О. НЕЙГЕБАУЕР

# ТОЧНЫЕ НАУКИ В ДРЕВНОСТИ

О. НЕЙГЕБАУЕР

# ТОЧНЫЕ НАУКИ В ДРЕВНОСТИ

*Перевод с английского*
Е. В. ГОХМАН

*Под редакцией и с предисловием*
А. П. ЮШКЕВИЧА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

5(09)
Н 45
УДК 501(09)

# THE EXACT SCIENCES IN ANTIQUITY

BY
O. NEUGEBAUER

*Second Edition*

BROWN UNIVERSITY PRESS
PROVIDENCE, RHODE ISLAND
1957

*Отто Нейгебауер*
Точные науки в древности
М., 1968 г., 224 стр. с илл.

Редакторы *А. Ф. Лапко* и *Г. Ф. Рыбкин*

Техн. редактор *И. Ш. Аксельрод* Корректор *О. А. Бутусова*

Сдано в набор 13/V 1968 г. Подписано к печати 11/XI 1968 г.
Бумага 60×90¹/₁₆. Физ. печ. л. 14+вкл. 1 печ. л. Условн. печ. л. 15. Уч.-изд. л. 16,23.
Тираж 12000 экз. Цена книги 1 р. 39 к. Заказ № 682

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

2-я тип. «Наука». Москва, Шубинский пер. 10

2-2-1
73-68

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# СПИСОК ТАБЛИЦ

## ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию советских читателей книга профессора О. Нейгебауера возникла из шести публичных лекций, прочитанных им в 1949 г. в Корнелльском университете (США).

В несколько переработанном виде эти лекции, дополненные примечаниями более специального характера, чем основной текст, были изданы в 1951 г. и вторично в 1957 г.

Во второе издание автор внес ряд дополнений и, в частности, добавил два больших приложения о системе Птолемея и о греческой математике, а также существенно переработал IV и V главы.

Центральной проблемой книги является возникновение и распространение эллинистической науки, уходящей своими корнями в древневосточные цивилизации. «В плавильном горне „эллинизма", — пишет Нейгебауер, — развилась та форма науки, которая позднее распространилась повсеместно от Индии до Западной Европы и господствовала вплоть до создания современной науки во времена Ньютона» (стр. 17). При этом автор ограничивается рассмотрением тех областей, в которых чувствует себя компетентным, именно, математики и астрономии. Астрономии уделяется большое место: автор справедливо усматривает в ней важнейший движущий фактор развития науки, начиная с середины первого тысячелетия до н. э. и до рубежа XVIII и XIX вв. Между тем история астрономии древних времен, которая является одной из наиболее перспективных областей историко-научного исследования, изучена до сих пор весьма фрагментарно.

На русском языке еще 30 лет назад появились в переводе С. Я. Лурье «Лекции по истории античных математических наук, т. 1. Догреческая математика» О. Нейгебауера (М. — Л., 1937), на немецком языке вышедшие в 1934 г. «Точные науки в древности» существенно отличаются от «Лекций» и по форме, и по содержанию.

«Лекции» были рассчитаны на специалистов по истории науки, данная же книга, написанная чрезвычайно живо и интересно, обращается прежде всего к широкому кругу читателей, интересующихся историей культуры и науки. Это не значит, что «Точные науки в древности» имеют малую ценность для специалистов. Отнюдь нет: историк науки найдет в основном тексте и в примечаниях многие отправные пункты для дальнейших размышлений и исследований, в том числе прямые указания на нерешенные проблемы и трудности, которые Нейгебауер не скрывает, и даже нередко подчеркивает; помимо того, примечания содержат многочисленные ценные литературные указания.

Далее, в «Лекциях» Нейгебауер ограничился почти исключительно математикой Египта и Вавилона. Проблемы истории античной астрономии должны были статьпредметом одного из следующих томов «Лекций», которые не увидели света.

В данном труде О. Нейгебауер рассматривает развитие математики Египта и Вавилона вместе с астрономией и притом под углом зрения становления и дальнейшей передачи эллинистической науки, которой посвящены обширные и, пожалуй, особенно ценные разделы книги. На русском языке изложение всего соответствующего комплекса вопросов пока отсутствовало.

В этой связи следует заметить, что никакого перекрытия с «Пробуждающейся наукой» Б. Л. ван-дер-Вардена (М., 1959) здесь нет ни в фактической части, ни в идейном смысле, так как взгляды обоих ученых и на древневосточную и на эллинистическую науку во многом значительно расходятся [1]). Наконец, между 1934 и 1957 гг. в изучении античных математических наук было сделано много новых открытий, которые автор использовал при подготовке данного труда.

Краткие указания на результаты исследований, проведенных после 1957 г., и на соответствующую литературу читатель найдет в примечаниях редактора перевода.

Книги О. Нейгебауера содержат большое богатство оригинальных идей, остроумные реконструкции античных методов, яркие характеристики больших периодов в развитии наук, оценки отдельных идеологических направлений, гипотезы о появлении тех или иных задач и теорий и т. д. Правда, в конце данного труда автор пишет: «... все, что мы можем надеяться установить в историческом исследовании, — это факты и условия, но ни в коем случае не причины» (стр. 214). Я не знаю, однако, в каком смысле употреблены и противопоставлены здесь слова «условия» (conditions) и «причины» (causes). Быть может, Нейгебауер выдвинул такой тезис в связи с трудностью исторически объяснить некоторые важные события в истории науки, например, возник-

---

[1]) Достаточно привести для примера расхождения между Нейгебауером и ван-дер-Варденом в оценке сказаний о раннем периоде греческой математики — о Фалесе, Пифагоре и т. д., или же в оценке роли Платона.

новение в V—IV вв. до н. э. в Афинах и греческих колониях в Италии так называемой высшей математики (см. пункт 63). В упомянутом случае он вообще отказывается от какого-либо объяснения. Нередко, однако, Нейгебауер предлагает каузальные объяснения: достаточно напомнить выдвинутую им гипотезу о происхождении позиционной шестидесятеричной системы нумерации.

Создается впечатление, что О. Нейгебауер воздерживается от теорий или гипотез там, где считает недостаточными фактические знания; впрочем, иногда он и в этих случаях выдвигает «рабочие гипотезы» (стр. 149). И он решительно отвергает не опирающиеся на реальные основания домыслы, вроде попыток свести особенности развития науки в различных странах к особенностям египетского, вавилонского или греческого духа. Еще в «Лекциях» О. Нейгебауер писал, что такие высказывания, по существу, только выражают неуменье понять разбираемое явление.

Отнюдь не все реконструкции и воззрения О. Нейгебауера общепризнаны. Многие исследователи отвергают только что упомянутую гипотезу происхождения шестидесятеричного вавилонского счета и предлагают собственные объяснения. Выдвигаются возражения против предложенной Нейгебауером трактовки и «завышенной» оценки вавилонской алгебры, в частности, против его толкования хода решения задач, которые можно представить уравнениями 3 и 4 степени. Расходятся мнения в трактовке вавилонских текстов пифагоровых чисел. По-разному оценивается и уровень точных наук в Египте и т. д. В редакционных примечаниях приведены сведения о наиболее важных работах, в которых критически анализируются те или иные воззрения Нейгебауера.

Концепция египетской и вавилонской математики, предложенная О. Нейгебауером более 30 лет назад, не претерпела заметных изменений. Все же, если ранее он особенно подчеркивал высокий уровень вычислительной техники вавилонян, их успехи в области алгебры и применение ими математических доказательств для вывода из одних предложений других, то теперь, не отрицая всего сказанного, он предостерегает от переоценки этих достижений.

Вавилонская математика, — говорит он, — была «глубоко элементарной», и никогда «не перешагнула порога донаучного мышления» (стр. 62). Только в математической астрономии ученые последних трех веков истории Вавилона достигли равенства с их греческими современниками. «Донаучность» математической мысли вавилонян Нейгебауер видит в том, что они остановились перед открытием иррациональности $\sqrt{2}$, хотя и обладали, подобно грекам, всем для этого необходимым, в противоположность «чрезвычайно примитивной» математике Египта.

Если даже такие открытия содержатся в каких-либо неизвестных нам вавилонских источниках, то «последствия этого результата не были осознаны».

Все эти рассуждения О. Нейгебауера мне представляются неясными. Во-первых, арифметическое доказательство иррациональности, о котором здесь говорит Нейгебауер, опирается на элементарную теорию делимости, наличие которой в вавилонской математике ничем не засвидетельствовано. Во-вторых, употребление термина «донаучное мышление» нуждается в его определении. Поскольку неизвестно, что именно О. Нейгебауер под этим разумеет, его утверждение теряет всякую определенность.

В предлагаемой читателю книге особенно интересны главы о вавилонской астрономии, эллинистической науке и два примыкающие к ним приложения. Я уже сказал, что историк науки найдет в книге Нейгебауера немало стимулов к новым изысканиям; к только что названным разделам это относится, быть может, в наибольшей мере. Не перечисляя такие вопросы, я отмечу лишь некоторые элементы концепции Нейгебауера, имеющие общий интерес.

Весьма важны соображения О. Нейгебауера о взаимных связях между восточной математикой и ранней греческой, которая вначале «не могла сильно отличаться от математики героно-диофантова типа» (стр. 150).

Для решения вопроса о влиянии математики Вавилона на греческую данных все еще недостаточно. Все же Нейгебауер предлагает заслуживающую внимания рабочую гипотезу: теория иррациональностей и примыкающие к ней интеграционные методы были чисто греческого происхождения, но в геометрической алгебре были использованы результаты, известные в Месопотамии и проникшие в Грецию во времена, близкие к столкновению Македонии с Персией (пункт 62). Наряду с этим, как упоминалось, Нейгебауер считает невозможным объяснить самый факт возникновения в тогдашней Греции «высшей математики». Он лишь отмечает в этой связи, что роль Платона в развитии математики в Греции сильно преувеличивалась, что нет оснований полагать, будто Теетет или Евдокс чему-либо могли научиться у Платона, и что воздействие последнего на астрономию могло быть лишь отрицательным. Доктрины Платона, иронически замечает автор, оказали зато большое влияние на современное истолкование греческой науки. «Но если бы ученые нашего времени уделили столько же внимания Галену или Птолемею, сколько Платону и его последователям, то они пришли бы к совершенно другим выводам и не изобрели бы мифа о замечательном свойстве так называемого греческого духа развивать научные теории, не прибегая к эксперименту или опытной проверке» (стр. 153).

Именно обращение к Птолемею, вообще к астрономии и применявшимся в ней расчетным методам, с одной стороны, и к связям с Древним Вавилоном,— с другой, позволило О. Нейгебауеру раскрыть особенности развития математики в Греции и эллинистических странах, которые ранее проходили мимо многих исследователей, а также по-новому осветить эпоху, обычно характеризуемую как время упадка античной науки. Подъему математики в трудах Евклида, Архимеда, Аполлония обычно противопоставляли ее спад в сочинениях Герона Александрийского и позднейших «эпигонов». Это было бы верно,— указывает Нейгебауер,— если бы геометрические сочинения Герона являлись продолжением именно классических трудов III в. до н. э. Это, однако, не так: на самом деле руководства Герона выражали собой «эллинистическую форму общей восточной традиции» (стр. 148).

Вообще, распространенное мнение, согласно которому богатая и развитая греческая геометрия эпохи расцвета сменилась в столетия упадка отдельными экскурсами в область алгебры и теории чисел, является глубоко ошибочным. Убедительная критика этого мнения дана в VI главе и II приложении, в начале которого коротко и отчетливо сформулирована собственная концепция автора. Не воспроизводя ее здесь, замечу лишь, что нарисованная им яркая и в главном убедительная картина основных линий развития математики в Греции и эллинистических районах Римской империи нуждается все же в дальнейшем уточнении и углублении (ср. статью И. Г. Башмаковой, указанную на стр. 148).

Помимо математической и астрономической литературы, в том числе индийской и арабской, Нейгебауер использует астрологические сочинения: астрологические верования служили в древности и в средние века одной из главных причин передачи астрономических знаний от одного народа другому. Часто полагают, что астрономия даже возникла из астрологии. О. Нейгебауер не видит никаких свидетельств в пользу этого предположения. Он считает более вероятным главным побудительным мотивом развития астрономии потребность в усовершенствовании лунного календаря (пункт 69).

Большую ценность имеют оба приложения. В первом дан превосходный разбор системы Птолемея и ее оригинальное сравнение с системой Коперника и трудами Кеплера (см. пункт 83). Во втором, помимо уже отмеченных общих замечаний о «неклассических» направлениях греческой математики, рассмотрен ряд числовых и графических задач, возникавших в эллиптической астрономии и требовавших усовершенствования или нового развития математических методов — сферической геометрии, тригонометрии хорд, начертательной геометрии и т. д. Дальнейшие изыскания в этой области обещают быть весьма плодотворными.

Нельзя не упомянуть в данной связи замечания Нейгебауера о применении теории конических сечений в картографии (пункт 88) и о возможности астрономического происхождения начал этой теории и классической задачи о трисекции угла (именно, в учении о солнечных часах; см. примечание к пункту 88).

Я полагаю, что русский перевод труда О. Нейгебауера, соединяющего достоинства увлекательной популярной книги и оригинального научного исследования, не только знакомящего с уже достигнутыми результатами, но и ставящего новые актуальные задачи, найдет многих читателей и что его чтение — и изучение — позволит им сочетать utile dulci, приятное с полезным.

В редактировании перевода мне большую помощь оказал А. А. Юшкевич.

Автору книги я весьма обязан некоторыми уточнениями текста и библиографии, сообщенными мне письменно.

11 марта 1967 г.

*А. П. Юшкевич*

*Рихарду Куранту*
*в знак дружбы и благодарности*

## ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Первая серия «Мессенджеровских лекций о развитии цивилизации» в Корнелльском университете была прочитана Джемсом Генри Брестедом, знаменитым египтологом и основателем Восточного института при Чикагском университете. Мало кто из ученых сделал для понимания нами древних цивилизаций и для привлечения интереса ученых и любителей к исследованиям древнего Ближнего Востока столь же много, как Брестед. Лично я особенно многим обязан Брестеду, чья «История Египта» послужила для меня первым стимулом к изучению древних восточных цивилизаций — области, которой я всегда с тех пор занимался и о роли которой в истории науки я расскажу на последующих страницах. Возможностью следовать по этому пути с самых ранних дней моих аспирантских занятий в Геттингене я обязан никогда неослабевавшим поощрению и поддержке Р. Куранта. Еще более я обязан ему тем, что он ввел меня в современные математику и физику как в части наших духовных исканий, никогда не изолирующиеся друг от друга или от любой другой области нашей цивилизации. Посвящая ему эти лекции, я только публично признаю свой долг за его глубокое влияние на мое собственное развитие.

Последующие главы довольно точно следуют порядку шести лекций, прочитанных мною в Корнелльском университете осенью 1949 г. Я ясно понимаю, что при такой форме изложения ряд утверждений высказывается без необходимых многочисленных оговорок и знаков вопроса. Я понимаю также, что это дает широкую возможность цитировать мои утверждения и использовать их в таком смысле, которого я не предполагал или не предвидел. И я не сомневаюсь, что ряд выводов впоследствии будет изменен и исправлен. Я отношусь исключительно скептически к любой попытке достичь «синтеза», что бы ни означал этот термин, и я убежден в том, что единственной основой прочного знания является специализация. Тем не менее я рад возможности хотя бы раз отказаться от всего научного аппарата и делать вид, что я знаю, в тех случаях, когда я только предполагаю. Это не означает, что я игнорирую факты. Действительно, я последовательно стараюсь держаться как можно ближе к источникам. Только в их выборе, расположении и связной интерпретации я позволяю себе гораздо больше свободы, чем это принято в специальных публикациях. И чтобы как-то противодействовать представлению о достоверности, легко возникающему из общих рассуждений, я часто вставляю методологические замечания с целью напомнить читателю об исключительно шатком основании, на котором, по необходимости, построен всякий анализ исторического развития, имевшего место много веков назад. Распространенное мнение, что с возрастанием расстояния мы выигрываем в «исторической перспективе», по-моему, совершенно не соответствует фактическому положению вещей. Мы выигрываем только в самонадеянности, с какой мы делаем обобщения, на которые бы никогда не осмелились, если бы имели доступ к реальному богатству современных свидетельств.

Название «Точные науки в древности» не означает, что я предполагаю дать исчерпывающий анализ этого обширного предмета. То, что я пытаюсь здесь представить, — это обзор исторических связей между математикой и астрономией в древних цивилизациях, а не история этих дисциплин в хронологическом порядке. Поскольку работы сэра Томаса Хиса являются превосходным руководством по греческой математике, я не счел нужным пересказывать в лекциях их содержание. По греческой астрономии ничего подобного нет, но сугубо технический характер этой астрономии делает невозможным ее детальный анализ в данной книге. Поэтому основной упор сделан на математику и астрономию Вавилонии и Египта и на их связи с эллинистической наукой.

В примечаниях, следующих за каждой главой, я добавил некоторые специальные детали, заслуживающие, по моему мнению, дальнейшего изучения. Я привожу также некоторые работы, уводящие далеко в сторону от того направления, которого я здесь придерживаюсь, так как считаю, что эта книга лучше достигнет своей цели, если она убедит читателя в том, что в ней он найдет лишь один из многих путей подхода к предмету, слишком обширному, чтобы его можно было исчерпать в шести главах. Вместо попытки достичь полноты, я старался передать читателю какую-то долю очарования, заключающегося в активной работе над историческими проблемами. Я хотел поставить его перед одной из вечно меняющихся картин, которые как бы служат руководящим принципом дальнейшего исследования.

## ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

> Ты навсегда в ответе за всех, кого приручил.
>
> *Сент-Экзюпери*

Когда я готовил второе издание, мне опять помогали мои друзья и коллеги, особенно А. Сакс (A. Sachs), но я один ответствен за любые утверждения, которые могут оказаться ошибочными или несостоятельными в свете дальнейших исследований.

Я очень благодарен Броунскому университету и особенно его библиотекарю Д. А. Джона (D. A. Jonah) за то, что они сделали возможным опубликование этой книги. Торкил Олсен (Torkil Olsen) из Копенгагена оказал большую помощь в организации печатания, выполненного с традиционным мастерством в Одензе (Дания).

Для того чтобы книга не отставала от времени, было сделано много дополнений, касающихся полученных недавно результатов. Вновь написаны большие разделы, относящиеся к египетской астрономии и к вавилонской теории планет. Добавлены два совершенно новых приложения, одно о греческой математике, другое — о системе Птолемея и ее модификации Коперником.

Я надеюсь, что, несмотря на это расширение, мне удалось избежать превращения моих лекций в руководство.

*О. Н.*

# ХРОНОЛОГИЧЕСКАЯ ТАБЛИЦА

См. также фронтиспис

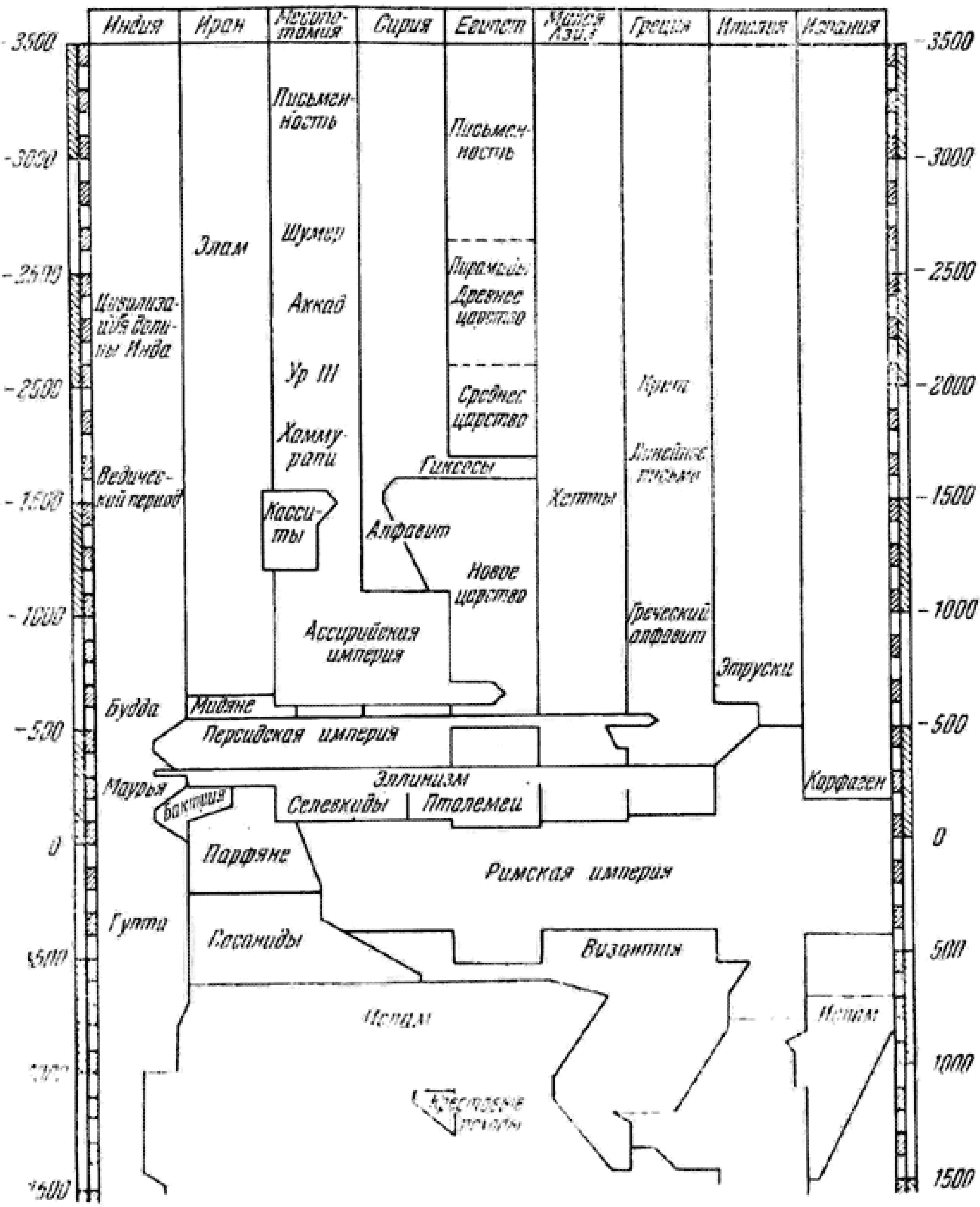
Даты приблизительные

— 1700 Древняя Вавилония
— 1300 Сети I
— 650 Ашшурбанипал
— 430 Метон
— 375 Архит
— 370 Евдокс
— 350 Аристотель
— 311 Начало эры Селевкидов
— 300 Евклид
— 275 Аристарх
— 275 Арат
— 275 Берос
— 250 Эратосфен
— 240 Архимед
— 200 Аполлоний
— 150 Гиппарх
— 100 Феодосий (?)
— 100 Тевкр (?)
— 75 Гемин
+ 10 Манилий
60 Плиний
75 Герон
75 Последний клинописный текст
100 Менелай
150 Птолемей
160 Веттий Валент
160 Гален
340 Папп
350 Диофант (?)
360 Теон Александрийский
380 Павел Александрийский
450 Прокл
500 Ариабхатта
500 Реторий
550 Вараха-Михира
650 Север Себохт
650 Брахмагупта
825 ал-Хорезми
850 Абу Машар
900 ал-Баттани
1000 Ибн Юнис
1000 Ибн ал-Хайсам
1000 ал-Бируни
1000 Свида
1130 Аделард из Бата
1150 Бхаскара
1170 Маймонид
1250 Альфонс X
1250 Бар-Гебреус
1430 Улуг-бек
1500 Коперник
1540 Ретик
1575 Тихо Браге
1600 Кеплер
1680 Галлей
1686 Ньютон
1700 Кассини
1760 Лежантиль

«И когда он достигает отрочества, им овладевает горячая любовь к истине, как одержимый, ни днем, ни ночью не может он перестать подгонять себя и напрягаться, чтобы изучить в совершенстве все, что было сказано наиболее знаменитыми из древних. И когда он это изучит, тогда в течение долгого времени он должен испытывать и проверять это, выяснить, что из этого согласуется, а что противоречит очевидным фактам; таким образом, он выберет одно и отбросит другое. Для такого человека, я надеюсь, мой трактат окажется очень полезным. До сих пор, однако, такие люди немногочисленны, в то время как для других эта книга будет столь же излишня, как история, рассказанная ослу».

Гален,
О естественных способностях,
III, 10.

[Цитируется по английскому переводу в издании: Galen on the Natural Faculties, with an English translation by Arthur John Brock, Loeb Classical Library, London, 1916, стр. 279—281.]


Индия
Иран
Месопотамия
Сирия
Египет
Малая Азия
Греция
Италия
Испания
-3500
-3000
-2500
-2000
-1500
-1000
-500
0
500
1000
1500
Письменность
Элам
Шумер
Аккад
Ур III
Хаммурапи
Касситы
Цивилизация Долины Инда
Ведический период
Письменность
Пирамиды
Древнее царство
Среднее царство
Гиксосы
Алфавит
Новое царство
Хетты
Крит
Линейное письмо
Греческий алфавит
Ассирийская империя
Этруски
Будда
Мидяне
Персидская империя
Эллинизм
Маурья
Бактрия
Селевкиды
Птолемеи
Карфаген
Парфяне
Римская империя
Гупта
Сасаниды
Византия
Ислам
Ислам
Крестовые походы

# ВВЕДЕНИЕ

Исследование распространения математических и астрономических знаний является одним из наиболее действенных способов установления связей, существовавших между различными цивилизациями. Стили в искусстве, религиозные или философские учения могут развиваться независимо или распространяться на большие расстояния путем медленного и далеко не прямого процесса диффузии. Сложные астрономические методы, включающие использование точно вычисленных констант, наоборот, требуют для своего распространения непосредственного использования научных трактатов и поэтому зачастую дают нам очень точную информацию о времени и обстоятельствах контакта. Это также даст нам возможность правильно оценить вклад, принадлежащий новому потребителю чужого метода или внесенные этим потребителем видоизменения. Короче говоря, присущая математическим наукам точность в известной мере отразится и на решении чисто исторических проблем. Но помимо и сверх того, что история точных наук полезна для истории всей цивилизации, движущим мотивом следующих ниже очерков был интерес к роли точных знаний в развитии человеческой мысли.

Центр «древней науки» относится к «эллинистическому» периоду, т. е. к периоду, следующему за покорением Александром территорий, на которых возникли древние восточные цивилизации. В этом плавильном горне «эллинизма» развилась та форма науки, которая позднее распространилась повсеместно от Индии до Западной Европы и господствовала вплоть до создания современной науки во времена Ньютона. С другой стороны, корни эллинистической цивилизации уходят в восточные цивилизации, которые процветали почти столько же времени до эллинизма, сколько чувствовалось его прямое влияние позднее. Поэтому в центре нашего внимания на протяжении всей книги будет вопрос о возникновении и распространении эллинистической науки.

Я ограничил свою задачу точными науками просто потому, что чувствую себя совершенно не компетентным в таких вопросах, как медицина, ~~или~~ естественные науки, хотя изучение этих областей могло бы дать ценную информацию для решения нашей проблемы. Медицина и астрономия, например, тесно связаны в греческих медицинских школах; также и средневековая медицина находилась под сильным воздействием эллинистической астрологии. Науки о лекарствах, растениях, камнях и даже о животном царстве имеют много точек соприкосновения с астрономическими или астрологическими учениями; живым свидетельством этого является тот факт, что для обозначения вещества и планеты до сих пор используется имя Меркурий [1]). Художники средневековья и Ренессанса не считали нужным гордиться невежеством в науках. В скульптурах готических соборов и картинах и миниатюрах средних веков можно часто найти астрономические и астрологические мотивы, которые имели важное значение для их современников. Поэтому ограничение нашего исследования пределами чистой математики и математической астрономии является совершенно искусственным.

И даже в этих узких рамках оказалось необходимым уделить несоразмерно большее место математике, чем астрономии. Основные математические понятия просты и лучше знакомы современному читателю, чем соответствующие астрономические факты и их древняя форма изложения, которая зачастую кажется чуждой даже профессиональному астроному наших дней. В принятых мною рамках работы во многих случаях я вынужден ограничиваться просто напоминанием о той важнейшей роли, которую играет астрономия в истории науки. Я не колеблясь утверждаю, что считаю астрономию наиболее существенным фактором развития науки от ее возникновения, где-то около 500 г. до н. э., и вплоть до времени Лапласа, Лагранжа и Гаусса. И я спешу заявить, что история возникновения астрономии является одной из самых отрывочных глав в истории науки, каковы бы ни были пробелы в нашем знании других периодов и других проблем. Соответственно я убежден, что история математической астрономии является одной из наиболее многообещающих областей исторического исследования. Я надеюсь убедить в этом, хотя бы отчасти, любого читателя последующих глав.

---

[1]) Имеется в виду ртуть, по-английски mercury. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА I

# ЧИСЛА

1. Когда в 1416 г. умер Жан Французский, герцог Беррийский, работа над его «Часословом» приостановилась. Братья Лимбурги, которым было поручено иллюстрировать эту книгу, покинули двор, так и не закончив одной из самых замечательных дошедших до нас рукописей позднего средневековья.

«Часослов» представляет собой молитвенник, основанный на религиозном календаре святых и праздников в течение года. Соответственно этому в книге герцога Беррийского мы находим двенадцать частей, представляющих каждая один из месяцев года. В качестве примера рассмотрим иллюстрации к сентябрю. Как работа соответствующего сезона, на переднем плане показан сбор винограда (см. табл. 1 в конце книги). На заднем плане виден замок Сомюр, архитектурные детали которого изображены с максимальной точностью. Для нас, однако, наиболее интересен полукруг в верхней части картины, где находятся числа и астрономические символы, которые дадут нам некоторое представление о научной основе этого календаря. Даже при поверхностном ознакомлении с этими изображениями мы обнаружим тесные связи между астрономией позднего средневековья и астрономией древности. Конечно, это только частный пример гораздо более общего явления. Для истории математики и астрономии традиционное деление политической истории на древние и средние века не имеет значения.

В математической астрономии античные методы превалировали до тех пор, пока Ньютон и его современники не открыли существенно новую эпоху, введя динамику в изучение астрономических явлений. Можно очень хорошо понять «Математические начала натуральной философии» без хорошего знания предшествующей астрономии, но нельзя прочесть ни одной главы Коперника или Кеплера без глубокого знания «Альмагеста» Птолемея. До Ньютона вся астрономия состояла из видоизменений, как бы они ни были искусны, эллинистической астрономии. В математике положение мало чем отличается, хотя демаркационная линия между «древностью» и «современностью» не столь резка. Но и здесь можно отстаивать ту точку зрения, что вся «современная» математика начинается с созданием анализа, т. е. опять с Ньютона и его современников.

2. Не будем, однако, заниматься историческими доктринами и лишь для иллюстрации преемственности древних традиций коротко остановимся на календаре из «Часослова» герцога Беррийского. Оба кольца — наружное и внутреннее — содержат числа, внутреннее кольцо от 1 до 30, внешнее от 17 до 30 и от 1 до 15. Вид этих цифр отличается от привычного нам теперь (см., например, 14 и 15 в правом конце наружного кольца), но всякий легко расшифрует их значение и узнает, что это знакомые «индоарабские» цифры, которые проникали в Европу, начиная с XII века, из стран ислама. Они все более вытесняли римские цифры, два примера которых мы также находим на рассматриваемом рисунке. В правой половине внешнего кольца видна надпись initium libre gradus XV «начало Весов 15 градусов», на внутреннем кольце читаем primationes lune mensis septembris dies XXX «новолуние в сентябре месяце, 30 дней». В неявном виде мы имеем здесь и третий способ выражения чисел, а именно, при помощи слов — числительных. Сентябрь, а также октябрь, ноябрь и декабрь означают в переводе соответственно 7-, 8-, 9-, 10-й месяцы. Здесь находит отражение еще римский календарь, когда конец года приходился на два месяца позднее, чем в нашем теперешнем календаре.

3. Можно найти много примеров этих трех типов выражения чисел во всем мире. Изображение чисел обычными словами без использования каких бы то ни было символов очень распространено. Вариантом этого метода является найденное в греческих надписях обозначение чисел сокращенными названиями слов, как Π вместо ΠΕΝΤΕ «пять» или Δ вместо ΔΕΚΑ «десять». Этот метод, когда вместо целого слова используется его первая буква, называют «акрофоническим».

В историческом аспекте, вероятно, наиболее распространенной является римская система. Самые малые числа являются простым повторением знака 1. Это относится и к нашей современной числовой символике, где 2 и 3 происходят от $=$ и $\equiv$, соединенных связующих линиями при скорописи. Та же система господствовала в Египте, в Месопотамии, и для небольших единиц, в упомянутом выше греческом способе написания. Римское V, возможно, представляет собой половину символа X, как Ɔ ( = 500) есть половина от ↀ = 1000. Этот последний символ только позднее стали писать в форме M, связывая его со словом «mille» — тысяча.

Аналогичные индивидуальные символы для 10, 100, 1000 найдены в Египте. Повторение этих символов и их комбинации дают промежуточные числа. Порядок расположения может играть роль, как в IV = 5 − 1, в противоположность VI = 5 + 1. В качестве явного примера записи числа посредством вычитания можно привести старовавилонскую форму обозначения для 19. В этот период «один» обозначался как , «десять» ; таким образом, 21 = , но  20 − 1 = 19. Здесь знак  *lal* «вычесть» написан между 20 и 1. Позднее 19 будут писать только как  = 10 + 3 + 3 + 3, откуда происходит окончательная скорописная форма , возникшая в период Селевкидов.

Коренным образом отличается от всех этих методов наша современная «позиционная» система, где ни 12, ни 21 не означают ни 1 + 2, ни 2 + 1, но соответственно, 1 раз десять плюс 2, и 2 раза десять плюс 1. Здесь положение числового символа определяет его значение и поэтому ограниченного числа символов достаточно для выражения сколь угодно больших чисел, без необходимости повторений или создания новых более высоких символов. Изобретение позиционной системы счисления, несомненно, является одним из наиболее плодотворных изобретений в истории человечества. Его вполне можно сравнить с изобретением алфавита в противоположность использованию тысяч иероглифов — картинок, предназначавшихся для передачи прямого изображения того или иного понятия.

4. Прежде чем вернуться к истории числовой символики, извлечем еще дополнительную информацию из календаря «Часослова». В широкой средней зоне показаны изображения «Девы» и «Весов», над которыми написано finis graduum virginis «конец градусов Девы» и уже цитированное ранее «начало Весов 15 градусов». Дева и Весы — это знаки зодиака, т. е. отрезки годового пути Солнца между неподвижными звездами, как он виден с Земли, в 30 градусов каждый. Итак, наша картина указывает, что Солнце в течение сентября проходит от 17-го градуса Девы до 15-го градуса Весов, или всего 29 градусов, что можно и прямо сосчитать по числу промежутков на внешнем кольце. Поскольку в сентябре 30 дней, Солнце покрывает $\frac{29}{30} = \frac{58}{60}$ градуса или 58 минут дуги в сутки. Это очень хорошо согласуется с фактическим положением вещей. Поскольку требуется немного более 365 дней для прохождения Солнцем 360 градусов всего зодиака, средний суточный путь должен быть немного менее одного градуса в сутки. Если мы повторим эти вычисления для всех 12 листов нашего календаря, то мы найдем, что в ноябре, декабре и январе движение Солнца быстрее и составляет 1° в сутки. Это компенсируется

более медленным движением, около 56 минут, в месяцы от марта до июля. Это тоже правильно отражает действительность. Солнце движется быстрее зимой, медленнее летом, и мы увидим, что это явление было правильно учтено греческими и вавилонскими астрономами эллинистического периода. Отмеченную неравномерность солнечного движения называют его «аномалией». Очевидно, априори никак нельзя было ожидать, что это явление будет правильно отражено в молитвеннике начала пятнадцатого века.

**5.** Еще одно обозначение чисел мы находим на внутреннем кольце календаря. Здесь под символами Луны написаны буквы: *b k s g f d m a i* и т. д. Если мы придадим этим буквам числовые значения в соответствии с их положением в алфавите, то получим перечень чисел:

$$2\ \ 10\ \ 18\ \ 7\ \ 6\ \ 4\ \ 12\ \ 1\ \ 9\ \ 17\ \ 6\ \ 14\ \ 3\ \ 11\ \ 19\ \ 8\ \ 16\ \ 5\ \ 13.$$

Эти числа, очевидно, связаны следующим простым законом: каждый раз нужно прибавить 8 к предыдущему числу, чтобы получить последующее; если сумма превосходит 19, то нужно вычесть 19. Так,

$$2+8=10 \quad 10+8+18 \quad 18=8=26; \quad 26-19=7.$$

Следующим числом должно быть $7 \div 8 = 15 = p$, а за ним $15+8=$ $=23$; $23-19=4=d$. В тексте, однако, имеем $f$, за которым следует $d$. Следовательно, мы должны исправить $f$ на $p$ и это исправление подтверждается календарями для других месяцев, где мы всегда находим последовательность $g\,p\,d$. Остальная часть перечня правильна. На последнем месте мы имеем $5+8=13$, за которым должно следовать число $21-19=2$, являющееся первым в нашем списке. Таким образом, перечень повторяется после 19 шагов.

Вопрос о значении числа 19 возвращает нас непосредственно к V веку до н. э., когда циклическая схема вставок для согласования календаря с солнечным годом была фактически введена в вавилонском календаре и безуспешно предложена в Афинах Метоном, которого, однако, его современники почтили, воздвигнув его статую, а ученые нового времени—назвав его именем этот цикл.

Основа этого цикла может быть просто объяснена следующим образом. Время между двумя последовательными соединениями Солнца и Луны составляет около 29,5 дней. Этот интервал называется одной «лунацией». Лунный месяц поэтому равен 29 или 30 дням. Следовательно, 12 лунных месяцев составляют 354 дня или примерно на 11 дней меньше солнечного года. Через три года разница достигает около 33 дней и это вынуждает добавить 13-й месяц к одному из трех лунных лет, чтобы начало лунного года снова оказалось вблизи начала солнечного года. Более точная регистрация начал лунных месяцев и солнечных лет показывает, что 19 солнечных лет содержат 235 лунных месяцев, т. е. содержат 12 обычных лунных лет по 12 месяцев каждый и 7 високосных лунных лет по 13 месяцев каждый. Этот 19-летний метоновский цикл очень точен; только через 310 юлианских лет вычисленное по этому циклу новолуние оказывается на один день раньше, чем нужно. Это простое циклическое вычисление не только явилось основой календаря империи Селевкидов в древности, но служит также основанием еврейского и христианского религиозных календарей и, в частности, используется при установлении дня пасхи. Тот же цикл появляется, хотя и в несколько иной форме, в лунно-солнечных вычислениях двух самых ранних астрономических работ Индии: Ромака и «Паулиса-Сиддхант» (около пятого века н. э.), чье западное происхождение ясно из их названий и подтверждается многими деталями.

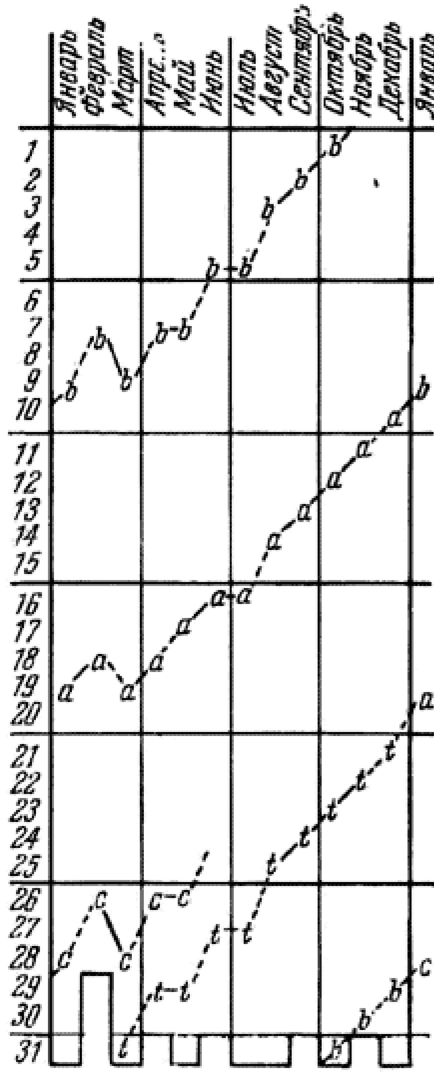



Рис. 1.

6. При помощи этого цикла в средние века решался вопрос об установлении сроков новолуния, по крайней мере для нужд религиозного календаря, хотя при этом и могло получаться расхождение с фактическим новолунием на несколько дней. «Primationes lunae» или новолуния определяются по нашему «Часослову» следующим образом: За первый год «*a*» цикла берется тот год, когда новолуние приходится на 19 января (см. рис. 1). От этого числа идут поочередно лунные месяцы по 29 и 30 дней со сделанными иногда прибавками одного дня так, что два месяца по 30 дней следуют один за другим. Таким путем получаем 18 февраля для следующего новолуния (30 дней после 19 января), затем 19 марта (29 дней после 18 февраля) и т. д. Продолжая этот процесс[1]), доходим до 13 сентября, как срока новолуния для «года *a*», и действительно, на этот

[1]) Между мартом и июлем была вставлена одна пара 30-дневных месяцев. На рис. 1 30-дневные интервалы указаны сплошной линией, 29-дневные — пунктирной линией.

день приходится буква «*a*» под небольшим полумесяцем на нашей календарной миниатюре для сентября. Продолжая прибавлять попеременные лунные месяцы по 29 и 30 дней, доходим до 9 января второго года, названного «*b*». В сентябре мы находим пометку «*b*» у 2-го числа, в октябре находим 1 октября и 31 октября для года «*b*» и т. д. Эта процедура в конечном счете приводит к расположению букв, представляющих числа от $a = 1$ до $t = 19$, точно в том порядке, который мы видим на примере сентября. Схема закончится там, где она началась, 19 января, если мы примем два последних лунных месяца равными 29 дням. Это последнее исключение из правила чередования было названо saltus lunae, «скачком Луны».

Для определения даты ожидаемого новолуния нужно только знать, каков номер данного года в 19-летнем цикле. Этот номер называется «золотым числом», потому что, как сказал один ученый 13-го века, «это число превосходит все другие лунные отношения, как золото превосходит все остальные металлы». В двенадцатом веке этот весьма примитивный метод считался у ученых Западной Европы чудом точности, хотя несравненно лучшие результаты были достигнуты вавилонским и греческим методами еще в четвертом веке до н. э. и эти методы умело применялись современными мусульманскими и еврейскими астрономами.

7. Быть может, наилучшей оценкой научного прогресса служит число ранее изолированных фактов, которые становятся понятными под новым общим углом зрения. С точки зрения этого критерия происшедший за 1700 лет отход назад от лунных эфемерид третьего столетия до н. э. к рассмотренному сейчас лунному календарю представляется довольно разительным, даже если отвлечься от астрономии и иметь в виду только одну простую арифметику. Вместо единой численной системы одновременно используются несколько методов счета. Этот процесс заходит так далеко, что для обращения с упомянутыми выше лунными буквами изобретаются специальные приемы, позволяющие восстановить последовательность букв при помощи сегментов пальцев, обозначающих эти буквы. Так произошло возвращение к широко распространенной технике «счета на пальцах». Этот счет составляет основу примитивного математического учения, которое было обнаружено как в самых разных древних цивилизациях, так и у народов Ближнего и Дальнего Востока. Наиболее раннее упоминание счета на пальцах, вероятно, содержится в египетской «Книге мертвых». Соответствующий отрывок этой книги в свою очередь восходит к одному из заклинаний «Текстов пирамид». В «Заклинании для получения перевоза» умерший царь уговаривает перевозчика разрешить ему переплыть на восточную сторону канала загробного мира. На это перевозчик возражает следующими словами: «Величественный бог на другой стороне скажет: не привел ли ты мне человека, который не может со-

считать свои пальцы»? Но мертвый царь большой «чародей» и может продекламировать стихи, в которых перечисляются его десять пальцев, и таким образом удовлетворяет требования перевозчика. Мне кажется несомненным, что здесь мы возвращаемся к тому уровню цивилизации, когда счет на пальцах считался трудной частью знания, имеющей магический смысл, подобный знанию имени бога и умению его написать. Эта связь между числами (а также числительными) и магией сохранялась на протяжении веков, она видна в пифагорейской и платонической философии, в каббалистике и в разных других формах религиозного мистицизма.

8. Вернемся снова к разным методам обозначения чисел. Четыре разных типа нумерации могут быть проиллюстрированы на примере календаря «Часослова»: позиционная система, применяющаяся и теперь, римская нумерация, оперирующая индивидуальными символами для разных групп единиц; целые слова для чисел и, наконец, алфавитные числа. Из греческих надписей мы добавили пятый «акрофонический» метод, который заключается, впрочем, всего лишь в сокращении слов, обозначающих числа. Теперь мы рассмотрим другие варианты греческой системы нумерации.

Первый, строго алфавитный, был найден на афинских монетах второго века до н. э. На этих монетах, относящихся к так называемому «новому стилю», месяц их выпуска обозначается буквами от A до M, представляющими числа от 1 до 12 для обычного года, с добавкой N = 13 для високосного года афинского лунного календаря. Тот же принцип сохраняется и на монетах династии Птолемеев в Египте, где после исчерпания первых 24 букв от A до Ω встречаются знаки AA, BB, ΓΓ,..., очевидно обозначающие числа 25, 26, 27. Понятно, что по этому принципу можно продолжать записи и дальше.

9. Значительно более интересен другой вариант алфавитной нумерации, широко применявшийся в греческой математике и астрономии, а также в экономических и литературных документах, например, в греческих папирусах. Хотя эта система греческой нумерации описана во многих книгах по истории математики и в других сочинениях, я покажу, каким путем каждый может расшифровать ее по любому достаточно сложному математическому или астрономическому тексту. Одновременно это будет иллюстрацией того, как поступают в подобных случаях с менее известными текстами.

Я беру в качестве примера таблицу из «Альмагеста» Птолемея (рис. 2).

Заголовок гласит «Таблица прямых линий в круге», т. е. таблица хорд. Первый столбец озаглавлен «дуги». В этом столбце мы находим в каждой второй строке знакомые греческие буквы в порядке алфавита. Мы, несомненно, имеем дело с цифрами, поэтому делаем простейшее предположение $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\delta = 4$, $\varepsilon = 5$. После этого следовало ожидать $\zeta = 6$, но $\zeta$ появляется только на шаг позднее, и мы вынуждены читать промежуточный символ ϛ как 6. Затем мы опять имеем регулярную последовательность $\zeta = 7$, $\eta = 8$, $\vartheta = 9$, $\iota = 10$. Согласно порядку алфавита можно было ожидать дальше $\varkappa = 11$, $\lambda = 12$ и т. д. Однако на самом деле мы находим $\iota\alpha = 11$, $\iota\beta = 12$ и т. д., другими словами, комбинированные символы 10 + + 1, 10 + 2 и т. д. Это подтверждается также продолжением нашей таблицы, не приведенным здесь, где на соответствующем месте за $\iota\theta = 19$ следует $\varkappa = 20$, $\varkappa\alpha = 21$ и т. д. Продолжая таким образом, мы опять сталкиваемся с нарушением стандартного алфавита, когда после $\pi = 80$ необычный знак ϙ обозначает 90. Затем следует $\rho = 100$, $\sigma = 200$, $\tau = 300$, ..., пока, после $\omega = 800$, опять не появляется специальный символ ϡ (или Ͳ или ϡ) = 900.

ια'. Κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν

| περιφερειῶν | εὐθειῶν | | | ἑξηκοστῶν | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| L' | ο | λα | κε | ο | α | β | ν |
| α | α | β | ν | ο | α | β | ν |
| αL' | α | λδ | ιε | ο | α | β | ν |
| β | β | ε | μ | ο | α | β | ν |
| βL' | β | λζ | δ | ο | α | β | μη |
| γ | γ | η | κη | ο | α | β | μη |
| γL' | γ | λθ | νβ | ο | α | β | μη |
| δ | δ | ια | ιϛ | ο | α | β | μζ |
| δL' | δ | μβ | μ | ο | α | β | μζ |
| ε | ε | ιδ | δ | ο | α | β | μϛ |
| εL' | ε | με | κζ | ο | α | β | με |
| ϛ | ϛ | ιϛ | μθ | ο | α | β | μδ |
| ϛL' | ϛ | μη | ια | ο | α | β | μγ |
| ζ | ζ | ιθ | λγ | ο | α | β | μβ |
| ζL' | ζ | ν | νδ | ο | α | β | μα |
| η | η | κβ | ιε | ο | α | β | μ |
| ηL' | η | νγ | λε | ο | α | β | λθ |
| θ | θ | κδ | να | ο | α | β | λη |
| θL' | θ | νϛ | ιγ | ο | α | β | λζ |
| ι | ι | κζ | λβ | ο | α | β | λε |
| ιL' | ι | νη | μθ | ο | α | β | λγ |
| ια | ια | λ | ε | ο | α | β | λβ |
| ιαL' | ιβ | α | κα | ο | α | β | λ |
| ιβ | ιβ | λβ | λϛ | ο | α | β | κη |

Рис. 2.

Хотя три символа ϛ, ϙ и ϡ не являются буквами классического греческого алфавита, они хорошо известны историкам как пережиток более ранней формы этого алфавита, в которой эти буквы еще использовались. Следовательно, алфавитная нумерация была изобретена тогда, когда из греческого алфавита еще не были исключены эти три буквы, перенятые вместе с остальным алфавитом от финикийцев. Подобные рассуждения позволяют датировать возникновение греческой алфавитной системы нумерации примерно восьмым веком до н. э., и отнести это изобретение с большой вероятностью к городу Милету в Малой Азии.

В таблице мы пока рассматривали строчки только через одну. Очевидно, можно предположить, что знак L' обозначает 1/2, потому что в этом случае мы бы получили $\frac{1}{2}$ 1 $1\frac{1}{2}$ 2 $2\frac{1}{2}$ 3 $3\frac{1}{2}$ и т. д. Мы можем немедленно подтвердить эту гипотезу с помощью второго столбца. Этот столбец содержит три подстолбца, которые мы уже можем транскрибировать в числа средствами нашей предыдущей дешифровки за исключением нового символа ∘ на самом первом месте. Назвав этот символ $x$, находим

| | | |
|---|---|---|
| $x$ | 31 | 25 |
| 1 | 2 | 50 |
| 1 | 34 | 15 |
| 2 | 5 | 40 |
| 2 | 37 | 4 |
| 3 | 8 | 28 |

и т. д.

Структура этих трех столбцов чисел ясна. Во втором и третьем столбцах мы видим попеременно меньшие или большие числа, тогда как в первом столбце числа либо остаются неизменными, либо возрастают на единицу. Это последнее наблюдение заставляет нас приписать $x$ значение «нуль». Поэтому представляется правдоподобным, что числа второго и третьего столбца являются дробями и что в целом числа возрастают от 0 до 1,2 и т. д. В самом деле, если мы посмотрим на числа последнего столбца, то увидим, что они возрастают от 25 до 50, затем сокращаются до 15, но потом вновь возрастают на 25 до следующих 40. Мы имели бы постоянный прирост на 25, если бы имели последовательность 25 50 60+15 60+40 или если 60 единиц последнего столбца составляли бы одну единицу предыдущего столбца. Это легко проверить по предыдущему столбцу. Числа 31 2 34 5 37 опять показывают почти постоянный прирост, если мы примем 60 равным высшей единице:

$$31 \qquad 31+31=60+2 \qquad 62+32=60+34$$
$$60+34+31=120+5 \qquad 120+5+32=120+37$$

и т. д.

Прирост составляет 31 или 32, причем он равен 32 тогда и только тогда, когда в третьем столбце накапливается 60 единиц. И во всех случаях, когда во втором столбце числа достигают 60, числа в первом столбце возрастают на единицу. Таким образом, мы имеем систему чисел, которые ведут себя совершенно как градусы, минуты и секунды, или как часы, минуты и секунды; дроби являются шестидесятыми долями единицы следующего высшего разряда. Мы называем такие дроби «шестидесятеричными» и записываем числа этого типа следующим образом:

0,31,25

1,2,50

1,34,15

2,5,40

Можно сказать, что эти числа имеют постоянную разность 0,31,25. Дальше в нашей таблице разности становятся все меньше и меньше, как этого и следовало ожидать. Если в первом столбце указаны дуги, возрастающие на $\frac{1}{2}$ градуса, как показывают уже известные числа, то мы должны ожидать, что хорды растут не просто пропорционально дугам, хотя это и имеет место для очень малых углов в начале таблицы. Но какие единицы использованы в нашей таблице? Что первый столбец указывает градусы, ясно из того, что таблица заканчивается числом 180, т. е. развернутым углом. Хорда для 180° должна быть диаметром; таблица дает для этого случая значение ρκ ○ ○ = 120,0,0. Значит, радиус равен 60. Это подтверждается хордой 60 для 60°, что верно для равностороннего треугольника, где хорда равна радиусу. Нам нет необходимости детально разбирать третий столбец, называемый «шестидесятые», в таблице хорд. Мы уже знаем, что хорда 1° равна 1,2,50. Следовательно, хорда для 0;1° (т. е. для одной минуты дуги[1])) будет равна 0;1,2,50, как и записано в третьем столбце. В целом третий столбец дает коэффициенты интерполяции для отдельных минут, что легко проверить по участку таблицы, воспроизведенному на стр. 26.

**10.** Рассмотренный пример греческой числовой таблицы ознакомил нас с некоторыми интересными чертами наиболее важного типа греческой нумерации. Заимствование греками алфавита у финикийцев объяснило символы для 6, 90 и 900. Мы нашли специальный символ для $\frac{1}{2}$, явление, которое подтверждается также документами на папирусах и другими источниками. Мы нашли специальный знак для нуля, используемый точно так же, как наш нуль. И, наконец, мы видели шестидесятеричную систему в действии, как при обычном делении окружности на 360 «градусов» по 60 минут или 3600 секунд каждый, так и при делении радиуса на последовательные шестидесятые доли.

Эти черты характерны не для одного только частного примера вроде приведенной выше таблицы хорд. Все греческие астрономические работы, содержащие сотни обширных числовых таб-

---

[1]) Я применяю здесь способ обозначения, который будет использоваться всюду в дальнейшем изложении. Точка с запятой отделяет целые от дробей, а все остальные шестидесятеричные разряды отделяются друг от друга запятой. Так, 1,1 означает 61, но 1;1=1+1/60. В подлинных текстах никакие знаки с подобной целью не употребляются.

лиц, основаны на точно такой же процедуре. Следуя утвердившемуся представлению, что греческая математика является в основном геометрией, историки математики печальным образом пренебрегали громадным количеством арифметических вычислений, имеющихся в таких доступных работах, как «Альмагест» Птолемея или комментарии к нему Теона Александрийского. Но еще задолго до того, как были созданы эти классические произведения, греческие астрономические папирусы были исписаны вычислениями. Работы Птолемея или Теона к настоящему времени сохранились лишь в византийских рукописях, а имеющиеся папирусы относятся к периоду Птолемеев[1]) и более поздним эпохам. В этих папирусах мы можем найти, например, знак нуля в том виде, как его фактически писали. Примером может служить папирус, относящийся ко второму веку н. э. (см. табл. 2 и текст на стр. 152). В конце последней строки, предшествующей пробелу между строками в верхней части папируса, находим знак для нуля, который выглядит как . В другом астрономическом папирусе находятся сходные символы, варьирующие от форм или до . В форме или в сходных формах символ нуля встречается вплоть до арабских геометрических и астрономических рукописей позднейших периодов, в которых числа записаны с помощью букв алфавита. Только в византийских манускриптах я знаю неприкрашенную о-образную форму, которую обычно считают первой буквой греческого οὐδέν «ничто». Папирусы не подтверждают это объяснение (которое само по себе очень неправдоподобно, поскольку омикрон уже представляет число, а именно 70), а наводят на мысль о произвольно изобретенном символе, предназначенном для обозначения пустого места. Это в точности отвечает вавилонскому символу нуля, который также не являлся буквой или слогом, а просто разделительным знаком.

11. Чтобы сделать это замечание вполне понятным, я должен коротко объяснить основной момент в хронологии «вавилонских» математических и астрономических источников. Тексты, о которых я говорю, представляют собой глиняные таблички, обычно размером в ладонь, исписанные знаками, нанесенными на поверхность мягкой глины при помощи заостренной палочки. Такое письмо называется «клинописным», потому что каждый штрих имеет более глубокую «головку» и более тонкую линию на конце, напоминая этим клин. Известные нам клинописные таблички с математическим содержанием относятся главным образом к так называемому «древневавилонскому» периоду, около 1600 г. до н. э.

---

[1]) Период Птолемеев относится к династии Птолемеев, правившей в Египте в течение последних трех веков до н. э. Астроном Птолемей (около 150 г. н. э.) не имеет никакого отношения к этой династии.

(см. табл. 3). От этого периода не сохранилось астрономических текстов, имеющих какое-либо научное значение, тогда как математические тексты показывают высочайший уровень, когда-либо достигнутый в Вавилонии.

Второй период, от которого мы имеем наибольшее число текстов, — это позднейший период вавилонской истории, когда Месопотамия стала частью империи наследников Александра, Селевкидов. Этот период, примерно от 300 г. до н. э. и до начала нашей эры, снабдил нас большим числом астрономических текстов с замечательным математическим содержанием, вполне сравнимых с астрономией «Альмагеста». Математические тексты этого периода немногочисленны, но достаточны для того, чтобы показать, что древневавилонские познания в математике не были утеряны на протяжении тех 1300 лет, от которых мы не имеем никаких текстов.

Итак, важно помнить, что мы имеем дело с математическими текстами двух периодов: древневавилонского примерно от 1800 г. до 1600 г. и периода Селевкидов от 300 г. до 0 г., тогда как астрономические тексты принадлежат только ко второму периоду.

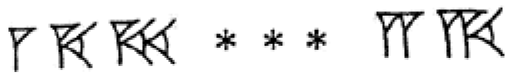
**12.** Развитие системы нумерации в Месопотамии потребовало стольких же веков, как и развитие письменности от грубого письма картинками до вполне развитой системы сложных знаков. Сейчас мы будем рассматривать только конечный продукт этого развития, в том виде, как он представлен в математических текстах древневавилонского периода. И мы опять применим наиболее прямой метод, состоящий в расшифровке фактического текста.

На табл. 4,a) показана табличка размером приблизительно $3\frac{1}{8}$ на 2 дюйма (и толщиной около $\frac{3}{4}$ дюйма). В середине текста виден столбец знаков, которые, очевидно, представляют числа в возрастающем порядке. Табличка не вполне очищена от наростов соли и грязи, но ясно, что знаки выглядят примерно так:

Подсчет вертикальных клиньев приводит непосредственно к прочтению 1, 2, 3 и т. д. до 9. Затем следует , что должно обозначить 10 и, следовательно, мы можем прочесть также остающиеся знаки как 11, 12, 13. Используя эту чрезвычайно правдоподобную гипотезу, мы можем прочесть правый столбец знаков. Первые пять выглядят так:

Очевидно, что если первый знак обозначает 10, как мы уже установили по первому списку, то эти знаки следует прочесть как

10, 20, 30, 40, 50. За этим следует



что логично транскрибировать как

1 1,10 1,20 *** 2 2,10

где звездочки поставлены вместо чисел, находившихся на утерянном куске таблички. Эти знаки являются продолжением предыдущих, если мы истолкуем первую 1 как 60 и затем прочтем 1,10 как $60 + 10 = 70$ и 1,20 как $60 + 20 = 80$. На утерянном куске таблички должны были быть числа 90, 100 и 110. Следующий знак, «2», должен означать 120, в полном соответствии с нашей интерпретацией «1» как 60, тогда как последний знак 2,10 должен означать $120 + 10 = 130$. Так мы получили все кратные числа 10 от 10 до 130, строка за строкой, соответственно числам от 1 до 13. Другими словами, таблица представляет собой таблицу умножения для 10, которую мы теперь можем переписать так:

| | |
|---|---|
| 1 | 10 |
| 2 | 20 |
| 3 | 30 |
| 4 | 40 |
| 5 | 50 |
| 6 | 1 |
| 7 | 1,10 |
| 8 | 1,20 |
| 9 | 1,30 |
| 10 | 1,40 |
| 11 | 1,50 |
| 12 | 2 |
| 13 | 2,10 |

Система обозначения $1{,}10 = 70$ $1{,}20 = 80$ $2{,}10 = 130$ и т. д. является «шестидесятеричной» в том смысле, что 60 единиц одного разряда записываются как 1 следующего высшего разряда. Это в точности тот же принцип, который мы обнаружили в птолемеевской таблице хорд. Единственное различие состоит в том, что в древневавилонских текстах еще нет специального знака для «нуля». Этот знак появляется как в математических, так и в астрономических клинописных текстах периода Селевкидов, что мы увидим в последующих примерах. Итак, мы установили полную идентичность принципа нумерации в астрономических таблицах эллинистического периода, написанных как в клинописи, так и в виде чисел греческого алфавита. Только в одном пункте греческая система обозначения менее последовательна, чем вавилонская. В последней все числа писались строго шестидесятерично, независимо от того, целые ли это числа или дроби. В греческой же астрономии только дроби писались по шестидесятеричной системе, тогда как для целых градусов или часов сохранялась обычная алфавитная система обозначения для чисел, бо́льших 60. Так, Птолемей написал бы 130 17 20, а в клинописной табличке было бы 2 10 17 20. Другими словами, уже греки ввели ту непоследовательность, которая сохраняется в современной астрономии, где также написали бы 130°17′20″. Другая непоследовательность современной астрономической системы обозначения, а именно то, что за секундами пишут их десятичные дроби, является позднейшим изобретением. Интересно, что потребовалось около 2000 лет миграции астрономических знаний из Месопотамии через греков, индусов и арабов, чтобы прийти к поистине абсурдной системе записи чисел.

**13.** Пример нашей современной системы нумерации для градусов, часов, мер и обыкновенных чисел как будто бы достаточен, чтобы полностью дискредитировать популярную мысль о том, что система нумерации была «изобретена» в какой-то определенный момент. И тем не менее выдвигались бесчисленные «причины» для объяснения, почему вавилоняне использовали 60 как основу своей числовой системы. Я не намерен излагать здесь сколько-нибудь подробно историю шестидесятеричной системы, но хочу отметить несколько моментов, так как они важны для исторического подхода к развитию числовой системы в целом.

Прежде всего, распространено неправильное представление о всеобщности использования шестидесятеричной системы. Та самая табличка, которая содержит столбец за столбцом сотни шестидесятеричных чисел для вычислений сроков новолуния в данном году, может иметь «колофон» (концовку) с именем владельца таблички, именем переписчика и датой составления таблички, в которой год записан в виде 2 *me* 25 «2 сотни 25», в то время как в основном тексте эта же дата была бы выражена шестидесятерично, как 3,45. Другими словами, последовательно применялась шестидесятеричная система только в чисто математическом или астрономическом контекстах. Во всех других вопросах (даты, меры веса, площади и т. п.) использовались смешанные системы, имеющие точную аналогию в нашей цивилизации с характерным для ее единиц хаосом делений на 60, на 24, на 12, на 10 и на 2. Поэтому вопрос о возникновении шестидесятеричной системы неразрывно связан с гораздо более сложной проблемой истории многих конкурировавших систем нумерации и их бесчисленных местных и хронологических вариаций.

Но недостаточно уяснить себе, что деление на 60 частей является лишь одним из нескольких одновременно существующих способов относить друг к другу высшие и низшие единицы. Наиболее существенным является использование позиционной системы независимо от отношения соседних единиц. Никакая историческая теория возникновения шестидесятеричной системы не может быть принята, если она не учитывает также эту исключительную черту, а именно, использование небольшого числа тех же самых символов для обозначения разных величин, в зависимости от их положения. Различные «основания» числовой системы хорошо известны по структуре числительных и по записи чисел у разных народов. Наиболее поразительной чертой вавилонской нумерации является именно позиционная система.

Проблемы подобного рода могут быть решены не спекулятивным путем, а только посредством систематического анализа письменных документов. К счастью, имеется достаточное число доступных источников. Давняя связь ассирологии с проблемами Библии и эллинистическое и римское представление о «халдеях» как об астрологах и магах до сих пор находят отражение в широко распространенном мнении, что большинство вавилонских документов относится к религии, магии или числовому мистицизму. В действительности подавляющее большинство клинописных текстов касается хозяйственных вопросов. Десятки тысяч таких документов извлечены из земли, и хотя только малая их доля опубликована, эти материалы составляют достаточную выборку для того, чтобы получить правильное представление об использовании чисел на протяжении всех периодов истории Месопотамии. Для самого раннего периода письменности хозяйственные записи являются почти единственным типом имеющихся документов и именно числовые знаки в табличках этого периода можно прочесть с уверенностью, тогда как интерпретация других знаков очень проблематична.

На ранней стадии письменности в знаках можно еще распознать картинки, нацарапанные на мягкой глине заостренным концом палочки, возможно, сделанной из камыша. Числовые знаки, наоборот, наносились круглым концом палочки. При наклонном положении палочки получалось примерно эллиптическое изображение; при вертикальном получался круглый знак. Первые знаки представляли собой единицы, вторые — десятки. Так, мы можем прочесть 40 во второй сверху строке второго слева столбца на табл. 4,б). В первом столбце в седьмой строке сверху мы имеем 2. Следующие строки попорчены, но можно все же разобрать следы 7, 8 и 9 на соответствующих им местах, предшествующих 10 в предпоследней строке в левом нижнем углу.

Помимо этих основных элементов, в ходу было много других вариантов числовых символов, применявшихся для измерения различных величин, таких как емкость, вес, площадь и т. д. Среди них можно обнаружить четко выраженную десятичную систему со знаками для 1, 10 и 100. Числа 1 и 10 мы уже описали. 100 записывалось с помощью кружка, как и 10, но было значительно больше. Таким образом, 100 было просто «большое 10». Другая система развивалась шестидесятерично, по крайней мере частично. Отчетливо различаются 1 и 10, как и в предыдущем случае. Большая единица означает 60. Две большие единицы, написанные в противоположных направлениях, скомбинированы в один знак, обозначающий 120. Знак 10, добавленный в середине, дает 1200. Очень большой знак 10 означает 3600. Разновидности этих систем, как десятичной, так и в той или иной степени шестидесятеричной, можно обнаружить в разных местностях. Однако основное, а именно, наличие десятичного основания и использование бо́льших символов для изображения единиц высшего порядка является для них всех общим. Из такого использования крупных символов, очевидно, и развилась позиционная система. По мере того как письменность упрощалась и стандартизировалась, различие между бо́льшими и меньшими знаками одного и того же типа исчезало. Если первоначально одна большая единица, означающая 60, и один знак 10 писали, чтобы обозначить 60 + 10, то позднее простая «1», сопровождаемая знаком 10, читалась как 70, в противоположность знаку 10, сопровождаемому 1, читавшемуся как 11.

Одновременно с этим имел место и другой процесс. В хозяйственных текстах единицы веса, в которых измерялось серебро, имели первостепенную важность. По-видимому, отношение 60 к 1 с давних времен было установлено для главных единиц «мана» (греческое μνᾶ «мина») и «шекель». Хотя подробности этого процесса невозможно точно описать, однако неудивительно, что то же отношение стали применять и к другим единицам измерения, а затем и к числам вообще. Другими словами, любая шестидесятая могла быть названа шекелем, в силу привычного значения этого понятия во всех финансовых операциях. Так «шестидесятеричная» система в конце концов стала основной числовой системой, и вместе с нею из использования бо́льших и меньших знаков развилась позиционная система счисления. Однако прежнее десятичное основание навсегда сохранилось в записи чисел, меньших 60. Точно так же и другие системы единиц никогда полностью не выходили из употребления. Только в чисто математических текстах, значительное число которых дошло до нас от эпохи, удаленной примерно на 1500 лет от зарождения письменности, были полностью использованы большие преимущества последовательной шестидесятеричной позиционной системы счисления. Еще 1000 лет спустя этот метод стал основным средством в развитии математической астрономии, откуда его заимствовали греки и затем индусы, добавившие к нему последний штрих, а именно, применившие позиционную систему также и для меньших десятичных единиц. Этой системой мы и пользуемся теперь [1]).

[1]) Более подробно гипотеза Нейгебауера о происхождении шестидесятеричной системы изложена в его «Лекциях по истории античных математиче-

14. Вавилонская позиционная система счисления на ранней степени развития имела два недостатка, связанных с отсутствием знака для нуля. Первое затруднение состояло в том, что можно было неправильно прочесть число 1 20 как 1,20 = 80, тогда как имелось в виду 1, 0, 20 = 3620. Иногда эта неопределенность устранялась путем явного отодвижения чисел друг от друга, с оставлением свободного места для целого шестидесятеричного числа. Но этот метод не применялся последовательно, во многих случаях большой пробел между числами ничего не означал. Правда, в позднейший период при составлении астрономических текстов использовался специальный знак для «нуля». Этот знак встречался также и раньше, как разделительный знак между фразами, поэтому я транскрибирую его «точкой». Например, в астрономических текстах периода Селевкидов мы часто находим числа вроде 1,.., 20 или даже 1,.,., 20, которые написаны в точности по тому же принципу, что и наши 201 или 2001.

Но даже и в последнем периоде вавилонской письменности мы не находим примеров со знаком нуля в конце числа. Имеется много примеров записи чисел вроде .,20, но ни один надежный пример записи вида 20,. мне не известен. Другими словами, во все периоды только из контекста можно было определить абсолютное значение числа, написанного по шестидесятеричной системе. В древневавилонских математических текстах мы находим несколько случаев, когда конечный результат записывался с помощью специальных символов для дробей, например, вместо 1,30 писали «1 и $\frac{1}{2}$», и это показывает, что нужно транскрибировать $1;\ 30 = 1\frac{1}{2}$, а не $1{,}30 = 90$ [1]).

Неопределенность в выборе между дробными и целыми числами не имеет значения при практическом выполнении вычислений. Совершенно так же, как мы перемножаем два числа, независимо от положения десятичной запятой, можно оперировать с вавилонскими числами и, если нужно, определять абсолютное значение после вычислений. Для самого процесса вычислений, безусловно, большим преимуществом является то, что не надо беспокоиться о специальных значениях для дробей и для целых чисел. Именно эта особенность обеспечила вавилонской системе ее гро-

ских наук», изданных с приложением статьи К. Ф о г е л я «Кубические уравнения у вавилонян» в переводе с немецкого, с предисловием и примечаниями С. Я. Лурье, М.— Л., 1937, гл. III, § 4. Критику этой гипотезы и другие соображения о возникновении шестидесятеричной системы см. в статье И. Н. В е с е л о в с к о г о «Вавилонская математика», Труды Ин-та истории естествознания, т. 5, 1955, стр. 241—303 и в книге А. А. В а й м а н а «Шумеро-вавилонская математика», М., 1961, гл. 1. (*Прим. ред.*)

[1]) В одном позднем астрономическом тексте встречается несомненная запись нуля в конце. См. O. N e u g e b a u e r, Astronomical Cuneiform Texts, London, 1955, т. 1, стр. 166, № 142, IV, 45. (*Прим. ред.*)

мадное преимущество перед всеми остальными числовыми системами древности. Это станет более очевидным при последующем анализе и сравнении вавилонской и египетской математик, но один пример для иллюстрации этого положения можно привести уже сейчас.

Умножение на 12 египетский писец совершил бы в два этапа. Сначала он умножил бы другой множитель на 10 путем простой замены каждого отдельного знака символом следующего разряда, а затем удвоил бы другой множитель. Наконец, он сложил бы оба произведения. Так, для умножения 12 на 12 он расположил бы цифры следующим образом:

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 12 |
| / | 10 | 120 |
| / | 2 | 24 |
| Итого | | 144 |

получая 144 как результат сложения двух итогов, помеченных черточкой. Допустим теперь, что другой множитель является дробью, скажем, «единичной дробью» $\frac{1}{5}$ или, как пишут, подражая египетской системе обозначения, $\overline{5}$. Писец опять стал бы действовать в два этапа, а именно, умножал бы на 10 и на 2. Первое действие дает в результате 2. Второе, однако, потребует таблицы удвоения единичных дробей, где удвоенное $\overline{5}$ будет записано как $\overline{3}\,\overline{15}$ (действительно, $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$). Таким образом, вычисление будет иметь вид

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | $\overline{5}$ |
| / | 10 | 2 |
| / | 2 | $\overline{3}\,\overline{15}$ |
| Итого | | $2\,\overline{3}\,\overline{15}$ |

Современный ему древневавилонский писец решил бы ту же задачу, используя таблицу умножения для 12, подобную таблице умножения на 10, описанной выше на стр. 31. В строке 12 он сразу нашел бы результат 2;24. Конечно, пока мы только установили факт лучше организованной процедуры вычислений в Месопотамии, а не какого-либо преимущества, внутренне присущего вавилонской системе нумерации. Однако со второй задачей дело обстоит иначе. Вавилонский писец должен был знать (или узнал бы из таблицы обратных дробей), что $\frac{1}{5}$ соответствует «12» ($0;12 = \frac{12}{60}$ в наших обозначениях с использованием знака нуля). Отсюда $\frac{12}{5}$ опять приводит к нахождению значения произведения 12 на 12, или опять к 2,24 (мы должны были бы написать 2;24). Другими словами, в вавилонском процессе полностью исключены специальные правила для вычислений с дробями, будь то единичные дроби или другие, и требуется только помнить правильное позиционное значение каждого участвующего числа, совершенно так же, как мы должны это делать при определении места десятичной запятой в ответе. Исторические последствия этого упрощения трудно переоценить.

**14а.** Преимущества вавилонской позиционной системы по сравнению с египетским аддитивным методом вычисления с применением единичных дробей, настолько очевидны, что шестидесятеричная система была принята для всех астрономических вычислений не только греческими астрономами, но также их последователями в Индии, в странах ислама и европейскими астрономами. Тем не менее, шестидесятеричная нумерация редко применяется столь же последовательно, как в клинописных текстах Месопотамии периода Селевкидов. Например, Птолемей применяет шестидесятеричную позиционную систему исключительно для дробей, но не для целых чисел. Так, он написал бы 365 как τξε (300, 60, 5), а не ϛε (6,5). Той же системы придерживались и астрономы стран ислама, и это является причиной того, что и поныне астрономы пишут целые по десятичной системе, а дроби записывают с помощью шестидесятеричных минут и секунд.

С исключительной последовательностью шестидесятеричная позиционная система выдержана в латинской версии «Альфонсовых таблиц» (около 1280 г.). Здесь мы находим такую дату, как 1477 г. Сент. 20 6;1,36$^h$, выраженную в виде 2,29,49,32;15, 4,0 дней. Действительно, 1476 юлианских лет (по $365\frac{1}{4}$ дней каждый) содержат $24,36 \cdot 6,5;15$ дней $= 2,29,45,9$ дней. К этому добавляется 4,23 дней до 20 сент. и дробь $0;15,4^d = 6;1,36^h$. Это дает приведенный выше итог дней, сосчитанных от 1 янв. 0 года н. э.

Коперник также часто пользовался последовательно написанными шестидесятеричными числами, особенно в своих таблицах средних движений. Например, для Луны он дает следующие средние движения в последовательных египетских годах (по 365 дней в каждом):

| | |
|---|---|
| 1 | 2,9;37,22,36° |
| 2 | 4,19;14,45,12 |
| 3 | 0,28;52,7,49 и т. д., |

тогда как мы (и Птолемей) написали бы для целых чисел соответственно 129, 259 и 28.

Совершенство, до которого ученые стран ислама довели численные методы, стало ясно только в последнее время, особенно благодаря работе П. Люкея об ал-Каши, придворном астрономе Улугбека в Самарканде. Ал-Каши умер в 1429 г.; одной из последних его работ был трактат об окружности круга, в котором он (правильно) определил $2\pi$ как 6; 16, 59, 28, 1, 34, 51, 46, 15, 50. И поскольку несколькими годами раньше он изобрел десятичный аналог шестидесятеричных дробей, он перевел приведенное выше число в десятичную дробь: 6, 2831853071795865.

## *БИБЛИОГРАФИЯ К ГЛАВЕ I*


Лучшей из имеющихся книг о числах и системах счисления является: Karl M e n n i n g e r, Zahlwort und Ziffer. Aus der Kulturgeschichte unserer Zahlsprache, unserer Zahlschrift und des Rechenbretts. Breslau, Hirt, 1934. Разделы о вавилонской нумерации не во всем точны. В целом, однако, эта работа намного превосходит большинство книг по истории чисел и элементарного счета [1]).

