



## **Abstract**

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit den Kegelschnitten. Sie ist für einen breiten Leserkreis bestimmt für Schüler der höheren Klassen, Studenten, Lehrer, Mathematiker und Ingenieure. Die Darstellung ist einfach, aber dennoch streng. Mit Hilfe einer neuen Methode werden alte und neue Sätze über Kegelschnitte bewiesen.

Die grundlegenden Besonderheiten dieser Darstellungsmethode liegen in der durchgehenden Verwendung von Polarkoordinaten und winkelerhaltenden Transformationen, womit sich anschauliche Zeichnungen herstellen lassen.

В предлагаемой работе исследуются эллипсы, параболы и гиперболы в многослойной системе - совмещенных полярно-декартовых координатах. Этот эффективный метод придуман в древней Греции, однако сейчас в математике используется редко. С новых позиций доказаны многочисленные классические результаты, а также совершенно новые. В последних главах приведены несколько коротких биографий. Изложение ведется доступно, но строго. Работа предназначена широкому кругу читателей: школьникам старших классов, студентам, преподавателям, инженерам, математикам.

Михаил Шпигельман

2-я редакция, исправленная и дополненная

Эллипсы, параболы и гиперболы в совмещенных полярно-декартовых координатах, М., 2006.- 460 с., ил.

© М. Шпигельман, 2006

[M.Shpigelman@freenet.de](mailto:M.Shpigelman@freenet.de) Тел. (049) (0511) 47 333 00

*M.Shpigelman, Remarqueweg 8, 30455 Hannover, BRD*

Содержание.....	1
Предисловие .....	8
Термины, соглашения, сокращения, структура работы.....	17
1. Общие вопросы, функции и методы.....	22
1.1. Функция длины.....	22
1.2. Функция направления $ang()$ .....	22
1.2.1. Определение и свойства функции направления.....	22
1.2.2. Обратные тригонометрические функции, выраженные через функцию $ang()$ .....	40
1.2.3. Прямые тригонометрические функции от функции $ang()$ .....	45
1.2.4. Геометрическая интерпретация функции $ang()$ .....	47
1.2.5. Решение тригонометрических уравнений при помощи функции $ang()$ .....	50
1.2.5.1. Простейшие уравнения.....	50
1.2.5.2. Уравнение $tg(\varphi) = \frac{b}{a}$ .....	51
1.2.5.3. Система уравнений $\cos \varphi = a, \sin \varphi = b;  a ,  b  \leq 1, a^2 + b^2 = 1$ .....	51
1.2.5.4. Уравнение $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = 1$ . Смежные преобразования.....	52
1.2.6. Некоторые вопросы нахождения углов.....	57
1.2.7. Измерение углов с помощью $ang()$ после операций копирования и перемещения.....	58
1.2.8. Особенности измерения углов внутри окружности бесконечного радиуса.....	61
1.3. Функция перемещения точки.....	62
1.4. Уравнение прямой.....	62
1.4.1. Общие положения.....	62
1.4.2. Приведенное уравнение прямой $y = kx + b$ .....	62
1.4.3. Уравнение прямой, проходящей через центр координат.....	64
1.4.4. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки.....	64
1.4.5. Уравнение прямой в общем виде $Ax + By + C = 0$ . Пучки прямых.....	65
1.4.6. Нормальное уравнение прямой $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$ .....	68
1.4.7. Уравнение прямой в отрезках на осях.....	70
1.4.8. Пересечение прямых.....	71
1.5. Преобразования.....	76
1.5.1. Преобразования декартовых координат.....	77
1.5.2. Координаты проекции точки на прямую.....	79

---

1.5.3. Вращение точек.....	84
1.5.4. Зеркальные отображения точек и лучей.....	85
1.5.4.1. Зеркальные отображения точек.....	85
1.5.4.2. Зеркальные отображения лучей.....	89
1.5.5. Преобразование гомотетии ( $y' \rightarrow ky, x' \rightarrow kx$ ).....	91
1.5.6. Преобразования симметрии.....	93
1.5.7. Сохранение углов при движениях.....	98
1.5.8. Преобразование инверсии .....	99
1.6. Отклонения точек от прямой.....	107
1.6.1. Отклонение точки от пассивно ориентированной прямой.....	107
1.6.2. Отклонение точки от активно ориентированной (векторной прямой). Площадь ориентированного параллелограмма, построенного на 3-х точках.....	110
1.7. Прямые в новой системе координат. Вращение прямых .....	113
1.8. Идентификация областей на плоскости.....	115
1.9. Пучки прямых (продолжение). Биссектриса угла между пересекающимися прямыми.....	116
1.10. Разные задачи.....	118
2. Полярное представление дуги и некоторые его свойства.....	121
2.1. Полярное уравнение.....	124
2.1.1. Пятиточечные схемы, стрела прогиба.....	124
2.1.2. Использование метода наименьших квадратов.....	127
2.2. Полярные параметры для конических кривых. Получение, анализ, преобразования, хранение, взаимосвязи.....	129
2.3. Перемещение дуги на вектор.....	132
2.4. Поворот дуги.....	133
2.5. Зеркальное отображение дуги.....	134
2.6. Определение расположения точки по отношению к кривой.....	135
2.7. Вектор направления касательной в полярных координатах.....	135
3. Система координат Кеплера.....	138
3.1. Общие вопросы.....	138
3.1.1. Определение системы координат Кеплера и преобразования между этой системой и исходной системой координат.....	138
3.1.2. Горизонтальная и вертикальная симметрия полярного уравнения.....	141
3.2. Касательная.....	144
3.2.1. Уравнение касательной.....	144
3.2.2. Расстояние от фокуса до касательной и координаты	



---

проекции фокуса на касательную.....	144
3.2.3. Зеркальные координаты фокуса относительно касательной.....	148
3.2.4. Построение касательной циркулем и неразмеченной линейкой.....	148
3.2.5. Условие, при котором касательная $\parallel$ оси абсцисс.....	152
3.2.6. Полярные координаты точек на дуге, в которой концевая касательная $\parallel$ заданной прямой.....	153
3.2.7. Декартовы координаты точек касания концевых касательных.....	158
3.2.8. Определение диаметра. 1-я модель построения диаметра.....	159
3.3. Секущие.....	163
3.3.1. Точки пересечения прямой линии и дуги. Фокальная хорда.....	163
3.3.2. Проекция и длина хорды.....	166
3.3.3. Обратная задача: найти параметры секущей по полярным координатам точек пересечения.....	167
3.4. Общий подход при расчете некоторых элементов эллипса, параболы и гиперболы.....	168
3.4.1. Одинаково рассчитываемые точки для всех типов коник.....	168
3.4.2. Директриса.....	170
3.5. Основные элементы и соотношения в эллипсе.....	172
3.5.1. Основные точки и элементы эллипса.....	170
3.5.2. Преобразования между правым и левым фокусом эллипса.....	179
3.5.2.1. Радиус-вектор $r_2(\varphi)$ из левого фокуса эллипса.....	179
3.5.2.2. Сумма длин радиус-векторов от фокусов эллипса до некоторой точки на дуге эллипса.....	180
3.5.2.3. Полярный угол $\varphi_2(\varphi)$ и радиус $r_2(\varphi)$ из левого фокуса эллипса.....	180
3.5.2.4. Проекция левого фокуса эллипса на касательную.....	183
3.5.2.5. Зеркальное отображение левого фокуса эллипса относительно касательной.....	186
3.5.3. Оптические свойства касательной эллипса.....	188
3.5.4. Упражнения на свойства эллипса.....	193
3.6. Основные элементы и соотношения в параболе.....	196
3.6.1. Свойство касательной параболы.....	196
3.6.2. Оптические свойства касательной параболы.....	198
3.7. Основные элементы гиперболы.....	200
3.7.1. Особенности работы с полярным уравнением в обобщенной полярной системе координат – ОПСК.....	200
3.7.2. Интервалы монотонности гиперболы.....	201

3.7.3. Основные точки и элементы гиперболы.....	204
3.7.4. Асимптоты гиперболы.....	206
3.7.5. Преобразования между левым и правым фокусом гиперболы.....	216
3.7.5.1. Расстояние $d_2(\varphi)$ из правого фокуса гиперболы до некоторой точки на ней.....	217
3.7.5.2. Разность расстояний от фокусов до некоторой точки на ветви гиперболы.....	218
3.7.5.3. Полярный угол $\varphi_2(\varphi)$ и длина радиус-вектора из правого фокуса гиперболы.....	219
3.7.6. Оптические свойства касательной гиперболы.....	223
3.7.7. Софокусные эллипс и гипербола.....	227
3.7.8. Упражнения на свойства гиперболы.....	230
3.8. Инварианты. Получение параметров полярного уравнения.....	231
4. Биссектриса фокального угла.....	244
4.1. Свойство биссектрисы фокального угла. Теорема Лагира (de la Hire) (обобщенный вариант).....	244
4.2. Координаты полюса.....	245
4.3. Свойство прямой, соединяющей фокус с полюсом.....	246
4.4. Нормальное уравнение стороны фокального угла.....	249
4.5. Отклонения от полюса до сторон фокального угла.....	249
4.6. Некоторые следствия из теоремы о биссектрисе фокального угла.....	251
5. Направление биссектрисы фокального угла $\pm$ отклонение.....	254
5.1. Расстояние от фокуса до полюса.....	254
5.2. Координаты полюса. Полярное уравнение точки полюса. Смежные и полюсные преобразования.....	256
5.3. Половина фокального угла, как функция координат полюса. Координаты точек касания.....	263
5.4. Отклонение от полюса до стороны фокального угла.....	273
5.5. Уравнение биссектрисы фокального угла.....	274
5.6. Хорда.....	276
5.6.1. Уравнение хорды.....	276
5.6.2. Квадрат длины хорды.....	280
5.6.3. Расстояния и отклонения от фокуса и от полюса до хорды.....	283
5.6.4. Координаты точки пересечения диагоналей четырехугольника фокус-полюс и расстояние от этой точки до фокуса.....	284
5.6.5. Координаты основания медианы полярного треугольника.....	287

---

5.7. Углы четырехугольника фокус-полюс.....	288
5.7.1. Внутренние углы четырехугольника фокус-полюс.....	288
5.7.2. Углы между радиус-векторами и хордой.....	297
5.7.3. Углы между биссектрисой фокального угла и хордой.....	299
5.8. Длина касательной от точки касания до полюса.....	301
5.9. Некоторые площади фигур, ограниченные прямыми.....	303
5.9.1. Площадь фокального треугольника .....	303
5.9.2. Площадь четырехугольника фокус-полюс и расстояния от точек касания до биссектрисы фокального угла.....	304
5.9.3. Площадь полярного треугольника, ограниченного касательными и хордой.....	305
5.10. Автополярные (самосопряженные) треугольники.....	306
5.11. Точка пересечения двух хорд.....	309
5.12. Точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника.....	311
5.13. Теорема Паскаля.....	315
5.14. Теорема Бриансона.....	319
5.15. Принцип двойственности (взаимности, корреляции).....	322
5.16. Гармоническое соотношение.....	326
5.17. Произведение частей секущих. Теорема Эйлера.....	332
5.18. Разные задачи.....	337
6. Диаметр.....	340
6.1. Формулы 1-й модели диаметра.....	340
6.2. 2-я модель построения диаметра: две $\parallel$ касательные.....	341
6.3. 3-я модель построения диаметра: хорда $\parallel$ касательным.....	350
6.3.1. Координаты концевых точек диаметра.....	350
6.3.2. Сохранения элементов секущих.....	356
6.4. 4-я модель построения диаметра: построение с помощью внешней точки.....	359
6.5. Основные точки, принадлежащие диаметру и его продолжению.....	362
6.5.1. Основные точки.....	362
6.5.2. Пересечение между сопряженной хордой и диаметром .....	364
6.6. Сопряженный диаметр.....	365
6.6.1. Сопряженный диаметр эллипса.....	365
6.6.2. Сопряженная гипербола и сопряженный диаметр гиперболы.....	372
6.6.2.1. Сопряженная гипербола.....	372
6.6.2.2. Классический подход к построению сопряженной гиперболы.....	376
6.6.2.3. Сопряженный диаметр гиперболы.....	381

6.7. Свойство биссектрисы фокального угла сопряженного диаметра эллипса и гиперболы.....	387
6.8. 5-я модель построения основного диаметра: диаметр, проходящий через точку основания медианы полярного треугольника.....	388
6.9. Вписанный/описанный параллелограммы. Теоремы сохранения Аполлония.....	392
6.9.1. Вспомогательные утверждения.....	392
6.9.2. Сумма квадратов основного и сопряженного диаметров .....	392
6.9.3. Площадь вписанного на диаметрах параллелограмма .....	394
6.9.4. Произведение частей диаметра. Теорема Аполлония.....	397
6.9.5. Элементы описанного параллелограмма эллипса.....	399
6.10. Задачи на диаметр.....	399
7. Нормаль.....	403
7.1. Уравнение нормали.....	403
7.2. Свойство биссектрисы смежного угла, образованного пересекающимися нормальями.....	405
7.3. Нормаль из внешней точки.....	408
7.4. Радиус кривизны.....	410
7.5. Координаты центра кривизны. Эволюта.....	411
7.6. Определение и уравнение параллельных дуг.....	412
8. Некоторые интегральные свойства.....	414
8.1. Длина дуги.....	414
8.1.1. Длина дуги окружности.....	415
8.1.2. Длина дуги параболы.....	415
8.2. Площадь сектора.....	417
8.2.1. Площадь сектора, ограниченного дугой параболы.....	418
8.2.2. Формула понижения $\int \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}$ при $e \neq 1$ .....	419
8.2.2. Площадь сектора, ограниченного дугой эллипса.....	421
8.2.4. Площадь сектора, ограниченного дугой гиперболы.....	424
<u>Приложения</u>	
П1. Формулы тригонометрии.....	426
П2. Квадратурная формула Гаусса.....	429
П3. Некоторые свойства определителей.....	430
<u>Портреты-миниатюры</u>	
П4. Ф.Лагир (Philippe de La Hire).....	434
П5. Лаланд (Jerome La Lande).....	441

---

Пб. Лаплас (P. S. Laplace).....	450
Предметный указатель.....	462
Литература.....	464

“Математика только тогда сможет равномерно развиваться по всем направлениям, когда ни один из методов исследования не будет оставлен в пренебрежении. Пусть каждый математик работает в том направлении, к которому лежит его сердце.”<sup>1</sup>

Феликс Клейн.

### Предисловие автора к 1-й редакции

Данная работа была создана для студентов младших курсов, изучающих аналитическую геометрию. Т.к. данная классическая тема изложена по-новому, то мы полагаем, что целый ряд разделов будет интересен математикам. Мы также считаем, что данная работа будет полезна научным работникам и инженерам всех специальностей.

Вначале предупредим о следующем. Введение – лучшее место, в котором можно коротко говорить об особенности работы, т.е. о том, чем, собственно, предлагаемый метод отличается от альтернативных. Сравнивая подходы, мы вынуждены во введении употреблять термины проективной геометрии, **малознакомые для неспециалиста**. Писать же несколько введений для каждой категории читателей – непозволительная роскошь!

Для решения данной терминологической проблемы есть два рецепта. Во-первых, читатель может в «Предисловии» смело пропускать непонятные места, получив обещание, что на дальнейшем понимании работы это никоим образом не отразится. С другой стороны, можно получить простые подробные разъяснения терминов, например, в [13], [16], [18].

Все задачи, решаемые в данной работе, выполнены на действительной плоскости. В большой степени здесь сыграла свою роль многолетняя традиция: [16], [18], [20] и др. С другой стороны, изложение данной темы с выходом в комплексный анализ для студентов младших курсов далеко не бесспорно.

Теперь несколько слов по поводу новизны полученных результатов. Они делятся на 2 категории:

---

<sup>1</sup> Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: в 2-х томах. Т.1. Арифметика, Алгебра, Анализ”. Пер. с нем./ Под. ред. В.Г. Болтянского. 4-е изд. М., Наука, 1967, стр.125.

- 1) некоторые, известные ранее геометрические свойства исследуемых кривых выводятся нами оригинально, многочисленные известные соотношения между элементами конических сечений (коник) впервые получены в полярной системе координат с центром в одном из фокусов<sup>1</sup>;

- 2) мы находим новые свойства коник (что в данной работе не редкость), а также формулы, их описывающие.

В работе везде добросовестно сделаны ссылки, если автор результата был известен. Чаще всего, естественно, приведены ссылки на Аполлония Пергского (250 до н.э. - 170 до н.э.) [21], внесшего наибольший вклад в развитие данной темы. Авторство некоторых результатов, путем многомесячной очень кропотливой работы удалось установить заново. Например: авторами полярного уравнения, основного для данной работы, являются величайшие французские астрономы и математики: Лаланд (Jerome Le Francais La Lande 1732-1807) и П. Лаплас (P.S. Laplace 1749-1827). У Лаланда приведен вариант полярного уравнения из левого фокуса эллипса, у Лапласа – из правого. (В данной работе используется второй вариант (см. сноску в начале главы 2).)

Теперь обсудим особенности применяемого метода. Для этого приведем 1-ю цитату с нашими ремарками. «Дальнейшее развитие математики показало преимущество аналитических методов в геометрии. Несмотря на всю красоту доказательств некоторых теорем с помощью синтетических методов, на наглядность (? – *М.Ш.*) и особую радость, которые доставляет нам этот подход при внутреннем созерцании геометрических образов, и, наконец, на большую помощь пространственной интуиции в решении отдельных вопросов (? – *М.Ш.*), в целом эти методы *громоздки, труднодоступны и нередко исключают постановку и решение более общих проблем*» (выделение наше – *М.Ш.*). (Авторы цитаты Б.Л.Лаптев и Б.А.Розенфельд [см. «Математика XIX века» под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П. Юшкевича, М., «Наука», 1981г., стр. 48].

Приведем 2-ю цитату, несмотря на ее большой объем, из замечательной работы Р.Куранта, Г.Робинса [13, стр. 217]. «В раннем периоде развития проективной геометрии существовала настойчиво проводимая тенденция выполнять все построения на синтетической или, как говорилось, «чисто геометрической» основе, вовсе избегая

---

<sup>1</sup> На момент начала работы над текстом книги нам было известно не более десятка формул на эту тему.

применения чисел и алгебраических методов. Выполнение этой программы встретило на своем пути большие затруднения, так как всегда оставались какие-то пункты, в которых алгебраические формулировки казались неизбежными. Полный успех в построении чисто синтетической проективной геометрии был достигнут только к концу XIX в. и только ценой значительных осложнений. В этом отношении методы аналитической геометрии оказались гораздо более плодотворными. Для современной математики характерна иная тенденция - положить в основу построения понятие числа, и в геометрии эта тенденция, идущая от Ферма и Декарта, возымела решительный триумф. Аналитическая геометрия перестала быть подсобным аппаратом, играющим служебную роль в геометрических рассуждениях, и стала самостоятельной областью, в которой интуитивная геометрическая интерпретация операций и результатов уже не является последней и окончательной целью, а принимает на себя функцию руководящего принципа, помогающего угадывать и понимать аналитические факты.”

Мы также сторонники аналитического метода в геометрии и разделяем приведенные высказывания. Сделаем следующий шаг - выберем внутри аналитического метода координатные методы. С этой целью приведем высказывание академика Н.И.Мусхелишвили (1891-1976). «Понятие нормали – не аффинное и не проективное, так как при аффинном преобразовании (а тем более при проективном) прямой угол не остается, вообще говоря, прямым» [18, стр. 457, сноска 1]. Другими словами: при аффинных и проективных преобразованиях, вообще говоря, меняются и пропорции, и углы, что приводит к сильному искажению исходного чертежа. В связи с тем, что в данной работе мы поставили себе **цель изучить угловые соотношения между элементами конических кривых**, то ни аффинные, ни, тем более, проективные преобразования для этих целей не подходили.

В работе поочередно используются полярная и декартова система координат, совмещенные относительно друг на друга. Причем используются каждая система в своем “слое”. Несколько неформальных слов об этом.

Наверное, не найдется такого читателя, который бы не пробовал многослойные пироги. Наиболее популярным из них является пирог “Наполеон”. Это вкусное изделие имеет при разрезании следующую вертикальную структуру: тонкий корж, тонкий слой крема, тонкий корж, тонкий слой крема, и так несколько раз (у каждой хозяйки своя кратность).



В современных компьютерных чертежных системах AutoCad, CorelDraw, в системе ACROBAT, в программах обработки растровых изображений FotoShop, ACDSsee и многих других программных продуктах (SOFTWARE) - многослойный (multilayer) подход является важнейшим компонентом системы.

Приведем пример. Представим себе, что на план города наносится транспортная сеть. Причем наносится она в другом слое (типа прозрачной кальки) и так, что реперные точки (специальные отметки) у слоев совпадают. Каждый слой можно своими программными средствами создавать и корректировать (программы индивидуальны в зависимости от их инженерного назначения). Затем слои совмещают (или же они совмещены первоначально). При необходимости включают/выключают слой водоснабжения, канализации, электроснабжения, метро, меняют слои местами, данные одного слоя доступны в другом и т.д. Понятно, что такой *многослойный подход позволяет значительно упростить задачу проектирования и сделать проектирование более надежным*. Кстати, многослойный подход также достаточно широко применяется в других научных и инженерных приложениях, а также в программах дизайна.

Уже давно в электронных системах применяют многослойные печатные платы, многослойные электронные процессоры, видеотекст на мониторах, цветная фотопленка имеет многослойную структуру, режущий инструмент имеет защитный слой, "многослойной" является партитура для хора/оркестра, картины живописи, обшивка космических кораблей, стены зданий, одежда. Очевидно, что этот список можно многократно продолжить. Тем самым мы хотим сказать: современная техника, как правило, многослойна. Аналогичных примеров, взятых в Природе, можно также привести великое множество.

В математике совмещать слои начали очень давно. Этот прием успешно применяли Менехм (IV в. до н.э.), Аполлоний, Архимед (ок. 287-212 до н.э.) и др. Так, знаменитая теорема Архимеда об объеме шара есть фактическое совмещение конических, сферических и цилиндрических систем координат. Кстати, - это также и пример 3-хмерных пересекающихся слоев. И Архимед, и Аполлоний этим приемом решили достаточно много геометрических задач. Прием назывался, как и одноименное сочинение Аполлония, - "вставки" [21, стр. 151]. В этой связи хочется отметить работы Платона, Омара Хайяма. В знаменитом курсе Г.М. Фихтенгольца (1888-1959) есть несколько "неявных" примеров такого рода, в

частности [24, стр.486]. Очевидно, что список знаменитых авторов, применявших данный метод, можно многократно увеличить.

Полезность применения различных координатных методов проиллюстрируем следующими простыми примерами. Так, уравнение окружности в полярных координатах выглядит очень просто  $r = a$ , в декартовом представлении это же уравнение записывается через радикал  $\sqrt{x^2 + y^2} = a$ . С другой стороны, уравнение прямой в общем виде в декартовых координатах имеет простой вид  $Ax + By + C = 0$ , в полярных координатах сложнее -  $r(A \cos \varphi + B \sin \varphi) + C = 0$ .

Так как *совмещение различных координатных систем органически присуще всей математике*, то надеемся, что многослойный подход получит в дальнейшем свое развитие.

Теперь об исследовании углов. Углы в рассматриваемых задачах появляются как граничные условия, а также при промежуточных вычислениях. Важно, что направления, измеряемые некоторым углом, есть и у бесконечно удаленных точек. С этой целью был создан аналитический аппарат, связывающий направления, классические тригонометрические функции и элементы конических кривых. Для настоящей работы создано с помощью этого аппарата более 250 чертежей.

Углы между двумя выбранными лучами измеряет **функция направления**. Вот уже много лет с помощью этой функции мы можем **легко конструировать различные векторные графические алгоритмы**. В данной работе рассмотрены некоторые аналитические свойства этой функции.

Оказалось, что **функция направления** заменяет все 4 обратные тригонометрические функции:  $\arccos(x)$ ;  $\arcsin(x)$ ;  $\arctg(x)$   $\operatorname{arcctg}(x)$ . Более того, работать с этой функцией *существенно проще*, чем с каждой из ее классических предшественниц. Поясним: *не надо постоянно оглядываться на область определения функции, т.к. эта функция определена на целом круге произвольного радиуса и произвольно смещенного относительно центра координат*.

В связи с этим, были пересмотрены в сторону **значительного упрощения** многочисленные классические методики решения тригонометрических уравнений, обычно изучаемые в средней школе. Вне всякого сомнения: внедрение этих

методик **существенно сократит изложение соответствующих разделов тригонометрии и повысит интерес у учащихся к курсу тригонометрии в целом**. В работе даны решения нескольких задач, рассматриваемые обычно как задачи повышенной трудности.

Одним из интересных результатов этой работы явилось нахождение равных рядом расположенных углов. Поэтому слово “биссектриса”, пожалуй, наиболее употребляемый термин данной работы.

Проводя исследования в этом направлении, мы самостоятельно доказали теорему и провели анализ свойств по теме “биссектриса фокального угла треугольника, образованного радиус-векторами” (см. верхний рис. на обложке). Примерно через год, после напряженных поисков в библиотеках различных стран выяснилось, что в 1685 г. эта теорема в неполном объеме была опубликована выдающимся французским естествоиспытателем Лагиром (Philippe de la Hire<sup>1</sup> 1640-1718) в его знаменитой работе на латинском языке “Sectiones Conicae in Novem Libros Distributae”<sup>2</sup>. Эта теорема (следствия ни тогда, ни потом так и не были открыты) цитировалась в каждом серьезном учебнике по геометрии на протяжении порядка 2,5 столетий (в начале 4-й главы приведен из [22] список этих работ). Ввиду отсутствия в этих учебниках практических приложений по данному вопросу, интерес к этой **важнейшей** (с нашей точки зрения) теореме постепенно угас, и в современных учебниках (как русских, так и иностранных) эта теорема вообще *не приводится*. Или приводится в очень сжатом виде: только для параболы [6, N648].

Для нас данная теорема - центральная. С ней, в той или иной мере, связаны основные (как новые, так и уже известные) результаты данной работы. Объясним этот важный момент подробнее.

Во-первых, эти результаты проявляются только в полярных координатах. Этим и объясняется, что они до сих пор не были получены. Во-вторых, нам

---

<sup>1</sup> Ф.Лагир был учеником Дезарга (Desargues G. 1593-1662), основателя проективной геометрии, и, как замечает А.Н.Боголюбов, активно пропагандировал синтетические методы в противовес аналитическим.

<sup>2</sup> Эта работа несколько раз цитируется И.Ньютоном в его “Математических принципах натуральной философии”. Далеко не каждый труд, доступный в то время Ньютоном, удостоивался такой чести.

удалось найти новые решения и новую интерпретацию “школьного” уравнения  $\alpha \cos x + \beta \sin x = 1$ . Новые решения этого уравнения, функция направления, полярное уравнение, теорема Ф.Лагира и полярный координатный метод в сочетании с многослойным подходом вместе взятые, оказались той основой, на которой построена данная работа. Сама по себе (без приложений) теорема Ф.Лагира просто любопытна.

Интересным полученным результатом (кстати, очень простым по форме) явилась оптимизационная теорема “свойство медианы полярного треугольника”. Эта теорема (см. нижний рис. на обложке) позволяет элементарными методами и инструментами: карандашом, циркулем и неразмеченной односторонней линейкой точно рассчитать место и максимальное отклонения дуги эллипса, параболы или гиперболы от хорды, соединяющей концы этой дуги (другими словами: **в каком месте и насколько квадратичный процесс максимально отличается от линейного**).

Наше глубокое убеждение - в такой постановке **эта теорема может быть полезна каждому научному работнику, каждому исследователю**. Хочется обратить внимание на этот результат специалистов по **теории аппроксимации** и по **теории оптимизации**. (Мы имеем положительный опыт применения данной теоремы в задачах дизайна и задачах авиапромышленности.)

Методы исследования, применяемые в данной работе, используют, в основном, тригонометрический аппарат, и тем самым **преемственны методам, изучаемым в школе**. Причем, как правило, *предлагаемое ниже решение короче классического за счет удачного выбора в каждый данный момент соответствующих координатных методов. Для практических приложений важно, что решение легко, без искусных приемов, программируется. Кроме того, предлагаемое решение легче запоминается*, в связи с тем, что полярные координаты (которые, как правило, всегда присутствуют в окончательной формуле) неоднородны и каждая полярная координата “отвечает” за свой элемент преобразования: координаты фокуса за положение фигуры в пространстве, эксцентриситет – за степень сжатия, фокальный параметр – за масштаб, и т.д. Объяснение простое - память человека легче запоминает разнородную информацию, чем такого же объема однородную. Во втором случае нужно еще запомнить дополнительные отличия, например, порядковый номер

элемента. Приведем пример: без достаточных усилий сложно запомнить, чему соответствует каждый элемент квадратичной формы. (Риторический вопрос: а нужны ли, вообще говоря, эти усилия?) Пример из повседневной жизни: при встрече с близнецами возникает множество смешных коллизий.

Заметим, что полярное уравнение описывает только следующие кривые: эллипсы (частный случай - окружности), параболы и гиперболы. И ничего более.

Общее же уравнение кривой 2-го порядка описывает 9 аффинно независимых классов линий 2-го порядка. Кроме вышеперечисленных классов, это уравнение описывает: 1) мнимый эллипс, 2) две мнимые пересекающиеся прямые, 3) две действительные пересекающиеся прямые, 4) две параллельные прямые, 5) две параллельные мнимые прямые, 6) две совпадающие прямые [16,стр. 543]. Понятно, что такая **3-х кратная избыточность** серьезно осложняет как исследование, так и преподавание данной темы.

Обратим внимание читателя, также, на поиски **инвариантов системы**. Классическая методика достаточно сложна и конечные классические формулы громоздки.

Предлагаемый подход к данному вопросу отличается простотой и доступен школьнику со средними математическими способностями. Известно, что классическая теория вычисляет ортогональные инварианты с точностью до некоторых коэффициентов [18,§260]. С другой стороны, в данной работе определены и исследованы **абсолютные ортогональные инварианты данной кривой**. Как оказалось, новый подход *уточняет* классическую теорию инвариантов и **дает у двух квадратичных форм, описывающих одну и ту же кривую, одинаковый результат**. При этом *существенно упрощается* интерпретация классических относительных инвариантов и приведение конических кривых к нормальной форме.

Особенно эффективным получилось исследование темы «**Диаметр**». Дано новое определение диаметра (эквивалентное классическому) и установлена связь его конструкции с теоретико-множественным отношением «эквивалентность». Этими и вышеупомянутыми методами получено достаточно большое число новых полезных формул.

Несколько слов по поводу стиля работы. Работа **специально** выполнена самым простым стилем, с целью сделать изложение материала как можно более увлекательным и доступным самому широкому кругу читателей. Например,

большая часть доказательств будет понятна школьникам старших классов, интересующихся математикой. С другой стороны, мы старались строго доказать все высказывания. Для полного понимания работы необходимо владение теорией определителей (правда, некоторые сложные теоремы здесь не применяются). В этом плане рекомендуем будущим математикам прекрасный учебник А.Г.Куроша [14]. Кроме того, те свойства определителей, которые используются в данной работе, вынесены для справочных целей в дополнение.

На тему легкости чтения книги лучше всего говорит следующая цитата. Александр Македонский, обращаясь по рекомендации философа Аристотеля к его другу, геометру Менехму, просил лично для себя указать самый легкий путь изучения геометрии. На что смелый геометр ответил: «О, царь! В каждой стране есть дороги для царей и дороги для обычных граждан, но в геометрии есть одна дорога для всех!» Тем самым мы хотим предупредить читателя: **несмотря на максимально простой стиль и доступность освещаемых вопросов, потребуются немало времени и терпения, чтобы освоить всю книгу.**

При выводе формул мы систематически переходим от **общего к частному** и сверяем новую формулу с ранее полученным результатом<sup>1</sup>. Тем самым **проверяем себя еще раз**, а также приучаем к этому хорошему стилю юного читателя. Поэтому, например, для данной работы типично упражнение: рассчитать длину большой и малой оси эллипса. Пусть читателя такая многократная просьба не смущает, т.к. каждый раз это нужно делать различными способами, но в рамках единого метода.

Одна из целей, которую мы ставили перед собой, было создание полного справочника по представлению элементов эллипсов, парабол и гипербол в полярных координатах. В силу этого, количество рассмотренных элементов в данной работе уже действительно большое. Однако абсолютной полноты пока, к сожалению, нет. Несмотря на достаточно большой объем работы, пропущены несколько важных теорем Аполлония, а также известные результаты других авторов. Причины здесь следующие.

Во-первых, в математике и в астрономии на сегодняшний день накоплено очень большое число результатов по данной теме, во-вторых, нас интересует реакция читателей на уже сделанную часть работы, а в-третьих, надеемся в

---

<sup>1</sup> Особенно замечательно пользовался этим приемом Л.Эйлер.

будущих изданиях существенно расширить перечень изучаемых вопросов данным методом. Подготовка к этому уже начата.

Отметим также, что мы, насколько это было возможно, воздерживались от введения новых понятий или переопределения существующих. Но многозначность в современной математической литературе (в особенности, в русской ее части), базовых для этой темы понятий, таких как “полюс” или “полярная ось”, привело к тому, что пришлось уточнить некоторые определения. А некоторые ввести. Но мы старались это сделать аккуратно, с оглядкой на **многотысячелетнюю** историю данного предмета. Насколько это удалось – судить читателю.

Подводя черту, скажем: мы будем очень благодарны всем, кто выскажет обоснованное мнение, пусть даже очень критическое, по поводу данной работы.

Хочется поблагодарить сотрудников 2-х университетских библиотек Ганновера (ФРГ) и центральной библиотеки земли Нижняя Саксония, 2-х университетских библиотек Геттингена (ФРГ), сотрудников библиотеки Московского Государственного Университета (РФ), сотрудников Российской национальной библиотеки Петербурга (РФ), сотрудников университетской библиотеки Харькова и сотрудников библиотеки-кабинета мехмата Харьковского Университета (Украина) за помощь и участие в проделанной работе.

Глубокую благодарность хочется высказать профессорам Орешко Н.И. и Солунскому В.И. за ряд ценных замечаний и конкретную помощь.

То содействие работе, которое оказано редакцией МЦМНО (Москва, РФ), особенно ценно.

А теперь продолжим изучение вечно прекрасных и загадочных форм эллипсов, парабол и гипербол.

Харьков-Ганновер-Геттинген

Апрель 2006

### **Предисловие автора к 2-й редакции**

Исправлены найденные ошибки, добавлены новые формулы в главы «7.Нормаль», «8. Некоторые интегральные свойства» и др., улучшен стиль ряда абзацев.

Ганновер

Июнь-июль 2006

[M.Shpigelman@freenet.de](mailto:M.Shpigelman@freenet.de) Тел. (049) (0511) 47 333 00

M.Shpigelman, Remarqueweg 8, 30455 Hannover, BRD

## Термины, соглашения, сокращения, структура работы

В данной работе используется “()” для **внутренних ссылок**: для нумерации формул и рисунков, которые начинаются с 1 в каждом разделе.

“[]” применяются для **ссылок на используемую литературу**, “{}” для обозначения **векторных величин**.

**Внутренние ссылки внутри одного раздела** обозначаются (NN), где NN – номер формулы, на который указывает ссылка. Если ссылка формулы идет на другой раздел, то пишется полный адрес ссылаемой формулы: (G.MM.KK.LL.-NN), где G – номер главы (1-уровень), MM – номер раздела – 2 уровень, KK – номер подраздела – 3 уровень и т.д. В конце ссылки, после знака минус “ - ” пишется номер ссылаемой формулы. Почти идентично построены ссылки в прекрасном американском справочнике по математике Г.Корн, Т.Корн [11], который взят в этом плане за основу. Это построение позволяет отказаться от архаичной линейной нумерации в виде §NN и собирать излагаемый материал в блоки более сложной структуры. С одной стороны, такое объединение материала более удобно для читателя, с другой стороны, автору проще осуществлять операции вставки/удаления разделов (следующее за этим изменение в нумерации ссылок затрагивает только самый нижний уровень разделов).

**Одноразовые ссылки на используемую литературу** располагаются в виде сноски внизу той страницы, на которой они использовались. Таким образом, в конце работы собраны только принципиальные ссылки.

**Комментарии** в приведенных алгоритмах обозначаем как //, так и /\*...\*/.

**Конец логического утверждения, определения, доказательства**, в том случае, если это неочевидно, завершаются символом □.

**Под структурой понятия система координат, понимаются следующие компоненты:**

- 1) метод (способ расчета) координат; 2) начало координат; 3) масштаб
- 4) ориентация координат<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Координатный метод в современном его виде изобретен сравнительно недавно: прямоугольные и косоугольные координаты Рене Декартом в 1637 г., полярные координаты – Яковом Бернулли в 1691 г., криволинейные координаты Габриэлем Ламе в 1859 г. Слово «координата» введено Лейбницем в 1692 г. С другой стороны, древние греки, пусть и не столь формально, но также пользовались координатным методом. Элементами косоугольных координат активно пользовался Аполлоний, элементами полярных координат (при расчете спиралей) – Архимед.



В данной работе применяются плоские, прямоугольные, правосторонние, с одной и той же единицей длины по обеим осям, декартовы координаты (чертежи выполнены в мм). Другим применяемым координатным методом являются плоские, правосторонние полярные координаты. Для радиус-вектора используется та же единица длины, что и для осей декартовых координат, углы измеряются в радианах и рядом записывается в скобках значение в градусах:  $\frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ). Как правило, совмещается центр декартовой и полярной систем координат, а также направление оси абсцисс и полярной оси (определение ниже). Это позволяет решать фрагменты задачи в наиболее подходящей для этой цели системе координат (в данном случае в полярной или декартовой).

Точки обозначаем жирным шрифтом:  $A, P$  чаще всего с некоторым индексом внизу:  $A_1, P_2$ .

Выражение  $P_1 : \{x, y\}$  говорит о том, что к настоящему времени точка  $P_1$  имеет следующие декартовы координаты: абсциссу  $x$  и ординату  $y$ .

Запишем операцию присваивания новых координат  $A = \{2, 3\}$ .

**Две коллинеарные прямые (т.е. параллельные или совпадающие прямые) без учета их ориентации обозначаем  $\parallel$ , коллинеарные прямые с одинаковым направлением -  $\Downarrow$ , с противоположными направлениями (антипараллельные) обозначаем -  $\Downarrow$ .** В этом вопросе следуем [16]. Слово перпендикулярный в большинстве случаев заменено на знак  $\perp$ .

Если используется ориентированная фигура: вектор, прямая, треугольник, то будем использовать жирный шрифт при написании точек, идентифицирующих данную фигуру. Для неориентированных фигур при написании точек применяется нормальный шрифт.

**“Кониками”<sup>1</sup> называются следующие типы кривых: эллипсы, параболы или гиперболы.** Заметим, что термин “коническое сечение” предполагает 3-х мерную обработку данных, т.к. конус – 3-х мерная фигура. А т.к. в данной работе рассматриваются только преобразования на действительной плоскости, то в силу этого термин “коническое сечение” не используется (по той же причине нет доказательства теоремы Данделена).

---

<sup>1</sup> См. историческую справку в конце данного раздела.

С другой стороны, в данной работе не применяется термин “кривая 2-го порядка”, поскольку этот термин существенно шире, чем коника (см. раздел «3.8.Инварианты»).

**Под дугой в данной работе подразумевается часть коники (дуги эллипса, параболы или гиперболы).**

В данной работе оставлен термин “полюс” только за точкой пересечения двух касательных<sup>1</sup>. Начало полярной системы координат, во избежание двусмысленности, будем называть “начало координат”. Находясь в начале координат, выбираем “главное” или “положительное” направление оси координат, называемое “фокальная ось” или “полярная ось” (на рис.1 -  $FT_0$ ).

$\Delta T_1PT_2$  (см. рис.1), состоящий из отрезков двух касательных  $T_1P$  и  $PT_2$ , проведенных из двух различных точек дуги  $T_1$  и  $T_2$  до точки их пересечения  $P$  (полюс) и хорды (поляры)  $T_1T_2$ , соединяющей точки касания, назовем полярным.

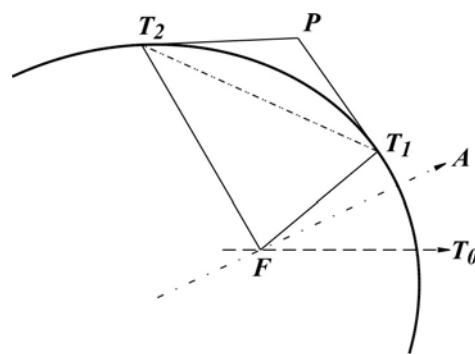


Рис. 1

Считаем, что термин “хорда” (отрезок прямой, соединяющий 2 точки кривой), удобнее, чем термин “поляра” (бесконечная прямая линия, расположенная определенным образом по отношению к полюсу), по следующим причинам:

- термин “хорда” звучит привычнее для бывших школьников, чем термин “поляра”;
- содержит информацию о конечных точках хорды;
- хорда, совпадающая с полярой на своем конечном участке, также соответственно расположена по отношению и к полюсу, и к фокусу, как и поляра;
- слова с корнем “пол” используются в таком случае не столь часто, что способствует лучшему пониманию и запоминанию.

<sup>1</sup> Заметим, что среди основных западноевропейских языков такой неопределенности, какая к настоящему времени сложилась в русском языке, нет. Полюс (точка пересечения касательных) в английском языке называется pole, в немецком – Pol, во французском – pole. Начало координат в английском языке носит название origin <of co-ordinates>, в немецком – Koordinatensprung, Ursprung, Nullpunkt, Anfangspunkt, во французском – origine <de coordonees>.

**Угол, образованный двумя радиус-векторами из начала координат, между некоторым направлением и полярной осью, называется полярным (например  $\angle T_1FT_0$ ).**

В данной работе во всех метрических измерениях применяется один и тот же масштаб.

**Треугольник, одна из вершин которого находится в фокусе, а две других находятся на кривой второго порядка, назовем фокальным (на рис.1 это  $\Delta FT_1T_2$ ).**

$\angle T_2FT_1$ , вершина которого находится в фокусе и образованный 2-мя радиус-векторами из фокуса до кривой 2-го порядка, также назовем фокальным. Если, одно из направлений фокального угла совпадает с направлением полярной оси, то, очевидно, что в данном случае фокальный и полярный углы совпадают. Например,  $\angle T_2FT_0$  или  $\angle T_1FT_0$ .

$\angle T_1PT_2$ , образованный двумя касательными с вершиной в полюсе, назовем “углом при полюсе”.

При доказательстве пользуемся непрерывностью рассматриваемых дуг и их первых производных на области определения дуги.□

*Справка.* Существуют две версии по поводу открытия коник. По свидетельству Прокла (V в.), древнегреческий математик Менехм (~380 - ~320 до н.э.), ученик Евдокса, слушатель Академии Платона, открыл три типа конических сечений. Он изучил их основные свойства, сделал приборы для вычерчивания, решил задачу об удвоении куба с помощью пересечения двух парабол и с помощью пересечения параболы и гиперболы. Эратосфен назвал коники триадой Менехма. К сожалению, работы Менехма до нас не дошли.

Однако другие ученые приписывают первую работу о конических сечениях (в 5-ти кн.) Аристее (старшему (~428 – ~350 до н.э.)). Евклид, создавая свои «Начала», использовал работу Аристея, а не Менехма.

Термин “коника” употребляли Аполлоний, Архимед и др. [21,стр.32]. В 8 книгах Аполлония ключевое слово “коника” присутствовало в названиях книг [21,стр.19]. Этот термин, как компактный синоним термину “конические сечения”, активно применяется в современной английской, немецкой и французской математической литературе. Надо сказать, что термин “коника” постепенно входит и в современную русскую математическую терминологию, и мы относимся к этому процессу положительно.

Источники информации: Интернет, А.Н.Боголюбов «Математики механики», библиографический справочник, КИЕВ, «НАУКОВА ДУМКА», 1963г., -640 стр., А.И.Бородин, А.С.Бугай «Выдающиеся математики», Биогр.слов.-справ. Киев, Рад.шк.,1987г..-656 стр.

## 1. Общие вопросы, функции и методы

При изучении данной работы рекомендуем программировать алгоритмы и выполнять упражнения не только на бумаге, но и с помощью компьютера.

### 1.1. Функция длины

Расстояние между двумя точками  $A, B$  будем вычислять по теореме Пифагора с помощью функции  $dist$

$$dist(A, B) = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2}. \quad (1)$$

### 1.2. Функция направления $ang()$

Необходимо подчеркнуть, что эта функция является базовой для этой работы и применяется, практически, в каждом разделе. Если отвлечься от некоторых особенностей формата предлагаемой ниже функции, то у нее есть свойства, похожие на свойства функции  $\varphi = Arg z$ , называемой *аргументом комплексного числа*. Принципиальное отличие этих двух функций друг от друга заключается в том, что **функция направления определена на действительной плоскости, а функция аргумента комплексного числа – на комплексной.**

#### 1.2.1. Определение и свойства функции направления

##### 1° .Определение функции направления

Пусть в прямоугольной декартовой системе координат на плоскости заданы две не совпадающие друг с другом точки:  $P_1 : \{x_1, y_1\}$  и  $P_2 : \{x_2, y_2\}$ .

Проведем два луча из  $P_1$  как из центра: пусть один луч будет  $\downarrow\downarrow$  оси абсцисс, а

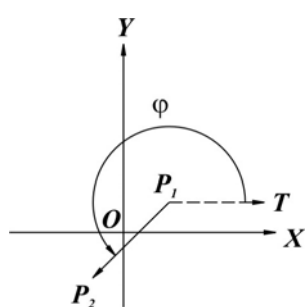


Рис. 1

второй направлен от  $P_1$  к  $P_2$  (см.рис.1). Найдем угол  $\varphi$ , который, для краткости, будем называть как “угол, под которым 2-я точка видна из 1-ой”.

Для этого найдем **координаты вектора разности**

$$\{\Delta X, \Delta Y\} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}. \quad (1)$$

Если  $\Delta X = 0$  или  $\Delta Y = 0$ , то это означает, что вектор

$\{\Delta X, \Delta Y\}$  расположен  $\downarrow\downarrow$  или  $\downarrow\uparrow$  оси абсцисс или ординат. Поместим для этих случаев результаты в таблицу.

	$\Delta X > 0, \Delta Y = 0$	$\Delta X = 0, \Delta Y > 0$	$\Delta X < 0, \Delta Y = 0$	$\Delta X = 0, \Delta Y < 0$
	1	2	3	4
$\varphi$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$

Табл.1.

Если  $\Delta X \neq 0$  и  $\Delta Y \neq 0$ , то вычислим значения вспомогательной функции

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right| \quad (2)$$

и с ее помощью дополним первую таблицу

	$\Delta X > 0, \Delta Y > 0$	$\Delta X < 0, \Delta Y > 0$	$\Delta X < 0, \Delta Y < 0$	$\Delta X > 0, \Delta Y < 0$
	1	2	3	4
$\varphi$	$\alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$2\pi - \alpha = -\alpha$

Табл.2 .

Если же, по каким то причинам  $P_1$  и  $P_2$  совпадут, то функция не определена.

На (рис.1)  $P_1\{60,40\}$ ,  $P_2\{-40,-60\}$ . Следовательно,

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \right) = \operatorname{arctg} \left( \left| \frac{-60 - 40}{-40 - 60} \right| \right) = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \quad \text{Из столбца 3 табл.2}$$

получим  $\varphi = \frac{5\pi}{4}$  или  $225^\circ$ .

Обозначим введенную функцию как  $\varphi = \operatorname{ang}(P_1 : \{x_1, y_1\}, P_2 : \{x_2, y_2\})$ .

Заметим, что справедливо

$$\varphi = \operatorname{ang}(P_1 : \{x_1, y_1\}, P_2 : \{x_2, y_2\}) = \operatorname{ang}(\{0,0\}, \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}) = \operatorname{ang}(\{0,0\}, \{\Delta x, \Delta y\})$$

Если одна из точек  $P_1$  или  $P_2$  совпадает с началом координат, то такую разновидность функции  $\operatorname{ang}()$  назовем неполной  $\operatorname{ang}(\{0,0\}, \{x,y\})$  или  $\operatorname{ang}(\{x,y\}, \{0,0\})$ . (В неполной функции  $\operatorname{ang}()$  знак разности  $\Delta$ , для краткости, опускаем.)

Корректными являются также следующие варианты записи неполной функции  $\operatorname{ang}(\vec{0}, \{x,y\})$ ,  $\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x,y\})$  и  $\operatorname{ang}(\{x,y\}, \vec{0})$ ,  $\operatorname{ang}(\{x,y\}, \mathbf{0})$ .

Чтобы не зависеть от формы представления функции  $ang()$  при подсчете параметров, в представлении  $ang(\mathbf{0}, \{x, y\})$  будем всегда считать  $x$  третьим параметром, а  $y$  - четвертым.

Если имеем дело с цепочкой векторов и хотим узнать угол направления от начала 1-го на конец последнего вектора, то справедливо

$$\varphi = ang(\mathbf{0}, \{\sum \Delta_i x, \sum \Delta_i y\})$$

Данная формула легко доказывается методом математической индукции. Предоставляем это читателю.

### 2°. Отрицательные углы

В связи с тем, что в данной работе принята правосторонняя система координат, в которой положительный угол  $\varphi$  откладывается против часовой стрелки, то отрицательное направление  $-\varphi$  получается из нулевого направления, ( $\parallel$  оси  $X$  (см. рис.2,3)), откладыванием угла  $\varphi$  по часовой стрелке. Сравнивая проекции некоторого вектора, отложенного из центра декартовой системы координат по направлению углов  $\varphi$  и  $-\varphi$  на оси координат, заметим, что абсциссы у них всегда совпадают, а ординаты имеют противоположные знаки. У вектора, отложенного из произвольной точки на плоскости под углом  $\varphi$ , при переходе к углу  $-\varphi$  из равенства соответствующих треугольников происходит преобразование  $\{\Delta X, \Delta Y\} \rightarrow \{\Delta X, -\Delta Y\}$ .

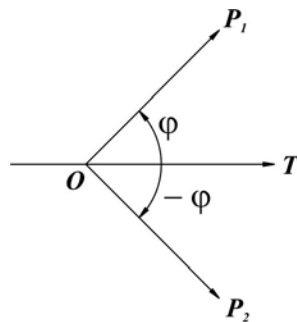


Рис. 2

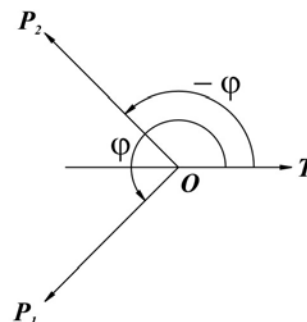


Рис. 3

Запишем отрицательный угол в виде следующей формальной записи

$$-\varphi = -ang(\{\Delta x, \Delta y\}) = -ang(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) = ang(\{x_1, -y_1\}, \{x_2, -y_2\}). \quad (3)$$

$$\text{Также для неполной функции } -ang(\mathbf{0}, \{x, y\}) = ang(\mathbf{0}, \{x, -y\}). \quad (3a)$$

Это свойство можно интерпретировать как нечетность одновременно по 2-му и 4-му параметру.

$$\text{Из (3a) следует } |\varphi| = |ang(\mathbf{0}, \{x, y\})| = ang(\mathbf{0}, \{x, |y|\}). \quad (4)$$

Упражнение 1. Убедиться, что  $\text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\}) = \frac{\pi}{4}$ ,

$$\text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\}) = -\frac{\pi}{4}.$$

Упражнение 2. Доказать, что при  $x > 0$  (правая полуплоскость единичной окружности), выполняется  $\text{arctg}(\frac{y}{x}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})$ .

Доказательство. При  $y > 0$  равенство функций следует из (2). Рассмотрим  $y < 0$ . Функция  $\text{arctg}(x)$  - нечетная  $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}(x)$ . С учетом

$$(3) \text{arctg}(\frac{y}{x}) = \text{arctg}(\frac{-|y|}{x}) = -\text{arctg}(\frac{|y|}{x}) = -\text{ang}(\mathbf{0}, \{x, |y|\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}).$$

Упражнение 3. Доказать, что при  $y \geq 0$  (верхняя полуплоскость единичной окружности), справедливо  $0 \leq \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) \leq \pi$ .

### 3° .Нормализация углов и интервалов углов

#### 3.1° . Нормализация углов

В теоретических вопросах, например при изучении симметрии угла относительно некоторой оси и др., удобно использовать отрицательные углы на первом этапе исследований. Но корректно сравнивать такие углы нельзя. Так, углу  $-\frac{\pi}{6}(-30^\circ)$  соответствует положительный угол  $\frac{11\pi}{6}(330^\circ)$ . Для положительных углов, выходящих за интервал  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , имеем такую же картину

$$\text{угол } \frac{13\pi}{6}(390^\circ) = \frac{\pi}{6}(30^\circ) < \frac{\pi}{4}(45^\circ).$$

Поэтому при программировании и в задачах, связанных со сравнением углов, настоятельно рекомендуем их нормализовать после каждого расчета. Кратко рассмотрим, что это означает.

**Нормализованными называются углы в полуинтервале  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .**

#### Алгоритм нормализации углов

- 1) Если угол  $\varphi > 2\pi(360^\circ)$ , то нужно вычитать из  $\varphi$  столько раз  $2\pi(360^\circ)$ , пока угол не станет нормализованным.
- 2) Если угол  $\varphi < -2\pi(360^\circ)$ , то нужно прибавлять к  $\varphi$  столько раз  $2\pi(360^\circ)$ , пока угол не станет нормализованным.  $\square$

На современных компьютерах приведенный алгоритм реализован аппаратно на машинно-ориентированных языках (Assembler) и программно на языках высокого уровня.

Упражнение 4. Доказать, что слагаемое  $-\pi$  перед нормализацией углов можно заменить на слагаемое  $\pi$ .

Доказательство.  $-\pi = -\pi + 2\pi = \pi$ .  $\square$

Таким же образом можно нормализовать все отрицательные слагаемые.

### 3.2<sup>o</sup> . Нормализация интервалов углов

Сначала приведем примеры таких интервалов. Любой из углов треугольника или многоугольника можно рассматривать как разность между двумя лучами, каждый из которых имеет свое направление. При поворотах треугольника, может случиться так, что ось абсцисс будет проходить между двумя лучами (т.е. направление 1-го луча будет положительным, а 2-го - отрицательным). В этом случае новая разность углов будет не совпадать с ранее вычисленной разностью (проверьте!).

Т.к. значения углов ни треугольника, ни многоугольника при обычных поворотах не изменяются (существуют еще параболические повороты, гиперболические и т.д.), то для согласования с реальностью, необходимо ввести коррекцию подхода.

Итак, пусть даны два угла  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Выполним следующий 4-х шаговый алгоритм.

#### Алгоритм нормализации интервалов углов

1) нормализуем  $\varphi_1$ , 2) нормализуем  $\varphi_2$ , 3) сравниваем  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , 4) если  $\varphi_1 > \varphi_2$ , то  $\varphi_2 := \varphi_2 + 2\pi$ .  $\square$

Таким образом, создан нормализованный интервал углов, *но при этом число на правой границе может оказаться уже ненормализованным.*

После поворотов опять применяем данный алгоритм, обеспечивая тем самым сохранение значения первоначального интервала углов.

Пример. Найдем середину интервала углов, если  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{6}$ , а  $\varphi_2 = \frac{\pi}{3}$ .



### Этап 1. Нормализация интервала углов

$$1) \varphi_1 = \frac{11\pi}{6}, \quad 2) \text{ не изменяем } \varphi_2, \quad 3) \varphi_1 > \varphi_2, \text{ т.к. } \frac{11\pi}{6} > \frac{\pi}{3}, \quad 4) \varphi_2 := \varphi_2 + 2\pi,$$

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi = \frac{7\pi}{3}.$$

Этап 2. Вычисление середины нормализованного интервала углов

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{11\pi}{6} + \frac{7\pi}{3} \right) = \frac{25\pi}{12}.$$

Упражнение 5. Постройте чертеж и проследите шаги алгоритма из предыдущего упражнения. □

Работая с нормализованным интервалом, можно создавать, например, линейные угловые интерполяционные алгоритмы в полярных координатах

$$\varphi_i = \varphi_1 + \frac{i(\varphi_2 - \varphi_1)}{n}, \quad i = 0, \dots, n$$

### 4°. Дополнительные углы

Введем понятие **дополнительных углов**.

**Дополнительными углами до  $2\pi$  ( $360^\circ$ )** назовем два или большее число углов, сумма нормализованных значений которых равна  $2\pi$  ( $360^\circ$ ).  
Примеры. Четыре внутренних угла выпуклого четырехугольника (например, прямоугольника), сумма секторов круга.

**Дополнительными углами до  $\pi$  ( $180^\circ$ )** назовем два или большее число углов, сумма нормализованных значений которых равна  $\pi$  ( $180^\circ$ ). В том случае, если рассматриваются два угла с суммой  $\pi$  ( $180^\circ$ ) и углы имеют общую границу, то такие углы называют смежными.

Примеры. Три внутренних угла треугольника, сумма секторов полукруга, сумма двух смежных углов, составляющих развернутый угол.

**Дополнительными углами до  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ )** назовем два или большее число углов, сумма нормализованных значений которых равна  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ ).

Пример. Сумма острых углов прямоугольного треугольника.

Продолжим изучение свойств функции  $ang()$ .

### 5°. Обмен точек местами

При этом обмене выбранное направление между двумя точками меняется на противоположное, т.е. на  $\pi$ . Меняя последовательность выбора точек, видим, что *координаты результирующего вектора разности*

$$\{\Delta X_2, \Delta Y_2\} = \{(x_1 - x_2), (y_1 - y_2)\} = \{-(x_2 - x_1), -(y_2 - y_1)\} = \{-\Delta X_1, -\Delta Y_1\}$$

по отношению к *координатам исходного вектора разности* меняют знак. Т.к. функция  $ang()$  определена таблично, то, рассматривая все 8 вариантов таблиц 1,2, получаем

$$ang(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) = ang(\{x_2, y_2\}, \{x_1, y_1\}) + \pi. \quad (5)$$

Например, значение столбца 2 табл.1 при изменении знаков  $\Delta X, \Delta Y$  переходит в столбец 4 той же таблицы  $\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi$ . Читатель может проверить остальные 7 вариантов.

$$\text{Аналогично, } ang(\{-x_1, -y_1\}, \{-x_2, -y_2\}) = ang(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) + \pi. \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \text{Действительно } ang(\{-x_1, -y_1\}, \{-x_2, -y_2\}) &= ang(\mathbf{0}, \{-x_2 - (-x_1), -y_2 - (-y_1)\}) = \\ &= ang(\mathbf{0}, \{x_1 - x_2, y_1 - y_2\}) = ang(\{x_2, y_2\}, \{x_1, y_1\}) = ang(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}) + \pi. \end{aligned}$$

Для неполной функции  $ang()$ , учитывая (6), при изменении всех знаков получим  $ang(\mathbf{0}, \{-x, -y\}) = ang(\mathbf{0}, \{x, y\}) + \pi$  (7)

$$\text{и } ang(\mathbf{0}, \{x, -y\}) = ang(\mathbf{0}, \{-x, y\}) + \pi. \quad (7a)$$

### 6°. Условия неизменности функции $ang(P_1, P_2)$

Это условие можно понимать, так же, как условие равенства двух углов. Очевидно, что оно выполняется в том, и только в том случае, если сохраняются

знаки компонентов вектора  $\{\Delta X, \Delta Y\}$  и отношение  $\left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|, \Delta X \neq 0$ .

Если же  $\Delta X = 0$ , то необходимо и достаточно сохранение только знака  $\Delta Y$  (см. табл.1). Аналогично, если  $\Delta Y = 0$ , то необходимо и достаточно сохранение только знака  $\Delta X$  (см. табл.1).

Приступим к рассмотрению частных случаев. Из (1) и (2) следует, что при  $k > 0$

$$ang(\{kx_1 + C_1, ky_1 + C_2\}, \{kx_2 + C_1, ky_2 + C_2\}) = ang(\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}). \quad (8)$$

Выражение (8) говорит о том, что **одновременный параллельный перенос и масштабирование длин одним положительным коэффициентом по обеим осям всех 4-х аргументов не меняет значение функции  $ang()$** .

Приведем другие частные случаи, сводящиеся к виду  $x_1 = kx_2, y_1 = ky_2$ ,

$k > 0$	$k < 0$
$ang(\mathbf{0}, \{kx, ky\}) = ang(\mathbf{0}, \{x, y\}) \quad (9)$	$ang(\mathbf{0}, \{kx, ky\}) = ang(\mathbf{0}, \{x, y\}) \mp \pi \quad (9a)$
$ang(\{kx, ky\}, \mathbf{0}) = ang(\{x, y\}, \mathbf{0}) \quad (10)$	$ang(\{kx, ky\}, \mathbf{0}) = ang(\{x, y\}, \mathbf{0}) \mp \pi \quad (10a)$
$ang(\mathbf{0}, \{x, \frac{y}{k}\}) = ang(\mathbf{0}, \{kx, y\}) \quad (11)$	$ang(\mathbf{0}, \{x, \frac{y}{k}\}) = ang(\mathbf{0}, \{kx, y\}) \mp \pi \quad (11a)$

Табл.3.

Таким образом, если  $ang(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = ang(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4)$ , то  $\frac{P_{2y} - P_{1y}}{P_{2x} - P_{1x}} = \frac{P_{4y} - P_{3y}}{P_{4x} - P_{3x}}$ , и

обратно, если  $\frac{P_{2y} - P_{1y}}{P_{2x} - P_{1x}} = \frac{P_{4y} - P_{3y}}{P_{4x} - P_{3x}}$ , то  $ang(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = ang(\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_4) + n\pi$ .

### 7°. Угол и точка на единичной окружности

Формулы (9) и (9a) для неполной функции  $ang()$  говорят о том, что **каждому направлению можно с точностью до постоянного положительного коэффициента  $k$  поставить в соответствии пару чисел  $x, y$ , одновременно не равных 0**. С учетом этой оговорки, заметим, что любую пару действительных чисел можно интерпретировать как

$$\{x, y\} = \sqrt{x^2 + y^2} \left\{ \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right\} = k \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}, \quad \text{где } k = \sqrt{x^2 + y^2} -$$

коэффициент нормирования. В данном случае коэффициент  $k$  можно интерпретировать как радиус в полярных координатах.

### 8°. Тригонометрическое представление функции $ang()$

Пусть  $\cos \varphi > 0$ . Используя (9) и (2), можем сократить на  $k$  (геометрически это означает переход к единичной окружности). Тогда имеем

$$\psi = ang(\mathbf{0}, \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}) = ang(\mathbf{0}, \{ 1, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \}) = ang(\mathbf{0}, \{ 1, \tan \varphi \}) = \varphi. \quad \text{Отсюда } \psi = \varphi \text{ и}$$

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi, \sin \varphi\}). \quad (12)$$

Предлагаем читателю убедиться в справедливости этого свойства для случая  $\cos \varphi \leq 0$ . Далее проверьте (12) с помощью различных по направлению векторов  $\{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ . При этом важно, чтобы длина этих векторов не была нулевой.

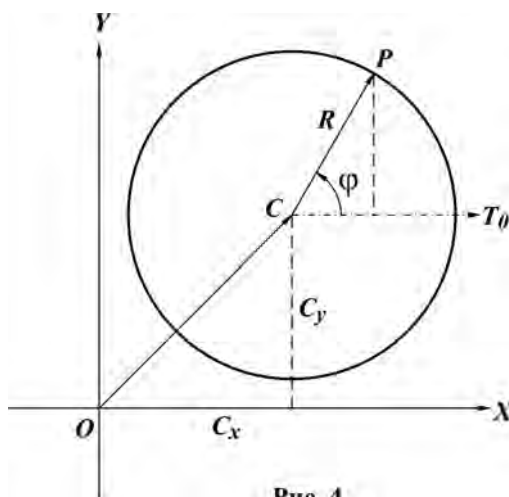


Рис. 4

**Замечание 1.** В некотором смысле получен действительный аналог известной формулы Эйлера<sup>1</sup> для комплексной плоскости  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Однако, как уже было сказано, только специальные исследования на эту тему могут установить степень подобия/различия этих формул.

**Замечание 2.** Зная значение только  $\cos \varphi$  (например, из известного соотношения о скалярном произведении  $ab = |a||b|\cos \varphi$ ), можно найти угол  $\varphi$  только в интервале  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Интерпретируем найденный угол как некоторый угол треугольника. Т.к.  $\sin \varphi = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \varphi}$ , то расширим наши возможности: добавляя информацию о знаке  $\sin \varphi$  к значению  $\cos \varphi$ , получим углы направлений уже  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  (докажите!). Поскольку уравнение  $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$  симметрично относительно  $\cos \varphi, \sin \varphi$ , то сказанное годится и для  $\sin \varphi$ : зная значение  $\sin \varphi$  и знак  $\cos \varphi$ , можно найти любое направление из  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . □

В тригонометрическом представлении **функция  $\text{ang}()$  является возрастающей функцией от аргумента на интервале  $[0, 2\pi)$** . Т.е., если  $\delta > 0, 0 \leq \varphi_0 + \delta < 2\pi$ , то  $\text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}) < \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(\varphi_0 + \delta), \sin(\varphi_0 + \delta)\})$ . (12\*)

<sup>1</sup> Леонард Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т.1. ОНТИ, М., Л., 1936, - стр.353, п.138

(На языке анализа суперпозиции функции от функций называются сложными [24, стр.115].)

Пойдем дальше. Применим (9)

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{R \cos \varphi, R \sin \varphi\}), R > 0. \quad (13)$$

Пример. Пользуясь (13), можно решать, например, следующий тип уравнений: дано  $\varphi$  и третий параметр  $x_1$  в выражении  $\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1, y_1\})$ ; найти четвертый параметр  $y_1$ .

$$\text{Решение. } R = \frac{x_1}{\cos \varphi}, \cos \varphi = \frac{x_1}{R}, y_1 = R \sin \varphi = sR \sqrt{1 - \left(\frac{x_1}{R}\right)^2},$$

где  $s > 0$  при  $0 \leq \varphi < \pi$  и  $s < 0$  при  $\pi < \varphi < 2\pi$ . □

Покажем наиболее общий вариант тригонометрического представления функции направления (см.рис.4)

$$\varphi = \text{ang}(\{C_x, C_y\}, \{R \cos \varphi + C_x, R \sin \varphi + C_y\}). \quad (14)$$

### 9°. Сумма (разность) поворотов относительно центра координат

Найдем сумму углов  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ . Тогда  $\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(\varphi_1 + \varphi_2), \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\}) =$

$$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2, \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2\}) =$$

$$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{R_1 \cos \varphi_1 R_2 \cos \varphi_2 - R_1 \sin \varphi_1 R_2 \sin \varphi_2, R_1 \sin \varphi_1 R_2 \cos \varphi_2 + R_1 \cos \varphi_1 R_2 \sin \varphi_2\}).$$

Сделаем замену  $(R_i \cos \varphi_i \rightarrow x_i, R_i \sin \varphi_i \rightarrow y_i)_{i=1,2}$ . Теперь

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1 x_2 - y_1 y_2, x_2 y_1 + x_1 y_2\}) \quad (15)$$

(ср. [16, §40, (1)-(3)]).

Аналогично для разности углов  $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1 x_2 + y_1 y_2, x_2 y_1 - x_1 y_2\}). \quad (16)$$

Замечание: у параметров 3 и 4 есть общий множитель  $R_1 R_2$ . □

**Абсолютную разность двух углов** найдем, с учетом (4)

$$|\varphi_1 - \varphi_2| = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1 x_2 + y_1 y_2, |x_2 y_1 - x_1 y_2|\}). \quad (17)$$

Упражнение 6. Пусть вершина угла находится в начале координат  $P_2 : \{0,0\}$ , а две другие точки на лучах находятся, соответственно, в  $P_1 : \{1,0\}$  и  $P_3 : \{1,1\}$ . Постройте чертеж и найдите  $\angle P_3 P_2 P_1$ .

Решение. Вначале найдем компоненты векторов разностей

$\Delta_{x32} = 1, \Delta_{y23} = 1, \Delta_{x12} = 1, \Delta_{y12} = 0$ . Теперь находим искомый угол

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{ang}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) - \text{ang}(\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_1) = \text{ang}(\mathbf{O}, \{\Delta_{x32}, \Delta_{y32}\}) - \text{ang}(\mathbf{O}, \{\Delta_{x12}, \Delta_{y12}\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{O}, \{\Delta_{x32}\Delta_{x12} + \Delta_{y32}\Delta_{y12}, \Delta_{y32}\Delta_{x12} - \Delta_{x32}\Delta_{y12}\}) = \text{ang}(\mathbf{O}, \{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0, 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{O}, \{1, 1\}) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

### 10°. Повороты на углы $\pm \frac{\pi}{2}$

Пусть  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{x_1, y_1\})$ . Найдем  $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ .

Используя (13)  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{x_1, y_1\}) + \text{ang}(\mathbf{O}, \{0, 1\}) = \text{ang}(\mathbf{O}, \{-y_1, x_1\})$

Упражнение 7. Пусть  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{x_1, y_1\})$ . Найти  $\varphi_2 = \varphi_1 - \frac{\pi}{2}$ .

Ответ.  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{y_1, x_1\}) + \pi = \text{ang}(\mathbf{O}, \{y_1, -x_1\})$

Упражнение 8. Доказать, что **если скалярное произведение двух векторов равно 0, то эти векторы  $\perp$ . И наоборот, если векторы  $\perp$ , то их скалярное произведение равно 0.**

Доказательство. 1-я часть. Дано  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$  и  $x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ . Отсюда  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{x_1, y_1\})$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{x_2, y_2\})$ . Используя (16) имеем  $\varphi_1 - \varphi_2 =$

$$= \text{ang}(\mathbf{O}, \{x_1x_2 + y_1y_2, x_2y_1 - x_1y_2\}) = \text{ang}(\mathbf{O}, \{0, x_2y_1 - x_1y_2\}) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x_2y_1 - x_1y_2 > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x_2y_1 - x_1y_2 < 0 \end{cases}. \quad (18)$$

Предоставляем доказать 2-ю часть читателю.

Упражнение 9. Доказать, что если 1)  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{x, y\})$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{y, x\})$ ,

$$\text{то } \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{\pi}{2}. \quad (19)$$

Доказательство.  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{O}, \{xy - xy, x^2 + y^2\}) = \text{ang}(\mathbf{O}, \{0, x^2 + y^2\})$ .

Получено  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta y > 0$ , что соответствует 2-й колонке табл.1 - углу  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ .  $\square$

**Следствие.** Из (19) следует  $\text{ang}(\mathbf{O}, \{x, y\}) = \frac{\pi}{2} - \text{ang}(\mathbf{O}, \{y, x\})$ .

(19а)

Пример.  $\frac{\pi}{6} = \text{ang}(\mathbf{O}, \{\sqrt{3}, 1\})$ ,  $\frac{\pi}{3} = \text{ang}(\mathbf{O}, \{1, \sqrt{3}\})$ ,  $\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}$  или

$$60^\circ = 90^\circ - 30^\circ.$$

**11°. Формулы угла n-кратных аргументов (n=2,3,4)**

Найти  $\varphi_1 = 2\varphi$ .

Решение. Из (13)  $\varphi_1 = 2 \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, 2 \cos \varphi \sin \varphi\}) =$   
 $= \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x^2 - y^2, 2xy\})$ . (20)

*Замечание.* Обратим внимание, что параметры в (20) однородны, т.е. если подставить вместо  $\cos \varphi \rightarrow k \cos \varphi$ ,  $\sin \varphi \rightarrow k \sin \varphi$ , то (20) будет также справедливо.

Найти  $\varphi_1 = 3\varphi$ .

Решение. Из  $\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi$ ,  $\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$  получаем  
 $\varphi_1 = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{\sin 3\varphi, \cos 3\varphi\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi\})$ . (21)

*Замечание.* В данном случае 3-й и 4-й параметры  $\operatorname{ang}()$  неоднородны  $\varphi_1(\cos \varphi, \sin \varphi) \neq \varphi_1(k \cos \varphi, k \sin \varphi)$  и перед вычислением эти параметры необходимо нормировать

$$\cos^2 3\varphi + \sin^2 3\varphi = \cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1.$$

Найти  $\varphi_1 = 4\varphi$ .

Решение. Аналогично предыдущей формуле  $\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1$ ,  
 $\sin 4\varphi = 8 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin \varphi$ . Таким образом,

$$4\varphi = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1, 8 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin \varphi\})$$
. (22)

*Замечание.* И в данном случае 3-й и 4-й параметры  $\operatorname{ang}()$  неоднородны и их также необходимо нормировать (см. предыдущее замечание).

**12°. Формула угла половинного аргумента**

Пусть  $\varphi_0 = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x_0, y_0\})$ . Найти  $\varphi_1 = \frac{1}{2} \varphi_0$ . Предположим, что искомым углом будет  $\varphi_1 = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})$ . Тогда из (20) и, используя однородность данной формулы, получаем  $\varphi_0 = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x^2 - y^2, 2xy\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x_0, y_0\})$ . Запишем систему

уравнений  $\begin{cases} x^2 - y^2 = x_0 \\ 2xy = y_0 \end{cases}$  и решаем ее  $x = \frac{y_0}{2y}$ ,  $x^2 = \frac{y_0^2}{4y^2}$ ,  $\frac{y_0^2}{4y^2} - y^2 = x_0$ ,

$$4y^4 + 4x_0y^2 - y_0^2 = 0.$$

Получено биквадратное уравнение. Сделаем замену  $y = t^2$  и продолжим решение  $4t^2 + 4x_0t - y_0^2 = 0$ ,  $t_{1,2} = \frac{1}{4}(-2x_0 \pm \sqrt{4x_0^2 + 4y_0^2}) = \frac{1}{2}(-x_0 \pm \sqrt{x_0^2 + y_0^2})$ .

Т.к.  $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} \geq x_0$ , то перед корнем берем только знак "+". Отсюда  $x = \frac{\pm y_0}{2(\sqrt{\frac{1}{2}(-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})})}$ ,  $y = \pm \sqrt{\frac{1}{2}(-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}$ . Применяя (9), умножаем  $x, y$

на положительный коэффициент  $k = \sqrt{\frac{1}{2}(-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})}$ .

За счет знаков  $\pm$  получено 4 варианта решений. Но, нужно следить за тем, чтобы знак у произведения  $xy$  всегда совпадал со знаком  $y_0$ . Если нет других условий (например, искомый угол находится в определенном квадранте), то оставляем ниже только 2 возможных решения из 4

$$\varphi_{1,2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\pm y_0, \pm(-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2})\}). \quad (23)$$

Справедливо, также  $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$  и  $2\varphi_2 = 2\varphi_1 + 2\pi = \varphi_0$ .

Докажите, что  $-x_0 + \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0$ .  $\square$

Пример. Найдём представление угла  $\frac{\pi}{12}$  ( $15^\circ$ ) через функцию

$$\begin{aligned} &\text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}). \text{ Для этого возьмем } x_0 = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, y_0 = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}. \text{ Тогда } \frac{\pi}{12} (15^\circ) = \\ &= \varphi_1 = \text{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{3+1}{4}}\right\}\right) = \text{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2} + 1\right\}\right) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, 2 - \sqrt{3}\}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{Решим этот пример другим способом. Т.к. } 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ, \text{ то } 15^\circ = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(45^\circ - 30^\circ), \sin(45^\circ - 30^\circ)\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{6} + \sqrt{2}, \sqrt{6} - \sqrt{2}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{2, 3 - 2\sqrt{3} + 1\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, 2 - \sqrt{3}\}). \square \end{aligned}$$

Рассмотрим задачу: найти все углы, которые при умножении на  $n$  давали бы исходный угол  $\varphi$ . Т.к.  $\varphi$  задается с точностью до  $2\pi$ , то можем сразу написать ответ  $\psi_i = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{\cos\left(\frac{\varphi + i \cdot 2\pi}{n}\right), \sin\left(\frac{\varphi + i \cdot 2\pi}{n}\right)\right\}), i = 0, 1, \dots, n-1$ . Отсюда следует, что данная задача имеет  $n$  решений. Опытный читатель обратил



внимание, что приведенная формула похожа на формулу извлечения корня  $n$ - степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме. Автор формулы для комплексных чисел – английский математик Муавр (Abraham de Moivre (1667-1754)), родившийся во Франции.

*Замечание.* Использование (21) с целью вычисления меньшего угла по известному большему углу (делению угла на 3 равных угла - трисекция угла) приводит к кубическому уравнению. К кубическому уравнению приводит, также, родственная задача (и математически, и исторически) – удвоение куба. Для получения действительных корней в некоторых случаях приходится извлекать радикалы из комплексных выражений [14, стр.234-238].

Интересно, что эти задачи имеют очень древнюю историю. Ими занимались Евклид, Архимед, Аполлоний и др. Причем древние ученые применяли для решения этих задач, как специальные механизмы, так и кривые высших порядков. Архимед, в частности, делил угол с помощью двусторонней линейки. А вот использовать для решения этих задач только циркуль и одностороннюю линейку иногда приводит к неразрешимым проблемам. Например, только с помощью этих инструментов нельзя разделить угол  $60^\circ$  на три равных части.

Выяснить, что можно построить такими простыми средствами, а что нельзя, удалось только юному К.Ф.Гауссу в 1796 г. за месяц до своего 19-летия, о чем он сделал запись в своем дневнике. Подробности прекрасно изложены в [2, глава VIII], [3, глава VII], [7, стр.88], [13, глава III].

## 13°. Часто используемые углы

Град.	Рад.	$ang()$	Град.	Рад.	$ang()$
0°	0	$ang(\mathbf{0}, \{1, 0\})$			
30°	$\frac{\pi}{6}$	$ang(\mathbf{0}, \{\sqrt{3}, 1\})$	210°	$\frac{7\pi}{6}$	$ang(\mathbf{0}, \{-\sqrt{3}, -1\})$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$ang(\mathbf{0}, \{1, 1\})$	225°	$\frac{5\pi}{4}$	$ang(\mathbf{0}, \{-1, -1\})$
60°	$\frac{\pi}{3}$	$ang(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{3}\})$	240°	$\frac{4\pi}{3}$	$ang(\mathbf{0}, \{-1, -\sqrt{3}\})$
90°	$\frac{\pi}{2}$	$ang(\mathbf{0}, \{0, 1\})$	270°	$\frac{3\pi}{2}$	$ang(\mathbf{0}, \{0, -1\})$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	$ang(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{3}\})$	300°	$\frac{5\pi}{3}$	$ang(\mathbf{0}, \{1, -\sqrt{3}\})$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	$ang(\mathbf{0}, \{-1, 1\})$	315°	$\frac{7\pi}{4}$	$ang(\mathbf{0}, \{1, -1\})$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	$ang(\mathbf{0}, \{-\sqrt{3}, 1\})$	330°	$\frac{3\pi}{4}$	$ang(\mathbf{0}, \{\sqrt{3}, -1\})$
180°	$\pi$	$ang(\mathbf{0}, \{-1, 0\})$	360°	$2\pi$	$ang(\mathbf{0}, \{1, 0\})$

Табл. 4.

Упражнение 10. Дано  $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ ,  $R_1 = 1$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $R_2 = 2$ . Найти  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Решение  $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ ,  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ ,  $x_1 = \frac{1}{2}$ ,  $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_2 = 0$ ,  
 $y_2 = 2$ ,  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = ang(\mathbf{0}, \{\frac{1}{2} \cdot 0 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2, \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\}) = ang(\mathbf{0}, \{-\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2, \frac{1}{2} \cdot 2\}) =$   
 $= ang(\mathbf{0}, \{-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\}) = \frac{5}{6}\pi$ .

Упражнение 11. Дано  $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $R_1 = 3$ ,  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{3}$ ,  $R_2 = 2$ . Найти  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ .

Решение  $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ ,  $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ ,  $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $x_1 = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ ,  
 $y_1 = \frac{3}{2}$ ,  $x_2 = 1$ ,  $y_2 = -\sqrt{3}$ ,  $\varphi = ang(\mathbf{0}, \{\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2} \cdot 1 - \frac{3\sqrt{3}\sqrt{3}}{2}\}) = ang(\mathbf{0}, \{3\sqrt{3}, -3\}) =$

$$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{3}, -1\}) = \frac{11}{6}\pi \text{ (или } -\frac{\pi}{6}\text{)}.$$

Упражнение 12. Доказать, что  $\varphi = \pi - \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-x, y\})$ . (24)

### 1° вариант

Доказательство. Из (3а), (7)

$$\varphi = \pi - \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) = \pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, -y\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-x, y\}). \square$$

### 2° вариант

Доказательство. Из (3а), (15)

$$\begin{aligned} \varphi &= \pi - \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) = \pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, -y\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \pi, \sin \pi\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, -y\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{x \cos \pi + y \sin \pi, -y \cos \pi + x \sin \pi\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-x, y\}). \square \end{aligned}$$

Упражнение 13. Убедиться в правильности формулы двойного аргумента для  $\varphi = -\frac{\pi}{3}$ .

$$\begin{aligned} \text{Решение. Действительно } 2\left(-\frac{\pi}{3}\right) &= 2 \cdot \text{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}\right) = \\ &= \text{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2, 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}\right) = \text{ang}\left(\mathbf{0}, \{-1, -\sqrt{3}\}\right) = -\frac{2\pi}{3} \square \end{aligned}$$

Упражнение 14. Выразить через функцию  $\text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})$  угол  $\frac{5\pi}{12}$  ( $75^\circ$ ).

$$\text{Ответ. } \frac{5\pi}{12} (75^\circ) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{2 - \sqrt{3}, 1\})$$

Указание. Воспользуйтесь  $\frac{\pi}{12} (15^\circ) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, 2 - \sqrt{3}\})$  и (15а).

Упражнение 15. Используя формулы n-кратных аргументов, доказать, что

$$\frac{\pi}{2} = 3 \frac{\pi}{6}.$$

Упражнение 16. Используя формулы n-кратных аргументов доказать, что

$$\frac{2\pi}{3} = 4 \frac{\pi}{6}.$$

Упражнение 17. Доказать, что:

$$1) \text{ для любых } \varphi \text{ справедливо } 0 \leq \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi, |\sin \varphi|\}) \leq \pi; \quad (25)$$

$$2) \text{ два угла } \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) \text{ и } \text{ang}(\mathbf{0}, \{-x, y\}) \text{ дополнены до } \pi; \quad (26)$$

$$3) \text{ угол дополнения до } 2\pi \quad 2\pi - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi, \sin \varphi\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi, -\sin \varphi\}). \quad (27)$$

Упражнение 18. Свойство  $\parallel$  векторов. Доказать, что если  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1, y_1\})$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_2, y_2\})$  и  $x_1 y_2 - x_2 y_1 = 0$ , то либо  $\varphi_1 = \varphi_2$ , либо  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \pi$ . (28)

Упражнение 19. Найти абсолютную величину разности углов между двумя векторами, причем из двух смежных углов, которые получаются при этом, взять наименьший угол.

Решение. Пусть  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1, y_1\})$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_2, y_2\})$ . Сначала ищем угол, не зависящий от порядка расположения прямых, и поэтому пользуемся (17).

Если  $x_1x_2 + y_1y_2 \geq 0$ , то  $\xi = |\varphi_1 - \varphi_2| = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1x_2 + y_1y_2, |x_2y_1 - x_1y_2|\}) \leq \frac{\pi}{2}$  - найден искомый угол. Иначе, если  $x_1x_2 + y_1y_2 < 0$ , то найдем смежный угол  $\xi > \frac{\pi}{2}$ . Для того, чтобы в этом случае вычислить искомый угол, необходимо

$$\xi' = \pi - \xi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1x_2 + y_1y_2, |x_2y_1 - x_1y_2|\}) = \pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_1x_2 + y_1y_2, -|x_2y_1 - x_1y_2|\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(x_1x_2 + y_1y_2), |x_2y_1 - x_1y_2|\}).$$

$$\text{Окончательно } \min(\varphi_1 - \varphi_2) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|x_1x_2 + y_1y_2|, |x_2y_1 - x_1y_2|\}). \quad (29)$$

(Ср. [11, (2.3-5)]).

Очевидно, что

$$\text{ang}(\mathbf{0}, \{|kx|, |ky|\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|x|, |y|\}) \text{ при любом знаке } k \text{ и если } k \neq 0. \quad (30)$$

Формулу (29) нужно применять только в том случае, если из внешних условий известно, что исследуемый угол острый.

Упражнение 20. Доказать аналитически теорему Фалеса (Thales of Miletus (~624 до н.э. - ~546 до н.э.)), известную из школьного курса геометрии: **угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги на которую опирается** (см.рис.5).

(Предполагаем, что читатель понимает смысл глагола “ измеряется”.)

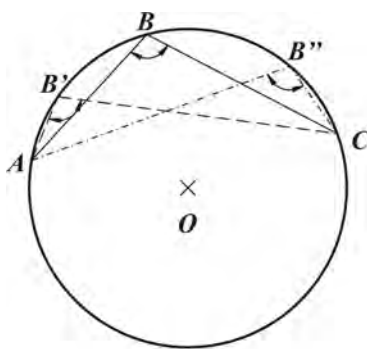


Рис. 5

Доказательство. Возьмем на окружности 3 несовпадающие точки  $A, B, C$ . Пусть  $B$  будет вершиной угла, а на противоположной стороне окружности по отношению к  $B$  находится  $\cup AC$ , на которую опирается  $\angle ABC$ . Нужно доказать, что располагая  $B$  произвольно на  $\cup ABC$ , :

1) вписанный  $\angle B$  не изменяется;

2) он измеряется  $\frac{1}{2} \cup AC$ .

Для начала нормируем интервал  $(\varphi_1, \varphi_2)$  (см.1.2.1.3.2°), чтобы всегда  $\varphi_1 < \varphi_2$ . Определим координаты точек

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{A}:r\{\cos \varphi_1, \sin \varphi_1\}, \mathbf{B}:r\{\cos \varphi, \sin \varphi\}, \mathbf{C}:r\{\cos \varphi_2, \sin \varphi_2\}. \text{ Имеем} \\
 \angle B &= |\text{ang}(\mathbf{B}, \mathbf{A}) - \text{ang}(\mathbf{B}, \mathbf{C})| = |\text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_2 - \cos \varphi, \sin \varphi_2 - \sin \varphi\}) - \\
 & - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_1 - \cos \varphi, \sin \varphi_1 - \sin \varphi\})| = \\
 &= \left| \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ -\sin \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2}, \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} \right\}) - \right. \\
 & \left. - \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ -\sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2}, \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \right\}) \right| = \\
 &= \left| \text{ang}(\mathbf{0}, \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2} \left\{ \sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} + \cos \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi}{2}, \right. \right. \\
 & \left. \left. \sin \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} - \sin \frac{\varphi_2 + \varphi}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \right\} \right| = \\
 &= \text{ang}(\mathbf{0}, \sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2} \left\{ \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \left| \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right| \right\}). \quad (*)
 \end{aligned}$$

В последнем преобразовании использовано (16). Упростим (\*). Поскольку  $\mathbf{B}$  находится вне интервала  $(\mathbf{A}, \mathbf{C})$  и, следовательно,  $\varphi \notin (\varphi_1, \varphi_2)$ , то имеем только 2 варианта: или  $\varphi < \varphi_1$ , или  $\varphi > \varphi_2$ . Отсюда всегда  $(\varphi_1 - \varphi)(\varphi_2 - \varphi) > 0$  и всегда  $\sin \frac{\varphi_1 - \varphi}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi}{2} > 0$ . Т.к.  $\varphi_2 > \varphi_1$ , то

$$\angle B = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right\}). \quad (31)$$

**Частный случай.** Если  $\angle B$ - опирается на диаметр (Фалес), то вписанный в окружность угол прямой. Действительно:  $\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = 0$  и, следовательно,  $\angle B = \frac{\pi}{2}$ . И обратно: если вписанный в окружность угол прямой, то он опирается на диаметр (докажите!).□

*Замечание.* (31) не зависит от  $\varphi$  (от положения  $\mathbf{B}$  на  $\cup ABC$ .)

Упражнение 21. Доказать, что две неполных функции  $\text{ang}()$ , отличающиеся друг от друга только знаком у 3-го параметра, являются дополнительными до  $\pi$ .

$$\begin{aligned}
 & \text{Доказательство. В самом деле } \text{ang}(\mathbf{0}, \{-x, y\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) = \\
 &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-x^2 - y^2, xy - xy\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(x^2 + y^2), 0\}) = \pi.
 \end{aligned}$$

Упражнение 22. Доказать, что сумма двух неполных функций  $ang()$ , отличающихся друг от друга только знаком у 4-го параметра равна 0.

### 1.2.2. Обратные тригонометрические функции, выраженные через функцию $ang()$

Выскажем замечание общего характера. В том случае, если решается задача нахождения углов только с применением функции  $ang()$ , то не нужно отслеживать область определения и изменения решения – это получается автоматически. Собственно говоря, в этом и состоит преимущество  $ang()$ .

Если же  $ang()$  используется для решения задач, в которых применяются классические обратные тригонометрические функции, то при переводе этих функций в  $ang()$  и обратно нужно быть очень внимательным и постоянно следить за областью определения и изменения. Но и в этом случае применение  $ang()$  считаем продуктивным.

#### 1<sup>o</sup>. $\arccos(x)$

Пусть  $\arccos(x) = \alpha$ , область определения  $x \in [-1, 1]$ , область изменения  $\alpha \in [0, \pi]$  (1-й и 2-й квадрант). Тогда  $\cos \alpha = x$ ,  $\sin \alpha = \sqrt{1-x^2}$ . Знак "+" у корня потому, что при  $\alpha \in [0, \pi]$   $\sin \alpha \geq 0$ . Учитывая (1.2.1.-12),

$$\arccos(x) = ang(0, \{x, \sqrt{1-x^2}\}) . \quad (1)$$

Докажем, что  $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$ . Действительно, из (1.2.1.- 24)

$$\arccos(-x) = ang(0, \{-x, \sqrt{1-x^2}\}) = \pi - ang(0, \{x, \sqrt{1-x^2}\}) = \pi - \arccos(x) .$$

Отметим, что найдено взаимно-однозначное преобразование  $\arccos() \leftrightarrow ang()$  на верхней полуплоскости единичного круга – в 1 и 2 квадрантах (область определения  $\arccos()$ ).

Упражнение 1. Вычислить  $\arccos \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

Решение. Т.к.  $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ , то область значений  $\arccos()$  принадлежит 1-му квадранту. Из (1) получаем

$$ang(0, \{\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{1-\frac{3}{4}}\}) = ang(0, \{\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\}) = ang(0, \{\sqrt{3}, 1\}) = \frac{\pi}{6} \text{ (см. 1.2.1. таблицу 4).}$$

Упражнение 2. Доказать [17,XXVIII,5б], что  
 $2 \arccos x = \arccos(2x^2 - 1), 0 \leq x \leq 1.$

Доказательство. Т.к.  $2x^2 - 1 \leq 1$ , то значения и левой и правой части равенства принадлежат 1-му квадранту. Преобразуем левую часть равенства

$$2 \arccos x = 2 \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, \sqrt{1-x^2}\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x^2 - 1 + x^2, 2x\sqrt{1-x^2}\}) = \\ = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{2x^2 - 1, 2x\sqrt{1-x^2}\}).$$

Преобразуем правую часть равенства

$$\arccos(2x^2 - 1) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, 2x^2 - 1, \sqrt{1 - (2x^2 - 1)^2}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, 2x^2 - 1, \sqrt{1 - 4x^4 + 4x^2 - 1})^2 = \\ = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{2x^2 - 1, 2x\sqrt{1-x^2}\}).$$

Как видно, левая и правая части равенства совпадают.

Упражнение 3. Доказать [17,XXVIII,6б], что  
 $\frac{1}{2} \cdot \arccos x = \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}, 0 \leq x \leq 1.$

Доказательство. Преобразуем равенство  $\arccos x = 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}$ . И левая, и правая части равенства находятся в 1-м квадранте.

$$\text{Левая часть } \arccos x = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, \sqrt{1-x^2}\}). \quad \text{Правая часть } 2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \\ = 2 \operatorname{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \sqrt{1-\frac{1+x}{2}}\right\}\right) = 2 \operatorname{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{\sqrt{\frac{1+x}{2}}, \sqrt{\frac{1-x}{2}}\right\}\right) = 2 \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1+x}, \sqrt{1-x}\}) = \\ = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{1+x-1+x, 2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{2x, 2\sqrt{1-x^2}\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, \sqrt{1-x^2}\}).$$

Части равенства совпадают.

## 2<sup>o</sup>. arcsin(x)

Пусть  $\arcsin(x) = \alpha$ , область определения  $x \in [-1, 1]$ , область изменения  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ . Тогда  $\sin \alpha = x$ ,  $\cos \alpha = \sqrt{1-x^2}$ . Знак "+" у корня потому, что при  $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ,  $\cos \alpha \geq 0$ . Учитывая (1.2.1.-12),  $\arcsin(x) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-x^2}, x\})$ . (2)

Таким образом, найдено взаимно-однозначное преобразование  $\arcsin() \leftrightarrow \operatorname{ang}()$  в 1 и 4 квадрантах единичного круга (правая полуплоскость).

Докажем, что  $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$ . В самом деле

$$\arcsin(-x) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-x^2}, -x\}) = -\text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-x^2}, x\}) = -\arcsin(x) \quad (\text{см. 1.2.1.-3}).$$

Упражнение 2. Доказать, что  $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$ .

Доказательство. Из (1), (2), (1.2.1.-15) получаем

$$\begin{aligned} \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, \sqrt{1-x^2}\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-x^2}, x\}) &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{x\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}x, \\ \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2} - x^2\}) &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}) = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Упражнение 3. Доказать, что  $\pi - \arcsin \alpha = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{1-\alpha^2}, \alpha\})$ .

Упражнение 4. Доказать [17, XXVIII,40], [10, стр. 333, пример 2]

$$\arcsin \frac{4}{5} + \arcsin \frac{5}{13} + \arcsin \frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}.$$

### 3°. $\text{arctg}(x)$

Пусть  $\text{arctg}(x) = \alpha$ , область определения  $x \in [-\infty, \infty]$ , область изменения.

$\alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  ( в отличие от общепринятой записи, здесь включены значения

$-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$  в область определения). На этих интервале  $\text{arctg}(x) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, x\})$ . (3)

(См. 1.2.1.табл.1 и 2 и 1.2.1. упр.2). Для варианта, когда аргумент  $\text{arctg}(t)$

выражен в виде дроби  $t = \frac{y}{x}$  и  $x \geq 0$ , в силу (1.2.1.-9)

$$\text{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}). \quad (4)$$

Докажем, что  $\text{arctg}(-x) = -\text{arctg}(x)$ . Из (1.2.1.-3)

$$\text{arctg}(-x) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, -x\}) = -\text{ang}(\mathbf{0}, \{1, x\}) = -\text{arctg}(x).$$

Как ранее выяснено, в 1 и 4 квадрантах значения  $\text{arctg}()$  и  $\text{ang}()$  совпадают (как при прямом преобразовании  $\text{arctg}() \rightarrow \text{ang}()$ , так и при обратном  $\text{ang}() \rightarrow \text{arctg}()$ ).

Упражнение 5. Доказать, что  $\text{arctg} \frac{1}{3} + \text{arctg} \frac{1}{5} + \text{arctg} \frac{1}{7} + \text{arctg} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$ . (Ср. [10, стр. 334, пример 4]).

Доказательство. Заметим, что все слагаемые находятся в 1 квадранте, где  $\text{ang}()$  и  $\text{arctg}()$  совпадают. Будем складывать слагаемые последовательно



$ang(\mathbf{0},\{3,1\}) + ang(\mathbf{0},\{5,1\}) = ang(\mathbf{0},\{7,4\})$ ,  $ang(\mathbf{0},\{7,4\}) + ang(\mathbf{0},\{7,1\}) = ang(\mathbf{0},\{9,7\})$ ,  
 $ang(\mathbf{0},\{9,7\}) + ang(\mathbf{0},\{8,1\}) = ang(\mathbf{0},\{1,1\}) = \frac{\pi}{4}$ . (Решение также не вышло за  
 границы 1-го квадранта.)  $\square$

Упражнение 6. Доказать, что  $\frac{\pi}{4} = 4arctg \frac{1}{5} - arctg \frac{1}{239}$  (Дж.Мэчин 1706 г.  
 (Machin J. 1680 -1751)) [7, стр.148], [17, стр.331,(26,б)].

Доказательство. Выражаем  $arctg()$  через  $ang()$  и нормируем параметры

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= arctg \frac{1}{5} = ang\left(\mathbf{0}, \left\{ \frac{5}{\sqrt{1^2+5^2}}, \frac{1}{\sqrt{1^2+5^2}} \right\}\right) = ang\left(\mathbf{0}, \left\{ \frac{5}{\sqrt{26}}, \frac{1}{\sqrt{26}} \right\}\right), \\ 4\varphi_1 &= ang\left(\mathbf{0}, \left\{ 8 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^4 - 8 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^2 + 1, 8 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right)^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} - 4 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \right\}\right) = \\ &= ang\left(\mathbf{0}, \left\{ \frac{8 \cdot 625}{26^2} - \frac{8 \cdot 25}{26} + 1, \frac{8 \cdot 125}{26^2} - \frac{4 \cdot 5}{26} \right\}\right) \\ &= ang\left(\mathbf{0}, \left\{ \frac{8 \cdot 625 - 8 \cdot 25 \cdot 26 + 26^2}{26^2}, \frac{8 \cdot 125 - 4 \cdot 5 \cdot 26}{26^2} \right\}\right) = \\ &= ang(\mathbf{0},\{476,480\}) = ang(\mathbf{0},\{119,120\}), \\ \varphi &= \varphi_1 - \varphi_2 = ang(\mathbf{0},\{119,120\}) - ang(\mathbf{0},\{239,1\}) = \\ &= ang(\mathbf{0},\{119 \cdot 239 + 1 \cdot 120, 239 \cdot 120 - 119 \cdot 1\}) = ang(\mathbf{0},\{28561,28561\}) = ang(\mathbf{0},\{1,1\}) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Упражнение 7. Доказать, что  $2arctg 2 - arctg \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2}$  [17, стр.331,(26,а)].

#### $4^{\circ}$ . $arcctg(x)$

Пусть  $arcctg(x) = \alpha$ , область определения  $x \in [-\infty, \infty]$ , область  
 изменения  $\alpha \in [0, \pi]$  (в отличие от общепринятой записи, здесь включены  
 значения  $0, \pi$  в область определения). Т.к.  $ctg \alpha = ctg(arcctg(x)) = x = \frac{1}{tg \alpha}$ , то

докажем, что  $arcctg(x) = ang(\mathbf{0},\{x,1\})$ . (5)

Доказательство. Для случая  $x > 0$  формула сомнений не вызывает.

Случай  $x = 0$  соответствует (1.2.1. табл.1, столбец 2).

Случай  $x < 0$  соответствует, с одной стороны (1.2.1. табл.2, столбец 2)  
 формуле  $\pi - ang(\mathbf{0},\{|x|,1\})$ , а с другой стороны, известно, что  
 $arcctg(-x) = \pi - arcctg x$ .  $\square$

Докажем другим способом, что  $\operatorname{arccotg}(-x) = \pi - \operatorname{arccotg}(x)$ . Из (1.2.1.- 24)

$$\operatorname{arccotg}(-x) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{-x, 1\}) = \pi - \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, 1\}) = \pi - \operatorname{arccotg}(x).$$

Если аргумент  $\operatorname{arccotg}(t)$  выражен в виде дроби  $t = \frac{p}{q}$  и  $p \geq 0$ , то из

(1.2.1.9)

$$\operatorname{arccotg}\left(\frac{p}{q}\right) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{p, q\}).$$

(6)

Таким образом, найдено взаимно-однозначное преобразование  $\operatorname{arccotg}() \leftrightarrow \operatorname{ang}()$  на верхней полуплоскости единичного круга – в 1 и 2 квадрантах (область определения  $\operatorname{arccotg}()$ ).

Упражнение 6. Доказать, что  $2\operatorname{arccotg}x = \operatorname{arccotg}\frac{x^2-1}{2x}$ ,  $x > 0$ .

Доказательство. Левая часть  $2\operatorname{arccotg}x = 2\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, 1\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x^2-1, 2x\})$ .

Правая часть  $\operatorname{arccotg}\frac{x^2-1}{2x} = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x^2-1, 2x\})$ . Части равенства равны.  $\square$

Упражнение 7. Доказать равенства:

$$1) \operatorname{arcsin}\frac{3}{5} + \operatorname{arcsin}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2};$$

$$2) \operatorname{arccos}\frac{1}{2} + \operatorname{arccos}\left(-\frac{1}{7}\right) - \operatorname{arccos}\left(-\frac{13}{14}\right) = 0;$$

$$3) \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} = \frac{3\pi}{4},$$

$$4) \operatorname{arctg}x + \operatorname{arccotg}x = \frac{\pi}{2},$$

$$5) \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arctg}5 \text{ [17, стр.331,(39)],}$$

$$6) 2\operatorname{arctg}\frac{1}{4} + \operatorname{arctg}\frac{7}{23} = \frac{\pi}{4} \text{ [17, стр.331,(38)].}$$

### 1.2.3. Прямые тригонометрические функции от функции $\operatorname{ang}()$

В левой колонке приведенной ниже табл.1 запишем формулы прямых основных тригонометрических функций, выраженных через  $\operatorname{arctg}(x)$  [10,стр.327-328], а в правой колонке вместо функции  $\operatorname{arctg}(x)$  используем неполную функцию  $\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})$

$tg(arctg x) = x, -\infty < x < +\infty$ (1)	$tg(ang(\mathbf{0},\{x,y\})) = \frac{y}{x}, x \neq 0, -\infty < y < +\infty$ (1a)
$\cos(arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, -\infty < x < +\infty$ (2)	$\cos(ang(\mathbf{0},\{x,y\})) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\infty < x, y < +\infty$ (2a)
$\sin(arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, -\infty < x < +\infty$ (3)	$\sin(ang(\mathbf{0},\{x,y\})) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\infty < x, y < +\infty$ (3a)
$ctg(arctg x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$ (4)	$ctg(ang(\mathbf{0},\{x,y\})) = \frac{x}{y}, y \neq 0, -\infty < x < +\infty$ (4a)

Табл.1

Напомним, что в неполной функции  $ang(\mathbf{0},\{x,y\})$  интерпретируем 3-й параметр  $x$  и 4-й параметр  $y$  как проекции соответственно на оси координат круга с центром в начале координат  $\{0,0\}$  и радиусом  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Для удобства доказательства, делим этот круг, как и единичный, на 4 квадранта и нумеруем квадранты от 1 до 4 против часовой стрелки.

Рассмотрим (1a). Нужно доказать, что у этой формулы правильное численное значение и правильный знак. Для начала заметим, что в 1-й и 4-й четверти  $arctg x = ang(\mathbf{0},\{1,x\})$ . Следовательно, значения тангенса от равных углов будет равны. Делаем подстановку  $x \rightarrow \frac{y}{x}$ . Т.к. в этих четвертях  $x > 0$ , то  $arctg \frac{y}{x} = ang(\mathbf{0},\{1,\frac{y}{x}\}) = ang(\mathbf{0},\{x,y\})$ . Проверим знаки в этих четвертях. В 1-й четверти  $y > 0$ , следовательно  $\frac{y}{x} > 0$ . Аналогично и в 4-й четверти. Делаем вывод для этих четвертей (1a) верна.

Рассмотрим (1a) во 2-й и 3-й четверти. Из (1.2.1.- табл.2, столбцы 2, 3) видим, что в этих четвертях  $ang() = \pi \mp \alpha$ , где  $\alpha = arctg \left| \frac{y}{x} \right|$ . Т.к.  $tg(\pi \mp \alpha) = \mp tg \alpha$ , то и здесь убеждаемся, что численное значение тангенса будет верно. Рассмотрим знаки. Очевидно, что знак  $\frac{y}{x}$  совпадает со знаком тангенса в этих четвертях.  $\square$

Рассмотрим (2а). Эта формула получена из (2) при подстановке  $x \rightarrow \frac{y}{x}$ .

Возьмем окружность радиуса  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . Внутри этой окружности (2а) можно интерпретировать, как отношение прилежащего катета  $x$  к гипотенузе  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , что соответствует определению  $\cos \varphi$ . Этим установлено, что наша формула дает правильное значение. Знак перед корнем берем "+", т.к. при  $x > 0$  (левая полуплоскость)  $\cos \varphi > 0$ , а при  $x < 0$  (правая полуплоскость)  $\cos \varphi < 0$ .

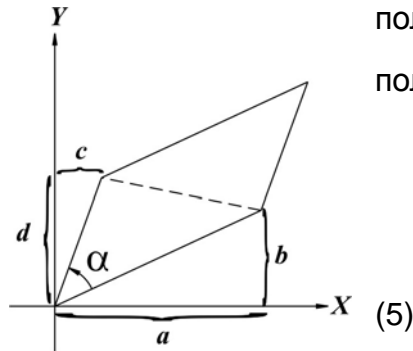


Рис. 1

Упражнение 1. Доказать (3а) и (4а).

Упражнение 2. Доказать, что  $\operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) = \operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{-x, -y\}))$ .

Действительно, из (1а)  $\operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) = \frac{y}{x}$ . С

другой стороны, используя  $\operatorname{tg}(x + \pi) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} \pi} = \operatorname{tg} x$ . Т.к.  $\operatorname{tg} \pi = 0$  и учитывая

(1.2.1.-6), имеем  $\operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{-x, -y\})) = \operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\}) + \pi) = \frac{y}{x}$ .

Упражнение 3. Найти площадь параллелограмма (см.рис.1).

Решение<sup>1</sup>. Разделим параллелограмм диагональю, несовпадающей с началом координат, на 2 равных треугольника. Тогда искомая площадь параллелограмма равна удвоенной площади одного из этих треугольников

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \alpha = \sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2} \sin \alpha. \quad (6)$$

$$\alpha = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{c, d\}) - \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{a, b\}) = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{ac + bd, ad - bc\}). \quad (7)$$

$$\text{Из (3а) } \sin \alpha = \frac{ad - bc}{\sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}} = \frac{ad - bc}{\sqrt{a^2 + b^2} \sqrt{c^2 + d^2}}. \quad (8)$$

Подставляем  $\sin \alpha$  в (6) и производим сокращения  $S = ad - bc = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ . □ (9)

Рассмотрим исследуемый треугольник и пусть в его вершинах находятся точки  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$ ,  $\{x_3, y_3\}$  в такой последовательности, что  $a = x_2 - x_1$ ,  $b = y_2 - y_1$ ,  $c = x_3 - x_1$ ,  $d = y_3 - y_1$  (см. рис.1). Тогда

<sup>1</sup> См. также В.И.Арнольд. Цепные дроби. М., МЦНМО, 2001, стр.10.

$$S = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Другая последовательность точек может вызвать изменение знака (10) (объясните!).

Чтобы 3 точки  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$ ,  $\{x_3, y_3\}$  лежали на одной прямой (в любой последовательности), необходимо и достаточно  $S = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$ . (11)

Упражнение 4. Докажите (10) и (11).

Рекомендация. Похожее доказательство можно найти в (1.4.5) или [16, §60].

#### 1.2.4. Геометрическая интерпретация функции $ang()$

Функция  $ang()$  определена, как отслеживающая некоторое направление. Докажем, что при перемещении одной или одновременно двух точек, определяющих эту функцию, вдоль исходной прямой, (если они не меняются местами или не сближаются до нулевого расстояния между ними) функция сохраняет свое значение.

*Доказательство.* Возьмем на прямой, описываемой уравнением  $y = kx + b$ , две точки с абсциссами  $x_1$  и  $x_2$ . Для определенности предполагаем, что  $x_2 > x_1$ . Рассмотрим отношение аргументов функции  $ang()$  (см. 1.2.1.-2) для этих точек

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{k(x_2 + b) - (kx_1 + b)}{x_2 - x_1} = k.$$

Теперь изменим абсциссы  $x'_1 = x_1 + C_1$ ,  $x'_2 = x_2 + C_2$ , но так, чтобы по-прежнему было  $x'_2 > x'_1$ . Это ограничение вызвано тем, чтобы не изменились знаки у компонентов вектора  $\{\Delta X, \Delta Y\}$ . Тогда из (1.2.1.-1) и (1.2.1.-2) следует

$$\frac{\Delta Y'}{\Delta X'} = \frac{y'_2 - y'_1}{x'_2 - x'_1} = \frac{(k(x_2 + C_2) + b) - (k(x_1 + C_1) + b)}{(x_2 + C_2) - (x_1 + C_1)} = k.$$

(Варианты, соответствующие табл. 1, т.е. такие, в которых направление вдоль прямой || оси абсцисс или ординат, также рассматриваются без особого труда).

