментальное решение 254
Функционал Минковского 43
Функция Хевисайда 78

Характеристическая функция множества 32

Центрированная система 16

Частично упорядоченное множество 10

Эволюционное уравнение 565
Эквивалентные матричные представления 458
Эргодическая гипотеза Больцмана 522

Ядерное пространство 401
Ядерный оператор 385, 400
Ядро Бергмана 140
— Гильберта — Шмидта 382

Оглавление

Предисловие переводчика 5

Предисловие 7

Введение 9

1. Теория множеств 9
2. Топологические пространства 11
3. Пространства с мерой 28
4. Линейные пространства 36

Литература 39

I. Полунормы 42

1. Полунормы и локально выпуклые линейные топологические пространства 42
2. Нормы и квазинормы 51
3. Примеры нормированных линейных пространств 54
4. Примеры квазинормированных линейных пространств 63
5. Предгильбертовы пространства 64
6. Непрерывность линейных операторов 68
7. Ограниченные множества и борнологические пространства . . . 73
8. Обобщенные функции и обобщенные производные 71
9. B-пространства и F-пространства 81
10. Пополнение 86
11. Факторпространства B-пространств 91
12. Разбиение единицы 92
13. Обобщенные функции с бикомпактными носителями 94
14. Прямое произведение обобщенных функций 98

Литература к главе I 102

II. Приложения теоремы Бэра — Хаусдорфа 103

1. Теорема о равномерной ограниченности 103
2. Теорема Витали — Хана — Сакса 105
3. Почленная дифференцируемость последовательности обобщенных функций 108
4. Теорема о сгущении особенностей 109
5. Теорема об открытости отображения 112
6. Теорема о замкнутом графике 114
7. Об одном приложении теоремы о замкнутом графике (теорема Хёрмандера) 117

Литература к главе II 120

III. Ортогональная проекция и теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала 121

1. Ортогональная проекция 121
2. „Почти ортогональные“ элементы 124
3. Теорема Асколи — Арцела 125
4. Ортогональный базис. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля 126
5. Ортогонализация (по Шмидту) 130
6. Теорема Ф. Рисса о представлении линейного функционала . . . 132
7. Теорема Лакса — Мильграма 134
8. Одно доказательство теоремы Лебега — Никодима 136
9. Воспроизводящее ядро 139
10. Отрицательная норма по Лаксу 140
11. Локальная структура обобщенных функций 145
Литература к главе III 147

IV. Теоремы Хана — Банаха 148

1. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в вещественных линейных пространствах 148
2. Обобщенный предел 150
3. Полные локально выпуклые линейные топологические пространства 152
4. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в комплексных линейных пространствах 153
5. Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов в нормированных линейных пространствах 154
6. Существование нетривиальных непрерывных линейных функционалов 155
7. Операторные топологии 159
8. Вложение пространства X во второе сопряженное пространство X'' 161
9. Примеры сопряженных пространств 164
Литература к главе IV 171

V. Сильная сходимость и слабая сходимость 172

1. Слабая сходимость и слабая * сходимость 172
2. Слабая компактность в рефлексивных B-пространствах. Равномерная выпуклость 180
3. Теорема Данфорда и теорема Гельфанда — Мазура 183
4. Слабая и сильная измеримость. Теорема Петтиса 187
5. Интеграл Бохнера 189
Литература к главе V 194

Приложение к главе V. Слабые топологии и сопряженность в локально выпуклых линейных топологических пространствах 194

1. Поляры 194
2. Бочечные пространства 196
3. Полурефлексивность и рефлексивность 199
4. Теорема Эберлейна — Шмульяна 201

VI. Преобразование Фурье и дифференциальные уравнения 207

1. Преобразование Фурье быстро убывающих функций 207
2. Преобразование Фурье медленно растущих обобщенных функций 212
3. Свертки 220
4. Теоремы Пэли — Винера. Преобразование Лапласа 226
5. Теорема Титчмарша 233
6. Операторное исчисление Микусинского 237
7. Лемма Соболева 242
8. Неравенство Гординга 245
9. Теорема Фридрихса 247
10. Теорема Мальгранжа — Эренпрейса 253
11. Дифференциальные операторы с переменными коэффициентами 261
12. Гипоэллиптические операторы. Теорема Хёрмандера 263

VII. Сопряженные операторы 269

1. Сопряженные операторы в локально выпуклых линейных топологических пространствах 269
2. Сопряженные операторы в гильбертовом пространстве 272
3. Симметрические и самосопряженные операторы 273
4. Унитарные операторы. Преобразование Кэли 280
5. Операторы с замкнутой областью значений 284
Литература к главе VII 289