Kurt S e t h e, Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Aegyptern und was für andere Völker und Sprachen daraus zu lernen ist. Schriften d. wiss. Ges., Strassburg, 25 (1916). Эта работа очень существенна для понимания роли дробей в числовых системах.

О вычислении календарей вообще см. F. K. G i n z e l, Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie, три тома, Leipzig, Hinrichs, 1906—1914. Лунный календарь, принятый в Западной Европе в средние века, рассматривается в т. III.

Прекрасное введение в вавилонскую цивилизацию дано в книге Edward C h i e r a, They Wrote on Clay, Univ. of Chicago Press; несколько изданий после 1938 г.


## *ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ГЛАВЕ I*

к 1. «Часослов» герцога Беррийского был впервые опубликован Paul D u r r i e u, Les très riches heures de Jean de France, Duc de Berry, Paris, 1904.

Двенадцать календарных миниатюр воспроизведены в красках в Verve №7 (1940), к сожалению, без зодиакальной фигуры («melothesia»), следующей за календарем. Он был подробно проанализирован в статье H a r r y B o b e r, The Zodiacal Miniature of the Très Riches Heures of Duke of Berry— Its Sources and Meaning, Journal of the Warburg and Courtauld Institute 11 (1948), стр. 1—34.

к 2. D. E. S m i t h and L. C. K a r p i n s k i, The Hindu-Arabic Numerals, Boston, 1911. Julius R u s k a, Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst, Sitzungsber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Philos.-hist. Kl. 1917, 2. G. F. H i l l, The Development of Arabic Numerals in Europe exhibited in 64 Tables. Oxford, Clarendon Press, 1915.

Ошибочно думать, что математики и астрономы стран ислама последовательно применяли «индо-арабские» числа. В общем, применение индо-арабских цифр ограничивалось математическими текстами, в то время как в астрономических таблицах использовались алфавитные числа. В Египте изображение чисел буквами греческого или коптского алфавита практиковалось на протяжении столетий после арабского завоевания.

Занятная деталь о распространении системы нумерации из Индии в страны ислама случайно сохранилась в автобиографии Ибн-Сины (Авиценны). Он

---

[1]) Имеется второе, переработанное и дополненное издание: Karl M e n n i n g e r, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, тт. I—II, Göttingen, 1957. (*Прим. ред.*)

родился в 980 г. около Бухары, принадлежавшей тогда иранской династии Саманидов. Когда ему было около десяти лет, в Бухару пришли из Египта миссионеры мусульманской секты, так называемых исмаилитов. Учась у этих миссионеров, Ибн-Сина узнал об индийском методе счета. Без этой точной информации никто бы не подумал, что индийское влияние достигло Бухары через Египет! (см. автобиографию Ибн-Сины, переведенную в книге: Arthur J. A r b e r r y, Avicenna on Theology, London, 1951) [1]).

к 3. О развитии греческой системы нумерации и ее связи с Финикией см. Wilhelm L a r f e l d, Griechische Epigraphik, 3 изд., München, Beck, 1914 [Handbuch der klassischen Altertumswissenschaft, том 1] См., в частности, стр. 290 и дальше. Кроме того, см. M. N. T o d, The alphabetic numeral system in Attica. The Annual of the British School at Athens, 45 (1950), стр. 126—139.

Акрофонические числа часто называют «геродиановыми», поскольку ими занимался грамматик Геродиан (второе столетие н. э.). Это название было как будто введено в диссертации W o i s i n, De graecorum notis numeralibus, Lipsia, 1886.

Позднейший анализ, текстовые свидетельства и библиографию см. у Marcus Niebuhr T o d, The Greek acrophonic numerals, The Annual of the British School at Athens № 37, Session 1936—37, стр. 236—258 (London, 1940). Примеры см. B. D. M e r i t t — H. T. W a d e-G e r y — M. F. M c G r e g o r, The Athenian Tribute Lists (Cambridge, Harvard Univ. Press, 1939), т. 1 passim; например, фото на стр. 74, рис. 98 и соответствующую копию на вклейке XXI.

к 6. W. E. van W i j k, Le nombre d'or. Étude de chronologie technique suivie du texte de la Massa Compoti d'Alexandre de Villedieu. La Haye, Nijhoff, 1936. Эта работа содержит ценное введение к средневековым циклическим европейским календарям. См. также Nils L i t h b e r g, Computus, Stockholm, 1953 (шведск.) = Nordiska Museets Handlingar, 29; очень полная библиография.

к 7. Jean-Gabriel L e m o i n e, Les anciens procédés de calcul sur les doigts en orient et en occident. Revue des études islamiques, 6 (1932), стр. 1—58 [с большой критической библиографией].

Египетский счет пальцев: Kurt S e t h e, Ein altägyptischer Fingerzählreim. Zeitschr. für Aegyptische Sprache, 54 (1918), стр. 16—39. Battiscombe G u n n, «Finger Numbering» in the Pyramyd Texts. ibid. 57(1922), стр. 71 и след.

О связях между алфавитной нумерацией, числовым мистицизмом, астрологией и т. д. см. Franz D o r n s e i f f, Das Alphabet in Mystik und Magie, Stoicheia 7, изд. 2, Leipzig, Teubner, 1925.

к 8. Примеры афинских монет нового стиля Bulletin de Correspondance Hellénique, 58 (1934), таблица 1. На этих монетах изображена афинская сова, стоящая на панафинской амфоре. На амфоре часто написаны числа, обозначающие месяцы, и потому называемые «буквами амфоры». О греческих монетах вообще см., например, Barkley V. H e a d, Historia Numorum, A Manual of Greek Numismatics, Oxford, Clarendon Press, 1911. О монетах Птолемеев с двойными буквенными числами см. Reginald Stuart P o o l e, Catalogue of Greek Coins, The Ptolemies, Kings of Egypt, стр. 44 и табл. VIII, 5. Эти числа, по-видимому, представляли годы эры в честь царицы Арсинои II, 270 до н. э.:ср. H e a d, Hist. Num., стр. 850.

к 9. Греческие символы для чисел 6, 90 и 900 обычно называют соответственно стигма, коппа и сампи. Первый первоначально имел форму F (или сходную) и потому называется также «дигамма», т. е. двойная гамма. Позднее в византийских рукописях он принял форму, похожую на лигатуру σ и τ и поэтому был назван «стигмой» (с седьмого или восьмого века н. э.). Его первоначальным названием было вав. Коппа является буквой Q финикийского алфавита. Сампи первоначально писали только с одной черточкой посередине

[1]) Русский перевод М. Занда в альманахе «Литературный Таджикистан», вып. V, Сталинабад, 1953. (*Прим. ред.*)

(ср. форму на таблице 5). Название «сампи» было в ходу с 17 века н. э.; финикийским оригиналом была буква саде (или цаде), читавшаяся как $s$ (или ц).

Разделение окружности круга на 360 частей возникло в вавилонской астрономии последних веков до н. э. Шестидесятеричная нумерация как таковая на много веков старше и не имеет ничего общего с астрономическими концепциями.

к 10. Пример записи с символами больших чисел при алфавитной системе счисления см. в Inscriptiones Graecae, т. 12, 1 (Insularum Maris Aegaei), Berlin, 1895, N 913. Эта надпись, найденная в Кескинто (Родос) и датируемая вторым веком до н. э., содержит основные числа теории движения планет; автор неизвестен. Анализ см. у P. Tannery, Mémoires scientifiques, т. 2, стр. 487 и след.

В обычной алфавитной системе нумерации числа 1000, 2000 и т. д. записываются как $\alpha$, $\beta$ и т. д., перед символами низшего порядка. Часто добавляется штрих, чтобы избежать смешения с 1,2 и т. д. Известно несколько случаев в надписях и папирусах, когда над символом для 900, сампи, сверху надписаны $\alpha$, $\beta$, ... и т. д. для обозначения 1000, 2000 и т. д. (ср. Larfeld, соч. цит. выше, на стр. 39 в примечании к п. 3, стр. 294).

В папирусах периода ранних Птолемеев можно найти, кроме сампи, также $\varphi\upsilon$ = 500 (+) 400 для 900, и помимо $\omega$ также $\varphi\tau$ = 500 (+) 300 для 800. Ср. Mahaffy, Flinders Petrie Papyri, т. 3, стр. 98 и далее. Пример из школьного учебника третьего века до н. э. показан на таблице 5 из P. Cairo. Inv. 65445 (издано O. Guéraud et P. Jouguet, Publications de la Société Royale Egyptienne de Papyrologie, Textes et Documents, т. 2, Cairo, 1938).

Левый и средний столбцы составляют таблицу квадратов, из которой можно ясно прочесть следующую часть:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 6 | 36 | 100 | 100 | 1 · 10000 |
| 7 | 7 | 49 | 200 | 200 | 4 · 10000 |
| 8 | 8 | 64 | 300 | 300 | 9 · 10000 |
| 9 | 9 | 81 | 400 | 400 | 16 · 10000 |
| 10 | 10 | 100 | 500 | 500 | 25 · 10000 |
| 20 | 20 | 400 | 600 | 600 | 36 · 10000 |
| 30 | 30 | 900 | 700 | 700 | 49 · 10000 |
| 40 | 40 | 1600 | 800 | 800 | 64 · 10000 |

Обращают внимание на себя знаки для 6 и 900 на таблице 5. Знаком для 1000 (в числе 1600) является $\alpha$ с присоединенной петлей. Кратные 10000 написаны как $\mu$ (первая буква греческого слова для 10000) с множителем наверху. Последний столбец дает перечень дробных частей драхмы; сохранились символы для следующих единичных дробей: $\overline{8}$, $\overline{12}$, $\overline{24}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{\overline{3}}$, $\overline{48}$. Отметим, что единичные дроби изображены обычными числовыми знаками с добавлением черточки. Единственным исключением является $\beta'$, которая означает не $\frac{1}{2}$, а $\frac{2}{3}$, обозначенную здесь $\overline{\overline{3}}$. Соответствующий символ в драхмах является комбинацией символов для $\overline{2}$ и $\overline{6}$. Действительно, $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$.

Обычно алфавитные числа располагают строго от высших к низшим. В датах, однако, встречается и обратный порядок; см. для примера Mesopotamia Yale Classical Studies 3, стр. 30 и след. (глиняные амулеты из Урука). Excavations in Dura-Europus, Preliminary Report IX, 1, стр. 169 и далее; Klio, 9, стр. 353. Македонские надписи (между 131 г. до н. э. и 322 г. н. э.) см., например, M. N. Tod, The Macedonian Era; The Annual of the British School at Athens, № 23 (1918—1919), стр. 206—217, и № 24 (1919—1921), стр. 54—67.

Что арабская форма обозначения нуля (маленький круг с чертой над ним или сходные формы) просто взята из греческих астрономических манускриптов, это было установлено F. W o e p c k e в 1863 (Journal Asiatique, Sér. 6, т. 1, стр. 466 и далее). Таблица, показывающая разные формы в арабских рукописях, а также в греческих папирусах, приведена у Rida A. K. I r a n i, Arabic numeral forms, Centaurus, 4 (1955), стр. 1—12. В византийской рукописи, написанной около 1300 г. н. э., для обозначения нуля помимо $\bar{o}$ применяется знак Ч (Vat. Graec., 1058, лист 261 и далее), очевидно, под восточным влиянием.

к 13. Наиболее обширная коллекция ранних числовых символов находится в первом издании Anton D e i m e l, Sumerische Grammatik der archaistischen Texte, Roma, Pontificium Institutum Biblicum, 1924 (глава IV). Более поздние свидетельства, особенно касающиеся десятичной системы, даны у A. F a l k e n s t e i n, Archaische Texte aus Uruk, Leipzig, 1936 (таблица знаков в конце). Изображение палочки для письма см., например, у S. L a n g d o n, Excavations at Kish, T. 1, Paris, 1924, рис. XXIX, и F a l k e n s t e i n, цит. выше, стр. 6. Тексты из Урука показывают также существование системы дробей, основанной на последовательном делении пополам. Очень существенной чертой клинописной нумерации является наличие специальных знаков для $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{6}$, которые широко встречаются и в позднейшие периоды, иногда даже в математических текстах. Эти «естественные дроби», несомненно, играли важную роль в упорядочении метрологических единиц. Очевидно, единицы высшего порядка удобно формировать так, чтобы можно было непосредственно образовать от них эти наиболее распространенные части. Это естественно приводит к группам по 12, 30 или 60 единиц. Все эти отношения встречаются в той или другой из параллельно существовавших систем единиц месопотамской метрологии.

Строго десятичная система счисления иногда встречается в математических текстах. Вот один пример из древневавилонского текста (опубликован у N e u g e b a u e r — S a c h s, Math. Cuneiform Texts, стр. 18). Число 1, 12, которое встречается в тексте, описано в заголовке, как «4 тысячи 3 сотни и 20», что действительно эквивалентно 1,12,0. Этот пример указывает также на отсутствие абсолютной определенности числового разряда в этот период нумерации. Мы можем интерпретировать 1,12 как $1,12,0 = 4320$ или как $1,12 = 72$ или как $1;12 = 1\frac{1}{5}$ и т. д. Только контекст позволяет определить абсолютное значение числа, написанного шестидесятерично.

Отсутствие обозначений для определения абсолютного значения числа делало возможным неправильное толкование простых таблиц умножения или таблиц обратных чисел. Когда в 1906 г. Хильпрехт (H.V. H i l p r e c h t) опубликовал «Mathematical, metrological, chronological tablets from the Temple Library of Nippur», он был убежден, что эти тексты указывают на связь с числовым мистицизмом Платона. В книге VIII «Республики» Платон приводит каббалистические правила, по которым правители его диктаторски управляемого государства должны организовать правильные браки. При помощи диких построений каббалистика Платона была увязана с цифрами, найденными в таблице. Так, 1,10 (т. е. 70 или $1\frac{1}{6}$ и т. д.) интерпретировалось как 195, 955, 200, 000, 000 и таким же образом все таблички были транскрибированы и «объяснены».

Что касается возникновения шестидесятеричной позиционной системы, то следует отметить, что довольно часто дробные доли денежной единицы начинают означать дроби вообще. В качестве примера можно привести римскую унцию (uncia), которая есть $\frac{1}{12}$ асса (as). При измерении времени унция означала $\frac{1}{12}$ часа (Jahreshefte d. oesterreichischen archaeol. Inst. in Wien, 37, 1948, стр. 111).

Смешанные системы написания также широко распространены. Например, в одном астрономическом тексте (ACT № 811a, 27 лиц.) 1 *me* 1,30 *me* стоит вместо «190 дней». Здесь 1 *me* означает «1 сотню» (*me* является сокращением вавилонского слова для 100), тогда как 1,30 есть шестидесятеричная форма написания 90, а конечное *me* означает «день» и, возможно, является сокращением.

к 14. Нельзя определенно сказать, когда в вавилонской математике был введен знак нуля. Мы убеждены, что его не существовало, скажем, до 1500 г. и он полностью используется с 300 г. до н. э. Таблица квадратов, найденная в Кише, условно отнесенная нашедшим ее С. Лангдоном ко времени Дария (500 г. до н. э.), содержит четыре случая, когда «нуль» написан точно так же, как число 20. Он пропущен в одном случае. Ср. Neugebauer, MKT, I, стр. 73 и II, табл. 34. О возможности более ранней даты (около 700 г.) см. MCT, стр. 34, примечание 95[1]).

Можно предположить, что вавилонская система нумерации часто приводила к ошибкам, например, к неправильному прочтению 10,2 как 12, и наоборот. Однако числа такого рода обычно написаны с очень тщательно оставленным местом, так что  вряд ли когда либо принимали за . Описания вавилонской нумерации в современных руководствах, как правило, вводят в заблуждение именно в этом пункте. Но все же имеются случаи, когда правильное определение десятков и единиц становится очень сомнительным. Мы имеем даже примеры больших чисел, написанных в две или более строчек, где, например, 50 в 56 написано в конце одной строчки, а 6 в начале следующей. О таком «раздробленном написании» см. Neugebauer — Sachs, Math. Cuneiform Texts, стр. 13 примечание 69 и Neugebauer, ACT, т. 2, указатель[2]).

В практических вычислениях вавилонские писцы иногда совершали ошибки того же типа, что возникают у нас при небрежном отношении к десятичной запятой. В качестве примера можно привести астрономический текст, касающийся восхода и захода Меркурия за годы от 146 до 122 до н. э. (BM 34585, Neugebauer, ACT, № 302, лиц. IV, 30). Писец запутался при интерполяции. Таблица, бывшая в его распоряжении, содержала значения

| | |
|---|---|
| 15 | 42 |
| 45 | 36 |

Задача состояла в том, чтобы определить значение величины в правой колонке, отвечающее значению аргумента в левой колонке, равному 31;20. Очевидно, ответ должен быть $36 + 13;40 \cdot 0;12 = 36+2;44 = 38;44$. Астрономическая задача требовала сложения этого результата с другим числом, 1;20. Следовательно, конечный результат должен быть 40;4. В тексте же мы находим 37;22,44. Очевидно, писец неправильно определил разряд числа $13;40 \cdot 0;12$ и написал 0;2,44 вместо 2;44. Из-за этого он получил в результате интерполяции 36;2,44 и отсюда конечный ответ $1;20 + 36;2,44 = 37;22,44$.

Следует, однако, сказать, что число ошибок в текстах относительно невелико. По моему опыту, я совершил гораздо больше ошибок при проверке древних вычислений, чем их было в оригиналах. Зачастую ошибки в

---

[1]) MKT = O. Neugebauer, Mathematische Keilschrift texte, три тома, Berlin, Springer-Verlag, 1935—37; MCT = O. Neugebauer — A. Sachs, Mathematical Cuneiform Texts, New Haven, 1945. (*Прим. ред.*)

[2]) ACT = O. Neugebauer, Astronomical Cuneiform Texts, три тома, London, 1955. (*Прим. ред.*)

тексте бывают очень полезны, потому что они являются одним из основных средств для установления подробностей процедуры счета, которой придерживался древний вычислитель.

**к 14а.** Paul L u c k e y, Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-risāla al-muḥītīya) von Ǧamšīd b. Mas'ūd al-Kāšī. Abh. d. Deutschen Akad. d. Wiss. zu Berlin. Kl. f. Math. u. allgem. Naturwiss., Jahrg. 1950, № 6, Akad. Verl., Berlin, 1953. Кроме того: Paul L u c k e y, Die Rechenkunst bei Ǧamšīd. b. Mas'ūd al-Kāšī mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens. Abh. f. d. Kunde d. Morgenlandes, 31, 1 (1951) [1]).

---

[1]) Сочинения ал-Каши имеются в русском переводе: Джемшид Гиясэддин а л -К а ш и, Ключ арифметики, Трактат об окружности, перев. с арабского Б. А. Розенфельда, редакция В. С. Сегаля и А. П. Юшкевича, комментарии А. П. Юшкевича и Б. А. Розенфельда, с приложением репродукций рукописей обоих трактатов, М., 1956. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА II

# ВАВИЛОНСКАЯ МАТЕМАТИКА

15. В этой главе не делается попытки дать историю вавилонской математики или хотя бы полный обзор ее содержания. Все, что можно здесь сделать, — это отметить ряд особенностей, которые можно считать характерными при нашем современном знании.

Я ранее уже отметил, что тексты, на которых основывается наше изучение, относятся к двум резко ограниченным и далеко отстоящим друг от друга периодам. Большая часть математических текстов является «древневавилонскими», другими словами, они относятся ко времени династии Хаммурапи, т. е., грубо говоря, к периоду от 1800 г. до 1600 г. до н. э. Вторая, значительно меньшая, группа относится к периоду Селевкидов и датируется последними тремя столетиями до н. э. Эти даты вполне надежно устанавливаются с помощью палеографии и лингвистики. Более тысячи лет, разделяющих эти периоды, оказали столь заметное влияние на форму знаков и язык, что можно безошибочно определить, к какому из двух периодов относится текст.

Что касается содержания, то изменения от одной группы до другой очень незначительны. Единственный существенный прогресс, который был достигнут, — это использование знака «нуль» в текстах периода Селевкидов (см. стр. 35). Затем можно отметить, что численные таблицы, особенно таблицы обратных чисел, вычислялись в гораздо большем объеме, чем это известно для раннего периода, хотя ничего принципиального нового, такого, что не было бы полностью доступно древневавилонским писцам, они не содержали. Кажется вероятным, что больший объем вычислений связан с развитием математической астрономии в этот последний период месопотамской науки.

Невозможно установить предысторию древневавилонских текстов. Мы абсолютно ничего не знаем о более раннем, предположительно шумерском, развитии. Все, о чем будет идти дальше речь, было полностью достигнуто уже в самых ранних из известных нам текстов. Обычно принято постулировать, что высокому уровню математического знания предшествует долгий путь развития. Я не знаю, на каком опыте основывается это суждение. Все исторически хорошо известные периоды великих математических открытий достигали своего кульминационного пункта после одного или двух веков быстрого прогресса, которому предшествовало и за которым следовало много веков относительного застоя.

Мне кажется не менее вероятным, что вавилонская математика достигла своего высокого уровня путем подобного же быстрого роста, основывавшегося, конечно, на предшествующем развитии шестидесятеричной позиционной системы, зачаточные формы которой засвидетельствованы в бесчисленных хозяйственных текстах, начиная с самых ранних письменных документов.

16. Математические тексты можно разбить на две большие группы: «тексты таблиц», «тексты задач». Типичным представителем первой группы является таблица умножения, рассмотренная выше на стр. 31. Вторая группа содержит большое разнообразие текстов, которые все более или менее прямо посвящены формулировке или решению алгебраических или геометрических задач. В настоящее время известные нам тексты задач составляют около ста табличек, при более чем вдвое большем числе текстов-таблиц. Общее число вавилонских табличек с надписями, находящихся в музеях, может быть оценено по крайней мере в 500 000, и это, несомненно, лишь небольшая часть текстов, погребенных до сих пор под развалинами городов Месопотамии. Поэтому наша задача может быть сравнена с восстановлением истории математики по нескольким вырванным страничкам, случайно уцелевшим при уничтожении большой библиотеки.

**17.** Тексты-таблицы позволяют нам получить кое-какую, хотя и не очень существенную, историческую информацию. Архивы из города Ниппура, рассеянные теперь по меньшей мере по трем музеям — Филадельфии, Иены и Стамбула, — содержат большой процент текстов-таблиц, многие из которых, несомненно, являются «ученическими текстами», т. е. упражнениями, написанными писцами-учениками. Это ясно, например, из того, что одна и та же таблица умножения повторяется разными почерками на лицевой и оборотной стороне одной и той же таблички. Часто мы находим список слов на одной стороне таблички и математическую таблицу на другой ее стороне. Эти словари составляют основу обучения писцов, необходимую для овладения всеми тонкостями клинописного письма, как на аккадском, так и на шумерском языках. Наконец, многие из наших математических таблиц объединены с таблицами мер и весов, необходимыми в повседневной хозяйственной жизни. Можно не сомневаться, что таблицы умножения и деления развивались одновременно с хозяйственными текстами. Так мы находим точное подтверждение того, что можно было косвенно предполагать на основе нашего общего знакомства с ранней цивилизацией Месопотамии.

18. Хотя отдельная таблица умножения по своему содержанию достаточно тривиальна, изучение большого числа таких текстов быстро вскрыло неожиданные факты. Очевидно, полная система шестидесятеричных таблиц умножения должна состоять из 58 таблиц, каждая из которых содержит произведения всех чисел от 1 до 59 с одним из чисел от 2 до 59. Благодаря позиционной нумерации, такой системы таблиц будет достаточно для выполнения всех возможных умножений, так же как нам достаточно знать нашу десятичную таблицу умножения. Вначале казалось, что это предположение хорошо подтверждается с тем незначительным отклонением, что каждая отдельная табличка содержала все произведения на числа от 1 до 20, а затем только произведения на 30, 40 и 50. Это, очевидно, не означало ничего более, как экономию места, потому что все 59 произведений можно получить из чисел такой таблицы путем самое большее одного сложения. Но скоро обнаружился более смущающий факт. Не только ряд сохранившихся таблиц содержит важные пропуски, но и, что более непонятно, попадаются таблицы, в которых предположенная схема продолжается до неразумных размеров. Таблицы умножения на 1,20 1,30 1,40 3,20 3,45 и т. д. как будто заставляют нас предположить, что существует не 59 отдельных таблиц, а 3600 таблиц. Нелепость такой гипотезы стала очевидной, когда было обнаружено несколько таблиц чисел, кратных числу 44,26,40; очевидно, никто не станет оперировать библиотекой из $60^3 = 216\,000$ табличек для облегчения умножения. И противоречит всем законам вероятности то, что мы имеем несколько копий таблицы умножения на 44,26,40 и ни одной таблицы умножения на 11, 13, 14, 17, 19 и т. д.

Разрешение этой загадки заключается в самом числе 44,26,40, которое появляется и в таблицах другого типа, а именно, в таблицах обратных величин. С точностью до незначительных отклонений таблицы обратных величин представляют собой следующие ряды чисел:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 30 | 16 | 3,45 | 45 | 1,20 |
| 3 | 20 | 18 | 3,20 | 48 | 1,15 |
| 4 | 15 | 20 | 3 | 50 | 1,12 |
| 5 | 12 | 24 | 2,30 | 54 | 1,6,40 |
| 6 | 10 | 25 | 2,24 | 1 | 1 |
| 8 | 7,30 | 27 | 2,13,20 | 1,4 | 56,15 |
| 9 | 6,40 | 30 | 2 | 1,12 | 50 |
| 10 | 6 | 32 | 1,52,30 | 1,15 | 48 |
| 12 | 5 | 36 | 1,40 | 1,20 | 45 |
| 15 | 4 | 40 | 1,30 | 1,21 | 44,26,40 |

Последняя пара содержит число 44,26,40, кроме того, и все другие двузначные числа, упомянутые выше, являются числами второй колонки. С другой стороны, за единственным исключением, о котором сейчас будет сказано, пропуски в нашем предполагаемом ряду таблиц умножения точно соответствуют отсутствующим числам в приведенной выше таблице обратных величин. Таким образом, наш запас таблиц умножения не является собранием таблиц всех произведений $a \cdot b$, для $a$ и $b$ от 1 до 59, а таблиц произведений $a \cdot \bar{b}$, где $\bar{b}$ есть число из правой колонки нашего ряда. Характер этих чисел $\bar{b}$ достаточно очевиден: они являются обратными величинами для чисел $b$ левой колонки, записанными в шестидесятеричных дробях:

$$\frac{1}{2} = 0;30$$

$$\frac{1}{3} = 0;20$$

$$\frac{1}{4} = 0;15$$

и т. д.

$$\frac{1}{1,21} = 0;0,44,26,40$$

Можно сказать то же самое проще и исторически более правильно следующим образом: приведенная выше «таблица обратных величин» представляет собой перечень чисел $b$ и $\bar{b}$ таких, что произведение $b \cdot \bar{b}$ равно 1 или любой другой степени 60. Действительно, совершенно не существенно, напишем ли мы

$$2 \cdot 30 = 1,0$$

или

$$2 \cdot 0;30 = 1$$

или

$$0;2 \cdot 30 = 1$$

или

$$0;2 \cdot 0;30 = 0;1 \text{ и т. д.}$$

Ознакомление с математическими текстами-задачами показывает бесчисленное количество примеров того, что вавилонские математики полностью использовали эту гибкость своей системы.

Итак, мы видим, что таблицы умножения вместе с таблицами обратных величин составляют законченную систему, предназначенную для вычисления всех произведений $a \cdot \bar{b}$ или как мы можем теперь написать, всех шестидесятеричных делений $\frac{a}{b}$, в пределах данной выше таблицы обратных величин. Эта таблица не только ограничена, но и имеет пропуски. В ней нет обратных величин для 7, 11, 13 или 14 и т. д. Причина этого ясна. Если мы разделим 1 на 7, то получим периодическую шестидесятеричную дробь 8,34,17,8,34,17,... точно так же для $\frac{1}{11}$ имеем бесконечное повторение группы чисел 5,27,16,21,49. Мы имеем таблицы, в которых лаконично сказано, «на 7 не делится», «на 11 не делится» и т. д. Точно так же обстоит дело со всеми числами, содержащими простые делители, не входящие в число 60, т. е. простые делители, отличные от 2, 3 и 5. Назовем такие числа «неправильными», в отличие от «правильных» чисел, для которых обратные величины могут быть выражены шестидесятеричными дробями с конечным числом знаков.

Мы уже упоминали об одном исключении из нашего правила, состоящего в том, что таблицы умножения содержат только числа $\bar{b}$ или, как мы их будем теперь называть, правильные числа. Это исключение касается первого неправильного числа, а именно, числа 7, для которого сохранилось несколько таблиц умножения. Наличие таблицы умножения на 7, бесспорно, объясняется желанием иметь полный набор таблиц $a \cdot b$ хотя бы для первого десятка, в котором 7 составило бы единственный пробел, поскольку все остальные числа от 1 до 10 являются правильными. Итак, мы видим, что наше первоначальное предположение было справедливым в скромных рамках от 1 до 10. Но вместо того чтобы продолжать эту таблицу до 60, была выбрана гораздо более удобная последовательность чисел, а именно, тех чисел, которые нужны не только для умножения, но и для деления. Просто умножение может быть всегда выполнено путем сложения результатов, взятых из двух разных таблиц. Одной только этой системы таблиц, в том виде, как она существовала в 1800 г. до н. э., достаточно, чтобы поставить вавилонян впереди всех вычислителей античного мира. Между 350 и 400 гг. н. э. Теон Александрийский написал целые страницы объяснений в своих комментариях к шестидесятеричным вычислениям в «Альмагесте» Птолемея. Писец из управления имением какого-либо вавилонского храма за 2000 лет до Теона справедливо удивился бы, зачем тратится так много слов для объяснения столь простой техники.

Пределы «стандартной» таблицы обратных величин, которую мы воспроизвели выше (стр. 46), могли бы быть при желании раздвинуты. Мы имеем тексты того же периода, в которых разъясняется, как надо действовать в случаях, не содержащихся в стандартных таблицах. Мы имеем также таблицы обратных величин для ряда последовательно идущих чисел, как правильных, так и неправильных. Обратные величины для неправильных чисел сокращены до трех или четырех разрядов. Но действительное расширение таблиц произошло в период Селевкидов, с появлением таблиц обратных величин правильных чисел с семью разрядами для $b$ и 17 разрядами для соответствующих обратных чисел $\bar{b}$. Столь обширная таблица, содержащая правильные числа до $17 \cdot 10^{12}$, вполне может быть использована также для приближенного определения обратных величин неправильных чисел путем интерполяции. Действительно, работая над астрономическими текстами, я часто пользовался такой таблицей именно для этой цели, и я не сомневаюсь, что только повторял процесс, хорошо знакомый астрономам эпохи Селевкидов[1]).

19. Возвращаясь к древневавилонскому периоду, мы находим много других свидетельств высокого искусства вычислений у писцов этого периода. Мы находим таблицы квадратов и квадратных корней, кубов и кубических корней, сумм квадратов и кубов, необходимых для численного решения кубических уравнений специального типа, таблицы показательных функций, применявшиеся для вычисления сложных процентов, и т. д.

Совсем недавно А. Сакс нашел табличку, которая, как он обнаружил, посвящена задаче оценки точности приближений обратных величин неправильных чисел. В тексте рассматриваются обратные величины для 7 11 13 14 и 17, причем в последних двух случаях в форме $b\cdot\bar{b}=10$ вместо обычной формы $b\cdot\bar{b}=1$. Приведем только две первые строчки, которые, по-видимому, утверждают, что $8,34,16,59<\bar{7}$, но $8,34,18>\bar{7}$. Действительно, правильное выражение для $\bar{7}$ содержит 8,34,17 в периоде. Нет нужды подчеркивать значение этой задачи, являющейся первым шагом на пути к математическому анализу бесконечных арифметических процессов и общего понятия «числа». Нет необходимости говорить также о том, что найденный фрагмент ставит значительно больше вопросов, чем разрешает. Но он не оставляет никаких сомнений в том, что мы должны признать наличие интереса к проблемам приближений уже в столь ранние времена, как древневавилонский период.

Это подтверждается и маленькой табличкой, находящейся теперь в Иельской вавилонской коллекции (см. табл. 6,а)). На ней нарисован квадрат с двумя диагоналями. У стороны квадрата поставлено число 30, у диагонали — числа 1,24,51,10 и 42,25,35. Значение этих чисел становится ясным после умножения 1,24,51,10 на 30, действия, которое проще выполнить путем деления 1,24,51,10 на 2, потому что 2 и 30 являются взаимно обратными величинами. Результат равен 42; 25,35. Итак, мы получили из $a=30$ диагональ $d=42;25,35$, используя значение

$$\sqrt{2}=1;24,51,10.$$

Точность этого приближения можно проверить, возведя 1;24,51,10 в квадрат. Это дает 1;59,59,59,38,1,40 — число, ошибка которого не превосходит $22/60^4$. Переходя к десятичным дробям,

---

[1]) Другое объяснение происхождения и назначения таблиц умножения предложено М. Я. Выгодским («Арифметика и алгебра в древнем мире», 2-е изд., «Наука», 1967, стр. 113—139). (*Прим. ред.*)

мы имеем здесь приближение 1,414213... вместо 1,414214... Это действительно замечательно хорошее приближение. Оно использовалось Птолемеем при составлении его таблицы хорд почти две тысячи лет спустя.

Известно другое древневавилонское приближенное значение $\sqrt{2}$, а именно 1; 25. Оно содержится также в приближенном значении $\sqrt{2}$, которое мы находим в индийском сочинении «Сульва-Сутра», дошедший до нас вариант которого датируется третьим или четвертым веком до н. э. Там мы находим

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 4} - \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 34},$$

или, в шестидесятеричных дробях,

$$1;25 - 0;0,8,49,24,\ldots = 1;24,51,10,35,\ldots$$

По-моему, не исключена возможность того, что как главный член, так и вычитаемая поправка в конечном счете основаны на двух вавилонских приближениях.

20. Приведенный выше пример определения диагонали квадрата по его стороне является достаточным доказательством того, что теорема «Пифагора» была известна более чем за тысячу лет до Пифагора. Это подтверждается и многими другими примерами использования этой теоремы в текстах-задачах того же периода, а также периода Селевкидов. Иными словами, на протяжении всего времени существования вавилонской математики было известно, что сумма квадратов длин сторон прямоугольного треугольника равна квадрату длины гипотенузы. После открытия этого геометрического факта вполне естественно предположить, что все тройки чисел $l$, $b$ и $d$, удовлетворяющие соотношению $l^2 + b^2 = d^2$, могут использоваться как стороны прямоугольного треугольника. Следующим естественным шагом является постановка вопроса: какие числа $l, b, d$ удовлетворяют этому соотношению? Поэтому совсем не удивительно, что вавилонские математики исследовали теоретико-числовую задачу получения «пифагоровых чисел». Часто высказывалось предположение, что теорема Пифагора возникла из открытия, что числа 3, 4 и 5 удовлетворяют соотношению Пифагора. Я не вижу никаких причин, которые привели бы к идее построения треугольников с такими сторонами, и к исследованию вопроса, являются ли такие треугольники прямоугольными. Лишь вследствие нашего воспитания в духе греческого подхода к математике мы сразу думаем о возможности геометрического изображения арифметических или алгебраических отношений.

Сказать, что открытие геометрической теоремы естественно привело к постановке соответствующей арифметической задачи, еще не значит ожидать, что последняя задача была действительно решена. Поэтому для историка очень интересно, что мы на самом деле имеем текст, показывающий, как далеко продвинулись в решении этой задачи во времена Древнего Вавилона. Текст, о котором идет речь, принадлежит Плимптонской коллекции Колумбийского университета в Нью-Йорке.

Излом с левой стороны свидетельствует, что вначале табличка была больше; наличие современного клея на изломе показывает, что другая часть таблички была утеряна уже после ее раскопок. Сохранились четыре колонки, которые мы будем нумеровать, как обычно, слева направо. Каждая колонка имеет заголовок. Последний заголовок — «его название» — означает «текущий номер», как видно из того, что колонка под ним содержит просто номер строки от «1-го» до «15-го». Эта последняя колонка не представляет поэтому никакого математического интереса. Колонки II и III озаглавлены словами, которые можно перевести соответственно как «решающее число ширины» и «решающее число диагонали». «Решающее число» — весьма неудовлетворительный перевод термина, применяемого при извлечении квадратных корней и аналогичных операциях, и не имеющего точного эквивалента в современной терминологии. Мы обозначим эти два заголовка просто буквами «$b$» и «$d$» соответственно. Слово «диагональ» встречается и в заголовке первой колонки, но точное значение остальных слов нам не известно.

Числа из колонок I, II и III транскрибированы ниже. Числа в скобках [] реставрированы. Начальные числа «[1]» в строках четвертой и ниже наполовину сохранились, как это ясно видно на фотографии (табл. 7, а)). Полностью сохранилось «1» в четырнадцатой строчке. При транскрибировании я вставил нули там, где следовало; в самом тексте их нет.

| I | II (=$b$) | III (=$d$) | IV |
|---|---|---|---|
| [1,59,0,]15 | 1,59 | 2,49 | 1 |
| [1,56,56]58,14,50,6,15 | 56,7 | 3,12,1 | 2 |
| [1,55,7,]41,15,33,45 | 1,16,41 | 1,50,49 | 3 |
| [1,]5[3,1,]0,29,32,52,16 | 3,31,49 | 5,9,1 | 4 |
| [1,]48,54,1,40 | 1,5 | 1,37 | 5 |
| [1,]47,6,41,40 | 5,19 | 8,1 | 6 |
| [1,]43,11,56,28,26,40 | 38,11 | 59,1 | 7 |
| [1,]41,33,59,3,45 | 13,19 | 20,49 | 8 |
| [1,]38,33,36,36 | 9,1 | 12,49 | 9 |
| 1,35,10,2,28,27,24,26,40 | 1,22,41 | 2,16,1 | 10 |
| 1,33,45 | 45 | 1,15 | 11 |
| 1,29,21,54,2,15 | 27,59 | 48,49 | 12 |
| [1,]27,0,3,45 | 7,12,1 | 4,49 | 13 |
| 1,25,48,51,35,6,40 | 29,31 | 53,49 | 14 |
| [1,]23,13,46,40 | 56 | 53 | 15 |

Этот текст содержит несколько ошибок. В II,9 мы находим 9,1 вместо 8,1, что является просто опиской. ВII,13 в тексте стоит 7,12,1 вместо 2,41. Здесь писец вместо самого числа 2,41 написал его квадрат, равный 7,12,1. В III,15 находим 53 вместо 1,46, равного удвоенному 53. Наконец, остается необъяснимая ошибка в III,2, где 3,12,1 следует заменить на 1,20,25.

Эти числа связаны следующими соотношениями. Числа $b$ и $d$ во второй и третьей колонках являются пифагоровыми числами; это значит, что они являются целыми решениями уравнения

$$d^2 = b^2 + l^2.$$

Поскольку $b$ и $d$ известны из нашего списка, мы можем вычислить $l$ и найти

| Строка | $l$ | Строка | $l$ | Строка | $l$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2,0 | 6 | 6,0 | 11 | 1,0 |
| 2 | 57,36 | 7 | 45,0 | 12 | 40,0 |
| 3 | 1,20,0 | 8 | 16,0 | 13 | 4,0 |
| 4 | 3,45,0 | 9 | 10,0 | 14 | 45,0 |
| 5 | 1,12 | 10 | 1,48,0 | 15 | 1,30 |

Если мы затем составим отношения $\frac{d^2}{l^2}$, то получим числа первой колонки. Таким образом, наш текст представляет собой перечень значений $\frac{d^2}{l^2}$, $b$ и $d$ для пифагоровых чисел. Вероятно, значения $l$ находились в отсутствующей части таблички. Несомненно, что они были явно вычислены.

Если мы возьмем отношение $\frac{b}{l}$ для первой строки, то найдем

$$\frac{1,59}{2,0} = 0;59,30,$$

т. е. почти 1. Отсюда следует, что первый прямоугольный треугольник очень близок к половине квадрата. Аналогично находим, что последний прямоугольный треугольник имеет углы, близкие к 30° и 60°. Далее монотонное убывание чисел в колонке I показывает, что форма треугольников довольно правильным образом меняется между этими двумя пределами. При более тщательном исследовании этого явления обнаруживается, что значения $\frac{d^2}{l^2}$ в колонке I убывают почти линейно; в еще большей мере это относится к самим отношениям $\frac{d}{l}$ (рис. 3).

Это наблюдение заставляет думать, что древний математик, составлявший этот текст, интересовался не только определением пифагоровых троек чисел, но и их отношениями $\frac{d}{l}$. Выясним математический смысл этой задачи. Известно, что все пифагоровы тройки можно выразить в форме

$$l = 2pq,$$
$$b = p^2 - q^2,$$
$$d = p^2 + q^2,$$

где $p$ и $q$ являются произвольными целыми числами, удовлетворяющими условию, что они взаимно просты, одно из них четное и $p > q$. Следовательно, для отношения $\frac{d}{l}$ мы получаем выражение

$$\frac{d}{l} = \frac{1}{2}(p \cdot \bar{q} + \bar{p} \cdot q),$$

где $\bar{p}$ и $\bar{q}$ — обратные величины для $p$ и $q$. Отсюда видно, что отношение $\frac{d}{l}$ выражается конечной шестидесятеричной дробью, как в нашем тексте, тогда и только тогда, когда оба числа, $p$ и $q$, являются правильными.

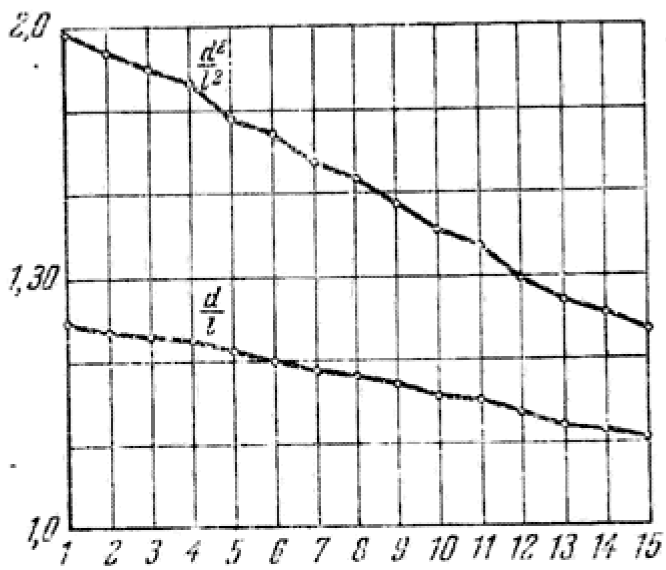


Рис. 3.

Это обстоятельство легко проверить по нашему перечню чисел, вычислив значения $p$ и $q$, отвечающие приведенным в тексте значениям $l$, $b$ и $d$. Тогда обнаруживается один замечательный факт. Числа $p$ и $q$ не просто являются правильными числами, как предполагалось, но они являются правильными числами из «стандартной таблицы» обратных величин (стр. 46), так хорошо известной нам по многочисленным таблицам того же периода. Единственное видимое исключение представляет число $p = 2,5$, но это число опять-таки хорошо известно, как канонический пример для вычисления обратного значения не по стандартной таблице. Мне это кажется веским указанием на то, что основная формула для построения троек пифагоровых чисел древним математикам была известна. Как бы то ни было, разобранный нами текст остается одним из самых замечательных документов древневавилонской математики. Мы скоро (стр. 55) вернемся к вопросу о том, как могла быть найдена формула для пифагоровых чисел [1]).

**21.** Пифагоровы числа, конечно, не были единственным примером задач, касающихся отношений между числами. На это же ясно указывают таблицы квадратов и кубов. Мы имеем также примеры, где встречаются суммы последовательных квадратов или арифметические прогрессии. Было бы очень удивительно, если бы случайно уцелевшие тексты указали бы нам точные пределы знаний, достигнутых вавилонскими математиками. Нет, однако, никаких указаний на то, что им было известно важное понятие простого числа.

Все эти вопросы, вероятно, никогда не были резко отграничены от методов, которые мы теперь называем «алгебраическими». В центре этого круга проблем находится решение квадратных уравнений с двумя неизвестными. В качестве типичного примера можно привести задачу из текста периода Селевкидов. В этой задаче требуется найти такое число, при сложении которого с обратной ему величиной получается данное число.

Используя современную систему обозначений, назовем неизвестное $x$, его обратную величину $\bar{x}$ и данное число $b$. Таким образом, нужно определить $x$ из уравнений

$$x\bar{x} = 1, \qquad x + \bar{x} = b.$$

В тексте $b$ имеет значение 2;0,0,33,20. Подробное решение следующим образом шаг за шагом описано в тексте. Составь число

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1;0,0,33,20,4,37,46,40.$$

Вычти 1 и найди квадратный корень

$$\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - 1} = \sqrt{0;0,0,33,20,4,37,46,40} = 0;0,44,43,20.$$

Правильность этого результата проверяется возведением в квадрат.

[1]) В задаче о делении трапеции на две равновеликие полосы появляются близкие к пифагоровым так называемые вавилонские числа. Эти числа удовлетворяют соотношению $x^2 + z^2 = 2y^2$ и выражаются через пифагоровы тройки $b, l, d$ по формулам $x = l - b$, $y = d$, $z = b + l$. Например, при $p = q + 1$ получаем вавилонские тройки $x = 2q^2 - 1$, $y = q^2 + (q+1)^2$, $z = 2(q+1)^2 - 1$, в частности, 1 5 7 ($q = 1$), 7 13 17 ($q = 2$), 17 25 31 ($q = 3$) и т. д. Такие тройки, для значений $q$ от 1 до 5 образующие связный ряд чисел, засвидетельствованы клинописными текстами. Реконструкцию приема, которым были найдены эти числа, см. в статье А. А. Ваймана «Вавилонские числа» («Историко-математические исследования», вып. X, 1957, стр. 587—594). См. также книгу А. А. Ваймана, «Шумеро-вавилонская математика» (М., 1961), гл. VIII, стр. 195—206. (*Прим. ред.*)

Затем прибавь результат к $\frac{b}{2}$ и вычти его из $\frac{b}{2}$. Это дает ответ

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\phantom{x}} = 1;0,0,16,40 + 0;0,44,43,20 = 1;0,45,$$

$$\bar{x} = \frac{b}{2} - \sqrt{\phantom{x}} = 1;0,0,16,40 - 0;0,44,43,20 = 0;59,15,33,20.$$

Действительно, $x$ и $\bar{x}$ являются взаимно обратными числами и их сумма равна данному числу $b$.

Эта задача типична во многих отношениях. Прежде всего, она показывает правильное применение квадратичной формулы решения квадратных уравнений. Далее, она демонстрирует неограниченное применение больших шестидесятеричных чисел. Наконец, здесь мы имеем дело с основным типом квадратичных задач, сотни примеров которого сохранились, типом, который я называю «нормальной формой»: нужно найти два числа по данным их произведению ($a$) и их сумме или разности ($b$). Совершенно очевидно, что целью бесчисленных примеров является обучение приведению более сложных квадратичных задач к этой «нормальной форме»

$$x \cdot y = a,$$
$$x \pm y = b,$$

из которой затем получается решение

$$x = \frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}\ ,$$
$$y = \pm\frac{b}{2} \mp \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 \mp a}$$

просто преобразованием двух первоначальных уравнений в два линейных уравнения

$$x \pm y = b,$$
$$x \mp y = \sqrt{b^2 \mp 4a}.$$

Другими словами, сведѐние квадратного уравнения к его «нормальной форме» означает в конечном счете сведѐние его к простейшей системе линейных уравнений.

Та же идея может быть использована для нахождения трех чисел $a$ $b$ $c$, удовлетворяющих пифагорову соотношению. Допустим, что опять начинают с пары линейных уравнений

$$a = x + y,$$
$$b = x - y,$$

имея в виду, что

$$a^2 = b^2 + c^2, \qquad \text{если} \qquad c^2 = 4xy.$$

Если считать, что $x$ и $y$ целые, то $a$ и $b$ тоже будут целыми; но $c = 2\sqrt{xy}$ будет целым, только если $\sqrt{xy}$ — целое число. Это условие удовлетворяется, если допустить, что $x$ и $y$ являются квадратами целых чисел

$$x = p^2, \quad y = q^2.$$

Итак, в конце концов мы получаем, что $a$, $b$ и $c$ составляют пифагорову тройку, если $p$ и $q$ — произвольные целые числа ($p > q$) и

$$a = p^2 + q^2, \quad b = p^2 - q^2, \quad c = 2pq.$$

Это та самая формула, которая была нужна для нашего объяснения текста, содержащего пифагоровы числа.

**22.** В рамках этих лекций невозможно описать все детали вавилонской теории квадратных уравнений. На самом деле это и не нужно, поскольку весь материал имеется в легко доступных изданиях, приведенных в библиографии к этой главе. Однако некоторые особенности вавилонской алгебры следует подчеркнуть, потому что они существенны для оценки всей этой системы ранней математики.

Прежде всего, легко показать, что геометрические понятия играют весьма второстепенную роль в вавилонской алгебре, как бы широко ни употреблялась геометрическая терминология. Достаточно сказать о существовании примеров, в которых площади и длины складываются, или площади умножаются, что исключает какую-либо геометрическую интерпретацию в духе Евклида, которая кажется нам столь естественной. Можно привести и еще более разительные примеры пренебрежения реальностью. Имеется много задач, связанных с платой за труд, когда известна стоимость одного рабочего дня. И опять ставятся задачи, включающие сложение, вычитание, умножение этих чисел, причем таким путем без всяких колебаний комбинируются числа людей и числа дней. Это счастливая случайность, если неизвестное число рабочих, определяемое из квадратного уравнения, оказывается целым числом. Очевидно, здесь интересуются только алгебраическими соотношениями, совершенно так же, как для нашей алгебры не имеет значения, что означают буквы.

Другое важное замечание касается формы, в которой поставлены все эти алгебраические задачи. Тексты распадаются на два основных класса. В текстах первого класса формулируется задача и затем шаг за шагом следует ее решение с использованием данных вначале конкретных чисел. Эти тексты часто заканчиваются словами «такова процедура». Второй класс содержит только собрание задач, иногда более 200 на одной табличке размером в небольшую печатную страницу. В этих сборниках задачи обычно расположены в тщательном порядке, начиная с простых случаев, например, квадратных уравнений в нормальной форме и постепенно переходя к более сложным комбинациям, однако, таким, что в конечном счете решение сводится к нормальной форме. Одна стандартная форма таких сборников состоит в сохранении неизменного условия $xy = 10,0$, при изменении второго уравнения, содержащего все более и более сложные многочлены, кончая, например, выражениями, вроде

$$(3x + 2y)^2 + \frac{1}{13}\left\{4\left[\frac{1}{7}\left((x+y)-\left(\frac{1}{2}+1\right)(x-y)\right)\right]^2 + (x+y)^2\right\} = 4,45,0.$$

При исследовании таких серий оказывается, что они все имеют одно и то же решение $x = 30$, $y = 20$. Это показывает, что учителю было безразлично, известен ли ответ ученику. Очевидно, нужно было научиться методу преобразования таких ужасных выражений в более простые и прийти в конечном счете к правильному решению. Мы имеем несколько табличек первого класса, в которых решаются один за другим такие примеры из соответствующего собрания задач второго класса.

Из фактически решенных примеров становится ясным, что важным считался общий метод, а не численный результат. Если случайно множитель имел значение 1, то умножение все равно выполнялось отдельно, очевидно, потому, что этот шаг необходим в общем случае. Точно также, мы постоянно встречаем общее объяснение вычислений. Там, где мы написали бы $x + y$, в тексте будет сказано «5 и 3, сумма длины и ширины». И действительно, часто можно непосредственно перевести эти примеры в нашу символику простой заменой идеограмм, употреблявшихся для обозначения «длины», «ширины», «сложи», «умножь» нашими буквами и символами. Приводимые при этом числа, по-видимому, являются не более чем удобным пособием для иллюстрации лежащих в основе общих процессов. Поэтому совершенно неправильно отрицать использование «общих формул» в вавилонской алгебре. Последовательности тесно связанных задач и общие правила, идущие параллельно численному решению, де факто образуют инструмент, вплотную приближающийся к чисто алгебраической операции. Конечно, остается фактом, что шаг к сознательному алгебраическому методу обозначения так и не был сделан.

**23.** Развитие этой «вавилонской алгебры» поистине замечательно. Хотя квадратные уравнения, несомненно, составляют ее наиболее значительное ядро, в ней рассматривается также ольшое число других близких задач. Сплошь и рядом встречаются линейные системы с несколькими неизвестными, например, в задачах «о наследовании», где нужно определить доли нескольких сыновей на основании линейных соотношений между этими долями. Аналогичные задачи мы находим при разделе полей, а также и в общей постановке в рамках упомянутых выше сборников алгебраических примеров.

С другой стороны, из тех же сборников мы знаем серии примеров, эквивалентных типам уравнений четвертого и шестого порядка. Обычно эти задачи легко сводятся к квадратным уравнениям для $x^2$ или $x^3$, но встречаются также примеры, приводящие к более общим уравнениям 5-го и 3-го порядка. В последних случаях для нахождения численного решения, по-видимому, пользовались таблицами для $n^2+n^3$, но наши источники слишком отрывочны, чтобы дать последовательное описание процедуры, применявшейся в случаях, которые не сводятся к квадратным уравнениям.

Наконец, нет никакого сомнения, что рассматривались такие задачи, которые в современном смысле выходят за пределы алгебры. Это ясно не только из задач на сложные проценты, но и из числовых таблиц для последовательных степеней данных чисел. С другой стороны, мы имеем тексты, посвященные определению показателей данных чисел. Иными словами, фактически экспериментировали со специальными случаями логарифмов, однако без какого-либо общего использования этой функции. По-видимому, в случае числовых таблиц отсутствие общей системы обозначения вредило значительно больше, чем при решении чисто алгебраических задач [1]).

**24.** По сравнению с алгебраическим и вычислительным направлением роль «геометрии» в вавилонской математике довольно незначительна. Это само по себе нисколько не удивительно. Центральной задачей математики на ранней стадии ее развития является численное нахождение решения, удовлетворяющего некоторым условиям. На этом уровне нет существенного различия между делением суммы денег согласно определенным правилам или делением поля данного размера на, скажем, участки равной площади. Во всех случаях нужно соблюдать внешние условия, в одном случае условия наследования, в другом — правила для

---

[1]) Как общая оценка Нейгебауером вавилонской алгебры, так и особенно предлагаемая им реконструкция решения задач, сводящихся к уравнениям степени выше второй, многими не разделяются. См. указанные выше книги М. Я. Выгодского и А. А. Ваймана, а также И. Н. Веселовский, «Вавилонская математика», Труды Института истории естествознания и техники, т. 5, 1955, стр. 241—303; А. И. Ранк, Из ранней истории алгебры. Квадратные уравнения у вавилонян, Пермь, Ученые зап. ун-та, т. 8, № 1, 1953, стр. 31—63; А. И. Ранк, К вопросу о методах извлечения квадратного корня древними математиками, Пермь, Ученые зап. ун-та, т. 8, № 3, 1954, стр. 48—58; А. И. Ранк, О биквадратных уравнениях у вавилонян, Пермь, Ученые зап. ун-та, т. 9, № 4, 1955, стр. 11—14; А. И. Ранк, Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов, Историко-математические исследования, вып. XI, 1958, стр. 171—182; А. Е. Ранк, Очерки по истории математики в древности, гл. II, Саранск, 1967; Kurt Vogel, Vorgriechische Mathematik, II, Die Mathematik der Babylonier, Hannover — Paderborn, 1959, гл. 5. (*Прим. ред.*)

определения площади или отношения между мерами или установившиеся нормы оплаты работников. Математическая ценность задачи состоит в ее арифметическом решении; «геометрия» является лишь одним из многих объектов практической жизни, к которым можно применить арифметические методы.

Это общее положение легко подтвердить длинными списками примеров, разобранных в сохранившихся текстах. Решительнее всего свидетельствуют об этом, однако, специальные тексты, составленные для нужд писцов, занимавшихся математическими задачами. Эти писцы должны были знать все численные параметры, необходимые в процессе вычислений. Такие перечни «коэффициентов» впервые были обнаружены профессором Иельского университета Гетце в двух текстах из Иельской вавилонской коллекции. Эти списки содержат, как будто в хаотическом порядке, числа и пояснительные замечания к их использованию. Одни из этих списков начинаются с коэффициентов, нужных для «кирпичей» (существовало много типов кирпичей определенных размеров), затем идут коэффициенты для «стен», для «асфальта», для «треугольника», для «сегмента круга», для «меди», «серебра», «золота» и других металлов, для «грузового судна», для «ячменя» и т. д. Затем мы находим коэффициенты для «кирпичей», для «диагонали», для «наследования», для «резки тростника» и т. д. Многие детали этих списков до сих пор нам непонятны, и лишь показывают, насколько отрывочным остается наше знание вавилонской математики, несмотря на многие сотни примеров в изученных текстах. Но пункт, который нас в данный момент интересует, становится совершенно ясным, а именно, что «геометрия» не является специальной математической дисциплиной, ее трактуют наравне с другими формами численных отношений между конкретными предметами.

Эти обстоятельства надо твердо помнить, и если мы говорим о геометрических знаниях вавилонских математиков, то лишь потому, что этим специальным сведениям в конечном счете суждено было сыграть решающую роль в развитии математики. Следует также подчеркнуть, что мы не имеем ни малейших признаков чего-либо напоминающего «доказательство» соотношений между геометрическими величинами. На некоторых табличках, касающихся деления площадей, имеются рисунки трапеций или треугольников, но без всякой попытки правильно выдержать размеры. Определение геометрии как науки, доказывающей правильные теоремы на основании неправильных чертежей, вполне применимо к вавилонской геометрии в части, касающейся чертежей, а также в части алгебраических соотношений. Но действительно «геометрическая» часть зачастую ускользает от нас. Так, например, не ясно, являются ли треугольники и трапеции прямоугольными или нет. Если в текстах упоминаются длина и ширина такой фигуры, то только из контекста можно установить истинный смысл этих двух терминов. Если площадь треугольника находится вычислением $\frac{1}{2}a \cdot b$, то допустимо предположить, что $a$ и $b$ взаимно перпендикулярны, но имеются аналогичные случаи, когда с той же степенью правдоподобия приходится допустить, что мы имеем только приближенную формулу.

Имеются, однако, случаи, когда не возникает сколько-нибудь обоснованных сомнений в истолковании геометрических соотношений. Понятие подобия используется в многочисленных примерах. Теорема Пифагора также хорошо засвидетельствована; то же относится и к ее применению для определения высоты кругового сегмента. С другой стороны, до сих пор известно лишь очень грубое приближение к площади круга, равносильное употреблению вместо $\pi$ числа 3. Некоторые задачи, касающиеся круговых сегментов и аналогичных фигур, до сих пор не полностью поняты, и мне кажется вполне возможным, что было известно лучшее приближение для $\pi$, применявшееся в тех случаях, когда грубое приближение приводило к явно неправильным результатам.

Примерно такие же соотношения, как для элементарных площадей, были известны и для объемов. Целые разделы текстов-задач посвящены рытью каналов, постройке плотин и подобным работам, и мы находим в них применение точных или приближенных формул для соответствующих объемов. Но мы не имеем примеров, в которых к этим предметам подходили бы с чисто геометрической точки зрения.

**24а.** После написания рукописи были сделаны новые открытия, о которых необходимо здесь упомянуть, так как они существенно дополняют наши познания о математике древневавилонского периода. В 1936 г. французские археологи обнаружили целую группу математических табличек при раскопках Сузы, столицы древнего Элама, более чем в 200 милях к востоку от Вавилона. Предварительный отчет был опубликован Е. М. Брейнсом в 1950 г. в Трудах Амстердамской академии и последующие замечания основаны на этой предварительной публикации. При этом я ограничусь только самыми существенными результатами. Сами тексты до сих пор, спустя более 20 лет после их открытия, еще не опубликованы [1]).

Основной вклад относится к геометрии. На одной табличке вычислен радиус $r$ круга, описанного около равнобедренного треугольника со сторонами 50 50 и 60 (результат $r = 31;15$). На другой табличке приведен правильный шестиугольник, и от-

[1]) Эти тексты изданы Брейнсом и Руттеном. См. E. M. B r u i n s et M. R u t t e n, Textes mathématiques de Suse (= Mémoires de la mission archéologique en Iran, Mission de Susiane, т. 34), Paris, 1961. Некоторые из результатов, обнаруженных в сузанских текстах, приведены в книге Фогеля, цитированной в сноске на стр. 58. (*Прим. ред.*)

сюда можно вывести приближенное значение $\sqrt{3} \approx 1;45$. Наибольший интерес, однако, представляет табличка, дающая новый список коэффициентов, сходный со списками, упомянутыми выше, на стр.59. Новый список среди прочих содержит коэффициенты, относящиеся к равностороннему треугольнику (подтверждающие уже приведенное приближение $\sqrt{3} \approx 1;45$), квадрату ($\sqrt{2} \approx 1;25$), правильным пятиугольнику, шестиугольнику, семиугольнику и кругу. Если обозначить через $A_n$ — площадь, через $s_n$ — сторону правильного $n$-угольника, то смысл коэффициентов, находящихся в списке, будет следующим:

$$A_5 = 1;40 \cdot s_5^2,$$
$$A_6 = 2;37,30 \cdot s_6^2,$$
$$A_7 = 3;41 \cdot s_7^2.$$

Далее, если $c_6$ периметр правильного шестиугольника, а $c$ — длина описанной окружности, то текст утверждает, что

$$c_6 = 0;57,36 \cdot c.$$

Поскольку $c_6 = \frac{3}{\pi} c$, последний коэффициент подразумевает приближение

$$\pi \approx 3;7,30 = 3\frac{1}{8},$$

тем самым окончательно подтверждая мое предположение, что сопоставление периметра правильного шестиугольника с описанной окружностью должно было привести к лучшему приближению для $\pi$, чем 3.

Значения для $A_5$, $A_6$ и $A_7$ точно соответствуют трактовке правильных многоугольников в «Метрике» Герона (XVIII — XX), работе, чья тесная связь с догреческой математикой стала очевидна с тех пор, как были расшифрованы вавилонские математические тексты.

И во многих других отношениях таблички из Сузы дополняют и подтверждают то, что мы знали из древневавилонских источников того же периода, найденных в самой Месопотамии. В одном примере речь идет о разбиении треугольника на подобный треугольник и трапецию таким образом, чтобы произведения частичных сторон и частичных площадей равнялись заданным числам, причем известна гипотенуза меньшего треугольника. Это новый вариант упоминавшихся выше задач, включающих суммы площадей и длин или произведения площадей. На одной из табличек, найденных в Сузе, имеется даже задача восьмой степени, тогда как до сих пор в вавилонских материалах встречались только шестые степени. В этой новой задаче требуется найти стороны $x$ и $y$ такого прямоугольника, что $xy = 20,0$ и $x^3 \cdot d = 14,48,53,20$, где $d$—диагональ прямоугольника. Это эквивалентно квадратному уравнению для $x^4$

$$x^8 + a^2x^4 = b^2,$$

где $a = 20{,}0$, $b = 14{,}48{,}53{,}20$. В тексте шаг за шагом дано решение этого уравнения, приводящее к $x^4 = 11{,}51{,}6{,}40$, и, наконец, к $x = 40$, $y = 30$.

**25.** Каким бы неполным ни было наше знание вавилонской математики, без сомнения, установлено одно: мы имеем дело с таким уровнем математического развития, который во многих отношениях сравним с математикой, скажем, раннего Возрождения. Однако не следует переоценивать эти достижения. Несмотря на числовое и алгебраическое искусство и несмотря на интерес к абстракции, который так заметен во многих примерах, содержание вавилонской математики оставалось глубоко элементарным. В чрезвычайно примитивных рамках египетской математики открытие иррациональности $\sqrt{2}$ было бы удивительным чудом. У вавилонских математиков, наоборот, имелись все основания, чтобы получить этот результат, причем именно в той самой арифметической форме, в которой он, очевидно, был открыт много позднее греками. И даже если только из-за неполноты нашего знания источников мы предполагаем, что вавилоняне не знали, что уравнение $p^2 = 2q^2$ не имеет решений в целых числах, то и тогда остается несомненным, что последствия этого результата не были осознаны. Иными словами, вавилонская математика так и не перешагнула порога донаучного мышления. Только в последние три столетия вавилонской истории и только в области математической астрономии вавилонские математики или астрономы достигли равенства со своими греческими современниками.

## *БИБЛИОГРАФИЯ К ГЛАВЕ II*

Приведенное здесь описание вавилонской математики далеко от полноты, даже если оценивать его по имеющимся отрывочным материалам. Более детальное описание дано в книге автора «Vorgriechische Mathematik», Berlin, 1934 (см. стр. 5) [1]). Однако любое серьезное изучение должно основываться на самих текстах, чтобы правильно оценить, где проходит весьма подвижная граница между установленными фактами и их современной интерпретацией. Большинство из доступных теперь текстов опубликовано в следующих работах: O. Neugebauer, Mathematische Keilschrifttexte, три тома, Berlin, Springer — Verlag, 1935/37 = Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. A, том 2. (В дальнейшем цитируется как MKT.)

O. Neugebauer — A. Sachs, Mathematical Cuneiform Texts. American Oriental Society, New Haven, 1945 = Amer. Oriental Series, том 29. (В дальнейшем цитируется как MCT.)

Обе эти работы содержат фотографии, копии, транскрипции, переводы и комментарии. Основная часть материала, опубликованного в первой из

---

[1]) См. также книгу: А. А. Вайман, Шумеро-вавилонская математика, М., 1961. (*Прим. ред.*)

упомянутых книг, была переиздана в транскрипции и с переводом у F. Thureau-Dangin, Textes mathématiques babyloniens, Leiden, Brill, 1938 = Ex Oriente Lux, т. 1.

После выхода в свет первого издания этой книги было обнаружено еще несколько математических текстов, дополняющих, но по существу не меняющих общую картину, обрисованную на предыдущих страницах. Большая часть этих новых текстов представляет собой опять древневавилонские тексты-задачи, опубликованные у Sayyid Taha Baqir в Sumer, т. 6 (1950). стр. 39—54, 130—148 и т. 7 (1951), стр. 28—45 (найденные в Тель Хармале, непосредственно к югу от Багдада). Список коэффициентов и связанные с этим вопросы см. у A. Goetze, Sumer, 7 (1951), стр. 126—154. Дополнительные тексты были обсуждены E. M. Bruins'ом в Sumer, 9 и 10 (1953—1954), но только в выдержках или в очень ненадежной транскрипции. Текст-задача неизвестного происхождения, в котором рассмотрен круглый город (сходный с МКТ, стр. 144), был опубликован W. F. Leemans в Compte Rendu de la seconde rencontre assyriologique intern., Paris, 1951, стр. 31—35. Два отрывка из текстов-задач и 16 текстов-таблиц из поздневавилонского архива в Вавилоне воспроизведены в Pinches—Strassmaier—Sachs, Late Babylonian Astronomical and Related Texts, Providence, Brown University Press, 1955. См. также Sachs, J. Cuneiform Studies, 6 (1952), стр. 151—156.

## *ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ГЛАВЕ II*

к 17. Имеется единственный отрывок математического текста, написанный на шумерском языке (МКТ, I, стр. 234 и след.). Поскольку шумерский язык еще применяли в школах древневавилонского периода, из этого текста нельзя сделать никакого вывода о шумерском происхождении математики Месопотамии. То же относится и к исключительно частому употреблению шумерских слов и фраз на протяжении всех периодов.

В том, что математику изучали в школах писцов, вряд ли можно сомневаться. С какого уровня начиналось такое обучение и каков был объем общепринятых знаний писцов, сказать невозможно. Имеется текст, возможно, тоже предназначенный для использования в школах писцов, в котором драматически описана трудная жизнь школьника в таком «Доме табличек». См. S. N. Kramer, Schooldays, a Sumerian Composition Relating to the Education of a Scribe. J. Amer. Oriental Soc. 69 (1949), стр. 199—215.

к 18. Структура системы таблиц умножения и таблиц обратных величин была впервые описана автором в серии статей, озаглавленных «Sexagesimalsystem und babylonische Bruchrechnung» I—IV, опубликованных в Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B, тт. 1 и 2 (1930—1932). Методы вычисления обратных величин чисел, не содержащихся в стандартной таблице, были проанализированы в книге A. Sachs, Babylonian Mathematical Texts I, Journal of Cuneiform Studies 1 (1947), стр. 219—240. Преобразование шестидесятеричных дробей в единичные дроби было рассмотрено тем же автором в Notes on Fractional Expressions in Old Babylonian Mathematical Texts, J. of Near Eastern Studies, 5 (1946), стр. 203—214.

Что писец иногда не был уверен, является ли число правильным или неправильным, это видно из утверждения «на 4,3 делить нельзя», найденного в тексте, находящемся теперь в Британском музее (МКТ I, стр. 224, 12 и стр. 184). Это неверно, потому что $4{,}3 = 3 \cdot 1{,}21$, и оба числа 3 и 1,21 являются правильными, обратные величины которых можно найти в стандартной таблице.

к 19. Приближенное значение $\sqrt{2}$ может быть найдено следующим образом. Очевидно, $\frac{3}{2} = 1;30$ есть первое приближение; оно больше правильного значения, потому что $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2;15$. Следовательно, мы получим приближение, меньшее правильного значения, если разделим 2 на $\frac{3}{2}$. Результат будет $\frac{4}{3}=1;20$. Среднее значение из этих двух противостоящих приближений равно 1;25. Это число мы находим в текстах. Можно повторить этот процесс; $1;25^2=2;0,25$ несколько велико. Значит, частное от деления 2 на 1;25 или 1;24,42,21,... несколько мало́. Среднее значение из величин 1;25 и 1;24,42,21 равно числу 1;24,51,10, которое и является вторым приближением, найденным в наших текстах.

Нет никаких доказательств, что именно таким путем были найдены эти значения, но нет также никаких оснований отвергать эту возможность. Ср. также замечание на стр. 65 (к **24**а.)

к 20. В строке 2 колонки III Плимптонской таблички мы находим для $d$ значение 3,12,1, а не 1,20,25. Следуя R. J. Gillings'у (The Australian Journal of Science 16, 1953, стр. 54—56), можно объяснить это расхождение наложением двух ошибок: при вычислении

$$d^2=p^2+q^2=(p+q)^2-2pq \qquad (p=1,4,\ q=27)$$

писец заменил $-2pq$ на $+2pq$, а затем написал только $2\cdot 27\cdot 1,0=$ $=54,0$ вместо $2\cdot 27\cdot 1,4=57,36$. Так он нашел не $d=2,18,1-57,36=1,20,25$, а $d=2,18,1+54,0=3,12,1$.

Другое предположение было сделано E. M. Bruins'ом в Sumer, 11 (1956), стр. 117—121; оно, однако, содержит неправильные и неточные утверждения, касающиеся прочтения текста.

Следует, наконец, отметить, что построение пифагоровых троек из двух чисел $p$ и $q$ при помощи равенств

$$l=2pq, \qquad b=p^2-q^2, \qquad d=p^2+q^2$$

было хорошо известно в эллинистические времена. Диофант, чьи связи с восточными традициями очевидны, часто пользуется этим способом (например, Арифметика, VI, I). То же относится и к индийским математикам, например, Махавире (около 850 г. н. э.) и Бхаскаре (около 1150 г.); см. Mahavira, изд. Nangacarya, стр. 209 и Lilavati, VI, 135 и 145, Colebrooke.

к 22. Примеры сложения неоднородных членов:

MCT, стр. 74; сложение площадей и объемов.

MKT, I, стр. 243; MKT, II, стр. 63; сложение длин и площадей.

MKT, II, стр. 64; сложение длины и объема.

MKT, I, стр. 513; сложение числа дней и людей.

Thureau-Dangin, TMB, стр. 209 и след.; сложение одной овцы и баранов.

Тщательную классификацию квадратных уравнений см.: Solomon Gandz, The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra, Osiris, 3 (1937), стр. 405—557.

к 23. О кубических уравнениях см. в MKT, I, стр. 208 и сл., и т. III, стр. 55. Уравнения четвертого порядка: MKT, I, стр. 420; 456 и MKT, III, стр. 62; стр. 471 и след.; стр. 498. Уравнения пятого порядка: MKT, I, стр. 411; шестого порядка: MKT, I, стр. 460.

Таблицы для $a^n$: MKT, I, стр. 77 и след. О логарифмах см. MKT, I, стр. 362; MCT, стр. 35. Таблицы для $a^n$ были найдены в Кише, к востоку от Вавилона, и в Тель-Хармале, около Багдада.

Интересная таблица квадратных корней специального вида содержится в следующем тексте (MKT, III, стр. 52)

| | | |
|---|---|---|
| 1 | *e* 1 | *ib — si*$_8$ |
| 1,2,1 | *e* 1,1 | *ib — si*$_8$ |
| 1,2,3,2,1, | *e* 1,1,1 | *ib — si*$_8$ |
| 1,2,3,4,3,2,1 | *e* 1,1,1,1 | *ib — si*$_8$ |

Последующий «колонтитул» указывает на находящуюся дальше таблицу кубических корней из чисел 1, затем 1,3,3,1 и т. д. Знание биномиальных коэффициентов было, конечно, в пределах возможностей вавилонской алгебры.

к 24. Интересно отметить, что при решении задач геометрического характера не только часто использовались подобные треугольники, но и что для арифметического понятия «отношение» существовал специальный термин. В МКТ, I, стр. 460 и след., мы имеем серию примеров, где нужно вычислить «отношение» $x/y$, решая квадратное уравнение. Тот факт, что отношение двух чисел рассматривается как самостоятельный объект, является, конечно, очень значительным шагом в развитии алгебры.

Площадь $A$ круга обычно вычисляется по длине окружности $c$ по правилу

$$A = 0;5 \cdot c^2,$$

где $0;5 = 1/12$ есть приближенное значение $\frac{1}{4\pi}$. Многие примеры см. в МСТ, стр. 44 или 9.

Задачи, относящиеся к круговым сегментам, опубликованы в МСТ, 56; МКТ, I, стр. 188. См. также МКТ, I, стр. 177 и 230; МСТ, стр. 134 и след. Все эти задачи вызывают недоумение; это определенно говорит о том, что мы еще не нашли правильного ключа к этой части вавилонской геометрии. Очень интересный ранний текст, посвященный орнаментам, составленным из кругов и квадратов, был опубликован J. C. G a d d'ом (см. МКТ, I, стр. 137 и след.). К сожалению, им не приведено никаких объяснений.

О неточности чертежей см. МСТ, стр. 46 и 54. О приближенном вычислении объемов см. МКТ, I, стр. 165 и 176, площадей — МСТ, стр. 46.

Не подлежащий сомнению пример фигуры, которая обязательно должна быть прямоугольным треугольником, чтобы вытекающие отношения подобия были правильны, см. в табличке, опубликованной Sayyid Taha B a q i r, Sumer, т. 6 (1950), стр. 39—54[1]).

к 24а. Статье, на которую сделана ссылка в тексте, предшествовала предварительная заметка в августовском выпуске 1950 г. французского популярного журнала Atomes, Tous les aspects scientifiques d'un nouvel age (стр. 279 и след.). В этой заметке приводится также фотография треугольника с описанным кругом.

Значение $\sqrt{3} \approx 1;45$ можно сразу получить путем, описанным выше на стр. 63 для случая $\sqrt{2}$. Начав с очевидной оценки $\sqrt{3} \approx 1;30$, получаем следующее значение $\frac{3}{1;30} = 2$, и отсюда $\frac{1}{2}(2 + 1;30) = 1;45$. Это самое приближение имеется у Герона, Metrica, XXV (Герон пользовался и числом 1;44). В Metrica, XXI имеем $\sqrt{2} \approx 1;25$.

Значение $\pi \approx 3\frac{1}{8}$, по-видимому, не засвидетельствовано в сохранившейся литературе древности. Как первый случай его появления, T r o p f k e (Geschichte d. Elementarmathematik, IV (3), стр. 279) приводит отрывок из Дюрера, относящийся к 1525 г. О возможности того, что это приближение было известно вавилонянам, было сказано в МСТ, стр. 59, примечание 152k. Это предположение теперь полностью подтверждено.