Упражнение 1. Докажите следующие утверждения.

Пусть точки  $A$  и  $B$  расположены на прямой  $y = kx + b$ ,  $k \neq \infty$  таким образом, что  $B_x - A_x = \Delta_x > 0$ . Тогда  $ang(A, B) = ang(1, k)$ . (1)

Если на этой же прямой выполнено  $D_x - C_x = \Delta_x < 0$ , то  $ang(C, D) = ang(1, k) + \pi$ . (2)

Определение взаимного расположения 3-х точек  $A, B, C$  на прямой.

Среди задач на 3 точки выделим следующие 3 задачи с нарастанием сложности

- 1) лежат ли точки на одной прямой;
- 2) если ответ «да», то в какой последовательности они лежат;
- 3) если ответ на первый вопрос «да», то какое расстояние между точками, или в каком отношении одна из точек делит отрезок, если она лежит между двумя другими.

Займемся задачей 2).

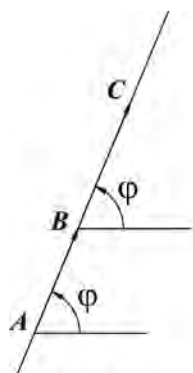


Рис.1

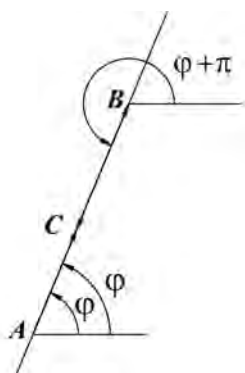


Рис.2

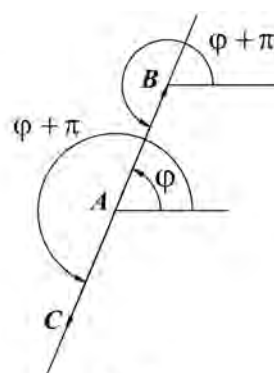


Рис.3

1. (Транзитивность.) Пусть  $\varphi = ang(A, B)$  и  $\varphi = ang(B, C)$ . Тогда  $\varphi = ang(A, C)$ . (3)

и  $A, B, C$  лежат на одной прямой в порядке  $A, B, C$ .

Справка. Не вдаваясь в детали данного вопроса теории отношений, определим транзитивность так: если элемент  $a$  по отношению к элементу  $b$  обладает некоторым свойством, и элемент  $b$  по отношению к  $c$  обладает тем же свойством, то элемент  $a$  обладает этим свойством по отношению к элементу  $c$ .

Так, отношение подобия треугольников транзитивно. Отношение соседства углов треугольника транзитивно. А отношение соседства углов  $n$ -угольника при  $n > 3$  - нет. Действительно, возьмем четырехугольник. Если угол

$A$  - сосед угла  $B$ , а угол  $B$  - сосед угла  $C$ , то уже угол  $A$  не является соседом угла  $C$ . □

Вернемся к нашему доказательству. Действительно, (см. рис.1) из равенства двух значений функции  $ang()$  следует, как минимум,  $\downarrow\downarrow$  двух векторов  $A,B$  и  $B,C$ . Но  $B$  является концом первого вектора и началом второго вектора. Таким образом,  $A, B, C$  лежат на одной прямой в порядке  $A, B, C$ .

К такому же порядку точек приводят соотношения  $\varphi = ang(A,B)$  и  $\varphi + \pi = ang(B,C)$ .

2. Пусть (см. рис.2)  $\varphi = ang(A,B)$  и  $\varphi + \pi = ang(B,C)$ . Тогда если  $\varphi = ang(A,C)$ , то эти точки лежат на одной прямой в порядке  $A, C, B$ . Доказательство предоставляем читателю.

3. Пусть (см. рис.3)  $\varphi = ang(A,B)$  и  $\varphi + \pi = ang(B,C)$ . Тогда если  $\varphi + \pi = ang(A,C)$ , то эти точки лежат на одной прямой в порядке  $C, A, B$ . Доказательство предоставляем читателю.

Замечание. Задача 2) является промежуточной между задачами 1) и 3).

Поэтому считаем предложенную методику более удобной, чем проверка

$$\text{равенства } \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad (*)$$

а затем исследование отношения между отрезками  $\lambda = \frac{AB}{BC}$  (Ср. [18, §41,1а-2а]).

Для задачи 1) будем использовать как тест на равенство нулю определителя (\*), так и другие методы.

## 1.2.5. Решение тригонометрических уравнений при помощи функции $ang()$

### 1.2.5.1. Простейшие уравнения

NN	Уравнение	Решение с обратными тригонометрическими функциями	Решение с $ang()$
1	2	3	4
1	$\cos \varphi = a,  a  \leq 1$	$\varphi = \pm \arccos a + 2\pi n$	$\varphi = ang(\mathbf{0}, \{a, \pm\sqrt{1-a^2}\}) + 2\pi n \quad (1)$
2	$\sin \varphi = a,  a  \leq 1$	$\varphi = (-1)^n \arcsin a + \pi n$	$\varphi = ang(\mathbf{0}, \{\pm\sqrt{1-a^2}, a\}) + 2\pi n \quad (2)$
3	$tg \varphi = a, a \in \mathbf{R}$	$\varphi = \arctg a + \pi n$	$\varphi = ang(\mathbf{0}, \{1, a\}) + \pi n \quad (3)$
4	$ctg \varphi = a, a \in \mathbf{R}$	$\varphi = \text{arcctg} a + \pi n$	$\varphi = ang(\mathbf{0}, \{a, 1\}) + \pi n \quad (4)$

Табл.1

Замечания.

1.  $n \in \mathbf{Z}$ . (Запись  $n \in \mathbf{Z}$  говорит о том, что  $n$  принадлежит к классу целых чисел. В дальнейшем подразумеваем это свойство у  $n$  в аналогичных выражениях.).

2. Запись  $a \in \mathbf{R}$  говорит о том, что число  $a$  принадлежит области действительных чисел.

Докажем формулу из строки 2. Выражение  $\varphi = (-1)^n \arcsin a + \pi n$  для  $n = 0, 1$

равносильно  $\varphi = \begin{cases} \arcsin a \\ \pi - \arcsin a \end{cases} = \begin{cases} ang(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-a^2}, a\}) \\ ang(\mathbf{0}, \{-\sqrt{1-a^2}, a\}) \end{cases}$ . Других решений в единичном

круге нет.  $\square$

Предлагаем читателю доказать остальные формулы.

Для всех 4-х уравнений получено решение с помощью одной функции  $ang()$ . Это очень удобно для анализа результатов. Однако в данном методе есть и некоторые сложности. Так, зная  $a$ , уже можно решать или исследовать классическим методом уравнение  $\cos \varphi = a$ , а для работы с функцией  $ang()$  нужно вычислить, кроме того, еще и выражение  $\pm\sqrt{1-a^2}$ . Для численных операций это еще 4 дополнительных операции, что для компьютера несущественно. Однако для теоретических исследований, если  $a$  является



сложным выражением (например, состоит из нескольких слагаемых), то исследование  $\pm\sqrt{1-a^2}$  естественно сложнее, чем  $a$ . Однако, несмотря на это обстоятельство, считаем использование только одной функции  $ang()$  вместо четырех обратных тригонометрических функций позитивным, особенно для практических приложений и педагогических целей.

### 1.2.5.2. Уравнение $tg(\varphi) = \frac{b}{a}$

Заметим, что уравнение  $tg(\varphi) = \frac{b}{a}$  (1)

есть несколько модифицированный вид уравнения  $tg(\varphi) = c$ , в котором правую часть всегда можно представить в виде рациональной дроби  $c = \frac{c}{1}$ . Известно

решение уравнения (1) в виде  $\varphi = arctg(c) + n\pi$ . (2)

Построим теперь решение этого уравнения при помощи функции  $ang()$  с учетом (1.2.2.-4)

$$\varphi = \begin{cases} ang(\mathbf{0}, \{a, b\}) \\ ang(\mathbf{0}, \{-a, -b\}) \end{cases} + 2\pi n = \begin{cases} ang(\mathbf{0}, \{a, b\}) \\ ang(\mathbf{0}, \{a, b\}) + \pi \end{cases} + 2\pi n = ang(\mathbf{0}, \{\pm a, \pm b\}) + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (3)$$

или  $ang(\mathbf{0}, \{a, b\}) + \pi n \quad n \in \mathbf{Z}$ . (3a)

К рассматриваемому уравнению  $tg(\varphi) = \frac{b}{a}$  сводится уравнение

$$A \cos \varphi + B \sin \varphi = 0. \quad (4)$$

В этом случае  $tg(\varphi) = -\frac{A}{B}$ . Тогда

$\varphi = ang(\mathbf{0}, \{B, -A\}) + \pi n = ang(\mathbf{0}, \{-B, A\}) + \pi n$ . (5) Это решение действительно и для случая, когда  $B = 0$ . (При выводе (5) использовано (1.2.1.-6)  $ang(\mathbf{0}, \{B, -A\}) = ang(\mathbf{0}, \{-B, A\}) + \pi$ .)

### 1.2.5.3. Система уравнений $\cos(\varphi) = a, \sin(\varphi) = b; |a|, |b| \leq 1, a^2 + b^2 = 1$

Сравним систему уравнений  $\begin{cases} \cos \varphi = a, \\ \sin \varphi = b, \end{cases} |a|, |b| \leq 1, a^2 + b^2 = 1$  (1)

с уравнением  $tg(\varphi) = \frac{b}{a}$  (1.2.5.2.-1.). Уравнение (1.2.5.2.-1.) содержало два решения (1.2.5.2.-3), отличающиеся друг от друга на  $\pi$ . С другой стороны,

знаки у  $a, b$  в (1) однозначно определяют из двух вариантов искомый угол  $\varphi$ .

Так, например, при  $a=1, b=1$  получаем  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ , а при  $a=-1, b=-1$  получаем

$\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Поэтому количество решений системы (1) будет 1, а не 2, как было бы,

если бы применялась функция  $\arctg()$ .

$$\text{Общий вид решения } \varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{a, b\}) + 2\pi n \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

#### 1.2.5.4. Уравнение $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = 1$ . Смежные преобразования

##### 1<sup>o</sup>. Алгебраическое решение

$$\text{Рассмотрим уравнение } \alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = 1, \quad (1)$$

у которого коэффициенты  $\alpha, \beta$  конечные вещественные числа, т.е.  $\alpha^2 + \beta^2 < \infty$ .

*Необходимо сразу подчеркнуть, что данное уравнение является особенно важным для данной работы.*

Обозначим  $\cos \varphi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ ,  $\sin \varphi_0 = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ . Тогда

$$\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \cos \varphi + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \sin \varphi \right) = \gamma \cos(\varphi - \varphi_0) = 1, \quad (2)$$

где  $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ , а  $\cos \varphi_0 = \frac{\alpha}{\gamma}$ ,  $\sin \varphi_0 = \frac{\beta}{\gamma}$  образуют систему уравнений, решаемую

в предыдущем разделе (1.2.5.3.). Следовательно, однозначно находим  $\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha, \beta\})$ . (3)

Обратим внимание на то, что, приводя уравнение (1) к виду (2), мы в данной работе отошли от общепринятой в учебниках по элементарной математике традиции приводить это уравнение к синусоидальной форме  $\gamma \sin(\varphi + \alpha) = 1$ . На преимуществах косинусоидальной формы подробно остановимся в этом и других разделах.

Т.к.  $|\cos(\varphi - \varphi_0)| \leq 1$ , то для действительных решений необходимо, чтобы  $\gamma \geq 1$ . При  $\gamma = 1$  получаем одно (двойное) решение. При  $\gamma > 1$  получаем два решения

$$\varphi - \varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{1}{\gamma}, \mp \sqrt{1 - (\frac{1}{\gamma})^2}\}) + 2\pi n = \mp \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\gamma^2 - 1}\}) = \mp \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\})$$

(4)

(слагаемые  $2\pi$  не дают новые решения). Теперь получим общий вид решения

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha, \beta\}) \mp \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}). \quad (5)$$

Исследуем 2-е слагаемое  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\})$ . Т.к.

$\lim_{\gamma \rightarrow 1} \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\gamma^2 - 1}\}) = 0$  и у функции  $\text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\})$  3-й и 4-й параметры

положительны, то справедливо неравенство  $0 \leq \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}) < \frac{\pi}{2}$ .

Отсюда  $2\delta < \pi$ , т.е.  $2\delta$  меньше развернутого угла, что имеет важное следствие: направление  $\varphi_0$  между двумя направлениями решений всегда является биссектрисой некоторого внутреннего угла треугольника, а угол  $\delta$  равен размеру отклонения от этого направления.

Отсюда используем в (5) перед 2-м слагаемым -  $\delta$  знак ' $\mp$ '. При этом обход направлений  $\varphi_1, \varphi_0, \varphi_2$  всегда происходит против часовой стрелки. Но говорить о том, что всегда, например,  $\varphi_1 < \varphi_0$  нельзя. Так, если  $\varphi_0 < \delta$ , то в результате  $\varphi_0 - \delta = \varphi_1 < 0$  и последующей нормализации  $\varphi_1$  может случиться так, что  $\varphi_0 < \varphi_1$ . Подобная ситуация может произойти и с парой  $\varphi_0, \varphi_2$ . (Найдите с помощью чертежа такие случаи.)

Сложим два слагаемых, используя (1.2.1.-15). При этом получим еще один, часто используемый в данной работе, вариант решения

$$\varphi_{1,2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha \pm \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}, \beta \mp \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}). \quad (6)$$

Предлагаем теперь читателю построить для сравнения эквивалентные решения на основе классических обратных тригонометрических функций.

## 2°. Смежные преобразования

При одновременной замене направления биссектрисы на противоположное  $\varphi'_0 = \varphi_0 + \pi$  и отклонения угла от биссектрисы на смежное  $\delta' = \pi - \delta$ , решения (1) меняются местами. Эти пары углов  $(\varphi, \delta)$  и  $(\varphi'_0, \delta')$  назовем смежными. Переходы к смежной паре  $(\varphi, \delta) \rightarrow (\varphi'_0, \delta')$  или  $(\varphi'_0, \delta') \rightarrow (\varphi, \delta)$  назовем смежным преобразованием.

Докажем, что при смежном преобразовании не возникает новых решений.

В самом деле  $\varphi_1' = \varphi_0' - \delta' = (\varphi_0 + \pi) - (\pi - \delta) = \varphi_0 + \delta$  и  $\varphi_2' = \varphi_0' + \delta' = (\varphi_0 + \pi) - (\pi + \delta) = \varphi_0 - \delta$ .  $\square$

### 3°. Геометрическое решение

Рассмотрим геометрическую интерпретацию решения уравнения (1).

Шаг 1. Отложим из начала координат вдоль оси абсцисс с учетом знака вектор  $\vec{P}_\alpha$ .

Шаг 2. Отложим из начала координат вдоль оси ординат вектор  $\vec{P}_\beta$ .

Шаг 3. Найдем векторную сумму  $\vec{P} = \vec{P}_\alpha + \vec{P}_\beta$ . /\* Вектор  $\vec{P}$  имеет длину

$\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  (длина диагонали прямоугольника) и имеет угол с осью абсцисс  $\varphi_0 = \text{ang}(\theta, \{\alpha, \beta\})$  \*/

Шаг 4. Проведем окружность с центром в начале координат единичным радиусом.

Шаг 5. Из конца вектора  $\vec{P}$  проведем две касательные к данной окружности.

Шаг 6. Из центра окружности (начала координат) проведем два радиуса к точкам касания. /\* Т.к. радиус окружности, проведенный в точку касания,  $\perp$  касательной, и угол между направлением на полюс и любым из этих двух радиусов в соответствующем треугольнике удовлетворяет условию  $\gamma \cos \delta = 1$ , то тем самым найден угол отклонения  $\delta$  \*/

Шаг 7. Найдем углы между этими радиусами и осью абсцисс. /\* Это и будут искомые углы. Действительно  $\varphi_{1,2} = \varphi_0 \mp \delta$  \*/

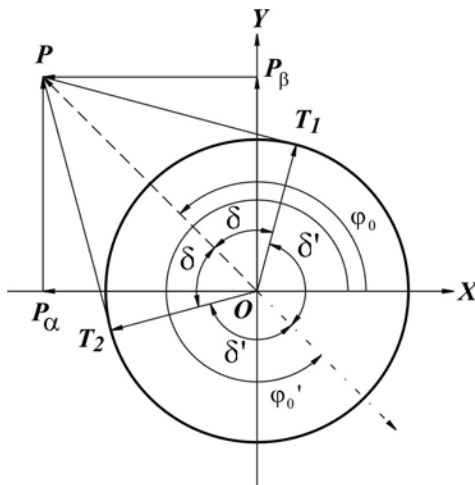


Рис. 1

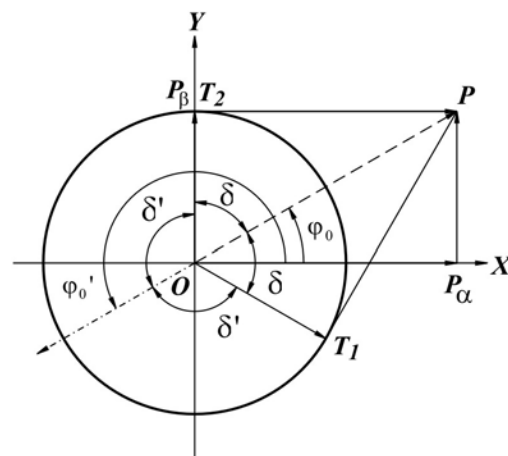


Рис. 2

Упражнение 1. Решить уравнение  $-\sqrt{2} \cos \varphi + \sqrt{2} \sin \varphi = 1$ .

Решение.  $\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, 1\}) = \frac{3\pi}{4}$ ,  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{2+2-1}\}) =$

$$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{3}\}) = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}, \quad \varphi_2 = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}. \quad \square$$

Смежная пара углов  $\varphi_0' = \frac{3\pi}{4} + \pi = \frac{7\pi}{4}$ ,  $\delta' = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$  дает те же решения, но

$$\text{в другом порядке } \varphi_1' = \frac{7\pi}{4} - \frac{2\pi}{3} = \frac{13\pi}{12}, \quad \varphi_2' = \frac{7\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}.$$

Графическое решение в масштабе показано на (рис.1).

Упражнение 2. Решить уравнение  $\sqrt{3} \cos \varphi + \sin \varphi = 1$ .

Решение 1.  $\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{3}, 1\}) = \frac{\pi}{6}$ ,  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{3+1-1}\}) = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}, \quad \varphi_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

Получим смежную пару  $\varphi_0' = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$ ,  $\delta' = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ . Она дает те же

решения, но в другом порядке  $\varphi_1' = \frac{7\pi}{6} - \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2' = \frac{7\pi}{6} + \frac{2\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$ .

Решение 2. Читатель может получить  $\varphi_{1,2}$  при помощи (6) и при этом

убедиться, что 3-й параметр, дающий  $\frac{\pi}{2}$  для  $\varphi_2$ , равен  $\alpha - \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1} = 0$ .

Графическое решение в масштабе показано на (рис.2).

Упражнение 3. Доказать, что если  $\varphi$  определяется (6), то

$$\cos \varphi = \frac{\alpha \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad (7)$$

$$\sin \varphi = \frac{\beta \mp \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (8)$$

Проверьте, что, используя (7) и (8), имеем  $\cos^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_1 = 1$ .

Упражнение 4. а) Пусть  $\alpha = \frac{1}{k}$ ,  $\beta = \frac{m}{kn}$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{kn^2 \pm m\sqrt{(1-k^2)n^2 + m^2}}{m^2 + n^2}, \quad (9)$$

$$\sin \varphi = \frac{kn(m \pm \sqrt{(1-k^2)n^2 + m^2})}{m^2 + n^2}. \quad (10)$$

б) Пусть  $\alpha = \frac{m}{kn}$ ,  $\beta = \frac{1}{k}$ . Тогда

$$\cos \varphi = \frac{n(km \pm \sqrt{(1-k^2)n^2 + m^2})}{m^2 + n^2}, \quad (11)$$

$$\sin \varphi = \frac{kn^2 \pm m\sqrt{(1-k^2)n^2 + m^2}}{m^2 + n^2}. \quad (12)$$

Очевидно следующее:

1) переход от варианта а) к варианту б)

соответствует перестановке  $\alpha, \beta$  и, отсюда следует перестановка  $\sin \varphi, \cos \varphi$ ;

2)  $m, n$  можно взаимно сократить на общие множители.

Результаты данного упражнения используются в главе "6. Диаметр".

Упражнение 5. Доказать, что если  $\varphi_1, \varphi_2$  решения уравнения  $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = 1$ . то:

$$\text{а) } \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \text{б) } \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad (13)$$

$$\text{в) } \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 = \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad \text{г) } \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 = \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}; \quad (14)$$

$$\text{д) } \cos^2 \varphi_{1,2} - \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} \cos \varphi_{1,2} + \frac{1 - \beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0;$$

$$\text{е) } \sin^2 \varphi_{1,2} - \frac{2\beta}{\alpha^2 + \beta^2} \sin \varphi_{1,2} + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2} = 0. \quad (15)$$

Указание. Для вывода д) и е) воспользуйтесь теоремой Виета.

### 1.2.6. Некоторые вопросы нахождения углов

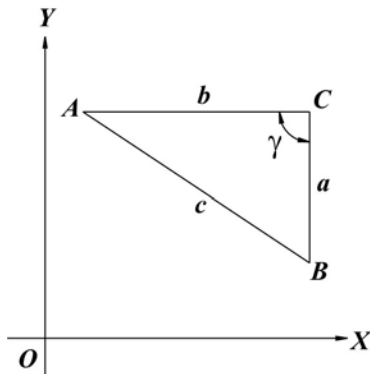


Рис. 1

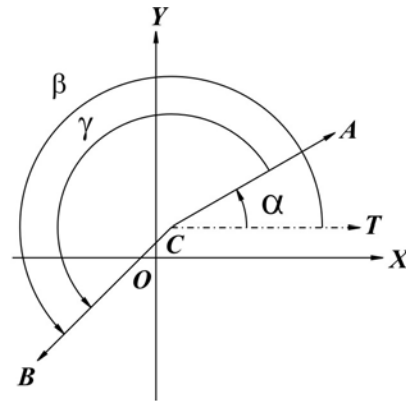


Рис. 2

Если известны длины всех сторон треугольника (или их можно вычислить с помощью теоремы Пифагора), то внутренний угол  $\gamma$  треугольника (см.рис.1) можно вычислить при помощи теоремы косинусов  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$ , откуда однозначно  $\gamma = \text{ang}(\mathbf{0}, \{t, \sqrt{1-t^2}\})$ , где  $t = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ , причем корень берем со знаком '+'. Тогда  $0 \leq \gamma < \pi$ .

Если  $t > 0$  - угол острый,  $t = 0$  - прямой,  $t < 0$  - тупой.

Если нужно знать угол между двумя направлениями (лучами)  $CB$  и  $CA$  с центром в  $C$  (см.рис.2), то в этом случае рекомендуем использовать:

если известны координаты вершин  $A, B, C$ , то

$$\gamma = \beta - \alpha = \text{ang}(\mathbf{C}, \mathbf{B}) - \text{ang}(\mathbf{C}, \mathbf{A}) \quad (2)$$

если известны направляющие нормальных векторов каждого из лучей  $\theta_1, \theta_2$  (об этом см. в "1.4.6. Нормальное уравнение прямой"), то

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(\theta_2 - \theta_1), \sin(\theta_2 - \theta_1)\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2, \sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1\}). \end{aligned} \quad (2a)$$

Заметим, что с помощью (2)/(2a) можно получить отрицательный угол, а также угол тупой. Можно управлять данным расчетом с помощью знаков абсолютной величины. Тогда угол

$\gamma = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2|, |\sin \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_2 \cos \theta_1|\})$  будет острый или прямой (прямой, если  $\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 = 0$ ), но никогда этот угол не будет тупым. Перед тем, как расставлять знаки абсолютной величины, нужны основания. Другими словами, априори (из других условий) нужно знать –

рассчитываемый угол острый или тупой. И только тогда управлять этим расчетом.

### 1.2.7. Измерение углов с помощью $ang()$ после операций копирования и перемещения

*Определение.* Ориентацией угла назовем последовательность рассмотрения сторон угла, т.е. одну сторону угла субъективно рассматриваем как первую, а другую сторону как вторую. Переход от 1-й стороны ко второй стороне угла, как уже было сказано, осуществляем против часовой стрелки. Значение угла получаем как разность между двумя направлениями угла

$$\gamma = ang(C, B) - ang(C, A), \quad (1)$$

где луч  $CB$  является второй стороной угла, а луч  $CA$  - первой стороной. (Т.к. можно при вычислении (1) получить отрицательные углы, то рекомендуем рассматривать данную конструкцию как интервал углов и перед (!) вычислением (1) выполнить процедуру *нормализации интервала углов* (1.2.1.-3.2.°)).

Каждый угол можно копировать и впоследствии перемещать и/или вращать.

При этом значение (1) должно оставаться неизменным.

Итак, пусть осуществлен поворот плоскости на некоторый угол  $\alpha$ , на которой находятся лучи  $CB$  и  $CA$ . Это означает, что к направлениям каждого из данных лучей добавился дополнительный угол  $\alpha$  (см. рис.1). Вычислим угол между лучами

$$\gamma = ang(C', B') - ang(C', A') = (ang(C, B) + \alpha) - (ang(C, A) + \alpha) = ang(C, B) - ang(C, A).$$

Следовательно, можно с помощью поворота на произвольный угол  $\alpha$  создать точную копию данного угла, причем у копии каждая сторона повернута относительно исходной стороны угла прототипа на  $\alpha$  (на рис.1.  $\alpha = \frac{\pi}{4} (45^\circ)$ ).

Итак, доказано: **угол не меняется при одновременном повороте лучей, его составляющих.** О том, что этот вопрос не простой, говорит пример, когда после вращения угла ось абсцисс расположена, например, между сторонами этого угла. Тогда одно направление угла (на чертеже верхнее) будет положительным, а другое (на чертеже нижнее) будет отрицательным. Чтобы получить исходный результат величины интервала углов с помощью (1),



рекомендуется после преобразований выполнить процедуру нормализации интервалов углов.

Рассмотрим случай, когда к координатам каждой из точек  $A, B, C$  ( $B$  находится в вершине угла, а  $A, C$  лежат на сторонах угла) добавился вектор перемещения  $\{x_0, y_0\}$ . Этот вектор исчезает (см.1.2.1.-1) при использовании (1)

$$\begin{aligned} \gamma &= \text{ang}(C', B') - \text{ang}(C', A') = \text{ang}(\{C_x + x_0, C_y + y_0\}, \{B_x + x_0, B_y + y_0\}) - \\ &- \text{ang}(\{A_x + x_0, A_y + y_0\}, \{B_x + x_0, B_y + y_0\}) = \text{ang}(O, \{B_x - C_x, B_y - C_y\}) - \\ &- \text{ang}(O, \{A_x - C_x, A_y - C_y\}). \end{aligned}$$

Фактически доказано: **угол не меняется при || переносе.**

Разберем теперь часто встречающиеся случаи: углы с взаимно || сторонами и углы с взаимно  $\perp$  сторонами.

Углы с взаимно || сторонами являются объектами, состоящими из 2-х углов, у которых стороны в каждом объекте могут быть повернуты относительно соответствующей стороны в другом объекте на угол в  $0 (0^0)$  или  $\pi (180^0)$  (см. рис.2). Смежные углы также имеют взаимно || стороны, поскольку свойство || - рефлексивно, т.е. каждая прямая (луч) || сам себе. Ответы, получаемые с помощью (1) для смежных углов будут отличаться

$$\gamma = \text{ang}(C, B) - \text{ang}(C, A), \quad \mu = \text{ang}(C, B) - (\pi - \text{ang}(C, A)).$$

Отсюда следует, что фраза “углы с взаимно || сторонами равны“, **вообще говоря, неверна.** Правильнее нужно говорить “углы с взаимно коллинеарными сторонами равны”.

Углы с взаимно  $\perp$  сторонами могут быть повернуты каждой своей стороной относительно соответствующей стороны в другом объекте на угол в  $\frac{\pi}{2} (90^0)$  или на  $\frac{3\pi}{2} (270^0)$  (нарисуйте самостоятельно чертеж!). Поэтому, как и в случае углов с коллинеарными сторонами, можно говорить о равенстве углов с взаимно  $\perp$  сторонами, если при преобразованиях у этих углов сохранилась ориентация.

Если среди преобразований допускаем только повороты и || перемещения, то после нормализации интервалов углов величина таких углов, как уже выше доказали, остается неизменной. Важно, что ориентация (последовательность рассмотрения направления сторон) у этих углов сохраняется, а сам угол можно высчитать по (1).

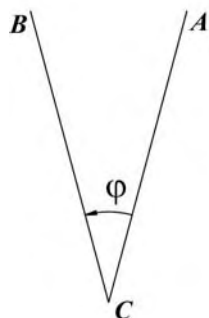


Рис.1

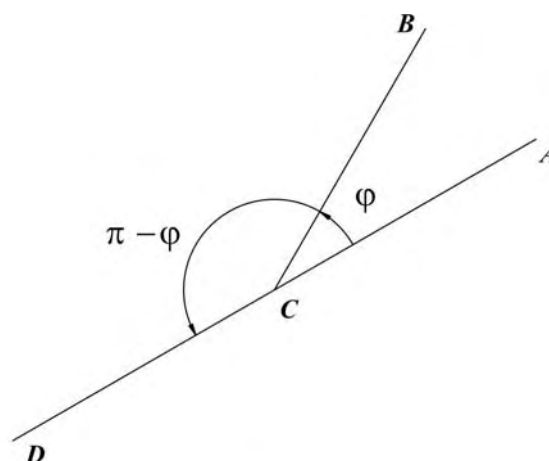
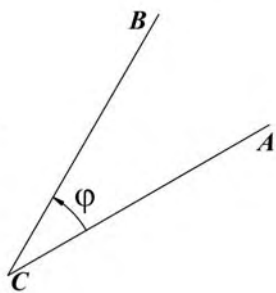


Рис.2

Если же среди перемещений (движений) допускаем и зеркальные повороты (их подробно рассмотрим ниже), то после таких операций ориентация у интервала углов меняется на противоположную. Такие углы являются по отношению к исходным углам дополнительными до  $\pi$  или до  $2\pi$ , в зависимости от того, один или два луча отображены зеркально. В качестве примера можно взять смежные углы (см. рис.2), в которых зеркальному отображению подверглась только вторая сторона, а коллинеарность, в силу рефлексивности первых сторон, сохранилась. Очевидно, что значение угла при этом также изменилось с  $\varphi$  на  $\pi - \varphi$ .

Таким образом, (1) позволяет измерять углы с учетом их ориентации. Если измерение разных углов с помощью (1) дает одинаковый ответ, то эти углы равны и одинаково ориентированы.

### 1.2.8. Особенности измерения углов внутри окружности бесконечного радиуса

**Теорема.** Два луча, направленные из разных начальных точек на одну и ту же бесконечную точку, коллинеарны.

**Доказательство.** Вместо луча вначале рассмотрим отрезок конечной длины. Пусть 1-я точка отрезка ( $P_1$ ) находится на конечном расстоянии от центра координат и “недалеко”:  $\{r \cos \alpha_1, r \sin \alpha_1\}$ . Координаты 2-й точки отрезка ( $P_2$ ) находятся на конечном, но “далеком” расстоянии от центра координат:  $\{R \cos \varphi, R \sin \varphi\}$ .

Рассмотрим с помощью функции  $ang()$  направление  $\psi$ , которое образуют эта пара точек. Тогда

$$\begin{aligned} \psi &= ang(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) = ang(\{r \cos \alpha_1, r \sin \alpha_1\}, \{R \cos \varphi, R \sin \varphi\}). \text{ Устремим } R \rightarrow \infty. \\ \psi &= \lim_{R \rightarrow \infty} ang(\{r \cos \alpha_1, r \sin \alpha_1\}, \{R \cos \varphi, R \sin \varphi\}) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} ang(\mathbf{0}, \{R \cos \varphi - r \cos \alpha_1, R \sin \varphi - r \sin \alpha_1\}) = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} ang(\mathbf{0}, \{\cos \varphi - \frac{r}{R} \cos \alpha_1, \sin \varphi - \frac{r}{R} \sin \alpha_1\}) = ang(\mathbf{0}, \{\cos \varphi, \sin \varphi\}) = \varphi. \end{aligned} \quad (1)$$

Видно, что **направление на бесконечно удаленную точку полностью определяет результирующее направление** (зависимость от  $r, \alpha_1$  при предельном переходе исчезает). Аналогичная ситуация произойдет и при рассмотрении 2-й пары точек – луч второй пары также имеет направление  $\varphi$ .  $\square$

### 1.3. Функция перемещения точки

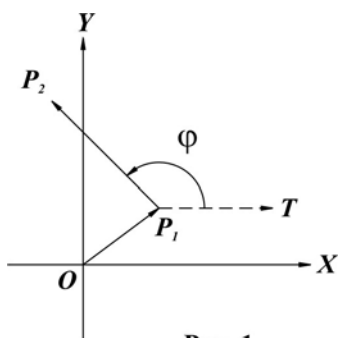


Рис. 1

Пусть  $P_1$  будет началом локальной полярной системы координат (см. рис. 1). Из  $P_1$  отложим радиус  $r$  под углом  $\varphi$  к оси абсцисс, получая  $P_2$ . Для нахождения декартовых координат  $P_2$ , определим  $polar(P_1, r, \varphi)$

$$P_2 = polar(P_1, r, \varphi) = \{P_{1x} + r \cos \varphi, P_{1y} + r \sin \varphi\}. \quad (1)$$

Если допустить нулевые и отрицательные радиусы  $r$ , то такая функция становится очень удобным инструментом при создании графических алгоритмов.

### 1.4. Уравнение прямой<sup>1</sup>

#### 1.4.1. Общие положения

Предупреждаем читателя, что материал, традиционно излагаемый в одном месте, разделен на 2 части. Часть задач, для более глубокого их изучения, перенесена в разделы “преобразования” и “отклонения точек от прямой”.

#### 1.4.2. Приведенное уравнение прямой $y = kx + b$

Запишем данное уравнение  $y = kx + b$ , (1)

где  $k$  - **тангенс угла наклона**, а  $b$  - **свободный член**. (Заметим, что для уравнения (1) лучше бы подходило название “тангенциальное уравнение

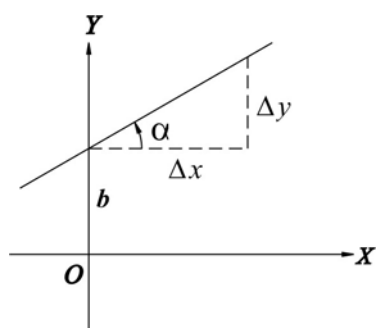


Рис. 1

прямой”, которое бы несло соответствующую мнемоническую нагрузку). (На (рис.1) показаны  $b$  и

$k = \operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Из чертежа легко вывести, что

$$y = kx + b.)$$

Рассмотрим варианты расчета  $b$ . Пусть прямая проходит через некоторую точку  $\{x_0, y_0\}$  и пусть

<sup>1</sup> Основные задачи на прямую систематически и в современной форме изложил впервые Лакруа в 1798/99 [7, стр.400].

известен тангенс угла наклона  $k$ . нужно найти свободный член  $b$ . Т.к. уравнение (1) справедливо для всех точек, то оно выполняется и для точки  $\{x_0, y_0\}$ . Подставим в (1) ее координаты

$$y_0 = kx_0 + b. \text{ Отсюда } b = y_0 - kx_0, \quad (2)$$

$$\text{и } y = kx + y_0 - kx_0. \quad (3)$$

Рассмотрим случай, когда координаты  $x_0, y_0$  выражены в виде формул (типичная ситуация для данной работы), а  $l$  - общий коэффициент для этих формул (выражений), т.е. координаты данной точки можно записать в виде  $l\{x_0, y_0\}$ . Тогда

$$b = ly_0 - klx_0 = l(y_0 - kx_0) \text{ и } y = kx + l(y_0 - kx_0). \quad (4)$$

Найдем теперь геометрический смысл (интерпретацию) коэффициентов  $k$  и  $b$  (см.рис.1).

При  $\parallel$  перемещении координат коэффициент  $k$  остается неизменным, а коэффициент  $b$  меняется. Действительно  $y + y_0 = k(x + x_0) + b$ . Следовательно

$$y = kx + b + kx_0 - y_0.$$

Таким образом, при  $\parallel$  перемещении центра координат, прямая относительно этого центра также перемещается  $\parallel$  старому своему положению. Величину этого смещения удобно вычислить, если перейти к нормальной форме прямой (см.1.4.6.).

$$\text{Две прямые } \parallel, \text{ если их тангенсы угла наклона равны } k_1 = k_2. \quad (5)$$

(Предлагаем читателю доказать, что это условие необходимо и достаточно.)

$$\text{Докажем, что если две прямые } \perp, \text{ то } k_1 k_2 = -1. \quad (6)$$

Рассмотрим 2 варианта взаимного положения  $\perp$  прямых:

$$1) \quad \operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) \operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{-y, x\})) = \frac{y}{x} \cdot \frac{x}{-y} = -1;$$

$$2) \quad \operatorname{tg}(\alpha) \operatorname{tg}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) \operatorname{tg}(\operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{y, -x\})) = \frac{y}{x} \cdot \frac{-x}{y} = -1. \quad (7)$$

**Замечание 1.** Двигаясь в обратном направлении от (7), можно доказать, что если  $k_1 k_2 = -1$ , то прямые  $\perp$ .

**Замечание 2.** Можно доказать (7), например, при помощи выражения

$$\operatorname{tg}(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

**Уравнение прямой в приведенной форме** удобно использовать как промежуточную форму для последующего перехода к **уравнению в общем виде**  $Ax + By + C = 0$  (см.1.4.5.) и, к **уравнению в нормальной форме**  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$  (см.1.4.6.).

Дело в том, что **тангенс угла наклона**  $k = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$  стремится к  $\infty$ , если  $\theta \rightarrow 0, \pi$ . В силу этого, данная форма неустойчива к вариации по углу  $\theta$  и может вызывать в компьютерных программах так называемое прерывание “деление на нуль”. Поэтому **использовать приведенное уравнение прямой при программировании окончательных формул не рекомендуется.**

### 1.4.3. Уравнение прямой, проходящей через центр координат

Частным случаем приведенного уравнения является уравнение с заданным тангенсом угла наклона, но без свободного члена:  $b = 0$ . В этом случае уравнение выглядит наиболее просто  $y = kx$ . Очевидно, что абсциссе  $x = 0$  соответствует ордината  $y = 0$ , т.е. прямая проходит через начало координат  $O: \{0,0\}$ . Коэффициент  $k$  называется, как и раньше, **тангенсом угла наклона прямой** или **угловым коэффициентом**. Такой вид уравнений является одним из простейших. К нему сводят, путем || перемещения оси абсцисс, уравнение в приведенной форме.

### 1.4.4. Уравнение прямой, проходящей через 2 точки

Перейдем к этому уравнению, используя приведенное уравнение. Для начала заметим, что для всех участков прямой тангенс угла наклона постоянен. В случае прямой его легко посчитать. Для этого возьмем 2 различные точки на прямой

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (1)$$

(Заметим, что результат расчета (1) не изменится, если возьмем те же самые точки, но в другом порядке (докажите!).)

Запишем приведенное уравнение с данным коэффициентом.

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x + b. \quad (2)$$

Естественно, что (2) справедливо и для конкретной точки  $\{x_1, y_1\}$

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 + b. \quad (3)$$

Вычтем из (2) (3)

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1). \quad (4)$$

$$\text{И, окончательно, } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (5)$$

#### 1.4.5. Уравнение прямой в общем виде $Ax + By + C = 0$ . Пучки прямых

Перейдем от уравнения в приведенной форме  $y = kx + b$  к уравнению прямой в общем виде  $Ax + By + C = 0$ . Для этого представим тангенс угла наклона  $k = \frac{p}{q}$  в виде дроби, причем, если  $k$  целое число, то берем  $q = \pm 1$  (знак у  $q$  берем таким, чтобы произведение знаков  $p, q$  давало знак у  $k$ ). Например, пусть  $k = 2$ , тогда для перехода к уравнению в общем виде принимают  $k = \frac{2}{1}$ . На следующих этапах преобразований приводят все члены к общему знаменателю и собирают все члены в левой или правой части уравнения. Прделаем это

$$y = \frac{p}{q} x + b, \quad qy = px + bq, \quad px - qy + bq = 0, \quad Ax + By + C = 0. \quad (1)$$

где  $A = p, B = -q$  - коэффициенты при переменных  $x, y$ , а  $C = bq$  - свободный член. Все 3 коэффициента одновременно можно сокращать на одно и тоже число – при этом смысл уравнения не меняется. Заметим, что || перенос начала координат изменяет только свободный член  $A(x + x_0) + B(y + y_0) + C = Ax + By + C + Ax_0 + By_0$ . (2)

Легко перейти обратно от уравнения прямой в общем виде к приведенному уравнению  $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ . (3)

Таким образом, **тангенс угла наклона уравнения общего вида** равен  $-\frac{A}{B}$ .

$$(4)$$

Докажем, что **две прямые  $\parallel$ , если их коэффициенты, представленные в общем виде, удовлетворяют соотношению**  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ .

$$(5)$$

Действительно, для  $\parallel$  прямых необходимо и достаточно, чтобы были равны тангенсы наклона этих прямых. Следовательно,  $-\frac{A_1}{B_1} = -\frac{A_2}{B_2}$  и  $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ .

Докажем, что **две прямые  $\perp$ , если их коэффициенты, представленные в общем виде, удовлетворяют соотношению**

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \quad (6)$$

В самом деле, из (1.4.2.-6)  $-\frac{A_1}{B_1} \cdot -\frac{A_2}{B_2} = -1$ ,  $A_1A_2 = -B_1B_2$ . Отсюда (6).

Вернемся к задаче о нахождении прямой, проходящей через 2 точки. Найдем коэффициенты общего уравнения, выраженные через координаты данных 2 точек. Возьмем для этого (1.4.4.-4)  $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ .

Следовательно  $(x_2 - x_1)y - (x_2 - x_1)y_1 = (y_2 - y_1)x - (y_2 - y_1)x_1$ . Переносим все слагаемые из правой в левую часть уравнения

$$(y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y + (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1 = 0. \quad (7)$$

Из (7) следует, что

$$A = (y_1 - y_2), B = (x_2 - x_1), C = (y_2 - y_1)x_1 - (x_2 - x_1)y_1 = x_1y_2 - x_2y_1. \quad (8)$$

**Теорема 1<sup>1</sup>. Для того, чтобы три прямые, заданные в общем виде**

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 &= 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 &= 0 \\ A_3x + B_3y + C_3 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

**пересекались в одной точке, необходимо и достаточно, чтобы**

**выполнялось условие**  $\Delta = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0$  [16, §60].

$$(10)$$

<sup>1</sup> Ламе (1818) [7, стр.401].



**Необходимость.** Пусть прямые (9) пересекаются в точке  $\{x_0, y_0\}$ , лежащей не на бесконечности (собственная точка). Тогда уравнения

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$$

$A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$  линейно зависимы и, следовательно, определитель системы

$$A_3x_0 + B_3y_0 + C_3 = 0$$

$$\Delta = 0.$$

Если точка пересечения лежит на  $\infty$  (несобственная точка), то первые два столбца определителя  $\Delta$  пропорциональны (докажите!) и снова имеем

$$\Delta = 0.$$

**Достаточность.** Пусть  $\Delta = 0$  и, например, первые две прямые пересекаются в точке  $\{x_0, y_0\}$ . Тогда система уравнений  $\begin{cases} A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \\ A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \end{cases}$

имеет следующее решение  $x_0 = \frac{-\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, y_0 = \frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ . Теперь убедимся, что

данное решение удовлетворяет и третьему уравнению

$$-A_3 \frac{\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} - B_3 \frac{\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} + C_3 = \frac{\Delta}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = 0.$$

(В последнем равенстве использовано разложение определителя  $\Delta$  по элементам 3-й строки.) $\square$

**Следствие. Транзитивность пересечения прямых.** Если 1-я и 2-я прямые пересекаются в некоторой точке и 2-я и 3-я прямые пересекаются в этой же точке, то 1-я и 3-я прямые также пересекаются в этой точке.

**Определение. Прямые (две или больше), пересекающиеся в одной точке, принадлежат пучку<sup>1</sup>.** Если точка пересечения прямых находится на  $\infty$ , то такой пучок называют несобственным.

#### Линейный алгоритм проверки принадлежности прямых пучку

(В данном случае слово “линейный” обозначает зависимость количества операций от количества элементов множества, в данном случае от количества исследуемых прямых.)

<sup>1</sup> Ламе (1816/17) [7, стр.399].

Итак, есть следующие возможности определить пучок: задать точку пересечения (вычислить ее при пересечении 1-й и 2-й прямой). Не останавливаясь на этом подробно, заметим следующее: если при пересечении 1-й и 3-й прямой получим заданную точку пересечения, то и 3-я прямая принадлежит данному пучку. Дальнейшее аналогично. □ Другие, более экономные методы см. в (1.9.).

В современной математической литературе становится все более популярным термин “конкурентные прямые” – **прямые, пересекающиеся в одной точке**. Однако в данной работе с этой целью будет применяться термин “пучок прямых”.

Если точка принадлежит прямой, то говорят, что **точка инцидентна данной прямой**.

Упражнение 1. Докажите, что количество сравнений в алгоритме принадлежности данному пучку  $< n - 1$ , где  $n$  - число прямых.

Упражнение 2. Докажите, что если две точки принадлежат прямой, то и точка середины полученного отрезка также принадлежит этой прямой.

#### 1.4.6. Нормальное уравнение прямой<sup>1</sup> $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$

Возьмем уравнение прямой в общем виде  $Ax + By + C = 0$  и приведем его к нормальному виду  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$  (нормальный вид Гессе (Hesse) [18,§96], [16,§64]).

Для этого разделим все коэффициенты (1) на постоянное число  $\pm \sqrt{A^2 + B^2}$ .

В результате имеем

$$\cos \theta = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \theta = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad p_L = \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}, \quad (1)$$

<sup>1</sup> Данное уравнение впервые появилось в «Началах геометрического анализа и алгебраического анализа», Париж, 1809 Симона Люилье (Simon Antoine Jean Lhuillier (1750-1840)), родившегося и умершего в Женеве, Швейцария [см. «Математика XIX века» под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П. Юшкевича, М., «Наука», 1981г., стр. 11], [7,стр.401]. Однако данное уравнение носит имя немецкого математика Гессе (Ludwig Otto Hesse (1811-1874), опубликовавшего его в 1861). Мы будем также придерживаться этой традиции, хотя и относимся к ней критически.

причем знак перед корнем всегда выбирают противоположным знаку  $C$ . Заметим, что при прохождении прямой через центр координат  $C=0$ , и, следовательно,  $p_L=0$ .

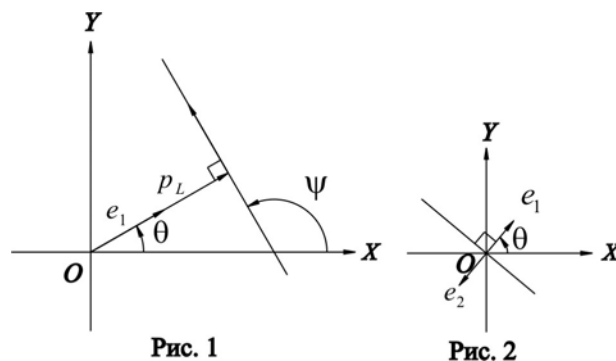


Рис. 1

Рис. 2

При работе с прямой нам понадобится **единичный нормальный вектор**  $e_{nL} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$  (рис.2). В том случае, если  $C \neq 0$ , знаки  $\cos \theta, \sin \theta$  определены. Если же  $C = 0$ , то  $p_L = 0$  и направление этого вектора выбираем с точностью до  $\pi$ . В этом случае  $y = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta} x$ .

Для прямой, заданной в нормальной форме, имеем **тангенс угла наклона прямой**  $k = -\frac{A}{B} = -\frac{\cos \theta}{\sin \theta}$ . (2)

В связи с тем, что **нормальный вектор  $\perp$  прямой**, то тангенсу угла наклона прямой соответствует котангенс нормального вектора.

Найдем **условие  $\parallel$  двух прямых**

$$tg(\text{ang}(\mathbf{0}, \{\sin \theta_1, -\cos \theta_1, \})) = tg(\text{ang}(\mathbf{0}, \{\sin \theta_2, -\cos \theta_2, \})), \quad \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2}, \quad (3)$$

$$\theta_2 = \theta_1 + n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

Заметим, в частности, что если у двух прямых единичные нормальные вектора совпадают или противоположны, то прямые  $\parallel$ .

**Угол наклона прямой к оси абсцисс**

$$\psi = \theta + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta, \sin \theta\}) + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \theta, \cos \theta\}). \quad (4)$$

**Наименьший угол между двумя прямыми** (см.1.2.1.-29)

$$\xi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|x_1 x_2 + y_1 y_2|, |x_2 y_1 - x_1 y_2|\}), \quad (5)$$

где  $\{x_1, y_1\} = k_1 \{\cos \theta_1, \sin \theta_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\} = k_2 \{\cos \theta_2, \sin \theta_2\}$  два вектора, коллинеарных соответствующим нормальным векторам прямой (заметим, что условие коллинеарности требует, чтобы  $k_1 > 0, k_2 > 0$ ).

Расстояние от некоторой произвольной точки с координатами  $\{x, y\}$  до прямой, а также расстояние между двумя  $\parallel$  прямыми будем вычислять ниже.

Отметим следующее полезное применение свойств прямых, заданных в нормальной форме. Дело в том, что, как правило, центр системы координат задан первично и вне зависимости об информации о прямых. С другой стороны, он является началом каждого из нормальных векторов. Таким образом, чтобы определить прямую, заданную в нормальной форме, можно задать только координаты конца нормального вектора, т.е. одну точку. Вторая точка, центр координат и начало всех нормальных векторов, будет **общей** для всех прямых данного чертежа и может храниться отдельно. Этот прием может существенно экономить память программ, обрабатывающих большие массивы прямых.

(Если нас интересует задание отрезков прямых, то в полярных координатах для каждого отрезка, кроме нормального вектора, требуется еще задание двух углов – угол начала и угол конца отрезка. В декартовых координатах для этого случая также задаем 4 числа - координаты двух точек  $\{x_1, y_1\}$ ,  $\{x_2, y_2\}$ ). Таким образом, для определения отрезков прямых на плоскости в каждой из координатных систем требуется задать для каждого отрезка по 4 числа.)

Упражнение 1. Доказать, что направление единичного нормального вектора  $\theta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta, \sin \theta\}) \perp$  направлению рассматриваемой прямой

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \theta, \cos \theta\}).$$

Доказательство. В самом деле,

$$\begin{aligned} \varphi - \theta &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \theta, \cos \theta\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta, \sin \theta\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta, \cos^2 \theta + \sin^2 \theta\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}) = \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Упражнение 2. Доказать, что если нормальные векторы частично или полностью совпадают, то прямые или  $\parallel$ , или совпадают.

Упражнение 3. Доказать, что расстояние между двумя  $\parallel$  прямыми равно расстоянию между концами нормальных векторов.

Упражнение 4. Убедиться на примере 3-х прямых, что свойство параллельности для них транзитивно: если прямая  $a \parallel$  прямой  $b$  и прямая  $b \parallel$  прямой  $c$ , то прямая  $a \parallel$  прямой  $c$ .

Упражнение 5. Найти **направление нормального вектора оси абсцисс**.

Решение. Ось абсцисс задается уравнением  $y=0$ . Уравнение оси абсцисс в нормальной форме  $0 \cdot x + 1 \cdot y + 0 = 0$ . Отсюда

$$\theta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta, \sin \theta\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}) = \frac{\pi}{2}.$$

### 1.4.7. Уравнение прямой в отрезках на осях<sup>1</sup>

Возьмем уравнение прямой в общем виде

$$Ax + By + C = 0 \text{ и пусть } A, B, C \neq 0. \quad (1)$$

Тогда  $Ax + By = -C$ ,  $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$ . Сделаем подстановку

$$\frac{A}{-C} = \frac{1}{a}, \quad \frac{B}{-C} = \frac{1}{b}.$$

В итоге, получено симметричное уравнение, называемое **уравнение прямой в отрезках на осях**  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ . (2)

Исследуем данное уравнение (см. рис. 1). Пусть  $x=0$ , тогда  $y=b$ , а при  $y=0$  имеем  $x=a$ . (3)

Таким образом, прямая пересекает ось абсцисс при  $x=a$ , а ординат при  $y=b$ .

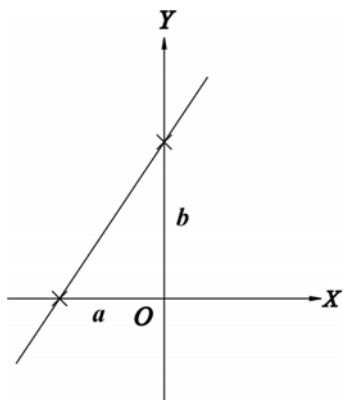


Рис. 1

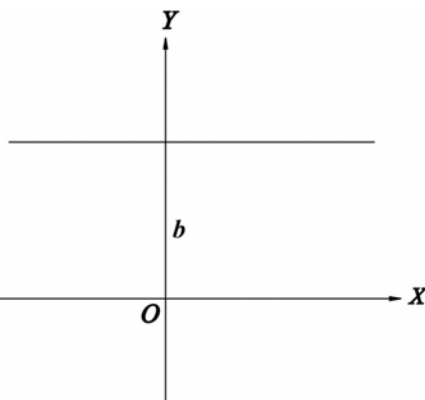


Рис. 2

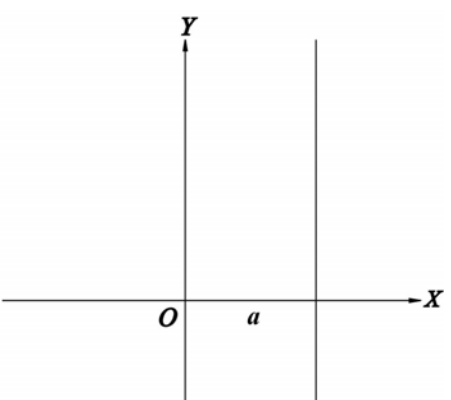


Рис. 3

Упражнение 1. Объясните рис.2, 3. Какие ограничения нужно снять с (1), чтобы получить данные рисунки? Напишите уравнения прямых на этих рисунках.

<sup>1</sup> Данное уравнение дал впервые Крелле в «Сборнике статей и заметок по математике» (Sammlung mathematischer Aufsätze und Bemerkungen, 1, Berlin, 1821) [7, стр.401].

### 1.4.8. Пересечение прямых

Рассмотрим вначале две прямые. Запишем систему уравнений этих прямых в общем виде

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Ее решением (например, методом подстановки или методом Крамера) будет точка с координатами  $P : \left\{ x = \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, y = \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \right\}$ . (2)

Для прямых в нормальном виде Гессе

$$\begin{cases} x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 - p_{L1} = 0 \\ x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2 - p_{L2} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

точка пересечения  $P$  (см. рис.1,2) находится аналогично

$$P : \left\{ x = \frac{p_{L2} \sin \theta_1 - p_{L1} \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}, y = \frac{p_{L1} \cos \theta_2 - p_{L2} \cos \theta_1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \right\}. \quad (4)$$

Если прямые  $\parallel$ , то в плоском случае это означает, что прямые не пересекаются или что точка их пересечения находится на  $\infty$ . Тогда

$$\sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 \text{ и } \theta_2 = \theta_1 + \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}. \square$$

Найдем угол, под которым видна точка пересечения  $P$  из центра координат

$$\psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)} \{ p_{L2} \sin \theta_1 - p_{L1} \sin \theta_2, p_{L1} \cos \theta_2 - p_{L2} \cos \theta_1 \}). \quad (5)$$

Если  $\sin(\theta_2 - \theta_1) > 0$ , то множитель  $\frac{1}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}$  можно опустить.

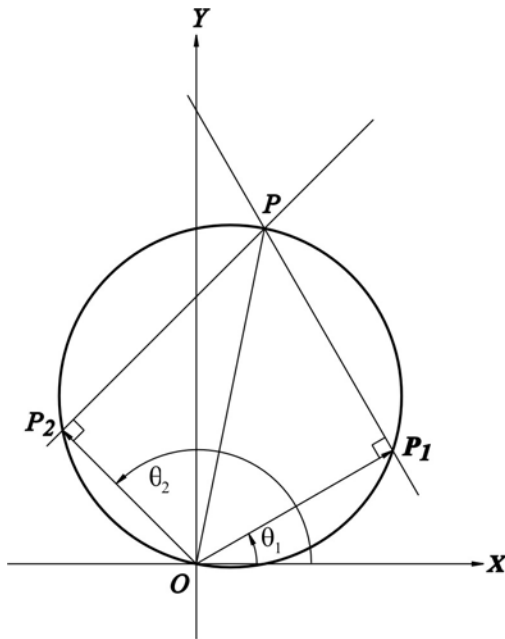


Рис. 1

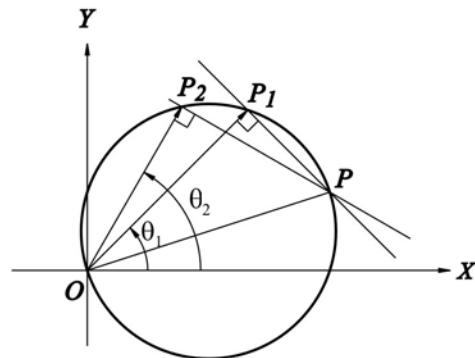


Рис. 2

Упражнение 1. Доказать (см. рис. 1,2), что 4 точки: центр координат, концы нормальных векторов пересекающихся двух прямых и точка их пересечения находятся на одной окружности. Назовем, для краткости, такую окружность **окружностью пересечения**. Найти диаметр этой окружности.

Рекомендация. Воспользоваться, например, теоремой Фалеса утверждающей, что вписанный угол, опирающийся на диаметр окружности, является прямым.

Ответ. **Диаметр окружности пересечения**

$$D = \sqrt{\frac{p_{L1}^2 + p_{L2}^2 - 2p_{L1}p_{L2} \cos(\theta_2 - \theta_1)}{\sin^2(\theta_2 - \theta_1)}}. \quad (6)$$

Упражнение 2. (Следствие из упражнения 1). Доказать, что длина медианы, выходящей из прямого угла прямоугольного треугольника, равна половине гипотенузы этого треугольника.

Упражнение 3. Найти длины расстояний  $l_{1,2}$  от концов нормальных векторов двух прямых до точки их пересечения.

Ответ. По теореме Пифагора и (6)

$$l_{1,2} = \sqrt{D^2 - p_{L1,L2}^2}. \quad (7)$$

Упражнение 4. Найти **угол между двумя прямыми в точке их пересечения**.

Решение. В точке пересечения между прямыми находятся два смежных угла. Поэтому для того, чтобы сделать эту задачу однозначной, примем, что **искомый угол между прямыми равен углу между двумя нормальными векторами этих прямых**  $\xi = \theta_2 - \theta_1$ , (8)

причем допускаем, что в таком случае могут появиться отрицательные углы.  $\square$

Решим следующую вспомогательную задачу: найти центр и радиус окружности, проведенной через 3 точки.

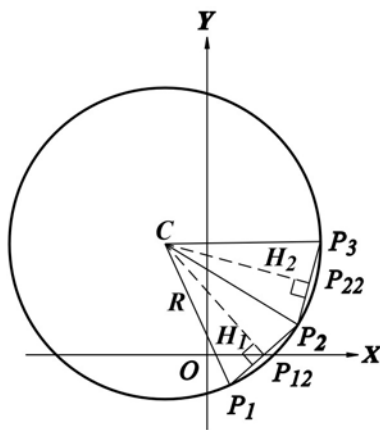


Рис. 3

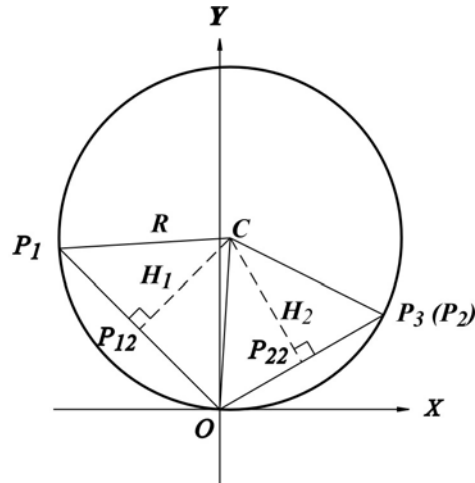


Рис. 4

Решение. По теореме Пифагора из  $\Delta P_1 P_{12} C$  (см.рис.3) следует  $(P_1 P_{12})^2 + H_1^2 = R^2$  или  $(P_1 P_{12})^2 + H_1^2 = (x_1 - C_x)^2 + (y_1 - C_y)^2$ . (9)

Аналогичное равенство для  $\Delta P_2 P_{12} C$

$$(P_2 P_{12})^2 + H_1^2 = (x_2 - C_x)^2 + (y_2 - C_y)^2. \quad (10)$$

Т.к.  $\Delta P_1 P_2 C$  равнобедренный, то  $P_1 P_{12} = P_2 P_{12}$ , откуда вычитая из (9) равенство (10), получаем  $(x_1 - C_x)^2 + (y_1 - C_y)^2 - (x_2 - C_x)^2 - (y_2 - C_y)^2 = 0$ ,

$$(x_1 + x_2 - 2C_x)(x_1 - x_2) + (y_1 + y_2 - 2C_y)(y_1 - y_2) = 0,$$

$$2C_x(x_1 - x_2) + 2C_y(y_1 - y_2) = x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2. \quad (11)$$

Аналогичное уравнение получаем и для пары точек  $x_2, x_3$ . Запишем теперь нахождение **декартовых координат центра окружности** в виде системы уравнений

$$\begin{cases} (x_1 - x_2)C_x + (y_1 - y_2)C_y = \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) \\ (x_2 - x_3)C_x + (y_2 - y_3)C_y = \frac{1}{2}(x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2) \end{cases}. \quad (13)$$



Обратим внимание, что известные координаты точек входят попарно в (13): в 1-е уравнение входят координаты 1-й пары  $\langle 1,2 \rangle$ , а во 2-е – 2-й пары  $\langle 2,3 \rangle$ .

Запишем решение (13)

$$C_x = \frac{1}{2} \frac{(x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2)(y_1 - y_2) - (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)(y_2 - y_3)}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)}$$

$$C_y = \frac{1}{2} \frac{(x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2)(x_2 - x_3) - (x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2)(x_1 - x_2)}{(x_1 - x_2)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_2)}. \quad (14)$$

Применим решение (14) для нахождения центра окружности пересечения. Для этого будем выбирать пары точек таким образом (см. рис. 4), чтобы каждая вторая из данной пары точек была центром системы координат  $O: \{0,0\}$  (воспользуемся тем, что декартовы координаты  $O$  равны нулю). Переименуем, затем, 3-ю точку во 2-ю.

В этом случае система уравнений (13) переписется следующим образом:

$$\begin{cases} x_1 C_x + y_1 C_y = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2) \\ x_2 C_x + y_2 C_y = \frac{1}{2}(x_2^2 + y_2^2) \end{cases}, \quad (15)$$

и в полярных координатах

$$\begin{cases} \cos \theta_1 C_x + \sin \theta_1 C_y = \frac{1}{2} p_{L1} \\ \cos \theta_2 C_x + \sin \theta_2 C_y = \frac{1}{2} p_{L2} \end{cases}. \quad (16)$$

(Заметим, что по построению эта окружность проходит через центр системы координат, т.к. одна из 3-х точек, лежащих на окружности, по построению совпадает с центром системы координат.)

Таким образом, получено следующее правило для центра окружности пересечения: **скалярное произведение вектора центра окружности пересечения  $\{C_x, C_y\}$  на единичный нормальный вектор  $\{\cos \theta, \sin \theta\}$  равно половине величины нормального вектора.**

Естественно, что у любой другой прямой, проходящей через данную точку пересечения, в силу теоремы Фалеса, конец нормального вектора должен лежать на окружности пересечения, и, кроме того, справедливо следующее равенство

$$\cos \alpha_N C_x + \sin \alpha_N C_y = \frac{1}{2} p_{LN}. \quad (17)$$

Решением системы (16) будет

$$\left\{ C_x = \frac{p_{L2} \sin \theta_1 - p_{L1} \sin \theta_2}{2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}, C_y = \frac{p_{L1} \cos \theta_2 - p_{L2} \cos \theta_1}{2 \sin(\theta_2 - \theta_1)} \right\}. \quad (18)$$

Дадим еще одно решение данной задачи. Т.к. точка пересечения  $P$  и центр системы координат  $O: \{0,0\}$  находятся по разные стороны диаметра окружности пересечения, а искомый центр этой окружности лежит как раз по середине диаметра, то, используя (4), сразу получаем **центр и радиус окружности пересечения**

$$\left\{ C_x = \frac{p_{L2} \sin \theta_1 - p_{L1} \sin \theta_2}{2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, C_y = \frac{p_{L1} \cos \theta_2 - p_{L2} \cos \theta_1}{2 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)} \right\}, \quad (19)$$

$$R = \frac{\sqrt{p_{L1}^2 + p_{L2}^2 - 2p_{L1}p_{L2} \cos(\theta_2 - \theta_1)}}{2 \sin(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (20)$$

**Зная координаты точки пересечения  $P: \{P_x, P_y\}$ , можно получить по данному направлению  $\alpha$  величину полярного вектора**

$$\cos \theta_N P_x + \sin \theta_N P_y = p_{LN}. \quad (21)$$

То же самое в форме скалярного произведения  $P e_{pN} = p_{LN}$ . (22)

Формулы (21)-(22) можно вывести следующим образом для любой точки с координатами  $\{x_0, y_0\}$ , через которую проходит прямая  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$  справедливо равенство  $x_0 \cos \theta + y_0 \sin \theta = p_L$ . В частности, это равенство справедливо и для точки пересечения  $P: \{P_x, P_y\}$ .

*Замечание.* Т.к. четыре несовпадающие точки лежат на окружности, то выполняется теорема Птолемея (Птолемей, Клавдий (Claudius Ptolemy ~85 - ~165 н.э.) (в варианте (рис.1))  $|OP_2||P_1P| + |OP_1||P_2P| = |OP||P_1P_2|$ .

## 1.5.Преобразования

Перед чтением данного раздела рекомендуем ознакомиться с [16, XIII, XIV].

### 1.5.1. Преобразования декартовых координат

#### 1.° Преобразования декартовых координат при || переносе

Пусть в прямоугольной правосторонней декартовой системе координат  $XU$  даны координаты некоторой точки  $P : \{x, y\}$  (см. рис.1). Пусть центр другой (ее обычно называют новой) прямоугольной правосторонней декартовой системы координат отстоит от первой на вектор  $\{x_0, y_0\}$ , причем координатные оси этих двух систем || друг другу. В этом случае говорят, что осуществлен || перенос координатных осей. Очевидно, что справедливы соотношения

$$x = \bar{x} + x_0, \quad y = \bar{y} + y_0. \quad (1)$$

Найдем координаты  $P : \{\bar{x}, \bar{y}\}$  в новой системе координат. Из (1) следует  $P : \{\bar{x}, \bar{y}\} = P : \{x - x_0, y - y_0\}$ . Т.к. эти соотношения выполняются для любой точки на плоскости, то справедливы следующие преобразования

$$\text{прямое преобразование координат} \quad \begin{cases} \bar{x} = x - x_0, \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}, \quad (2)$$

$$\text{обратное преобразование координат} \quad \begin{cases} x = \bar{x} + x_0, \\ y = \bar{y} + y_0 \end{cases}. \quad (3)$$

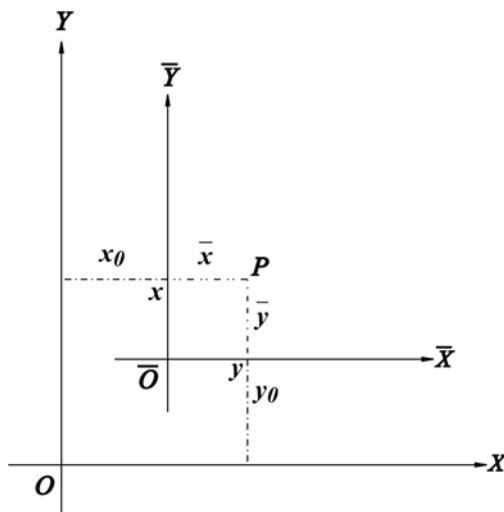


Рис.1

Очевидно, что при || переносе сохраняются **длины отрезков**. Действительно

$$\begin{aligned} (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 + (\bar{y}_1 - \bar{y}_2)^2 &= (x_1 - x_0 - (x_2 - x_0))^2 + (y_1 - y_0 - (y_2 - y_0))^2 = \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2. \end{aligned}$$

**Преобразования, сохраняющие длины отрезков, называются ортогональными.**

Синонимом понятия **ортогональных преобразований** является понятие **движение** [4,стр.9].

## 2.° Преобразования декартовых координат при повороте осей

Пусть некоторая точка  $P$  имеет полярные координаты  $(r, \alpha)$ . Тогда ее

$$\text{декартовые координаты } \begin{cases} x = r \cos \alpha, \\ y = r \sin \alpha \end{cases} \quad (4)$$

Повернем систему координат относительно ее центра на некоторый угол  $\theta$ .

Пусть в новой системе координат  $P$  имеет полярные координаты  $(r, \varphi)$  (длина радиус-вектора остается прежней!) (см.рис.2).

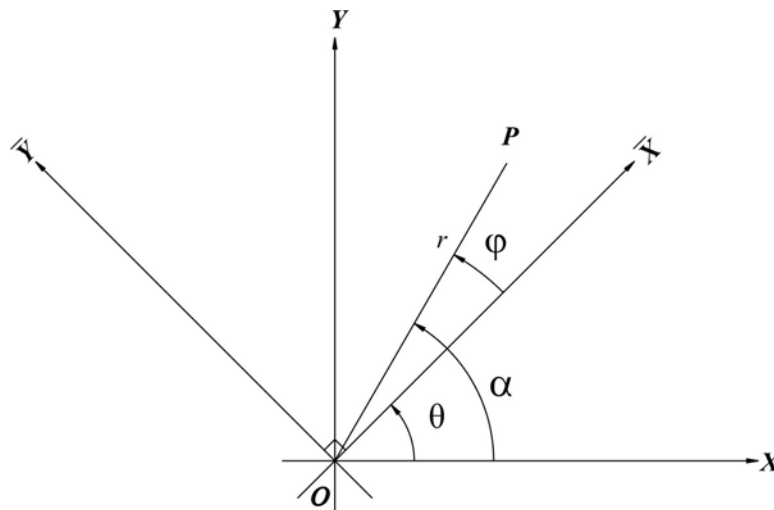


Рис. 2

Тогда новые декартовые координаты  $P$

$$\begin{cases} \bar{x} = r \cos \varphi, \\ \bar{y} = r \sin \varphi \end{cases} \quad (5)$$

Найдем, как принято говорить, “**новые декартовые координаты через старые**”. Т.к.  $\varphi = \alpha - \theta$ , то, используя (4) и (5), получим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= r \cos(\alpha - \theta) = r \cos \alpha \cos \theta + r \sin \alpha \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta, \\ \bar{y} &= r \sin(\alpha - \theta) = r \sin \alpha \cos \theta - r \cos \alpha \sin \theta = -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким же образом, используя  $\alpha = \varphi + \theta$ , можно получить обратное преобразование  $x(\bar{x}, \bar{y}), y(\bar{x}, \bar{y})$  (проделайте это!). Покажем другой простой способ. Итак, в силу (6)

$$\begin{cases} x \cos \theta + y \sin \theta = \bar{x} \\ -x \sin \theta + y \cos \theta = \bar{y} \end{cases} \quad (7)$$

В этой системе из двух уравнений известны  $\bar{x}, \bar{y}$ , а неизвестны  $x, y$ .

Решаем ее методом Крамера

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \bar{x} & \sin \theta \\ \bar{y} & \cos \theta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & \bar{x} \\ -\sin \theta & \bar{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix}} = \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta. \quad (8)$$

Упражнение 1. Докажите, что преобразование при повороте – ортогонально.

### 3.º Преобразования декартовых координат при одновременном || переносе и повороте осей

Рассмотрим общий случай преобразования координат – сначала || перенос начала координат, а затем вращение этого начала вокруг своей оси.

После 1-го преобразования (движения) новые координаты будут в соответствии с (2)  $\begin{cases} \bar{x} = x - x_0 \\ \bar{y} = y - y_0 \end{cases}$ . После 2-го преобразования, учитывая (7),

получим **прямое преобразование**

$$\begin{cases} \bar{x} \cos \theta + \bar{y} \sin \theta = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta = \bar{x} \\ -\bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta = \bar{y} \end{cases} \quad (9)$$

Т.к. общий детерминант системы (9) равен 1 (см. вывод 8), то легко найти **обратное преобразование**. Применим правило Крамера, (3), и получим

$$x = x_0 + \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta, \quad y = y_0 + \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta. \quad (10)$$

Принято в (9) и (10) употреблять не две черты надчеркивания, а одну. Мы ниже будем также следовать этой традиции [11, стр.50,2.1-10].

Упражнение 1. При выводе (9) сначала делали преобразование  $M$  - || перенос, а затем вращение  $R$ . Докажите, что  $M + R = R + M$ , (11) т.е. данные преобразования коммутативны.

Упражнение 2. Докажите, что и **прямое, и обратное преобразование координат – ортогональны**. □

Отметим следующее важное свойство. При || переносах и вращениях геометрические свойства объектов не меняются. С другой стороны, при этом

могут существенно упроститься уравнения, описывающие либо целый объект, либо его исследуемую часть. Собственно говоря, **искусство математика в большой степени состоит в том, чтобы решать задачи в той системе координат, в которой описывающие объект уравнения были бы наиболее простыми.**

Для примера возьмем следующую задачу. Пусть даны две пересекающиеся окружности. Найти координаты точек пересечения.

1) Попробуйте решить эту задачу в общем виде, где каждая окружность описывается уравнением  $(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = R_i^2$ , где  $\{x_i, y_i\}$  - координаты центра, а  $R_i$  - радиус окружности.

2) Попробуйте расположить окружности вдоль оси абсцисс и один из центров окружности (любой) поместить в центр координатной системы. В этом случае задача решается при помощи теоремы Пифагора за пару минут. Остается добавить к решению преобразование центров окружностей в новую систему координат, а затем перевести готовые решения в старую систему координат. Настоятельно советуем запрограммировать эту задачу на любом доступном Вам языке программирования. Исследуйте случаи, когда число полученных решений равно 2, 1, 0.

### 1.5.2. Координаты проекции точки на прямую

#### 1° вариант

Найдем точку основания перпендикуляра, опущенного из внешней точки  $R : \{x_r, y_r\}$  на прямую (см.рис.1). Для этого проведем через эту точку прямую  $y = k_r x + b_r$ ,

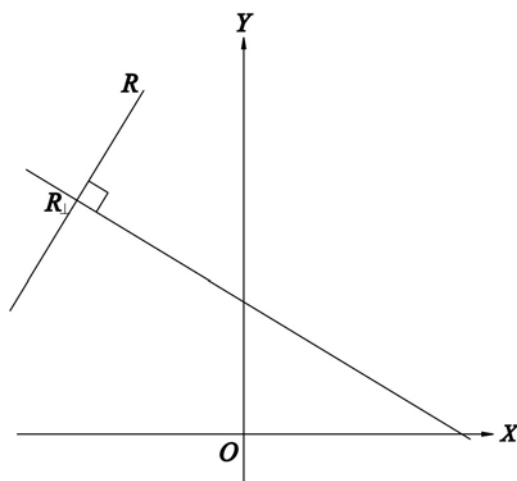


Рис. 1

$\perp$  прямой  $y = kx + b$ . Отсюда  $k_r = -\frac{1}{k}$ .

Подставляя координаты  $R$  в (\*), получим

$$y_r = -\frac{1}{k} x_r + b_r, \quad b_r = \frac{k y_r + x_r}{k}.$$

Искомую точку  $R_{\perp} : \{x_{\perp}, y_{\perp}\}$  найдем как результат пересечения двух прямых

$$\begin{cases} y = kx + b \\ y = -\frac{1}{k} x + \frac{k y_r + x_r}{k} \end{cases} \quad (1)$$

Решим это уравнение методом подстановки  $kx + b = -\frac{1}{k}x + \frac{ky_r + x_r}{k}$ ,

$$(k^2 + 1)x = ky_r + x_r - kb, \quad x_{\perp} = \frac{ky_r + x_r - kb}{k^2 + 1},$$

$$y_{\perp} = k \frac{ky_r + x_r - kb}{k^2 + 1} + b = \frac{k^2 y_r + kx_r - k^2 b + k^2 b + b}{k^2 + 1} = \frac{k^2 y_r + kx_r + b}{k^2 + 1}.$$

$$\text{Выпишем решение } \begin{cases} x_{\perp} = \frac{ky_r + x_r - kb}{k^2 + 1} \\ y_{\perp} = \frac{k^2 y_r + kx_r + b}{k^2 + 1} \end{cases} \quad (2)$$

Как уже было отмечено, тангенс угла наклона прямой  $k$  может принимать значение  $\infty$  и тем самым вызывать соответствующее компьютерное прерывание. Поэтому в данной работе представление прямой в виде  $y = kx + b$  служит только для вывода промежуточных формул. Преобразуем (2), используя коэффициенты прямой, заданной в общем виде  $k = -\frac{A}{B}, b = -\frac{C}{B}$ ,

$$\begin{cases} x_{\perp} = \frac{-\frac{A}{B}y_r + x_r - \frac{AC}{B^2}}{\frac{A^2}{B^2} + 1} \\ y_{\perp} = \frac{\frac{A^2}{B^2}y_r - \frac{A}{B}x_r - \frac{C}{B}}{\frac{A^2}{B^2} + 1} \end{cases} = \begin{cases} x_{\perp} = \frac{-ABy_r + B^2x_r - AC}{A^2 + B^2} \\ y_{\perp} = \frac{A^2y_r - ABx_r - BC}{A^2 + B^2} \end{cases} \quad (3)$$

Запишем (3) в матричном виде

$$\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_0 + \mathbf{O}_1 \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \frac{-C}{A^2 + B^2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{pmatrix} B^2 & -AB \\ -AB & A^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Обратим внимание, что  $\det(\mathbf{O}_1) = A^2B^2 - (-AB)(-AB) = 0$ ,

что говорит о том, что проекционное преобразование не сохраняет длину исходного вектора, т.е. не является ортогональным. Преобразование, у которого определитель равен 0, не является аффинным (термин Л.Эйлера), т.е. взаимно-однозначным.

Вынесем общие множители из строк матрицы  $\mathbf{O}_1$  в диагональную матрицу. Тогда

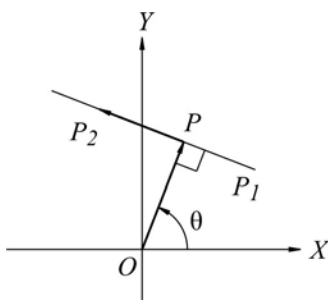


Рис. 2.

$$\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_0 + O_{p_1} O_{p_2} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \frac{-C}{A^2 + B^2} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} + \frac{1}{A^2 + B^2} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & -A \\ -B & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где  $\det(O_{p_2}) = AB - AB = 0$ . Отсюда сразу следует, что и  $\det(O_{p_1} O_{p_2}) = \det(O_{p_1}) \det(O_{p_2}) = 0$ .

Таким образом, проекционное преобразование (не путать с проективным преобразованием!) некоторой исходной точки на плоскости состоит из векторной суммы двух слагаемых, причем первое слагаемое - вектор, зависящий от параметров прямой и не зависящий от координат этой точки, а второе слагаемое имеет вид произведения матрицы на вектор координат исходной точки и определитель этой матрицы всегда равен 0.

Продолжим исследовать (6) и сделаем замену коэффициентов прямой, заданных в общем виде, на коэффициенты прямой в нормальной форме.

Таким образом  $A = \pm\sqrt{A^2 + B^2} \cos \theta$ ,  $B = \pm\sqrt{A^2 + B^2} \sin \theta$ ,  $C = \pm\sqrt{A^2 + B^2} p_L$ .

Легко проверить, что коэффициент  $\pm\sqrt{A^2 + B^2}$  входит в квадрате и в числитель, и в знаменатель в оба слагаемых (6). Поэтому на этот коэффициент можно сократить и сделать подстановку, переходя к параметрам нормального уравнения прямой  $A \rightarrow \cos \theta$ ,  $B \rightarrow \sin \theta$ ,  $C \rightarrow p_L$ . Отсюда

$$\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = \mathbf{Q}_0 + O_{p_1} O_{p_2} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = \frac{p_L}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \frac{1}{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix} = p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Если  $R: \{x_r, y_r\} = \{0, 0\}$  совпадает с центром координат, то, естественно, что

$$\{x_{\perp}, y_{\perp}\} = \mathbf{Q}_0 = p_L \{\cos \theta, \sin \theta\}. \quad (8)$$

**Выражение (8) есть нормальный вектор прямой** (см.рис.2). Напомним, что он начинается в начале координат и заканчивается в точке проекции начала координат на прямую.

Приведем еще несколько вариантов решения этой задачи. Пользуясь ассоциативным законом для произведения матриц  $A(BC) = (AB)C$ , найдем произведение матриц  $O_{p_1} O_{p_2}$ . Из (7) получим



$$\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Вернемся к (7) и зададим координаты  $\mathbf{R}$  в полярных координатах, в которых центр полярных координат совпадает с центром координат в декартовой системе координат, а полярная ось совпадает с осью абсцисс. Следовательно,  $\mathbf{R} : r\{\cos \psi, \sin \psi\}$ , где  $r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2}$ ,  $\psi = \text{ang}(\mathbf{R}, \mathbf{O}) = \text{ang}(\theta, \{x_r, y_r\})$ .

Тогда

$$\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \psi \\ r \sin \psi \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Или, окончательно

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} &= p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta & -\cos \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} = p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \\ + r \begin{pmatrix} \sin \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi \end{pmatrix} &= p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin(\psi - \theta) \\ \cos \theta \sin(\psi - \theta) \end{pmatrix} = \\ = p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \sin(\psi - \theta) \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

## 2° вариант

В этом случае вывод конечных формул значительно короче. Воспользуемся системой координат  $\overline{XY}$  с центром в  $P$ , повернутой относительно исходной системы на угол  $\theta$  (см. рис.3). В этой системе проекция  $\mathbf{R}$  осуществляется на новую ось ординат в  $\mathbf{R}_{\perp}$ .

Решение находится сразу

$$\begin{cases} \bar{y} = r \sin(\psi - \theta) \\ \bar{x} = 0 \end{cases}. \quad (12)$$

Пользуясь формулами перехода к старой системе координат (1.5.1.-10)

$$\begin{cases} x = x_0 + \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta \\ y = y_0 + \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta \end{cases}, \quad (13)$$

где  $\{x_0, y_0\} = p_L\{\cos \theta, \sin \theta\}$ , а угол наклона новой системы координат по отношению к старой, совпадает с  $\theta$ , получим

$$\begin{cases} x_{\perp} = p_L \cos \theta - r \sin \theta \sin(\psi - \theta) \\ y_{\perp} = p_L \sin \theta + r \cos \theta \sin(\psi - \theta) \end{cases}, \quad (14)$$

что совпадает с (11).

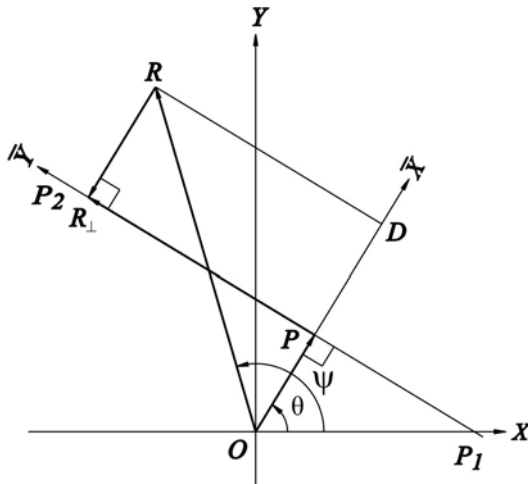


Рис. 3

Найдем известную формулу расстояния от точки до прямой [16, §63 - §64]. Перед этим выскажем замечание общего характера. Геометрические свойства объектов [18, §78], в частности длины отрезков, углы между векторами (лучами) независимы (инвариантны) от выбора системы координат. Подчеркнем, что это касается только конечных результатов расчета. С другой стороны, и координаты, и направления лучей, входящие во все формулы, должны браться в той системе координат, в которой вычисляется данная формула.

Расчет сразу можно сделать в исходной системе координат (т.к. он несложен)

$$\begin{aligned} |RR_{\perp}| &= |PD| = |OD - p_L| = |OR \cos(\psi - \theta) - p_L| = |r \cos(\psi - \theta) - p_L| = \\ &= |r(\cos \psi \cos \theta + \sin \psi \sin \theta) - p_L| = |r \cos \psi \cos \theta + r \sin \psi \sin \theta - p_L| = |x_r \cos \theta + y_r \sin \theta - p_L| \end{aligned} \quad (15)$$

(ср. [18, §103,2], [16, §63,1], [16, §64]).

Используя рис. 3, найдем в  $\triangle ORD$  длину другого катета -  $|RD|$

$$|PR_{\perp}| = |RD| = |r \sin(\psi - \theta)| = |r \sin \psi \cos \theta - r \cos \psi \sin \theta| = |y_r \cos \theta - x_r \sin \theta|. \quad (16)$$

Тот же результат, выраженный с помощью определителя, взятого по абсолютной величине  $|PR_{\perp}| = ABS \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ x_r & y_r \end{pmatrix}$ . (16a)

Упражнение 1. Найдите, в каком случае центр координат находится по одну сторону от точки пересечения прямых, а когда по разные стороны (см. рис.1.4.8.-1,2).

Упражнение 2. Докажите, что проекционное преобразование не ортогонально.

### 1.5.3. Вращение точек

Пусть некоторую точку  $A$  нужно повернуть на некоторый угол  $\alpha$  относительно выбранной точки  $C$  - локального центра координат. В результате

поворота  $A$  займет место  $B$ . Для нескольких точек задача решается в цикле по аналогии. Итак:

- 1) найдем расстояние между  $A$  и  $C$   $r = \text{dist}(A, C)$ ;
- 2) найдем угол, под которым вращаемая точка видна из локального центра координат  $C$   $\alpha_0 = \text{ang}(C, A)$ ,
- 3) т.к. расстояние при вращении между точками  $A$  и  $C$  не меняется, то получим искомые (декартовые) координаты  $B$

$$B = \{C_x + r \cos(\alpha_0 + \alpha), C_y + r \sin(\alpha_0 + \alpha)\}. \square \quad (1)$$

В том случае, если угол поворота зависит от времени равномерно, т.е.  $\alpha = \omega t$ , то можно знать положение вращающейся точки в любой момент времени  $B = \{C_x + r \cos(\omega t + \alpha_0), C_y + r \sin(\omega t + \alpha_0)\}$ . (2)

(Для вращения прямых понадобятся формулы отклонения точки от прямой - поэтому этот вопрос изложим ниже.)

#### 1.5.4. Зеркальные отображения точек и лучей

##### 1.5.4.1. Зеркальные отображения точек

Определим зеркальное отображение (и вместе с ним алгоритм 1)  $A$  по отношению к некоторой прямой, заданной двумя точками  $Z_1, Z_2$ .

##### 1° Алгоритм

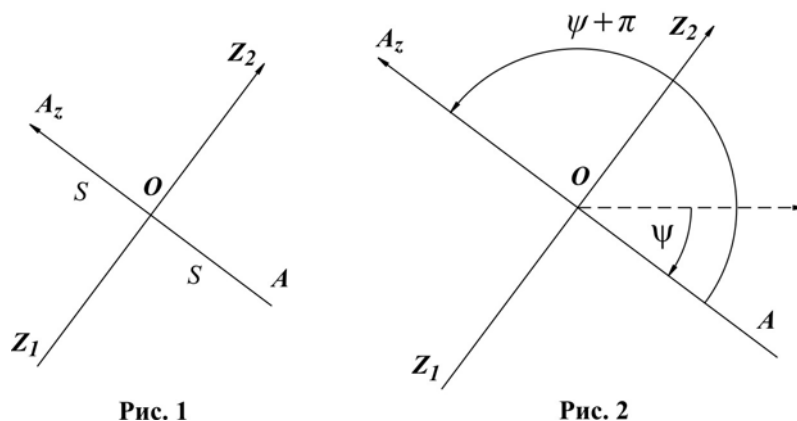


Рис. 1

Рис. 2

- 1) опускаем из  $A$  перпендикуляр на эту прямую (или ее продолжение);
- 2) вычисляем расстояние  $S$  от  $A$  до  $O$  основания перпендикуляра; продолжаем перпендикуляр от  $O$  дальше на такое же расстояние  $S$ , сохраняя направление от  $A$  до  $O$  (см. рис.1).

Из п.3) следует, что чем дальше от оси стоит исходная точка (прообраз), тем дальше по другую сторону от оси стоит ее зеркальный образ.

### 2° Алгоритм

Можно заменить п.3) поворотом отрезка  $AO$  вокруг центра  $O$  на  $\pi$  (см. рис.2). Назовем этот вариант алгоритмом 2.

### 3° Алгоритм

Самым простым способом (с точки зрения преобразования координат) выполнить зеркальное отображение можно тогда, когда зеркальная ось совпадает осями координат: с осью абсцисс или ординат. Для оси абсцисс  $P : \{x, y\} \rightarrow P_z : \{x, -y\}$ , а для оси ординат  $Q : \{x, y\} \rightarrow Q_z : \{-x, y\}$  (см. рис.3). Рассмотрим примеры в табл.1.

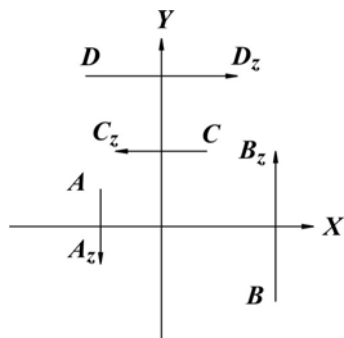


Рис. 3

Зеркальная ось	X		Y	
Исходные Точки	$A : \{-8, 5\}$	$B : \{15, -1\}$	$C : \{6, 10\}$	$D : \{-10, 20\}$
Зеркальные Точки	$A_z : \{-8, -5\}$	$B_z : \{15, 10\}$	$C_z : \{-6, 1\}$	$D_z : \{10, 20\}$

Табл.1.

Из этих экспериментов уже можем сделать некоторые выводы: **если зеркальная ось расположена горизонтально, то получаем вертикально расположенные симметричные точки, а если ось расположена вертикально – то горизонтально симметрично расположенные точки.** Это свойство следует из определения зеркального отображения точек - **ось симметрии и направление симметрии взаимно  $\perp$ .**

Для определенности выберем в качестве зеркальной оси ось ординат и запишем в матричном виде зеркальное преобразование

$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Обратим внимание на известный факт, что определитель зеркального преобразования  $\det(M) = 1 \cdot (-1) = -1$ .

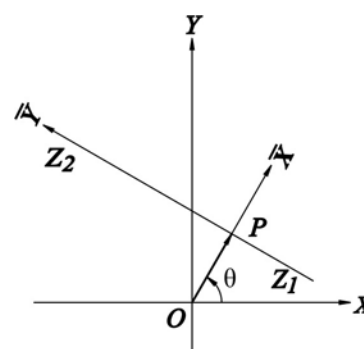


Рис. 4

Обобщая данный вариант, выберем положение зеркальной оси относительно старой системы координат произвольно. Новую систему координат определим таким образом, что данная зеркальная ось будет также служить и осью ординат (см. рис.4), а начало новой системы координат удобно выбрать в  $P: p_L\{\cos\theta, \sin\theta\}$  - проекции начала координат на зеркальную ось.

Исходя из этого, можем построить “зеркальный” алгоритм получения зеркальных координат:

- 1) преобразуем координаты некоторой точки в новую систему координат;
- 2) меняем знак у новой абсциссы этой точки;
- 3) возвращаемся в исходную систему координат.

Учитывая, что формулы преобразования из одной прямоугольной правой декартовой системы координат в другую прямоугольную правую декартову систему координат при повороте осей и смещении начала координат относительно просты, можем получить не только численный алгоритм, но и формулы преобразования координат из исходной точки в зеркальную. Обращаем внимание на то, что при нашем отображении не меняем ориентацию системы: системы координат как исходная, так и новая остаются правыми системами координат.

Исходя из (1.5.1.-9), запишем **формулы преобразования в новую систему координат**

$$\begin{cases} \bar{x} = (x-x_0)\cos\theta + (y-y_0)\sin\theta, \\ \bar{y} = -(x-x_0)\sin\theta + (y-y_0)\cos\theta \end{cases} \quad (1)$$

**и формулы возврата (1.5.1.-10) в исходную систему координат**

$$\begin{cases} x = x_0 + \bar{x}\cos\theta - \bar{y}\sin\theta, \\ y = y_0 + \bar{x}\sin\theta + \bar{y}\cos\theta \end{cases} \quad (2)$$

В этом случае роль угла  $\theta$  играет угол между нормалью к зеркальной оси и осью абсцисс исходной системы координат. Меняя знак  $\bar{x} = -\bar{x}$ , получим зеркальную абсциссу в новой системе координат.

Для сокращения записи при выводе, временно, начало новой системы координат в  $P: p_L\{\cos\theta, \sin\theta\}$  оставим в виде  $\{x_0, y_0\}$ . Теперь выполним все подстановки, и найдем зеркальные координаты  $\{x_z, y_z\}$  произвольной точки  $\{x, y\}$  в исходной системе координат:

$$\begin{aligned}
x_z &= x_0 + \bar{x} \cos \theta - \bar{y} \sin \theta = x_0 - ((x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta) \cos \theta - (-(x - x_0) \sin \theta + \\
&+ (y - y_0) \cos \theta) \sin \theta = x_0 - x \cos^2 \theta + x_0 \cos^2 \theta - y \cos \theta \sin \theta + y_0 \cos \theta \sin \theta + x \sin^2 \theta + \\
&- x_0 \sin^2 \theta - y \cos \theta \sin \theta + y_0 \cos \theta \sin \theta = (1 + \cos^2 \theta - \sin^2 \theta)x_0 + (\cos \theta \sin \theta \\
&+ \cos \theta \sin \theta)y_0 + (-\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)x + (-\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta)y = \\
&= (2 \cos^2 \theta)x_0 + (\sin 2\theta)y_0 - (\cos 2\theta)x - (\sin 2\theta)y, \tag{3a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_z &= y_0 + \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta = y_0 - ((x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta) \sin \theta + (-(x - x_0) \sin \theta + \\
&+ (y - y_0) \cos \theta) \cos \theta = y_0 - x \cos \theta \sin \theta + x_0 \cos \theta \sin \theta - y \sin^2 \theta + y_0 \sin^2 \theta - x \cos \theta \sin \theta + \\
&+ x_0 \cos \theta \sin \theta + y \cos^2 \theta - y_0 \cos^2 \theta = (\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta)x_0 + (1 + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta)y_0 + \\
&+ (-\cos \theta \sin \theta - \cos \theta \sin \theta)x + (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)y = (\sin 2\theta)x_0 + (2 \cos^2 \theta)y_0 + \\
&- (\sin 2\theta)x + (\cos 2\theta)y. \tag{3б}
\end{aligned}$$

Запишем эти результаты в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \mathbf{M}_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cos^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & 2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Определитель второй матрицы  $\det(\mathbf{M}_1) = -\cos^2 2\theta - \sin^2 2\theta = -1$ , что связано с зеркальностью отображений [16, §181]. Таким образом, **зеркальные отображения меняет ориентацию любого угла или треугольника, а также сохраняют длину между двумя точками.**

**Упражнение 1. Докажите, что зеркальные преобразования ортогональны. □**

Продолжим преобразования. В 1-м слагаемом: сделаем обратную замену  $\{x_0, y_0\} = p_L \{\cos \theta, \sin \theta\}$ , вынесем одинаковые множители  $2 \cos \theta$  из 1-й строки и  $2 \sin \theta$  из 2-й строки матрицы в диагональную матрицу. Во 2-м слагаемом представим отображаемую точку в полярных координатах:  $\{x, y\} = r \{\cos \psi, \sin \psi\}$ .

Тогда:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} &= 2p_L \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \cos \theta & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} = \\
&= 2p_L \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \sin \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \\ \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -\cos 2\theta \cos \psi - \sin 2\theta \sin \psi \\ -\sin 2\theta \cos \psi + \cos 2\theta \sin \psi \end{pmatrix} = 2p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \\
&- r \begin{pmatrix} \cos(\psi - 2\theta) \\ \sin(\psi - 2\theta) \end{pmatrix} = 2p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \sqrt{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \cos(\psi - 2\theta) \\ \sin(\psi - 2\theta) \end{pmatrix}. \tag{5}
\end{aligned}$$

Ниже понадобится, также, и такой вариант формулы

$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = 2p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Вычисление вектора  $2p_L\{\cos\theta, \sin\theta\}$  производится только 1 раз для данной зеркальной прямой. При большом количестве отображаемых точек, этот факт может существенно улучшить показатели быстродействия данного алгоритма. Кроме того, и для (4), и для (5) вычисление этого вектора можно интерпретировать как зеркальное отображение начала координат  $O \rightarrow O_z$ . Запишем это

$$\{x_z, y_z\} = O_z + M_1\{x, y\}. \quad (7)$$

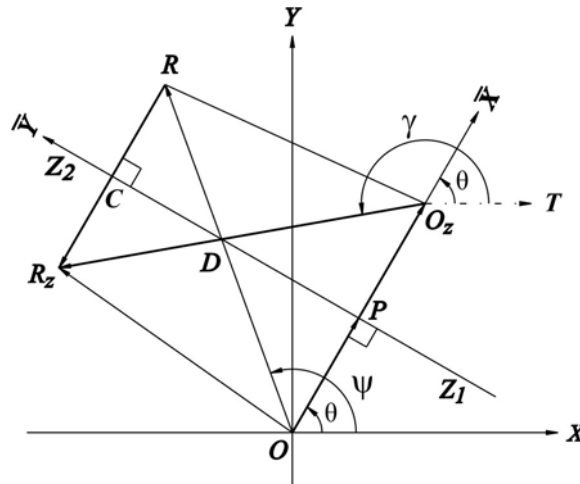


Рис. 5

Рассмотрим интерпретацию (5) (см. рис.5). Отложим от  $P$  на продолжении нормали  $OP$  зеркальной оси  $Z_1Z_2$  отрезок  $p_L$ , получая  $O_z$ . (Таким образом,  $|OP_z| = 2p_L$ .) От  $P_z$  радиусом  $r = |OR|$  под углом  $\gamma = \pi + (\psi - 2\theta)$  к оси абсцисс откладываем искомую  $R_z$ . Докажем, что  $|RC| = |CR_z|$  и  $\angle RCD = \frac{\pi}{2}$ , т.е. что таким образом получено зеркальное отображение.

Сначала объясним, откуда появилось число  $\pi$  в угле  $\gamma$ . Оно появилось из-за знака “-” перед радиусом  $r$  в (5). Действительно, противоположное направление добавляет  $\pi$  к любому углу.

Докажем теперь, что  $\triangle DOO_z$  равнобедренный. Для этого достаточно доказать, что углы при его основании равны. Найдем их.

$$\angle DOO_z = \psi - \theta.$$

$$\angle OO_zD = \text{ang}(O_z, O) - \text{ang}(O_z, D) = \pi + \text{ang}(O, O_z) - \gamma = \pi + \theta - \pi + \psi - 2\theta = \psi - \theta.$$

Отсюда следует, что  $\triangle RDR_z$  также равнобедренный. Действительно  $|RD| = r - |OD|$ ,  $|R_zD| = r - |OO_z| = r - |OD|$ . Из того, что  $DP$  в  $\triangle DPO_z$  является

биссектрисой, следует, что ее продолжение -  $CD$  в  $\Delta RDR_z$  также биссектриса, медиана и высота.

### 1.5.4.2. Зеркальные отображения лучей

Напомним, что **луч** – это вектор бесконечной длины, т.е. объект, **имеющий начало и направление**. Направления лучей вычисляются между некоторым направлением луча, задаваемый обычно с помощью вектора, и лучом с нулевым направлением, который задается направлением полярной оси.

Вектор, задающий направление луча, можно определить, например, при помощи двух различных точек  $P_1, P_2$  на самом луче. При зеркальном отображении луча относительно зеркальной оси  $Z_1Z_2$ , наклоненной к оси  $X$  под углом  $\theta$ , эти точки отображаются в  $P_{1z}, P_{2z}$ , и по ним, с помощью  $ang(P_{1z}, P_{2z})$ , можно найти новое, зеркальное значение направления луча (см.рис.1). Найдем его.

При этом известно

$$ang(P_1, P_2) = ang(\mathbf{0}, \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}) = ang(\mathbf{0}, \{r \cos \alpha, r \sin \alpha\}) = \alpha. \quad \text{Построим}$$

нормальный вектор  $p_L \{\cos \tilde{\theta}, \sin \tilde{\theta}\}$  к зеркальной оси  $Z_1Z_2$ . Тогда  $\tilde{\theta} = \theta + \frac{\pi}{2}$ , где

$\tilde{\theta}$  - угол направления зеркальной оси. Из (1.5.1.1.-4) следует

$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = \mathbf{M}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\tilde{\theta} & -\sin 2\tilde{\theta} \\ -\sin 2\tilde{\theta} & \cos 2\tilde{\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \{M_{0x}, M_{0y}\} + \{-\cos 2\tilde{\theta} x - \sin 2\tilde{\theta} y, \\ -\sin 2\tilde{\theta} x + \cos 2\tilde{\theta} y\}. \quad (1)$$

Найдем искомый угол направления зеркального луча

$$\begin{aligned} \alpha_z &= ang(P_{1z}, P_{2z}) = ang(\mathbf{0}, \{-\cos 2\tilde{\theta} (x_2 - x_1) - \sin 2\tilde{\theta} (y_2 - y_1), \\ &-\sin 2\tilde{\theta} (x_2 - x_1) + \cos 2\tilde{\theta} (y_2 - y_1)\}) = ang(\mathbf{0}, \{-\cos 2\tilde{\theta} r \cos \alpha - \sin 2\tilde{\theta} r \sin \alpha, \\ &-\sin 2\tilde{\theta} r \cos \alpha + \cos 2\tilde{\theta} r \sin \alpha\}) = ang(\mathbf{0}, -\cos(2\tilde{\theta} - \alpha), -\sin(2\tilde{\theta} - \alpha)) = \\ &= \pi + ang(\mathbf{0}, \cos(2\tilde{\theta} - \alpha), \sin(2\tilde{\theta} - \alpha)) = \pi + (2\tilde{\theta} - \alpha) = \pi + (2\theta + \pi - \alpha) = 2\theta - \alpha. \quad (2) \end{aligned}$$

Т.к. повороты на  $2\pi$  не меняют значения тригонометрических формул, то отбрасываем это слагаемое.  $\square$



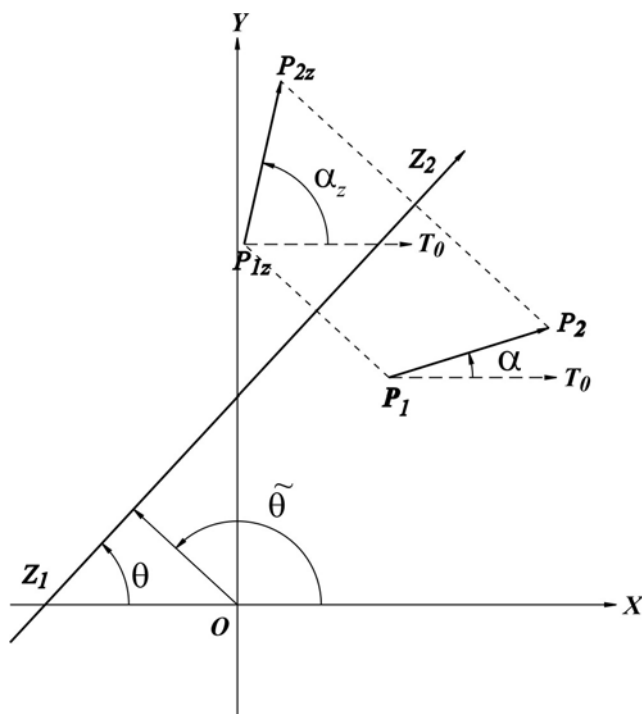


Рис. 1

*Следствие* из (2). Как и в случае образов зеркальных точек, **чем больше от зеркальной оси отклоняется исходный луч, тем дальше по другую сторону от этой оси отклоняется зеркальный луч.**

### 1.5.5. Преобразование гомотетии ( $y' \rightarrow ky, x' \rightarrow kx$ )

У данного преобразования есть целый ряд замечательных свойств (см. [16, §179, пример 4]).

Запишем преобразование гомотетии  $\begin{cases} x' = kx + 0 \cdot y \\ y' = 0x + ky \end{cases}$  или  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ,

$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ . Детерминант этого преобразования выражается формулой

$\text{Det } A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix} = k^2 > 0$ . Гомотетия оставляет точку центра координат на месте

(поэтому такое преобразование называется **центрафинным**), **изменяет длину исходного отрезка в  $k\sqrt{2}$  раз (докажите!)**, а также переводит прямую в || прямую и сохраняет ориентацию.

Докажем гомотетичный перевод прямой в  $\parallel$  прямую. Действительно, пусть некоторая прямая задана уравнением  $y = lx + b$ . Применим преобразование гомотетии  $ky = l'kx + b$ , откуда  $y = lx + \frac{b}{k}$ . (1)

Таким образом, имеем прямую с тем же тангенсом угла наклона  $l$ , но с другим свободным членом, т.е.  $\parallel$  прямую.

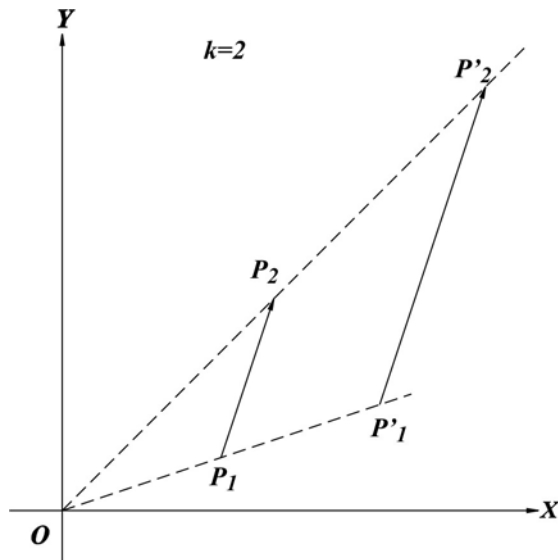


Рис. 1

Упражнение 1. Докажите, что между гомотетичным образом некоторой точки  $\{x', y'\}$  и ее прообразом  $\{x, y\}$  расстояние равно  $|k-1|\sqrt{x^2 + y^2}$ . (2)

Упражнение 2. Докажите, что между гомотетичным образом прямой и исходной прямой расстояние равно  $\left| \frac{b(k-1)}{k} \right| \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}$ . (3)

Решение. Расстояние между  $\parallel$  прямыми равно абсолютной величине разности между ее нормальными векторами. Исходное уравнение нормализуется следующим образом  $y = lx + b$ ,  $y - lx - b = 0$ ,  $\frac{y - lx - b}{\sqrt{1+l^2}} = 0$ .

Аналогично преобразуется гомотетичное уравнение  $ky = l'kx + b$ ,  $\frac{ky - klx - b}{k\sqrt{1+l^2}} = 0$ .

Отсюда

$$d = \left| \frac{b}{\sqrt{1+l^2}} - \frac{b}{k\sqrt{1+l^2}} \right| = \left| \frac{b(k-1)}{k} \right| \frac{1}{\sqrt{1+l^2}}. \text{ Если же уравнение прямой задано в}$$

нормальной форме Гессе  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$ , то искомое расстояние равно

$$d = \frac{p_L}{\sqrt{2}} \left| \frac{k\sqrt{2}-1}{k} \right|. \quad (4)$$

Упражнение 3. Найти площадь трапеции, образованной единичным отрезком и соответствующим ему отрезком гомотетичной прямой.

$$\text{Ответ. } |k-1| \frac{b}{2\sqrt{1+l^2}} \quad (5)$$

Упражнение 4. Доказать, что преобразование гомотетии либо сохраняет углы, либо изменяет их при  $k < 0$  на слагаемое  $\pi$  ( $180^\circ$ ).