VIII. Резольвента и спектр 290

1. Резольвента и спектр 290
2. Резольвентное уравнение и спектральный радиус 293
3. Статистическая эргодическая теорема 295
4. Обобщение эргодических теорем Хилле о псевдорезольвентах 299
5. Среднее значение почти-периодической функции 303
6. Резольвента сопряженного оператора 310
7. Операторное исчисление 312
8. Изолированные особые точки резольвенты 315
Литература 319

IX. Аналитическая теория полугрупп 320

1. Полугруппы класса (C_0) 320
2. Равностепенно непрерывные полугруппы класса (C_0) в локально выпуклых пространствах. Примеры полугрупп 324
3. Инфинитезимальный производящий оператор равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) 327
4. Резольвента инфинитезимального производящего оператора A 331
5. Примеры инфинитезимальных производящих операторов 334
6. Показательная функция непрерывного линейного оператора, степени которого равностепенно непрерывны 337
7. Представление равностепенно непрерывной полугруппы класса (C_0) с помощью соответствующего инфинитезимального производящего оператора 339
8. Сжимающие полугруппы и диссипативные операторы 345
9. Равностепенно непрерывные группы класса (C_0). Теорема Стоуна 347
10. Голоморфные полугруппы 350

11. Дробные степени замкнутых операторов 357
12. Сходимость последовательностей полугрупп. Теорема Троттера — Като 370
13. Сопряженные полугруппы. Теорема Филлипса 374

X. Вполне непрерывные операторы 378

1. Бикомпактные множества в B-пространствах 378
2. Вполне непрерывные операторы и ядерные операторы 382
3. Теорема Реллиха — Гординга 389
4. Теорема Шаудера 390
5. Теория Рисса — Шаудера 391
6. Задача Дирихле 396

Приложение к главе X. Ядерное пространство Гротендика 399

XI. Нормированные кольца и спектральное представление линейных операторов 406
1. Максимальные идеалы нормированного кольца 408
2. Радикал кольца. Полупростые кольца 412
3. Спектральное разложение ограниченных нормальных операторов 417
4. Спектральное разложение унитарного оператора 422
5. Разложение единицы 426
6. Спектральное разложение самосопряженного оператора 432
7. Вещественные и полуограниченные операторы. Теорема Фридрихса 436
8. Спектр самосопряженного оператора. Теорема Крылова—Вайнштейна. Кратность спектра 439
9. Разложение элемента пространства. Условие отсутствия непрерывного спектра 445
10. Теорема Петера — Вейля — Неймана 449
11. Теорема двойственности для некоммутативных бикомпактных групп 455
12. Функции самосопряженных операторов 463
13. Теорема Стоуна и теорема Бохнера 472
14. Каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром 475
15. Индекс дефекта симметрического оператора. Обобщенное разложение единицы 478
16. Групповое кольцо L^1 и тауберова теорема Винера 485

XII. Другие теоремы о представлении в линейных пространствах . . . 497

1. Крайние точки. Теорема Крейна — Мильмана 497
2. Векторные структуры 499
3. B-структуры и F-структуры 506
4. Теорема Банаха о сходимости 509
5. Представление векторной структуры при помощи функций точки 510
6. Представление векторной структуры при помощи функций множества 515

XIII. Эргодическая теория и теория диффузионных процессов . . . 520

1. Марковский процесс с инвариантной мерой 520
2. Индивидуальная эргодическая теорема и ее приложения 525
3. Эргодическая гипотеза и H-теорема 534
4. Эргодическое разложение марковского процесса с локально бикомпактным фазовым пространством 539
5. Броуновское движение в однородном римановом пространстве 545
6. Обобщенный лапласиан (Феллер) 552
7. Расширение диффузионного оператора 558
8. Марковские процессы и потенциалы 561

XIV. Интегрирование эволюционных уравнений 564

1. Интегрирование уравнения диффузии в пространстве $L^2(R^m)$ 565
2. Интегрирование уравнения диффузии в бикомпактном римановом пространстве 573
3. Интегрирование волнового уравнения в евклидовом пространстве R^m 576
4. Интегрирование неоднородных во времени эволюционных уравнений в рефлексивном B-пространстве 579
5. Метод Танабе и Соболевского 588

Литературные указания и замечания 594

Библиография 597

Именной указатель 613

Предметный указатель 616

К. Иосида

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Редактор *Н. Плужникова* Художник *К. П. Сиротов*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов* Технический редактор *М. П. Грибова*

Сдано в производство 27/I 1967 г. Подписано к печати 7/VI 1967 г. Бумага тип. № 1
$60 \times 90^1/_{16}$ = 19,5 бум. л. 39,0 печ. л. Уч.-изд. л. 36,73. Изд. № 1/3772. Цена 2 р. 85 к.
Зак. 539

(Темплан 1967 г. изд-ва «Мир», пор. № 9)

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР". Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29.