[1]) Анализ хозяйственных клинописных текстов, в частности списков эмпирических коэффициентов (ср. стр. 59), см. в книге А. А. В а й м а н а, названной на стр. 62, особенно гл. III. (*Прим. ред.*)

ГЛАВА III

# ИСТОЧНИКИ; ИХ ДЕШИФРОВКА И ОЦЕНКА

**26.** Многие факторы способствуют разрушению материальных источников, но более всего — спокойное течение жизни. Отсутствие интереса к далекому прошлому постоянно меняет и в конечном счете разрушает то, что осталось от прежних поколений. Не будь в мире резких катастроф, археология вряд ли бы существовала. Если бы города Месопотамии не превратились в пустынные холмы, мы не имели бы шансов найти сотни тысяч документов, по которым написана история Вавилона.

Было бы бесполезно сколько-нибудь подробно описывать нескончаемую последовательность бедствий, обеспечивших нас материалом для исследований. Мы ограничим наше изложение исключительно тем, что постараемся обрисовать современные попытки оживить то далекое прошлое и проникнуть в интеллектуальную жизнь предшествующих поколений.

Следуя общему замыслу этих лекций, я не буду подробно описывать известные стороны исторических изысканий. Я только подчеркну некоторые особенные методологически важные черты, непосредственно связанные с нашей основной темой, а именно, с исследованием науки древности.

**27.** Лучше всего известна, конечно, греческая наука. Издания великих классиков тщательно подготовлены, и многие из них доступны в превосходных переводах. Для историка науки это, конечно, очень приятно, но далеко не достаточно. Никто не будет предполагать, что историк английской литературы останется удовлетворен изданиями только Шекспира или Чосера. Так же и история науки может быть написана только в том случае, если доступны не одни «классики». Предшественники, ученики, близкие авторы пока еще исключительно мало известны.

Упомяну только один типичный пример. «Альмагест» Птолемея был издан на греческом языке Гейбергом в 1898—1903 гг. Прекрасный критический и аннотированный перевод Маницнуса на немецкий язык был опубликован в 1912—1913 гг.[1]). Но запланированный словарь специальных терминов так и не был напечатан, в связи с чем исключительно трудно сверять птолемеевскую терминологию с другими источниками. С этим связаны также серьезные пробелы в самых лучших современных греческих словарях, не говоря уже о том, что вообще история астрономической терминологии практически является «терра инкогнита». Современные издания вносят беспорядок в сокращения, символы, чертежи и пр., имеющиеся в оригиналах рукописей. Тому, кто захочет исследовать развитие символики, например, знаков зодиака или знаков планет, нужно практически делать всю работу заново. Лучшим перечнем математических, астрономических и химических символов до сих пор является собрание, составленное Дю Канжем в приложении к его «Glossarium...» (1688 г.), которое в свою очередь базируется на таблице, написанной около 1480 г. Анджело Полициано, учителем Пьеро ди Медичи, и ныне хранящейся в Национальной библиотеке в Париже. Это характерный пример истинного состояния дел в области изучения истории научного развития.

Только в последнее время ученые, вслед за А. Ромом и А. Делаттом, начали публиковать тексты вместе с рисунками и обозначениями на них. Кроме этих недавних исключений, ни одному изданию верить нельзя, во всяком случае в отношении вида, буквенных обозначений и даже наличия рисунков. Например, вопрос о том, как в древности изображали геометрические отношения на сфере, не может серьезно обсуждаться на основе имеющихся печатных текстов.

Другие работы Птолемея печатаются медленно. В 1907 г. появился один том, содержащий, среди прочего, важные записи по теории солнечных часов и по стереографической проекции, являющейся основой знаменитой астролябии, одного из самых важных инструментов средневековой астрономии. «Четырехкнижие», эта «Библия астрологии», была дважды издана во время второй мировой войны. Одно издание, Е. Бера появилось в Германии и содержало только греческий текст; другое, Ф. Е. Роббинса, содержащее греческий текст с английским переводом, вышло в Loeb Classical Library. Так мы невольно оказались перед лицом эксперимента, позволяющего оценить единообразие современных критико-текстологических методов. Занятно наблюдать, как различие начинается с заглавия и продолжается в разной степени в разделении на главы и разделы. Конечно, в основном результаты одинаковы, но детали ни в коей мере не идентичны.

---

[1]) Этот перевод переиздан с предисловием и исправлениями О. Нейгебауера: Ptolemäus, Handbuch der Astronomie, I—II, Leipzig, 1963. (*Прим. ред.*)

Громадная литература возникла вокруг «Географии» Птолемея, одной из наиболее влиятельных книг античности. Несмотря на это, нет ни одного заслуживающего доверия издания этой книги. Подготовка такого издания — очень трудное дело. Постоянное использование книги сильно исказило традицию, и необходим большой труд, чтобы восстановить первоначальный вариант текста, состоящего в значительной степени из географических названий и чисел, не поддающихся внутренней проверке; к счастью, в случае астрономических таблиц подобная проверка возможна.

В целом можно сказать, что даже книги Птолемея доступны лишь частично, не говоря уже о полностью потерянных работах, отрывки из которых могут быть (а могут и не быть) обнаружены на папирусах или в какой-либо неизвестной восточной библиотеке.

Раннегреческая литература по астрономии от ее зарождения около 400 г. до н. э. и до Птолемея (около 150 г. н. э.) почти полностью погибла, за исключением нескольких очень элементарных работ, которые сохранились как учебные пособия. Все остальное было вытеснено выдающейся работой Птолемея, превратившей его предшественников в фигуры, имеющие только исторический интерес.

Что касается преемников Птолемея, то мы находимся в значительно лучшем положении. Комментарии Паппа и Теона, написанные в четвертом веке, широко использовались и частично сохранились. Теперь их публикует А. Ром. Все еще плохо обстоит дело с таблицами, хотя и имеется предварительная публикация Альма́, более чем 100-летней давности, изобилующая опечатками и ошибками. Почти ничего не было сделано с византийскими и европейскими средневековыми таблицами. Таким образом, всякая работа над математической астрономией средних веков очень затруднена из-за почти полного отсутствия доступных таблиц, хотя сотни их можно найти в библиотечных каталогах. Широко провозглашенный «прогресс» в изучении истории науки трудно примирить с потрясающим пренебрежением к большому богатству первичных материалов, чрезвычайно важных для нашего познания византийской астрономии. Изучение проблемы взаимодействия между наукой стран ислама и Запада будет тормозиться до тех пор, пока не будут опубликованы эти первоисточники. Что нам действительно необходимо — это не библиографии или краткие обзоры, а компетентные издания появившихся в странах ислама, греческих и латинских научных трактатов.

**28.** Имеется одна группа источников, важность которых будет все более возрастать по мере их систематического использования: это — астрологические сочинения. В течение последних 60 лет был завершен 12-томный «каталог» греческих астрологических работ. Текст издан на греческом языке, примечания — на латыни, в указатели включены только имена собственные и иногда — отобранные термины. Содержание этих томов можно назвать только отталкивающим — сотни и сотни страниц скучной астрологической бессмыслицы. Несмотря на это, я думаю, что ученые, предпринявшие это издание, и прежде всего Фр. Кюмон, внесли громадный вклад в изучение древней цивилизации, далеко выходящий за узкие рамки истории астрологии. Упомяну только одну работу Кюмона «L'Egypte des astrologues» (1937 г.). Под астрологической шелухой здесь вырисовываются повседневная жизнь эллинистического Египта и его тогдашние установления, о которых можно судить по несчастиям и удачам, предсказанным мужчинам и женщинам, обращавшимся к астрологам. И другой важный исторический факт становится все более ясным из этих исследований, а именно, что возникновение этого мощного астрологического учения должно быть отнесено к периоду Птолемеев в Египте и, таким образом, оно оказывается действительно эллинистическим созданием.

К этой стороне вопроса мы еще вернемся в последней главе, а сейчас рассмотрим астрологическую литературу как источник информации для истории астрономии. Астрологические тексты содержат бесчисленные разбросанные отрывки вычислений, касающихся Луны, планет, положения звезд, их восходов и заходов. Эти вычисления часто почти безнадежно искажены. Изготовление рукописных копий в течение многих веков сильно отразилось на числах, которые были неинтересны или вовсе непонятны переписчикам. Несмотря на это, такие отрывки дают нам много указаний на методы, относящиеся к периоду между Гиппархом и Птолемеем. Одно из наиболее неожиданных открытий было сделано В. Гунделем. В одном старофранцузском и связанном с ним латинском астрологическом манускрипте эпохи Возрождения он нашел вкрапления из отрывков звездного каталога времен Гиппарха. Постепенно из таких рассеянных обрывков информации возникает целая система астрономических методов, которая сильно отличается от классической «птолемеевской» системы, и которая чрезвычайно важна для изучения происхождения и распространения эллинистической астрономии.

**29.** Бóльшая часть рукописей, на которых основано наше знание греческой науки,— это византийские списки, изготовленные спустя 500—1500 лет после смерти их авторов. Понятно поэтому, какое значение имеет каждый обрывок папируса из научного или астрологического трактата. Здесь мы имеем оригиналы, написанные во время самого эллинистического периода, а не продукт выборочного издания позднейших веков. Можно без всякого преувеличения сказать, что относительно молодая ветвь науки — папирусология — действительно революционизировала исследования по классической древности, хотя в силу естественной инерции это и не всегда ясно говорится в стандартных курсах.

Увлекательная история открытия папирусных сокровищ в земле Египта неоднократно излагалась и нет нужды ее здесь повторять. Небольшая мастерски написанная книга одного из ведущих ученых в этой области, Идриса Белла,— H. Idris Bell «Egypt from Alexander the Great to the Arab Conquest» (Oxford, 1948), не только дает читателю обзор папирусологии, ее истории и методов, но и содержит блестящий анализ распространения и упадка эллинизма, т. е. именно той проблемы, один из аспектов которой является предметом настоящих лекций.

Изучение папирусов является одной из наиболее хорошо организованных и приятных областей гуманитарных наук. Необычный дух сотрудничества пережил две великие войны. Регулярно выходили большие серии публикаций текстов, а внутренние трудности, присущие этой области и требующие глубокого проникновения в специальные вопросы юридической науки, сельского хозяйства, экономики и т. д., вызвали к жизни активное сотрудничество специалистов целого ряда смежных дисциплин. В результате появились удобные для общего пользования издания с переводами, комментариями, превосходными указателями, специальными словарями и справочниками. Это является контрастом, по сравнению, скажем, с тем, что арабский текст Евклида опубликован только с латинским переводом (1897—1932), что не доставит радости математику, который пожелал бы ознакомиться с восточной традицией этого классического труда.

Несмотря на очень активную и успешную работу папирусологов, число их слишком незначительно, чтобы справиться с большим количеством материала, поступившего в музеи и в меньшие коллекции. Многие сотни папирусов и отрывков из них быстро обращаются в пыль после того, как их приобрели по высоким ценам у антикваров. Из своего собственного очень ограниченного опыта я могу привести несколько примеров, когда папирусы терялись в небольших коллекциях, из-за того, что не располагали ни возможностями, ни компетентным персоналом для должного обращения с этими документами. Хорошо сохранившиеся тексты представляют особую ценность для торговцев древностями и поэтому более всего подвержены быстрому уничтожению. Опять я могу привести один типичный пример. Один из наиболее интересных астрономических папирусов, в конце концов, частично попал в Карлсбергскую коллекцию университета в Копенгагене. Х. О. Ланге и я опубликовали этот текст, написанный возможно в начале нашей эры. Он содержит демотический перевод и комментарии к гораздо более старому иератическому [1]) тексту, точная ие-

---

[1]) Иератическое письмо — древнеегипетская скоропись, появившаяся в третьем тысячелетии до н. э. С восьмого века до н. э. иератическое письмо, в результате сокращения иератических знаков и объединения нескольких простых знаков в сложные, вытесняется более коротким демотическим письмом. (*Прим. ред.*)

роглифическая копия которого до сих пор сохранилась в гробнице царя Сети I (около 1300 до н. э.). В числе других сюжетов имеется описание движения «деканов» [1]) по телу богини неба, изображавшей на потолках гробниц и храмов небесный свод, под которым мы живем. Наш папирус был вначале обнаружен у торговца древностями в Каире. В то время в начале текста еще находился рисунок небесной богини со всеми созвездиями и датами их восхода и захода. Когда текст достиг Копенгагена, рисунок исчез. Несомненно, он был продан какому-то частному коллекционеру и, возможно, теперь потерян навсегда. Так существенная для понимания часть текста исчезла почти в тот самый момент, когда была установлена ее ценность.

Излишне говорить, что такие случаи идут в разрез с существующими законами охраны древностей. Излишне также говорить, что многие тексты исчезают при раскопках или «находятся» местными жителями, давно усвоившими, что папирусы можно выгодно продать, вместо того чтобы сжигать их в походных кострах или использовать их как удобрение. Но более всего угнетает тот факт, что в климатических условиях, менее благоприятных, чем почва Египта, значительной части этой добычи суждено закончить свое существование непрочтенной и неопубликованной.

30. Все, что мы до сих пор говорили об источниках, можно считать детской игрой по сравнению с положением дел с древней Месопотамией. Прошло едва ли сто лет с тех пор, как клинопись стала опять доступна пониманию и только незадолго до начала настоящего столетия был общепризнан такой фундаментальный факт, как существование самостоятельного шумерского языка, хотя для письма на нем и применялись те же знаки, что и для письма на его позднейшем семитическом преемнике — аккадском языке. Но между тем как дешифровка и интерпретация двигались медленными шагами, тексты с самого начала находились в потрясающих количествах. Первая коллекция изображений и табличек прибыла во Францию в 1846 г., три года спустя после извлечения их из руин Хорсабада, около Мосула, французским консулом Ботта. В 1849/50 гг. Лейард нашел первую дворцовую библиотеку в развалинах Ниневии под поверхностью холма Куюнджик; в 1853 г. последовало открытие Хормуздом Рассамом библиотеки Ашшурбанипала. Около 20000 табличек в Британском музее имеет инвентарную букву К (Куюнджик) или Rm. (Рассам). До настоящего времени опубликовано, может быть, около четверти этих двух коллекций.

Это отношение числа опубликованных и наличных текстов может показаться небольшим. На самом деле оно необычайно высоко, и является таким исключительно благодаря целому веку

[1]) Объяснение этого термина дается в пункте 39. (*Прим. ред.*)

работы над одним из самых замечательных открытий, сделанных на Ближнем Востоке. Тем временем многие десятки тысяч табличек нашли свою дорогу в музеи и образовали материал, который потребовал бы для своей публикации несколько веков, даже если объединить усилия всех живущих ассириологов.

31. Теперь будет, пожалуй, полезно сделать несколько общих замечаний о раскопках и публикации текстов, так как за пределами узкого круга специалистов мало что известно об этих вопросах.

Современные раскопки являются очень сложным предприятием. Археологу в его полевых работах должен помогать целый штат архитекторов, чертежников, фотографов, специалистов по эпиграфике и филологов. Но это только первая и наиболее легкая часть раскопок. Сохранение руин, консервация найденных предметов, и, более всего, публикация результатов, остаются конечной целью, для которой работа в поле является только подготовительным шагом.

Здесь следует рассказать поистине печальную историю. В то время как полевые работы в течение последнего полустолетия были доведены до очень высокого уровня, вторая часть, публикация, оставалась в таком пренебрежении, что многие раскопки в городах Месопотамии имели своим результатом только научно осуществленное разрушение того, что сохранялось неуничтоженным в течение тысячелетий. Причины этого явления тривиальны. Время, нужное для опубликования результатов, во много раз превосходит время, затрачиваемое на раскопки. Выделенные средства обычно оказываются истраченными к тому времени, когда выполнена лишь часть первоначально запланированных раскопок, и трудно бывает найти жертвователя для оплаты многих лет труда, не приносящего осязаемых или эффективных результатов, а ученые увлекаются каким-либо специальным аспектом затронутого вопроса или устремляются за новым материалом, вместо того, чтобы заняться утомительной работой по публикации тысяч деталей, случайно выявленных во время раскопок. В итоге конечный результат мало отличается от того, к которому приходили ранние производители раскопок, стоявшие на позициях охотников за сокровищами.

Многие раскопки, если не все, приходилось прекращать до их завершения или с самого начала ограничить несколькими траншеями, пересекающими руины, в надежде получить общее представление о характере наслоений. После этого то или иное обещающее строение исследовалось более детально. В результате оставались брошенные руины с глубокими разрезами, служившие легкой добычей для местных жителей, извлекавших все обнаженные кирпичи, прокладывавших без больших трудностей дальнейшие туннели, получавших доступ к более глубоким слоям, и таким образом продолжавших «раскопки» на свой манер и для своей собственной выгоды. Таким путем местные жители находили тысячи табличек, перепродававшихся затем по высоким ценам торговцами древностей тем самым музеям, которые затратили первоначальные средства на удаление многих тонн песка и обломков.

Разрешите мне проиллюстрировать влияние этого положения вещей на специальные исследования, которыми мы сейчас занимаемся. До 1951 г. при раскопках не устанавливалось происхождение почти ни одного астрономического или математического текста. Единственным заметным исключением являются несколько таблиц умножения из Ниппура или Сиппара, но никто не знает, где эти тексты были извлечены из руин. В результате, например, совершенно невозможно установить, получены ли эти тексты из храма, дворца, частного дома и т. п. Неизвестен даже пласт, в котором они были найдены, что лишает возможности более точно датировать тексты. Другими словами, если бы эти официально «раскопанные» тексты были найдены туземцами, мы были бы не в худшем положении, чем сейчас. Но в то время как туземцы при своих «тайных» раскопках выкапывают сравнительно небольшие ямы, научные раскопки безнадежно разрушают все следы того места, где были найдены тексты. Таким образом, у нас остаются только сами тексты, и их происхождение нужно определять только по внутренним показаниям, которые часто трудно истолковать.

Можно рассказать длинную историю о «методах» получения нужной информации. Тексты, пролежавшие более 50 лет в подвалах музея, могут быть условно датированы по газете, в которую они были завернуты. Это дает правдоподобную дату «экспедиции», которая нашла тексты, а отсюда и место, из которого они были извлечены.

Целый класс текстов был опознан следующим образом. Немецкая экспедиция до 1914 г. работала в городе Уруке, чрезвычайно важном месте, потому что там находятся сооружения от самых ранних периодов и до времен Селевкидов. Там немцы нашли остатки архива, из которого, однако, все хорошие таблички были изъяты арабами. Эти таблички в конечном счете нашли дорогу в коллекции Берлина, Парижа и Чикаго, составив одну з наиболее значительных групп текстов для изучения астрономии Селевкидов. Арабов не интересовали мелкие фрагменты. Они были оставлены на месте и затем были тщательно осмотрены и сфотографированы экспедицией. Благодаря любезности Берлинского музея, я получил перепечатки этих фотографий (см. табл. 6,б)), на которых видны фрагменты, аккуратно расположенные на столе экспедиции. Записи о месте, где они были найдены, тем временем были утеряны. Сами фрагменты также были утеряны. Путем довольно сложных вычислений мне удалось все же установить связь между этими обрывками и большими кусками, находящимися в названных выше музеях. Так стало возможным целиком восстановить таблички, части которых находятся теперь по разные стороны Атлантики. Наконец, мелкие фрагменты были вновь обнаружены в Стамбуле. Но основной вопрос о точном происхождении этих табличек остался нерешенным.

32. Почва Месопотамии сохраняла таблички тысячи лет. Это невозможно в нашем климате. Многие таблички покрыты налетом солей (см. табл. 9, а), где на левой фотографии видны наслоения вдоль трещины; на правой фотографии та же табличка показана после очистки). Изменение влажности приводит к образованию кристаллов, которые ломают поверхность табличек и тем самым быстро уничтожают надписи. Я видел тщательно хранимые в витринах «таблички», которые представляют собой только пыль. Для сохранения таблички следует медленно обжечь ее при высокой температуре и затем вымочить для удаления солей. Но только крупные музеи располагают необходимым для этого оборудованием и опытным персоналом, не говоря уже о том, что методы консервации часто хранят как секрет музея. Многие тысячи табличек были приобретены по высокой цене крупными и мелкими коллекционерами единственно для того, чтобы оказаться разрушенными, так и не будучи прочитанными или где-либо упомянутыми.

Публикация табличек сама по себе является трудным делом. Прежде всего, надо найти тексты, относящиеся к той определенной области, о которой идет речь. Это отнюдь не просто, поскольку лишь незначительная часть коллекций каталогизирована. К тому же некоторые из небольшого числа имеющихся в зачатке каталогов тщательно охраняются от постороннего взгляда. Я был бы удивлен, если бы десятая часть всех музейных табличек оказалась занесенной в какой-либо каталог. Задача извлечения первоисточников из музеев является гораздо более неотложной, чем накопление новых несчетных тысяч текстов сверх до сих пор неисследованных предыдущих тысяч. Я не располагаю официальными отчетами о расходах на раскопки, но цифры, упоминаемые в прессе, показывают, что предварительные раскопки в течение одного сезона стоят почти столько же, сколько составляет жалованье ассириолога за 12—15 лет. И результатом таких раскопок зачастую является значительно большее число табличек, чем может переработать один ученый за всю жизнь.

Не существует простых методов публикации. Одних фотографий в большинстве случаев бывает недостаточно, не говоря уже об их высокой стоимости. Таблички часто исписаны не только с двух сторон, но и по краям. Только многочисленные фотографии, снятые при разных направлениях света, могут быть достаточными. Так стоимость и фактическая необходимость привели к практике ручного копирования. Отдельные ученые разработали много разных стилей копировки, начиная от почти схематического воспроизведения знаков и до воспроизведения мельчайших деталей. Читатель может составить себе об этом представление по табл. 8 и 9, на которых показаны скопированные от руки и сфотографированные эфемериды Сатурна (периода Селевкидов) и древневавилонский математический текст.

Идеальным методом публикации было бы, конечно, прямое копирование текста. Фактически это часто невозможно, так как первоисточники разбросаны по всему свету. Даже при большом опыте текст нельзя скопировать правильно, не понимая его содержания. Практически ни один текст не поддается копировке с первого раза. Необходимо повторное сличение, объединение с другими фрагментами и сравнение с другими текстами. Требуются годы труда прежде, чем небольшая группа в несколько сотен табличек может быть должным образом издана. И никакая публикация не является «окончательной». Снова и снова свежий взгляд обнаруживает решение загадки, ускользнувшее от издателя, каким бы ясным это решение ни казалось впоследствии.

33. Процесс расшифровки не следует никаким твердым правилам. Каждый специальный класс текстов требует медленного составления технического словаря. Результаты прочтения трудных знаков и слов должны заноситься в картотеку, обеспечивающую повторную проверку и сопоставление с ранее полученными результатами. Только накопление опыта приводит к более быстрому пониманию определенных типов текстов. Некоторые специальные классы математических текстов обладают в этом смысле большими преимуществами. Сейчас я попытаюсь это проиллюстрировать, хотя и не смогу полностью описать процесс дешифровки.

Текст, несколько строк из которого я проанализирую, воспроизведен на табл. 8, а) и 9, а). На первый взгляд невозможно установить какой-либо смысл в числах, не обнаруживающих никаких связей, которые можно было бы объяснить результатом последовательных действий. Поэтому приходится отказаться от мысли прочесть текст как единое целое. Это подтверждается и коротким замечанием в левом нижнем углу на обратной стороне таблички. Этот «колофон» гласит: 48 *im—šu dub* — 13—*kam—ma*. Вторая часть означает «13 табличек» и показывает, что текст является частью серии, состоящей не менее, чем из 13 связанных между собой табличек. Первая часть фразы должна относиться к содержанию. Иногда бывает указано число строк; для этого число 48 слишком мало́. Но можно легко проверить, что число небольших секций по две или три строчки, на которые текст разбит горизонтальными линиями, составляет около 40 или 50. Это подтверждается сходными текстами, где число *im — šu* точно совпадает с числом секций. Так мы узнаем, что каждую секцию следует трактовать отдельно. Краткость этих секций свидетельствует о том, что мы имеем дело только с задачами, а не с их подробными решениями. Этим объясняется и отсутствие видимой связи между числами.

Теперь мы готовы к расшифровке нескольких строчек текста просто по общим правилам ассириологии для транскрипции и интерпретации знаков. Мы оставляем в стороне все трудности прочтения знаков нашей таблички и только отмечаем скобками [] разрушенные участки текста. Так мы получаем для строчек от 12-й до 17-й левой колонки обратной стороны

. . . . . . . . . . . .

12 *gar — gar uš d[aḫ]* 5

13 *a — rá* 2 *e — tab*

14 *uš daḫ — ma* 1

15 *sag daḫ — ma* 35

16 *a — rá* 2 *e — tab*

17 *daḫ — ma* 50

Некоторые термины можно перевести сразу; *gar* и *daḫ* являются известными словами, обозначающими сложение; *a — rá* известно из таблиц умножения и соответствует нашему «число раз». Это слово встречается, например, в каждой строчке таблицы умножения на табл. 4, а). Слова *uš* и *sag* обозначают соответственно длину и ширину. Поскольку с ними непосредственно не связаны никакие числа, мы обозначим их через $x$ и $y$. Частица *ma* означает что-то вроде «и так», мы представим ее просто знаком равенства. Выражение *e — tab*, по-видимому, означает еще одно сложение, потому что *tab* противостоит уже известному нам *lal* «минус» (см. стр. 21). Чтобы не усложнять без нужды наш анализ, сразу скажем, что вся фраза *a — rá* 2 *e — tab* означает «умножить на 2», а не сложение. Это вполне согласуется с первоначальным смыслом знака «*tab*», состоящего из двух параллельных клиньев, указывающих на «удвоение». Наконец, в целях удобства поменяем местами порядок написания «$x$» и «сложи» и напишем $+x$ вместо $x+$. Тогда мы получим следующий «перевод»:

. . . . . . . . . . . . . . .

12 $+\cdot + x\,[= \qquad ]\,5$

13 $\cdot 2$

14 $+x=1$

15 $+y=35$

16 $\cdot 2$

17 $+(\qquad)=50.$

Теперь перед нами встает новая трудность. Вначале мы пробовали прочесть текст как единое целое и нашли, что его нужно разбить на отдельные задачи. Теперь мы имеем отдельные задачи, но они слишком кратки, чтобы их понять. Строка 15, например, требует, чтобы $y$ было добавлено к чему-то и вместе составило сумму, равную 35. Совершенно такие же трудности возникают и в других примерах. Поэтому мы принуждены ввести неизвестную величину $f$, которая может зависеть от $x$ и $y$ и к которой прибавляются все остальные величины. Таким образом, строку 15 мы интерпретируем как

$$f + y = 35.$$

Для следующего примера представляется правдоподобной интерпретация

$$2f + y = 50,$$

потому что иначе мы имели бы два новых неизвестных вместо $f$ и $y$, тогда как при нашем толковании второй пример становится прямым продолжением предыдущего. При этом допущении мы можем определить из этих двух уравнений значения $f$ и $y$ и найти $f = 15$, $y = 20$. Мы можем немедленно проверить этот результат. Строки 12—14, по-видимому, означают

$$f + x\,[= \quad ]\,5,$$
$$2f + x = 1.$$

Второе уравнение невозможно в положительных числах потому, что $2f + x$ не может равняться 1, если $f + x$ уже составляет не менее 5. Но здесь нам приходит на помощь позиционная система счисления. Вместо «1» мы можем прочесть $1{,}0 = 60$. Таким образом, мы полагаем $2f + x = 60$ и, считая, что $f = 15$, получаем $x = 30$. Подставляя эти значения в первое уравнение, получаем $f + x = 45$, что вполне согласуется со знаками, сохранившимися в строке 12. Итак, в качестве первого следствия из нашего предположения мы получаем, что

$$x = 30,\ y = 20,\ f = 15.$$

И этот результат мы можем проверить. 12-я строка является последней в группе из 6 строк. В основном тем же методом дешифровки мы можем в этих строках обнаружить выражения

$$\frac{1}{11}(2{,}40 - (x + y))$$

и

$$\frac{1}{7}(55 - y).$$

Если мы положим здесь $x = 30$ и $y = 20$, то найдем, что первое выражение равно 10, а второе 5. Текст *gar* — *gar* « + » в строке 12 относится к двум предшествующим выражениям. Так мы находим сумму $10+5$, которая совпадает со значением 15 буквы $f$. Таким образом, мы не только проверили свой результат, но и определили $f$ как функцию $x$ и $y$:

$$f=\frac{1}{11}(2{,}40-(x+y))+\frac{1}{7}(55-y).$$

Иными словами, мы можем теперь записать все четыре задачи следующим образом:

$$\begin{aligned} f+x&=45,\\ 2f+x&=1{,}0,\\ f+y&=35,\\ 2f+y&=50, \end{aligned}$$

где $f$ обозначает приведенное выше выражение. Очевидно, что в отдельности эти уравнения недостаточны для определения $x$ и $y$. В то же время их нельзя брать совместно потому, что их слишком много. Значит, нужно искать дополнительную информацию в предшествующем тексте. Применяя тот же метод к предыдущим секциям, мы находим простую схему. Несколько более крупных секций определяют аналогичные функции $g$, $h$ и т. д., а за каждой из таких секций следуют варианты вида $g+x$, $2g+x$, и т. д., наподобие рассмотренных выше. В самом начале, кроме того, мы находим еще одно условие, означающее

$$xy=10{,}0.$$

Это уравнение, связывающее $x$ и $y$, является общим для всего текста. Все последующие секции содержат различные линейные уравнения между этими неизвестными, приводя таким образом к квадратному уравнению для определения $x$ и $y$. Мы уже знаем, что общим решением всех этих уравнений является $x=30$, $y=20$. Итак, наша дешифровка завершена.

Изложенное здесь, конечно, представляет собой упрощенный пересказ того, что имело место в действительности, когда стали известны тексты такого типа, но основные шаги были именно такими. Подобным путем удалось установить много технических терминов. Результаты можно проверить по текстам другого типа, содержащим подробности решения данных задач. И ясно, что определение смысла текста обычно бывает тем легче, чем сложнее математический контекст, потому что это оставляет меньше возможностей для разных истолкований. Отрывок текста, содержащий всего несколько чисел, соединенных сложением или вычитанием, почти не приносит пользы для установления терминологии. Высокий алгебраический уровень вавилонской математики оказал большую помощь в ее расшифровке.

Обширные библиографические ссылки на издания греческих математических и астрономических работ см. в книге R. C. A r c h i b a l d, Outline of the History of Mathematics, 6-е издание, вышедшее как приложение к American Mathematical Monthly, 56, № 1 (1949).

к 27. История символов зодиака и планет фактически неизвестна. Насколько я знаю, не проведено ни одного исследования, основанного на подлинных рукописях или надписях. В греческих папирусах нет никаких символов. Широко распространено неправильное представление, что египетский иероглиф ⊙ для Солнца использовался в древних астрономических текстах. Стандартным символом для Солнца в средние века был , но никогда не ⊙, обычно использовавшийся как сокращенное обозначение слов οὐρανός (небо) или κύκλος[1]) (круг). В последнем смысле он употреблен в тексте, показанном на рис. 3, *a*) (строка 4), взятом из рукописи десятого или одиннадцатого века. Знак Солнца находится непосредственно над ним (строка 3).

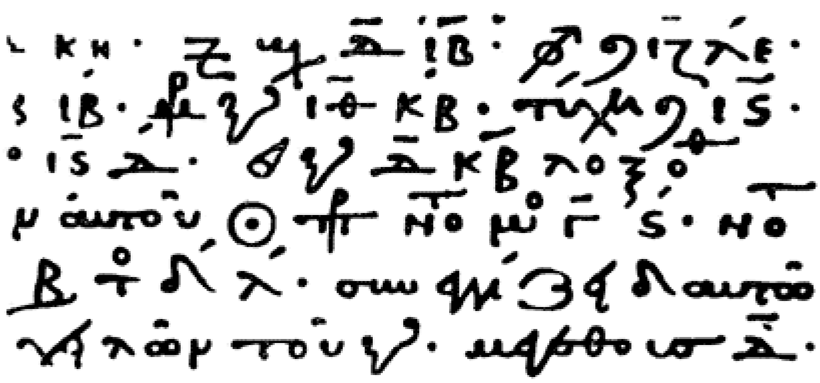


Рис. 3, *a*).

Это относится, насколько я знаю, и к папирусам (см. папирус Warren, 21— папирус не ранее 244 г. н. э., и Archiv f. Papyrusforschung 1, 1901, стр. 501 — папирус второго века н. э.; кроме того, Karl P r e i s e n d a n z, Die griechischen Zauberpapyri, Leipzig, 1928—1931, т. II, указатель, стр. 213). Обычно, однако, названия Солнца, Луны и планет писали полностью. Демотические таблицы планет периода Римской империи содержат символы для планет и знаки зодиака, которые, по-видимому, основаны на их египетских названиях и не имеют никакого отношения к средневековым символам.

Что еще многое осталось сделать даже с великими классиками, видно на примере того, что книги V—VII «Конических сечений» Аполлония никогда не были изданы, потому что они сохранились только на арабском языке. Единственно существующий перевод с арабского — латинский — был сделан Эдмундом Галлеем в 1710 г.

Среди многочисленных пробелов в публикации средневековых таблиц отметим «Альфонсовы таблицы», законченные около 1270 г. под покровительством и при активной поддержке Альфонса X (который правил с 1252 г. по 1282 г.). От испанского оригинала сохранилось только введение, но Хаскинс (Ch. H a s k i n s, Studies in the History of Medieval Science, стр. 17)

---

[1]) Также и в сложных словах вроде επι ⊙ вместо ἐπίκυκλος (эпицикл).

упоминает 75 списков и 13 ранних изданий латинского варианта таблиц. См. Alfred Wegener, Die astronomischen Werke Alfons X., Bibliotheca Mathematica, ser. 3, т. 6 (1905), стр. 129—185.

Нельзя дать точную оценку количества и значения византийских астрономических справочников, но даже самый поверхностный просмотр каталогов убеждает, что эти материалы исчисляются многими тысячами листов текста и таблиц. Неизвестно, в какой мере эти работы продолжают традиции Птолемея — Теона, находятся ли они под влиянием мусульманских работ, или внесли свои новые идеи?

Богатство материалов из стран ислама показано Кеннеди (E. S. Kennedy, A Survey of Islamic Astronomical Tables. Trans. Amer. Philos. Soc., N. S., т. 46, 2 (1956), стр. 123—177). Из более чем ста перечисленных работ только две были опубликованы (Наллино издал в 1899—1907 гг. ал-Баттани, и Бьорнбо, Бестхорн и Зутер издали в 1914 г. ал-Хорезми).

к 28. «Catalogus Codicum Astrologorum Graecorum» (Bruxelles, Lamertin, 1898—1953) не является «каталогом» в буквальном смысле. Первая часть каждого тома дает описание астрологических рукописей. Вторая, бóльшая часть содержит издание значительных разделов этих текстов. Тома расположены по странам. Восточные библиотеки не были использованы; можно ожидать любого количества первоисточников на Ближнем Востоке.

Важную критику некоторых результатов книги Кюмон см. у Робера (L. Robert, Etudes épigraphiques et philologiques, Bibliothèque de l'école des hautes études 272 (1938), стр. 72 и след.).

Издание астрологических рукописей Птолемея было завершено Ламмертом и Бером в 1952 г. (Opera, III, 2, Teubner).

Издание греческих гороскопов с историческими и астрономическими комментариями автора и Х. Б. Ван Хезена см. в Memoirs of the Amer. Philol. Soc., т. 48, (1959).

Открытия Гунделя были опубликованы в статье «Neue astrologische Texte des Hermes Trismegistos», Abh. d. Bayerischen Akad. d. Wissenschaften, Philos.— histor. Abt., N. F., 12 (1936). Результаты, касающиеся старого звездного каталога, обсуждаются на стр. 131—134 и представлены в списке на стр. 148—153. Гундель определяет дату каталога путем сравнения приведенных долгот с долготами звездного каталога в «Альмагесте», полагая, что вековое изменение составляет $1^0$, согласно величине прецессии по Птолемею. Хотя основной результат Гунделя, а именно, что большое число положений указывает на эпоху Гиппарха, не подлежит сомнению, против некоторых его рассуждений можно возразить. За единственным исключением (№ 63), все долготы в списке Гунделя выражены в целых градусах (№ 63 составляет 29 1/2) и являются, следовательно, округленными значениями. Каталог же Птолемея дает долготы с точностью до 10′. Таким образом, эти два ряда значений нельзя сравнивать без учета ошибок округления. Следует рассмотреть две возможности: округление до ближайшего целого числа или простое отбрасывание дробей. Опыт обращения с большим количеством округленных величин в вавилонской и греческой астрономии подсказывает, что в противоположность нашему обыкновению приходится допустить второй метод. Таким путем я сопоставил долготы всех звезд в списке Гунделя с долготами, которые они имели в 130 г. до н. э. согласно каталогу Петерса и Кнобеля (Ptolemy's Catalogue of Stars, Carnegie Institution of Washington, Publication № 86, 1915; стр. 74 и след.). Сравнение возможно для 59 значений из списка Гунделя и соответствующих значений по Птолемею для 130 г. до н. э., у которых нужно отбросить дробные части, как бы они ни были близки к 1. Только для одной звезды долгота оказывается на 1° меньше, чем ожидалось для 130 г. до н. э.; для другой звезды она на 2° больше, чем ожидалось. Для 39 звезд, или 66%, получаются те же самые числа, тогда как 18 звезд, или 30,5% звезд имеют долготу на 1° больше, чем найденная для 130 г. до н. э. Иными словами, 96,5% звезд из списка Гунделя имеют долготы, правильные для времени от 130 до 60 гг. до н. э. Следовательно, они были взяты либо из каталога самого Гиппарха, либо из каталога какого-либо астронома следующего поколения[1]). Стало быть, гипотеза Гунделя о звездном каталоге, предшествовавшем Гиппарху и содержавшем положения в эклиптических координатах, опровергается.

Глубоко укоренившееся убеждение, что греки были склонны только к философским спекуляциям и пренебрегали наблюдениями и экспериментами, привело к тому, что легко была принята теория, согласно которой звездный каталог Птолемея является тривиальным видоизменением каталога Гиппарха; допускали, что Птолемей просто добавил 2;40° к долготам Гиппарха, несмотря на его ясное утверждение о независимых наблюдениях. В то же время Болл показал (Bibliotheca Mathematica, ser. 3, т. 2, 1901, стр. 185—195), что каталог Гиппарха охватывает только около 850 звезд по сравнению с более чем 1000 звезд у Птолемея. Наконец, Фогт доказал (Astron. Nachr., 224, 1925, столб. 17—54), что из 60 звезд в каталоге Гиппарха только пять могли быть использованы Птолемеем, тогда как большинство, несомненно, подтверждает независимость наблюдений.

Гундель, не обративший внимания на работу Фогта, продолжал исходить из предположения о чисто схематической связи между двумя каталогами. Из сочинений Гиппарха сохранились только его Комментарии к Арату (издатель Манициус, Leipzig, 1894, с немецким переводом). Несомненно, это ранняя работа Гиппарха, написанная до открытия прецессии. Это видно из того, что положение звезд никогда не дается в эклиптических координатах (долгота и широта), а всегда в смешанной экваториально-эклиптической системе (см. рис. 30 на стр. 181). Очевидно, именно открытие прецессии привело в дальнейшем Гиппарха к введению настоящей эклиптической системы координат, в которой долготы возрастают пропорционально времени, а широты остаются неизменными.

к 29. H. O. L a n g e — O. N e u g e b a u e r, Papyrus Carlsberg I. Ein hieratisch- demotischer kosmologischer Text. Klg. Danske Vidensk. Selskab, Hist.-filol. Skrifter, 1, № 2 (1940). Новое издание с многочисленными улучшениями готовится Р. А. Паркером и автором и будет включено в большую работу о египетских астрономических текстах[2]).

к 31. B u d g e, The Rise and Progress of Assyriology, London, 1925, пишет (стр. 136 и след.): «Как только торговцы и чиновники в Багдаде узнали, что Рассам уехал из страны, они начали производить раскопки за свой счет. Они нанимали тех рабочих, которые работали у Рассама ... Британский музей приобрел несколько коллекций и, поскольку между Парижем и Америкой существовала сильная конкуренция, цены начали расти, и через короткое время ... цена на таблички..., за которые нашедшим их платили в Багдаде

---

[1]) Я подозреваю, что для трех последовательных звезд из списка Гунделя (№№ 45—47) полные значения сохранились в «Hermes, De XV stellis», опубликованном Делаттом, Louis D e l a t t e, Textes latins et vieux français relatifs aux Cyranides (Bibl. Fac. Philos. et Lettres Univ. Liège, 93, 1942). Там для первых трех звезд находим следующие координаты: ♈ 15;27 ♈ 27;20 ♉ (в тексте ошибочно ♈) 9;28, соответствующие гунделевским ♈ 15, ♈ 27, ♉ 9. (Delatte, стр. 246, 249, 250 соответственно). В списке из «De XV stellis» так же, как в тексте Гунделя, отдается предпочтение первой половине зодиака; у Делатта 4/5 звезд принадлежат к этому полукругу, у Гунделя 2/3.

[2]) Первый том этого издания, содержащий, в частности, папирус Карлсберга I с обширными комментариями, уже вышел: O. N e u g e b a u e r and Richard A. P a r k e r, Egyptian Astronomical Texts, I. The Early Decans, London, 1960. (*Прим. ред.*)

по пять пиастров за штуку, достигла в Лондоне 4 фунтов стерлингов». Это относится к периоду с 1882 по 1887 г.

Первая заслуживающая доверия информация о дате и месте нахождения математических текстов-задач древневавилонского периода была приведена Таха Бакиром в Sumer, 7 (1951), стр. 28 и след. Судя по полевым отчетам недавних раскопок в Тель-Хармале, эти тексты были найдены в частном доме. Совместная экспедиция Музея Пенсильванского университета и Восточного института Чикагского университета в Ниппуре теперь окончательно установила, что «Табличный холм», который Хильпрехт, впервые его раскопавший, считал остатками «Храмовой библиотеки», фактически представлял собой «жилые кварталы разных времен» (D. E. McCown, в J. Near Eastern Studies, 11, 1952, стр. 175).

к 33. Более подробное описание метода расшифровки алгебраических текстов-задач дано в моей работе «Der Verhältnisbegriff in der babylonischen Mathematik», Analecta Orientalia, 12 (1952), стр. 235—257.

ГЛАВА IV

# ЕГИПЕТСКАЯ МАТЕМАТИКА И АСТРОНОМИЯ

34. Из всех цивилизаций древности египетская представляется мне наиболее приятной. Превосходная защита, которую море и пустыня обеспечивали долине Нила, не допускала чрезмерного развития духа героизма, который часто превращал жизнь в Греции в ад на земле. Вероятно, в древности не было другой страны, в которой культурная жизнь могла бы продолжаться так много столетий в мире и безопасности. Конечно, даже и Египет не был избавлен от суровой внешней и внутренней борьбы; но в целом, мир в Греции или Месопотамии был таким же исключительным состоянием, как война в Египте.

Неудивительно, что часто подчеркивают неподвижный характер египетской культуры. На самом деле в Египте было так же мало врожденного консерватизма, как и в любом другом человеческом обществе. При серьезном изучении египетского языка, искусства, религии, системы управления и т. д. легко увидеть постоянные изменения во всех аспектах жизни на протяжении всего периода от ранних династий и до того времени, когда Египет потерял свою независимость и, в конце концов, был поглощен эллинистическим миром.

Обоснованность этого утверждения не опровергается тем фактом, что математика и астрономия обе играли незначительную роль во все периоды египетской истории. В противном случае можно было бы отрицать развитие искусства и архитектуры в средние века по причине неизменно низкого уровня науки в Западной Европе. Нужно просто осознать, что математика и астрономия практически не влияли на обычную жизнь древних цивилизаций. Даже в наиболее развитых экономических структурах древности потребность в математике не выходила за пределы элементарной домашней арифметики, которую ни один математик не назовет математикой. Требования же к математике со стороны технических проблем таковы, что средств древней математики было недостаточно для каких бы то ни было практических приложений. Астрономия, наоборот, оказывала гораздо более глубокое влияние на философские взгляды древних, поскольку она воздействовала на их представление о мире, в котором мы живем. Но не следует забывать, что древняя астрономия в своем развитии в значительной степени низводилась до состояния вспомогательного орудия, когда над теоретическими аспектами астрономии преобладала их астрологическая интерпретация. Единственное практическое применение теоретической астрономии можно найти в теории солнечных часов и математической географии. Нет никаких следов использования сферической астрономии для теории навигации. Только со времен Возрождения практические аспекты математических открытий и теоретические выводы из астрономии стали важными составными частями человеческой жизни.

35. Тот факт, что египетская математика не внесла сколько-нибудь заметного вклада в развитие математических знаний, не означает, что она не представляет интереса для историка. Наоборот, то обстоятельство, что египетская математика сохранилась на относительно примитивном уровне, дает возможность изучать такую стадию развития, которая, кроме египетских документов, нигде больше нам не доступна.

В какой-то мере египетская математика имела некоторое, скорее отрицательное, влияние на последующие периоды. Египетская арифметика была основана на широком использовании единичных дробей. Эта практика, возможно, оказала влияние на эллинистическую и римскую администрацию, и таким образом распространилась на другие районы Римской империи, хотя сходные методы, возможно, были развиты там более или менее независимо. Обращению с единичными дробями, безусловно, обучали всюду, где математика включалась в программу. Влияние этой практики заметно даже в сочинениях такого масштаба как «Альмагест», где окончательный результат часто выражается в единичных дробях, хотя сами вычисления производятся с шестидесятеричными дробями. Иногда точность результата приносилась в жертву более красивой форме в виде единичных дробей. И эта старая традиция, несомненно, много способствовала тому, что применение шестидесятеричной позиционной системы обозначения ограничивалось чисто научной областью.

36. Изучение египетской математики приводит к двум важным результатам. Первый из них состоит в том, что все действия в египетской математике, по существу, сводятся к сложению. Для понимания второго результата нам потребуется глубже разобраться в развитии действий с дробями. Мы рассмотрим оба эти вопроса отдельно.

Нетрудно объяснить, чтó мы подразумеваем под «аддитивностью» египетской математики. Об обыкновенном сложении или вычитании нет надобности говорить. Оно просто состоит из правильного группирования и подсчета единиц, десятков, сотен и последующих знаков, из которых состоят египетские обозначения чисел. Но умножение и деление также сводятся к этому процессу путем дробления любого умножения на последовательные удвоения и сложения. А каждое удвоение есть не что иное, как сложение числа с самим собой. Так, умножение на 16 производится путем четырех последовательных удвоений, из которых последнее и дает нужный результат. Умножение на 18 получается сложением результатов умножения на 2 и на 16, как это показано на следующем примере:

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 25 |
| / | 2 | 50 |
| | 4 | 100 |
| | 8 | 200 |
| / | 16 | 400 |
| Итого | | 450 |

В общем умножение производится путем разложения одного множителя по степеням двух. Очевидно, в умах египтян никогда не возникало вопроса, всегда ли этот процесс применим. К счастью, всегда; и занятно видеть, как современные вычислительные машины снова используют этот «двоичный» принцип умножения. Деление, конечно, тоже можно свести к этому методу, потому что нужно только найти множитель, который в произведении с данным числом дает второе данное число. Деление 18 на 3 будет просто означать удвоение 3 до тех пор, пока в итоге не получится 18:

| | | |
|---|---|---|
| | 1 | 3 |
| / | 2 | 6 |
| / | 4 | 12 |
| Итого | | 18, |

и ответ будет $2 + 4 = 6$. Конечно, этот процесс не всегда работает так просто, и необходимо ввести дроби. Чтобы разделить 16 на 3, нужно начать опять с выкладок

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 3 |
| | 2 | 6 |
| / | 4 | 12 |

и, таким образом, найти $1 + 4 = 5$, что немного меньше искомого решения. Очевидно, еще нехватает величины $16 - 15 = 1$, и в заключение египетский вычислитель написал бы

| | | |
|---|---|---|
| | $\bar{\bar{3}}$ | 2 |
| / | $\bar{3}$ | 1, |

что означает: $^2/_3$ от 3 есть 2, $^1/_3$ от 3 есть 1, и таким образом он нашел бы число 5 $\bar{3}$, являющееся решением задачи.

Здесь мы уже коснулись второго вопроса, действий с дробями. Как уже говорилось в главе I, египетские дроби — это всегда «единичные дроби». Единственным исключением является число 2/3, которое мы всегда тоже относим к единичным дробям, чтобы избежать неуклюжих выражений[1]). Большая часть этих чисел пишется при помощи обыкновенного обозначения числа под иероглифом 𓂋, «r», означающим что-то вроде «часть». Мы поэтому пишем $\overline{5}$ вместо выражения «5-я часть»$=\frac{1}{5}$. Для $\frac{2}{3}$ мы пишем $\overline{\overline{3}}$, тогда как египетская форма была бы «2 части», что значит «2 части от 3», т. е. $\frac{2}{3}$. Имеются специальные знаки для $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, которые мы можем правильно передать словами «половина» и «четверть», но для простоты мы употребляем знаки $\overline{2}$ и $\overline{4}$, как и для всех других единичных дробей.

Мы не будем подробно рассматривать все принятые в Египте способы обращения с этими дробями. Отметим лишь некоторые основные черты, характерные для этого своеобразного уровня арифметики. Например, если нужно сложить $\overline{3}$ и $\overline{15}$, то в качестве ответа напишут просто $\overline{3}\ \overline{15}$ и никогда не заменят это каким-либо символом вроде $\frac{2}{5}$. Опять-таки $\overline{\overline{3}}$ составляет исключение, поскольку часто используется равенство чисел $\overline{2}\ \overline{6}$ и $\overline{\overline{3}}$.

Каждое умножение или деление, включающее дроби, приводит к вопросу о том, как удваивать единичные дроби. Оказывается, удвоенные $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$, $\overline{8}$ и т. д. всегда непосредственно заменяются на 1, $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$ и т. д. Для удвоенного $\overline{3}$ имеется специальный символ $\overline{\overline{3}}$. Для удвоения дробей $\overline{5}$, $\overline{7}$, $\overline{9}$,... следуют, однако, специальным правилам, ясно изложенным в одном из главных наших источников, математическом папирусе Ринда. Эти правила можно представить в виде таблицы, дающей для каждого нечетного целого $n$ выражение для удвоенного числа $\overline{n}$. Эта таблица часто воспроизводилась, и мы можем ограничиться несколькими начальными строчками:

| $n$ | дважды | $\overline{n}$ |
|---|---|---|
| 3 | $\overline{2}$ | $\overline{6}$ |
| 5 | $\overline{3}$ | $\overline{15}$ |
| 7 | $\overline{4}$ | $\overline{28}$ |
| 9 | $\overline{6}$ | $\overline{18}$ |

и т. д.

[1]) Мы здесь оставляем в стороне другую «дополнительную дробь» (т. е. дробь вида $1-\overline{n}$), обозначавшуюся специальным знаком, а именно дробью $^3/_4$, потому что она не играет никакой роли в известных нам египетских арифметических действиях.

Возникает вопрос, почему именно эти комбинации были выбраны из бесконечного числа способов представления $\frac{2}{n}$ в виде суммы единичных дробей.

Я думаю, что разгадка этой проблемы кроется в разбиении всех единичных дробей на два класса, класс «естественных» и класс «алгоритмических» дробей, вместе с учетом описанной ранее техники последовательного удвоения и его дополнения, последовательного деления пополам. К «естественным» дробям я отношу небольшую группу долей единицы таких, как $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{2}$ и $\overline{4}$, которые с самого начала выделяются тем, что для них существуют специальные символы или выражения. Эти части являются самостоятельными единицам и относятся к основным понятиям наравне с целыми числами. Они встречаются повсюду в повседневной жизни, при счете и измерении. Остальные дроби, наоборот, являются неизбежным следствием действий над числами, «алгоритма», и не имеют таких глубоких корней в элементарном понятии о числе. Среди «алгоритмических» дробей выделяются те, которые легко представить, а именно, те части, которые возникают при последовательном делении пополам. Этот процесс является простой аналогией последовательного удвоения, на котором построены все действия с целыми числами. Таким путем мы получаем два ряда дробей, оба непосредственно вытекающих из «естественных» дробей путем последовательного деления пополам. Одна последовательность — это $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, $\overline{12}$ и т. д., другая — $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{8}$, $\overline{16}$ и т. д. Важность этих двух серий ясно видна во всей египетской арифметике. Яркий пример был уже приведен выше на стр. 85, где мы видели, что $\overline{3}$ от 3 находится, начиная с того, что $\overline{\overline{3}}$ от 3 есть 2, и лишь вторым этапом устанавливается, что $\overline{3}$ от 3 есть 1. Такой переход от $\overline{\overline{3}}$ к $\overline{3}$ являлся стандартным, хотя нам он кажется совершенным абсурдом. Он подчеркивает полноту первой серии дробей и то, что она происходит от «естественной» дроби $\overline{\overline{3}}$.

Если теперь нужно выразить удвоенную единичную дробь, скажем, $\overline{5}$, как комбинацию других долей единицы, то представляется естественным снова обратиться к этим двум основным сериям дробей. Таким образом, пытаются представить дважды $\overline{5}$, как сумму естественной части от $\overline{5}$ и какой-либо другой дроби, которую надо найти тем или иным способом. На этой ранней стадии, несомненно, делали пробы, пока не находили правильного решения. Я думаю, что основные этапы вычислений можно восстановить следующим образом. Обращаемся к естественной дроби $\overline{3}$ после того как другие эксперименты (например, с $\overline{2}$) оказались неудачными. Дважды $\overline{5}$ можно представить как $\overline{3}$ от $\overline{5}$, или $\overline{15}$, плюс остаток от $\overline{5}$, где остаток должен дополнять $\overline{3}$ до множителя 2 и равен $1\overline{\overline{3}}$. Теперь встает вопрос о нахождении $1\overline{\overline{3}}$ от $\overline{5}$. Это делается в египетской математике путем подсчета третей и записи их числа красными чернилами под высшими единицами; в нашем случае

$1 \quad \bar{\bar{3}}$ (написано черным)

$3 \quad 2$ (написано красным).

Это значит, что 1 содержит 3 трети, а $\bar{\bar{3}}$ — две трети. Таким образом, остающийся множитель в целом содержит 5 третей. Это величина, от которой надо взять $\bar{5}$. Но 5 пятых есть одна целая единица, и это была треть первоначальной высшей единицы. Так мы получаем для второго слагаемого просто $\bar{3}$, и, таким образом, дважды $\bar{5}$ представлено как $\bar{3}\ \overline{15}$. Это то самое, что мы находим в таблице.

Для современного читателя удобнее повторить эти неуклюжие выводы в теперешней символике, но следует помнить, что такая форма выражения совершенно неисторична. Для того чтобы представить $\frac{2}{5}$ в виде $\frac{1}{m}+\frac{1}{x}$, мы выбираем $\frac{1}{m}$, как естественную дробь от $\frac{1}{5}$, в данном случае $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$. Для остающейся дроби имеем

$$\frac{1}{x}=\left(1+\frac{2}{3}\right)\frac{1}{5}=\frac{5}{3}\cdot\ \frac{1}{5}=\frac{1}{3}.$$

Так мы приходим к представлению

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3},$$

содержащемуся в таблице. В общем виде мы имеем

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{n}+\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{n},$$

и второй член справа будет единичной дробью тогда и только тогда, когда $n$ кратно 5. Другими словами, попытка с естественной дробью $\frac{1}{3}$ сработает, только если $n$ будет кратно 5. Это подтверждается во всех соответствующих случаях, имеющихся в таблице папируса Ринда, охватывающей все выражения для $\frac{2}{n}$ от $n=3$ до $n=101$.

Точно так же можно оперировать с естественной дробью $\frac{1}{2}$. Тогда будем иметь

$$\frac{2}{n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}+\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{n},$$

откуда видно, что мы получим справа единичную дробь, если $n$ делится на 3. Для $n=3$ получаем

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}$$

— то самое соотношение $\bar{\bar{3}}=\bar{2}\ \bar{6}$, которое мы приводили в начале. Все другие случаи в таблице для $n$ кратных 3 показывают именно это разложение, в котором один из членов равен $\frac{1}{2n}$.

Ясно, что можно продолжать эту процедуру с дробями с $\bar{4}$, $\bar{8}$ и т. д. или с $\bar{6}$, $\overline{12}$ и т. д. Таким путем можно получить все больше и больше случаев, приведенных в таблице, и мне кажется несомненным, что удалось найти суть того метода, который привел к этим правилам замены чисел $2\,n$ суммами единичных дробей.

**37.** В нашу цель не входит подробное рассмотрение всех сторон египетской арифметики дробей. Я надеюсь, однако, что достаточно ясно показал два ее ведущих принципа, строгую аддитивность и широкое использование «естественных дробей».

Следует добавить несколько исторических замечаний. Папирус Ринда не является единственным документом для изучения египетской арифметики. Другой большой текст в Московском папирусе согласуется с правилами, известными из папируса Ринда. Мы имеем, однако, глиняную табличку раннего периода Нового Царства, в которой удвоение числа 7 дано в виде $\bar{6}$ $\overline{14}$ $\overline{21}$ вместо $\bar{4}$, $\overline{28}$, как это получается по стандартному правилу. Значительно больше материала имеется в демотических и греческих папирусах эллинистического периода. Здесь опять можно наблюдать отклонения от ранних правил, хотя основные принципы остаются теми же. Другими словами, мы не можем сказать, что система таблиц дробей была вычислена раз и навсегда и затем строго сохранялась. Очевидно, что медленно развивалось несколько равнозначных форм, но без серьезного нарушения первоначальных методов. Этот последний факт имеет большое историческое значение. В египетской арифметике обращение с дробями всегда оставалось особым искусством. Хотя практика позволяла очень скоро научиться действовать с дробями в этих рамках, всякий охотно согласится, что эти методы исключали какие бы то ни было обширные астрономические вычисления, сравнимые с грандиозной вычислительной работой, проделанной греческими и поздними вавилонскими астрономами. Не удивительно, что египетская астрономия не сыграла никакой роли в развитии этой науки.

**38.** Подробное описание египетской геометрии нарушило бы пропорции этой книги. Достаточно сказать, что мы находим в Египте почти тот же элементарный уровень, который наблюдали в современной ему Месопотамии. Вычислялись площади треугольников, трапеций, прямоугольников и т. д., а для круга использовалось правило, которое можно выразить формулой

$$A=\left(\frac{8}{9}\,d\right)^2,$$

где $d$ обозначает диаметр[1]). Соответствующие формулы для элементарных объемов тоже были известны, включая правильный способ

[1]) Интересную реконструкцию приема, который привел к этой приближенной формуле, см. в статье А. Е. Р а й к, Новые реконструкции некоторых задач из древнеегипетских и вавилонских текстов,— Историко-математические исследования, вып. XI, М., 1958, стр. 171—184. (*Прим. ред.*)

вычисления объема усеченной пирамиды [1]). Это, а также относительная точность значения 3,16 для $\pi$, вытекающего из приведенной выше формулы, ставит египетскую геометрию выше египетской арифметики. Было даже объявлено, что в одном примере из Московского папируса правильно определена площадь полушария, но текст допускает гораздо более примитивное истолкование, представляющееся более правдоподобным [2]).

Яркое описание основных тем египетской математики имеется в папирусе Нового Царства, написанном для школьных нужд. Это сатирическое письмо, в котором один служащий высмеивает другого.

Раздел о математике гласит следующее: «Другая тема. Смотри, ты приходишь и задаешь мне твою работу. Я тебе покажу, как обстоят у тебя дела, когда ты говоришь: «Я писец, издающий приказы по армии» [3]).

«Тебе поручено вырыть озеро. Ты приходишь ко мне, чтобы спросить относительно норм для солдат, и ты говоришь мне «подсчитай это». Ты оставляешь свою работу и задача научить тебя ее выполнению падает на мои плечи.

«Приди, чтобы я мог сказать тебе больше, чем ты сказал: Я заставлю тебя смутиться (?), когда я открою тебе приказ твоего повелителя, тебе, являющемуся его царским писцом, когда тебя приведут под окно (дворца, где царь издает приказы) по вопросу о некоторой важной (?) работе, когда горы извергают великие монументы для Гора (царя), повелителя Двух Стран (Верхнего и Нижнего Египта). Потому что, смотри, ты являешься умным писцом, который находится во главе войск. Нужно соорудить наклонное (строение), длиной 730 локтей, шириной 55 локтей, содержащее 120 отделений, заполненных балками и тростником; высотой 60 локтей в наивысшей точке, 30 локтей в середине, с уступом в дважды 15 локтей и с полом в 5 локтей [4]). Сколько нужно для этого кирпичей, спрашивают у генералов, спрашивают у писцов всех вместе, но ни один из них не знает ничего. Все они надеются на тебя и

---

[1]) Был предложен ряд реконструкций метода, которым египтяне смогли получить правило вычисления объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. См. О. Нейгебауер, Лекции по истории античных математических наук, М.—Л., 1937, стр. 144—146, «Предисловие» С. Я. Лурье к русскому изданию этих лекций, его же статью «К вопросу о египетском влиянии на греческую геометрию» (Архив Ин-та науки и техники (1), 1, 1933, стр. 45—70) и цитированную выше статью А. Е. Раик. (*Прим. ред.*)

[2]) О различных толкованиях этой задачи Московского папируса, самый текст которой недостаточно определенный и ясный, см. в «Лекциях...» Нейгебауера, «Предисловии» С. Я. Лурье к этим лекциям, в статье «Египетская наука и Греция» И. Н. Веселовского (Труды Ин-та истории естествознания, т. II, 1948, стр. 426—498) и в книге «Пробуждающаяся наука» ван-дер-Вардена, М., 1959. (*Прим. ред.*)

[3]) Из книги Erman, Egyptian Literature, стр. 223 и след.

[4]) Эти объяснения принадлежат Л. Борхардту. См. рисунок в Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, ser. B, т. 1, стр. 442.

говорят: «Ты умный писец, мой друг! Решай за нас быстро! Смотри, твое имя знаменито; пусть никого не найдется в этом месте, чтобы восхвалить других тридцать [1]). Пусть не скажут, что есть вещи, которых даже ты не знаешь. Ответь нам, сколько нужно кирпичей для этого?»

«Видишь, его размеры (?) перед тобой. Каждое из его отделений имеет 30 локтей и 7 локтей ширины».

В целом здесь можно повторять то, что мы уже сказали о вавилонской геометрии. Задачи на площади или объемы не составляют самостоятельного раздела математических исследований, а являются только одним из многих приложений численных методов к практическим вопросам. Нет существенной разницы между задачами на определение площади поля в соответствующих единицах и задачами о распределении пива среди персонала храма согласно дифференцированным нормам. Это положение дел в значительной степени сохранялось даже в эллинистический период и много позже, далеко за его пределами. Важную роль в арабской математике играют задачи «на наследование», и такие же задачи мы находим еще в древневавилонских текстах. Геометрические работы Герона, подлинные или приписываемые ему, содержат целые главы о единицах, весах, измерениях и т. п. Конечно, начиная с эллинистического периода, даже работы Герона и близкие к ним сочинения показывают влияние греческой научной геометрии. Но вообще говоря, следует различать два далеко отстоящих друг от дуга типа «греческой» математики. Один представлен строго логическим подходом Евклида, Архимеда, Аполлония и других; другой является только частью общей эллинистической математики, корни которой лежат в вавилонских и египетских методах. Произведения Герона и Диофанта и работы, известные только по фрагментам или из папирусов, составляют часть этой восточной традиции, которую можно проследить и в средние века, как в арабском, так и в западном мире. «Геометрия» в современном смысле этого слова очень малым обязана тому скромному объему основных геометрических знаний, который необходим для удовлетворения практических потребностей. Математическая геометрия получила один из наиболее значительных стимулов для развития в результате открытия иррациональных чисел в четвертом или пятом веке до н. э., затем, начиная со второго века до н. э., она пребывала в состоянии застоя, если не считать некоторого прогресса в сферической и начертательной геометрии, вызванного нуждами астрономии. С другой стороны, геометрическая теория оказала отрицательное влияние на алгебраические и численные методы, являвшиеся частью восточных предпосылок эллинистической науки. Действительное проникновение во взаимные связи всех этих областей было достигнуто только в новое время.

---

[1]) Может быть, часто упоминающаяся «Коллегия Тридцати».

39. Роль египетской математики, вероятно, лучше всего охарактеризовать, сказав, что она тормозила развитие техники вычислений. Египетская астрономия оказала значительно меньшее влияние на внешний мир по той простой причине, что на протяжении всей своей истории она оставалась на исключительно незрелом уровне и практически не имела никаких связей с быстро растущей математической астрономией эллинистической эпохи. Только в одном пункте египетская традиция оказала весьма благотворное влияние, а именно, в использовании эллинистическими астрономами египетского календаря. Этот календарь, по существу, является единственным разумным календарем во всей человеческой истории. Согласно нему год состоит из 12 месяцев по 30 дней и 5 дополнительных дней в конце каждого года. Хотя этот календарь возник из чисто практических потребностей, без всякой связи с астрономическими проблемами, его значение для астрономических вычислений было по достоинству оценено эллинистическими астрономами. Действительно, фиксированная шкала времени, без каких-либо вставок, была именно тем, что нужно для астрономических вычислений. Чисто лунный календарь вавилонян, с его зависимостью от всех сложных вариаций движения Луны, равно как и хаотические греческие календари, в которых вставки зависели не только от Луны, но и от местной политики, несомненно, были значительно хуже постоянного египетского календаря. Определение числа дней между отстоящими на 50 лет днями нового года по греческому или вавилонскому календарю представляет собой серьезную задачу. В Египте этот интервал просто равен 50 раз по 365. Неудивительно, что египетский календарь приобрел в астрономии характер стандартной системы измерения и сохранял эту роль на протяжении средних веков вплоть до использования его Коперником в лунной и планетной таблицах. Даже в гражданской жизни египетский календарь из 365 дней был возрожден в средние века. Незадолго до падения сасанидской монархии под ударами наступающего ислама, последний сасанидский царь, Ездигерд, положил этот год в основу реформированного персидского календаря. Это «персидское» летоисчисление от эры Ездигерда (от 632 н. э.) сохранилось, и на него часто ссылаются в астрономических трудах стран ислама и Византии.

Вторым вкладом Египта в астрономию явилось разделение суток на 24 часа, хотя эти «часы» первоначально не имели постоянной величины, а зависели от времени года. Эти «сезонные часы», двенадцать для дня и двенадцать для ночи, были заменены «равноденственными часами» постоянной длины только в теоретических работах эллинистических астрономов. Поскольку в это время все астрономические вычисления, по крайней мере в части, касающейся дробей, производились по шестидесятеричной системе, то и равноденственные часы были разделены шестидесятерично. Таким образом, наше современное деление дня на 24 часа по 60 минут является результатом эллинистической модификации египетской практики, соединенной с вавилонской техникой вычислений.

Наконец, следует упомянуть «деканов» (мы пользуемся греческим термином), которые не оставили прямого следа в современной астрономии. Это весьма любопытно, поскольку именно деканы, как мы увидим дальше, были причиной деления ночи на 12 частей и, значит, в конечном счете, нашей 24-часовой системы. Кроме того, в эллинистическую эпоху были установлены твердые соотношения между египетскими «деканами» и вавилонским зодиаком, упоминаемым в Египте лишь со времен царствования преемников Александра. В этом последнем варианте 36 «деканов» были просто третями знаков зодиака, так что каждый декан представлял 10° эклиптики. Поскольку в этот же период наблюдается быстрое развитие астрологии, деканы заняли важную роль в астрологическом учении и смежных областях, таких как алхимия, магия камней и растений и их применение в медицине. В таком виде «деканы» дошли до Индии, с тем, чтобы в еще более фантастической форме вернуться в страны ислама и на Запад. Их заключительный триумф отражен во фресках дворца Скифанориа в Ферраре, выполненных при правлении Борсо д'Эсте (около 1460 г.).

Прослеживая в глубь веков историю египетских «деканов», мы обнаруживаем взаимодействие двух основных компонент египетского исчисления времени: восхода Сириуса, как предвестника наводнения и простой схемы гражданского года из 12 месяцев по три декады каждый.

**39а**. Здесь не место пытаться описать всю историю египетского календаря. Его в основном не астрономический характер подчеркивается делением года на три сезона по четыре месяца каждый — делением, имевшим значение лишь для сельского хозяйства. Единственная заметная астрономическая идея — гелиакический восход Сириуса — приобрела свое значение только благодаря близости этого восхода ко времени разлива Нила, основного события в жизни Египта. Существовал, наконец, и лунный календарь, по которому определяли дни праздников в соответствии с фазами луны. В действительности, как заметил Р. А. Паркер, следует различать разные варианты лунного календаря; один из них в конечном счете был упорядочен и привязан к гражданскому календарю с его двенадцатью 30-дневными месяцами и пятью присоединенными днями (эпагоменами).

Когда деканы впервые появились на крышках саркофагов Среднего Царства — гражданский календарь был уже давно установлен. К нему теперь были приведены в соответствие серии созвездий, числом 36, хотя и с небольшими отклонениями в расположении и границах. Только два из них могут быть непосредственно опознаны, а именно, Сириус и Орион. Некоторые созвездия покрывают более одного декана; с другой стороны, имеются деканы, «предшествующие» или «следующие за» созвездием и указывающие группы звезд меньшего значения. Мы увидим, что все эти деканы принадлежат полосе неба, расположенной примерно параллельно эклиптике к югу от нее (см. рис. 3,*б*) на стр. 98).

Астрономические изображения на крышках саркофагов менее значительных людей, по всей вероятности, являются жалкими копиями потолков, украшавших царские гробницы или храмы. На этих рисунках представлено небо с написанными названиями деканальных созвездий. Отвечающие деканам десятидневные интервалы заполняют весь год, образуя 36 колонок, разбитых в свою очередь каждая на 12 строк по числу часов ночи. Название одного и того же декана переходит из одной колонки в другую, каждый раз поднимаясь на строчку выше. Так, здесь возникает диагональный узор, по которому эти тексты называют «диагональными календарями».

В действительности мы имеем здесь не календарь, а звездные часы. Пользующийся таким списком будет знать «час» ночи по восходу декана, записанного в соответствующей декаде месяца. Рассмотрим более внимательно, как работают такие «часы», сначала с современной точки зрения, а затем вернемся к историческим соображениям.

Когда мы наблюдаем восход звезд над восточным горизонтом, мы видим, что они появляются ночь за ночью в одном и том же месте горизонта. Но если мы будем продолжать наблюдения и во время сумерек, то заметим, что все меньше и меньше звезд можно будет опознать при пересечении горизонта, а близко к восходу Солнца все звезды разом поблекнут. Допустим, что определенная звезда $S$ взошла при начинающемся рассвете и почти сразу погасла ввиду быстрого приближения дневного света. Пользуясь термином греческой астрономии, мы называем такое явление «гелиакическим восходом» звезды. Допустим, что мы используем это явление как указатель окончания «ночи» (понимая под ночью действительную темноту), и считаем $S$ звездой «последнего часа ночи». На следующий день мы можем опять сказать, что краткое появление $S$ указывает на конец ночи.Мы можем продолжать то же самое в течение нескольких дней, но заметим тогда определенное изменение. Солнце не только участвует в суточном вращении неба с востока на запад, приводя тем самым к смене ночи и дня, но обладает также и своим собственным медленным движением по отношению к звездам, направленным противоположно суточному вращению небесного свода.

Это движение Солнца на восток (с полным оборотом за один год) день ото дня задерживает восход Солнца по отношению к восходу $S$. Следовательно, восход $S$ будет виден все более и более ясно и будет проходить все больше времени, пока $S$ не поблекнет в свете наступающего дня. Очевидно, что по истечении какого-то времени уже не будет смысла считать $S$ указателем последнего часа ночи. Но имеются другие звезды, которые могут занять место

$S$ и эта процедура может повторяться весь год, пока Солнце не вернется обратно в район $S$. Таким образом, год за годом $S$ может служить в течение нескольких дней звездой последнего часа, после чего ее в определенном порядке нужно заменять другими звездами $T$, $U$, $V$,...

Эта последовательность явлений и привела египтян к измерению времени ночи при помощи звезд (или группы близлежащих звезд), которые мы теперь называем «деканами». В приведенном выше описании мы оставили без ответа неявный вопрос: как долго нужно ждать, чтобы заменить $S$ на $T$, $T$ на $U$ и т. д.? Очевидно, можно быть очень точным, и каждый день выбирать новую звезду, находящуюся как раз в фазе «гелиакического восхода». Но такого рода непрактичный педантизм не был характерен для тех египтян, которые хотели изобрести какой-либо метод определения времени для ночных служб в храмах. Они приспосабливали это время к своему календарю. Поскольку месяцы были разделены на декады, таким же образом были разбиты и службы часов-звезд. В течение 10 дней $S$ указывала последний час ночи, затем выбиралась $T$ для следующих 10 дней, и так далее. В течение каждой декады конец ночи постепенно отодвигался от рассвета в сторону темноты, с тем чтобы потом скачком вернуться обратно к рассвету при переходе к гелиакическому восходу следующего декана, как мы теперь будем называть звезды $S$, $T$, $U$,...

До сих пор мы только описали определение конца «ночи» или последнего «часа». При этом мы сделали определенный выбор: применили десятичный порядок гражданского календаря к этим деканальным часам. Дальнейшее является необходимым следствием этого важного решения.

Вернемся снова к тому времени года, когда $S$ служит деканом последнего часа. Десять дней спустя $T$ занимает место $S$. К этому времени восход $S$ ясно виден в полной темноте. Поскольку на последний час теперь указывает $T$, мы, естественно, скажем, что восход $S$ указывает предпоследний час. Спустя следующие десять дней $U$ будет представлять последний час, $T$ предпоследний час, $S$ предпредпоследний час и т.д. Таким образом, мы получаем следующее «диагональное» расположение, ведя запись, как и египтяне, справа налево:

| | декада 3 | декада 2 | декада 1 | |
|---|---|---|---|---|
| . . . | . . . | | | . . . |
| . . . | $S$ | | | предпредпоследний час |
| . . . | $T$ | $S$ | | предпоследний час |
| . . . | $U$ | $T$ | $S$ | последний час |

Как долго можно продолжать этот процесс? Чтобы упростить дело, допустим сначала, что год содержит ровно 360 дней или

36 декад. Тогда нам нужно иметь 36 деканов, прежде чем $S$ опять сможет служить деканом последнего часа. Наши «звездные часы» будут поэтому состоять из 36 колонок. Число строк вытекает из следующих соображений. Восход звезд можно видеть только ночью. Максимальное число «часов», указываемых нашими деканами, равно поэтому числу деканов, восход которых можно последовательно наблюдать в течение одной ночи. Если бы от захода Солнца и до его восхода мы имели полную темноту, и если бы ночь и день равнялись друг другу весь год, то в течение одной ночи мы всегда могли бы наблюдать восход ровно половины небесной сферы. Поскольку 36 деканов соответствуют одному полному обороту неба, то в течение каждой ночи был бы виден восход 18 деканов, и наш список звезд привел бы к разделению ночи на 18 частей. Фактически, однако, колебания в продолжительности ночи и сумерек значительно влияют на это число. Более тщательное исследование показывает, что летом, когда Сириус восходит гелиакически, за время темноты можно наблюдать восход только 12 деканов. Поэтому десятичная последовательность деканов приводит к двенадцатеричному разделению ночи. Это и есть то расположение, которое мы находим в «диагональных календарях» на крышках саркофагов периода от 1800 до 1200 г. до н. э.

Важно напомнить, что именно десятичное расположение календаря определило размещение деканов и тем самым число часов, определяемых их восходом каждую ночь. Более мелкое деление привело бы к большему числу часов, а более длинные интервалы дали бы меньшее число часов. Таким образом, деление на 12 возникло не в результате произвольного выбора единиц, а явилось следствием десятичного порядка гражданского календаря. Десятичная основа исчисления времени проявляется в другой форме в разделении дневной части суток. На гробнице Сети I (около 1300 г. до н. э.) мы находим изображение простых солнечных часов и надпись, содержащую их описание. Из этого описания следует, что инструмент указывал десять «часов» от восхода Солнца до его захода. К этому добавлялось еще по часу на утренние и вечерние сумерки.

Итак, мы видим, что египетский счет часов первоначально был, вследствие десятичной структуры календаря, десятичным для дня, двенадцатеричным для времени темноты и оставлял еще два «часа» для сумерек. В результате получалось 24 «часа» неравной продолжительности и неравно распределенных между днем и ночью.

Мы не знаем подробностей дальнейшего развития, но можно показать, что эта примитивная система уже вышла из употребления к тому времени, когда она была изображена на гробнице Сети I, уступив место более равномерному распределению 24 часов на 12 часов ночи и 12 часов дня — разделению, которое в конце концов привело к 24 «сезонным» часам эллинистического периода.