Доказательство. Для сохранения угла необходимо и достаточно выполнения условий (1.2.1.6°): сохранение знаков компонентов вектора  $\{\Delta X, \Delta Y\}$  и значения отношения  $\left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|$ . Пусть  $x'_1 = kx_1$ ,  $y'_1 = ky_1$ ,  $x'_2 = x_2$ ,  $y'_2 = ky_2$ .

Тогда

$$\{\Delta X, \Delta Y\}' = k\{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} \text{ и } \left| \frac{\Delta Y'}{\Delta X'} \right| = \left| \frac{\Delta Y}{\Delta X} \right|. \text{ Следовательно, при } k > 0 \text{ угол}$$

сохраняется, а при  $k < 0$  преобразование гомотетии изменяет его на слагаемое  $\pi$  ( $180^\circ$ ). Если же это углы треугольника, то меняется их порядок.

Случай  $\Delta X = 0$  предлагаем рассмотреть читателю.

### 1.5.6. Преобразования симметрии

**Определение.** Для каждой исходной точки из некоторого множества точек проводим прямую, соединяющую эту точку с точкой центра симметрии, и продолжаем эту прямую на расстояние, равное расстоянию от исходной точки до точки симметрии. Полученная на конце данной прямой точка, называется симметричным образом, а данное преобразование - симметричным или центральносимметричным (см. рис.1) □.

Докажем, что преобразование симметрии сводится к суперпозиции 2-х зеркальных преобразований (некоторые авторы предпочитают в этом

месте использовать термин произведение или сумма преобразований), причем точка центра симметрии является точкой пересечения 2-х взаимно перпендикулярных зеркальных осей.

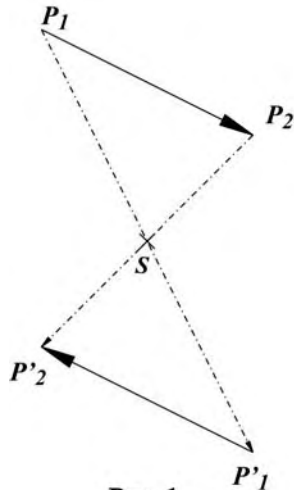


Рис. 1

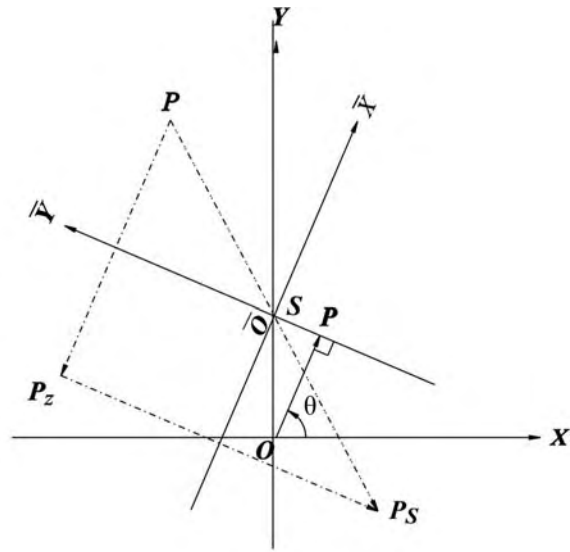


Рис. 2

Для этого возьмем произвольно выбранную точку  $P : \{x, y\}$  в исходной системе координат и отобразим ее через центр симметрии  $S : \{x_1, y_1\}$  получая симметричный образ  $P_S : \{x_s, y_s\}$  (см.рис.2). С другой стороны, сделаем два взаимно перпендикулярных зеркальных отображения  $P \rightarrow P_Z \rightarrow P_S$ .

Напомним, что расчеты зеркальных отображений удобно делать в специальной новой системе координат, в которой оси координат расположены вдоль зеркальных осей (см.1.5.4.1.). Расположим начало новой системы в центре симметрии  $S : \{x_1, y_1\}$ , а взаимно перпендикулярные зеркальные оси  $\overline{X}\overline{Y}$  ориентируем произвольно (впоследствии убедимся, что их ориентация не имеет значения, т.е. эту пару осей можно вращать на произвольный угол с осью в центре симметрии). В новой системе координат сделаем зеркальные отображения (неважно в каком порядке) и от оси  $\overline{X}$ , и от оси  $\overline{Y}$ , получая  $\overline{\overline{x}} = -\overline{x}$ ,  $\overline{\overline{y}} = -\overline{y}$ . Как и в разделе (1.5.4.1.), измеряем угол  $\theta$  между нормалью к зеркальной оси абсцисс оси  $\overline{X}$  и осью абсцисс исходной системы координат.

Выполним все подстановки, и найдем симметричные координаты (см.1.5.4.-10)

$$\begin{aligned} x_s &= x_1 + \overline{\overline{x}} \cos \theta - \overline{\overline{y}} \sin \theta = x_1 - ((x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta) \cos \theta + \\ &+ (- (x - x_1) \sin \theta + (y - y_1) \cos \theta) \sin \theta = x_1 - x \cos^2 \theta + x_1 \cos^2 \theta - y \cos \theta \sin \theta \\ &+ y_1 \cos \theta \sin \theta - x \sin^2 \theta + x_1 \sin^2 \theta + y \cos \theta \sin \theta - y_1 \cos \theta \sin \theta = 2x_1 - x, \end{aligned} \quad (1a)$$

$$\begin{aligned}
y_s &= y_1 + \bar{x} \sin \theta + \bar{y} \cos \theta = y_1 - ((x - x_1) \cos \theta + (y - y_1) \sin \theta) \sin \theta \\
&-(-(x - x_1) \sin \theta + (y - y_1) \cos \theta) \cos \theta = y_1 - x \cos \theta \sin \theta + x_1 \cos \theta \sin \theta \\
&- y \sin^2 \theta + y_1 \sin^2 \theta + x \cos \theta \sin \theta + -x_1 \cos \theta \sin \theta - y \cos^2 \theta + y_1 \cos^2 \theta = 2y_1 + y. \quad (16)
\end{aligned}$$

Докажем теперь, что расстояние от исходной точки до центра симметрии равно расстоянию от центра симметрии до симметричной точки. Действительно

$$(2x_1 - x - x_1)^2 + (2y_1 - y - y_1)^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2.$$

Нам осталось проверить, что все 3 точки лежат на одной прямой

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ 2x_1 - x & 2y_1 - y & 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (2)$$

В самом деле, если умножить 2-ю строку определителя на 2 и из результата вычесть 1-ю строку, то получится 3-я строка. Таким образом, строки определителя линейно зависимы.

Поскольку выбрали исходную точку произвольно, то доказали, что для всех исходных точек произведение двух, взаимно перпендикулярных зеркальных преобразований (отражений) с центром в центре симметрии, есть преобразование симметрии. □

На основании (1а), (1б), запишем преобразование симметрии в матричной форме

$$\begin{pmatrix} x_s \\ y_s \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Обратим внимание, что (3) имеет аддитивный характер. В силу этого, легко построить  $n$  симметричных отображений от  $n$   $S : \{x_i, y_i\}$  центров симметрии.

Так, при двух последовательных отображениях

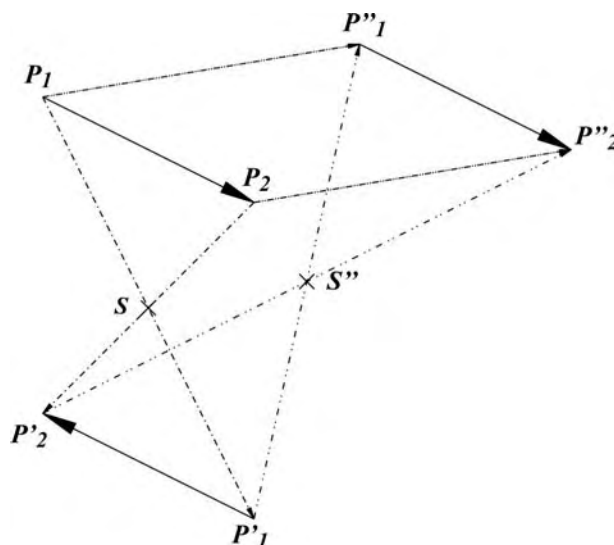


Рис. 4

$$\begin{pmatrix} x_{S2} \\ y_{S2} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (4)$$

получим || перенос (см.рис.4), в силу того, что знаки у  $x_s, x$  и  $y_s, y$  совпадают.

При  $n$  отображениях получим

$$\begin{pmatrix} x_{Sn} \\ y_{Sn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} 2 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (5)$$

причем при четных  $n$  имеем || перенос, при нечетных – результирующее симметрическое отображение [27,§2].

Упражнение 1. Доказать, что 4 точки (исходная, две зеркальных, последовательно отраженных относительно 2-х взаимно перпендикулярных осей, и одна симметричная) лежат на одной окружности. (В случае, если одна из зеркальных осей совпадает с исходной точкой, то в этом случае только 2 точки лежат на окружности – исходная и симметричная). Центр окружности совпадает с центром симметрии (см. рис.3).

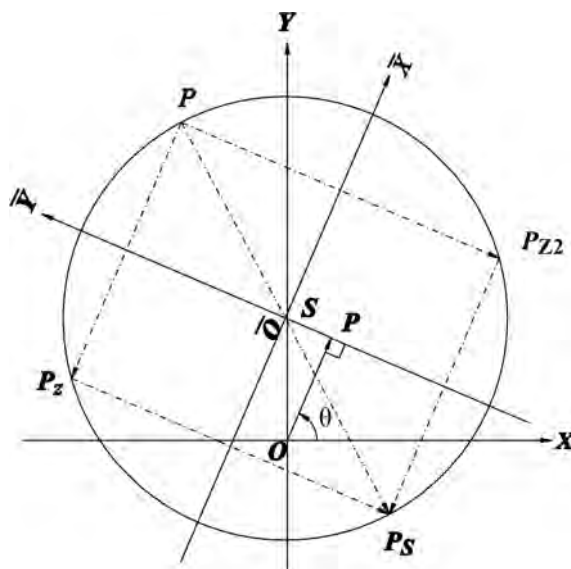


Рис. 3

Упражнение 2. На плоскости даны  $n$  точек ( $n$  нечетно и  $n \geq 3$ ) – середины сторон  $n$ -угольника. Постройте его вершины [27, §2, N13].

Решение. Предположим, что нашли 1-ю вершину. Начинаем симметричные отображения от нее, используя середины сторон. После первого отображения, используя (3), получим 2-ю вершину, потом 3-ю и т.д. На последнем шаге отображений опять вернемся к 1-й вершине. Таким образом, эта вершина для произведения всех промежуточных отображений (5) – неподвижна. Перепишем (5) для этого случая

$$\begin{pmatrix} x_{V1} \\ y_{V1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} 2 \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_{V1} \\ y_{V1} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

$$\text{Отсюда координаты 1-й вершины} \quad \begin{pmatrix} x_{V1} \\ y_{V1} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Далее очевидно.

Упражнение 3. Найти вершины треугольника, если известны координаты основания его медиан.

Решение. В соответствии с (7), если даны точки основания медиан произвольного треугольника (см.рис.5), то вершины треугольника определяются так

$$\begin{aligned} P_1 &: \{M_{12x} - M_{23x} + M_{13x}, M_{12y} - M_{23y} + M_{13y}\}, \\ P_2 &: \{M_{12x} + M_{23x} - M_{13x}, M_{12y} + M_{23y} - M_{13y}\}, \\ P_3 &: \{-M_{12x} + M_{23x} + M_{13x}, -M_{12y} + M_{23y} + M_{13y}\}. \end{aligned} \quad (8)$$

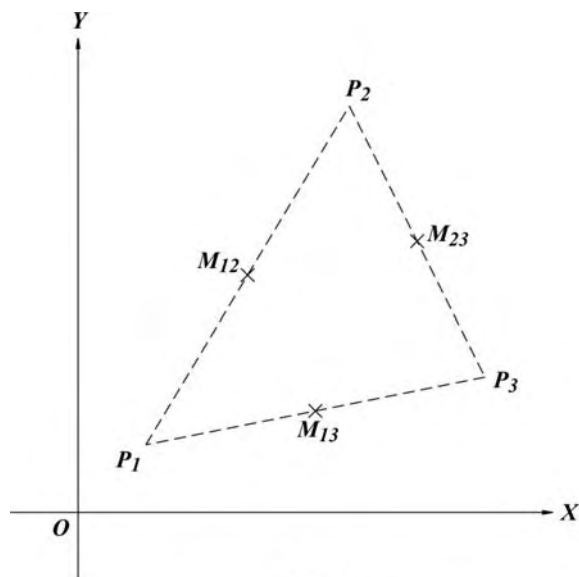


Рис. 5

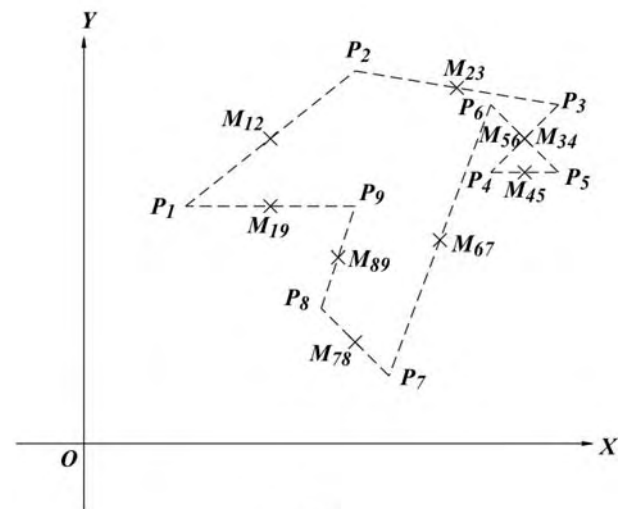


Рис. 6

2) Заметим, что если вычисляются координаты какой-нибудь из 3-х вершин, то координаты основания медианы напротив этой вершины берутся с отрицательным знаком,

Упражнение 4. Построить чертеж с собственными данными по аналогии с (рис.6) и найти вершины  $n$ -угольника, если известны середины его сторон.

Упражнение 5. Доказать, что преобразование симметрии ортогонально.

### 1.5.7. Сохранение углов при движениях

В данном разделе речь пойдет о сохранении углов некоторого треугольника (более корректно говорить о сохранении интервалов углов) и о линейных преобразованиях.

Очевидно, что  $\parallel$  перенос, вращения сохраняют треугольник, как “жесткую” фигуру. Более того: любые ортогональные преобразования (или движения) (напомним - сохраняющие длину) с определителем, равным 1 оставляют преобразованный треугольник равный данному. Это доказывается по 3-му признаку равенства треугольников. А напротив равных сторон, как известно, в равных треугольниках лежат равные углы.

Если же определитель ортогонального преобразования равен  $-1$  (это происходит при зеркальных отображениях), то равенство углов сохраняется, однако меняется порядок этих углов. (Сделайте чертеж!)

Кроме того, соответствующие углы равны и у подобных треугольников. Если коэффициент подобия больше нуля, но меньше единицы, то получаем



подобный треугольник меньший по размеру, чем исходный. Однако соответствующие углы у них фигур будут равны. Аналогичная картина получается при  $k > 1$  (рассмотрите ее сами).

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать варианты при  $k < 0$ .

Выскажем итоговое высказывание: **суперпозиция преобразований, каждое из которых сохраняет углы, сохраняет углы последнего треугольника по отношению к первому.**

(Известно, что **суперпозиция линейных преобразований, есть линейное преобразование** (докажите!).)

Т.к. рассматриваем углы треугольника как разность между лучами, т.е. корректнее в данном месте говорить о том, что **суперпозиция линейных преобразований, каждое из которых сохраняет интервал углов, оставляет после последнего преобразования интервал углов равный интервалу углов до преобразования.**

В следующем разделе продолжим рассматривать вопросы сохранения интервала углов.

### 1.5.8. Преобразование инверсии

См.[4], [13, стр.167] , [2, стр.34].

Возьмем некоторую окружность радиуса  $r$ , называемую **окружностью инверсии** или **основной окружностью**, и из ее **центра инверсии**  $O$  под некоторым углом к полярной оси проведем луч  $OL$ . Возьмем на этом луче две точки (см. рис.1):  $A_1$  внутри окружности и  $B_1$  вне окружности так, что

$$OP_1 \cdot OP_2 = r^2 \text{ или } r_1 r_2 = r^2. \quad (1)$$

Очевидно, что положение на луче  $OL$  точки  $A_1$  однозначно определяет положение  $B_1$   $OA_1 = \frac{r^2}{OB_1}$  и обратно, положение на луче  $B_1$  однозначно

определяет  $A_1$   $OB_1 = \frac{r^2}{OA_1}$ . Такое **взаимно однозначное соответствие между**

**точками внутри окружности и точками вне ее называется инволюционной зависимостью.** Исключением является точка центра инверсии – ей соответствуют все бесконечно удаленные точки по любому направлению.

Еще раз рассмотрим принцип инверсии в полярных координатах: выбираем полярный угол (направление луча  $OL$ ), а затем откладываем на луче полярный радиус  $OA_1$  или  $OB_1$ . (Собственно говоря, можно сначала выбирать значение радиуса, а затем угол.)

Величину  $r^2$  называют **степенью инверсии**. Если взять  $r=1$ , то  $r_1 = \frac{1}{r_2}$ .

Поэтому **принцип отображения инверсии называют еще принципом обратных радиусов**.

Очевидно, также следующее:

- 1) если  $A_1$  изнутри стремится к окружности инверсии ( $OA_1 \rightarrow r$ ), то  $B_1$  стремится к той же окружности с внешней стороны ( $OB_1 \rightarrow r$ );
- 2) если  $A_1$  стремится к центру окружности инверсии ( $OA_1 \rightarrow 0$ ), то  $B_1$  стремится к бесконечно удаленной точке по направлению луча ( $OB_1 \rightarrow \infty$ );
- 3) дважды выполненное преобразование инверсии равно тождественному преобразованию. В самом деле: после первого преобразования  $A_1$  переходит в  $B_1$ , а после второго  $B_1$  переходит в  $A_1$ . Формально эти операции записываются так:  $In(A_1) = B_1$ ;  $In(B_1) = A_1$ , а двойное применение инверсии  $In(In(A_1)) = A_1$ .

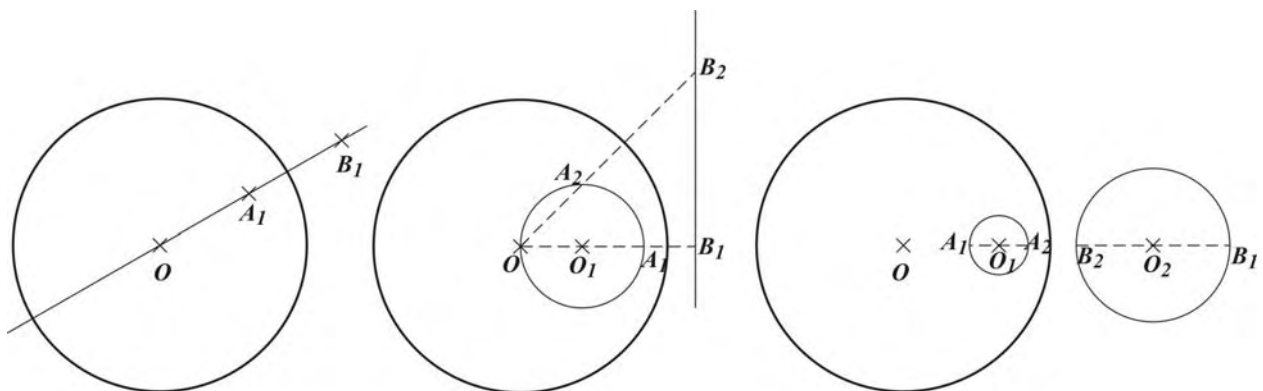


Рис. 1

Рис. 2

Рис. 3

Заметим, что каждая точка на окружности при инверсии преобразуется сама в себя. **Точки, соответствующие самим себе, называются двойные**.

Рассмотрим преобразование прямых и окружностей с помощью преобразования инверсии.

### Прямые

- 1) Прямые, проходящие через центр инверсии  $O$  (в дальнейшем центр  $O$ ), преобразуются в прямые, проходящие через центр  $O$  (см.рис.1).
- 2) Прямые, не проходящие через центр  $O$ , преобразуются в окружности, проходящие через центр  $O$  (см.рис.2).

### Окружности

- 3) Окружности, проходящие через центр  $O$ , преобразуются в прямые, не проходящие через центр  $O$  (см.рис. 2).
- 4) Окружности, не проходящие через центр  $O$ , преобразуются в окружности, не проходящие через центр  $O$  (см.рис.3)..

### Углы

При инверсии происходит сохранение углов (**конформность**) (см.рис. 4а, 4б).

Доказательство 1) очевидно. Докажем 2) - 4) (ср.[23,стр.163]).

Рассмотрим уравнение

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \quad (2)$$

и докажем, что (при незначительных ограничениях) это уравнение является уравнением окружности, т.е. сведем (2) к виду  $u^2 + v^2 = r^2$ . Сразу заметим, что при  $A = 0$  данное уравнение описывает прямую (говорят, что данная окружность имеет бесконечный радиус). При  $D = 0$  окружность (или прямая) проходят через центр системы координат  $\{0,0\}$ .

Пусть вначале  $A \neq 0$ . Тогда имеем возможность разделить все члены (2) на  $A$   $x^2 + y^2 + \frac{B}{A}x + \frac{C}{A}y + \frac{D}{A} = 0$ . Выделим полные квадраты:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + 2\left(\frac{B}{2A}\right)x + 2\left(\frac{C}{2A}\right)y + \frac{D}{A} &= x^2 + 2\left(\frac{B}{2A}\right)x + \frac{B^2}{4A^2} - \frac{B^2}{4A^2} + y^2 + 2\left(\frac{C}{2A}\right)y + \frac{C^2}{4A^2} + \frac{D}{A} = \\ &= \left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + \left(y + \frac{C}{2A}\right)^2 - \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получено уравнение окружности с центром  $\left\{-\frac{B}{2A}, -\frac{C}{2A}\right\}$  и радиусом  $R = \frac{1}{2A}\sqrt{B^2 + C^2 - 4AD}$ . (3)

Кстати, из (3) видно, что при  $A \rightarrow 0$  радиус окружности  $R \rightarrow \infty$ .

Теперь докажем, что **при инверсии окружности преобразуются в окружности.**

С целью упрощения вывода, возьмем центр окружности инверсии в начале координат  $\{0,0\}$  и пусть ось абсцисс и полярная ось совпадают. Далее, пусть координаты некоторой точки до преобразования будут 
$$\begin{cases} x = r_1 \cos \alpha \\ y = r_1 \sin \alpha \end{cases}.$$

Отсюда  $r_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ ,  $\sin \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ . После преобразования

инверсии 
$$\begin{cases} x_2 = r_2 \cos \alpha \\ y_2 = r_2 \sin \alpha \end{cases}$$
 (угол  $\alpha$  не изменяется, т.к. преобразование идет по лучу,

проходящему через центр инверсии (в данном случае через начало координат)).

Используем (1)

$$\begin{cases} x_2 = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2} \\ y_2 = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2} \end{cases}. \quad (4)$$

Учитывая симметричное положение исходной и отображаемой точек,

$$\begin{cases} x = \frac{r^2 x_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ y = \frac{r^2 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \end{cases}. \quad (5)$$

Подставим найденные координаты в уравнение исходной окружности (2)

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = \frac{Ar^2}{x_2^2 + y_2^2} + B \frac{r^2 x_2}{x_2^2 + y_2^2} + C \frac{r^2 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + D = 0. \quad \text{Приводим к}$$

$$\text{общему знаменателю } Ar^2 + Brx_2 + Cry_2 + D(x_2^2 + y_2^2) = 0. \quad (6)$$

Снова получено уравнение окружности. Для того чтобы не повторять вывод положения центра и нового радиуса, достаточно подставить в (3)  $A_2 = D$ ,  $B_2 = Br$ ,  $C_2 = Cr$ ,  $D_2 = Ar^2$ . Как и ранее, если  $A_2 = 0$ , то окружность вырождается в прямую, а если  $D_2 = 0$ , то окружность/прямая проходят через центр окружности инверсии.  $\square$

Рассмотрим некоторые задачи. Совместим, как и ранее центр инверсии и начало координат, ось абсцисс и полярную ось. Пусть некоторая точка  $A_1$ , лежащая на оси абсцисс, преобразуется в  $B_1$ , а другая точка  $A_2$ , лежащая на

том же луче, преобразуется в  $B_2$ . Через точки  $A_1, A_2$  и  $B_1, B_2$  проведем окружности, у которых центры лежат, соответственно, на расстояниях

$$O_1 = \frac{A_{x1} + A_{x2}}{2} \text{ и } O_2 = \frac{B_{x1} + B_{x2}}{2}.$$

Имеем радиусы полученных окружностей  $R_1 = \frac{A_{x2} - A_{x1}}{2}$  и

$$R_2 = \frac{B_{x1} - B_{x2}}{2} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{O_1 - R_1} - \frac{1}{O_1 + R_1} \right) = r^2 \left( \frac{R_1}{O_1^2 - R_1^2} \right).$$

Введем коэффициент подобия окружностей  $k = \frac{R_2}{R_1}$ . Отсюда

$$k = r^2 \left( \frac{1}{O_1^2 - R_1^2} \right). \quad (7)$$

Очевидно, что если  $O_1 = R_1$ , то окружность, лежащая внутри окружности инверсии проходит через центр инверсии, а внешняя окружность по отношению к окружности инверсии имеет бесконечный радиус и вырождается в прямую.

**Центр внешней окружности** находится от центра координат на расстоянии  $O_2 = \frac{B_{x1} + B_{x2}}{2} = \frac{r^2}{2} \left( \frac{1}{O_1 - R_1} + \frac{1}{O_1 + R_1} \right) = r^2 \left( \frac{O_1}{O_1^2 - R_1^2} \right) = kO_1$ .

Пример. Пусть  $O_1 = \frac{r}{2}$ ,  $R_1 = \frac{r}{4}$ . Тогда  $k = \frac{16}{3}$ ,  $O_2 = \frac{8}{3}r$ . □

Докажем, что при инверсии сохраняется значение угла (интервала углов) (свойство конформности), но при этом угол (интервал углов) меняет ориентацию на противоположную.

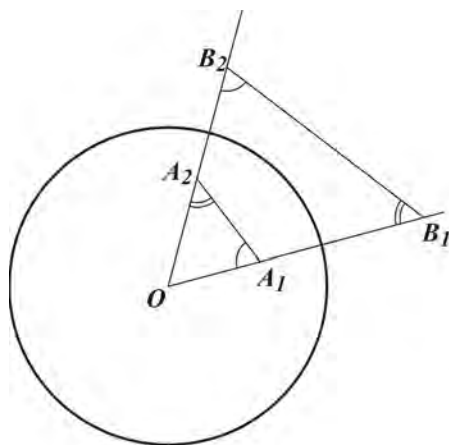


Рис. 4а

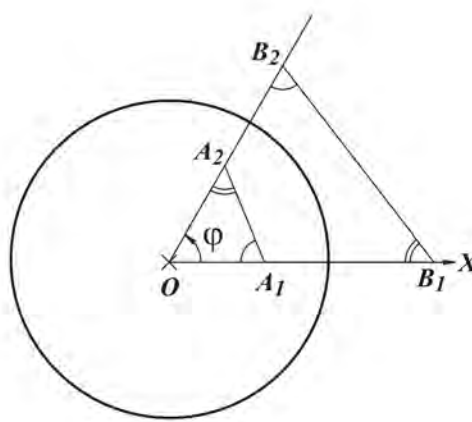


Рис. 4б

### 1°. Геометрический метод

*Доказательство.* Нам нужно доказать, что  $\angle OA_1A_2 = \angle OB_2B_1$ ,  $\angle OA_2A_1 = \angle OB_1B_2$  (см.рис.4а). Рассмотрим  $\triangle OA_1A_2 = \triangle OB_2B_1$ . Они подобны, т.к. имеют общий  $\angle O$  и пропорциональные стороны. Действительно, из

$$OA_1 \cdot OB_1 = OA_2 \cdot OB_2 = r^2 \text{ следует, что } \frac{OA_1}{OA_2} = \frac{OB_2}{OB_1}.$$

В подобных треугольниках напротив пропорциональных сторон лежат равные углы.  $\square$

### 2°. Аналитический метод

*Доказательство.* Не нарушая общности и в целях упрощения изложения, поворачиваем систему координат таким образом, что рассматриваемые  $A_1, B_1$  расположены на луче, совпадающем с осью абсцисс (полярной осью) (см.рис.4б). Пусть второй луч  $A_2B_2$  выходит из центра инверсии  $O$  (центр координат) под углом  $\varphi$ . Тогда координаты точек будут следующими:  $A_1 : \{r_1, 0\}$ ,

$$B_1 : \left\{ \frac{r^2}{r_1}, 0 \right\}, A_2 : r_2 \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}, B_2 : \frac{r^2}{r_2} \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}.$$

Докажем, что  $\angle OA_1A_2 = \angle OB_2B_1$ . Таким же образом доказывается, что  $\angle OA_2A_1 = \angle OB_1B_2$ . (Чтобы не зависеть от порядка расположения лучей, будем использовать понятие *наименьший угол*  $\alpha = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|\Delta_x|, |\Delta_y|\})$  (см.1.4.6.-5). Но эта формула пригодна только для острых/прямых углов. Т.к. можно встретить при исследовании углы произвольной величины  $\alpha \in (0, 2\pi)$  (в частности тупые), то в этом случае разбиваем их на два или более острых угла. Если докажем, что при инверсии сохраняются острые углы, то тем самым докажем всю теорему.)

Действительно:

$$\begin{aligned} \angle OA_1A_2 &= \min(\text{ang}(A_1, \mathbf{O}) - \text{ang}(A_1, A_2)) = \min(\pi - \text{ang}(\{r_1, 0\}, r_2 \{ \cos \varphi, \sin \varphi \})) = \\ &= \min(\pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{r_2 \cos \varphi - r_1, -r_2 \sin \varphi\})) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|r_1 - r_2 \cos \varphi|, |r_2 \sin \varphi|\}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle OB_2B_1 &= \min(\text{ang}(B_2, \mathbf{O}) - \text{ang}(B_2, B_1)) = \min(\text{ang}(\mathbf{0}, B_2) + \pi - \text{ang}(B_2, B_1)) = \\ &= \min\left(\text{ang}\left(\mathbf{0}, \frac{r^2}{r_2} \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}\right) + \pi - \text{ang}\left(\frac{r^2}{r_2} \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}, \left\{ \frac{r^2}{r_1}, 0 \right\}\right)\right) = \\ &= \min(\pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{r_1 \cos \varphi - r_2, r_1 \sin \varphi\})) = \\ &= \min(\pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{r_1 \cos^2 \varphi - r_2 \cos \varphi + r_1 \sin^2 \varphi, r_1 \cos \varphi \sin \varphi - r_2 \sin \varphi - r_1 \cos \varphi \sin \varphi\})) = \\ &= \min(\pi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{r_1 - r_2 \cos \varphi, -r_2 \sin \varphi\})) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|r_1 - r_2 \cos \varphi|, |r_2 \sin \varphi|\}). \square \end{aligned}$$

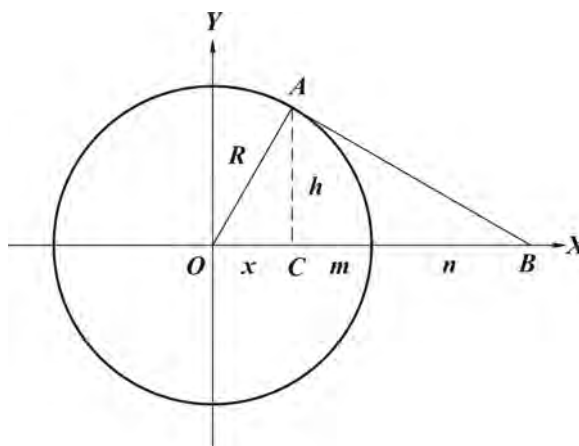


Рис. 5

Проведем под произвольным углом луч  $OB$  в окружности  $O$  радиуса  $R$  (см.рис.1). Отобразим  $C$  вдоль этого луча в  $B$  следующим образом. Проведем радиус-вектор из центра окружности  $O$  в точку касания  $A$ . Из вершины  $A$  опустим  $\perp AC$  на  $OB$ . Рассмотрим прямоугольные  $\triangle OAC$  и  $\triangle ABC$ . Они подобны, т.к. имеют по равному острому углу (найдите эти углы!). Из подобия треугольников следует  $\frac{x}{h} = \frac{h}{m+n}$ .

Из этого равенства следует  $h^2 = x(m+n)$  (1)

или среднее геометрическое  $h = \sqrt{x(m+n)}$ .

(2) Из теоремы Пифагора получаем  $h^2 = R^2 - x^2$ . (3)

С другой стороны,  $x = R - m$ . (4)

Делаем эти подстановки в (1)  $R^2 - (R - m)^2 = (R - m)(m + n)$ . (5)

После приведения подобных членов, получаем  $Rm = Rn - mn$ . (6)

Делим все члены (6) на произведение  $R \cdot m \cdot n$  и получаем **основное соотношение инверсии**

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{R} \quad \text{или} \quad \frac{1}{m} - \frac{1}{n} = \frac{1}{R}. \quad (7)$$

(В данной работе уравнение инверсии хранится в виде (7). Другие варианты см. в [21,стр.112-115]. Аполлоний дал свое определение инверсии  $I_{37}$  [21,113], эквивалентное нашему, но оно слишком велико для цитирования.)

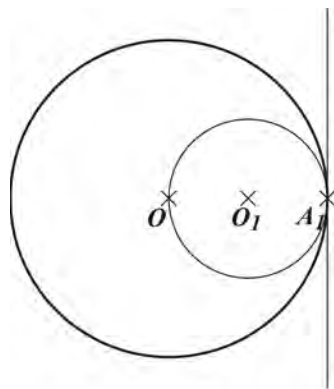


Рис. 6

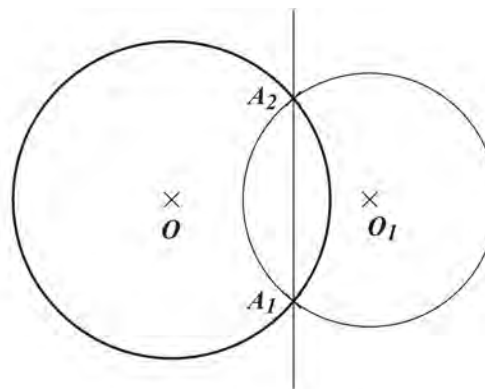


Рис. 7

Упражнение 1. Объясните рис. 6, 7 [4, стр.21].

Упражнение 2. Доказать, что  $m \leq n$ . Определить, когда  $m = n$ .

Упражнение 3. Доказать, что если  $R \rightarrow \infty$ , то  $m \rightarrow n$ .

## 1.6. Отклонения точек от прямой

### 1.6.1. Отклонение точки от пассивно ориентированной прямой

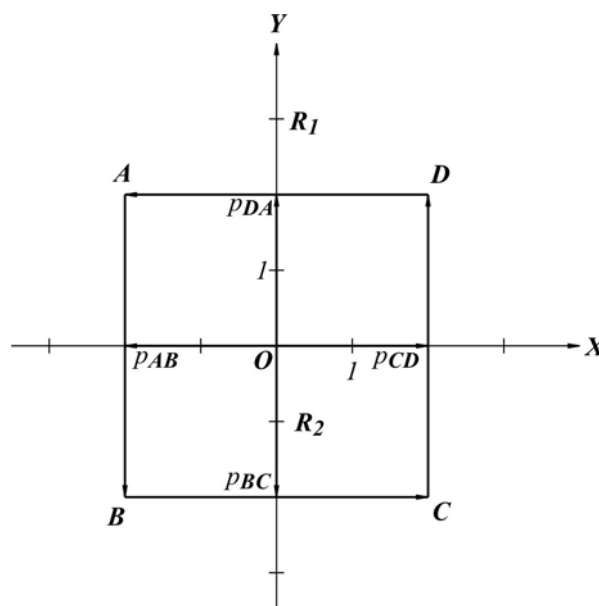


Рис. 1

И в теоретических задачах, и, в особенности, на практике, важна информация, с какой стороны от прямой, с учетом ее направления, и как далеко находится некоторая точка. В данном разделе подробно рассмотрим классический вариант [16, §64].

Прежде всего, заметим, что абсолютное значение расстояния от точки до прямой задается с помощью формулы (1.5.-14). Далее, для того, чтобы



определить значение отклонения от прямой и знак, который приписывают этому отклонению, необходимо иметь ориентацию (направление) этой прямой.

Классический метод дает направление прямой на основе направления нормального вектора  $p_L\{\cos\theta, \sin\theta\}$  к этой прямой, в зависимости от положения прямой линии от центра координат. **Если наблюдатель стоит лицом по направлению нормального вектора, то в правоориентированной системе координат вытянутая влево левая рука будет указывать направление указываемой прямой. При этом радиус-вектор  $p_L$  всегда  $\geq 0$  по условию нормализации.** Отклонение неориентированной (скалярной) прямой определяется формулой

$$q_H = x_r \cos\theta + y_r \sin\theta - p_L \quad (1)$$

(ср. 1.5.2.-15), анализ которой сразу дает ответы на поставленные вопросы. Так,  $|q_H|$  говорит о расстоянии точки от прямой, а знак  $q_H$  - об ее расположении. При  $q_H > 0$  исследуемая точка находится справа от прямой (при этом наблюдатель смотрит вдоль направления прямой), при  $q_H < 0$  - соответственно слева, а  $q_H = 0$  говорит о том, что точка принадлежит прямой.

В том случае, если прямая проходит через начало координат, то  $p_L = 0$ . В остальном же, методика расчета  $q_H$  остается неизменной. Так, задаем на этой прямой две точки  $P_1, P_2$ , затем вычисляем  $A = P_{2y} - P_{1y}$ ,  $B = P_{1x} - P_{2x}$ ,  $\cos\theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ ,  $\sin\theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ . Выбор, какая из этих двух точек является первой, а какая второй – произволен. Поэтому для прямой, проходящей через центр координат, угол  $\theta$  вычисляется с точностью до  $\pi$ , а знак перед  $q_H$  произволен. В связи с такой неопределенностью, исследуемая точка может рассматриваться как стоящая справа от прямой, так и слева.

**при || перемещении прямой линии, если она не пересекает начало координат, знак отклонения не изменяется. С другой стороны, если прямая при своем движении пересекает начало координат и останавливается по**

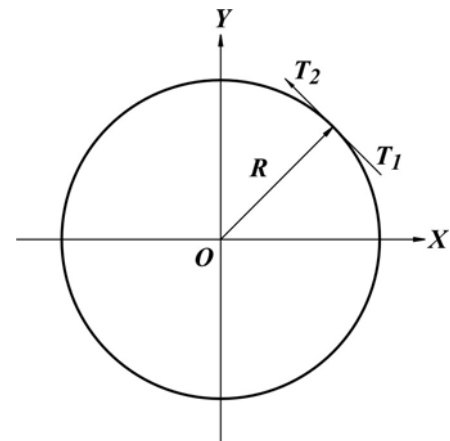


Рис. 2

другую сторону от его начала, то знак отклонения меняется на противоположный.

Рассмотрим конкретные примеры (см. рис.1.) От всех 4-х линий, образованных продолжением векторов  $AB, BC, CD, DA$ ,  $O$  отклоняется на  $q_H = -2$ , т.е. находится слева, если наблюдатель смотрит по направлению данного вектора. Действительно,  $p_L = 2$  для всех сторон квадрата. Поэтому, подставляя координаты  $O : \{0,0\}$  в (1.5.1.-15), получим  $q_H = 0 \cos \theta + 0 \sin \theta - 2 = -2$ .

Теперь найдем отклонение другой точки  $-R_1 : \{0,3\}$  от линий, образованных продолжением векторов  $AB, BC, CD, DA$ . Результаты расчетов поместим в табл. 1.

Линия	$\theta$	$\cos \theta$	$\sin \theta$	$x_r \cos \theta + y_r \sin \theta - p_L$	$q_H$
$AB$	$\pi$	-1	0	$0 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 2$	-2
$BC$	$\frac{3\pi}{2}$	0	-1	$0 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) - 2$	-5
$CD$	0	1	0	$0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 2$	-2
$DA$	$\frac{\pi}{2}$	0	1	$0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2$	1

Табл.1

Рассмотрим теперь расстояние от  $R_2$  до прямой  $BC$ . Эта точка расположена выше на 1 ед. от  $BC$ , как и  $R_1$  от прямой  $DA$ . Но угол направления нормального вектора у нее другой -  $\theta = \frac{3\pi}{2}$ , поэтому

$$q_H = x_r \cos \theta + y_r \sin \theta - p_L = 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) - 2 = -1.$$

(Ср. с табл.1, строка  $DA$ , где  $q_H = 1$ ).

Еще раз подчеркнем, что ориентация скалярной прямой и знак  $q_H$  отклонения точки от прямой зависит от положения скалярной прямой от начала координат.

Упражнение 1. Докажите, что если центр окружности радиуса  $R$  совпадает с центром координат, то отклонение  $q_H$  точки центра окружности от каждой из касательных к этой окружности равно  $-R$  (см. рис.2).

Упражнение 2. Даны координаты трех вершин треугольника  $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$ , рассматриваемых с сохранением ориентации. Доказать, что точка  $\{x_0, y_0\}$  находится внутри данного треугольника, если выражения

$$q_1 = (y_1 - y_2)x_0 + (x_2 - x_1)y_0 + (x_1y_2 - x_2y_1),$$

$$q_2 = (y_2 - y_3)x_0 + (x_3 - x_2)y_0 + (x_2y_3 - x_3y_2), \quad q_3 = (y_3 - y_1)x_0 + (x_1 - x_3)y_0 + (x_3y_1 - x_1y_3)$$

одного знака.

Упражнение 3. Построить алгоритм разбиения множества прямых на классы принадлежности к различным пучкам, используя понятие “отклонение от прямой”.

### 1.6.2. Отклонение точки от активно ориентированной (векторной прямой). Площадь ориентированного параллелограмма, построенного на 3-х точках

Назовем активно ориентированной или векторной прямую, у которой направление единичного нормального вектора остается неизменным при любых параллельных переносах осей координат.

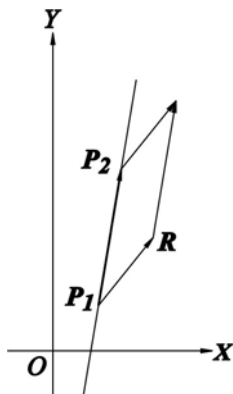


Рис. 1

Известна формула площади параллелограмма, у которого три вершины из четырех заданы тремя точками [16, §14]. Назовем первую и вторую точки  $P_1, P_2$  и проведем через них прямую линию, а третью точку – внешнюю по отношению к прямой –  $R: \{x_r, y_r\}$  (см. рис.1). Тогда формула

$$S_{vr} = \begin{vmatrix} x_r & y_r & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r - x_1 & y_r - y_1 & 0 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r - x_1 & y_r - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

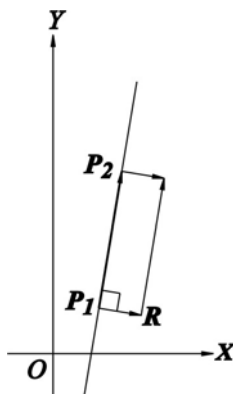


Рис. 2

(в определителе точки расположены в том порядке, который, обеспечит нам нужный знак у площади).

из уравнения прямой в общем виде  $Ax + By + C = 0$  запишем

$$\text{коэффициенты } A = y_2 - y_1, \quad B = x_1 - x_2, \quad C = -x_1y_2 + x_2y_1, \quad (2)$$

Отсюда

$$S_{V_r} = \begin{vmatrix} x_r - x_1 & y_r - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_r - x_1 & y_r - y_1 \\ -B & A \end{vmatrix} = A(x_r - x_1) + B(y_r - y_1) =$$

$$= Ax_r - Ax_1 + By_r - By_1 - C + C = Ax_r + By_r + C - (Ax_1 + By_1 + C) = Ax_r + By_r + C. \quad (3)$$

(Заметим, что  $x_1$  принадлежит прямой, поэтому  $Ax_1 + By_1 + C = 0$ )

Таким образом,  $S_{V_r}$  можно интерпретировать как площадь параллелограмма со знаком, построенного на двух точках прямой и одной внешней точке. Знак  $S_{V_r}$  определяется как последовательностью 1-й и 2-й точек, так и расположением точки  $R$  по ту, или другую сторону от прямой  $P_1P_2$ .

Продолжим исследовать (3)

$$S_{V_r} = Ax_r + By_r + C = \sqrt{A^2 + B^2} \left( \frac{Ax_r + By_r + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) =$$

$$= \sqrt{A^2 + B^2} (x_r \cos \theta + y_r \sin \theta - p_{VL}) = Lq_{V_r}. \quad (4)$$

Раскроем смысл (4)

- нижний индекс  $v_r$  у переменных в (4) обозначает обработку **активно ориентированной прямой**. Такую прямую для краткости будем называть **векторной**;

-  $L = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{(y_2 - y_1)^2 + (x_1 - x_2)^2}$  - расстояние между двумя точками или длина основания параллелограмма (на рис.1 -  $P_1P_2$ );

-  $q_{V_r} = x_r \cos \theta + y_r \sin \theta - p_{VL}$  - отклонение от активно ориентированной (векторной) прямой, причем  $|q_V| = d_r$  - расстояние от точки до прямой (от  $R$  до прямой  $P_1P_2$ );

$$\cos \theta = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \sin \theta = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, p_{VL} = \frac{-C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (5)$$

Обратим внимание, что в случае векторной прямой знак у свободного члена  $p_{VL}$  не меняется за счет знака у корня.

Заметим, что если внешняя точка  $R$  построена на продолжении перпендикуляра из одной из конечных точек  $P_1$  или  $P_2$  основания параллелограмма, то параллелограмм переходит в прямоугольник (см. рис.2). Необходимое условие для этого получаем из (1), если скалярное произведение

строк в определителе  $(x_r - x_1)(x_2 - x_1) + (y_r - y_1)(y_2 - y_1) = 0$  или  
 $-B(x_r - x_1) + A(y_r - y_1) = 0$ . (6)

При использовании функции  $ang()$  это условие выглядит так

$$|ang(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) - ang(\mathbf{P}_1, \mathbf{R})| = \frac{\pi}{2}. \quad (7)$$

**Свойство 1. Ортогональные преобразования с определителем равным 1 оставляют отклонение  $q_{Vr}$  от векторной прямой без изменения.**

Напомним, что эти преобразования определяются в правоориентированной системе координат следующей системой уравнений

$$(1.5.1.-9), [11, \text{стр.50, 2.1-10}] \quad \begin{cases} \bar{x} = (x - x_0) \cos \theta + (y - y_0) \sin \theta, \\ \bar{y} = -(x - x_0) \sin \theta + (y - y_0) \cos \theta, \end{cases} \quad (*)$$

где вектор  $\{x_0, y_0\}$  - смещение начала новой системы координат, а  $\theta$  ее угол поворота относительно старой системы координат.

Т.к. любая функция от инвариантов есть инвариант, и из (4) следует, что  $q_{Vr} = \frac{S_{Vr}}{L}$ , то достаточно доказать, что преобразования (\*) оставляют значения  $S_{Vr}$  и  $L$  без изменения.

Упростим задачу: в формулы  $S_{Vr}$  и  $L$  выражения от координат  $x, y$  входят в виде разностей  $x_i - x_j, y_k - y_l$ , в которых происходит сокращение на компоненты вектора  $\{x_0, y_0\}$  (см.\*). Поэтому эти слагаемые учитывать не будем. Далее, если докажем, что если  $L^2$  инвариант, то отсюда следует, что и  $|L|$  также инвариант. В промежуточных формулах будем использовать следующие сокращения  $x_2 - x_1 = X_{21}$ ;  $y_2 - y_1 = Y_{21}$ . Тогда, следуя [16, §181, стр. 523], получаем

$$\begin{aligned} \bar{L}_{12}^2 &= \bar{A}^2 + \bar{B}^2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 = (x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta)^2 + \\ &+ (-x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta + x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta)^2 = (X_{21} \cos \theta + Y_{21} \sin \theta)^2 + \\ &+ (-X_{21} \sin \theta + Y_{21} \cos \theta)^2 = X_{21}^2 \cos^2 \theta + 2X_{21}Y_{21} \cos \theta \sin \theta + Y_{21}^2 \sin^2 \theta + \\ &+ X_{21}^2 \sin^2 \theta - 2X_{21}Y_{21} \cos \theta \sin \theta + Y_{21}^2 \cos^2 \theta = X_{21}^2 + Y_{21}^2 = \bar{A}^2 + \bar{B}^2 = L_{12}^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{S}_{Vr} &= (\bar{x}_r - \bar{x}_1)(\bar{y}_2 - \bar{y}_1) - (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{y}_r - \bar{y}_1) = (x_r \cos \theta + y_r \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \cdot \\ &\cdot (-x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta + x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta) - (x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta - x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta) \cdot \\ &\cdot (-x_r \sin \theta + y_r \cos \theta + x_1 \sin \theta - y_1 \cos \theta) = (X_{r1} \cos \theta + Y_{r1} \sin \theta) (-X_{21} \sin \theta + Y_{21} \cos \theta) - \\ &- (X_{21} \cos \theta + Y_{21} \sin \theta) (-X_{r1} \sin \theta + Y_{r1} \cos \theta) = -X_{r1}X_{21} \cos \theta \sin \theta + X_{r1}Y_{21} \cos^2 \theta - \end{aligned}$$

$$-X_{21}Y_{r1} \sin^2 \theta + Y_{r1}Y_{21} \cos \theta \sin \theta + X_{r1}X_{21} \cos \theta \sin \theta - X_{21}Y_{r1} \cos^2 \theta + X_{r1}Y_{21} \sin^2 \theta - \\ -Y_{r1}Y_{21} \cos \theta \sin \theta = X_{r1}Y_{21} - X_{21}Y_{r1} = (x_r - x_1)(y_2 - y_1) - (x_2 - x_1)(y_r - y_1) = S_{V_r}. \quad \square$$

**Свойство 2.** Докажем, что знак у величин  $A, B, C$  изменится на противоположный, при обмене точек  $P_1$  и  $P_2$  местами. Действительно

$$A = y_2 - y_1 = -(y_1 - y_2), \quad B = x_1 - x_2 = -(x_2 - x_1), \quad C = -x_1y_2 + x_2y_1 = \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следует (5), что изменится знак у  $\cos \theta$ ,  $\sin \theta$ ,  $p_{VL}$  и у  $q_V$ . Таким образом, доказано, что **при изменении направления у векторной прямой, абсолютная величина отклонения не меняется, а знак отклонения меняется на противоположный.**

**Свойство 3.** При замене внешней точки на зеркальную точку относительно исследуемой прямой, знак отклонения меняется на противоположный (см.рис.3)

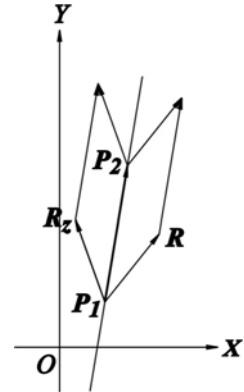


Рис. 3

Перед доказательством свойства 3 предлагаем читателю доказать следующее утверждение: в том случае, если зеркальная ось является активно ориентированной (векторной) прямой, то для применения формул (1.6.1.-5) – (1.6.1.-6) необходимо сделать в них следующую замену  $p_L \rightarrow p_{VL}$ .

Докажем теперь свойство 3.

$$\text{Из (1.6.1.-6)} \quad \begin{cases} x_{Vz} = 2p_{VL} \cos \theta - x \cos 2\theta - y \sin 2\theta \\ y_{Vz} = 2p_{VL} \sin \theta - x \sin 2\theta - y \cos 2\theta \end{cases} \quad (7)$$

Подставим (7) в формулу отклонения от ориентированной прямой

$$q_{Vz} = x_z \cos \theta + y_z \sin \theta - p_{VL} = 2p_{VL} \cos^2 \theta - x \cos \theta \cos 2\theta - y \cos \theta \sin 2\theta + 2p_L \sin^2 \theta - \\ - x \sin \theta \sin 2\theta + y \sin \theta \cos 2\theta - p_{VL} = 2p_{VL} - p_{VL} - x \cos(2\theta - \theta) + y \sin(\theta - 2\theta) = \\ = -x \cos \theta - y \sin \theta + p_{VL} = -q_V.$$

### 1.7. Прямые в новой системе координат. Вращение прямых

1°

Получим уравнение прямой в общем виде в новой системе координат. Для этого запишем координаты 2-х точек в новой системе координат (1.5.1.-9)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = (x_1 - x_0) \cos \theta + (y_1 - y_0) \sin \theta \\ \bar{x}_2 = (x_2 - x_0) \cos \theta + (y_2 - y_0) \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} \bar{y}_1 = -(x_1 - x_0) \sin \theta + (y_1 - y_0) \cos \theta \\ \bar{y}_2 = -(x_2 - x_0) \sin \theta + (y_2 - y_0) \cos \theta \end{cases}. \quad (*)$$

Далее напомним формулы коэффициентов прямой в общем виде, проходящей через две точки (1.4.5.-8)

$$A = y_2 - y_1, \quad B = x_1 - x_2, \quad C = -x_1 y_2 + x_2 y_1. \quad (**)$$

Подставляя в (\*\*) (\*), получим **формулы преобразования прямой в общем виде в новой системе координат**

$$\bar{A} = A \cos \theta + B \sin \theta, \quad \bar{B} = -A \sin \theta + B \cos \theta, \quad \bar{C} = x_0 A + y_0 B + C. \quad (1)$$

При || перемещении прямой

$$\theta = 0, \quad \sin \theta = 0, \quad \bar{A} = A, \quad \bar{B} = B, \quad \bar{C} = x_0 A + y_0 B + C. \quad (2)$$

Докажем, что **уравнение прямой в нормальной форме** ( $A^2 + B^2 = 1$ ) (1) переходит в **уравнение прямой в нормальной форме**

$$\begin{aligned} \bar{A}^2 + \bar{B}^2 &= (A \cos \theta + B \sin \theta)^2 + (-A \sin \theta + B \cos \theta)^2 = \\ &= A^2 \cos^2 \theta + 2AB \cos \theta \sin \theta + B^2 \sin^2 \theta + A^2 \sin^2 \theta - 2AB \cos \theta \sin \theta + B^2 \cos^2 \theta \\ &= A^2 + B^2 = 1. \end{aligned}$$

Этот результат легко объяснить и другим путем, т.к. определитель данного преобразования равен 1.

2°

Рассмотрим задачу вращения прямой относительно центра координатной системы  $O$ . Очевидно, что при этом **радиус круга вращения будет равен длине нормального вектора**  $p_L$ , а нормальное уравнение этой прямой будет иметь следующую зависимость от времени

$$x \cos(\omega t + \theta_0) + y \sin(\omega t + \theta_0) - p_L = 0, \quad (3)$$

где  $\omega$  - угловая скорость,  $t$  - время,  $\theta_0$  - угол наклона нормального вектора к оси абсцисс в начальный момент времени.

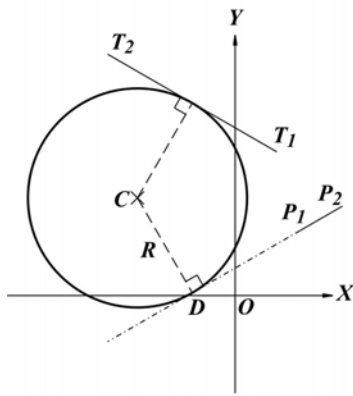


Рис. 1

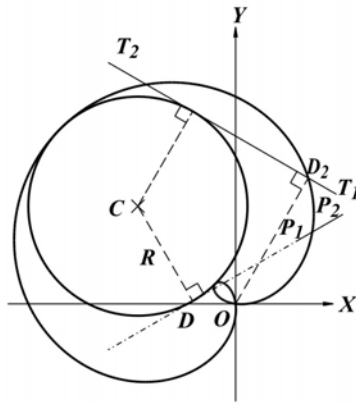


Рис. 2

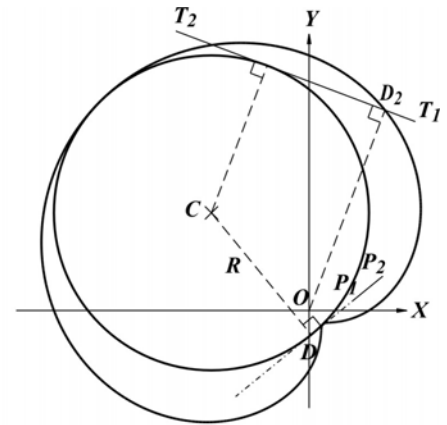


Рис. 3

Если вращаем прямую относительно произвольно выбранной точки  $C$ , не совпадающей с центром координат, то сведем задачу к предыдущей.

Во-первых, радиус окружности  $R = CD$  (см.рис.1) в данном случае будет равен отклонению (расстоянию) от данной точки  $C$  до прямой  $P_1P_2$  (1.5.2.-15)

$$|R| = |C_x \cos \theta_0 + C_y \sin \theta_0 - p_L|. \quad (4)$$

Во-вторых, **положение нормального вектора в новой системе координат будет в любой момент времени || положению нормального вектора в старой системе координат, как у двух  $\perp$  к одной и той же прямой.** Таким образом, все семейство уравнений прямых, вращающихся около центра  $C$ , будет в новой системе координат || сдвинуто относительно старой системы на вектор  $\{C_x, C_y\}$  и имеет следующее уравнение, как функцию от времени

$$\bar{x} \cos(\omega t + \theta_0) + \bar{y} \sin(\omega t + \theta_0) + C_x \cos \theta_0 + C_y \sin \theta_0 - p_L = 0. \quad (3)$$

(Проверим знаки в (3). Допустим, что в начальный (или в некоторый  $t$ ) момент в новой системе координат прямая  $P_1P_2$  проходит через ее центр  $C$ . Тогда в этот момент времени свободный член равен 0 и имеем векторное равенство

$$\sqrt{C_x^2 + C_y^2} \left\{ \frac{C_x}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}}, \frac{C_y}{\sqrt{C_x^2 + C_y^2}} \right\} - p_L \{ \cos \theta_t, \sin \theta_t \} = 0. \text{ Следовательно, знаки}$$

в свободном члене (3) верны).

В старой системе координат (см. 1.5.1.-3), очевидно, следующее уравнение искомой прямой

$$(x + C_x) \cos(\omega t + \theta_0) + (y + C_y) \sin(\omega t + \theta_0) - p_L = 0. \quad (5)$$



Заметим, что можно уравнение (3) свести к периодическому изменению величины нормального вектора

$$x \cos(\omega t + \theta_0) + y \sin(\omega t + \theta_0) - (-C_x \cos(\omega t + \theta_0) - C_y \cos(\omega t + \theta_0) + p_L) = 0. \quad (6)$$

Видим, что (6) следует из (2).

Опустим  $\perp$  из центра старой системы координат  $O$  на данную вращающуюся прямую. Найдем геометрическое место точек основания  $D_2$  этого  $\perp$  (см.рис.2,3).

(Предлагаем читателю получить соответствующие уравнения. Более подробное исследование получающихся кривых см. в [24, стр.528-530].)

## 1.8. Идентификация областей на плоскости

### 1°. Определение задачи центральной идентификации

Возьмем на плоскости некоторую точку  $O_1$ , из которой выходят под разными углами конечное число лучей (больше одного). Тем самым плоскость разбивается на множество секторов. Читатель может убедиться, что количество секторов, на которое разбивается плоскость, всегда равно количеству лучей, выходящих из  $O_1$  (элементарное доказательство данного утверждения может быть проведено методом математической индукции). Возьмем далее вторую точку на этой плоскости -  $R$ , которая либо будет совпадать с  $O_1$ , либо лежать на одном из лучей, либо будет находиться внутри одного из секторов.

Нашей целью является построение эффективного алгоритма, позволяющего найти, какому из этих 3-х взаимоисключающих вариантов удовлетворяет местоположение  $R$ .

### 2°. Алгоритм центральной идентификации

*Начало алгоритма*

Шаг 1. Если  $dist(O, R) \leq \varepsilon$ , //  $O$  и  $R$  совпадают.

*то Выход, код\_возврата(0).*

Шаг 2. Если лучи определяются декартовыми координатами точек  $P_i$ ,

*то найти  $\varphi_i = \text{ang}(O, P_i)$ . Если углы задаются из внешних условий задачи,*

*то нормализовать их.*

*Упорядочить углы по возрастанию, убрать совпадающие.*

Шаг 3. *Найти*  $\varphi_R = \text{ang}(\mathbf{O}, \mathbf{R})$ .

Шаг 4. *Добавить к множеству углов последним углом*  $\varphi_1 + 2\pi$ .

Шаг 5. *Найти количество углов*  $\varphi_i$  *и поместить в* количество\_углов.

Шаг 6. // *Найти в цикле искомый луч или номер области*  
*Цикл от*  $i=1$  *до* количество\_углов

Шаг 7. *Если*  $ABS(\varphi_R - \varphi_i) \leq \varepsilon$  // *угол*  $\varphi_R$  *и луч*  $\varphi_i$  *совпали*

Шаг 8. *Выход, код\_возврата*( $i$ )

Шаг 9. *ИначеЕсли*  $\varphi_R < \varphi_i$  // *предварительно найдена область, в которой*  
*//находится*  $\mathbf{R}$ , *уточнение номера области*

Шаг 10.  $z := i - 1$  // *номер определяемой области*

Шаг 11. *Если*  $z = 0$

Шаг 12.  $z := \text{количество\_углов} - 1$ .

*Конец\_Если.*

*Выход, код\_возврата*( $z$ ).

*Конец\_Если*

*Конец\_Цикла*

*Конец\_Алгоритма*

### 1.9. Пучки прямых (продолжение). Биссектриса угла между пересекающимися прямыми

Дадим другое определение пучка прямых и докажем, что новое определение эквивалентно соответствующему определению в (1.4.5.).

Рассмотрим систему двух линейных уравнений в общем виде,

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

интерпретируемых (1.4.5.) как уравнения двух плоских прямых.

Известно, что у этих прямых есть точка пересечения (1.4.8.-2)

$$P: \left\{ \frac{B_1C_2 - B_2C_1}{A_1B_2 - A_2B_1}, \frac{C_1A_2 - C_2A_1}{A_1B_2 - A_2B_1} \right\}, \quad \text{находящаяся на конечном или бесконечном}$$

расстоянии от начала координат.

Умножим каждое уравнение (\*) соответственно на действительные коэффициенты  $\lambda, \mu$ , где  $-\infty \leq \lambda, \mu \leq \infty$  (т.е. принадлежащие области действительных чисел  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ). Сложим эти уравнения

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2) = 0. \quad (**)$$

Задание множества прямых при помощи вариации параметров  $\lambda, \mu$  и есть другое определение пучка. Заметим, что оба параметра  $\lambda, \mu$  одновременно не равны 0. Поэтому важным является соотношение между

$\lambda, \mu$ : если, например,  $\lambda \neq 0$ , то, разделив все коэффициенты на  $\lambda$ , имеем коэффициенты прямой пучка  $A' = A_1 + \frac{\mu}{\lambda} A_2$ ,  $B' = B_1 + \frac{\mu}{\lambda} B_2$ ,  $C' = C_1 + \frac{\mu}{\lambda} C_2$ .

Иначе  $A' = A_2$ ,  $B' = B_2$ ,  $C' = C_2$ .

На (рис.1) показаны прямые пучка при различных  $\lambda, \mu$ .

**Теорема 1. Точка пересечения двух прямых принадлежит пучку, образованному эти прямыми.**

*Доказательство.* Докажем, что отклонение точки пересечения  $P$  от прямой (\*\*\*) равно 0. В самом деле

$$\begin{aligned} & (\lambda A_1 + \mu A_2)(B_1 C_2 - B_2 C_1) + (\lambda B_1 + \mu B_2)(A_2 C_1 - A_1 C_2) + (\lambda C_1 + \mu C_2)(A_1 B_2 - A_2 B_1) = \\ & = \lambda A_1 B_1 C_2 - \lambda A_1 B_2 C_1 + \mu A_2 B_1 C_2 - \mu A_2 B_2 C_1 + \lambda A_2 B_1 C_1 - \lambda A_1 B_2 C_2 + \mu A_2 B_2 C_1 - \mu A_1 B_2 C_2 + \\ & + \lambda A_1 B_2 C_1 - \lambda A_2 B_1 C_1 + \mu A_1 B_2 C_2 - \mu A_2 B_1 C_2 = 0. \square \end{aligned}$$

Докажем известные простые теоремы

**Теорема 2. Уравнение биссектрисы угла, образованного пересекающимися прямыми, можно получить, например, попарно складывая компоненты нормальных уравнений пересекающихся прямых**

$$\begin{cases} x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1 - p_{L1} = 0 \\ x \cos \theta_2 + y \sin \theta_2 - p_{L2} = 0 \end{cases}, \text{ т.е.}$$

$$x(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) + y(\sin \theta_1 + \sin \theta_2) - (p_{L1} + p_{L2}) = 0. \quad (1)$$

(В данном случае параметры пучка  $\lambda = \mu = 1$ ).

*Доказательство.* Т.к.  $\cos \theta_1 + \cos \theta_2 = 2 \cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ ,

$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2} \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2}$ , то уравнение прямой (1) имеет тангенс

угла наклона (1.4.6.-2)  $k = \frac{\cos \theta_1 + \cos \theta_2}{\sin \theta_1 + \sin \theta_2} = \frac{\cos \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}{\sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}}$ , совпадающий с тангенсом

угла наклона биссектрисы угла между пересекающимися прямыми. (Напомним, что **нормальный вектор  $\perp$  прямой, а тангенсу угла наклона прямой соответствует котангенс нормального вектора.**) Т.к. совпадение тангенсов углов наклона прямых эквивалентно  $\parallel$  этих прямых, то прямая (1)  $\parallel$  биссектрисе угла между пересекающимися прямыми.

В связи с тем, что прямая (1) построена по правилам пучка, следовательно, она проходит через точку пересечения, определяющую пучок. Таким образом, прямая (1) имеет с биссектрисой одинаковый тангенс угла наклона и общую точку пересечения. Этого достаточно, чтобы сделать вывод: прямая (1) и биссектриса совпадают.

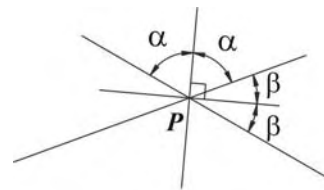


Рис. 1

**Теорема 3. Биссектрисы смежных углов взаимно  $\perp$ .**

*Доказательство.* Т.к. смежные углы дополнительны до  $\pi$ , то (см. рис.1)

$$\alpha + \alpha + \beta + \beta = \pi \text{ и } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}.$$

### 1.10. Разные задачи

Упражнение 1. (Задача Герона Александрийского) Даны прямая  $MN$  и две точки  $A$  и  $B$  по одну сторону от нее<sup>1</sup>, [27, стр.44,24.]. Найдите на прямой  $MN$  точку  $C$  такую, чтобы отрезки  $AC$  и  $BC$  составляли с этой прямой равные углы (рис.1).



Рис. 1

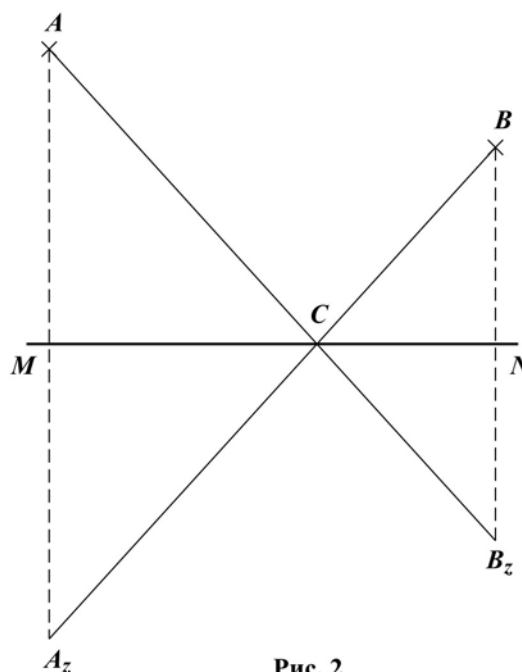


Рис. 2

<sup>1</sup> В.М.Тихомиров. Рассказы о максимумах и минимумах. Библиотечка «КВАНТ» выпуск 56, М., «НАУКА», 1986г.

Решение. (На (рис.2) приведено 3 классических решения точка пересечения  $C$  прямых  $AB_z, MN, A_zB$  (можно взять любую пару прямых). Приведем аналитическое решение на основе  $ang()$ .

1. Предположим сначала, что прямая  $MN$  расположена вдоль оси абсцисс и  $A_x = 0$ . Пусть координаты у точек будут следующие  $A: \{0, A_y\}, B: \{B_x, B_y\}, C: \{C_x, 0\}$ .  $C_y = 0$ , т.к. прямая  $MN$  расположена вдоль оси абсцисс (рис.3).

$$\text{Запишем условие равенства углов } ang(C, B) = \pi - ang(C, A). \quad (3)$$

Используя (1.2.1.-3), (1.2.1.-6), приходим к следующему равенству  $ang(\{C_x, C_y\}, \{B_x, B_y\}) = ang(\{-C_x, -C_y\}, \{-A_x, A_y\})$ , (4)

$$\frac{B_y}{B_x - C_x} = \frac{A_y}{C_x}, \quad C_x B_y = A_y B_x - A_y C_x, \quad C_x (A_y + B_y) = A_y B_x, \quad C_x = \frac{A_y B_x}{A_y + B_y}. \quad \square$$

(5) Заметим, что у данной задачи есть физическая интерпретация. Если рассматривать  $MN$  как зеркальную прямую (см.рис.3), то в данной задаче находим углы падения и отражения (например: звука, света, радиоволн, бильярдных шаров от борта стола и т.д.) от точечного источника  $A$  и точку на прямой  $C$ , в которой выполняется равенство этих углов.

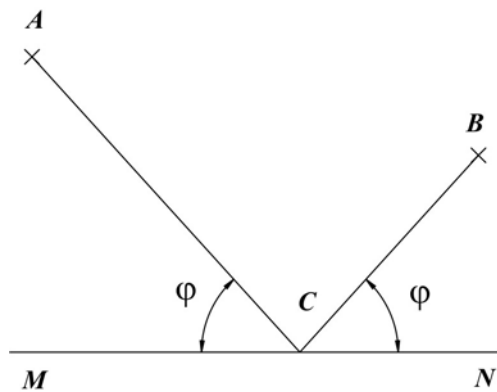


Рис. 3

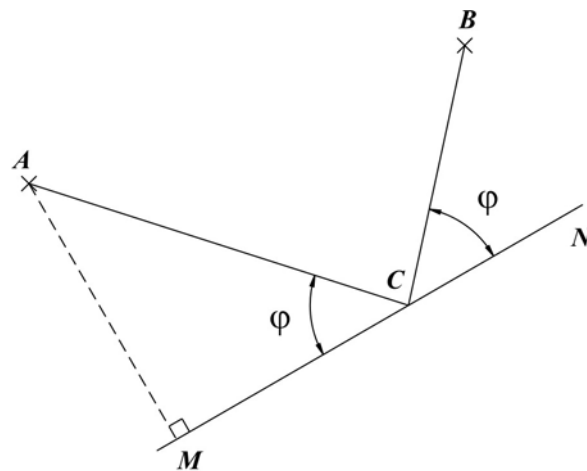


Рис. 4

2. Теперь рассмотрим случай, когда прямая  $MN$  расположена произвольно относительно оси абсцисс (см.рис.4). Тогда начало отрезка (пусть это будет  $M$ ) расположено в точке проекции  $A$  на  $MN$ , а конец отрезка – в точке проекции  $B$  на  $MN$  - в  $N$ . Тогда (5) можно интерпретировать следующим образом:

$B_x$  - длина отрезка  $MN$  (расстояние между проекциями точек),

$A_y, B_y$  - отклонения точек  $A, B$  от прямой  $MN$ .

3. Найдите ортогональное преобразование, которое бы сводило произвольно расположенную прямую и две точки вне ее к 1-му варианту решения.

## 2. Полярное представление дуги и некоторые его свойства

Выберем на плоскости некоторую точку  $F$ , которую будем называть **фокусом**<sup>1</sup>. Запишем формулу **радиус-вектора**, проведенного из фокуса  $F$

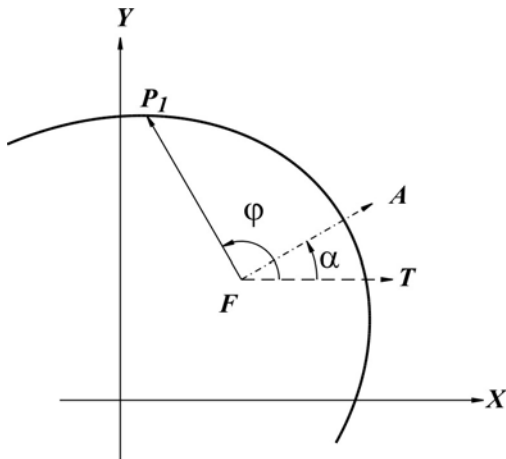


Рис. 1

(см.рис.1 ):

 $r$  - радиус-вектор, $p$  - фокальный параметр, $e$  - эксцентриситет, $\varphi$  - угол между радиусом вектором и осью абсцисс, $\alpha$  - угол между главной осью кривой и осью абсцисс.

В иностранной литературе часто используется **латинское название удвоенной величины фокального параметра – latus rectum**.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}, \quad (1)$$

Уравнение (1) называется **полярным уравнением**<sup>2</sup>, которое в честь его первооткрывателей, великих французских астрономов и математиков, будем называть **уравнением Лаланда-Лапласа**.

Рассмотрим параметры этого уравнения

<sup>1</sup> Понятие фокус вместе с директрисой (см. 3.4.2.) ввел Папп (Pappus of Alexandria (~290 - ~350)), а название термина - И.Кеплер в 1609 г. В переводе с латинского слово "фокус" - очаг.

<sup>2</sup> 1. Astronomie , Par Jerome LeFrancais de Lalande.-Troisieme Edition, Revue Et Augmentee.-A Paris, Chez la Veuve Desaint... De L'imprimerie De P.Didot L'Aine, 1792, 364  
2. Traite de Mecanique Celeste, par P.S.Laplace,Tome Preemier. De L'imprimerie De Crapelet. A Paris, Chez J.B.M. Duprat, Libraire pour les Mathematiques,quai des Augustins, AN VII (1800), S.114  
2a. Mechanik des Himmels von P.S.Laplace, aus dem Französischen übersetzt und mit erläuternden Anmerkungen versehen von J.C.Burckhardt. Erster Theil. Berlin bey F.T. LaGarde,1800, S.148

\*\*\*\*\*  
Данное уравнение выводит и исследует К.Ф.Гаусс [8, стр.4]. Исследование свое он, вообще говоря, делает иначе, чем делаем мы, а ссылку приводит только на французский вариант работы P.S.Laplace "Traite de Mecanique Celeste" [8, стр.3].

Работа С.Лакруа "Элементарный курс прямолинейной и сферической тригонометрии и приложений алгебры к геометрии", имеющей также вывод полярного уравнения, вышла в Париже в 1798/99, т.е. более чем на 6 лет позже, чем "Астрономия" Лаланда , 3-е изд. [26, стр.245-246].

Таким образом, в данной работе исследуется уравнение (1) и его модификации. Как увидим ниже, это уравнение описывает эллипсы, гиперболы и параболы – т.е. кривые, известные под названием “кривые 2-го порядка” или “конические сечения”.

Вернемся к (1). Сравнивая (1) с подобной формулой [16 стр. 268] варианта 1), заметим, что впереди  $e$  стоит знак “-“. Это вариант (1), впервые предложенный Лаландом. В данной работе несколько слов уделим и данному варианту. Предварительно заметим, что у кривых, имеющих 2 фокуса, есть возможность делать расчет полярного радиуса из 2-го фокуса

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (2)$$

Что касается параболы, имеющую один фокус, то и ее свойства можно исследовать, как и двухфокусных кривых, как на основе (1), так и на основе (2).

Выбор варианта (1), как основного, обусловлен тем, что он реже, чем вариант (2), встречается в математической литературе. В этом смысле была цель стереть это “белое пятно”.

Несколько слов о методологии. К настоящему времени, уже сложилась устойчивая традиция проводить исследования свойств кривых 2-го порядка преимущественно в декартовой системе координат, изучая 5 коэффициентов квадратичной формы.

Что касается полярного уравнения (1) или (2), то в многочисленной учебной литературе для рассматриваемых кривых оно выводится скорее со справочной целью. На этом работа с этим представлением заканчивается. Упоминается только, что полярное уравнение используется в механике и астрономии [16, стр.268]. Этой работой мы хотим хотя бы частично восполнить этот пробел и показать технику работы с полярным представлением.

Как показывает наш личный опыт, **полярное представление (1) очень удобно для компьютерного хранения и обработки**, т.е. для перемещений, поворотов, отображений, растяжений-сжатий и др. Объяснение этому простое. **Каждый из 5 его основных параметров<sup>1</sup>, независимо от других параметров, отвечает либо за расположение дуги, либо за ее ориентацию, либо за ее**

---

<sup>1</sup> Напомним, что количество независимых параметров конкретной координатной системы сохраняется при переходе от одной системы координат к другой.



**форму или размеры. Это разделение функций позволяет глубже уловить взаимосвязи изучаемых объектов.** Кроме того, полярное уравнение намного проще, чем квадратичная форма общего вида, т.к. не содержит избыточной информации, такой как мнимый эллипс и др. Это существенно говорит в его пользу.

С другой стороны, декартовы координаты (в данной работе не используются проективные координаты) также являются удобным инструментом для исследования. В силу этого, как уже было сказано, используются полярные и декартовы координатные методы поочередно, в рамках многослойного подхода.

Формулы или уравнения каждой задачи, решаемой в этой работе, записываются первоначально в полярной системе координат. На следующем этапе исследований, как правило, делается переход в декартову систему координат, и окончательные формулы, с применением элементов полярных координат, получается уже в декартовой системе координат. В этой технологии, правда, существенно увеличивается нагрузка на тригонометрический аппарат, зато уменьшается применение матриц.

Для большинства практических задач, **полярное уравнение из фокуса, позволяет работать едиными методами с тремя вариантами конических кривых.** Это означает, что математический аппарат для полярного представления получается почти в 3 раза короче, чем альтернативный. Иногда, правда, разница в формулах для эллипса, параболы или гиперболы все-таки возникает – например, при вычислении площади под дугой. (Интегралы берутся различными методами в зависимости от эксцентриситета -  $e$ .) Существуют, также, некоторые отличия для гиперболы в связи с ее 2-мя разрывами, которые нужно каждый раз отслеживать. Но это скорее исключения, чем правило.

В связи с этим, обращаем внимание читателя на следующее: **формулы, записанные в двух системах, как показывает наш личный опыт, легче интерпретируются и запоминаются.** Последнее важно не только для успешной сдачи экзаменов, но и при программировании задач по данной тематике.

## 2.1. Полярное уравнение

1-й этап – получение общего уравнения кривой 2-го порядка в прямоугольных декартовых координатах.

### 2.1.1. Пятиточечные схемы, стрела прогиба

Кратко рассмотрим классическую схему получения 5-ти параметров для задания кривой второго порядка. При этом будем опираться на выводы из теоремы Якоба Штейнера (Steiner, Jakob (1796-1863))<sup>1</sup>. В работе [21, стр.99] говорится, что данная теорема является обобщением результатов  $III_{53} - III_{56}$ , полученных Аполлонием. В этой связи заметим, что Г. Лейбниц обладал рукописью Б.Паскаля (впоследствии утерянной), в которой Паскаль строил коники по каким-либо пяти элементам [7,стр.317]

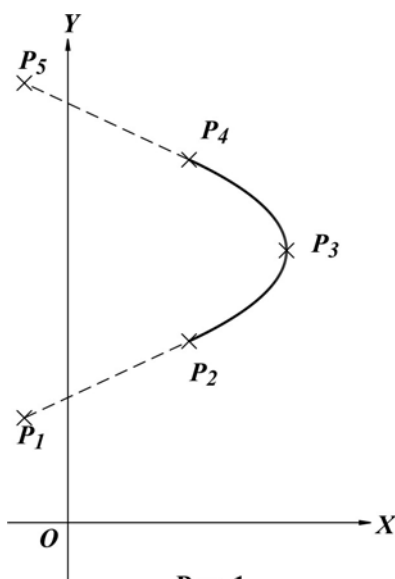


Рис. 1

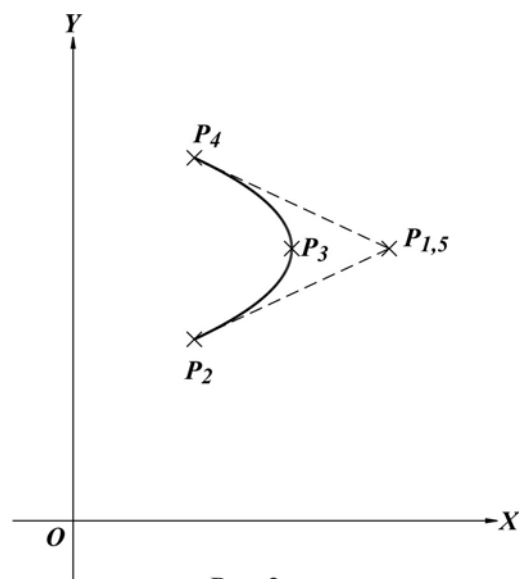


Рис. 2

Итак, пусть имеем 3 различных точки (2 граничные и одну внутреннюю), не лежащих на одной прямой (см.рис.1). Далее, пусть имеем еще 2 точки для задания направления касательных. Для этих точек правило аналогично: точка направления касательной, соответствующая ей граничная точка и внутренняя точка также не должны лежать на одной прямой. На практике точка полюса часто

<sup>1</sup> Якоб Штейнер начинал как швейцарский пастух. Только в 19 лет он научился читать и писать. Благодаря своей необычайной геометрической интуиции и несмотря на пробелы в образовании достиг положения профессора Берлинского университета [7, стр.406].

выполняет роль направления для двух касательных одновременно (см. рис.2). (Полярный треугольник с дугой внутри него, называется **стрелой прогиба**).

Теперь запишем общее уравнение кривой 2-го порядка в прямоугольных декартовых координатах

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (1)$$

Т.к. точность расчетов современных вычислительных машин достаточно высока, то для лабораторных работ, результаты которых вычерчиваются на обычном тетрадном листе, положим  $a_{33} = 1$ . Этот выбор удобен для тех же целей и для расчетов с помощью калькулятора. С другой стороны, если  $x, y$  могут быть достаточно велики, например, при расчете орбит космических объектов, то по сравнению с ними  $a_{33} \rightarrow 0$ . Чтобы этого не происходило, рекомендуем

масштабировать  $a_{33}$ . Например, таким образом  $a_{33} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^3 (x_i^2 + y_i^2)}{2 \cdot 3}}$ , где  $x_i, y_i$  - координаты трех внутренних точек. Важно следующее: если увеличивается  $a_{33}$ , то увеличиваются значения других неизвестных -  $a_{ij}$ . Это легко доказывается по правилу Крамера, т.к. из  $a_{33}$  образуется один из столбцов определителя, из которого состоит числитель  $a_{ij}$  (об этом более подробно см. далее в («**3.8. Инварианты. Получение параметров полярного уравнения**»)).

В том случае, если орбиты исследуемых тел будут сильно вытянуты, то, как следствие из этого, координаты различных точек могут отличаться на порядки и получаемая матрица, как в таких случаях говорят, становится **плохо обусловленной**. Однако «борьба с этими неприятностями» выходит за рамки данной работы.

Рассмотрим вариант построения системы уравнений. Вначале имеем 3 уравнения, в которое входят координаты 3 точек

$$a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_iy_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{13}x_i + 2a_{23}y_i = -1. \quad (2)$$

Используя 2 точки для задания направления касательных  $\{x_{t(i)}, y_{t(i)}\}_{i=1,2}$  и соответствующие им граничные точки  $\{x_{g(i)}, y_{g(i)}\}_{i=1,2}$  (2-й раз!), получим еще 2 линейных уравнения для касательных

$$(a_{11}x_g + a_{12}y_g + a_{13})(x_t - x_g) + (a_{21}x_g + a_{22}y_g + a_{23})(y_t - y_g) = 0. \quad (3)$$

Теперь имеем систему из 5 линейных уравнений с 5 неизвестными, которую решаем, например, методом исключения Гаусса.

*Замечание.* Если какая-нибудь из внутренних точек равна  $\{0,0\}$ , т.е. совпадает с центром координатной системы, то **необходимо сделать || сдвиг системы координат в любом направлении**, например, на 1 длины. Если это не сделать, то (2) дает в определитель системы нулевую строку  $a_{11}0^2 + 2a_{12}0 \cdot 0 + a_{22}0^2 + 2a_{13}0 + 2a_{23}0 = -a_{33}$ , определитель системы становится равным 0 и задача решений не имеет. Если же сдвиг сделан, то при нахождении координат фокуса в этом случае необходимо сделать сдвиг в обратную сторону.

Кроме того [18, §212], можно получить подобную выше систему из 5 уравнений, если известны координаты 5 точек на дуге или координаты 4 точек на дуге и координаты одной точки, определяющей касательную.

### 2.1.2. Использование метода наименьших квадратов<sup>1</sup>

При обработке экспериментальных данных, в теоретических исследованиях по естественнонаучным и экономическим дисциплинам, да и в самой математике достаточно часто исследуемую (в явном виде!) функцию в окрестности некоторой точки  $x_0$  разлагают до малых 3-его порядка в ряд Тейлора [24, §127]

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(c)}{3!}(x - x_0)^3, \quad c \in [x_0, x]. \quad (*)$$

(Последний член называется **дополнительный член в форме Лагранжа**<sup>2</sup>.)

Если значением дополнительного члена можно пренебречь, то последнее выражение представляет собой параболу (докажите!). С другой стороны известно [16, §188], [18, §§260-261], что **нельзя с помощью аффинных (т.е. линейных) преобразований, переводить параболу в эллипс или гиперболу**. (Это можно делать с помощью проективных – дробно-линейных преобразований [16, дополнение IV, 2].) В силу этого, если исследуемый процесс (в геометрии кривые)

<sup>1</sup> Основателем данного метода являются французский ученый Андриен Мари Лежандр (А.М. Legendre (1752 - 1833)) и выдающийся немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс (С.Ф. Gauss (1777 - 1855)). Дальнейшее развитие данного метода определили работы П.С. Лапласа, П.Л. Чебышева, А.А. Маркова, Ф. Гельмерта, А.Н. Колмогорова [15, §2. Краткий исторический обзор].

<sup>2</sup> Лагранж (Lagrange, Josef Louis (1736-1813)) - выдающийся французский математик, механик, астроном.

описываются эллиптической или гиперболической зависимостями, то **параболическое представление сопровождается дополнительной погрешностью**. (В данной работе мы не имеем возможности заниматься оценкой этой погрешности.)

Для того, чтобы избежать нежелательных эффектов параболического приближения, будем исследуемую функцию в окрестности некоторой точки  $\{x_i, y_i\}$  **в неявном виде** разлагать в ряд Тейлора

$$F(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + 1 = \varepsilon_i, \quad (1)$$

где  $\varepsilon_i$  - отклонение  $F(x_i, y_i)$  от 0.

При этом будем добиваться, пользуясь основной идеей метода наименьших квадратов [9,гл.VI],[5,стр.272],[1,22.19],[15], чтобы сумма квадратов отклонений

$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$  в исследуемых точках была минимальной

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( F(x_i, y_i) - (a_{11}x_i^2 + 2a_{12}x_i y_i + a_{22}y_i^2 + 2a_{13}x_i + 2a_{23}y_i + 1) \right)^2 = \min. \quad (2)$$

В силу малой теоремы П.Ферма, в точках экстремума частные производные по каждому из неизвестных  $a_{ij}$  от (2) равны 0 (необходимое условие). Сведем все вычисления в таблицу

1	2	3
$a_{11}$	$\frac{\partial F}{\partial a_{11}} = 2 \sum_{i=1}^n () x_i^2 = 0$	$a_{11} \sum_{i=1}^n x_i^4 + 2a_{12} \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i + a_{22} \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i^2 + 2a_{13} \sum_{i=1}^n x_i^3 + 2a_{23} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i =$ $= - \sum_{i=1}^n x_i^2$
$a_{12}$	$\frac{\partial F}{\partial a_{12}} = 2 \cdot 2 \sum_{i=1}^n () x_i y_i = 0$	$a_{11} \sum_{i=1}^n x_i^3 y_i + 2a_{12} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + a_{22} \sum_{i=1}^n x_i y_i^3 + 2a_{13} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2a_{23} \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 =$ $= - \sum_{i=1}^n x_i y_i$
$a_{22}$	$\frac{\partial F}{\partial a_{22}} = 2 \sum_{i=1}^n () y_i^2 = 0$	$a_{11} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i^2 + 2a_{12} \sum_{i=1}^n x_i y_i^3 + a_{22} \sum_{i=1}^n y_i^4 + 2a_{13} \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 + 2a_{23} \sum_{i=1}^n y_i^3 =$ $= - \sum_{i=1}^n y_i^2$
$a_{13}$	$\frac{\partial F}{\partial a_{13}} = 2 \cdot 2 \sum_{i=1}^n () x_i = 0$	$a_{11} \sum_{i=1}^n x_i^3 + 2a_{12} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + a_{22} \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 + 2a_{13} \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2a_{23} \sum_{i=1}^n x_i y_i =$ $= - \sum_{i=1}^n x_i$
$a_{23}$	$\frac{\partial F}{\partial a_{23}} = 2 \cdot 2 \sum_{i=1}^n () y_i = 0$	$a_{11} \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i + 2a_{12} \sum_{i=1}^n x_i y_i^2 + a_{22} \sum_{i=1}^n y_i^3 + 2a_{13} \sum_{i=1}^n x_i y_i + 2a_{23} \sum_{i=1}^n y_i^2 =$ $= - \sum_{i=1}^n y_i$

Табл.1.

Определим любой коэффициент из 3-его столбца таблицы 1  $K_{mn} = \sum_{i=1}^n x_i^m y_i^n$ .

В 3-ем столбце таблицы 1 таких оригинальных коэффициентов 14. Теперь перепишем эти уравнения

$$\begin{cases} K_{40}a_{11} + 2K_{31}a_{12} + K_{22}a_{22} + 2K_{30}a_{13} + 2K_{21}a_{23} = -K_{20} \\ K_{31}a_{11} + 2K_{22}a_{12} + K_{13}a_{22} + 2K_{21}a_{13} + 2K_{12}a_{23} = -K_{11} \\ K_{22}a_{11} + 2K_{13}a_{12} + K_{04}a_{22} + 2K_{12}a_{13} + 2K_{30}a_{23} = -K_{02} \\ K_{30}a_{11} + 2K_{21}a_{12} + K_{12}a_{22} + 2K_{20}a_{13} + 2K_{11}a_{23} = -K_{10} \\ K_{21}a_{11} + 2K_{12}a_{12} + K_{03}a_{22} + 2K_{11}a_{13} + 2K_{02}a_{23} = -K_{01} \end{cases} \quad (3)$$

Находим все 14 коэффициентов  $K_{mn}$ . Если точки  $\{x_i, y_i\}$  выбраны правильно, то детерминант системы (3) отличен от 0, т.е. система невырождена и имеет единственное решение  $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{13}, a_{23}$ .

## 2.2. Полярные параметры для конических кривых. Получение, анализ, преобразования, хранение, взаимосвязи

### 1<sup>o</sup>. Некоторые вопросы при получении полярного уравнения

После нахождения корней  $a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{13}, a_{23}$ , можно известными методами [18], [16] найти 5 основных параметров кривой второго порядка координаты фокуса (фокусов для эллипса и гиперболы),  $p$  - параметр,  $e$  - эксцентриситет,  $\alpha$  - угол между фокальной осью кривой 2-го порядка и осью абсцисс (или между фокальной и полярной осями). Заметим, что из перечисленных 5 параметров только параметры  $p$  и  $e$  инвариантны, т.е. для данной кривой не зависят от выбора начала координат и ориентации осей координат. Для построения рисунков к задачам **достаточно варьировать параметры полярного уравнения**. (Таким образом, построены все рисунки данной работы.) Преобразования квадратичной формы к параметрам полярного уравнения для коник даны, как уже было указано, в («3.8. Инварианты. Получение параметров полярного уравнения»).

Следующий этап получения полярного уравнения – выбор локальной системы координат (ЛСК). Этот выбор определяется целью исследования. Вообще говоря, математики стараются поместить начало ЛСК в один из центров (если он не один) симметрии изучаемого объекта, чтобы изучаемые уравнения имели наиболее простой вид. В этом случае исследование проходит наиболее эффективно. Следуя этим принципам, будем изучать кривую в локальной системе координат, а на втором этапе, если это еще требуется, по известным правилам преобразования переводить полученные результаты в исходную систему координат.

На настоящий момент, в силу сложившейся традиции, ЛСК выбирают:

- 1) в левом фокусе эллипса, правом фокусе гиперболы, фокусе параболы (наиболее используемый вариант);
- 2) в правом фокусе эллипса, фокусе параболы, левом фокусе гиперболы (данная работа);

3) в центре симметрии - между фокусами эллипса или гиперболы. (В этом случае полярное уравнение имеет принципиально другой вид [18, стр. 391]),

4) в левой вершине коники, которую разворачивают таким образом, что фокальная ось совпадает с осью абсцисс (К.Ф.Гаусс [8]).

Следуя [18, стр.390], будем использовать вариант 2. Ниже покажем, что варианты 1) и 2) эквивалентны. Выбор на вариант 2) пал, как на менее изученный.

Поскольку в целом ряде задач, рассмотренных ниже, будем иметь дело не со всей кривой, а только с некоторой ее частью - дугой, то добавим к вышеуказанным 5-ти параметрам еще 2, идентифицирующими концы дуги. (Заметим, что полностью всю кривую можем увидеть только у эллипса и его разновидности – окружности. Размеры параболы и гиперболы – бесконечны. Ниже этот факт докажем.)

Обозначим точку начала обхода дуги  $P_1$ , а вторую граничную точку -  $P_2$ .

Теперь можем ввести:

-  $\varphi_{\min}$  - полярный угол, под которым из фокуса видна  $P_1$  (находим этот угол с помощью  $\text{ang}(F, P_1)$ );

-  $\varphi_{\max}$  - -----“-----“-----“-----“-----“-----  $P_2$  - (и, аналогично,  $\text{ang}(F, P_2)$ ).

Обсудим еще несколько вопросов по поводу хранения параметров дуги.

В теоретических вопросах, для удобной интерпретации результатов, будем часто рассматривать дугу, которую пересекает полярная ось. В этом случае, направлению полярной оси придаем нулевое значение, а углы могут принимать и отрицательные значения. Например, принадлежать интервалу  $\varphi \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ . При этом значение второго угла всегда должно быть больше первого. Такой способ использования углов, при котором допускаются отрицательные значения углов, и  $\varphi_1 < \varphi_2$ , будем называть ненормированным и неранжированным. Заметим, что этот способ удобен для теоретических исследований.

В практических приложениях (программах), удобно хранить  $\varphi_{\min}$  и  $\varphi_{\max}$  в нормированном и ранжированном видах  $0 \leq \varphi_{\min} < 2\pi$  и  $\varphi_{\min} < \varphi_{\max}$ . (\*)



Добиваемся этого, допуская только использование правосторонней системы координат. С другой стороны, если при решении тригонометрических уравнений, получаются отрицательные углы, то, одновременно прибавляя к  $\varphi_{\min}$ ,  $\varphi_{\max}$ ,  $\alpha$  (угол фокальной оси) по  $2\pi$ , получаем условие (\*). В дальнейшем будем напоминать в соответствующих местах о необходимости восстановления условия (\*) с помощью ранжирования и нормирования.

В данной работе граничные углы хранятся в абсолютном виде. Однако их можно вычислять, как это сделано ниже при решении задачи о зеркальном отображении дуги, при помощи добавок к углу полярной оси. Тогда вместо нормирования 3-х углов: угла фокальной оси и двух граничных углов достаточно делать нормирование только угла фокальной оси. Операция же ранжирования граничных углов в обоих вариантах идентична. Однако “цена” этого упрощения нормирования связана с необходимостью вычисления граничных углов для всех задач, где они используются  $\varphi_{\min} = \alpha + \Delta\varphi_{\min}$ ,  $\varphi_{\max} = \alpha + \Delta\varphi_{\max}$ . Выбор варианта предоставляем читателю.

2. Известно, что длина дуги кривой 2-го порядка в общем случае выражается через **полные эллиптические интегралы** [25, стр. 177]. Поэтому для быстродействия работы программ, использующих этот параметр (назовем его здесь  $L$ ), рекомендуется хранить и его. Обновление параметра  $L$  необходимо делать всякий раз, когда изменяется хотя бы один из параметров, от которых он зависит:  $p, e, \varphi_{\min} - \alpha, \varphi_{\max} - \alpha$ . Например, при масштабировании, сжатии (растяжении) и делении дуги на части. С другой стороны, при ортогональных преобразованиях (движениях): при переносах, поворотах (включая зеркальные) и их комбинациях, длина дуги  $L$  не изменяется.

## 2° .Преобразование из полярных координат в декартовые

$$x = r \cos \varphi = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}, \quad y = r \sin \varphi = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (2)$$

Подвергнем некоторую фигуру, описываемую (2), преобразованием гомотетии  $y' \rightarrow ky, x' \rightarrow kx$ . Тогда

$$x' = kr \cos \varphi = \frac{kp \cos \varphi}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}, \quad y' = kr \sin \varphi = \frac{kp \sin \varphi}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}. \quad (3)$$

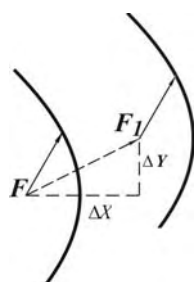
Сделаем выводы из (3). Очевидно, что **преобразование гомотетии меняет только параметр кривой**  $p' = kp$ , **отвечающий за масштаб**. Все остальные параметры остаются без изменения. Особенно важно следующее: без изменения остается эксцентриситет. Это означает, что **гомотетичное преобразование не изменяет тип кривой**: эллипс переходит в эллипс, парабола в параболу, гипербола в гиперболу. (Если  $k < 0$ , то кривая масштабируется и поворачивается в другую сторону.) Все симметрии (об этом ниже), которые есть у данного уравнения, также остаются [ср.18, § 207].)

### 3° .Влияние параметров полярного уравнения на форму и расположение дуги

Предварительно отметим следующие зависимости:

- от  $p$  - параметра - размеры (масштаб) дуги;
- от  $e$  - эксцентриситета - форма дуги (степень сжатия);
- от значений координат фокуса  $F$  - расположение дуги;
- от угла фокальной оси  $\alpha$  по отношению к оси абсцисс (полярной оси) - ориентация дуги в пространстве.

### 2.3. Перемещение дуги на вектор $\{\Delta x, \Delta y\}$



Для этого достаточно к декартовым координатам фокуса  $F(x, y)$  добавить соответственно, координаты вектора  $\{\Delta x, \Delta y\}$ . Остальные параметры дуги при этой операции не изменяются (см. рис.1).

Рис. 1

### 2.4. Поворот дуги

Пусть центр вращения дуги будет размещен в некоторой точке  $C$ , а угол поворота дуги -  $\theta$ . Наша задача сводится к нахождению нового положения фокуса  $F_r$ , а также новых значений угла фокальной оси  $\alpha_r$  и граничных углов  $\varphi_{1r}, \varphi_{2r}$ .

Вращаем  $F$  старого положения фокуса относительно центра  $C$ . Из рис. 1 легко получается формула

$$F_r = \text{polar}(C, \text{dist}(C, F), \theta_0 + \theta) = \text{polar}(C, \text{dist}(C, F), \text{ang}(C, F) + \theta).$$

Сумма  $\bar{\theta} = \theta_0 + \theta = \text{ang}(C, F) + \theta$  говорит о том, что результирующий поворот фокуса  $\bar{\theta}$  относительно  $C$  состоит, собственно, из двух поворотов - из того поворота, который сложился для старого положения фокуса в его предыстории -  $\text{ang}(C, F)$  и нового поворота на угол  $\theta$ .

При таком повороте точки фокуса дуги на угол  $\theta$ , все искомые угловые параметры также изменяются на угол  $\theta$

$$\alpha_r = \alpha + \theta, \quad \varphi_{1r} = \varphi_1 + \theta, \quad \varphi_{2r} = \varphi_2 + \theta.$$

Последнее утверждение доказывается следующим образом. Возьмем, например, копию вектора  $FP_1$  и  $\Downarrow\Downarrow$  переместим эту копию до совмещения точки  $F'$  с центром вращения  $C$ . Теперь будем вращать всю конструкцию  $CP_1P_2$  как “твердое тело”. Очевидно, что при вращении векторы  $FP_1$  и  $F'P'_1$  также, в силу жесткости конструкции, останутся  $\Downarrow\Downarrow$ . Но после поворота угол наклона вектора  $F'P'_1$  изменится по отношению к своей локальной горизонтальной оси на угол  $\omega$ . На такой же угол по отношению к своей локальной горизонтальной оси в силу параллельности изменится и угол наклона  $FP_1$ . Аналогично изменятся углы наклона для всех остальных векторов.  $\square$

В конце работы алгоритма “поворот дуги” рекомендуем произвести нормирование угла фокальной оси и граничных углов, а также ранжирование граничных углов.  $\square$

## 2.5. Зеркальное отображение дуги

Зададим положение зеркальной оси двумя точками  $Z_1$  и  $Z_2$ . В качестве первого шага необходимо отобразить зеркально точку фокуса. Для этого можно воспользоваться одним из 3-х способов, указанных в (1.6.1.) Т.к. 2-й способ нагляднее (но не эффективнее!), то воспользуемся им. Для этого опустим перпендикуляр из старого положения фокуса в  $F$  на зеркальную ось  $Z_1, Z_2$  (см. рис.1) Пусть основание перпендикуляра лежит в  $Z_F$ . Рассматривая эту точку как центр, повернем старый фокус относительно нее на угол  $\pi$

$$F_z = \text{polar}(Z_F, \text{dist}(Z_F, F), \text{ang}(Z_F, F) + \pi) = \text{polar}(Z_F, \text{dist}(Z_F, F), \psi + \pi).$$

Теперь остается зеркально повернуть угол фокальной оси  $\alpha$  и граничные углы дуги  $\varphi_{\min} = \varphi_1, \varphi_{\max} = \varphi_2$ . Для этого введем угол  $\theta = \text{ang}(Z_1, Z_2)$  между зеркальной осью и осью абсцисс. На основании формул (1.6.2.-1)  $\alpha_z = 2\theta - \alpha$ . При зеркальном повороте граничные точки меняются местами, т.к. ориентация дуги меняется на противоположную (см.рис.1). Поэтому

$$\varphi_{\min z} = \varphi_{1z} = 2\theta - \varphi_{\max}, \quad \varphi_{\max z} = \varphi_{2z} = 2\theta - \varphi_{\min}. \quad (1)$$

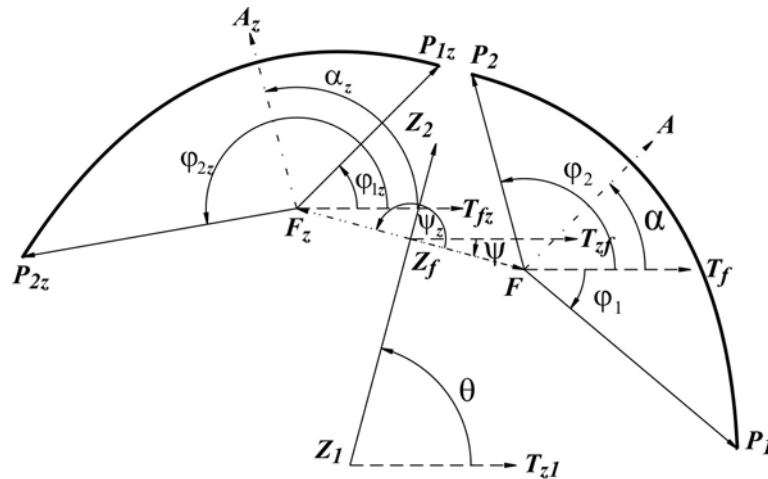


Рис. 1

Существует и другой способ вычисления зеркальных граничных углов:

1) находим разности между исходным углом оси и исходными граничными углами  $\delta_{\min} = \varphi_{\min} - \alpha, \delta_{\max} = \varphi_{\max} - \alpha,$  (2)

2) находим  $\alpha_z$  и будем соответствующие добавки не прибавлять, а вычитать  $\varphi_{z\min} = \alpha_z - \delta_{\max}, \varphi_{z\max} = \alpha_z - \delta_{\min},$  (3)

3) на последнем этапе данного алгоритма рекомендуем нормировать все пересчитанные углы, и, кроме того, граничные углы ранжировать.

## 2.6. Определение расположения точки по отношению к кривой

В данном разделе решим следующую задачу: находится ли точка а) внутри кривой (т.е. между кривой и фокусом); б) на кривой; с) за кривой.

Эта задача решается за 5 шагов:

- найдем расстояние между  $P_1$  и фокусом -  $d_1 = dist(P_1, F)$ ;

- найдем угол, под которым точка  $P_1$  видна из фокуса -  $\varphi = ang(F, P_1)$ ;

- вычислим расстояние до ближайшей точки кривой по направлению фокус-

$$P_0: r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)};$$

- найдем разность  $s = d_1 - r$ ;

- проанализируем разность

если  $ABS(s) \leq \delta$ , где  $\delta$  очень малое число, то  $P_1$  лежит на кривой;

если  $s < 0$ , то  $P_1$  лежит внутри кривой;

иначе  $P_1$  лежит за кривой.  $\square$

Если рассматриваем две ветви гиперболы, то данная задача перестает быть тривиальной. Продолжим ее рассмотрение в (5.3.).

## 2.7. Вектор направления касательной в полярных координатах

Учитывая (2.1.-2), найдем методами дифференциального исчисления тангенс угла наклона (или угловой коэффициент) касательной

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}} = \frac{\left( \frac{p \sin(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} \right)'}{\left( \frac{p \cos(\varphi)}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} \right)'} = \frac{\cos(\varphi)(1 + e \cos(\varphi - \alpha)) + e \sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)}{-\sin(\varphi)(1 + e \cos(\varphi - \alpha)) + e \sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)} = \\ &= \frac{\cos \varphi + e \cos \varphi \cos(\varphi - \alpha) + e \sin \varphi \sin(\varphi - \alpha)}{-\sin \varphi - e \sin \varphi \cos(\varphi - \alpha) + e \cos \varphi \sin(\varphi - \alpha)} = \frac{\cos \varphi + e \cos \alpha}{-\sin \varphi - e \sin \alpha}. \end{aligned} \quad (1)$$

Найден **угловой коэффициент**  $k$  **прямой линии (в данном случае касательной)** для приведенного уравнения  $y = kx + b$ . С другой стороны, запишем

$k = -\frac{A}{B} = \frac{A}{-B}$  для той же прямой, но для уравнения общего вида  $Ax + By + C = 0$ .

Принимая во внимание [16,стр.139, стр.157], что вектор  $\{-B, A\} \parallel$  этой прямой, получаем единичный вектор направления касательной

$$t = \frac{1}{|t|} \{-\sin \varphi - e \sin \alpha, \cos \varphi + e \cos \alpha\},$$

$$\begin{aligned} \text{где } |t| &= \sqrt{(\sin \varphi + e \sin \alpha)^2 + (\cos \varphi + e \cos \alpha)^2} = \\ &= \sqrt{\sin^2 \varphi + 2e \sin \varphi \sin \alpha + e^2 \sin^2 \alpha + \sin^2 \varphi + 2e \cos \varphi \cos \alpha + e^2 \cos^2 \alpha} = \\ &= \sqrt{1 + e^2 + 2e \cos(\varphi - \alpha)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Обратим внимание на два обстоятельства. Во-первых, на то, что, пользуясь правосторонней системой координат, выбран в векторе  $\{-B, A\}$  знак минус у первого компонента вектора. В этом случае, касательная на рис.1 направлена “налево”, или, точнее выражаясь, против часовой стрелки. (Сравните с [18,стр.192,4], где выбор знаков другой  $\{B, -A\}$ . У этих векторов противоположные направления  $\text{ang}(\mathbf{0}, \{B, -A\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-B, A\}) + \pi$ .)

Во-вторых, **вектор направления касательной не зависит от параметра  $p$** . Поэтому, варьируя только параметр  $p$ , получим для данного направления  $\varphi$  семейство дуг с параллельными касательными (см. рис.1).

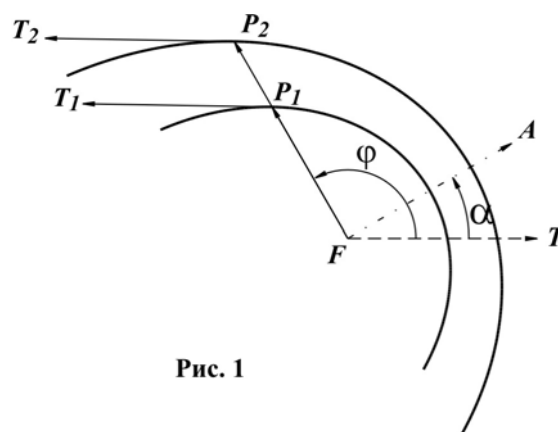


Рис. 1

Однако, эти дуги, за исключением окружности, не являются ни огибающими, ни параллельными дугами для исходной дуги. Термин параллельная дуга, а также причины сказанного здесь будет выяснен ниже в главе “7.Нормаль”.

Сейчас только обратим внимание на то, что на рис.1. зрительно заметно, что расстояние между дугами с постоянной разницей в параметрах  $\Delta p = p_2 - p_1$  изменяется как, функция угла от  $\varphi$ . Это расстояние является наименьшим по направлению фокальной оси  $A$ .

Проверим формулу (1) для окружности. В этом случае роль параметра играет радиус  $R$ , эксцентриситет  $e = 0$ , и полярный угол  $\alpha = 0$ . Найдем скалярное произведение для некоторого угла  $\varphi$  направляющих радиус-вектора и вектора направления угла касательной  $(\{R \cos \varphi, R \sin \varphi\}, \{-\sin \varphi, \cos \varphi\}) = -\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi = 0$ . Таким образом, эти векторы перпендикулярны, что для окружности и следовало ожидать.

Решим полезную задачу - отложить от некоторой точки  $P_1$  вдоль вектора касательной отрезок длиной  $R$ , получая новую точку -  $P_2$ .

Найдем  $P_1$  на дуге с помощью формулы  $polar(F, \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)}, \varphi)$ .

Временно считая  $P_1$  началом ЛСК, найдем угол, под которым 'видна'  $P_2$

$\phi = \text{ang}(P_1, \{-\sin \varphi + e \sin \alpha, \cos \varphi + e \cos \alpha\})$ . Возвращаясь к исходной системе координат, из точки  $P_1$  под углом  $\phi$  отложим радиус  $R$

$$P_2 = polar(P_1, R, \phi).$$

Ту же задачу можно решить с помощью векторов

$$P_2 = F + r + Rt =$$

$$= \left\{ F_x + \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} - \frac{R(\sin \varphi + e \sin \alpha)}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos(\varphi - \alpha)}}, F_y + \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} + \frac{R(\cos \varphi + e \cos \alpha)}{\sqrt{1 + e^2 + 2e \cos(\varphi - \alpha)}} \right\}$$

(3)

### 3. Система координат Кеплера

#### 3.1. Общие вопросы

##### 3.1.1. Определение системы координат Кеплера и преобразования между этой системой и исходной системой координат

Напомним, что **фокальная ось** - это ось симметрии, проходящая через соответствующие **фокусы эллипса, гиперболы или параболы** [18, стр.390].

Назовем **системой координат Кеплера<sup>1</sup>** такую **полярную систему координат**, у которой **центр системы координат находится в правом фокусе эллипса, единственном фокусе параболы, или левом фокусе гиперболы, а фокальная ось совпадает с полярной осью данной кривой**. Аналитически это означает, что **угол между полярной осью и осью абсцисс будет  $\alpha = 0$** . В этом случае упростится формула Лаланда-Лапласа для **радиус-вектора**

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad (1)$$

и все, образованные от нее формулы. В частности, станут проще

##### **координаты точки дуги**

$$\frac{p}{1 + e \cos \varphi} \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}, \quad (2)$$

##### **тангенс угла наклона касательной**

$$\frac{\cos \varphi + e \cos \alpha}{-\sin \varphi - e \sin \alpha} = \frac{\cos \varphi + e}{-\sin \varphi}, \quad (3)$$

<sup>1</sup> Данная система координат названа в честь величайшего немецкого ученого Иоганна Кеплера (Kepler, Johannes (1571-1630)). И.Кеплер на основе данных, собранных в лаборатории его руководителя Тихо Браге (1546-1601), создал в несколько этапов теорию, доказав, что орбита Марса есть эллипс ("Новая Астрономия" 1609). Там же доказано, что в в одном из фокусов эллиптической орбиты Марса лежит Солнце. В этой работе следуем подобно И.Кеплеру и помещаем центры наших координатных систем в соответствующие фокусы кривых.

Настоятельно рекомендуем ознакомиться с биографией ученого в одной из следующих книг.

1. В.П.Лишевский "Иоганн Кеплер". Библиотечка •Квант•, выпуск 9, ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ УЧЕНЫЕ.

Под редакцией С.П. Капицы. М., «Наука», 1980.

2. Max Caspar "Johannes Kepler", W. Kohlhammer Verlag Stuttgart, 1948.

3. Prof.Dr.Johannes Hoppe, Jena "Johannes Kepler", BSB,B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, 1982, 4. Auflage .

4. Günter Doebel "Johannes Kepler. Er veränderte das Weltbild", Verlag Styria, 1983.

5. Ф.Араго. Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров в 2-х томах. Москва-Ижевск 2000.

6. Биография И.Кеплера есть, практически, во всех больших энциклопедиях.



**вектор направления касательной**

$$t = \frac{1}{\sqrt{(\cos\varphi + e)^2 + \sin^2\varphi}} \{-\sin\varphi, \cos\varphi + e\} \text{ или } \frac{1}{\sqrt{1 + 2e\cos\varphi + e^2}} \{-\sin\varphi, \cos\varphi + e\}. \quad (4)$$

Кроме того, **уравнения всех прямых линий, выходящих из фокуса (т.е. из центра координат) и записанных в декартовой системе координат, будут без свободного члена  $Ax + By = 0$  или  $y = kx$ .**

В качестве примера построим прямую, совпадающую с радиус-вектором (2) во всех точках последнего (прямая бесконечна, а радиус-вектор конечен). Воспользуемся для этого уравнением прямой, проходящей через 2 точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \text{ Т.к. } \{x_1, y_1\} = \{0, 0\}, \text{ то } \frac{x}{\frac{p \cos\varphi}{1 + e \cos\varphi}} = \frac{y}{\frac{p \sin\varphi}{1 + e \cos\varphi}}, \text{ и, окончательно, имеем}$$

$$\text{нормированное (докажите!) уравнение радиус-вектора } x \sin\varphi - y \cos\varphi = 0. \quad (5)$$

Учитывая приведенные выше доводы, заметим, что **в системе координат Кеплера все вычисления существенно проще, чем в полярной системе координат общего вида.**

**Одновременно с полярной правосторонней системой координат рассматриваем систему Кеплера и как прямоугольную правостороннюю декартову систему координат, у которой с полярной системой совпадают следующие характеристики:**

- центры координат;
- направление полярной оси и оси абсцисс;
- длины измеряемых отрезков (масштаб).

Иначе говоря, **накладываем одну систему на другую (совмещаем две системы – полярную и декартову).**

Исходя из вышесказанного, будем приводить наши задачи к решению в системе координат Кеплера по известным (1.5.1.-9) формулам преобразования

$$\begin{cases} x' = (x - x_0) \cos\alpha + (y - y_0) \sin\alpha, \\ y' = -(x - x_0) \sin\alpha + (y - y_0) \cos\alpha \end{cases} \quad (6)$$

где  $\alpha$  - угол полярной оси, а  $x_0, y_0$  - координаты фокуса в исходной системе координат. При переходе к системе координат Кеплера из всех углов,

участвующих в расчете и характеризующих направление, нужно вычитать  $\alpha$  (в частности, нужно вычитать из граничных углов  $\varphi_{\min}, \varphi_{\max}$ ).

Разность же углов между двумя направлениями (например, углы при вершинах треугольника, полярные углы и т.д.) при поворотах системы координат не изменяется. Этому есть простое объяснение

$$\varphi_1' = \varphi_1 - \alpha, \quad \varphi_2' = \varphi_2 - \alpha, \quad \Delta = \varphi_2 - \varphi_1 = (\varphi_2' - \alpha) - (\varphi_1' - \alpha) = \varphi_2' - \varphi_1'. \quad (7)$$

Возвращаясь обратно, в исходную систему координат (программа должна это делать после каждого расчета), нужно переводить результаты из системы координат Кеплера в исходную систему координат по формулам (1.5.1.-10)

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = y_0 + x' \sin \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} \quad (8)$$

К углам, связанным с некоторым направлением, нужно прибавлять  $\alpha$ , но разности углов между двумя направлениями, аналогично (5), остаются без изменения.

Упражнение 1. Доказать (К.Ф.Гаусс [8,стр.7]), что:

$$1) \quad r = \frac{P}{1 + e - 2e \sin^2 \frac{\varphi}{2}}; \quad (9)$$

$$2) \quad r = \frac{P}{1 - e + 2e \cos^2 \frac{\varphi}{2}}; \quad (10)$$

$$3) \quad r = \frac{P}{(1 + e) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (1 - e) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}. \quad (11)$$

Доказательство. Докажем (11). Из (1) и  $1 = \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\varphi}{2}$ ,

$\cos \varphi = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}$  очевидно следует (11). В частности, для параболы ( $e = 1$ )

$$r = \frac{P}{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

### 3.1.2. Горизонтальная и вертикальная симметрия полярного уравнения

Напомним, что ось и свойство симметрии  $\perp$  друг другу. Так, вертикальная ось порождает горизонтальную симметрию, а горизонтальная ось – вертикальную.

#### 1°. Вертикальная симметрия

Теперь докажем, что **конические кривые симметричны относительно фокальной оси**. В уравнении (1)  $r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}$  функция  $\cos \varphi$  четная, т.е.  $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$ . Отсюда следует, что и  $r(\varphi) = r(-\varphi)$ . (Напомним, что отрицательные углы откладываются от фокальной оси по часовой стрелке (см.1.2.1.2°). В системе Кеплера эта ось совпадает с осью абсцисс).

Таким образом, **фокальная ось (или ось абсцисс) является осью вертикальной симметрии**.

#### 2°. Горизонтальная симметрия

Исследуем полярное уравнение (1) на свойство горизонтальной симметрии. Другими словами, ищем вертикальную ось, зеркальное отражение от которой нетождественно горизонтально отобразит исследуемую кривую в нее же с сохранением ординаты каждой отображаемой точки кривой. Будем исследовать отображение в виде (1.5.4.1.-6)

$$\begin{pmatrix} x_z \\ y_z \end{pmatrix} = 2p_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

**Т.к. ординаты при отображении сохраняют свое значение, то зеркальная ось расположена вертикально, следовательно, нормальный вектор Гессе  $p_L\{\cos \theta, \sin \theta\}$ , проведенный из центра координат к зеркальной оси, расположен горизонтально.** Отсюда  $\theta = 0, \pi$ . Т.к.  $\cos 2\theta|_{0,\pi} = 1$ , то остается выбор  $\theta$  для  $\cos \theta$ , но отложим его до окончательного анализа.

Нам понадобится еще одно понятие - центр симметрии. **Центром симметрии называют точку пересечения вертикальной и горизонтальной осей симметрии.**

Запишем, теперь, уравнение (1), связывающее абсциссы двух исследуемых точек. Они расположены симметрично относительно вертикальной оси симметрии и у этих точек разные полярные углы -  $\varphi_1, \varphi_2$ .

$$\frac{p \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} = 2p_L \cos \theta - \frac{p \cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1}. \quad (1)$$

В данном уравнении ищем положение зеркальной оси  $p_L \cos \theta$ .

$$\text{Преобразовываем (1)} \quad \frac{\cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} + \frac{\cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} = 2 \frac{p_L}{p},$$

причем вначале только левую часть  $\frac{\cos \varphi_2 + e \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 + \cos \varphi_1 + e \cos \varphi_2 \cos \varphi_1}{1 + e(\cos \varphi_2 + \cos \varphi_1) + e^2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1} =$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + e \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{1 + 2e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{e^2}{2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \frac{e^2}{2} \cos(\varphi_2 + \varphi_1)} = \\ &= \frac{2 \cos \varphi_0 \cos \delta + 2e \cos^2 \delta - e + 2e \cos^2 \varphi_0 - e}{1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta - \frac{e^2}{2} + e^2 \cos^2 \varphi_0 - \frac{e^2}{2}} = \\ &= \frac{2(-e \cos^2 \delta + e \cos^2 \delta + e^3 \cos^2 \delta - e)}{1 - 2e^2 \cos^2 \delta + e^2 \cos^2 \delta + e^4 \cos^2 \delta - e^2} = \frac{-2e(1 - \cos^2 \delta)}{(1 - e^2)(1 - \cos^2 \delta)} = \frac{-2e}{(1 - e^2)}. \text{ Отсюда} \end{aligned}$$

$$p_L = \frac{-pe}{(1 - e^2)}. \quad (2)$$

Подставим полученное решение в нормальное уравнение вертикальной

$$\text{зеркальной оси} \quad x \cos \theta - \frac{-pe}{(1 - e^2)} = 0. \quad (3)$$

(Выше было выяснено, что для вертикальной оси симметрии  $\theta = 0, \pi$ , отсюда  $y \sin \theta = 0$ .)

Исследуем (3) в зависимости от угла  $\theta$  и знака знаменателя  $1 - e^2$ . По условию нормального уравнения прямой необходимо, чтобы свободный член был отрицательный. Следовательно, подходят следующие решения, которые поместим в таблицу 1.

<i>Кривая</i>	$e$	$1-e^2$	$\theta$	<i>центр симметрии</i>
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>	<b>5</b>
эллипс	$e < 1$	$> 0$	$\pi$	$\left\{ \frac{-pe}{1-e^2}, 0 \right\}$ (4)
парабола	$e = 1$	$0$	-	-
гипербола	$e > 1$	$< 0$	$0$	$\left\{ \frac{pe}{e^2-1}, 0 \right\}$ (5)

Табл.1.

Видно, что центры симметрии эллипса и гиперболы вычисляются при помощи одной и той же формулы (правда, в разных видах). И расположены они различным образом относительно фокуса (начала системы координат) (см.рис.1,2). Так, у эллипса центр симметрии находится слева, а у гиперболы справа относительно начала координат, у параболы нет вертикальной оси симметрии.

Упражнение 1. Почему у эллипса и гиперболы центры симметрии расположены по разные стороны от фокуса - центра системы координат? □

На (рис.1,2) изображены элементы эллипса и гиперболы после отображения от оси симметрии  $B_1B_2$ . Подробный смысл каждого элемента будет объяснен позже.

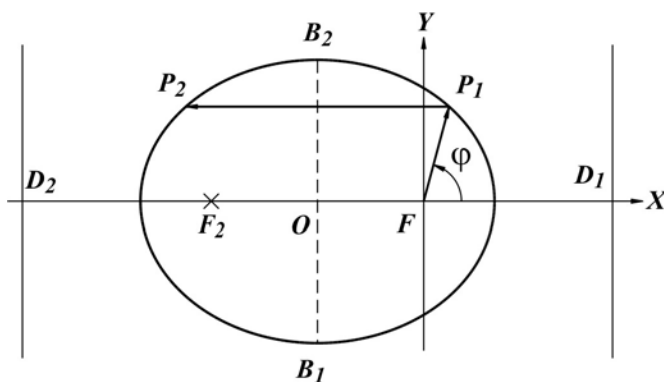


Рис.1

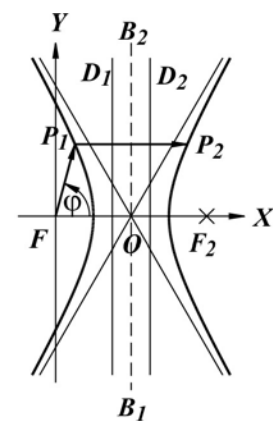


Рис.2

## 3.2. Касательная

### 3.2.1. Уравнение касательной

запишем **уравнение касательной** в виде  $y = kx + b$ . Из (3.1.2.-3) известно,

что в точке касания  $k = \frac{\cos \varphi + e}{-\sin \varphi} = \frac{y_t}{x_t}$ . Как увидим впоследствии, достаточно

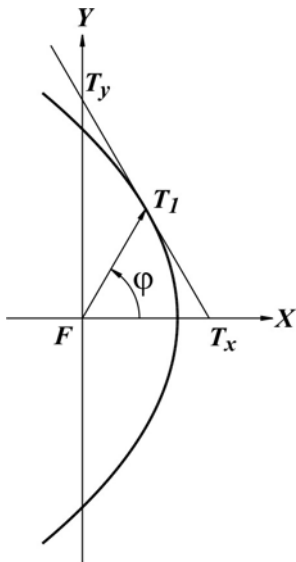
большое число формул в этой работе, как промежуточных, так и окончательных, являются функциями от числителя и знаменателя касательной  $x_t, y_t$ .

Запишем, далее, **координаты точки касания**  $x = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}$ ,  $y = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}$ .

Отсюда получаем уравнение для  $b$

$$\frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} = \frac{(\cos \varphi + e)p \cos \varphi}{-\sin \varphi(1 + e \cos \varphi)} + b.$$

$$\text{Или } b = \frac{p(\sin^2 \varphi + e \cos \varphi + \cos^2 \varphi)}{(1 + e \cos \varphi) \sin \varphi} = \frac{p}{\sin \varphi}. \quad (1)$$



Из этой формулы, кстати, следует, что касательная пересекает ось ординат в  $T_y : \{0, \frac{p}{\sin \varphi}\}$  (см. рис.1) (Геометрическое нахождение этой точки приведено в (3.2.4.)

Собираем все части в одно уравнение

$$y = \frac{(\cos \varphi + e)x}{-\sin \varphi} + \frac{p}{\sin \varphi} \text{ или } (\cos \varphi + e)x + \sin \varphi y - p = 0. \quad (2)$$

Рис. 1

Находим **коэффициент нормирования**

$s\sqrt{A^2 + B^2} = s\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}$ . (Знак  $s$  перед корнем берем всегда "+", чтобы

$-\frac{p}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}} < 0$  (см. [18, стр.194]), [16, стр.155]). Нормируем (2)

$$\frac{(\cos \varphi + e)x - (-\sin \varphi)y - p}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}} = 0. \quad (3)$$

$$\text{или } \frac{(\cos \varphi + e)x + (\sin \varphi)y - p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} = 0. \quad (3a)$$

**Замечание 1.** Выражение всегда  $(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi > 0$ , за исключением случая  $\varphi = \pi, e = 1$ . В этом случае получаем  $\cos \varphi = -1, \sin \varphi = 0$  и выражение под

корнем (3), (3а), а вместе с ним и весь знаменатель равен 0. Т.к.  $e=1$ , то это случай относится к **асимптотическому направлению параболы** и он будет разобран ниже.

Линейные уравнения (2), а также (3) или (3а), с учетом замечания 1, для всех направлений полярного угла  $\varphi$  и значений эксцентриситета  $e$  имеют конечные непрерывные коэффициенты. Следовательно, **касательная существует для любых конечных значений параметров  $p, e, \varphi$ .**

Переписывая (3а) в виде в нормальном виде  $\cos \theta x + \sin \theta y - p_L = 0$ , сразу можем получить **компоненты уравнения касательной**

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi + e}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad p_L = \frac{p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (4)$$

$$\text{В уравнении (4) } \theta = \text{ang}(\theta, \{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}), \quad (5)$$

- угол между направляющим вектором нормали к касательной  $FT_n$  и осью абсцисс (см. рис.2) (сократили (1.2.1.-9) на нормирующий коэффициент

$$\frac{1}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}} > 0).$$

Нормируя направляющий вектор нормали к касательной  $FT_n$ , вычислим

$$\begin{aligned} \text{единичный направляющий вектор нормали} \quad n &= \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \{A, B\} = \{\cos \theta, \sin \theta\} = \\ &= \frac{\{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

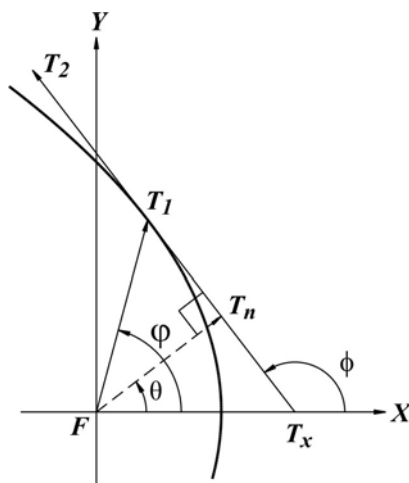


Рис. 2

Теперь еще раз получим единичный вектор направления касательной

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{s\sqrt{A^2 + B^2}} \{-B, A\} = \frac{\{-\sin \varphi, (\cos \varphi + e)\}}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + (-\sin \varphi)^2}} = \\ &= \frac{\{-\sin \varphi, (\cos \varphi + e)\}}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \end{aligned} \quad (7)$$

(Сравните с (2.7.-1), (2.7.-2), (3.1.2.-4), [16, стр.157].)

Для того, чтобы убедиться в правильности выбранного направления вектора  $t$  из некоторой произвольной точки, нужно взять 2-ю рядом лежащую

точку с соблюдением правила обхода (против часовой стрелки). Тогда вектор  $t$  с небольшой погрешностью будет показывать из 1-й точки на 2-ю.

Из (7), с учетом (1.2.1.-9), имеем угол наклона касательной к оси абсцисс  $\phi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \varphi, (\cos \varphi + e)\})$ . (8)

Расстояние от некоторой произвольной точки с координатами  $\{x, y\}$  до касательной получим из (3а) и (1.5.2.-15)  $d = \left| \frac{(\cos \varphi + e)x + (\sin \varphi)y - p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} \right|$ . (9)

Т.к. **фокальная ось в системе координат Кеплера совпадает с осью абсцисс**, то, подставляя в (2)  $y = 0$ , найдем точку пересечения  $T_x$  касательной с фокальной осью

$$(\cos \varphi + e)x - p = 0, \quad x = \frac{p}{\cos \varphi + e} \quad \text{и} \quad T_x : \left\{ \frac{p}{\cos \varphi + e}, 0 \right\}. \quad (10)$$

### 3.2.2. Расстояние от фокуса до касательной и координаты проекции фокуса на касательную

Из уравнений (3.2.1.-3) или (3.2.1.-3а) получаем **расстояние от фокуса до касательной**  $d_1$ . Для этого подставим в эти уравнения координаты  $F : \{0, 0\}$ , берем результат со знаком “+” (по абсолютной величине) и получаем

$$d_1 = \frac{p}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}}, \quad (1)$$

или 
$$d_1 = \frac{p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (1a)$$

Упражнение 1. Доказать, что расстояние от фокуса до касательной, за исключением асимптотического направления параболы, конечно.

Упражнение 2. Доказать, что для параболы  $d_1 = \sqrt{\frac{pr}{2}}$ , где  $p$  - фокальный параметр, а  $r$  - радиус-вектор. □

Теперь найдем координаты проекции фокуса на касательную. Для этого воспользуемся (1.5.-8), (1а), (3.2.1.-3а), (3.2.1.-6))



$$\{x_{\perp}, y_{\perp}\} = p_L \{\cos \theta, \sin \theta\} = \begin{cases} \frac{p}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} \{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}, & (2) \\ -\frac{d_1}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} \{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}, & (3) \\ n \frac{p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. & (4) \end{cases}$$

На (рис.1) показана геометрическая интерпретация выражений (2), (3) и (4).

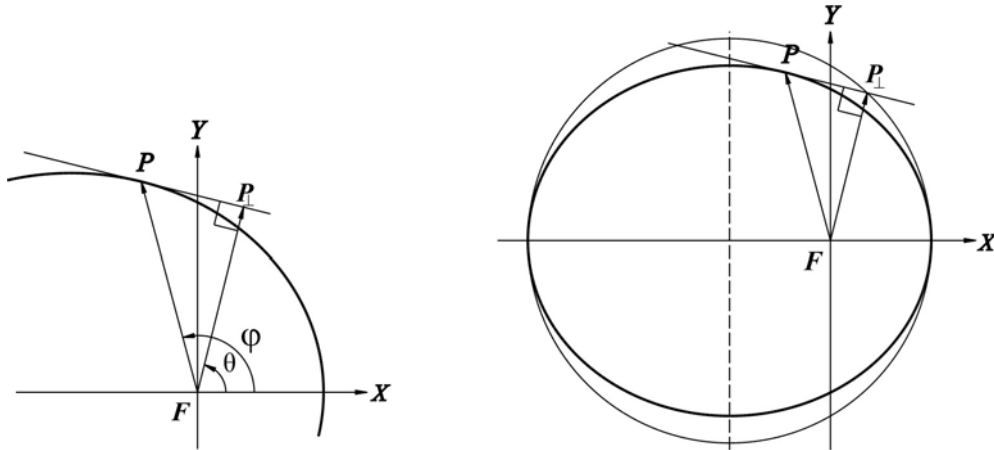


Рис. 1

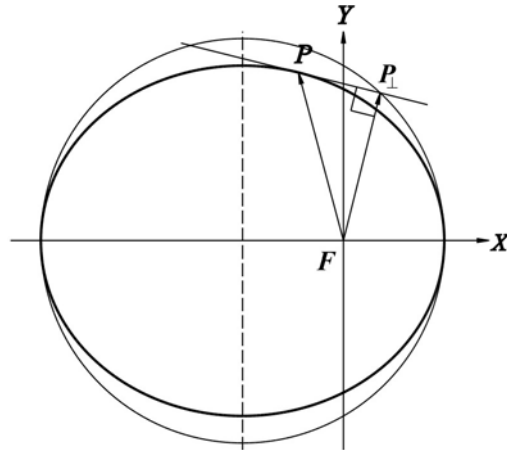


Рис. 2

фактически (3) можно интерпретировать как полярное уравнение для основания перпендикуляра, где  $|FP_{\perp}| = d_1$  - есть радиус-вектор, а

$$\varphi_{F_{\perp}} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}) \quad (5)$$

- полярный угол. График данной функции для эллипса нарисован на (рис.2.). В (3.5.1. упр.4) будет доказано, что **геометрическое место точек проекции фокуса на касательную есть окружность с центром  $\{-\frac{pe}{1-e^2}, 0\}$  и радиусом  $\frac{p}{1-e^2}$ .**

Вернемся к (рис.1.) и вычислим расстояние  $t_1 = |PP_{\perp}|$ . Из (3.2.1.-6)

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi + e}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad \text{Отсюда}$$

$$r \sin(\varphi - \theta) = r(\sin \varphi \cos \theta - \cos \varphi \sin \theta) = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi) \sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (6)$$

Из числителя (6) видно, что при  $\varphi = 0, \pi$  - расстояние  $|PP_{\perp}| = 0$ . Это заметно зрительно на (рис.2.), где в этих углах функция основания касается эллипса.

### 3.2.3. Зеркальные координаты фокуса относительно касательной

Т.к. координаты фокуса  $F : \{0,0\}$  имеют нулевые координаты, то его зеркальное преобразование сводится только к преобразованию 1-го слагаемого из (1.5.4.1.-6)  $2p_L \{\cos \theta, \sin \theta\}$ . Это слагаемое отличается лишь коэффициентом “2” от формулы нахождения проекции фокуса на касательную (3.2.2.-2), поэтому

$$F_z = \frac{2p}{(1+2e \cos \varphi + e^2)} \{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}. \quad (1)$$

Упражнение 1. Докажите, что **геометрическое место точек (1) при  $e \neq 1$  (эллипс и гипербола) есть окружность с центром в  $\{-\frac{2pe}{1-e^2}, 0\}$**  (2)

и радиусом  $\left| \frac{2p}{1-e^2} \right| = 2a$ , (3)

а при  $e = 1$  (**парабола**) – прямая линия  $x = p$  (**директриса** (см. 3.4.2)).

Рисунки к данному упражнению даны в следующих разделах: (3.2.2. рис.2.) – эллипс, (3.6.2. рис.2.) – парабола, (3.7.6. рис.4.) – гипербола.

### 3.2.4. Построение касательной циркулем и неразмеченной линейкой

(Далее вместо термина «неразмеченная линейка» используем «линейку»). Предполагаем, что читатель знаком с возможностями и ограничениями данного метода. Вкратце напомним, что с его помощью [3],[4, стр.137]

#### ВОЗМОЖНО:

- проводить прямые любой конечной длины и окружности конечных радиусов;
- строить перпендикуляры к данной прямой из внешней точки и из точки на прямой;
- поводить прямую через внешнюю точку, параллельную данной прямой;
- делить отрезок в данном отношении;
- делить угол на 2 части (строить биссектрису угла);
- строить по исходным отрезкам  $a, b$  новые отрезки  $a \pm b, ab, \frac{a}{b}, \sqrt{a}$ ;
- строить правильные многоугольники с числом сторон ( $n = 3, 4, 5, 6, \dots, 17, \dots, 257, \dots$ ) тогда и только тогда, когда  $n$  представлено в виде

$2^m p_1 p_2 \dots p_s$ , где  $p_1 p_2 \dots p_s$  различные простые числа Ферма вида  $2^{2^k} + 1$  (1796 г. К.Ф.Гаусс).

### Нельзя:

- делить произвольный угол на 3 части (задача о трисекции угла);
  - построить окружность, площадь которой была бы вдвое больше площади заданной окружности (задача о квадратуре круга),
  - если дан исходный отрезок  $a$  построить отрезок равный  $\sqrt[n]{a}$ ,  $n \neq 2k$  и  $n > 2$  (частный случай - задача удвоения объема куба) и другое.
- (В [3] есть достаточно полный список литературы до 1957г.)

Рассмотрим следующую задачу: **зная точку касания на дуге (это первая точка), построить касательную к этой дуге (т.е. найти вторую точку и провести через обе точки прямую).**

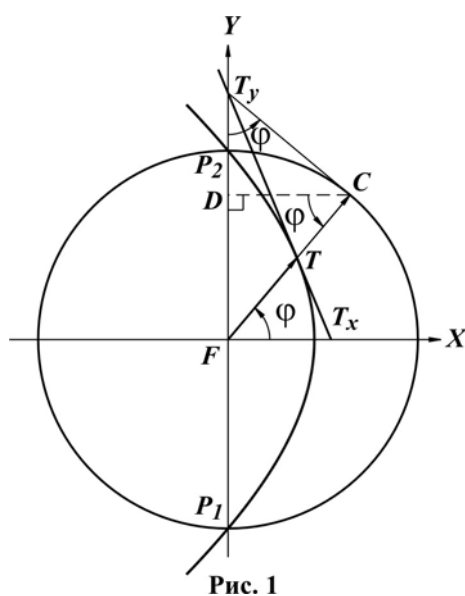


Рис. 1

**провести через обе точки прямую).** Если необходимо построить касательную только при помощи циркуля и линейки, то нужно проводить дополнительные геометрические построения, характерные для этих построений.

Решение подобной задачи приведено в [18,стр.458], [24,стр.525]. В этих работах с помощью касательной к вспомогательной окружности, пересекающую ось абсцисс найдена вторая точка касательной к дуге.

Построим аналогичную конструкцию, но с учетом особенности расположения коник в системе координат Кеплера.

Пусть дана дуга  $P_1 P_2$  (см. рис.1), известно местоположение фокуса  $F$  и одна из точек пересечения оси  $Y$  -  $P_1$  или  $P_2$ . На доступной части дуги под полярным углом  $\varphi$  отложена  $T$ .



Единственное ограничение для этой схемы: необходимо, чтобы  $e > 0$ , т.е. чтобы исследуемая кривая была не окружность. Это ограничение, если имеем дело с окружностью, несущественно, т.к. касательная к окружности строится, как известно, при помощи  $\perp$  к радиусу. Рассмотрим далее 2 варианта решения.

### 1° Аналитический метод

Подставим угол  $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$  в уравнение касательной (3.2.1.-2)  $ex + y - p + 0$ .

При  $y = 0$  находим вторую точку - точку пересечения касательной с осью абсцисс  $T_x : \{\frac{p}{e}, 0\}$ . (Позже узнаем (3.4.2), что найденная точка – точка пересечения директрисы и оси абсцисс.)

### 2° Построение с циркулем и линейкой

Найдем вторую точку касательной -  $T$ . Для этого докажем, что

$$h = |TA_1| = |FA_1| = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{p}{1 + e} = f - \text{фокусному расстоянию. Действительно}$$

$$g = |T_x A_1| = |T_x F| - |A_1 F| = \frac{p}{e} - \frac{p}{1 + e} = \frac{p}{e(1 + e)}. \quad (3)$$

Из подобных треугольников  $\Delta T_x A_1 T_1, \Delta T_x F T_y$  следует, что  $\frac{|TA_1|}{|T_x A_1|} = \frac{|T_y F|}{|T_x F|}$  или

$$\frac{he(1 + e)}{p} = \frac{pe}{p}. \text{ Следовательно, } h = \frac{p}{1 + e} = f, \quad (4)$$

что и требовалось доказать. Откладывая из  $A_1 \perp$  к фокальной оси величиной  $|FA_1|$ , получим искомую вторую точку -  $T$ .  $\square$

Сравним нашу 1-ю схему и схему прототипа [18,стр.458], [24,стр.525]. Они в значительной степени подобны. Но есть и отличия.

В прототипе центр системы координат расположен в центре эллипса, расчет касательной приведен только для эллипса, 2-я точка касательной находится на оси абсцисс.

Расчет в нашей схеме использует систему координат Кеплера с центром в фокусе и универсальное полярное уравнение Лаланда-Лапласа. Вторую точку находим при пересечении оси ординат. Поэтому эта схема является более универсальной, чем прототип, поскольку годится и для эллипса, и для параболы, и для гиперболы. □

Попутно, в  $\Delta FT_y T_x$  и  $\Delta D_1 T_1 T_x$  найдем гипотенузы:

$$T_y T_x = \sqrt{FP_2^2 + FT_x^2} = \sqrt{p^2 + \frac{p^2}{e^2}} = \frac{p}{e} \sqrt{1+e^2}, \quad (5)$$

$$T_1 T_x = \sqrt{D_1 T_1^2 + D_1 T_x^2} = \sqrt{\frac{p^2}{(1+e)^2} + \left(\frac{p}{e} - \frac{p}{1+e}\right)^2} = p \sqrt{\frac{1}{(1+e)^2} + \frac{1}{(1+e)^2 e^2}} = \frac{p \sqrt{1+e^2}}{e(1+e)}. \quad (6)$$

Заметим, что  $\frac{|FP_1|}{|FT_x|} = \frac{p}{\frac{p}{e}} = e$  (или  $\operatorname{tg} \angle FT_x P_1 = e$ ). (7)

Для параболы  $\Delta P_1 FT_x$  будет равнобедренный, а  $\Delta P_1 T_x P_2$  - прямоугольный.

Упражнение 1. Дано (см. рис.2)  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $f = h$  и  $g$ . Найти фокальный параметр  $p$  и эксцентриситет  $e$ .

Решение.

Используем (4) и (3)  $\begin{cases} f = \frac{p}{1+e} \\ g = \frac{p}{e(1+e)} \end{cases}$ . Отсюда  $\begin{cases} e = \frac{f}{g}, \\ p = f \left(1 + \frac{f}{g}\right) = \frac{f(f+g)}{g}. \end{cases}$  (8)

Упражнение 2. Доказать, что для эллипса  $f < g$ , для параболы  $f = g$  и для гиперболы  $f > g$ .

### 3.2.5. Условие, при котором касательная || оси абсцисс

Найдем полярные углы, при которых касательная  $\downarrow\downarrow$  или  $\downarrow\uparrow$  оси абсцисс. (Напомним, что ось абсцисс и фокальная ось в системе Кеплера совпадают.) Для выполнения этого условия необходимо, чтобы в формуле угла наклона (3.2.1.-8) касательной к оси абсцисс  $\varphi = \operatorname{ang}(\theta, \{-\sin \varphi, \cos \varphi + e\})$  4-й параметр  $\operatorname{ang}()$  был равен 0, или  $\cos \varphi + e = 0$ . К этому же уравнению приходим из

(3.2.1.-10), если говорим, что пересечение касательной с осью абсцисс происходит на  $\infty$ . Таким образом,  $\varphi_{1,2} = \text{ang}(\theta, \{-e, \pm\sqrt{1-e^2}\}) + 2k\pi$ . (1)

Далее  $2k\pi$  отбрасываем. Из (1) находим декартовые координаты  $\cos \varphi = -e$ ,  $\sin \varphi = \pm\sqrt{1-e^2}$ ,  $B_{1,2}\{x, y\} = \frac{P}{1+e \cos \varphi} \{\cos \varphi, \sin \varphi\} = \frac{P}{1-e^2} \{-e, \pm\sqrt{1-e^2}\}$ . (2)

Исследуем (2) для эллипса ( $e < 1$ ), параболы ( $e = 1$ ) и гиперболы ( $e > 1$ ).

Для эллипса, как выяснится ниже (см. 3.5.1.-5), найдены реальные координаты вершин малой полуоси  $B_{1,2}$ . В этих вершинах касательная  $\parallel$  фокальной оси и в силу теоремы Лагранжа [24, стр.227]) эти вершины наиболее удаленны от фокальной оси.

Для параболы знаменатель  $1-e^2$  равен 0. Это означает, что на реальной плоскости таких точек нет.

Для гиперболы выражение под квадратным корнем  $1-e^2$  получается отрицательным. Поэтому и для гиперболы не существует касательных  $\parallel$  фокальной оси. (В данной части работы мы имеем ввиду только основную гиперболу. Естественно, что касательные с таким свойством существуют и у сопряженной гиперболы (см.6.6.2.))

### 3.2.6. Полярные координаты точек на дуге, в которой концевая касательная $\parallel$ заданной прямой

#### 1°. Общий подход для конических кривых

Зададим уравнение прямой в нормальном виде Гессе  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$ . (Напомним, что  $\theta$  - это угол между направлением нормального вектора  $\vec{p}_L = p_L \{\cos \theta, \sin \theta\}$  и полярной осью. При этом заметим, что вариант представления прямой в нормальной форме дает более компактные конечные формулы, чем, например, уравнение прямой в общем виде  $Ax + By + C = 0$ . Это связано с тем, что всегда  $p_L \geq 0$ . (Читатель может непосредственно убедиться в этом, проделав выкладки этого раздела для прямой в общем виде.)

Так, для  $\downarrow\downarrow$  двух прямых необходимо и достаточно равенства единичных нормальных векторов их направлений  $\{\cos\theta, \sin\theta\}$ . С другой стороны (см.рис.1), приравнивая тангенсы углов наклона, можно получить среди решений не только  $\downarrow\downarrow$  прямую  $P_1T_{g1}$ , но и  $\downarrow\uparrow$  прямую  $P_2T_{g2}$ , т.к. из (1.2.1.-6)  $tg(ang(\mathbf{0},\{a,b\})) = tg(ang(\mathbf{0},\{-a,-b\}))$ . Поэтому, исходя из (3.1.1.-3), запишем

$$\text{уравнение } \frac{\cos\varphi + e}{-\sin\varphi} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta}, \quad (1)$$

в котором неизвестным является полярный угол  $\varphi$ . Преобразуем (1)

$$\sin\theta \cos\varphi + e \sin\theta = \cos\theta \sin\varphi, \quad \sin\theta \cos\varphi - \cos\theta \sin\varphi = -e \sin\theta, \quad \frac{1}{-e} \cos\varphi + \frac{\cos\theta}{e \sin\theta} \sin\varphi = 1.$$

$$\text{Исследуемое уравнение имеет вид } \alpha \cos\varphi + \beta \sin\varphi = 1, \quad (*)$$

$$\text{где } \alpha = \frac{1}{-e}, \quad \beta = \frac{\cos\theta}{e \sin\theta}. \quad (2)$$

Запишем решение с помощью метода, изложенного в (1.2.5.4.)

$$\varphi_{1,2} = \varphi_0 \mp \delta = ang(\mathbf{0},\{\alpha, \beta\}) \mp ang(\mathbf{0},\{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}) \quad (3)$$

$$\text{или } \varphi_{1,2} = ang(\mathbf{0},\{\alpha \pm \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}, \beta \mp \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}). \quad (4)$$

Упростим 1-е слагаемое суммы (2) при помощи (1.2.1.-9) и (1.2.1.-7)

$$\varphi_0 = ang(\mathbf{0},\{\alpha, \beta\}) = ang(\mathbf{0},\{\frac{1}{-e}, \frac{\cos\theta}{e \sin\theta}\}) = \begin{cases} ang(\mathbf{0},\{-\sin\theta, \cos\theta\}), & \sin\theta > 0 \quad (5-1) \\ ang(\mathbf{0},\{\sin\theta, -\cos\theta\}), & \sin\theta < 0. \quad (5-2) \end{cases} \quad (5)$$

Обратим внимание, что, геометрическая интерпретация (4) проста – **вектор с направлением  $D_0(\varphi_0)$   $\downarrow\downarrow$  или  $\downarrow\uparrow$  исходной прямой** (см.рис.1,2). Эту исходную прямую в задачах о нахождении касательной к конике в дальнейшем называют **сопряженной прямой**. Кроме того, заметим, что **вектор  $D_0$  совпадает с биссектрисой фокального угла между двумя направлениями решений**. Т.к. единичный нормальный вектор  $\{\cos\theta, \sin\theta\}$  сопряженной прямой  $\perp$  этой прямой по построению, то, естественно, что он будет  $\perp$  и биссектрисе фокального угла (см. рис.1,2). Аналитически в этом можно легко убедиться, найдя разность полярных углов между вектором биссектрисы (5-1) или (5-2) и направлением единичного нормального вектора  $\{\cos\theta, \sin\theta\}$  сопряженной прямой



$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= \varphi_0 - \varphi_n = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \theta, \cos \theta\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta, \sin \theta, \}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \theta, \cos \theta\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \theta, -\sin \theta, \}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\cos \theta \sin \theta + \cos \theta \sin \theta, \cos^2 \theta + \sin^2 \theta\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}) = \frac{\pi}{2}. \quad \square \end{aligned}$$

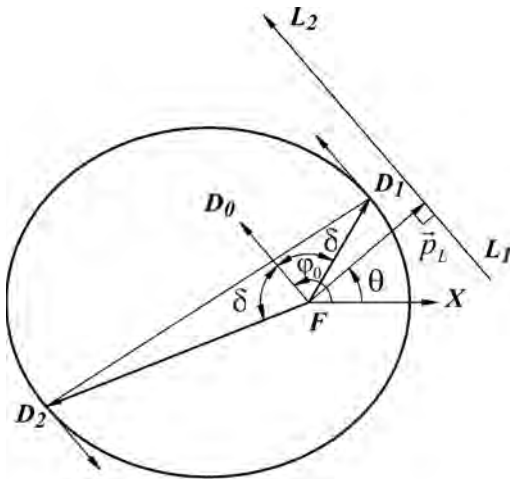


Рис. 1

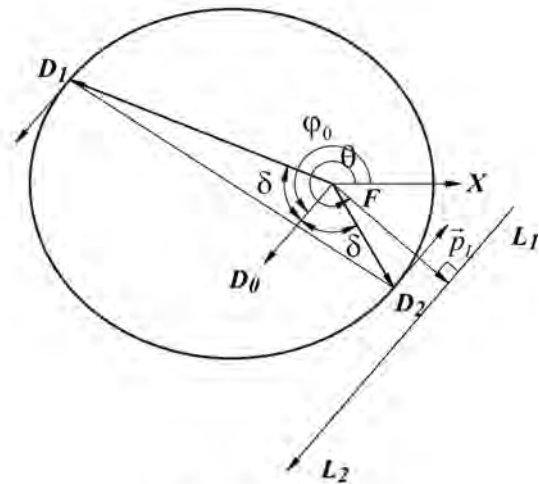


Рис. 2

Займемся теперь отклонением угла  $\delta$  от биссектрисы. В соответствии с

$$(1.2.5.4.-5) \quad \delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\frac{1}{e^2} + \frac{\cos^2 \theta}{e^2 \sin^2 \theta} - 1}\}) =$$

$$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\sin \theta|, \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}\}), \quad (6)$$

$$\text{или } \delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\sin \theta|, \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2) \sin^2 \theta}\}). \quad (6a)$$

Упражнение 1. Доказать, что **полное решение** (см.1.2.5.4.-6)  $\varphi_{1,2} = \varphi_0 \mp \delta =$   
 $= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha \pm \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}, \beta \mp \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\})$  с **выбором последовательности**  
**углов решений (т.е. с сохранением правила обхода углов против часовой**  
**стрелки) преобразуется:**

при  $\sin \theta > 0$  (см. рис.1)

$$\varphi_{1,2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})\}), \quad (7)$$

при  $\sin \theta < 0$  (см. рис.2)

$$\varphi_{1,2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e \sin^2 \theta \mp \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \mp \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})\}). \quad (7a)$$

или универсальный вариант  $s = \text{sign}(\sin \theta)$ ,

$$\varphi_{1,2} = \text{ang}(\theta, \{-e \sin^2 \theta \pm s \cdot \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm s \cdot \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})\}), \quad (76)$$

Указание. Для доказательства воспользоваться следующими равенствами

$$\pm |\sin \theta| = \sqrt{\sin^2 \theta}, \quad \sin \theta |\sin \theta| = s \cdot \sin^2 \theta, \quad s^2 = 1. \square$$

(В дальнейшем не будем отслеживать порядок последовательности углов, поэтому будем применять (7)).

Заметим также, что из-за влияния  $e$  - эксцентриситета, формулы (4)-(6) ведут себя по-разному для эллипсов, парабол и гипербол. В силу этого разные типы коник исследуем отдельно.

### 2°. Эллипс

Рассмотрим (6) и (6а). Т.к.  $e^2 \sin^2 \theta < 1$ , то корень  $\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}$  извлекается всегда. Следовательно, если рассматриваем весь эллипс (а не его часть), то всегда можно построить две || концевые касательные.

### 3°. Парабола

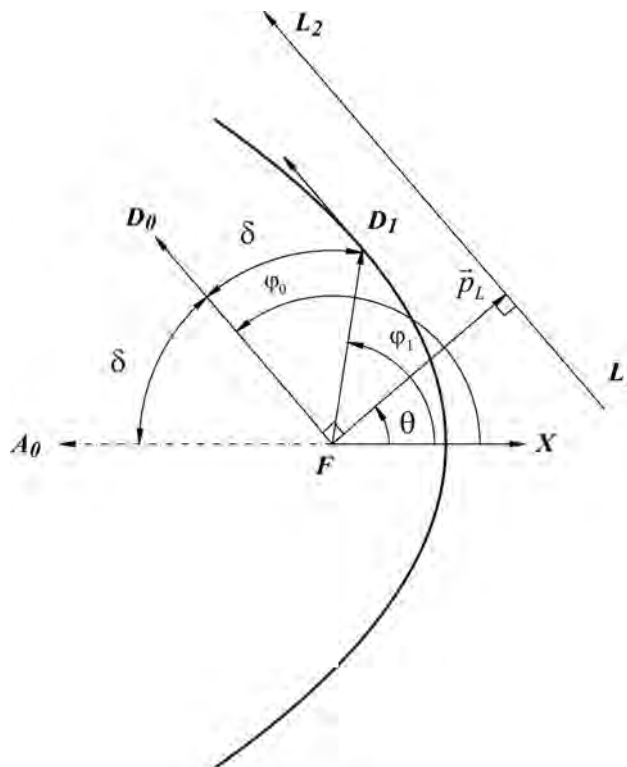


Рис. 3

Докажем, что решение (5) годится для параболы, однако интерпретируется следующим образом **вектор  $D_0$  является биссектрисой угла между действительным решением  $D_1$  и асимптотическим направлением  $A_0$**  (см.

рис.3). (Асимптотическое направление параболы в системе координат Кеплера направлено вдоль угла  $\pi$ .)

доказательство. Подставим  $e = 1$  в (7)

$\varphi_{1,2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin^2 \theta \pm \cos^2 \theta, \sin \theta \cos \theta \pm \sin \theta \cos \theta\})$ . Выпишем решения отдельно

$$\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos 2\theta, \sin 2\theta\}) = 2\theta. \quad (8)$$

Это дает удобный способ построения || касательной параболы: **удвоенный полярный угол нормального вектора сопряженной прямой является полярным углом точки касания || касательной.**

Второе решение  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, 0\}) = \pi$  дает асимптотическое направление. Исключая этот вариант, делаем вывод: **у параболы только одна касательная || данной прямой.**

#### 4°. Гипербола

Для гипербол (см.рис.4) при  $e^2 \sin^2 \theta < 1$  можно построить две касательные, при  $e^2 \sin^2 \theta = 1$  - одну, при  $e^2 \sin^2 \theta > 1$  решений не существует. Геометрический смысл этих неравенств рассмотрим ниже в главе (6.).

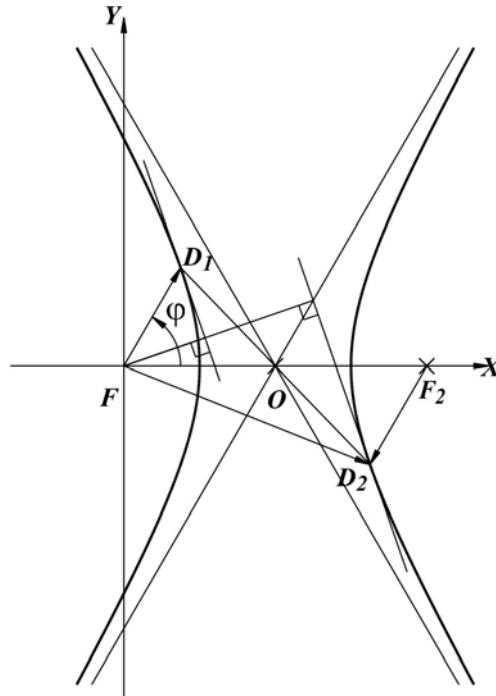


Рис. 4

### 3.2.7. Декартовы координаты точек касания концевых касательных

Используя (1.2.3.-2а и 3а) вычислим  $\cos \varphi_{1,2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  и  $\sin \varphi_{1,2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , но

сначала докажем, что  $x^2 + y^2 = 1$ . В самом деле, из (6) имеем

$$\begin{aligned} & (-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})^2 + (e \cos \theta \sin \theta \pm \sin \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})^2 = \\ & = e^2 \sin^4 \theta \mp 2e \cos \theta \sin \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + \cos^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + e^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta \pm \\ & \pm 2e \cos \theta \sin^2 \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} + \sin^2 \theta (1 - e^2 \sin^2 \theta) = e^2 \sin^4 \theta + \cos^2 \theta - e^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \\ & + e^2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \sin^2 \theta - e^2 \sin^4 \theta = 1. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\cos \varphi_{1,2} = -e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}, \quad (1)$$

$$\sin \varphi_{1,2} = \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}), \quad (2)$$

$$r_{1,2} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{1,2}} = \frac{p}{1 - e^2 \sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}, \quad (3)$$

$$D_{1,2} = \frac{p\{-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})\}}{1 - e^2 \sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}}. \quad (4)$$

или

$$D_{1,2} = \frac{p\{-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2) \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2) \sin^2 \theta})\}}{\cos^2 \theta + (1 - e^2) \sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2) \sin^2 \theta}}. \quad (4a)$$

Обращаем внимание читателя на то, что декартовы координаты (4) или (4а) даны в виде конечной дроби и относительно несложными методами могут быть исследованы.

Упражнение 1. Найти декартовы координаты точек касания для параболы.

Решение. 2 решения получаются благодаря знаку ' ± '. Однако для параболы знак ' - ' вызывает деление на 0 в знаменателе и поэтому не подходит. Знак ' + ' дает единственное решение

$$D_{1,2} = \frac{p\{-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta, \sin \theta (2 \cos \theta)\}}{2 \cos^2 \theta} = \frac{p\{\cos 2\theta, \sin 2\theta\}}{2 \cos^2 \theta}. \quad (5)$$

### 3.2.8. Определение диаметра. 1-я модель построения диаметра

**Отрезок прямой, соединяющий две точки кривой, называется хордой.**

**Хорда, соединяющая точки касания двух || касательных, называется диаметром.** На (рис.3.2.6.-1..4) это точки  $D_1, D_2$ . Диаметр обладает целым рядом замечательных свойств, которым в данной работе кроме этого раздела посвящена глава 6.

Касательные, которые найдены в предыдущем разделе, были || сопряженной прямой, расположенной, вообще говоря, произвольно относительно исследуемой кривой. Т.е. сопряженная прямая могла пересекать коническую кривую, касаться ее или проходить вне ее. При этом создавались геометрические конструкции, однозначно определяющие диаметр. Для этих конструкций в данной работе употребляется термин модель. В частности, задавая одну касательную (модель 2), легко найдем 2-ю || касательную. Тоже самое произойдет, если в качестве исходной прямой зададим хорду (модель 3) или полюс (модель 4).

Рассматривая задачу с сопряженной прямой, получен самый общий подход к построению диаметра.

Зная концевые точки  $D_1, D_2$  диаметра (3.2.6.-11), легко построить внутри коники уравнение прямой, совпадающей с диаметром, как с хордой. Это уравнение называют уравнением диаметра. Вне кривой о точках данной прямой будем говорить как о **продолжении диаметра**.

Будем искать сначала **уравнение диаметра в общем виде**  $Ax + By + C = 0$ , где  $A = y_2 - y_1$ ,  $B = x_1 - x_2$ ,  $C = x_2 y_1 - x_1 y_2$ .

Введем, также, следующее сокращение  $L = 1 - e^2 \sin^2 \theta$  (в (3.2.6.-11) оно встречается 4 раза).

**Запишем декартовы координаты концевых точек в компонентах**

$$x_1 = \frac{p(-e \sin^2 \theta + \cos \theta \sqrt{L})}{L + e \cos \theta \sqrt{L}}, \quad x_2 = \frac{p(-e \sin^2 \theta - \cos \theta \sqrt{L})}{L - e \cos \theta \sqrt{L}}, \quad y_1 = \frac{p \sin \theta (e \cos \theta + \sqrt{L})}{L + e \cos \theta \sqrt{L}},$$

$$y_2 = \frac{p \sin \theta (e \cos \theta - \sqrt{L})}{L - e \cos \theta \sqrt{L}}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned}
A = y_2 - y_1 &= p \left( \frac{e \sin \theta \cos \theta - \sin \theta L^{\frac{1}{2}}}{L - e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} - \frac{e \sin \theta \cos \theta + \sin \theta L^{\frac{1}{2}}}{L + e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{p \sin \theta}{(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} \cdot \\
&\cdot (e \cos \theta L + e^2 \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{3}{2}} - e \cos \theta L - e \cos \theta L + e^2 \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{3}{2}} + e \cos \theta L) = \\
&= \frac{2p \sin \theta (e^2 \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{3}{2}})}{(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} = \frac{-2p \sin \theta}{L^{\frac{1}{2}}}, \\
B = x_1 - x_2 &= p \left( \frac{-e \sin^2 \theta + \cos \theta L^{\frac{1}{2}}}{L + e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} - \frac{-e \sin^2 \theta - \cos \theta L^{\frac{1}{2}}}{L - e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{p}{(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} \cdot \\
&\cdot (-e \sin^2 \theta L + e^2 \cos \theta \sin^2 \theta L^{\frac{1}{2}} + \cos \theta L^{\frac{3}{2}} - e \cos^2 \theta L + e \sin^2 \theta L + e^2 \cos \theta \sin^2 \theta L^{\frac{1}{2}} + \\
&+ \cos \theta L^{\frac{3}{2}} + e \cos^2 \theta L) = \frac{2p \cos \theta (e^2 \sin^2 \theta L^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{3}{2}})}{(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} = \frac{2p \cos \theta}{L^{\frac{1}{2}}(1 - e^2)}, \\
C = x_2 y_1 - x_1 y_2 &= p^2 \left( \frac{-e \sin^2 \theta - \cos \theta L^{\frac{1}{2}}}{L - e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin \theta (e \cos \theta + L^{\frac{1}{2}})}{L + e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} - \right. \\
&\left. - \frac{-e \sin^2 \theta + \cos \theta L^{\frac{1}{2}}}{L + e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sin \theta (e \cos \theta - L^{\frac{1}{2}})}{L - e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{p^2 \sin \theta}{(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} \cdot (-e^2 \cos \theta \sin^2 \theta - e \sin^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - \\
&- e \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - \cos \theta L + e^2 \cos \theta \sin^2 \theta - e \sin^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - e \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} + e \cos \theta L) = \\
&= -\frac{2p^2 e \sin \theta}{L^{\frac{1}{2}}(L - e^2 \cos^2 \theta)} = -\frac{2p^2 e \sin \theta}{L^{\frac{1}{2}}(1 - e^2)}. \tag{2}
\end{aligned}$$

Сокращаем все коэффициенты на  $\frac{2pe}{L^{\frac{1}{2}}(1 - e^2)}$  и окончательно получаем

$$\text{уравнение диаметра в общем виде } -(1 - e^2) \sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta = 0. \tag{3}$$

**Нормальное уравнение диаметра**

$$\frac{-(1 - e^2) \sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta}{s \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2)^2 \sin^2 \theta}} = 0. \begin{cases} s = +1, & \sin \theta > 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases}. \quad \square \tag{4}$$

В данном разделе будут исследованы только **декартовы координаты**

**важной точки – центра диаметра**  $\{x_o, y_o\} = \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right\}$ , где  $\{x_i, y_i\}_{i=1,2}$  –

координаты концевых точек. Остальные полезные точки, принадлежащие диаметру, продолжим изучать в главе (6.).

Заметим сразу, что если известны координаты концов отрезка  $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$ , то легко получить и координаты середины отрезка  $\{\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\}$ , также принадлежащие данному отрезку. Это означает, что **концы отрезка и его середина всегда лежат на одной прямой** (докажите!).

Т.к. промежуточные выражения относительно громоздки, то будем исследовать координаты  $x_o, y_o$  отдельно друг от друга. Итак

$$x_o = \frac{p}{2} \left( \frac{-e \sin^2 \theta + \cos \theta L^{\frac{1}{2}}}{L + e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} + \frac{-e \sin^2 \theta - \cos \theta L^{\frac{1}{2}}}{L - e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{p}{2(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} (-e \sin^2 \theta L +$$

$$+ e^2 \sin^2 \theta \cos \theta L^{\frac{1}{2}} + \cos \theta L^{\frac{3}{2}} - e \cos^2 \theta L - e \sin^2 \theta L - e^2 \sin^2 \theta \cos \theta L^{\frac{1}{2}} - \cos \theta L^{\frac{3}{2}} -$$

$$- e \cos^2 \theta L) = \frac{p}{2L(L - e^2 \cos^2 \theta)} (-2e \sin^2 \theta L - 2e \cos^2 \theta L) = \frac{-pe(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)}{(1 - e^2)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)} = \frac{-pe}{(1 - e^2)},$$

$$y_o = \frac{p}{2} \left( \frac{e \sin \theta \cos \theta + \sin \theta L^{\frac{1}{2}}}{L + e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} + \frac{e \sin \theta \cos \theta - \sin \theta L^{\frac{1}{2}}}{L - e \cos \theta L^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{p \sin \theta}{2(L^2 - e^2 \cos^2 \theta L)} (e \cos \theta L -$$

$$- e^2 \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} + L^{\frac{3}{2}} - e \cos \theta L + e \cos \theta L + e^2 \cos^2 \theta L^{\frac{1}{2}} - L^{\frac{3}{2}} - e \cos \theta L) = 0.$$

Окончательно  $\{x_o, y_o\} = \left\{ \frac{-pe}{(1 - e^2)}, 0 \right\}$ . (6)

В разделе симметрия полярного уравнения (см.3.1.3.-5,6) уже получали эту формулу как центр симметрии эллипса и гиперболы. С другой стороны, как видно из (6), хорда эллипса или гиперболы, являющаяся диаметром, всегда проходит через центр эллипса или гиперболы, т.е. не может иметь более одного центра. ([18,§230], [16,§146]). Это утверждение принадлежит Аполлонию  $I_{30}$  [21, стр.55].

Обратное утверждение: **прямая, проходящая через центр коники, является диаметром, справедливо во всех случаях только для эллипса.** Из (3.2.6.2°) очевидно, что для любого направления  $\theta$  нормального вектора эллипса можно построить 2-ю касательную.

С другой стороны, для гиперболы интерпретация данного утверждения намного сложнее, чем для эллипса. (Забегая вперед, скажем, что если дополнить множество основных диаметров асимптотами и диаметрами сопряженной гиперболы, то обратное утверждение будет также справедливо. Если же

рассматривать множество только основных диаметров, то обратное утверждение неверно. Об этом подробно говорится в главе 6.)

В данном месте для гиперболы заметим, что если уже выбрана первая касательная (т.е. существует  $\varphi_1$  для данного  $\theta$ ), то вторая касательная  $\parallel$  первой и существует всегда (докажите!). Выше было показано: **прямая, проходящая через две точки касания двух  $\parallel$  касательных проходит и через центр симметрии кривой.**

**Определение.** Коники, имеющие центр симметрии, называются **центральными**.

**Из трех типов коник эллипс и гипербола являются центральными, а парабола – нет.**

Упражнение 1. Доказать, что на концах диаметра выполняется соотношение  $\cos \delta + e \cos \varphi_0 = 0$ , где полярные углы  $\varphi_0, \delta$  из (3.2.6.-5,6) (геометрический смысл этого выражения объясняется ниже - в (5.1.)).

Доказательство. Имеем  $\varphi_0 = \text{ang}(0, \{\alpha, \beta\})$ ,  $\delta = \text{ang}(0, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\})$ ,  $\alpha = \frac{1}{-e}$ ,

$\beta = \frac{\cos \theta}{e \sin \theta}$ . Т.к. (см.1.2.3.-2а)  $\cos(\text{ang}(0, \{x, y\})) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , то  $\cos \varphi_0 = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ ,

$\cos \delta = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$ ,  $e = -\frac{1}{\alpha}$ . Собираем все части вместе

$$\cos \delta + e \cos \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} - \frac{\alpha}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} = 0.$$



### 3.3. Секущие

#### 3.3.1. Точки пересечения прямой линии и дуги. Фокальная хорда

Как и в случае задачи нахождения || касательных, зададим уравнение прямой в нормальном виде Гессе  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$ . Затем с помощью формул  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  переведем это уравнение в полярную систему координат  $r \cos \theta \cos \varphi + r \sin \theta \sin \varphi - p_L = 0$ ,  $r \cos(\varphi - \theta) = p_L$ . (1)

Вначале исследуем случай, когда **прямая линия проходит через фокус**, т.е. когда ее декартовы координаты  $x$  и  $y$  могут быть одновременно равны 0.

В этом случае  $p_L = 0$  и уравнение (1) принимает вид  $\cos(\varphi - \theta) = 0$ . Его решение  $\varphi - \theta = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  или  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Как и ранее, оставим только корни внутри интервала  $[0, 2\pi)$   $\varphi_1 = \theta + \frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \theta + \frac{3\pi}{2}$ . (2)

Используя полярное уравнение, получим

$$\begin{cases} P_1 = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \frac{3\pi}{2})} \{ \cos(\theta + \frac{3\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{3\pi}{2}) \}, \\ P_2 = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \frac{\pi}{2})} \{ \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \}. \end{cases} \quad (3)$$

Геометрическая интерпретация (3) показана на (рис.1.).

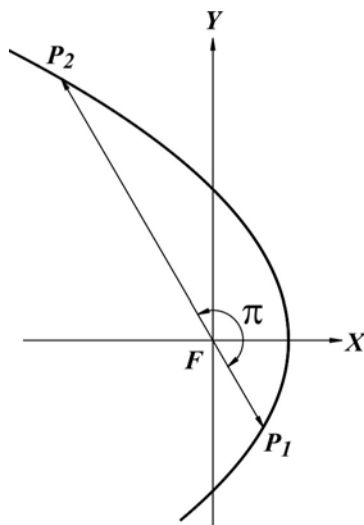


Рис. 1

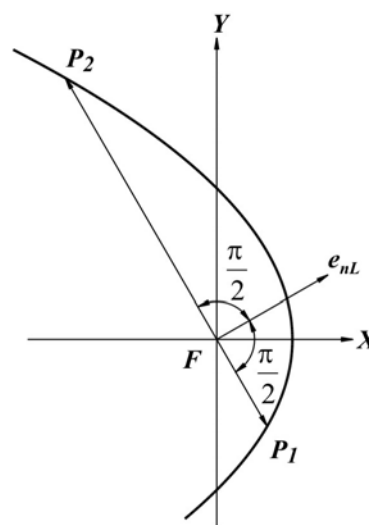


Рис. 2

Запишем симметричное решение, в котором единичный нормальный вектор  $e_{nL} = \{\cos \theta, \sin \theta\}$  является биссектрисой фокального угла

$$\begin{cases} P_1 = \frac{P}{1 + e \cos(\theta - \frac{\pi}{2})} \left\{ \cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2}) \right\}, \\ P_2 = \frac{P}{1 + e \cos(\theta + \frac{\pi}{2})} \left\{ \cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) \right\}. \end{cases} \quad (4)$$

Геометрическая интерпретация (4) показана на (рис.2.).

**Хорду, проходящую через фокус, называют фокальной хордой.**

Таким образом, точки  $P_1, P_2$ , удовлетворяющие (4), являются концами фокальной хорды.

Перейдем к рассмотрению общего случая  $p_L \neq 0$ . Для этого запишем систему уравнений для радиус-векторов прямой и дуги

$$\begin{cases} r = \frac{p_L}{\cos(\varphi - \theta)}, \\ r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}, \end{cases} \quad (5)$$

где неизвестным является  $\varphi$ . Следовательно,  $\frac{p_L}{\cos(\varphi - \theta)} = \frac{P}{1 + e \cos \varphi}$ . Вводим

сокращение  $\tilde{p} = \frac{p_L}{P}$ . Тогда  $\tilde{p} + e\tilde{p} \cos \varphi = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$ ,

$$(\cos \theta - e\tilde{p}) \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = \tilde{p}, \quad \frac{(\cos \theta - e\tilde{p})}{\tilde{p}} \cos \varphi + \frac{\sin \theta}{\tilde{p}} \sin \varphi = 1. \quad (6)$$

Методом (1.2.5.4.) получаем

$$\alpha = \frac{(\cos \theta - e\tilde{p})}{\tilde{p}} = \frac{(p \cos \theta - ep_L)}{p_L}, \quad \beta = \frac{\sin \theta}{\tilde{p}} = \frac{p \sin \theta}{p_L}, \quad (7)$$

**биссектрису фокального угла**

$$\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha, \beta\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{p \cos \theta - ep_L, p \sin \theta\}), \quad (8)$$

**отклонение от биссектрисы**

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{p_L, \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}\}), \quad (9)$$

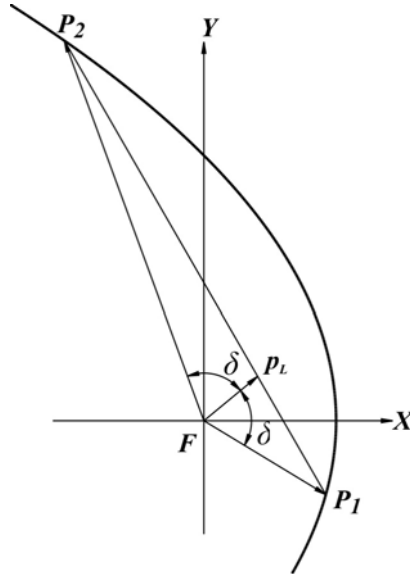


Рис. 3

решение в виде полярных углов

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha \pm \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}, \beta \mp \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{pp_L \cos \theta - ep_L^2 \pm p \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}, \\ &\quad pp_L \sin \theta \mp (p \cos \theta - ep_L) \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}\}). \end{aligned} \quad (10)$$

Исследуем подкоренное выражение (10):

- если меньше нуля, то пересечения нет;
- если равно нулю, то получим касательную;
- если больше нуля, то получим две точки пересечения.

Решим задачу нахождения **точек пересечения в полярных координатах**. После (10) нормируем углы и тестируем их на принадлежность интервалу области определения дуги. Углы, прошедшие тест, подставляем в полярное уравнение (2.1.-1) и получаем искомые точки пересечения  $P_1, P_2$  (см. рис. 3).

**следствие.** Т.к. луч  $\varphi_0$  является биссектрисой фокального угла, то он делит хорду на части, пропорциональные длинам радиус-векторов к точкам пересечения.

Найдем **декартовы координаты точек пересечения**, используя (1.2.5.4.-7) и (1.2.5.4.-8) и результаты этого раздела

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{\alpha \pm \beta \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{pp_L \cos \theta - ep_L^2 \pm p \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2},$$

$$\begin{aligned}
\sin \varphi_{1,2} &= \frac{\beta \mp \alpha \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{pp_L \sin \theta \mp (p \cos \theta - ep_L) \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2}, \\
r_{1,2} &= \frac{p}{1 + e \cos \varphi_{1,2}} = \\
&= \frac{p(p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2)}{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2 + ep p_L \cos \theta - e^2 p_L^2 \pm ep \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}, \\
\mathbf{P}_{1,2} &= r_{1,2} \{ \cos \varphi_{1,2}, \sin \varphi_{1,2} \} = \frac{p \{ \cos \varphi_{1,2}, \sin \varphi_{1,2} \}}{1 + e \cos \varphi_{1,2}} = \\
&= \frac{p(p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2)}{p^2 - ep p_L \cos \theta \pm ep \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}} \cdot \\
&\left\{ \frac{pp_L \cos \theta - ep_L^2 \pm p \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2}, \right. \\
&\left. \frac{pp_L \sin \theta \mp (p \cos \theta - ep_L) \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + e^2 p_L^2} \right\} = \\
&= \frac{1}{p - ep_L \cos \theta \pm e \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}} \cdot \\
&\cdot \left\{ pp_L \cos \theta - ep_L^2 \pm p \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}, \right. \\
&\left. pp_L \sin \theta \mp (p \cos \theta - ep_L) \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2} \right\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

### 3.3.2. Проекции и длина хорды

Т.к. в (3.3.1.-11) части числителя и знаменателя точек  $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$  отличаются друг от друга только знаками, введем промежуточные переменные  $a, b, \dots, g$ , которые существенно сократят дальнейший вывод. Итак

$$\mathbf{P}_1 : \frac{1}{a+b} \{c+d, f-g\}, \quad \mathbf{P}_2 : \frac{1}{a-b} \{c-d, f+g\},$$

где  $a = p - ep_L \cos \theta$ ,  $b = e \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}$ ,

$$c = pp_L \cos \theta - ep_L^2, \quad d = p \sin \theta \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2},$$

$$f = pp_L \sin \theta, \quad g = (p \cos \theta - ep_L) \sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}. \tag{1}$$

Отсюда легко вывести вектор **длины хорды** от  $P_1$  к  $P_2$  в промежуточных переменных

$$\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1 = \Delta \mathbf{P} = \frac{2}{a^2 - b^2} \{ad - bc, ag + bf\}. \quad (2)$$

После подстановки значений промежуточных переменных получим

$$\Delta \mathbf{P} = \frac{2\sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{(1 - e^2 \sin^2 \theta)} \{\sin \theta, \cos \theta\}. \quad (3)$$

(Обратим внимание, что проекции задаются с помощью направляющих вектора  $\{\sin \theta, \cos \theta\}$ , длина которого равна 1.)

Коэффициент перед фигурными скобками есть **длина хорды**

$$L(p_L, \theta) = \frac{2\sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{|(1 - e^2 \sin^2 \theta)|}. \quad (4)$$

Заметим, что если знаменатель (4) равен нулю, то пересечение происходит на  $\infty$ . В зависимости от знака подкоренного выражения получим 2, 1 или 0 число пересечений.

### 3.3.3. Обратная задача: найти параметры секущей по полярным координатам точек пересечения

Пусть даны полярные углы  $\varphi_1, \varphi_2$  точек пересечения с дугой. Нужно найти параметры  $\theta, p_L$  полярного уравнения прямой  $r = \frac{p_L}{\cos(\varphi - \theta)}$ . Т.к. радиус-векторы

дуги равны, соответственно,  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1}$  и  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_2}$ , то запишем систему

$$\text{уравнений} \begin{cases} \frac{p_L}{\cos(\varphi_1 - \theta)} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1} \\ \frac{p_L}{\cos(\varphi_2 - \theta)} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_2} \end{cases}. \quad (1)$$

Отсюда, деля 1-е уравнение на 2-е, получим  $\frac{\cos(\varphi_2 - \theta)}{\cos(\varphi_1 - \theta)} = \frac{1 + e \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_1}$ . (2)

Обозначим, для краткости,  $1 + e \cos \varphi_2 = a$ ,  $1 + e \cos \varphi_1 = b$ , имеем

$$b \cos(\varphi_2 - \theta) = a \cos(\varphi_1 - \theta), \quad b \cos \varphi_2 \cos \theta + b \sin \varphi_2 \sin \theta = a \cos \varphi_1 \cos \theta + a \sin \varphi_1 \sin \theta,$$

$$\cos \theta (b \cos \varphi_2 - a \cos \varphi_1) = \sin \theta (a \sin \varphi_1 - b \sin \varphi_2), \quad \frac{b \cos \varphi_2 - a \cos \varphi_1}{a \sin \varphi_1 - b \sin \varphi_2} = \operatorname{tg} \theta,$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{(1 + e \cos \varphi_1) \cos \varphi_2 - (1 + e \cos \varphi_2) \cos \varphi_1}{(1 + e \cos \varphi_2) \sin \varphi_1 - (1 + e \cos \varphi_1) \sin \varphi_2} = \frac{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}{\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 + e \sin(\varphi_1 - \varphi_2)} =$$

$$\frac{-2 \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + 2e \sin \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}} = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0 + e \cos \delta}, \quad (3)$$

где  $\varphi_0$  - биссектриса между углами  $\varphi_1, \varphi_2$ ,

$\delta$  - половина разности между углами  $\varphi_1, \varphi_2$ .

$$\text{Отсюда (см.1.2.5.2.-3а)} \quad \theta = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\}) + \pi n. \quad (4)$$

(Слагаемое  $\pi n$  появляется в связи с неопределенностью выбора очередности точек: можно любую из двух точек пересечения считать первой.)

$$p_L = \frac{p \cos(\varphi_1 - \theta)}{1 + e \cos \varphi_1} = \frac{p(\cos \varphi_1 \cos \theta + \sin \varphi_1 \sin \theta)}{1 + e \cos \varphi_1} = \frac{p(\cos \varphi_1 (\cos \varphi_0 + e \cos \delta) + \sin \varphi_1 \sin \varphi_0)}{(1 + e \cos \varphi_1) \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}}. \quad (5)$$

(Для гиперболы придется уточнить знак, стоящий перед (5). Об этом см. ниже, в (3.7.).)

### 3.4. Общий подход при расчете некоторых элементов эллипса, параболы и гиперболы

#### 3.4.1. Одинаково рассчитываемые точки для всех типов коник

В алгоритме получения полярного уравнения, как правило, заложено вычисление значения фокусного расстояния  $f$ . И, если для решения конкретных задач (например, задач оптики) этот параметр часто используется, то его можно хранить среди дополнительных параметров дуги (см.2.1.). С другой стороны, если значение фокусного расстояния нужно редко, то его можно легко восстановить. Покажем это.

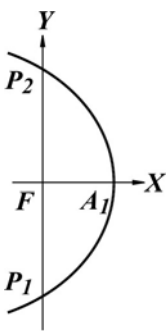


Рис.1

На (рис.1)  $A_1$  видна из фокуса под углом  $\varphi = 0$ . Отсюда

$$\text{координаты } A_1 : \left. \left\{ \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} \right|_{\varphi=0} = \left\{ \frac{p}{1 + e}, 0 \right\}. \quad (1)$$

В астрономии эта точка носит название **перигея** (классическое название, применяющееся и сейчас – **перигелий** [8, стр.5]) . В работах по небесной механике для радиус-вектора из фокуса к этой точке используется следующее

$$\text{обозначение}^1 \quad r_\pi = \frac{p}{1+e}.$$

Расстояние между  $A_1$  и  $F$  равно **значению фокусного расстояния**

$$f = \frac{p}{1+e}. \quad (2)$$

Этот результат есть и у Аполлония  $III_{45}$ , но в несколько другом виде [см. 21, стр.134] .

Отметим также, что полярным углам  $\mp \frac{\pi}{2}$  соответствуют

$$P_1 : \left\{ \frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1+e \cos \varphi} \right\} \Big|_{\varphi = -\frac{\pi}{2}} = \{0, -p\} \quad \text{и} \quad P_2 : \left\{ \frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1+e \cos \varphi} \right\} \Big|_{\varphi = \frac{\pi}{2}} = \{0, p\}.$$

Расстояние между  $F$  и  $P_2$  равно  $p$  - **фокальному параметру кривой**.

Упражнение 1. Доказать (см.рис.1), что:

- 1) если  $r_1, r_2$  величины отрезков, на которые фокус делит проходящую через него фокальную хорду, и  $\frac{1}{l} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$ , то  $l = \frac{p}{2}$ ; (3)

(данное соотношение (3) называется **среднее гармоническое**<sup>2</sup> [22, стр.359])

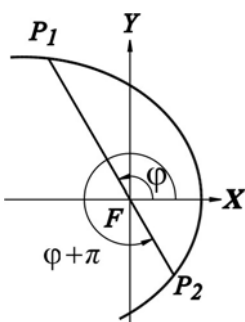


Рис. 2

- 2) **отношение произведения этих отрезков к длине хорды постоянно и также равно  $\frac{p}{2}$** . Предлагаемое упражнение обобщает [16, §127, упр.15, упр.40]

Доказательство. Возьмем длины радиус-векторов из  $F$  к точкам  $P_1, P_2$ . Для эллипса и параболы эти радиусы всегда положительны. Для гиперболы это, вообще говоря, не так (см. ниже 3.7.1) – значения радиусов являются алгебраическими числами (со знаком). Однако на

<sup>1</sup> В.В. Белецкий. Очерки о движении небесных тел. , "Наука", М., 1977, стр.17.

<sup>2</sup> Данное выражение применяется в теории музыки – отсюда и соответствующее название.

конечный вывод формулы знак радиуса не влияет. С другой стороны, мы хотим сохранить общность доказательства для всех 3-х типов коник.

$$1) \quad r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad r_2 = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \pi)} = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad \text{Отсюда} \quad \frac{1}{l} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} =$$

$$\frac{1 + e \cos \varphi + 1 - e \cos \varphi}{p} = \frac{2}{p} \quad \text{и} \quad l = \frac{p}{2}.$$

$$2) \quad \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = \frac{1}{\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}} = \frac{1}{\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1}} = \frac{p}{2}.$$

### 3.4.2. Директриса

**Директриса<sup>1</sup>** определяется как прямая, у которой отношение длины радиус-вектора, проведенного из фокуса до любой точки кривой, к расстоянию от этой точки до директрисы равно эксцентриситету  $\frac{|r|}{d} = e$ . (1)

Из (1) следует, что  $ed = |r|$ . (2)

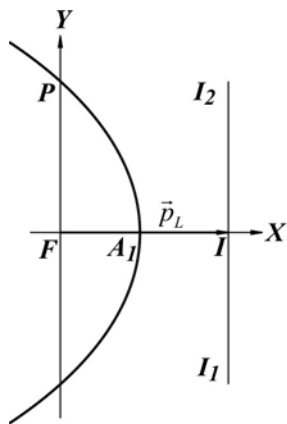


Рис. 1

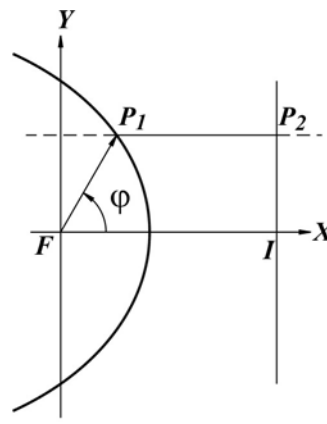


Рис.2

Найдем **уравнение директрисы в системе Кеплера**. Пусть **нормальное уравнение директрисы**  $x \cos \theta + y \sin \theta - p_L = 0$ . Тогда расстояние от некоторой точки на кривой до директрисы

<sup>1</sup> Понятие директриса было введено в математику Паппом из Александрии.



$$d = \left| \frac{p \cos \varphi \cos \theta}{1 + e \cos \varphi} + \frac{p \sin \varphi \sin \theta}{1 + e \cos \varphi} - kp \right| = p \frac{|\cos(\varphi - \theta) - k(1 + e \cos \varphi)|}{|1 + e \cos \varphi|}, \quad \text{где}$$

$$kp = p_L. \quad \text{Перепишем (2) } \cos(\varphi - \theta) - k(1 + e \cos \varphi) = \pm \frac{1}{e}. \quad (3)$$

### 1° Решение для варианта со знаком '-'

$$-k(1 + e \cos \varphi) = -\frac{1}{e} - \cos(\varphi - \theta), \quad k(1 + e \cos \varphi) = \frac{1 + e \cos(\varphi - \theta)}{e},$$

$$ke + ke^2 \cos \varphi = 1 + e \cos \varphi \cos \theta + e \sin \varphi \sin \theta,$$

$$(e \cos \theta - ke^2) \cos \varphi + e \sin \theta \sin \varphi + (1 - ke) = 0, \quad (4)$$

Для того, чтобы (4) выполнялось для всех полярных углов  $\varphi$ , необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты при  $\cos \varphi$ ,  $\sin \varphi$  и свободном члене были

$$\text{тождественно равны 0 (докажите!). Т.е. } \begin{cases} e \cos \theta - ke^2 = 0 \\ e \sin \theta = 0 \\ 1 - ke = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

$$\text{Из (5) однозначно следует } k = \frac{1}{e}, \theta = 0. \quad (6)$$

$$\text{Таким образом, уравнение директрисы } x = \frac{p}{e} \quad (7)$$

Проверим данное решение для любой точки на кривой

$$\begin{aligned} d &= |x \cos \theta + y \sin \theta - p_L| \Big|_{\theta=0; x=\frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}; y=0; p_L=\frac{p}{e}} = \left| x - \frac{p}{e} \right| \Big|_{x=\frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}} = \left| \frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi} - \frac{p}{e} \right| = \\ &= \frac{p}{e} \left| \frac{e \cos \varphi - 1 - e \cos \varphi}{1+e \cos \varphi} \right| = \frac{p}{e} \left| \frac{1}{1+e \cos \varphi} \right| = \frac{p}{e|1+e \cos \varphi|}. \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } \frac{|r|}{d} = \frac{pe|1+e \cos \varphi|}{p|1+e \cos \varphi|} = e.$$

### 2° Решение для варианта со знаком '+'

приводит к однозначному решению  $k = -\frac{1}{e}, \theta = \pi$  (докажите!), которое по смыслу не отличается от (6).

$$\text{И в этом случае уравнение директрисы } x = \frac{p}{e}. \square$$

Из этих рассуждений следует, что **точка фокуса однозначно определяет директрису, а директриса однозначно определяет фокус**. Другими словами: **фокус и директриса находятся во взаимно-однозначном соответствии**. (См. “5.15. Принцип двойственности”.)

Заметим, что директриса перпендикулярна фокальной оси. (см. рис.1).

Упражнение 1. Найти эксцентриситет, при котором  $FA_1 = A_1I$ .

Ответ.  $e = 1$  (парабола).

Упражнение 2. Опустим  $\perp$  из конца радиус-вектора на директрису. Найти уравнение прямой, совпадающей с данным  $\perp$  (см.рис.2).

Решение. Уравнение прямой имеет вид  $y = a$ , где  $a = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}$ .

Упражнение 3. Найти расстояние между точкой перигея ( $A_1$  (см.рис.1)) и директрисой.

Ответ.  $\frac{P}{e(1+e)}$ . □

### 3.5. Основные элементы и соотношения в эллипсе

#### 3.5.1. Основные точки и элементы эллипса

**Левая горизонтальная вершина эллипса**  $A_2$  имеет полярный угол  $\varphi = \pi$

(см. рис.1), так что из (3.1.2.2.) координаты  $A_2 : \{-\frac{P}{1-e}, 0\}$ . (1)

Во времена К.Ф. Гаусса в астрономии эта точка носила название **афелия** [8, стр.5]. Современное название этой точки – **апогей**. Для этой точки используют,

также, следующее обозначение  $r_\alpha = \frac{P}{1-e}$ .

**Большая полуось**

$$a = |A_{1x} - A_{2x}| = \left| \frac{1}{2} \left( \frac{P}{1+e} - \frac{-P}{1-e} \right) \right| = \frac{1}{2} \frac{P - pe + P + pe}{1 - e^2} = \frac{P}{1 - e^2}. \quad (2)$$

**Большая ось** носила в астрономии название **среднее расстояние** [8, стр.5].

**Центр симметрии**

$$O : \left\{ \frac{1}{2} (A_{1x} + A_{2x}), 0 \right\} = \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{P}{1+e} - \frac{P}{1-e} \right), 0 \right\} = \left\{ \frac{P}{2} \left( -\frac{2e}{1-e^2} \right), 0 \right\} = \left\{ -\frac{Pe}{1-e^2}, 0 \right\}. \quad (3)$$

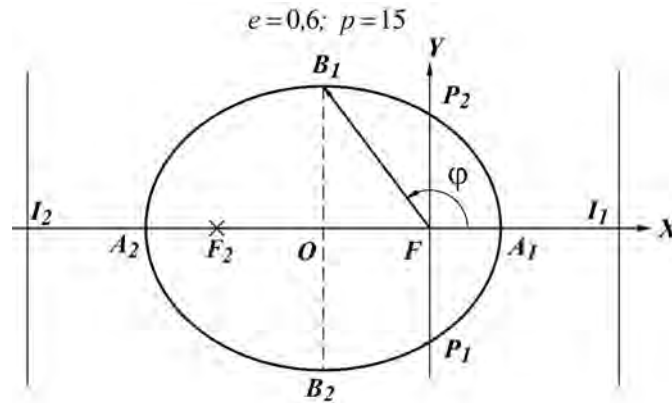


Рис.1

**Левый фокус**  $F_2 : \{A_{2x} + f, 0\} = \left\{-\frac{p}{1-e} + \frac{p}{1+e}, 0\right\} = p\left\{\frac{-1-e+1-e}{1-e^2}, 0\right\} =$

$$= p\left\{\frac{-2e}{1-e^2}, 0\right\}. \quad (4)$$

**Расстояние между фокусами**  $|F_x - F_{2x}| = \left|0 - \frac{-2pe}{1-e^2}\right| = \frac{2pe}{1-e^2} = 2c$ . Отсюда

$$c = \frac{pe}{1-e^2}, \text{ где } c - \text{ половина расстояния между фокусами.} \quad (5)$$

Рассмотрим **вершины  $B_1, B_2$  малой оси**. Мы уже знаем их координаты (3.2.5.-2)

$$B_{1,2}\{x, y\} = \frac{p}{1-e^2} \{-e, \pm\sqrt{1-e^2}\}. \quad (6)$$

В том же разделе получены **полярные углы** (3.2.5.-1), под которыми  $B_1, B_2$  **видны из фокуса**  $\varphi_{1,2} = \text{ang}(O, \{-e, \pm\sqrt{1-e^2}\})$ . (7)

Сравнивая (6) и (2), заметим, что абсциссы у  $B_1, B_2$  и  $O$  совпадают. Отсюда следует, что **малая полуось проходит через центр симметрии. Она является вертикальной зеркальной осью симметрии** (см. 3.1.3.), а кроме этого (см. 3.2.8.) является диаметром.

**Вычислим размер малой полуоси**

$$b = \left|\frac{1}{2}(B_{2y} - B_{1y})\right| = \left|\frac{p}{2(1-e^2)}(\sqrt{1-e^2} + \sqrt{1-e^2})\right| = \frac{p\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} \text{ или } b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (8)$$

Используя (1) и (6), получим [18,стр.390] известную формулу

$$\frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{1-e^2} \frac{1-e^2}{p} = p. \quad (9)$$

Найдем координаты  $I_1, I_2$  точек пересечения директрис и фокальной оси. Так,  $I_1 = \left\{ \frac{p}{e}, 0 \right\}$ . В силу симметрии относительно оси  $B_1, B_2$ , вычислим

расстояние до зеркальной оси  $d_z = \frac{p}{e} - \left( \frac{-pe}{1-e^2} \right) = \frac{p}{e(1-e^2)}$ . После отражения

$$I_2 = \left\{ \frac{-pe}{1-e^2} - d_z, 0 \right\} = \left\{ \frac{-pe}{1-e^2} - \frac{p}{e(1-e^2)}, 0 \right\} = \left\{ \frac{-p(1+e^2)}{e(1-e^2)}, 0 \right\}. \quad (10)$$

Упражнение 1. Доказать [ср.16,§127,упр.9], что **геометрическое место точек проекции фокуса на касательную есть окружность с центром  $\left\{ -\frac{pe}{1-e^2}, 0 \right\}$  и радиусом  $R = \frac{p}{1-e^2} = a$ .** (См. 3.2.2. рис. 2).

Доказательство. Вычислим квадрат радиуса (чтобы не работать с квадратным корнем при промежуточных вычислениях) и докажем, что он равен  $const$ . В силу (3.2.2.-2)

$$\begin{aligned} \{x_\perp, y_\perp\} &= \frac{p}{1+2e\cos\varphi+e^2} \{\cos\varphi+e, \sin\varphi\}; \\ R^2 &= p^2 \left( \frac{\cos\varphi+e}{1+2e\cos\varphi+e^2} + \frac{e}{1-e^2} \right)^2 + \left( \frac{\sin\varphi}{1+2e\cos\varphi+e^2} \right)^2 = \\ &= p^2 \frac{((\cos\varphi+e)(1-e^2)+e(1+2e\cos\varphi+e^2))^2 + \sin^2\varphi(1-e^2)^2}{(1+2e\cos\varphi+e^2)^2(1-e^2)^2}. \end{aligned}$$

После упрощений, получаем, что числитель последней дроби равен

$$(1+2e\cos\varphi+e^2)^2. \text{ Отсюда } R = \frac{p}{1-e^2} = a.$$

Упражнение 2. Доказать, что расстояние  $|F_2 I_2| = \frac{p}{e}$ .

Упражнение 3. Найти квадрат диагонали прямоугольника, образованного полуосями эллипса.

$$\text{Ответ. } a^2 + b^2 = \frac{p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2}. \quad (11)$$

Упражнение 4. Доказать, что при  $e = \frac{1}{2}$  (см.рис.1),  $A_2 F = 2 F P_2$ . (12)

Упражнение 5. Доказать, что

1) для полярных углов, под которыми  $A_1, A_2$  видны из фокуса, выполняется соотношение  $\cos\left|\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right| + e \cos\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 0$ . (13)

2) проверить тоже соотношение для точек  $B_1, B_2$  (см.7).

Упражнение 6. Прямоугольник, одна из сторон которого является фокальная хорда,  $\perp$  фокальной оси, вписан в эллипс.

1) Доказать, что **длина его диагонали:**

1.1) равна расстоянию между фокусами, деленному на эксцентриситет  $di = \frac{2p}{1-e^2}$ ; (14)

1.2) в 2 раза больше большой полуоси;

2) его **периметр**  $P = \frac{4p(1+e-e^2)}{1-e^2}$ ; (15)

3) его **площадь**  $S = \frac{4p^2e}{1-e^2}$ . (16)

Упражнение 7. Найти вершины малой полуоси  $B_{1,2}$ , используя, что в этих вершинах расстояние до фокальной оси максимально.

Решение. В силу теоремы Ролля [24, стр. 25] в этих точках касательные  $\parallel$  фокальной оси. Для этих касательных направление нормального вектора  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

Подставляя в (3.2.6.-11) это значение, получим

$$\{x_{1,2}, y_{1,2}\} = \frac{p\{-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \mp \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta})\}}{1-e^2 \sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}} \Bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{P}{(1-e^2)} \{-e, \pm \sqrt{1-e^2}\}. \text{ Следовательно,}$$

$$B_1 : \frac{P}{1-e^2} \{-e, +\sqrt{1-e^2}\}, B_2 : \frac{P}{1-e^2} \{-e, -\sqrt{1-e^2}\}. \quad (17)$$

Упражнение 8. Найти расстояние от фокуса  $F$  до одной из вершин малой полуоси  $B_{1,2}$ .

Решение. Известен угол  $\varphi_1$  (7), под которым видна из фокуса, например, вершина  $B_1$ . Вычислим абсолютное значение радиус-вектора до этой вершины

$$|r| = \frac{P}{|1 + e \cos \varphi_1|} = \frac{P}{|1 + e \cos(\text{ang}(\mathbf{0}, \{-e, \sqrt{1-e^2}\}))|} = \frac{P}{1 - \frac{e^2}{e^2 + 1 - e^2}} = \frac{P}{1 - e^2} = a. \quad (18)$$

Получена **длина большой полуоси эллипса** (ср.(2) и [12, стр. 328]).

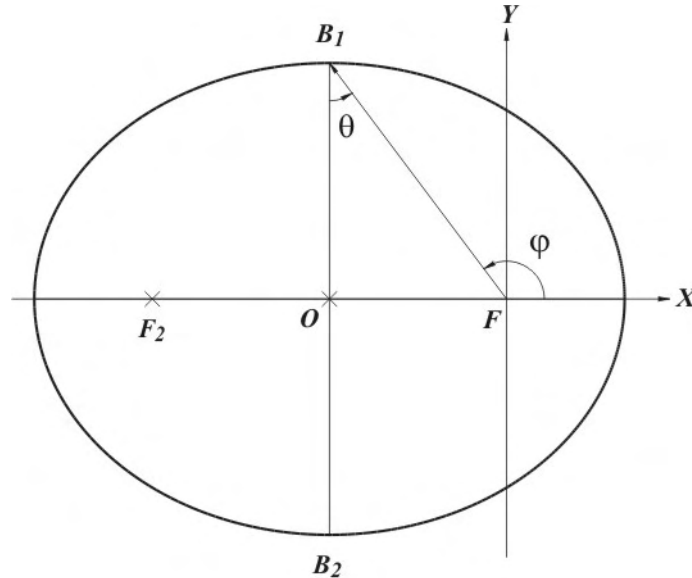


Рис.2

Упражнение 9. Доказать, что

- 1)  $\sin \theta = e$  (И.Кеплер) (см.рис.2).
- 2)  $B_1F = a$

Решение. 1)  $\theta = (\varphi + \pi) - \frac{3\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e, \sqrt{1-e^2}\}) - \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-e^2}, e\})$ .

Отсюда  $\sin \theta = \frac{e}{\sqrt{1-e^2+e^2}} = e$ . (19)

2)  $B_1F = \sqrt{OB_1^2 + OF^2} = \sqrt{b^2 + a^2e^2} = \sqrt{\frac{P^2}{1-e^2} + \frac{P^2}{(1-e^2)^2}} = \frac{P}{1-e^2} \sqrt{1-e^2+e^2} = a$ . (20)

Упражнение 10. Сместим положение оси абсцисс в центр симметрии эллипса. Доказать, что для любой точки эллипса в этом случае справедливо

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a, b - \text{полуоси эллипса}^1. \quad (21)$$

Упражнение 11. С помощью (3.3.2.-4) найти большую и малую оси эллипса.

Упражнение 12. Доказать (см.рис.1)

<sup>1</sup> Ламе (1818) [7,стр.401].

$$1) c = ae, 2) ae^2 + p = a, 3) \frac{a}{e} = OI_1.$$

Упражнение 13. Вычислить критерий сжатия эллипса по отношению к исходной окружности (название наше *М.Ш.*), равный отношению малой полуоси к большой полуоси (критерий, как и эксцентриситет, введен Аполлоном и применялся И.Ньютоном в [19]. Вообще говоря, критерий сжатия играет ту же роль, что и эксцентриситет – влияет на форму кривой. Эти параметры взаимозаменяемы.)

$$\text{Решение. } \tau = \frac{b}{a} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} : \frac{p}{1-e^2} = \sqrt{1-e^2}. \quad (22)$$

Упражнение 14. Элементы “золотого эллипса” (Н.Е.Huntley (1974))

[12,стр.328]. Пусть  $\frac{a}{b} = \omega^1$ , где  $a, b$  - полуоси эллипса, а  $\omega = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803398875$

так называемое магическое число, которое используют в задачах, связанных с “золотым сечением”.

Прежде всего, выясним, что  $\omega$  удовлетворяет уравнению  $\omega^2 - \omega - 1 = 0$ . Отсюда  $\omega^2 = \omega + 1$ . Аналогично получаем  $\omega^2 - 1 = \omega$  и  $\omega^2 + \omega = 1$ .

Убедиться в справедливости приведенных ниже формул (см.рис.3):

$$1) e = \sqrt{1 - \frac{1}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{\omega^2 - 1}{\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}; 2) OF = ae = \frac{a}{\sqrt{\omega}}; 3) BF = a = b\omega;$$

$$4) \sec \theta = \frac{BF}{OB} = \omega; 5) \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{\omega}}; 6) PF = p = \frac{b^2}{a} = \frac{b}{\omega}; 7) ON = \frac{a}{e} = a\sqrt{\omega};$$

$$8) FN = ON - OF = a\sqrt{\omega} - \frac{a}{\sqrt{\omega}} = \frac{a(\omega - 1)}{\sqrt{\omega}}; 9) a : b : p = b\omega : b : \frac{b}{\omega} = \omega^2 : \omega : 1;$$

$$10) \frac{ON}{FN} = \frac{a\sqrt{\omega}}{a/\sqrt{\omega}} = \omega; 11) \frac{OF}{FN} = \frac{a/\sqrt{\omega}}{\omega(\omega - 1)\sqrt{\omega}} = \frac{1}{\omega - 1} = \omega;$$

$$12) OP^2 = OF^2 + FP^2 = \frac{a^2}{\omega} + \frac{b^2}{\omega^2} = b^2\omega + \frac{b^2}{\omega^2} = \frac{b^2(\omega^3 + 1)}{\omega^2} = \frac{b^2(2\omega + 1)}{\omega^2} = 2b^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{2b}; 13) \text{Т.к. } \triangle OMN \sim \triangle FPN, \text{ то } \frac{MP}{PN} = \frac{OF}{FN} = \omega; 14) MB = PF = p = \frac{b}{\omega}.$$

<sup>1</sup> Здесь употреблен для лучшего чтения символ  $\omega$ , хотя в цитируемой работе используется символ  $\alpha$ . Однако символ  $\alpha$  практически не отличается от 1-й буквы латинского алфавита -  $a$ , поэтому применять эти буквы рядом нецелесообразно.

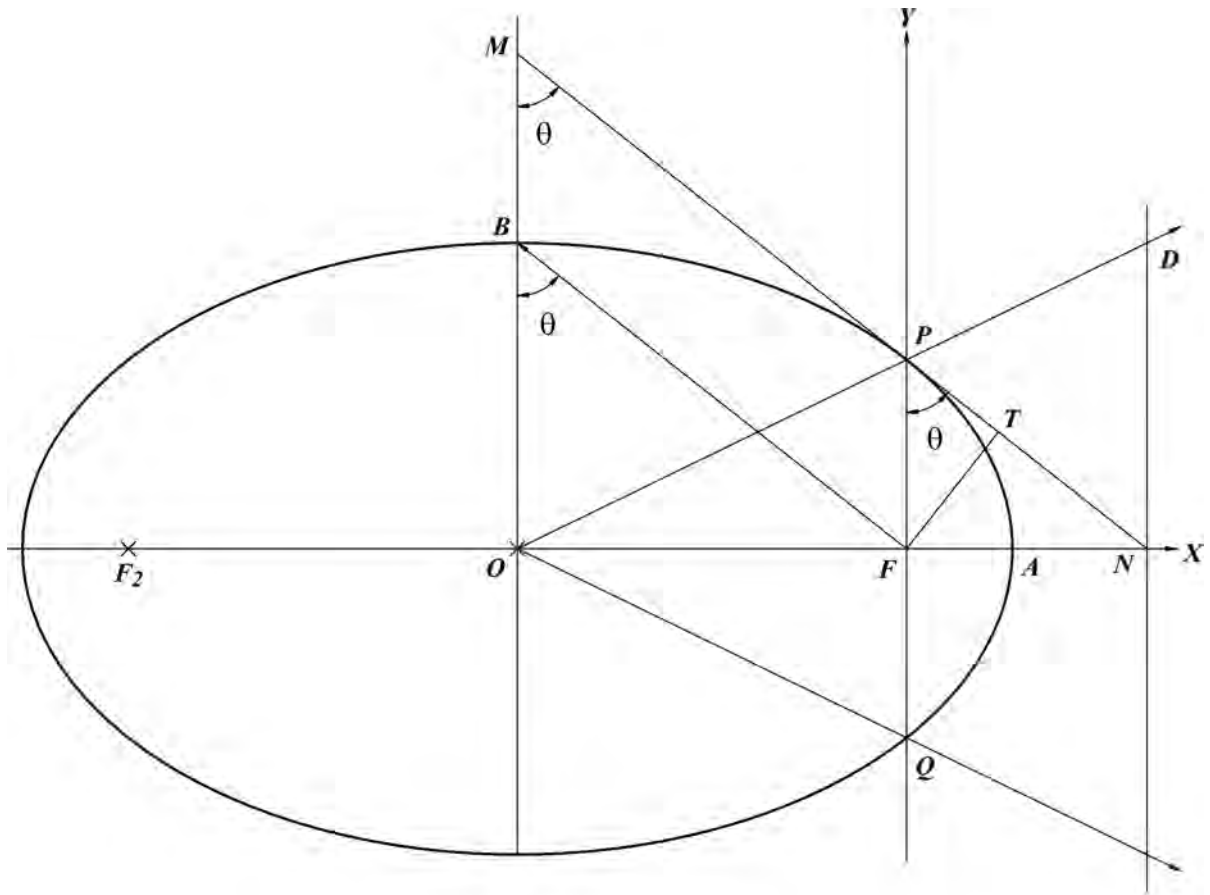


Рис. 3

Упражнение 15. Доказать<sup>1</sup>, (см.рис.1), что:  $\frac{FP_2 - r_\pi}{r_\pi} = e$

Доказательство. 
$$\frac{FP_2 - r_\pi}{r_\pi} = e = \frac{p - \frac{p}{1+e}}{\frac{p}{1+e}} = e.$$

Упражнение 16. Доказать, что  $e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{2a}$ .

Упражнение 17. Доказать<sup>2</sup>, что:

1)  $a = \frac{r_\alpha + r_\pi}{2}$ ; 2)  $p = a(1 - e^2)$ ; 3)  $e = \frac{r_\alpha - r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}$ ; 4)  $p = \frac{2r_\alpha r_\pi}{r_\alpha + r_\pi}$ .

Упражнение 18. Используя формулу длины хорды (3.3.2.-4), найти большую и малую оси эллипса.

<sup>1</sup> Ю.А. Рябов. Движения небесных тел. 4 изд., "Наука", М., 1988, стр.63.

<sup>2</sup> В.В. Белецкий. Очерки о движении небесных тел. "Наука", М., 1977, стр.17



Решение. Большая ось  $p_L = 0$ ,  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $L = \frac{2\sqrt{p^2}}{(1-e^2)} = \frac{2p}{(1-e^2)}$ .

Малая ось  $p_L = \frac{pe}{1-e^2}$ ,  $\theta = \pi$ ,  $L = \frac{2\sqrt{p^2 + \frac{2e^2 p^2}{1-e^2} + \frac{(e^2-1)e^2 p^2}{(1-e^2)^2}}}{1} = \frac{2p}{\sqrt{1-e^2}}$ .

### 3.5.2. Преобразования между правым и левым фокусом эллипса

#### 3.5.2.1. Радиус-вектор $r_2(\varphi)$ из левого фокуса эллипса

Возьмем некоторую произвольную точку  $P_1$  (см. рис.1), которая видна из правого фокуса под углом  $\varphi$ . Тогда ее радиус-вектор и декартовы координаты

будут следующими  $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$ ,  $x = \frac{p\cos\varphi}{1+e\cos\varphi}$ ,  $y = \frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}$ .

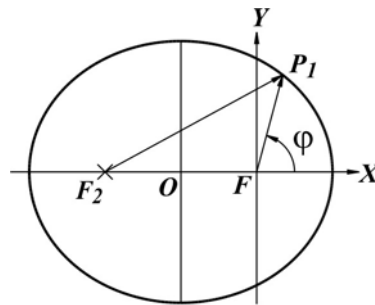


Рис.1

По теореме Пифагора найдем расстояние между  $P_1$  и левым фокусом

$$(3.5.1.-4) F_2 : p\left\{\frac{-2e}{1-e^2}, 0\right\}$$

$$\begin{aligned} |F_2 P_1| = r_2 &= \sqrt{\left(\frac{p\cos\varphi}{1+e\cos\varphi} + \frac{2pe}{1-e^2}\right)^2 + \left(\frac{p\sin\varphi}{1+e\cos\varphi}\right)^2} = \\ &= \frac{p}{(1+e\cos\varphi)(1-e^2)} \sqrt{(\cos\varphi(1-e^2) + 2e(1+e\cos\varphi))^2 + (1-e^2)^2(1-\cos^2\varphi)}. \end{aligned} \quad (*)$$

Преобразуем подкоренное выражение

$$\begin{aligned} (\cos\varphi - e^2\cos\varphi + 2e + 2e^2\cos\varphi)^2 + (1-2e^2+e^4)(1-\cos^2\varphi) &= (\cos\varphi + e^2\cos\varphi + 2e)^2 + \\ + (1-2e^2+e^4)(1-\cos^2\varphi) &= \cos^2\varphi + e^4\cos^2\varphi + 4e^2 + 2e^2\cos^2\varphi + 4e\cos\varphi + 4e^3\cos\varphi + 1 - \\ - \cos^2\varphi - 2e^2 + 2e^2\cos^2\varphi + e^4 - e^4\cos^2\varphi &= 4e^2\cos^2\varphi + 4e(1+e^2)\cos\varphi + (1+e^2)^2 = \\ = (1+2e\cos\varphi+e^2)^2. \end{aligned} \quad \text{Таким образом, из (*) получаем } r_2 = \frac{p(1+2e\cos\varphi+e^2)}{(1-e^2)(1+e\cos\varphi)}. \quad (1)$$

### 3.5.2.2. Сумма длин радиус-векторов от фокусов эллипса до некоторой точки на дуге эллипса

По одному из определений эллипса, для всех точек на линии эллипса сумма  $S$  радиус-векторов от фокусов постоянна и равна  $2a$

[18, стр.361,1], [16, §.102]. Проверим это, используя (3.2.-1), (3.5.2.1.-1), (3.5.1.-2)

$$S = r_{FA_1} + r_{F_2A_1} = r_1 + r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} + \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)} = \frac{2p}{1 - e^2} = 2a. \quad (1)$$

Применим это правило. В силу симметрии (см.рис.1)  $FB_1 = F_2B_1$ , отсюда

$$FB_1 = a, \quad F_2B_1 = a.$$

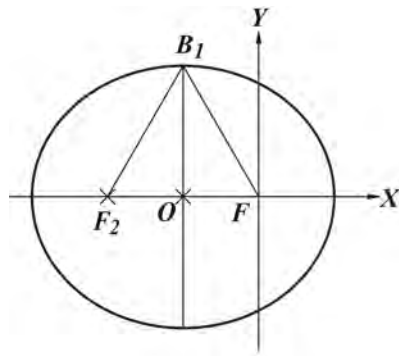


Рис. 1

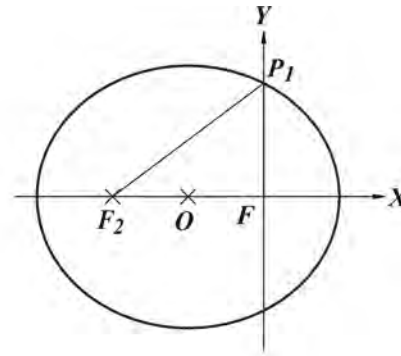


Рис. 2

Другой случай: из (рис.2) легко видеть, что  $F_2P_1 = 2a - p = \frac{2p}{1 - e^2} - p = p \left( \frac{1 + e^2}{1 - e^2} \right)$ .