39б. Не только независимое деление ночи и дня скоро вышло из употребления, но и определение ночных часов по деканам должно было потерять свою пригодность по истечении века или двух. В нашем описании мы для простоты допустили, что год имел ровно 360 дней. В этом случае 36 деканов периодически повторяли бы свою службу, следуя диагональному порядку, описанному выше. Фактически, однако, египетский гражданский год содержал 365 дней. Поскольку 36 деканов достаточны только для 360 дней, требуется дополнительный ряд созвездий, чтобы указывать часы ночи для дней эпагомен. Это было учтено изобретателями деканальных часов, что видно из последней секции «диагонального календаря» на крышках саркофагов. Однако не было принято во внимание то, что 365 дней недостаточно точно измеряют время до возвращения Солнца к той же звезде, и поэтому имело место медленное, но неуклонное смещение между гелиакическим восходом декан и его датой по гражданскому календарю. Наши тексты показывают, что делались попытки изменить порядок расположения деканов, чтобы компенсировать возникающие отклонения. Ко времени Нового Царства деканы как указатели времени потеряли всякую ценность. Попытка заменить восход звезд моментом их кульминации также долго не удержалась. Но к этому времени деканы заняли прочное положение в качестве изображений декад года в украшении астрономических сводов, как, например, в могиле Сенмута или гробнице Сети I. Они продолжали существовать в этой роли до тех пор, пока связь с зодиаком эллинистического периода не возродила их и не превратила в могущественный элемент астрологического учения.

Мы должны еще выяснить, где располагались деканы на небе, когда они были впервые применены для указания часов ночи. Из сказанного до сих пор следует, что деканами могла служить любая последовательность звезд или созвездий, восходы которых наступают с десятидневными интервалами. Но можно получить и дополнительную информацию. Мы не только знаем, что в числе деканов фигурировали Сириус и Орион, но и что Сириус был для них, так сказать, идеальным прототипом. Его гелиакический восход по идее начинает год, так же как восход других деканов связан с началом частей года, декад. Восход Сириуса наступает после промежутка примерно в 70 дней, в течение которых звезда остается невидимой из-за близости к Солнцу. Аналогично считалось, что это же самое справедливо и для всех деканов. Демотический комментарий к изображениям на гробнице Сети подробно описывает, как деканы «умирают» один за другим и как они «очищаются» в доме бальзамирования в преисподней с тем, чтобы возродиться после 70 дней невидимости.

Такое мифологическое описание нельзя, конечно, принимать за точное астрономическое указание времени невидимости. Но можно не сомневаться, что деканы в основном следовали циклу

Сириуса. Иными словами, в качестве декана для декады, непосредственно следующей после Сириуса, должна была быть выбрана такая звезда, которая не только восходила на 10 дней позже, но и имела бы 70-дневный период невидимости. Если бы эти числа были точны и была известна яркость звезд, о которых идет речь, то их положение можно было бы точно определить. На самом деле это не так. Все же можно считать, что отклонение от 70-дневного периода невидимости, так же как и отклонения в яркости, оставались в разумных пределах. Этого достаточно по крайней мере для локализации зоны, внутри которой должны располагаться созвездия, служившие деканами. На рис. 3, *б*)[1]) показано найденное таким путем

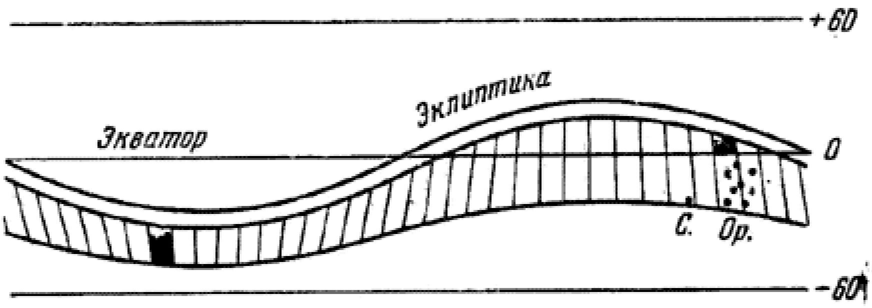



Рис. 3, *б*).

положение пояса деканов по отношению к эклиптике и экватору, а также Сириусу и Ориону. Попытки продвинуться дальше в определении деканов не только мало интересны, но и неизбежно связаны с приписыванием нашим текстам астрономической точности, которой они никогда не имели. И все же нам удалось проникнуть в суть той правильной, хотя и примитивной процедуры, с помощью которой ночное время отсчитывали посредством звезд, и можем локализовать эти звезды в определенном районе неба, к которому принадлежат Сириус и Орион, принадлежат не как исключения, а как ведущие члены созвездий — деканов.

**40.** Саркофаги с «диагональными календарями» относятся к периоду примерно от 1800 до 1200 г. до н. э. От периода Нового Царства сохранились более сложные памятники. Один из них — это свод незаконченной гробницы Сенмута, визиря царицы Хатшепсут; другой — свод гробницы царя Сети I. Могила Сенмута содержит список деканов, изображения божеств часов и т. п. и рисунки созвездий северного полушария. На табл. 10 показана часть этих изображений в том виде, как они скопированы экспедицией музея Метрополитен в Нью-Йорке. Гиппопотамы, крокодилы и прочие фигуры часто появляются на подобных рисунках. Особый интерес данного рисунка состоит в том, что на нем видны

[1]) Рис. 3, *б*) можно рассматривать как развернутую (или цилиндрическую проекцию небесной сферы между склонениями $\pm 60°$ (или $\varphi = 30°$), причем экватор служит осью симметрии.

два этапа работы. Под резко очерченным рисунком просвечивают бледные линии, которые были нарисованы на своде синим цветом. Человек, одна рука которого находится около крокодила, на первоначальном рисунке отсутствовал. Крокодил был нарисован не косо, а горизонтально. Его следы еще видны около ступни и ног стоящего человека. Лев, который теперь находится на ступень выше, лежал параллельно крокодилу. Видна еще нижняя линия льва, пересекающая плечо косо лежащего крокодила. Голова льва была на плече человека, передние лапы льва — справа от его пояса. Эти детали представляют интерес, так как они определенно показывают, что размещение астрономических украшений потолка определялось художественными принципами. Поэтому попытка найти на небе группы звезд, расположение которых совпадало бы с расположением нарисованных созвездий, является безнадежной. В этих документах нигде серьезно не соблюдали астрономическую точность.

В могилах Рамзесов VI, VII и IX появляется новый тип астрономических текстов. Здесь мы находим описания наблюдений, которые нужно произвести для определения часа ночи на протяжении года. Для первого и 16-го дня каждого месяца мы видим рисунок сидящего человека (табл. 11) и над ним (или, скорее, за ним) сетку координат со звездами. В сопровождающей надписи для начала ночи и для каждого из ее 12 часов указывается определенная звезда и место, где она будет видна: «над левым ухом», «над правым ухом», «над левым плечом» или «правым плечом» и т. д.

Горизонтальные линии в сетке координат представляют часы, вертикальные линии — положения. Звезды расположены так, как сказано в тексте, во всяком случае в принципе, за исключением бесчисленных ошибок, совершенных мастером. Очевидно, здесь мы имеем дело со значительно более совершенным методом измерения времени, чем в гробницах Среднего Царства. Правда, эти тексты механически копировались на протяжении значительно более длинных периодов, чем то время, в течение которого они оставались правильными. Много усилий было затрачено на идентификацию этих новых списков звезд, часто без учета того, что содержание текстов с чисто филологической точки зрения не было точно установлено, поскольку имевшиеся копии были сделаны в ранний период египтологии, часто без сравнения с вариантами других копий и родственных текстов. Только новое издание всех этих материалов может обеспечить нужную базу для их изучения.

41. С периодом Птолемеев египетская астрономия меняет свой характер. Совсем новый элемент, греко-вавилонский зодиак, появляется на памятниках. Своды эллинистических храмов, сооруженных и реставрированных птолемеевскими царями и римскими императорами, поистине представляют собой хаотическое смешение астромифологии и астрологии эллинистического периода.

Начиная со второго века до н. э. попадаются также астрономические (или, точнее, календарные) и астрологические папирусы, написанные по-гречески или демотически или на обоих языках. Самые ранние демотические и греческие гороскопы были написаны около начала нашей эры. Найдены также чисто «астрономические» тексты, написанные иногда демотически, иногда по-гречески. Мы имеем тексты, касающиеся планет от времен Августа и до Адриана. В них указаны даты, когда планета входит в знак зодиака. Эти тексты основаны на вычислениях, а не наблюдениях; последнее видно из того факта, что вступление в знак зодиака отмечено и для тех дат, когда планета находится в соединении с Солнцем и потому невидима. Другой текст римского периода, написанный демотически, несомненно, воспроизводит более старый египетский метод, возможно, не затронутый эллинистическим влиянием. Мы уже упоминали ранее, что наряду со стандартным гражданским 365-дневным календарем с древнейших времен употреблялся и лунный календарь. Одна из надписей Среднего Царства упоминает «большие» и «малые» годы, и мы теперь знаем, что «большие» годы — это гражданские годы, содержавшие 13 праздников новолуния, в противоположность обыкновенным «малым» годам с 12 новолуниями. Каким путем регулировались эти вставки, во всяком случае в позднейший период, видно из упомянутого демотического текста.

Этот демотический текст содержит простую периодическую схему, основанную на том факте, что 25 египетских гражданских лет (содержащие 9125 дней) почти равны 309 лунным месяцам. Эти 309 лунных месяцев сгруппированы в нашем тексте в 16 обычных лет по 12 лунных месяцев и 9 «больших» лет по 13 месяцев. Как правило, два последовательных лунных месяца в нашей схеме содержат 59 дней, очевидно, потому, что один лунный месяц близок к 29 1/2 дням. Только каждый пятый год два последних месяца составляют 60 дней. Это дает для всего 25-летнего цикла правильный итог в 9125 дней.

Таким образом, египтяне имели чрезвычайно удобную схему для определения по простому правилу дат всех лунных праздников, схему, которая в течение многих столетий не могла привести к сколько нибудь серьезной ошибке, хотя отдельное новолуние или полнолуние могло отклониться на $\pm$ 2 дня или, быть может, даже больше. Очевидно, египтяне были вполне довольны своей схемой, также как в средние века удовлетворялись еврейским и христианским календарями, основанными на периодической схеме, приводившей к таким же серьезным отклонениям от действительности.

Резюмируя, можно сказать, что из почти трех тысячелетий египетской письменности только эллинистический и римский периоды оставили нам тексты, имеющие дело с численным предсказанием астрономических явлений. Никакие более ранние астрономические документы не содержат математических элементов; они являются примитивными схемами наблюдения, частично религиозного, частично практического назначения. Древняя наука была результатом деятельности очень ограниченного числа людей, и эти немногие люди не были египтянами.

## *БИБЛИОГРАФИЯ К ГЛАВЕ IV*

Наши знания о египетской математике в первую очередь основаны на текстах, написанных в эпоху Среднего Царства или в период Гиксосов:

1. Математический папирус Ринда, опубликованный впервые Эйзенлором в 1877 г. Современная публикация принадлежит Т. Е. Питу, Лондон, 1923; дополнительный материал и фотографии см. в книге Chace—Bull—Manning—Archibald, The Rhind Mathematical Papyrus, Oberlin, Ohio, I, 1927, II, 1929.

2. Московский математический папирус, опубликованный В. Струве в Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, сер. A, т. I (1930).

3. Папирус Берлин 6619. Опубликован Шак-Шакенбургом (Schack—Schackenburg, Zeitschr. f. aegyptische Sprache, 38 (1900), стр. 135 и след., и 40 (1902), стр. 65 и след).

4. Папирус Кахун. Опубликован Гриффитом (G. T. Griffith, Hieratic Papyri from Kahun and Gurob, London, 1848, табл. VIII и стр. 15 и след.)

5. Кожаный свиток Британского музея 10250. S. R. K. Glanville в J. Egyptian Archeology, 13 (1927), стр. 232 и след.

6. Деревянные таблички, Каир, 25367 и 25368. Recueil de travaux relatifs à la philologie et á l'archéologie égyptiennes, 28 (1906), стр. 62 и след. и Catalogue générale... du Musée du Caire, Ostraca, 1901, табл. 62—64 и стр. 95 и след.

Для позднего периода следует добавить демотические папирусы. Один большой демотический текст был найден в Туна эль Габаль, согласно Illustr. London News, 104 (1939), стр. 840 и Chronique d'Égypte 14 № 28 (1939), стр. 278. Никакой информации об этом тексте получить не удалось. Фрагменты геометрического демотического текста имеются в Карлсбергской коллекции университета в Копенгагене, которые должен издать А. Вольтен [1]).

Греческие папирусы очень тесно связаны с египетскими текстами. Об этих материалах см. André Deleage, Les cadastres antiques jusqu'a Dioclétien, Études de papyrologie, 2 (1934), стр. 73—228. K. Vogel, Beiträge zur griechischen Logistik I. Sitzungsber. d. Bayerischen Akademie der Wissensch., Math.-nat. Abt., 1936, стр 357—472. См. также Mitteilungen aus der Papyrussammlung der Nationalbibliothek in Wien, Griechische literarische Papyri I (1932) [Gerstinger, Vogel].

В папирусах обнаружено большое число геометрических и арифметических задач. Систематическое изучение этих разрозненных материалов представило бы интерес. Я упоминаю только особенно большие таблицы умножения для дробей, относящиеся к четвертому веку, опубликованные под № 146 в Michigan Papyri, т. III (1936). Сохранилось много меньших таблиц, как на греческом языке, так и в демотической записи.

Превосходное краткое описание египетской математики дано Питом (T. E. Peet, Bull. John Rylands Library, 15, 1931). Подробный анализ арифметических методов, принадлежащий автору настоящей работы, можно найти в Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, ser. B, т. 1 (1930), стр. 301—380; о геометрии см. стр. 413—451.

Для более глубокого понимания предпосылок, определивших характер египетской математики, большую пользу принесет изучение следующих работ: Lucien Lévy-Bruhl, Fonctions mentales dans les sociétés inférieures

---

[1]) После кончины А. Вольтена этот труд принял на себя Р. Паркер. (*Прим. ред.*)

(1922); Heinrich Schaefer, Von aegyptischer Kunst (1919), и Kurt Sethe, Von Zahlen und Zahlworten (см. стр. 38).

Общие работы по Египту: J. H. Breasted, A History of Egypt, New York, Scribner; A. Erman, The Literature of the Ancient Egyptians; Poems, Narratives and Manuals of Instruction, from the Third and Second Millenia B. C., New York, E. P. Dutton, 1927. Египетская математика описана в книге O. Neugebauer, Vorgriechische Mathematik, Berlin, Springer, 1934 (цит. как «Vorlesungen»). Современных работ по египетской астрономии нет. Р. А. Паркером и автором готовится издание всех доступных египетских астрономических текстов[1]). О литературе, касающейся специальных вопросов, см. примечания к п. 39 и след[2]).

## *ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ГЛАВЕ IV*

к 36. Детальный анализ таблицы для $2/n$ из папируса Ринда дан в моей книге «Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung», Berlin, Springer, 1926. Эта теория резюмирована в моих «Vorlesungen», стр. 137 и след.[3]). Другие варианты были предложены ван-дер-Варденом (van der Waerden, «Die Entstehungsgeschichte der aegyptischen Bruchrechnung», Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, ser. B, т. 4, 1937, стр. 359—382[4]).

к 37. Как указано в тексте, уже в Новом Царстве мы находим исключение из правил папируса Ринда для удвоения единичных дробей. Хейс (William C. Hayes, Ostraca and Name Stones from the Tomb of Sen-Mut (№ 71) at Thebes, The Metropolitan Museum of Art, Egyptian Expedition [Publications № 15], New York, 1942) опубликовал табличку (№ 153), которая содержит следующее вычисление[5]):

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $\overline{7}$ | | | | (черн.) |
| · | 3 | | | | (красн.) |
| 2 | $\overline{6}$ | | $\overline{14}$ | $\overline{21}$ | (черн.) |
| 3 | $\overline{2}$ | 1 | $\overline{2}$ | 1 | (красн.) |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 4 | $\overline{2}$ | | $\overline{14}$ | (черн.) |
| 10 | $\overline{2}$ | 1 | $\overline{2}$ | (красн.) |

---

1) См. O. Neugebauer and Richard A. Parker, Egyptian Astronomical Texts, I. The Early Decans, London, 1960. За это время появилась также новая фундаментальная книга по истории астрономии на Древнем Востоке B. L. van der Waerden, Die Anfänge der Astronomie (= Erwachende Wissenschaft, II), Groningen, 1966. (*Прим. ред.*)

2) Более высокую оценку математики древних египтян в целом дал М. Я. Выгодский в своей книге «Арифметика и алгебра в древнем мире», «Наука», 1967. (*Прим. ред.*)

3) В русском переводе «Лекций...» Нейгебауера — стр. 165—184. (*Прим. ред.*)

4) См. краткое изложение в русском переводе книги Ван-дер-Вардена, указанной на стр. 90 (стр. 30.) Другие объяснения египетской таблицы разложений для дробей $2/n$ предложены М. Я. Выгодским («Арифметика и алгебра в древнем мире», «Наука», 1967); С. А. Яновской («К теории египетских дробей», Труды Института истории естествознания, т. I, 1947, стр. 269—282) и И. Н. Веселовским («Египетская наука и Греция», Труды Института истории естествознания, т. II, 1948, 426—498). (*Прим. ред.*)

5) Реставрация первоначальной задачи, данная Хейсом, представляется мне очень сомнительной. В первой строчке можно уверенно прочесть только $\overline{3}\ \overline{14}\ \overline{2}\ \overline{21}$ и я не вижу никакого основания для восстановления слов «локоть, ладонь (?)» в начале. Четыре дроби, очевидно, составляют две пары, но мне непонятно их отношение к последующим операциям.

где числа под основными строчками написаны красным цветом. Очевидно, что мы здесь имеем дело с умножением дроби $\overline{7}$. Стандартное вычисление имело бы вид

| | |
|---|---|
| 1 | $\overline{7}$ |
| 2 | $\overline{4}\ \overline{28}$ |
| 4 | $\overline{2}\ \overline{14}$ |

Итак, мы видим, что в табличке применяется другое (более сложное) выражение для удвоенного числа $\overline{7}$. Анализ этого разложения полезен для понимания метода, изложенного в тексте. Стандартное разложение состояло бы в выделении естественной дроби $\overline{4}$ от $\overline{7}$ и определении дроби, остающейся для 2—$\overline{4}$ от $\overline{7}$. Последняя равна $\overline{4}$.

В данной табличке мы находим «вспомогательные числа», написанные красным под дробями. Под $\overline{21}$ стоит 1. Это значит, что $\overline{21}$ введено в качестве новой единицы; поэтому под $\overline{7}$ мы находим 3. Это показывает, что мы имеем дело не с естественной дробью $\overline{4}$ из последовательности $\overline{2}$, $\overline{4}$, ..., а с дробью $\overline{3}$ из последовательности $\overline{\overline{3}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$, ... Итак, в качестве одного члена мы получаем $\overline{21}$, и должны найти остаток, который получается умножением $\overline{7}$ на 2—$\overline{3}$=1 $\overline{\overline{3}}$. Мы уже знаем, что $\overline{\overline{3}}=\overline{2}\ \overline{6}$. Таким образом, нужно умножить $\overline{7}$ на 1 $\overline{2}$ $\overline{6}$. Здесь опять нужно ввести вспомогательные числа, считая $\overline{6}$ за 1, что приводит к

| | | |
|---|---|---|
| / | 1 | 6 |
| | $\overline{2}$ | 3 |
| / | $\overline{6}$ | 1 |

Если мы возьмем здесь первый и последний член, то получим 7 новых единиц. Итак, мы видим, что 1 $\overline{6}$ от $\overline{7}$ есть $\overline{6}$. Остается $\overline{2}$ от $\overline{7}$, что составляет $\overline{14}$. Значит, мы нашли для остатка выражение $\overline{6}\ \overline{14}$, и для всей удвоенной дроби $\overline{7}$

$$\overline{6}\ \overline{14}\ \overline{21}$$

Приведенное вычисление показывает, как важно начать с правильной естественной дроби. Использование $\overline{4}$ приводит к двучленному выражению, тогда как использование $\overline{3}$ вынуждает нас к трехчленному разложению. Я уверен, что египтяне никогда не понимали скрытых причин делимости, а просто действовали путем испытаний и ошибок. Читатель может найти приведенное выше объяснение очень громоздким и гипотетичным. Только систематическое изучение имеющихся примеров может дать нужные навыки, с тем чтобы этот тип арифметических правил стал действительно привычным. Полезной иллюстрацией является группа задач из математического папируса Ринда, которые я подробно проанализировал в моих «Vorlesungen», стр. 139 и след. К счастью, в этих примерах мы также имеем дело с дробью $\overline{7}$ и ее долями и в большинстве случаев все вспомогательные числа, помогающие «умножать» дроби, сохранились.

к 39. О египетском исчислении времени см. K. S e t h e, Die Zeitrechnung der alten Aegypter im Verhältnis zu der der andern Völker. Nachr. d. K. Gesellschaft d. Wissensch. zu Göttingen, Phil.-hist. Kl. 1919 и 1920. Также L. B o r c h a r d t, Die altägyptische Zeitmessung, Berlin, De Gruyter, 1920. О египетском лунном календаре см. R. A. P a r k e r, The Calendars of Ancient Egypt, University of Chicago Press, 1950.

О позднейшей истории деканов см. W. G u n d e l, Dekane und Dekansternbilder, Studien d. Bibliothek Warburg, 19 (1936).

к 39а. О возникновении египетского календаря см. O. N e u g e b a u e r, Die Bedeutungslosigkeit der «Sothis-periode» für die älteste ägyptische Chronologie, Acta Orientalia, 17 (1938) и The Origin of the Egyptian Calendar, J. Near Eastern Studies, 1 (1942). Также H. E. W i n l o c k, The Origin of the Ancient Egyptian Calendar, Proc. Amer. Philos. Soc., 83 (1940) и цитированная в предыдущем разделе книга П а р к е р а.

«Диагональные календари» были впервые рассмотрены в статье A. P o g o, Isis 17 и 18 (1932) и Osiris, 1 (1936). Определение положения деканов по периоду их невидимости дано Н е й г е б а у е р о м в книге «Vistas in Astronomy» (изд. Arthur B e e r), т. 1, стр. 47—51, London, 1955. О гробнице Сенмута см. A. P o g o, Isis, 14 (1930).

О гробнице Сети см. публикацию Х. Франкфорта (H. F r a n k f o r t) в Memoir 39 of the Egypt Exploration Society (2 vols.), London, 1933. Дискуссию об астрономическом своде см. в книге Л а н г е — Н е й г е б а у е р а, цит. выше на стр. 81 в примечании к п. 29.

Вызывающий большое недоумение текст из рамессидского папируса (содержащий счастливые и несчастные дни), опубликован в работе J. Č e r n ý, Annales du Service des Antiquités de l'Egypte, 43 (1943), стр. 179 и след. Там мы находим схему для определения продолжительности дня и ночи из месяца в месяц по линейному закону от минимума в 6 часов и до максимума в 18 часов. Другая схема изменений продолжительности дня рассматривается в работе J. J. C l è r e, Un texte astronomique de Tanis, Kêmi, 10 (1949), стр. 3—27.

к 41. О таблицах планет см. O. N e u g e b a u e r, Trans. Amer. Philos. Soc., N. S., 32 (1942) с дополнениями в работе K n u d t z o n — N e u g e b a u e r, Zwei astronomische Texte, Bull. de la soc. royale des lettres de Lund 1946—1947, стр. 77 и след. Дискуссию см. в работе v a n d e r W a e r d e n, Egyptian «Eternal Tables», Koninkl. Nederl. Akad. van Wetensch., Proc. 50 (1947), стр. 536 и след. и стр. 782 и след.

Датирование четырех из этих таблиц планет было связано с необычным инцидентом, который стоит упомянуть в качестве примера того, как может возникнуть совершенно невероятная комбинация и привести затем к неверным выводам. Четыре таблицы, о которых идет речь, написаны на деревянных табличках, которые первоначально были скреплены вместе, как страницы в книге, при помощи шнурка, продернутого сквозь дырочки на одной стороне деревянной рамки (см. табл. 13, где показана табличка II). Эти таблички были впервые опубликованы в 1856 г. Бругшем, одним из крупнейших пионеров египтологии. В каждой табличке упоминаются чьи-то годы царствования, и естественно было расположить таблички в соответствии с этими годами, идущими друг за другом, как показано ниже:

Табличка I-годы с 9 по 15,
Табличка II-годы с 16 по 19 и с 1 по 3,
Табличка III-годы с 4 по 10,
Табличка IV-годы с 11 по 17.

Поскольку тексты явно были написаны в римский период, Бругш пришел к заключению, что первым правителем должен быть Траян, царствовавший 19 лет, чьим преемником был Адриан, правивший более 17 лет. Оказалось, однако, что эти выводы правильны только для табличек I, II и IV. Сопоставление астрономических данных сразу показывает, что табличка III не может быть ни продолжением таблички II, ни предшественницей таблички IV [1]). Действительно, легко показать, что годы «с 4 по 10» являются годами не Адриана, а Веспасиана, правившего за 30 лет до Траяна. Таким образом, по чисто случайному совпадению может показаться, что табличка III располагается между табличками II и IV. Подобные случаи при историческом исследовании могут иметь место чаще, чем мы думаем, и не обнаруживаться просто потому, что строгая астрономическая проверка неприменима.

25-летний цикл был обнаружен в демотическом папирусе № 9 из Карлсбергской коллекции, опубликованном О. Н е й г е б а у е р о м и А. В о л ь т е н о м в Quellen und Studien zur Geschichte d. Mathematik, ser. B, т. 4.

---

[1]) Это было правильно отмечено в статье William E l l i s, Memoirs Roy. Astron. Soc., 25 (1857), стр. 112 ,но, как ни странно, Эллис не определил правильно дату таблички III.

(1938). Этот 25-летний цикл был хорошо известен и часто использовался в стической астрономии. Птолемей, например, в соответствии с ним расположил свои таблицы сизигий [1]) («Альмагест», VI, 3).

Не следует думать, что «25-летний цикл», о котором идет речь, играет ту же роль, что и ранее упомянутый «19-летний цикл» (или «цикл Метона», см. стр. 22). В первом случае 25 лет — это годы египетского календаря ровно по 365 дней каждый. Во втором случае годы являются тропическими годами, т. е. интервалами времени, определенными астрономически и включающими дробные части дней. Первый цикл содержит 309 средних лунных месяцев, и к концу его тот же самый египетский гражданский день снова приходится на новолуние или полнолуние. Во втором цикле через 235 средних лунных месяцев эта лунная фаза снова приходится на тот же день года, но от местного календаря зависит, совпадут ли даты по календарю. Поскольку греческие астрономы в своих таблицах постоянно оперировали египетским календарем, то им было значительно удобнее пользоваться 25-летним циклом.

Среди громадного количества письменных документов Древнего Египта мы имеем только одно сомнительное указание на частное солнечное затмение в 610 г. до н. э. — если допустить, что интерпретация текста правильна (см. статью W. Erichsen, Akad. d. Wiss. u. Lit. Mainz, Abh. Geistes-u. Soz. Wiss., 1956, № 2) [2]). В «Альмагесте» нет упоминания ни об одном египетском наблюдении, хотя Птолемей дает обширные ссылки на прежние наблюдения, на которых базируется его теория. Имеется одно коптское сообщение о затмении в 601 г. н. э. (!), впервые опознанное Краллом (Krall) и Гинцелем (Ginzel) (S. B. Akad. d. Wiss. Wien, math.-nat. Cl. 88, 2, 1883, стр. 655) и затем Алленом (E. B. Allen, J. Amer. Oriental Soc. 67, 1947, стр. 267).

Добавление. Читателю, может быть, не хватает упоминания об астрономическом или математическом значении пирамид. Действительно, вокруг «загадок» этих построек, по крайней мере одной из них, пирамиды Хуфу (или «Хеопса») была воздвигнута целая литература. Предполагалось, что в размерах и расположении этого сооружения выражены важные математические константы, например, точное значение числа $\pi$ и глубокие астрономические сведения. Эти теории полностью противоречат всем данным археологии и египтологии, касающимся истории и назначения пирамид. Читателю, желающему посмотреть превосходный обзор этих вопросов, следует ознакомиться с работами Уилера (Noel F. Wheeler, Pyramids and their Purpose, Antiquity 9, 1935, стр. 5—21, 161—189, 292—304 и Борхардта (L. Borchardt, Gegen die Zahlenmystik an der grossen Pyramide bei Gise, Berlin, 1922).

Об очень сложных исторических и археологических проблемах, связанных с пирамидами, см., например, работы Лауера (J. P. Lauer, Le problème des pyramides d' Égypte, Paris, 1948) и Эдвардса (I. E. S. Edwards, The Pyramids of Egypt, Penguin Books, 1952). Как мало известно о значении и расположении комнат и коридоров внутри пирамид, особенно хорошо видно на примере «наклонной пирамиды» в Дахшуре; см. отчет о последних раскопках Фахри (A. Fakhry) в Annales de Service des Antiquités de l' Égypte, 51 (1954), стр. 509 и след. и 52 (1955), стр. 563 и след.

---

[1]) Сизигии — общее название моментов соединений и противостояний Луны или планет с Солнцем. (*Прим. ред.*)

[2]) Как будет показано в подготавливаемой публикации Каминоса в рассказе Осоркона (девятый век до н. э.) нет речи о фактическом затмении. [Caminos Ricardo, The Chronicle of prince Osorkon. Roma, Pontificium Institutum Biblicum, 1958, XXIV. (*Прим. ред.*)]

## ГЛАВА V

# ВАВИЛОНСКАЯ АСТРОНОМИЯ

42. Вряд ли существует в истории науки другая глава, в которой имелось бы столь глубокое расхождение между общепринятым представлением об эпохе и заключениями, которые постепенно вырисовываются при детальном исследовании первоисточников. Корни этого расхождения уходят далеко назад к эллинистическому традиционному взгляду на «вавилонян» или «халдеев», которые бесчисленное количество раз упоминаются в древних произведениях, особенно в астрологической литературе. В результате магия, числовой мистицизм, астрология обычно считались ведущими силами в вавилонской науке. В части, касающейся математики, эти идеи были решительно пересмотрены после расшифровки математических текстов в 1929 г. Более 70 лет назад такой же точно пересмотр во взгляде на вавилонскую астрономию был сделан в результате открытий Эппинга и Куглера. Благодаря работе этих ученых, очень скоро стало ясно, что в вавилонской астрономии главную роль играла математическая теория, по сравнению с которой роль наблюдений была весьма скромной; легендарная точность наблюдений также все более и более оказывалась мифом. Одновременно и возраст вавилонской астрономии пришлось определять заново. Оказалось, что ранняя астрономия Месопотамии была незрелой и чисто качественной, совершенно так же, как и современная ей египетская астрономия. Не ранее, чем после ассирийского периода, становится заметен поворот к математическому описанию, и только последние три века до н. э. снабдили нас текстами, основанными на последовательной математической теории движения Луны и планет. Самый поздний астрономический текст был изучен недавно Саксом и Шаумбергером и датирован 75 годом н. э. Эти поздние теории, однако, оказались на очень высоком уровне; они вполне сравнимы с соответствующими греческими системами и носят подлинно математический характер. В то же время пришлось согласиться с тем, что нам почти ничего не известно о подробностях гороскопической астрологии в Месопо-

тамии, в полную противоположность подавляющему количеству астрологических документов, дошедших до нас от эллинистического Египта и римского и византийского периодов.

Наконец, компетентными наблюдателями было неоднократно замечено, что почти вошедшая в поговорку яркость вавилонского неба скорее является литературным штампом, чем действительным фактом. Близкая пустыня с ее песчаными бурями часто затемняет горизонт. Это особенно важно, так как большинсто проблем, интересовавших вавилонских астрономов, связано с явлениями, происходящими близко к горизонту. Лунный календарь требует наблюдения первого видимого появления нового серпа Луны над западным горизонтом. Последнее видимое наблюдение Луны происходит у восточного горизонта. Исчезновение и появление планет происходит близко к горизонту и, по-видимому, «противостояние» планет также определялось по их восходу или заходу одновременно с заходом или восходом Солнца. Только для затмений и покрытий звезд Луной можно обычно ожидать благоприятных условий. Несомненно, этим объясняется утверждение Птолемея, что имеется практически полный список затмений со времен Набонассара (747 г. до н. э.); в то же время он сетует на отсутствие надежных данных о наблюдениях за планетами. Он отмечает, что старые наблюдения производились некомпетентно, потому что они касались появления и исчезновения планет и точек стояния — явлений, которые по своей природе трудно поддаются наблюдению. Интересно отметить, что это точное описание вавилонских наблюдений за планетами, сделанное компетентным астрономом, не оказало почти никакого влияния на распространенную оценку вавилонской астрономии, в то время как неопределенные, но частые упоминания эллинистических астрологов о халдейской мудрости полностью определили представление о халдейской астрономии, которое сложилось в последующие столетия.

**43.** Наше описание вавилонской астрономии не будет полным. Историческое развитие будет дано в общих чертах. Как и в случае Египта, детальный анализ немногих сохранившихся ранних текстов не только потребовал бы слишком много места, но и незаслуженно преувеличил бы их историческое значение. В отношении позднейшего периода, наоборот, имеет место противоположное положение. Имеется очень большое число текстов эпохи Селевкидов, и только подробный и глубокий специальный анализ может воздать должное математическим и астрономическим достижениям этого периода. Очевидно, это невозможно сделать в рамках данной работы.

Мы начнем наш обзор с краткого описания раннего периода развития. Затем, прежде чем перейти к анализу периода Селевкидов, необходимо будет сделать несколько замечаний о первоисточниках и их происхождении. Наш очерк математической астрономии эллинистического периода мы начнем с описания теории движения Солнца и Луны, потому что эта теория, несомненно, является наиболее характерным достижением вавилонской астрономии. Затем будет кратко изложена теория планет в той мере, в какой она содержит существенно новые идеи, выходящие за пределы тех методов, с которыми мы познакомимся в теории движения Солнца и Луны. В заключение мы коснемся немногих известных нам фактов о той среде, в которой эти тексты были созданы.

44. Начиная наш исторический очерк с отрицательного утверждения, мы можем сказать, что о шумерской астрономии ничего не известно. Мифологические представления о небесах, обожествление Солнца, Луны или Венеры не могут быть названы астрономией, так же как нельзя считать гидродинамикой веру в божественность шторма или воплощение реки. Названия хорошо заметных звезд или созвездий также не составляют астрономическую науку.

Одним из наиболее ранних документов с определенно астрономическим содержанием является табличка из коллекции Хильпрехта в Иене (ГДР). Текст, возможно, был написан в касситский период, но он представляет собой копию более раннего оригинала. Его формулировки очень напоминают знакомый тип древневавилонских математических текстов. Документ начинается с перечня чисел и имен, который можно перевести следующим образом: «19 от Луны до Плеяд; 17 от Плеяд до Ориона; 14 от Ориона до Сириуса» и так далее для восьми звезд или созвездий, после чего говорится, что общее число (чего?) есть 120 «миль», и задается вопрос «как далеко один бог (т. е. звезда) от другого бога?» Затем начинается «процедура», точно так же, как и в математическом тексте. Она состоит в делении каждого из данных чисел на их сумму, равную 1,21, — значению, хорошо нам знакомому по стандартной таблице обратных величин,в которой оно является последним (см. стр. 46). Каждый из полученных результатов превращается в «мили» и низшие единицы длины и рассматривается как расстояние от одного из ранее перечисленных небесных тел до следующего. Текст заканчивается обычными словами «такова процедура» и именами писца, переписавшего текст, и того, кто проверял копию.

Этот текст и несколько сходных фрагментов, по-видимому, отражают представление о Вселенной как о совокупности восьми разных сфер, начиная со сферы Луны. Эта модель, очевидно, принадлежит к очень ранней стадии развития, от которой не сохранилось никаких следов в позднейшей астрономии, не опиравшейся, по-видимому, ни на какую физическую модель. Следует, впрочем, подчеркнуть, что интерпретация этого текста из Ниппура и параллельных ему текстов далеко не надежна.

В другой группе текстов, возможно, относящихся к тому же времени, небо делится на три зоны по 12 секторов. Каждая зона содержит названия созвездий и планет и небольшие числа, следующие в арифметической прогрессии, например 1  1,10  1,20 и т. д. до 2 и затем снова 1,50  1,40 и т. д. до 1. Это, возможно, — самое раннее упоминание арифметической схемы, которая позднее развилась в важное средство для описания периодических явлений, так называемые зигзагообразные функции. В рассматриваемом случае числа настолько просты и столь схематичны, что можно предложить много различных истолкований, одинаково хорошо или одинаково плохо объясняющих эту последовательность. Заслуживает упоминания и другая группа ранних документов, содержащая самые ранние сведения о фактических наблюдениях в Месопотамии. В них для нескольких лет царствования Аммисадука зарегистрированы появления и исчезновения Венеры. Поскольку даты в них даны в лунном календаре того времени, эти документы стали важным элементом в определении хронологии периода Хаммурапи. С чисто астрономической точки зрения эти наблюдения не очень интересны. Вероятно, их производили для того, чтобы собрать эмпирический материал для предзнаменований; важные события в жизни государства сопоставлялись с важными небесными явлениями, точно так же как специфический вид печени жертвенной овцы тщательно записывался в литературе о приметах. Итак, уже в этот ранний период мы находим первые признаки того развития, которое столетия спустя привело к официальной астрологии, и наконец, к персональной, или гороскопной, астрологии эллинистической эпохи.

Трудно сказать, когда и как развились небесные предзнаменования. Существующие тексты являются частью больших серий; наиболее важная из них называется по начальной фразе «Энума Ану Энлил», аналогично папским буллам в средние века. Эта серия содержит не менее 70 перенумерованных табличек с общим числом около 7000 предзнаменований. Канонизация такой громадной массы предзнаменований должна была продолжаться не менее нескольких столетий и достигла своей окончательной формы, вероятно, около 1000 г. до н. э.

Исторически гораздо интереснее этой массы чисто описательных предзнаменований два текста, называющиеся «мул апин». Наиболее ранние сохранившиеся копии относятся примерно к 700 г. до н. э., но они, несомненно, основаны на более старом материале. Эти тексты содержат сводку астрономических знаний того времени. Первая табличка в основном относится к неподвижным звездам, расположенным в три «дороги», из которых средняя представляет собой экваториальный пояс шириной около 30°. Вторая табличка касается планет, Луны, времен года, длины тени и родственных вопросов. Эти тексты опубликованы не полностью и даже опубликованные их части содержат много неясных деталей. Следующее, однако, совершенно ясно: здесь мы имеем дело с элементарными астрономическими концепциями, все еще чисто описательными по своему характеру, но основанными на чисто рациональных соображениях. Данные этих табличек о восходах и заходах, хотя и все еще в весьма схематичной форме, служат нам главным основанием для отождествления вавилонских созвездий.

Около 700 г. до н. э., во времена Ассирийского царства, мы встречаем систематические записи наблюдений придворных астрономов. Очевидно, небесные предзнаменования приобрели теперь первейшую важность. В этих записях еще нет ясного разграничения между астрономическими и метеорологическими явлениями. Облака и сияния значатся в них наравне с затмениями. Тем не менее уже было установлено, что солнечные затмения возможны только в конце месяца (при новолунии), лунные затмения — в середине месяца. Возможно, в этот период уже было известно классическое правило, по которому лунные затмения отстоят одно от другого на шесть или иногда на пять месяцев. Уместно напомнить здесь утверждение Птолемея о том, что он располагал данными о затмениях со времен Набонассара (747 г. до н. э.).

Очень трудно сказать, когда эта фаза перешла в систематическую математическую теорию. Я предполагаю, что это произошло сравнительно быстро и не ранее 500 г. до н. э. Вплоть до 480 г. до н. э. вставки лунного календаря не обнаруживают никакой системы. Однако столетие спустя, по-видимому, правило о семи фиксированных вставках в течение 19 лет уже вошло в употребление; это правило с тех пор сохранилось в качестве основы всех лунных календарей, ведущих начало от вавилонской схемы, в том числе и средневекового лунного календаря, рассмотренного в первой главе.

Правило лунно-солнечных вставок предполагает знание отношения, указывающего, что $m$ лунных месяцев равны по продолжительности $n$ солнечным годам. В частном случае 19-летнего цикла $m = 235$ и $n = 19$. В предшествующую эпоху «год» представлял собой промежуток иногда из 12, а иногда из 13 месяцев, причем вопрос о вставке 13-го месяца, возможно, решался по состоянию урожая. Наличие же цикла доказывает, что было принято более точное астрономическое определение «года». Мы не можем привести точных данных о средней продолжительности такого года или о том, как она определялась. Есть, однако, достаточные основания, указывающие на то, что отправным пунктом служили наблюдения за летним солнцестоянием. Во всяком случае, именно летние солнцестояния систематически вычислялись, тогда как равноденствия и зимние солнцестояния просто размещались на равных интервалах. Поскольку в период Селевкидов были известны значительно более точные методы, можно предположить, что схема 19-летнего цикла относится к несколько более ранней фазе развития.

Мы увидим, что отношения упомянутого выше типа составляли основу вавилонской математической астрономии: это отношения, утверждающие, что $s$ интервалов одного рода равны $t$ интервалам другого рода. Математическая астрономия полностью развилась, самое позднее, примерно к 300 г. до н. э. 19-летний цикл вставок, бесспорно, был наиболее значительным шагом, предшествовавшим позднейшим астрономическим методам, т. е. методам, развитым примерно после 450 г. до н. э. Приблизительно к тому же периоду, может быть, к четвертому столетию, относится и изобретение зодиака. Созвездия, имена которых были присвоены знакам зодиака, конечно, гораздо старше. Но только чисто математическими соображениями объясняется введение вполне определенного большого круга, разделенного на секторы длиной ровно в 30°, для измерения движения Солнца и планет. Действительно, зодиак вряд ли когда-либо был более чем математической идеализацией, нужной и используемой исключительно для вычислений. Фактические положения светил на небе вплоть до конца периода клинописи указывались по отношению к хорошо известным ярким звездам. Эта примитивная система еще была в употреблении в греческих гороскопах римского периода и совершенно так же, как в вавилонских текстах, существовала наряду с градусами и знаками зодиака.

Мы можем перечислить теперь те средства, которыми располагала вавилонская астрономия к концу своего «доисторического» периода, продолжавшегося примерно от 1800 до 400 г. до н. э. Это зодиак, состоящий из 12 участков по 30 градусов, как стандартная шкала для описания движения Солнца и планет; это фиксированный лунно-солнечный календарь, и, возможно, некоторые основные отношения периодов обращения Луны и планет; это эмпирическое проникновение в последовательность основных планетных и лунных явлений и в изменение продолжительности дня и ночи. Это использование арифметических прогрессий для описания периодически меняющихся величин, и, наконец, это полное владение численными методами, которые сразу могли быть применены к астрономическим задачам. Использование этих возможностей и послужило в действительности решающим шагом.

**45.** Следующий раздел подведет нас к рассмотрению законченной вавилонской теории Луны. Анализ этой теории основан на текстах, значение которых впервые было обнаружено Эппингом и Штрассмайером. В 1881 г. в католическом теологическом журнале «Stimmen aus Maria Laach» появилась статья «Zur Entzifferung der astronomischen Tafeln der Chaldäer» Эппинга из Кито, Эквадор, с введением Штрассмайера из Лондона. Эта статья заключает в себе увлекательный отчет о первых расшифровках астрономических табличек, которые в то время прибывали в Лондон во все возрастающем количестве. Оба автора вполне сознавали значение своих открытий. Действительно, эта первая работа содержала правильное определение начала отсчета эры Селевкидов и начала парфянской эры, что впервые обеспечило солидную хронологическую базу для истории Месопотамии после Александра Великого.

Но еще больше было сделано для понимания самой вавилонской астрономии. Неожиданно стало ясно, что арифметические прогрессии умело использовались для предсказания лунных явлений с точностью до нескольких минут. Были правильно определены названия планет и созвездий зодиака и тем самым открыта дорога для перевода астрономических записей. На десяти страницах Эппинг описал открытия, которые должны были начать новую эпоху в истории науки.

Восемь лет спустя Эппинг опубликовал в приложениях к «Stimmen aus Maria Laach» небольшую книгу «Astronomisches aus Babylon». В ней дается обзор ведущих идей вавилонской теории Луны, а также детальный анализ планетных и лунных альманахов. Эппинг умер в 1894 г. Период первоначальных открытий был завершен монументальными трудами Куглера, опубликованными между 1900 и 1924 гг.

Работы Эппинга и Куглера основаны исключительно на текстах из Британского Музея. В течение многих лет Штрассмайер переписывал там тысячи табличек, большинство которых принадлежит последнему периоду истории Вавилона. Эти копии вносились в записные книжки; типичная страница такой книжки воспроизведена на табл. 14. По инициативе Штрассмайера Эппинг начал изучать штрассмайеровские транскрипции астрономических текстов. Когда расшифровка оказалась удачной, Штрассмайер стал переносить из своих записных книжек астрономические отрывки на отдельные листы, зачастую добавляя пояснительные замечания. Эти листы отсылались затем Эппингу для окончательного исследования, а после смерти Эппинга — Куглеру. Преемник Куглера, Шаумбергер, и я получили основную часть наших текстов из копий Штрассмайера, которые он внес в свои объемистые записные книжки в течение 1880 и 1890 годов. Ни один из этих текстов не был опубликован в официальных изданиях Британского музея, и нет никакой информации о подобных табличках, приобретенных Британским музеем после того, как Штрассмайер перестал их переписывать. Без Штрассмайера, Эппинга и Куглера немногие другие опубликованные до сих пор астрономические тексты, вероятно, были бы отложены в сторону и в других музеях. Очень правдоподобно, что тогда никакие сведения об этих исключительно богатых материалах не проникли бы во внешний мир и вавилонская астрономия до сих пор представала бы перед нами в свете нескольких текстов самых ранних периодов и предзнаменований из Энума-Ану-Энлил. Приведу несколько цифр для иллюстрации. По записным книжкам Штрассмайера и публикациям Куглера было восстановлено около 240 астрономических текстов и фрагментов, которые все, возможно, были найдены в одном и том же архиве в Вавилоне. По инвентарным номерам Британского музея можно сделать заключение, что эти тексты попали в музей между ноябрем 1876 г. и июлем 1882 г. За эти шесть лет число табличек возросло от более 32 000 до свыше 46 000, и можно предполагать, что среди этой массы имеются многие сотни астрономических текстов. Действительно, в 1953 г. стало известно, что Т. Пинчес еще до 1900 г. переписал около 1300 отрывков астрономических текстов. Этот материал был затем предоставлен в распоряжение Сакса, опубликовавшего его с добавлением многих близких по теме отрывков в 1955 г. Таким образом, теперь в нашем распоряжении находится значительная доля древнего архива, по крайней мере в той части, в какой он достиг Британского музея.

**46**. Математические астрономические тексты распадаются на две большие группы: «процедурные тексты» и «эфемериды». Тексты первого класса содержат правила для вычисления «эфемерид», которые в свою очередь похожи на современные «морские альманахи», дающие для определенного года (или определенной последовательности лет) положения Луны или планет через правильные интервалы времени. Если бы «процедурные тексты» были полными, и если бы мы целиком понимали их технический язык, то их было бы достаточно для фактического вычисления эфемерид. В действительности, однако, ни одно из этих условий не выполнено. Для многих шагов сохранившиеся тексты сильно повреждены или полностью отсутствуют; их терминология, по крайней мере для нас, далеко не ясна; и вполне обоснован вопрос, не требовалось ли в дополнение даже к полному комплекту процедурных текстов еще устное объяснение, для того, чтобы их можно было использовать для действительного вычисления эфемерид. В результате главную основу наших исследований составляют сами эфемериды, а процедурные тексты обычно играют роль очень желанного материала для проверки тех правил, которые мы в конце концов извлекаем из готовых эфемерид.

В дальнейшем анализе, однако, мы не будем делать резкого различия между этими двумя группами источников, и будем поступать так, как если бы в нашем распоряжении были ясные правила, хотя на самом деле они часто получены в результате очень сложного перекрестного исследования родственных фрагментов текстов обоих классов.

Число доступных нам астрономических табличек эпохи Селевкидов совсем невелико. Мне известно менее 250 эфемерид, из которых более половины — лунные, остальные планетные. Число процедурных текстов составляет около 70, большая часть из них — мелкие фрагменты. Таким образом, наши знания о вавилонской математической астрономии основаны примерно на 300 табличках. К этому числу можно теперь прибавить около 1000 не математических астрономических текстов Пинчеса —Сакса; потребуется много лет терпеливого труда, прежде чем на основании этого большого разнообразия новых источников можно будет сделать выводы о раннем развитии вавилонской астрономии во всех ее теоретических и практических аспектах.

47. Главная задача вавилонской теории Луны определяется нуждами календаря. Насколько нам известно, вавилонский календарь во все периоды был действительно лунным, иными словами, «месяц» начинался в тот вечер, когда впервые опять был виден новый серп Луны вскоре после захода Солнца. Соответственно и вавилонские «сутки» тоже начинались вечером, и «первое число» месяца было днем первой видимости. Таким образом, начало месяца зависело от естественного явления, доступного прямому наблюдению. Это на самом деле очень простое и естественное определение, такое же простое, как и согласное с ним определение «суток», как времени от одного захода Солнца до другого. Но, как это часто случается, «естественное» определение приводит к исключительно сложным проблемам, как только появляется желание предсказать вытекающие из него следствия. Это обстоятельство отчетливо проявляется в случае лунного месяца. Очень краткий анализ проиллюстрирует возникающие здесь внутренние осложнения.

«Лунный месяц», очевидно, содержит целое число дней. Спрашивается, сколько именно? Легко получить для этого числа грубую оценку. Два последовательных появления нового серпа Луны никогда не разделяются более, чем 30 днями, или менее, чем 29 днями. Тогда немедленно возникает основной вопрос: когда месяц имеет 30 дней и когда 29? Чтобы ответить на этот вопрос, мы должны получить оценку не только лунного, но и солнечного движения. За один год или, грубо говоря, 365 дней, Солнце совершает вокруг нас один оборот; другими словами, Солнце за это время вновь возвращается к той же самой звезде, завершив большой круг в 360°. Таким образом, перемещение солнца за сутки близко к 1°, и поэтому близко к 30° за один месяц. Время от одного новолуния до следующего, очевидно, почти совпадает со временем от одной невидимости Луны до другой. Но Луна бывает невидима потому, что она близка к Солнцу. Итак, месяц измеряется временем от одного «соединения» Луны с Солнцем до другого. За это время Солнце проходит около 30°; Луна же проходит не только 30°, но совершает дополнительно один полный оборот в 360°. Отсюда следует, что примерно за 30 дней она покрывает 390°; это показывает нам, что за сутки Луна должна покрыть около 13°.

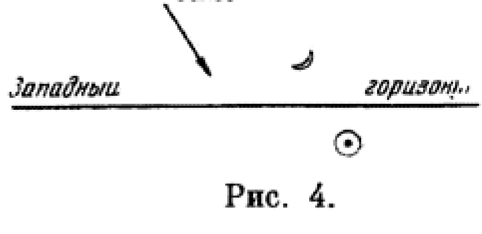



Рис. 4.

Теперь начинаются настоящие трудности. Чтобы первый лунный серп был виден незадолго перед заходом, Солнце должно быть достаточно далеко под горизонтом (рис. 4). В предыдущий вечер Луна была еще слишком близка к Солнцу, чтобы быть видимой. Следовательно, нужно определить расстояние между Солнцем и Луной, необходимое для обеспечения видимости.

Расстояние, очевидно, зависит от относительной скорости двух тел.

Мы нашли, что Луна за сутки проходит 13°, а Солнце 1°; таким образом, искомое расстояние, так называемая «элонгация», возрастает примерно на 12° в сутки. Но эта оценка уже недостаточно точна для ответа на вопрос, когда будет достигнута нужная элонгация. Ни Солнце, ни Луна не движутся с постоянной скоростью. Поэтому элонгация может изменяться примерно от 10 до 14° за сутки.

Отсюда видно, что наша задача требует детального знания вариаций скорости Солнца и Луны.

Но даже если бы мы знали изменения скорости обоих тел, проблема видимости еще не была бы решена. В данном месте Земли все звезды восходят и заходят под постоянным углом, который определяется наклоном экватора к горизонту. Относительное движение, о котором мы говорили раньше, — это движение по эклиптике, составляющей с экватором угол примерно в 24°. Следовательно, нам нужно знать, как меняется угол между эклиптикой и горизонтом. Для Вавилона этот угол меняется примерно от 30 до 80° (рис. 5). Таким образом, одна и та же элонгация приводит к совершенно различным условиям видимости в разные времена года.

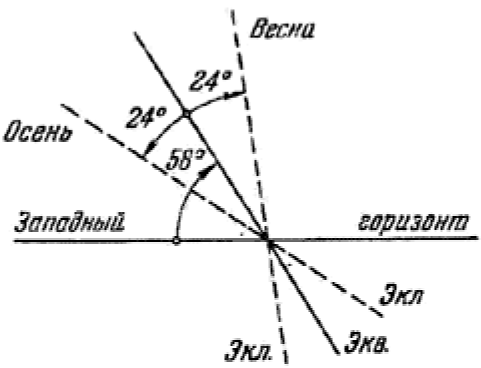



Рис. 5.

Допустим, что мы имеем удовлетворительный ответ на вопрос об изменении угла между эклиптикой и горизонтом. Тогда нам следует еще учесть, что только Солнце движется по эклиптике, а Луна периодически отклоняется от нее по «широте» в пределах

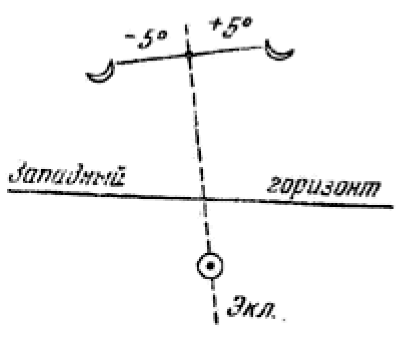



Рис. 6.

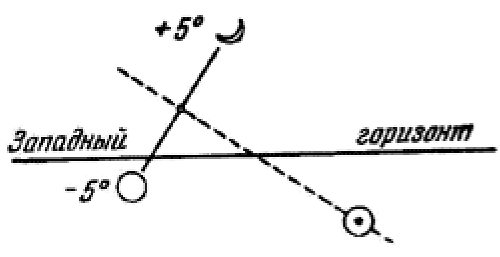



Рис. 7.

примерно от $+5°$ до $-5°$. Это отклонение измеряется перпендикулярно к эклиптике. Когда эклиптика почти вертикальна к горизонту (как бывает весной), широта оказывает сравнительно небольшое влияние на видимость (рис. 6). Осенью, наоборот, влияние широты, приближающей или удаляющей Луну от горизонта ощущается полностью (рис. 7). Таким образом, нужно знать еще колебания лунной широты.

Все эти факторы действуют независимо один от другого и ведут к совершенно нерегулярным колебаниям продолжительности лунных месяцев. Одно из самых блестящих достижений точных наук древности состояло в осознании независимости этих влияний и в развитии теории, позволяющей предвидеть их совместный эффект.

Эппинг, Куглер и Шаумбергер действительно показали, что лунные эфемериды периода Селевкидов во всех существенных чертах следовали приведенному выше анализу.

Прежде чем обратиться к описанию этих эфемерид, заметим, что решение задачи о первой видимости легко позволяет ответить и на некоторые другие вопросы, также представляющие большой интерес.

Как только становятся известными законы, определяющие изменения скоростей Солнца и Луны, так, прежде всего, можно легко установить ежедневные положения Солнца и Луны. Поэтому неудивительно, что были найдены таблицы суточного движения Солнца или Луны. Во-вторых, применяя те же самые рассуждения к восточному горизонту и восходу Солнца и Луны, можно решить задачу о последней видимости Луны. Наконец, определение моментов первой и последней видимости требует предварительного знания моментов соединения, которые приходятся на середину интервала невидимости. Совершенно те же соображения приводят к вычислению моментов противостояния. Если мы сопоставим эти сведения с правилами, определяющими широту Луны, то мы сможем ответить на вопрос, когда Луна во время противостояний или соединений будет близка к эклиптике. В первом случае можно ожидать лунного затмения, во втором — солнечного затмения. Таким образом, от вычисления новолуний один лишь логический шаг ведет к таблицам затмений, которые, как мы обнаруживаем, были выведены из эфемерид.

Я надеюсь, что этого беглого обзора основных результатов и проблем теории движения Луны достаточно, чтобы дать представление о внутренней последовательности и истинно математическом характере этой теории. Последующее обсуждение некоторых деталей должно не только осветить отдельные шаги, но также и проиллюстрировать сделанное раньше замечание о том, что нигде в этой теории не видно никаких следов специальной геометрической модели.

48. Основным средством вычисления эфемерид является арифметическая прогрессия с постоянной разностью, возрастающая или убывающая между фиксированными пределами.

Для примера мы предлагаем следующий отрывок из трех первых столбцов эфемерид для 179 года эры Селевкидов, т. е.

для 133/134 г. до н. э.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | XII₂ | 28,55,57,58 | 22,8,18,16 | ♈ |
| 2.59 | I | 28,37,57,58 | 20,46,16,14 | ♉ |
| | II | 28,19,57,58 | 19,6,14,12 | ♊ |
| | III | 28,19,21,22 | 17,25,35,34 | ♋ |
| | IV | 28,37,21,22 | 16,2,56,56 | ♌ |
| | V | 28,55,21,22 | 14,58,18,18 | ♍ |
| | VI | 29,13,21,22 | 14, 11, 39, 40 | ♎ |
| | VII | 29,31,21,22 | 13,43,1,2 | ♏ |
| | VIII | 29,49,21,22 | 13,32,22,24 | ♐ |
| | IX | 29,56,36,38 | 13,28,59,2 | ♑ |
| | X | 29,38,36,38 | 13,7,35,40 | ♒ |
| | XI | 29,20,36,38 | 12,28,12,18 | ♓ |
| | XII | 29,2,36,38 | 11,30,48,56 | ♈ |

В первом столбце мы имеем даты, начиная со вставного 13-го месяца, обозначенного $XII_2$; затем следует 2,59 год эры Селевкидов и все месяцы этого года от I и до XII. Эти даты точнее, чем кажется на первый взгляд. Первая, $XII_2$, означает не весь $XII_2$ месяц, а момент среднего соединения, которое приходится на конец этого месяца. Аналогично, каждый последующий месяц означает момент среднего соединения в данном месяце. Следовательно, все интервалы времени между строчками представляют собой одну и ту же величину, равную одному среднему синодическому месяцу[1]).

Арифметическая структура второй колонки весьма проста. Все числа в первых трех строчках кончаются на 57,58. Затем следуют шесть строчек, оканчивающихся на 21,22 и, наконец, имеем четыре строчки с последними цифрами 36, 38. Перейдем теперь к первым двум разрядам. В первых трех строчках мы видим постоянное уменьшение на 18 во втором разряде:

28,55   28,37   28,19

В следующей группе от строчки к строчке происходит увеличение на 18:

28,19   28,37   28,55   29,13   29,31   29,49

[1]) Синодический месяц — период возвращения Луны к той же фазе. (*Прим. ред.*)

Затем опять следует убывающая последовательность:

$$29{,}56 \quad 29{,}38 \quad 29{,}20 \quad 29{,}2$$

с разностью, равной 18. Если мы отложим эти числа на графике с равноотстоящими точками, представляющими последовательные строчки, то получим последовательность точек, лежащих на прямых линиях с чередующимся наклоном в $\pm$ 18 (рис. 8).

Мы назовем такие последовательности «линейными зигзагообразными функциями».

Эти прямые пересекаются при максимальном значении $M$ и минимальном значении $m$, которые легко вычислить по нашей таблице:

$$M = 30{,}1{,}59{,}0 \qquad m = 28{,}10{,}39{,}40$$

Можно показать, что в других аналогичных таблицах используются те же экстремальные значения. Следовательно, наша линейная зигзагообразная функция заключена между фиксированным максимумом $M$ и фиксированным минимумом $m$ и поэтому представляет собой периодическую функцию с амплитудой

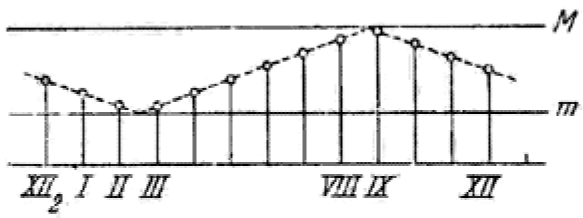



Рис. 8.

$$\Delta = M - m = 1{,}51{,}19{,}20$$

и средним значением $\mu = \frac{1}{2}(M + m) = 29{,}6{,}19{,}20$. Наконец, введем понятие «периода» $P$. Ось абсцисс на нашем графике разделена на одинаковые интервалы, каждый из которых представляет средний синодический месяц. Мы можем определить расстояние между двумя последовательными точками максимума (или минимума) в этих единицах, равных среднему синодическому месяцу (рис. 9).

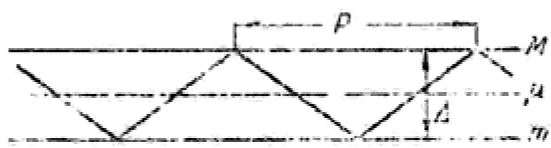



Рис. 9.

Непосредственным геометрическим путем находим, что $P = \frac{2\Delta}{d}$, где $\Delta$ есть амплитуда $M - m$, а $d$ — разность между соседними строчками. Подставляя наши числа $\Delta = 1{,}51{,}19{,}20$ и $d = 18{,}0{,}0$, находим

$$P = \frac{3{,}42{,}38{,}40}{18{,}0{,}0}.$$

Сократив числитель и знаменатель на общий множитель и выразив это отношение в шестидесятеричных дробях, мы получим

$$P = \frac{2{,}46{,}59}{13{,}30} = 12;22{,}8{,}53{,}20.$$

Другими словами, мы показали, что два последовательных максимума или минимума зигзагообразной функции из второй колонки отделены друг от друга 12;22,8,53,20 средними синодическими месяцами, или, грубо говоря, немногим более, чем $12\frac{1}{3}$ месяцами.

Астрономический смысл второй колонки обнаруживается при обращении к третьей колонке. Первая строчка в третьей колонке, очевидно, должна быть истолкована как точка на эклиптике с долготой ♈22;8,18,16. Если мы добавим к этому числу величину 28;37,57,58 из второй строчки второй колонки, то получим число

$$♈ 50;46,16,14 = ♉ 20;46,16,14$$

— долготу из второй строчки третьей колонки. То же правило применимо и ко всем остальным строчкам, и поэтому мы можем сказать, что вторая колонка содержит разности значений из третьей колонки. Учитывая тот факт, что в первой колонке стоят даты последовательных соединений, можем сказать, что в третьей колонке даны месячные долготы Луны, а также и Солнца, поскольку мы имеем дело с соединениями. Вторая колонка дает месячное движение Солнца или солнечную скорость. Таким образом, мы приходим к важному результату, состоящему в том, что рассматриваемые эфемериды представляют годичные изменения скорости Солнца при посредстве линейной зигзагообразной функции.

Другая важная информация содержится в найденном нами значении $P$ периода этой зигзагообразной функции:

$$P = \frac{2,46,59}{13,30} = 12;22,8,53,20 \text{ месяца.}$$

Оно не только показывает величину, принятую здесь за продолжительность года в средних синодических месяцах; это отношение можно прочесть и как

$$13,30 \text{ лет} = 2,46,59 \text{ месяца}$$

или

$$810 \text{ лет} = 10019 \text{ месяцам.}$$

Может показаться, что это уравнение предполагает использование данных наблюдений, уходящих более чем на 800 лет назад. Такое заключение, однако, было бы слишком поспешным. Прежде всего, можно показать, что другие колонки эфемерид такого же типа основаны на более простом отношении

$$P = \frac{46,23}{3,45} = 12;22,8 \text{ месяца}$$

или

$$225 \text{ лет} = 2783 \text{ месяцам.}$$

Но и это уравнение нельзя принимать за прямой результат наблюдений. Период зигзагообразной функции определяется отношением $2\Delta$ к $d$, где $\Delta$ есть амплитуда $M - m$, а $d$ — разность. Значения $d$ для линейной зигзагообразной функции обычно бывают несложными числами — в нашем примере 18,0,0, а не, предположим, 17,59,59, что легко понять, если учесть практику вычисления эфемерид, где значения $d$ нужно прибавлять или отнимать в каждой отдельной строчке. Точность значения $\Delta = M - m$ отражается в числе шестидесятеричных знаков чисел $M$ и $m$, а следовательно, и всех промежуточных чисел. Опять-таки, следует разумно выбрать подходящие небольшие числа для $M$, $m$ и $\Delta$. Иными словами, значение $P$ зависит от небольших поправок в значениях $\Delta$ и $d$, а не только от первоначального эмпирического соотношения между числом лет и соответствующим числом месяцев.

Это положение типично для всей вавилонской астрономии. Одни эфемериды никак не могут служить надежным источником для исследования основных эмпирических данных. В настоящее время совершенно невозможно написать «историю» позднейшего периода вавилонской астрономии. Все, чем мы располагаем, — это эфемериды в форме, отлично приспособленной для практического вычисления и предсказания новолуний, затмений и т. п. Но мы не знаем, какие эмпирические элементы были на самом деле использованы для определения основных параметров, и мы не имеем возможности шаг за шагом проследить создание этой теории.

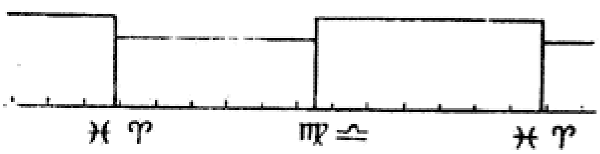



Рис. 10.

**49.** Эфемерида, приведенная в предыдущем разделе, основана на допущении, что скорость движения Солнца меняется по линейному зигзагообразному закону. Все тексты, в которых мы находим эту модель, мы будем называть текстами «системы B». В противоположность им, мы будем относить эфемериды к «системе A», если скорость Солнца следующим образом считается постоянной на двух дополняющих друг друга дугах эклиптики: от ♍ 13 и до ♓ 27 Солнце проходит по 30° за каждый средний синодический месяц; от ♓ 27 и до ♍ 13 движение за месяц составляет 28;7,30° (рис. 10). Легко проверить, что это точно соответствует уравнению, приведенному в конце предыдущего раздела:

$$1 \text{ год} = 12;22,8 \text{ месяца}$$

и встречающемуся и в других местах в эфемеридах обеих систем.

На первый взгляд более естественным кажется предположение, что скорость Солнца меняется непрерывно, а не имеет разрывы в точках ♍ 13 и ♓ 27. Однако еще Куглер пришел к выводу, что система А в целом примитивнее и поэтому старше системы В, выводу, подтвержденному последующим изучением. В частности, можно показать, что принятие системы В ведет к довольно сложным следствиям, что и заставило пользоваться более грубой системой А. Здесь опять мы встречаемся с тем фактом, что чисто математические соображения оказывают существенное влияние на окончательное оформление теории, и тем самым скрывают от нас первоначальные эмпирические данные и общие идеи.

Хотя представляется несомненным, что система А возникла раньше системы В, мы не имеем никакой возможности установить дату возникновения той или другой системы. Любопытно также, что обе системы использовались одновременно на протяжении всего периода (примерно от 250 до 50 г. до н. э.), от которого сохранились эфемериды. Это сосуществование двух различных методов вычисления эфемерид не является результатом двух «школ», поскольку обе «системы» мы наблюдаем и в Вавилоне, и в Уруке, местах происхождения двух единственных архивов, к которым мы можем уверенно отнести наши тексты. Трудно объяснить, почему продолжали существовать обе системы, так как система В несомненно в ряде отношений более совершенна, чем система А. В теории планет одновременно существовало еще большее число методов, в полную противоположность нашим современным научным обычаям.

50. Теперь мы обратимся к беглому обзору лунных эфемерид, без попытки вывести наши утверждения непосредственно из текстов или подробно анализировать общую теорию, составлявшую основу, на которой строились вычисления. Наш очерк включает обе системы, оставляя в стороне лишь варианты, имеющие место только в системе В.

Общая структура всех эфемерид одна и та же. Каждая строчка представляет месяц, каждая колонка — специфическую «функцию», например, солнечную скорость, лунную скорость и т. п. Мы обозначаем эти функции прописными буквами, и эти же буквы используем для соответствующих колонок. Большинство лунных эфемерид охватывает один год, но мы имеем и тексты, касающиеся двух или даже трех лет. Общий вид такого текста с его различными колонками показан на табл. 7, б). Колонки эфемерид всегда следуют слева направо.

Первая колонка во всех эфемеридах — это колонка дат T, указывающих год эры Селевкидов и последовательные месяцы (см. пример на стр. 117). Поскольку края табличек особенно подвержены разрушению, часто бывает трудно установить дату эфемериды. Это можно сделать, продолжая сохранившуюся колонку, пока мы не доберемся до чисел, содержащихся в той же колонке другого, датированного, текста. Этим путем можно показать, что все тексты системы А составляют один последовательный ряд эфемерид на протяжении всего интервала (в два столетия), имеющегося в нашем распоряжении. Система В обнаруживает значительно меньшую степень единообразия.

Следующая колонка, Ф, характерна только для системы А. Ее период совпадает с периодом колебаний скорости Луны, а единицами измерения служат единицы времени. Она используется для вычисления переменной длины синодического месяца (колонка $G$) в предположении, что скорость Солнца неизменна. Детали построения этой линейной зигзагообразной функции Ф пока не ясны, несомненно лишь, что она связана с 18-летним циклом, так называемым «саросом» [1]), содержащим 223 средних синодических месяца. Этот период лишь немногим короче 239 аномалистических месяцев [2]), поэтому длина $G$ синодического месяца почти повторяется после одного сароса. Небольшая разница в продолжительности двух месяцев, отстоящих друг от друга на один сарос, — это разность функции Ф. По этому изменению $G$ за один сарос можно затем найти соответствующие изменения $G$ от месяца к месяцу. Это интересный пример важного метода древней астрономии: накопленная за относительно короткий период (здесь — 18 лет или 223 месяца) ошибка используется для определения коррекции шаг за шагом (здесь — для одного синодического месяца).

Следующая колонка — это колонка $A$ в системе В, она дает скорость Солнца, как это описано в нашем примере на стр. 116 (колонка II). Из нее получается колонка $B$, содержащая долготы Луны и Солнца в моменты соединений или долготы Луны для полнолуний, поскольку Солнце находится в это время на расстоянии 180°. В системе А колонка $B$ получается без явного использования скорости (колонки $A$), так как в системе А используются только два значения скорости и нет оснований повторять их в специальной колонке.

Последующие графы, $C$ и $D$ и их варианты, дают продолжительность дня или ночи, соответствующую долготе Солнца, указанной в колонке $B$. Функции $C$ и $D$ вычисляются по независимым арифметическим схемам, которые должны количественно выражать изменение продолжительности дня в течение года. По существу, это задача сферической тригонометрии, но здесь она решается ариф-

---

[1]) Сарос — период повторения взаимного расположения на небесной сфере Солнца, Луны и узлов лунной орбиты (точек пересечения этой орбиты с эклиптикой). На протяжении каждого сароса лунные и солнечные затмения чередуются в одной и той же последовательности. (*Прим. ред.*)

[2]) Аномалистический месяц — период возвращения Луны к той же скорости, или, другими словами, промежуток времени между двумя последовательными прохождениями Луны через перигей. (*Прим. ред.*)

метическими средствами, аналогичными приближению синусоидальной кривой линейной зигзагообразной функцией.

Две следующие колонки, E и Ψ, описывают колебания широты Луны и размеры затмений.

Как мы уже указывали ранее, последовательные строчки эфемериды отвечают последовательным соединениям или противостояниям. Если для этих моментов известна широта Луны, то можно судить о возможности затмения и, если нужно, вычислить его величину.

Сама широта опять определялась при помощи зигзагообразной функции. «Величина затмения» выражается несколько иным путем, чем это принято теперь, но ее легко непосредственно перевести в меру глубины погружения лунного диска в тень. Интересно отметить, что эта величина была вычислена во многих эфемеридах для каждого месяца, а не только для каждого шестого (или, может быть, пятого) месяца, когда возможно затмение. Другими словами, был разработан такой метод вычисления «величины затмения» как функции широты, что получаемые числа давали правильную величину затмения для действительных затмений. Для соединений, не приводящих к затмениям, эти значения ведут себя совершенно так же, как если бы величина затмения измерялась расстоянием от тени, с допущением отрицательных расстояний для случаев, когда тень не достигается, в то время как положительные значения дают глубину погружения при действительных затмениях. Это показывает удивительно абстрактный характер вавилонского метода, когда, не колеблясь, вводят величины для чисто математического удобства, в принципе примерно так же, как в современной нам механике используют комплексные числа.

Следующая колонка, $F$, дает изменения скорости Луны примерно в той же форме, в какой в колонке $A$ даются изменения скорости Солнца. В колонке $G$ мы находим продолжительность синодических месяцев при допущении неизменности солнечной скорости, но меняющейся скорости Луны, показанной в колонке $F$. В начале нашего анализа мы должны были допустить, что последовательные строчки представляют средние соединения, отстоящие на среднюю продолжительность синодического месяца. Эта средняя продолжительность получалась бы при соединениях Солнца и Луны, если бы они двигались со своими средними скоростями. В колонке $G$ это допущение частично упразднено, поскольку только для Солнца сохраняется средняя скорость, и дается ответ на вопрос, как сильно влияет данное изменение лунной скорости на расстояние между последовательными соединениями. Очевидно, что в колонке $G$ будет тот же период, что и в колонке $F$; значение $G$ будет небольшим и месяц будет коротким, если Луна движется быстро, т. е. скорость ее близка к максимуму $F$. Это и есть связь между $F$ и $G$.

Следующая колонка, $J$, дает необходимую поправку к $G$, вызванную колебаниями скорости Солнца. В системе В колонка $J$ представляет собой последовательность разностей второго порядка в виду того, что в колонке $A$ имеем линейную зигзагообразную функцию. Теперь становится ясным, почему изобретатель системы А предпочел допустить, что скорость Солнца есть простая ступенчатая функция; поправки на изменения скорости Солнца гораздо более сложны в системе В, чем в системе А. После того как найдена поправка $J$, алгебраическая сумма $K$ слагаемых $G$ и $J$ дает продолжительность синодического месяца с учетом изменений скорости Солнца и Луны. Если известен момент одного соединения, нужно всего лишь добавить к нему величину $K$, найденную для продолжительности следующего синодического месяца, чтобы получить момент соединения в следующем месяце. Фактически здесь появляется небольшое осложнение, связанное с использованием вавилонского календаря, согласно которому начало суток надо считать от фактического захода Солнца, а не от полуночи. Поэтому требуется поправка для перехода от одной системы отсчета к другой. Это легко сделать при помощи колонок $C$ и $D$, дающих нам продолжительность дня и ночи. После того как сделано это преобразование, мы получаем в графе $M$ даты и моменты всех последовательных соединений, отнесенные к заходу Солнца. Так была достигнута первая цель теории движения Луны: стали известны моменты действительных соединений и противостояний.

51. Для вычисления затмений вполне достаточно имеющейся уже информации. В колонке $M$ мы имеем время соединения или противостояния по отношению к заходу или восходу Солнца. В колонке $\Psi$ мы имеем расстояние от Луны до тени. Таблицы эфемерид и затмений показывают ясное понимание того, что лунные и солнечные затмения происходят при одном и том же условии, а именно при достаточно малой широте Луны в момент ново- или полнолуния. Задача определения этих моментов и описания движения по широте была вполне успешно решена при помощи арифметических методов. В результате получались довольно удовлетворительные предсказания лунных затмений (рис. 11) [1]). Для солнечного затмения нужно знать больше, в частности, нужно уметь определять, затронет ли вершина теневого конуса именно нашу местность, даже если все остальные обстоятельства благоприятствуют затмению. Эта задача может быть решена только при достаточно точной информации о действительных расстояниях

---

[1]) На рис. 11 показаны размеры лунных затмений, вычисленные по древневавилонским эфемеридам и по современным данным. При этом полному погружению в тень отвечает число 12. В тех случаях, когда по современным вычислениям затмение не должно наблюдаться, размер затмения по современным данным не приводится. Для древневавилонских данных в аналогичных случаях размер затмения представлен отрицательным числом.