### 3.5.2.3. Полярный угол $\varphi_2(\varphi)$ и радиус $r_2(\varphi_2)$ из левого фокуса эллипса

Зная координаты левого фокуса эллипса (3.5.1.-4), выразим угол  $\varphi_2$  через угол  $\varphi$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= \text{ang} \left( \left\{ -\frac{2pe}{1 - e^2}, 0 \right\}, \left\{ \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} \right) = \text{ang} \left( \mathbf{0}, \left\{ \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} + \frac{2pe}{1 - e^2}, \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right\} \right) = \\ &= \text{ang} \left( \mathbf{0}, \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)(1 - e^2)} \{ (1 - e^2) \cos \varphi + 2e(1 + e \cos \varphi), (1 - e^2) \sin \varphi \} \right) = \\ &= \text{ang} \left( \mathbf{0}, \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)(1 - e^2)} \{ \cos \varphi - e^2 \cos \varphi + 2e + 2e^2 \cos \varphi, (1 - e^2) \sin \varphi \} \right) = \\ &= \text{ang} \left( \mathbf{0}, \{ e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e, (1 - e^2) \sin \varphi \} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

(Т.к.  $e < 1$ ,  $p > 0$ , то общий множитель  $\frac{p}{(1+e \cos \varphi)(1-e^2)} > 0$  и в силу (1.2.1.-9) его

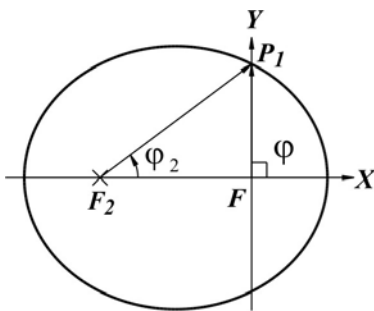


Рис. 1

можно сократить).

Известно [16, §125,2], формула радиус-вектор из

$$\text{левого фокуса эллипса } r_2(\varphi_2) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi_2}. \quad (2)$$

Докажем (2), применяя методы данной работы.

Из (1.2.3.-2а)

$$\cos(\text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad -\infty < x, y < +\infty. \quad (*)$$

Тогда, учитывая (1), подставляем в (\*)  $x = e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e$ ,  $y = (1 - e^2) \sin \varphi$

$$\text{Получаем } \cos(\varphi_2) = \frac{(1 + e^2) \cos \varphi + 2e}{\sqrt{((1 + e^2) \cos \varphi + 2e)^2 + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi}}. \quad \text{Преобразуем}$$

отдельно выражение под корнем в знаменателе  $((1 + e^2) \cos \varphi + 2e)^2 + (1 - e^2)^2 \sin^2 \varphi =$   
 $= \cos^2 \varphi + e^4 \cos^2 \varphi + 4e^2 + 2e^2 \cos^3 \varphi + 4e \cos \varphi + 4e^3 \cos \varphi + \sin^2 \varphi - 2e^2 \sin^2 \varphi + e^4 \sin^2 \varphi =$   
 $= 1 + 4e^2 \cos^2 \varphi + e^4 + 4e \cos \varphi + 2e^2 + 4e^3 \cos \varphi = (1 + 2e \cos \varphi + e^2)^2.$  Таким образом,

$$\cos(\varphi_2) = \frac{e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}. \quad (3)$$

$$\text{Подставим } \cos(\varphi_2) \text{ в (2), получая } r_2 = \frac{p}{1 - e \frac{(1 + e^2) \cos \varphi + 2e}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad \text{Преобразуем}$$

$$\text{дробь из 3-х этажной в 2-х этажную } r_2 = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2) - e(e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e)} =$$

$$= \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{1 + e \cos \varphi - e^3 \cos \varphi - e^2} = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)}. \quad (**)$$

Сравнивая  $r_2$  по формулам (\*\*) и (3.5.2.1.-1), убеждаемся, что они совпадают.

Упражнение 1. Пусть известен угол  $\varphi_2$  из левого фокуса. Найти длину радиус-вектора  $r$  и угол  $\varphi$  из правого фокуса.

$$\text{Ответ. } r = \frac{p(1 - 2e \cos \varphi_2 + e^2)}{(1 - e^2)(1 - e \cos \varphi_2)}, \quad (11)$$

$$\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_2(e^2 + 1) - 2e, \sin \varphi_2(1 - e^2)\}). \square \quad (12)$$

Сделаем выводы из наших преобразований. Переход от правого к левому фокусу эллипса сопровождается следующими изменениями.

### 1°. Полярные координаты

- полярный угол  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi(e^2 + 1) + 2e, \sin \varphi(1 - e^2)\})$ ,
- знак перед эксцентриситетом с "+" на "-"

$$r_2(\varphi_2) = \frac{p}{1 - e \cos \varphi_2} = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)}.$$

### 2°. Декартовы координаты

$$- x_2 = x_1 - 2c = 0 - \frac{2pe}{1 - e^2}, y_2 = y_1. \square$$

Упражнение 2. Пользуясь формулами из левого фокуса, найти полярные и декартовы координаты  $P_1$  (см.рис.1), которая видна из правого фокуса под углом

$$\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

Решение. Сначала, для последующего контроля, найдем декартовы координаты из правого фокуса  $\cos \varphi = 0, \sin \varphi = 1$  и  $P_1: \frac{p\{\cos \varphi, \sin \varphi\}}{1 + e \cos \varphi} = \{0, p\}$ . (\*\*\*)

Теперь перейдем к левому фокусу

$$\varphi_2 = \text{ang}(\{\frac{-2pe}{1 - e^2}, 0\}, \{0, p\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{2pe}{1 - e^2}, p\}),$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\frac{2pe}{1 - e^2}}{\sqrt{\frac{4p^2e^2}{(1 - e^2)^2} + p^2}} = \frac{2pe}{\sqrt{p^2(1 + 2e^2 + e^4)}} = \frac{2e}{1 + e^2},$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{p}{\frac{p(1 + e^2)}{(1 - e^2)}} = \frac{1 - e^2}{1 + e^2},$$

$$r_2 = \frac{p}{1 - e \frac{2e}{1 + e^2}} = \frac{p(1 + e^2)}{1 + e^2 - 2e^2} = \frac{p(1 + e^2)}{1 - e^2},$$

$$x = -2c + r_2 \cos \varphi_2 = \frac{-2pe}{1 - e^2} + \frac{p(1 + e^2)}{(1 - e^2)} \cdot \frac{2e}{1 + e^2} = 0,$$

$$y = r_2 \sin \varphi_2 = \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \cdot \frac{1-e^2}{1+e^2} = p. \text{ Результат совпадает с (***)}. \square$$

Упражнение 3. Найти уравнение левой директрисы.

$$\text{Ответ. } x = \frac{-p(1+e^2)}{e(1-e^2)}.$$

Упражнение 4. Доказать, что для каждой точки эллипса справедливо

$$\frac{r_2}{d_2} = e, \text{ где } d_2 \text{ расстояние от этой точки до левой директрисы.}$$

### 3.5.2.4. Проекция левого фокуса эллипса на касательную

Как мы уже знаем из (1.5.), координаты проекции любой внешней точки на прямую, состоят из 2-х слагаемых – 2х векторов. Первое слагаемое всегда является нормальным вектором, построенным из начала координат (1.5.-8)  $p_L \{ \cos \theta, \sin \theta \}$ , который уже вычислен для касательной (3.2.2.-2)

$$Q_0 = \frac{p \{ \cos \varphi + e, \sin \varphi \}}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}. \text{ Используя (1.5.-9), найдем второй вектор}$$

$$Q_1 = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ -\cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_r \\ y_r \end{pmatrix}, \text{ где } \{x_r, y_r\} = F_2 : \left\{ \frac{-2pe}{1-e^2}, 0 \right\} \text{ координаты левого}$$

фокуса (см. 3.5.1.-4), а из (3.2.1-4).

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi + e}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } Q_1 &= \frac{1}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} \begin{pmatrix} \sin^2 \varphi & -(\cos \varphi + e) \sin \varphi \\ -(\cos \varphi + e) \sin \varphi & \cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2pe}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{-2pe \{1 - \cos^2 \varphi, -(\cos \varphi + e) \sin \varphi\}}{(1-e^2)(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}. \end{aligned}$$

Сложим векторы  $Q_0 + Q_1$ , получая

$$\begin{aligned} &\frac{p}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} \left\{ \cos \varphi + e - \frac{2e}{1-e^2} (1 - \cos^2 \varphi), \sin \varphi + \frac{2e}{1-e^2} (\cos \varphi + e) \sin \varphi \right\} = \\ &= \frac{p}{(1-e^2)(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} \left\{ \cos \varphi (1 + 2e \cos \varphi + e^2) - e - 2e^2 \cos \varphi - e^3, \sin \varphi (1 + 2e \cos \varphi + e^2) \right\} = \end{aligned}$$

$$= \frac{p}{(1-e^2)(1+2e\cos\varphi+e^2)} \{ \cos\varphi(1+2e\cos\varphi+e^2) - e(1+2e\cos\varphi+e^2), \\ \sin\varphi(1+2e\cos\varphi+e^2) \} = \frac{p}{(1-e^2)} \{ \cos\varphi - e, \sin\varphi \}. \quad (1)$$

Найдем **расстояние от левого фокуса до касательной**. Для этого (см. рис.1) подставим его координаты  $F_2 : \left\{ \frac{-2pe}{1-e^2}, 0 \right\}$  в формулу

$$d = \left| \frac{(\cos\varphi + e)x + (\sin\varphi)y - p}{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}} \right|, \quad \text{получаемую из (3.2.1.-9). Тогда}$$

$$d_2 = \left| \frac{(\cos\varphi + e)(-2pe)}{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}(1-e^2)} - \frac{p}{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}} \right| = \left| \frac{-p(2e\cos\varphi + 2e^2 + 1 - e^2)}{(1-e^2)\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{-p(1+2e\cos\varphi+e^2)}{(1-e^2)\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}} \right| = \left| \frac{-p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)} \right| = \frac{p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)}. \quad (2)$$

упражнение 1. Доказать [16,§127, пример 4], что **произведение расстояний от фокусов эллипса до любой касательной к нему равно квадрату малой полуоси**.

Решение. Из (3.2.2.-1а) и (2) получаем

$$\frac{p}{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}} \cdot \frac{p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)} = \frac{p^2}{1-e^2} = \left( \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \right)^2 = b^2. \quad (\text{ср. с 3.5.1.-8}) \square$$

**Отклонение левого фокуса от касательной**, как от пассивно ориентированной прямой, т.е. в смысле Гессе  $q_H = \frac{-p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)}$  (3)

всегда будет отрицательным в системе координат Кеплера.  $\square$

Вычислим **расстояние  $T_1T_2$**  (см. рис.2) **между проекциями левого и правого фокусов**. Для этого в формулу  $|y_r \cos\theta - x_r \sin\theta|$  (1.5.-15) нужно подставить координаты левого фокуса  $F_2 : \left\{ \frac{-2pe}{1-e^2}, 0 \right\}$  и  $\sin\theta$  (см.\*)

$$|T_1T_2| = \frac{2pe \sin\varphi}{(1-e^2)\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}. \quad (4)$$

Из (4) и (3.2.2.-6) легко найти расстояние  $|T_2T| = |T_2T_1| - |T_1T|$  (см. рис.1).

$$t_2 = \left| \frac{2pe \sin \varphi}{(1-e^2)\sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}} - \frac{pe \sin \varphi}{(1+e \cos \varphi)\sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}} \right| =$$

$$= \left| \frac{pe \sin \varphi(2+2e \cos \varphi - 1 + e^2)}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi)\sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}} \right| = \left| \frac{pe \sin \varphi \sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi)} \right|. \quad (5)$$

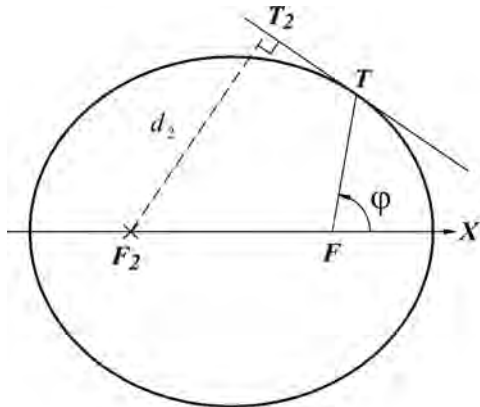


Рис. 1

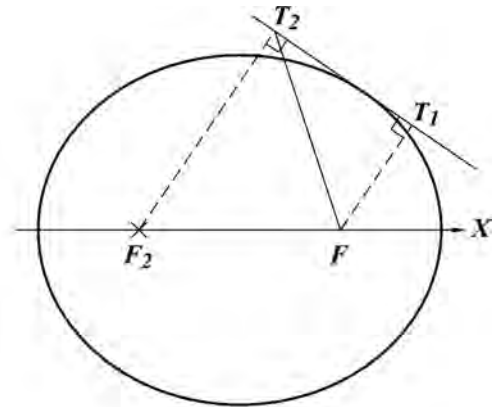


Рис. 2

Упражнение 2. Найти площадь трапеции  $FT_1T_2F_2$  (см. рис.2)

$$S_{FT_1T_2F_2} = \frac{1}{2}(FT_1 + T_2F) \cdot T_1T_2 =$$

$$= \frac{1}{2} \left( \frac{p}{\sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}} + \frac{p\sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}}{(1-e^2)} \right) \cdot \frac{2pe \sin \varphi}{(1-e^2)\sqrt{1+2e \cos \varphi + e^2}} = \frac{p^2 e \sin \varphi}{(1-e^2)} \cdot$$

$$\left( \frac{1}{1+2e \cos \varphi + e^2} + \frac{1}{1-e^2} \right) = \frac{p^2 e \sin \varphi (1-e^2 + 1+2e \cos \varphi + e^2)}{(1-e^2)^2 (1+2e \cos \varphi + e)} = \frac{p^2 e \sin \varphi (1+e \cos \varphi)}{(1-e^2)^2 (1+2e \cos \varphi + e)}. \quad (6)$$

Упражнение 3. Доказать, что **отношение радиус-векторов из фокусов эллипса к точке касания равно отношению расстояний от фокусов до касательной, т.е.**  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}$ . (7)

Упражнение 4. Доказать, что **отношение расстояний от фокусов эллипса до касательной равно отношению расстояний от точки проекции этих фокусов на касательную до точки касания**  $\frac{d_1}{d_2} = \frac{t_1}{t_2}$ . (8)

### 3.5.2.5. Зеркальное отображение левого фокуса эллипса относительно касательной

Считая, как и предыдущих задачах, касательную зеркальной осью (см.рис.1), найдем **зеркальные координаты левого фокуса эллипса**  $F_{2z}$  используя (1.5.3.1.-6)

$$F_{2z} : \{x_z, y_z\} = F_z + M_1 \{x, y\}, \quad (1)$$

где

$$- F_z = \frac{2p\{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} - \text{зеркальные координаты правого фокуса (3.2.3.-1),}$$

$$- M_1 \{x, y\} \text{ частичное зеркальное преобразование (1.5.3.1.-4) } \{x, y\},$$

$$- M_1 = \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ -\sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix},$$

$$- \cos \theta = \frac{\cos \varphi + e}{s\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \varphi}{s\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad (\text{см.3.2.1-4})$$

$$- \{x, y\} = F_2 : p\left\{\frac{-2e}{1-e^2}, 0\right\} \text{ координаты (3.5.1.-4) левого фокуса.}$$

Вычислим элементы матрицы  $M_1$

$$\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = \frac{2\cos^2 \varphi + 4e \cos \varphi + 2e^2}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} - 1 = \frac{2\cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + e^2 - 1}{1 + 2e \cos \varphi + e^2},$$

$$\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = \frac{2\sin \varphi(\cos \varphi + e)}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} = \frac{2\cos \varphi \sin \varphi + 2e \sin \varphi}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}.$$

$$M_1 \{x, y\} = \begin{pmatrix} -\frac{2\cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + e^2 - 1}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} & -\frac{2\cos \varphi \sin \varphi + 2e \sin \varphi}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} \\ -\frac{2\cos \varphi \sin \varphi + 2e \sin \varphi}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} & \frac{2\cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + e^2 - 1}{1 + 2e \cos \varphi + e^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-2pe}{1-e^2} \\ 0 \end{pmatrix} =$$



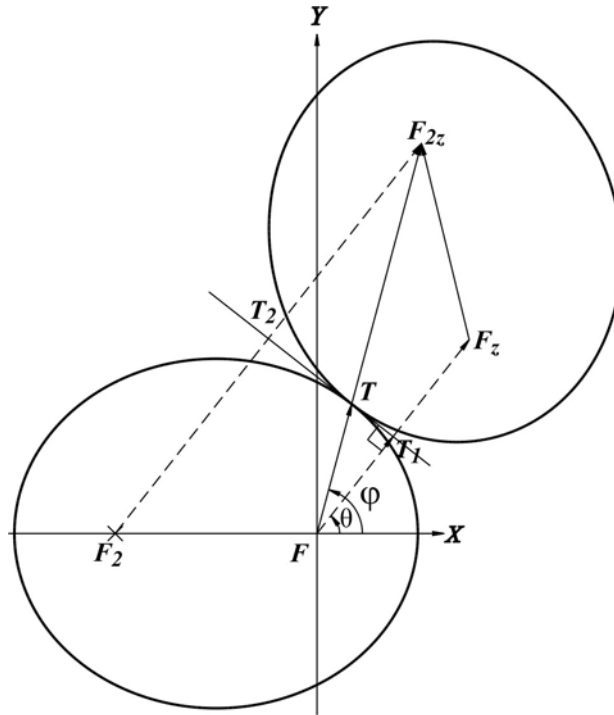


Рис. 1

$$= \frac{2pe}{(1-e^2)(1+2e\cos\varphi+e^2)} \{2\cos^2\varphi+2e\cos\varphi+e^2-1, 2\cos\varphi\sin\varphi+2e\sin\varphi\}. \quad (2)$$

Теперь почленно сложим эти координаты с зеркальными координатами

$$\begin{aligned} \text{правого фокуса } F_z \quad F_{2z} &= \frac{2p}{1+2e\cos\varphi+e^2} \left\{ \cos\varphi+e+\frac{e}{1-e^2} (2\cos^2\varphi+2e\cos\varphi+e^2-1, \right. \\ \sin\varphi+\frac{e}{1-e^2} (2\cos\varphi\sin\varphi+2e\sin\varphi) \} &= \frac{2p}{(1-e^2)(1+2e\cos\varphi+e^2)} \{ \cos\varphi+e-e^2\cos\varphi-e^3- \\ +2e\cos^2\varphi+2e^2\cos\varphi+e^3-e, \sin\varphi(1-e^2+2e\cos\varphi+2e^2) \} &= \frac{2p}{(1-e^2)(1+2e\cos\varphi+e^2)} \cdot \\ \cdot \{ \cos\varphi(1+2e\cos\varphi+e^2), \sin\varphi(1+2e\cos\varphi+e^2) \} &= \frac{2p}{1-e^2} \{ \cos\varphi, \sin\varphi \}. \end{aligned} \quad (3)$$

заметим (см. рис.1), что угол, под которым видна  $F_{2z}$ , и угол, под которым видна точка касания  $\frac{p\{\cos\varphi, \sin\varphi\}}{1+e\cos\varphi}$  совпадают, и эти углы равны  $\varphi$ . Отсюда можно

сделать вывод (транзитивность функции  $\text{ang}()$  (1.2.4.-3)): **зеркальный левый фокус эллипса лежит на одной прямой, проходящий через правый фокус и точку касания.** Кроме того, из (2) и теоремы Пифагора следует, что расстояние от

центра координат  $F$  до  $F_{2z}$  равно  $\frac{2p}{1-e^2}$  - сумме длин радиусов от фокусов (ср.

3.5.2.1.-1).

### 3.5.3. Оптические свойства касательной эллипса

**Теорема.** (Аполлоний III<sub>48</sub> [21, стр.103]). **Луч, выходящий из одного из фокусов и отражающийся от некоторой внутренней точки эллипса, попадает в другой фокус.** Докажем эту теорему.

Вариант 1. Сделаем дополнительные построения:

- проведем в данную точку (назовем ее  $T$  (см.рис.1)) касательную;
- опустим на нее перпендикуляры  $FT_1, F_2T_2$  из фокусов;
- соединим  $T$  с фокусами.

Математически необходимо доказать, что  $\angle FTT_1 = \angle F_2TT_2$ .

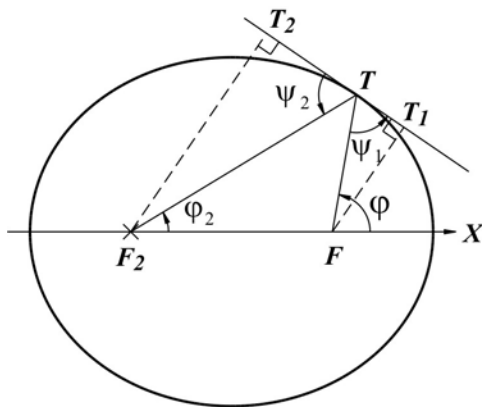


Рис. 1

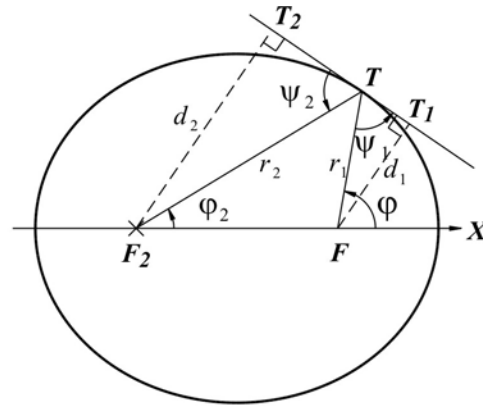


Рис. 2

Преобразуем цель доказательства. В том случае, если  $\Delta FTT_1 \sim \Delta F_2TT_2$ , то отсюда и будет следовать данное утверждение. В силу того, что по построению треугольники  $\Delta FTT_1$  и  $\Delta F_2TT_2$  прямоугольны, то для доказательства их подобия, например, достаточно доказать, что соответствующие отношения катетов у этих треугольников также равны  $\frac{FT_1}{T_1T} = \frac{F_2T_2}{T_2T}$  или в обозначениях данной работы

$\frac{d_1}{t_1} = \frac{d_2}{t_2}$ . Действительно, из (3.2.2.-1a), (3.2.2.-6), (3.5.2.4.-2), (3.5.2.4.-5) следует

$$\begin{aligned} & \frac{p}{\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}} \cdot \frac{(1+e\cos\varphi)\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{pe\sin\varphi} = \\ & = \frac{p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)} \cdot \frac{(1-e^2)(1+e\cos\varphi)}{pe\sin\varphi\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}. \end{aligned}$$

После сокращений в левой и в правой частях равенства, получим, что

$$\operatorname{tg} \varphi_{22} = \left| \frac{1 + e \cos \varphi}{e \sin \varphi} \right| = \operatorname{tg} \varphi_{11}, \quad (1)$$

$$\text{а также } \varphi_{22} = \varphi_{11} = \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{|e \sin \varphi|, 1 + e \cos \varphi\}). \quad (2)$$

(Абсолютные величины в (1) и (2) применяются потому, чтобы острые углы прямоугольного треугольника были меньше  $\frac{\pi}{2}$ , т.к.  $1 + e \cos \varphi > 0$ .)

*замечание.* Для углов распространения луча  $\varphi = 0, \pi$ , расположенных вдоль фокальной оси (кстати, проходящей через фокусы) и при которых  $\sin \varphi = 0$ , данное утверждение также справедливо. В самом деле, при этих полярных углах касательная  $\perp$  фокальной оси, откуда и следует равенство доказываемых углов. Рекомендуем читателю сделать чертеж и подробно разобрать этот частный случай.  $\square$

Вариант 2. Он аналогичен первому. Докажем (см.рис.2), что  $\sin \psi_1 = \sin \psi_2$  или  $\frac{d_1}{r_1} = \frac{d_2}{r_2}$ . Действительно, из (3.2.2.-1а), (3.1.1.-2) для правого фокуса и из (3.5.2.2.-1), (3.5.2.4.-1) для левого

$$\frac{(-p)}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} \cdot \frac{(1 + e \cos \varphi)}{p} = \frac{(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)}{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} \cdot \frac{-p\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}{(1 - e^2)}. \quad (3)$$

(Замечание, сделанное для 1-го варианта, актуально и для этого варианта.)  $\square$

Вариант 3. Заметим сначала, что координаты зеркального фокуса (3.2.3.-1)  $F_z = \frac{2p\{\cos \varphi + e, \sin \varphi\}}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}$  относительно касательной однозначно определяются выбранной точкой касания, а точка касания, в свою очередь, выбранным углом в полярном уравнении  $T: \frac{p\{\cos \varphi, \sin \varphi\}}{(1 + e \cos \varphi)}$ .

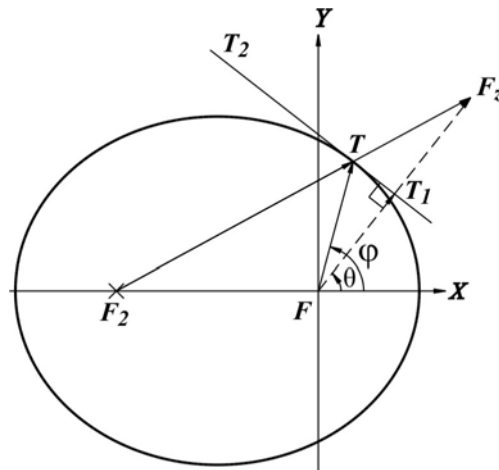


Рис. 3

Т.к. касательная  $TT_2$  (см. рис.3) является зеркальной осью симметрии, то внутри равнобедренного  $\Delta FTF_z$  кроме того она является и биссектрисой. Отсюда следует, что  $\angle FTT_1 = \angle F_zTT_1$ . С другой стороны,  $\angle T_1TF_z = \angle F_2TT_2$ , как вертикальные. Отсюда следует (из транзитивности отношения равенства)  $\angle FTT_1 = \angle F_2TT_2$ . □

Вариант 4. В выводах (3.5.2.5.) было отмечено, что **центр координат  $F$ , точка касания  $T$  и зеркальные координаты  $F_{2z}$  левого фокуса эллипса лежат на одной прямой** (см.рис.4). Отсюда следует, что **касательная является зеркальной осью симметрии**. Отсюда  $\angle FTT_1 = \angle T_2TF_{2z} = \angle F_2TT_2$ . □

Сейчас приступим к изучению графика геометрического места точек, описываемых фокусом эллипса, зеркально отраженного от касательной. В силу зеркальной симметрии (см.рис.5)  $|FT| = |F_zT|$ , сумма радиус-векторов  $|FT| + |F_2T| = 2a$  постоянна, следовательно данный график – окружность с

$$\text{радиусом } R = 2a = \frac{2p}{1-e^2}. \quad (4)$$

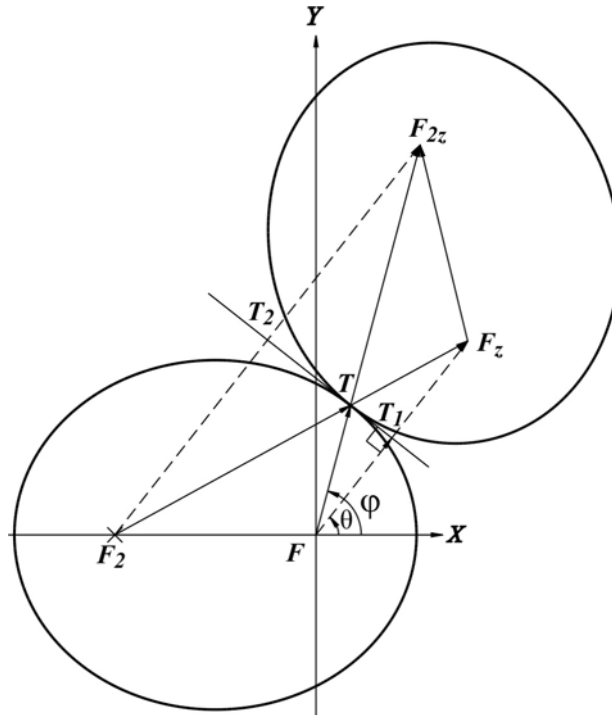


Рис. 4

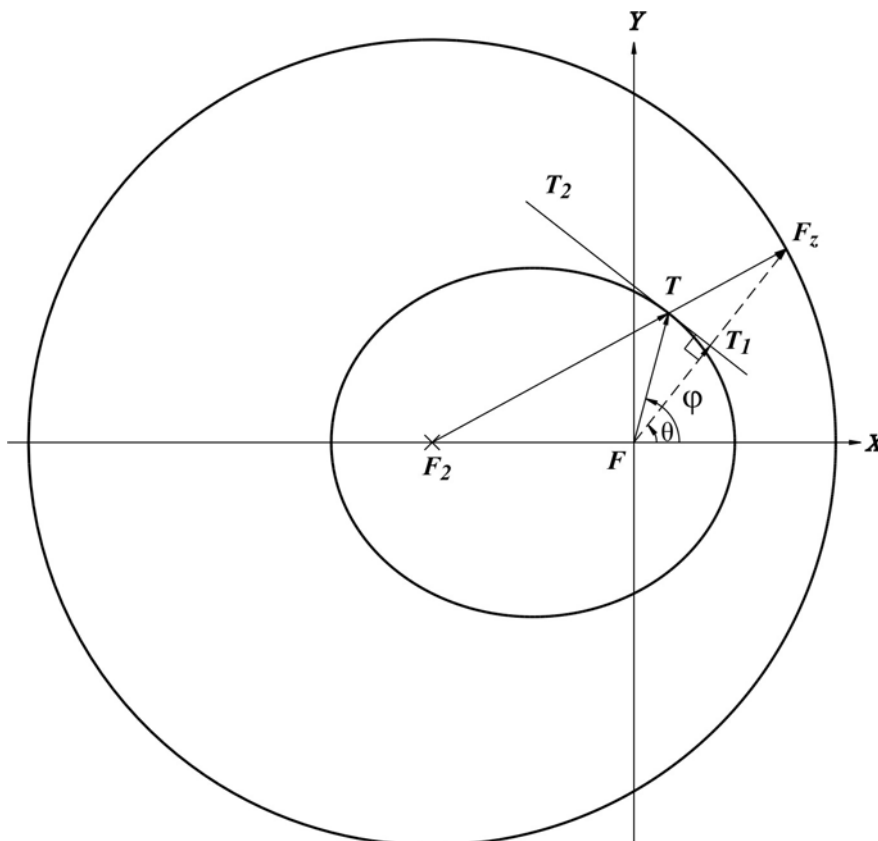


Рис. 5

Дадим еще одно доказательство этих формул. Для этого рассмотрим квадрат расстояния между левым фокусом и зеркальным фокусом.

$$d^2 = \left( \frac{2p(\cos \varphi + e)}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} + \frac{2pe}{1 - e^2} \right)^2 + \left( \frac{2p \sin \varphi}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} \right)^2 = \left( \frac{2p}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)(1 - e^2)} \right)^2 Q,$$

где  $Q = (\cos \varphi + e - e^2 \cos \varphi - e^3 + e + 2e^2 \cos \varphi + e^3)^2 + (1 - \cos^2 \varphi)(1 - e^2)^2 =$   
 $= (e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e)^2 + (1 - \cos^2 \varphi)(1 - 2e^2 + e^4) = e^4 \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 4e^2 + 2e^2 \cos^2 \varphi +$   
 $+ 4e^3 \cos \varphi + 4e \cos \varphi + e^4 - 2e^2 + 1 - e^4 \cos^2 \varphi + 2e^2 \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi = 1 + 4e^2 \cos \varphi + e^4 +$   
 $+ 4e \cos \varphi + 4e^3 \cos \varphi + 2e^2 = (1 + 2e \cos \varphi + e^2)^2$ . Отсюда  $d = \frac{2p}{1 - e^2} = 2a$ . (5)

Эта формула справедлива для любого направления полярного угла  $\varphi$ , а т.к.  $d = \text{const}$ , то имеем окружность радиуса  $d$ . (При выводе использованы координаты левого фокуса.)  $\square$

Вариант 5. Пусть вектор  $TN$ , проведенный из точки касания,  $\perp$  касательной. (В главе 7. определим этот вектор, как вектор нормали к кривой.) Доказать, что угол направления данного вектора совпадает с направлением биссектрисы  $\angle F_1 T F_2$

$$\text{ang}(\mathbf{T}, \mathbf{N}) = \frac{1}{2}(\text{ang}(\{\mathbf{T}, \mathbf{F}_1\}) + \text{ang}(\{\mathbf{T}, \mathbf{F}_2\})) \quad (6)$$

и вывести из этого оптическое свойство эллипса.

Вариант 6. Используя свойство биссектрисы (см. вариант 5), делящую противоположную сторону треугольника на части, пропорциональные прилежащим сторонам, доказать оптическое свойство эллипса.

Упражнение 1. Доказать, что точки  $F_2, T, F_1$  лежат на одной прямой.

Решение. Воспользуемся свойством транзитивности (1.2.4.-3) функции  $\text{ang}()$ .

В самом деле

$$\text{ang}(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) = \text{ang}\left(\left\{\frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}\right\}, \left\{\frac{2p(\cos \varphi + e)}{(1 + 2p \cos \varphi + e^2)}, \frac{2p \sin \varphi}{(1 + 2p \cos \varphi + e^2)}\right\}\right) =$$

$$= \text{ang}\left(\mathbf{0}, \frac{p}{(1 + 2 \cos \varphi + e^2)(1 + e \cos \varphi)} \{2(\cos \varphi + e)(1 + e \cos \varphi) - \cos \varphi(1 + 2e \cos \varphi + e^2),\right.$$

$$\left. 2 \sin \varphi(1 + e \cos \varphi) - \sin \varphi(1 + 2e \cos \varphi + e^2)\right) = \text{ang}\left(\mathbf{0}, \{2 \cos \varphi + 2e \cos^2 \varphi + 2e + 2e^2 \cos \varphi -\right.$$

$$\left. - \cos \varphi - 2e \cos^2 \varphi - e^2 \cos \varphi, \sin \varphi(2 + 2e \cos \varphi - 1 - 2e \cos \varphi - e^2)\right) =$$

$$= \text{ang}\left(\mathbf{0}, (\cos \varphi + e^2 \cos \varphi + 2e, (1 - e^2) \sin \varphi)\right). \quad (7)$$

Сравнивая (6) и угол (3.5.2.3.–1), заметим, что они равны. Следовательно, точки  $F_2, T, F_1$  лежат на одной прямой.  $\square$

На (рис.6.) показаны (сплошной линией) лучи, выходящие из точечного источника левого фокуса, отражающиеся от внутренней поверхности эллипса и собирающиеся в правом фокусе.

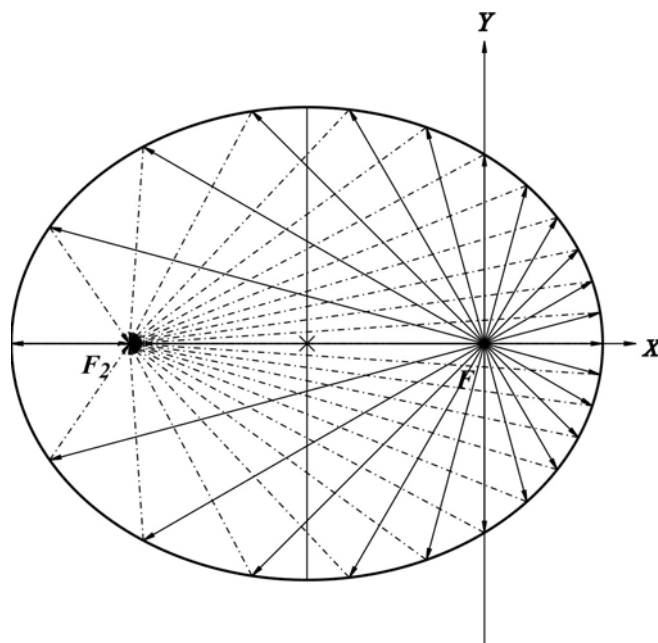


Рис. 6

#### Построение касательной к эллипсу с помощью циркуля и линейки, если известна точка касания

Используем для этого свойство (6). Соединяем точку касания с фокусами эллипса. В полученном угле строим биссектрису (нормаль). Продлеваем с помощью линейки биссектрису по обе точки стороны от точки касания. В точке касания восстанавливаем  $\perp$  к биссектрисе (нормали). Данный  $\perp$  и есть искомая касательная.

#### 3.5.4. Упражнения на свойства эллипса

упражнение 1. Доказать теорему Аполлония  $III_{45}$  [21, стр.101], [16, §127, упр.5]: отрезок любой касательной к эллипсу, заключенный между касательными, проведенными в концах большой оси, виден из любого фокуса под прямым углом (см. рис.1).

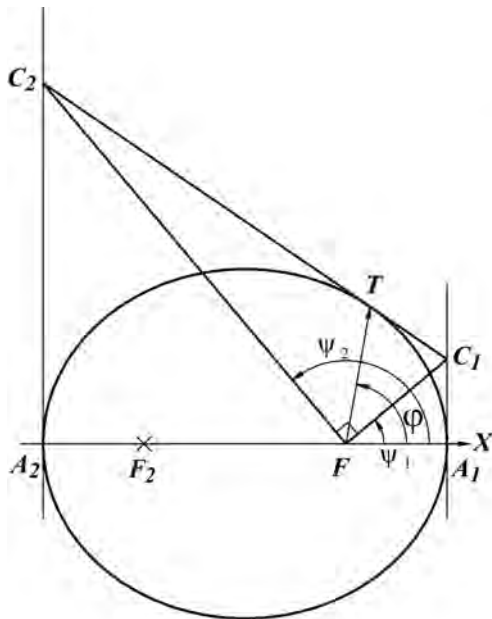


Рис. 1

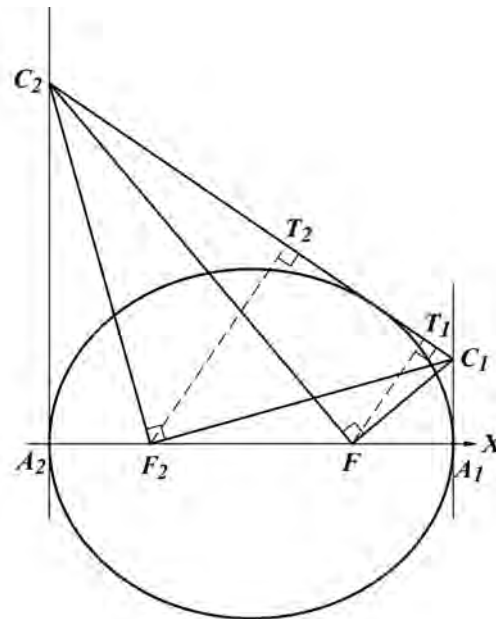


Рис. 2

Решение. Возьмем уравнение касательной (3.2.1.-2) в общем виде  $(\cos \varphi + e)x + \sin \varphi y - p = 0$ . Отсюда  $y = \frac{-(\cos \varphi + e)x + p}{\sin \varphi}$ . Т.к. вертикальные касательные выходят из (3.4.1.-1)  $A_1: \{\frac{p}{1+e}, 0\}$  и (3.5.1.-1)  $A_2: \{-\frac{p}{1-e}, 0\}$ , то их уравнения имеют соответственно вид  $x = \frac{p}{1+e}$  и  $x = \frac{-p}{1-e}$ . Найдем координаты точек пересечения

$$C_1: \left\{ \frac{p}{1+e}, \frac{-(\cos \varphi + e)\frac{p}{1+e} + p}{\sin \varphi} \right\} = \left\{ \frac{p}{1+e}, \frac{p}{1+e} \frac{(1 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \right\} = \frac{p}{1+e} \left\{ 1, \frac{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{p}{1+e} \left\{ 1, \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}} \right\},$$

$$C_2: \left\{ \frac{-p}{1-e}, \frac{-(\cos \varphi + e)\frac{-p}{1-e} + p}{\sin \varphi} \right\} = \left\{ \frac{-p}{1-e}, \frac{p}{1-e} \frac{(1 + \cos \varphi)}{\sin \varphi} \right\} = \frac{p}{1-e} \left\{ -1, \frac{2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}} \right\} =$$

$$= \frac{p}{1-e} \left\{ -1, \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right\}.$$



Сокращаем, соответственно, на положительные коэффициенты  $\frac{p}{1+e}$ ,  $\frac{p}{1-e}$  (1.2.1.-9), получаем углы из правого фокуса

$$\psi_1 = \text{ang}(F, C_1) = \text{ang}\left(\theta, \frac{p}{1+e} \left\{1, \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}\right\}\right) = \text{ang}\left(\theta, \left\{\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2}\right\}\right),$$

$$\psi_2 = \text{ang}(F, C_2) = \text{ang}\left(\theta, \frac{p}{1-e} \left\{-1, \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}\right\}\right) = \text{ang}\left(\theta, \left\{-\sin \frac{\varphi}{2}, \cos \frac{\varphi}{2}\right\}\right).$$

Из (1.2.1.-18) имеем  $|\psi_2 - \psi_1| = \frac{\pi}{2}$ . Решение из левого фокуса получается аналогично. (Читатель может, применяя теорему Пифагора, проверить доказательство, и сравнить оба этих метода.)□

Упражнение 2. Использовать условие предыдущего упражнения и найти стороны и площади прямоугольных треугольников из фокусов (см.рис.2). Указание. Площади треугольников найти 2-мя вариантами: как полу произведение катетов и как полу произведение основания  $C_1C_2$  на соответствующие высоты - расстояния из фокусов до касательной.

$$\text{Ответ. } |FC_1| = \frac{p}{(1+e)\left|\cos \frac{\varphi}{2}\right|}, \quad |FC_2| = \frac{p}{(1-e)\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|}, \quad |C_1C_2| = \frac{2p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)\left|\sin \varphi\right|},$$

$$S_{\Delta FC_1C_2} = \frac{p^2}{(1-e^2)\left|\sin \varphi\right|},$$

$$|F_2C_1| = \frac{p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)\left|\cos \frac{\varphi}{2}\right|}, \quad |F_2C_2| = \frac{p\sqrt{1+2e\cos\varphi+e^2}}{(1-e^2)\left|\sin \frac{\varphi}{2}\right|}, \quad S_{\Delta F_2C_1C_2} = \frac{p^2(1+2e\cos\varphi+e^2)}{(1-e^2)^2\left|\sin \varphi\right|}.$$

Упражнение 3. Найти условие, при котором длина фокуса  $f$  равна  $\frac{1}{4}$  большой оси эллипса.

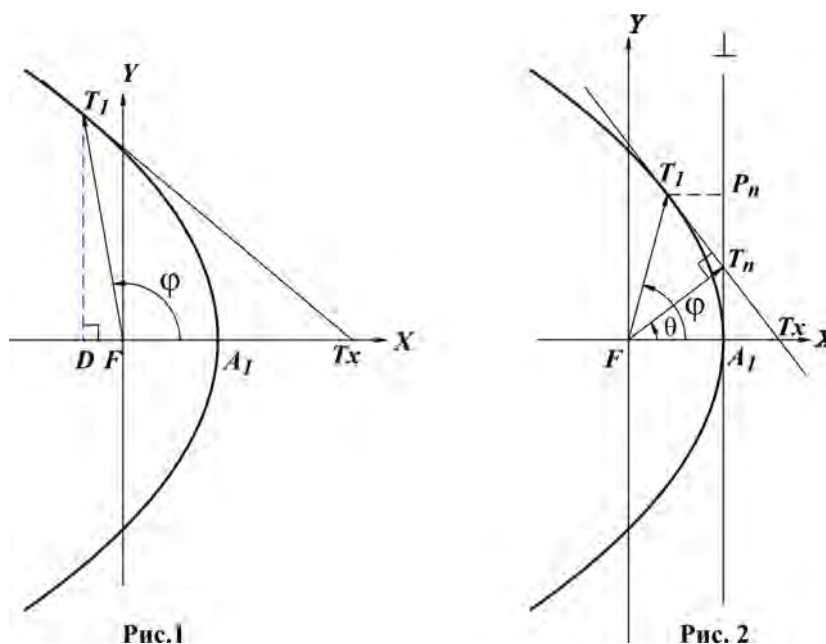
$$\text{Ответ. При } e = \frac{1}{2}.$$

Упражнение 4. Доказать, что длина малой полуоси эллипса всегда больше его фокусного расстояния.

### 3.6. Основные элементы и соотношения в параболе

Если имеем асимптотическое направление параболы  $\varphi = \pi$ ,  $\cos \pi = -1$ , то знаменатель радиус-вектора равен 0 и  $r = \infty$ . Поэтому этот вариант рассматривается только как направление, т.к. координаты в этом случае не определены.

#### 3.6.1. Свойство касательной параболы



известно [16,§123] следующее свойство касательной параболы: возьмем некоторую точку на параболе, построим в этой точке касательную и продолжим эту касательную до пересечения с полярной осью. При этом получим, что **расстояние от проекции этой точки на фокальную ось до вершины параболы равно расстоянию от этой вершины до точки пересечения касательной с фокальной осью.** Или  $|DA_1| = |A_1T_x|$  (рис.1.).

Доказательство. Учитывая, что для параболы  $e = 1$ ,  $f = \frac{P}{2}$ ,  $r = \frac{P}{1 + \cos \varphi}$ ,

получаем  $\frac{P \cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \frac{P}{2} = \frac{P}{2} - \frac{P}{1 + \cos \varphi}$  или  $\frac{\cos \varphi}{1 + \cos \varphi} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1 + \cos \varphi}$ ,

$$\frac{\cos \varphi - 1}{2(1 + \cos \varphi)} = \frac{\cos \varphi - 1}{2(1 + \cos \varphi)}. \quad \square$$

### Построение касательной к параболе с помощью циркуля и линейки, если известна точка касания

Используем для этого (рис. 1.). Опускаем  $\perp$  из точки касания на фокальную ось параболы. Откладываем двойное расстояние от основания  $\perp$  до вершины параболы в сторону вершины параболы. Соединяем полученную точку с точкой касания. Этот отрезок и есть часть искомой касательной.  $\square$

Рассмотри вопрос о геометрическом месте точек проекции фокуса параболы на касательную. Т.к. в системе координат Кеплера координаты фокуса равны  $\{0,0\}$ , то из (1.5.2.-9) остается только 1-е слагаемое

$$\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = P_L \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, \quad (*)$$

где из (3.2.1.-4) берем  $\cos \theta = \frac{\cos \varphi + e}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}$ ,  $\sin \theta = \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}$ ,

$$P_L = \frac{P}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (**)$$

Подставляем в (\*\*)  $e = 1$  и подставляем полученные переменные в (\*). После

несложных преобразований получим  $\begin{pmatrix} x_{\perp} \\ y_{\perp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{P}{2} \\ \frac{r \sin \varphi}{2} \end{pmatrix}$ , где  $r$  - радиус-вектор

некоторой точки параболы  $r = \frac{P}{1 + \cos \varphi}$ . Очевидно, что полученное геометрическое

место точек – прямая,  $\parallel$  оси ординат (см. рис.2).

Упражнение 1 (на повторение). Доказать (см. рис.2), что:

- 1)  $T_1T_n = T_nT_x$ , 2)  $P_nT_n = T_nA_1$ , 3)  $\varphi = 2\theta$ , 4)  $(T_nA_1)^2 = FA_1 \cdot A_1T_x$ .  
 5) При каком угле  $\varphi$   $FA_1 = A_1T_n = f$  ?

### 3.6.2. Оптические свойства касательной параболы

Для параболы геометрическое место точек зеркального отражения

фокуса от касательной (3.2.3.-1) 
$$F_z = \frac{2p}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} \left\{ \cos \varphi + e, \sin \varphi \right\} \Big|_{e=1} =$$
  

$$= p \left\{ 1, \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + 1} \right\}$$
 является прямой  $x = p$ ,  
 совпадающей с директрисой. (1)

Можно рассмотреть этот результат, как предельный переход расширения эллипса при стремлении абсциссы его левого фокуса к  $-\infty$ . При этом переходе получим окружность (ср. 3.5.3.-6) с бесконечным радиусом  $R = \lim_{e \rightarrow 1} \frac{2pe}{1-e^2} = \infty$ , которую интерпретируем как прямую.

Отметим также, что  $|FP| = |FR| = p$  (докажите!).

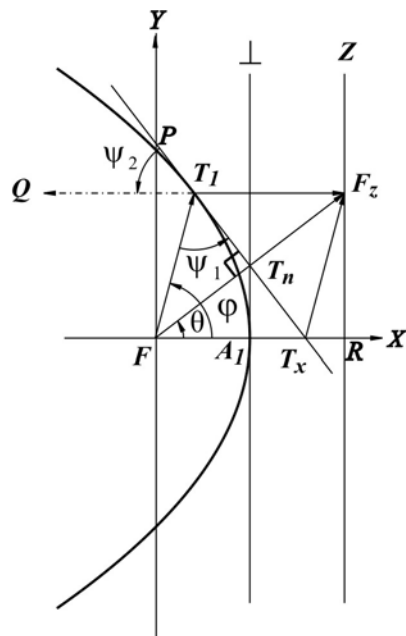


Рис. 1

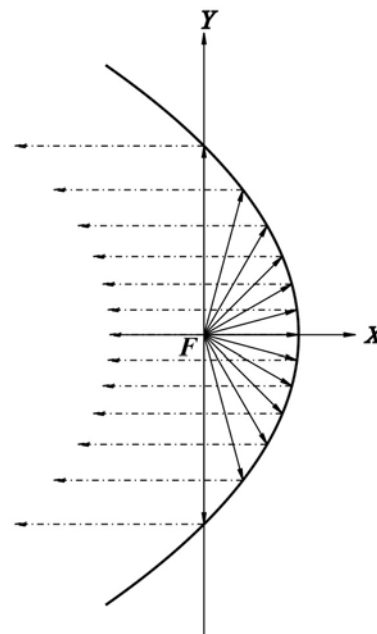


Рис. 2

Упражнение 1. Докажите (см.рис.1), что  $QT_1 \parallel FX$ .

Упражнение 2. Докажите, что  $\psi_1 = \psi_2$ .

Упражнение 3. Докажите, что  $FT_x F_z T_1$  - параллелограмм.

Упражнение 4. Докажите, что при  $\varphi = \frac{\pi}{2}$   $FT_x F_z T_1$  - квадрат.

Упражнение 5. Докажите, что касательные, построенные из концов фокальной хорды, взаимно  $\perp$  [16, §127, упр. 44].

Рассмотрим теперь (рис.2.). Если в фокус поместить точечный источник (пренебрежимо малых размеров по сравнению с  $p$ ), то лучи, отражаясь от параболического зеркала, двигаются далее  $\parallel$  фокальной оси  $III_{48}$  [21, стр.106].

И обратно,  $\parallel$  лучи, двигающиеся вдоль фокальной оси, отражаются от поверхности параболического зеркала и собираются в фокусе. На этом принципе построены рефракторные (отражательные телескопы). При этом предполагается, что световые лучи от очень далеких объектов идут  $\parallel$  друг другу<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Как гласит один из вариантов легенды, этот принцип использовал Архимед при защите своего родного города Сиракузы. Во время первой атаки римского флота греческие воины с отполированными до блеска щитами выстроились вдоль побережья и образовали, таким образом, огромное параболическое зеркало (параболоид). (Во время восхода Солнца – Сиракузы, корабли и Солнце оказываются приблизительно на одной линии.) Отраженные от Солнца лучи воины, по-видимому, направляли по очереди на римские корабли и, таким образом, сожгли римский флот.

(Греческий инженер Иоаннис Сакас в 1968 г. в Салониках успешно воспроизвел метод Архимеда – сжег деревянное судно [21, стр.15].) Римляне выбрали для следующей атаки ненастный день или приближались к острову значительно позже после восхода Солнца. Во время взятия Сиракуз Архимед погиб. Предание гласит, что римскому солдату, занесшему над Архимедом свой меч, Архимед воскликнул: “Не трогай моих чертежей!”

Могила Архимеда нашел Марк Тулий Цицерон (впоследствии самый выдающийся оратор Рима, а также (можно и здесь применить термин “выдающийся”) юрист, писатель, философ). Он отслужил свою службу в должности квестора в Сицилии, и возвращался в Рим. По дороге заехал в Сиракузы. Могила великого геометра заросла густым терновником (прошло полтора столетия), и Цицерон проявил большую настойчивость в поисках. В конце концов, они все-таки увенчались успехом благодаря чертежу на надгробном памятнике к одной из самых замечательных теорем Архимеда – теореме об объеме шара.

1. [Утченко С.Л. Цицерон и его время. М., «Мысль», 1973, с.390, стр.124-125]
2. [21, стр.15-16; стр.106-107]

### 3.7. Основные элементы гиперболы

#### 3.7.1. Особенности работы с полярным уравнением в обобщенной полярной системе координат - ОПСК

Напомним, как формируются координаты при использовании полярного уравнения в системе координат Кеплера  $\{x, y\} = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ . (1)

При этом заметим, что для эллипса радиус-вектор всегда  $r = \frac{P}{1 + e \cos \varphi} > 0$ , т.к.  $e < 1$  и  $1 > e \cos \varphi$ . Для параболы ( $e = 1$ ), за исключением асимптотического направления  $\varphi = \pi$ , этот вариант такой же  $\frac{P}{1 + \cos \varphi} > 0$ .

Для гиперболы ( $e > 1$ ) радиус-вектор  $r$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Значение 0 радиус-вектор не принимает – минимальное значение при  $\varphi = 0$   $r = \frac{P}{1 + e}$  (докажите!). При переходе от положительных значений к отрицательным происходит бесконечный разрыв. Подробно исследуем его в следующем разделе.

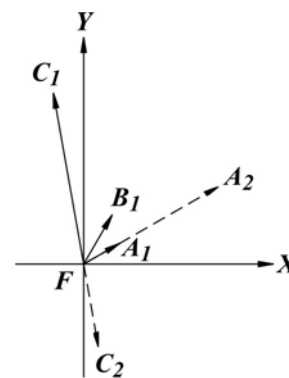


Рис. 1

Рассмотрим подстановку  $\varphi' \rightarrow \varphi + \pi$  и выясним, при каких случаях она сохраняет направление из фокуса  $F$  к некоторой точке, а при каких меняет его на противоположное. Так, компоненты в фигурных скобках, образующие числитель (1), при этом преобразовании всегда меняют знак на **противоположный**:  $\cos(\varphi + \pi) = \cos \varphi \cos \pi - \sin \varphi \sin \pi = -\cos \varphi$ ,  $\sin(\varphi + \pi) = \sin \varphi \cos \pi + \cos \varphi \sin \pi = -\sin \varphi$ .

Что касается радиус-вектора, то тут, как уже было сказано, все зависит от значения выражения знаменателя  $1 + e \cos \varphi$ . Если  $1 + e \cos \varphi' = -k(1 + \cos \varphi)$ ,  $k > 0$ , то направления, например  $FA_1, FA_2$  (см. рис.1) совпадают. Это происходит потому, что изменился знак знаменателя и одновременно с ним знаки у компонентов числителя:  $\cos \varphi, \sin \varphi$ .

Попутно заметим, что при таком преобразовании и смене знака у знаменателя с положительного на отрицательный, абсолютная величина радиус-

вектора увеличивается, а при смене знака с отрицательного на положительный - уменьшается. Предлагаем читателю рассмотреть это положение.

Если знак знаменателя при преобразовании не меняется, (а у числителя он меняется всегда), то преобразование  $\varphi' \rightarrow \varphi + \pi$  меняет направление за счет знака числителя на противоположное, например, (см. рис.1) у  $FC_1, FC_2$ .

Третий вариант имеем, когда знаменатель  $1 + e \cos \varphi' = 0$ . Это **направление является асимптотическим** и в этом разделе не рассматривается.

Назовем **полярный угол, который подставляется в аргумент тригонометрические функции (1) – исходным**, а **полярный угол, связанный с направлением радиус-вектора – видимый**. Видимый угол можно измерить по чертежу. Из сказанного выше, **исходный и видимый углы либо совпадают, либо отличаются на  $\pi$** . Для эллипса и параболы эти углы совпадают всегда.

### 3.7.2. Интервалы монотонности гиперболы

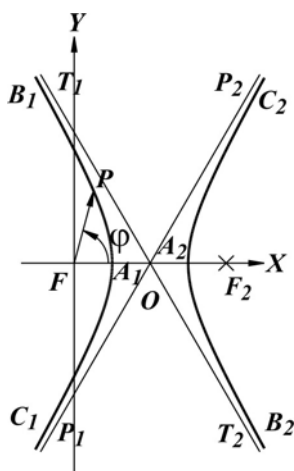


Рис.1

В тех случаях, когда знаменатель радиус-вектора  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$  равен нулю, график гиперболы, описываемый полярным уравнением, имеет бесконечный разрыв (или разрыв 2-го рода) [24, §69-§70]. Найдем **полярный угол, при котором происходит разрыв ветвей гиперболы**

$$1 + e \cos \varphi = 0, \quad (1)$$

$$\text{откуда } \cos \varphi = -\frac{1}{e}, \quad \varphi = \text{ang}(0, \{-\frac{1}{e}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}\}) = \text{ang}(0, \{-1, \pm \sqrt{e^2 - 1}\}).$$

(2)

Слагаемое  $2\pi k$  в данном случае опускаем, т.к. функция  $\text{ang}()$  принимает значения на интервале  $[0, 2\pi)$  и это слагаемое не дает новых решений.

(Приведем для сравнения классическое решение (с точки зрения тригонометрии)  $\varphi = \pm \arccos(-\frac{1}{e}) + 2k\pi, k = 0, 1$ . Т.к.  $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ , то

$$\varphi = \pm(\pi - \arccos \frac{1}{e}) + 2k\pi = \begin{cases} \pi - \arccos \frac{1}{e} + 2k\pi \\ -\pi + \arccos \frac{1}{e} + 2k\pi \end{cases} = \pi \pm \arccos \frac{1}{e}.$$

На этом этапе нормирующие члены  $2k\pi$  уже можно опустить, потому что  $e > 1$ ,  $0 < \frac{1}{e} < 1$ ,  $\arccos \frac{1}{e} < \frac{\pi}{2} < \pi$ . □)

Замечание 1. Обратим внимание, что полярный угол разрыва ветвей гиперболы не зависит от фокального параметра  $p$  (масштаба), а зависит только от степени сжатия - эксцентриситета  $e$ . Т.е. все гиперболы с данным эксцентриситетом подобны между собой.

Теперь рассмотрим, как строятся ветви гиперболы без нормирования углов - при изменении полярного угла от  $-\pi$  до  $\pi$  (см. рис.1). Введем для краткости

$\beta = \text{ang}(\theta, \{-1, \sqrt{e^2 - 1}\})$  (или  $\beta = \arccos \frac{1}{e}$ ) и малое положительное число  $\chi$ , чтобы

обойти точку разрыва. Тогда:

1)  $\varphi \in (-\beta + \chi, \beta - \chi)$  - левая ветвь гиперболы – дуга  $C_1A_1B_1$ ; (3)

2)  $\varphi \in (\beta + \chi, 2\pi - \beta - \chi)$  - правая ветвь гиперболы – дуга  $B_2A_2C_2$ . (4)

Нормируем интервал 1), чтобы убрать отрицательные углы, и получаем окончательно:

1)  $\varphi \in (2\pi - \beta + \chi, 2\pi + \beta - \chi)$  левая ветвь гиперболы – дуга  $C_1A_1B$ ;

2)  $\varphi \in (2\pi + \beta + \chi, 4\pi - \beta - \chi)$  - правая ветвь гиперболы – дуга  $B_2A_2C_2$ .

Замечание 2. Учитывая материал раздела (3.7.1.), обратим особое внимание на то, что для **левой ветви гиперболы**, работа с которой происходит в **нормальной полярной системе координат (НПСК)**, радиус-вектор положителен. Отсюда следует, что все исходные и видимые направления, а также связанные с ними полярные углы совпадают. С другой стороны, **при работе с правой ветвью гиперболы в обобщенной полярной системе координат (ОПСК)**, радиус-вектор становится **отрицательным**, поэтому исходные и видимые направления и связанные с ними углы отличаются друг от друга на  $\pi$ . Это важно помнить для задач, в которых направление получается из анализа чертежа.

Упражнение 1. Найти  $e$ , при котором  $\beta = \frac{2\pi}{3}$  ( $120^\circ$ ).



Решение. Из (1)  $e = -\frac{1}{\cos \varphi} = 2$ .

Упражнение 2. 1) Найти интервал полярных углов, при которых исходные и видимые углы радиус-векторов гиперболы отличаются на  $\pi$ .

2) Найти величину этого интервала.

Ответ. 1) Углы на правой ветви гиперболы  $\beta + \chi - \pi < \varphi < 2\pi - \beta - \chi$ , где  $\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \pm\sqrt{e^2 - 1}\})$ . (5)

2)  $\gamma = 2\pi - 2\beta$ . (6)

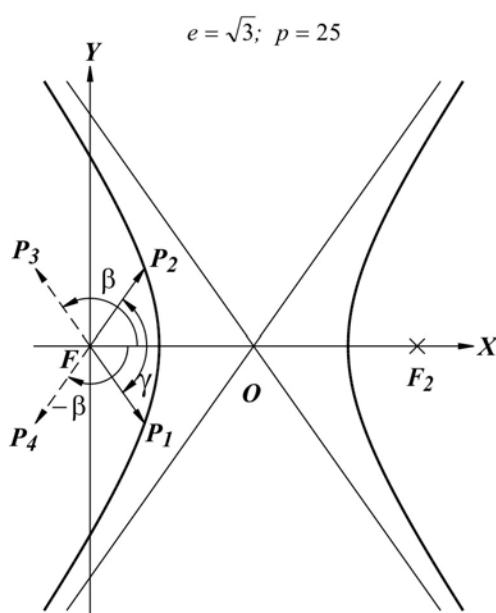


Рис. 2

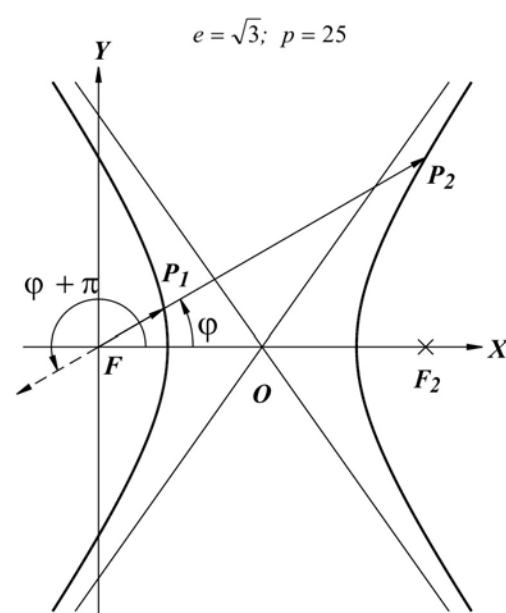


Рис. 3

На (рис.2) показано решение при  $e = \sqrt{3}$ . Тогда  $\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{2}\})$ .

Упражнение 3. Докажите, что расстояние от фокуса до правой ветви гиперболы  $L_{FR} = \frac{p}{e \cos \varphi_0 - 1}$ , (7)

где  $\varphi_0$  - видимый угол.

Упражнение 4. Пусть по направлению  $\varphi_0$  луч из фокуса пересекает обе ветви гиперболы. Найти расстояние между точками пересечения.

Решение. Заметим, что условию задачи удовлетворяют углы, найденные в упражнении 2. Кроме того, при этих углах  $e \cos \varphi_0 > 1$  (докажите!). Тогда

$$\frac{p}{|1 + e \cos(\varphi_0 + \pi)|} - \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0} = \frac{p}{e \cos \varphi_0 - 1} - \frac{p}{e \cos \varphi_0 + 1} = \frac{2p}{e^2 \cos^2 \varphi_0 - 1}. \quad (8)$$



или, принимая во внимание (2а), -  $\{ae, 0\}$ . (3б)

Далее, при изучении гиперболы, как правило, будем строить формулы типа  $f(e-1)$ , чтобы эксцентриситет стоял перед 1.

Сравним формулы (3.5.1.-3) для центра эллипса и (3) – для центра гиперболы. Так, начало системы координат у эллипса находится в правом фокусе (см.2.1 и 3.1) и эксцентриситет эллипса  $e < 1$ , поэтому центр эллипса -  $O$  находится левее своего начала координат, а значит, имеет отрицательную абсциссу. У гиперболы начало системы координат находится в левом фокусе и ее эксцентриситет  $e > 1$ , поэтому центр гиперболы расположен правее своего начала координат и имеет положительную абсциссу.

**Прямая, проведенная через центр гиперболы, перпендикулярная фокальной оси является вертикальной зеркальной осью симметрии (см.3.1.3.).**

#### **Координаты правого фокуса**

$$F_2 : \{A_{2x} + f, 0\} = \left\{ -\frac{p}{e-1} + \frac{p}{e+1}, 0 \right\} = p \left\{ \frac{e+1+e-1}{e^2-1}, 0 \right\} = p \left\{ \frac{2e}{e^2-1}, 0 \right\}. \quad (4)$$

В разделе ( 3.7.4. Асимптоты гиперболы.) продолжим изучение точек и элементов гиперболы.

Упражнение 1. Найти расстояние  $A_1O$  между центром симметрии гиперболы и ее левой вершиной.

$$\text{Ответ. } \frac{p}{e^2-1}. \quad (5)$$

Упражнение 2. Докажите, что **расстояние между вершинами гиперболы  $A_1A_2$  уменьшается при возрастании эксцентриситета.** Сравните эту зависимость с аналогичной у эллипса.

Упражнение 3. Найти **точки пересечения директрис и оси абсцисс.** Найти **уравнения директрис.**

$$\text{Ответ. } I_1 : \left\{ \frac{p}{e}, 0 \right\}, I_2 : \left\{ \frac{p(e^2+1)}{e(e^2-1)}, 0 \right\}. \quad (6)$$

$$\text{Левая директриса } x = \frac{p}{e}, \text{ правая директриса } x = \frac{p(e^2+1)}{e(e^2-1)}. \quad (7)$$

Упражнение 4. Найти **эксцентриситет**, при котором директрисы гиперболы делят действительную ось ( $A_1A_2$ ) на 4 равных части.

Решение. В силу вертикальной симметрии, достаточно рассмотреть левую директрису и расстояние  $A_1O$ . Найдем  $A_1I_1$ :  $\frac{P}{e} - \frac{P}{e+1} = \frac{P}{e(e+1)}$ . (8)

Найдем отношение  $A_1O : A_1I_1 = \frac{P}{e^2 - 1} : \frac{P}{e(e+1)} = \frac{e}{e-1}$ . Из уравнения  $\frac{e}{e-1} = 2$  получаем ответ  $e = 2$ . (9)

### 3.7.4. Асимптоты гиперболы

При стремлении  $\varphi \rightarrow \text{ang}(\theta, \{-1, \pm\sqrt{e^2 - 1}\})$  (см. 3.7.2), радиус-вектор терпит бесконечный разрыв и уходит на бесконечность. Докажем, что **координаты гиперболы уходя на бесконечность, беспредельно приближаются к прямой линии, называемой асимптотой**.

Выведем ее уравнение сначала в виде  $y = kx + k_0$ . Итак, бесконечно удаленная точка, к которой стремится гипербола и ее асимптота, видна из фокуса (центра координат) под углом  $\varphi = \text{ang}(\theta, \{-1, \pm\sqrt{e^2 - 1}\})$ . Под таким же углом эта точка видна из любой другой точки, находящейся на конечном расстоянии от фокуса. Следовательно, прямые, проведенные из этих точек к нашей бесконечно удаленной точке, будут  $\parallel$ , а их тангенсы углов наклона равны.

$$\begin{aligned} \text{Отсюда (см. 1.2.3.-1a)} \quad k &= \text{tg}(\varphi) = \text{tg}(\text{ang}(\theta, \{-1, \pm\sqrt{e^2 - 1}\})) = \frac{\pm\sqrt{e^2 - 1}}{-1} = \\ &= \mp\sqrt{e^2 - 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

В силу того, что **гипербола симметрична относительно оси абсцисс** (вертикальная симметрия), она обладает двумя асимптотами. Далее. С учетом горизонтальной симметрии, проходящей через центр симметрии -  $O : \{\frac{pe}{e^2 - 1}, 0\}$ , и тем свойством асимптоты, что она является наклонной линией к оси абсцисс, следует, что она должна проходить через центр симметрии гиперболы -  $O$ .

Действительно, для доказательства важно, что асимптот всего лишь 2. Т.к. гипербола симметрична относительно оси абсцисс, то точка пересечения ее асимптот лежит на оси абсцисс. Если бы это было не так, то было бы 2 точки

пересечения, симметрично расположенные относительно оси абсцисс, и как минимум 4 пересекающиеся прямые (по 2 на каждую точку пересечения).

Аналогично рассуждая по поводу вертикальной оси симметрии (порождающей горизонтальную симметрию), убеждаемся, что асимптоты проходят через центр симметрии гиперболы –  $O$ . (Ср. с директрисой, которая также построена с учетом данной симметрии, но не является наклонной).

$$\text{Отсюда } y = kx + k_0, \quad 0 = \mp \sqrt{e^2 - 1} \left( \frac{pe}{e^2 - 1} \right) + k_0, \quad k_0 = \pm \frac{pe\sqrt{e^2 - 1}}{e^2 - 1}. \quad (2)$$

$$\text{Собираем (1) и (2) в единое уравнение } y = \mp \sqrt{e^2 - 1} x \pm \frac{pe\sqrt{e^2 - 1}}{e^2 - 1}, \quad (3)$$

или **уравнение асимптот в общем виде**

$$\mp (e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} x - (e^2 - 1)y \pm pe(e^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (4)$$

Теперь найдем **нормальное уравнение асимптот**. Для этого вычислим **нормирующий коэффициент**

$s\sqrt{A^2 + B^2} = s\sqrt{(e^2 - 1)^3 + (e^2 - 1)^2} = s(e^2 - 1)\sqrt{e^2 - 1 + 1} = se(e^2 - 1)$ . Т.к. для гиперболы  $e > 1$ , то  $e(e^2 - 1) > 0$ . Учитывая, что в (3) перед свободным членом стоит знак  $\pm$  и предыдущее неравенство, получаем  $s\sqrt{A^2 + B^2} = \mp e(e^2 - 1)$ . Делим на это выражение все члены (4), получая

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} x + \frac{y}{e} - \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{e^2 - 1} &= 0 \\ \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} x - \frac{y}{e} - \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{e^2 - 1} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{или } \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} x \pm \frac{y}{e} - \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{e^2 - 1} = 0. \quad (5a)$$

Используя (5a), найдем **отклонение некоторой точки**

$P: \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \{ \cos \varphi, \sin \varphi \}$  **на дуге от асимптот**

$$q = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \cdot \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} \pm \frac{1}{e} \cdot \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{e^2 - 1} = \frac{p\sqrt{e^2 - 1}}{(1 + e \cos \varphi)e(e^2 - 1)} \cdot Q,$$

$$\text{где } Q = (e^2 - 1) \cos \varphi \pm \sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi - e(1 + e \cos \varphi). \quad (6)$$

Докажем теперь, что при  $\cos \varphi \rightarrow -\frac{1}{e}$ ,  $|q| \rightarrow 0$  (см.3.7.2.-2)

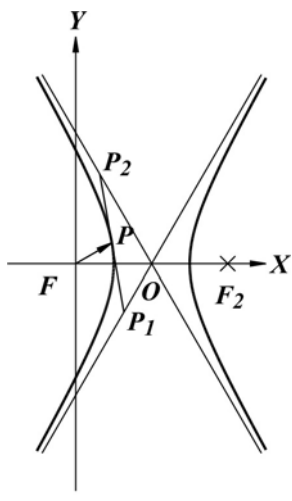
Будем для определенности исследовать случай (один из четырех) во втором квадранте, при котором  $\sin \varphi > 0$  и выбрана асимптота  $\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}x + \frac{y}{e} - \frac{p\sqrt{e^2-1}}{e^2-1} = 0$ .

$$\text{Тогда } q = \frac{p\sqrt{e^2-1}}{(1+e\cos\varphi)e(e^2-1)}((e^2-1)\cos\varphi + \sqrt{e^2-1}\sin\varphi - e(1+e\cos\varphi)). \quad (7)$$

При стремлении  $\cos \varphi \rightarrow -\frac{1}{e}$ ,  $\sin \varphi \rightarrow \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}$  возникает неопределенность типа  $\frac{0}{0}$ , т.к. не только знаменатель, но и числитель  $p\sqrt{e^2-1} \cdot (-\frac{e^2-1}{e} + \frac{e^2-1}{e}) = 0$ .

Применим правило Лопиталья (de L'Hospital G.F. 1661-1704).

«Подозрительный множитель» в знаменателе



$$(1+e\cos\varphi)' = -e\sin\varphi \Big|_{\sin\varphi = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}} = -e \cdot \frac{\sqrt{e^2-1}}{e} = -\sqrt{e^2-1} \neq 0.$$

Множитель числителя

$$((e^2-1)\cos\varphi + \sqrt{e^2-1}\sin\varphi - e(1+e\cos\varphi))' \Big|_{\sin\varphi = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}, \cos\varphi = -\frac{1}{e}}$$

$$= -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e} + \frac{\sqrt{e^2-1}}{e} = 0. \text{ Отсюда } q \rightarrow 0. \text{ Остальные 3 случая аналогичны. } \square$$

Рис. 1

Упражнение 1. Найти точки пересечения касательной, проведенной из некоторой точки гиперболы, с ее асимптотами (см. рис.1).

Решение. Запишем совместно систему уравнений асимптот (5а) и

$$\text{касательной (3.2.1.-2)} \begin{cases} \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}x \pm \frac{y}{e} - \frac{p\sqrt{e^2-1}}{e^2-1} = 0 \\ (\cos\varphi + e)x + \sin\varphi y - p = 0 \end{cases}. \quad (8)$$

Ищем решение в следующем виде

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{B_1 C_2 - B_2 C_1}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \frac{\pm \frac{(-p)}{e} \frac{\sin \varphi (-p\sqrt{e^2-1})}{e^2-1}}{\frac{\sqrt{e^2-1}}{e} \sin \varphi - \frac{(\cos \varphi + e)}{\pm e}} = \frac{p(\mp(e^2-1) + e\sqrt{e^2-1} \sin \varphi)}{(e^2-1)(\sqrt{e^2-1} \sin \varphi \mp (\cos \varphi + e))} = \\
&= \frac{p(\mp\sqrt{e^2-1} + e \sin \varphi)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)}, \\
y_{1,2} &= \frac{A_2 C_1 - A_1 C_2}{A_1 B_2 - A_2 B_1} = \frac{\frac{-(\cos \varphi + e)p\sqrt{e^2-1}}{e^2-1} - \frac{(-p)\sqrt{e^2-1}}{e}}{\frac{\sqrt{e^2-1}}{e} \sin \varphi - \frac{(\cos \varphi + e)}{\pm e}} = \\
&= \frac{p(-e(\cos \varphi + e) + e^2 - 1)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)} = \frac{-p(1 + e \cos \varphi)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)}. \tag{9}
\end{aligned}$$

Упражнение 2. Найти координаты вершин, длины сторон и площадь прямоугольника  $ABCD$  (см. рис.2,3,4), образованного касательными гиперболы.

Решение. Подставим в формулы (9) упражнения 1 углы  $\varphi = 0, \pi$ .

**Абсциссы**  $\left. \frac{p(\mp\sqrt{e^2-1} + e \sin \varphi)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)} \right|_{\varphi=0} = \frac{p}{e+1},$

$$\left. \frac{p(\mp\sqrt{e^2-1} + e \sin \varphi)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)} \right|_{\varphi=\pi} = \frac{p}{e-1}.$$

**Ординаты**

$$\left. \frac{-p(1 + e \cos \varphi)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)} \right|_{\varphi=0} = \frac{\pm p}{\sqrt{e^2-1}},$$

$$\left. \frac{-p(1 + e \cos \varphi)}{(e^2-1) \sin \varphi \mp \sqrt{e^2-1} (\cos \varphi + e)} \right|_{\varphi=\pi} = \frac{\mp p}{\sqrt{e^2-1}}. \text{ Из этих формул выбираем нужные}$$

компоненты  $A: \left\{ \frac{p}{(e+1)}, \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}} \right\}, B: \left\{ \frac{p}{(e-1)}, \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}} \right\}, C: \left\{ \frac{p}{(e-1)}, \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \right\},$

$$D: \left\{ \frac{p}{(e+1)}, \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} \right\}. \tag{12}$$

Вычислим **длины сторон**. Из (3.7.3.-2a) или из (12)

$$|BA| = \frac{p}{e-1} - \frac{p}{e+1} = \frac{2p}{e^2-1} = 2a. \tag{13}$$

**Отрезок  $O_1O_2$ , совпадающий с вертикальной осью симметрии, называют поперечной полуосью или мнимой осью гиперболы [18, стр.369]. Половину этого отрезка называют параметром  $b$ .**

$$\text{Отсюда } O_1O_2 = |BC| = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} - \frac{-p}{\sqrt{e^2-1}} = \frac{2p}{\sqrt{e^2-1}} = 2b, \quad (14)$$

$$b = \frac{p}{\sqrt{e^2-1}} = \frac{p\sqrt{e^2-1}}{e^2-1}. \quad (15)$$

$$\text{Площадь прямоугольника } S_{ABCD} = \frac{4p^2}{(e^2-1)^{\frac{3}{2}}} = 4ab. \square \quad (16)$$

Займемся соотношением между  $a$  и  $b$ . Из (13) и (15) следует  $b = a\sqrt{e^2-1}$ . (17)

Пусть  $k = \sqrt{e^2-1}$ , тогда  $b = ka$ . Очевидно, что при  $k < 1$ ,  $b < a$ , при  $k = 1$ ,  $b = a$ , при  $k > 1$ ,  $b > a$ . (18)

Рассмотрим подробнее **условие, при котором  $a = b$** . Получаем  $1 = \sqrt{e^2-1}$ ,  $e^2 = 2$ ,  $e = \sqrt{2}$  (отброшен отрицательный корень, т.к. всегда  $e > 0$ ). (19)

Очевидно, что **если  $e > \sqrt{2}$ , то гипербола «вытянута» вдоль оси ординат, если же  $e < \sqrt{2}$ , то она «сжата» вдоль этой оси** (20)  
(см. рис.2,3, 4).

Упражнение 4. 1) Доказать, что тангенсы угла наклона асимптот (1), выраженные через полуоси гиперболы  $a, b$  равны  $k = \mp \frac{b}{a}$  (ср.[18,§198,3]).)

2) Доказать, что **выражение  $\frac{b^2}{a} = p$  выполняется для гиперболы** [18,стр.390].

Доказательство. В самом деле, из (2а), (4) следует

$$\frac{(a\sqrt{e^2-1})^2}{a} = a(e^2-1) = \frac{p(e^2-1)}{e^2-1} = p. \quad (21)$$



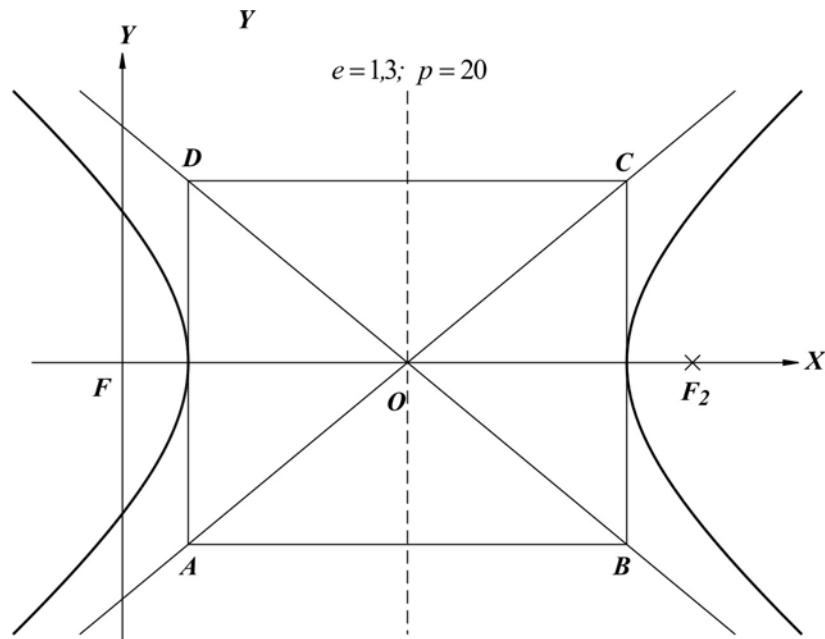


Рис. 2

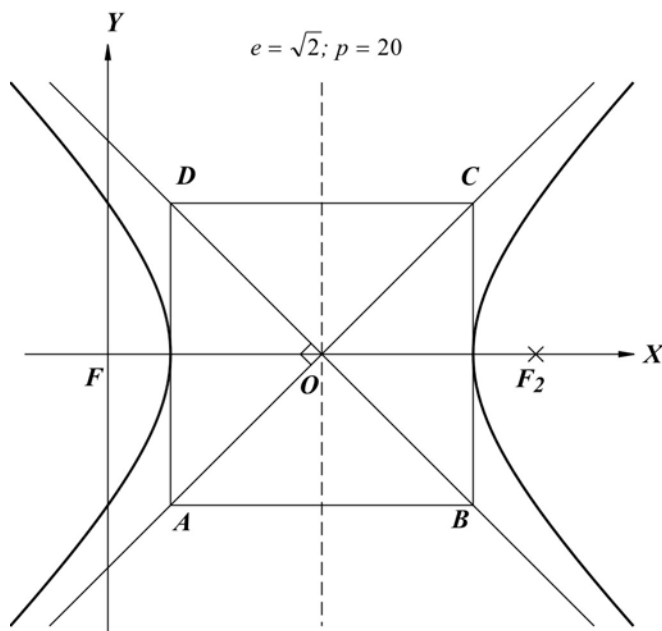


Рис. 3

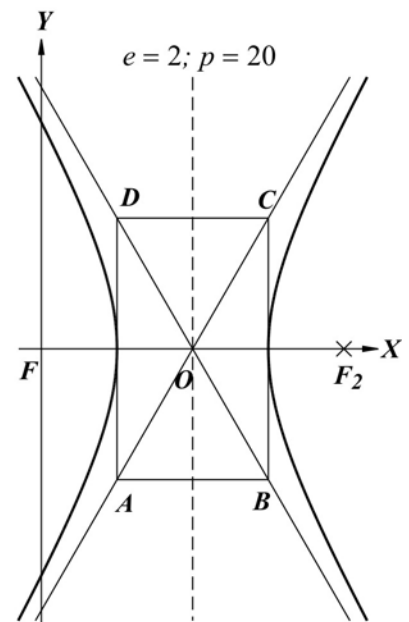


Рис. 4

Упражнение 5. Гипербола, у которой полуоси равны  $a = b$ , называется **равносторонней**. Докажите, что ее асимптоты перпендикулярны. И обратно, если асимптоты гиперболы перпендикулярны, то ее полуоси равны.

Доказательство. Докажем обратное выражение (см.рис.3). Напомним, что две прямые перпендикулярны, если их коэффициенты, представленные в общем виде, удовлетворяют соотношению  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$  (1.4.5.-6). Следовательно, из (5)

находим  $\frac{\sqrt{e^2-1}}{e} \cdot \frac{\sqrt{e^2-1}}{e} - \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e} = 0$ ,  $\frac{e^2-1}{e^2} - \frac{1}{e^2} = 0$ ,  $\frac{e^2-2}{e^2} = 0$ ,  $e = \sqrt{2}$ . Из (19) следует, что  $a = b$ .

Упражнение 6. Доказать, (см. упр.1), что **середина отрезка, отсекаемого асимптотами от касательной, является точкой касания.**

Доказательство. Нужно доказать, что  $\frac{1}{2}\{x_1 + x_2, y_1 + y_2\} = \frac{p\{\cos \varphi, \sin \varphi\}}{1 + e \cos \varphi}$ . Для

упрощения выкладок, выведем формулы преобразования для каждой координаты отдельно. Так, для оси абсцисс

$$\frac{p}{2} \left( \frac{a-b}{c-d} + \frac{a+b}{c+d} \right) = \frac{p}{2} \left( \frac{ac+ad-bc-bd+ac-ad+bc-bd}{c^2-d^2} \right) = p \left( \frac{ac-bd}{c^2-d^2} \right), \quad \text{где } a = e \sin \varphi,$$

$$b = \sqrt{e^2-1}, c = (e^2-1) \sin \varphi \quad \text{и} \quad d = \sqrt{e^2-1}(\cos \varphi + e). \quad \text{Тогда } \frac{1}{2}(x_1 + x_2) =$$

$$= p \frac{e \sin^2 \varphi (e^2-1) - (e^2-1)(\cos \varphi + e)}{(e^2-1)^2 \sin^2 \varphi - (e^2-1)(\cos \varphi + e)^2} = \frac{p(e - e \cos^2 \varphi - \cos \varphi - e)}{(1 - \cos^2 \varphi)(e^2-1) - (\cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + e^2)} =$$

$$= \frac{-p \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)}{e^2 - 1 - e^2 \cos^2 \varphi + \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi - 2e \cos \varphi - e^2} = \frac{-p \cos \varphi (1 + e \cos \varphi)}{-(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

$$\text{(Выражение } c^2 - d^2 = -(e^2-1)(1+e \cos \varphi)^2 \quad (22)$$

для нахождения знаменателя будет встречаться в этой работе и дальше).

Теперь, аналогично, для ординат  $\frac{p}{2} \left( \frac{f}{c-d} + \frac{f}{c+d} \right) = p \frac{fc}{c^2-d^2}$ , где  $c$  и  $d$  прежние, а

$$f = -(1 + e \cos \varphi). \quad \text{Отсюда } \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{-p(1 + e \cos \varphi)(e^2-1) \sin \varphi}{-(e^2-1)(1 + e \cos \varphi)^2} = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

Упражнение 7. Доказать (см. рис.1 и упр.1, 2), что **площадь треугольника между асимптотами и касательной равна произведению полуосей гиперболы.**

Доказательство. Нужно доказать, что  $S = ab = \frac{p}{e^2-1} \cdot \frac{p\sqrt{e^2-1}}{e^2-1} = \frac{p^2\sqrt{e^2-1}}{(e^2-1)^2}$ . Так

как площадь треугольника  $S = \frac{1}{2} |\det|$ , где  $\det = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ , то

$$S = \frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc|c} \frac{pe}{e^2-1} & 0 & 1 \\ \frac{p(-\sqrt{e^2-1}+e\sin\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi-\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & \frac{-p(1+\cos\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi-\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & 1 \\ \frac{p(\sqrt{e^2-1}+e\sin\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi+\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & \frac{-p(1+\cos\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi+\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & 1 \end{array} \right|$$

(здесь двойными вертикальными линиями обозначено абсолютное значение определителя).

Разложим определитель по элементам первой строки. Отсюда  $S = \frac{1}{2} \left| \frac{pe}{e^2-1} \det_1 + \det_2 \right|$ . Дальнейшее упрощение определителя будем производить вынесением общих множителей столбцов и строк за знак определителя. Кроме того, применим  $\frac{1}{c-d} - \frac{1}{c+d} = \frac{2d}{c^2-d^2}$  и (22)

$$\det_1 = \left| \begin{array}{cc|c} \frac{-p(1+\cos\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi-\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & 1 & \\ \frac{-p(1+\cos\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi+\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & 1 & \end{array} \right| = \frac{2p(1+e\cos\varphi)\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)}{(e^2-1)(1+e\cos\varphi)^2} =$$

$$= \frac{2p\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)}{(e^2-1)(1+e\cos\varphi)}.$$

Таким же образом найдем

$$\det_2 = \left| \begin{array}{cc|c} \frac{p(-\sqrt{e^2-1}+e\sin\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi-\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & \frac{-p(1+\cos\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi-\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & \\ \frac{p(\sqrt{e^2-1}+e\sin\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi+\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & \frac{-p(1+\cos\varphi)}{(e^2-1)\sin\varphi+\sqrt{e^2-1}(\cos\varphi+e)} & \end{array} \right| =$$

$$= \frac{-p^2(1+e\cos\varphi)}{-(e^2-1)(1+e\cos\varphi)^2} ((-\sqrt{e^2-1}+e\sin\varphi) - (\sqrt{e^2-1}+e\sin\varphi)) = \frac{-2p^2\sqrt{e^2-1}}{(e^2-1)(1+e\cos\varphi)}.$$

$$\text{Соберем все вместе } S = \frac{2p^2\sqrt{e^2-1}}{2(e^2-1)(1+e\cos\varphi)} \left| \frac{e(\cos\varphi+e)}{(e^2-1)} - 1 \right| = \frac{p^2\sqrt{e^2-1}}{(e^2-1)^2} = ab. \quad \square \quad (23)$$

Упражнение 8. Используйте (23) для вычисления площади прямоугольника  $ABCD$  (см.рис.2) и сравните полученный результат с (16).

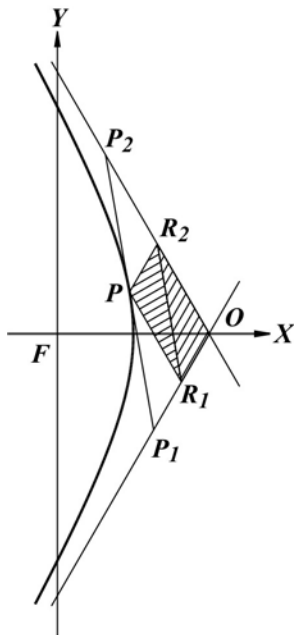


Рис. 5

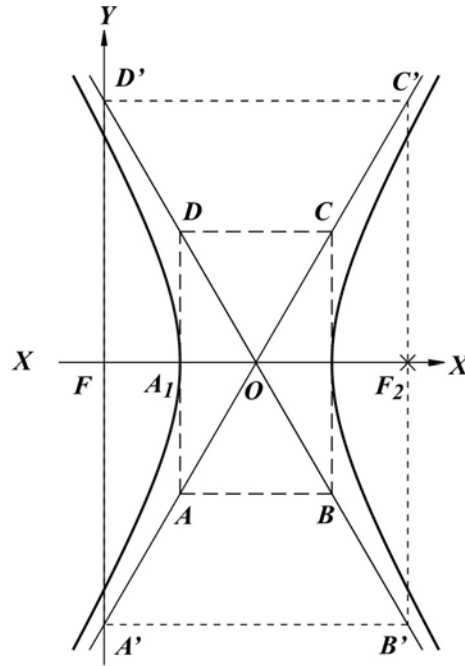


Рис. 6

Упражнение 9. Доказать, что **площадь параллелограмма, одна из вершин которого есть точка гиперболы, а две стороны параллелограмма лежат на асимптотах (см. рис.2), равна половине площади треугольника из упражнения 7.**

Указание. Используя свойства средней линии треугольника, докажите, что  $\Delta P_1OP_2$  состоит из 4-х равных треугольников, из которых 2 заштрихованы.

Упражнение 10. Найти координаты вершин, длины сторон и площадь прямоугольника  $A'B'C'D'$  (см. рис.6), образованного пересечением вертикалей, проведенных через фокусы, и асимптотами гиперболы.

Решение. Абсциссы  $A', B', C', D'$  известны – это соответствующие абсциссы фокусов эллипса. Найдем ординаты и другие элементы, зная решение упражнения 2 и воспользовавшись тем, что  $\Delta A'OD'$  подобен  $\Delta AOD$  (докажите это!). Найдем коэффициент подобия  $k = \frac{FO}{A_1O} = \frac{pe}{(e^2 - 1)} : \frac{p}{e^2 - 1} = e$ .

$$(24)$$

(см. 3.7.3.-3а), (3.7.3.-5). Отсюда  $A':\{0, \frac{-pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\}, B':\{\frac{2pe}{e^2 - 1}, \frac{-pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\},$

$$C':\{\frac{2pe}{e^2 - 1}, \frac{-pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\}, D':\{0, \frac{pe}{\sqrt{e^2 - 1}}\}. \quad (25)$$

Длины сторон (ср.13)

$$|B'A'| = k|BA| = \frac{pe}{e^2 - 1}, \quad |C'B'| = k|CB| = \frac{2pe}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (26)$$

$$\text{Площадь прямоугольника } S_{A'B'C'D'} = k^2 S_{ABCD} = \frac{4p^2 e^2}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}. \quad (27)$$

Упражнение 11. Выразить  $p, e, f$  и абсциссы точек  $O_x, F_2$  через полуоси гиперболы -  $a, b$ .

$$\text{Решение. Запишем (12) в виде системы уравнений } \begin{cases} \frac{p}{e^2 - 1} = a \\ \frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}} = b \end{cases}. \quad (28)$$

$$\text{Тогда } \frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}, \quad (29)$$

$$e^2 = \frac{b^2}{a^2} + 1, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \quad \text{и} \quad p = a\left(\frac{b^2}{a^2} + 1 - 1\right) = \frac{b^2}{a} \quad (\text{см. 21}), \quad (30)$$

$$O_x = ae = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad (31)$$

$$F_{2x} = 2ae = 2\sqrt{a^2 + b^2}, \quad (32)$$

$$f = O_x - a = \sqrt{a^2 + b^2} - a. \quad (33)$$

Дадим для справки параметр  $c$ , называемый еще линейным эксцентриситетом, который в отличие от просто эксцентриситета  $e$  [18, стр.369], имеет линейную размерность и равен  $c = ea$ . Учитывая (2а)  $c = \frac{pe}{e^2 - 1}$ . (34)

Упражнение 12. Найти **угол между асимптотами**. Указание. Из двух смежных углов взять тот, в который “вписана гипербола”.

$$\text{Решение. Обозначим искомый угол } \psi. \text{ Очевидно, что } \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{b}{a} = \operatorname{tg} \sqrt{e^2 - 1}. \quad (35)$$

$$\begin{aligned} \text{Отсюда следует (1.2.5.1.-3) } \psi &= 2\operatorname{ang}(0, \{1, \sqrt{e^2 - 1}\}) = \operatorname{ang}(0, \{1 - (\sqrt{e^2 - 1})^2, 2\sqrt{e^2 - 1}\}) = \\ &= \operatorname{ang}(0, \{2 - e^2, 2\sqrt{e^2 - 1}\}). \end{aligned} \quad (36)$$

$$\text{Проверим (36) для равнобочной гиперболы } \operatorname{ang}(0, \{2 - e^2, 2\sqrt{e^2 - 1}\}) \Big|_{e=\sqrt{2}} =$$

$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 2\}) = \frac{\pi}{2} (90^\circ)$ . Доказано, что асимптоты равнобочной гиперболы взаимно

$\perp$ . Такой же результат получен в упражнении 5.

Упражнение 13. Найти угол, на который поворачивается нормальный вектор касательной, пока гипербола находится в “угле между асимптотами” (см. предыдущее упражнение).

Решение. Угол, между осью абсцисс и нормальным вектором касательной (см. 3.2.1.-4)  $\theta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi + e, \sin \varphi\})$ . Полярный угол  $\varphi$ , присутствующий в формуле, изменяется между углами разрыва  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, -\sqrt{e^2 - 1}\})$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{e^2 - 1}\})$ . Найдем, используя (1.2.1.-9), (1.2.1.-16) между этими углами  $\Delta \theta$

$$\begin{aligned} \theta_2 - \theta_1 &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_2 + e, \sin \varphi_2\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_1 + e, \sin \varphi_1\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ \frac{-1}{\sqrt{1+e^2-1}} + e, \frac{\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{1+e^2-1}} \right\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1+e^2, -\sqrt{e^2-1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{e^2-1}, 1\}) - \\ &- \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{e^2-1}, -1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2-1-1, \sqrt{e^2-1} + \sqrt{e^2-1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2-2, 2\sqrt{e^2-1}\}). \end{aligned} \quad (37)$$

Сравнивая (37) и (36), получим геометрически очевидный результат: **угол поворота нормального вектора является дополнительным до  $\pi$  по отношению к углу между асимптотами.**

### 3.7.5. Преобразования между левым и правым фокусом гиперболы

При изучении этих преобразований, хотим обратить особое внимание читателя на разницу между работой в обобщенной и в нормальной полярной системе координат. Еще раз напомним суть отличия. **В нормальной полярной системе координат (НПСК) полярный угол и радиус-вектор направлены в одном направлении. В обобщенной полярной системе координат (ОПСК) радиус-вектор может быть отрицателен, и, в силу этого, полярный угол и радиус-вектор могут быть направлены в противоположные стороны.** Наличие такого явления, может существенно усложнить исследование.

### 3.7.5.1. Расстояние $d_2(\varphi)$ из правого фокуса гиперболы до некоторой точки на ней

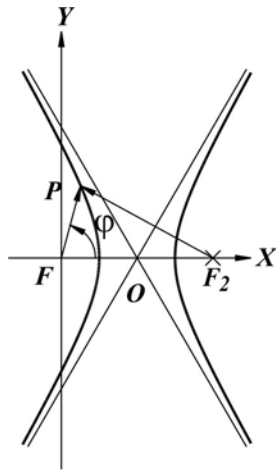


Рис.1

Возьмем некоторую произвольную точку  $P_1$  (см. рис.1), которая видна из левого фокуса под углом  $\varphi$ . Найдем ее радиус-вектор и декартовы координаты

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}, \quad x = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi}, \quad y = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}.$$

По теореме Пифагора найдем расстояние между  $P_1$  и правым фокусом (3.7.1.-4)  $F_2 : p\left\{-\frac{2e}{e^2 - 1}, 0\right\}$

$$|F_2 P_1| = d_2 = \sqrt{\left(\frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{2pe}{e^2 - 1}\right)^2 + \left(\frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi}\right)^2}. \quad (*)$$

Для краткости, продолжим далее преобразовывать только числитель (без множителя  $p$ ) подкоренного выражения

$$\begin{aligned} (e^2 \cos \varphi - \cos \varphi - 2e - 2e^2 \cos \varphi)^2 + (e^4 - 2e^2 + 1)(1 - \cos^2 \varphi) &= (\cos \varphi + e^2 \cos \varphi + 2e)^2 + \\ + (e^4 - 2e^2 + 1)(1 - \cos^2 \varphi) &= \cos^2 \varphi + e^4 \cos^2 \varphi + 4e^2 + 2e^2 \cos^2 \varphi + 4e \cos \varphi + 4e^3 \cos \varphi + \\ + e^4 - e^4 \cos^2 \varphi - 2e^2 + 2e^2 \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi &= 4e^2 \cos^2 \varphi + 4e(1 + e^2) \cos \varphi + (1 + e^2)^2 = \\ = (1 + 2e \cos \varphi + e^2)^2. \end{aligned} \quad \text{Отсюда (*) преобразуется в } d_2 = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{|(1 + e \cos \varphi)|(e^2 - 1)}. \quad (1)$$

(Под знаком абсолютной величины находится только выражение  $1 + e \cos \varphi$ . Остальные сомножители положительны. Действительно, т.к.  $e > 1$  и  $p > 0$  то  $e^2 - 1 > 0$  и  $\frac{1 + e^2}{2} > e \geq |e \cos \varphi|$ . (Ср. (1) с 3.5.2.1.-1)).

Выражение для радиус- вектора  $r_2(\varphi)$  из  $d_2(\varphi)$  будет найдено ниже.

**Упражнение 1. Признак принадлежности к ветви гиперболы.** Доказать, что расстояние от левого фокуса гиперболы до любой из ее точек на левой ветви меньше расстояния от той же точки до правого фокуса, и, соответственно, расстояние от любой точки на правой ветви до правого фокуса меньше, чем от той же точки до левого фокуса.

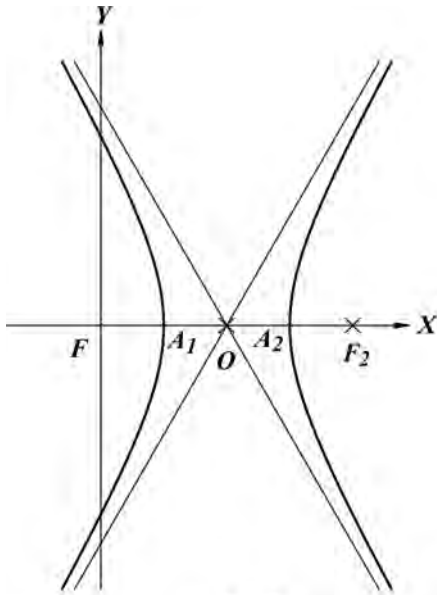


Рис.2

Доказательство. Рассмотрим ту часть доказательства, когда точка принадлежит левой ветви гиперболы. Расстояние от левого фокуса до этой точки  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$  и  $1 + e \cos \varphi > 0$ . Теперь исследуем (1). Видно, что  $d_2 = kr$ , где  $k = \frac{1 + 2e \cos \varphi + e^2}{e^2 - 1}$ . Покажем, что  $k > 1$ . Действительно, если  $1 + 2e \cos \varphi + e^2 > e^2 - 1$ , то  $2(1 + e \cos \varphi) > 0$ .  $\square$

Т.к. гипербола симметрична относительно вертикальной оси симметрии, то  $F_2A_2 = FA_1$  (см.рис.2). И, аналогично,  $F_2A_1 = FA_2$ . Проверим эти утверждения с помощью (1). (Для 1-го утверждения (равенства) берем  $\varphi = 0$ , а для 2-го -  $\varphi = \pi$ .)

$$F_2A_2 = \left| \frac{p(1-e)^2}{(1-e)(1-e^2)} \right| = \frac{p}{1+e} = FA_1, \quad F_2A_1 = \left| \frac{p(1+e)^2}{(1+e)(1-e^2)} \right| = \left| \frac{p}{1-e} \right| = FA_2. \quad (2)$$

### 3.7.5.2. Разность расстояний от фокусов до некоторой точки на ветви гиперболы

По одному из определений гиперболы [18,§197] или [16,§112], для всех точек на ее линии эта разность  $D$  постоянна и равна  $2a$ . Т.к. гипербола определена на основе полярного уравнения, а не данного определения, то проверим это определение как свойство, используя (3.2.-1), (3.7.5.1.-1), (3.7.3.-2a)

$$\begin{aligned} D &= |d_{FP_1} - d_{F_2P_1}| = \left| \frac{p}{|1 + e \cos \varphi|} - \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{|1 + e \cos \varphi|(e^2 - 1)} \right| = \frac{p|(e^2 - 1 - 1 - 2e \cos \varphi - e^2)|}{(e^2 - 1)|1 + e \cos \varphi|} \\ &= \frac{2p}{e^2 - 1} = 2a. \end{aligned} \quad (1)$$



### 3.7.5.3. Полярный угол $\varphi_2(\varphi)$ и длина радиус-вектора из правого фокуса гиперболы

В силу вертикальной симметрии, вычисление угла  $\varphi_2$  из правого фокуса будет аналогично вычислению угла  $\varphi$  из левого фокуса. Так, для точек на правой ветви гиперболы измеряемый непосредственно угол  $\varphi_2$  (НПСК) остается без изменения, для точек на левой ветви гиперболы (ОПСК) к углу  $\varphi_2$  добавляется слагаемое  $\pi$ . (Известно, что для полярного угла из левого фокуса все происходит с

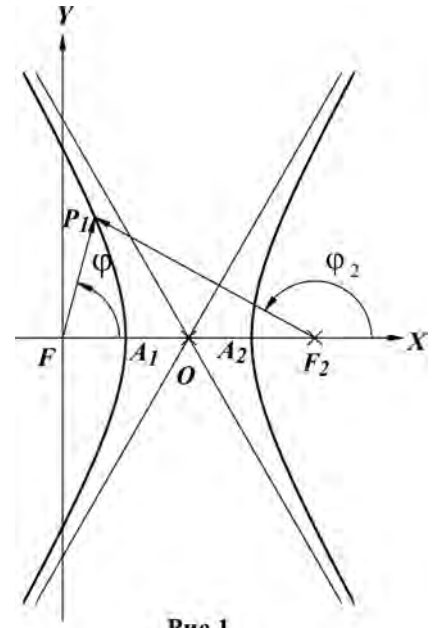


Рис.1

точностью до «наоборот»: для точек на левой ветви гиперболы угол  $\varphi$  (НПСК), измеряемый непосредственно, остается без изменения, для точек на правой ветви гиперболы к углу  $\varphi$  добавляется слагаемое  $\pi$  (ОПСК).) Как мы знаем из (1.2.1.-6), слагаемое  $\pi$  эквивалентно изменению знаков у 3-го и 4-го параметров неполной функции  $ang()$ . Т.к. знаки у систем «наблюдения» из разных полюсов на разных ветвях гиперболы получаются противоположные, то можно ввести соотношение между знаками  $s_2 = -s = -sign(1 + e \cos \varphi)$ , где  $s_2$  - знак у радиус-вектора из правого фокуса, а  $s$  - из левого.

Теперь, учитывая (3.7.3.-4), выразим угол  $\varphi_2$  через угол  $\varphi$

$$\begin{aligned} \varphi_2 &= ang\left(\left\{\frac{2pe}{e^2-1}, 0\right\}, \left\{\frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1+e \cos \varphi}\right\}\right) + \psi = \\ &= ang\left(\mathbf{0}, \left\{\frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi} - \frac{2pe}{e^2-1}, \frac{p \sin \varphi}{1+e \cos \varphi}\right\}\right) + \psi = \\ &= ang\left(\mathbf{0}, \frac{P}{(1+e \cos \varphi)(e^2-1)} \left\{(e^2-1) \cos \varphi - 2e(1+e \cos \varphi), (e^2-1) \sin \varphi\right\}\right) + \psi = \\ &= ang\left(\mathbf{0}, \frac{1}{(1+e \cos \varphi)} \left\{-(e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e), (e^2-1) \sin \varphi\right\}\right) + \psi, \quad \text{где } \psi \text{ - слагаемое} \end{aligned}$$

нормирования, которое принимает одно значение для каждой ветви, и отличается на  $\pi$  для другой ветви.

Рассмотрим теперь алгоритм вычисления слагаемого  $\psi$ . Т.к. для правой ветви из правого фокуса  $F_2$  углы вычисляются непосредственно, то, например,

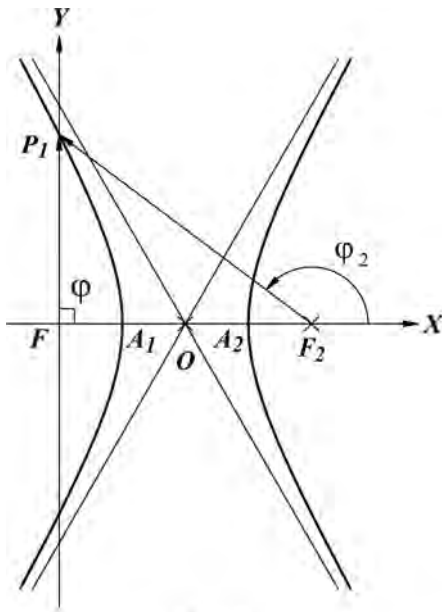


Рис. 2

для  $A_2$ ,  $\psi = \pi$ . Это справедливо для всех точек правой ветви гиперболы. Для точек левой ветви  $\psi = \pi + \pi = 2\pi \rightarrow 0$ . Ниже будет переведено данное слагаемое в соответствующие знаки 3-го и 4-го параметра функции  $ang()$ .

Т.к.  $e > 1$ ,  $p > 0$ , то общий множитель

$$\frac{p}{(e^2 - 1)} > 0 \text{ и, применяя (1.2.1.-9), его сокращаем.}$$

Что касается множителя  $1 + e \cos \varphi$ , то его можно представить в следующем виде

$$1 + e \cos \varphi = \frac{1 + e \cos \varphi}{|1 + e \cos \varphi|} \cdot |1 + e \cos \varphi| = s \cdot |1 + e \cos \varphi| =$$

$$-s_2 \cdot |1 + e \cos \varphi|, \text{ где}$$

$$s = \frac{1 + e \cos \varphi}{|1 + e \cos \varphi|} = \text{sign}(1 + e \cos \varphi) - \text{знак выражения } 1 + e \cos \varphi. \text{ Если же } 1 + e \cos \varphi = 0, \text{ то}$$

(3.7.2.-2) при этом угле  $\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \pm \sqrt{e^2 - 1}\})$  радиус-вектор терпит разрыв, и этот угол из рассмотрения исключаем (см.3.7.1). (Напомним: если берем точки на левой ветви гиперболы, то  $s_2 = -1$ ; на правой ветви -  $s_2 = 1$ , или  $s = -s_2$ ).

Окончательно получаем **полярный угол из правого фокуса, выраженный через угол из левого фокуса**

$$\varphi_2(\varphi) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{s(e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e), -s(e^2 - 1) \sin \varphi\}). \quad (1)$$

Используем (1.2.3.-2а). Т.к.  $s^2 = 1$ , то

$$\cos(\text{ang}(\mathbf{0}, \{a, b\})) = \frac{s \cdot a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad -\infty < a, b < +\infty. \quad (2)$$

Подставляем в (2)  $a = s(e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e)$ ,  $b = -s(e^2 - 1) \sin \varphi$ , откуда

$$\cos(\varphi_2) = \frac{s \cdot (e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e)}{\sqrt{((1 + e^2) \cos \varphi + 2e)^2 + (e^2 - 1)^2 \sin^2 \varphi}}. \quad (3)$$

Преобразуем отдельно выражение под корнем в знаменателе

$$\begin{aligned} ((1 + e^2) \cos \varphi + 2e)^2 + (e^2 - 1)^2 \sin^2 \varphi &= (1 + e^2)^2 \cos^2 \varphi + 4e(1 + e^2) \cos \varphi + 4e^2 + (e^4 - 2e^2 + 1) \cdot \\ &\cdot (1 - \cos^2 \varphi) = \cos^2 \varphi + 2e^2 \cos^2 \varphi + e^4 \cos^2 \varphi + 4e \cos \varphi + 4e^3 \cos \varphi + 4e^2 + e^4 - e^4 \cos^2 \varphi - 2e^2 + \\ &+ 2e^2 \cos^2 \varphi + 1 - \cos^2 \varphi = 1 + 4e^2 \cos^2 \varphi + e^4 + 4e \cos \varphi + 2e^2 + 4e^3 \cos \varphi = (1 + 2e \cos \varphi + e^2)^2. \end{aligned}$$

$$\text{Таким образом } \cos(\varphi_2) = \frac{s \cdot ((e^2 + 1) \cos \varphi + 2e)}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}. \quad (4)$$

Аналогично из (1.2.3.-3а)

$$\sin(\varphi_2) = \frac{-s \cdot (e^2 - 1) \sin \varphi}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}. \quad (5)$$

Упражнение 1. Найти  $\varphi_2(\varphi)$  для точек  $A_1, A_2, P_1$ .

Решение. Используем (1)

$A_1$  угол  $\varphi = 0, s = 1$ , отсюда

$$\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{(e^2 + 1 + 2e), 0\}) = 0,$$

$A_2$  угол  $\varphi = \pi, s = -1$ , отсюда

$$\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(-e^2 - 1 + 2e), 0\}) = \pi,$$

$P_1$ : угол  $\varphi = \frac{\pi}{2}, s = 1, \varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{2e, -(e^2 - 1)\}) > \pi. \square$

Сделаем выводы из наших преобразований. Переход к правому фокусу гиперболы ведет к следующим преобразованиям:

### 1) (полярные координаты)

- **полярный угол**  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, s(\varphi)\{e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e, -s(\varphi)(e^2 - 1) \sin \varphi\})$ ;

- **расстояние из правого фокуса до дуги**  $d_2(\varphi) = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(e^2 - 1)|1 + e \cos \varphi|}$ ;

### 2) (декартовы координаты)

-  $x_2 = x_1 + 2c = 0 + \frac{2pe}{e^2 - 1}, y_2 = y_1$ ;

### 3) тригонометрические функции

-  $\cos \varphi_2 = \frac{s \cdot ((e^2 + 1) \cos \varphi + 2e)}{e^2 + 2e \cos \varphi + 1}, \sin \varphi_2 = \frac{-s \cdot (e^2 - 1) \sin \varphi}{e^2 + 2e \cos \varphi + 1}. \square$

Упражнение 1. Доказать, что при переходе от правого фокуса к левому нужно сделать следующие преобразования:

### 1) (полярные координаты)

- **полярный угол**  $\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, s_2 \cdot \{-(e^2 + 1) \cos \varphi_2 - 2e, \sin \varphi_2 (e^2 - 1)\})$ , где  $s_2(\varphi_2) = \text{sign}(1 - e \cos \varphi_2)$ ;

- **расстояние из правого фокуса до дуги:**  $d_2(\varphi) = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi_2 + e^2)}{(e^2 - 1)|1 - e \cos \varphi_2|}$ ;

2) (декартовы координаты)

$$- x = x_2 - 2c = 0 + \frac{2pe}{e^2 - 1}, y_1 = y_2;$$

3) тригонометрические функции

$$- \cos \varphi = \frac{s_2 \cdot ((e^2 + 1) \cos \varphi_2 - 2e)}{e^2 - 2e \cos \varphi_2 + 1}, \sin \varphi = \frac{-s_2 \cdot (e^2 - 1) \sin \varphi_2}{e^2 - 2e \cos \varphi_2 + 1}. \square$$

В [16, §125, 2] приведено, что радиус-вектор из правого фокуса до дуги выражен так  $r_2(\varphi_2) = \frac{P}{1 - e \cos \varphi_2}$ . (2)

Как и в случае с эллипсом, докажем (2).

$$\text{Подставим } \cos(\varphi_2) \text{ в (2), получая } r_2 = \frac{P}{1 - e \frac{s \cdot ((1 + e^2) \cos \varphi + 2e)}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}.$$

Преобразуем дробь из 3-х этажной в 2-х этажную и сделаем вывод для каждой из ветвей гиперболы отдельно. Так, для левой ветви гиперболы, где  $s = 1$

$$r_2 = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{1 + 2e \cos \varphi + e^2 - e(e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e)} = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)}. \quad (3)$$

Для правой ветви ( $s = -1$ )

$$r_2 = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{1 + 2e \cos \varphi + e^2 + e(e^2 \cos \varphi + \cos \varphi + 2e)} = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{1 + 3e \cos \varphi + e^3 \cos \varphi + 3e^2}. \quad (3a)$$

Рассмотрим, сначала, точки  $A_1, A_2$  (рис.2). Применяем (3) для  $A_1$ :

$$\varphi_2 = 0, \varphi = 0 \quad r_2 = \frac{P}{1 - e}. \text{ Для } A_2 \text{ (правая ветвь (3a)) } \varphi_2 = \pi, \varphi = \pi, \quad r_2 = \frac{P}{1 + e}.$$

Получены те же результаты, что и с учетом симметрии (3.7.5.1.-2), а также при вычислении координат точек в (3.7.3.).

Теперь проверим выведенную формулу, например, для  $P_1$ , расположенной относительно левого фокуса под углом  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  (см. рис.2). Для этого угла

$$\cos \varphi = 0, \sin \varphi = 1 \text{ и } P_1: \frac{p\{\cos \varphi, \sin \varphi\}}{1 + e \cos \varphi} = \{0, p\}. \quad (***)$$

$$\text{Отсюда } \varphi_2 = \text{ang}(\{\frac{2pe}{e^2 - 1}, 0\}, \{0, p\}) = \text{ang}(0, \{\frac{-2e}{e^2 - 1}, 1\});$$

(С учетом того, что  $P_1$  находится на левой ветви гиперболы, добавляется для угла слагаемое  $\pi$  или меняются знаки у 3-го и 4-го параметров  $ang()$ , поэтому

$$\varphi_2 = ang(\theta, \{\frac{2e}{e^2-1}, -1\}).$$

$$\cos \varphi_2 = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\frac{2e}{e^2-1}}{\sqrt{\frac{4e^2}{(e^2-1)^2}+1}} = \frac{2e}{\sqrt{(1+2e^2+e^4)}} = \frac{2e}{e^2+1};$$

$$\sin \varphi_2 = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-1}{\frac{(1+e^2)}{(e^2-1)}} = \frac{1-e^2}{1+e^2};$$

$$r_2 = \frac{p}{1-e\frac{2e}{1+e^2}} = \frac{p(1+e^2)}{1+e^2-2e^2} = \frac{p(1+e^2)}{1-e^2};$$

$$x = 2c + r_2 \cos \varphi_2 = \frac{2pe}{e^2-1} + \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \cdot \frac{2e}{e^2+1} = 0;$$

$$y = r_2 \sin \varphi_2 = \frac{p(1+e^2)}{1-e^2} \cdot \frac{1-e^2}{1+e^2} = p. \text{ Результат совпадает с (***)}.\square$$

### 3.7.6. Оптические свойства касательной гиперболы

**Теорема.** (Аполлоний III<sub>48</sub> [21,103].) **Касательная к гиперболе в произвольной ее точке является биссектрисой угла, вершина которого находится в точке касания, а стороны образованы радиус-векторами из фокусов.** Другими словами, нужно доказать (см.рис.1), что  $\angle FTT_x = \angle F_2TT_x$ .

#### 1<sup>o</sup> вариант

При доказательстве воспользуемся свойством биссектрисы внутреннего угла треугольника, делящую противоположную сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Необходимо доказать, что

$$\frac{FT}{F_2T} = \frac{FT_x}{F_2T_x}, \quad (1)$$

**а левый и правый фокусы расположены по разные стороны от касательной.** При этом известны (см. (3.2.1.–10)) координаты точки пересечения

касательной с осью абсцисс  $T_x : \left\{ \frac{p}{\cos \varphi + e}, 0 \right\}$ . Учитывая (3.7.3.-4), что  $F_2 : \left\{ \frac{2pe}{e^2 - 1}, 0 \right\}$ ,

найдем

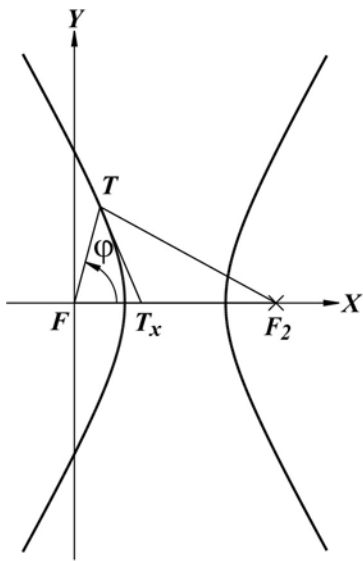


Рис. 1

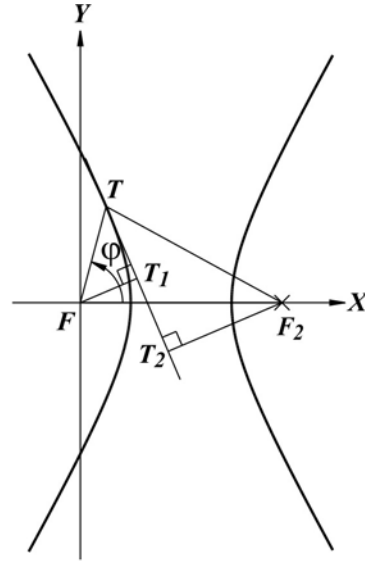


Рис. 2

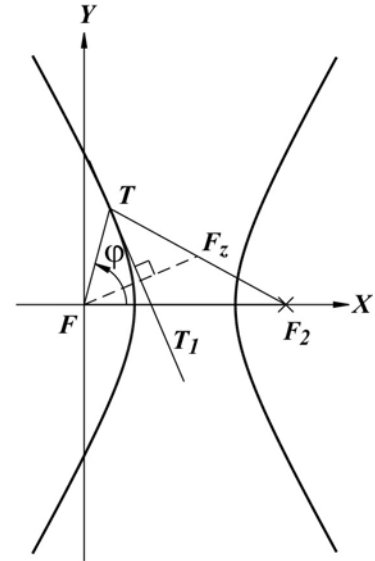


Рис. 3

$$\frac{2pe}{e^2 - 1} - \frac{p}{\cos \varphi + e} = \frac{p(2e(\cos \varphi + e) - (e^2 - 1))}{(e^2 - 1)(\cos \varphi + e)} = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(e^2 - 1)(\cos \varphi + e)}. \quad (2)$$

Теперь докажем (1). Т.к. (3.7.5.1.-1), то

$$\frac{FT}{F_2T} = \frac{\frac{p}{1 + e \cos \varphi}}{\frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \varphi)}} = \frac{(e^2 - 1)}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}, \quad \frac{FT_x}{F_2T_x} = \frac{\frac{p}{\cos \varphi + e}}{\frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(e^2 - 1)(\cos \varphi + e)}} = \frac{e^2 - 1}{1 + 2e \cos \varphi + e^2}.$$

Нам осталось доказать, что **фокусы гиперболы лежат по разные стороны от касательной**. Для этого найдем отклонения касательной от фокусов: подставим координаты фокусов в уравнение касательной в нормальной форме

$$(3.2.1.-3a) \quad \frac{(\cos \varphi + e)x + \sin \varphi y - p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} = 0 \text{ и сравним их знаки. Реализуем этот план}$$

$$q_F = \frac{-p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}, \quad (3)$$

$$q_{F_2} = \frac{(\cos \varphi + e) \frac{2pe}{e^2 - 1} - p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(e^2 - 1)\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} = \frac{p\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}{(e^2 - 1)}. \quad (4)$$

Убеждаемся, что знаки отклонений разные. Отсюда следует, что фокусы лежат по

разные стороны от касательной  $TT_x$ , что доказывает, что **эта касательная является биссектрисой внутреннего угла  $\Delta FTF_2$** .□

### 2° вариант

Выше получены формулы отклонений фокусов от касательной (3) и (4), но использовали из этих формул только знаки. Теперь, сравнивая абсолютные значения отклонений, можно доказать подобие прямоугольных треугольников  $\Delta FT_1T \sim \Delta F_2T_2T$  (см. рис. 2). Предоставляем завершить этот вариант читателю.□

### 3° вариант

*План доказательства.* Отобразим зеркально (3.2.3.-1) левый фокус  $F \rightarrow F_z$  относительно касательной  $TT_1$  и найдем угол, под которым  $F_z$  виден из точки касания  $T$  (см. рис.3).

*Замечание.* Мы уже решали подобную задачу для эллипса (см. 3.5.3. вариант 3), однако для гиперболы есть небольшое отличие – нельзя сократить на множитель  $\frac{1}{1+e \cos \varphi}$  внутри функции  $ang()$ , т.к. не известен его знак.

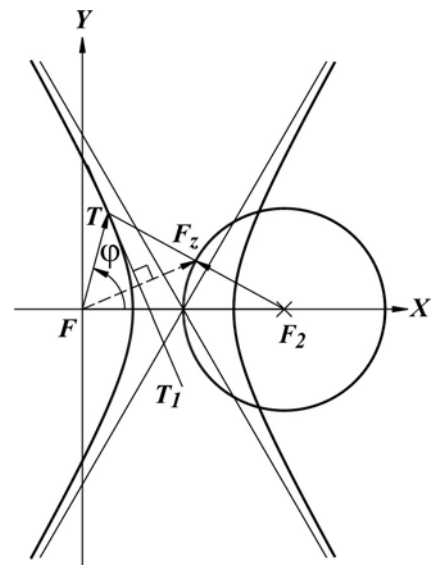


Рис. 4

Продолжим. Найдем из той же точки касания  $T$  второй угол, под которым виден правый фокус гиперболы  $F_2$ . Если окажется, что эти два угла равны, то в силу транзитивности (1.2.4.) функции  $ang()$ , следующие точки: точка касания  $T$ , левый зеркальный фокус  $F_z$  и правый фокус  $F_2$  лежат на одной прямой. Отсюда следует, что **касательная является зеркальной осью симметрии и одновременно биссектрисой  $\angle FTF_z$** . Реализуем этот план.

$$\begin{aligned}
 ang(T, F_z) &= ang\left(\left\{\frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1+e \cos \varphi}\right\}, \left\{\frac{2p(\cos \varphi + e)}{(1+2p \cos \varphi + e^2)}, \frac{2p \sin \varphi}{(1+2p \cos \varphi + e^2)}\right\}\right) = \\
 &= ang\left(\mathbf{0}, \frac{p}{(1+2 \cos \varphi + e^2)(1+e \cos \varphi)} \{2(\cos \varphi + e)(1+e \cos \varphi) - \cos \varphi(1+2e \cos \varphi + e^2),\right. \\
 &\quad \left.2 \sin \varphi(1+e \cos \varphi) - \sin \varphi(1+2e \cos \varphi + e^2)\right\}) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \frac{1}{1+e \cos \varphi} \{2 \cos \varphi + 2e \cos^2 \varphi + 2e + 2e^2 \cos \varphi - \cos \varphi - 2e \cos^2 \varphi - e^2 \cos \varphi, \\
&\sin \varphi(2 + 2e \cos \varphi - 1 - 2e \cos \varphi - e^2)\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \frac{1}{1+e \cos \varphi} \{(e^2 + 1) \cos \varphi + 2e, \sin \varphi(1 - e^2)\}). \\
&\text{ang}(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2) = \text{ang}(\{\frac{p \cos \varphi}{1+e \cos \varphi}, \frac{p \sin \varphi}{1+e \cos \varphi}\}, \{\frac{2pe}{e^2 - 1}, 0\}) = \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \frac{P}{(1+e \cos \varphi)(e^2 - 1)} \{2e(1+e \cos \varphi) - (e^2 - 1) \cos \varphi, \sin \varphi(e^2 - 1)\}) = \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \frac{1}{(1+e \cos \varphi)} \{2e(1+e \cos \varphi) - (e^2 - 1) \cos \varphi, -\sin \varphi(e^2 - 1)\}) = \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \frac{1}{1+e \cos \varphi} \{(e^2 + 1) \cos \varphi + 2e, \sin \varphi(1 - e^2)\}).
\end{aligned}$$

Убеждаемся, что  $\text{ang}(\mathbf{T}, \mathbf{F}_z) = \text{ang}(\mathbf{T}, \mathbf{F}_2)$ .  $\square$

В этом разделе приведем **график геометрического места точек зеркального отражения левого фокуса от касательной гиперболы** (3.2.3, упражнение 1). Как видно из рис.4, этот **график есть окружность с центром в правом фокусе**  $F_2 : \{\frac{2pe}{e^2 - 1}, 0\}$  **с радиусом**  $\frac{2p}{e^2 - 1} = 2a$ .

Доказательство идентичное тому, какое было сделано для эллипса (см.3.5.3.), предоставляем читателю.

#### **Построение касательной к гиперболе с помощью циркуля и линейки, если известна точка касания**

С этой целью используем, что касательная является биссектрисой внутреннего угла  $\Delta FTF_2$  (см.рис.1). Соединяем точку касания с фокусами гиперболы. В полученном  $\angle FTF_2$  строим биссектрису. Эта биссектриса и есть искомая касательная.  $\square$



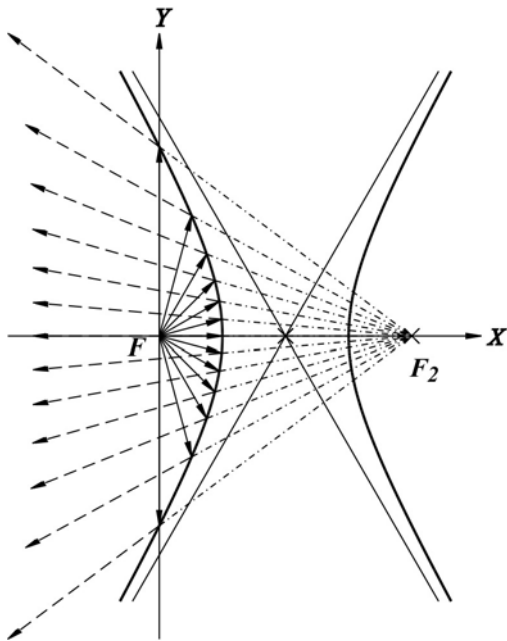


Рис. 5

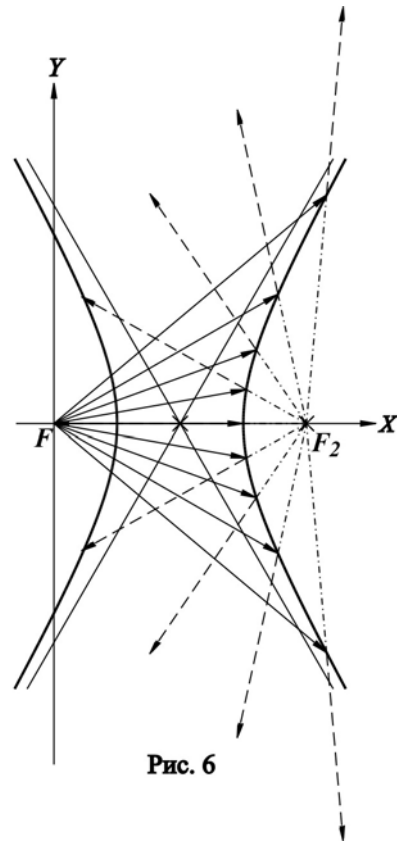


Рис. 6

### 3.7.7. Софокусные эллипс и гипербола

Объясним название заголовка. **Софокусными кривыми называются кривые, у которых можно совместить все фокусы.** Из этого сразу следует, что

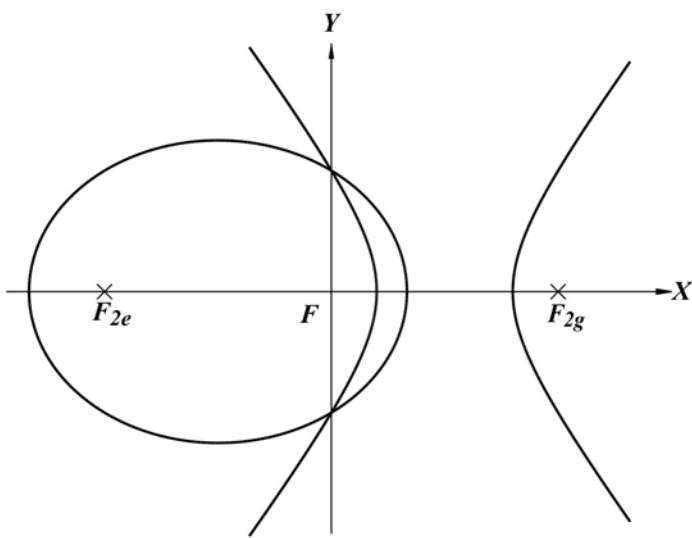


Рис. 1

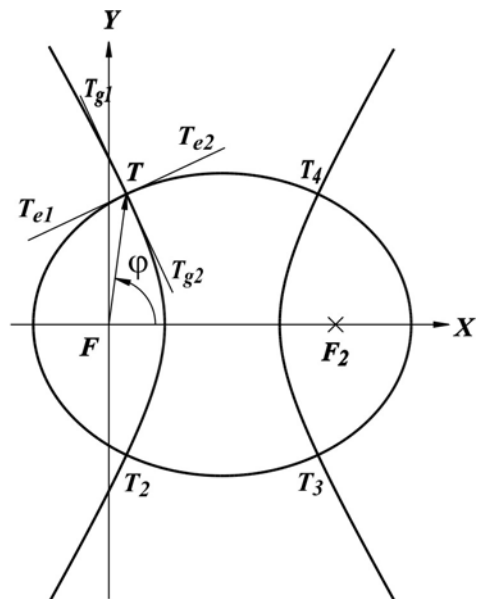


Рис. 2

расстояния между фокусами должны быть равными. Мы таким способом накладываем одну кривую на другую, что при совмещении одних фокусов и другие фокусы этих кривых также должны совпадать. Предположим, что эта цель достигнута. (Более подробно об этом ниже.) Теперь о взаиморасположении фигур.

В системе координат Кеплера центр координат расположен в правом фокусе эллипса и в левом фокусе гиперболы (см.рис.1), а полярные оси эллипса и гиперболы направлены в одну сторону. Для софокусности этих кривых можно переместить на расстояние между фокусами одну из кривых одним из вариантов: или эллипс вправо, или гиперболу влево, или обе кривые навстречу друг другу. Таким образом, полностью применить ранее выведенные формулы одновременно для обеих кривых не удастся. Однако постараемся все изменения сделать с “минимальными потерями”. Переместим вправо, например, эллипс (рис.2) до совмещения фокусов кривых.

Докажем, что **софокусные эллипс и гипербола пересекаются ортогонально** (ср. с [16,§127,упр.35]).

В этом упражнении параметры эллипса и гиперболы будут соответственно с нижними индексами  $e$  и  $g$ .

При выводе уравнений для эллипса будем пользоваться полярным уравнением из его левого фокуса  $r = \frac{P}{1 - e_e \cos \varphi}$ . Так как уравнения для левой ветви гиперболы принадлежат нормальной полярной системе координат, а уравнения для правой – обобщенной (см. замечание в конце (3.7.2)), то данную задачу разобьем на две части.

### 1° часть

Возьмем теперь одну из 4-х точек пересечения, например  $T$ , и сведем наше доказательство к ортогональному пересечению касательной эллипса  $T_{e1}T_{e2}$  и касательной гиперболы  $T_{g1}T_{g2}$ .

Т.к. радиусы векторы эллипса и гиперболы в точках пересечения левой стороны, например, в  $T$  совпадают с вектором  $FT$ , имеющий как исходный, так и видимый угол  $\varphi$  с осью  $X$ , то 
$$\frac{P_e}{1 - e_e \cos \varphi} = \frac{P_g}{1 + e_g \cos \varphi}. \quad (1)$$

Равенство расстояний между фокусами (*софокусность*) дает

$$\frac{p_e e_e}{1 - e_e^2} = \frac{p_g e_g}{e_g^2 - 1}. \quad (2)$$

Выведем, как и в (2.7.-1), направляющие тангенса наклона эллипса

$$\frac{d\tilde{y}}{d\tilde{x}} = \frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{d(x+2c_e)}{d\varphi}} = \frac{\left( \frac{p \sin \varphi}{1 - e_e \cos \varphi} \right)'}{\left( \frac{p \cos \varphi}{1 - e_e \cos \varphi} \right)'} = \frac{\cos \varphi (1 - e_e \cos \varphi) - e_e \sin^2 \varphi}{-\sin \varphi (1 - e_e \cos \varphi) - e_e \cos \varphi \sin \varphi} = \frac{\cos \varphi - e_e}{-\sin \varphi} = \frac{y_{te}}{x_{te}}. \quad (3)$$

Зная направляющие тангенса наклона для левой ветви гиперболы (см.3.1.2.-3)

$$\frac{\cos \varphi + e_g}{-\sin \varphi} = \frac{y_{tg}}{x_{tg}}, \quad \text{можем записать условие ортогональности (1.2.1.-18)}$$

$$x_{te} x_{tg} + y_{te} y_{tg} = 0. \quad \text{Следовательно,} \quad (\cos \varphi - e_e)(\cos \varphi + e_g) + \sin^2 \varphi = 0 \quad \text{или}$$

$$\cos \varphi (e_e + e_g) - e_e e_g + 1 = 0. \quad (4)$$

Вводя, для краткости,  $k = \frac{p_e}{p_g}$ , запишем 3 выведенных уравнения в виде

$$\text{системы уравнений} \quad \begin{cases} \frac{k}{1 - e_e \cos \varphi} = \frac{1}{1 + e_g \cos \varphi}, (*) \\ \frac{k e_e}{1 - e_e^2} = \frac{e_g}{e_g^2 - 1}, (**) \\ \cos \varphi (e_e + e_g) - e_e e_g + 1 = 0, (***) \end{cases}. \quad (5)$$

В этой системе 3 неизвестных  $k, \varphi, e_g$ . В случае совместности системы – касательные ортогональны. В самом деле, из (\*\*)  
 $k = \frac{e_g (1 - e_e^2)}{e_e (e_g^2 - 1)}$ .

$$\text{Из (*)} \quad k + k e_g \cos \varphi = 1 - e_e \cos \varphi, \quad \cos \varphi (k e_g + e_e) = 1 - k,$$

$$\cos \varphi = \frac{1 - k}{k e_g + e_e} = \frac{1 - \frac{e_g (1 - e_e^2)}{e_e (e_g^2 - 1)}}{\frac{e_g (1 - e_e^2)}{e_e (e_g^2 - 1)} + e_e} = \frac{e_e e_g^2 - e_e - e_g + e_g e_e^2}{e_g^2 - e_e^2 e_g^2 + e_e^2 e_g^2 - e_e^2} = \frac{e_e e_g (e_g - e_e) - (e_g - e_e)}{(e_g - e_e)(e_g + e_e)} = \frac{e_g e_e - 1}{e_g + e_e}. \quad (6)$$

$$\text{Из (*) также получаем, что} \quad \cos \varphi = \frac{e_g e_e - 1}{e_g + e_e}. \quad \square$$

**2<sup>o</sup> часть**

Предлагаем читателю доказать, что для  $T_3$  или  $T_4$ , лежащих на правой ветви гиперболы, система уравнений (5) преобразуется в следующую

$$\begin{cases} \frac{k}{1-e_e \cos \varphi} = \frac{-1}{1-e_g \cos \varphi}, (\#) \\ \frac{ke_e}{1-e_e^2} = \frac{e_g}{e_g^2-1}, (\#\#) \\ \cos \varphi (e_e + e_g) - e_e e_g - 1 = 0 (\#\#\#) \end{cases} . \quad (7)$$

*Указание:* использовать (3.7.2. замечание 2). Дальнейшая часть доказательства аналогична 1 части. Проведите ее.

упражнение 1. Доказать, что **из условия софокусности эллипса и гиперболы, следует, что**  $e_g = \frac{(1-e_e^2) + \sqrt{(1-e_e^2)^2 + 4k^2 e_e^2}}{2ke_e}$ .

Упражнение 2. Доказать, что **если фокальные параметры софокусных эллипса и гиперболы равны** (см. рис.3), то

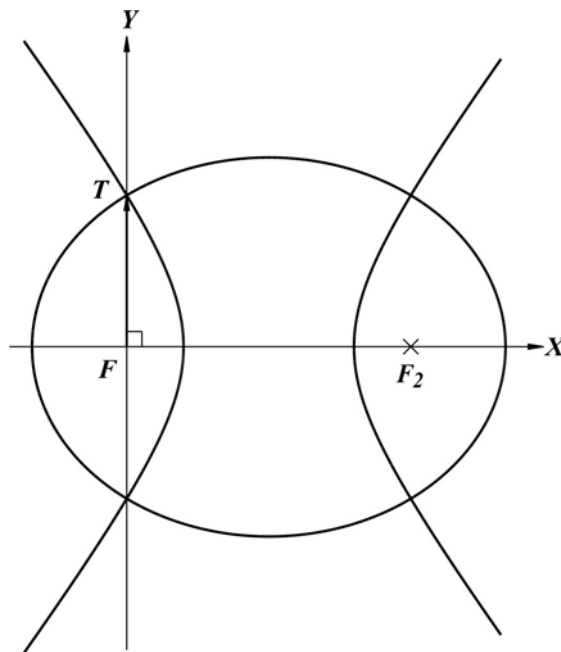


Рис. 3

**абсциссы точек пересечения этих кривых совпадают с абсциссами соответствующих фокусов.**

### 3.7.8. Упражнения на свойства гиперболы

упражнение 1. Доказать теорему Аполлония  $III_{45}$  [21, стр.101]: отрезок любой касательной к гиперболе, заключенный между касательными, проведенными в концах действительной оси, виден из любого фокуса под прямым углом (см. рис.1).

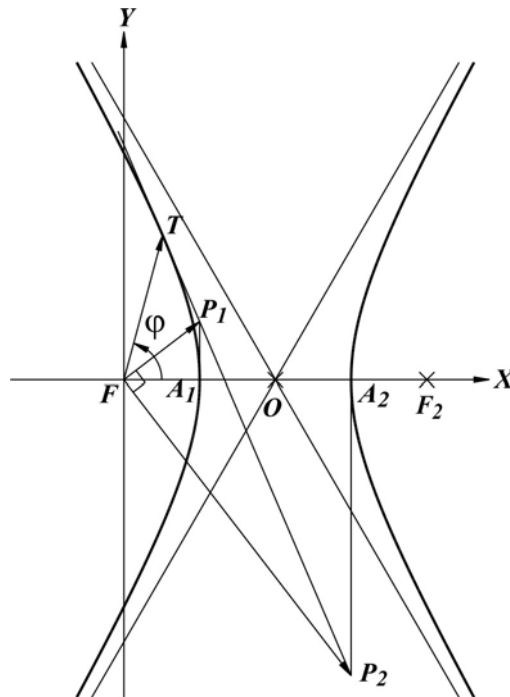


Рис.1

Упражнение 2. Найти расстояния от фокусов гиперболы до касательной.

### 3.8. Инварианты. Получение параметров полярного уравнения

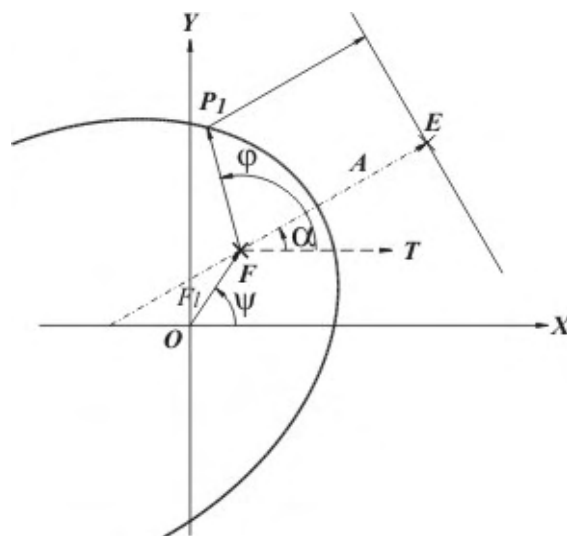


Рис. 1

В данном разделе исследуем **ортогональные инварианты** (определение ниже) **коник**. Проводить исследование будем с помощью основного соотношения для директрисы (3.4.2.-2)  $ed = |r|$ . (\*)

Пусть фокус находится не в центре координат и фокальная ось повернута относительно оси абсцисс на угол  $\alpha$  (см. рис.1) (т.е. временно будем пользоваться прямоугольной правосторонней полярно-декартовой системой координат общего вида, а не системой координат Кеплера). Найдем уравнение директрисы в этой общей системе координат. Из (рис. 1) видно, что директриса проходит через точку  $E : \left\{ \frac{p \cos \alpha}{e} + F_x, \frac{p \sin \alpha}{e} + F_y \right\}$ . С другой стороны, директриса  $\perp$  фокальной оси коники. Следовательно, ее тангенс угла наклона

$k = \operatorname{tg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg} \alpha$ . Отсюда запишем приведенное уравнение

$\frac{p}{e} \sin \alpha + F_y = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \left( \frac{p}{e} \cos \alpha + F_x \right) + b$ . После несложных упрощений вычислим

свободный член  $b = \frac{\frac{p}{e} + F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha}{\sin \alpha}$  и получим **нормальное уравнение**

**директрисы в этой прямоугольной декартовой системе координат**

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - \frac{p}{e} - F_x \cos \alpha - F_y \sin \alpha = 0. \quad (1)$$

**Отклонение некоторой точки  $\{x_i, y_i\}$  на кривой до директрисы**

$$d = x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - \frac{p}{e} - F_x \cos \alpha - F_y \sin \alpha. \quad (2)$$

**Расстояние от той же точки до фокуса  $\sqrt{(x_i - F_x)^2 + (y_i - F_y)^2}$ .** (3)

Собираем (\*)  $\sqrt{(x_i - F_x)^2 + (y_i - F_y)^2} = e \left| x_i \cos \alpha + y_i \sin \alpha - \frac{p}{e} - F_x \cos \alpha - F_y \sin \alpha \right|$ . (4)

Переходим к исследованию (4). Докажем, что (4) удовлетворяет полярному уравнению Лаланда-Лапласа (2.-1)

$$r = e \left| (x_i - F_x) \cos \alpha + (y_i - F_y) \sin \alpha - \frac{p}{e} \right|, \quad r = e \left| \frac{p \cos \varphi \cos \alpha}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} + \frac{p \sin \varphi \sin \alpha}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} - \frac{p}{e} \right|,$$

$$r = p \left| \frac{e \cos(\varphi - \alpha) - 1 - e \cos(\varphi - \alpha)}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} \right|, \quad r = \left| \frac{p}{1 + e \cos(\varphi - \alpha)} \right|. \square$$

Уравнение (4) – иррационально. При возведении левой и правой частей в квадрат, с одной стороны, получим квадратичную форму относительно координат  $\{x_i, y_i\}$ . С другой стороны, кроме нужных, можно получить и лишние корни. Таким образом, квадратичная форма может содержать избыточную информацию. **Это и есть причина того, что в квадратичной форме к 3 аффинным классам конических кривых добавляются еще 6 других аффинных классов.**

Возводим обе части уравнения в квадрат

$$\begin{aligned} x_i^2 - 2x_i F_x + F_x^2 + y_i^2 - 2y_i F_y + F_y^2 = & x_i^2 e^2 \cos^2 \alpha + y_i^2 e^2 \sin^2 \alpha + p^2 + F_x^2 e^2 \cos^2 \alpha + F_y^2 e^2 \sin^2 \alpha + \\ & + 2x_i y_i e^2 \cos \alpha \sin \alpha - 2x_i p e \cos \alpha - 2x_i F_x e^2 \cos^2 \alpha - 2x_i F_y e^2 \cos \alpha \sin \alpha - 2y_i p e \sin \alpha - \\ & - 2y_i F_x e^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2y_i F_y e^2 \sin^2 \alpha + 2F_x p e \cos \alpha + 2F_y p e \sin \alpha + 2F_x F_y \cos \alpha \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Получим из (5) 6 коэффициентов квадратичной формы

$$\begin{array}{l|l} a_{11} & x_i^2 \\ 2a_{12} & x_i y_i \\ a_{22} & y_i^2 \\ 2a_{13} & x_i \\ 2a_{23} & y_i \\ a_{33} & c \end{array} \left\| \begin{array}{l} 1 - e^2 \cos^2 \alpha \\ -e^2 \sin 2\alpha \\ 1 - e^2 \sin^2 \alpha \\ -2F_x(1 - e^2 \cos^2 \alpha) + F_y e^2 \sin 2\alpha + 2pe \cos \alpha \\ F_x e^2 \sin 2\alpha - 2F_y(1 - e^2 \sin^2 \alpha) + 2pe \sin \alpha \\ F_x^2(1 - e^2 \cos^2 \alpha) + F_y^2(1 - e^2 \sin^2 \alpha) - F_x F_y e^2 \sin 2\alpha - 2F_x p e \cos \alpha - 2F_y p e \sin \alpha - p^2 \end{array} \right. \quad (6)$$

(Дадим еще одно выражение для  $a_{33}$

$$\begin{aligned} & F_x^2(1 - e^2 \cos^2 \alpha) + F_y^2(1 - e^2 \sin^2 \alpha) - F_x F_y e^2 \sin 2\alpha - 2F_x p e \cos \alpha - 2F_y p e \sin \alpha - p^2 = \\ & = F_x^2 + F_y^2 - e^2(F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha)^2 - 2pe(F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha) - p^2 = \\ & = F_l^2 - e^2 F_l^2(\cos \psi \cos \alpha + \sin \psi \sin \alpha)^2 - 2pe F_l(\cos \psi \cos \alpha + \sin \psi \sin \alpha) - p^2 = \\ & = F_l^2(1 - e^2 \cos^2(\psi - \alpha)) - 2pe F_l \cos(\psi - \alpha) - p^2, \text{ где } \psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \mathbf{F}), F_l = \text{dist}(\mathbf{0}, \mathbf{F}). \end{aligned}$$

Обратим внимание, что коэффициенты квадратичной формы  $a_{ik}$  не зависят от выбора точек на кривой  $\{x_i, y_i\}$ , т.к. правая часть (6) не зависит от  $\{x_i, y_i\}$ .

Рассмотрим некоторые алгебраические выражения -  $S, A_{33}, A$  от коэффициентов квадратичной формы и докажем, что **они не меняются от угла поворота фокальной оси  $\theta$  и координат фокуса  $\{F_x, F_y\}$ , т.е. являются относительно этих параметров инвариантами.** В математической литературе принято эти инварианты называть **ортогональными**, и мы не будем менять это название, хотя и вкладываем в него в этом месте иной смысл. С другой стороны, ниже дадим объяснение этого названия с точки зрения классической теории.

1) Докажем, что  $S = a_{11} + a_{22}$  - ортогональный инвариант.

$$\text{В самом деле } 1 - e^2 \cos^2 \alpha + 1 - e^2 \sin^2 \alpha = 2 - e^2. \quad (7)$$

Выражение (10) не зависит от угла поворота фокальной оси  $\alpha$  и от координат фокуса.

2) Докажем, что  $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2$  - ортогональный инвариант.

Действительно

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \cos^2 \alpha)(1 - e^2 \sin^2 \alpha) - \frac{e^4 \sin^2 2\alpha}{4} &= 1 - e^2 \sin^2 \alpha - e^2 \cos^2 \alpha + \frac{e^4 \sin 2\alpha}{4} \\ - \frac{e^4 \sin^2 2\alpha}{4} &= 1 - e^2. \end{aligned} \quad (8)$$

Заметим, что для параболы ( $e = 1$ ) - этот определитель равен 0.

3) Докажем, что определитель  $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$  является ортогональным

инвариантом. При этом будем некоторые элементы определителя из-за их большой длины записывать внутри круглых скобок и разбивать внутри этих скобок на несколько строк. Итак

$$A = \begin{vmatrix} 1 - e^2 \cos^2 \alpha & \frac{-e^2 \sin 2\alpha}{2} & \begin{pmatrix} -F_x(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \\ + \frac{F_y e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ + pe \cos \alpha \end{pmatrix} \\ \frac{-e^2 \sin 2\alpha}{2} & 1 - e^2 \sin^2 \alpha & \begin{pmatrix} \frac{F_x e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ -F_y(1 - e^2 \sin^2 \alpha) \\ + pe \sin \alpha \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -F_x(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \\ + \frac{F_y e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ + pe \cos \alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{F_x e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ -F_y(1 - e^2 \sin^2 \alpha) \\ + pe \sin \alpha \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} F_x^2(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \\ + F_y^2(1 - e^2 \sin^2 \alpha) \\ - F_x F_y e^2 \sin 2\alpha \\ - 2F_x pe \cos \alpha \\ - 2F_y pe \sin \alpha - p^2 \end{pmatrix} \end{vmatrix}. \quad (9)$$



Упростим определитель. Для этого умножим 1-й столбец на  $F_x$ , 2-й на  $F_y$  и прибавим эти столбцы к 3-му столбцу. Затем аналогично умножим 1-ю строку на  $F_x$ , 2-ю на  $F_y$  и прибавим их к 3-ей строке. Вынесем за знак определителя  $p^2$  (из 3-ей строки и 3-его столбца). Теперь имеем

$$A = p^2 \begin{vmatrix} 1 - e^2 \cos \alpha & \frac{-e^2 \sin 2\alpha}{2} & e \cos \alpha \\ \frac{-e^2 \sin 2\alpha}{2} & 1 - e^2 \sin^2 \alpha & e \sin \alpha \\ e \cos \alpha & e \sin \alpha & -1 \end{vmatrix}. \quad (10)$$

Умножим 3-ю строку на  $e \cos \alpha$  и сложим с 1-й. Затем умножим 3-ю строку на  $e \sin \alpha$  и сложим с 2-й. После преобразований получим

$$A = p^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ e \cos \alpha & e \sin \alpha & -1 \end{vmatrix}. \quad (11)$$

Последние преобразования: умножим 1-строку на  $-e \cos \alpha$ , 2-ю на  $-e \sin \alpha$  и обе

строки сложим с 3-ей. Окончательно  $A = p^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -p^2$ . (12)

**(Заметим, что для вычисления данного инварианта необходимо брать все 6 коэффициентов квадратичной формы.)**

Таким образом доказано, что при одновременном вращении фокальной оси и изменении координат фокуса ортогональные инварианты  $S, A_{33}, A$  остаются неизменными.

Рассмотрим теперь некоторые примеры, большинство из которых являются классическими формулами.

1) Доказать<sup>1</sup>, что знак инварианта  $A_{33}$  определяет тип коники: при  $A_{33} < 0$  - эллипс при  $A_{33} = 0$  - парабола и при  $A_{33} > 0$  - гипербола.

Доказательство очевидно, если рассмотреть выражение  $A_{33} = 1 - e^2$ .

2) Найдем угол  $\alpha$ , на который повернута фокальная ось кривой

<sup>1</sup> Г.Б.Гуревич. Основы теории алгебраических инвариантов. ОГИЗ, М. и Л., 1948, стр. 14.

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} = \frac{(1 - e^2 \cos^2 \alpha) - (1 - e^2 \sin^2 \alpha)}{-e^2 \sin 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}. \quad (13)$$

Заметим, что найденный угол для параболы и гиперболы [см. также 18, §205] нуждается в корректировке: к нему нужно прибавить  $\pi$ .)

3) Найдем **точку центра** у эллипса и гиперболы (напомним, что у параболы нет точки центра, а есть **линия центра**, которая совпадает с фокальной осью внутри параболы).

С этой целью методом Крамера решим систему уравнений [18, §228], [16, §144]

$$\begin{cases} a_{11}x_c + a_{12}y_c + a_{13} = 0, \\ a_{21}x_c + a_{22}y_c + a_{23} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

$$\text{При этом } x_c = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y_c = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13} \\ a_{21} & -a_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \quad (15)$$

Перед этим (11) вычислили определитель данной системы уравнений

$$\Delta = A_{33} = 1 - e^2.$$

Поэтому осталось найти определители  $\Delta_x$  и  $\Delta_y$ .

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -a_{13} & a_{12} \\ -a_{23} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left( \begin{array}{l} F_x(1 - e^2 \cos^2 \alpha) \\ -\frac{F_y e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ -pe \cos \alpha \end{array} \right) & -\frac{e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ \left( \begin{array}{l} -\frac{F_x e^2 \sin 2\alpha}{2} \\ +F_y(1 - e^2 \sin^2 \alpha) \\ -pe \sin \alpha \end{array} \right) & 1 - e^2 \sin^2 \alpha \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Умножим 2-й столбец на  $-F_y$  и сложим с 1-м. Затем “крест-на-крест” перемножим элементы определителя. После всех элементарных преобразований (проведите их!), получим

$$x_c = F_x - \frac{pe \cos \alpha}{1 - e^2}, \quad y_c = F_y - \frac{pe \sin \alpha}{1 - e^2}. \quad (17)$$

Найденные координаты центра согласуются с соответствующими координатами, вычисленными в (3.1.2.). Но при этом нужно подставить в (17) для гиперболы откорректированный угол  $\alpha$ .

### Элементы классической теории<sup>1</sup>

Известно, что движения - вращения и || перенос, сохраняют длину (1.5.1.). Напомним, что такие преобразования называются ортогональными. Определитель ортогональных преобразований равен  $\pm 1$  ('+' - при сохранении ориентации, '-' - при изменении ее на противоположную).

Далее рассмотрим только вращения, предоставляя читателю доказать инвариантность приведенных выше определителей в случае чистого || переноса.

Запишем преобразования координат без || переноса (1.5.1.-10)

$$x = \bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi, \quad y = \bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi.$$

Найдем квадратичные члены  $x^2$ ,  $xy$ ,  $y^2$

$$\begin{aligned} x^2 &= \bar{x}^2 \cos^2 \varphi - 2\bar{x}\bar{y} \cos \varphi \sin \varphi + \bar{y}^2 \sin^2 \varphi \\ xy &= \bar{x}^2 \cos \varphi \sin \varphi + \bar{x}\bar{y} \cos^2 \varphi - \bar{x}\bar{y} \sin^2 \varphi + \bar{y}^2 \cos \varphi \sin \varphi, \\ y^2 &= \bar{x}^2 \sin^2 \varphi + 2\bar{x}\bar{y} \cos \varphi \sin \varphi + \bar{y}^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Теперь можно вычислить коэффициенты квадратичной формы в новой системе координат. Для этого запишем условие, при котором две квадратичные формы – старая и новая описывают одну и ту же кривую.

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} &= a_{11}(\bar{x}^2 \cos^2 \varphi - 2\bar{x}\bar{y} \cos \varphi \sin \varphi + \bar{y}^2 \sin^2 \varphi) + \\ + 2a_{12}(\bar{x}^2 \cos \varphi \sin \varphi + \bar{x}\bar{y} \cos^2 \varphi - \bar{x}\bar{y} \sin^2 \varphi + \bar{y}^2 \cos \varphi \sin \varphi) + \\ + a_{22}(\bar{x}^2 \sin^2 \varphi + 2\bar{x}\bar{y} \cos \varphi \sin \varphi + \bar{y}^2 \cos^2 \varphi) + 2a_{13}(\bar{x} \cos \varphi - \bar{y} \sin \varphi) + 2a_{23}(\bar{x} \sin \varphi + \bar{y} \cos \varphi) + a_{33} &= \\ = \bar{a}_{11}\bar{x}^2 + 2\bar{a}_{12}\bar{x}\bar{y} + \bar{a}_{22}\bar{y}^2 + 2\bar{a}_{13}\bar{x} + 2\bar{a}_{23}\bar{y} + \bar{a}_{33}. \end{aligned}$$

Преобразовывая, выразим новые коэффициенты через старые [18, §247]

$$\begin{cases} \bar{a}_{11} = a_{11} \cos^2 \varphi + 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \sin^2 \varphi \\ \bar{a}_{12} = -(a_{11} - a_{22}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{12} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \\ \bar{a}_{22} = a_{11} \sin^2 \varphi - 2a_{12} \sin \varphi \cos \varphi + a_{22} \cos^2 \varphi \\ \bar{a}_{13} = a_{13} \cos \varphi + a_{23} \sin \varphi \\ \bar{a}_{23} = -a_{13} \sin \varphi + a_{23} \cos \varphi \\ \bar{a}_{33} = a_{33} \end{cases} \quad (18)$$

<sup>1</sup> Мы хотели бы обратить на этот подраздел особое внимание специалистов по инвариантам.

Докажем, что при повороте сохраняется ортогональный инвариант  $S$

$$S = \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} = a_{11}(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + a_{22}(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = a_{11} + a_{22}.$$

Доказательство классическим методом инвариантности определителей  $A_{33}$ ,  $A$  при поворотах предоставляем читателю [см. 16, §142].

Итак, **ортогональные преобразования (повороты и || перенос) оставляют неизменными ортогональные инварианты.** Собственно говоря, это и есть объяснение названия '**ортогональные инварианты**'. Таким образом, наш и классический подходы – эквивалентны.

Рассмотрим еще раз 5-точечную схему (2.1). Для этого рассмотрим квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0. \quad (19)$$

Мы видим, что в квадратичной форме 6 неизвестных, однако традиционно используется только координаты 5 точек для вычисления коэффициентов квадратичной формы. 6-й коэффициент - свободный член - устанавливаем произвольно, с точностью до постоянного множителя. Например, (один из способов): если  $a_{33} \neq 0$ , то делим все члены коэффициенты квадратичной формы на  $a_{33}$  (С таким же успехом можно делить все члены на величины  $-a_{33}$ ,  $2a_{33}$  и т.д.)

Таким образом, получаем

$$\frac{a_{11}}{a_{33}}x^2 + 2\frac{a_{12}}{a_{33}}xy + \frac{a_{22}}{a_{33}}y^2 + 2\frac{a_{13}}{a_{33}}x + 2\frac{a_{23}}{a_{33}}y + 1 = 0. \quad (20)$$

В итоге имеем 5 неизвестных  $a'_{ik} = \frac{a_{ik}}{a_{33}}$  и константу 1. Решая систему из 5 линейных уравнений с 5 неизвестными (см. (2.2)), получим каждый из коэффициентов  $a'_{ik}$  также с точностью до постоянного множителя. Как уже здесь говорилось, это происходит потому, что столбец, состоящий из  $-a'_{33}$ , по правилу Крамера входит в каждый определитель числителя. (Если применяем другой алгоритм для поиска решений системы линейных уравнений, например метод исключения Гаусса, то решения будут идентичными и могут отличаться только точностью.) Поэтому численные значения классических инвариантов  $S$ ,  $A_{33}$ ,  $A$ , могут быть вычислены только с точностью до степени коэффициента  $k = \frac{a'_{33}}{a_{33}}$

(степень зависит от порядка инварианта)

$$S' = kS, A'_{33} = k^2 A_{33}, A' = k^3 A. \quad (21)$$

Докажем, также, что **корень  $\lambda$  характеристического уравнения  $\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0$**  [18, §254, (6)], [16, §143, стр.353] **линейно зависит от данного коэффициента  $\lambda' = k\lambda$** . В самом деле

$$\lambda'^2 - S'\lambda' + A'_{33} = 0, \lambda'_{1,2} = \frac{S'}{2} \pm \sqrt{\frac{S'^2}{4} - A'_{33}} = \frac{kS}{2} \pm \sqrt{\frac{k^2 S^2}{4} - k^2 A_{33}}, \lambda' = k\lambda. \square$$

Т.к. при расчете классических параметров конических кривых (например, полуосей эллипса) применяют **отношение инвариантов**, то коэффициент  $k$  сокращается в числителе и знаменателе этого отношения. Приведем типичное выражение классической теории для расчета большой полуоси эллипса

$$a^2 = \left| \frac{A}{\lambda_1 A_{33}} \right|. \quad \text{Очевидно, что в данном случае коэффициент } k \text{ в числителе и}$$

знаменателе может быть сокращен.

Укажем еще на возможные появления коэффициента  $k$ . Так, нулевые значения инвариантов  $S, A_{33}, A$  являются переключателями для перехода к различным веткам алгоритма. Очевидно, что если, например,  $A = 0$ , то и  $kA = A$ . В некоторых формулах используется не значение инварианта, а только его знак [16, §143, таблица]. Однако знак используется только в тех формулах, в которых  $k$  появляется в четной степени (например:  $S \cdot A, A_{33}$ , и т.д.). Поэтому, **весь классический алгоритм работает корректно, при любых (положительных или отрицательных) значениях  $k$** .

В [18, §260-§261] рассматриваются условия подобия и конгруэнтности двух линий 2-го порядка. Так образом, имеем некоторое сходство подходов. Однако, предложение о том, что **система инвариантов  $S', A'_{33}, A'$  полна**, т.е. **любой новый инвариант есть функция от 3-х инвариантов  $S', A'_{33}, A'$** , доказывается в этой работе проще. В самом деле, система из 3-х уравнений с 3-мя неизвестными  $k, e, p$  и известными  $S', A'_{33}, A'$

$$\begin{cases} k(2 - e^2) = S', \\ k^2(1 - e^2) = A'_{33}, & p > 0, e > 0 \\ -k^3 p^2 = A', \end{cases} \quad (22)$$

разбивается на две независимые подсистемы. Подсистема, состоящая из уравнений (22-1), (22-2) решается на 1-м этапе отдельно от уравнения (22-3). Находим  $k$  и  $e$ , затем подставляем  $k$  в (22-3) и находим  $p$ . (Предлагаем читателю самостоятельно найти условие совместности системы (22). В [18,§261] приведено условие для всех классов кривых 2-го порядка: исключая случай  $A'_{33} = A' = 0$ . Как нужно изменить это условие, если рассматриваем только конические кривые?) □

Назовем **ортогональные инварианты при  $k=1$  исходными**. Найдем **исходные корни характеристического уравнения**  $\lambda^2 - S\lambda + A_{33} = 0$ . Для этого подставим исходные инварианты  $S = 2 - e^2$ ,  $A_{33} = 1 - e^2$  в характеристическое уравнение

$$\lambda^2 - (2 - e^2)\lambda + (1 - e^2) = 0. \text{ Отсюда } \lambda_{1,2} = \frac{2 - e^2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2 - e^2}{2}\right)^2 - (1 - e^2)}, \lambda_1 = 1 - e^2, \lambda_2 = 1$$

(корни упорядочены по возрастанию:  $\lambda_1 \leq \lambda_2$ ). (23)

Заметим, что **корни характеристического уравнения всегда действительны**,

т.к. дискриминант этого уравнения неотрицательный  $D = \frac{S^2}{4} - A_{33} = \frac{e^2}{2} \geq 0$ . ( $D = 0$

при  $e = 0$  - только для окружности.)

Упражнение 1. Подставьте исходные инварианты в классические формулы

$$a^2 = -\frac{A}{\lambda_1 A_{33}}, \quad b^2 = -\frac{A}{\lambda_2 A_{33}},$$

определяющие длины квадратов полуосей эллипса.

Ответ.  $a = \frac{p}{1 - e^2}$ ,  $b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}$  (см. 3.5.1.).

Упражнение 2. Подставить исходные инварианты в классическую формулу

[18,§259,(9)] параметра параболы  $p = \sqrt{-\frac{A}{S^3}}$ .

Решение. Для параболы  $S = 2 - e^2 = 1$ . Отсюда  $p = \sqrt{-A} = \sqrt{p^2} = p$ . □

Таким образом: **при подстановке исходных инвариантов в классические формулы, последние легко проверяются и/или интерпретируются**.

Упражнение 3. Убедиться в справедливости  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\lambda'_1 - a'_{11}}{a'_{12}}$  [16,§150,(3)].

Решение. 
$$\frac{\lambda'_1 - a'_{11}}{a'_{12}} = \frac{k(1 - e^2) - k(1 - e^2 \cos^2 \alpha)}{-ke^2 \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{-(1 - \cos^2 \alpha)}{-\cos \alpha \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}. \quad (\text{Замечание,}$$

сделанное выше, о том, что нужно сделать коррекцию рассчитанного угла  $\alpha$  для параболы и гиперболы - добавить угол  $\pi$  - справедливо и в этом случае.)

Упражнение 4. Исследовать уравнение  $4x^2 + 9y^2 + 8x - 36y + 4 = 0$  [16, §151, пример 1].

Решение. Находим инварианты  $S' = 13, A'_{33} = 36, A' = -9^2 \cdot 4^2$ . Т.к.  $A'_{33} \neq 0$ , то это не парабола. Из (22-1) и (22-2) находим  $e = \frac{(1 - e^2)}{(2 - e^2)^2} = \frac{A'_{33}}{S'^2}, \quad \frac{1 - e^2}{(2 - e^2)^2} = \frac{36}{169}$ ,

$1 - e^2 = \frac{36}{169}(4 - 4e^2 + e^4)$ . Для решения биквадратного уравнения вводим новые

переменные  $z = e^2, l = \frac{36}{169}$ . Тогда  $lz^2 - (4l - 1)z + (4l - 1) = 0$ ,

$$z_{1,2} = \frac{4l - 1 \pm \sqrt{(4l - 1)^2 - 4l(4l - 1)}}{2l} = \frac{4l - 1 \pm \sqrt{1 - 4l}}{2l}, \quad z = \frac{5}{9}, \quad e = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745 < 1 \quad (\text{эллипс}).$$

(При преобразованиях было использовано, что  $e > 0$ ). Отсюда  $k = \frac{S'}{2 - z} = 9$ . Из (22-

3)  $9^3 p^2 = 9^2 \cdot 4^2, \quad p = \frac{4}{3}$ . Из (13)  $\text{ctg } 2\alpha = \frac{4 - 9}{2 \cdot 0}$ . Следовательно,  $\alpha = 0$  (проведите

анализ!). Из (15)  $x_c = \frac{\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 18 & 9 \end{vmatrix}}{36} = -1, \quad y_c = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 18 \end{vmatrix}}{36} = 2$ .

$$\text{Из (17) } F_x = x_c + \frac{pe \cos \alpha}{1 - e^2} = -1 + \frac{4 \sqrt{5}}{\frac{3}{4}} = \sqrt{5} - 1, \quad F_y = y_c + \frac{pe \sin \alpha}{1 - e^2} = 2.$$

Упражнение 5. Доказать, что угол наклона оси параболы [16, стр.396] выражается формулой  $\alpha = \text{ang}(\mathbf{0}, \{A_1, A_2\})$ , где  $A_1 = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}, \quad A_2 = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}$ .

Решение. Т.к.  $\alpha = \text{ang}(\mathbf{0}, \{A'_1, A'_2\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{k^2 A_1, k^2 A_2\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{A_1, A_2\})$ , то мы можем исследовать исходные определители. С другой стороны, мы уже имели с ними дело (15):  $A_1 = \Delta_x = F_x(1 - e^2) - pe \cos \theta, \quad A_2 = \Delta_y = F_y(1 - e^2) - pe \sin \theta$ . У параболы  $e = 1$ , поэтому  $\alpha = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-pe \cos \alpha', -pe \sin \alpha'\}) = \alpha' + \pi$ . (Напомним, что необходимо поворачивать на  $180^\circ (\pi)$  рассчитанные углы параболы и гиперболы.) □

Упражнение 6. Доказать, что угол наклона оси параболы [18, §255,(9)]

выражается формулой  $tg \alpha = -\frac{a'_{11}}{a'_{12}}$ .

Решение.  $tg \alpha = -\frac{a'_{11}}{a'_{12}} = -\frac{ka_{11}}{ka_{12}} = -\frac{a_{11}}{a_{12}}$ . Подставляем ( $e = 1$ )

$tg \alpha = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ . Это решение не противоречит решению предыдущего

упражнения, т.к.  $tg(\alpha + \pi) = tg(\alpha)$ . С другой стороны, несмотря на то, что при получении решения предыдущего упражнения число вычислений (операций) было больше, чем в текущем, найденный угол  $\alpha' = \text{ang}(\theta, \{A_1, A_2\}) + \pi$  **точно вычисляет угол наклона оси параболы** (мы, в практической работе, пользуемся именно решением предыдущего упражнения). Решение же данного упражнения вычисляет угол наклона оси параболы только с точностью до  $\pi$ .

Упражнение 7. Найти координаты вершины параболы, используя значения исходных инвариантов.

Решение. Применим методику [18, §255,(10)-(12)]. Однако в приведенных из [18] формулах берем знак '+', т.к. точно умеем находить угол наклона оси параболы. Напомним, что для параболы  $S = 1$ . Итак, **координаты вершины**

**параболы**  $\eta = -\frac{1}{2a'_{13}}(a_{33} - \frac{a'^2_{23}}{S})$ ,  $\mu = -\frac{a'_{23}}{S}$ , где  $a'_{13} = \sqrt{-\frac{A}{S}} = p$ ,  $a'_{23} = \frac{a_{11}a_{13} + a_{12}a_{23}}{\sqrt{a_{11}S}}$ .

$$a'_{23} = \frac{\sin^2 \alpha (-F_x \sin^2 \alpha + F_y \cos \alpha \sin \alpha + p \cos \alpha) - \sin \alpha \cos \alpha (F_x \cos \alpha \sin \alpha - F_y \cos^2 \alpha + p \sin \alpha)}{\sin \alpha} =$$

$$= -F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha. \text{ Отсюда } \mu = F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha \text{ и } \eta = -\frac{1}{2p} (F_x^2 \sin^2 \alpha + F_y^2 \cos \alpha -$$

$$- 2F_x F_y \sin \alpha \cos \alpha - 2pF_x \cos \alpha - 2pF_y \sin \alpha - p^2 - (-F_x \sin \alpha + F_y \cos \alpha)^2) =$$

$$= F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha + \frac{p}{2}. \text{ Окончательно } \begin{cases} \eta = F_x \cos \alpha + F_y \sin \alpha + \frac{p}{2}, \\ \mu = F_x \sin \alpha - F_y \cos \alpha \end{cases}.$$

Упражнение 8. Найти полярные параметры функции  $y = x^2$ .

Решение. Запишем данную функцию в виде квадратичной формы  $x^2 - y = 0$ ,

$$1 \cdot x^2 + 0 \cdot xy + 0 \cdot y^2 + 0 \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot y + 0 = 0. \text{ Вычислим классические ортогональные}$$



инварианты  $S' = 1 + 0 = 1$ ,  $A'_{33} = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0$ ,  $A' = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{4}$ . Таким образом,

имеем параболу. Далее  $p = \sqrt{-\frac{A'}{S'}} = \frac{1}{2}$ ,  $a'_{13} = \frac{1}{2}$ ,  $a'_{23} = \frac{1 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{\sqrt{1}} = 0$ . Координаты

вершины параболы  $\eta = -\frac{1}{2a'_{13}}(a_{33} - \frac{a'^2_{23}}{S'}) = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} \left( 0 - \frac{0^2}{1} \right) = 0$ ,  $\mu = -\frac{a'_{23}}{S'} = \frac{-0}{1} = 0$ .

Находим угол наклона фокальной оси  $\alpha$   $A_1 = a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22} = 0 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 0$ ,

$A_2 = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha = \text{ang}(\mathbf{0}, \{A_1, A_2\}) + \pi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, \frac{1}{2}\}) + \pi = \frac{3\pi}{2}$ .

Фокус параболы находится в точке

$$\{F_x, F_y\} = \text{polar}(\{\eta, \mu\}, \frac{p}{2}, \alpha - \pi) = \text{polar}(\{0, 0\}, \frac{1}{4}, \frac{\pi}{2}) = \{0, \frac{1}{4}\}.$$

Упражнение 9. Найти полярные параметры функции  $xy = 2$ .

Решение. Находим инварианты  $S' = 0$ ,  $A'_{33} = -\frac{1}{4}$ ,  $A' = \frac{1}{2}$ . Из (22-1) и (22-2)

$(2 - e^2)^2 = 0$ . Следовательно,  $e = \sqrt{2}$  (равносторонняя гипербола (3.7.4.)). Из (22-2)

$k^2(1-2) = -\frac{1}{4}$ . Отсюда  $k = -\frac{1}{2}$  (учтено, что  $p^2 > 0$  (22-3)).  $\frac{1}{8}p^2 = \frac{1}{2}$ ,  $p = 2$ . Для

этого случая характеристическое уравнение  $\lambda^2 + A'_{33} = 0$ ,  $\lambda' = \sqrt{-A'_{33}} = \frac{1}{2}$  и

уравнение угла наклона фокальной оси  $\text{tg} \alpha' = \frac{\lambda'_1 - a_{11}}{a_{12}} = 1$ ,  $\alpha' = \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ),  $\alpha = \alpha' + \pi = \frac{3\pi}{4}$ .

Координаты фокуса (17)  $x_c = 0$ ,  $y_c = 0$  и  $F_x = \frac{pe \cos \alpha}{1 - e^2} = -2$ ,  $F_y = -2$ .

Упражнение 10. Найти соотношения между членами квадратичной формы для равносторонней гиперболы.

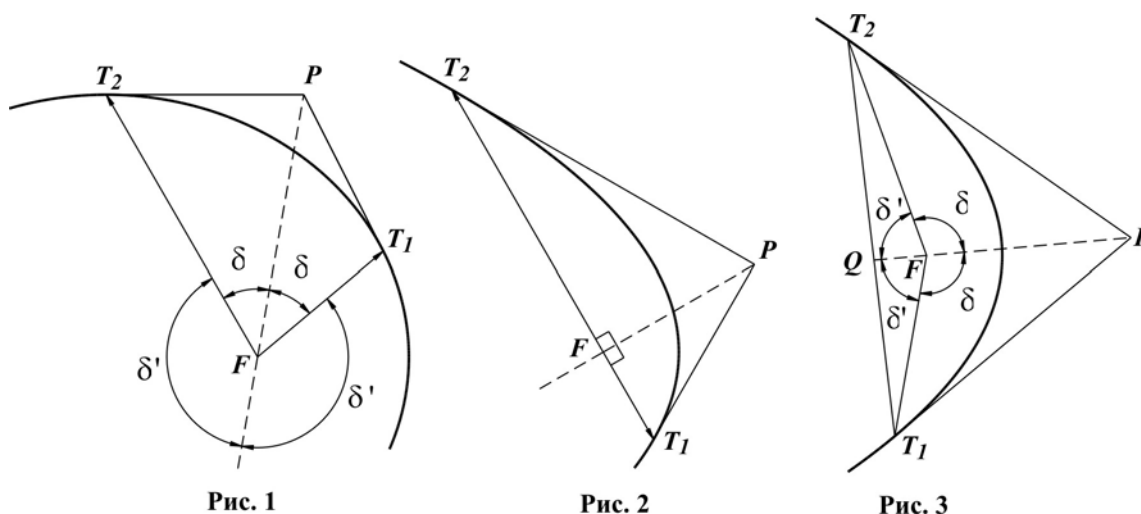
Решение. У равносторонней гиперболы  $e = \sqrt{2}$ . Отсюда  $S = 2 - e^2 = 0$  и  $S' = kS = 0$ . Имеем  $a_{11} = -a_{22}$ .  $A_{33} = 1 - e^2 = -1$ . Продолжаем  $A_{33} = -a_{11}^2 - a_{12}^2 = -1$  или  $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$ . С учетом коэффициента  $k$   $a_{11}^2 + a_{12}^2 = k^2$ . (Сопоставьте с предыдущим упражнением.)

## 4. Биссектриса фокального угла

В этой главе будем рассматривать объекты с двумя радиус-векторами, выходящими из полюса.

### 4.1. Свойство биссектрисы фокального угла<sup>1</sup>. Теорема Лагира (de La Hire) (обобщенный вариант)

*Теорема.* Биссектриса фокального угла или ее продолжение проходит через полюс (см. рис.1, 2, 3).



[Ср.22, том.1, 190, стр.367]

Другими словами: отклонение биссектрисы от полюса равно нулю.

### Двухфокусные кривые

Для эллипса и гиперболы утверждения теоремы справедливы для каждого фокуса (см. рис.4,5,6).

Для гиперболы, если ее радиус-векторы направлены к разным ветвям гиперболы, биссектриса смежного фокального угла (см. рис.7) или ее продолжение проходит через полюс.

<sup>1</sup> 1.Ph. De La Hire, Sectiones conicae, Paris 1685, P.190

2. M.Chasles, Nouv.Mem. Acad. Brüssel 6 (1830), S. 30 (напечатано в 1831)

3. Ch.Graves, Two geometrical memoirs on the spherical conics, Dublin 1841, P.60

4. O'Brien, A treatise on plane coordinate geometry, Teil 1. Cambridge und London 1844 P.156

5. J.Casey, A treatise on the analytical geometry of the point, line, circle, and conic sections, 2. Aufl. Dublin und London 1893, P. 225

6.M.Chasles, Comtes rendus de l'academie des sciences de Paris 17 (1843), P.841

7. J.Plücker, System der Geometrie des Raumes, Düsseldorf 1846, S. 266

8.G.Salmon (W.Fieller) Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 8. Aufl. Teil 1. Leipzig und Berlin 1915 S.367 (Список литературы в данном месте приводится только для теоремы Ph. De La Hire)

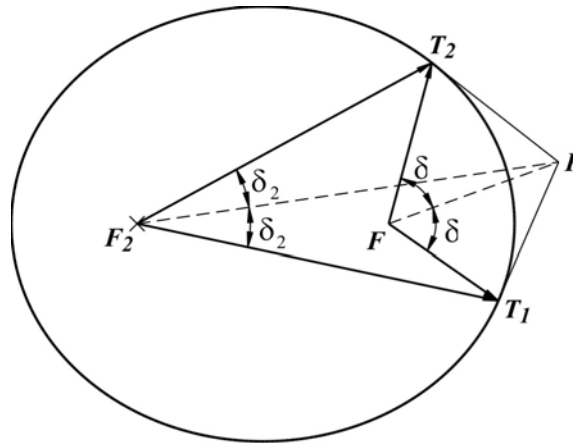


Рис. 4

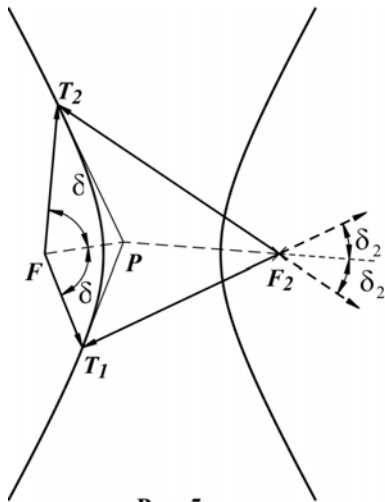


Рис. 5

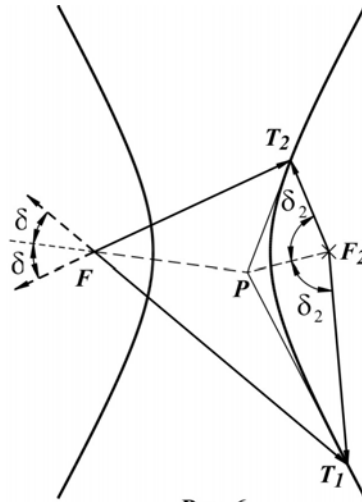


Рис. 6

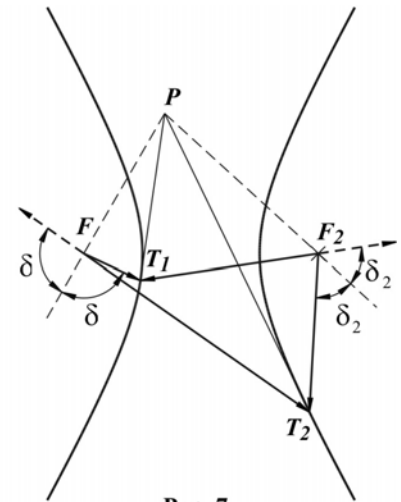


Рис. 7

Доказательство теоремы 4.1.-1 проведем в несколько этапов.

## 4.2. Координаты полюса<sup>1</sup>

Рассмотрим совместно систему уравнений для двух непараллельных касательных (3.2.1.-2), у которых в точках касания для определенности полярные

$$\text{углы } \varphi_2 > \varphi_1 \begin{cases} (\cos \varphi_1 + e)x + (\sin \varphi_1)y - p = 0 \\ (\cos \varphi_2 + e)x + (\sin \varphi_2)y - p = 0 \end{cases} \quad (1)$$

<sup>1</sup> Термин «полюс» ввел французский математик Ф.Ж.Сервуа (Francois Josef de Sevois(1767-1847)) (Ann.math., 1810/11) [см. «Математика XIX века» под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П. Юшкевича, М., «Наука», 1981г., стр. 34], [7,стр.407].

(Вариант с  $\parallel$  касательными будет рассмотрен ниже.) Искомые координаты полюса найдем, как точку пересечения этих касательных. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е  $x(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) + y(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 0$ .

$$\text{Откуда } x = \frac{-y(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}. \quad (2)$$

Подставим теперь  $x$  в верхнее уравнение системы (1)  $\frac{-y(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)(e + \cos \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1} + y \sin \varphi_1 = p$ . Приведем к общему знаменателю и

упростим левую часть уравнения

$$\frac{y(-e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_1)}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1} =$$

$$= \frac{y(-\sin(\varphi_2 - \sin \varphi_1) - e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1))}{\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1}. \text{ Решаем относительно } y \text{ линейное уравнение}$$

и, используя (2), находим координаты полюса

$$x = \frac{p(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}, \quad y = -\frac{p(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \text{ или}$$

$$\frac{p}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \{ \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1, -(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \}. \quad (3)$$

После сокращения общих множителей числителя и знаменателя (выполните это самостоятельно!) имеем

$$P : \frac{p \left\{ \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right\}}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}. \quad (4)$$

Другие, более компактные формулы координат полюса приведены в (5.2.).

Упражнение 1. Решите систему уравнений (1) методом Крамера.

### 4.3. Свойство прямой, соединяющей фокус с полюсом

Рассмотрим вариант, когда полюс имеет реальные координаты, т.е. не находится на бесконечности. В этом случае знаменатель в формуле (4.2.-4)

$$\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \neq 0. \quad (1)$$

Проведем прямую через 2 точки - фокус  $F : \{0,0\}$  и полюс  $P : \{x_p, y_p\}$

$\frac{x-0}{x_p-0} = \frac{y-0}{y_p-0}$ ,  $\frac{x}{x_p} = \frac{y}{y_p}$ ,  $y_p x - x_p y = 0$ . Теперь вместо  $\{x_p, y_p\}$  подставляем

координаты полюса из (4.2.-4)

$$\left(\sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)x - \left(\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)y = 0. \quad (2)$$

Тангенс угла наклона (2)  $\frac{\sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}$ . (3)

Из (3) следует, что тангенсы угла наклона прямой, соединяющей фокус с полюсом, и биссектрисы фокального угла совпадают. Т.к. и биссектриса фокального угла, и прямая, соединяющая фокус с полюсом, проходят через фокус, следовательно, эти прямые совпадают. Для этого варианта теорема доказана.  $\square$

Рассмотрим 2-й вариант, когда касательные в точках касания  $\parallel$  между собой (рассматриваем вариант, связанный с одним из диаметров эллипса или гиперболы, т.к. у параболы нет  $\parallel$  касательных). Кроме того, пусть  $\sin \varphi_1 \neq 0$ , и  $\sin \varphi_2 \neq 0$ . Заметим, что у  $\parallel$  касательных тангенсы углов наклона равны

$$\frac{\cos \varphi_1 + e}{-\sin \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_2 + e}{-\sin \varphi_2}, \quad (4)$$

$$\text{или } \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = 0. \quad (5)$$

Преобразуем левую часть (5)  $2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + 2e \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} =$

$= 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})$ . Уравнение (5) свелось к системе 2-х

независимых уравнений  $\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0$  и  $\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 0$ . Первое из них

дает корни  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi, k = 0, 1$ , которые нам неинтересны, т.к. после нормирования не дают новые решения. Из 2-го уравнения выразим

$e = \frac{-\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}$  и подставим его в тангенс угла наклона, например, 1-ой

$$\begin{aligned} \text{касательной} \quad \frac{\cos \varphi_1 + e}{-\sin \varphi_1} &= \frac{\frac{-\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} + \cos \varphi_1}{-\sin \varphi_1} = \frac{-\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \cos \varphi_1 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{-\sin \varphi_1 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \\ &= \frac{-\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + 3\varphi_1}{2}}{-\sin \varphi_1 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \frac{-\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + 3\varphi_1}{2}}{-\sin \varphi_1 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \\ &= \frac{\frac{1}{2} (-\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \cos \frac{\varphi_2 + 3\varphi_1}{2})}{-\sin \varphi_1 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \frac{-\sin \frac{2(\varphi_2 + \varphi_1)}{4} \sin \frac{4\varphi_1}{4}}{-\sin \varphi_1 \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \frac{\sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}. \end{aligned}$$

Отсюда можно

сделать вывод, что тангенс угла наклона 1-й касательной (а в силу (4) и второй касательной) равен тангенсу биссектрисы фокального угла. И для этого варианта теорема доказана.  $\square$

Остается рассмотреть 3-й вариант – касательные, выходящие из концов радиус-векторов  $\parallel$ , а также  $\sin \varphi_1 = 0$ , и  $\sin \varphi_2 = 0$ . Для эллипса и гиперболы в системе координат Кеплера – этот вариант соответствует главному диаметру. При этом  $\varphi_1 = 0$ , а  $\varphi_2 = \pi$ . Для этих углов касательные  $\perp$  диаметру, а прямая, выходящая из фокуса,  $\perp$  диаметру. Она является биссектрисой, т.к. делит развернутый угол  $\pi$ , представляемый диаметром, пополам. С другой стороны, в силу своей  $\perp$  диаметру, эта прямая  $\parallel$  касательным. Теорема доказана полностью.  $\square$

Выведем теперь уравнение биссектрисы для данного варианта. Для этого возьмем в уравнение  $y = kx + b$  для  $k$  - тангенса угла наклона, например, угол  $\varphi_0$ . Т.к. биссектриса фокального угла проходит через центр координат (соответствующий фокус), то  $b = 0$ . Таким образом получаем  $y = \frac{\cos \varphi_0 + e}{-\sin \varphi_0} x$  и окончательно  $(\cos \varphi_1 + e)x - (-\sin \varphi_1)y = 0$ . (2)

#### 4.4. Нормальное уравнение стороны фокального угла

Как и в (4.3.-2), проведем уравнение прямой через две точки – фокус

$$F : \{0,0\} \text{ и конец радиуса вектора } \{x_1, y_1\} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1} \{ \cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \} : \frac{x-0}{x_1-0} = \frac{y-0}{y_1-0},$$

$$\frac{x}{x_2} = \frac{y}{y_2}, \quad y_1 x - x_1 y = 0, \quad \frac{p \sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} x - \frac{p \cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} y = 0, \quad (\sin \varphi_1)x - (\cos \varphi_1)y = 0. \quad (1)$$

Уравнение (1) уже нормально, т.к.  $\sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_1} = 1$  Т.к. в уравнении (1) нет свободного члена, то знак у радикала несущественен. Для определенности берем “+”.

$$\text{Для второй стороны угла по аналогии получаем } (\sin \varphi_2)x - (\cos \varphi_2)y = 0. \quad (2)$$

#### 4.5. Отклонения от полюса до сторон фокального угла

Нам нужно найти (см. рис.1..3) отклонения  $PD_1, PD_2$  в смысле Гессе (от неориентированной прямой). Для этого подставим координаты полюса (4.2.-4) в уравнение первой стороны фокального угла  $F(x, y) = (\sin \varphi_1)x - (\cos \varphi_1)y$  (4.4.-1) и получим 1-е отклонение

$$\begin{aligned} \eta_1 &= \frac{p \left( \sin \varphi_1 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \cos \varphi_1 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}} = \\ &= \frac{p \left( \sin \left( \varphi_1 - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) + \sin \left( \varphi_1 + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) - \sin \left( \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \varphi_1 \right) - \sin \left( \varphi_1 + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \right)}{2 \left( \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right)} = \\ &= - \frac{p \sin \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right)}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

2-е отклонение от полюса до второй стороны фокального угла

$$\eta_2 = \frac{p \sin \left( \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right)}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}. \quad (2)$$

(Другие формулы отклонения от полюса до сторон угла приведены в (5.4.).)

Сравнивая (1) и (2), убеждаемся, что абсолютные значения отклонений от полюса до сторон угла совпадают. Разные знаки у формул говорит о том, что полюс лежит по разные стороны от сторон фокального угла, т.е. между сторонами, или их продолжениями, если четырехугольник фокус-полюс невыпуклый (рис. 1,2,3).

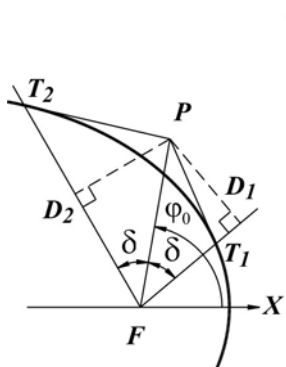


Рис. 1

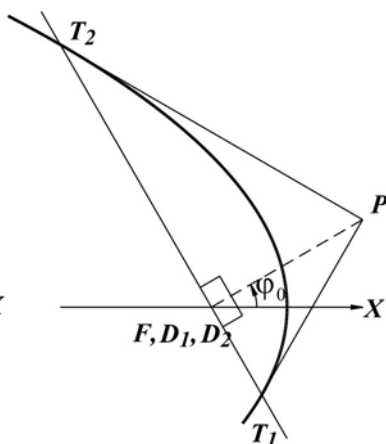


Рис. 2

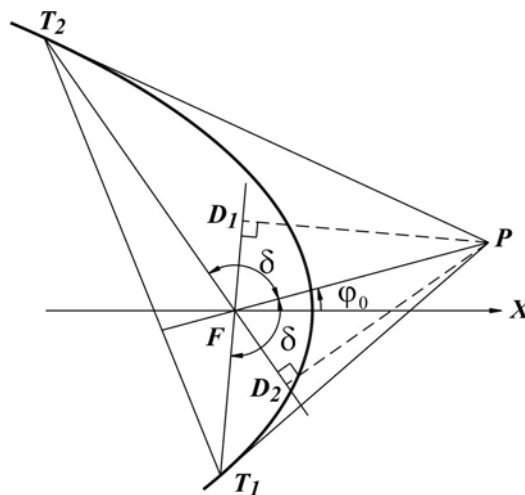


Рис. 3

Т.к. биссектриса угла является геометрическим местом точек, равноудаленных от сторон угла, то тем самым доказано, что полюс совпадает с одной из точек биссектрисы. Теорема для случая, когда касательные не параллельны, 2-й раз доказана.  $\square$

Дадим еще один вариант (более короткий) доказательства теоремы Ф.Лагира.

*Доказательство.* Возьмем два уравнения прямых линий, совпадающих с радиус-векторами. Известно (1.9.), что если сложить два уравнения прямых линий, то получим биссектрису угла, образованного этими прямыми ( в нашем случае эти прямые пересекаются, т.к. выходят из одной точки - фокус). Сложим левые и правые части уравнений (см. 4.4.-1)  $(\sin \varphi_1)x - (\cos \varphi_1)y = 0$  и  $(\sin \varphi_2)x - (\cos \varphi_2)y = 0$  и, произведя сокращения на общий множитель  $2 \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ ,

получим **уравнение биссектрисы фокального угла**

$$\sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)x - \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)y = 0. \quad (3)$$



Найдем координаты отклонения полюса от биссектрисы. Для этого

подставим координаты полюса (4.2.-4)  $P: \frac{\{\cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\}}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}}$  в (3). При этом

**отклонение полюса от биссектрисы фокального угла равно 0 (проверьте!).** Таким образом доказано, что **биссектриса фокального угла коники проходит через полюс.** □

Упражнение 1. Дайте аналитическое объяснение (рис.4.1.-6) и (рис.4.1.-7).

#### 4.6. Некоторые следствия из теоремы о биссектрисе фокального угла

*Следствие 1.* Если хорда соединяет коническую кривую в 2-х точках (т.е. ее направление не является асимптотическим [16,стр.350]) и проходит через фокус, то  $\perp$ , опущенный из полюса на эту хорду, также проходит через фокус, и совпадает с биссектрисой фокального угла (см. рис.4.6.-2). (Заметим, что биссектриса, совпадающая с главным направлением оси у параболы и гиперболы, т.е. с асимптотическим направлением, также удовлетворяет следствию 1. Условие неасимптотического направления важно только при  $\varphi_0 = \pi$  для параболы.)

*Доказательство.* Т.к. в данном случае хорда  $T_1T_2$  является отрезком прямой, то угол между радиус-векторами, составляющими хорду, является развернутым или  $\pi$ . Биссектриса  $FP$  делит этот угол пополам и составляет с каждым радиус-вектором угол  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , т.е.  $\perp$  им и хорде в целом. С другой стороны, как это было доказано в 4.3., биссектриса проходит через полюс. □

Заметим также (см. рис.4.6.-2), что каждый из  $\perp$ , проведенных из полюса  $P$  к соответствующим радиус-векторам  $FT_1, FT_2$ , в данном случае проходит через фокус. Таким образом, эти два  $\perp$  сливаются в один.

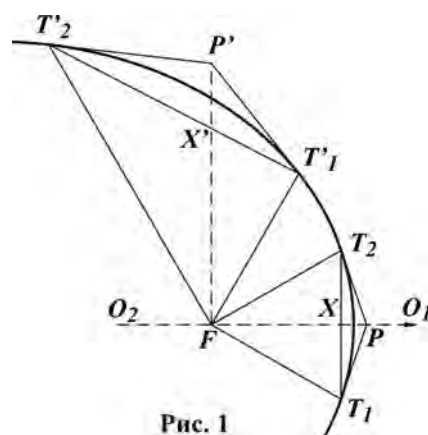
*Определение.* Под симметричной дугой понимаем такую сплошную дугу  $T_1T_2$  (см. рис.1), одну часть которой можно зеркально отобразить на другую относительно оси симметрии. Заметим, что у симметричной дуги к концевым

точкам радиус-векторы равны, а у несимметричной дуги эти радиусы разные.

С точки зрения равенства радиус-векторов из фокуса (любого), у эллипса и у гиперболы существует только одна ось симметрии.

*Следствие 2*<sup>1</sup>. Не существует аффинного отображения симметричной дуги на несимметричную дугу.

*Доказательство.* (От противного.) Допустим, что такое отображение все же существует. Будем отображать (см. рис.1) дугу  $T_1T_2$  на дугу  $T'_1T'_2$  таким образом, чтобы совместились конечные точки дуг (сохранение ориентации дуг при отображении необязательно). Учитывая, что  $\Delta T_1FT_2$



равнобедренный, то  $\frac{T_1X}{XT_2} = 1$ . С другой стороны,

$\Delta T'_1FT'_2$  неравнобедренный,  $FX'$  биссектриса, которая делит противоположную сторону треугольника  $T'_1T'_2$  на части, пропорциональные длинам прилегающих сторон (в нашем случае длинам  $|FT'_1|$ ,  $|FT'_2|$ , которые по условию не равны между собой).

Отсюда  $\frac{T'_1X'}{XT'_2} \neq 1$ . Учитывая, что при аффинном отображении должно сохраняться простое отношение 3-х точек [16, стр.505, теорема 6], приходим к противоречию.□

<sup>1</sup> Читатель, не знакомый с аффинными преобразованиями, может это следствие пропустить.

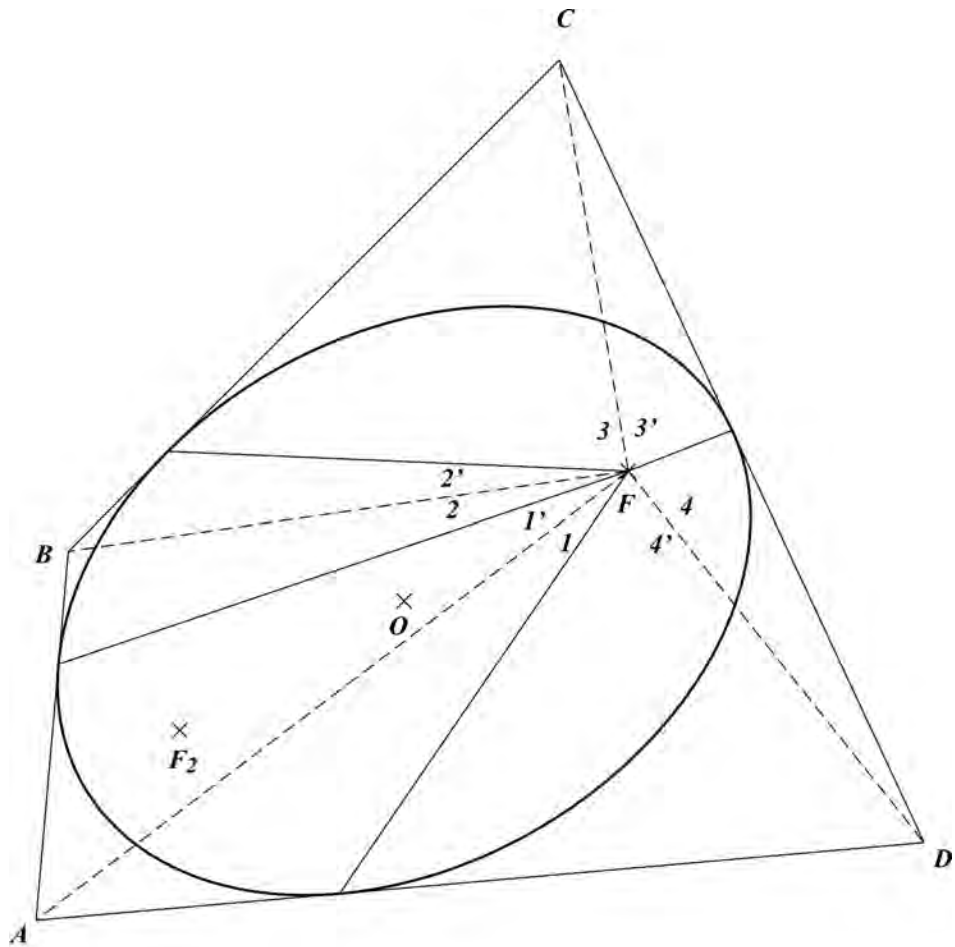


Рис.2

Упражнение 1<sup>1</sup>. Пусть углы, построенные из одного из фокусов эллипса, опираются на противоположные стороны описанного выпуклого четырехугольника (см.рис.2) Доказать, что  $\angle AFB + \angle CFD = \pi$ .

Доказательство. Сумма углов, выходящих из фокуса  $F$ , равна полному углу или  $2\pi$ . Т.е.  $1+1'+2+2'+3+3'+4+4'=2\pi$ . Т.к. в силу теоремы о биссектрисе фокального угла  $i = i'$ , то  $1'+2+3'+4 = \pi$ .

<sup>1</sup> М.Волчкевич. Задача М1860 . Квант 2003/ N5, стр.20

## 5. Направление биссектрисы фокального угла

### $\pm$ ОТКЛОНЕНИЕ

#### 5.1. Расстояние от фокуса до полюса

Вначале предполагаем, что полюс имеет конечные координаты, т.е. не находится на бесконечности (в этом же разделе снимем это ограничение). Следовательно, знаменатель в (4.2.-3)

$$\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) \neq 0. \quad (*)$$

Применяя теорему Пифагора и используя (4.2.-3), получим **расстояние от**

**фокуса до полюса**  $L_{FP} = \sqrt{\frac{p^2((\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)^2 + (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)^2)}{(\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1))^2}} =$

$$= p \left| \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi_2 - 2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \sin^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 - 2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos^2 \varphi_1}}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \right| =$$

$$= p \left| \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))}}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \right|. \quad (1)$$

Дадим еще одну формулу для **расстояния фокус-полюс**. Для этого введем следующие переменные

$$\varphi_0 = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} - \text{полярный угол биссектрисы фокального угла,}$$

$$\delta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}, \delta \in [0, \pi) - \text{угол отклонения от биссектрисы фокального угла,}$$

**абсолютное значение которого равно углу между биссектрисой и любой стороной фокального угла.** (2)

Очевидно, что при  $\delta = 0, \pi$  две точки пересечения радиус-вектора с дугой сливаются в одну. При этом говорят, что “раствор” угла между радиус-векторами равен нулю. В этих 2-х предельных случаях точка полюса принадлежит дуге и

$$L_{FP} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0}.$$

Упражнение 1. Разберите подробно случай  $\delta \rightarrow \pi$ .

Продолжим исследование. Подставим (2) в (1). Тогда  $\varphi_1 = \varphi_0 - \delta$ ,

$$\begin{aligned} \varphi_2 = \varphi_0 + \delta \text{ и } L_{FP} &= p \left| \frac{\sqrt{2(1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1))}}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} \right| = \\ &= p \left| \frac{\sqrt{4 \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}}{2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} \right| = \left| \frac{p \sqrt{4 \sin^2 \delta}}{2 \sin \delta \cos \delta + e 2 \sin \delta \cos \varphi_0} \right| = \\ &= \frac{p}{|\cos \delta + e \cos \varphi_0|}, \end{aligned} \quad (3)$$

или  $L_{FP} = \frac{s \cdot p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}$ , где  $s = \pm 1$ , причем знак '-' берется тогда, когда  $\cos \delta + e \cos \varphi_0 < 0$ . (3а)

Сделаем некоторые выводы из (3).

**Вывод 1. Если  $\delta = \frac{\pi}{2}$ , то фокальный угол будет развернутым. И наоборот, если прямая, проходящая через фокус, образует фокальный развернутый угол, то тогда  $\delta = \frac{\pi}{2}$ .** (4)

**Вывод 2. Если  $\cos \delta + e \cos \varphi_0 \rightarrow 0$ ,** (5)  
то тогда точка полюса устремится к бесконечно удаленной точке от фокуса по направлению  $\varphi_0$  и  $L_{FP} = \infty$ . В том случае, если две прямые на плоскости пересекаются на бесконечности, то они  $\parallel$ . Следовательно, касательные станут  $\parallel$ , а хорда, соединяющая точки касания (см. 3.2.8), станет диаметром. (Мы подробно исследуем данный вопрос в главе 6.)

Упражнение 2. Найти координаты полюса и расстояние до него, если  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}, \delta = \frac{\varphi}{2}$  (см. рис.1).

Ответ.  $L_{FP} = \frac{\sqrt{2}p}{1+e}, P: \frac{p}{1+e} \{1,1\}$ .

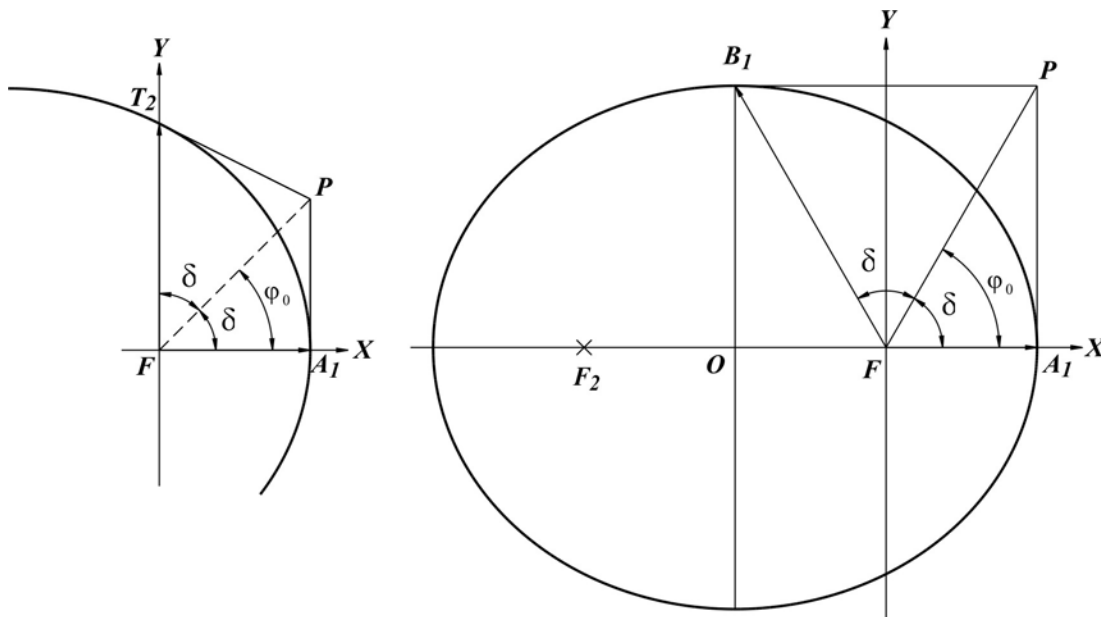


Рис. 1

Рис. 2

Упражнение 3. Найти координаты полюса и расстояние до него у эллипса, если касательные построены (см. рис.2) из вершин большой и малой оси.

Ответ.  $L_{FP} = \frac{\sqrt{2(1-e)} p}{1-e^2}$ ,  $P: \frac{p}{1-e^2} \{1-e, \sqrt{1-e^2}\}$ .

Упражнение 4. Найти координаты полюса и расстояние до него, если касательные построены из концов фокальной хорды, перпендикулярной фокальной оси.

Ответ.  $L_{FP} = \frac{p}{e}$ ,  $P: \{\frac{p}{e}, 0\}$ . (6)

(Ср. 3.2.1.-10)

## 5.2. Координаты полюса. Полярное уравнение точки полюса.

### Смежные и полюсные преобразования

*Замечание 1.* При одновременной замене направления биссектрисы фокального угла на противоположное  $\varphi_0' = \varphi_0 + \pi$  и отклонения угла от биссектрисы на смежное  $\delta' = \pi - \delta$ , точки касания меняются местами. Эти

пары углов  $(\varphi, \delta)$  и  $(\varphi'_0, \delta')$  назовем смежными. Переходы к смежной паре  $(\varphi, \delta) \rightarrow (\varphi'_0, \delta')$  или  $(\varphi'_0, \delta') \rightarrow (\varphi, \delta)$  назовем смежным преобразованием.

Докажем, что при смежном преобразовании не возникает новых решений: множество точек касания от 1..2 и точка полюса остаются прежними.

В самом деле

$$\varphi'_1 = \varphi'_0 - \delta' = (\varphi_0 + \pi) - (\pi - \delta) = \varphi_0 + \delta \quad \text{и} \quad \varphi'_2 = \varphi'_0 + \delta' = (\varphi_0 + \pi) - (\pi + \delta) = \varphi_0 - \delta.$$

Таким образом, всегда возможно исследовать вопросы, связанные с точками касания и полюсом, при отклонении угла  $\delta$  от биссектрисы  $\varphi_0$  не на интервале  $0 \leq \delta < \pi$ , а на более коротком интервале  $0 \leq \delta \leq \frac{\pi}{2}$ . Заметим, что на этом интервале  $0 \leq \cos \delta$  и  $0 \leq \sin \delta$ .

Очевидно также, что если радиус-вектор под углом  $\varphi_0$  проходит через полюс, то радиус-вектор  $\varphi'_0$  направлен в противоположную сторону.

Упражнение 1. Возьмите параболу ( $e = 1, \varphi_0 = 0, \delta = \frac{3}{4}\pi (150^\circ)$ ) и выполните смежное преобразование. Убедитесь, что при смежном преобразовании точки касания и полюс останутся на месте, а направление биссектрисы фокального угла изменится на асимптотическое.  $\square$

Используя те же преобразования, что и в (5.1.-3), и учитывая (4.2.-3), преобразуем координаты полюса

$$\begin{aligned} x &= \frac{p(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = \frac{p(2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})}{2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})} = \\ &= \frac{p \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \frac{p \cos \varphi_0}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y &= -\frac{p(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = -\frac{-p2\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{2\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})} = \\
 &= \frac{p\sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} = \frac{p \sin \varphi_0}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

Запишем эти координаты в векторном виде  $P: \frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}$ . (2)

Запомним и промежуточную формулу координат полюса

$$P: \frac{p}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}} \left\{ \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}, \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \right\}. \quad (2a)$$

Исследуем (2). Для этого придадим углу отклонения  $\delta$  некоторое фиксированное значение в интервале  $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$  (см. замечание 1), и будем изменять  $\varphi_0$ .

Рассмотрим следующие варианты, связанные с углом  $\delta$ .

**Вариант 1<sup>о</sup>**  $\delta \neq \frac{\pi}{2}$  (фокальный угол не равен развернутому)

Для этого варианта  $\cos \delta > 0$  и можно разделить и числитель, и знаменатель (2) на  $\cos \delta$

$$P: \frac{\frac{p}{\cos \delta}}{1 + \frac{e}{\cos \delta} \cos \varphi_0} \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\} = \frac{P_p}{1 + e_p \cos \varphi_0} \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}, \quad (3)$$

получая формулу геометрического места полюсов. Преобразование  $P = f(F, \varphi_0, \delta)$  исходной кривой, при котором фокусу  $F$  (центр координат), биссектрисе фокального угла, заданной направлением  $\varphi_0$ , и отклонению угла от этой биссектрисы -  $\delta$  ( $0 \leq \delta < \frac{\pi}{2}$ ) соответствует полюс  $P$ , назовем полюсным, а кривую, получаемую в результате этого преобразования, назовем полюсной.

Отметим, что при полюсном преобразовании:



- основной фокус полюсной кривой совпадают с основным фокусом исходной кривой;
- совпадают фокальные оси у исходной и полюсной кривых;
- фокальный параметр полюсной кривой  $p_p(p, \delta) = \frac{p}{\cos \delta}$ ; (4)

- эксцентриситет  $e_p(e, \delta) = \frac{e}{\cos \delta}$ ; (5)

а тип эллиптический, параболический или гиперболический зависит от соотношения  $e_p = \frac{e}{\cos \delta}$  и 1. Обратим также внимание, что фокальный параметр  $p_p(p, \delta)$  и эксцентриситет  $e_p(e, \delta)$  изменяются одновременно, причем всегда возрастают.

Из того, что **у исходной кривой эксцентриситет всегда строго меньше, чем у полюсной кривой**  $e < e_p$ , возможны только следующие полюсные преобразования:

- эллипс  $\rightarrow$  (эллипс, парабола, гипербола, директриса);
- парабола  $\rightarrow$  (гипербола, директриса);
- гипербола  $\rightarrow$  (гипербола, директриса).

Рассмотрим вначале случаи, когда исходная кривая эллипс.

*Замечание 1.* Полюсную кривую можно построить и из левого фокуса эллипса. Однако важно то, что при полюсном преобразовании одна пара фокусов у полюсной и исходной кривых совпадают, а также совпадают их фокальные оси. (При таких условиях 2-я пара полюсов не совпадает!)

## Тип 1. Эллиптический

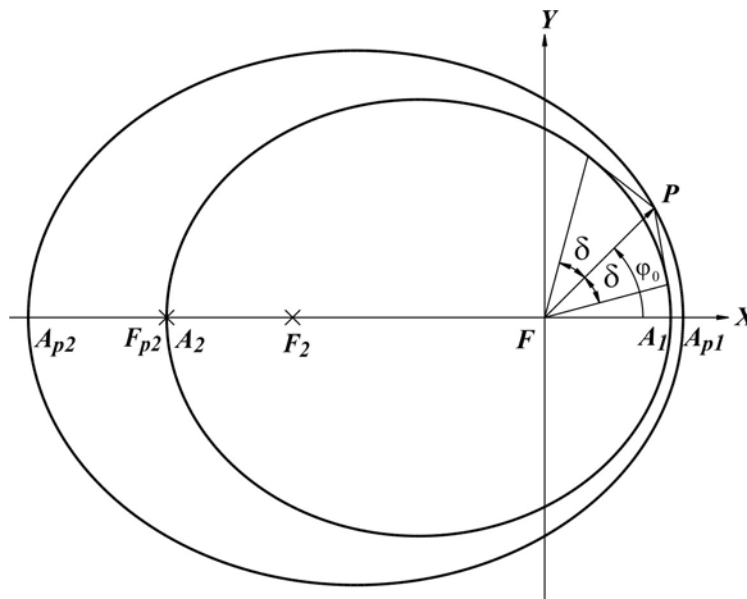


Рис.1

Упражнение 2. а) Найдите основные точки и длины полуосей полюсного эллипса. Сравните полученные результаты с (3.5.1.)

б) Объясните, почему при совпадении основного (правого) фокуса, левые фокусы исходного эллипса и полюсного эллипса не совпадают (см.рис.1).

Упражнение 3. Докажите, что при  $\delta = \frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ) (см. рис.1) точки  $A_2$  и  $F_{p2}$

совпадают.  $\square$

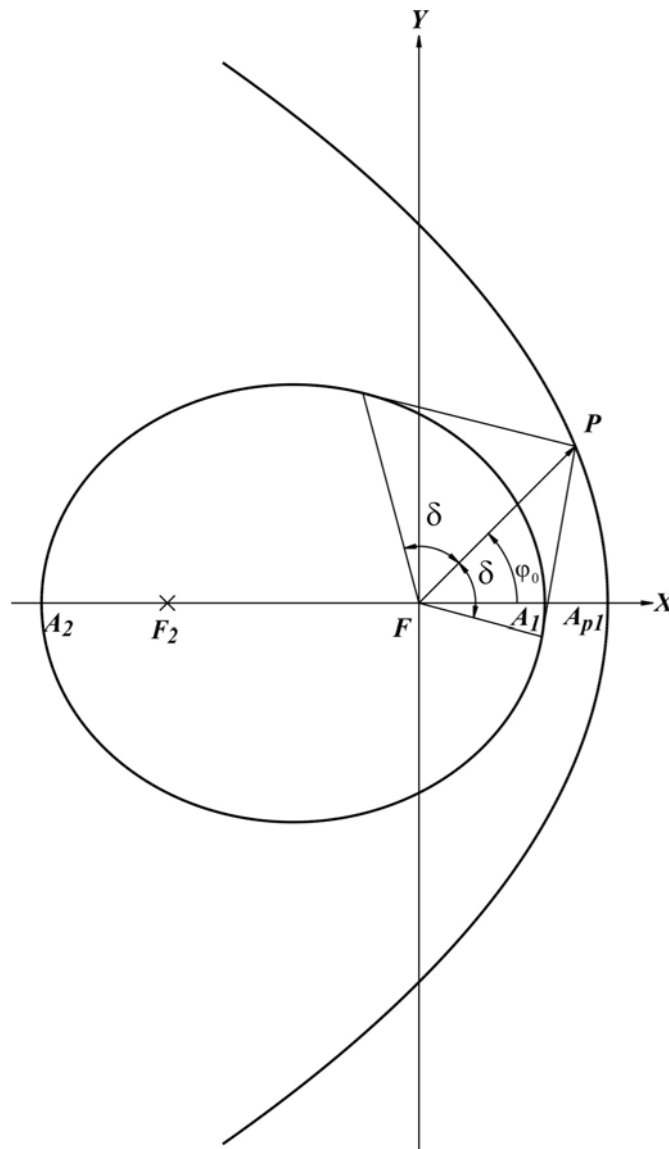
**Тип 2. Параболический**

Рис.2

Упражнение 4. Объясните, почему при полюсном преобразовании исходная парабола никогда не преобразуется в эллипс или параболу.

**Тип 3. Гиперболический**

Упражнение 5. Найдите основные точки и длины полуосей полюсной гиперболы. Сравните полученные результаты с (3.7.3.), (3.7.4.)

упражнение 6. Доказать, что при полюсном преобразовании при стремлении  $\delta \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , координаты правого фокуса полюсной кривой гиперболы стремятся к удвоенному расстоянию от полюса до директрисы исходной кривой.