Солнца и Луны от Земли и об относительных размерах этих тел. В вавилонских текстах нет ни малейших указаний ни на одну из этих величин. Таблицы солнечных затмений сосчитаны точно так же, как и таблицы лунных затмений, без каких-либо дополнительных колонок, отвечающих «параллаксу», т. е. величинам, зависящим от упомянутых выше расстояний и размеров. Поэтому вавилонские тексты могут сказать только лишь, что солнечное затмение исключается или что солнечное затмение возможно. Но они

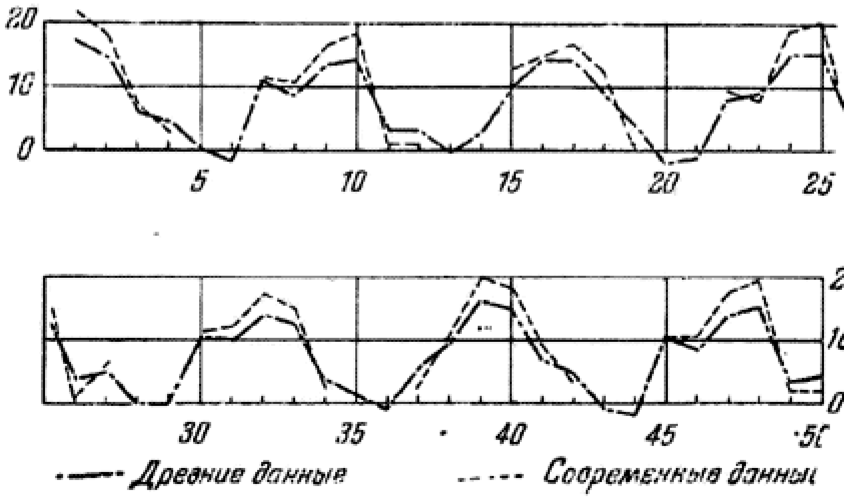



Рис. 11.

не могут дать даже приблизительного ответа на вопрос, будет ли возможное солнечное затмение в действительности видимо или нет. Следует помнить, что так обстояли дела в последний период месопотамской астрономии, примерно от 300 до 0 г. Тем меньше можно ожидать правильного предсказания солнечных затмений до 300 г. до н. э. Во все периоды единственно возможным надежным предсказанием было исключение возможности солнечного затмения.

52. Остальная часть эфемерид связана с основной проблемой лунного календаря: определением вечера первой видимости нового лунного серпа после соединения. Мы уже говорили о трех главных факторах, определяющих видимость нового серпа Луны при заходе Солнца, следующем за соединением (см. стр. 115—116 ): это элонгация, переменный наклон эклиптики к горизонту и широта Луны. Именно эти три величины мы находим в колонках $O$, $Q$ и $R$ эфемерид системы B. Колонке $O$ для элонгации предшествует колонка $N$, содержащая разность во времени между моментом соединения и последующим заходом Солнца, при котором можно ожидать появления первого серпа Луны. Для соответствующего вечера вычисляется, как долго новый серп будет оставаться над горизонтом после захода Солнца. Если полученная в результате разность во времени между заходом Солнца и заходом Луны достаточно

велика, чтобы обеспечить видимость, то первоначальное предположение правильно, и вечер, начинающий новый месяц, известен. Если эта величина окажется слишком большой, то вычисление нужно повторить для предыдущего дня. Если результат окажется слишком малым, то нужно находить новое значение для следующего дня. В некоторых случаях эти дополнительные результаты приведены в последней колонке $P$, и они определяют, содержит ли месяц 29 или 30 дней.

Хотя в общем эта часть теории Луны довольно ясна, многие детали еще непонятны, главным образом из-за трудной терминологии процедурных текстов и из-за округления чисел, включенных в фактические эфемериды. Дополнительная трудность возникает из-за того, что в эфемеридах системы А нет колонок $N$, $O$, $Q$ и $R$, а имеется только конечный результат $P$. Тем не менее, можно установить несколько дополнительных фактов. Ясно, например, что как определение влияния переменного угла между эклиптикой и горизонтом, так и учет влияния лунной широты представляет собой задачу сферической тригонометрии. Точно так же, как и вопрос о продолжительности дня, эта задача решалась при помощи неизменных арифметических схем. Процедурные тексты содержат списки коэффициентов, на которые нужно умножать элонгацию, чтобы получать для различных солнечных долгот правильное значение разности во времени между заходами Солнца и Луны; тот же способ применялся и для широты. Основная трудность для нас состоит в том, чтобы узнать, на основании чего принималось решение, достаточно ли данное в колонке $P$ значение для видимости или нет? По-видимому, использовалось не только одно $P$, но и сумма элонгации $O$ и величины $P$. Действительно, яркость нового лунного серпа существенно зависит от ширины освещенного серпа, а эта ширина пропорциональна элонгации. Даже малое значение $P$, вызванное близостью Луны к горизонту, может компенсироваться большей яркостью серпа, и наоборот, очень малый серп может быть невидимым даже при относительно большом расстоянии от горизонта. Таким образом, сумма $O$ и $P$ действительно является очень разумным параметром для того, чтобы служить критерием видимости.

**53.** Заканчивая наш обзор теории Луны, мы должны еще упомянуть тексты, касающиеся суточного движения Солнца и Луны. Действительно, имеются эфемериды, которые дают долготу Солнца изо дня в день, вычисленную исходя из постоянной средней скорости в 0;59,9° — величины, немного завышенной.

Аналогичные эфемериды имеются и для Луны, но уже с переменной скоростью. Изменение этой скорости, как обычно, выражено в виде линейной зигзагообразной функции. Средняя скорость принята равной 13;10,35° в сутки — величине, которая вновь и вновь появляется в древней и средневековой астрономии. Крайние значения скорости равны $m = 11;6,35°$ и $M = 15;14,35°$, откуда находим период

$$P = \frac{4,8}{9} = 27;33,20 \text{ дня}.$$

Это показывает, что один «аномалистический» месяц считался равным 27;33,20 дням, или, если перейти к целым числам, что 9 аномалистических месяцев равнялись 248 дням. Это соотношение не вполне точное, что видно при сравнении с рассмотренной ранее эфемеридой. В последней мы находим, что колонка $F$ для лунной скорости основана на уравнении

4,29 аномалистического месяца $=$ 4,11 синодического месяца.

Подставляя в это уравнение значение 27;33,20 для продолжительности одного аномалистического месяца, мы получаем для синодического месяца значение, близкое к 29;31,54 дням. Но из колонки $G$ получается, что продолжительность среднего синодического месяца равна 29;31,50,8,20 дням, что тоже является одним из классических параметров древней и средневековой теории Луны. Таким образом, ясно, что 27;33,20 — это немного завышенное значение, вызванное желанием получать удобные короткие числа для параметров зигзагообразной функции суточного движения. Мы еще вернемся к этому замечанию в последней главе (стр. 161).

54. Прежде чем описывать вавилонскую теорию планет, рассмотрим основные черты кажущегося движения планет с современной точки зрения. Мы знаем, что планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, и что Земля — одна из планет. Исходя из этого, установим, каким должно казаться движение с Земли. Для упрощения наших рассуждений заменим все орбиты кругами с общим центром в Солнце. Эксцентричность эллиптических орбит настолько мала, что при том масштабе рисунка, который возможен на этой странице, разница между эллиптической и круговой орбитами была бы незаметна.

Размеры нашей планетной системы настолько малы по сравнению с расстояниями до неподвижных звезд, составляющих фон небесной сферы, что мы не совершим никакой заметной ошибки, если будем считать, что Солнце или Земля не меняют своего положения по отношению к окружающей Вселенной. Итак, мы поступим следующим образом. Мы начнем с кругового движения планет вокруг Солнца, а затем, считая Землю неподвижной, исследуем, как выглядит это движение по отношению к Земле. Это и будет ответом на наш вопрос, касающийся явлений, связанных с планетами.

Первый шаг абсолютно тривиален. Мы знаем, что Земля является спутником Солнца, совершающим один оборот за один год. Чтобы получить картину, видимую с Земли, мы вычитаем из всех движений движение Земли. Таким способом, остановив движение Земли, мы получаем видимое движение Солнца вокруг Земли (с оборотом за один год). Видимый путь этого движения называется эклиптикой (рис. 12, *а*) и *б*)).

Рассмотрим затем одну из «внутренних» планет, Меркурий или Венеру, расположенных ближе к Солнцу, чем Земля (рис. 13, *а*)). Чтобы получить движение Солнца относительно неподвижной Земли, нужно просто повторить рис. 12. Орбита планеты остается при этом кругом с центром в Солнце. Таким образом, геоцентрическим

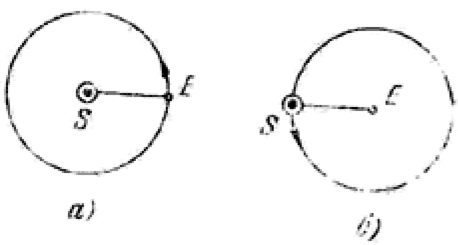



Рис. 12.

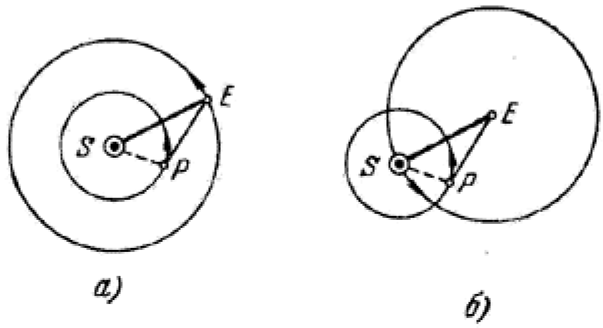



Рис. 13.

изображением движения внутренней планеты является движение по малому кругу, центр которого движется по большему кругу с центром в Земле. Малый круг называется «эпициклом», большой круг — «деферентом».

В заключение рассмотрим «внешнюю» планету: Марс, Юпитер или Сатурн, чьи орбиты охватывают орбиту Земли (рис. 14, *а*)). С Земли $E$ планета $P$ кажется движущейся по кругу, центр которого $S$ движется вокруг $E$. Итак, мы опять имеем эпициклическое движение (рис. 14, *б*)). Чтобы получить большее сходство со случаем внутренней планеты, введем точку $C$ такую, что четыре точки, $S$, $E$, $P$ и $C$, образуют параллелограмм. $SP$ — радиус планетной орбиты; поскольку $EC = SP$, мы видим, что $C$ лежит на окружности с центром $E$. Аналогично, $ES$ — радиус солнечной орбиты, и, поскольку $ES = CP$, мы видим, что $P$ описывает окружность вокруг $C$. Итак, планета $P$ движется по эпициклу, центр которого $C$ движется по деференту с центром $E$ (рис. 14,*в*)). Мы установили полную аналогию со случаем внутренних планет. В обоих случаях планета имеет эпициклическое движение. В случае внутренних планет центр эпицикла совпадает с Солнцем. Для внешних планет центр $C$ эпицикла движется вокруг $E$ с такой же угловой скоростью, с какой планета движется вокруг Солнца, а планета $P$

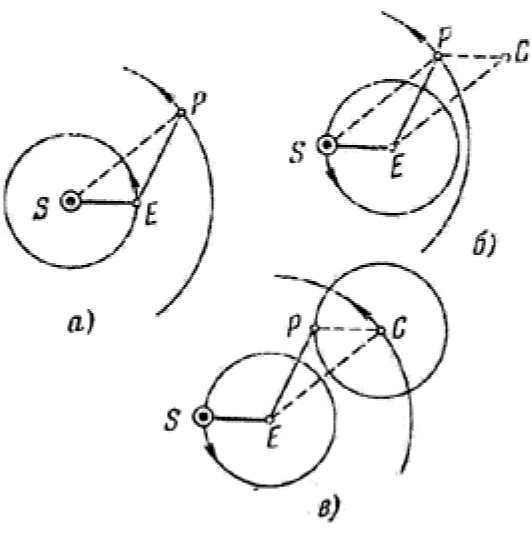



Рис. 14.

движется по эпициклу вокруг $C$ с той же угловой скоростью, с какой Солнце движется вокруг Земли.

Чтобы избежать недоразумений, я еще раз повторю предпосылки, при которых получены эти результаты. Мы предположили, что а) планеты движутся по круговым орбитам с общим центром в Солнце; б) все планетные орбиты лежат в одной плоскости. Приняв эти предпосылки, мы пришли к тому, что планетные орбиты по отношению к Земле являются эпициклами, центры которых движутся с постоянной скоростью по деферентам, имеющим своим центром Землю. Другими словами, если мы пренебрежем небольшим эксцентриситетом планетных орбит и небольшим наклоном этих орбит, то эпициклическое движение даст правильное описание планетных орбит по отношению к Земле. Действительно, это только вопрос математического удобства, вычислять ли сначала долготы Земли и планет гелиоцентрически, а затем делать преобразование в геоцентрические координаты, или же сначала произвести это преобразование, а потом оперировать с эпициклами.

Для более тонкой теории планетных явлений принятые выше предпосылки слишком грубы. Впрочем, нетрудно видеть, в каком направлении надо действовать, чтобы достигнуть большей точности. Эксцентриситет орбит можно принять во внимание, слегка сместив Землю по отношению к центрам деферентов. Широта может быть учтена приданием эпициклам правильного наклона. Оба эти способа применялись греческими астрономами.

55. Итак, мы видим, что планеты движутся по отношению к Земле по эпициклам. Учитывая это, очень просто понять основные особенности видимого с Земли движения планет. Начнем опять с внутренней планеты. Ее угловая скорость вокруг центра $S$ эпицикла больше угловой скорости $S$ вокруг Земли $E$ (рис. 15). Если планета $P$ находится на более удаленной от Земли части своего эпицикла, то движение $P$ добавляется к движению $S$, и движение планеты кажется более быстрым, чем движение $S$; это мы называем «прямым» движением. Между точками $A$ и $B$, наоборот, движение планеты назад по эпициклу быстрее движения вперед центра эпицикла [1]), а поэтому движение планеты кажется «попятным».

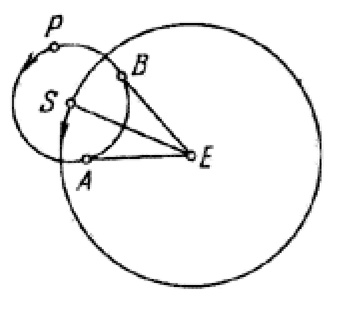


Рис. 15.

Тот же рисунок позволяет нам описать условия видимости. Если планета $P$ и Солнце $S$ находятся на одном и том же, или почти на одном и том же направлении от Земли $E$, то планета будет невидима из-за яркости Солнца. Таким образом, требуется некоторая «элонгация» планеты от Солнца, чтобы планета была видима.

---

[1]) Легко видеть, что точки $A$ и $B$ лежат где-то между теми двумя точками, в которых прямые, проведенные от Земли, касаются эпицикла.

Рис. 16 показывает, что дуга невидимости между $\Sigma$ и $\Xi$, около «верхнего соединения», значительно больше, чем между $\Omega$ и $\Gamma$ (около «нижнего соединения»). Видимая дуга от $\Gamma$ до $\Sigma$ восходит раньше Солнца; в это время планета является «утренней звездой». Дуга от $\Xi$ до $\Omega$ заходит после Солнца; здесь планета является «вечерней звездой». На рис. 17 то же явление представлено графиком, на котором абсцисса изображает время, а ордината — геоцентрическую долготу. Прямая линия представляет движение Солнца.

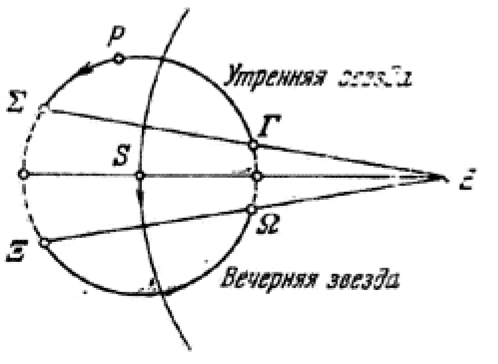



Рис. 16.

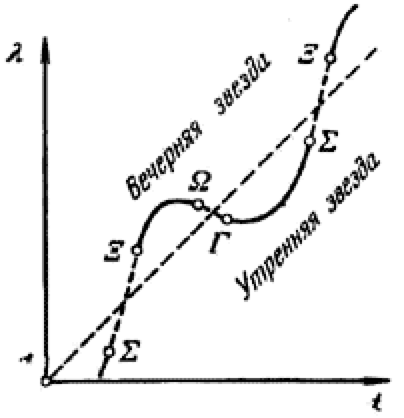



Рис. 17.

Таким же образом можно получить и график для внешней планеты, показанный на рис. 18. Здесь движение планеты медленнее движения Солнца. Попятное движение происходит около противостояния $\theta$, когда Солнце и планета видны в противоположных от Земли направлениях. Поэтому попятное движение внешней планеты полностью видимо, в противоположность внутренней планете, у которой часть попятного движения около нижнего соединения невидима. Внешняя планета становится невидимой только один раз в каждом цикле: около соединения от $\Omega$ до $\Gamma$. Точки $\Phi$ и $\Psi$, в которых прямое движение меняется на попятное, и наоборот, называются соответственно «первой» и «второй» неподвижными точками.

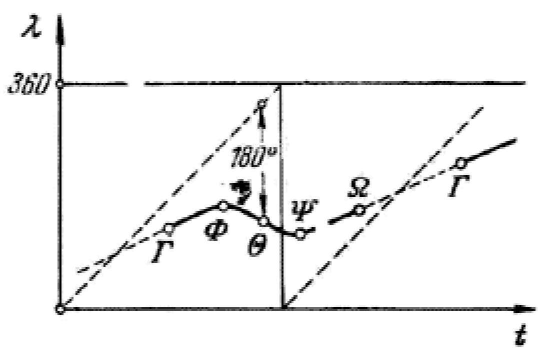



Рис. 18.

56. В теории планет особенно заметен контраст между вавилонским подходом и теорией Птолемея, как она представлена в «Альмагесте». В теории Птолемея предполагается определенная кинематическая модель, основанная на эпициклическом движении, модель, весьма близкая к описанию движения планет, данному в предыдущем пункте. Здесь геоцентрическая долгота планеты

может быть вычислена для любого данного момента $t$. Определение тех значений $t$, при которых планета находится в одном из характерных состояний, обозначенных нами греческими буквами, является вторичной задачей.

Вавилонский метод прямо противоположен этому. Первая задача состоит в определении явлений, обозначенных греческими буквами, а затем долгота планеты для произвольного момента $t$ находится путем интерполяции.

Это различие в подходе, конечно, является результатом исторического развития. Вавилонян прежде всего интересовали появления и исчезновения планет, так же как моменты первой и последней видимости неподвижных звезд, например, Сириуса, — и Луны. Периодическое повторение этих явлений и их флюктуации были теми объектами, которые они в первую очередь пытались определить. Когда Птолемей развивал свою теорию планет, в его распоряжении уже были геометрические методы,вполне удовлетворительно объяснявшие солнечные и лунные аномалии; в это время аналогичные модели использовались также, по крайней мере для качественного, объяснения видимых планетных орбит. Поэтому очевидной целью теоретической астрономии стало построение чисто геометрической теории движения планет в целом, а характерные явления в значительной мере потеряли свой специфический интерес, особенно после того, как греческие астрономы развили опыт наблюдений в достаточной степени, чтобы понять, что явления, наблюдаемые возле горизонта, представляют собой наихудший возможный выбор для получения необходимых эмпирических данных.

57. Какие бы явления вавилонские астрономы ни хотели предсказать, это нужно было делать в рамках существовавшего лунного календаря. Предположим, кто-нибудь определил, что планета вновь появится через 100 дней после данного числа. Какую дату следует приписать этому моменту? Очевидно, нужно знать, будут ли три промежуточных лунных месяца иметь, скажем, по 29 дней или по 30 дней, и т. п. Ответ на этот вопрос лучше всего дают лунные эфемериды, чья задача — определение продолжительности данного месяца в 29 или 30 дней. Но планетные явления происходят очень медленно. Одна-единственная таблица для Юпитера или Сатурна легко может охватить 60 и более лет. Чтобы определить календарные даты так далеко вперед, нужно было бы вычислить полные лунные эфемериды для нескольких десятилетий. Более того, фактическое вычисление движения планет в любом случае должно быть основано на единой временной шкале. Все эти трудности были преодолены одним очень разумным способом. За единицу времени принимали средний синодический месяц и делили его на 30 равных частей. Вавилоняне, по-видимому, не имели специального названия для этих единиц, и называли их просто «сутками». Современные нам ученые употребляют термин «лунные

сутки»; я буду пользоваться соответствующим термином индийской астрономии — «титхи».

Тот факт, что вавилонский календарь был строго лунным, приводил к тому, что общая продолжительность ряда календарных месяцев не отклонялась все больше и больше от соответствующего итога средних синодических месяцев. Даты, выраженные в титхи, всегда мало отличались от фактических календарных дат, обычно не более чем на $\pm 1$ день. Поэтому вавилонские астрономы в своих вычислениях просто отождествляли результаты, полученные в титхи, с датами действующего календаря. Это обычная процедура всех планетных текстов.

Использование титхи предполагает, что для планетных явлений не стремятся достичь такой же точности, какая была достигнута в теории Луны. В то время как астрономы явно не жалели усилий на определение всех возможных влияний на первую и последнюю видимость Луны, мы не видим, чтобы сходные способы применялись к планетам. Широта планет, например, никогда не принималась во внимание при составлении планетных эфемерид. С другой стороны, применялось одновременно несколько конкурирующих «систем», наподобие знакомых нам двух систем теории Луны. Разные системы теории планет, очевидно, были созданы по образцу двух основных систем теории Луны. Они оперируют либо со ступенчатыми функциями (тип А), либо с линейными зигзагообразными функциями (тип В). Различные варианты среди эфемерид типа А отличаются друг от друга использованием разного числа шагов для каждого периода. Например, одна теория Юпитера использует только две эклиптические зоны различной скорости, тогда как другая предполагает четыре зоны; между экстремальными значениями первой модели здесь вставлены две промежуточные ступени. Различные варианты текстов типа В отличаются небольшими изменениями (округлениями) параметров; аналогичные варианты известны также в системе В теории Луны.

Основная идея всех планетных эфемерид, впрочем, одинакова. Она состоит в отдельном рассмотрении каждого характерного явления самого по себе, как если бы это явление было независимым телом, движущимся по эклиптике.

Рассмотрим в качестве примера первое появление Г Меркурия как утренней звезды. Мы предполагаем, что нам известны (на основе наблюдений или из предыдущих вычислений) момент $t_0$ и долгота $\lambda_0$ Меркурия, когда он опять становится видимым утром после периода невидимости при нижнем соединении (см. рис. 16 и 17 на стр. 130). На нашей диаграмме на рис. 19 мы назовем эту точку $\Gamma_0$. Если бы Солнце и Меркурий оба двигались с постоянной скоростью, если бы это движение происходило по экватору, то последовательные утренние появления $\Gamma_1$, $\Gamma_2$,... находились бы на диаграмме на равных расстояниях друг от друга и на постоянном расстоянии от графика солнечного движения. На самом деле, однако, эти предположения не выполняются. Поэтому расположение точек $\Gamma_0$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$,... показывает периодическую неправильность. Вавилонская теория пыталась описать эти неправильности точно таким же образом, как теория Солнца и Луны описывала изменение скорости этих тел. Поэтому для эфемериды типа А эклиптика делилась на зоны так, что скорость движения явления Г в пределах каждой зоны оставалась постоянной, а на границах зон менялась скачком.

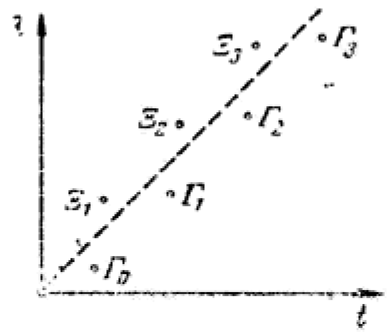


Рис. 19.

Для Меркурия и явления Г мы имеем три зоны с разрывами в моменты ♌ 1, ♑ 16 и ♊ 0. Допустим, что $\Gamma_0$ находится в ♌ 17. Скорость в зоне, расположенной от ♌ 1 до ♑ 16, равна 1,46°. Следовательно, $\Gamma_1$ будет в ♌ 17+1,46= ♌ 2,3 = = ♐ 3. Эта точка еще находится в пределах той же зоны; поэтому мы опять добавляем 1,46° и получаем ♐ 1,49 = ♓ 19. При этом шаге мы, однако, пересекли границу ♑ 16 и вступили во вторую зону на 1,3°. Во второй зоне скорость равна уже не 1,46°, а 2,21; 20°, или на $\frac{1}{3}$ больше, чем в предыдущей зоне. Таким образом, нам нужно увеличить дугу в 1,3° тоже на $\frac{1}{3}$, т. е. на 21°. Следовательно, $\Gamma_2$ будет не ♓ 19, а ♓ 19 + 21 = ♈ 10.

Таким же образом можно найти все последовательные положения с долготами $\Gamma_1$, $\Gamma_2$,... Соответствующие даты, выраженные в титхи, определяются по простому правилу, согласно которому промежутки во времени линейно зависят от разностей долгот. Так можно вычислить две колонки эфемериды, одну — с долготами, другую — с датами последовательных Г.

Как определяли параметры, задающие распределение Г? Это трудный вопрос, на который нельзя дать полного ответа. Ясно только следующее: нужно каким-то способом подсчитать такое количество Г, чтобы целому числу первых появлений Меркурия как утренней звезды отвечало целое число лет. Приведенные выше параметры основаны на уравнении: 848 лет = 2673 восходам Меркурия. Так же, как и в случае теории Луны, на этих числах нельзя основывать никакие исторические заключения. Размеры зон, зональные скорости и их отношения должны быть сравнительно удобными числами, и отношение периодов, выведенное из этих чисел, в конечном счете отражает не более чем компромисс между эмпирическими фактами и потребностями вычисления.

Следующий шаг в вычислении явлений, связанных с Меркурием, состоит в нахождении долгот и дат для всех его последовательных первых появлений в качестве вечерней звезды, начиная с данной точки $\Xi_0$. Принцип совершенно аналогичен рассмотренному выше для точек Г, но зоны и скорости другие. Разрывы расположены теперь в точках ♎ 26, ♓ 10 и ♋ 6, а скорости равны 1,46; 40°, 1,36° и 2,40° по сравнению с 1,46°, 2,21;20° и 1,34;13,20° в предыдущем случае. Соотношение периодов выражается теперь равенством 480 лет и 1513 восходов Меркурия. Это решительно подтверждает наше предыдущее замечание о том, что нельзя из этих соотношений делать никаких исторических выводов, ибо совершенно абсурдно предполагать, что наблюдения за Г начались на столетия раньше наблюдений за Ξ. Более того, ясно, что эти два периода должны быть равны, потому что за каждым Г должно следовать ровно одно Ξ, и наоборот. Этот факт был, конечно, очевиден для вавилонских астрономов, и два периода отличались один от другого только как 3;9,7,38... отличается от 3;9,7,30. Это кажущееся расхождение, практическое влияние которого ничтожно, является лишь результатом исправления основных параметров зон.

Предыдущие шаги обеспечили нас всеми Г и Ξ. Нам нужно еще найти Σ и Ω, т. е. соответствующие заходы Меркурия. Можно ожидать, что имеются две другие схемы, позволяющие получать эти данные точно таким же путем, как мы получали выше Г и Ξ. Однако это не так. Куглер на основании имевшихся в его распоряжении фрагментов эфемерид предположил, что Σ вычислялись по Г прибавлением фиксированной добавки, зависящей только от долготы Г, и что Ω так же получались из Ξ. Гипотеза Куглера была полностью подтверждена текстами из Урука. Были составлены таблицы, дающие для каждого градуса каждого знака зодиака размер долготы и число титхи, которые надо прибавить к данному Г (или Ξ), чтобы найти последующее Σ (или Ω). Другими словами, мы имеем постоянные арифметические схемы, которые определяют соотношение между последовательными восходами и заходами Меркурия, как функцию от $\lambda$.

На рис. 20 графически представлена одна из этих кривых [1]). Интересно подчеркнуть следующее обстоятельство. В той части зодиака, в которой функция близка к минимуму, исчезновение Меркурия будет следовать очень скоро за предыдущим его появлением. В тексте вся эта зона объявляется участком невидимости. Иными словами, в этом районе планета никогда не бывает видима, хо-

---

[1]) Долгот Ω и Ξ.

тя теоретически здесь следует считать по одному «восходу» и одному «заходу», чтобы сохранить правильное соотношение периодов. На нашем графике (рис. 17 на стр. 130) имеется зона зодиака, где целый отрезок кривой находится так близко к Солнцу, что его следовало бы изобразить пунктиром, как участок невидимости.

Интересно отметить, что вплоть до настоящего времени таблицы для вычисления восходов и заходов Меркурия основываются на эфемеридах, которые содержат даты и долготы фактически невидимых явлений. В античных текстах эти случаи обозначались знаком $LU$, смысл которого стал ясен только тогда, когда полностью разобрались в вычислении $\Sigma$ и $\Omega$. Ранее же, чтобы охватить все записанные случаи, приходилось предполагать исключительно высокую степень видимости горизонта в Вавилоне, поскольку не было известно, что записи содержат как видимые, так и невидимые восходы. Также и наши современные таблицы допускают слишком высокую степень видимости Меркурия в Месопотамии и сообщают результаты, которые только в самых общих чертах отвечают действительности и определенно неверны в тех критических случаях, для которых они вычислялись.

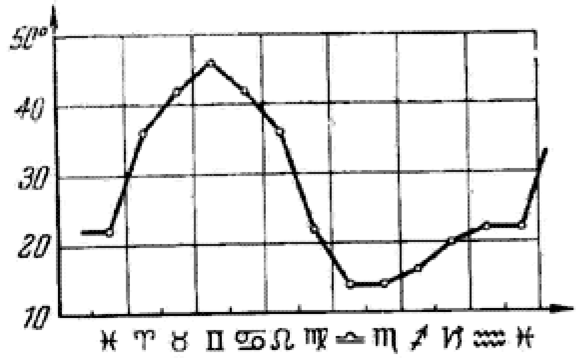


Рис. 20.

**58.** Вычисление эфемерид для других планет производилось в основном так же, как в разобранном нами случае Меркурия.

Обнаружение среди копий Пинчеса (см. стр. 113) нескольких планетных процедурных текстов и эфемерид открыло существование гораздо большего числа различных в деталях методов, чем мы предполагали на основе материалов, бывших в распоряжении Штрассмайера и Куглера. Ниже дается краткий обзор основных систем, которые мне известны.

Для всех планет центральная проблема состоит в установлении того, каким образом меняются синодические дуги между явлениями одного типа, в зависимости от положения на эклиптике. Если синодические дуги известны, то легко найти синодическое время, поскольку это то время, которое нужно Солнцу, чтобы пройти от одного явления до следующего. Хотя этот основной принцип и требует некоторых поправок, мы не будем здесь на них останавливаться. Наоборот, различие в методах для определения долгот представляет действительный интерес, поскольку оно показывает, какие большие усилия прилагались к тому, чтобы правильно описать видимое движение планет.

Как и следовало ожидать, наиболее регулярное изменение синодических дуг мы находим для Сатурна. Нам известны две системы, одна из которых оперирует с двумя зонами постоянной синодической дуги (система A), другая — с синодическими дугами, меняющимися по линейному зигзагообразному закону (система B). Обе системы касаются всех пяти явлений Г, Ф, Θ, Ψ и Ω.

Для Юпитера нам известны два тесно связанных друг с другом метода, использующих систему B для всех тех пяти явлений, что и в случае Сатурна. Кроме того, имеется несколько методов типа A с двумя зонами, с четырьмя зонами, с тремя зонами и с различными положениями и размерами разрывов. Только часть из этих систем получила отражение в сохранившихся эфемеридах, хотя для Юпитера эфемериды довольно многочисленны.

В то время как между теориями для Юпитера и Сатурна имеются, по существу, лишь небольшие различия, мы находим, что для Марса применялся другой метод. Нам известна шестизонная система A (все зоны длиной в два знака зодиака), но применявшаяся только для первого и последнего появлений, для Г и Ω и для первого стояния Ф. Для обратных же дуг известны четыре различных метода для определения дуги от Ф до противостояния Θ; возможно, столько же методов существовало для определения дуги от Θ до Ψ. Иными словами, мы имеем здесь положение, сходное с описанным выше случаем Меркурия. После того как положение Ф найдено по системе A, положения Θ и Ψ определяются при помощи (отрицательных) сдвигов, причем размер сдвига зависит от долготы Ф. Положение следующего явления Ω, совершенно не зависит от размеров предшествовавшего ему обратного движения.

С Венерой обращались совсем по-другому. Здесь прежде всего используется тот факт, что за восемь лет Венера совершает пять синодических периодов, которые в среднем только на $2\,{}^1/_2{}^\circ$ отстают от первоначального положения в зодиаке. Для каждого из шести характерных явлений (Ξ, Ψ, Ω вечером, Г, Ф, Σ утром) даны численные правила, которые указывают синодические дуги и времена в порядке пяти последовательных явлений одного вида. Таким образом, мы имеем таблицу, содержащую пять раз по шесть или 30 сдвигов для долгот и столько же для времен. Итог пяти сдвигов по долготе таков, что он составляет дефицит в 2;30°, как и должно быть для каждого цикла. Аналогично и даты отстают на 4;10 титхи после 99 лунных месяцев, что соответствует пяти синодическим периодам. Эта общая схема известна по крайней мере в двух вариантах, но никаких систем типа A или B пока не обнаружено. Многие детали от нас ускользают, поскольку источники, касающиеся Венеры, особенно отрывочны.

Для Меркурия мы подробно описали процедуру, использующую систему A для появлений Г и Ξ, тогда как исчезновения Σ и Ω находятся при помощи сдвигов, зависящих от долготы предшествующего появления. Другими словами, длины дуг видимости даны как функции долгот первых появлений. Мы также знаем о существовании противоположной системы: исчезновения Σ и Ω вычисляются сначала по системе А (хотя и с использованием зон, отличных от предыдущих), а дуги невидимости определяются сдвигами $\Sigma \to \Xi$ и $\Omega \to \Gamma$. В общем, результаты эквивалентны предыдущим, хотя и различаются в деталях.

Для всех планет известно несколько методов вычисления по одному данному явлению всех последующих явлений того же вида. Возникает вопрос, откуда брались начальные значения. В принципе можно предположить, что наблюдали один набор явлений в пределах одного синодического периода, например, наблюдали долготы и даты $\Gamma$, $\Phi$, $\Theta$, $\Psi$, $\Omega$ для Сатурна или Юпитера, $\Gamma$, $\Phi$, $\Omega$ для Марса, и т. п. Мы знаем, что вавилонские астрономы остро ощущали эту проблему и пытались разработать правила, которые позволили бы не только вычислять последовательные явления одного вида, но перейти от явления одного вида к следующему за ним явлению другого вида. Эта задача отнюдь не тривиальна, поскольку в эфемериде типа

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma_0 & \Phi_0 & \Theta_0 & \Psi_0 & \Omega_0 \\ \Gamma_1 & \Phi_1 & \Theta_1 & \Psi_1 & \Omega_1 \\ \Gamma_2 & \Phi_2 & \Theta_2 & \Psi_2 & \Omega_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

все ряды определяются по первому ряду. Поэтому правила в каждой последующей строке являются следствием правила, определяющего соотношения в первой строке. Другими словами, нужно проверить согласованность правила, приводящего от $\Gamma$ к $\Phi$ и т. д. к $\Omega$ с данными ранее методами вычисления по вертикали. В нескольких случаях эта задача была решена правильно, в других случаях, очевидно, правила предназначались только для получения некоторых приближений. Но во всех случаях видна тенденция свести к минимуму эмпирические данные. Действительно, для согласованной системы правил вычисления как по строчкам, так и по столбцам достаточно одного-единственного значения, чтобы вычислить все следующие явления. Это идеал математической астрономии чистейшего вида.

Окончательной задачей для всех планет является описание их суточного движения. Нам уже в принципе известны долготы и моменты всех типичных явлений. В терминах наших графиков можно сказать, что мы знаем положения всех точек, обозначенных греческими буквами. Остается задача определения промежуточных кривых. Сохранилось очень немного текстов, позволяющих исследовать этот вопрос; но мы по крайней мере знаем, что были изобретены такие схемы интерполяции, с помощью которых, начав с данного значения, можно через какое-то число шагов, определяемое разностью в датах, получить следующее характерное значение. Эти интерполяционные схемы построены на последовательностях разностей второго или даже третьего порядка. Используя современную терминологию, можно сказать, что определяли простые полиномы, которые с достаточной точностью удовлетворяли условиям, заданным относительным положением последовательных характерных точек на нашем графике движения планет. Можно только восхищаться изяществом и мастерством, проявленным при изобретении этих арифметических методов. Мы все еще далеки от полного понимания этих методов, так как очень мало знаем об исходном эмпирическом материале, к которому они были так искусно применены для нахождения основных параметров математической теории.

59. Естественно спросить, кто были астрономы, разработавшие и использовавшие эту теорию? Я не вижу никакой возможности удовлетворительно ответить на этот вопрос. Можно только перечислить несколько известных нам фактов. Тексты, из которых получена вся наша информация, происходят из двух архивов, одного в Уруке, другого — в Вавилоне. Ничто не доказывает, что не существовали другие архивы, и мы не имеем возможности судить о связях между имевшимися двумя или более центрами астрономической деятельности. Мы очень мало знаем о вавилонском архиве, потому что вавилонские тексты редко имеют колофоны.

Таким образом, мы почти полностью основываемся на колофонах текстов из Урука. Эти колофоны более или менее следуют такому образцу: «табличка $A$, сына $B$, сына $C$, потомка $M$; рука $R$ (= написано $R$), сына $S$, сына $T$, потомка $N$, Урук, месяц $m$ день $d$ год $y$ (эры Селевкидов), в царствование $X$». Многие таблички содержат вначале обращение: «В соответствии с волей богов Ану и Анту, да будет хорошо». Некоторые колофоны добавляют проклятия тем, кто когда-нибудь унесет табличку, написанную писцом «для продления его дней и благополучия его потомства», а иногда мы читаем, что «знающий может показать табличку знающему, но не незнающему».

Упоминаемые в колофонах прародители позволяют нам установить два рода, к которым принадлежали писцы эфемерид или их владельцы (если слова «табличка такого-то» означают владельца). Один род упоминает своим «предком» Екур-закира, человека, которому дан титул «машмаш жрец Ану и Анту из святилища Реш, писец (серии) Энума-Ану-Энлил, из Урука». Упомянутая «серия» является знаменитой серией астрономических предзнаменований, о которых говорилось в первых пунктах этой главы. Второй род происходит от Син-леке-уннини «писца Энума-Ану-Энлила, калу-жреца Ану и Анту из Урука». Оба эти «предка» встречаются и в колофонах других табличек периода Селевкидов, и вопрос о том, в какой мере эти семейства писцов были действительно родами или только школами писцов, является нерешенным. Нам неизвестны также роли собственника таблички и ее писца. Мы не знаем, например, был ли «писец» эфемериды ее действительным составителем или нет. Единственное, что можно смело сказать, это то, что наши таблички происходят из «жреческих» кругов. И никаких сведений о возникновении этих методов извлечь из колофонов урукских табличек нельзя.

Вавилонские тексты дают нам еще меньше сведений об их писцах. Правда, Плиний, Страбон и Веттий Валент называют имена трех вавилонских астрономов, которые, казалось, встречаются и в колофонах наших текстов. Одно из них, Судинес, казалось, содержится во второй половине имени Ану-ахxе-шу-иддина, но потом выяснилось, что это чтение неверное и что на самом деле следует читать Ану-аха-ушабши. Второе имя, Набурианос, как будто один раз упоминается в сомнительном контексте одной из позднейших табличек в форме Набуриманну, но нет уверенности в правильности такого чтения. И еще меньше доказательств того, что Набурианос упомянут как изобретатель лунной системы А, к которой относится текст. Наконец, имеется имя Киденас, соответствующее клинописному Кидинну. Последнее имя появляется несколько раз в колофонах в сочетании «терситу Кидинну»; было предположено, что эти слова означают «лунная табличка Кидинну» или «система Кидинну», и поэтому обычно считают Кидинну изобретателем системы В. Возможно, что это так, но подлинных доказательств у нас нет. Термин «терситу» в этом контексте является полнейшей загадкой, потому что, вообще говоря, известно, что он обозначает какие-то орудия или составные элементы, связанные с производством глазированного кирпича.

Делались попытки точно датировать возникновение теории Луны. Они базировались на сопоставлении современных вычислений с выводами древней теории. Предполагалось, что медленно накапливающаяся ошибка древней теории в начале равнялась нулю, и это приводило к гипотетической дате существования ее гипотетических изобретателей Набуриманну и Кидинну. Достаточно сказать, что этот метод предполагает точность первоначальных значений, что является весьма мало вероятной гипотезой. Он, далее, предполагает, что параметры, использованные для фактического вычисления эфемерид, в точности совпадали с эмпирически полученными значениями или по крайней мере со значениями, полученными в результате теоретической обработки каких-то наблюдений. Но мы видели, что параметры эфемерид подправляли ради удобства вычислений. Вызванные этим ошибки очень малы, но они достаточно заметно влияют на результаты вычислений, которые сами основаны на исследовании небольших отклонений от фактических движений. Поэтому нет надежды получить этим путем точную информацию о времени изобретения математической астрономии. В настоящее время мы вынуждены довольствоваться общими историческими соображениями, какими бы неубедительными они ни казались. Можно лишь мечтать, что будет найдена (и, может быть, даже опубликована), табличка, которая даст нам прямые сведения о теоретических и эмпирических основаниях всей теории.

Все известные мне к 1955 г. тексты, касающиеся математической астрономии, опубликованы в работе O. Neugebauer, Astronomical Cuneiform Texts, London, Lund Humphries 1955 г. (три тома). Это издание содержит полную транскрипцию, переводы и комментарии. В дальнейшем цитируется как ACT[1]).

Копии всех других доступных текстов из Британского музея с большим количеством сведений о неопубликованном материале приведены в издании T. G. Pinches — J. N. Strassmaier — A. J. Sachs, Late Babylonian Astronomical and Related Texts, Providence, Brown University Press, 1955.

Современный исчерпывающий анализ роли предсказаний и астрологии см. в книге J. C. Gadd. Ideas of Divine Rule in the Ancient East, The Schweich Lectures of the British Academy 1945 (London, 1948).

Читателя следует предостеречь от использования работы Jeremias, Handbuch der altorientalischen Geisteskultur. Пользуясь невероятным научным аппаратом, автор разработал «панвавилонскую» доктрину, процветавшую в Германии между 1900 и 1914 гг., и полностью оставленную после первой мировой войны. Главный тезис этой школы был построен на диких теориях о громадном возрасте вавилонской астрономии и на приписывании вавилонянам мировоззрения «Weltanschauung», основанного на параллелизме между «макрокосмом и микрокосмом». Не было ни одного явления в античной космогонии, религии, литературе, которое не выводилось бы из этой гипотетической космической философии вавилонян. Снисходительное пренебрежение к очевидным показаниям текстов, широкое использование вторичных источников и устарелых переводов в сочетании с предвзятой хронологией вавилонской цивилизации создали фантастическую картину, которая оказывала (и до сих пор оказывает) большое влияние на литературу о Вавилоне. Куглер был одним из немногих ученых в Германии, не поддавшихся этим теориям. В небольшой книге «Im Bannkreis Babels» он выразительно показал, до каких абсурдов можно дойти с помощью панвавилонских методов. Он привел 17 страниц ошеломляющих параллелей между историей короля Франции Людовика IX и сказанием о Гильгамеше, показывающих, что Людовик IX на самом деле был солнечным героем Вавилона.

Панвавилонская школа не имеет больше последователей. Но мне кажется, что пример Куглера следует изучить каждому историку; этот пример, выходя далеко за пределы первоначально поставленной цели, показывает, как легко можно под любую заранее намеченную теорию подогнать большое число очевидных свидетельств [2]).

## ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ГЛАВЕ V

к 42. Наиболее поздняя датированная клинописная табличка (от 75 г. н. э., т. е. времени Веспасиана) является «Альманахом», в классификации Сакса (A. Sachs, J. Cuneiform Studies, 2, 1948, стр. 280). Она была обнаружена в Дропси-колледже в Филадельфии и, по всей вероятности, происходит из Вавилона. Точная дата была установлена Шаумбергером.

к 44. История текста из коллекции «Frau Professor Hilprecht Collection of Babylonian Antiquities im Eigentum der Universität Jena» (это правильное ее название) своеобразна, хотя и не уникальна. Шесть строчек, распо-

---

[1]) Здесь же (стр. 41 и след.) проведены в деталях все расчеты, кратко описанные выше в пп. 50—53. (*Прим. ред.*)

[2]) Подробный анализ вавилонской астрономии см. также в книге B. L. van der Waerden, Anfänge der Astronomie, Groningen, 1966. (*Прим. ред.*)

ложенных на обратной стороне, были опубликованы в 1908 г. в воскресном приложении к газете Münchner Neueste Nachrichten. На основе этого отрывка делались весьма фантастические предположения, пока в 1931 г. Тюро-Данжен не предложил своего объяснения, заключающегося в том, что числа измеряют глубину. В течение всех этих лет текст нельзя было проверить, потому что он был «потерян». Но вот в 1931 г. я получил разрешение на доступ к тщательно охраняемой коллекции Иены, богатый материал которой, помимо прочего, дал мне ключ к пониманию связи между таблицами умножения и деления (см. выше стр. 46 и след.). Просматривая эту коллекцию, я нашел табличку с ярлыком «Один из 5 важных текстов из Ниппура из ящика моего стола»; оказалось, что это и есть потерянный текст. Вскоре после этого власти Иены информировали меня, что я только по ошибке был допущен к коллекции, и что мне запрещается публиковать из нее какие-либо тексты. Но я воспользовался своим правом запомнить то, что я успел узнать, и с тех пор моя копия текста была использована другими учеными. Основные отрывки разобраны в обзоре в Quellen und Studien zur Geschichte d. Math., Ser. B, т. III, стр. 273 и след. (1936).

О древневавилонских наблюдениях за Венерой см. книгу L a n g d o n — F o t h e r i n g h a m — S c h o c h, The Venus Tablets of Ammizaduga, Oxford, 1928. Хронологические заключения этой работы были опровергнуты последующими археологическими свидетельствами.

Обстоятельное изучение серий «Энума Ану Энлил» было начато Вейднером (E. F. W e i d n e r, Archiv für Orientforschung, т. 14, 1942, стр. 172—195, 308—318 и т. 17, 1954, стр. 71—89). Читатель найдет в этой статье описание очень сложной структуры этой «серии» с ее дополнительными сериями выдержек, комментариев и т. п. Важно, что мы имеем очень мало оригинальных текстов с астрологическими предзнаменованиями, относящихся к периоду более раннему, чем позднеассирийское и нововавилонское времена. Поэтому историю даже этого раннего этапа астрологической литературы приходится в значительной степени восстанавливать по более поздним документам.

О двух табличках серий «мул апин» см. в работах B e z o l d — K o p f f — B o l l, Zenit- und Aequatorialgestirne am babylonischen Fixsternhimmel, Sitzungsberichte d. Heidelberger Akad. d. Wiss., phil.—hist. Kl., 1913, № 11 и E. F. W e i d n e r, Ein babylonisches Kompendium der Himmelskunde, Amer. J. of Semitic Languages and Literatures 40 (1924), стр. 186—208. См. далее B. L. v a n d e r W a e r d e n, Babylonian astronomy II. The thirty-six stars. J. of Near Eastern Studies, 8, 1949, стр. 6—26, а также часть III. The earliest astronomical computations (там же, 10, 1951, стр. 20—34).

Число високосных лет, засвидетельствованных в вавилонских текстах, теперь достаточно велико, чтобы можно было показать, что 19-летний цикл был введен в постоянное употребление в календаре очень близко к 380 г. до н. э. Это дает предложению Метона ввести такой цикл приоритет почти в 50 лет, и допускает возможность оригинального открытия его в Греции. С другой стороны, Сакс (A. S a c h s, J. Cuneiform Studies, 6, 1952, стр. 113) выдвинул доводы в пользу того, что вавилонские правила вставок были связаны с наблюдениями гелиакических восходов Сириуса до 380 г. до н. э.

В связи с этим следует заметить, что в вавилонских астрономических текстах «год» всегда означал сидерический год (см. N e u g e b a u e r, ACT, стр. 70), но нет никаких оснований полагать, что была осознана разница между сидерическим, тропическим и аномалистическим годом [1]). По-видимому,

---

[1]) Сидерический (звездный) год — период между последовательными возвращениями Солнца к той же звезде. Тропический год — период между последовательными прохождениями Солнца через точку весеннего равноденствия (период смены времен года). Аномалистический год — период между последовательными перигеями в кажущемся вращении Солнца вокруг Земли. (*Прим. ред.*)

Птолемей первым под «годом» понимал «тропический год» (см. «Альмагест» III, 1, стр. 192 и след. в издании Heiberg).

В последние годы принято было считать (см., например, первое издание этой книги или статью ван-дер-Вардена в Archiv für Orientforschung 16, 1953, стр. 22), что самое раннее упоминание фактических знаков зодиака в Вавилоне относится к 419 г. до н. э. Копия текста, о котором идет речь, — астрономического дневника на 418/417 гг., была опубликована Вейднером (Archiv für Orientforschung 16, табл. XVIII), и показывает, что, наоборот, знаки зодиака еще не были введены. Имеются четыре отрывка (лиц. 7 и 11, обр. 8 и 11, след.), в которых говорится, что планеты находятся «позади» или «впереди» предполагаемых знаков зодиака. Из них ясно, что имелись в виду не знаки зодиака, а эклиптические созвездия (А. Сакс).

к 45. Бадж (Budge, The Rise and Progress of Assyriology, London, 1925) пишет о Штрассмайере так (стр. 228): «Он был убежден, что составление ассирийского словаря или написание истории шумерской и вавилонской цивилизаций было бы напрасной тратой времени в условиях, когда так много десятков тысяч табличек в Британском музее и других местах остаются неопубликованными». Сегодня можно повторить это утверждение, заменив «десятки тысяч» на «сотни тысяч».

к 46. «Тексты-наблюдения» проанализированы в работе A. Sachs, A classification of Babylonian Astronomical Tablets of the Seleucid Period, J. Cuneiform Studies, 2 (1950), стр. 271—290.

к 49. В качестве примера движения Солнца по системе A я вычислил данные для того же года, которым мы пользовались на стр. 117 для системы B. Эти данные легко получить из немного более ранних или немного более поздних эфемерид. Практически все тексты системы A составляют одну-единственную эфемериду, без каких-либо отклонений, начиная от самых ранних и до самых поздних известных текстов. Этого нельзя сказать о системе B и поэтому при всяком сравнении обеих систем нужно считаться с возможностью того, что тексты системы B имеют небольшие индивидуальные отклонения. Тем не менее ясно, что разница в методах может привести к расхождению в колонке B примерно на 2° солнечной долготы. Но это не значит, что и в колонке с окончательными результатами будет такое же большое расхождение.

Эфемерида системы A приводит к следующим значениям:

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $XII_2$ | 22,18,45 | ♈ |
| 2,59 | I | 20,26,15 | ♉ |
| | II | 18,33,45 | ♊ |
| | III | 16,41,15 | ♋ |
| | IV | 14,48,45 | ♌ |
| | V | 12,56,15 | ♍ |
| | VI | 12,56 | ♎ |
| | VII | 12,56 | ♏ |
| | VIII | 12,56 | ♐ |
| | IX | 12,56 | ♑ |

| | | |
|---|---|---|
| X | 12,56 | ♒ |
| XI | 12,56 | ♓ |
| XII | 11,56,15 | ♈ |

Пунктирные линии указывают на разрывы в ♍ 13 и ♓ 27, где месячная скорость Солнца меняется с 28;7,30° до 30°, и наоборот.

Для последнего месяца года совпадение с системой B очень хорошее. Для 2,58 $XII_2$ система B дает ♈ 22;8,18,16, система A — ♈ 22;18,45. Для 2,59 XII мы имели ♈ 11;30,48,56, а теперь — ♈ 11; 56, 15. Но для середины года расхождение больше: перед первым разрывом линейная зигзагообразная функция приводит к значению ♍ 14;58,18,18, а система A — к значению ♍ 12;56,15.

к 50. O. Neugebauer, «Saros» and lunar velocity in Babilonian astronomy. Kgl. Danske Vid. Selsk., mat.-fys. medd., 31, 4 (1957).

к 51. «Сарос». Принято называть уравнение

223 синодических месяца=242 драконическим месяцам [1])

«вавилонским саросом» и считать, что на нем основывалось предсказание затмений у вавилонян и их преемников.

Против использования этой терминологии безуспешно протестовали Иделер (1825 г.)[2]), Таннери (1893 г.)[3]), Скиапарелли (1908 г.)[4]), Бигурдан (1911 г.)[5]) и Паннекук (1917 г.)[6]). Но только Иделер исследовал происхождение этого термина, и поэтому, мне кажется, стоит вновь напомнить основные его моменты как прекрасный пример создания общепринятых исторических мифов.

Шумерский знак «шар», помимо прочего, означает «Вселенную» или что-то похожее. Как числительное, он означает 3600, являя, таким образом, пример перехода от общей концепции множественности к конкретному большому числу.

В этом узком смысле, 3600 лет, «сарос» употребляет Берос [7]) (около 290 г. до н. э.) и, вслед за ним, Абиден [8]) (второе столетие н. э.) и Синкелл [9]) (около 800 г. н. э.).

В астрономическом смысле «сарос» впервые употребляется в энциклопедии Свида (около 1000 г. н. э.). Там говорится, что «сарос» — это «мера или число у халдеев» и затем добавляется, что один «сарос» содержит 222 месяца,

---

[1]) Драконический месяц — период между последовательными пересечениями в одном направлении лунной эклиптики. (*Прим. ред.*)

[2]) Ideler, Handbuch der... Chronologie, I, стр. 213.

[3]) Tannery, Recherches sur l'histoire de l'astron. anc., стр. 317.

[4]) Schiaparelli, Scritti, I, стр. 75.

[5]) Bigourdan, L'astronomie, стр. 33.

[6]) Pannekoek, The origin of the Saros. Koninklijke Akad. van Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings, 20 (1917), стр. 943—955. См. также Quellen und Studien z. Gesch. d. Math., Ser. B, том 4 (1937—1938), стр. 241 и след.; стр. 407 и след.

[7]) Фрагмент 29 и след. (Schnabel, Berossos, стр. 261 и след.).

[8]) Schnabel, Berossos, стр. 263, 30a (в строке 29 следует исправить καὶ, γ на καὶ, γ ,т. е. «и, 3» на «и 3000».

[9]) Schnabel, Berossos, стр. 261 и след.

т. е. 18 лет и шесть месяцев, а 120 саросов соответствуют 2222 годам [1]). Первое соотношение подразумевает, что год содержит ровно 12 месяцев. Это исключает вавилонский календарь. Второе соотношение является следствием первого, если допустить, что по ошибке переписчика вместо 2220 написано 2222; иначе оно бессмысленно. Ни в одном случае нет никакой связи с затмениями.

Плиний, NH II, 56 [2]) пишет о повторении затмений через 223 месяца. Рукописи содержат разные чтения этого числа: 213, или 293, или 222, или 235 [3]). Эдмунд Галлей имел в своем распоряжении текст Плиния с числом 222. Он понимал, что только 223 имеет смысл и предположил, что такую же поправку надо сделать у Свиды, источником которого он считал Плиния. Но он не обратил внимания на то, что все остальные числа у Свиды не согласуются с исправлением 222 на 223, и что они являются только выражением тривиального соотношения 1 год = 12 месяцам. Таким образом, Галлей предположил, что Свида хотел сказать, что 223 месяца назывались одним «саросом» и он опубликовал это предположение в Philosophical Transactions, 1691 (стр. 535—540; перепечатано в Acta Eruditorum. 1692, стр. 529—534).

Гипотеза Галлея была сурово раскритикована Лежантилем [4]) в 1766 г., после того, как она в форме факта, а не гипотезы была повторена Монтюкла́ в первом издании его истории математики (M o n t u c l a, Histoire des mathématiques, 1758). Более осторожная формулировка во втором издании (1802 г.) оказалась слишком поздней, чтобы иметь какой-либо эффект. После Монтюкла́ для всех руководств стало догмой, что вавилоняне использовали «сарос» для предсказания затмений. В результате работы Куглера (1900 г.) мы узнали, как на самом деле определяли затмения в период Селевкидов: это делалось путем тщательного исследования широты Луны в моменты сизигий. Тем не менее имеются определенные указания на то, что для описания периодических повторений лунных затмений в предыдущий период пользовались примерно 18-летним циклом, употреблявшимся также и для других лунных явлений.

Миф о саросе часто используется для «объяснения» приписываемого Фалесу предсказания солнечного затмения 28 мая 584 г. до н. э. Для солнечных затмений, видимых в данном месте, не существует никакого цикла; все современные циклы относятся к Земле в целом. Никакой вавилонской теории для предсказания солнечных затмений в 600 г. до н. э. не существовало; об этом свидетельствует весьма неудовлетворительное состояние, которое мы наблюдаем, спустя 400 лет. Не разработали вавилоняне и никакой теории, учитывавшей влияние географической широты. Можно смело сказать, что рассказ о предсказании Фалесом солнечного затмения не более достоверен, чем другой рассказ о предсказании Анаксагором падения метеоритов.

Даже и с чисто исторической точки зрения весь рассказ кажется очень сомнительным. Наш самый ранний источник, Геродот (I,74), сообщает, что Фалес правильно предсказал ионийцам «это исчезновение дневного света» «для того года», в котором оно действительно произошло. Вся эта формулировка сама по себе так расплывчата, что исключает применение какого-либо точного метода. Чем дальше мы уходим от времени Фалеса, тем щедрее приписывают ему древние авторы математические и астрономические открытия. Я не вижу ни одного заслуживающего доверия элемента ни в одном из этих рассказов, столь популярных в истории науки (см. стр. 149). В этой связи можно привести заключение из статьи Кука (R. M. C o o k, Ionia and Greece 800—600 B.C., J. Hellenic Studies, 66, 1946, стр. 67—98):

---

[1]) Издание A. Adler, IV, стр. 321.

[2]) Издание «Естественной истории» Ian—Mayhoff I, стр. 144; Loeb Class. Libr., I, стр. 204—205.

[3]) См. критические замечания в издании Ian—Mayhoff. Число 235, очевидно, было подсказано 19-летним «метоновским» циклом, содержащим 235 месяцев.

[4]) Mémoires Acad. Royale des Sci. Paris за 1766 г., стр. 55 и след.

«Я могу лишь прийти к выводу, что наши знания недостаточны, чтобы определенно сказать, были ли вообще в восьмом и седьмом веках ионийцы пионерами греческого прогресса, но на основании имеющихся в настоящее время свидетельств, по меньшей мере столь же вероятно, что не были».

Такая осторожная точка зрения, к сожалению, далеко не общепринята. Приведу только одну забавную небылицу, возникшую из рассказа о затмении, предсказанном Фалесом. В научном труде (C. W e n d e l, Die griechisch-römische Buchbeschreibung verglichen mit der des vorderen Orients, Halle, 1949) Вендель заявляет (стр. 20 и след.), что пионеры «Bahnbrecher» ионической науки должны были иметь в своем распоряжении «поражающую богатством» библиотеку и Фалес должен был быть ее «духовным основателем». Нечего и говорить о том, что занятия Фалеса в Египте также трактуются очень серьезно. К сожалению, нам известно от Диодора, I, 38, что Фалес настолько мало знал о Египте, что мог предложить теорию, согласно которой разлив Нила начинается в «устье реки, когда летние ветры со Средиземного моря... препятствуют стоку воды в море».

к 52. Задача колонки $Q$ состоит в следующем. В колонке $O$ путем умножения времени, прошедшего после соединения, на относительную скорость перемещения захода Луны по отношению к заходу Солнца, устанавливается элонгация $\Delta\lambda$ Луны от Солнца для критического вечера. Это все равно, что спросить, сколько нужно времени, чтобы зашла дуга $\Delta\lambda$ эклиптики, или, что равносильно, взошла диаметрально противоположная дуга эклиптики. Но для определения времени восхода дуг эклиптики известны арифметические схемы (см. ниже стр. 159 и рис. 26), решающие задачу преобразования долготы $\lambda$ в прямое восхождение $\alpha$. Как я показал в J. Cuneiform Studies, 7 (1953), стр. 100—102, точно тот же коэффициент появляется при преобразовании $O = \Delta\lambda$ в $Q = \Delta\alpha$.

к 56. О схемах для вычисления дат появлений ($\Gamma$) противостояний ($\theta$) и исчезновений ($\Omega$) Сириуса см. статью A. S a c h s, Sirius Dates in Babylonian Astronomical Texts of the Seleucid Period, J. Cuneiform Studies, 6 (1952), стр. 105—114.

к 57. O. N e u g e b a u e r, The Babylonian method for the computation of the last visibility of Mercury. Proc. Amer. Philos. Soc., 95 (1951), № 2.

к 58. О вавилонской теории планет см. том 2 моих Astronomical Cuneiform Texts. Как возникли эти методы, пока еще не известно. Сакс классифицировал не строго математические тексты (A. S a c h s, J. Cuneiform Studies, 2, 1950, стр. 271—290), среди которых также ясно различаются элементы наблюдений и данные вычислений, полученные, например, на основе периодических повторений.

Помимо этих четко определенных классов, имеются процедурные тексты, занимающие промежуточное положение, и, очевидно, предшествовавшие созданию окончательной математической теории. Тексты этого типа до сих пор представляют значительные трудности из-за непонятной терминологии, сложного характера исторического фона и т. п. Несколько копий таких текстов было опубликовано в книгах T h u r e a u-D a n g i n, Tablettes d'Uruk (Paris, 1922) и P i n c h e s—S t r a s s m a i e r—S a c h s (см. стр. 140). До сих пор Саксу и мне удалось с разумной степенью уверенности объяснить смысл только одного из текстов (J. Cuneiform Studies, 10, 1956, стр. 131—136).

к 59. Часто пишут о секретности древних восточных наук, совершенно не пытаясь выяснить, откуда возникло такое мнение. Действительно, существуют примеры «шифрованного» письма, как в Египте, так и в Месопотамии. Например, в мифологических надписях, сделанных вокруг небесной богини в гробнице Сети I, содержатся тайнописные отрывки. В некоторых из этих отрывков используется редкое чтение иероглифов, другие же просто представляют собой неправильно расположенные строки оригинала, с которого копировал художник. В близком тексте, касающемся солнечных часов, слова написаны в обратном порядке, как отражение в зеркале, но это не составляет действительных трудностей для прочтения. В целом же все математические или астрономические тексты не обнаруживают ни малейшего намерения скрыть их содержание от читателя. Я думаю, следует согласиться с Питом, издателем математического папируса Ринда, что нет никаких оснований предполагать существование какой-либо секретной науки в Египте.

То же относится и к Вавилону. Древневавилонские математические тексты написаны с максимальной возможной ясностью. От позднейшего периода сохранилось несколько текстов, содержащих ряды чисел и знаков, предназначенных, очевидно, для шифровки и дешифровки. Несколько слов и имен написаны таким шифром в колофонах двух эфемерид. В самих эфемеридах, так же как и в процедурных текстах, не видно никаких следов попыток скрыть их содержание. Если многие детали остаются для нас непонятными, то причиной этого является наше неведение и отсутствие части текстов, а не намеренная шифровка. Я думаю, что встречающееся иногда в конце урукских текстов замечание, что текст следует показывать только «знающим», не следует воспринимать слишком серьезно. Оно вряд ли означает что-либо большее, чем профессиональную гордость и чувство собственного значения гильдии писцов.

Тайнопись применялась также и в греческих рукописях византийского периода; например, употреблялся прием, основанный на простой перестановке букв и их числовых значений в обратном порядке; см., например, V. Gardthausen, Griechische Paleographie, II (изд. 2-е, Leipzig, 1913), стр. 300 и след. Магические тексты, конечно, полны секретных комбинаций букв; астрологические же тексты практически свободны от такой секретности.

В шестой главе «Сурья-Сиддханты» рассматривается графическое представление различных фаз затмения. Эта глава кончается замечанием: «Эту тайну богов не следует разглашать всем подряд: она должна становиться известной хорошо испытанному ученику, в течение года проходившему обучение». Барджесс правильно говорит: «Кажется немного странным, что столь второстепенный вопрос ... так тщательно охранялся...». Тоже относится к построению глобуса неба (Sūrya—S., XIII, 17, а также Pañca—S., XIV, 28). Аналогично, одна из наиболее тривиальных глав в «Панча-Сиддхантике» (XV) называется «секреты астрономии». Создается впечатление, что здесь мы имеем дело с очень старым разделом, который можно опустить без всякого ущерба для понимания остального.

Имя Киденас-Кидинну обычно связывают с городом Сиппар и его школой астрономов, упоминаемой античными авторами, цитированными выше на стр. 139. Но Сакс понял, что отрывок, о котором идет речь, был неправильно прочтен Штрассмайером (см. Neugebauer, ACT, I, стр. 22, колофон $Z_0$). Мы не имеем ни одного астрономического текста из Сиппара[1]).

---

[1]) О новейших достижениях в изучении вавилонской астрономии см. также статью О. Нейгебауера, Problems and methods in Babylonian mathematical astronomy, Astronomical Journal, 72, № 8 (1967). (*Прим. ред.*)

ГЛАВА VI

# ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЛИНИСТИЧЕСКОЙ НАУКИ

**60.** Любая попытка воссоздать происхождение эллинистической математики и астрономии должна считаться с тем фактом, что после «Начал» Евклида и «Альмагеста» Птолемея все предшественники этих ученых стали представлять лишь чисто «исторический интерес», с очень малыми шансами на сохранение. Как однажды сказал Гильберт, значение научной работы можно измерить числом предыдущих публикаций, чтение которых становится ненужным после этой работы.

Поскольку Евклид работал немногим более чем сто лет спустя после возникновения научной математики, восстановить ее предысторию легче, чем сделать то же в случае астрономии. Евклид жил сравнительно рано (около 300 г. до н. э.) и оставил место для двух или более веков активного развития, осуществлявшегося такими людьми, как Архимед и Аполлоний. Птолемей (около 150 г. н. э.) жил близко к концу эллинистической эры, и его работа охватывает практически все астрономические достижения, доступные древним математическим методам. Тщательный чисто математический анализ трудов Евклида дал ценную информацию об основных предшествовавших ему ступенях развития, на которых он построил свои «Начала». Работа Птолемея посвящена исключительно изложению одного единообразного метода описания небесных явлений. На основе «Альмагеста» мы не можем составить никакого представления о существовании совершенно других методов, греческих и восточных, которые предшествовали «Альмагесту», а иногда и пережили его.

Наконец, надо учесть, что за редкими исключениями, «Начала» Евклида касались чисто греческих достижений в резко очерченной области. Астрономия Птолемея, вероятно, в значительной степени построена на результатах, полученных за 300 лет до него Гиппархом, в свою очередь находившимся под влиянием как греческих, так и вавилонских идей. Поэтому проблемы, связанные с историей астрономии, гораздо более запутаны, чем в случае математики. К тому же греческие математические методы непосредственно понятны современным математикам, тогда как древние астрономические трактаты оперируют такими терминами, задачами, эмпирическими и численными методами, которые в наше время уже непривычны. Это положение находит отражение и в современном обсуждении этих вопросов. По истории греческой математики имеются вполне компетентные и полные руководства, но мы еще очень далеки от этой цели в истории древней астрономии.

61. Утверждение, что греческая математика в духе Евклида является чисто греческим достижением, не означает отрицания общей восточной первоосновы греческой математики в целом. Действительно, математика эллинистического периода, и в еще большей степени — позднейших периодов в какой-то мере является лишь звеном в непрерывной традиции, ведущей от самых ранних периодов древней истории и вплоть до начала нового времени. В качестве особенно яркого примера можно привести элементарную геометрию, представленную в эллинистический период работами, известными под именем Герона Александрийского (вторая половина первого века н. э.). Иногда заявляют, что эти трактаты по геометрии свидетельствуют об упадке греческой математики, и это действительно было бы верно, если бы можно было считать эти работы продолжением трудов Архимеда и Аполлония [1]). Но такое сравнение несправедливо. В свете наших недавно приобретенных сведений о вавилонских текстах, геометрию Герона следует рассматривать только как эллинистическую форму общей восточной традиции. Тот факт, например, что Герон складывает площади и отрезки, нельзя больше считать еще одним признаком быстрого вырождения так называемого греческого духа; он просто отражает алгебраическую или арифметическую традицию Месопотамии. На этом более элементарном уровне аксиоматическая школа в математике оказывала столь же малое влияние, какое она оказывает сегодня на землемера. В результате некоторые отрывки из работ Герона в практически неизменном виде пережили гибель научной математики в поздней древности. Целые разделы из этих работ мы снова находим столетия спустя в одном из первых арабских математических трактатов, знаменитой «Алгебре» ал-Хорезми (между 800 и 850 гг.). Эта связь особенно легко заметна на чертежах. Для того чтобы примеры решались в круглых числах, фигуры составлялись из нескольких стандартных прямоугольных треугольников. Один из этих стандартных примеров показан на рис. 21, имеющемся как у Герона, так и у ал-Хорезми. Два прямо-

---

[1]) Критику концепции «упадка» греческой математики после Аполлония см. также в работе И. Г. Башмаковой «О некоторых проблемах истории античной математики», Историко-математические исследования, т. XV, 1963, стр. 37—50, разд. IV. (*Прим. ред.*)

угольных треугольника со сторонами 8, 6 и 10 приложены друг к другу так, что они образуют один равнобедренный треугольник с высотой 8 и основанием 12. В него требуется вписать квадрат. Получающееся линейное уравнение дает для стороны квадрата значение $4\,\bar{2}\,\bar{5}\,\overline{10}$, т. е. $4\frac{4}{5}$. Стиль формулировок подобных задач, способ их решения на специальных числовых примерах — все это близко напоминает вавилонские математические тексты. Подобное сравнение можно провести для различных разделов эллинистической и арабской математики, таких, как задачи на наследование, алгебра в стиле Диофанта и т. п. Это не значит, что эллинистические и тем более арабские авторы имели возможность непосредственно пользоваться вавилонскими материалами. Все, что мы можем с уверенностью сказать,— это что должна была существовать непрерывная традиция, связывавшая месопотамскую математику эллинистического периода с современными ей семитическими (арамейскими) и греческими авторами и, наконец, с индийскими математиками и математиками стран ислама.

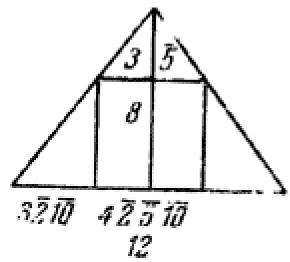



Рис. 21.

62. Возникает вопрос, заметно ли какое-либо восточное влияние в научной ветви греческой математики. Мой ответ на этот вопрос нельзя подтвердить документальными свидетельствами, но следующая рабочая гипотеза, мне кажется, учитывает известные нам факты: теория иррациональных величин и связанная с ней теория интегрирования имеют чисто греческое происхождение, а содержание «геометрической алгебры» использует результаты, известные в Месопотамии.

Чтобы подтвердить эту мысль, следует сделать несколько замечаний об историческом развитии греческой математики. Прежде всего, представляется необходимым резко разграничить аксиоматический стиль в математике, который был создан Евдоксом и его современниками в четвертом веке до н. э., и математику, обычно связываемую с ионической и южноитальянской школами. Я не вижу оснований отрицать сравнительно большой объем знаний в ранний период, знаний, которые включали или даже в некоторых пунктах превосходили знания, засвидетельствованные месопотамскими источниками. Но мне кажется очевидным, что традиционные рассказы об открытиях, сделанных Фалесом или Пифагором, следует отбросить, как совершенно неисторические. Фалесу, например, приписывают открытие того, что площадь круга делится диаметром на две равные части. Этот рассказ явно отражает взгляды гораздо более позднего периода, когда стало ясно, что факты такого рода требуют доказательств, прежде чем их можно использовать в последующих теоремах. Математикам более позднего периода естественно было предположить, что теоремы, которые с точки зрения логики должны быть установлены первыми, были первыми и хронологически. Фактически греческие историки поступали точно так же, как и современные историки, когда они не располагают первоисточниками: они восстанавливали последовательность событий в соответствии с требованиями современной им теории. Сегодня мы знаем, что все те фактические математические сведения, открытие которых приписывали ранним греческим философам, были на самом деле известны за много столетий до них, хотя и нет свидетельств никакого формального метода, который математики четвертого столетия назвали бы доказательством. Единственное, что нам остается, — это признать, что мы не имеем никакого понятия о том, какова была истинная роль традиционных героев греческой науки. Но мне кажется характерным, что Архит из Тарента мог утверждать, что не геометрия, а только арифметика может дать удовлетворительные доказательства. Если таково было мнение ведущего математика среди поколения, непосредственно предшествовавшего рождению аксиоматического метода, то совершенно очевидно, что ранняя греческая математика не могла сильно отличаться от математики героно-диофантова типа.

Общепринято также мнение, что существенный поворот в развитии математики связан с выяснением последствий того арифметического факта, что нельзя найти два таких целых числа, квадрат отношения которых равен 2. Геометрическое следствие, что диагональ квадрата не может быть «измерена» его стороной, несомненно, вызвало серьезные споры об отношении между геометрическим и арифметическим доказательствами. «Парадоксы», касающиеся непрерывности как времени, так и пространства, связали эти вопросы со всей проблемой определения площадей и объемов. Одним из выходов могло быть допущение в некотором роде атомистической структуры геометрических объектов, при помощи которого задача об определении площади или объема сводилась, хотя и не совсем ясным образом, к подсчету дискретных элементов, «атомов».

Реакция математиков против спекуляций такого рода, по-видимому, привела к двум основным следствиям. Прежде всего, нужно было точно условиться о системе основных предпосылок, из которых одних следовало вывести все остальное; это привело к развитию строго аксиоматического метода. Во-вторых, стало ясно, что геометрические объекты следует рассматривать как данные сущности, так что целочисленные отношения выступают как частный случай лишь второстепенного значения; это привело к проблеме перевода классических арифметических и алгебраических сведений на язык геометрии. Результатом явилась знакомая нам «геометрическая алгебра» греческой математики. Оба эти существенных шага следует полностью отнести в актив греческих математиков.

Положение меняется, когда мы ставим вопрос о происхождении тех математических соотношений, которые были объединены в систематический свод геометрически доказываемых законов. Все, что прямо связано с теорией и классификацией иррациональных величин, конечно, имеет греческое происхождение; это же относится и к строгой теории приемов интегрирования. Что же касается элементарной теории чисел, то она могла быть, а могла и не быть в конечном счете основана на значительно более старом восточном материале. Я не сомневаюсь в том, что всякая связь с именем Пифагора является чистой легендой и не имеет никакой исторической ценности.

Но наиболее интересным вопросом мне кажется проблема возникновения «геометрической алгебры». Мы видели, что вавилонский подход к уравнениям второго порядка состоял в сведении их к «нормальной форме», где две величины, $x$ и $y$, нужно найти по их произведению и сумме или разности. Кажется знаменательным, что геометрическая формулировка этой задачи приводит непосредственно к центральной проблеме геометрической алгебры, проблеме, происхождение которой иначе довольно трудно понять. Эта задача, называемая «приложением площади», в простейшей своей форме состоит в следующем. Даны площадь $A$ и отрезок $b$; построить прямоугольник площади $A$, одна из сторон которого направлена по отрезку $b$ таким образом (рис. 22), чтобы прямоугольник равной высоты и длины $b$ получался из построенного прямоугольника добавлением или удалением квадрата. Равносильность этой странной геометрической задачи с вавилонским приведением к «нормальной форме» сразу станет очевидной, если мы сформулируем задачу алгебраически. В обоих случаях обозначим через $x$ и $y$ стороны прямоугольника. Тогда нам дано, что

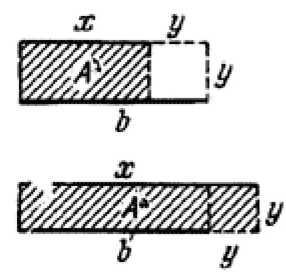


Рис. 22.

$$xy = A.$$

В первом случае квадрат должен быть снаружи; его стороны равны $y$, и мы должны потребовать, чтобы

$$x + y = b.$$

Во втором случае квадрат находится внутри прямоугольника со стороной $b$; поэтому мы будем иметь

$$x - y = b.$$

Это и есть две нормальные формы (см. стр. 55).

Делались попытки объяснить задачу «приложения площадей» независимо от этой алгебраической трактовки. Несомненно, однако, что приведенное сейчас предположение, что эта задача представляет собой прямую геометрическую интерпретацию нормальной формы квадратных уравнений, является значительно более простым и прямым объяснением. Я понимаю, что простота ни в коей мере не эквивалентна историческому доказательству. Тем не менее, по меньшей мере следует допустить возможность такого объяснения. Можно не сомневаться в том, что в вавилонских школах писцов того периода обучали численному решению квадратных уравнений, поскольку это засвидетельствовано даже в более поздние периоды клинописного письма. Единственный серьезный вопрос состоит в том, каким именно путем это учение нашло дорогу в Грецию. Здесь мы можем только строить догадки. Но, мне кажется, не требуется слишком много воображения, чтобы представить себе распространение математических знаний с Ближнего Востока в Грецию в период, близкий к кануну македонского наступления на Персидскую империю.

В истории спекулятивной мысли много говорилось о прямом контакте Платона и Аристотеля с Востоком. Сообщается, что один иранец рассказал Платону о религии Заратустры. Предполагается, что Каллисфен, племянник Аристотеля, даже привез в Афины вавилонские астрономические записи. Это последнее сообщение не слишком достоверно, как правильно подчеркнул Мартен еще в 1864 г. Никакого упоминания об этом у самого Аристотеля нет и оно основано только на сообщении Порфирия (третий век н. э.), переданном Симпликием (шестой век н. э.); но хуже всего, что предполагается, будто эти вавилонские наблюдения простираются на 31000 лет назад. Как бы то ни было, несколько лет спустя Вавилон был уже под владычеством греков, и не требуется литературных свидетельств, чтобы доказать, что начиная с этого времени греки имели доступ к вавилонской науке. Однако когда заходит речь о контактах с Востоком Евдокса, по-моему, необходима осторожность. Я не вижу веских оснований отрицать возможность его поездки в Египет, но мне кажется несомненным, что в самом Египте нечему было учиться, а гипотеза о том, что вавилонская наука достигла Египта раньше Греции, кажется мне только попыткой заменить одно название неизвестной величины другим. При настоящем состоянии наших знаний ни одно из этих преданий существенно не способствует проникновению в суть исторических событий.

63. У самих греков имелось несколько теорий происхождения математики. Одна теория, которую многие предпочитали и которая до сих пор живет в современных руководствах, считает, что геометрия возникла из необходимости неоднократных измерений земельных участков. Точно так же современные авторы часто ссылаются на чудеса египетской архитектуры, хотя никогда не приводят какую-либо конкретную задачу статики, решаемую известными египтянам арифметическими средствами. Гораздо более своеобразную позицию занимал Аристотель, считавший существование «свободного класса» (в современной терминологии) необходимым условием научной работы. Я считаю, что сведения о развитии научной мысли и о социальном положении людей, развивав-

ших науку, столь отрывочны, что совершенно невозможно проверить ни одну из подобных гипотез, какой бы вероятной она ни казалась нашему современнику.

Мне кажется столь же невозможным дать какое-либо убедительное «объяснение» возникновения высшей математики в пятом и четвертом веках в Афинах и греческих колониях в Италии. Я думаю, что можно высказать лишь вполне определенное отрицательное суждение, а именно, что роль Платона была сильно преувеличена. Его собственный прямой вклад в математические знания, очевидно, был равен нулю. Тот факт, что в течение короткого времени математики такого ранга, как Евдокс, принадлежали кругу Платона, не является доказательством влияния Платона на математические исследования. Исключительно элементарный характер примеров математических рассуждений, приводимых Платоном и Аристотелем, не подтверждает гипотезы о том, что Теетет или Евдокс чему-либо научились у Платона. Часто допускаемая идея, что Платон «направлял» исследования, к счастью, родилась не из фактов. Его совет астрономам заменить наблюдения спекуляцией мог бы разрушить один из наиболее значительных вкладов греков в точные науки. Доктрины Платона, несомненно, оказали большое влияние на интерпретацию греческой науки в новое время. Но если бы ученые нашего времени уделили столько же внимания Галену или Птолемею, сколько Платону и его последователям, то они пришли бы к совершенно другим выводам и не изобрели бы мифа о замечательном свойстве так называемого греческого духа развивать научные теории, не прибегая к эксперименту или опытной проверке.

64. Строение нашей планетной системы действительно таково, что Ретик мог сказать: «планеты вновь и вновь показывают все те явления, которые богу было желательно, чтобы видели с Земли». Исследования Хилла и Пуанкаре показали, что даже небольшие изменения в начальных условиях привели бы к тому, что Луна двигалась бы вокруг Земли по кривой, общий вид которой дан на рис. 23; при этом ее скорость в самых дальних квадратурах $Q_1$ и $Q_6$ была бы весьма мала по сравнению со скоростью при ново- и полнолунии. Никому бы не пришла в голову мысль, что Луна вращается вокруг Земли по кругу, и все философы объявили бы логической необходимостью, что между двумя полнолуниями шесть раз бывает видна половинка Луны. А что случилось бы с нашим представлением о времени, если бы мы находились в системе двойной звезды (возможно, с неравномерным распределением массы в нашем маленьком спутнике) — это остается предоставить воображению.

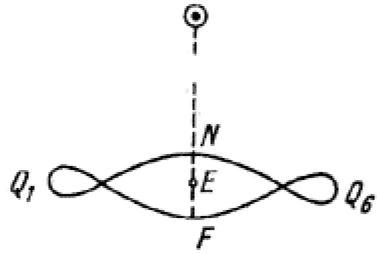


Рис. 23.

Фактически, однако, начальные условия нашей планетной системы были выбраны таким образом, что все спутники Солнца, и наш собственный спутник тоже, ведут себя очень скромно. Их орбиты могут быть хорошо аппроксимированы кругами, так что простейшая возможная модель кругового движения с постоянной скоростью немедленно приводит к вполне разумному описанию солнечных и лунных явлений. С другой стороны, отклонения от тривиальных круговых орбит достаточно велики, чтобы их заметить, и чтобы они требовали объяснения, но достаточно малы, чтобы опять-таки сравнительно простые модификации тривиального решения дали удовлетворительные результаты. Последовательные приближения вавилонской теории Луны и планет прекрасно отражают это положение. В основе их лежит вычисление периодически повторяющихся явлений; правильно выбранные периодические функции, зигзагообразные или ступенчатые, достаточны для описания отклонений от тривиального среднего движения.

Возможно, несколько ранее, чем эти методы были развиты в Месопотамии, а может быть, почти одновременно, Евдоксом был сделан решающий шаг в другом направлении. Открытие незадолго перед тем сферической формы Земли должно было навести на мысль об аналогичной сферичности неба и о круговом движении небесных тел. Теория Евдокса вполне могла возникнуть из следующих соображений. Движение Солнца и Луны можно описать как комбинацию равномерных движений двух концентрических сфер: одно из них — быстрое суточное вращение вокруг полюсов экватора; другое — медленное вращение в обратном направлении вокруг наклонной оси, перпендикулярной к эклиптике. Евдокс видел, что подобная комбинация может объяснить, по крайней мере качественно, также и наиболее поразительное явление движения планет, а именно — попятное движение. Движение двух концентрических сфер допускает два тривиальных предельных случая. Если обе оси совпадают, то тело, закрепленное у экватора одной из сфер, просто движется по кругу со скоростью, равной разности скорости сфер. Второй случай получается, если противоположные скорости сделать равными по величине, так что тело будет казаться из центра неподвижным. Тут возникает интересный вопрос: какое движение получится при равных противоположных скоростях, но наклонных осях? Евдокс нашел, что орбита будет иметь форму наподобие цифры 8 (рис. 24). Наложим теперь третье вращение вокруг оси, перпендикулярной к плоскости симметрии, представляющей собой плоскость эклиптики. В результате точка $P$

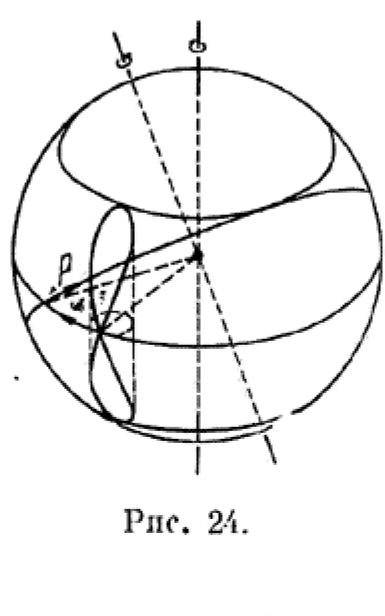


Рис. 24.

больше не будет двигаться по замкнутой кривой, а отправится с некоторой средней скоростью вдоль эклиптики. Но одновременно возникнет периодическое отклонение от эклиптики, или движение по широте. Наконец, мы получим попятное движение, если компонента скорости по долготе окажется меньше скорости возвратного движения по первоначальной фигуре 8. Таким образом установлено, что, по меньшей мере качественно, даже видимые неправильности планетного движения можно описать при помощи комбинации круговых движений с постоянными угловыми скоростями.

Несмотря на большое принципиальное значение открытия Евдокса, совершенно ясно, что модель такого типа имеет серьезные недостатки.

Например, наблюдаемое попятное движение планет не происходит по кривым одинаковой формы, как должно быть в модели Евдокса. Другая трудность заключается в большом изменении яркости планет, что как будто указывает на соответствующие изменения их расстояний от Земли. Мы не знаем, кто первый успешно объяснил эти и сходные аномалии при помощи значительно более гибкого варианта теории равномерного кругового движения. Но мы знаем, что Аполлоний (около 200 г. до н. э.) использовал простой способ, состоящий в наблюдении за равномерным круговым движением не из центра орбиты, а из слегка смещенной (эксцентричной) точки. Это, очевидно, приводит к тому, что движение кажется быстрее там, где круг ближе к наблюдателю, и медленнее на противоположном участке. Но Аполлоний доказал больше. Он показал, что эксцентрическое движение такого типа всегда можно заменить эпициклическим движением, при котором центр эпицикла движется по кругу с центром в наблюдателе и с радиусом эпицикла, равным эксцентриситету (рис. 25). Для этого нужно только подобрать угловые скорости таким образом, чтобы точка $P$ и наблюдатель $E$ оставались в вершинах параллелограмма $SPCE$. Но как только введены эпициклы, становится ясно, что движение $P$ вокруг $S$ можно выбрать так, что наблюдателю в $E$ будет казаться, что $P$ совершает попятное движение (мы уже говорили об этом в связи с рис. 13, *б*) и 14, *в*) на стр. 128 и след.). Следовательно, модель концентрических сфер может быть оставлена, и единообразное описание всех небесных движений может быть получено при помощи эксцентриков и эпициклов. Но главный принцип, состоящий в фундаментальной роли кругового движения, казался блестяще подтвержденным. Это убеждение оставалось краеугольным камнем небесной «динамики» древней астрономии, наподобие закона инерции.

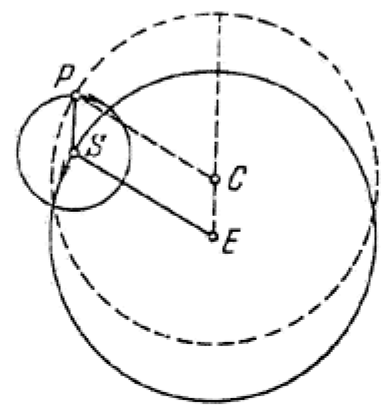


Рис. 25.

Но древние астрономы в принципе претендовали только на то, чтобы «описывать» видимые явления, а не «объяснять» их. Все, что действительно удавалось наблюдать, — это были угловые движения, за единственным исключением расстояний до Солнца и Луны, получаемых с помощью параллакса. Для планет же ни теория, ни наблюдения не были достаточно точны, чтобы надежно судить о расстояниях. В анализе геоцентрического описания гелиоцентрического движения на стр. 128 $S$ представляло Солнце. Теперь мы пытаемся только описать направление $EP$, в котором планета $P$ видна из $E$. Поэтому мы не можем больше говорить, что $S$ есть Солнце, а только что $ES$ есть направление к Солнцу. Во всем же остальном наши заключения остаются в силе. Таким образом, мы можем сказать, что угловое движение внутренней планеты описывается таким эпициклическим движением, при котором направление от $E$ к центру эпицикла $S$ совпадает с направлением от $E$ к Солнцу. А внешняя планета $P$ движется по своему эпициклу вокруг $C$ таким образом, что $CP$ всегда параллельно направлению от $E$ к Солнцу.

Это и есть основное положение греческой теории планет, построенной на эпициклах, с тем очевидным усовершенствованием, что мы должны были бы сказать «среднее Солнце», вместо просто «Солнце». Эта теория дает правильное описание видимых явлений в части, касающейся углового движения, и она была бы правильной гелиоцентрической теорией при правильном выборе масштаба. Отклонения второго порядка от этого приближения первого порядка можно объяснить дополнительным введением эксцентриситета и другими подобными способами, доведенными до совершенства Птолемеем. Только значительно более тонкие наблюдения смогли в конце концов обнаружить дефекты в допущении строго круговых движений.

**65.** Если еще раз взглянуть на этот набросок развития птолемеевой системы движения планет, то мы не увидим никаких причин, заставляющих допустить восточные влияния. Все, что мы знаем о египетской астрономии, исключает какую-либо возможность влияния этого источника. С другой стороны, нам известно, что вавилонская теория достигла почти таких же прекрасных результатов при помощи методов, которые не указывают ни на какую интерпретацию с помощью комбинаций круговых движений или других механических моделей. Действительно, зигзагообразная или ступенчатая функции практически исключали любую такую попытку. Тем не менее вавилонское влияние на греческую астрономию заметно в двух различных направлениях: во-первых, в предоставлении основного эмпирического материала для геометрических теорий, описанных в предыдущем пункте; во-вторых, в прямом продолжении арифметических методов, которые использовались одновременно с геометрическими методами и независимо от них.

Первое влияние было обнаружено тогда, когда Эппинг и Куглер расшифровали вавилонскую теорию Луны. Было установлено, что точно из тех же констант, которые определяли периоды нескольких наиболее важных зигзагообразных функций в вавилонской теории, были выведены средние движения в греческих теориях, особенно у Гиппарха (в той мере, в какой мы можем судить по ссылкам Птолемея в «Альмагесте»). Поскольку наиболее ранние вавилонские эфемериды предшествовали, хотя и не намного, времени Гиппарха, нельзя отрицать, что по меньшей мере эмпирические основы вавилонской теории должны были быть известны Гиппарху. Как до него дошли эти данные, и что он знал о фактической технике вычисления эфемерид, на основании наших источников мы сказать не можем. Обычно считают, что передача большой части астрономических знаний грекам произошла в результате учительской деятельности вавилонянина Бероса (переехавшего на греческий остров Кос около 270 г. до н. э.). Возможно, так оно и было, хотя сохранившиеся отрывочные выдержки из его работ не содержат никаких специальных ссылок на математическую астрономию. Чтó нам действительно было бы нужно для понимания подробностей передачи — это греческие комментарии к вавилонским эфемеридам и процедурным текстам. Где-то должен был быть сделан большой шаг от ежегодных эфемерид к таблицам, основанным на среднем движении, какие мы знаем из «Альмагеста». То, что мы даже приблизительно не можем ответить на такой вопрос, показывает, как мало мы знаем о раннем периоде эллинистической астрономии за пределами Месопотамии.

**66.** Вавилонское влияние не ограничивалось предоставлением основных констант для определения параметров геометрических моделей нашей системы планет. Значительно более прямое развитие вавилонских арифметических методов мы находим в греческих папирусах и встречающихся иногда ссылках на подробности вычислений в астрологической литературе. Совершенно так же, как «греческую» математическую литературу следует делить на два класса: чисто научное направление и более элементарную традицию, тесно связанную с Востоком, — так же и астрономические методы распадаются на две группы: одну, ведущую к «Альмагесту», и другую, вероятно, лучше известную среди астрологических авторов, вычислявших положения небесных тел при составлении гороскопов. Я называю этот второй класс методов «арифметическими» или «линейными методами», потому что они, по существу, основаны на последовательностях разностей первого порядка.

Следует ясно представлять, что такая классификация является не более чем удобным способом выражения и что существует много точек соприкосновения и взаимного влияния обеих крайних систем. Особенно следует предостеречь читателя от истолкования выражения «арифметические методы» в том смысле, что в «Альмагесте» численные методы каким-то образом исключены. Наоборот, справедливо обратное. В «Альмагесте» не только содержится большое число числовых таблиц, основанных в свою очередь на громадном количестве арифметических вычислений, но и конечная цель «Альмагеста» в точности та же, что и у «арифметических методов», а именно, дать численные характеристики астрономических явлений. Но «Альмагест» отличается своим стремлением объяснить эмпирические основания и теоретические предпосылки применяемых методов. И путь всегда начинается с определенной геометрической модели, из которой потом выводятся соответствующие арифметические следствия. Линейные же методы придерживаются исключительно операций с числами; такой подход нам теперь знаком по вавилонским текстам. Хотя не сохранилось никаких теоретических трактатов о линейных методах, ясно, что они покоятся на остроумно задуманных процедурах и на эмпирическом материале, который, возможно, очень схож для обоих методов. Тем не менее, понятие геометрической модели, по-видимому, полностью отсутствует в астрономической литературе второго типа. Это можно сравнить с отсутствием строго аксиоматической структуры в эллинистической математике типа Герона — Диофанта.

Прямой пережиток вавилонских методов легче всего обнаружить в одной важной задаче математической географии. В эллинистической и средневековой географии широту местности выражали в виде отношения самого длинного дня к самому короткому дню для данного района. Александрия, например, попадает в зону, в которой это отношение составляет 7:5; другими словами, самый длинный день длится 14 часов, а самая короткая ночь, длину которой считают равной длине самого короткого дня [1]), 10 часов. Таким же образом Вавилон характеризуется отношением 3:2. Следовательно, важное значение приобретает задача астрономического определения продолжительности дня. День будет самым долгим, когда Солнце находится в летнем солнцестоянии ♋ 0°. В этот день с восходом Солнца восходит точка ♋ 0°, так как Солнце находится в этой точке. При заходе Солнца в этот день Солнце и точка ♋ 0° садятся на западе, а точка ♑ 0° восходит, потому что в любой момент над горизонтом должно быть 180° эклиптики. Следовательно, можно сказать, что в течение самого долгого дня восходят шесть знаков зодиака ♋, ♌, ♍, ♎, ♏, ♐. Аналогично можно сказать, что в течение самого короткого дня

---

[1]) Это удобное предположение о точной симметрии дня и ночи всегда делали в древней астрономии. Фактически, однако, атмосферные влияния приводят к тому, что Солнце бывает видно дольше, чем если бы мы имели дело с математическим горизонтом. Следовательно, самый короткий день длиннее самой короткой ночи.

восходят шесть знаков от ♑ до ♊. Таким образом, мы можем определить колебания в продолжительности дня, если нам известно время восхода каждого отдельного знака зодиака. Если мы обозначим через $\alpha_1$ время восхода или «восхождение» ♈, через $\alpha_2$ — восхождение ♉ и т. д., то можем сказать, что самый долгий день равен сумме $\alpha_4 + \ldots + \alpha_9$, а самый короткий день — $\alpha_{10} + \ldots + \alpha_3$. В общем, для любого времени года мы знаем длину дня, если мы знаем время восхода того полукруга эклиптики, который начинается в точке нахождения Солнца.

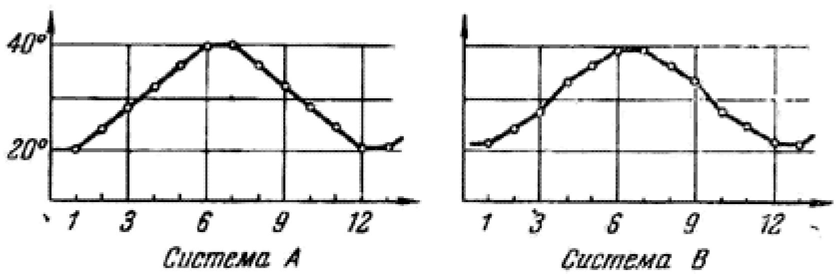



Рис. 26.

Значения восхождений зависят от переменного наклона эклиптики к горизонту и меняются довольно сложным образом [1]). Несмотря на это, для вычисления колонки $C$ (продолжительности дня) в вавилонских лунных эфемеридах (см. стр. 121 и след.) были разработаны арифметические схемы, учитывающие эти изменения и дававшие для крайних значений упомянутое выше отношение 3:2, характерное для широты Вавилона. Эти арифметические схемы несколько различны в системах A и B. В системе A величины $\alpha$ возрастают и убывают с постоянной разностью; в системе B в середине разность вдвое больше, чем в остальных местах (рис. 26).

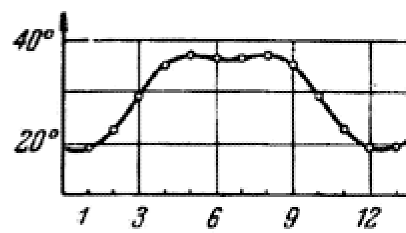



Рис. 27.

Правильная кривая выглядит так, как на рис. 27. Ее форма зависит от географической широты, впадина у вершины делается более заметной при продвижении к северу. Таблицы для этих восхождений приводятся во всех древних и средневековых астрономических работах. Эти таблицы конкретно демонстрируют то, что выше было сказано о классификации астрономической литературы. Их можно вычислять при помощи сферической тригонометрии; это приведет к значениям, представленным на рис. 27. Так сделано, например, в таблицах «Альмагеста» и более позд-

[1]) Для наблюдателя на экваторе времена восходов называют «прямыми восхождениями». Этот термин до сих пор используется в современной астрономии.

них греческих и арабских сочинений аналогичного характера. Но во многих работах меньшего масштаба можно найти восхождения для разных географических местностей, вычисленные по схемам точно такого типа, как в системах A и B, представленным на рис. 26. То же относится и к большинству астрологических сочинений вплоть до конца средних веков.

Может показаться странным, что примитивные арифметические схемы применялись еще долго после того как были найдены и использованы для вычисления таблиц правильные тригонометрические решения, причем сосуществовали не только тригонометрические и арифметические схемы, но и арифметические способы сохраняли двойственность систем A и B, унаследованную от вавилонских эфемерид. Это прекрасный пример «консерватизма» человеческой расы в целом, потому что параллелизм эквивалентных методов одинаково засвидетельствован у вавилонян, греков, римлян, евреев, христиан и мусульман.

Но и для ограниченной области истории математики проблема «восхождений» представляет большой интерес. Тщательное исследование ранней греческой сферической геометрии, особенно Феодосия и Менелая, показало, что эта проблема была одной из центральных во всей теории. Возможно, Менелай (около 100 г. н. э.) был первым, кто увидел, что сферическая геометрия должна базироваться только на больших кругах. В предшествовавший период получали только количественные результаты либо использовали графические методы. Один из них, по-видимому, был основан на открытии того, что стереографическая проекция сферы переводит окружности в окружности. Этот факт, безусловно, был известен в начале нашей эры, что видно из конструкции механических часов, представлявших подобно более поздним астролябиям небесные движения в плоскости. Гиппарх, не имевший в своем распоряжении сферической тригонометрии, мог решать сферические треугольники методом стереографической проекции.

67. В то время как вавилонское начало совершенно очевидно проявляется в арифметическом подходе к задачам о восхождениях и о продолжительности дня, мы сталкиваемся со значительно более сложной ситуацией в теории движения Луны. Проникновение в эту часть эллинистической астрономии началось сравнительно недавно и далеко не закончено. Пожалуй, правильнее сказать, что новая (и очень многообещающая) глава исследований только еще началась. Я попытаюсь обрисовать, как это произошло, потому что это типичный пример случайного характера нашего фактического продвижения, несмотря на все попытки планировать вперед направление исследований. На самом деле это, конечно, не очень удивительно, потому что систематическим путем можно достигнуть тех объектов, чьи очертания уже достаточно хорошо определены. И, конечно, в случае эллинистической астрономии и ее продолжателей дело обстоит совсем не так.

В 1922 г. Тюро-Данжен опубликовал копию таблички из Урука, находящейся теперь в Лувре и посвященной суточному движению Луны. Ее анализировал в 1927 г. Шнабель, обративший внимание на то, что параметры согласуются со значениями, приведенными Гемином в его «Введении» (около 100 г. до н. э.). С тех пор было обнаружено еще несколько табличек того же типа, и можно показать, что они принадлежат к одной согласованной эфемериде суточного движения Луны, простирающейся по крайней мере от —194/3 до —181/0 г. Эти тексты базируются на зигзагообразной функции, о которой мы уже упоминали на стр. 127. Ее период равен 248 дням; иными словами, предполагается, что наименьшее целое число дней между, скажем, двумя минимумами скорости Луны равно 248. Этот интервал покрывает девять полных колебаний скорости Луны, или девять «аномалистических месяцев», но длина одного такого аномалистического месяца не равна целому числу дней. Его длина определяется по нашей зигзагообразной функции как частное $\frac{248}{9} = 27;33,20$ дней. Это значение немного завышено и, очевидно, было выбрано для того, чтобы получить удобное круглое число для разности этой зигзагообразной функции, а именно, 0; 18 градусов в сутки. Более точное значение можно получить из самой вавилонской теории движения Луны, а именно, из колонок $F$ и $G$ (см. стр. 123 и след.). Так находим значение 27;33,16,26,54, допуская, что числа для $F$ и $G$ совершенно точны. Таким образом, ясно, что мы опять имеем дело с двумя конкурирующими и немного отличающимися один от другого методами вавилонской астрономии для описания движения Луны. Один метод основан на значениях большой точности и неявно применяется в таблицах для полно- и новолуний. Другой метод, для ежедневного движения, основан на удобно округленных параметрах. Историей этого второго метода мы сейчас и займемся.

Первый шаг был сделан Шнабелем в его статье 1927 г. В кратком приложении он заметил, что уравнение 9 аномалистических месяцев=248 дням было не только известно Гемину, но встречается и в индусской астрономии. Это вполне соответствовало открытию, сделанному в 1910 г. Куглером, и заключавшемуся в том, что отношение 3:2 самого долгого к самому короткому дню, вытекающее из колонок $C$ и $D$ обеих вавилонских систем лунных эфемерид, встречается также в индийской астрономии, хотя это отношение совершенно неверно для основных частей Индии.

Следующий шаг был сделан в другом направлении. Кнудцон установил, что фрагменты двух греческих папирусов в библиотеке университета в Лунде (Швеция) являются астрономическими, и вскоре после окончания второй мировой войны прислал мне их фотографии. Один из этих отрывков оказался частью папируса, находящегося теперь в Калифорнийском университете и принадлежащего к большому классу демотических и греческих папирусов, посвященных движению планет (см. выше стр. 104). Другой же фрагмент оказался новым типом лунных эфемерид, основанным на вавилонском уравнении: 9 аномалистических месяцев = 248 дням. Используемый в нем календарь основан на египетских годах (по 365 дней в каждом), и имеющийся отрывок относится к годам царствования Нерона и Веспасиана. Папирус содержит даты с интервалами в 248 дней и соответствующие долготы с интервалами 27;43,24,56°. Для иллюстрации приведем, например, следующие три последовательные строчки:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| год 6 | месяц VII | день 2 | ♍ | 5;3,21,31 |
| 7 | III | 5 | ♎ | 2;46,46,27 |
| 7 | XI | 13 | ♏ | 0;30,41,23 |

Отсюда легко найти среднюю скорость движения Луны. Поскольку 248 дней заключают в себе девять полных оборотов, то Луна за этот период проходит не только расстояние в 27;43,..., но и еще 9 раз по 360°. Поэтому мы к предыдущему числу добавляем 54,0°. Разделив сумму 54,27;43,24,56° на 248, получаем для суточного движения величину 13;10,32,16,..., что немного меньше стандартного вавилонского среднего значения, равного 13;10,35° в сутки. Очевидно, это отклонение является лишь следствием округления периода в 248 дней. Это подтверждается тем же текстом. Описанный процесс повторяется только 11 раз. После каждых 11 таких обыкновенных шагов, которые впредь мы будем обозначать $D$, вставляется один «большой» шаг $\Delta$ в 303 дня, и соответствующее движение Луны составляет 11 раз по 360 плюс 32;33,44,51°. Один такой большой шаг приводит к значению скорости Луны, равному 13;10,36,23,..., что несколько больше, чем можно было ожидать. Это показывает, что мы имеем дело с процессом последовательных приближений. Действительно, если мы примем 11 обыкновенных шагов плюс один большой шаг за одну единицу высшего порядка, $C = 11D + \Delta$, состоящую из 3031 дня, то получим для этого промежутка среднюю скорость 13;10,34,51,57,... Это значение очень близко к значению 13;10,35, причем мы знаем, что само число 13;10,35 должно быть результатом небольшого округления. Значение Птолемея, например, равно 13;10,34,58,33,30,30. Точно так же и величина аномалистического месяца, получаемая из $C$, является гораздо лучшим приближением, чем величина, получаемая из $D$; мы находим 27;33,16,21,..., что очень близко к ожидаемому 27;33,16,26,... Итак, мы видим, что группы высшего порядка создавались таким образом, чтобы избежать накопления ошибок, допускаемых при отдельных шагах.

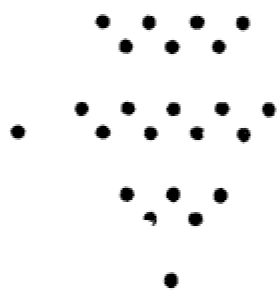
Можно показать, что выбранные моменты были моментами минимальной скорости. Зная даты и положения лунных апогеев, можно найти положения Луны для любой другой даты путем простого оперирования с хорошо знакомой зигзагообразной функцией для скорости Луны, начиная с минимума, и продвигаясь линейно вверх и вниз, пока не будет достигнута требуемая дата. Это вычисление никогда не приведет к большим ошибкам, потому что оно всегда начинается с ближайшего минимума, положение которого хорошо установлено общим процессом.

Итак, мы видим в греческом папирусе метод чисто арифметического характера, основанный на вавилонских параметрах и вавилонских схемах, но приспособленный к египетскому календарю. Трудно сказать, были ли группы типа $C = 11D + \Delta$ созданы в Вавилоне, или они являются более поздним изобретением астрономов Александрии. Против вавилонского происхождения говорит то обстоятельство, что в сохранившихся текстах более чем для 13 лет подряд применялся только процесс $D$ (см. стр. 161); но это не исключает возможности существования улучшенной процедуры в других текстах. Лучшей процедурой было бы признаться в нашем незнании.

Как мало мы на самом деле знаем об этой форме эллинистической астрономии, стало ясно вскоре после публикации Лундского папируса. Исследование дат солнцестояний в эллинистический период привело меня к проверке одного греческого папируса из библиотеки Джона Райланда, опубликованного в 1911 г., потому что в конце этого папируса содержались такие даты. Солнцестояния оказались неинтересными, но зато стало очевидным, что основной текст содержит, среди прочего, правила для вычисления схемы Лундского папируса. Это открытие сделало ясной по меньшей мере одну вещь: существовали значительно более широко распространенные «линейные методы», чем можно было предполагать на основании молчания Птолемея и его комментаторов.

Папирус Райланда открыл дальнейшие подробности всего метода и возбудил новые проблемы. Он показал, что весь процесс, как он сохранился в греческих папирусах, базируется на эре Августа, и что он, в частности, использовал цикл в 25 египетских лет — тот самый цикл, который известен нам из демотического папируса Карлсберг № 9 (см. стр. 104). Таким образом, становится еще более очевидным смешение методов в эллинистической астрономии. Но обнаружились также и трудности в деталях; например, если следовать правилам папируса Райланда, то шаг $\Delta$ должен был бы быть расположен одной строчкой ниже, чем он на самом деле появляется в Лундском папирусе. Иными словами, можно сказать, что где-то вставлен неожиданный шаг $D$.

Сегодня я все еще не могу объяснить каждую деталь этих греческих текстов, но общее направление, в котором надо двигаться, теперь вырисовывается яснее. Вернувшись опять к теории движения Солнца, я намеревался исследовать судьбу птолемеевской теории прецессии в арабской науке, и вполне естественно было рассмотреть в связи с этим индийские источники. Это привело меня к сочинению Вараха-Михиры «Панча-Сиддхантика», написанному около 550 г. н. э. Мы вернемся к индийской астрономии несколько дальше (стр. 170); сейчас достаточно сказать, что «Панча-Сиддхантика» содержит определенные правила для вычисления движения Луны, основанные на схемах, известных нам теперь из греческих источников. Тибо, издавший «Панча-Сиддхантику» в 1889 г., полагал, что очень трудно понять эти места рукописи. Он в конце концов нашел ключ к решению этой задачи в книге «Кала Санкалита» Дж. Уоррена. Последний много путешествовал по Южной Индии и в упомянутой книге, опубликованной в Мадрасе в 1825 г., сообщает об астрономическом учении местных жителей. В этой книге он описывает метод, которого придерживались тамилы, живущие на Коромандельском берегу, для вычисления движения Луны. И жители, рассказавшие ему этот метод, уже не имели ни малейшего представления об основаниях тех отдельных шагов, которые они производили в соответствии со своими правилами. Сами числа они не писали, а представляли их группами раковин, положенных на землю. Так,



означает 7 знаков зодиака и 19;5,1°. Несмотря на это, они производили для определения размеров, продолжительности, начала и конца затмений длинные вычисления с числами, доходившими до миллиардов в целой части и до нескольких шестидесятеричных разрядов в дробной части. Одновременно они использовали заученные наизусть таблицы суточного движения Солнца и Луны, содержащие многие тысячи чисел. Астрономическим путем можно установить, что некоторые из чисел относятся к эпохе около 1200 г. н. э. «Панча-Сиддхантика» показывает, что эти методы существовали еще за семь веков до того. В конце концов они восходят к греческим папирусам, хотя индийские источники и немного выходят за пределы шагов, известных из эллинистических источников. Вычисления начинаются с периода «Деварам», равного $D = 248$ дням. Из них составляется период «Каланилам», равный $C = 11D + \Delta = 3031$ дню. Следующий шаг новый; он состоит в образовании периода «Раса Герика», равного $R = 4C + D = 12372$ дням. Значение $R$ почти идентично вавилонскому

значению аномалистического месяца; оно приводит к величине 27;33,16,26,11,..., в которой только последняя цифра отличается от ожидаемого значения (см. стр. 161).

Каковы бы ни были оставшиеся неясности, очевидно, что обнаруженные Уорреном существовавшие еще в 19-м веке методы являются последними свидетельствами процедур, восходящих через посредство эллинистической астрономии к вавилонским методам периода Селевкидов. Я не сомневаюсь, что этот частный пример теории Луны является лишь одним из многих аналогичных случаев, в которых можно установить очень тесный контакт между индийской астрономией и вавилонскими методами. Мы вернемся к этому вопросу в конце главы.

Когда встает вопрос о контактах, то представляется соблазнительным предположить прямую связь между Индией и Месопотамией, без промежуточной роли эллинизма. При современном зачаточном состоянии наших знаний в этой области любой определенный ответ на этот вопрос был бы скорее делом вкуса или гаданьем, а не ответом, основанным на фактических данных. Тем не менее мне кажется более правдоподобным путь через греческую и персидскую цивилизацию периода Сасанидов, а не прямой контакт.

В пользу этого заключения я могу привести три основных аргумента. Во-первых, терминология и методы индийской астрологии бесспорно греческого происхождения; например, названия знаков зодиака заимствованы из греческого языка. Точно так же на основных идеях теории планет в «Сурья-Сиддханте» сказалось влияние греческих эпициклических моделей, а не вавилонских линейных методов. Этот аргумент уже неприменим к линейным методам самим по себе. Но здесь следует сказать, и это мой второй аргумент, что именно тот прибрежный район, где была получена наша информация об астрономии тамилов, был центром римской торговли. Мы имеем много свидетельств этого, например, анонимный «перипл» — «Плавание вокруг Эритрейского моря», написанное в первом веке н. э., и содержащее подробное описание торговли между Египтом и Индией, гаваней, ввозившихся товаров и т. п. Это полностью подтверждается и археологическими свидетельствами, особенно ярко — открытием в 1946 г. большого римского торгового центра в Арикамеду в окрестностях Пондишери, на том самом месте, где в 1769 г. Лежантиль впервые узнал о линейных методах от своих тамильских собеседников. Этот контакт с Западом достиг высшей точки во времена Августа и в первом веке н. э., а клады римских монет относятся даже к четвертому столетию. Все это подтверждается и неоднократными ссылками на «Явана» (т. е. «ионийцев» вместо «греков» [1])) в индийской астрономии и тамильской литературе. И, наконец, мое соображение подтверж-

[1]) Сюда включаются, конечно, и римляне; в «Перипле» тоже говорится только о «греческих» судах, направлявшихся в Индию. В странах ислама, наоборот, «римлянами» назывались византийские греки.

дается хронологией индийской астрономии: линейные методы, так же как и тригонометрические модели, указывают на ранние века н. э, а не до н. э.

Что бы ни показали дальнейшие открытия, в настоящее время наиболее разумным кажется предположение, что вавилонские методы, параметры и идеи достигли Индии одним из двух путей: либо через Персию либо по римским морским дорогам, но в обоих случаях только через посредство эллинистической астрономии и астрологии.

**68.** Мы уже раньше отмечали, что основные параметры, приписываемые Птолемеем Гиппарху, совпадают с соответствующими параметрами вавилонской теории. До тех пор, пока Птолемей был нашим единственным источником, естественно было предполагать, что теория Гиппарха была чисто геометрической и совершенно того же типа, которому позднее следовал Птолемей. Теперь, с постепенно проясняющимися линейными методами, положение становится намного сложнее. Нет никаких сомнений в том, что Гиппарх использовал геометрические методы; мы знаем это, например, из его определения эксцентриситета солнечной орбиты, о котором рассказывает Птолемей. Но нельзя исключать возможность того, что он работал также с линейными методами, что было бы совершенно естественно для каждого, кто имел доступ к вавилонским материалам. Греческая астрологическая литература содержит несколько ссылок на линейные методы, связанных с именем Гиппарха. Обычно этими ссылками пренебрегали, считая их недостоверными просто потому, что думали, что такие элементарные арифметические схемы недостойны великого астронома. Я не хочу сказать, что нам следует впасть в другую крайность и считать эти ссылки истинными без дальнейшего исследования. Ясно лишь, что Птолемей в своих ссылках на методы, использовавшиеся его предшественниками, не претендовал на историческую полноту, и что только собрав вместе и систематизировав все ссылки на Гиппарха, имеющиеся у Птолемея и во всех других источниках, можно надеяться получить более полную картину содержания его работ.

**69.** Одной из основных причин распространения астрономических знаний от одного народа к другому, несомненно, была широко распространенная вера в астрологию как науку, которая дает возможность проникнуть в причины происходящих на Земле событий. Часто говорилось, что астрономия возникла из астрологии. Я не вижу никаких подтверждений этой теории. Мне кажется гораздо более вероятным предположение, что одной из основных побудительных причин развития астрономии были попытки добиться регулярности во вставках лунных календарей. Лучше всего можно описать истинное положение вещей, сказав, что мы одинаково мало знаем о возникновении астрологии и астрономии, и что об относительном влиянии этих двух дисциплин друг на друга по большей части можно лишь строить догадки. Как уже говорилось в главе V, мы стоим на твердой почве в отношении астрономии только для периода Селевкидов в Месопотамии. Почти все документы, касающиеся месопотамской астрологии, принадлежат к тому же периоду, но число их очень мало по сравнению с астрономическими текстами. Среди клинописных табличек мы имеем около десяти гороскопов и еще меньше текстов, посвященных астрологическим учениям, которые известны нам по такому громадному количеству греческих источников. В Египте самые ранние гороскопы, демотические и греческие, относятся к царствованию Августа. К этому же периоду принадлежат самые ранние астрологические трактаты и общий спор о справедливости астрологического учения. Быстрое распространение и грандиозное развитие астрологии в первый период Римской империи можно сравнить с распространением христианства, культа Митры и аналогичных верований. Ни в одном из этих случаев быстрота и широта такого распространения не могут быть использованы в качестве аргумента для хронологии.

Единственные хронологические критерии можно извлечь только из самих текстов. Одним из таких критериев является порядок следования планет. В клинописных текстах периода Селевкидов стандартным расположением планет является следующий:

Юпитер — Венера — Меркурий — Сатурн — Марс.

Причины такого порядка неизвестны; даваемое обычно объяснение, что первые две планеты благоприятны, последние две — неблагоприятны, а Меркурий сомнителен, в клинописных источниках не встречается. В греческих гороскопах обычным является порядок

Солнце — Луна — Сатурн — Юпитер — Марс — Венера — Меркурий,

за исключением случаев, когда расположение выбирается для данного специального гороскопа в зависимости от положения в этот момент небесных тел среди зодиака. Я думаю, что в этих двух рядах получило очень ясное отражение различие двух астрономических систем. Вавилонскую систему совсем не интересует расположение планет в пространстве. Греческая же система, очевидно, следует модели, в которой планеты располагаются по глубине в соответствии с периодами их звездного обращения. Это даже нашло отражение в том расположении планет по дням недели, которой мы пользуемся и теперь [1]). При таком порядке

[1]) Речь идет о западноевропейских языках. Так, например, в английском языке «sunday» (воскресенье) — день Солнца, «monday» (понедельник) — день Луны, «tuesday» (вторник) — день Марса (Марсу соответствовал бог Tiw), «wednesday» (среда) — день Меркурия (Меркурий — Woden), «thursday» (четверг) — день Юпитера (Юпитер — Thor), «friday» (пятница) — день Венеры (Венера — Frig) и «saturday» (суббота) — день Сатурна. (*Прим. ред.*

Солнце должно быть помещено между Марсом и Венерой, а Луна — ниже Меркурия. Каждому из 24 часов суток дается «правитель» в той же последовательности. Начиная, например, с Солнца для первого часа, получаем

| | час | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | | 24 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| день 1 | | Солнце | Венера | Меркурий | Луна | Сатурн | . . . | Меркурий |
| | час | 1 | 2 | 3 | . . . . . . . . . | | | 24 |
| день 2 | | Луна | Сатурн | Юпитер | . . . . . . . . . | | | Юпитер |
| | час | 1 | . . . | | и т. д. | | | |
| день 3 | | Марс | | | | | | |

«Правитель» первого часа рассматривается затем как правитель всего дня и, таким образом, для семи последовательных дней получаются следующие правители:

Солнце Луна Марс Меркурий Юпитер Венера Сатурн,

что совпадает с нашей последовательностью дней недели, а также с расположением планет в индийской астрономии.

Здесь мы имеем систему явно греческого происхождения, не только потому, что она основана на расположении небесных тел в соответствии с их расстоянием от Земли, но также и потому, что она предполагает деление суток на 24 часа — форму счета, не вавилонскую, а эллинистическую и имеющую в конечном счете египетское происхождение (см. стр. 93). Совершенно неправильно, когда этот порядок называют в современной литературе «халдейским».

Как мы уже говорили, известная нам астрология ассирийского периода совершенно отлична от эллинистической персональной астрологии. Предсказания касаются царя и страны в целом и основываются на наблюденных астрономических явлениях, а не на вычислениях или датах рождения. Кроме того, в них никогда не появляется зодиак. Эллинистические же гороскопы относятся к определенному лицу и зависят от вычисленного положения семи небесных тел и знаков зодиака по отношению к данному горизонту для данного момента времени, а именно, момента рождения. Вокруг всего этого соткана необъятная система догм и рецептов, касающихся оценки астрономических данных, а также вторичных данных, которые можно получить путем всевозможных хитросплетений, с тем чтобы иметь большее разнообразие возможностей. Интересно отметить, что фактически сохранившиеся гороскопы содержат очень мало этих теоретических спекуляций, если вообще их содержат. Подавляющее большинство не содержит ничего, кроме голых результатов вычислений для данного момента времени. Такое положение вещей делает эти тексты полезными при изучении чисто астрономических и хронологических вопросов, но они оказывают очень слабую помощь в истории астрологии как таковой или в истории астрономических методов, применявшихся в астрологии. Несмотря на это, терпеливая работа таких ученых, как Буше-Леклерк, Кюмон, Болл, Бецольд, Кролл, Рем и многих других показала наличие в этих текстах составных частей различного происхождения. Имеются предсказания, касающиеся только отдельных специальных происшествий, таких как разрушение Персидской империи Александром или войны между его преемниками в Сирии; наконец, имеется большая масса ссылок на Египет времен правления Птолемеев. Ссылки на созвездия, особенно на их одновременные восходы и заходы, дали возможность различить две сильно отличающиеся небесные карты, «варварскую сферу» и «греческую сферу». Тем не менее свидетельства в пользу прямого заимствования вавилонских понятий остаются исключительно слабыми. Основной костяк астрологической теории, несомненно, эллинистического происхождения. На стр. 80 мы уже говорили об остатках самого старого из имеющихся звездных каталогов, содержащегося в астрологических сочинениях, приписываемых Гермесу Трисмегисту. Тот факт, что эти координаты звезд соответствуют времени Гиппарха или его непосредственных преемников (см. стр. 81), является дополнительным аргументом в пользу того, что эта главная астрологическая работа возникла во втором веке до н. э.

Хотя вполне правдоподобно, что начальный импульс для возникновения гороскопической астрологии пришел из Вавилона в форме нового развития старых небесных предзнаменований, мне кажется, что ее собственное развитие следует считать важной компонентой эллинистической науки. Современному ученому древний астрологический трактат представляется сущей бессмыслицей. Но не следует забывать, что мы должны оценивать подобные учения с учетом всей окружавшей их обстановки. Для греческих философов и астрономов Вселенная была вполне определенной системой из непосредственно связанных тел. Идея о предсказании влияния этих тел друг на друга в принципе не отличается от современной нам механистической теории. И она находится в резком контрасте с идеями произвольного божественного управления или возможности влиять на события путем магических операций. По сравнению с религиозным, магическим и мистическим фоном основные астрологические догмы являются чистой наукой. Конечно, границы между рациональной наукой и свободной спекуляцией быстро стирались и астрологические учения не препятствовали, а скорее содействовали, развитию суеверий и магии. Примеры такого легкого перехода от науки к вздору нетрудно указать и в современном нам мире.

70. Для историка цивилизации астрология является не только одним из существенных явлений эллинистического мира, но

и исключительно полезным орудием для исследования распространения эллинистической мысли. В качестве примера можно привести Абу Машара, умершего в 886 г. и бывшего ранним представителем эллинистической астрологии среди арабов. Как показал Болл, Абу Машар пользовался сделанным в 542 г. персидским переводом «Варварской сферы» Тевкра. Таким образом Абу Машар становится важным источником для изучения ранних эллинистических учений о созвездиях. Знаменитая астрологическая роспись во дворце Скифанориа в Ферраре, выполненная во второй половине пятнадцатого века, отражает влияние астрологических доктрин Абу Машара. Кроме того, его сочинения были переведены на латинский, греческий, еврейский и с еврейского на латинский языки. Эти «переводы» часто представляют собой вольные переложения, включенные в другой материал различного происхождения. Существуют даже замкнувшиеся циклы переводов и заимствований с греческого обратно на греческий. Например, главы из написанной гекзаметром астрологической поэмы Дорофея из Сидона (первый век н. э.) были использованы Абу Машаром и в таком виде в свою очередь послужили прототипом для византийского диалога «Гермипп». Аналогичные циклы можно установить для астрономических таблиц и трактатов, достигших Византии в тринадцатом веке.

В трудах Абу Машара мы находим, впрочем, и другой составной элемент, который делает их очень интересными в связи с нашей попыткой проследить распространение эллинистической науки. У Абу Машара встречаются индийские созвездия, и их источник мы находим в астрологических писаниях Вараха-Михиры (шестой век н. э.), в чьей астрономической работе мы нашли применение линейных методов для описания движения Луны, методов, известных нам, кроме того, из греческих папирусов и клинописных табличек. Следуя по безошибочным следам очень характерных астрологических учений, можно восстановить путь, который связывал эллинистическую Месопотамию с эллинистическим Египтом, с домусульманской Персией и с Индией. Мы, очевидно, вправе предположить, что тем же путем шло распространение математической астрономии, даже если нам ничего не известно, кроме двух конечных точек в Месопотамии и в Индии.

Что касается теории Луны, то нам доступно по меньшей мере одно из недостающих звеньев, а именно, греческие папирусы. В случае же теории планет греческие источники не дают нам даже и этого, зато мы теперь можем понять целые разделы в «Панча-Сиддхантике» Вараха-Михиры при помощи вавилонских текстов для планет. Мы видели, как планетные явления описывались в вавилонских текстах при помощи ступенчатых функций и назвали этот подход «системой А». Точно ту же идею мы находим в «Панча-Сиддхантике». То же относится и к основным отношениям периодов и даже специальным параметрам. Можно привести несколько примеров. Для Сатурна и Юпитера нам известны из клинописных источников синодические периоды

$$\frac{4,16}{9} = 28;26,40 \quad \text{и} \quad \frac{6,31}{36} = 10;51,40,$$

а для Венеры — синодическая дуга в 3,35; 30°. Все три величины использованы Вараха-Михирой.

Очень странными казались значения, которые приводит Вараха-Михира для продолжительности синодических оборотов планет; например,

| | |
|---|---|
| Марс | $768\frac{3}{4}$ суток |
| Меркурий | $114\frac{6}{29}$ суток |
| Юпитер | $393\frac{1}{7}$ суток |
| Венера | $575\frac{1}{2}$ суток |
| Сатурн | $372\frac{2}{3}$ суток |

Сравнение этих чисел с вавилонскими параметрами сразу дает решение этой загадки. Имеются в виду не «сутки», а градусы. Действительно, для Меркурия средняя синодическая дуга составляет $1,54;12,24, \ldots = \frac{55,12}{29}$, что в точности совпадает с индийским значением; то же самое находим и для Венеры. Для Марса, однако, средняя синодическая дуга согласно вавилонской теории равна $6,48;43,18, \ldots$, что очень близко к $6,48;45 = 408\frac{3}{4}$, тогда как «Панча-Сиддхантика» дает значение $768\frac{3}{4}$. Разность составляет здесь 360°, или один полный оборот. Это объясняет также замену «градусов» на «сутки»: индийские «сутки» представляют собой просто шестидесятеричные доли звездного года, или, выражаясь по-иному, предполагается, что среднее солнечное движение равно 1° в сутки. Это подтверждается случаями Юпитера и Сатурна. Вместо $393\frac{1}{7}$ дня мы принимаем во внимание только $33\frac{1}{7} = 33;8,34, \ldots$, и это опять хорошо согласуется с вавилонским значением 33;8,45° для средней синодической дуги. Аналогично, для Сатурна $372\frac{2}{3} - 360 = 12;40°$ по сравнению с 12;39,22,30° в вавилонской теории.

Мы находимся сегодня в начале систематического исследования связей между индийской и вавилонской астрономией, исследования, которое, очевидно, должно намного углубить наши представления о возникновении той и другой науки.

71. Тот факт, что можно установить тесную связь между вавилонскими линейными методами и разделами «Панча-Сиддхантики», является лишь одним из аспектов общей проблемы оценки роли индийской астрономии в истории науки. С этой точки зрения «Панча-Сиддхантика» Вараха-Михиры имеет особое значение, потому что она представляет собой хронологически фиксированную точку первейшей важности. Время жизни Вараха-Михиры может быть установлено благодаря тому, что он применяет в вычислениях год 427 эры Сака = 505 г. н.э. и благодаря другим соображениям, показывающим, что он жил не позднее 590 г. н. э. Но важно не только то, что «Панча-Сиддхантика» таким образом хорошо датирована и является сравнительно ранним документом; она представляет собой также исторический источник уникального характера в индийской астрономии. Ее название показывает, что она основана на пяти «сиддхантах», и она действительно содержит сводку содержания пяти больших астрономических трактатов, существовавших во времена Вараха-Михиры. Таким образом, мы имеем здесь ранний исторический отчет о первоисточниках, которых или уже вовсе нет, или во всяком случае нет в их прежнем виде. С другой стороны, Вараха-Михира является одним из основных источников для сообщений ал-Бируни об индийской астрономии и астрологии, относящихся примерно к 1030 г. н. э. Поэтому Вараха-Михира играет центральную роль в изучении индийской астрономии.

Основным каноном индийской астрономии следует считать «Сурья-Сиддханту». Предполагается, что она была сообщена Солнцем (Сурья) в конце Золотого века (2163102 г. до н. э.) Майа Асуре. Некоторые рукописи содержат дополнительное распоряжение Солнца Майе: «Пойди поэтому в город Ромака, твою резиденцию; там, будучи воплощен варваром в силу проклятия Брахмы, я передам тебе эту науку» [1]). Это очень похоже на следующие слова Вараха-Михиры: «Греки, конечно, чужеземцы, но у них эта наука [астрономия] процветает» [2]). Создание «Сурья-Сиддханты» датируется современными учеными примерно 400 г. н. э., тогда как имеющийся вариант может быть отнесен примерно к 1000 г. н. э. Что эта работа содержит некоторые разделы, которые удивительным образом сочетаются с греческой теорией движения по эпициклам, было ясно всем ученым, начиная с ал-Бируни; последний довольно резко характеризовал индийскую математическую и астрономическую литературу как «смесь жемчужных раковин и прокисших фиников, или жемчужин и навоза, или драгоценных кристаллов и обыкновенной гальки [3]).

---

[1]) «Сурья-Сиддханта», I, 6 (Burgess).

[2]) Bṛhat Saṅhita, II, 15 (Kern). Несущественно отличающийся перевод предложен в Isis, 14 (1930), стр. 391, или в переводе V. Subrahmanya Sastri, Bangalore, 1947, стр. 19 (строфа 14).

[3]) Индия, I (Sachau, I, стр. 25).

Хотя греческое влияние в «Сурья-Сиддханте», очевидно, так же ясно, что греческая теория подверглась совершенно независимому преобразованию во многих частностях, как в отношении значений числовых констант, так и в общей теории. Сравнение существующего текста «Сурья-Сиддханты» с изложением его Вараха-Михирой в «Панча-Сиддхантике» ясно доказывает, что модификации такого типа производились непрерывно. В целом, однако, представляется, что «Сурья-Сиддханта» была наиболее внутренне согласованным из индийских трактатов. То, что нам известно о «Ромака-» и «Паулиса-Сиддханте» из материалов, включенных в «Панча-Сиддхантику», заставляет отнести эти трактаты ближе к эллинистическим источникам. Их названия подтверждают эту точку зрения; «римляне», конечно, означают греков Римской или Византийской империи; а ал-Бируни считал «Паулиса-Сиддханту» работой Павла Александрийского, астролога четвертого века н. э. Так мы опять получаем для времени контакта примерно время создания «Сурья-Сиддханты», т. е. около 400 г. н. э. И, может быть, знаменательно то, что самое раннее появление позиционной системы счисления может быть тоже прослежено до «Паулиса-Сиддханты».

С другой стороны, давно уже было установлено, что в заимствованиях индийской астрономии у греческой астрономии не заметно никакого влияния тонкостей теории Птолемея. Также и астрологические теории отражают, по крайней мере частично, самые старые слои эллинистических учений. Это приводит к периоду между Птолемеем (150 г. н. э.) и Гиппархом (150 г. до н. э.) или даже немного ранее. Это как будто оставляет значительный промежуток в несколько веков между временем создания эллинистических источников и временем их восприятия в Индии. Имеются, однако, возрастающие свидетельства того, что этот промежуток удастся сузить. Ибн Юнис, великий арабский астроном (умерший в 1009 г.), известный как автор таблиц «Зидж ал-Хакими», приводит персидские наблюдения апогеев солнечной орбиты, сделанные около 470 и 630 гг. н. э. Наллино показал, что и Тевкр и Веттий Валент были оба переведены на пехлеви, домусульманский или среднеперсидский иранский язык. Мы уже видели, что Тевкр (первый век до н. э.?) был одним из представителей греческой астрологии на ее ранней стадии; Веттий Валент был младшим современником Птолемея, но он не испытал влияния ни «Альмагеста», ни «Четырехкнижия». Часто цитируемый отрывок где Веттий Валент заявляет, что он «не вычислял сам таблицы, затмений, но использовал таблицы Гиппарха для Солнца, таблицы Судинеса и Киденаса для Луны», связывает его непосредственно с линейными методами вавилонян и с теми геометрическими и арифметическими методами, которые применял Гиппарх. Если мы допустим, что эти источники достигли Персии, не будучи модифицированы научными теориями Птолемея, то мы получим удовлетварительное объяснение основных черт линейного и геометрического методов, которые мы находим в «Панча-Сиддхантике».

72. Путь назад снова идет через Персию. Хорошо известно, что научная активность в странах ислама началась во времена халифата Аббасидов в Багдаде; ал-Хорезми, Сабит ибн Корра, Абу Машар принадлежат к этому периоду (девятый век).

Астрономические таблицы ал-Хорезми сохранились в латинских переводах; в них видно любопытное смешение индийских и греческих методов [1]). О связи между его математическими трудами и эллинистической традицией уже говорилось. Столетие спустя появился ал-Бируни, тоже уроженец Хорезма. Он не только распространил индийские знания на запад, но он сообщил нам, что «большая часть их книг составлена в слока [стихах], в которых я сейчас упражняюсь, будучи занят переводом для индийцев книг Евклида и «Альмагеста», и диктуя им трактат о сооружении астролябии, руководствуясь при этом просто желанием распространить науку». С другой стороны, ал-Бируни перевел астрологическое сочинение Вараха-Михиры на арабский язык [2]).

Историю распространения эллинистической науки в странах ислама не нужно здесь рассказывать. Общая тенденция больше не вызывает сомнений и была неоднократно описана. Что, однако, менее широко известно, — это что по любому специальному вопросу астрономической или математической теории мы все еще бродим ощупью во тьме из-за весьма прискорбного отсутствия изданных первоисточников. За блестящим исключением таблиц ал-Баттани, за весь период от Птолемея и до Коперника ни одни из больших астрономических таблиц средних веков, — арабских или латинских, еврейских или греческих, — не имеются в современных изданиях. История древних математических наук представляет собой область, в которой не надо далеко ходить в поисках плодородной почвы, готовой к обработке.

73. Мы подошли к концу нашего анализа, вновь вернувшего нас к цивилизации средних веков, с которой началось наше путешествие. Терпеливо следуя за связями между математической и астрономической теориями, мы шли от периода к периоду и от цивилизации к цивилизации. Наш путь часто шел параллельно пути, указываемому историками искусства, религии, алхимии и многих других областей. Это неудивительно, а только подчеркивает внутреннее единство человеческой культуры. Роль астрономии, может быть, исключительна лишь постольку, поскольку она несет в

---

[1]) Астрономические таблицы ал-Хорезми в переводе на английский язык с подробными комментариями изданы Нейгебауером: The astronomical tables of Al-Khwarizmi, Translation with commentaries of the Latin version edited by H. Suter supplemented by Corpus Christi College MS 283 by O. Neugebauer, Kgl. Danske Vidensk. Selskab, Hist.-filos. Skrifter, 4, 2, Kobenhavn, 1962. (*Прим. ред.*)

[2]) Индия, XIII и XIV (Sachau, I, стр. 137 и 158).

своем медленном, но неуклонном прогрессе корни наиболее решающего события в человеческой истории — создания современных точных наук. Мне кажется, что проследить за этой особенной ветвью истории культуры стоило наших усилий, как бы отрывочны ни были полученные нами результаты.

В «Монастырях» музея Метрополитен в Нью-Йорке висит роскошный гобелен, рассказывающий историю Единорога. В конце мы видим удивительное животное в неволе, грациозно подчинившееся своей судьбе, стоящее в загородке, окруженной изящной маленькой оградой. Эта картина может служить подобием того, что мы здесь пытались сделать. Мы искусно построили из немногих отдельных свидетельств ограду, в которую надеемся заключить то, что на самом деле может быть живым существом. Действительность, однако, может сильно отличаться от плода нашего воображения; возможно, напрасно надеяться на что-либо большее, чем на картину, которая радует конструктивный ум, когда мы пытаемся восстановить прошлое.

## *БИБЛИОГРАФИЯ К ГЛАВЕ VI*

Хорошим введением в политическую и культурную историю эллинизма является книга Тарна и Гриффита (W. W. T a r n and G. T. G r i f f i t h, Hellenistic Civilisation, London, Arnold, 1952) [1]).

Следующая работа дает превосходную картину многочисленных путей научных контактов в течение средних веков на Западе: Charles Homer H a s k i n s, Studies in the History of Mediaeval Science, изд. 2-е, Cambridge, Harvard University Press, 1927 (переизд. в 1960 г.—*Прим. ред.*).

Одной из наиболее замечательных книг об индийской науке и ее связях со странами ислама является книга ал-Бируни (A l b e r u n i, India, An Account of the Religion, Philosophy, Literature, Geography, Chronology, Astronomy, Customs, Laws and Astrology of India about A. D. 1030, London, 1910). К английскому изданию примечания и указатель составил Захау (Edward C. S a c h a u). О специальных работах по индийской астрономии см. примечание к п. 67. См. также статью M. S t e i n s c h n e i d e r, Zur Geschichte der Übersetzungen aus dem Indischen ins Arabische etc., Zeitschr. d. Deutschen Morgenländischen Gesellschaft, 24 и 25 (1870 и 1871).

О влиянии иранской мысли в течение эллинистического периода см. Joseph B i d e z et Franz C u m o n t, Les mages hellénisés; Zoroastre, Ostanès et Hystaspe d'après la tradition grecque; 2 тома, Paris, 1938.

О ранних связях между греками и Индией см. W. W. T a r n, The greeks in Bactria and India, 2-е изд., Cambridge, 1951 и A. K. N a r a i n, The Indo-Greeks, Oxford, 1957.

Как сводку индийской науки, следует упомянуть главу о науке из книги Кларка (W. E. C l a r k, The Legacy of India, ed. G. T. Garratt, Oxford, 1937). Подробный обзор литературы до 1899 г. дан Тибо в его статье (G. T h i b a u t, Astronomie, Astrologie und Mathematik, Grundriss der Indo-Arischen Philologie und Altertumskunde, T. III, 9). Очень полезна статья Барджесса (James B u r g e s s, Notes on Hindu Astronomy and the History of our Knowledge of It., J. of the Royal Asiatic Soc. of Great Britain and Ireland, 1893, стр. 717—

---

[1]) Имеется русский перевод более ранней книги: В. Т а р н, Эллинистическая цивилизация. Перевод С. А. Лясковского, предисловие проф. С. И. Ковалева, М., 1949. (*Прим. ред.*)

761), где можно найти исчерпывающие ссылки на раннюю литературу, содержащую много важных сведений, в других местах более недоступных.

Перевод «Сурья-Сиддханты», выполненный Барджессом и цитируемый далее на стр. 182, содержит обширные комментарии, которые следует прочесть всякому, серьезно изучающему этот предмет. О «линейных методах» в индийской астрономии см. ссылки на Лежантиля и Уоррена на стр. 182. О форме, которую приняла греческая теория эпициклического движения планет в Индии и затем у ал-Хорезми, см. работу O. Neugebauer, The transmission of planetary theories in ancient medieval astronomy, Scripta Mathematica, New York, 1956.

В работе E. S. Kennedy, A survey of Islamic astronomical tables, Trans. Amer. Philos. Soc., N. S., 46 (1956), стр. 123—177, показано наличие большого количества доступных материалов, почти совсем не использованных при исследовании средневековой астрономии, ее греческих, исламских и индийских источников и их взаимодействия.

## *ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ГЛАВЕ VI*

к 61. Время жизни Герона Александрийского отнесено ко второй половине первого века н. э. на том основании, что он приводит в качестве примера лунное затмение 13 марта 62 г. н. э. [см. Neugebauer, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., Hist.-filos. medd., 26, 2 и 7 (1938 и 1939) и A. G. Drachmann, Centaurus, I (1950), стр. 117—131].

Наши единственные твердые сведения о времени жизни Диофанта основываются на том факте, что он цитирует Гипсикла (Opera, 1, стр. 470, 27 и 472, 20, изд. Tannery) и что его цитирует Теон Александрийский (Comm. in Almag., I, стр. 453, изд. Rome). Время жизни Гипсикла можно примерно отнести к 150 г. до н. э.; время жизни Теона фиксировано солнечным затмением 16 июня 364 г. Обычно теперь следуют Таннери, отстаивавшему дату около 250 г. н. э. Доводы Таннери основаны на дошедшем, по-видимому, в искаженном виде отрывке из Пселла (около 1050 г.) и в целом весьма гипотетичны, как было указано Клейном (J. Klein, Quellen und Studien z. Gesch. d. Math., ser. B, т. 2, 1934, стр. 133, примечание 23). Сам Клейн отдает предпочтение более ранней дате и высказывает предположение, что Диофант, возможно, жил одновременно с Героном. Доводы Клейна в значительной степени основаны на стилистическом сходстве Герона и Диофанта; этот аргумент потерял свою силу с тех пор, как мы поняли, что оба автора, в большей или меньшей мере, представляли общую восточноэллинистическую традицию. Посвящение Дионисию, имеющееся в обоих случаях, не имеет решающего значения, не только потому, что это имя очень обычное, но и потому, что Дионисию приписаны разные титулы.

Средневековая датировка сохранилась в «Истории династий» Бар-Гебреуса (1226—1286), называемого также Абу'л-Фараджем, ученого якобитского епископа. Его «История династий» написана по-арабски [1]) и представляет собой сокращенный и измененный вариант его сирийской «Хронографии» [2]). Диофант и его «Алгебра» упоминаются только в арабском варианте, причем они относятся ко времени Юлиана Отступника (361—363 гг.). Эта дата едва совместима с верхним пределом жизни Диофанта, приведенным выше. Хорошо известно, что Бар-Гебреус был компетентным математиком и астрономом [3]), но мы не знаем, на каких авторитетах основаны его хронологические

---

[1]) Издано с латинским переводом Пококком (Edward Pococke, Oxford, 1663).

[2]) Издано с английским переводом Баджем (A. W. Budge, Oxford, 1932).

[3]) См., например, F. Nau, Le livre de l'ascension de l'esprit... Cours d'astronomie rédigé in 1279 par ... Bar Hebraeus (Bibliothèque de l'école des hautes études, 121, Paris, 1899/1900).

утверждения. Я не вижу никакой возможности принять или отвергнуть их, и, мне кажется, мы должны признать, что не можем установить время жизни Диофанта с какой-либо точностью в пределах 500 лет.

Произведения типа героновской «Геометрии», несомненно, были широко распространены в древности и составляли основу обучения элементарной математике. Этим объясняется относительно большое число отрывков папирусов, содержащих такие тексты. В качестве примера можно привести один неопубликованный папирус из Корнелльской коллекции (см. табл. 12). Рисунок в нижней части правой колонки является типичным примером построения более сложных примеров из простейших (рис. 28).

Именно на построении таких примеров мы можем продемонстрировать прямые связи между геометрическими сочинениями. Например, понятие равнобедренного треугольника иллюстрируют треугольником со стороной 10: Герон, «Метрика», I, XVII (Opera III, стр. 48, 49); Герон, «Геометрика», 10 (Opera IV, стр. 224, 225); ал-Хорезми, «Алгебра» (Rosen, стр. 80) [1]); ал-Бируни, «Астрология», 22 (Wright). Общий треугольник со сторонами 13, 14 и 15 используют Герон, «Метрика», I, V и VIII; «Геометрика», 12; «Мишна ха-Миддот», 9 (Gandz, стр. 46); Махавира, VII, 53 (изд. Rangacharya, стр. 199); ал-Хорезми, стр. 82; Бхаскара, «Лилавати», VI, 165, 168 (Colebrook, стр. 71, 73). Фактически этот треугольник построен из двух пифагоровых треугольников со сторонами 13, 5, 12 и 15, 9, 12. Они снова встречаются в двух задачах в папирусе Айер (Amer. J. of Philology, 19, 1898, стр. 25 и след.).

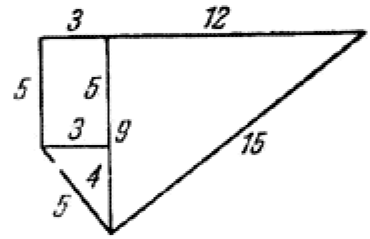


Рис. 28.

Тот факт, что еврейский трактат является частью этой традиции (см. S. G a n d z, The Mishnat ha-Middot; Quellen und Studien zur Geschichte der Math., Abt. A, т. 2, 1932) возможно, не такое уже изолированное явление, как может показаться. В издании Герона содержится несколько ссылок на еврейские единицы мер (Герон, Opera V, стр. 210—219). Аналогично, многие понятия иудаизма мы находим в папирусах по магии и близкой к ним практике, связанной с числами и алфавитом, так называемой гематрии. Несомненно, имеются некоторые основания для древней терминологии, употреблявшей слово «математики» в смысле магов или астрологов.

Другой пример передачи математических знаний мы находим в сочинении ал-Бируни «Индия», XV (Sachau, I, стр. 186 и след.), где он говорит «Брахмагупта сообщает, ссылаясь на Ариабхату..., что он установил окружность как 3393, ... диаметр как 1080». Причина такого представления, содержащего общий множитель 9, становится понятной, если вспомнить, что число 1080 является в восточной астрономии важной метрической единицей. В качестве примера можно упомянуть деление часа на 1080 частей (хелаким) в еврейской астрономии. Шестидесятеричный эквивалент отношения $\frac{3393}{1080}$ есть 3;8,30— приближенное значение $\pi$, используемое в «Альмагесте» (VI, 7).

В том же разделе ал-Бируни утверждает, что «Паулиса применяет... в своих вычислениях ... $3\frac{177}{1250}$... То же отношение получается из старой теории, которую Якуб ибн Тарик упоминает в своей книге Compositio Sphaerarum, ссылаясь на авторитет сообщившего ему индуса...». Действительно, то же значение использует ал-Хорезми (Алгебра, изд. Rosen, стр. 72, 198 и след.). Его десятичный эквивалент равен 3,1416, его шестидесятеричный

---

[1]) F. R o s e n, Algebra of Mohammed ben Musa, London, 1831. Имеется русский перевод: Мухаммад ал-Х о р е з м и, Математические трактаты, перевод Ю. Х. Копелевич и Б. А. Розенфельда с комментариями Б. А. Розенфельда. Ташкент, 1964. (*Прим. ред.*)

эквивалент—3;8,29,45,36. Анализ этих и близких им значений смотри у Датта (B. Datta, Journal and Proceedings of the Asiatic Society of Bengal, N. S., 22, 1926, стр. 25—42, особенно стр. 26 и след.).

Использование значения 3 для $\pi$ часто встречается в эллинистических текстах и восходит к древневавилонским текстам. Другим примером общего для вавилонян и Герона математического правила может служить вычисление объема «судов» призматической формы (см. Neugebauer, MKT, II, стр. 52 и Герон, Opera V, стр. 56, 128, 130, 172).

Традиционный взгляд состоит в том, что эллинистическая наука проникла к арабам через посредство промежуточного звена — сирийских вариантов греческих работ. Хотя во многих случаях это, может быть, и верно, тем не менее — это сильное упрощение. В 1925 г. Бергштрессер издал и перевел сочинение Хунаина ибн Исхака, касающееся переводов трудов врача Галена, современника Птолемея (G. Bergsträsser, Abh. für die Kunde des Morgenlandes, 17, № 2; см. также Max Meyerhof, New Light on Hunain ibn Ishâq and his Period, Isis, 8, 1926, стр. 685—724). Хунаин был несторианцем и играл центральную роль в ранний период арабских переводов. Он родился в 809 и умер в 877 г.; поиски греческих манускриптов привели его на Ближний Восток и в Александрию. Ему приходилось видеть и сопоставлять сотни рукописей, и он собрал большую собственную коллекцию. Из его сообщения видно, как работали такие переводчики, сравнивая испорченные рукописи, восстанавливая, объясняя, делая выдержки. И вовсе нет такой простой последовательности: греческий → сирийский → арабский. Значительное большинство сочинений переведено непосредственно с греческого на арабский или на сирийский. Есть много случаев, когда сирийские переводы служили основой для арабских версий, но встречается и обратный порядок. Обзор Хунаина охватывает около 50 лет и касается более чем 130 книг, приписываемых Галену или его школе. Согласно Хунаину из них только 10 названий не были переведены. Для остальных Хунаин перечисляет 179 сирийских и 123 арабских вариантов; при этом он сам содействовал 96 переводам на сирийский и 46— на арабский, не считая пересмотренных переводов. Из них 81 перевод был сделан для арабских читателей, 73— для сирийских.

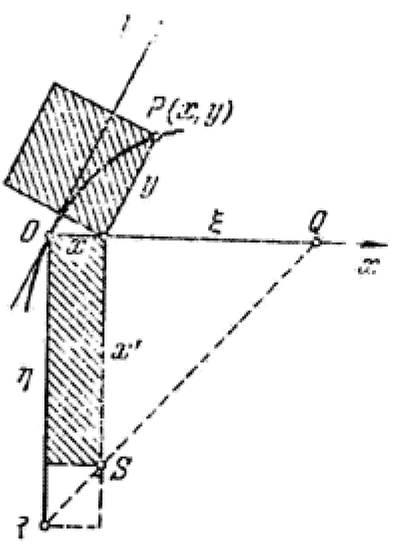


Рис. 29.

Неясно, в какой мере сказанное сейчас о медицинской литературе справедливо по отношению к математическим и астрономическим работам. Не следует забывать, что практические потребности и местные условия могли сильно различаться для разных областей знания. Для астрономии, например, несомненно большую роль играла передача сведений через Индию, и имеется очень мало свидетельств сирийского посредничества.

к 62. Теория «приложения площадей» приобрела в древней математике большое значение благодаря открытию, что в эту теорию можно включить конические сечения. Наши современные названия «эллипс», «гипербола», и «парабола» взяты непосредственно из этой теории. В качестве примера рассмотрим эллипс. Допустим, что даны два «координированных» (согласованных) направления (отсюда наше употребление слова «координаты»), обозначенных буквами $x$ и $y$ (рис. 29). Пусть $\xi$ и $\eta$ — два данных параметра, представленных отрезками, расположенными соответственно вдоль оси $x$ и перпендикулярно к ней. Тогда точка $P$ $(x, y)$ будет точкой эллипса с диаметром $OQ = \xi$ и сопряженным направлением $y$, если площадь квадрата со стороной $y$ равна площади прямоугольника $xx'$, «приложенного» к $OR = \eta$ таким образом, что остается малый прямоугольник $(RS)$, стороны которого относятся как $\eta$ к $\xi$. Это лишь небольшое обобщение «эллиптического» случая приложения площадей, описанного в тексте (стр. 151 и след.), где остающийся прямоугольник был квадратом. В наших обозначениях точка $P(x, y)$ определяется уравнениями

$$y^2 = xx', \qquad \frac{x'}{\xi - x} = \frac{\eta}{\xi}.$$

В случае гиперболы требуют избытка прямоугольника $xx'$, тогда как параболе соответствует точное равенство $y^2$ и $x\eta$. Подробности и рисунки см. в статье O. Neugebauer, Apollonius—Studien, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B, т. II (1932), стр. 215—254.

История открытия этих способов задания конических сечений представляется следующей. Умение решать основные типы квадратных уравнений существовало со времен Древнего Вавилона. Открытие иррациональных величин привело к геометризации этих методов в форме приложения площадей (четвертый век до н. э.). Вскоре после этого были открыты конические сечения, я думаю, в связи с исследованием солнечных часов (см. стр. 215). Во всяком случае, конические сечения вначале рассматривались как кривые в пространстве, без связи с алгебраическими задачами. Наконец, была установлена связь с приложением площадей, которую мы находим у Аполлония (третий век до н. э.).

Рисунки, показывающие расположения в пространстве, из которых были выведены отношения между площадями в плоскости, см. в только что упомянутой статье, стр. 220 и след.

к 63. Связь между математикой и платоновской теорией идей была предметом бесчисленных публикаций. Реалистический анализ всей проблемы см. в работе H. F. Cherniss, The Riddle of the Early Academy, University of California Press, 1945.

Неуверенность, которую испытывал хороший последователь Платона, имея дело с астрономическими теориями, основанными на наблюдениях, ясно видна из предисловия Прокла к его «Гипотипозису» (греческий текст с немецким переводом издал Manitius, Leipzig, Teubner, 1909).