Доказательство. Из (3.7.3.-4) следует

$$F_{p2} : p_p \left\{ \frac{2e_p}{e_p^2 - 1}, 0 \right\} = kp \left\{ \frac{2ke}{(ke)^2 - 1}, 0 \right\} = \frac{2pe}{e^2 - \frac{1}{k^2}}, \quad \text{где } k = \frac{1}{\cos \delta}. \quad \text{Т.к. при } \delta \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$k \rightarrow \infty$ , то  $F_{p2} \rightarrow \frac{2p}{e}$ .  $\square$

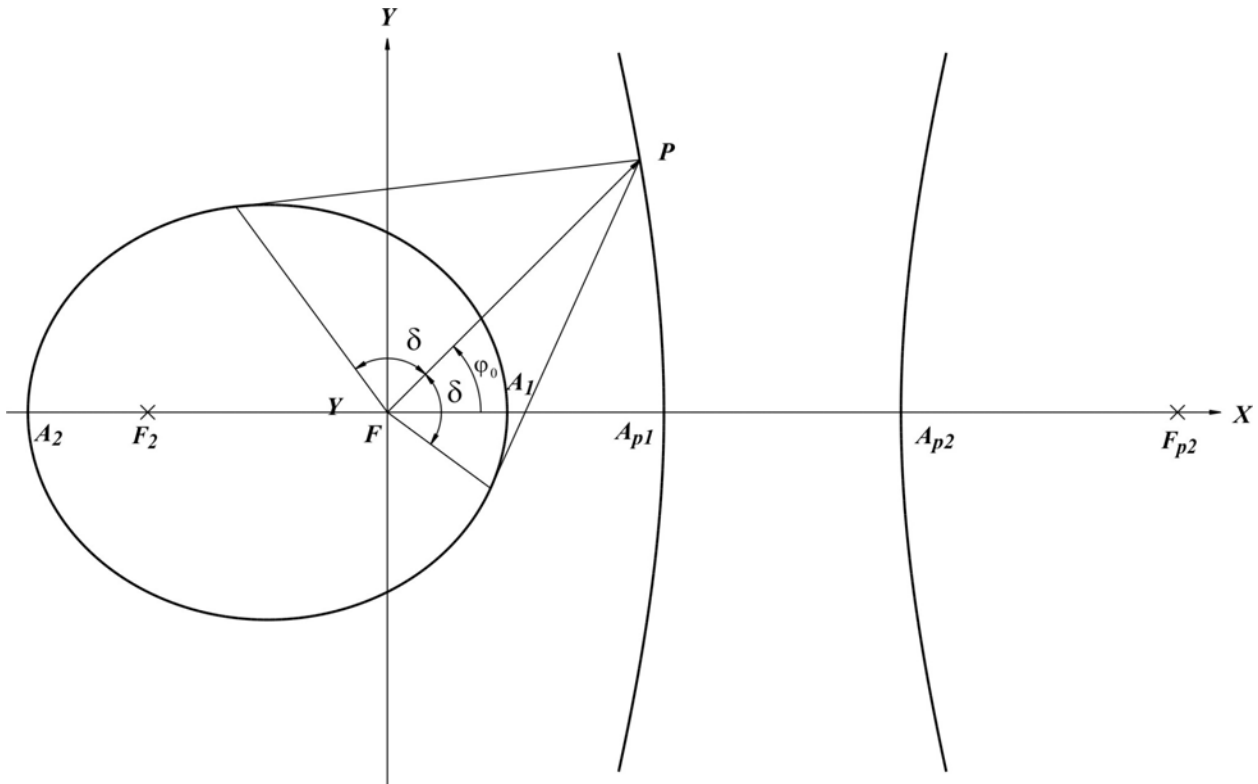
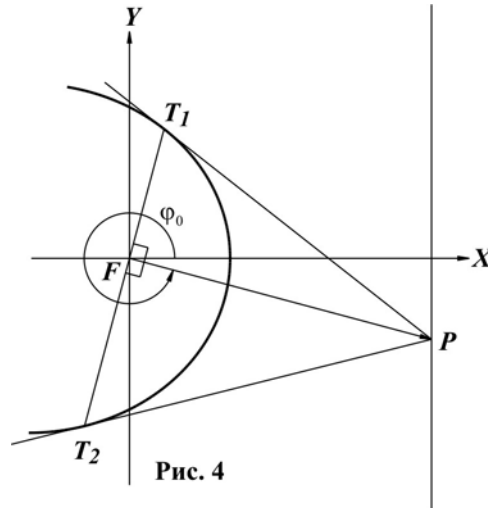


Рис.3

**Вариант 2°  $\delta = \frac{\pi}{2}$  (фокальный угол равен развернутому)**

**Тип 4. Прямая линия (директриса)**



Докажем, что **геометрическое место точек полюсов для всех типов кривых при развернутом фокальном угле лежит на директрисе**. В самом деле, из (2) следует

$$P : \frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \left\{ \cos \varphi_0, \sin \varphi_0 \right\} \Big|_{\delta = \frac{\pi}{2}} = \left\{ \frac{P}{e}, \frac{P}{e} \operatorname{tg} \varphi_0 \right\}. \quad (5)$$

Схематично это можно записать так: эллипс, парабола, гипербола,  $\rightarrow$  (директриса). Из (3) найдем расстояние от фокуса до некоторой точки директрисы

$$L_{FP} = \frac{P}{|\cos \delta + e \cos \varphi_0|} = \frac{P}{e |\cos \varphi_0|}. \quad (6)$$

### 5.3. Половина фокального угла, как функция координат полюса.

#### Координаты точек касания

##### 1°. Работа в нормальной полярной системе координат (НПСК)

Снимем теперь ограничение  $\cos \delta > 0$  и рассмотрим работу в нормальной (необобщенной) полярной системе координат (НПСК), в которой радиус-вектор исходной кривой принимает только конечные положительные значения. Условие

для этого, (см. 3.7.1.), получается из положительности знаменателя полярного уравнения  $1 + e \cos \varphi_0 > 0$  или условий, ему равносильных.

К этому типу полярных уравнений, относятся следующие типы уравнений:

- эллиптический; - параболический (без асимптотического направления  $\varphi \neq \pi$ ); гиперболический (при  $-\beta < \varphi < \beta$  и  $\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{e^2 - 1}\})$ ) (см.3.7.2.-2)).

**Для этих типов кривых, направление вектора  $\varphi$  всегда однозначно совпадает с соответствующей точкой на кривой, при этом исходные и видимые векторы также совпадают. Кроме того, с каждой парой углов  $\varphi_0, \delta$  однозначно связана точка полюса, а расстояние от фокуса до полюса можно вычислить без знаков абсолютной величины**

$$L_{\text{FP}} = \frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}. \quad (1)$$

При работе в НПСК формулу (5.2.-2) можно получить, практически, без вывода: коэффициент перед фигурными скобками – это длина вектора от фокуса до полюса (5.1.3.), а выражение в фигурных скобках – это коэффициенты проекций на оси координат.

Пусть, теперь, известны координаты полюса  $\mathbf{P} : \{x_0, y_0\}$ . Работая в НПСК, по этим координатам можно однозначно вычислить полярный угол биссектрисы фокального угла в силу теоремы Ф.Лагира (4.1.1)  $\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{x_0, y_0\})$ , а также радиус-вектор, который совпадает с расстоянием  $L_{\text{FP}} = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ .

Сформулируем задачу: пусть некоторая точка на расстоянии  $L_{\text{FP}}$  видна из фокуса под углом  $\varphi_0$ . Найдем угол  $\delta$ .

Решение в НПСК

$$\text{Из (5.2.-6) } L_{\text{FP}} = \frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}, \quad \cos \delta + e \cos \varphi_0 = \frac{P}{L_{\text{FP}}}, \quad \cos \delta = \frac{P}{L_{\text{FP}}} - e \cos \varphi_0,$$

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ \frac{P}{L_{\text{FP}}} - e \cos \varphi_0, \pm \sqrt{1 - \left( \frac{P}{L_{\text{FP}}} - e \cos \varphi_0 \right)^2} \right\} \right) \pm 2\pi n, \quad n = 0, 1. \quad (2)$$

Опускаем члены  $2\pi n, n = 0, 1$ , т.к. они, с одной стороны, не дают новых решений, а с другой стороны, после получения решения, углы  $\delta$  должны быть нормализованы (см. 1.2.1.). Последнее равносильно применению слагаемых  $2\pi n$ . Следовательно, представляют интерес только варианты  $0 \leq \delta < \pi$  (т.е. углы  $\delta$  только в верхней полуплоскости), поэтому остается одно решение

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ \frac{p}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0, \sqrt{1 - \left( \frac{p}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0 \right)^2} \right\}). \quad (3)$$

Пример 1. Пусть  $e = 1, p = 1, L_{FP} = 1, \varphi_0 = 0$ . Найдем  $\delta$ .

$$\text{Решение. Из (3) } \delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ \frac{1}{1} - 1 \cdot 1, \sqrt{1 - \left( \frac{1}{1} - 1 \cdot 1 \right)^2} \right\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}) = \frac{\pi}{2}.$$

Упражнение 1. Пусть у параболы  $p = 20$  мм и полюс находится на расстоянии 40 мм вправо от фокуса на фокальной оси. Найти угол отклонения  $\delta$ .

$$\text{Ответ. } \delta = \frac{2\pi}{3} (150^\circ). \square$$

Продолжим исследовать задачу, когда точка видна из фокуса под углом  $\varphi_0$ , а расстояние от фокуса до этой точки  $L_{FP}$ . Сравнивая  $L_{FP}$  и  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0}$  (где  $r$  - радиус-вектор),

можно выяснить, сколько касательных можно провести из данной точки к кривой.

*Замечание 1.* Углу  $\delta > 0$  соответствуют два решения в полярных координатах  $\varphi_0 \pm \delta$ , т.е. две касательных. Углу  $\delta = 0$  соответствует одно решение в полярных координатах  $\varphi_0$  и одна касательная (в данном случае полюс находится на кривой).  $\square$

Решение задачи о количестве касательных к конике разделяется на три варианта.

$$\text{Вариант } L_{FP} > \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0} \quad (2 \text{ решения})$$

$$\text{Доказательство. Из (1) следует } \frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} > \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0},$$

$\cos \delta + e \cos \varphi_0 < 1 + e \cos \varphi_0, \cos \delta < 1$ . Отсюда имеем 2 решения (см. 2).

$$\text{Вариант } L_{FP} = \frac{P}{1 + e \cos \varphi_0} \text{ (1 решение)}$$

Аналогично предыдущему варианту, получаем  $\cos \delta = 1$ ,  $\delta = 0$ .

$$\text{Вариант } L_{FP} < \frac{P}{1 + e \cos \varphi_0} \text{ (нет решений)}$$

Доказательство очевидно.  $\square$

Получен известный результат: **для точки, расположенной за кривой существуют 2 касательных, при расположении на кривой – одна, а внутри кривой касательных нет.**

В дальнейшем изложении, для фокальных углов чаще всего будет использована формула  $\varphi_{1,2} = \varphi_0 \mp \delta$ .

## 2°. Работа в обобщенной полярной системе координат (ОПСК)

Заметим, что работа в ОПСК (см. 3.7.1.) имеет свои особенности, т.к.:

- радиус-вектор может принимать как отрицательные, так и бесконечные значения (асимптотическое направление параболы и точки разрыва гиперболы),
- видимые направления (т.е. такие, которые измеряются по чертежу), и исходные направления не совпадают и отличаются на  $\pi$  (см. 3.7.1.),
- формулу расстояния от фокуса до полюса (5.1.-3) нужно применять, используя функцию абсолютной величины.

Тем не менее, используя (5.2. замечание 1), сведем данную задачу к уже решенной в системе НПСК.

1) Пусть видимый (измеряемый на чертеже) и исходный углы совпадают. Тогда решение дается (2).

2) Если видимый и исходный углы отличаются на  $\pi$ , то для нахождения  $\delta$  нужно решать следующее уравнение (см.5.1.-3а)  $L_{FP} = \frac{-P}{\cos \delta - e \cos \varphi_0}$ . (5)

$$\text{Отсюда } \cos \delta - e \cos \varphi_0 = \frac{-P}{L_{FPol}}, \cos \delta = -\left(\frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0\right), \quad (6)$$

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ -\left(\frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0\right), \pm \sqrt{1 - \left(\frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0\right)^2} \right\}).$$

Т.к.  $0 \leq \delta < \pi$ , то оставляем одно решение (см. (3))



$$\delta = \text{ang}\left(\mathbf{0}, \left\{ \frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0, \sqrt{1 - \left( \frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0 \right)^2} \right\}\right) + \pi. \quad (7)$$

**Вывод 1.** Решения (3) и (7) являются смежными и приводят к одному и тому же множеству касательных, отличающихся только порядком (см. 5.2. замечание 1). Таким образом, **для задачи нахождения касательных неважно, в какой системе работаем - в НПСК или в ОПСК. Исходя из этого, для задачи нахождения касательной гиперболы не будем различать смежные пары, если исходные и видимые направления различаются.** Говоря о нахождении  $\delta$  в упражнениях данного раздела и ниже, будем пользоваться (2), считая  $\varphi_0$  видимым углом.

$$\text{Введем критерий } \sigma = \frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0. \quad (8)$$

Исследуя (7), (8) и используя свойства  $\text{ang}()$  (см.1.2.1.), делаем выводы

2.1. если  $|\sigma| < 1$ , то существуют две различные касательные с угловыми координатами  $\varphi_{1,2} = \varphi_0 \pm \delta$ ,

при этом

2.1.1. если  $\sigma = 0$ , то хорда, соединяющая точки касания, является фокальной, при этом  $\delta$  - прямой угол,

2.1.2. если  $0 < \sigma < 1$ , то  $\delta$  - острый угол,

2.1.3. если  $-1 < \sigma < 0$ , то  $\delta$  - тупой угол,

2.2. если  $|\sigma| = 1$ , то

полюс находится на кривой в точке  $\frac{P\{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}}{1 + e \cos \varphi_0}$ , и при этом считаем,

что точка касания и полюс совпадают,

для эллипса и параболы все точки на кривой имеют  $\sigma = 1$ ,

в случае гиперболы, для левой ветви имеем  $\sigma = 1$ , а для правой **ветви**  $\sigma = -1$  (см.3.7.2.-7),

2.3. если  $|\sigma| > 1$ , то находимся внутри кривой. Касательные из этой точки к кривой провести нельзя.  $\square$

Упражнение 2. Доказать, используя  $\sigma$  - критерий, что точки эллипса:

1) центр симметрии; 2) левый фокус находятся внутри эллипса.

Решение. Нужно сравнить для данных точек выражение  $\sigma = \left| \frac{p}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0 \right|$

и 1, где  $\varphi_0 = \pi$  для вариантов 1) и 2).

Вариант 1<sup>о</sup>: Учитывая (3.5.1.-3)  $O : \left\{ \frac{-pe}{1-e^2}, 0 \right\}$ , получим:  $L_{FP} = \frac{pe}{1-e^2}$ ,

$$\sigma = \left| \frac{1-e^2}{e} + e \right| = \frac{1}{e} > 1 \square$$

Вариант 2<sup>о</sup>: Учитывая (3.5.1.-4)  $F_2 : p \left\{ \frac{-2e}{1-e^2}, 0 \right\}$ , получим

$$L_{FP} = \frac{2pe}{1-e^2}, \quad \sigma = \left| \frac{1-e^2}{2e} + e \right| = \frac{1+e^2}{2e} > 1.$$

(В последнем неравенстве использовалось, что среднее арифметическое больше среднего геометрического)  $\square$

Упражнение 3. Выяснить, могут ли быть полюсами для гиперболы следующие точки: 1) точка центра симметрии; 2) точка правого фокуса.

Решение. Применяем  $\sigma$ -критерий.

Вариант 1<sup>о</sup>.

Из (3.7.3.-3а)  $O : \left\{ \frac{pe}{e^2-1}, 0 \right\}$  имеем  $\varphi_0 = 0$ ,  $\sigma = \left| \frac{e^2-1}{e} - e \right| = \frac{1}{e} < 1$ . Т.е.  $\sigma$ -

критерий выполняется. С другой стороны, полярные углы касательных

$$\varphi_{1,2} = \varphi_0 \mp \delta = \mp \delta = \text{ang}(O, \left\{ -\frac{1}{e}, \pm \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}} \right\}) = \text{ang}(O, \{-1, \pm \sqrt{e^2-1}\}). \quad (\#)$$

и при этих углах происходит разрыв ветвей гиперболы (см. 3.7.2. -1).

Но точку центра симметрии  $O$  гиперболы можно рассматривать как предел последовательности точек полюсов при стремлении полярных углов касательных к значению (#). При этом предельном переходе касательные переходят в асимптоты. Построенный таким образом полюс является точкой пересечения асимптот.

Ответ 2<sup>о</sup>. Полюс невозможен.

Упражнение 4. Создать алгоритм по определению местоположения точки относительно гиперболы и асимптот.

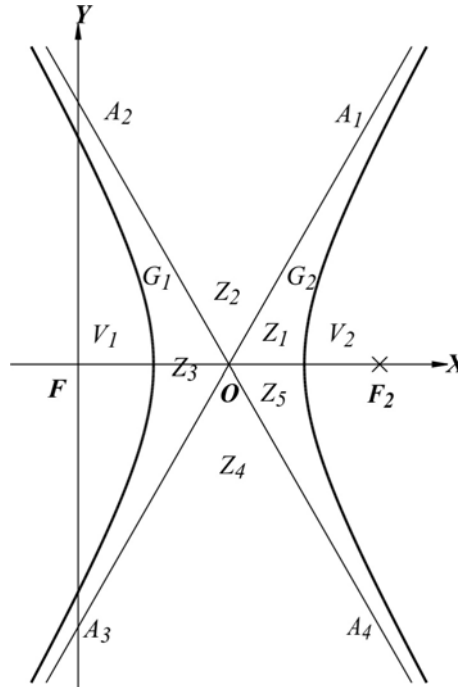


Рис.1

Решение. Пусть некоторая точка  $P$  попадает в точку, луч или одну из областей (см.рис.1) из списка:  $O, A_i, Z_i$  или  $G_i$ . Приведем алгоритм, при помощи которого можно было бы точно узнать, куда именно попадает  $P$ .

Начало алгоритма.

// алгоритм работает по принципу постепенного уточнения местоположения

Объявляем  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  набор малых чисел. Они могут совпадать.

1 шаг. Если  $dist(O, P) < \varepsilon_1$ , то  $O = P$ , выход 1 из алгоритма.

2 шаг. Вычислить и нормализовать  $\psi = ang(O, P)$  и  $\zeta_i = ang(O, A_i)|_{i=1,4}$ .

Добавить луч направления фокальной оси  $\zeta_5 = 2\pi (360^0)$

3 шаг. Цикл от  $i=1$  до 5

3.1 шаг. Если  $|\psi - \zeta_i| < \varepsilon_2$ , то  $P \in$  лучу  $A_i$ , выход 2 из алгоритма.

3.2 шаг. Если  $\psi < \zeta_i$ , то  $P \in$  сектору  $S_i$ ,  $k := i$ , выход из цикла.

Конец цикла.

4 шаг. Вычислить  $L_{FP} = dist(F, P)$ ,  $\varphi_0 = ang(F, P)$ ,  $\sigma = \frac{P}{L_{FP}} - e \cos \varphi_0$ .

5 шаг. // Анализ  $\sigma$ .

5.1 шаг. Если  $|\sigma - 1| < \varepsilon_3$  то // левая ветвь  $P \in G_1$ .

(контроль: должно быть  $k = 3$ ) выход 4 из алгоритма.

5.2 шаг. Если  $|\sigma + 1| < \varepsilon_3$  то // правая ветвь  $P \in G_2$ .

(контроль: должно быть  $k = 4$  или  $k = 5$ ) выход 5 из алгоритма.

5.3 шаг. Если  $|\sigma| < 1$ , то  $P \in Z_k$ , выход 3 из алгоритма. // внешняя область  $Z_k$

5.4. шаг. Если  $\sigma < -1$ , то; // внутренняя правая область

(контроль: должно быть  $k = 4$  или  $k = 5$ ) выход 6 из алгоритма.

5.5. шаг. Если  $\sigma > 1$ , то // внутренняя левая область

(контроль: должно быть  $k = 3$ ) выход 7 из алгоритма.

Конец алгоритма.  $\square$

*Замечание 2.* Мы ввели область  $Z_5$ , чтобы иметь возможность обрабатывать углы  $\zeta_4 < \psi < 2\pi$ . После окончания работы алгоритма и в том случае, если  $P$  попала в одну из областей  $Z_1, Z_5$ , имеющих одни и те же свойства для задач “полюс - касательные”, целесообразно эти области объединить. Т.е. считаем, что эта точка принадлежит объединению областей:  $P \in Z_1 \cup Z_5$ .

*Замечание 3.* Т.к. предлагаемый алгоритм численный, то в цепочках “Если” рекомендуем исследовать сначала на “равенство” (шаги 5.1 и 5.2), а затем на “неравенство”.  $\square$

*Указание.* Исходные данные в следующем упражнении подобраны так, что их можно выполнить без калькулятора. Для этого рекомендуем применить “таблицу часто используемых углов” (см.1.2.1.13<sup>0</sup>)

Упражнение 4. Дана гипербола ( $e = 2, p = 25$  мм). Полярные координаты  $P$  следующие

$$\text{а) (см.рис.2) } L_{FP} = \frac{2p}{2\sqrt{2}-1}, \varphi_0 = \frac{\pi}{4} (45^\circ), \text{ (см.рис.3) } L_{FP} = \frac{2p}{4-\sqrt{3}}, \varphi_0 = 0 (0^\circ).$$

Найти угол  $\delta$  и видимые полярные углы  $\varphi_1, \varphi_2$ , под которыми видны  $T_1, T_2$ .

Ответы.

$$\text{а) } \delta = \frac{2\pi}{3} (120^\circ), \varphi_1 = -\frac{5\pi}{12} (-75^\circ) = \frac{19\pi}{12} (285^\circ), \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} (-30^\circ) = \frac{23\pi}{12} (345^\circ);$$

$$\text{б) } \delta = \frac{5\pi}{6} (150^\circ), \varphi_1 = \frac{\pi}{6} (30^\circ), \varphi_2 = -\frac{\pi}{6} (-30^\circ) = \frac{11\pi}{6} (330^\circ).$$

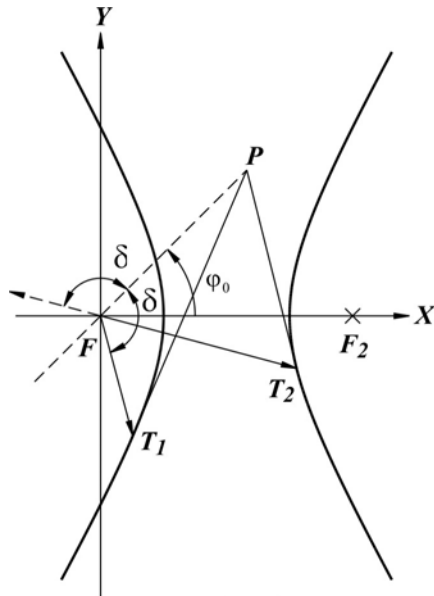


Рис. 2

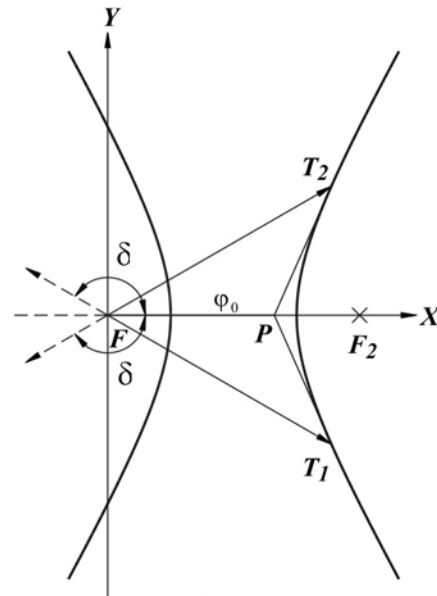


Рис. 3

Упражнение 5. Найти угол  $\delta$  у эллипса, если касательные построены из вершин малой оси (см.рис.4).

Решение. Ранее доказано (3.5.1.-7), что касательные в этих точках  $\parallel$ , следовательно  $L_{FP} = \infty$ . Т.к.  $\varphi_0 = 0$ , то из (1) следует  $\delta = \text{ang}(\theta, \{-e, \sqrt{1-e^2}\})$ . (Ср. 3.5.1.-7).

Упражнение 6. Найти угол  $\delta$  у гиперболы, если касательные построены из вершин действительной оси (см.рис.5).

Решение. Как и в предыдущем упражнении, устанавливаем, что  $L_{FP} = \infty$ . Т.к.  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ , то из (1) следует  $\delta = \text{ang}(\theta, \{0,1\}) = \frac{\pi}{2}$ . (Ср. 5.1.-4). Заметим, что решение этой задачи не изменилось, если бы мы рассматривали касательные из большой оси эллипса.  $\square$

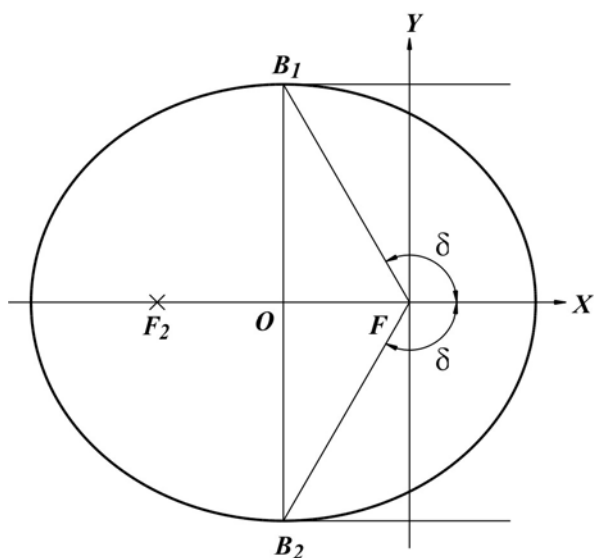


Рис. 4

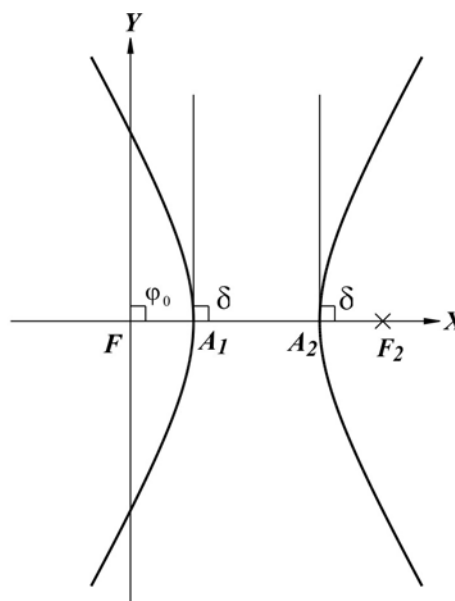


Рис. 5

Можем сформулировать следующий важный вывод: каждой точке плоскости вне коники однозначно соответствуют углы  $\varphi_0, \delta$  данной коники. В связи с этим, непрерывно меняя углы  $\varphi_0, \delta$ , можно нарисовать вне коники любую непрерывную кривую, в том числе самопересекающуюся (кривая может, также, касаться исходной коники). Например, можно нарисовать окружность, прямоугольник или треугольник над эллипсом. Рассмотрение задач, возникающих при этом, выходит за рамки данной работы.

### 5.4. Отклонение от полюса до стороны фокального угла

Преобразуем отклонение (4.6.-1) от полюса до сторон фокального угла, выражая его через угловые переменные  $\varphi_0, \delta$

$$\eta_{1,2} = \pm \frac{p(\cos(\varphi_2 - \varphi_1) - 1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi_1) + e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1)} = \pm \frac{-2p \sin^2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}{2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})} =$$

$$= \mp \frac{p \sin \delta}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} = \mp L_{\text{FP}} \sin \delta. \quad (1)$$

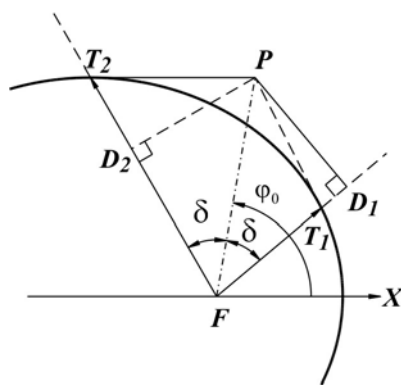


Рис. 1

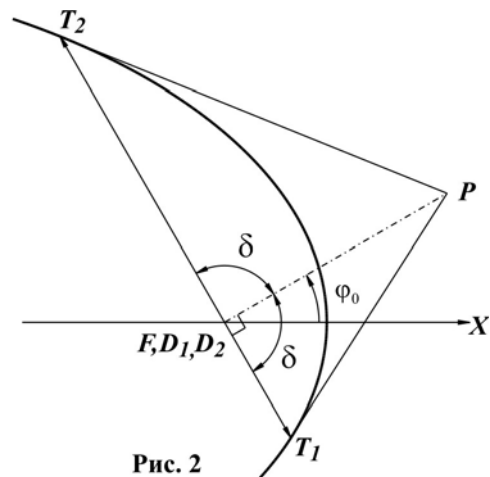


Рис. 2

Т.к.  $0 \leq \delta < \pi$ , то  $\sin \delta \geq 0$ . Обратим также внимание на разные знаки у отклонения к разным сторонам угла. При геометрическом анализе рисунков 1...5 используйте  $\sin(\pi - \delta) = \sin \delta$ .

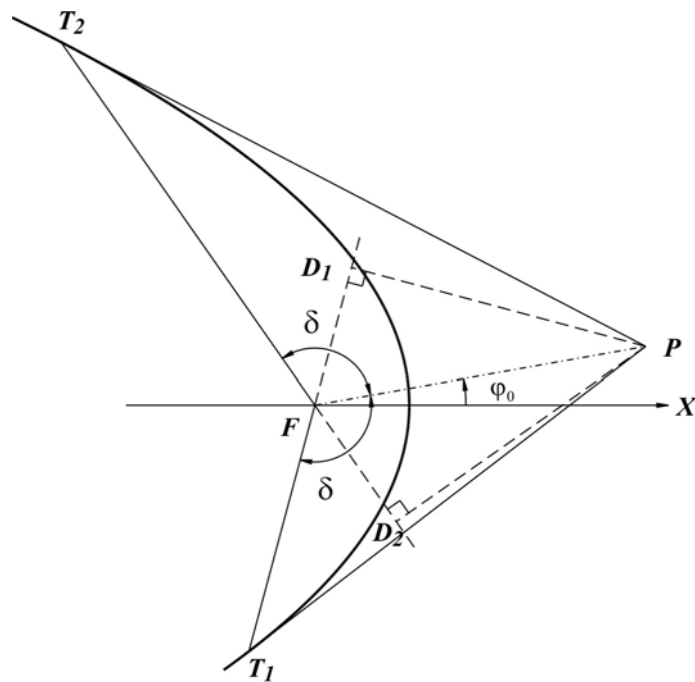


Рис. 3

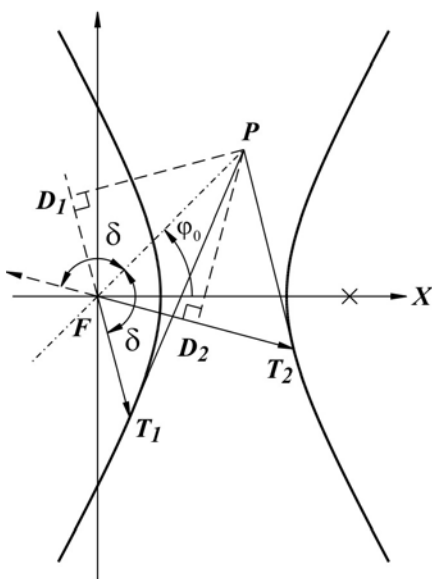


Рис. 4

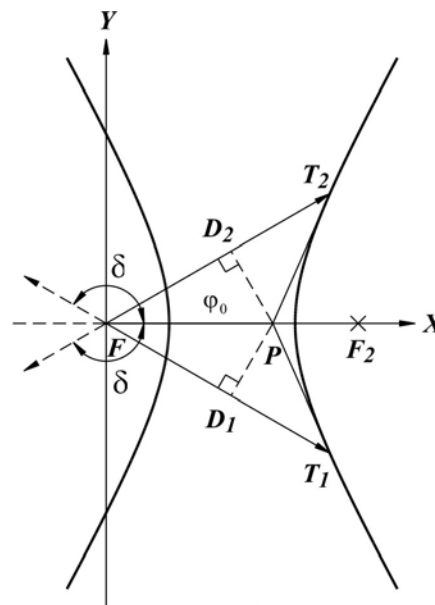


Рис. 5

### 5.5. Уравнение биссектрисы фокального угла

Запишем уравнение прямой линии в виде  $y = kx + b$ . Но, т.к. биссектриса проходит через фокус – центр координат, то  $b = 0$ . Поэтому

$$y = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} x. \tag{1}$$



(Напомним, что отрезок этой прямой между точками кривой называют **фокальной хордой**.) Преобразуем теперь (1)  $(\sin \varphi_0)x - (\cos \varphi_0)y = 0$ . (2)

Это уравнение уже нормализовано  $A^2 + B^2 = \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$ . Заметим также, что нормальный вектор уравнения (2)  $\{\sin \varphi_0, -\cos \varphi_0\} \perp$  вектору направления биссектрисы  $\{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}$ .

Упражнение 1. Найти нормальное уравнение биссектрисы фокального угла  $A_1FB_1$  (см. рис.1), построенного к вершинам большой и малой оси.

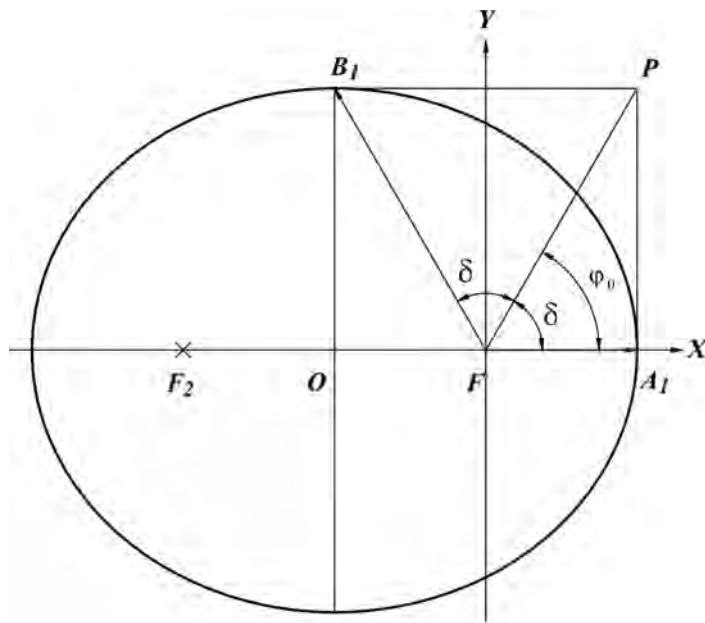


Рис. 1

Решение. Находим координаты  $P: \frac{P}{1-e^2} \{1-e, \sqrt{1-e^2}\}$  (см. 5.1. упр.3), откуда

$\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1-e, \sqrt{1-e^2}\})$ ,  $\cos \varphi_0 = \frac{1-e}{2(1-e)}$ ,  $\sin \varphi_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{2(1-e)}$ . Из (2) получаем

$$\frac{\sqrt{1-e^2}}{2(1-e)}x - \frac{1-e}{2(1-e)}y = 0.$$

## 5.6. Хорда

### 5.6.1. Уравнение хорды

Для уравнения прямой линии  $Ax + By + C = 0$  (\*)

найдем значения коэффициентов  $A = y_2 - y_1$ ,  $B = x_1 - x_2$ ,  $C = y_1x_2 - x_1y_2$

$$A = \frac{p \sin \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} - \frac{p \sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} = \frac{p(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 + e(\sin(\varphi_2 - \varphi_1)))}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)},$$

$$B = -\left(\frac{p \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} - \frac{p \cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1}\right) = -\frac{p(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)},$$

$$C = \frac{p^2(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)} = -\frac{p^2(\sin(\varphi_2 - \varphi_1))}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)}.$$

Сокращая все коэффициенты уравнения (\*) на  $\frac{p}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)}$ ,

получим  $(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 + e(\sin(\varphi_2 - \varphi_1)))x - (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)y - p \sin(\varphi_2 - \varphi_1) = 0$ . (1)

Далее, как и в предыдущих разделах, заменяя углы  $\varphi_1, \varphi_2$  на  $\varphi_0, \delta$  (5.1.-2),

получим  $(2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} (\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}))x + 2(\sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})y -$

$$- 2p \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0, (\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2})x + \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} y -$$

$$- p \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = 0, (\cos \varphi_0 + e \cos \delta)x + \sin \varphi_0 y - p \cos \delta = 0. \quad (2)$$

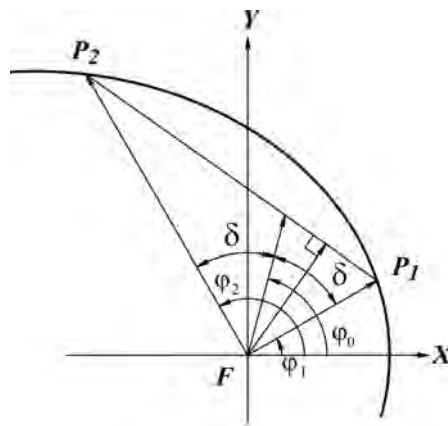


Рис. 1

Вычислим коэффициент нормирования

$s\sqrt{A^2 + B^2} = s\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}$ . Напомним, что для получения нормального уравнения Гессе  $\cos \theta x + \sin \theta y - p_L = 0$ , нужно выполнить условие, чтобы свободный член был  $-p \cos \delta < 0$ . Т.к.  $\delta \in [0, \pi]$ , то знак  $s = +1$  перед радикалом выбираем тогда, когда  $\cos \delta \geq 0$ . При  $\delta \in [0, \frac{\pi}{2}]$  получаем, что условие

$$\frac{-p \cos \delta}{\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \leq 0 \text{ выполнено. При } \delta \in (\frac{\pi}{2}, \pi] \text{ выбираем } s = -1.$$

Таким образом, нормальное уравнение хорды

$$\frac{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)x + (\sin \varphi_0)y - p \cos \delta}{s\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} = 0, \quad (3)$$

или 
$$\frac{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)x + (\sin \varphi_0)y - p \cos \delta}{s\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta}} = 0. \quad (3a)$$

Отсюда

$$\cos \theta = \frac{\cos \varphi_0 + e \cos \delta}{s\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta}}, \quad \sin \theta = \frac{\sin \varphi_0}{s\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta}},$$

$$p_L = \frac{p \cos \delta}{s\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta}}, \quad (4)$$

и угол наклона единичного нормального вектора

$$\theta = \text{ang}(\mathbf{0}, s\{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\}). \quad (4a)$$

Найдем тангенс угла наклона хорды

$$t_h = \frac{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)}{-\sin \varphi_0} \quad (5)$$

к оси абсцисс и сравним его с тангенсом угла наклона касательной по направлению  $\varphi_0$   $t_{pol} = \frac{(\cos \varphi_0 + e)}{-\sin \varphi_0}$ . Для симметричного случая, когда направление

биссектрисы совпадает с направлением фокальной оси  $\varphi_0 = 0$ , тогда  $\sin \varphi_0 = 0$ ,

$t_h = t_{pol} = \infty$ . Т.е. хорда и касательная  $\parallel$ . Но для других направлений они, вообще

говоря, различны.

Из (4а) и (1.4.6.-4) найдем **угол наклона хорды к оси абсцисс**

$$\mathcal{G} = \theta + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, s\{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\}) + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, s\{-\sin \varphi_0, \cos \varphi_0 + e \cos \delta\}). \quad (6)$$

Упражнение 1. Найти **угол между направлением биссектрисы фокального угла хорды и ее нормальным вектором.**

Упражнение 2. Пусть в параболе хорда соединяет следующие точки, заданные полярными углами  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Найти угол наклона хорды к оси абсцисс.

Решение.  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}; \delta = \frac{\pi}{4}; s = 1$ . Отсюда  $\mathcal{G} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{2\sqrt{2}}{2}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, 2\})$ .

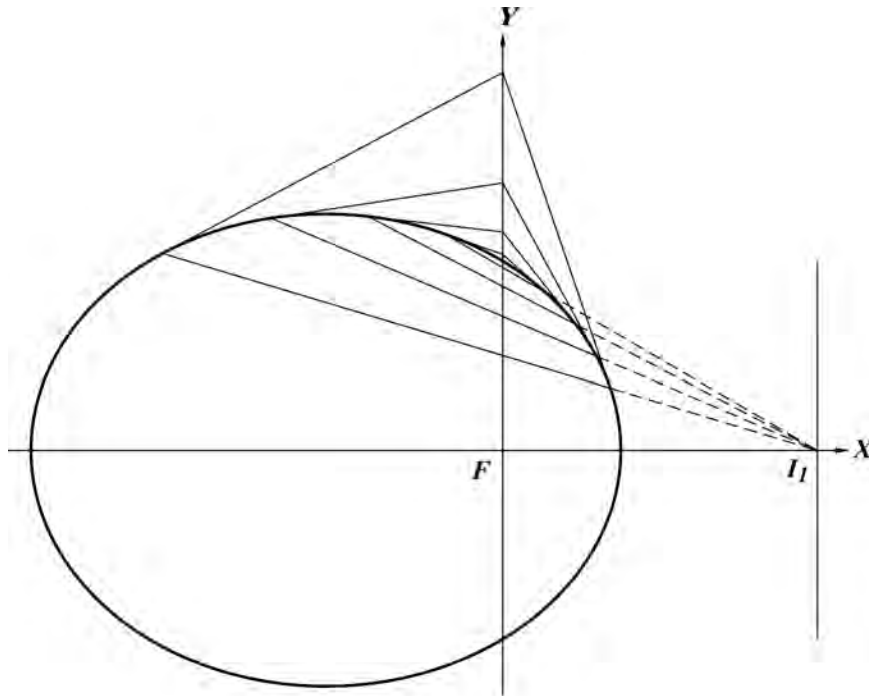


Рис. 2

Упражнение 3. Пусть геометрическое место полюсов видно из фокуса под углом  $\varphi_0$ . Доказать, что **продолжения всех хорд, лежащих в основании полярных треугольников, пересекаются в некоторой точке, лежащей на соответствующей директрисе.** Найти координаты этой точки.

Решение. Возьмем две хорды, описываемые (2), у которых направление биссектрисы фокального угла  $\varphi_0$  одинаково, а отклонения  $\delta$  от нее разные. Точка

пересечения этих хорд  $I_1$  находится из следующей системы уравнений

$$\begin{cases} (\cos \varphi_0 + e \cos \delta_1)x + \sin \varphi_0 y = p \cos \delta_1 \\ (\cos \varphi_0 + e \cos \delta_2)x + \sin \varphi_0 y = p \cos \delta_2 \end{cases}, \quad (*)$$

$$\text{из которой видно, что } I_1 : \left\{ \frac{p}{e}, -\frac{p \cos \varphi_0}{e \sin \varphi_0} \right\} = \frac{p}{e} \{1, -\operatorname{ctg} \varphi_0\} \quad (7)$$

не зависит от  $\delta$  и лежит на директрисе.  $\square$

На (рис.2) показан случай для  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ .

Упражнение 4. Найти **условие || двух хорд.**

Решение. Приравниваем тангенсы наклона (5) двух хорд

$$\frac{(\cos \varphi_{01} + e \cos \delta_1)}{\sin \varphi_{01}} = \frac{(\cos \varphi_{02} + e \cos \delta_2)}{\sin \varphi_{02}}. \quad (8)$$

Отсюда  $\sin \varphi_{02} \cos \varphi_{01} - \sin \varphi_{01} \cos \varphi_{02} + e(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2) = 0$ ,

$$\sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = -e(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2). \quad (9)$$

$$\sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + e(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2) = 0. \quad (9a)$$

Проверим (9) для двух хорд фокальной хорды, у которой  $\varphi_{01} = 0, \delta_1 = \frac{\pi}{2}$  и малой оси эллипса  $\varphi_{02} = \pi, \delta_2 = \operatorname{ang}(\theta, \{e, \sqrt{1-e^2}\})$ . Тогда (9) преобразуется после подстановки в  $0 = -0$ .  $\square$

Задача, связанную с построением внутри эллипса или гиперболы вписанного параллелограмма, требует не только условие || двух противоположных хорд, но еще и равенства длин этих хорд, иначе получим не параллелограмм, а трапецию. Эту задачу целесообразно решать методами следующей главы – “**6. Диаметр**”.

Упражнение 5. Используя (2), найти соотношение, при котором хорда становится диаметром.

Решение. В этом случае необходимо, чтобы хорда проходила через центр симметрии системы  $O : \left\{ \frac{-pe}{1-e^2}, 0 \right\}$  (см. 3.1.2.). Подставляем эту точку в (2)

$$(\cos \varphi_0 + e \cos \delta) \left( \frac{-pe}{1-e^2} \right) - p \cos \delta = 0, \quad \frac{e \cos \varphi_0}{1-e^2} + \frac{(e^2 + 1 - e^2) \cos \delta}{1-e^2} = 0, \quad \cos \delta + e \cos \varphi_0 = 0 \quad (10)$$

(см.5.1.-5).

### 5.6.2. Квадрат длины хорды

Вычислим по теореме Пифагора квадрат длины хорды

$$L_h^2 = \left( \frac{p \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} - \frac{p \cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} \right)^2 + \left( \frac{p \sin \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} - \frac{p \sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} \right)^2 =$$

$$= p^2 \frac{(\cos \varphi_2 (1 + e \cos \varphi_1) - \cos \varphi_1 (1 + e \cos \varphi_2))^2 + (\sin \varphi_2 (1 + e \cos \varphi_1) - \sin \varphi_1 (1 + e \cos \varphi_2))^2}{((1 + e \cos \varphi_2)(1 + e \cos \varphi_1))^2}.$$

Далее рассмотрим числитель и знаменатель этой дроби отдельно.

Числитель

$$(\cos \varphi_2 + e \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 - \cos \varphi_1 - e \cos \varphi_2 \cos \varphi_1)^2 + (\sin \varphi_2 + e \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 -$$

$$- \sin \varphi_1 - e \sin \varphi_1 \cos \varphi_2)^2 = (-2 \sin \varphi_0 \sin \delta)^2 + (2 \sin \delta \cos \varphi_0 + 2e \sin \delta \cos \delta)^2 = 4 \sin^2 \delta \cdot$$

$$\cdot (\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta) = 4 \sin^2 \delta (1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta).$$

Знаменатель

$$(1 + e \cos \varphi_2 + e \cos \varphi_1 - e^2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1)^2 = (1 + e \cos \varphi_2 + e \cos \varphi_1 -$$

$$+ e^2 \frac{(\cos 2\delta + \cos 2\varphi_0)}{2})^2 = (1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \frac{2 \cos^2 \delta - 1 + 2 \cos^2 \varphi_0 - 1}{2})^2 =$$

$$= (1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta - e^2 \sin^2 \varphi_0)^2 = (1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 (\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi_0))^2.$$

$$\text{Окончательно } L_h^2(\varphi_0, \delta) = p^2 \frac{4 \sin^2 \delta (1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta)}{(1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 (\cos^2 \delta - \sin^2 \varphi_0))^2} \quad (1)$$

$$\text{или } L_h^2(\varphi_0, \delta) = p^2 \frac{4 \sin^2 \delta ((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0)}{((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0)^2}. \quad (1a)$$

Упражнение 1. Проверить формулу (1a) для окружности.

Указание. У хорды, опирающейся на дугу окружности  $\alpha$ , длина хорды -

$$L_h = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ где } R - \text{ радиус окружности.}$$

Упражнение 2. Проверить формулу (1) для фокальной хорды.

Решение. В этом случае хорда состоит из 2-х радиусов, между которыми находится угол  $\pi$ . Отсюда  $\delta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \delta = 0$ ,  $\sin \delta = 1$  и из (1a) имеем, что

$$L_h^2 = \frac{4p^2}{(1 - e^2 \sin^2 \varphi_0)^2}. \quad (2)$$

С другой стороны,

$$(r_1 + r_2)^2 = \left( \frac{p}{1 + e \cos \varphi} + \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \pi)} \right)^2 = \left( \frac{p}{1 + e \cos \varphi} + \frac{p}{1 - e \cos \varphi} \right)^2 =$$

$$\left( \frac{p(1 - e \cos \varphi + 1 + e \cos \varphi)}{1 - e^2 \cos^2 \varphi} \right)^2 = \frac{4p^2}{(1 - e^2 \cos^2 \varphi)^2}. \quad (3)$$

Т.к.  $\varphi_0 = \varphi - \frac{\pi}{2}$  (биссектриса фокального угла  $\perp$  направлению  $\varphi$ ), то  $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi_0$  и (2),(3) тождественны.

Упражнение 3. Возьмем **две фокальные взаимно  $\perp$  хорды** (см. рис.1). Доказать, что **отношение произведения их длин к сумме их длин есть величина постоянная, не зависящая от ориентации этих хорд.**

Доказательство. Рассмотрим величину (3)  $\frac{1}{L_h}$

$$\frac{1}{L_h} = \frac{1}{L_{h1}} + \frac{1}{L_{h2}} = \frac{L_{h2} + L_{h1}}{L_{h1} \cdot L_{h2}} = \frac{1 - e^2 \cos^2 \varphi_0}{2p} + \frac{1 - e^2 \cos^2(\varphi_0 - \frac{\pi}{2})}{2p} =$$

$$= \frac{2 - e^2(\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0)}{2p} = \frac{2 - e^2}{2p}. \text{ Отсюда } L_h = \frac{2p}{2 - e^2}. \quad (4)$$

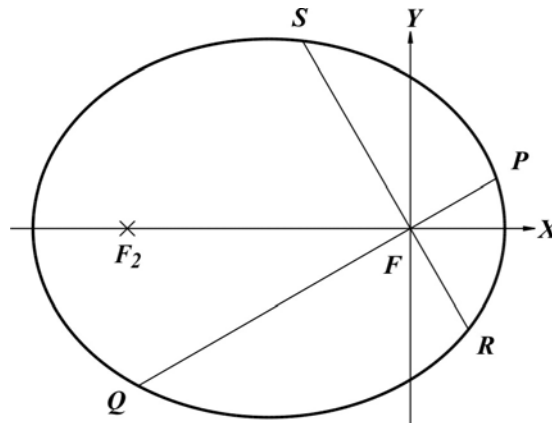


Рис.1

Упражнение 4. По коэффициентам уравнения хорды (2) найти координаты полюса.

Решение. Дано 
$$\begin{cases} \cos \varphi_0 + e \cos \delta = A \\ \sin \varphi_0 = B \\ -p \cos \delta = C \end{cases} . \quad (5)$$

Следовательно,  $\cos \delta = -\frac{C}{p}$ ,  $\cos \varphi_0 = A + \frac{eC}{p}$ . Теперь однозначно находим

координаты полюса

$$P_{pol} = \frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \{ \cos \varphi_0, \sin \varphi_0 \} = \frac{p}{-\frac{C}{p} + eA + \frac{e^2 C}{p}} \left\{ A + \frac{eC}{p}, B \right\} =$$

$$= \frac{p^2}{C(e^2 - 1) + epA} \left\{ \frac{pA + eC}{p}, B \right\}. \quad (6)$$

Упражнение 5. Найти длины осей эллипса.

Решение.

**Большая ось.** Т.к. касательные на концах большой оси  $\downarrow \uparrow$  между собой и каждая из них  $\perp$  большой оси, то  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta = \frac{\pi}{2}$ . Отсюда

$$L_h^2 = \frac{4p^2}{(1-e^2)^2}, \quad (7)$$

$$L_h = \frac{2p}{(1-e^2)}. \quad (\text{Ср. 3.5.1.-2}) \quad (7a)$$

**Малая ось.** Аналогично, как и для большой оси (см.рис.2), находим  $\varphi_0 = \pi$ .

Найдем  $\delta$

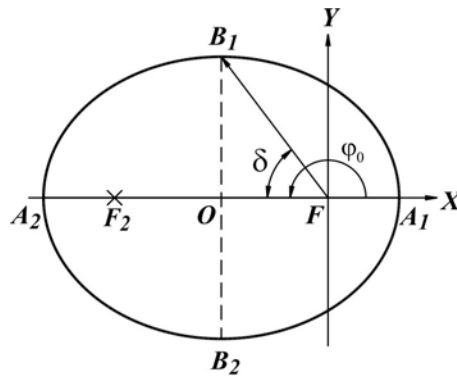


Рис. 2

$$\delta = \text{ang}(F, A_2) - \text{ang}(F, B_1) = \pi - \text{ang}\left(\mathbf{0}, \frac{p}{1-e^2} \{-e, \sqrt{1-e^2}\}\right) = \pi +$$

$$+ \text{ang}\left(\mathbf{0}, \{-e, -\sqrt{1-e^2}\}\right) = \text{ang}\left(\mathbf{0}, \{e, \sqrt{1-e^2}\}\right). \quad \cos \delta = \frac{e}{\sqrt{e^2 + (1-e^2)}} = e, \quad \sin \delta = \sqrt{1-e^2}.$$

$$\text{Отсюда } L_h^2 = \frac{4p^2(1-e^2)^3}{(1-e^2)^4} = \frac{4p^2}{(1-e^2)}. \quad (8)$$



$$L_h = \frac{2p}{\sqrt{1-e^2}} \text{ (ср. 3.5.1.-8).}$$

Упражнение 6. Найти длину действительной оси гиперболы.

Ответ.  $\frac{2p}{e^2-1}$ . (Ср. 3.7.3.-2а, 3.7.2.-7)

### 5.6.3. Расстояния и отклонения от фокуса и от полюса до хорды

Учитывая, что координаты фокуса в системе Кеплера  $F : \{0,0\}$ , подставляем их в уравнение хорды (5.6.1.-3) и получаем **расстояние от фокуса до хорды**

$$h_{Fh} = \left| \frac{p \cos \delta}{\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \right|, \quad (1)$$

или  $h_{Fh} = \left| \frac{p \cos \delta}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta}} \right|, \quad (1a)$

Заметим, что при  $\delta = \frac{\pi}{2}$  имеем  $\cos \delta = 0$ , а, следовательно, и  $h_{Fh} = 0$ . В этом случае хорда является фокальной.

Теперь найдем **расстояние от полюса до хорды**. Для этого, аналогично, из (5.2.-2) подставим координаты полюса  $\frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}$  в

уравнение хорды из (5.6.1.-3)  $\left| \frac{p}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0) \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \cdot \left( (\cos \varphi_0 + e \cos \delta) \cos \varphi_0 + (\sin \varphi_0) \sin \varphi_0 - (\cos \delta + e \cos \varphi_0) \cos \delta \right) \right|$ . Преобразуем 2-й

множитель в круглых скобках

$$\cos^2 \varphi_0 + e \cos \varphi_0 \cos \delta + \sin^2 \varphi_0 - \cos^2 \delta - e \cos \varphi_0 \cos \delta = 1 - \cos^2 \delta = \sin^2 \delta.$$

Окончательно, находим **расстояние от полюса до хорды**

$$h_{Ph} = \left| \frac{p \sin^2 \delta}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0) \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \right|. \quad (2)$$

Рассмотрим **отклонение от фокуса до хорды**

$$\eta_{Fh} = \frac{-p \cos \delta}{s \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \quad (3)$$

и отклонение от полюса до хорды

$$\eta_{Ph} = \frac{p \sin^2 \delta}{s(\cos \delta + e \cos \varphi_0) \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}}. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4) заметим, что у них разные знаки перед дробями. С другой стороны, учитывая, что  $\frac{p \cos \delta}{\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \geq 0, \sin^2 \delta \geq 0,$

$\frac{p \sin^2 \delta}{\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \geq 0,$  можем сказать, что при  $(\cos \delta + e \cos \varphi_0) > 0$  хорда

лежит между фокусом и полюсом. При  $(\cos \delta + e \cos \varphi_0) < 0$  (этот случай может встретиться у всех типов кривых) и фокус, и полюс лежат по одну сторону от хорды.

#### 5.6.4. Координаты точки пересечения диагоналей четырехугольника фокус-полюс и расстояние от этой точки до фокуса

В этом разделе укажем 3 способа расчета координат  $N$  (см. рис.1):

- как точки пересечения диагоналей четырехугольника фокус-полюс;
- как основание биссектрисы фокального треугольника;
- используя величину биссектрисы и ее направление.

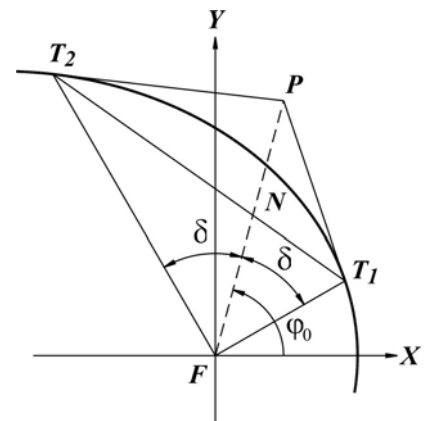


Рис. 1

В (5.17.) предложим еще два способа решения этой задачи, основанные на применении гармонического соотношения.

#### 1° способ

Запишем совместно систему уравнений хорды (5.6.1.-2) и биссектрисы (5.5.-

1)

$$\begin{cases} (\cos \varphi_0 + e \cos \delta)x + \sin \varphi_0 y - p \cos \delta = 0 \\ \sin \varphi_0 x - \cos \varphi_0 y = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Решим эту систему методом подстановки. Из 2-го уравнения (1)  $y = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0} x$ .

Следовательно

$$(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)x + \frac{\sin^2 \varphi_0}{\cos \varphi_0} x - p \cos \delta = 0,$$

$$(\cos^2 \varphi_0 + e \cos \varphi_0 \cos \delta + \sin^2 \varphi_0)x = p \cos \varphi_0 \cos \delta, \quad (1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta)x = p \cos \varphi_0 \cos \delta,$$

$$x = \frac{p \cos \varphi_0 \cos \delta}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta}, \quad y = \frac{p \sin \varphi_0 \cos \delta}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta}. \quad (2)$$

$$\text{В векторном виде координаты } N \quad \frac{p \cos \delta}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta} \{ \cos \varphi_0, \sin \varphi_0 \}. \quad (3)$$

Расстояние от фокуса  $F : \{0,0\}$  до  $N$  находим по теореме Пифагора

$$S = \frac{p \cos \delta}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta}. \quad (4)$$

### 2<sup>o</sup> способ

Используем свойство биссектрисы фокального угла треугольника, которая делит основание треугольника (в нашем случае хорда) в соответствии длиной смежных сторон треугольника. Длины этих сторон равны величине соответствующих радиус-векторов, т.е.  $r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1}, r_2 = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_2}$ .

$$\text{Схема решения следующая } \lambda = \frac{r_1}{r_2}, \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (5)$$

Подставим в (5) соответствующие значения  $\lambda = \frac{r_1}{r_2} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1} : \frac{p}{1 + e \cos \varphi_2} =$

$$= \frac{1 + e \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_1}, \quad x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{\frac{p \cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} + \frac{1 + e \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_1} \cdot \frac{p \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2}}{1 + \frac{1 + e \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_1}} = \frac{p(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)}{2 + e(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)},$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{\frac{p \sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} + \frac{1 + e \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_1} \cdot \frac{p \sin \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2}}{1 + \frac{1 + e \cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_1}} = \frac{p(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}{2 + e(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2)}. \quad (6)$$

Используя выражения  $\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 = 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$ ,  $\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 =$   
 $= 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$  и (5.1.-2), легко получить (2) или (3).

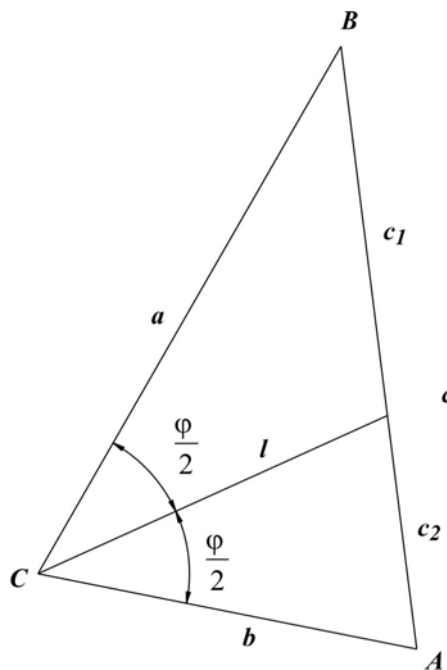
3<sup>о</sup> способ

Рис. 2

Начнем вывод формулы **длины биссектрисы внутреннего угла треугольника**. Для этого запишем систему уравнений, обозначения которой очевидны из (рис.2), а уравнения получены из свойств биссектрисы и теоремы косинусов

$$\begin{cases} a^2 + b^2 - 2ab \cos \varphi = c^2 \\ c_1 + c_2 = c \\ \frac{c_1}{c_2} = \frac{a}{b} \\ a^2 + l^2 - 2al \cos \frac{\varphi}{2} = c_1 \\ b^2 + l^2 - 2bl \cos \frac{\varphi}{2} = c_2 \end{cases} \quad (7)$$

Окончательно получаем (рекомендуем читателю проделать весь вывод!)  
**длину биссектрисы внутреннего угла треугольника<sup>1</sup>**

$$l = \frac{2 \cos \frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}. \quad (8)$$

Далее делаем следующие замены  $\frac{\varphi}{2} \rightarrow \delta$ ,  $a = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi_0 - \delta)}$ ,

$$b = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi_0 + \delta)}. \quad \text{Тогда} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1 + e \cos(\varphi_0 - \delta)}{p} + \frac{1 + e \cos(\varphi_0 + \delta)}{p} =$$

$$= \frac{2(1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta)}{p}, \quad l = \frac{p \cos \delta}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta} \quad (\text{см.4}). \quad \text{Отсюда легко получить (3).}$$

### 5.6.5. Координаты основания медианы полярного треугольника

Зная координаты точек основания полярного треугольника

$$P_1 : \frac{p}{1 + e \cos \varphi_1} \{ \cos \varphi_1, \sin \varphi_1 \} \quad \text{и} \quad P_2 : \frac{p}{1 + e \cos \varphi_2} \{ \cos \varphi_2, \sin \varphi_2 \},$$

можно вычислить точку основания медианы. Для этого, как и ранее (5.1.-2), используем в итоговых

$$\text{формулах систему углов } \varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \delta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}.$$

Точка основания медианы

$$M : \left\{ \frac{P_{1x} + P_{2x}}{2}, \frac{P_{1y} + P_{2y}}{2} \right\} = \frac{p}{2} \left\{ \frac{\cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} + \frac{\cos \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2}, \frac{\sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} + \frac{\sin \varphi_2}{1 + e \cos \varphi_2} \right\} =$$

$$= \frac{p}{2(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)} \{ \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2e \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 +$$

$$+ e(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \}.$$

Этот знаменатель уже вычислен в (5.6.2.-1)

$$(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2) = (\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0.$$

Поэтому далее исследуем только числитель

<sup>1</sup> А.Жуков, И.Акулич. «Однозначно ли определяется треугольник?» Квант, 2003/1, стр.30 (9).

$$\begin{aligned} & \{ \cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2e \cos \varphi_1 \cos \varphi_2, \sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + e(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1) \} = \\ & = \left\{ 2 \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + \frac{2}{2} e (\cos 2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \cos 2 \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}), \right. \\ & \left. 2 \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \sin 2 \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right\} = 2 \left\{ \cos \varphi_0 \cos \delta + \frac{e}{2} (\cos 2\varphi_0 + \cos 2\delta), \right. \end{aligned}$$

$$\left. \sin \varphi_0 \cos \delta + \frac{e}{2} \sin 2\varphi_0 \right\} = 2 \left\{ \cos \varphi_0 \cos \delta + \frac{e}{2} (2 \cos^2 \varphi_0 - 1 + 2 \cos^2 \delta - 1), \right.$$

$$\left. \sin \varphi_0 \cos \delta + e \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 \right\} = 2 \left\{ \cos \varphi_0 \cos \delta + e (\cos^2 \varphi_0 + \cos^2 \delta - 1), \sin \varphi_0 (\cos \delta + e \cos \varphi_0) \right\} =$$

$$= 2 \left\{ \cos \varphi_0 \cos \delta + e (-\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \delta), \sin \varphi_0 (\cos \delta + e \cos \varphi_0) \right\} =$$

$$= 2 \left\{ \cos \varphi_0 \cos \delta + e (-\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \delta), \sin \varphi_0 (\cos \delta + e \cos \varphi_0) \right\}.$$

Собираем вместе части формулы

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = & \frac{P}{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0} \left\{ \cos \delta (\cos \varphi_0 + e \cos \delta) - e \sin^2 \varphi_0, \right. \\ & \left. \sin \varphi_0 (\cos \delta + e \cos \varphi_0) \right\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Упражнение 1. Доказать с помощью (1), что и для большой оси эллипса, и для малой оси эллипса середины соответствующих осей совпадают с центром симметрии эллипса (3.5.1.-3).

Упражнение 2. Доказать, что прямые, соединяющие середины  $\parallel$  хорд с центром симметрии, совпадают.

## 5.7. Углы четырехугольника фокус-полюс

### 5.7.1. Внутренние углы четырехугольника фокус-полюс

Некоторые углы, которые будем находить ниже, в НПСК и ОПСК могут отличаться на  $\pi$ , т.е. быть смежными по отношению друг к другу в разных системах. Поэтому проведем исследование в каждой из этих систем отдельно.

## 1°. Расчеты в НПСК (геометрический подход)

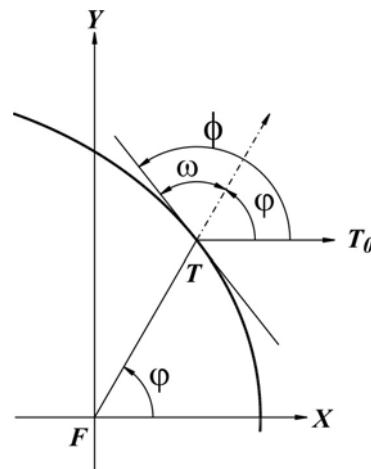


Рис. 1

Из (3.2.1.-8) известен угол наклона касательной к оси абсцисс  $\phi_0 = \text{ang}(O, \{-\sin \varphi, \cos \varphi + e\})$ . С другой стороны, вычисляя разность  $\phi_0 - \varphi$  можем найти **угол  $\omega$**  (см.рис.1) **между углом наклона касательной и радиус-вектором**

$$\begin{aligned} \omega &= \text{ang}(O, \{-\sin \varphi, \cos \varphi + e\}) - \varphi = \text{ang}(O, \{-\sin \varphi, \cos \varphi + e\}) - \\ &- \text{ang}(O, \{\cos \varphi, \sin \varphi\}) = \text{ang}(O, \{-\sin \varphi, \cos \varphi + e\}) + \text{ang}(O, \{\cos \varphi, -\sin \varphi\}) = \\ &= \text{ang}(O, \{-\cos \varphi \sin \varphi + \cos \varphi \sin \varphi + e \sin \varphi, \cos^2 \varphi + e \cos \varphi + \sin^2 \varphi\}) = \\ &= \text{ang}(O, \{e \sin \varphi, 1 + e \cos \varphi\}). \end{aligned} \quad (1)$$

К этому же результату можно прийти и другим путем. Известно [3,стр.486-487], что  $\text{tg } \omega = \frac{r}{r'_\varphi}$ . (2)

Подставляя в (2)  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$  и  $r'_\varphi = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}$ , имеем

$$\text{tg } \omega = \frac{\frac{p}{1 + e \cos \varphi}}{\frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2}} = \frac{1 + e \cos \varphi}{e \sin \varphi},$$

Отсюда  $\omega = \text{ang}(O, \{e \sin \varphi, 1 + e \cos \varphi\})$ .  $\square$

Обращаем внимание читателя на то, что проводимое в данном разделе ниже исследование углов одинаково для выпуклого (см.рис.2) и невыпуклого (см.рис.3) четырехугольников.

Найдем сумму  $\gamma_1 + \gamma_2$ . Из (рис.2,3) видно, что  $\gamma_1 = \pi - \omega_1, \gamma_2 = \omega_2$ . Таким образом  $\gamma_1 + \gamma_2 = \pi + (\omega_2 - \omega_1) = \pi + \Delta\omega$ . (3)

$$\begin{aligned}
\text{Вычислим } \Delta\omega &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_2, 1 + e \cos \varphi_2\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_1, 1 + e \cos \varphi_1\}) = \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_2, 1 + e \cos \varphi_2\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_1, -(1 + e \cos \varphi_1)\}) = \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + (1 + e \cos \varphi_2)(1 + e \cos \varphi_1), (1 + e \cos \varphi_2)e \sin \varphi_1 - \\
&\quad - (1 + e \cos \varphi_1)e \sin \varphi_2\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2 \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 + 1 + e \cos \varphi_1 + e \cos \varphi_2 + e^2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_1, \\
&\quad e \sin \varphi_1 + e^2 \cos \varphi_2 \sin \varphi_1 - e \sin \varphi_2 - e^2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) + \\
&\quad + 2e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + 1, -(e^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1) + 2e \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2})\}) = \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1, -(e^2 \sin 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \sin \delta)\}) \\
&= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1, -2e \sin \delta (e \cos \delta + \cos \varphi_0)\}) \tag{4}
\end{aligned}$$

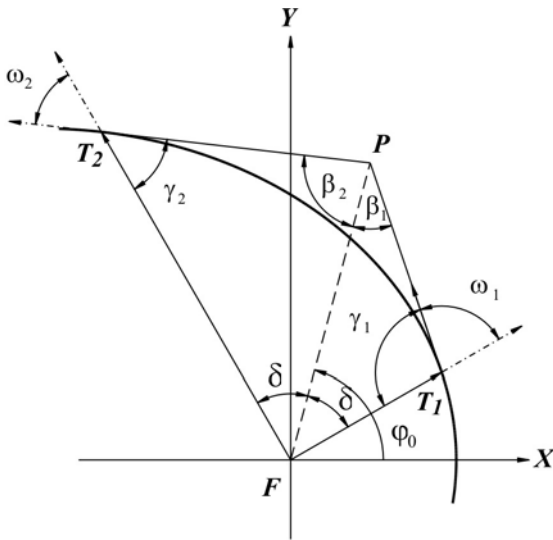


Рис. 2

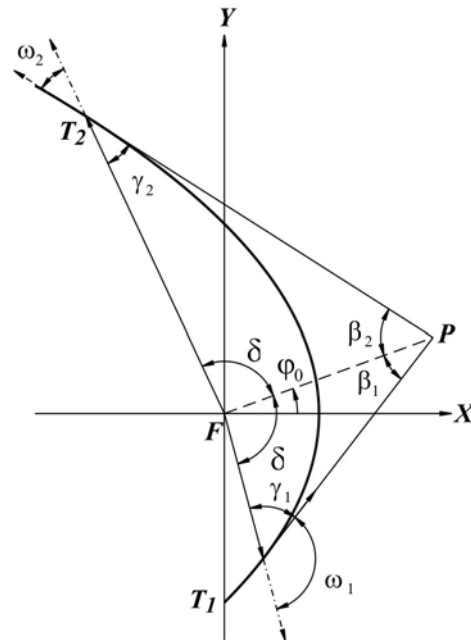


Рис. 3

Отсюда и из (1.2.1.-15) получаем  $\gamma_1 + \gamma_2 =$

$$= \pi + \Delta\omega = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1), 2e \sin \delta (e \cos \delta + \cos \varphi_0)\}). \tag{5}$$

$$\text{Угол при полюсе } \angle T_1 P T_2 = \beta_1 + \beta_2 = 2\pi - ((\gamma_1 + \gamma_2) + 2\delta) \tag{6}$$

$$\text{или } \beta_1 + \beta_2 = \pi - \Delta\omega - 2\delta = \pi - (\Delta\omega + 2\delta). \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\text{Упростим (7) } \beta_1 + \beta_2 &= \pi - \Delta\omega - 2\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1), \\
&\quad - (e^2 \sin 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \sin \delta)\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos 2\delta, -\sin 2\delta\}).
\end{aligned}$$

Далее  $\beta_1 + \beta_2 =$

$$= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1) \cos 2\delta - (e^2 \sin 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \sin \delta) \sin 2\delta, \}$$



$$\begin{aligned}
 & -(e^2 \sin 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \sin \delta) \cos 2\delta + (e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1) \sin 2\delta) = \\
 & = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e^2 \cos^2 2\delta - 2e \cos \varphi_0 \cos 2\delta \cos \delta - \cos 2\delta - e^2 \sin^2 2\delta - 2e \cos \varphi_0 \sin 2\delta \sin \delta, \\
 & -e^2 \cos 2\delta \sin 2\delta - 2e \cos \varphi_0 \cos 2\delta \sin \delta + e^2 \cos 2\delta \sin 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \sin 2\delta \cos \delta + \sin 2\delta\}) = \\
 & = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), 2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)\}).
 \end{aligned}$$

Чтобы не зависеть от порядка расположения радиус-векторов, которое может приводить к тому, что в последнем параметре станет  $(e \cos \varphi_0 + \cos \delta) < 0$  и, следовательно,  $\beta > \pi$ , необходимо применить операцию абсолютная величина для последнего параметра (см.1.2.1.-4)

$$\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), |2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)|\}). \tag{8}$$

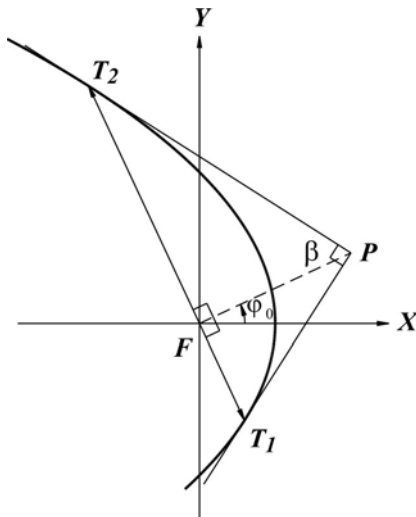


Рис. 4

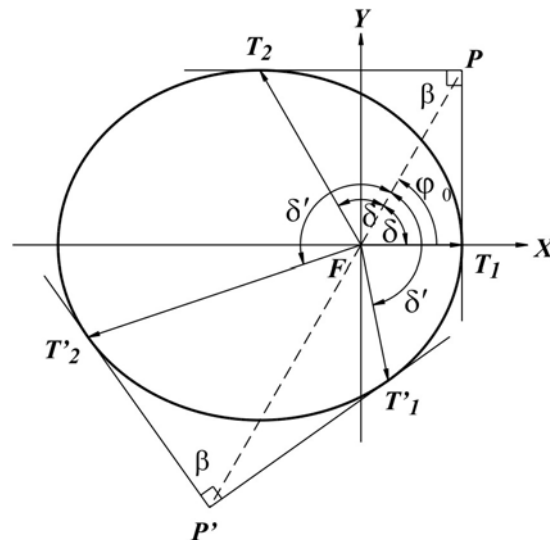


Рис. 5

Упражнение 1. Доказать, что касательные к параболе, построенные из концов фокальной хорды пересекаются под прямым углом [2, §127, упр.44], (см.3.6.2. упр.5).

Доказательство. Для  $\perp$  касательных в точке их пересечения - полюсе необходимо и достаточно(1.2.1.-18), чтобы третий параметр в (8) был равен 0.

Действительно  $(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta)|_{\delta=\frac{\pi}{2}, e=1} = 1 + 0 - 1 = 0$ .

Упражнение 2. По данным углу биссектрисы  $\varphi_0$  и эксцентриситету  $e$  найти угол отклонения  $\delta$  таким образом, чтобы касательные в точке их пересечения - полюсе были  $\perp$ . Решить задачу в общем виде и для  $\varphi_0 = \frac{\pi}{3}, e = \frac{1}{2}$ .

Решение. Угол отклонения  $\delta$  найдем из уравнения  $e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta = 0$  (см. (8) и упр.1). Учитывая что,  $\cos 2\delta = 2\cos^2 \delta - 1$ , получаем квадратное уравнение  $2\cos^2 \delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta - (1 - e^2) = 0$ , откуда

$$\cos \delta = \frac{-e \cos \varphi_0 \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi_0 + 2(1 - e^2)}}{2}. \text{ Т.к. } \cos \varphi_0 = \frac{1}{2}, \text{ то } \cos \delta = \frac{-\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + 2(1 - \frac{1}{4})}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm 5}{8}, \quad \cos \delta_1 = \frac{1}{2}, \quad \cos \delta_2 = -\frac{3}{4}. \quad \text{Из}$$

(1.2.5.1.-1) имеем

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \delta, \pm \sqrt{1 - \cos^2 \delta}\}).$$

Чтобы было  $0 < \delta < \pi$ , необходимо взять (см.1.2.1.-25)

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \delta, \sqrt{1 - \cos^2 \delta}\}). \quad (9)$$

Окончательно получаем  $\delta_1 = \frac{\pi}{3} = 1,123 (60^\circ)$ ,

$\delta_2 = 2,419 (138,59^\circ)$ . (См. рис.5)  $\square$

Упражнение 3. Найти геометрическое место точек, из которых эллипс виден под прямым углом [7,N494].

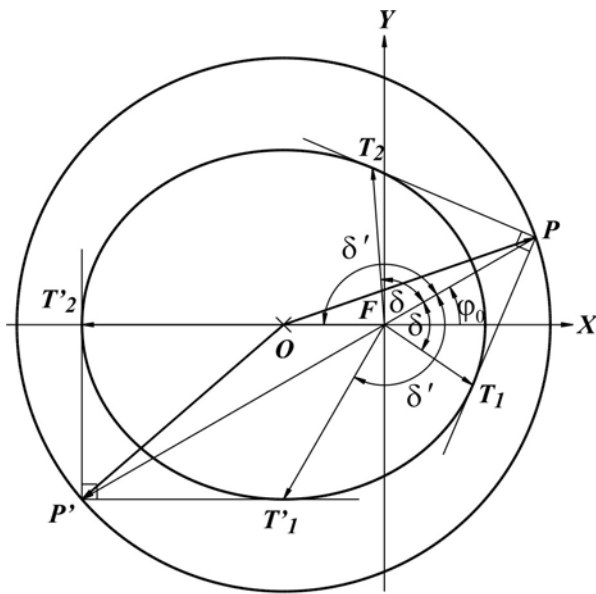


Рис. 6

Ответ. Окружность (см. рис.6) из центра симметрии эллипса  $O : \{\frac{-pe}{1-e^2}, 0\}$  с

$$\text{радиусом } \sqrt{a^2 + b^2} = \frac{p\sqrt{(2-e^2)}}{(1-e^2)}.$$

Указание. Воспользоваться координатами полюса (5.2.-2)

$$\frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}, \text{ где } \cos \delta = \frac{-e \cos \varphi_0 \pm \sqrt{e^2 \cos^2 \varphi_0 + 2(1 - e^2)}}{2} \text{ (см.(9)).}$$

## 2°. Расчеты в ОПСК (геометрический подход)

Для рассматриваемой задачи расчеты в ОПСК имеют ту особенность, что или один из радиус-векторов отрицательный (см. рис.7), или оба из них отрицательны (см.рис.8). Выясним, как это влияет на расчеты углов.

В силу того, что угол наклона касательной к оси абсцисс  $\phi = \text{ang}(\theta, \{-\sin \phi, \cos \phi + e\})$  имеет непрерывные параметры функции  $\text{ang}()$  (см. 3.2.1.-8), то вычисление этого угла в НПСК и ОПСК идентично.

При положительных радиус-векторах для вычисления  $\omega$  справедливо (1). При отрицательных радиус-векторах к углу  $\phi$  добавляется слагаемое  $\pi$  и, следовательно, в силу (1.2.1.-7) и, повторяя вывод (1), имеем

$$\omega = \text{ang}(\theta, \{-e \sin \phi, -(1 + e \cos \phi)\}). \quad (10)$$

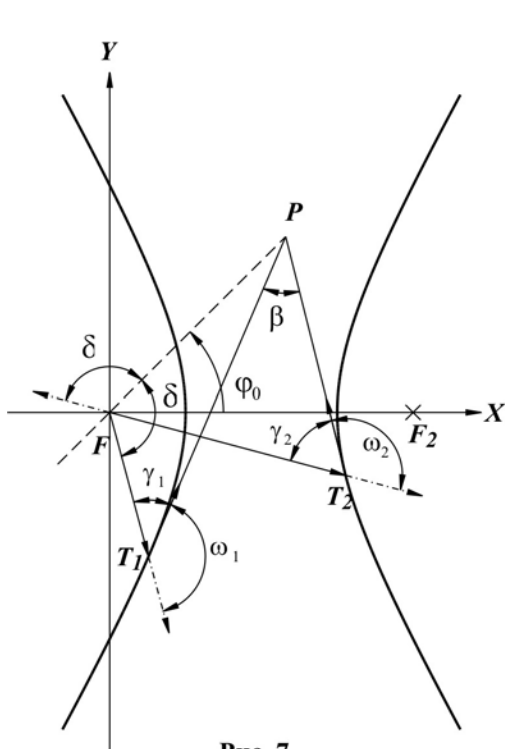


Рис. 7

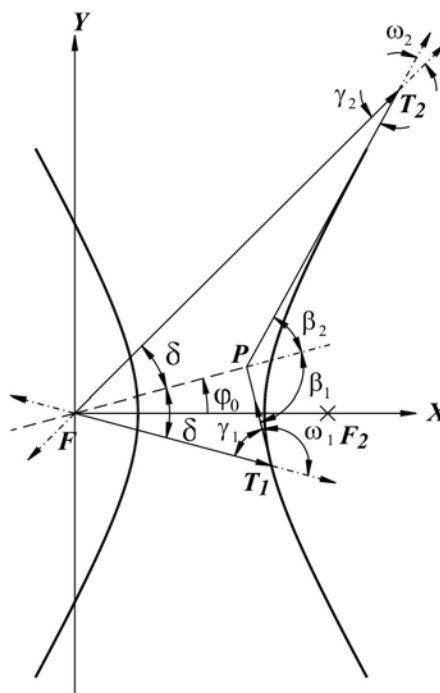


Рис. 8

### 2.1°. Один радиус-вектор положительный, а другой отрицательный

Рассмотрим (рис.7).  $\gamma_1 = \pi - \omega_1$ ,  $\angle FPT_1 = \pi - (\delta + \gamma_1) = \pi - (\delta + \pi - \omega_1) = \omega_1 - \delta$ ,

$$\gamma_2 = \pi - \omega_2.$$

**Сумма углов между радиус-векторами и касательными**

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2\pi - (\omega_1 + \omega_2). \quad (11)$$

$$\angle PFT_2 = \pi - \delta, \quad \angle FPT_2 = \pi - (\gamma_2 + \pi - \delta) = \delta - \gamma_2 = \delta + \omega_2 - \pi.$$

$$\begin{aligned} \text{Угол при полюсе } \angle T_1PT_2 = \beta &= \angle FPT_2 - \angle FPT_1 = \delta + \omega_2 - \pi - (\omega_1 - \delta) = \\ &= -\pi + \Delta\omega + 2\delta = 2\pi - \pi + \Delta\omega + 2\delta = \pi + \Delta\omega + 2\delta. \end{aligned} \quad (12)$$

Найдем  $\Delta\omega$ , выраженное через  $\varphi_0$  и  $\delta$ . Т.к. в ОПСК по сравнению с НПСК к  $\omega_2$  добавилось слагаемое  $\pi$ , а  $\omega$  осталось без изменения, то модифицируем (4) прибавлением  $\pi$

$$\Delta\omega = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 \cos 2\delta + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + 1), 2e \sin \delta (e \cos \delta + \cos \varphi_0)\}). \quad (13)$$

Упражнение 4. Докажите, что для данного случая **угол при полюсе**  $\beta$  равен

$$\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), |2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)|\}). \quad (14)$$

Обратим внимание, что в (8) и (14) разные знаки у третьего параметра.

Упражнение 5. По данным параметрам  $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$  ( $45^\circ$ ),  $e = 2$  и  $L = \frac{2p}{2\sqrt{2}-1}$  (см.

рис.7) найти  $\delta, \varphi_1, \varphi_2, \Delta\omega, \beta$ .

$$\text{Ответ. } \delta = \frac{2\pi}{3} (120^\circ), \varphi_1 = 4,974 (285^\circ), \quad \varphi_2 = 2,88 (165^\circ), \quad \Delta\omega = 5,885 (337,20^\circ),$$

$$\beta = 0,649 (37,205^\circ).$$

**2.2°. Оба радиус-вектора отрицательны**

Исследуем углы, изображенные на (рис.8). Тогда  $\gamma_1 = \pi - \omega_1$ ,  $\gamma_2 = \omega_2$ .

**Сумма углов между радиус-векторами и касательными**

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \pi + (\omega_2 - \omega_1) = \pi - \Delta\omega. \quad (15)$$

Т.к. внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов, не смежных с ним, то из  $\Delta FPT_1$  следует  $\beta_1 = \delta + \gamma_1 = \pi - (\delta - \pi + \omega_1) = \pi + \delta - \omega_1$ ,  $\beta_2 = \delta + \gamma_2 = \delta + \omega_2$ .

$$\text{Угол при полюсе } \beta_1 + \beta_2 = \pi + 2\delta + \Delta\omega. \quad (16)$$

$$\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), |2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)|\}). \quad (17)$$

Обратим внимание, что знаки (17) и (8) совпадают, а (17) и (14) имеют разные знаки у третьего параметра. Объяснение этому дается в следующем пункте.

Упражнение 6. По данным параметрам  $\varphi_0 = \frac{\pi}{12} (15^\circ)$ ,  $\delta = \frac{5\pi}{6} (150^\circ)$  и  $e = 2$  (см. рис.8) найти  $\varphi_1, \varphi_2, \Delta\omega, \beta$ .

Ответ.  $\varphi_1 = -\frac{3\pi}{4} (-135^\circ)$ ,  $\varphi_2 = 2,88 (165^\circ)$ ,  $\Delta\omega = (^\circ)$ ,  $\beta = 2,396 (137,273^\circ)$ .

### 3°. Аналитический подход

Найдем аналитическое решение в общем виде.

**Угол при полюсе.** Предварительно заметим, что при изменении  $\varphi_0$  разность между направлениями  $ang(\mathbf{P}, \mathbf{T}_2)$  и  $ang(\mathbf{P}, \mathbf{T}_1)$  становится то больше, то меньше 0 (убедитесь в этом с помощью чертежа!). В силу этого, и учитывая (1.2.6.-17), искомую разность направлений будем вычислять, используя знак абсолютной величины.

$$\beta = |ang(\mathbf{P}, \mathbf{T}_2) - ang(\mathbf{P}, \mathbf{T}_1)| = \left| ang \left( \frac{p\{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}, \frac{p\{\cos(\varphi_0 + \delta), \sin(\varphi_0 + \delta)\}}{1 + e \cos(\varphi_0 + \delta)} \right) - ang \left( \frac{p\{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}, \frac{p\{\cos(\varphi_0 - \delta), \sin(\varphi_0 - \delta)\}}{1 + e \cos(\varphi_0 - \delta)} \right) \right|.$$

Преобразуем 1-е слагаемое

$$\begin{aligned} ang(\mathbf{P}, \mathbf{T}_2) &= ang \left( \mathbf{0}, \left\{ \frac{p \cos(\varphi_0 + \delta)}{1 + e \cos(\varphi_0 + \delta)} - \frac{p \cos \varphi_0}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}, \frac{p \sin(\varphi_0 + \delta)}{1 + e \cos(\varphi_0 + \delta)} - \frac{p \sin \varphi_0}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \right\} \right) = \\ &= ang(\mathbf{0}, k_0 k_2 \{ (\cos \varphi_0 \cos \delta - \sin \varphi_0 \sin \delta) (\cos \delta + e \cos \varphi_0) - \\ &- \cos \varphi_0 (1 + e(\cos \varphi_0 \cos \delta - \sin \varphi_0 \sin \delta)), (\sin \varphi_0 \cos \delta + \cos \varphi_0 \sin \delta) (\cos \delta + e \cos \varphi_0) - \\ &- \sin \varphi_0 (1 + e(\cos \varphi_0 \cos \delta - \sin \varphi_0 \sin \delta)) \} = ang(\mathbf{0}, k_0 k_2 \{ \cos \varphi_0 \cos^2 \delta + e \cos^2 \varphi_0 \cos \delta - \\ &- \sin \varphi_0 \cos \delta \sin \delta - e \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \delta - \cos \varphi_0 - e \cos^2 \varphi_0 \cos \delta + e \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin \delta, \\ &\sin \varphi_0 \cos^2 \delta + e \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \sin \delta + e \cos^2 \varphi_0 \sin \delta - \sin \varphi_0 - \\ &- e \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos \delta + e \sin^2 \varphi_0 \sin \delta \} = ang(\mathbf{0}, k_0 k_2 \{ -\cos \varphi_0 \sin^2 \delta - \sin \varphi_0 \cos \delta \sin \delta, \\ &- \sin \varphi_0 \sin^2 \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta \sin \delta + e \sin \delta \} = ang(\mathbf{0}, k_0 k_2 \{ -\cos \varphi_0 \sin \delta - \sin \varphi_0 \cos \delta, \\ &- \sin \varphi_0 \sin \delta + \cos \varphi_0 \cos \delta + e \} ). \end{aligned}$$

В процессе преобразований сократили на постоянный положительный множитель  $p \sin \delta$  ( $\sin \delta > 0$ , т.к.  $0 < \delta \leq \pi$ ). Постоянные

множители  $k_0 k_2 = \frac{1}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0)(1 + e \cos(\varphi_0 + \delta))}$  могут быть отрицательны, поэтому

их оставляем для последующего исследования.

Аналогично преобразуем 2-е слагаемое

$$- \text{ang}(\mathbf{P}, \mathbf{T}_1) = \text{ang}(\mathbf{0}, k_0 k_1 \{-\cos \varphi_0 \sin \delta + \sin \varphi_0 \cos \delta, -\sin \varphi_0 - \cos \varphi_0 \cos \delta - e\}).$$

Используя (1.2.1.-15) находим сумму

$$\begin{aligned} & \text{ang}(\mathbf{0}, k_0^2 k_1 k_2 \{\cos^2 \varphi_0 \sin^2 \delta - \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \delta + (\cos \varphi_0 \cos \delta + e)^2 - \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \delta, \\ & -(-\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos \delta + e)(\cos \varphi_0 \sin \delta + \sin \varphi_0 \cos \delta) + \\ & + (\sin \varphi_0 + \cos \varphi_0 \cos \delta + e)(\cos \varphi_0 \sin \delta + \sin \varphi_0 \cos \delta)\}) = \\ & = \text{ang}(\mathbf{0}, k_1 k_2 \{\cos^2 \varphi_0 \sin^2 \delta - \sin^2 \varphi_0 \cos^2 \delta - \cos^2 \varphi_0 \cos^2 \delta - 2e \cos \varphi_0 \cos \delta - e^2 + \sin^2 \varphi_0 \sin^2 \delta, \\ & \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin^2 \delta - \sin^2 \varphi_0 \cos \delta \sin \delta - \cos^2 \varphi_0 \cos \delta \sin \delta + \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \delta - e \cos \varphi_0 \sin \delta + \\ & + e \sin \varphi_0 \cos \delta - \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \sin^2 \delta - \sin^2 \varphi_0 \cos \delta \sin \delta - \cos^2 \varphi_0 \cos \delta \sin \delta - \\ & - \cos \varphi_0 \sin \varphi_0 \cos^2 \delta - e \cos \varphi_0 \sin \delta - e \sin \varphi_0 \cos \delta = \\ & = \text{ang}(\mathbf{0}, k_1 k_2 \{-(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), -2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)\}) \\ & = \text{ang}(\mathbf{0}, s \{-(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), -2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)\}). \end{aligned}$$

Т.к.  $k_1 k_2 = \text{sign}(k_1 k_2) |k_1 k_2|$ , то можно сократить на общий положительный

множитель  $|k_1 k_2|$ , а функцию знак  $\text{sign}(k_1 k_2) = \text{sign}\left(\frac{1}{(1 + e \cos(\varphi_0 - \delta))(1 + e \cos(\varphi_0 + \delta))}\right) =$

$= \text{sign}((1 + e \cos(\varphi_0 - \delta))(1 + e \cos(\varphi_0 + \delta)))$  далее для краткости, как и ранее, обозначим как  $s$ . Заметим, что  $s > 0$ , если оба радиус-вектора положительны или отрицательны. Если же отрицателен только один из них, то  $s < 0$ .

Применяем теперь операцию абсолютной величины для последнего аргумента и, учитывая, что  $|s| = 1$ , имеем

$$\beta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta), |2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)|\}). \quad \square \quad (17)$$

Рассмотрим, как влияет смежное преобразование  $\varphi_0' = \varphi_0 + \pi$ ,  $\delta' = \pi - \delta$  на 3-й параметр

$$\begin{aligned} & - \text{sign}((1 + e \cos(\varphi_0 + \pi - (\pi - \delta)))(1 + e \cos((\varphi_0 + \pi) + (\pi - \delta)))) \cdot \\ & \cdot (e^2 + 2e \cos(\varphi_0 + \pi) \cos(\pi - \delta) + \cos 2(\pi - \delta)) = -s(e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta). \end{aligned}$$

Таким образом, 3-й параметр остается без изменения. 4-й параметр, находящийся под знаком абсолютной величины, естественно, тоже не изменяется.

## 5.7.2. Углы между радиус-векторами и хордой

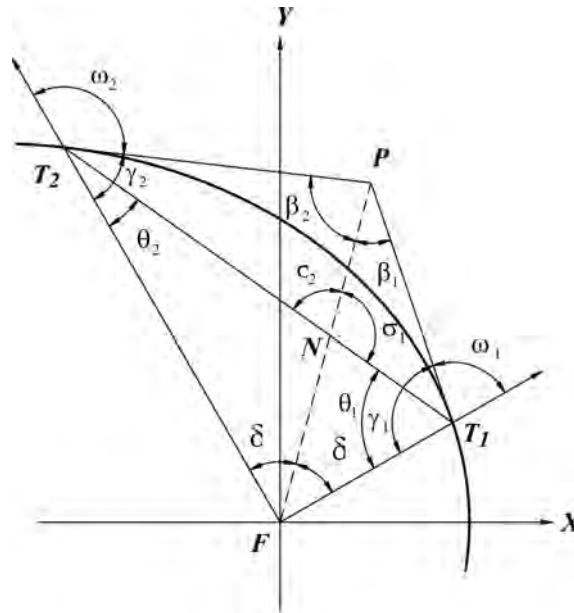


Рис. 1

1<sup>o</sup> вариант

Рассмотрим фокальный  $\triangle FT_1T_2$  (см. рис.1). Зная длину хорды  $L_h$  (5.4.-4) и применяя теорему синусов, составляем уравнения для углов  $\theta_1, \theta_2$ :

$$\frac{L_h}{\sin 2\delta} = \frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta_1}. \quad (1)$$

2<sup>o</sup> вариант

**Лемма.** Если  $\perp$ , опущенный на основание треугольника, пересекает это основание, то две других стороны этого треугольника образуют с этим основанием острые углы (см.рис.2).

Если  $\perp$ , опущенный на основание треугольника, совпадает с одной из боковых сторон, то этот треугольник – прямоугольный (см.рис.3).

Если  $\perp$ , опущенный на основание треугольника, пересекает продолжение основания, то этот треугольник – тупоугольный (см.рис.4).

Предоставляем доказать эту лемму читателю.

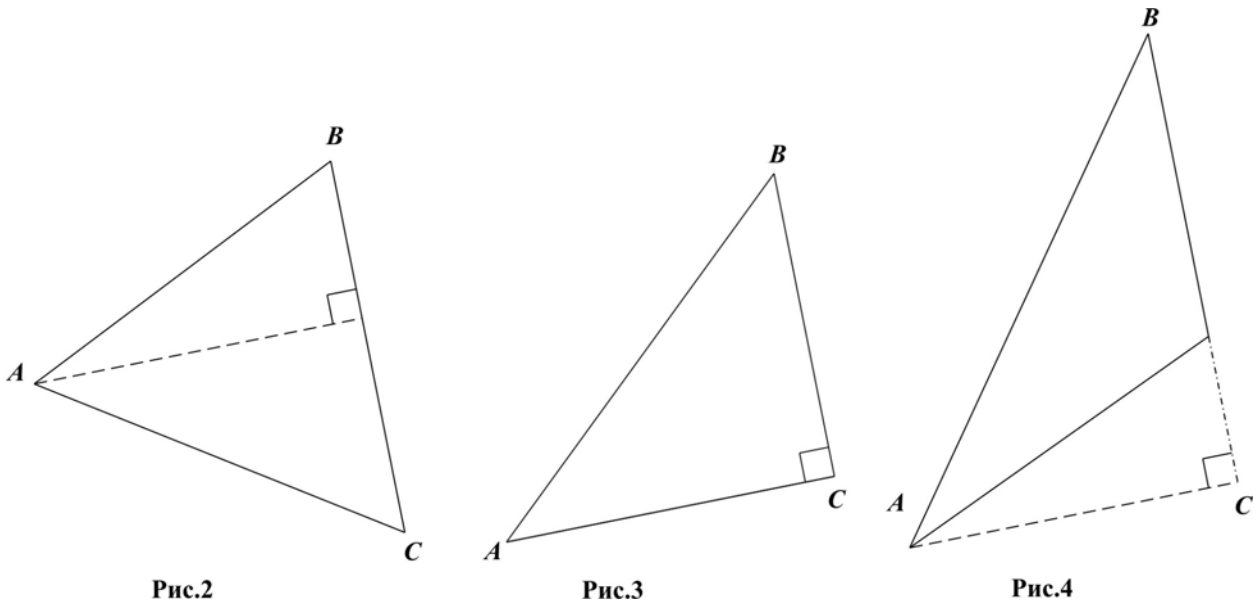


Рис.2

Рис.3

Рис.4

1-е условие леммы эквивалентно тому, что  $\perp$  находится внутри угла при вершине треугольника (докажите!).

Собственно говоря, этой частью леммы и воспользуемся. Опустим  $\perp$  из фокуса (центра координат в системе Кеплера) на хорду. Очевидно, что этот  $\perp$  совпадает с нормальным вектором (см. также 1.5.2.-8). Угол, под которым выходит нормальный вектор из фокуса  $\theta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\})$ , боковые стороны выходят из фокуса под углами  $\varphi_{1,2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(\varphi_0 \mp \delta), \sin(\varphi_0 \mp \delta)\})$ . Если докажем, что  $\varphi_1 < \theta < \varphi_2$ , то это будет означать (см. лемму), что углы при основании фокального треугольника – острые.

Для доказательства воспользуемся свойством возрастания  $\text{ang}()$  в тригонометрическом представлении (см.1.2.1.-12\*)

$$\text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(\varphi_0 - \delta), \sin(\varphi_0 - \delta)\}) < \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos(\varphi_0 + \delta), \sin(\varphi_0 + \delta)\}).$$

Заметим следующее: тройки чисел числителей и знаменателей упорядочены по возрастанию или по убыванию (это зависит от угла  $\varphi_0$ ). Тогда  $\sin(\varphi_0 - \delta) < \sin \varphi_0 < \sin(\varphi_0 + \delta)$  или  $\sin(\varphi_0 - \delta) > \sin \varphi_0 > \sin(\varphi_0 + \delta)$ . Аналогично имеем у знаменателя

$$\cos(\varphi_0 - \delta) < \cos \varphi_0 + e \cos \delta < \cos(\varphi_0 + \delta) \quad \text{или} \quad \cos(\varphi_0 - \delta) > \cos \varphi_0 + e \cos \delta > \cos(\varphi_0 + \delta)$$

(направление неравенств числителя и знаменателя независимы друг от друга) и,



кроме того  $e \leq 1$ . В силу непрерывности тригонометрического представления  $ang(\mathbf{0}, \{\cos \varphi, \sin \varphi\})$  от  $\varphi$  имеем  $\varphi_1 < \theta < \varphi_2$ . Из этого следует (см. лемму), что **углы при основании фокального треугольника – острые.**

Благодаря лемме, можно найти искомые углы, вычисляя в любом порядке разность между направлениями нормальных векторов. Используя уравнение радиус-вектора  $x \sin \varphi - y \sin \varphi = 0$  (см.3.1.1.-5) получим

$$\begin{aligned} \theta_{1,2} &= ang(\mathbf{0}, \{\sin(\varphi_0 - \delta), \cos(\varphi_0 - \delta)\}) - ang(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\}) = \\ &= ang(\mathbf{0}, \{\sin(\varphi_0 - \delta)(\cos \varphi_0 + e \cos \delta) - \cos(\varphi_0 - \delta) \sin \varphi_0, -\cos(\varphi_0 - \delta)(\cos \varphi_0 + e \cos \delta) - \\ &- \sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \delta)\}). \end{aligned}$$

Выполним промежуточные вычисления

$$\sin(\varphi_0 - \delta) \cos \varphi_0 = \frac{1}{2} (-\sin \delta + \sin(2\varphi_0 - \delta)); \quad -\sin \varphi_0 \cos(\varphi_0 - \delta) = -\frac{1}{2} (\sin \delta + \sin(2\varphi_0 - \delta)),$$

$$-\cos(\varphi_0 - \delta) \cos \varphi_0 = -\frac{1}{2} (\cos \delta + \cos(2\varphi_0 - \delta)), \quad -\sin \varphi_0 \sin(\varphi_0 - \delta) = -\frac{1}{2} (\cos \delta - \cos(2\varphi_0 - \delta))$$

$$\text{С учетом леммы} \quad \theta_1 = ang(\mathbf{0}, \{ |-\sin \delta + e \cos \delta \sin(\varphi_0 - \delta)|, |\cos \delta (1 + e \cos(\varphi_0 - \delta))| \}). \quad (3)$$

(Чтобы получить  $\theta_2$  нужно в (3) сделать подстановку  $\delta \rightarrow -\delta$ , т.е. изменить знак у  $\delta$ ).

$$\text{И, окончательно,} \quad \theta_{1,2} = ang(\mathbf{0}, \{ |\mp \sin \delta + e \cos \delta \sin(\varphi_0 \mp \delta)|, |\cos \delta (1 + e \cos(\varphi_0 \mp \delta))| \}). \quad (4)$$

### 5.7.3. Углы между биссектрисой фокального угла и хордой

#### 1°. Классический подход

Известен тангенс угла наклона хорды  $\frac{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)}{-\sin \varphi_0}$  (5.6.1.-5) и тангенс

угла наклона биссектрисы фокального угла  $\frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}$  (5.5.-1). Пользуясь формулой

тангенса угла наклона между двумя прямыми, если известны тангенсы углов наклона каждой прямой [1, стр.208,6], и, соблюдая правило обхода прямых против

часовой стрелки, получим

$$tg(k_1, k_2) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 k_1} = \frac{\frac{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta) \sin \varphi_0}{-\sin \varphi_0} - \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}}{1 + \frac{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta) \sin \varphi_0}{-\sin \varphi_0} \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi_0}} =$$

$$= \frac{\cos^2 \varphi_0 + e \cos \varphi_0 \cos \delta + \sin^2 \varphi_0}{-\sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + \sin \varphi_0 \cos \varphi_0 + e \cos \delta \sin \varphi_0} = \frac{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta}{e \sin \varphi_0 \cos \delta}. \quad (1)$$

$$\text{Отсюда } \sigma_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_0 \cos \delta, 1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta\}). \quad (2)$$

$$\text{Угол } \sigma_1 \text{ является смежным по отношению к } \sigma_2, \text{ поэтому } \sigma_1 = \pi - \sigma_2. \quad (3)$$

Аналогичный расчет углов для невыпуклого четырехугольника фокус-полюс (см. рис.1) предоставляем сделать читателю.

## 2.º Подход с помощью угла между нормальными векторами

Т.к. нормальный вектор биссектрисы фокального угла  $n_0 = \{\sin \varphi_0, -\cos \varphi_0\}$ , а нормальный вектор хорды  $n_h = \{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\}$ , то найдем угол между этими векторами

$$\begin{aligned} \sigma_{h0} &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_0 + e \cos \delta, \sin \varphi_0\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sin \varphi_0, -\cos \varphi_0\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta) \sin \varphi_0 + (-\cos \varphi_0) \sin \varphi_0, \sin^2 \varphi_0 + \cos \varphi_0 (\cos \varphi_0 + e \cos \delta)\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_0 \cos \delta, 1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta\}). \end{aligned}$$

Минимальный, из смежной пары углов, будет (1.2.1.-29)

$$\sigma_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\sin \varphi_0 \cos \delta|, |1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta|\}). \quad (4)$$

Тогда другой смежный угол (1.2.1.-24)

$$\sigma_1 = \pi - \sigma_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e|\cos \delta \sin \varphi_0|, |1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta|\}). \quad (5)$$

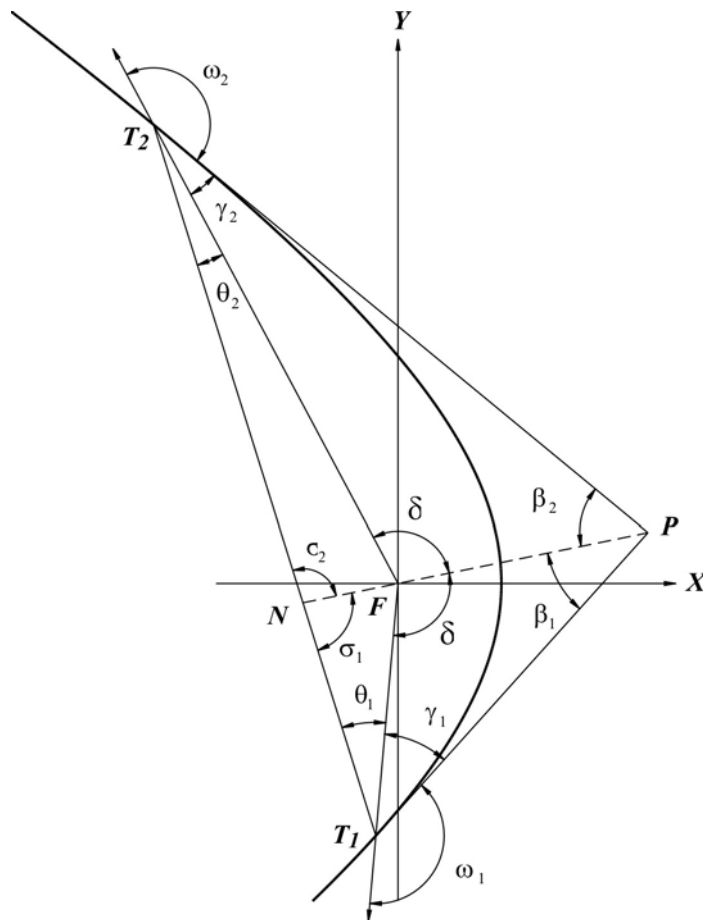


Рис. 1

**5.8. Длина касательной от точки касания до полюса**

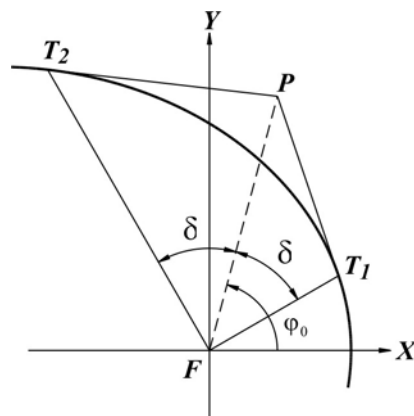


Рис. 1

**1-й вариант**

Рассмотрим  $\Delta FPT_1$  (см. рис.1). Мы знаем, что длины радиус-векторов

$$FT_{1,2} = r_{1,2} = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi_0 \mp \delta)}, \text{ а расстояние до полюса (5.1.-2) } L_{FP} = \left| \frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} \right|.$$

Тогда по теореме косинусов  $L_{PT_1, PT_2} = \sqrt{r_{1,2}^2 + L_{FP}^2 - 2r_{1,2}L_{FP} \cos \delta}$ . (1)

**2-й вариант**

Выведем длину касательной, рассматривая площадь  $\Delta FT_1P$

$$\frac{FP \cdot FT_{1,2}}{2} \sin \delta = \frac{PT_{1,2} \cdot d_{1,2}}{2}, \text{ где } d_{1,2} - \perp, \text{ опущенный из фокуса на соответствующую}$$

касательную. Т.к.  $d_{1,2} = \frac{p}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_{1,2} + e^2}}$  (3.2.2.-1а), то, применяя (5.2.-1), получим

$$PT_{1,2} = \frac{p \sin \delta \sqrt{1 + 2e \cos \varphi_{1,2} + e^2}}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0)(1 + e \cos \varphi_{1,2})}. \quad (2)$$

Упражнение 1. Найти длину отрезков касательной от точек касания до полюса из (рис.2).