к 64. Восьмеркообразная кривая, по которой движется планета $P$ в результате совместного движения двух наклоненных сфер, называлась «гиппопедой». Ее форму легко вывести из следующих соображений (рис. 29, *a*)). Спроектируем движение планеты на плоскость большого круга $RP_0T$, соответствующего горизонтальному кругу на рис. 24 (стр. 154). Сама планета движется по наклонной плоскости $RP'$, которая в нашей проекции изображается эллипсом. Если движение планеты начинается в $R$, то мы можем определить ее положение после перемещения на угол $\alpha$, сместив ее сначала на соответствующую величину из $R$ в $P'$, а затем повернув $P'$ назад на угол $-\alpha$. Поскольку $P'$ как точка эллипса является вершиной прямоугольного треугольника $QP'P_0$, то и $P$ является вершиной равного ему прямоугольного треугольника $SPR$. Таким образом, $P$ один раз пробегает круг с диаметром $RS$, пока $P'$ движется по полукругу $RT$. Поскольку угол $Q$, а значит, и угол $S$ равен $\alpha$, то дуга от $R$ до $P$ равна $2\alpha$. Итак, $P$ движется по своему кругу со скоростью вдвое большей, чем угловая скорость $P'$. Поскольку на рис. 29, *a*) $P$ представляет только проекцию планеты, орбита на сфере является пере-

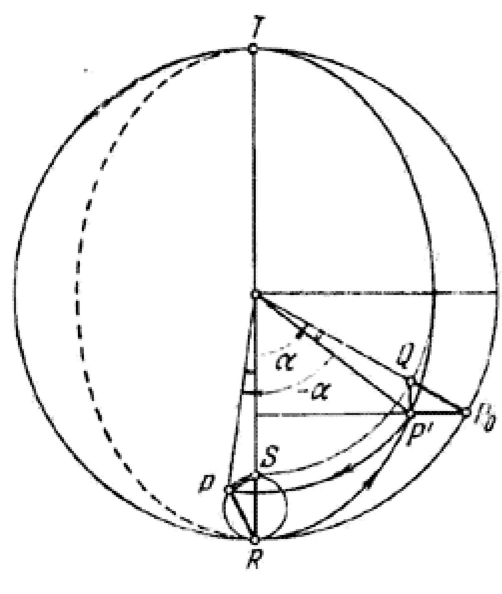



Рис. 29, *a*).

сечением сферы с прямым круговым цилиндром с диаметром $SR$. Это дает две петли гиппопеды и двойную точку в $R$ (см. рис. 24).

Подробное сравнение птолемеевской теории движения Луны и современной теории провел Мёбиус (A. F. M ö b i u s, Gesammelte Werke, IV. «Mechanik des Himmels»). См. также книги Paul K e m p f, Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der Mondbewegung, Thesis, Berlin, 1878; C. J. S c h u m a c h e r, Untersuchungen über die ptolemäische Theorie der unteren Planeten; Münster, Aschendorff, 1917; P. B o e l k, Darstellung und Prüfung der Mercurtheorie des Claudius Ptolemaeus, Thesis, Halle, 1911. Переход от геоцентрической к гелиоцентрической системе часто провозглашают одним из величайших открытий современной науки, хотя оно и было предвосхищено греческим гением. В действительности, однако, эквивалентность этих двух способов описания наблюдаемых явлений едва ли была забыта астрономами средних веков. Ариабхата (около 500 г. н. э.) приводит доводы в пользу движения и вращения Земли («Āryabhaṭīya», IV, 8; пер. Clark, стр. 64 и след.), а ал-Бируни (1030 г. н. э.) довольно небрежно замечает в своей «Индии» (пер. S a c h a u, I, стр. 276 и след.): «Кроме того, вращение Земли ни в коей мере не уменьшает значения астрономии, поскольку все явления астрономического характера так же хорошо объяснить можно в соответствии с этой теорией, как и с другой».

к 65. См. также O. N e u g e b a u e r, Notes on Hipparchus. Studies presented to Hetty Goldman, New York, 1956, стр. 292—295.

к 66. Мне кажется возможным, что гороскоп, составленный для 137 г. н. э. (Парижский папирус, 19, строки 11/12), сохранил для нас древнее название «линейных методов». Если мы правильно восстанавливаем этот отрывок, астролог сообщает нам, что он вычислил положение Солнца в соответствии с методом «наибольшей и наименьшей [скорости]». Это было бы подходящим описанием линейной зигзагообразной функции, применявшейся для определения солнечной скорости в системе B вавилонской теории.

Развитие древнего и средневекового понятия «климата» можно описать довольно просто. Еще в Вавилонии начали употреблять отношение $M : m$ самого длинного к самому короткому дню, равное 3 : 2, а также две «системы» A и B, позволяющие установить момент восхода для определения колебаний продолжительности дня на протяжении года.

Эти арифметические методы были перенесены в Александрию. Мы находим, что во втором веке до н. э. Гипсикл пользуется системой A для вычисления длины дня в Александрии, с тем единственным отличием, что отношение $M : m$ равно теперь 7 : 5, или $M = 3{,}30° = 14^h$, $m = 2{,}30° = 10^h$. То же можно, конечно, сделать для любого данного отношения $M : m$. Но характерно, что это распространение на произвольную местность опять делалось строго линейным образом, посредством изменения $M$ постоянными шагами по 4°. Таким образом, различали семь зон или «климатов»; первым номером была Александрия ($M = 3{,}30$), вторым $M = 3{,}34$, затем — 3,38 и т. д. до седьмого климата с $M = 3{,}54$ (около 43° северной широты). К сожалению, классическое для Вавилона значение $M = 3{,}36$ не попадает в эту схему. Поэтому мы находим второй тип деления, опять с интервалом в 4°, но с Вавилоном и с $M = 3{,}36$ в качестве начала отсчета (хотя и называемым всегда «вторым климатом», из чего видно, что Александрия была местом зарождения всех этих методов). Поскольку во всех случаях имеется выбор между системами A и B для определения времен восходов, то в принципе получается четыре возможности для времен восхода в каждом «климате»: либо $M = 3{,}30$ (Александрия) плюс кратное 4°, либо $M = 3{,}36$ (Вавилон) плюс кратное 4°, комбинируется с системой A или с системой B. Этим объясняется большое разнообразие чисел для времен восхода в разных климатах, которое мы встречаем в текстах.

Как и во многих других случаях, «Альмагест» не допускает никаких следов этих примитивных схем. В нем Птолемей дает (в книге II) таблицу времен восходов для десяти зон (помимо экватора, который представляет так называемую «sphaera recta») таких, что $M$ возрастает от зоны к зоне на полчаса. Александрия с ее значением $M = 14^h$ (называемая здесь «нижней страной Египта»), очевидно, является частью этой системы, продолженной до значения $M = 17^h$ ($\varphi = 54;1°$). Практически, однако, опять только семь из этих зон принимаются в качестве «климатов», на этот раз начиная со второй птолемеевской зоны («Мероэ» с $M = 13^h$), и кончая $M = 16^h$ или $M : m = 2 : 1$ (Южная Россия). В этой системе Александрия лежит в третьем климате, следующим климатом является «Родос», пятым — «Геллеспонт» ($M = 15^h$).

В последующие периоды в соответствии со специальными нуждами делались новые дополнения. Например, для Византии было принято значение $M = 15;15^h$, но такие новые зоны не влияли на стандартную систему «семи климатов», остававшуюся основным элементом средневековой географии. Только постепенно географическая широта заменила наибольшую длину дня в качестве определяющего параметра местности. Этот процесс достиг своей кульминации в таблицах времен восходов ал-Каши[1]), которые были составлены от градуса к градусу географической широты, начиная от sphaera recta и до $\varphi = 60°$.

Изобретатель системы «семи климатов» неизвестен; этот факт наглядно демонстрируется большим количеством теорий, выдвинутых для ответа на поставленный вопрос. Все, что достаточно твердо известно — это что такая система возникла в Александрии. В вавилонской астрономии нет следов изменения значений $M$ в зависимости от географической широты. Линейные методы часто использовались в астрологической литературе, и поэтому неудивительно, что мы находим времена восхода для Вавилона (вычисленные по системе А) даже в Индии (Вараха-Михира, Brihat Jataka, I, 19). Неправильно, однако, было бы различать «астрологические» и «географические» климаты.

Об истории климатов см. книгу Хонигманна (Ernst Honigmann, Die sieben Klimata, Heidelberg, Winter, 1929) и мою статью «On Some Astronomical Papyri and Related Problems of Ancient geography», Trans. Amer. Philos. Soc., N. S., 32 (1942), стр. 251—263. О временах восходов в вавилонской астрономии см. мою статью в J. Cuneiform Studies, 7 (1953), стр. 100—103 и ACT, I, стр. 240.

Большое значение задачи о восхождениях видно также из единственного сохранившегося труда Гиппарха, его комментария к Арату. В истинно мастерской статье методы Гиппарха исследовал Фогт (H. Vogt, «Versuch einer Wiederherstellung von Hipparchs Fixsternverzeichnis», Astron. Nachrichten, 224, 1925, кол. 17—54). Как показал Болл, звездный каталог Гиппарха включал около 850 звезд. Из этого каталога около 350 звезд упомянуто в «Комментарии» к Арату. Фогт исследовал 879 чисел, касающихся этих звезд; 471 из них являются сферическими координатами, 408 касаются одновременных восходов или заходов или кульминаций. Гиппарх не употребляет эклиптические координаты «долготу» и «широту», которые стали стандартом для звездных каталогов со времени «Альмагеста». Из 471 сохранившегося числа 64 представляют собой склонения, 67 — прямые восхождения и 340 — дуги эклиптики, определяемые пересечением круга склонения, проведенного через звезду, с эклиптикой (рис. 30).

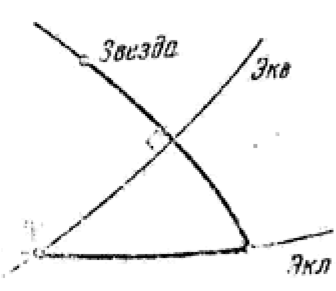


Рис. 30.

Древние астрономы с полным основанием доверяли больше точности своих математических теорий, чем инструментам. В качестве примера можно привести тот факт, что Птолемей определял эклиптические координаты неподвижных звезд посредством измерения их расстояния до ближних положений Луны, долгота которых определялась затем вычислением.

[1]) Не опубликовано; см. E. S. Kennedy, Trans. Amer. Philos. Soc. N. S., 46, стр. 164.

Фрагмент вавилонского звездного каталога см. в статье S a c h s, J. of Cuneiform Studies, 6 (1952), стр. 146—150.

Модель механических часов, основанная на стереографической проекции, описана Дильсом (H. D i e l s, Antike Technik, изд. 3-е, 1924, стр. 217 и табл. 18 [1]). Стереографическая проекция применялась Птолемеем в его «Планисферии» (Opera II, стр. 225—259, Heiberg), чтобы определять времена восходов с использованием только плоской тригонометрии. Такая же конструкция используется в «астролябии», инструменте, который позволяет нам представить небесные явления при помощи вращения сети кругов над диском, представляющим плоскость экватора, на которую небесная сфера проектируется с южного полюса. См. мою статью «The Early History of the Astrolabe» Isis, 40 (1949), стр. 240—256.

к 67. Вавилонское значение в 27;33,20 дней для аномалистического месяца упоминается также Гемином (около 70 г. до н. э.) в его «Введении в астрономию», 18. Однако вывод этого значения, приведенный Гемином, неверен. Он говорит, что 717 аномалистических месяцев содержат 19756 дней, но отсюда следует, что один месяц равен 27;33,13,18 ... дням, а не 27;33,20. Гемин соединяет здесь два разных метода в один.

Ссылки на публикации, упомянутые в тексте (стр. 164):

S c h n a b e l, Zeitschr. f. Assyrologie, 37 (1927), стр. 35 и стр. 60.

K n u d t z o n — N e u g e b a u e r, Bull. soc. roy. des lettres de Lund, 1946—1947, стр. 77—88.

N e u g e b a u e r, Danske Videnskab. Selskab, Hist.-filol. Meddelelser, 32, № 2 (1949).

T h i b a u t-D v i v e d i, The Pañchasiddhântikâ, the Astronomical Work of Varâha Mihira, Benares, 1889.

John W a r r e n, Kala Sankalita, a Collection of Memoirs on the Various Modes According to which the Nations of the Southern Ports of India Divide Time, Madras, 1825.

Уоррен имел предшественника в лице французского астронома Лежантиля, посланного в Индию наблюдать прохождения Венеры через диск Солнца в 1761 и 1769 гг. Первое прохождение он упустил из-за войны Англии с Францией, второе — из-за облаков. Но он много узнал о тамильской астрономии и дал превосходное описание методов вычисления затмений в Мемуарах Парижской Академии за 1772 г., II. Французские ученые этого времени — Кассини, Лежантиль, Балльи, Деламбр ясно понимали различие между линейными методами астрономии тамилов и тригонометрическими методами «Сурья-Сиддханты». В последующей литературе это понимание было утеряно.

Перевод «Сурья-Сиддханты», выполненный Эбенезером Б а р д ж е с с о м (J. Amer. Oriental Soc., 6, 1860, стр. 141—498) переиздан в 1935 г. Калькуттским университетом. Анализ тамильских методов вычисления лунных затмений см. в статьях O. N e u g e b a u e r. Tamil Astronomy, a Study in the History of Astronomy in India, Osiris, 10 (1952), стр. 252—276; B. L. v a n d e r W a e r d e n, Die Bewegung der Sonne nach griechischen und indischen Tafeln; S. B. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1952, стр. 219—232; v a n d e r W a e r d e n, Tamil Astronomy, Centaurus, 4 (1956), стр. 221—234.

Имеется много очевидных указаний на непосредственный контакт индийской астрономии с эллинистической традицией, например, использование эпициклов или использование таблиц хорд, преобразованных индийцами в таблицы синусов. Одну и ту же смешанную систему из эклиптических дуг и кругов склонения мы встречаем у Гиппарха (см. стр. 181) и в ранних «Сиддхантах» [2]) (Барджесс называл их «полярной долготой» и «полярной широтой»).

---

[1]) Русский перевод: Г. Д и л ь с, Античная техника, М.—Л., 1934. *(Прим. ред.)*

[2]) Гиппарх делил не только эклиптику, но и экватор на секторы по 30° и называл их именами знаков зодиака (см. «Комментарии к Арату» Гиппарха, изд. Manitius, стр. 295). В «Сурья-Сиддханте» знаки зодиака используются таким же образом для обозначения дуг любого большого круга.

Широкое использование шестидесятеричной системы является общим и для греческой, и для месопотамской астрономии. Использование «титхи», столь характерное для индийской астрономии, пока не засвидетельствовано в греческих текстах; но мы так мало знаем о линейных методах эллинистической астрономии, что можем допустить, что использование «лунных дней» проникло в эллинистическую астрологию из вавилонских текстов, совершенно так же, как периоды обращения планет и теория Луны[1]). Появление отношения 3 : 2 для самого длинного и самого короткого дней можно счесть за признак непосредственного месопотамского влияния, хотя этот элемент является также частью эллинистической традиции «климатов». Расположение планет в соответствии с «правителями» дней недели (см. стр. 168) также указывает прежде всего на эллинистическое влияние.

О римских морских путях и римских поселениях в Индии см. статью R. E. M. Wheeler, Arikamedu: An Indo-Roman Trading-Station on the East Coast of India, Ancient India, № 2 (1946), стр. 17—124. Общий обзор см. в работе Martin P. Charlesworth, Roman trade with India, Studies in Roman Economic and Social History in Honor of Allan Chester Johnson, Princeton, 1951, стр. 131—143. Перевод «Перипла» с обширными комментариями опубликован Шоффом (W. H. Schoff, The Periplus of the Erytrean Sea, New York — Philadelphia, 1912).

Сравнительно раннюю дату греко-персо-индийских контактов, по-видимому, указывает отрывок из «Денкарт» (Dēnkart), книга IV, согласно которому индийские книги по грамматике, астрономии и гороскопии, так же как и греческий «Альмагест», достигли двора Шапура I (около 250 г. н. э.); см. Menasce, Journal Asiatique, 237 (1949), стр. 2 и след.

к 68. Гиппарха часто цитируют в астрологической литературе. В качестве примера можно упомянуть Веттия Валента, I, 19, когда он пишет об элонгации Луны. При этом используется та же эпоха (Августа), что и в папирусе Райланда 27, и поэтому метод не может быть подлинным созданием Гиппарха. Тем не менее он может восходить к Гиппарху совершенно так же, как другие линейные методы восходят к вавилонским первоисточникам. Ф. Болл первым счел заслуживающими внимания древние сообщения, связывающие Гиппарха с астрологией, в связи с тем, что возникновение астрологического учения относится ко второму веку до н. э. (см. его лекцию: F. Boll, Die Erforschung der antiken Astrologie, Neue Jahrbücher für das Klassische Altertum, 21, 1908, стр. 103—126). Кюмон пишет: «Hipparque, dont le nom doit être placé en tête des astrologues comme des astronomes grecs»[2]) (F. Cumont, Klio, 9, 1909, стр. 268).

к 69. Самый ранний из известных гороскопов составлен для 410 г. до н. э. [A. Sachs, Babylonian horoscopes, J. of Cuneiform Studies, 6 (1952), стр. 49—75]. Сохранившиеся клинописные гороскопы относятся к периоду Селевкидов. Самый ранний греческий гороскоп — это гороскоп, составлен-

---

[1]) Применение «титхи»—тридцатых частей среднего синодического месяца, было впервые обнаружено в вавилонских планетных текстах Паннекуком (Pannekoek, Koninklijke Akad. van Wetensch. te Amsterdam. Proceedings, 19, 1916, стр. 684—703) и ван-дер-Варденом (Eudemus, 1, 1941, стр. 23—48). О наличии этих единиц в вавилонских лунных эфемеридах см. O. Neugebauer, ACT, I, стр. 119. В поздней индийской астрономии титхи стали единицами переменной длины, а именно тридцатыми долями фактических лунных месяцев. Так в конце концов эти величины стали переменными, хотя они были изобретены для того, чтобы избежать колебаний истинного лунного календаря. В классической же индийской астрономии (например, в «Сурья-Сиддханте») титхи имеют постоянную среднюю продолжительность; см. Olaf Schmidt, On the Computation of the Ahargana, Centaurus, 2 (1952), стр. 140—180.

[2]) «Гиппарх, имя которого следует поместить во главе как греческих астрономов, так и астрологов».

ный по поводу коронации Помпеем Антиоха I Коммагенского в Нимруд Даге в 62 г. до н. э. Гороскопы на папирусах или в греческой литературе начали появляться в начале нашей эры.

Профессор Черннс (Н. Cherniss) указал мне на одно раннее свидетельство того, что грекам была известна вавилонская астрология. Прокл (умерший в 485 г. н. э.) в своем комментарии к платоновскому «Тимею» (III, 151, Diehl) цитирует Теофраста, последователя Аристотеля (умер в 322 г. до н. э.), который говорит, что халдеи в его время могли предсказывать по небесам не только погоду, но и жизнь и смерть всех людей.

Еще на одно поколение раньше указывает часто цитируемое замечание Цицерона (De divinatione, II, 42, 87), что Евдокс писал, что не следует верить халдейскому способу предсказания человеческой судьбы по дате рождения.

Хотя нельзя отрицать возможность раннего распространения вавилонской астрологии на запад, мне кажется, тут необходима осторожность. Ничуть нельзя быть уверенным, что предсказание «по дню рождения» означает астрономическое предсказание. Наоборот, мы имеем очень сходные ранние ссылки Геродота, который говорил (II, 82), что египтяне «приписывают каждый месяц и каждый день» богу и что «они могут сказать, какая судьба, какой конец и какой характер будет у человека по дню его рождения». Здесь мы ясно видим, что предсказание по «дню рождения» вовсе не означает предсказания по положению планет и знаков зодиака в час рождения. Как заметил Бругш (Herodotus, изд. Stein, 1881, стр. 88, сноска), Геродот ссылался на практику, которая непосредственно засвидетельствована текстами, например, папирусом Sallier, IV из Британского музея, написанным во времена Нового Царства [см. F. Chabas, Le calendrier des jours fastes et néfastes de l'année égyptienne (1870); Oeuvres diverses, т. IV, стр. 127—235; также F. W. Read, Proc. Soc. Bibl. Arch., 38 (1916), стр. 19—26, 60—69, и Abd el-Mohsen Bakir, Annales du Service des Antiquités de l'Égypte, 48 (1948), стр. 429]. Эти списки счастливых и несчастливых дней содержат также предсказания будущей судьбы человека, рожденного в определенный день, например, смерть от крокодила, укуса змеи, и т. п., точно так, как указывал Геродот.

Еще более зачаточную форму предсказаний человеческой судьбы можно найти в хеттских текстах тринадцатого века до н. э. (см. В. Meissner, Klio, 19, 1925, стр. 432—434), где будущее ребенка зависит от месяца его рождения. Это, конечно, совсем не то же самое, что планетные гороскопы эллинистической эпохи.

Важным доводом в пользу сравнительно позднего появления астрологии представляется мне частое использование в астрологических текстах в качестве точки весны 8° Овна, т. е. точки весны из системы В вавилонской теории Луны,— теории, дошедшей до греков, по-видимому, только во времена Гиппарха. Евдокс же использовал в качестве весенней точки 15° Овна; то же относится и к некоторым астрономическим и календарным папирусам птолемеевского периода в Египте. Это раннее евдоксово значение нигде не встречается в астрологической литературе.

Более того, имеется прямое свидетельство о типе того материала, который связывали с именем Евдокса. Бецольд и Болл (Bezold — Boll, Reflexe astrologischer Keilinschriften bei griechischen Schriftstellern, S. B. Heidelberger Akad. d. Wiss. Philos.-hist. Kl., 1911, № 7) указали на близкий параллелизм между месопотамскими предзнаменованиями, касающимися грома, облачности, положения рогов лунного серпа, и т. п., и греческими календарями того же типа, тоже связанными с именем Евдокса. Но нигде в этих параллелях, не встречается никаких ссылок на вычислительные методы, которые были характерны для гороскопной астрологии.

Техника и принципы греческой астрологии описаны в классической работе Буше-Леклерка (A. Bouché-Leclercq. L'astrologie grecque, Paris, 1899). Исторические и философские аспекты одной из главных составных частей астрологического учения и его ответвления в ботанику, алхимию и т. д. разобраны Фестюжьером (A. J. F e s t u g i è r e, La Révélation d'Hermès Trismégiste, I, L'astrologie et les sciences occultes, изд. 2-е, Paris, 1950).

Об эллинистическом происхождении астрологии см. W. K r o l l, Klio, 18 (1923), стр. 213, и W. C a p e l l e, Hermes, 60 (1925), стр. 373.

Об истории планетной недели см. F. H. C o l s o n, The Week, Cambridge University Press, 1926. Ее проникновение в еврейскую литературу было исследовано Гандцом (S. G a n d z, Proc. Amer. Acad. for Jewish Research, 18, 1949, стр. 213—254).

к 70. О Тевкре см. G u n d e l, Pauly-Wissowa Real Enc., 5A, столб. 1132—1134. Верхний предел его жизни мог бы быть известен по датировке знавшего его Антиоха из Афин. (см. Real Enc., 18,3 ст. 122, 58 и след.). Кюмон (C u m o n t, Annuaire de l'institut de philol. et d'hist. Orientales, 2, Bruxelles, 1934, стр. 135 — 156) помещает Антиоха между 100 г. до н. э. и 50 г. н. э., но его аргументация носит очень косвенный характер. Таким образом, для Тевкра мы в лучшем случае имеем те же пределы.

Порфирий (около 270 г. н. э.) и последующие авторы называли Тевкра «вавилонянином»[1]). Гундель, хорошо понимавший, как мало на самом деле известно о вавилонской астрологии, ударился в другую крайность, практически совершенно отрицая вавилонское влияние на эллинистическую астрологию, и подменяя его в качестве основного фактора египетской мифологией. В результате он принял довольно искусственную гипотезу Эйслера, по которой «Вавилон» означает город — крепость с этим именем в Египте (около Каира). Я не вижу никаких свидетельств, подтверждающих эту точку зрения.

Сочинения Тевкра известны только по выдержкам, сохранившимся в более поздних астрологических трактатах. Их большое историческое значение было впервые полностью осознано Боллом (B o l l, Sphaera, neue griechische Texte und Untersuchungen zur Geschichte der Sternbilder, Leipzig, Teubner, 1903). О переводе на язык пехлеви см. статью Наллино (N a l l i n o, Raccolta di Scritti, VI, стр. 285—303). Арабскую традицию исследовал Штейншнейдер (S t e i n s c h n e i d e r, Z. Deutsche Morgenländische Gesellschaft, 50, 1896, стр. 352—354). См. также G u n d e l, Real Enc., 5A, столб. 1133.

О диалоге «Гермипп» см. статьи Болла (Fr. B o l l, S. B. Heidelberg Akad. d. Wiss., phil.-hist. Kl., 1912, Abh. 18) и Штегеманна (V. S t e g e m a n n, Hermes, 78, 1944, стр. 120, примеч. 2).

Вавилонские методы и параметры, обнаруженные в «Панча-Сиддхантике», приведены в моей статье «Babylonian planetary Theory», Proc. of the Amer. Philos. Soc., 98 (1954), стр. 60—89.

к 71. Датта и Сингх (D a t t a, S i n g h, History of Hindu Mathematics, т. 1, 1935) считают (стр. 59) комментарий Бхаттотпалы к «Брихат Самхите» Вараха-Михиры отрывком из оригинала «Паулиса-Сиддханты»; в этом отрывке большое число, оканчивающееся на 7800, выражено числительными в обратном порядке в виде «нуль, нуль, восемь, семь, ...». Мне кажется вполне правдоподобным объяснение, что десятичная позиционная система счисления возникла в качестве модификации шестидесятеричной позиционной системы, с которой индусы познакомились через эллинистическую астрономию.

О датировке «Сурья-Сиддханты» см. v a n d e r W a e r d e n, Diophantische Gleichungen und Planetenperioden in der indischen Astronomie, Vierteljahrschrift der Naturforsch. Ges. in Zürich, 100 (1955), стр. 153—170.

О ссылках Ибн Юниса на персидские наблюдения см. C a u s s i n, Notices et Extraits de Manuscrits de la Bibliothèque Nationale, т. 7, 1 и 12 (1803), стр. 234, примечание (1). О датировке Веттия Валента см. O. N e u g e b a u e r, Harvard Theological Review, 47 (1954), стр. 65—67.

---

[1]) Если это наименование основано на древней традиции, нельзя быть уверенным, что Тевкр был жителем Вавилона, потому что «вавилонянами» называли также жителей Селевкии на Тигре; см. T a r n, The greeks in Bactria and India, стр. 15.

Превосходный обзор греческой магии можно найти у Прейзенданца (K. Preisendanz, Zur Überlieferungsgeschichte der spätantiken Magie, Zentralblatt für Bibliothekswesen, Beiheft, 75 (1951), стр. 223—240).

В наших рассуждениях мы часто без дальнейшего уточнения употребляли слово «греческий». Следует отметить, что мы использовали этот термин как удобное географическое или лингвистическое обозначение. Понятие же «греческая математика», мне кажется, больше вводит в заблуждение, чем помогает. Мы очень хорошо знаем трех математиков — Евклида, Архимеда и Аполлония, которые несомненно представляют единую традицию. Мы знаем только одного астронома, Птолемея. И нам знакомо примерно столько же менее крупных фигур, которые в большей или меньшей степени следовали за своими великими учителями. Таким образом то, что называют обычно «греческой» математикой, состоит из отрывков сочинений около 10 или 20 человек, разбросанных по периоду в 600 лет. Мне кажется опасным обобщением пытаться абстрагировать из этого материала какой-то общий тип и затем устанавливать некий таинственный глубокий принцип,который будто бы связывает математические документы с некоторыми другими произведениями искусства.

ПРИЛОЖЕНИЕ I

# СИСТЕМА ПТОЛЕМЕЯ

74. В настоящем приложении дается описание кинематических моделей, в соответствии с которыми были вычислены в «Альмагесте» таблицы, позволяющие для любого данного момента времени найти долготы Солнца, Луны и пяти планет. Это описание даст читателю по крайней мере некоторое представление об основных методах, развитых в «Альмагесте», хотя я всячески должен подчеркнуть, что представляю здесь только один специальный аспект теории планет «Альмагеста».

Даже в пределах ограниченной задачи определения координат небесных тел я опускаю вопрос о широте, потому что нельзя дать его адекватный анализ без подробного описания эмпирических данных, собранных Птолемеем, и геометрических и числовых методов, изобретенных для их представления. Точно так же я почти полностью игнорирую те очень изящные методы, которые привели от большого разнообразия эмпирических данных к численному определению характеристических параметров кинематических моделей. Всякий, кто серьезно изучает древнюю или средневековую астрономию, должен ознакомиться с этими деталями, не только для того, чтобы правильно оценить один из величайших когда-либо написанных шедевров научного анализа, но также и для того, чтобы быть в состоянии понять, что являлось общепринятым уровнем знаний для любого компетентного астронома от второго до семнадцатого века.

Теория планет «Альмагеста» содержит значительно больше, чем только определение долготы и широты. Интересный раздел касается стационарных точек, другой — посвящен первому и последнему видимым появлениям. Теория Луны трактует также о параллаксе, расстоянии и размерах Солнца и Луны и вычислении затмений. Описаны инструменты для наблюдений, развиты математические методы. Солнечный апогей, уравнение времени, прецессия, неподвижные координаты звезд и их связь с положениями Луны — все это важные вопросы, которые позднее стали центром внимания астрономов стран ислама. Эти исследования могут быть удовлетворительно описаны только в работе совершенно другого масштаба, нежели настоящая книга. Последующее же изложение, я надеюсь, будет полезным руководством при чтении оригинальных источников.

**75.** Движение Солнца представлено в «Альмагесте» простым эксцентрическим движением, или эквивалентным ему эпициклическим движением, зависящим только от одной переменной, а именно — среднего расстояния $\alpha$ от апогея (рис. 31). Предполагается, что апогей находится на фиксированном расстоянии в 65;30° от точки весны [1]) и что эксцентриситет равен $e = r = 2;30$ (при радиусе деферента, равном 60). Соответствующая поправка $\delta$, на которую «среднее Солнце» в $C$ отличается от «действительного Солнца» в $S$, называемая «простафайрезисом аномалии», отрицательна для значений аномалии $\gamma = \alpha$ от 0 до 180 и положительна для остального полукруга; ее максимальное значение равно 2;23°. Таблица поправок $\delta$ в зависимости от аномалии дана в «Альмагесте», III, 6 и представлена графически на рис. 33 (нижняя кривая) [2]). Эта поправка позднее была названа «уравнением центра» [3]).

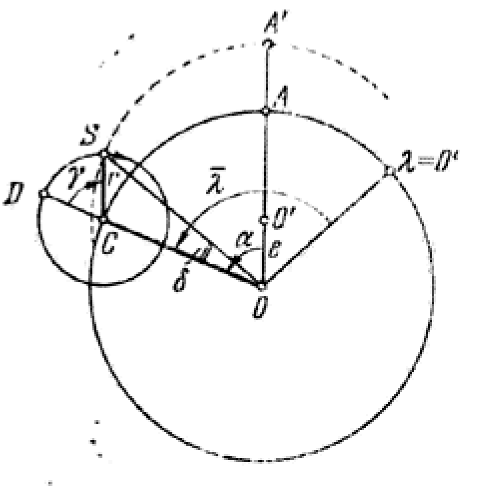



Рис. 31.

**76.** Теория движения Луны, очевидно, требует более сложной модели, поскольку уже вавилонским астрономам третьего или четвертого века до н. э. было известно, что аномалистический месяц (возвращение к той же скорости) длиннее сидерического месяца (возвращение к той же самой неподвижной звезде). В результате в эпициклической модели (см. рис. 32) среднее движение по долготе, задаваемое углом $\bar{\lambda}$, быстрее среднего движения по аномалии; первое составляет около 13;10,35°/d, последнее — 13;3,54°/d. Получающееся движение может также быть описано как эксцентрическое движение с вращающейся линией апсид [4]). В тех

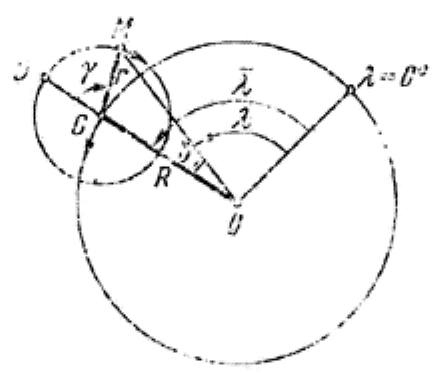



Рис. 32.

---

[1]) Иначе говоря, предполагается, что тропический и аномалистический годы совпадают.

[2]) На графике представлено абсолютное значение $\delta$.

[3]) По моим сведениям, термин «equatio» впервые появился в латинских переводах арабских трактатов.

[4]) Линия апсид — прямая, соединяющая апогей и перигей лунной орбиты. (*Прим. ред.*)

единицах, в которых радиус деферента равен 60, радиус эпицикла был найден равным $r = 5;15$. Получающаяся поправка $\delta = \lambda - \bar{\lambda}$, которая приводит от «средней долготы» $\bar{\lambda}$ к «истинной долготе» $\lambda$, представлена таблицей в «Альмагесте», IV, 10 и изображена графически кривой $c_4$ на рис. 33 в том же масштабе, что и уравнение центра для Солнца.

77. Описанная до сих пор теория, хотя и улучшенная в нескольких отношениях Птолемеем, была известна еще Гиппарху. Определение основных параметров было основано на тщательно выбранных наблюдениях лунных затмений и полученные результаты весьма удовлетворительно описывали затмения в целом. Птолемей, однако, на основании мастерского анализа своих собственных наблюдений и наблюдений своих предшественников понял, что возможны заметные отклонения от предсказанных долгот Луны, достигающие максимального значения вблизи элонгаций от Солнца в $\pm 90°$. Другими словами, он понял, что традиционная теория Луны согласовывалась с наблюдениями в моменты сизигий (соединений и противостояний), но не могла объяснить долго́ты около первой и последней четвертей Луны, особенно при значениях аномалии $\gamma$, близких к $\pm 90°$. В этих случаях диаметр эпицикла, казалось, надо было увеличить по сравнению со значением, найденным по сизигиям.

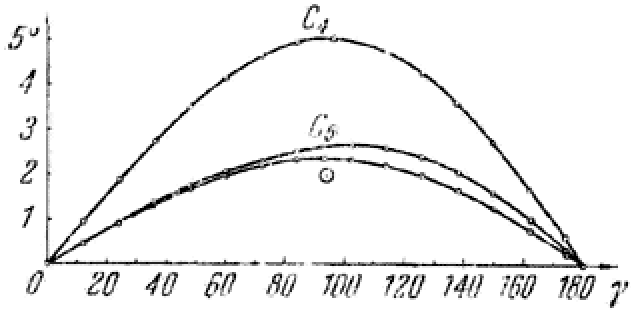



Рис. 33.

Способ, применяемый Птолемеем для выхода из этого положения, представляет интерес во многих отношениях. Он дает нам возможность глубже проникнуть в математические и астрономические методы того времени; очень показательно отношение к бросающемуся в глаза дефекту теории, получившее отклик в астрономии стран ислама и в работе Коперника; наконец, метод, при помощи которого было учтено это неравенство лунного движения, повлиял также на теорию планет как Птолемея, так и Коперника.

Как мы уже говорили, наблюдения указывали на зависимость видимого диаметра эпицикла Луны от элонгации от Солнца. Такого эффекта можно добиться, приблизив эпицикл к наблюдателю при помощи следующего построения (рис. 34). Пусть $C_0$ — положение центра эпицикла Луны в момент соединения со средним Солнцем, так что $OF_0C_0$ — прямая линия и $OC_0 = R$ — радиус деферента, известный из предыдущей модели, изображенной на рис. 32. Пусть $\eta$ — угол, возрастающий пропорционально времени со скоростью, равной разности между средней скоростью Луны и средней скоростью Солнца, иначе говоря, — так называемая «элонгация». Ее значение равно нулю в соединении; по мере возрастания $\eta$ точка $F$ движется в обратном направлении по малому кругу с радиусом $s$ и центром $O$ так, что ее угловое расстояние от направления из $O$ к среднему Солнцу равно элонгации $\eta$. В то же время точка $C$, центр эпицикла, движется вперед так, что направление $OC$ тоже составляет угол $\eta$ с направлением из $O$ к среднему Солнцу. Таким образом, $C$ приближается к $O$ по мере того, как $\eta$ возрастает от 0° до 90° [1]). В первой четверти ($\eta = 90$) расстояние $C$

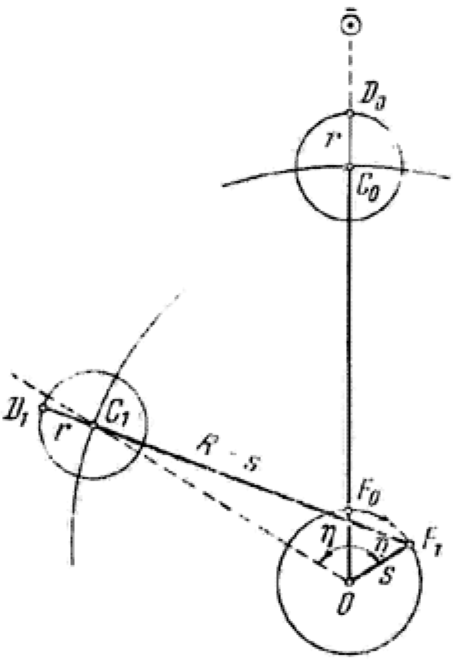



Рис. 34.

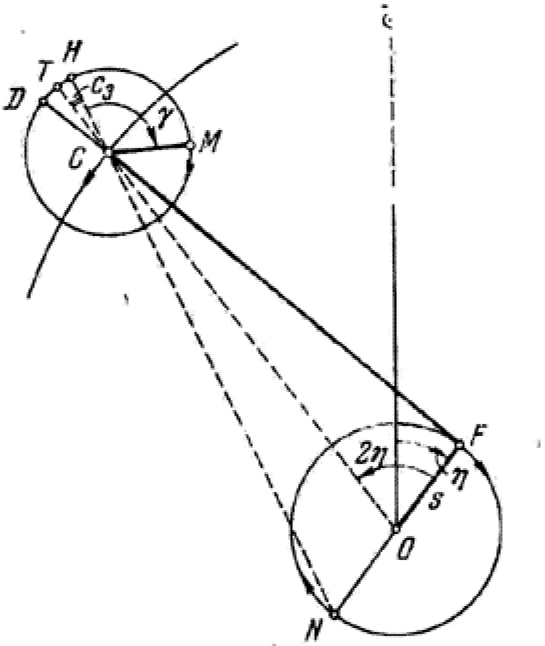



Рис. 35.

от $O$ достигает своего минимального значения $R - 2s$. В противостоянии ($\eta = 180$) $C$ опять отодвигается на первоначальное расстояние $R$ от $O$. Поскольку затмения могут происходить только в соединениях или противостояниях, новая модель согласуется со старой моделью для всех элементов, полученных из затмений. Для четвертей же она увеличивает видимый диаметр эпицикла в соответствии с наблюдениями.

Птолемей нашел еще одно отклонение от первоначальной теории для положения эпицикла при элонгациях, близких к октантам (восьмым долям): аномалию $\gamma$, определяющую положение Луны $M$ на эпицикле, нужно измерять не от апогея $D$, а от переменного апогея $H$ (рис. 35) такого, что радиус $HC$ имеет «направление» (по-гречески προσνευσις) к точке $N$, всегда расположенной диаметрально противоположно точке $F$. Точка $H$ называется «средним апогеем», потому что от нее измеряется средняя аномалия $\gamma$. Точка $T$, являющаяся апогеем эпицикла, если смотреть из $O$, называется при этом «истинным» апогеем.

---

[1]) Длина отрезка $FC = R - s$ остается неизменной. (*Прим. ред.*)

Параметры этой модели равны

$$r = 5;15 \qquad s = 10;19 \qquad R = 60\ ^{1)}.$$

Отсюда видно, что в четвертях Луна может подойти к наблюдателю на расстояние $R - 2s - r = 34;7$. Это, очевидно, означает, что видимый диаметр самой Луны должен стать почти вдвое больше своего среднего значения, чего на самом деле определенно не происходит. Это противоречие Птолемей молчаливо игнорирует, хотя у него не могло быть сомнений в том, что фактические геоцентрические расстояния до Луны очень отличались от того, чего требовала его модель. Тем не менее эту модель сохраняли почти все его последователи, просто потому, что по ней можно было правильно предсказывать по крайней мере долготы.

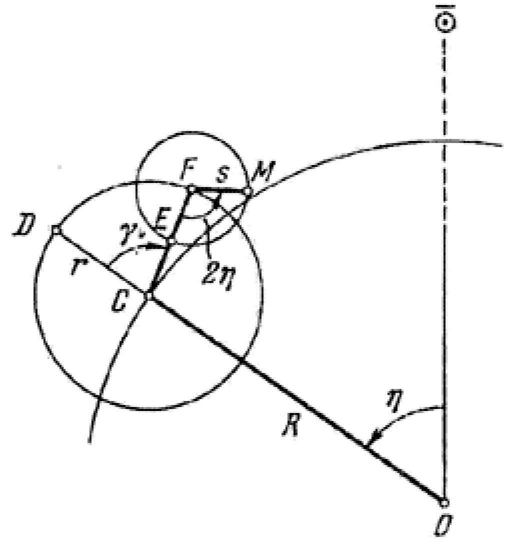


Рис. 36.

Коперник указал на явное противоречие между птолемеевской моделью движения Луны и наблюдаемыми параллаксами [2]) и предложил другую модель, в которой центр $C$ эпицикла оставался бы на среднем расстоянии от Земли, а расстояние Луны от $C$ в четвертях увеличивалось (рис. 36). Он предположил, что Луна $M$ расположена на вторичном эпицикле так, что она начинает свое движение в соединении из точки $E$ на расстоянии $r - s$ от $C$. С возрастанием элонгации на $\eta$ Луна передвигается по малому эпициклу в прямом направлении на $2\eta$, достигая таким образом при $\eta = 90$ расстояния $r + s$ от $C$. Поскольку Коперник использовал значения $r = 6;35$ и $s = 1;25$ для $R = 60$, Луна не могла подойти к наблюдателю ближе, чем на $R - (r + s) = 52$, что уже существенно не отличается от расстояний, вытекающих из простой модели (см. рис. 32).

Это явное преимущество вторичных эпициклов побудило Коперника применить ту же самую конструкцию и к движению планет и этим положить начало усложнениям, которые нарушили изящество и простоту, присущие модели Птолемея.

Только недавно было обнаружено [3]), что тот же метод исправления лунной модели Птолемея был использован примерно за

---

[1]) В Inscriptio Canobi, Opera, II, стр. 150, 5 и 12. Птолемей принимает нормировку $R - s = 60$ и соответственно получает $r = 6;20$, $s = 12;28$.

[2]) De revolutionibus (напечатано в 1543 г.), IV, 2.

[3]) См. статью Робертса, выходящую в Isis [V. Roberts, The Solar and Lunar Theory of Ibn ash-Shātir, Isis, т. 48, 1957, № 154, стр. 428—432]. (*Прим. ред.*)

200 лет до Коперника ибн аш-Шатиром. Знал Коперник о своем предшественнике или нет, в настоящее время установить невозможно.

**78.** Схема вычисления долготы Луны согласно модели Птолемея основана на таблицах, помещенных в «Альмагесте», V, 8. Первые две колонки этих таблиц содержат аргумент $\theta$ и $360° - \theta$ для $\theta$, меняющегося от 0° до 180°. Третья колонка дает угловую разность между истинным и средним апогеем эпицикла ($T$ и $H$ на рис. 35), как функцию удвоенной элонгации $2\eta$, где $\eta$ — разность между средними долготами Луны и Солнца в данный момент. Мы назовем эту функцию $c_3(2\eta)$; ее график показан на рис. 37. Составив $\gamma' = \gamma + c_3$, находят аномалию, определяющую угол, под которым точка $M$ видна из $C$. По аргументу $\gamma'$ находят в 4-й колонке

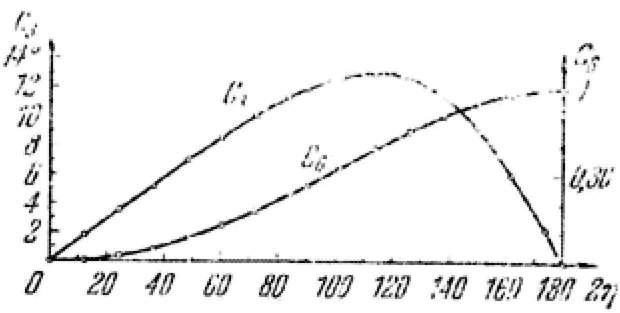


Рис. 37.

значение $c_4(\gamma')$, представляющее собой уравнение центра, уже известное нам по простой лунной модели (рис. 32 и 33), т. е. угол, под которым отрезок $CM$ будет виден из $O$, если расстояние до $C$ равно $R = 60$. Колонка $c_5(\gamma')$ дает величину, которую нужно прибавить к уравнению центра, чтобы получить этот угол для минимального расстояния $C$ от $O$; наконец, $c_6(2\eta)$ указывает дробную часть от $c_5$, связанную с тем, что для $2\eta < 180°$ фактическое расстояние $C$ от $O$ находится между двумя крайними значениями, для которых уравнение центра равно соответственно $c_4$ и $c_4 + c_5$. Так для окончательного уравнения находится значение

$$\delta = c_4 + c_5 \cdot c_6,$$

откуда истинная долгота $\lambda = \overline{\lambda} - \delta$, если $\gamma' < 180$, и $\lambda = \overline{\lambda} + \delta$, если $\gamma' > 180$. Числовые значения, приведенные в «Альмагесте», V, 8, представлены графически на рис. 33 и 37.

**79.** Птолемеева теория планет основана на тех же принципах, что и теория Солнца или Луны. Как мы уже видели (стр. 127 и след.), круговые движения планет вокруг Солнца наблюдателю с Земли кажутся движениями по эпициклам. Тем же методом легко убедиться, что эксцентричные круговые орбиты приводят к эпициклическим движениям с эксцентричными деферентами, причем эксцентриситет деферента определяется равнодействующей векторов, представляющих эксцентриситеты планетной и солнечной (или земной) орбит.

Эта модель была потом модифицирована Птолемеем на основе наблюдений, выполненных большей частью им самим или его предшественником Теоном[1]); он нашел, что центр эпицикла движется равномерно со своей средней угловой скоростью не вокруг центра деферента, а вокруг точки (позднее названной «эквантом»), расположенной симметрично наблюдателю. Мы встретились, по существу, с той же идеей в птолемеевой теории Луны, где центр $C$ эпицикла движется с постоянной угловой скоростью, поскольку он остается на радиусе $OT$, вращающемся равномерно (рис. 35), линейная же скорость $C$ не постоянна. Философские умы считали этот отход от строго равномерного кругового движения наиболее серьезным возражением против системы Птолемея и изобрели крайне сложные комбинации круговых движений, для того чтобы спасти аксиому о первобытной простоте сферической вселенной.

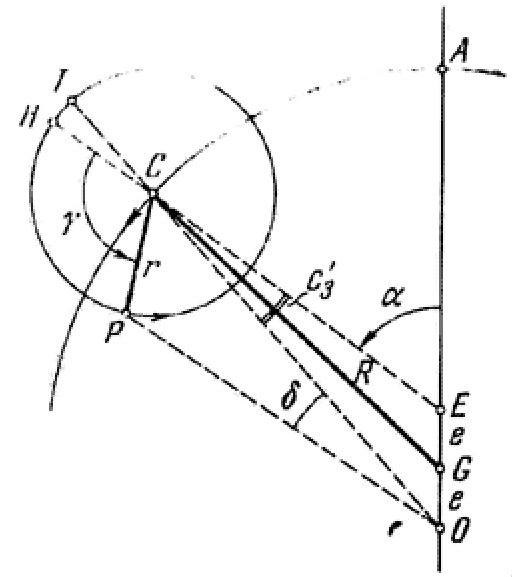


Рис. 38.

80. На рис. 38 показана модель Птолемея для внешних планет. Среднее движение планеты представляется движением центра $C$ эпицикла, измеряемым «средним расстоянием» $\alpha$ от $C$ до апогея $A$. Планета $P$ движется по эпициклу со скоростью, соответствующей синодическому периоду и измеряемой «аномалией» $\gamma$. Направление вращения $P$ по эпициклу совпадает теперь с направлением среднего движения, что приводит к наибольшему прямому движению планеты около апогея эпицикла и к попятному движению около перигея.

Согласно нашему общему анализу гелиоцентрического и геоцентрического движений (стр. 128, рис. 14) в случае внешней планеты направление $CP$ параллельно направлению от $O$ к среднему Солнцу. В случае внутренней планеты угол $\alpha$ возрастает как долгота среднего Солнца (фактически $C$ можно отождествить со средним Солнцем), а аномалия $\gamma$ изменяется независимо от положения Солнца. Во всех случаях положение $P$ зависит от двух независимых переменных $\alpha$ и $\gamma$, которые можно считать известными для любого данного момента.

Для Меркурия наблюдения нельзя согласовать с такой простой моделью, как для других планет, — «Nulle planète n'a demandé aux astronomes plus de soins et de peines que Mercure, et ne leur a donné en récompense tant d'inquiétudes, tant de contrariétés»[2])

[1]) Возможный учитель Птолемея, которого не надо смешивать с Теоном Александрийским, автором комментария к «Альмагесту», жившим двумя столетиями позже Птолемея.

[2]) «Ни одна планета не потребовала от астрономов столько хлопот и труда, сколько Меркурий, в вознаграждение доставив им столько беспокойства и затруднений».

говорит Леверье. Данные Птолемея, как и в случае Луны, опять привели к необходимости увеличения видимых размеров эпицикла с единственным отличием, что теперь самое большое приближение происходит при отклонении примерно на $\pm 120°$ от линии апсид. В результате Птолемей принял модель, изображенную на рис. 39. Центр $G$ деферента движется в обратном направлении по кругу с радиусом $e$ и центром $B$, где $e$ равно не только эксцентриситету $BE$, но также и расстоянию от наблюдателя $O$ до экванта $E$. Центр $C$ эпицикла движется в прямом направлении так, что из $E$ его движение кажется равномерным и равным по величине движению $G$ в противоположном направлении от линии апсид $OA$. При $\alpha = \pm 120$ радиус $GC$ деферента проходит через $E$ и таким образом точка $C$ оказывается ближе к $O$, чем при $\alpha = 180$. Другими словами, орбита $C$ по отношению к $O$ имеет один апогей на линии апсид, но два симметричных перигея при $\alpha = \pm 120$.

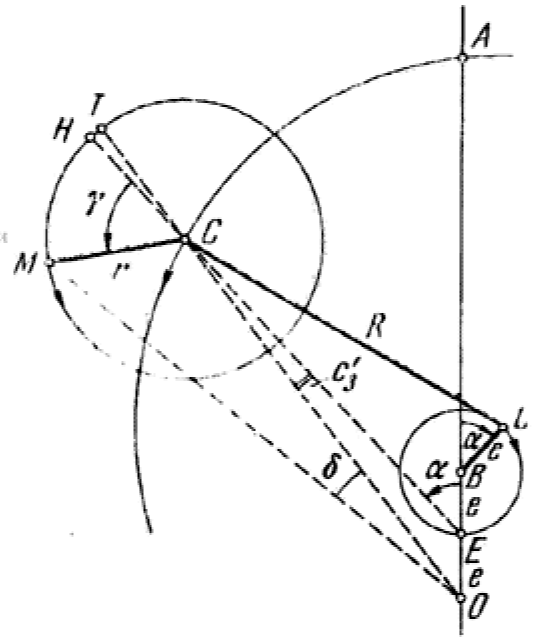



Рис. 39.

81. Практическое вычисление положений планет проводилось в основном так же, как и для Луны. «Альмагест», XI, 11 содержит для каждой планеты таблицы из восьми колонок. Колонки 1 и 2 содержат общие аргументы $\theta$ и $360 - \theta$. Колонки 3 и 4 используются только в сочетании

$$c_3'(\alpha) = c_3(\alpha) + c_4(\alpha)$$

для одинаковых значений среднего расстояния $\alpha$ в обеих колонках. В позднейших работах — таблицах Теона и таблицах ученых стран ислама — эти две колонки всегда соединены в одну ($c_3'$ на рис. 38), приводящую от среднего апогея $H$ к истинному апогею $T$. Птолемей сохранял две отдельные колонки из дидактических соображений, потому что он хотел, чтобы читатель видел, как $c_3'$ получается путем помещения центра деферента сначала в $E$, а затем перемещения его в $G$.

Для аргумента $\gamma' = \gamma + c_3'$ составлены три таблицы: $c_6(\gamma')$ дает угол $\delta(\gamma')$, под которым радиус $r = CP$ эпицикла виден из $O$ при условии, что $C$ расположено на среднем расстоянии от $O$. Колонка $c_5(\gamma')$ дает размер поправки, которую следует вычесть из $c_6$ с тем, чтобы $c_6 - c_5$ представляло $\delta(\gamma')$ для случая, когда $C$ находится на максимальном расстоянии от $O$. Аналогично, $c_6 + c_7$

дает $\delta(\gamma')$ для минимального расстояния $C$ от $O$. Наконец, $c_8(\alpha)$ дает коэффициент, на который нужно умножить $c_5$ или $c_7$, чтобы получить поправку к $c_5$ при расстоянии $C$ от апогея, равном $\alpha$.

Теперь мы можем сформулировать всю схему вычисления истинной долготы $\lambda$ планеты. Для данного момента $t$ известны следующие элементы

$\lambda_0$ — долгота апогея $A$,

$\alpha$ — среднее расстояние $C$ от $A$,

$\gamma$ — средняя аномалия планеты.

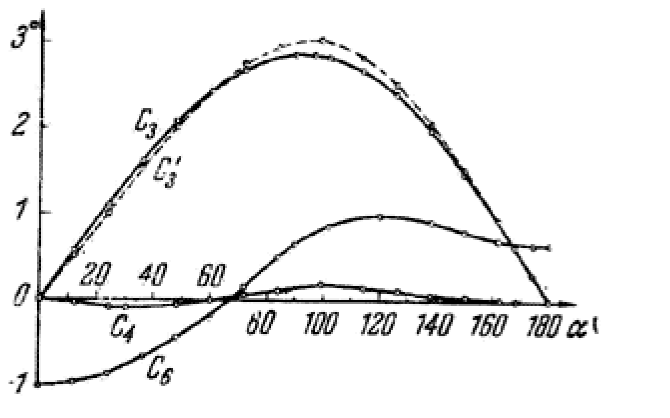


Рис. 40,*а*).

Тогда истинная долгота $\lambda = \lambda(t)$ дается уравнением

$$\lambda = \lambda_1 + \alpha - c_3'(\alpha) + \delta,$$

где $c_3'(\alpha)$ определяется из соотношения

$$c_3'(\alpha) = c_3(\alpha) + c_4(\alpha),$$

а $\delta$ — из

$$\delta = c_6(\gamma') + c_8(\alpha) \cdot \begin{cases} c_5(\gamma') \text{ при } c_8 \leqslant 0, \\ c_7(\gamma') \text{ при } c_8 \geqslant 0, \end{cases}$$

с

$$\gamma' = \gamma + c_3'(\alpha).$$

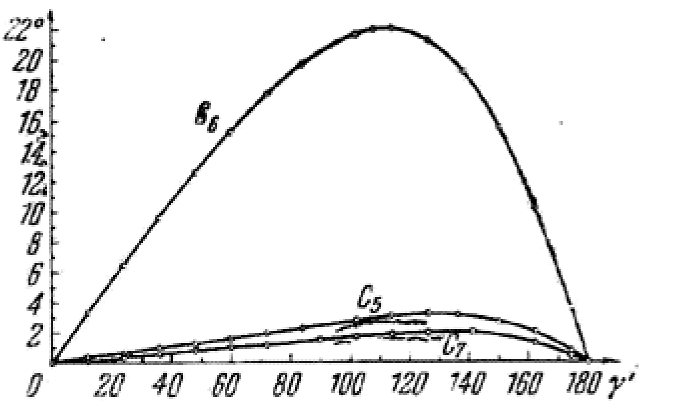


Рис. 40,*б*).

На рис. 40 показаны эти функции для Меркурия. Соответствующие кривые для других планет несколько проще, так как они имеют только один перигей центра эпицикла. Но техника вычисления во всех случаях одинакова.

**82.** Поучительно сравнить птолемееву модель движения Меркурия с теорией Коперника. Эмпирические данные, конечно, в основном одинаковы; в частности, в обоих случаях известно, что наименьшие значения наибольшей элонгации Меркурия от Солнца имеют место в знаке Весов, тогда как наибольшие значения наблюдаются не в противоположном Весам знаке Овна, а на два знака раньше или позже, в Водолее или Близнецах. Чтобы учесть это наблюдение, нужно заставить Меркурий двигаться по прямолинейному отрезку так, чтобы его расстояние от центра орбиты менялось с соответствующим периодом. Движение по прямой как будто не вполне согласуется с постулатом о круговых движениях небесных тел, но, к счастью, в распоряжении Коперника имелся способ ат-Туси, показавшего, что точка окружности круга радиуса $\frac{s}{2}$ движется вдоль диаметра круга радиуса $s$, внутри которого катится первый круг (рис. 41, *б*)).

На рис. 41, *а*) показано коперниково видоизменение птолемеевой теории Меркурия. Наблюдатель $O$ движется теперь по кругу вокруг среднего Солнца $\bar{S}$, в то время как физическое Солнце $S$ находится на расстоянии $e$ от $\bar{S}$, соответствующем эксцентриситету солнечной орбиты[1]). На расстоянии $e_1$ от $\bar{S}$ находится центр $E$ малого круга с радиусом $e_2$, по которому вращается точка $C$ с угловой

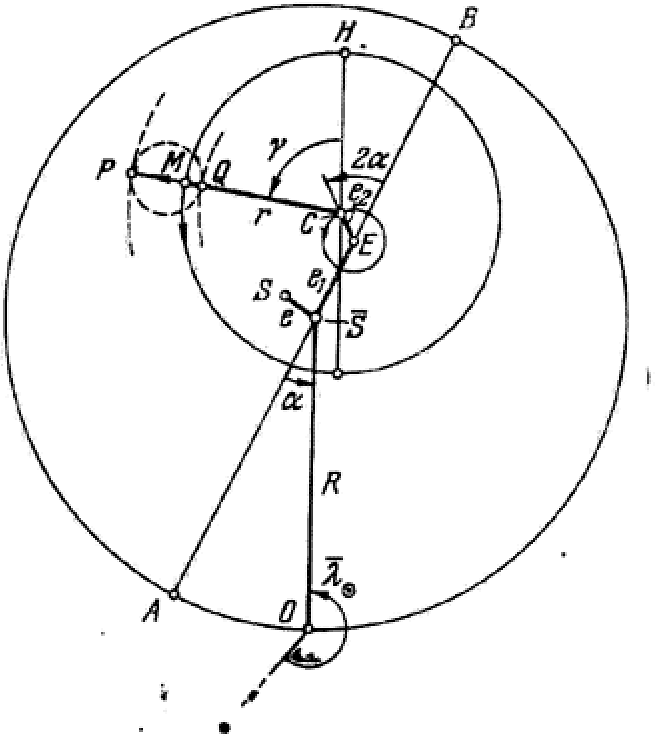



Рис. 41, *а*).

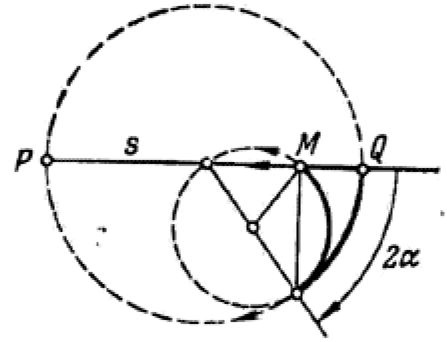



Рис. 41, *б*).

скоростью, вдвое большей, чем скорость возрастания расстояния $\alpha$ от $O$ до линии апсид $\bar{S}A$. Точка $C$ есть центр мгновенной круговой орбиты Меркурия. Ее радиус $r = CM$ меняется в пределах от $P$ до $Q$ при помощи способа ат-Туси (рис. 41, *б*)) так, что $M$ перемещается от $Q$ к $P$ и обратно за то время, пока $\alpha$ возрастает от 0° до 180°. Аномалия $\gamma$ отсчитывается от направления $CH$, параллельного $\bar{S}O$.

83. Конечно, совершенно безразлично, скажем ли мы, что на модели рис. 41, *а*) $O$ вращается вокруг $\bar{S}$, или $\bar{S}$ вокруг $O$, называя в последнем случае $R$ радиусом деферента, а $r$ — радиусом эпицикла. Поэтому очевидно, что кинематически две модели едва ли различны, за исключением того, что Коперник настаивает на использовании кругов для описания любого частного движения, тогда как Птолемей уже достиг гораздо большей свободы в подходе.

Распространенное мнение, что гелиоцентрическая система Коперника является значительным упрощением системы Птоле-

---

[1]) Коперник не очень ясно высказывается о том, вращается ли $\bar{S}$ вокруг $S$, или наоборот. Для его теории планет действительное значение имеет только $\bar{S}$,

мея, очевидно, является неверным. Выбор системы отсчета не оказывает никакого влияния на структуру модели, а сами коперниковские модели требуют почти вдвое больше кругов, чем модели Птолемея, и значительно менее изящны и удобны. Действительное значение труда Коперника состоит совсем в другом, чем обычно думают.

Его основные достижения следующие:

(а) Возврат к строго птолемеевской методологии, который сделал совершенно ясными все шаги от эмпирических данных до параметров модели и который открыл путь к улучшению основных наблюдений, что в конечном счете привело к правильному обобщению птолемеевских методов, оставившему в стороне повторные эпициклы Коперника.

(б) Понимание того, что мы сможем получить информацию о действительных расстояниях планет, если допустим, что все планетные орбиты имеют, по существу, один и тот же центр, а именно Солнце. Тогда радиусы эпициклов внутренних планет непосредственно дадут их расстояния от Солнца, выраженные в $R$; для внешних планет гелиоцентрические расстояния будут измеряться величинами, обратными радиусам эпициклов. И снова не имеет значения вопрос о том, какое тело считать неподвижным; поэтому система Тихо Браге столь же хороша, как и система Коперника, и столь же сложна из-за той же доктрины о круговом характере всех допустимых движений.

(в) Допущение общего центра планетных орбит подсказывало также правильное решение проблемы широт, а именно, что наклонные плоскости планетных орбит проходят через этот общий центр. К сожалению, постулат о кругообразности заставил Коперника использовать в качестве общего центра среднее, а не действительное Солнце, что привело к столь же сложной теории широт, как теория Птолемея. Зато эта модификация древней теории широт помогла Кеплеру найти действительное решение, позволяющее вычислять гелиоцентрические координаты единообразно и находить геоцентрические координаты при помощи независимого метода.

Новые эмпирические данные, собранные в огромном числе Тихо Браге и его сотрудниками, в конце концов убедили Кеплера в том, что даже возврат к птолемеевской модели с эквантами не сможет дать правильного представления наблюдений, и тем самым привели его к отказу от аксиомы о круговых орбитах и к открытию правильных орбит.

Нет лучшего способа убедиться во внутренней согласованности древней и средневековой астрономии, чем положить бок о бок «Альмагест», «Opus astronomicum» ал-Баттани и «De revolutionibus» Коперника. Глава за главой, теорема за теоремой, таблица за таблицей, эти сочинения идут параллельно. С появлением Тихо Браге и Кеплера гипнотическое влияние традиции было сломлено.

Самый стиль, каким пишут эти люди, совершенно отличен от классических образцов. Ни одно название астрономической работы не было столь многозначительным, как название книги Кеплера о Марсе: «Astronomia Nova»[1]).

## *БИБЛИОГРАФИЯ К ПРИЛОЖЕНИЮ I*

По истории греческой и средневековой астрономии следует ознакомиться с тремя работами: D e l a m b r e, Histoire de l'astronomie ancienne (два тома, Paris, 1817) и его же Histoire de l'astronomie du moyen age (Paris, 1819). Norbert H e r z, Geschichte der Bahnbestimmung von Planeten und Kometen (две части, Leipzig, Teubner, 1887 и 1894). J. L. E. D r e y e r, History of the Planetary Systems from Thales to Kepler (Cambridge, 1906); новое издание под названием «A History of Astronomy» (New York, 1953).

См., кроме того, Norbert H e r z в Handwörterbuch der Astronomie, т. I, стр. 1—98 (= Encyklopaedie d. Naturwiss., III, изд. 2-е, W. Valentiner, Breslau, 1897, и статью Ptolemaios в Pauly—Wissowa, Realencyclopädie der classischen Altertumswissenschaft (1956), написанную в а н - д е р - В а р д е н о м; также Paul T a n n e r y, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris, 1893. Хороший обзор планетной теории Птолемея дан в книге Derek J. P r i c e, The Equatorie of the Planetis, Cambridge Univ. Press, 1955, стр. 93—117.

## *ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ПРИЛОЖЕНИЮ I*

к 77. Одновременно и дань средневековью в современной учености. Дюэм (Pierre D u h e m, Système du Monde, 1914, т. 1, стр. 494 и след.) дал такое описание лунной теории Птолемея, согласно которому Луна каждый месяц должна была бы двигаться в попятном направлении из-за того, что он придал неверное направление вращению (цит. соч., рис. 11). Дюэм также полагал, что попятное движение диаметра *FN* (см. мой рис. 35) представляет «évidemment» (очевидно) попятное движение линии узлов (что приводит каждый месяц к полному лунному и солнечному затмению!). Эта вопиющая чепуха повторяется уже около 40 лет теми, кто приводит выдержки из работы Дюэма.

Полное незнание Дюэмом лунной теории Птолемея является хорошим примером быстрого упадка истории науки. Подробности древней теории Луны были особенно хорошо известны во Франции, поскольку эта теория явилась предметом дискуссии, занимавшей Французскую академию с 1836 по 1871 г. В этой дискуссии принимали участие Седийо, Био, Араго, Дамуазо, Либри, Мунк, Рейно, де Слан, Шаль, Леверье, Бертран и другие[2]). Седийо полагал, что в одном отрывке Абу'л-Вафы (умершего в 998 г.) он нашел описание неравенства лунного движения, называемого теперь «вариацией» и открытого много позднее Тихо Браге (Opera, II, стр. 100 и след.), тогда как теория Птолемея охватывала только первое и второе неравенства (называемые «эвекцией»)[3]). Теперь можно считать несомненным, что Седийо ошибался и что Абу'л-Вафа дал только описание конструкции Птолемея,

---

[1]) Как видно, в своей оценке великого труда Коперника автор полностью оставил в стороне огромное значение гелиоцентрической системы в развитии всей картины мира. *(Прим. ред.)*

[2]) См. прекрасный обзор Карра де Во (Carra de V a u x, J. Asiatique, 8 sér., 19, 1892, стр. 440—471).

[3]) Неравенствами лунного движения называют отступления во вращении Луны вокруг Земли от второго закона Кеплера, вызванные притяжением Солнца, других планет, сжатием Земли и т. п. *(Прим. ред.)*

без каких бы то ни было своих дополнений. Интересно, однако, отметить, что, как показал Таннери (P. T a n n e r y, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, стр. 211 и след.), в целом эффект, даваемый птолемеевской теорией, не точно соответствует «эвекции» современной теории лунного движения, а включает также около половины члена, отвечающего «вариации».

к 80. Параметры планетных орбит для $R = 60$ таковы:

| | | |
|---|---|---|
| для Сатурна | $r = 6;30$ | $e = 3;25$ |
| Юпитера | 11;30 | 2;45 |
| Марса | 39;30 | 6;0 |
| Венеры | 43;10 | 1;15 |
| Меркурия | 22;30 | 3;0 |

Ни один из моих рисунков планетных моделей не нарисован в масштабе, так как большая часть деталей была бы неразличима при допустимых размерах листа.

В противоположность теории солнечного движения, в которой апогей имеет постоянную тропическую долготу, апогеи планетных орбит считаются неподвижными по отношению к неподвижным звездам, и таким образом на них распространяется увеличение долготы на 1° за столетие.

к 82. Насиреддин ат-Туси (родился в 1201 г., умер в 1274 г.) был директором знаменитой обсерватории в Мараге. Он возражал против сложных механизмов птолемеевской теории Луны и Меркурия, исходя из философских соображений. Перевод соответствующей главы из его «Памятка по астрономии», выполненный Карра де Во, помещен в книге P. T a n n e r y, Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne, Paris, 1893, стр. 348—359. Я не знаю, через посредство кого Коперник узнал о конструкции Туси.

Движение точки $M$ по диаметру $PQ$ (рис. 41, *б*)) является, конечно, не чем иным, как простым гармоническим движением, $QM = s\,(1 - \cos 2\alpha)$.

Параметры, определенные Коперником (De revolutionibus, V, 27), равны

| | | |
|---|---|---|
| $R = 10000$ | или, если | $R = 60$ |
| $e = 322$ | | $e = 1;56$ |
| $e_1 = 736$ | | $e_1 = 4;25$ |
| $e_2 = 212$ | | $e_2 = 1;16$ |
| $3573 \leqslant r \leqslant 3953$ | | $21;26 \leqslant r \leqslant 23;43$ |
| $2s = 380$ | | $2s = 2;16$ |

Долготы Коперник считает сидерически, приняв $\gamma$ Овна за нулевую точку. Это соответствует широко распространенному средневековому обычаю считать долготы от Регула ($\alpha$ Льва) — система, которая восходит по крайней мере к птолемееву «Inscriptio Canobi» (Opera, II, стр. 152, 2; исправл. стр. 80, 27).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

# О ГРЕЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКЕ

**84.** Я не считаю, что цель исторической работы состоит в том, чтобы втиснуть всю сложность исторических процессов в своего рода «резюме» («digest») или «синтез». Наоборот, я вижу основную задачу исторического исследования в раскрытии громадного богатства явлений, связанных с любой фазой человеческой истории, и тем самым в противодействии естественной тенденции к сверхупрощению и произвольным построениям, являющимся верными спутниками невежества.

Современному математику, желающему проникнуть в механизм греческой математики, это сравнительно просто сделать. Главные работы Архимеда, Аполлония, Евклида и другие хорошо изданы и целиком переведены. Внимательное чтение трактата Архимеда или книги Аполлония требует времени и усилий, как овладение всяким ценным знанием, но читатель будет вознагражден значительно более глубоким пониманием древних математических методов, чем может дать чтение любых обзоров. После подобной основательной подготовки такие работы, как, например, Т. Л. Хиса, послужат компетентным руководством по смежным материалам и дадут общую картину фона.

Астрономические материалы гораздо менее доступны для непосредственного ознакомления, и поэтому некоторые математические методы, получившие развитие в тесной связи с астрономией, значительно менее широко известны, чем, например, построения Евклида. Общепринятое изображение греческой математики, согласно которому за очень изощренным развитием геометрической ветви следовали некоторые, не вполне успешные, попытки в области алгебры и теории чисел в позднейшие периоды упадка, неверно по двум причинам. Во-первых, как мы уже не раз видели в предыдущих главах, мы имеем дело не с деградацией от научной геометрии к менее точным методам алгебраического характера, а с двумя одновременными явлениями: сравнительно быстрым развитием строгого математического мышления высшего уровня и противоположным ему более старым и мало меняющимся фоном древней восточной и эллинистической математики с ее сильно выраженным алгебраическим характером, унаследованным от вавилонян. Во-вторых, даже чисто греческий вклад в развитие математики было бы неверно сводить к евклидово-архимедовскому направлению, наиболее знакомому современному читателю; к нему нужно добавить многие методы, касающиеся численных и графических задач, возникших из математической астрономии. В действительности мы здесь видим первый пример того стимула, который астрономия неоднократно давала математике. Цель последующего изложения — осветить некоторые из этих менее известных аспектов греческой математики.

85. Тот факт, что греческая плоская тригонометрия основана на таблицах хорд, а не синусов, конечно, не вызывает никаких существенных различий между современным и древним методами. Нормировка $R = 60$ приводит к коэффициентам $\frac{1}{120}$, но поскольку все дроби написаны шестидесятерично, это означает просто деление на 2,0 или численно деление пополам. Так, обозначая хорду дуги или угла $\alpha$ знаком crd$\alpha$, мы имеем (рис. 42)

$$a = \frac{c}{2{,}0}\operatorname{crd} 2\alpha, \qquad a = c\sin\alpha,$$

$$b = \frac{c}{2{,}0}\operatorname{crd}(180 - 2\alpha), \quad b = c\cos\alpha,$$

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{crd} 2\alpha}{\operatorname{crd}(180-2\alpha)}, \qquad \frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Поскольку все таблицы рассчитаны от 0 до 180, в первых двух случаях действия столь же просты, как и при нашей системе. Единственное реальное неудобство заключается в отсутствии таблиц для отношений, соответствующих tg$\alpha$.

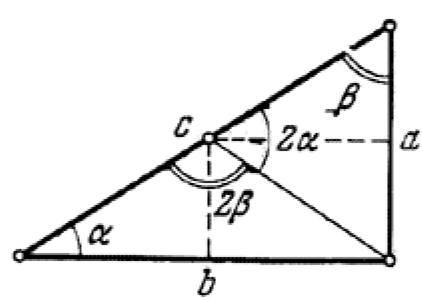


Рис. 42.

В качестве примера применения тригонометрии к решению астрономической задачи я опишу метод, использованный в «Альмагесте», IV, 6 для определения длины радиуса $r$ эпицикла Луны и положения апогея. Мы имеем здесь дело с простой моделью лунного движения (как на рис. 32; стр. 188), в которой центр $C$ эпицикла вращается по неподвижному деференту радиуса $R = 60$. Эта задача интересна с нескольких точек зрения. Она демонстрирует метод, который, безусловно, применял и, возможно, даже изобрел Аполлоний. Она представляет собой простейший случай гораздо более общей задачи, а именно, задачи определения параметров орбиты на основании ряда наблюденных положений. Она, наконец, тесно связана с важной геодезической задачей, а именно, определением положения наблюдателя по отношению к трем данным точкам.

В случае Луны основные шаги состояли в следующем. Ежедневные наблюдения за движением Луны по отношению к звездам легко обнаруживают, что скорость Луны непостоянна. Примерно один раз в месяц ее смещение достигает минимума, близкого к 12°, а затем — максимума, близкого к 14° в сутки. Поэтому легко подсчитать число периодов лунной скорости, соответствующих данному числу лунных месяцев. После нескольких лет наблюдений средняя продолжительность этого «аномалистического» периода может быть определена достаточно точно. Если мы решаем затем описать эти изменения скорости при помощи эпициклической модели, как на рис. 32 (стр. 188), то мы можем считать известными скорость изменения «аномалии» $\gamma$, так же как и скорость изменения средней долготы $\lambda$ центра эпицикла. Тогда встает задача определения $r$ и определения момента, когда Луна имеет минимальную скорость, т. е. находится в апогее эпицикла.

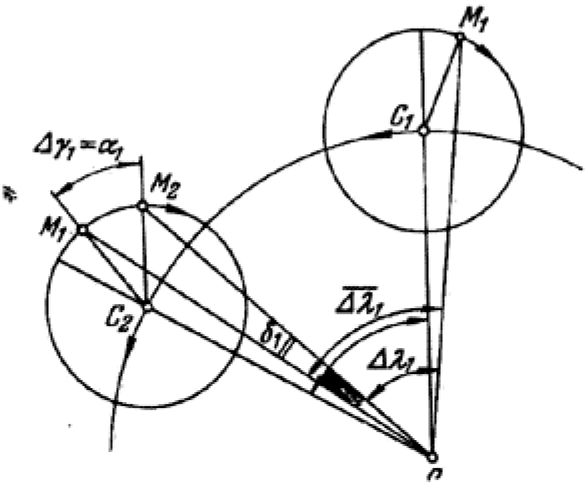



Рис. 43.

Для этого при помощи трех лунных затмений, долготы которых точно известны благодаря диаметрально противоположному положению Солнца, определяют моменты и долготы трех положений Луны. Причины такого способа действий очень характерны: при помощи вычисленного положения Солнца достигается бо́льшая точность, чем при прямом сравнении положения Луны со звездами. Это объясняется тем, что для определения звездных координат требуется измерять углы посредством инструментов, точность которых трудно проверить.

Три момента времени, когда наступает середина затмения, и три соответствующих долготы дают нам два ряда разностей — $\Delta t_1$, $\Delta t_2$ и $\Delta\lambda_1$, $\Delta\lambda_2$ (см. рис. 43, где показаны два первых положения). Благодаря тому, что нам известны средние значения изменений $\gamma$ и $\overline{\lambda}$, а также $\Delta t_1$ и $\Delta t_2$, мы можем получить значения $\Delta\gamma_1$, $\Delta\gamma_2$ и $\Delta\overline{\lambda}_1$, $\Delta\overline{\lambda}_2$, на которые $\gamma$ и $\overline{\lambda}$ изменились между последовательными затмениями. Рис. 43 иллюстрирует эту ситуацию для двух первых затмений. Из собранных нами данных мы знаем, что наблюдатель в $O$ видит дугу $M_1M_2$ эпицикла под углом $\Delta\overline{\lambda}_1 - \Delta\lambda_1$ и в то же время на эту самую дугу в центре $C$ эпицикла опирается угол $\Delta\gamma_1$. Та же ситуация имеет место и для второй пары затмений, и это дает нам возможность следующим образом окончательно сформулировать задачу (рис. 44):

Три точки, $M_1$, $M_2$, $M_3$, на круге радиуса $r$ видны из центра круга под данными углами $\alpha_1, \alpha_2$, а из точки $O$ — под данными углами $\delta_1$, $\delta_2$. Требуется найти $r$ и положение $O$ по отношению к $M_1$, $M_2$, $M_3$.

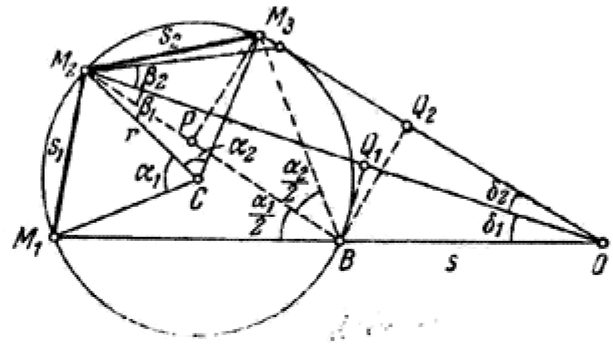



Рис. 44.

Эта задача решается следующим образом (см. рис. 44): рассмотрим точку $B$ на прямой $OM_1$ и обозначим через $s$ расстояние $OB$. Тогда для перпендикуляра $BQ_1$ мы имеем

$$BQ_1 = \frac{s}{120}\,\mathrm{crd}^{1)}\,2\delta_1$$

и также

$$BQ_1 = \frac{M_2B}{120}\,\mathrm{crd}\,2\beta_1,$$

где $\beta_1$ — известный угол, поскольку $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{2} - \delta_1$. Следовательно,

$$M_2B = s\,\frac{\mathrm{crd}\,2\delta_1}{\mathrm{crd}\,2\beta_1}\,.$$

Аналогично, $M_3B = s\,\frac{\mathrm{crd}\,2\,(\delta_1+\delta_2)}{\mathrm{crd}\,2\,(\beta_1+\beta_2)}$, где $\beta_2$ — известный угол, поскольку $\beta_1+\beta_2 = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2} - (\delta_1+\delta_2)$. Из треугольника $M_2M_3B$ мы можем выразить хорду $s_2$ через $s$ и заданные углы. Используя высоту $M_3P$, имеем

$$M_3P = \frac{M_3B}{120}\,\mathrm{crd}\,\alpha_2 = \frac{s}{120}\,\frac{\mathrm{crd}\,2\,(\delta_1+\delta_2)}{\mathrm{crd}\,2\,(\beta_1+\beta_2)}\,\mathrm{crd}\,\alpha_2$$

и

$$BP = \frac{M_3B}{120}\,\mathrm{crd}\,(180-\alpha_2) = \frac{s}{120}\,\frac{\mathrm{crd}\,2\,(\delta_1+\delta_2)}{\mathrm{crd}\,2\,(\beta_1+\beta_2)}\,\mathrm{crd}\,(180-\alpha_2).$$

Следовательно,

$$M_2P = M_2B - BP = s\cdot(\ldots)$$

выражается через $s$ и заданные углы, и поэтому также

$$s_2 = \sqrt{M_2P^2 + M_3P^2} = s\cdot(\ldots).$$

---

1) То есть хорда.

С другой стороны, $s_2$ есть хорда круга с центром $C$, так что

$$s_2 = \frac{r}{60} \operatorname{crd} \alpha_2,$$

где $\alpha_2$ дано. Итак,

$$r = \frac{60}{\operatorname{crd} \alpha_2} \sqrt{M_2P^2 + M_3P^2} = s \cdot (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot)$$

известно, если известно $s$. Очевидно, абсолютные размеры на рис. 44 не определяются по одним только углам. Поэтому мы должны произвольно фиксировать какое-либо расстояние, что мы и делаем, полагая радиус $OC$ деферента равным $R = 60$. Все остальные расстояния будут измеряться тогда в этих единицах.

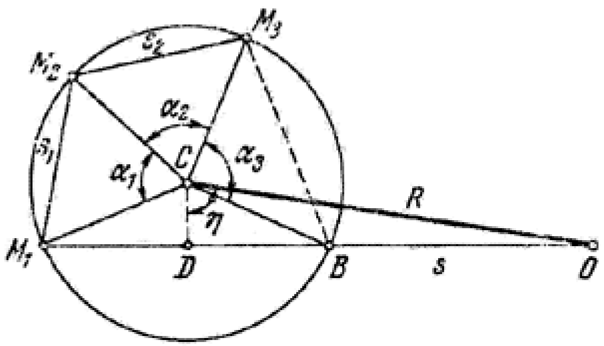



Рис. 45.

Чтобы найти $s$, нам нужно определить остающиеся углы вокруг $C$ (рис. 45). Заметим, что

$$M_3B = \frac{r}{60} \operatorname{crd} \alpha_3,$$

где и $M_3P$ и $r$ выражаются тригонометрическими функциями, умноженными на $s$. Поэтому последнее уравнение можно сократить на $s$ и найти $\alpha_3$ независимо от $s$. То же относится и к

$$\alpha_4 = 360 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3).$$

Теперь $s$ можно определить следующим образом:

$$BM_1 = \frac{r}{60} \operatorname{crd} \alpha_4 \quad \text{и} \quad OM_1 = s + BM_1 = s \cdot (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot).$$

Используя классическую теорему для круга и точки вне его, получаем

$$(R + r) \cdot (R - r) = OM_1 \cdot s,$$

или

$$R^2 = r^2 + OM_1 \cdot s = s^2 \cdot (\cdot \cdot \cdot \cdot \cdot).$$

Таким образом, $s$ известно в долях $R = 60$, а следовательно, известно и $r$.

Окончательно (см. рис. 45)

$$OD = \frac{R}{120} \operatorname{crd} 2\eta = \frac{1}{2} \operatorname{crd} 2\eta = s + \frac{1}{2} BM_1$$

и, таким образом, известно значение $\eta$. Значит, в момент первого затмения Луна $M_1$ находилась в точке эпицикла, отстоящей от линии $OC$ на угол $\frac{\alpha_4}{2} + \eta$. Этим завершается решение нашей задачи.

86. Мы очень мало знаем о ранней истории сферической тригонометрии. Начиная с совсем примитивных сочинений по сферической астрономии Евклида и Автолика (четвертый век до н. э.), мы имеем несколько работ, предшествовавших Менелаю (около 100 г. н. э.), в которых видим попытки решить в общем виде важные для астрономии задачи, например, задачу определения времени восхода заданных дуг эклиптики (см. стр. 159). Однако мы не знаем, как практически решались численные задачи такого типа; можно, например, допустить, что Гиппарх пользовался методами, известными нам из индийской астрономии, и следы которых мы находим даже в «Альмагесте». Для этих методов характерно использование внутренности сферы для определения длин круговых дуг на сфере. Например, «Сурья-Сиддханта» (II, 60/63) следующим образом определяет продолжительность дневной части суток. Допустим, что известна длина $s_0$ полуденной тени гномона длины 12 в день равноденствия и склонение $\delta$ Солнца в рассматриваемый день. Тогда мы имеем (рис. 46)

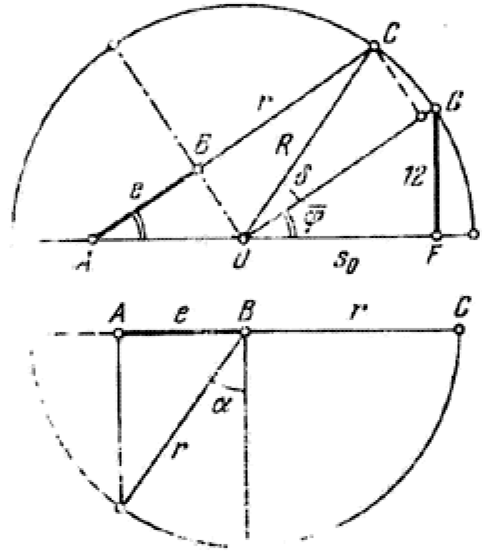



Рис. 46.

$$\frac{12}{s_0} = \frac{OB}{e} = \frac{\operatorname{Sin}\delta}{e},$$

где мы полагаем $\operatorname{Sin}\delta = R\sin\delta$, в соответствии с индийским способом использования тригонометрических функций. Далее, $r$ — радиус параллельного круга со склонением $\delta$, так называемый «дневной радиус», равен

$$r = R - \operatorname{Sin\,vers}\delta,$$

где синус-верзус соответствует нашему $1 - \cos\delta$. Наконец,

$$\operatorname{Sin}\alpha = R\frac{e}{r} = \frac{R\sin\delta}{12\,(R - \operatorname{Sin\,vers}\delta)}\cdot s_0,$$

где $\alpha$ — так называемая «разность прямого восхождения».

Используя полученное таким образом значение $\alpha$, получаем продолжительность дневной части суток, равную $180+2\alpha$ градусам.

87. Изложенный выше подход к решению задач сферической геометрии, состоящий в применении плоской тригонометрии к должным образом выбранным плоскостям, систематически развит в «Аналемме» Птолемея, где он образует стройную теорию, которую следовало бы отнести к начертательной геометрии. Этот метод существовал уже до Птолемея, потому что Птолемей крити-

кует непоследовательные определения своих предшественников. Дальнейшее изложение взято из весьма изящной птолемеевской трактовки предмета. Родственные методы встречаются у Витрувия, римского архитектора времен Августа, и у Герона, писавшего примерно за 70 лет до Птолемея.

Сама задача касается теории солнечных часов в простейшей форме вертикального гномона. Математически задача состоит в определении сферических координат местоположения Солнца в данный момент времени для данной географической широты и последующем графическом нахождении на плоскости дуг, представляющих эти координаты. Предшественники Птолемея (он

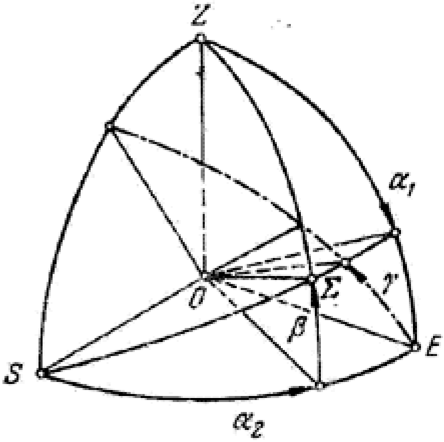



Рис. 47.

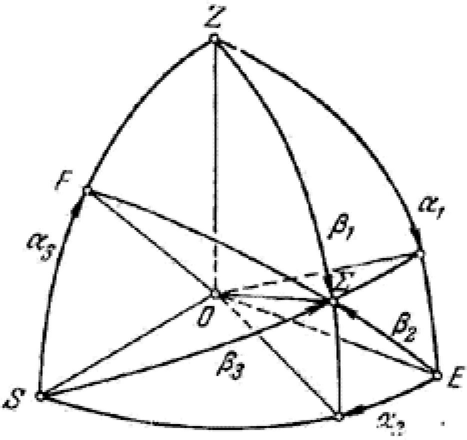



Рис. 48.

называл их «древними», не сообщая, кто они были) использовали следующий подход. Рассмотрим, например, октант небесной сферы, ограниченный плоскостями горизонта и меридиана и перпендикулярной им вертикальной плоскостью (рис. 47). Центр сферы — это наблюдатель, вертикальная ось — гномон. Пусть $\Sigma$ — видимое в данный момент место Солнца. Проведем через $\Sigma$ две плоскости: вертикальную плоскость, содержащую гномон, и наклонную плоскость, содержащую ось $OS$. Таким путем мы получим три угла: $\alpha_1$ и $\alpha_2$ в координатных плоскостях и $\beta$ — в вертикальной плоскости, проходящей через $\Sigma$. Любая пара $\alpha_1$ $\alpha_2$, или $\alpha_1$ $\beta$, или $\alpha_2\beta$ может быть использована для определения места $\Sigma$. К этому «древние» добавляли еще один угол. Для данной географической широты $\varphi$ положение плоскости экватора известно; ее пересечение с плоскостью $S\Sigma$ определяет новый угол $\gamma$, и ясно, что пары $\alpha_2\gamma$ и $\beta\gamma$ тоже можно использовать для задания места $\Sigma$, поскольку данному углу $\gamma$ соответствует определенная дуга $\alpha_1$, и наоборот.

Птолемею столь неизящное определение представлялось недопустимым. Используя те же три ортогональные оси, он провел через $\Sigma$ три плоскости, проходящие соответственно через каждую из осей. При этом получаются шесть углов $\alpha_1, \ldots, \beta_3$, показанных на рис. 48, из которых достаточно любых двух, чтобы определить место $\Sigma$. Расположение строго циклическое, все углы острые и отсчитываются от одной из трех ортогональных осей.

Далее Птолемей переходит к построению этих шести углов. Для иллюстрации применяемого им метода достаточно рассмотреть угол $\beta_2$ (называемый «гектеморосом»). В качестве плоскости для построения мы используем плоскость $SOZ$ меридиана (рис. 49). Для данного $\varphi$ мы знаем угол $\overline{\varphi} = 90 - \varphi$, под которым экватор наклонен к горизонту. Для данного момента мы знаем также долготу Солнца, а следовательно, и его склонение; и, наконец, для данного сезонного часа (предположим, что рассматривается дополуденный час) мы знаем, какую часть своего пути от восхода и до полудня успело пройти Солнце. Поэтому мы строим на плоскости след $ABC$ параллельного круга, проходимого в данный день Солнцем, и поворачиваем его плоскость в плоскость меридиана. Если провести перпендикуляр $BD$ к $ABC$, то $D$ изобразит точку восхода Солнца, $A$ — точку его кульминации для данного дня [1]). Следовательно, для данного часа мы можем найти место $\Sigma$ Солнца на дуге $DA$. Проведем $\Sigma F$ перпендикулярно к $AB$ и построим отрезок $FG = F\Sigma$. Если точка $E$ расположена на перпендикуляре $EO$ к $OF$, то $EG$ и есть та дуга $\beta_2$, которую мы хотели найти. Действительно, $E$ изображает восточную точку горизонта при повороте в плоскость нашего построения, а $OF$ есть след плоскости гектемороса в плоскости меридиана. Таким образом, $G$ есть место Солнца в плоскости гектемороса, повернутой вокруг $OF$. Значит, $EG = E\Sigma$.

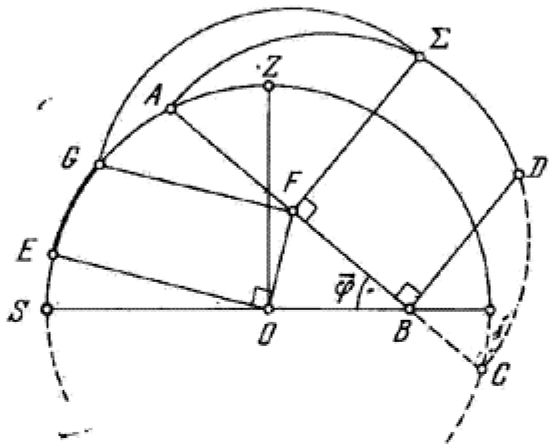


Рис. 49.

Аналогичные построения приводят и к определению остальных углов. Описание всех деталей завело бы нас слишком далеко; отметим лишь представляющий большой принципиальный интерес вопрос о механизации этих построений, позволяющей быстро их выполнять для любой географической широты $\varphi$ и произвольной солнечной долготы $\lambda$. Во всех случаях имеются некоторые общие элементы, не зависящие от $\varphi$ и $\lambda$, например, на рис. 49 — круг меридиана и параллели экватора. Эти круги гравировали на листе металла или на камне, или, в более дешевых моделях, рисовали черным или красным цветом на деревянном диске. Вокруг центра проводили меридиан и концентрический с ним круг для указания

---

[1]) Очевидно, что $DA/DC$ представляет собой отношение дневной к ночной части суток для рассматриваемого числа.

углов φ, соответствующих семи «климатам», у которых самая большая продолжительность дня равна $13^h, 13\frac{1^h}{2}, \ldots, 16^h$. На самом диаметре указывали точки, отмечающие положение Солнца в разные часы в день равноденствия. Затем лист покрывали воском, так что на него легко было нанести дополнительные линии, зависящие от конкретных значений λ и φ. Диск может вращаться вокруг своего центра, а ровная прямоугольная планка позволяет совмещать точки на кругах с разной градуировкой, в соответствии с поворотом проекций вокруг нужных осей. Таким путем искомые углы можно определять с помощью метода, который теперь называется номографическим. По существу, этот метод сходен с определением углов на небесной сфере при помощи кругов и дисков астролябии. Это хорошая иллюстрация того факта, что «греческая» математика отнюдь не была строго ограничена некоторыми «классическими» задачами, как это думают многие современные авторы.

88. В примечании к п. 62 главы VI (стр. 178) я привел пример связи между теорией конических сечений и «геометрической алгеброй» в том виде, как она существовала во времена Архимеда и Аполлония. Эта сторона дела далеко не исчерпывает всей важности изучения античными учеными теории конических сечений. Значительная часть работы Аполлония о конических сечениях касается задач, которые позднее, в девятнадцатом веке, отнесли бы к проективной или синтетической геометриям — областям, которые были развиты в качестве прямого продолжения древней теории. Оптика стран ислама и оптика позднего средневековья (ибн ал-Хайсам, Кеплер) занимались свойствами фокусов. В древности конические сечения были необходимы для теории солнечных часов, и я высказал предположение, что изучение этих кривых возникло именно из этой задачи.

Использование в астрономии теории конических сечений почти несомненно и в другом случае, а именно, при доказательстве того, что стереографическая проекция отображает круги на сфере в круги на плоскости. Этот факт является следствием теоремы, доказанной Аполлонием [1]), о том, что на каждом косом круговом конусе имеются два семейства круговых сечений; легко заметить, что круг на сфере и его проекция из полюса на плоскость экватора находятся в таком же взаимном расположении, какого требует Аполлоний от элементов этих двух семейств. В сохранившихся работах мы нигде не находим доказательств этого факта, но свойство стереографической проекции сохранять окружности постоянно используется в трактатах по астролябии и в «Планисферии» Птолемея [2]).

[1]) «Конические сечения», I, 5.

[2]) Хис неправ, когда он говорит (H e a t h, Greek Mathematics, II, стр. 292), что Птолемей доказывает приведенную теорему для частных слу-

Это сочинение Птолемея является еще одним примером соединения начертательной геометрии и тригонометрических методов, а также создания практических устройств, которые затем превратились в инструмент, известный под именем «астролябии». Рассматриваемая задача состоит в определении центров и радиусов кругов, изображающих круги небесной сферы при проекции из южного полюса на плоскость экватора. Для определения этих величин плоскость экватора использовалась одновременно и как плоскость отображения, и как плоскость ортогональных к ней построений. Например, радиус круга, представляющего эклиптику, находится следующим образом (рис. 50). Круг $abdg$ представляет экватор и одновременно плоскость, перпендикулярную к экватору, в которой диаметр $bd$ является осью, а $d$ — южным полюсом. Положим теперь $az = ng = gh = 23;51° = \varepsilon$, т. е. наклону эклиптики, и спроектируем точки $n$, $h$ и $z$ из $d$ на диаметр $ag$, который представляет теперь след плоскости экватора. Тогда $tm$ будет диаметром эклиптики, $b$ — точкой весеннего равноденствия, $t$ и $m$ — точками солнцестояний, через которые проходят круги солнцестояний, продолжающие касаться эклиптики во всех возможных положениях.

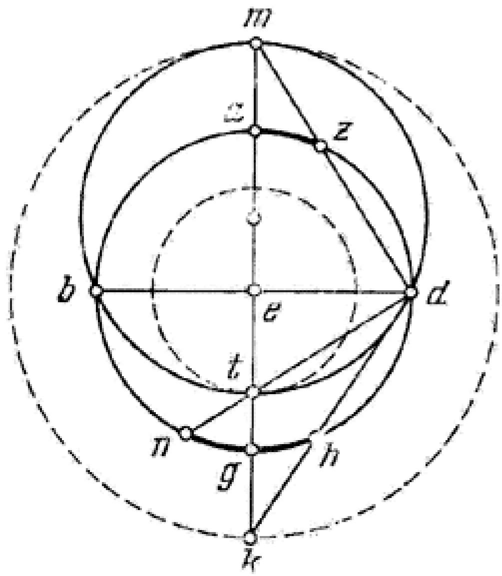


Рис. 50.

Подобным образом все системы небесных координат можно представить в виде семейств кругов на плоскости. Таким способом средствами геометрии на плоскости можно определять времена восходов знаков зодиака как для sphaera recta ($\varphi = 0$), так и для всех географических широт. Поскольку по всей вероятности метод стереографической проекции предшествовал изобретению сферической тригонометрии, то мы видим здесь другой подход к задачам, которые позднее решались непосредственно с помощью сферических треугольников.

**89.** Проблема отображения сферы на плоскость еще раз возникает в связи с географией. Опять основным источником информации является для нас Птолемей. В первой книге своей «Географии» он дает правила построения сетки кривых, представляющих круги постоянных географических долгот или широт. Последующее изложение должно дать общее представление о методах,

---

чаев. Доказательства, на которые ссылается Хис, касаются того факта, что образы больших кругов также пересекаются в диаметрально противоположных точках, но эти доказательства опираются на то, что образы являются кругами.

лежащих в основании греческой картографии, без какой-либо попытки исследовать предысторию составления географических карт. Заметим лишь, что предшественник Птолемея, Марин из Тира, писавший около 110 г. н. э., использовал на своей карте прямоугольную систему координат, в которой единицы, представлявшие географическую долготу, составляли $\frac{4}{5}$ от единиц, представлявших широту $\varphi$. Поэтому расстояние между меридианами везде такое же, как на широте, для которой $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. Это условие достаточно точно выполняется при $\varphi = 36$, широте Родоса. Таким образом, карта Марина правильно отображала расстояния по

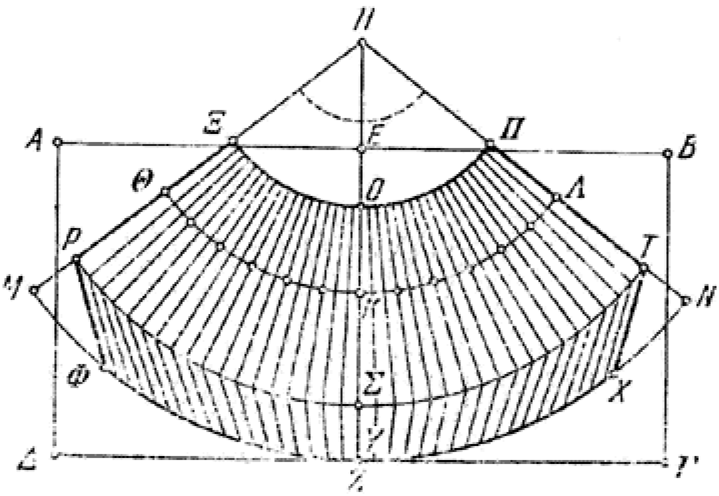



Рис. 51.

всем меридианам и по параллели Родоса. Во всех остальных направлениях расстояния все больше искажались по мере удаления от широты Родоса.

Проекции, предложенные Птолемеем, значительно сложнее. Две из них принадлежат к общему классу конических проекций, а третья представляет собой перспективное представление земного шара. Я дам краткое описание всех трех методов, используя современную терминологию. Птолемей считает, что обитаемая часть Земли, «ойкумена», лежит между 63° северной широты (Фуле [1])) и 16;25° южной широты («анти-Мероэ», параллель, отстоящая к югу от экватора на столько же, на сколько Мероэ в Нубии отстоит от него к северу). Предполагается, что по долготе «ойкумена» распространяется на 180°, и мы будем измерять долготы $L$ от $-90°$ на западной границе до $+90°$ на восточной границе. Первая коническая проекция использует полярные координаты (рис. 51), которые мы обозначим $r$ и $\delta$. Все меридианы проектируются в радиусы, все параллели широт — в круги $r = \mathrm{const}$. Затем ставятся три

[1]) Фуле — полумифический остров, возможно, один из Шетландских островов. (*Прим. ред.*)

условия: а) никакого искажения длин вдоль меридианов, б) то же вдоль параллели Родоса и в) сохранение отношения длин вдоль параллели Фуле и вдоль экватора. Из первого условия следует, что

$$r = \bar{\varphi} + c, \qquad \bar{\varphi} = 90 - \varphi$$

(где $c$ — константа, исчисляемая в градусах). Второе условие означает, что для координат Родоса $r_0$, $\varphi_0$

$$\frac{\pi}{180} r_0 \delta = L \cos \varphi_0$$

или

$$\delta = \frac{180 \cdot \cos \varphi_0}{\pi (\bar{\varphi}_0 + c)} L.$$

Наконец, константу $c$ можно определить из последнего условия,

$$\frac{\bar{\varphi}_1 + c}{90 + c} = \cos \varphi_1,$$

где $\varphi_1 = 63$ (широта Фуле). Это приводит к значению $c = 25$ и, таким образом, к значениям $r = \bar{\varphi} + 25$ для каждой широты [1]). Рис. 51 вычерчен в масштабе и показывает границы, получающиеся при конструкции Птолемея; дуга ΞΟΠ представляет 180° параллели Фуле, MN — параллели —16;25°, PΣT — экватора; $K$ лежит на параллели Родоса. Во избежание искажений по долготе на южной границе Птолемей произвольно меняет проекцию к югу от экватора, разделяя ΦZX на сегменты такой длины, какую они имели бы на широте 16;25° к северу от экватора.

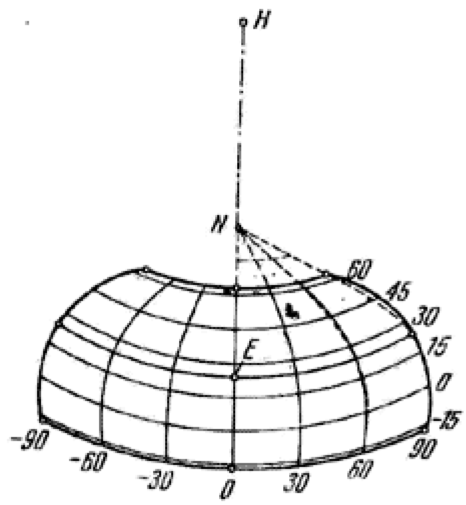



Рис. 52.

Излом меридианов на экваторе показался ему менее вредным, чем увеличение размеров рисунка за пределы длины экватора. Здесь математическая последовательность была принесена в жертву неправдоподобной видимости.

Второй метод проекции (рис. 52) был изобретен для того, чтобы исправить этот дефект и получить изображение, более близкое к представлению о плавно искривляющихся меридианах. Птолемей опять требует, чтобы радиальные расстояния правильно отражали разности широт, хотя радиусы уже не представляют собой меридианы (за исключением центрального меридиана $L = 0$).

---

[1]) Следовательно, северный полюс отображается на круг с $r = c = 25$ (пунктир на рис. 51).

Таким образом, как и раньше, мы имеем

$$r = \overline{\varphi} + c. \tag{1}$$

Для круговых дуг, представляющих теперь меридианы, мы определяем три точки при помощи следующих условий: сохранение длины вдоль параллели Фуле ($\varphi_1 = 63$), вдоль параллели Сиены, лежащей на тропике Рака ($\varphi_2 = \varepsilon = 23;50$), и вдоль параллели анти-Мероэ $\varphi_3 = -16;\ 25°$. В результате имеем

$$\frac{\pi}{180} r_i \delta = L \cos\varphi_i\,, \quad i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Значение $c$ в (1) определяет кривизну граничных параллелей карты. Птолемей избрал $c = 180°$ просто на основании геометрической картины с тем, чтобы получить для карты «ойкумены» размеры, достаточно сходные с действительными отношениями.

При фиксированном $c$ можно строить карту (рис. 52). $H$ есть общий центр параллелей, $E$ лежит на параллели Сиены и поэтому $HE$ должно быть равно $180-23;50 = 156;10$ и $EO = 23;50 + 16;25 = 40;15$ определяет южную границу. $HN = 180-90 = 90$ дает изображение $N$ северного полюса. Подставив вместо $L$ одно и то же значение (например, $L = 90$ для восточной границы) во все три уравнения, полученные для углов $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$, находим три точки, через которые должен пройти меридиан долготы $L$. В действительности кривые $L = \text{const}$ являются трансцендентными, но Птолемей заменяет их круговыми дугами, определяемыми тремя точками ($L$, $\varphi_i$).

Может показаться, что это последнее приближение слишком грубое, хотя и удобное для фактического построения сетки. В действительности, однако, внутри площади $-16;25 \leqslant \varphi \leqslant 63$, $-90 \leqslant L \leqslant 90$, которая содержит «ойкумену», это удивительно хорошее приближение. Если бы (2) выполнялось для всех значений $\varphi$, то получилась бы так называемая «проекция Бонна», при которой сохраняется длина вдоль всех параллелей. На рис. 52 я добавил пунктирными линиями меридианы проекции Бонна; только в крайней северо-восточной области отклонения меридианов Бонна от меридианов Птолемея достигают заметных размеров.

Рассмотренные до сих пор картографические проекции представляют собой отображения в современном математическом смысле этого слова: определяются математические соотношения, которые точке с координатами $L$, $\varphi$ на сфере ставят в соответствие точку с координатами $r$, $\delta$ на плоскости. Это соответствие нельзя, однако, получить как изображение сферы, видимое глазом с подходящего положения. Настоящую же перспективу мы встречаем в представлении земного шара в книге VII, гл. 6 птолемеевой «Географии», хотя и в очень несообразном сочетании с проекцией типа Бонна. Птолемей считает, что земной шар заключен между кольцами, представляющими полярные круги, круги солнцестояний, экватор и эклиптику. Затем строится перспективная картина этих колец, видимых из центра проекции, расположенного таким образом, что никакая часть области «ойкумены» не заслоняется ни одним кольцом. Однако шар внутри колец представлен не в перспективе, а просто в круглой рамке карты, подобной второй из описанных выше сеток. То, о чем мы сейчас говорим, скорее является книжной иллюстрацией, а не настоящей картой, и это единственный случай во всех трудах Птолемея, когда он проявляет непоследовательность и создает совершенно бесполезную схему, предвосхищая таким образом дух средневековья.

90. История математики хорошо иллюстрирует тот факт, что одной лишь непрерывности традиций недостаточно для поддержания научной жизни. «Начала» Евклида в течение веков составляли основу математического обучения. Несмотря на это, значение их аксиоматической структуры не было понято до тех пор, пока задачи, связанные с основами анализа, не привели математиков девятнадцатого века к аналогичным методам. Особенно характерна в этом смысле теория пропорций в книге V, истинная роль которой в греческой математике была понята только после создания Дедекиндом с 1858 г. теории иррациональных чисел и непрерывности. Точно так же потребовалось развитие формальной логики, имевшее место в последнее время, чтобы открыть существование аналогичных систем в работах Аристотеля и философов стоической и мегарской школ.

Я не достаточно компетентен, чтобы обсуждать современные аспекты логики Аристотеля и позднейших школ. Однако одно обстоятельство, касающееся математики в более узком смысле, а именно использование букв для формулировки силлогизмов, следует упомянуть. Например, фигура, позднее названная «Барбара», формулируется так: «Если $A$ приписывается всем $Б$, а $Б$ — всем $B$, то $A$ необходимо приписывается всем $B$» [1]). Казалось бы, что введение в логику переменных, изображаемых буквами, должно было послужить существенным шагом по пути к формулировке математических правил, которые мы назвали бы «Алгеброй». Такой ход развития был бы тем более естественным, что аксиоматический подход к математике возник в то же самое время и в кругу тех же лиц. Однако ничего подобного не произошло, и алгебра возникла совершенно независимо от существования алгебраических обозначений в одной из самых знаменитых философских работ древности.

Это хорошая иллюстрация тщетности любых попыток воссоздать «причины» фактического хода исторических событий. Точно так же отсутствие алгебраических обозначений не должно было помешать греческим геометрам развить то, что в девятнад-

---

[1]) Аналитика первая, I, 4, 25b, 37. (Русск. перев. 1952, стр. 14—15. *Прим. ред.*)

цатом веке было названо «синтетической» и «проективной» геометрией, после того как многие из основных понятий уже были разработаны в трудах Аполлония. Опять такое «естественное» развитие не имело места, и все, что мы можем надеяться установить в историческом исследовании, — это факты и условия, но ни в коем случае не причины.

## *БИБЛИОГРАФИЯ К ПРИЛОЖЕНИЮ II*

В сочинениях по истории греческой математики нет недостатка, и многие из них можно найти в любом библиотечном каталоге. Поэтому я ограничусь упоминанием нескольких сравнительно недавних публикаций, которые еще не вошли во всеобщее употребление.

Была найдена в арабском переводе работа Архимеда о правильном семиугольнике. Изложение этой работы на немецком языке было опубликовано Шойем (C. Schoy, «Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen... Al-Bīrūni», Hannover, 1927, стр. 74—91)[1]).

«Сферика» Менелая также сохранилась только в арабском переводе или переработке Абу Насра Мансура (около 1000 г. н. э.); ее научное издание вместе с немецким переводом осуществил Краузе (Max Krause, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, philol.-hist. Kl., 3 Folge, 17, Berlin, Weidmann, 1936).

Новое издание одного из самых ранних дошедших до нас греческих математических сочинений (написанного, может быть, около 330—300 гг. до н. э.) осуществлено Можене (J. Mogenet, «*Autolycus de Pitane*; histoire du text, suivie de l'édition critique des traités de la Sphère en Mouvement et des Levers et Couchers», Louvain, 1950, Recueil de Travaux d'Histoire et de Philologie, 3-e sér., fasc. 37). В то же время Шмидт сделал интересное открытие, что две «книги» «О восходах и заходах» фактически являются только двумя вариантами одного сочинения; см. статью O. Schmidt, «Some critical remarks about Autolycus' On Risings and Settings» в трудах Den 11te skandinavikse Matematikerkongress i Trondheim, 22—25 August 1949 (Oslo, 1952), стр. 202—209.

Большой исторический и методологический интерес представляет работа Лежена (A. Lejeune, Euclide et Ptolemée; deux stades de l'optique géometrique grecque, Louvain, 1948, Recueil de Travaux d'Histoire et de Philologie, 3-e sér., fasc. 31). Тщательный анализ показывает нам прогресс от строго геометрической оптики к теории бинокулярного зрения и психологической оптике, основанных на эмпирических данных и систематических экспериментах. Оптические теории Птолемея касаются также проблемы трехмерности пространства, предмета, о котором он написал специальный трактат, теперь утерянный[2]). «Оптика» Птолемея сохранилась только в латинском варианте арабского перевода (издана Леженом, Louvain, 1956, Recueil etc., 4-e sér., fasc. 8).

## *ПРИМЕЧАНИЯ И ССЫЛКИ К ПРИЛОЖЕНИЮ II*

к 85. Геодезическая задача, упомянутая на стр. 202, известна как задача Снелля — Потено. Она была решена Снеллем (W. Snellius, «Eratosthenes Batavus», Leiden, 1617, стр. 203 и след.). Удеманс говорит (J. A. C.

---

[1]) Перевод этой работы на русский язык, выполненный Б. А. Розенфельдом, имеется в книге: Архимед, Сочинения, М., 1962, стр. 401—415. (*Прим. ред.*)

[2]) См. Ptolemaeus, Opera astron. minora, изд. Heiberg, стр. 265 и след.

Oudemans, Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft, 22, 1887, стр. 345), что задача Птолемея идентична задаче Снелля. Однако это не так. Птолемей считает, что даны $\delta_1$, $\delta_2$ и $\alpha_1$, $\alpha_2$ и $R$, тогда как Снелль, кроме $\delta_1$ и $\delta_2$, знает все три стороны $s_1$, $s_2$, $s_3$ треугольника.

Эту задачу анализировал также Деламбр (Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne, II, стр. 164 и след.). См. также Тропфке (Tropfke, Geschichte der Elementarmathematik, V, изд. 2-е, 1923, стр. 97).

к 87. Литература, касающаяся «Аналеммы»: трактат Птолемея опубликован Гейбергом (Ptolemaeus, Opera, II, стр. 189—223, 1907). Анализ метода см. у Деламбра (Delambre, Histoire de l'astronomie ancienne, II, стр. 458—471, Paris, 1817); у Дрекера (J. Drecker, Theorie der Sonnenuhren, в Basserman—Jordan, Geschichte der Zeitmessung und der Uhren, т. I, E; Berlin, 1925); и в особенности в статье Люкея (P. Luckey, Das Analemma von Ptolemäus, Astron. Nachrichten, 230, № 5498, стр. 17—46, 1927), которому мы обязаны пониманием номографических методов птолемеевской «Аналеммы».

О Витрувии и Героне см. O. Neugebauer, Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria—Rom, Kgl. Danske Vidensk. Selsk., hist.-filol. medd., 26,2 и 26,7 (1938—1939).

к 88. См. O. Neugebauer, On the astronomical origin of the theory of conic sections. Proc. Amer. Philos. Soc. 92 (1948), стр. 136—138. Мои доводы основаны на том, что в самой ранней форме теории предполагалось, что образующая проходит через положение, перпендикулярное секущей плоскости, т. е. допускалось такое расположение, как в случае гномона и плоскости, на которую падает тень. Слабое место этого довода состоит в том, что не сохранилось ни одних солнечных часов, в которых гномон был бы направлен непосредственно к Солнцу в момент кульминации.

Попутно следует заметить, что из теории солнечных часов, возможно, возникла одна из «классических» задач греческой математики, а именно, задача о трисекции угла. Мы знаем, что Папп (Математическое собрание, IV, 27) пользовался конхоидой Никомеда (второй век до н. э.) для того, чтобы произвести трисекцию угла в связи с работой Диодора (первый век до н. э.) по теории солнечных часов. Здесь возникает задача построения 12-й части дуги, которую Солнце описывает над горизонтом, дуги, необходимой для получения одного «сезонного часа».

к 89. Лучший анализ птолемеевой теории картографических проекций дан Мжиком и Гопфнером (H. v. Mžik-F. Hopfner, Des Klaudios Ptolemaios Einführung in die darstellende Erdkunde, Klotho, 5, 1938). См. также H. Berger, Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen, изд. 2-е, Leipzig, 1903, стр. 632 и след.

Большое количество разных древних карт воспроизведено в монументальном труде: Claudii Ptolemaei Geographiae Codex Urbinas Graecus 82 (= Codices e Vaticanis selecti, т. 19), Leiden — Leipzig, 1932 (четыре тома), изданном и прокомментированном Фишером. Следует, однако, подчеркнуть, что «География» в восьми книгах, как она существует в наши дни, по всей вероятности является не работой Птолемея, а византийской компиляцией, как это было показано Багроу (L. Bagrow, «The Origin of Ptolemy's Geographia», Geografiska Annaler, 1943, стр. 318—387, в частности, стр. 368 и след.). Математические разделы («Книга I»), безусловно, являются оригинальными.

Сам Птолемей прекрасно понимал, что его вторая коническая проекция с круговыми дугами в качестве меридианов была только приближением (хотя и очень хорошим) к отображению, в котором сохранялись бы расстояния вдоль всех параллелей. Он ограничил себя тремя параллелями только для простоты конструкции. Точные линии меридианов, с северным полюсом в центре, даны Иоганном Вернером в связи с его переводом первой книги «Географии» Птолемея (Nürnberg, 1514, и затем Ingolstadt, 1533, с предисловием Петра Апиана). Этот метод проектирования стал очень популярным, после того как он был использован в атласе Р. Бонна (1787 г.), и позднее, по рекомендации Лапласа, был принят для составления карт Франции.

Тот факт, что эта «проекция Бонна» сохраняет площади, был, конечно, неизвестен в древности.

к 90. О связи между греческой теорией иррациональных чисел и ее современным вариантом см. монографии Дедекинда (R. D e d e k i n d, «Stetigkeit und irrationale Zahlen», 1872, и «Was sind und was sollen die Zahlen», 1888), а также его переписку с Липшицем (R. D e d e k i n d, Gesammelte mathematische Werke, III, стр. 469—479) [1]. См. также O. B e c k e r, Eudoxos-Studien, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Abt. B, т. 2, стр. 311—333; стр. 364—387; т. 3, стр. 236—244; стр. 370—388; стр. 389—410 (1932—1934).

K. v. F r i t z, The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum, Annals of Mathematics, 46 (1945), стр. 242—264.

V a n d e r W a e r d e n, Die Arithmetik der Pythagoreer, Mathem. Annalen, 120 (1947/1949), стр. 127—153; стр. 676—700 [2].

В последние годы было написано много книг и монографий о проблемах древней формальной логики. Достаточно будет упомянуть следующие работы:

Jan L u k a s i e w i c z, Aristotle's Syllogistic from the standpoint of modern formal logic, Oxford, Clarendon Press, 1951.

I. M. B o c h e n s k i, Ancient Formal Logic, North—Holland Publishing Company, Amsterdam, 1951.

Benson M a t e s, Stoik Logic, Univ. of California Press, 1953.

---

[1]) Имеются русские переводы этих монографий: Р. Д е д е к и н д, Непрерывность и иррациональные числа, пер. С. О. Шатуновского, изд. 4-е, Одесса, 1923, и Р. Д е д е к и н д, Что такое числа и для чего они служат?, Казань, 1905. (*Прим. ред.*)

[2]) О греческой теории иррациональных чисел см. также в книге Б. Л. в а н - д е р - В а р д е н а «Пробуждающаяся наука», М., 1959 и в «Лекциях по истории математики в Древней Греции» И. Г. Б а ш м а к о в о й (Историко-математические исследования, вып. XI, М., 1958, стр. 225—438). (*Прим. ред.*)

| ЗНАКИ ЗОДИАКА | | СИМВОЛЫ ПЛАНЕТ |
|---|---|---|
| ♈ Овен | ♎ Весы | ♄ Сатурн |
| ♉ Телец | ♏ Скорпион | ♃ Юпитер |
| ♊ Близнецы | ♐ Стрелец | ♂ Марс |
| ♋ Рак | ♑ Козерог | ☉ Солнце |
| ♌ Лев | ♒ Водолей | ♀ Венера |
| ♍ Дева | ♓ Рыбы | ☿ Меркурий |

# ИМЕННОЙ И ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

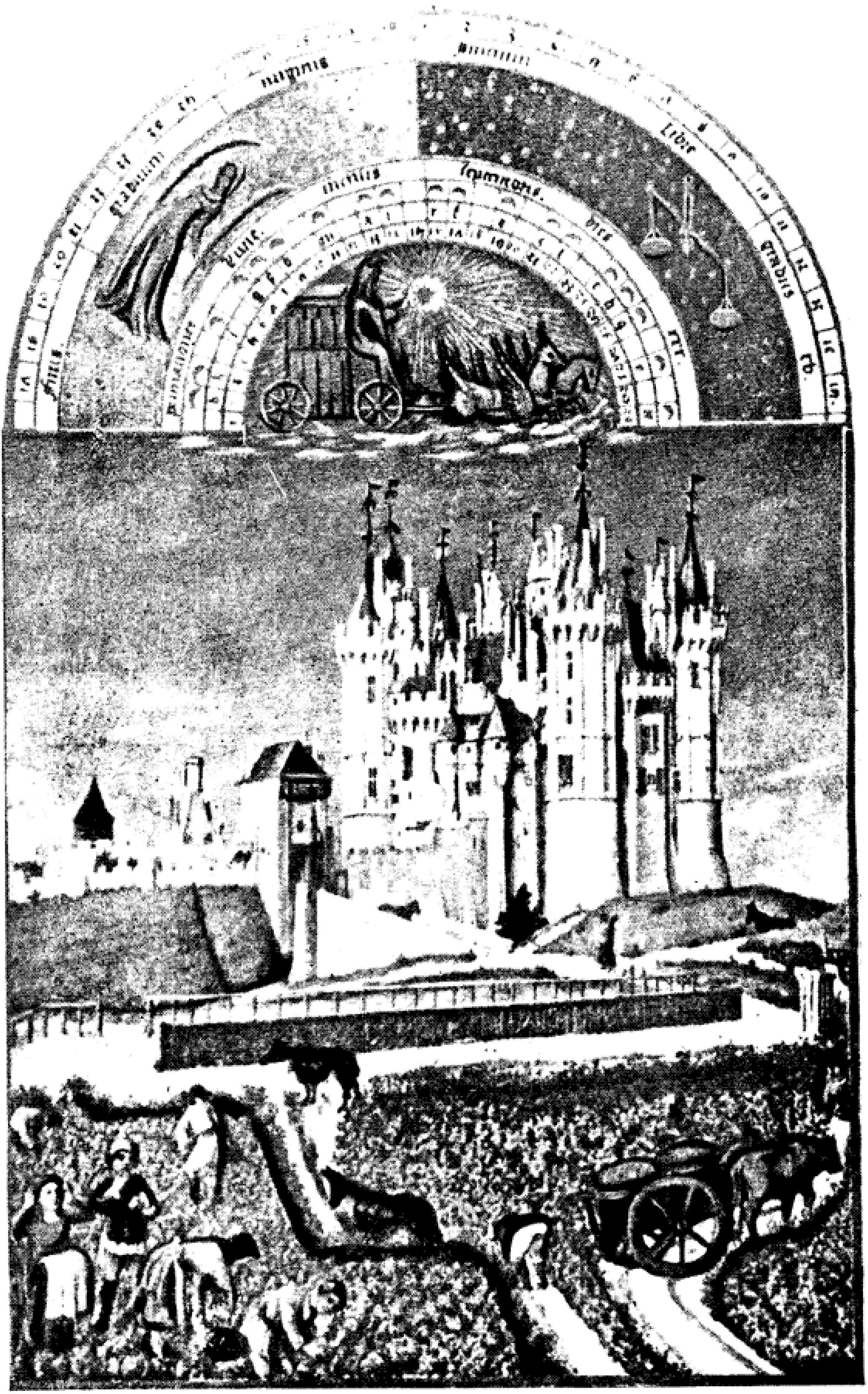


Табл. 1. «Сентябрь». Часослов герцога Беррийского.

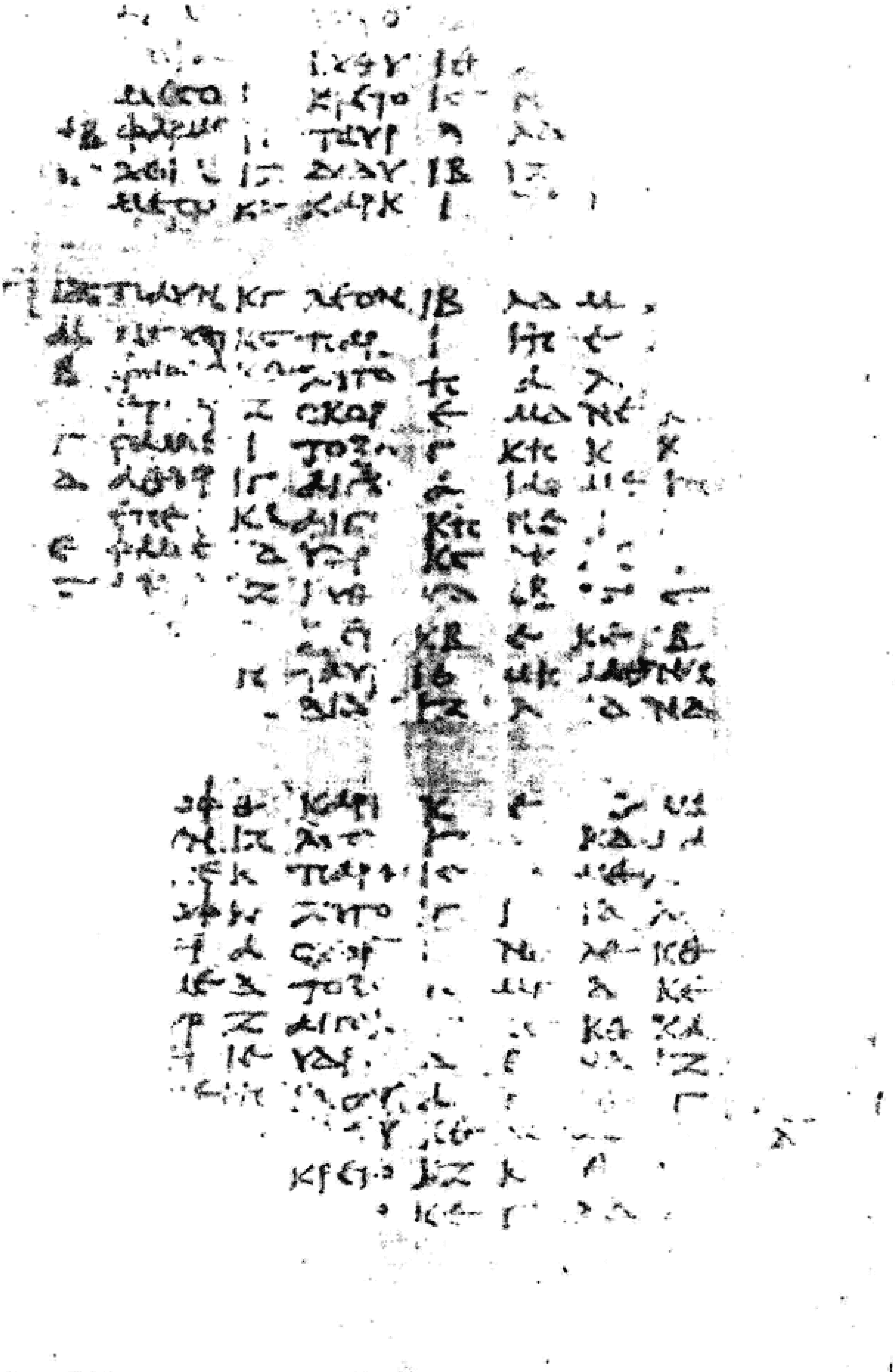


Табл. 2. Лунная таблица, Папирус Лундского университета, инв. 35а.

Табл. 3. Древневавилонский математический текст, ВМ 85194 лиц.

Табл. 4. а) Таблица умножения на 10.
VAT 7858 лиц.

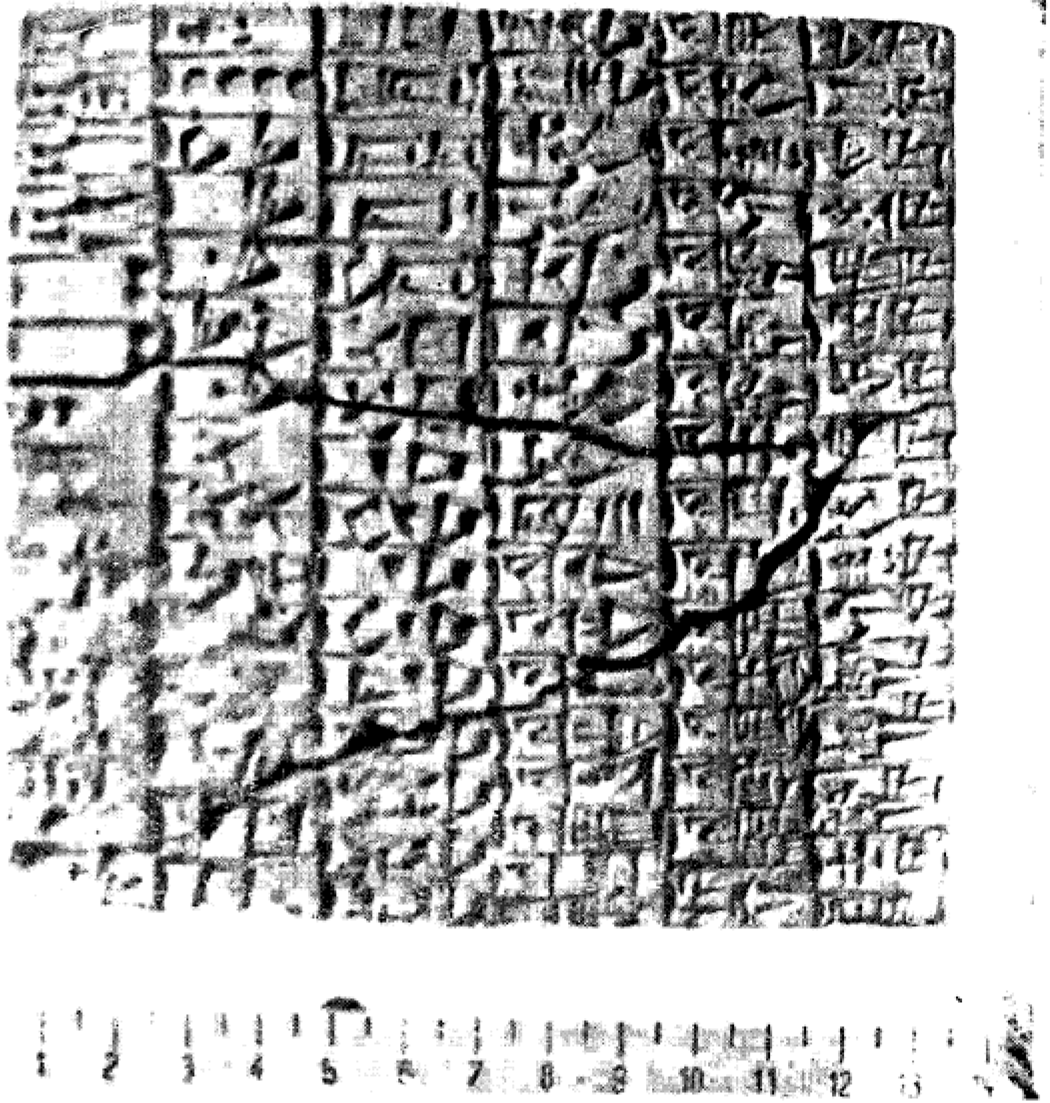


Табл. 4. б) Хозяйственный текст из Фары, VAT 12770 лиц.

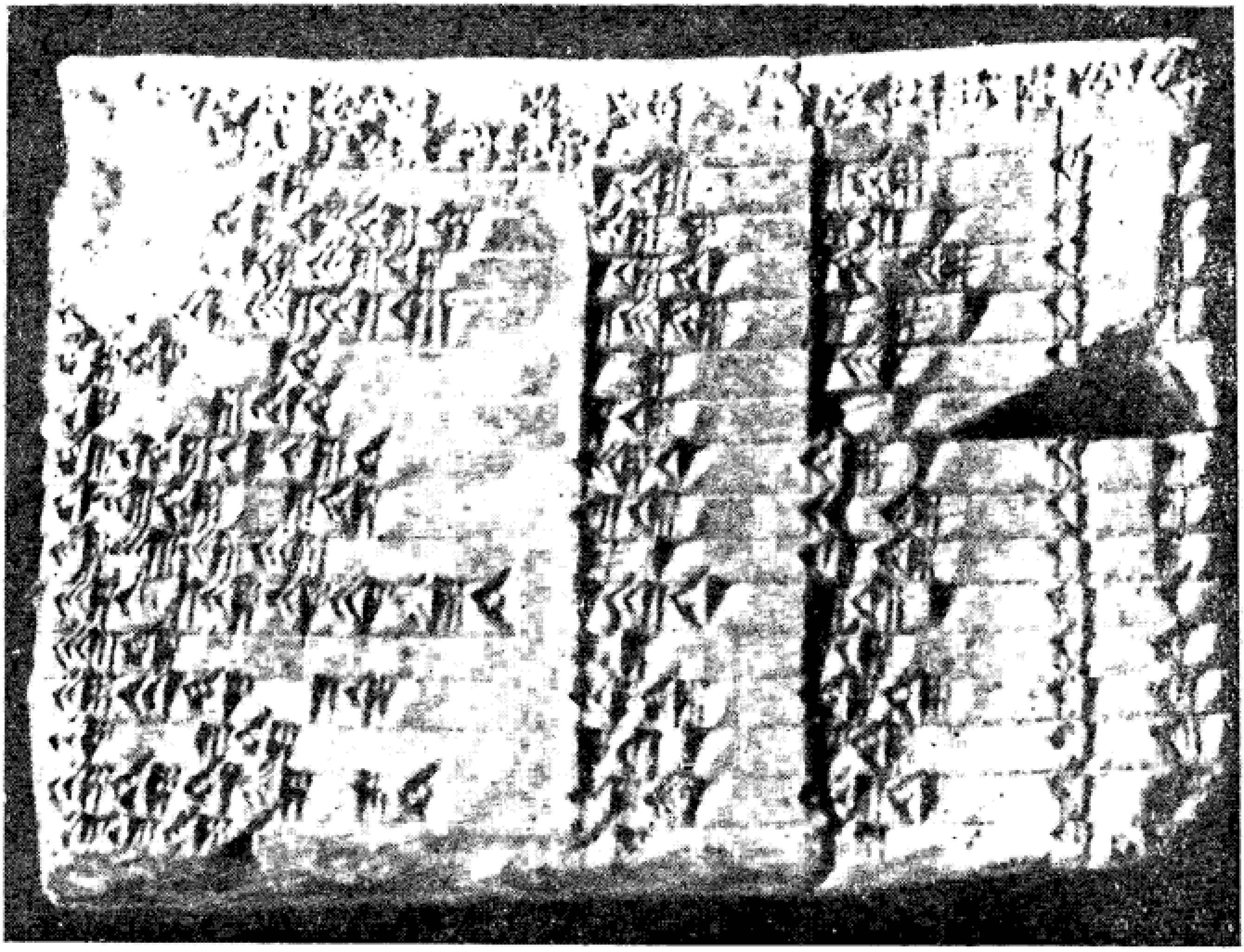


Табл. 7. а) Пифагоровы числа, Плимптон, 322.

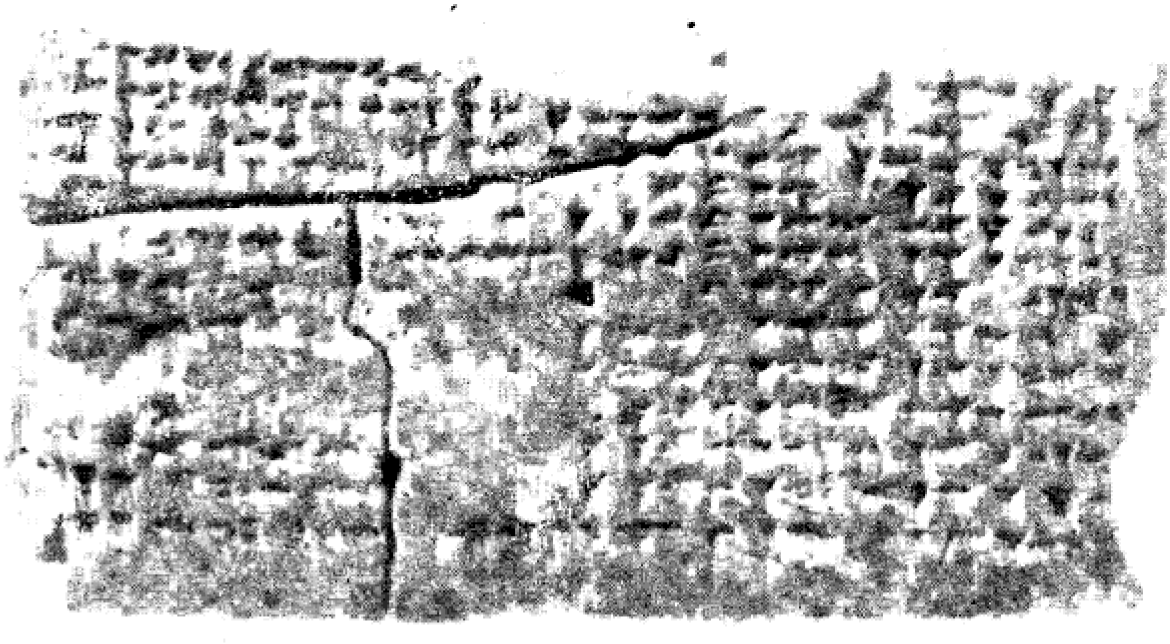


Табл. 7. б) Лунная эфемерида, А 3412 оборот.

Табл. 8. а) Копия из YBC 4712, Neugebauer MKT II, табл. 59.

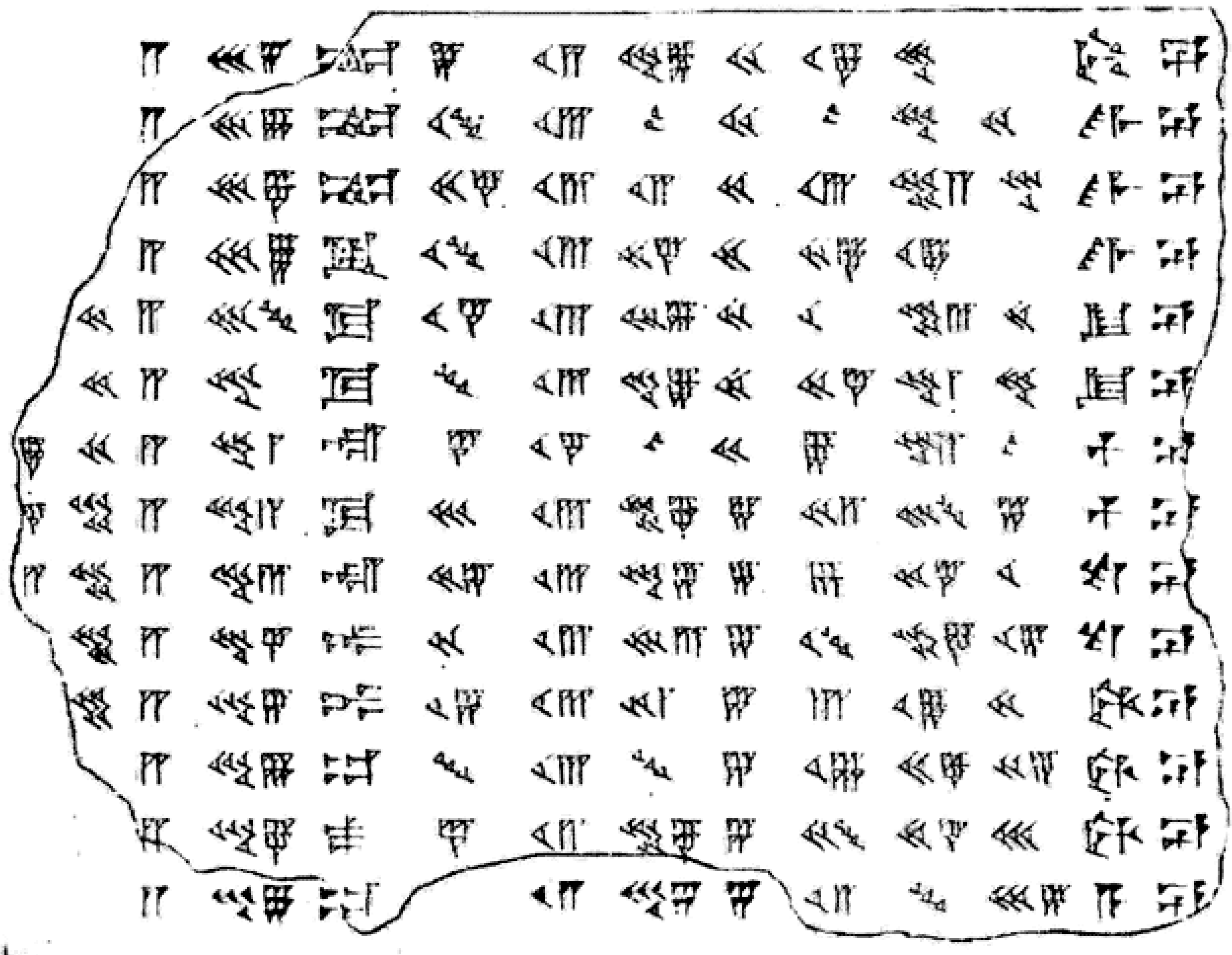


Табл. 8. б) Копия из BM 34589, Kugler SSB, I, табл. XX.

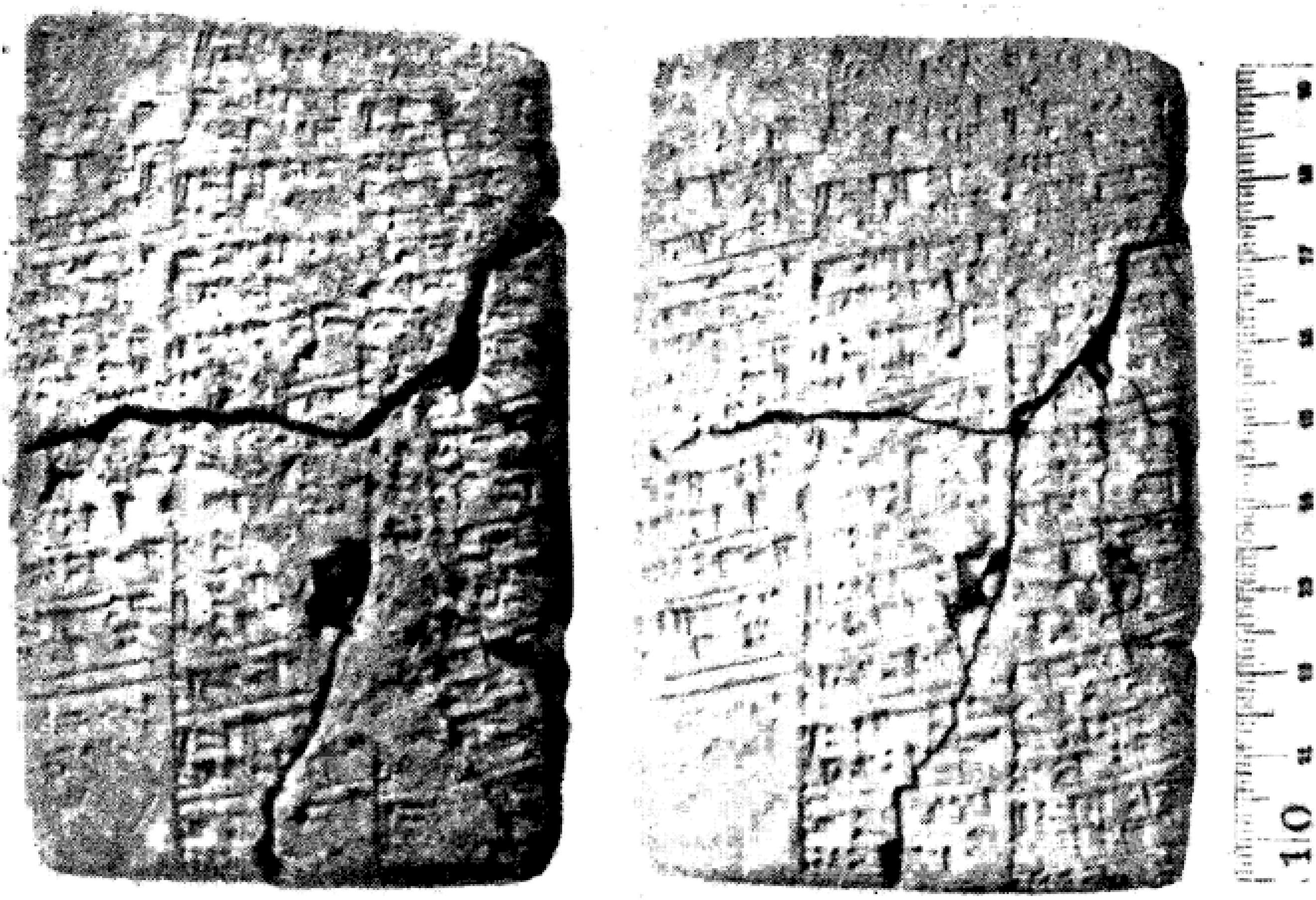


Табл. 9. а) Древневавилонский математический текст, YBC 4712.

Табл. 9. б) Эфемерида Сатурна. ВМ 34589, лиц.

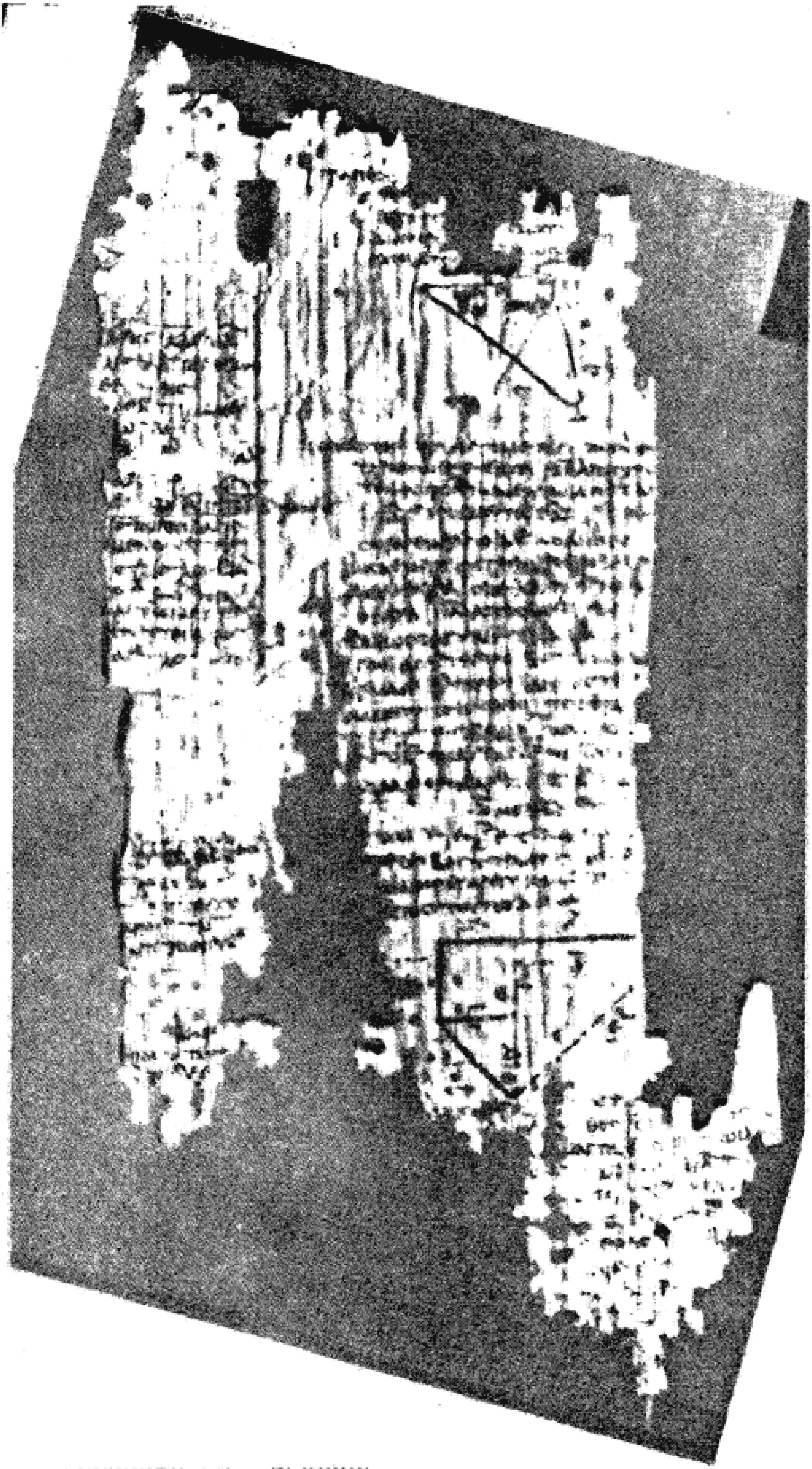


Табл. 12. Геометрические задачи, Папирус Корнелльского университета, инв. 69.

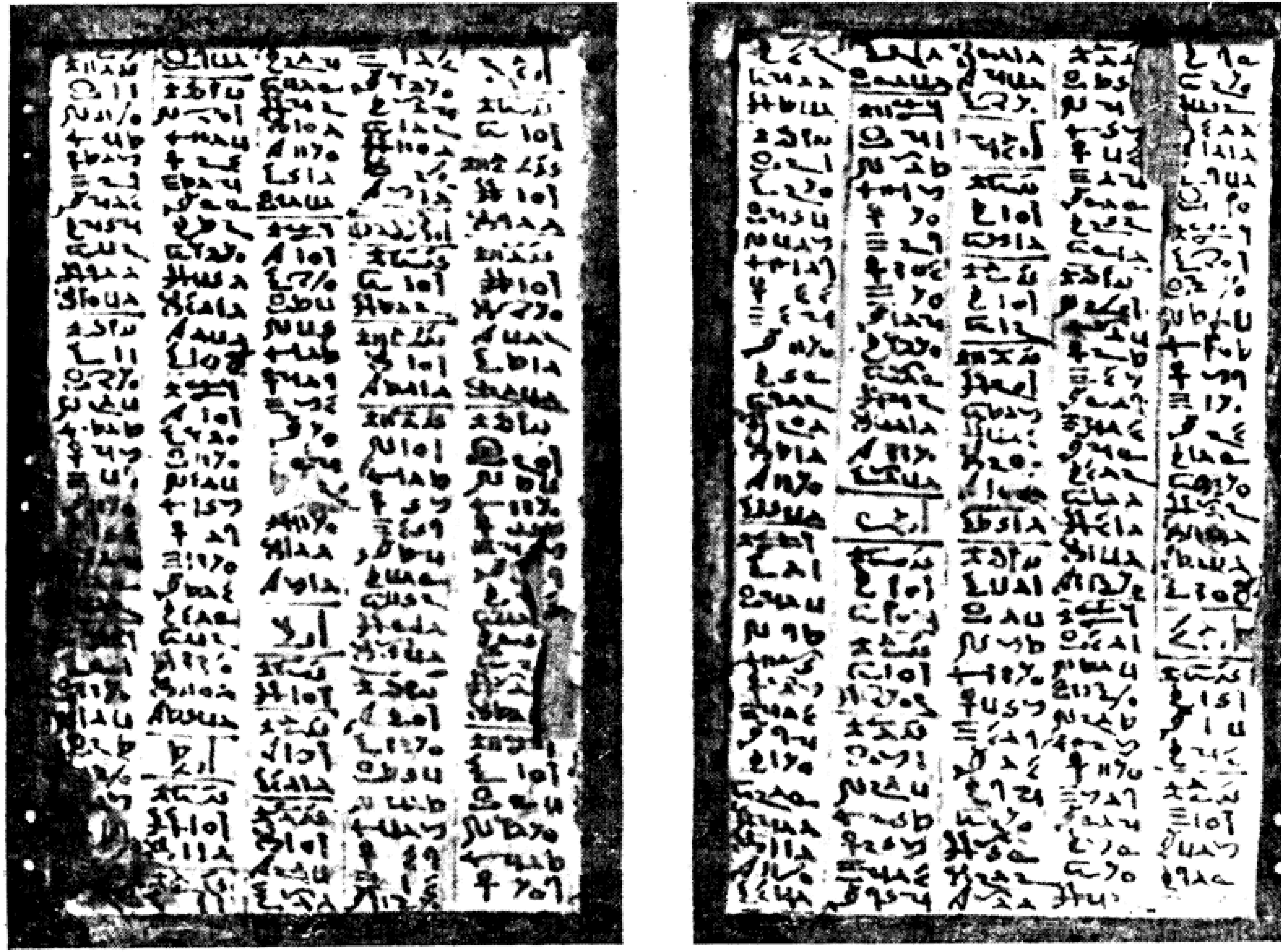


Табл. 13. Демотические таблицы планет, Ливерпуль.