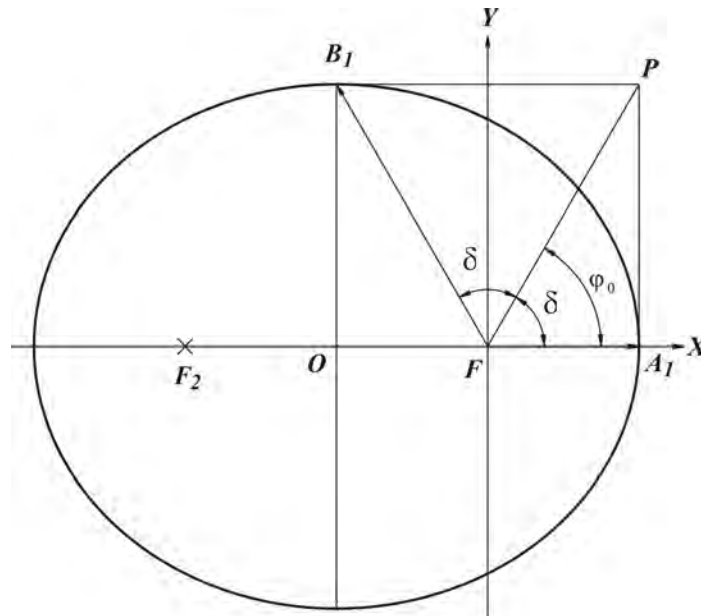


Рис. 2

Решение. Очевидно, что длина искомым отрезков совпадает с длиной полуосей. Докажем это для касательной  $PA_1$ . Из (2), (3.5.1.-7), (1.2.1.-23)

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e, \sqrt{1-e^2}\}), \quad \delta = \varphi_0 = \frac{1}{2} \cdot \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e, \sqrt{1-e^2}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{1-e^2}, 1+e\}).$$

Из (1.2.3.-2а), (1.2.3.-3а)

$$\cos \delta = \cos \varphi_0 = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2+1+2e+e^2}} = \sqrt{\frac{1-e}{2}}, \quad \sin \delta = \frac{1+e}{\sqrt{2}\sqrt{1+e}} = \sqrt{\frac{1+e}{2}},$$

$$PA_1 = \frac{p \sin \delta \sqrt{1+2e \cos \varphi_1 + e^2}}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0)(1+e \cos \varphi_1)} = \frac{p \sqrt{\frac{1+e}{2}} (1+e)}{\sqrt{\frac{1-e}{2}} (1+e) (1+e)} = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}. \quad (\text{Ср.3.5.1.-8})$$

Вывод длины касательной  $PB_1$  предоставляем читателю.

## 5.9. Некоторые площади фигур, ограниченные прямыми

### 5.9.1. Площадь фокального треугольника

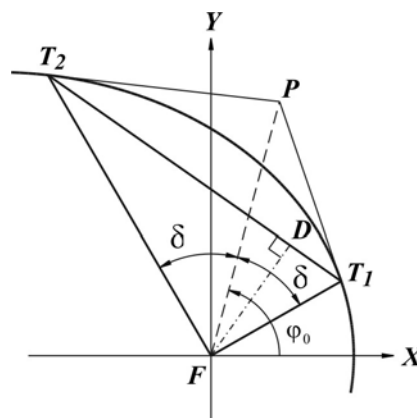


Рис. 1

(В данном разделе предполагаем, что хорда не проходит через фокус, т.к. тогда искомая площадь треугольника равна 0. Однако рассуждения справедливы и для этого случая.)

#### 1<sup>о</sup> способ

$$\text{Из (рис.1) следует } S_{\Delta FT_1 T_2} = \left| \frac{r_1 r_2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{2} \right| = \left| \frac{p^2 \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{2(1+e \cos \varphi_1)(1+e \cos \varphi_2)} \right|. \quad (1)$$

Ранее (5.6.2.-1а) был найден знаменатель без коэффициента 2

$$(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2) = ((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0). \quad (2)$$

$$\text{Отсюда } S_{FT_1T_2} = \frac{p^2 |\sin(2\delta)|}{2((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0)}. \quad (3)$$

### 2° способ

$$\text{Т.к. } S_{FT_1T_2} = \frac{L_h h_{Fh}}{2}, \text{ из (5.6.3.-1) } h_{Fh} = \left| \frac{p \cos \delta}{\sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}} \right| \text{ и из (5.6.2.-1а) } L_h =$$

$$= \frac{2p \sin \delta \sqrt{(e + \cos \varphi_0)^2 + \sin^2 \varphi_0}}{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0}, \text{ то окончательно получаем}$$

$$S_{FT_1T_2} = \frac{p^2 |\sin 2\delta|}{2((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0)}.$$

### 5.9.2. Площадь четырехугольника фокус-полус и расстояния от точек касания до биссектрисы фокального угла

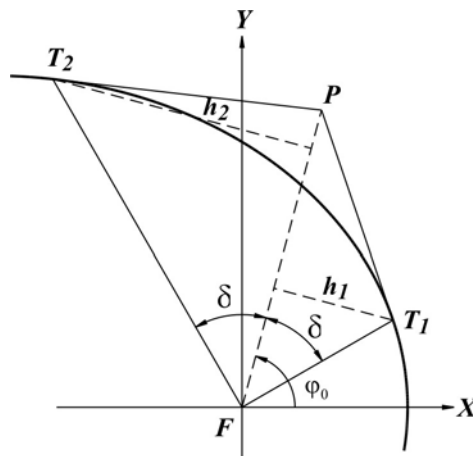


Рис. 1

Биссектриса фокального угла разделяет этот четырехугольник на 2 треугольника (см. рис.1). Используя длину биссектрисы  $L_{FP}$  (5.1.-3) и длины радиус-векторов  $r_1, r_2$  к точкам касания, получим

$$\begin{aligned}
S_{FP_1PP_2} &= \frac{L_{FP}r_1 \sin \delta}{2} + \frac{L_{FP}r_2 \sin \delta}{2} = \frac{L_{FPol}(r_1 + r_2) \sin \delta}{2} = \frac{p(\sin \delta)(r_1 + r_2)}{2(\cos \delta + e \cos \varphi_0)} = \\
&= \frac{p^2 \sin \delta}{2(\cos \delta + e \cos \varphi_0)} \left( \frac{1}{1 + e \cos \varphi_1} + \frac{1}{1 + e \cos \varphi_2} \right) = \frac{p \sin \delta}{2(\cos \delta + e \cos \varphi_0)} \cdot \\
&\cdot \frac{(2 + e(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2))}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_2)} = \frac{p \sin \delta (1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta)}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0)((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0 (1 - e^2))}. \quad (1)
\end{aligned}$$

Опустим перпендикуляры из точек касания на биссектрису фокального угла.

Из прямоугольных треугольников, видно, что

$$h_{1,2} = r_{1,2} \sin \delta = \frac{p \sin \delta}{1 + e \cos \varphi_{1,2}}. \quad (2)$$

Фактически, (1) можно интерпретировать, как

$$S_{FP_1PP_2} = \frac{L_{FP}h_1}{2} + \frac{L_{FP}h_2}{2} = \frac{L_{FP}(h_1 + h_2)}{2}.$$

**Следствие 1. Отношение площадей фокальных треугольников, прилегающих к биссектрисе полярного угла и ограниченных с другой стороны касательными, равно отношению радиус-векторов**

$$\frac{S_{FP_1}}{S_{FP_2}} = \frac{L_{FP} r_1 \sin \delta}{L_{FP} r_2 \sin \delta} = \frac{r_1}{r_2}. \quad (3)$$

### 5.9.3. Площадь полярного треугольника, ограниченного касательными и хордой

Из (5.6.2.-1а) имеем длину хорды

$$L_h = \frac{2p \sin \delta \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}}{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0}.$$

Из (5.6.3.-2) имеем длину  $\perp$  из полюса на хорду

$$h_{ph} = \frac{p \sin^2 \delta}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0) \sqrt{(\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0}}.$$

Отсюда искомая площадь (см.рис.1)

$$S_{T_1PT_2} = \frac{L_h h_{ph}}{2} = \frac{p^2 \sin^3 \delta}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0)((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0)}. \quad (1)$$

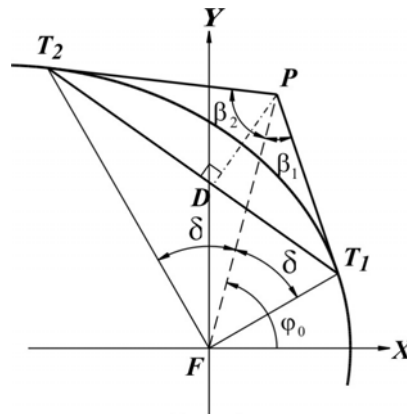


Рис. 1

### 5.10. Автополярные (самосопряженные) треугольники

*Теорема.* Если продолжение хорды 1-го полярного треугольника проходит через полюс 2-го полярного треугольника, то продолжение хорды 2-го полярного треугольника проходит через полюс 1-го полярного треугольника.

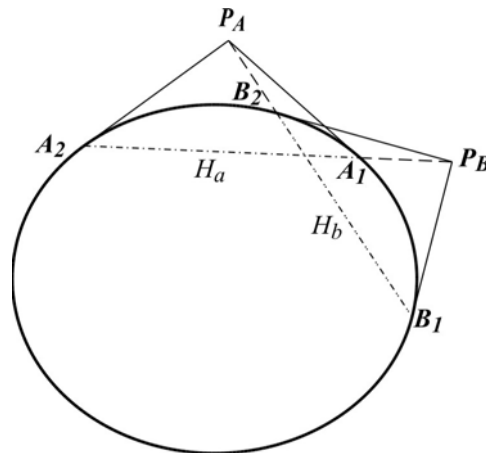


Рис. 1

Другими словами (см. рис.1), нужно доказать, что **если**  $P_A \in B_1B_2$ , **то**  $P_B \in A_1A_2$ . [1, стр. 424] или [2, стр. 610]. Треугольники, обладающие данным свойством, называются автополярными или самосопряженными.

*Доказательство.* Введем обозначения.

**Треугольник  $\Delta P_A A_1 A_2$**

$\varphi_{0A}, \delta_A$  угловые координаты биссектрисы и отклонения от нее,

координаты полюса  $P_A : \frac{P}{\cos \delta_A + e \cos \varphi_{0A}} \{ \cos \varphi_{0A}, \sin \varphi_{0A} \}$ ,



нормальное уравнение хорды  $H_A$  (уравнение полярны)

$$\frac{1}{\sqrt{(\cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A)^2 + \sin^2 \varphi_{0A}}} ((\cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A)x + \sin \varphi_{0A}y - p \cos \delta_A) = 0.$$

**Треугольник  $\Delta P_B B_1 B_2$**

$\varphi_{0B}, \delta_B$  - угловые координаты биссектрисы и отклонения от нее,

$$\text{координаты полюса } P_B : \frac{p}{\cos \delta_B + e \cos \varphi_{0B}} \{ \cos \varphi_{0B}, \sin \varphi_{0B} \},$$

нормальное уравнение хорды  $H_B$  (уравнение полярны)

$$\frac{1}{\sqrt{(\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + \sin^2 \varphi_{0B}}} ((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)x + \sin \varphi_{0B}y - p \cos \delta_B) = 0.$$

Если точка принадлежит прямой, то ее отклонение от этой прямой равно 0.

Запишем это условие для полюса  $P_A$  и хорды  $H_B$

$$\eta_{AB} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + \sin^2 \varphi_{0B}}} ((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B) \frac{p \cos \varphi_{0A}}{\cos \delta_A + e \cos \varphi_{0A}} + \sin \varphi_{0B} \frac{p \sin \varphi_{0A}}{\cos \delta_A + e \cos \varphi_{0A}} - p \cos \delta_B) = 0. \quad (1)$$

$$\text{Отсюда получим симметричное условие } \cos(\varphi_{0A} - \varphi_{0B}) = \cos \delta_A \cos \delta_B, \quad (2)$$

$$\text{или } P_B \in A_1 A_2, \quad (2a)$$

которое дальше будем называть как **условие сопряжения двух хорд**.

Найдем отклонение полюса  $P_B$  от хорды  $H_A$

$$\eta_{BA} = \frac{1}{\sqrt{(\cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A)^2 + \sin^2 \varphi_{0A}}} ((\cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A) \frac{p \cos \varphi_{0B}}{\cos \delta_B + e \cos \varphi_{0B}} + \sin \varphi_{0A} \frac{p \sin \varphi_{0B}}{\cos \delta_B + e \cos \varphi_{0B}} - p \cos \delta_A) = \frac{1}{\sqrt{(\cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A)^2 + \sin^2 \varphi_{0A}}} \cdot (\cos(\varphi_{0A} - \varphi_{0B}) - \cos \delta_A \cos \delta_B). \quad (3)$$

С учетом (2), получаем  $\eta_{BA} = 0$ . Отсюда следует, что полюс  $P_B$  лежит на продолжении хорды (полярны)  $H_A$ .  $\square$

**Следствие 1.** Возьмем 2 взаимно перпендикулярные хорды, проходящие через фокус и не совпадающие с асимптотическим направлением. Тогда каждая из них указывает на полюс другой (см. рис.2).

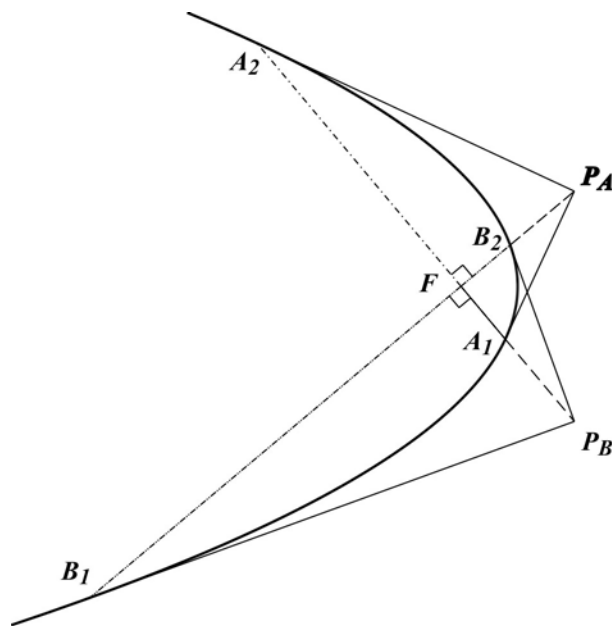


Рис. 2

*Доказательство.* Каждая из хорд в силу их взаимной перпендикулярности является биссектрисой фокального угла другой хорды и поэтому ее продолжение проходит через полюс другой хорды (см.5.1.-4).  $\square$

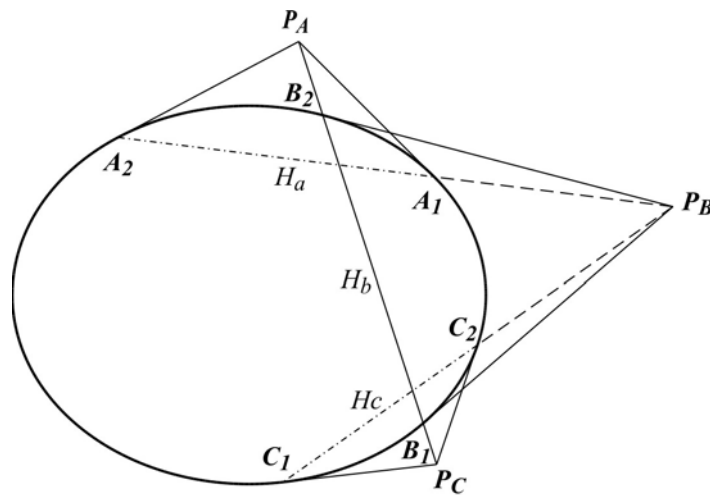


Рис. 3

*Следствие 2.* Пусть у коники два полюса расположены так, что прямая, их соединяющая, является секущей – т.е. пересекает эту кривую в двух точках (см. рис.3). Кроме того, предполагаем, что продолжения хорды к этим полюсам не  $\parallel$  и имеют свою точку пересечения. Построим касательные в точках пересечения кривой и секущей и продолжим их до пересечения в точке 3-го полюса, которая

---

совпадет с точкой пересечения хорд двух первых полюсов. Это следует из того, что каждые из пар рассматриваемых полярных треугольников  $\Delta A_1 P_A A_2$ ,  $\Delta B_1 P_B B_2$  и  $\Delta C_1 P_C C_2$ ,  $\Delta B_1 P_B B_2$  являются сопряженными.

С другой стороны, видно, что пара  $\Delta A_1 P_A A_2$ ,  $\Delta C_1 P_C C_2$  не является сопряженной, поэтому **свойство сопряженности не транзитивно**.

*Следствие 3.* Если секущая пересекает хорду  $A_1 A_2$  справа от центра хорды (см. рис. 3), то полюс  $P_B$  в системе координат Кеплера будет лежать справа от кривой, если слева – то, соответственно, слева. Если секущая проходит через центр хорды, то она совпадает внутри кривой с диаметром (об этом более подробно в гл.6) и полюс  $P_B$  лежит на  $\pm \infty$ . Во всех этих случаях точка полюса  $P_B$  принадлежит продолжению хорды  $A_1 A_2$ .

Упражнение 1. Пусть два полюса из следствия 2 расположены на разных ветвях гиперболы. Постройте рисунок, подобный рис. 3, и проанализируйте его.

### 5.11. Точка пересечения двух хорд

Продолжим рассматривать систему из 3-полюсов  $P_A, P_B, P_C$ , в которой два полюса  $P_A, P_C$  порождают третий полюс -  $P_B$  (см. рис.1). Сразу заметим, что необходимым условием данной операции является то, что прямая, соединяющая эти два полюса, проходит через конику, т.е. является секущей к данной кривой. Найдем полярные координаты  $P_B$ .

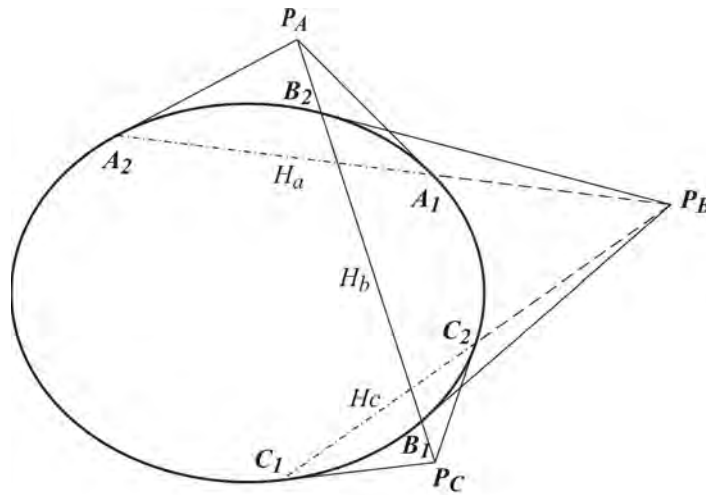


Рис. 1

Для этого запишем совместное уравнение двух хорд  $H_a, H_c$  (5.6.1.-2)

$$\begin{cases} (\cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A)x + \sin \varphi_{0A}y = p \cos \delta_A, \\ (\cos \varphi_{0C} + e \cos \delta_C)x + \sin \varphi_{0C}y = p \cos \delta_C \end{cases} \quad (1)$$

Решим это уравнение методом Крамера

**определитель системы**  $\Delta = \begin{vmatrix} \cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A & \sin \varphi_{0A} \\ \cos \varphi_{0C} + e \cos \delta_C & \sin \varphi_{0C} \end{vmatrix} = \cos \varphi_{0A} \sin \varphi_{0C} +$

$$+ e \cos \delta_A \sin \varphi_{0C} - \cos \varphi_{0C} \sin \varphi_{0A} - e \cos \delta_C \sin \varphi_{0A} = \sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}) + e(\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C), \quad (2)$$

**определитель**  $\Delta_x = p \begin{vmatrix} \cos \delta_A & \sin \varphi_{0A} \\ \cos \delta_C & \sin \varphi_{0C} \end{vmatrix} = p(\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C), \quad (3)$

**определитель**  $\Delta_y = p \begin{vmatrix} \cos \varphi_{0A} + e \cos \delta_A & \cos \delta_A \\ \cos \varphi_{0C} + e \cos \delta_C & \cos \delta_C \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} \cos \varphi_{0A} & \cos \delta_A \\ \cos \varphi_{0C} & \cos \delta_C \end{vmatrix} =$

$$= p(\cos \varphi_{0A} \cos \delta_C - \cos \varphi_{0C} \cos \delta_A), \quad (4)$$

**координаты точки пересечения двух хорд**

$$\mathbf{P}_B = \left\{ \frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta} \right\} = \frac{p\{\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C, \cos \varphi_{0A} \cos \delta_C - \cos \varphi_{0C} \cos \delta_A\}}{\sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}) + e(\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C)}. \quad (5)$$

В зависимости от взаимного расположения хорд, точка их пересечения может быть внутри кривой, на кривой, или вне кривой. Критерий этого положения получен, например, в 2.6. В этом разделе рассмотрим интерпретацию (5), когда точка пересечения является полюсом, т.е. находится вне кривой.

Если две хорды  $\parallel$  друг другу (т.е. для задач на плоскости это равносильно их пересечению на  $\infty$ ), то  $\Delta = 0$  или  $\sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}) + e(\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C) = 0$

(см. 5.6.1.-9а, 5.1.-5).

Из формулы полюса  $P_B : \frac{p\{\cos \varphi_{0B}, \sin \varphi_{0B}\}}{\cos \delta_B + e \cos \varphi_{0B}}$  (5.2.-2) и (5) получим полярные

координаты полюса, выраженные через полярные координаты хорд

$$\begin{cases} r_B = \frac{p}{\sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}) + e(\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C)} \\ \cos \varphi_{0B} = k(\sin \varphi_{0C} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_C), \\ \sin \varphi_{0B} = k(\cos \varphi_{0A} \cos \delta_C - \cos \varphi_{0C} \cos \delta_A), \\ \cos \delta_B = k \sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}). \end{cases}, \text{ где } k = const. \quad (6)$$

Представим, также, (6) с помощью определителей

$$\begin{cases} r_B = \frac{p}{\sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}) + e \begin{vmatrix} \sin \varphi_{0C} & \sin \varphi_{0A} \\ \cos \delta_C & \cos \delta_A \end{vmatrix}} \\ \cos \varphi_{0B} = k \begin{vmatrix} \sin \varphi_{0C} & \sin \varphi_{0A} \\ \cos \delta_C & \cos \delta_A \end{vmatrix}, \\ \sin \varphi_{0B} = k \begin{vmatrix} \cos \varphi_{0A} & \cos \varphi_{0C} \\ \cos \delta_A & \cos \delta_C \end{vmatrix}, \\ \cos \delta_B = k \sin(\varphi_{0C} - \varphi_{0A}). \end{cases}, \text{ где } k = const. \quad (7)$$

Упражнение 1. Дополните (рис.1) и докажите, что, вообще говоря,

$$\frac{\varphi_{0A} + \varphi_{0C}}{2} \neq \varphi_{0B}.$$

## 5.12. Точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника

**Теорема.** Впишем выпуклый четырехугольник в конику и соединим противоположные углы диагоналями. Построим на двух противоположных сторонах четырехугольника полярные треугольники и соединим их полюса прямой. Докажем, что прямая, соединяющая эти полюса или ее продолжение проходит через точку пересечения диагоналей. (См. рис.1,2.)

*Доказательство.* Для того, чтобы три прямых пересекались в одной точке,

необходимо и достаточно, чтобы 
$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (*)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  коэффициенты уравнения прямой в общем виде  $A_i x + B_i y + C_i = 0$  [1, §114,6], [2, §60].

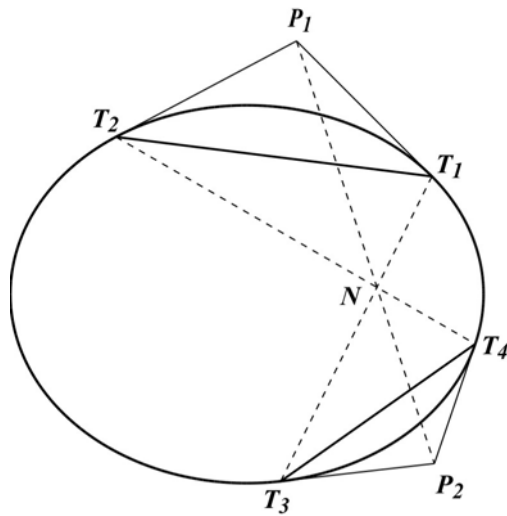


Рис. 1

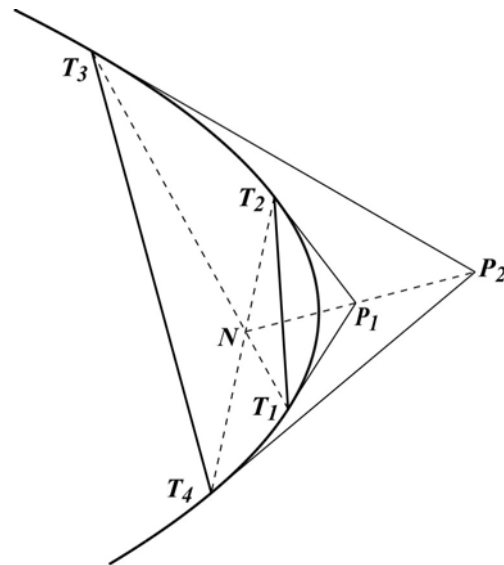


Рис. 2

Запишем декартовы координаты конечных точек диагоналей

$$T_1 : \frac{p\{\cos \varphi_1, \sin \varphi_1\}}{1 + e \cos \varphi_1}, \quad T_2 : \frac{p\{\cos \varphi_2, \sin \varphi_2\}}{1 + e \cos \varphi_2}, \quad T_3 : \frac{p\{\cos \varphi_3, \sin \varphi_3\}}{1 + e \cos \varphi_3}, \quad T_4 : \frac{p\{\cos \varphi_4, \sin \varphi_4\}}{1 + e \cos \varphi_4}, \quad a$$

также координаты полюсов

$$P_1 : \frac{p\{\cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}, \sin \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\}}{\cos \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} + e \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}}, \quad P_2 : \frac{p\{\cos \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2}, \sin \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2}\}}{\cos \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} + e \cos \frac{\varphi_4 + \varphi_3}{2}}.$$

Прямая  $T_1 T_3$

$$A_1 = y_3 - y_1 = p \left( \frac{\sin \varphi_3}{1 + e \cos \varphi_3} - \frac{\sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} \right) = p \frac{\sin \varphi_3 - \sin \varphi_1 + e \sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_3)},$$

$$B_1 = x_1 - x_3 = p \left( \frac{\cos \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1} - \frac{\cos \varphi_3}{1 + e \cos \varphi_3} \right) = p \frac{\cos \varphi_1 - \cos \varphi_3}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_3)},$$

$$C_1 = y_1 x_3 - y_3 x_1 = p^2 \frac{\sin \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_3 \cos \varphi_1}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_3)} = p^2 \frac{-\sin(\varphi_3 - \varphi_1)}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_3)}.$$

Сократим все полученные коэффициенты на общий множитель  $\frac{2p \sin\left(\frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}\right)}{(1 + e \cos \varphi_1)(1 + e \cos \varphi_3)}$ , получая

$$A_1 = \cos \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2} + e \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2},$$

$$B_1 = \sin \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}, \quad C_1 = -p \cos \frac{\varphi_3 - \varphi_1}{2}. \quad \text{Введем, для краткости, половинные углы } \gamma_i = \frac{\varphi_i}{2}.$$

$$\text{Тогда } A_1 = \cos(\gamma_1 + \gamma_3) + e \cos(\gamma_3 - \gamma_1), \quad B_1 = \sin(\gamma_1 + \gamma_3), \quad C_1 = -p \cos(\gamma_3 - \gamma_1). \quad (1)$$

**Прямая  $T_2T_4$**

$$A_2 = \cos(\gamma_2 + \gamma_4) + e \cos(\gamma_4 - \gamma_2), \quad B_2 = \sin(\gamma_2 + \gamma_4), \quad C_2 = -p \cos(\gamma_4 - \gamma_2). \quad (2)$$

**Прямая  $P_1P_2$**

$$A_3 = \frac{p \sin\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)} - \frac{p \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} =$$

$$= k(\sin(\gamma_3 + \gamma_4)\cos(\gamma_2 - \gamma_1) - \sin(\gamma_1 + \gamma_2)\cos(\gamma_4 - \gamma_3) + e \sin((\gamma_3 + \gamma_4) - (\gamma_1 + \gamma_2))),$$

$$\text{где } k = \frac{p}{(\cos(\gamma_4 - \gamma_3) + e \cos \varphi(\gamma_4 + \gamma_3))(\cos(\gamma_2 - \gamma_1) + e \cos \varphi(\gamma_1 + \gamma_2))},$$

$$B_3 = \frac{p \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)} - \frac{p \cos\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)} =$$

$$= k(\cos(\gamma_1 + \gamma_2)\cos(\gamma_4 - \gamma_3) - \cos(\gamma_2 - \gamma_1)\cos(\gamma_3 + \gamma_4)),$$

$$\text{таким же образом } C_3 = -pk \sin((\gamma_4 + \gamma_3) - (\gamma_1 + \gamma_2)). \quad (3)$$

Сократим все коэффициенты на  $k$  и сформируем определитель (\*). В третьем столбце вынесем за знак определителя коэффициент  $-p$ . Затем умножим 3-й столбец на  $-e$  и сложим с 1-м столбцом. В этом случае члены с эксцентриситетом сократятся. Запишем получившийся определитель

$$D = \begin{vmatrix} \cos(\gamma_1 + \gamma_3) & \sin(\gamma_1 + \gamma_3) & \cos(\gamma_3 - \gamma_1) \\ \cos(\gamma_2 + \gamma_4) & \sin(\gamma_2 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 + \gamma_2) \\ \left| \begin{matrix} \sin(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \end{matrix} \right| & \left| \begin{matrix} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \end{matrix} \right| & \sin((\gamma_4 + \gamma_3) - (\gamma_1 + \gamma_2)) \end{vmatrix}. \quad (4)$$

Будем упрощать этот определитель. Для этого рассмотрим клетку, стоящую по адресу 3-я строка, 2 столбец определителя 3-го порядка. Ее занимает

определитель 2-го порядка  $\begin{vmatrix} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \cos(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \end{vmatrix}$ , состоящий из элементов типа

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta$ . Прибавим к 1-му столбцу 2-й столбец этого

определителя, а затем эту сумму вычтем из второго столбца. Тем самым в 1-м столбце сократится выражение типа  $\sin\alpha \sin\beta$ , а во 2-м -  $\cos\alpha \cos\beta$ . В итоге

получится более простой определитель -  $4 \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 & \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \\ \cos\gamma_3 \cos\gamma_4 & \sin\gamma_3 \sin\gamma_4 \end{vmatrix}$ . (5)

Вернемся к определителю 3-го порядка и проделаем с ним аналогичную процедуру: прибавим к 1-му столбцу 3-й столбец этого определителя, а затем полученный 1-й столбец вычтем из 3-го столбца. Вынесем коэффициент 4 за знак определителя. Во 2-м столбце 3-я строка полученного ранее определителя преобразуем следующим образом (проверьте!)

$$\begin{vmatrix} \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 & \sin\gamma_1 \sin\gamma_2 \\ \cos\gamma_3 \cos\gamma_4 & \sin\gamma_3 \sin\gamma_4 \end{vmatrix} = \sin(\gamma_1 + \gamma_3) \sin(\gamma_4 - \gamma_2) + \sin(\gamma_2 + \gamma_4) \sin(\gamma_3 - \gamma_1).$$

После упрощений имеем

$$D = k \begin{vmatrix} \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 & \sin(\gamma_1 + \gamma_3) & \sin\gamma_1 \sin\gamma_3 \\ \cos\gamma_2 \cos\gamma_4 & \sin(\gamma_2 + \gamma_4) & \sin\gamma_2 \sin\gamma_4 \\ \left( \begin{matrix} \cos\gamma_1 \cos\gamma_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) + \\ + \cos\gamma_2 \cos\gamma_4 \sin(\gamma_3 - \gamma_1) \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} \sin(\gamma_1 + \gamma_3) \sin(\gamma_4 - \gamma_2) + \\ \sin(\gamma_2 + \gamma_4) \sin(\gamma_3 - \gamma_1) \end{matrix} \right) & \left( \begin{matrix} \sin\gamma_1 \sin\gamma_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) + \\ + \sin\gamma_2 \sin\gamma_4 \sin(\gamma_3 - \gamma_1) \end{matrix} \right) \end{vmatrix}. \quad (6)$$

(В 3-ей ряду записаны длинные выражения в скобках, для того, чтобы можно было их записать в две строки.)

Легко проверить, что если 1-ю строку, умноженную на  $\sin(\gamma_4 - \gamma_2)$  сложить со 2-й строкой, умноженной на  $\sin(\gamma_3 - \gamma_1)$  и полученную сумму вычесть из 3-ей строки, то вся 3-я строка будет состоять из одних 0. Отсюда  $D = 0$  и диагонали пересекаются с прямой, проходящей через полюса в одной точке -  $N$ .  $\square$



Доказанная теорема фактически эквивалентна теореме Ньютона (Newton)<sup>1</sup>: **диагонали описанного четырехугольника и прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон его, пересекаются в одной точке.**

*Замечание.* Четырехугольник может быть невыпуклым (см.рис.2).

Упражнение 1 [10, гл. IX, упр.3.]. Обосновать следующий способ построения касательных к конике из произвольной  $P_A$  (рис.3). Прямые 1 и 2 проводятся произвольно, остальные прямые в порядке следования номеров.

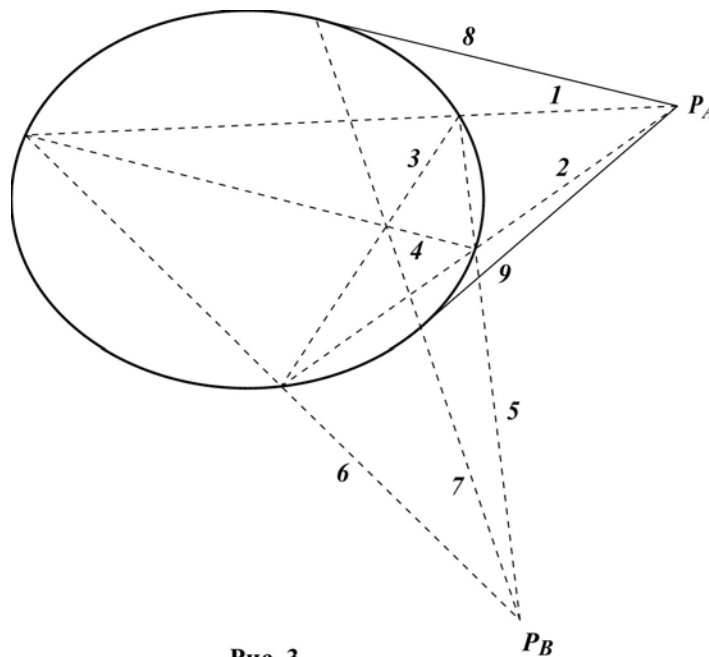


Рис. 3

### 5.13. Теорема Паскаля

*Теорема.* Точки пересечения противоположных сторон шестиугольника, вписанного в часть эллипса, параболы или нераспадающуюся часть гиперболы, лежат на одной прямой. Ср. [1,§214],[2,стр.681].

*Доказательство.* Предполагаем, что в нашем шестиугольнике нет || сторон, хотя можно доказать эту теорему и в общем случае.

<sup>1</sup> Д.Ефремовъ. Новая геометрія треугольника. Одесса. Типографія Бланкоиздательства М. Шпенцера, Ямская д. N64, 1902, стр. 37.

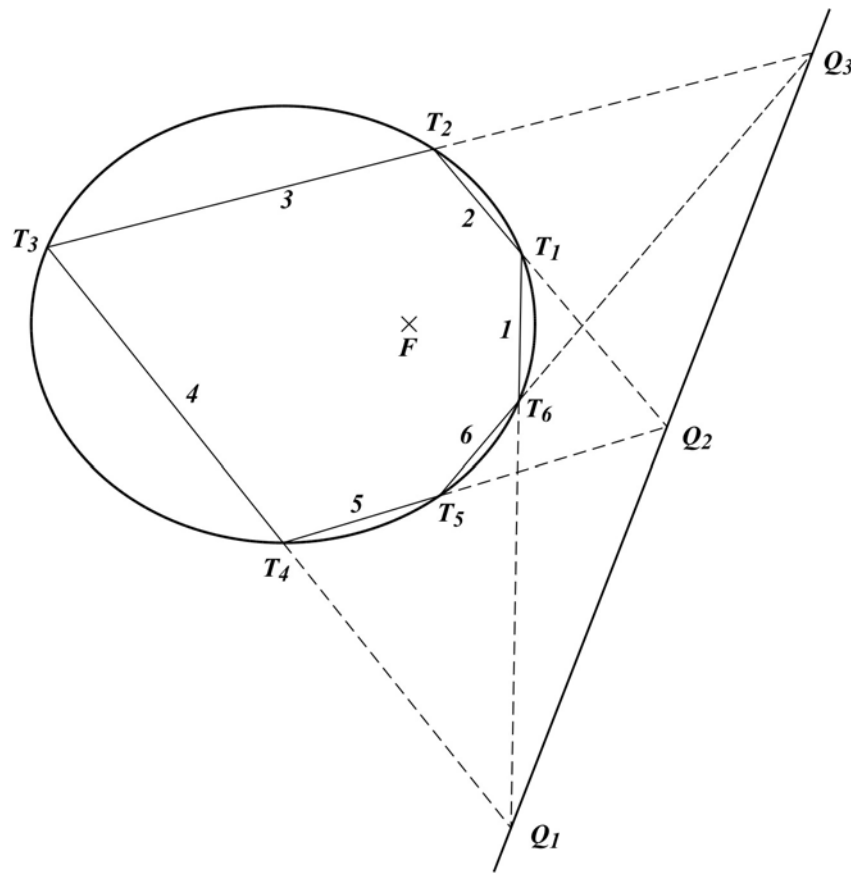


Рис. 1

Перенумеруем хорды для краткости числами 1..6. Поэтому название хорд(поляр)  $(T_6T_1, T_3T_4)$ , участвующих в пересечении продолжений будем записывать как (1,4), а точку их пересечения назовем  $Q_1$ . Аналогично, для других хорд  $(T_1T_2, T_4T_5) \rightarrow (2,5)$  и  $Q_2$ ,  $(T_2T_3, T_5T_6) \rightarrow (3,6)$  и  $Q_3$ .

С вершинами шестиугольника свяжем полярные углы, как и ранее в данной работе  $P_1 \rightarrow \varphi_1, P_2 \rightarrow \varphi_2, \dots, P_6 \rightarrow \varphi_6$ .

Подготовим к расчету углы отклонений  $\delta_i$ , где  $i=1,6$ , в которых для простоты произведем замену переменных (см.5.12)

$$\delta_1 = \frac{\varphi_1 - \varphi_6}{2} = \frac{\varphi_1}{2} - \frac{\varphi_6}{2} = \gamma_1 - \gamma_6, \quad \delta_2 = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \gamma_2 - \gamma_1, \quad \delta_3 = \frac{\varphi_3 - \varphi_2}{2} = \gamma_3 - \gamma_2,$$

$$\delta_4 = \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} = \gamma_4 - \gamma_3, \quad \delta_5 = \frac{\varphi_5 - \varphi_4}{2} = \gamma_5 - \gamma_4, \quad \delta_6 = \frac{\varphi_6 - \varphi_5}{2} = \gamma_6 - \gamma_5. \quad (1)$$

Аналогично для направления биссектрис  $\varphi_{0i}$ , где  $i=1,6$

$$\begin{aligned}\varphi_{01} &= \frac{\varphi_1 + \varphi_6}{2} = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_6}{2} = \gamma_1 + \gamma_6, \quad \varphi_{02} = \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = \gamma_2 + \gamma_1, \quad \varphi_{03} = \frac{\varphi_3 + \varphi_2}{2} = \gamma_3 + \gamma_2, \\ \delta_4 &= \frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2} = \gamma_4 - \gamma_3, \quad \delta_5 = \frac{\varphi_5 - \varphi_4}{2} = \gamma_5 - \gamma_4, \quad \delta_6 = \frac{\varphi_6 - \varphi_5}{2} = \gamma_6 - \gamma_5.\end{aligned}\quad (2)$$

Из (5.11.-6), представленной с помощью определителей, получим

$$\begin{aligned}Q_1: \frac{p\{\cos \varphi_{0Q_1}, \sin \varphi_{0Q_1}\}}{\cos \delta_{Q_1} + e \cos \varphi_{0Q_1}} &= \frac{P \left\{ \begin{array}{c|c} \sin(\gamma_3 + \gamma_4) & \sin(\gamma_1 + \gamma_6) \\ \cos(\gamma_4 - \gamma_3) & \cos(\gamma_1 - \gamma_6) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{c|c} \cos(\gamma_1 + \gamma_6) & \cos(\gamma_3 + \gamma_4) \\ \cos(\gamma_1 - \gamma_6) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \end{array} \right\}}{\sin((\gamma_1 + \gamma_6) - (\gamma_3 + \gamma_4)) + e \left| \begin{array}{c|c} \sin(\gamma_3 + \gamma_4) & \sin(\gamma_1 + \gamma_6) \\ \cos(\gamma_4 - \gamma_3) & \cos(\gamma_1 - \gamma_6) \end{array} \right|}, \\ Q_2: \frac{p\{\cos \varphi_{0Q_2}, \sin \varphi_{0Q_2}\}}{\cos \delta_{Q_2} + e \cos \varphi_{0Q_2}} &= \frac{P \left\{ \begin{array}{c|c} \sin(\gamma_4 + \gamma_5) & \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ \cos(\gamma_5 - \gamma_4) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{c|c} \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_4 + \gamma_5) \\ \cos(\gamma_2 - \gamma_1) & \cos(\gamma_5 - \gamma_4) \end{array} \right\}}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2) - (\gamma_4 + \gamma_5) + e \left| \begin{array}{c|c} \sin(\gamma_4 + \gamma_5) & \sin(\gamma_1 + \gamma_2) \\ \cos(\gamma_5 - \gamma_4) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \end{array} \right|}, \\ Q_3: \frac{p\{\cos \varphi_{0Q_3}, \sin \varphi_{0Q_3}\}}{\cos \delta_{Q_3} + e \cos \varphi_{0Q_3}} &= \frac{P \left\{ \begin{array}{c|c} \sin(\gamma_5 + \gamma_6) & \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \\ \cos(\gamma_6 - \gamma_5) & \cos(\gamma_3 - \gamma_2) \end{array} \right\} \left| \begin{array}{c|c} \cos(\gamma_2 + \gamma_3) & \cos(\gamma_5 + \gamma_6) \\ \cos(\gamma_3 - \gamma_2) & \cos(\gamma_6 - \gamma_5) \end{array} \right\}}{\sin(\gamma_2 + \gamma_3) - (\gamma_5 + \gamma_6) + e \left| \begin{array}{c|c} \sin(\gamma_5 + \gamma_6) & \sin(\gamma_2 + \gamma_3) \\ \cos(\gamma_6 - \gamma_5) & \cos(\gamma_3 - \gamma_2) \end{array} \right|}.\end{aligned}\quad (3)$$

Пусть 3 точки  $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}, \{x_3, y_3\}$  лежат на одной прямой. Тогда

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.\quad (4)$$

Подставим координаты  $Q_1, Q_2, Q_3$  на соответствующие места в определитель (4), который назовем полным. С другой стороны, внутренние элементы 1-го и 2-го столбца в свою очередь будут состоять из определителей 2-го порядка. Такая структура в теории матриц носит название клеточной.

Приведем к общему знаменателю элементы во всех строках и вынесем общие множители  $k_{i,j} = \frac{p^2}{(\cos(\gamma_i - \gamma_j) + e \cos \varphi(\gamma_i + \gamma_j))(\cos(\gamma_l - \gamma_k) + e \cos \varphi(\gamma_l + \gamma_k))}$  за знак определителя. Т.к. мы предположили, что в нашем шестиугольнике нет || сторон, то и  $Q_1, Q_2, Q_3$  находятся не на  $\infty$ . В силу этого  $0 < k_{i,j} < \infty$  и все 3 коэффициента можно опустить, т.к. для проверки: равен ли определитель нулю, конечные, не равные нулю, коэффициенты роли не играют.

Умножим 1-й столбец на  $-e$  и сложим с третьим столбцом. В этом случае члены с эксцентриситетом сократятся. Запишем определитель  $D$ , перед которым в качестве комментария в круглых скобках укажем номера пересекающихся хорд

$$\begin{aligned}
 (1,4): & \left| \begin{array}{cc|cc} \sin(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) & \cos(\gamma_1 + \gamma_6) & \cos(\gamma_1 - \gamma_6) \\ \sin(\gamma_6 + \gamma_1) & \cos(\gamma_1 - \gamma_6) & \cos(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \end{array} \right| \sin((\gamma_1 + \gamma_6) - (\gamma_3 + \gamma_4)) \\
 (2,5): & D = \left| \begin{array}{cc|cc} \sin(\gamma_4 + \gamma_5) & \cos(\gamma_5 - \gamma_4) & \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) & \cos(\gamma_4 + \gamma_5) & \cos(\gamma_5 - \gamma_4) \end{array} \right| \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - (\gamma_4 + \gamma_5) \\
 (3,6): & \left| \begin{array}{cc|cc} \sin(\gamma_5 + \gamma_6) & \cos(\gamma_6 - \gamma_5) & \cos(\gamma_2 + \gamma_3) & \cos(\gamma_3 - \gamma_2) \\ \sin(\gamma_2 + \gamma_3) & \cos(\gamma_3 - \gamma_2) & \cos(\gamma_5 + \gamma_6) & \cos(\gamma_6 - \gamma_5) \end{array} \right| \sin(\gamma_2 + \gamma_3) - (\gamma_5 + \gamma_6)
 \end{aligned} \tag{5}$$

Возьмем пример из (5.12), где преобразовывались аналогичные определители 2 порядка по следующей схеме

$$\left| \begin{array}{cc} \sin(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) \end{array} \right| = 4 \left( \begin{array}{l} \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_2) + \\ + \cos \gamma_2 \cos \gamma_4 \sin(\gamma_3 - \gamma_1) \end{array} \right). \text{ Воспользуемся данным}$$

преобразованием, как прототипом, и только будем ставить соответствующие индексы в каждом случае.

Для 1-й строки нашего определителя подстановка [10,§3] индексов будет следующей  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ . Это означает, что индексы 3,4 останутся без изменения, индекс 2 переходит в индекс 1, а 1 в 6. Далее, аналогично для 2-й строки -  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ , для 3-й строки -  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ .

Таким образом, соберем весь преобразованный определитель

$$D = k \left| \begin{array}{ccc} \left( \begin{array}{l} \cos \gamma_6 \cos \gamma_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_1) + \\ + \cos \gamma_1 \cos \gamma_4 \sin(\gamma_3 - \gamma_6) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{l} \sin(\gamma_6 + \gamma_3) \sin(\gamma_4 - \gamma_1) + \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_4) \sin(\gamma_3 - \gamma_6) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{l} \sin \gamma_6 \sin \gamma_3 \sin(\gamma_4 - \gamma_1) + \\ + \sin \gamma_1 \sin \gamma_4 \sin(\gamma_3 - \gamma_6) \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} \cos \gamma_1 \cos \gamma_4 \sin(\gamma_5 - \gamma_2) + \\ + \cos \gamma_2 \cos \gamma_5 \sin(\gamma_4 - \gamma_1) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{l} \sin(\gamma_1 + \gamma_4) \sin(\gamma_5 - \gamma_2) + \\ \sin(\gamma_2 + \gamma_5) \sin(\gamma_4 - \gamma_1) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{l} \sin \gamma_1 \sin \gamma_4 \sin(\gamma_5 - \gamma_2) + \\ + \sin \gamma_2 \sin \gamma_5 \sin(\gamma_4 - \gamma_1) \end{array} \right) \\ \left( \begin{array}{l} \cos \gamma_2 \cos \gamma_5 \sin(\gamma_6 - \gamma_3) + \\ + \cos \gamma_3 \cos \gamma_6 \sin(\gamma_5 - \gamma_2) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{l} \sin(\gamma_2 + \gamma_5) \sin(\gamma_6 - \gamma_3) + \\ \sin(\gamma_3 + \gamma_6) \sin(\gamma_5 - \gamma_2) \end{array} \right) & \left( \begin{array}{l} \sin \gamma_2 \sin \gamma_5 \sin(\gamma_6 - \gamma_3) + \\ + \sin \gamma_3 \sin \gamma_6 \sin(\gamma_5 - \gamma_2) \end{array} \right)
 \end{array} \right|.$$

(6)

Т.к. каждая строка определителя состоит из суммы элементов, то данный определитель можно представить в виде суммы из  $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$  определителей [10, §4, свойство 7]. Но только у двух слагаемых из восьми не повторяются строки. Следовательно, только они не равны нулю. Выпишем их

$$D_1 = k \sin(\gamma_4 - \gamma_1) \sin(\gamma_5 - \gamma_2) \sin(\gamma_6 - \gamma_3) \begin{vmatrix} \cos \gamma_6 \cos \gamma_3 & \sin(\gamma_6 + \gamma_3) & \sin \gamma_6 \sin \gamma_3 \\ \cos \gamma_1 \cos \gamma_4 & \sin(\gamma_1 + \gamma_4) & \sin \gamma_1 \sin \gamma_4 \\ \cos \gamma_2 \cos \gamma_5 & \sin(\gamma_2 + \gamma_5) & \sin \gamma_2 \sin \gamma_5 \end{vmatrix}, \quad (7)$$

$$D_2 = k \sin(\gamma_3 - \gamma_6) \sin(\gamma_4 - \gamma_1) \sin(\gamma_5 - \gamma_2) \begin{vmatrix} \cos \gamma_1 \cos \gamma_4 & \sin(\gamma_1 + \gamma_4) & \sin \gamma_1 \sin \gamma_4 \\ \cos \gamma_2 \cos \gamma_5 & \sin(\gamma_2 + \gamma_5) & \sin \gamma_2 \sin \gamma_5 \\ \cos \gamma_3 \cos \gamma_6 & \sin(\gamma_3 + \gamma_6) & \sin \gamma_3 \sin \gamma_6 \end{vmatrix}. \quad (8)$$

Определители (без учета коэффициентов), стоящие в формулах (7) и (8) равны, т.к. 1-й переходит во 2-й при помощи 2-х перестановок строк. Но из-за того, что  $\sin(\gamma_6 - \gamma_3) = -\sin(\gamma_3 - \gamma_6)$  и, следовательно, коэффициенты перед определителем разных знаков, то  $D_1 + D_2 = 0$ , откуда  $D = 0$ . Отсюда следует, что  $Q_1, Q_2, Q_3$  лежат на одной прямой.

### 5.14. Теорема Брианшона

**Теорема.** Прямые, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, описанного около действительной невырождающейся коники, проходят через одну точку<sup>1</sup> (рис.1).

<sup>1</sup>Шарль Жюльен Брианшон (Charles Julien Brianchon (1785-1864)), капитан артиллерии, впоследствии профессор артиллерийской школы в мемуаре «О кривых поверхностях второго порядка» (Sur les surfaces courbes du second ordre.- J.Ес.Polyt.,1806) опубликовал теорему об описанном шестиугольнике вокруг коники - двойственную теореме Паскаля. Это был первый шаг в

Предполагаем, что в нашем шестиугольнике нет полюсов, которые бы были удалены на  $\infty$ , но предлагаем читателю впоследствии доказать эту теорему и в общем случае.

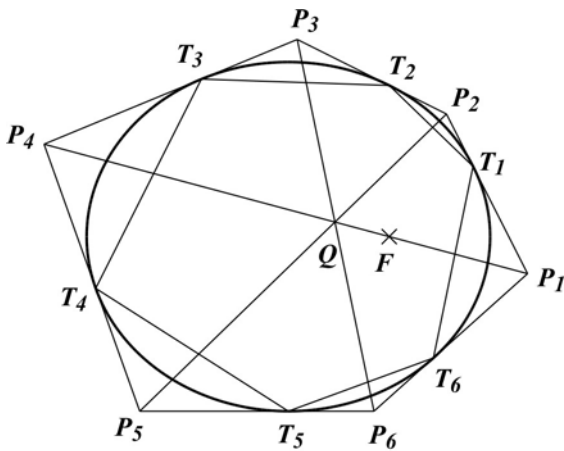


Рис. 1

Доказательство теоремы Бриансона практически аналогично доказательству теоремы Паскаля. В частности, получим для анализа точно такой же определитель, как и в (5.13.-5).

*Доказательство.* Для того, чтобы три прямых пересекались в одной точке,

необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (1)$$

где  $A_i, B_i, C_i$  коэффициенты уравнения прямой в общем виде  $A_i x + B_i y + C_i = 0$  [1, §114,6],[2, §60].

Напомним, что зная координаты двух точек  $\{x_1, y_1\}, \{x_2, y_2\}$ , можно вычислить эти коэффициенты по следующим формулам  $A = y_2 - y_1, B = x_1 - x_2, C = y_1 x_2 - x_1 y_2$ . Прямые между полюсами  $P_1 P_4$  обозначим для краткости (1,4), между полюсами  $P_2 P_5$  - (2,5), между полюсами  $P_3 P_6$  - (3,6). Т.к. координаты соответствующего полюса

(5.2.-2)  $P_i = \frac{p\{\cos \varphi_{0i}, \sin \varphi_{0i}\}}{\cos \delta_i + e \cos \varphi_{0i}}$ , то можно вычислить коэффициенты  $A_i, B_i, C_i$  для

первой прямой - (1,4), а для остальных двух прямых коэффициенты получим сменой индексов. Полу сумму и полу разность углов будем (как и в 5.12)

записывать с помощью новых переменных  $\frac{\varphi_k + \varphi_l}{2} = \gamma_k + \gamma_l, \frac{\varphi_k - \varphi_l}{2} = \gamma_k - \gamma_l$ .

Итак

установлении общего принципа двойственности [см. «Математика XIX века» под редакцией А.Н.Колмогорова и А.П. Юшкевича, М., «Наука», 1981г., стр. 33-34], [1, стр. 427].

$$A_{(1,4)} = \frac{p \sin\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)} - \frac{p \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_6}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_6}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_6}{2}\right)} =$$

$$= k_{(1,4)} (\sin(\gamma_3 + \gamma_4) \cos(\gamma_1 - \gamma_6) - \sin(\gamma_1 + \gamma_6) \cos(\gamma_4 - \gamma_3) + e \sin((\gamma_3 + \gamma_4) - (\gamma_1 + \gamma_6))), \quad (2)$$

$$\text{где } k_{1,4} = \frac{p}{(\cos(\gamma_4 - \gamma_3) + e \cos \varphi(\gamma_4 + \gamma_3))(\cos(\gamma_1 - \gamma_6) + e \cos \varphi(\gamma_1 + \gamma_6))},$$

$$B_{(1,4)} = \frac{p \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_6}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_6}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_6}{2}\right)} - \frac{p \cos\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\varphi_4 - \varphi_3}{2}\right) + e \cos\left(\frac{\varphi_3 + \varphi_4}{2}\right)} =$$

$$= k_{(1,4)} (\cos(\gamma_1 + \gamma_6) \cos(\gamma_4 - \gamma_3) - \cos(\gamma_1 - \gamma_6) \cos(\gamma_3 + \gamma_4)), \quad (3)$$

$$\text{таким же образом } C_{(14)} = p k_{(1,4)} \sin((\gamma_1 + \gamma_6) - (\gamma_3 + \gamma_4)). \quad (4)$$

Вынесем за знак определителя постоянные множители и отбросим их, умножим 3-й столбец на  $\frac{e}{p}$  и сложим с 1-м столбцом. В этом случае члены с эксцентриситетом сократятся. Запишем определитель  $D$ , перед которым в качестве комментария укажем номера пересекающихся прямых

$$(1,4): \begin{vmatrix} \sin(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) & \cos(\gamma_1 + \gamma_6) & \cos(\gamma_1 - \gamma_6) & \sin((\gamma_1 + \gamma_6) - (\gamma_3 + \gamma_4)) \\ \sin(\gamma_6 + \gamma_1) & \cos(\gamma_1 - \gamma_6) & \cos(\gamma_3 + \gamma_4) & \cos(\gamma_4 - \gamma_3) & \end{vmatrix}$$

$$(2,5): D = \begin{vmatrix} \sin(\gamma_4 + \gamma_5) & \cos(\gamma_5 - \gamma_4) & \cos(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) & \sin(\gamma_1 + \gamma_2) - (\gamma_4 + \gamma_5) \\ \sin(\gamma_1 + \gamma_2) & \cos(\gamma_2 - \gamma_1) & \cos(\gamma_4 + \gamma_5) & \cos(\gamma_5 - \gamma_4) & \end{vmatrix}$$

$$(3,6): \begin{vmatrix} \sin(\gamma_5 + \gamma_6) & \cos(\gamma_6 - \gamma_5) & \cos(\gamma_2 + \gamma_3) & \cos(\gamma_3 - \gamma_2) & \sin(\gamma_2 + \gamma_3) - (\gamma_5 + \gamma_6) \\ \sin(\gamma_2 + \gamma_3) & \cos(\gamma_3 - \gamma_2) & \cos(\gamma_5 + \gamma_6) & \cos(\gamma_6 - \gamma_5) & \end{vmatrix} \quad (4)$$

Далее пользуясь той же логикой рассуждений, что и при доказательстве теоремы Паскаля, устанавливаем, что определитель  $D = 0$ .  $\square$

Упражнение 1. Напишите программу расчета координат  $Q$ .

Указание. Используйте (5.11.-5), (5.11.-6), (2), (3), (4).

### 5.15. Принцип двойственности (взаимности, корреляции)

Основатель классической теории корреляции - немецкий ученый Ю.Плюккер (Julius Plücker (1801-1868).)

Приведем принцип двойственности [см.1, стр.427]: **для всех предложений, относящихся к полюсу, хорде и ее продолжению (в оригинале поляра), касательной, можно получить «взаимное» предложение, заменяя слово «точки, принадлежащие линии» словами «касательные к линии», слово «полюс» словом «хорда». Можно выполнять и обратные замены. Этот принцип позволяет в два раза сократить количество доказываемых теорем.**

Ниже дадим общее, независимое от вида представления эллипса, параболы или гиперболы, геометрическое истолкование связи между прямой и точкой, разделенными этой кривой.

В (5.2.-2) выяснили, что каждой хорде однозначно соответствует свой полюс. Выберем некоторую точку на этой хорде. Проводя другие хорды через выбранную точку, получим новые координаты полюсов, соответствующие этим хордам.

**Теорема. Геометрическое место полюсов, образованных данным образом, описывают прямую линию.**

*Доказательство.* Пусть теперь две хорды пересекаются внутри коники (критерий внутреннего пересечения указан в (2.6)). Запишем условие, при котором третья хорда проходит через точку пересечения первых двух хорд

$$\begin{vmatrix} \cos \varphi_{01} + e \cos \delta_1 & \sin \varphi_{01} & -p \cos \delta_1 \\ \cos \varphi_{02} + e \cos \delta_2 & \sin \varphi_{02} & -p \cos \delta_2 \\ \cos \varphi_{03} + e \cos \delta_3 & \sin \varphi_{03} & -p \cos \delta_3 \end{vmatrix} = 0. \quad \text{Вынесем общий множитель } -p \text{ за знак}$$

определителя и сложим 1-й столбец с 3-м, умноженным на  $-e$ . Тогда наше

$$\text{условие запишется так } \begin{vmatrix} \cos \varphi_{01} & \sin \varphi_{01} & \cos \delta_1 \\ \cos \varphi_{02} & \sin \varphi_{02} & \cos \delta_2 \\ \cos \varphi_{03} & \sin \varphi_{03} & \cos \delta_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Расположим теперь эти хорды так, что точки 3-х полюсов, соответствующие данным хордам лежат на одной прямой. О том, что такое возможно, говорит



теорема Паскаля. Выведем необходимое и достаточное условие принадлежности

$$\text{одной прямой} \quad \left| \begin{array}{cc|c} \frac{p \cos \varphi_{01}}{\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01}} & \frac{p \sin \varphi_{01}}{\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01}} & 1 \\ \frac{p \cos \varphi_{02}}{\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02}} & \frac{p \sin \varphi_{02}}{\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02}} & 1 \\ \frac{p \cos \varphi_{03}}{\cos \delta_3 + e \cos \varphi_{03}} & \frac{p \sin \varphi_{03}}{\cos \delta_3 + e \cos \varphi_{03}} & 1 \end{array} \right| = 0. \quad (2)$$

После простейших преобразований возвращаемся к условию (1). Тем самым доказали следующее: **пучку хорд, проходящих через одну точку внутри эллипса, параболы или гиперболы соответствует геометрическое место полюсов, лежащих на одной прямой.**

С другой стороны, если рассматривать прямую, проходящую вне эллипса, параболы или гиперболы, как геометрическое место полюсов, то хорды, соответствующие выбранным точкам на прямой, пересекаются внутри нашей кривой в одной точке.

В более общем виде можно сказать следующее: **соответствующие прямая и точка, разделенные эллипсом, параболой или гиперболой, находятся во взаимно однозначном соответствии.**

Поставим себе целью найти это соответствие. Сначала найдем уравнение прямой, являющееся геометрическим местом полюсов. Для этого возьмем координаты двух полюсов  $Q_1: \frac{p\{\cos \varphi_{01}, \sin \varphi_{01}\}}{\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01}}$ ,  $Q_2: \frac{p\{\cos \varphi_{02}, \sin \varphi_{02}\}}{\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02}}$  и построим через них прямую. Вычислим коэффициенты этой прямой в общем виде

$$A = y_2 - y_1 = \frac{p \sin \varphi_{02}}{\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02}} - \frac{p \sin \varphi_{01}}{\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01}} =$$

$$= \frac{p(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2 + e \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}))}{(\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01})(\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02})},$$

$$B = x_1 - x_2 = \frac{p \cos \varphi_{01}}{\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01}} - \frac{p \cos \varphi_{02}}{\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02}} = \frac{p(\cos \varphi_{01} \cos \delta_2 - \sin \varphi_{02} \cos \delta_1)}{(\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01})(\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02})},$$

$$C = y_1 x_2 - y_2 x_1 = \frac{-p^2 \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01})}{(\cos \delta_1 + e \cos \varphi_{01})(\cos \delta_2 + e \cos \varphi_{02})}.$$

Произведя упрощения, получим

$$(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2 + e \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}))x + (\cos \varphi_{01} \cos \delta_2 - \sin \varphi_{02} \cos \delta_1)y - p \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = 0. \quad (3)$$

Этой прямой соответствует точка пересечения двух хорд (5.13.-5)

$$N : \frac{p\{\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2, \cos \varphi_{01} \cos \delta_2 - \cos \varphi_{02} \cos \delta_1\}}{\sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + e(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2)}. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) не очень удобны для практической работы. Поэтому займемся их дальнейшим упрощением. Итак, вернемся к 1-й задаче: пусть дана точка пересечения двух хорд *внутри* коники с полярными координатами  $N : r_0\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$ . Найти взаимную прямую  $g$  (см.рис.1).

Построение. Можно построить сколько угодно пар хорд, пересекающихся в данной точке. Геометрически этот факт очевиден, а аналитически это следует из того, что в системе уравнений (5.11.-1) для данной задачи на 2 уравнения с известными  $x = r_0 \cos \varphi_0, y = r_0 \sin \varphi_0$  четыре неизвестных угла  $\varphi_{01}, \delta_1, \varphi_{02}, \delta_2$ .

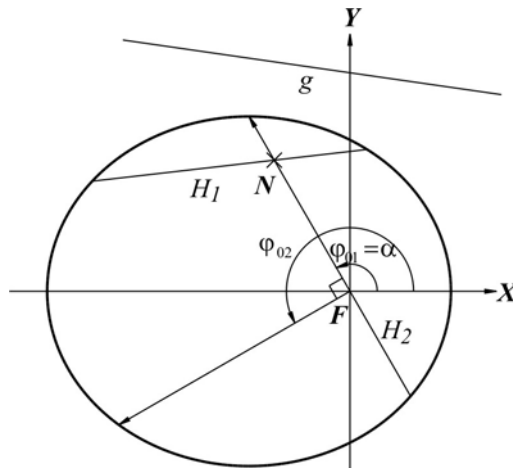


Рис. 1

Используя свободу в задании пары хорд, построим их таким образом, чтобы значительно упростить преобразования (3). Для этого проведем 1-ю хорду -  $H_1$  через  $N$  так, чтобы биссектриса фокального угла также проходила бы через  $N$ .

Докажем, что это всегда возможно. В самом деле, тогда  $\varphi_{01} = \alpha$ . Подставляя координаты  $N : r_0\{\cos \alpha, \sin \alpha\}$  в 1-е уравнение (5.11.-1), получим

$$(\cos \alpha + e \cos \delta_1)r_0 \cos \alpha + \sin \alpha r_0 \sin \alpha = p \cos \delta_1. \text{ Отсюда } r_0 + e r_0 \cos \alpha \cos \delta_1 = p \cos \delta_1, \\ r_0 = \cos \delta_1 (p - e r_0 \cos \alpha), \cos \delta_1 = \frac{r_0}{p - e r_0 \cos \alpha}. \quad (5)$$

Предельный случай, когда  $N$  лежит на кривой, соответствует радиус-вектору в данном направлении  $r_0 = \frac{p}{1 + e \cos \alpha}$ , что после подстановки в (5) дает  $\cos \delta_1 = 1, \delta_1 = 0$  (проверьте!). В этом случае **взаимная прямая** является касательной.

Итак, определена первая пара неизвестных углов  $\varphi_{01}, \delta_1$ . 2-ю хорду -  $H_2$  проведем таким образом, чтобы она совпала с биссектрисой фокального угла 1-й хорды, которая по построению проходит через  $N$ . Отсюда следует:

- 2-я хорда проходит через начало координат (в системе Кеплера - фокус);
- $\cos \delta_2 = 0$ ; (см.5.4.-2)
- биссектриса 2-й хорды  $\perp$  биссектрисе 1-й хорды (см. 5.10. следствие 1).

Из двух возможных  $\perp$  углов  $\varphi_{02} = \varphi_{01} \pm \frac{\pi}{2}$ , для определенности, выберем

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \frac{\pi}{2} = \alpha + \frac{\pi}{2}. \quad (6)$$

Подставим найденные углы в (3) и после простейших преобразований (проведите их!) получим **уравнение взаимности между внутренней точкой и взаимной прямой, с помощью которого по координатам этой точки находим уравнение взаимной прямой**

$$\left( \frac{r_0 \cos \alpha}{p - er_0 \cos \alpha} + e \right) x + \frac{r_0 \sin \alpha}{p - er_0 \cos \alpha} y - p = 0. \quad (7)$$

Переходя к декартовым координатам  $N : \{x_0, y_0\}$  внутренней точки, получим

$$\left( \frac{x_0}{p - ex_0} + e \right) x + \frac{y_0}{p - ex_0} y - p = 0. \quad (7a)$$

Упражнение 1. Т.к. касательные взаимны с точками касания, через которые они проходят, то проверьте это утверждение для точек с полярными углами  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . □

Решим теперь обратную задачу: по уравнению прямой, заданной в общем виде  $Ax + By + C = 0$ , найти координаты взаимной точки. Заметим, что коэффициенты  $A, B, C$  могут быть заданы с точностью до некоторого постоянного коэффициента  $k$ . Кроме этого, координаты искомой точки  $N$  будем искать в

декартовой системе координат, заменяя в (7) выражения  $\{r_0 \cos \alpha, r_0 \sin \alpha\}$  на  $\{x_0, y_0\}$ .

$$\text{Тогда } \begin{cases} \frac{x_0}{p - ex_0} + e = kA, \\ \frac{y_0}{p - ex_0} = kB, \\ -p = kC. \end{cases} \quad (8)$$

Предлагаем читателю решить эту систему относительно неизвестных  $x_0, y_0, k$ .

$$\text{Ответ. } k = \frac{-p}{C}, \text{ координаты взаимной точки } \begin{cases} x = \frac{p(pA + eC)}{epA + C(e^2 - 1)} \\ y = \frac{-p^2 B}{epA + C(e^2 - 1)} \end{cases}. \quad (9)$$

Упражнение 2. Доказать, что **фокус и директриса являются взаимными по отношению друг к другу**.

Указание. Использовать уравнение директрисы  $x = \frac{p}{e}$ .

Упражнение 3. Доказать, что **левый фокус эллипса и соответствующая ему директриса являются взаимными по отношению друг к другу**.

### 5.16. Гармоническое соотношение

В этом разделе продолжим изучать соотношения, возникающие при взаимодействии двух полярных треугольников, у которых продолжение хорды одного треугольника, проходит через полюс другого треугольника (см. рис.1.). Рассмотрим отрезок секущей  $P_A B_1$ , которому, для определенности, придадим направление от  $P_A$  к  $B_1$ .

Далее, с целью избежания сложных индексов, присвоим точкам этого отрезка натуральные числа (перенумеруем точки)  $P_A \rightarrow 1, B_2 \rightarrow 2, N \rightarrow 3, B_1 \rightarrow 4$ .

В соответствии с этой нумерацией ведем следующие радиус-векторы  $FP_A = r_1, FB_2 = r_2, FN = r_3, FB_1 = r_4$ , а также их полярные углы  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ .

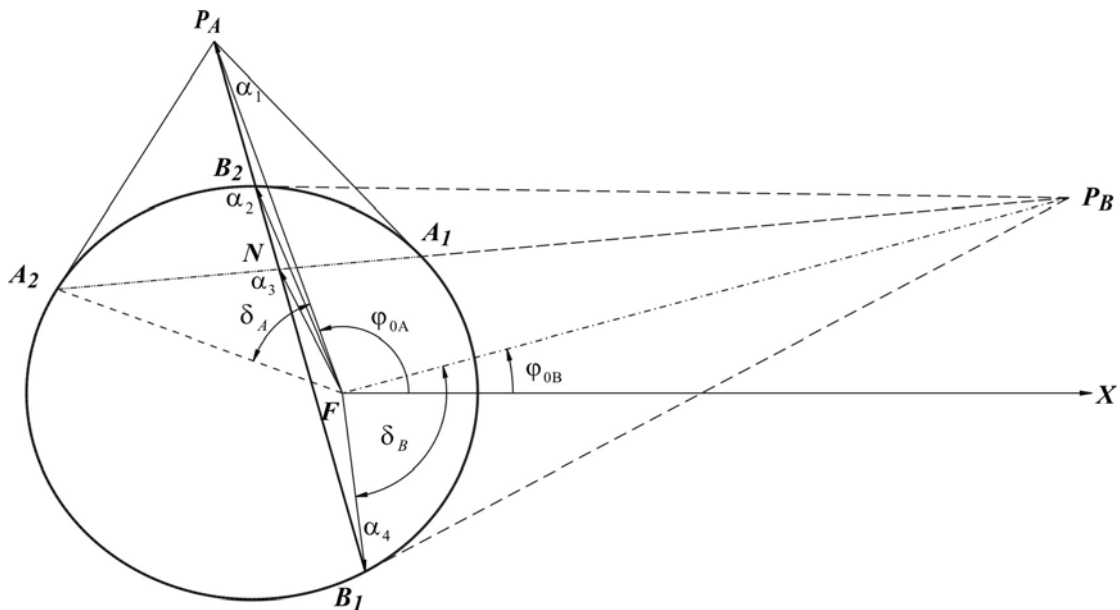


Рис. 1

Нам понадобятся также следующие векторы  $B_2P_A = r_2 - r_1 = l_{21}$ ,  $NB_1 = r_3 - r_4 = l_{34}$ ,  $P_A B_1 = r_1 - r_4 = l_{14}$ ,  $B_2N = r_2 - r_3 = l_{23}$ . Векторный характер этих отрезков понимаем так: если направление отрезка совпадает с выбранным направлением исследуемой продолжения хорды, то длину отрезка берем со знаком “+”, при несовпадении направлений выбираем знак “-”. Напомним, что **векторы, расположенные вдоль некоторой прямой и перемещающиеся только вдоль этой прямой, называются скользящими** [1,§5], [2,§7].

**Теорема.** Для ориентированных отрезков секущей  $P_A B_1$  выполняется гармоническое соотношение<sup>1</sup>

$$\frac{l_{21}l_{34}}{l_{14}l_{23}} = -1. \quad (1)$$

[См.1, §220].

**Замечание.** В том случае, если рассматриваются неориентированные отрезки, получим

<sup>1</sup> Двойные отношения (данное отношение является частным случаем двойных отношений) были определены М.Шалем (Chasles, Michel (1793-1880) при изучении сообщений Папа о “Поризмах” Евклида [11,стр. 83].

$$\frac{l_{21}l_{34}}{l_{14}l_{23}} = 1. \quad (1a)$$

Это легко объяснить, т.к. длины отрезков являются положительными числами, и их отношение, естественно, равно положительному числу.

*Доказательство.* Для упрощения вывода (1), преобразуем цель доказательства.

Рассмотрим **ориентированные по основанию треугольнички**. Под данным термином здесь мы понимаем, что **два треугольника имеют одинаковую ориентацию, если скользящие векторы их оснований коллинеарны, и противоположную, если они направлены в разные стороны**. Докажем, что общая вершина этих треугольников может лежать в любой точке на плоскости и при этом отношение (1) не изменяется.

В самом деле: в этом случае у всех 4-х треугольников одинаковая высота  $h$ , которая равна расстоянию от выбранной точки до прямой  $P_A B_1$ . Поэтому **отношение ориентированных оснований равно отношению соответствующих ориентированных площадей**

$$\frac{(l_{21}h)(l_{34}h)}{(l_{14}h)(l_{23}h)} = \frac{S_{21}S_{34}}{S_{14}S_{23}} = -1. \quad (2)$$

Если исследуемый отрезок  $P_A B_1$  проходит через фокус (фокальная хорда), то  $h = 0$ . Это приводит к неопределенности  $\frac{0}{0}$ , и данный случай рассмотрим ниже.

Т.к. выбор общей вершины для рассматриваемых 4-х треугольников произволен, то возьмем эту вершину в центре координат - фокусе, поскольку к данному моменту известны углы из фокуса к трем из четырех исследуемых точек 1,2,3,4.

С другой стороны, как известно, площадь любого треугольника равна произведению смежных сторон на синус угла между ними  $S = ab \sin \alpha$ . В векторном виде площадь записывается с помощью векторного произведения  $S = [ab] = ab \sin \alpha$ . (3)

Объясним (3) подробнее. Возьмем в качестве смежных сторон  $a, b$  длины

(т.е. скалярные величины) соответствующих радиус-векторов  $r_i$ , которые впоследствии уйдут после сокращений общих множителей между числителем и знаменателем. За векторный характер площади отвечает  $\sin \alpha$ . Если  $\sin \alpha > 0$ , то ориентация отрезка и продолжения хорды совпадают (они коллинеарны), и значение площади положительно. Если  $\sin \alpha < 0$ , то, естественно, что площадь отрицательна. Ниже показано, что случай  $\sin \alpha = 0$  исключен.

Угол  $\alpha$  будем вычислять как разность углов между углом, который составляет с полярной осью сторона  $a$  и углом с полярной осью, который составляет сторона  $b$ . Заметим, что при изменении порядка вычисления углов в силу нечетности синуса знак у площади меняется на противоположный. Таким образом, ориентация основания треугольника напрямую связана с последовательностью вычисления углов при вершине треугольника. Отсюда

$$\frac{(r_2 r_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1))(r_4 r_3 \sin(\alpha_3 - \alpha_4))}{(r_1 r_4 \sin(\alpha_1 - \alpha_4))(r_2 r_3 \sin(\alpha_2 - \alpha_3))} = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_3 - \alpha_4)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_4) \sin(\alpha_2 - \alpha_3)} = -1. \quad (3)$$

Получена цепь эквивалентных соотношений: (1)  $\leftrightarrow$  (2)  $\leftrightarrow$  (3). Доказав (3), докажем, тем самым, справедливость (1) и (2).

Вернемся к случаю прохождения продолжения хорды через фокус. И числитель, и знаменатель (3) отличны от нуля, поскольку как минимум три точки из четырех находятся не на фокусе, а отсюда для всех  $\alpha_j - \alpha_k \neq 0$ . (**В системе координат Кеплера только внутренняя точка  $N$  пересечения хорд может находиться на фокусе.**)

Рассмотрим углы, используемые в (3). Первый угол  $\alpha_1 = \varphi_{0A}$  известен, углы  $\alpha_2 = \varphi_{0B} + \delta_B$ ,  $\alpha_4 = \varphi_{0B} - \delta_B$  известны также. Как может убедиться читатель, можно изменить только знак у  $\delta_B$  - при этом значение (3) не изменится. Это означает, что последовательность рассмотрения углов  $\alpha_2, \alpha_4$  можно изменить на  $\alpha_4, \alpha_2$ . Отсюда следует, что последовательность рассмотрения точек  $B_1, B_2$  значения не имеет.

Вычислим синусы, в которые не входит угол  $\alpha_3$

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \sin(\varphi_{0B} + \delta_B - \varphi_{0A}) = \sin((\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) + \delta_B), \quad (4)$$

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_4) = \sin(\varphi_{0A} - \varphi_{0B} + \delta_B) = -\sin((\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) - \delta_B). \quad (5)$$

Вычислим угол  $\alpha_3$ , используя (5.11.-5) - формулу для точки пересечения двух хорд. При этом  $\alpha_3 = \text{ang}(\mathbf{F}, \mathbf{N}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}\})$ . Докажем, что делитель  $\Delta$  в последней формуле в рассматриваемом случае можно отбросить.

Действительно, если  $\Delta > 0$ , то, в соответствии с (1.2.1.-9)

$$\alpha_3 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{\Delta_x}{\Delta}, \frac{\Delta_y}{\Delta}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\Delta_x, \Delta_y\}).$$

Если же  $\Delta < 0$ , то, используя (1.2.1.-9а)  $\alpha_3 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\Delta_x, \Delta_y\}) + \pi$ . Т.к.  $\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$ , то слагаемое  $\pi$  изменит знак (см. (3)) и в числителе у  $\sin(\alpha_3 - \alpha_4)$ , и в знаменателе у  $\sin(\alpha_2 - \alpha_3)$ . Поэтому знак частного останется прежний.

Таким образом, с точностью до  $\pi$  получаем

$$\alpha_3 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\Delta_x, \Delta_y\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sin \varphi_{0B} \cos \delta_A - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_B, \cos \varphi_{0A} \cos \delta_B - \cos \varphi_{0B} \cos \delta_A\}). \quad (6)$$

Обратим внимание, что параметры 3 и 4 не нормированы. Поэтому, при вычислении выражения  $\sin(\alpha_3 + \mathcal{G})$ , где  $\mathcal{G}$  – некоторый угол, в соответствии с (1.2.3.-2а), (1.2.3.-3а) появляется нормирующий множитель  $\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}$

$$\sin(\alpha_3 + \mathcal{G}) = \sin \alpha_3 \cos \mathcal{G} + \cos \alpha_3 \sin \mathcal{G} = \frac{\Delta_y \cos \mathcal{G} + \Delta_x \sin \mathcal{G}}{\sqrt{\Delta_x^2 + \Delta_y^2}}. \quad (7)$$

Т.к. угол  $\alpha_3$  входит и в числитель и в знаменатель (3), то этот множитель войдет и в числитель, и в знаменатель (3). Поэтому его учитывать не будем.

При вычислении синусов, куда входит  $\alpha_3$ , будем использовать (5.10.-2а) - условие сопряжения двух хорд  $\cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) = \cos \delta_A \cos \delta_B$ .

Теперь, после всех предварительных упрощений, вычислим

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_2 - \alpha_3) &= \sin \alpha_2 \cos \alpha_3 - \sin \alpha_3 \cos \alpha_2 = (\sin \varphi_{0B} \cos \delta_B + \sin \delta_B \cos \varphi_{0B}) \cdot \\ &\cdot (\cos \delta_A \sin \varphi_{0B} - \sin \varphi_{0A} \cos \delta_B) - (\cos \varphi_{0A} \cos \delta_B - \cos \varphi_{0B} \cos \delta_A) \cdot \\ &(\cos \varphi_{0B} \cos \delta_B - \sin \varphi_{0B} \sin \delta_B) = \sin^2 \varphi_{0B} \cos \delta_A \cos \delta_B - \sin \varphi_{0A} \sin \varphi_{0B} \cos^2 \delta_B + \\ &+ \cos \varphi_{0B} \sin \varphi_{0B} \cos \delta_A \sin \delta_B - \sin \varphi_{0A} \cos \varphi_{0B} \cos \delta_B \sin \delta_B - \cos \varphi_{0A} \cos \varphi_{0B} \cos^2 \delta_B + \\ &+ \cos \varphi_{0A} \sin \varphi_{0B} \cos \delta_B \sin \delta_B + \cos^2 \varphi_{0B} \cos \delta_A \cos \delta_B - \cos \varphi_{0B} \sin \varphi_{0B} \cos \delta_A \sin \delta_B = \\ &= \cos \delta_A \cos \delta_B - \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos^2 \delta_B + \sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos \delta_B \sin \delta_B = \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) - \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -\cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} + \delta_B) \cos \delta_B = \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) - \frac{\cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) + \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} + 2\delta_B)}{2} = \\
& = \frac{\cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) - \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} + 2\delta_B)}{2} = -\frac{2 \sin\left(\frac{2(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) + 2\delta_B}{2}\right) \sin\left(-\frac{2\delta_B}{2}\right)}{2} = \\
& = \sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} + \delta_B) \sin \delta_B. \tag{8}
\end{aligned}$$

Т.к.  $\sin(\alpha_3 - \alpha_4)$  вычисляется аналогично, то запишем преобразования с некоторыми сокращениями

$$\begin{aligned}
& \sin(\alpha_3 - \alpha_4) = \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} - \delta_B) \cos \delta_B - \cos \delta_A \cos \delta_B = \\
& = \frac{\cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} - 2\delta_B) - \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A})}{2} = \sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} - \delta_B) \sin \delta_B. \tag{9}
\end{aligned}$$

Подставив в (3) все вычисленные синусы (4), (5), (8) и (9) и, произведя сокращения, получим окончательно

$$\frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_3 - \alpha_4)}{\sin(\alpha_1 - \alpha_4) \sin(\alpha_2 - \alpha_3)} = \frac{\sin((\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) + \delta_B) \sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} - \delta_B) \sin \delta_B}{-\sin((\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) - \delta_B) \sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A} + \delta_B) \sin \delta_B} = -1. \tag{10}$$

Замечание. При стремлении  $N$  к одной из точек на дуге, отношение (1) сохраняется (докажите!).

$$\text{Упражнение 1. Докажите, что } \frac{l_{21}}{l_{14}} = \frac{l_{23}}{l_{34}}. \tag{11}$$

Упражнение 2. Докажите, что

$$\sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_4) = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_3) \sin(\alpha_3 - \alpha_4)}{\sin^2 \delta} (\Delta_x^2 + \Delta_y^2). \tag{12}$$

### 5.17. Произведение частей секущих. Теорема Эйлера

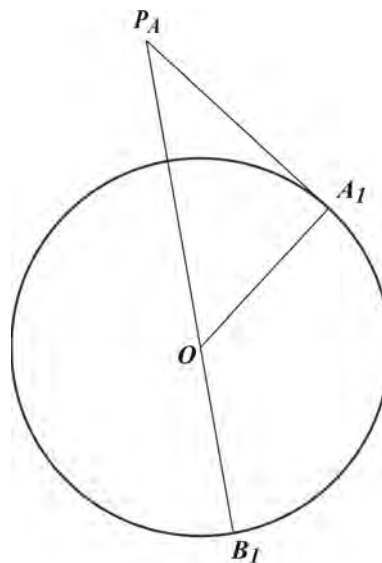


Рис. 1

Читатель знаком из школьного курса геометрии с замечательной теоремой о свойствах отрезков секущей и окружности (см.рис.1): **произведение длины секущей на длину ее внешней части равно квадрату длины касательной.**

В данном разделе рассмотрим обобщение данной теоремы на любой тип коники, а затем докажем данную теорему как частный случай теоремы Эйлера.

*Теорема Эйлера* [26,стр.55-57]. Пусть из некоторой точки на плоскости (взятой внутри или вне коники) через данную кривую проведены две секущие. Возьмем произведение длин отрезков между этой точкой и двумя точками пересечения первой секущей и кривой и разделим на аналогичное произведение длин двух других отрезков к соответствующим точкам пересечения второй секущей и кривой. Пусть, далее, из некоторой другой точки на плоскости через данную конику проведена другая пара секущих, но так, что секущие второй пары  $\parallel$ , соответственно, секущим первой пары.

Тогда отношение произведения длин отрезков первой пары секущих будет равно отношению произведения длин отрезков второй пары секущих.

*Доказательство.* Сохраним обозначения (5.16) с той лишь разницей, что в данном разделе рассматриваются неориентированные отрезки и площади треугольников. Кроме того, на (рис.2) изобразим только 1 секущую. Этого достаточно для доказательства.

Итак, как и ранее, для упрощения записи перенумеруем точки  $P_A \rightarrow 1$ ,  $B_2 \rightarrow 2$ ,  $B_1 \rightarrow 4$ . Понадобятся также следующие векторы  $B_2P_A = r_2 - r_1 = l_{21}$ ,  $P_A B_1 = r_1 - r_4 = l_{14}$ .

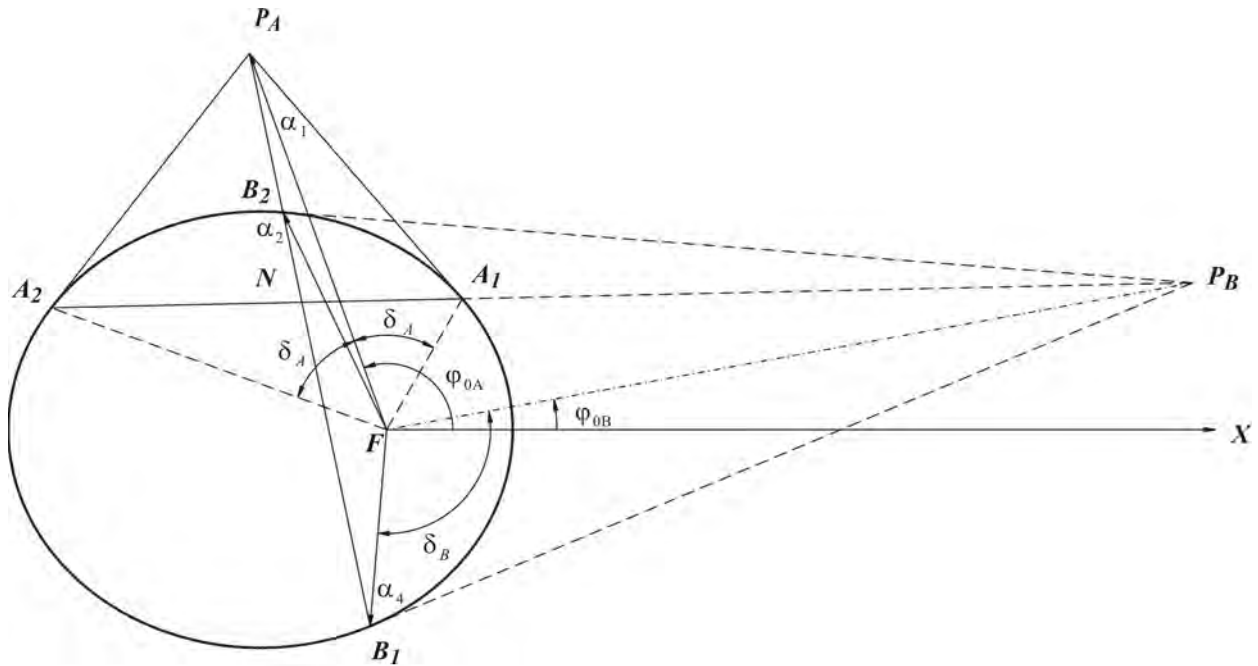


Рис. 2

Рассмотрим произведение длин отрезков одной из секущих, например  $P_A B_2 B_1$ . Свяжем, как и в (5.16), длины отрезков с соответствующими площадями треугольников  $S_{12}, S_{14}$ . Тогда

$$l_{12} \cdot l_{14} = \frac{S_{12} \cdot S_{14}}{h^2} = \frac{r_1 r_2 \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot r_1 r_4 \sin(\alpha_1 - \alpha_4)}{h^2} = \frac{r_1^2 r_2 r_4}{h^2} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_4), \quad (1)$$

где  $h$  - высота треугольников  $\Delta F12$  и  $\Delta F14$  (одинаковая для двух треугольников), опущенная из  $F$  (фокус) на прямую  $P_A B_2 B_1$  (124),

- разности углов  $\alpha_1 - \alpha_2$  -  $\angle 1F2$ ,  $\alpha_1 - \alpha_4$  -  $\angle 1F4$ .

Вычисляем

$$\begin{aligned} r_2 r_4 &= \frac{p}{1 + e \cos(\varphi_{0B} + \delta_B)} \cdot \frac{p}{1 + e \cos(\varphi_{0B} - \delta_B)} = \\ &= \frac{p^2}{1 + e(\cos(\varphi_{0B} + \delta_B) + \cos(\varphi_{0B} - \delta_B)) + e^2 \cos(\varphi_{0B} + \delta_B) \cos(\varphi_{0B} - \delta_B)} = \end{aligned}$$

$$= \frac{p^2}{1 + 2e \cos \varphi_{0B} \cos \delta_B + e^2 \frac{(\cos(2\varphi_{0B}) + \cos(2\delta_B))}{2}} = \frac{p^2}{(\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_{0B}}. \quad (2)$$

Расстояние от фокуса до прямой  $P_a B_2 B_1$  (5.6.3.-1)

$$h^2 = \frac{p^2 \cos^2 \delta_B}{(\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + \sin^2 \varphi_{0B}}.$$

При вычислении синусов будем использовать (5.10.-2а) - условие сопряжения двух хорд  $\cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) = \cos \delta_A \cos \delta_B$ . Напомним, что это условие эквивалентно тому, что три точки  $P_a, B_2, B_1$  (1, 2, 4) находятся на одной прямой  $P_a B_2 B_1$ . Итак

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) &= -\sin((\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) + \delta_B) = -\sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos \delta_B - \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \sin \delta_B = \\ &= -\sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos \delta_B - \cos \delta_A \cos^2 \delta_B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \alpha_4) &= -\sin((\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) - \delta_B) = -\sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos \delta_B + \cos(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \sin \delta_B = \\ &= -\sin(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos \delta_B + \cos \delta_A \cos^2 \delta_B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \sin(\alpha_1 - \alpha_4) &= -(\cos^2 \delta_A \cos^4 \delta_B - \sin^2(\varphi_{0B} - \varphi_{0A}) \cos^2 \delta_B) = \\ &= -(\cos^2 \delta_A \cos^4 \delta_B - (1 - \cos^2(\varphi_{0B} - \varphi_{0A})) \cos^2 \delta_B) = \\ &= -(\cos^2 \delta_A \cos^4 \delta_B - (1 - \cos^2 \delta_A \cos^2 \delta_B) \cos^2 \delta_B) = \sin^2 \delta_A \cos^2 \delta_B. \end{aligned} \quad (3)$$

Собираем все части формулы произведения длин отрезков секущих

$$\begin{aligned} l_{12} \cdot l_{14} &= \frac{r_1^2 r_2 r_4}{h^2} \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \sin(\alpha_1 - \alpha_4) = \\ &= \frac{r_1^2 p^2 ((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + \sin^2 \varphi_{0B}) \sin^2 \delta_A \cos^2 \delta_B}{\cos^2 \delta_B ((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_{0B}) p^2} \\ &= \frac{r_1^2 \sin^2 \delta_A ((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + \sin^2 \varphi_{0B})}{((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_{0B})}. \end{aligned} \quad (4)$$

Исследуем (4). Сомножители  $r_1^2 \sin^2 \delta_A$ , зависящие от выбора  $P_A$  на плоскости, сократятся при делении на аналогичное произведение длин отрезков второй секущей. Возьмем новую секущую – третью, но так, чтобы она была || первой секущей. Тогда для этих секущих выполняется равенство тангенсов углов наклона (5.6.1.-8)

$$\frac{(\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)}{\sin \varphi_{0B}} = \frac{(k_i)(S_i)}{(k_i)(C_i)}, \quad (5)$$

где нижний индекс  $i$  - номер секущей.

(Заметим, что появление  $(k_i)$  вызвано тем, что мы можем не сокращать на общие множители  $(S_i)$  и  $(C_i)$  - это дает дополнительную свободу действий.)

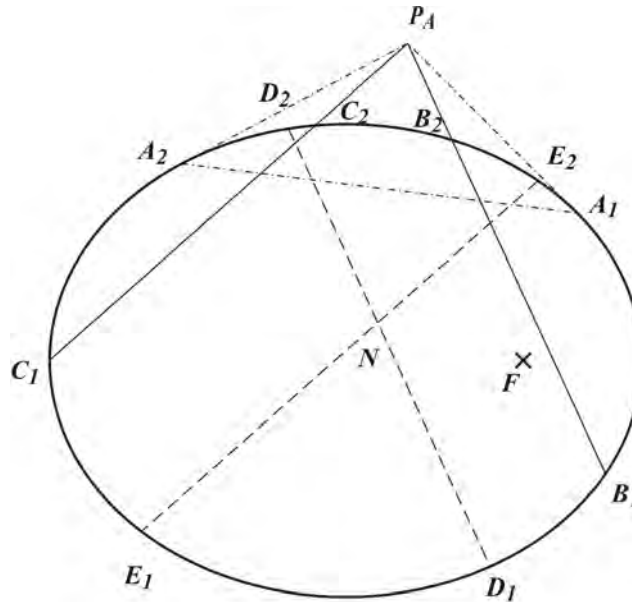


Рис. 3

Отсюда и из (4) имеем отношение длин отрезков 2-х секущих, проведенных из одной точки,

$$\frac{(l_1)_{12} \cdot (l_1)_{14}}{(l_1)_{12} \cdot (l_1)_{14}} = \frac{(S_1)^2 + (C_1)^2}{(S_1)^2 + (1-e^2)(C_1)^2} \cdot \frac{(S_2)^2 + (1-e^2)(C_2)^2}{(S_2)^2 + (C_2)^2}. \quad (6)$$

Если возьмем вторую пару длин отрезков секущих, проведенных из другой точки, но так, что каждый из новых отрезков секущих второй пары будет  $\parallel$ , соответственно, одному из отрезков первой пары секущих, то, у новой пары секущих будут соответствующие тангенсы углов наклона равны тангенсам углов наклона первой пары

$$\frac{(S_i)}{(C_i)} = \frac{(k_i)(S_i)}{(k_i)(C_i)} \Big|_{i=1,2}.$$

Очевидно, что отношение (6) у второй пары будет таким же, как и у первой пары отрезков секущих, т.к. (6) относительно коэффициента  $k_i$  однородно и данный коэффициент сокращается. (Можно было и числитель, и знаменатель (6) разделить на  $(S_1)^2 \cdot (S_2)^2$  (т.е. выразить (6) через тангенсы углов наклона). Но тогда нужно отдельно разобрать случаи, когда соответствующие тангенсы бесконечны.)

Отсюда следует, что **отношение длин отрезков второй пары секущих** (см.рис.3),  $\parallel$ , **соответственно, отрезкам первой пары секущих, не зависит от выбора точки  $P_A$  на плоскости и сохраняется**  $\frac{P_A B_2 \cdot P_A B_1}{P_A C_2 \cdot P_A C_1} = \frac{ND_2 \cdot ND_1}{NE_2 \cdot NE_1}$ .  $\square$

Применяя (4), найдем длину касательной коники (ср.5.8.-2). При этом известно:

- 1) произведение длин отрезков секущих равно квадрату длины касательной (отрезки секущих в данном случае равны между собой);
- 2) у касательной  $\delta_B = 0$  и, следовательно,  $\cos \delta_B = 1$ ;
- 3) точка касания видна из фокуса под углом  $\varphi_{0B} = \varphi_0 \mp \delta$ ;
- 4) расстояние от фокуса до полюса  $r_1 = \frac{p}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}$ ;
- 5)  $((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + \sin^2 \varphi_{0B}) = (1 + 2e \cos(\varphi_0 \mp \delta) + e^2)$
- 6)  $((\cos \varphi_{0B} + e \cos \delta_B)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_{0B}) = (1 + e \cos(\varphi_0 \mp \delta))^2$ ;

Собираем все вместе, извлекаем корень и получаем длину касательной

$$\text{коники} \frac{p \sin \delta \sqrt{1 + 2e \cos(\varphi_0 \mp \delta) + e^2}}{(\cos \delta + e \cos \varphi_0)(1 + e \cos(\varphi_0 \mp \delta))}. \quad (7)$$

Докажем с помощью выведенных формул приведенную в этом разделе выше **теорему о свойствах отрезков секущей и окружности** (см.рис.1).

*Доказательство.* Заметим, что в системе координат Кеплера совмещен фокус (в данном случае центр окружности) и центр координат. Кроме того, для окружности ( $e = 0$ ).

### 1-й вариант

В силу этого (4) преобразуется в  $r_1^2 \sin^2 \delta_A$  (проверьте!), т.е. зависит только от положения выбранной  $P_A$  на плоскости. Это означает, что отношение произведения длин 2-х отрезков различных секущих окружности, проведенных из одной точки под любым углом (лишь бы они пересекали окружность в двух или одной точках) равны 1. Отсюда следует (транзитивность равенства), что

произведение длин отрезков любой секущей равно, также, и квадрату длины касательной, проведенной из той же точки, что и секущие.

Напомним, что касательная является предельным положением секущих, а квадрат длины касательной для окружности равен  $r_1^2 \sin^2 \delta_A$  (докажите!).

### 2-й вариант

Подставляем в (6) и (7)  $e = 0$ . Дальнейшее очевидно.

## 5.18. Разные задачи

В этом разделе укажем еще 2 способа расчета координат **точки пересечения диагоналей четырехугольника фокус-полус** (см. 5.6.4.)

### 4<sup>о</sup> способ

Т.к.  $N$  (см. рис.1) гармонически сопряжена с  $P$  (полус) относительно точек пересечения  $P_0$  и  $Q$ , то эти точки образуют гармоническую четверку  $(P_0QPN) = -1$ .

Раскроем скобки  $\frac{P_0P}{PQ} : \frac{P_0N}{NQ} = \frac{P_0P \cdot NQ}{PQ \cdot P_0N} = -1$ . (1)

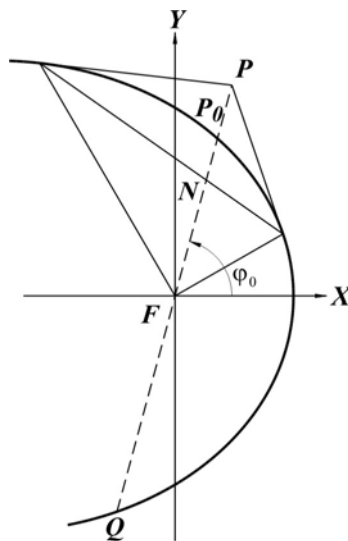


Рис. 1

Введем неизвестное  $S$  - расстояние от  $F$  до  $N$ . Тогда

$$P_0P = \frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} - \frac{P}{1 + e \cos \varphi_0}, \quad NQ = -\left(S + \frac{P}{1 - e \cos \varphi_0}\right),$$

$$PQ = -(QF + FP) = -\left(\frac{P}{1 - e \cos \varphi_0} + \frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}\right) \quad (\text{ в первом слагаемом}$$

полярный угол  $\varphi = \varphi_0 + \pi$ , тогда  $\cos \varphi = \cos(\varphi_0 + \pi) = -\cos \varphi_0$ ),  $P_0N = -\frac{P}{1 + e \cos \varphi_0} + S$ .

Подставим эти выражения в (5)

$$\frac{\left(\frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0} - \frac{P}{1 + e \cos \varphi_0}\right)(-1)\left(S + \frac{P}{1 - e \cos \varphi_0}\right)}{-\left(\frac{P}{1 - e \cos \varphi_0} + \frac{P}{\cos \delta + e \cos \varphi_0}\right)\left(-\frac{P}{1 + e \cos \varphi_0} + S\right)} = -1, \quad \frac{(1 - \cos \delta)(S(1 - e \cos \varphi_0) + p)}{(1 + \cos \delta)(S(1 + e \cos \varphi_0) - p)} = -1,$$

$$S(1 - e \cos \varphi_0 - \cos \delta + e \cos \delta \cos \varphi_0) + p(1 - \cos \delta) = -S(1 + e \cos \varphi_0 + \cos \delta + e \cos \delta \cos \varphi_0) + p(1 + \cos \delta), \quad S(2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta) = 2p \cos \delta, \quad S = \frac{p}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta}.$$

окончательный результат совпадает с (5.6.4.-4).

### 5° способ

Воспользуемся (5.11.-5) для нахождения точки пересечения двух хорд

(общий случай)  $\frac{p\{\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2, \cos \varphi_{01} \cos \delta_2 - \cos \varphi_{02} \cos \delta_1\}}{\sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) + e(\sin \varphi_{02} \cos \delta_1 - \sin \varphi_{01} \cos \delta_2)}$ . Т.к. 2-я

хорда проходит через фокус, то  $\cos \delta_2 = 0$  (см.5.1.-4). Кроме того,  $\cos \delta_1 = \cos \delta$ ,

$$\varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{2} \quad (\text{см.5.18. описание рис.1}), \quad \sin(\varphi_{02} - \varphi_{01}) = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$

$\sin \varphi_{02} = \cos \varphi_0$ ,  $\cos \varphi_{02} = -\sin \varphi_0$ . Собираем все в одну формулу, получаем снова так,

как и в (5.6.4.-3)  $\frac{p \cos \delta}{1 + e \cos \varphi_0 \cos \delta} \{\cos \varphi_0, \sin \varphi_0\}$ .  $\square$

$$\text{Упражнение 1. Доказать соотношение } \frac{1}{y} - \frac{1}{x} = \frac{2}{sL_h}, \quad (6)$$

где (см.5.6.2.-1а)  $L_h^2 = p^2 \frac{4 \sin^2 \delta ((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + \sin^2 \varphi_0)}{((\cos \varphi_0 + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \varphi_0)^2}$ ,

а  $s=1$  для эллипса и параболы. Если хорда соединяет две точки какой-нибудь одной ветви гиперболы, то  $s=1$ , если соединяются разные ветви гиперболы, то  $s=-1$ .



Доказательство. Выберем положительное направление секущей вдоль  $QP$ .

$$\text{Тогда } \frac{-x}{sL_h + x} \cdot \frac{sL_h - y}{y} = -1, \quad sL_h x - xy = sL_h y + xy, \quad sL_h(x-y) = 2xy. \quad (7)$$

Делим обе части равенства на  $sL_h xy$ , откуда получаем (6). Значение знака  $s$  предлагаем читателю разобрать самостоятельно.

Упражнение 2. Примените теорему для окружности: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть для доказательства (6) или (7).

Упражнение 3. Проверьте равенство (6) для эллипса и гиперболы, если обе хорды являются фокальными, но одна  $\perp$  фокальной оси, а 2-я  $\parallel$  фокальной оси.

Упражнение 4. Сравните  $x$  и  $y$ .

Решение.

#### 1° вариант ( $s = 1$ )

Из (6) получаем, что  $\frac{1}{y} = \frac{2}{L} + \frac{1}{x}$ . Исследуем это выражение.

$$1) \text{ Пусть } 0 < L < \infty \text{ и } x, y > 0 \text{ Тогда } \frac{1}{y} > \frac{1}{x} \text{ и } x > y. \quad (8)$$

Частный случай этого неравенства, когда полюс и вместе с ним  $x \rightarrow \infty$ , а  $y \rightarrow \frac{L}{2}$ .

$$2) \text{ Рассмотрим случаи равенства } \frac{1}{y} = \frac{1}{x}, \text{ откуда следует равенство } x = y: \quad (9)$$

а) при  $L = \infty$  (асимптотическое направление параболы),

б) при стремлении  $x, y \rightarrow 0$  (полюс находится на кривой).

#### 2° вариант ( $s = -1$ )

$$\text{Из (6) следует, что } \frac{1}{y} = \frac{1}{x} - \frac{2}{L_h}. \text{ Откуда } x < y. \quad (10)$$

## 6. Диаметр

### 6.1. Формулы 1-й модели диаметра

Продолжим исследования свойств диаметра эллипса и гиперболы, начатые в (3.2.8.).

Из (3.2.8.-4) найдем **расстояние от фокуса  $F:\{0,0\}$  до диаметра**

$$d_{FD} = \frac{pe|\sin \theta|}{\sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}}. \quad (1)$$

С помощью (3.2.8.-2) найдем **квадрат длины диаметра**

$$L_D^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = B^2 + A^2 = \left( \frac{2p \cos \theta}{L_i^{\frac{1}{2}}(1-e^2)} \right)^2 + \left( \frac{2p \sin \theta}{L_i^{\frac{1}{2}}} \right)^2 =$$

$$= \frac{4p^2}{L} \left( \frac{\cos^2 \theta}{(1-e^2)^2} + \sin^2 \theta \right) = \frac{4p^2(\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta)}{(1-e^2)^2(1-e^2 \sin^2 \theta)^2}, \quad (2)$$

$$\text{или } L_D^2 = \frac{4p^2(\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta)}{(1-e^2)^2(\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta)}. \quad (2a)$$

**Уравнение диаметра в общем виде**

$$-(1-e^2) \sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta = 0. \quad (3)$$

**Нормальное уравнение диаметра**

$$\frac{-(1-e^2) \sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta}{s\sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}} = 0. \quad \begin{cases} s = +1, & \sin \theta > 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases} \square \quad (4)$$

$$\text{Тангенс угла наклона диаметра } k_D = \frac{(1-e^2) \sin \theta}{\cos \theta}. \quad (5)$$

Найдем **направляющие нормального вектора диаметра**

$$\cos \phi = \frac{-(1-e^2) \sin \theta}{s\sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}}, \quad \sin \phi = \frac{\cos \theta}{s\sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}},$$

$$\text{где } \begin{cases} s = +1, & \sin \theta \geq 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases} \quad (6)$$

Отсюда получим **угол наклона диаметра к оси абсцисс**

$$\psi = \phi + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s(1-e^2) \sin \theta, s \cos \theta\}) + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s \cos \theta, -s(1-e^2) \sin \theta\}). \quad (7)$$

$$\text{где } \begin{cases} s = +1, & \sin \theta \geq 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases}. \quad (\text{См. (1.2.1.-15)})$$

Упражнение 1. Найти **длины большой и малой оси эллипса** (расчеты вести в 1-й модели).

Решение.

**Большая ось.** Возьмем в качестве сопряженной любую прямую,  $\perp$  оси абсцисс. Пусть  $\theta = 0$  (вариант  $\theta = \pi$  дает тот же результат). Тогда данная сопряженная прямая будет  $\parallel$  касательным, расположенным на концах большой оси. Из (2)  $L_D = \frac{2p}{1-e^2}$  (ср.3.5.1.-2, 5.6.2.-7).

**Малая ось.** Возьмем для сопряженной прямой  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . Эта прямая  $\parallel$  оси абсцисс (вариант  $\theta = -\frac{\pi}{2}$  дает тот же результат – проверьте!). Тогда  $L_D = \frac{2p}{\sqrt{1-e^2}}$  (ср.3.5.1.-8).

Упражнение 2. Найти **длину действительной оси гиперболы**.

Упражнение 3. Проверить (7) **для большой оси эллипса**.

Решение. В этом случае  $\theta = 0$ ,  $s = 1$ ,  $1 - e^2 > 0$ ,  $\psi = \pi$ . Большая ось эллипса действительно составляет с осью абсцисс угол  $\pi$ .

Упражнение 4. Найти уравнение диаметра, проходящего через:

1) большую ось эллипса; 2) малую ось эллипса; 3) фокальную хорду,  $\perp$  полярной оси.

## 6.2. 2-я модель построения диаметра - две $\parallel$ касательные

### 1°. Полярные координаты концевых точек диаметра

В разделе (3.2.6.) найдены точки на кривой, в которых сопряженная прямая  $\parallel$  касательной. Напомним, что мы брали *сопряженную прямую в самом общем виде, т.е. произвольно расположенную относительно кривой*.

Там же установлена связь между тангенсами угла наклона сопряженной прямой и касательными. Один из выводов, был следующим: если существует 2-е решение, определяющее 2-ю касательную, то **хорда, соединяющая точки касания и называемая диаметром, проходит через центр симметрии кривой**. Этот диаметр далее будем называть основным или диаметром.

Учитывая, что свойство  $\parallel$  транзитивно, то найденные в (3.2.6.) свойства диаметра сохраняются во всех случаях расположения сопряженной прямой относительно касательной.

**В данном пункте рассмотрим 2-ю модель построения диаметра: сопряженная прямая лежит на кривой, т.е. является 1-й касательной. Ищем условие, при котором 2-я касательная  $\parallel$  1-й.** Другими словами: наделяем прямую общего вида, инициирующую диаметр, дополнительным свойством - быть касательной.

Несколько слов об обозначениях угловых параметров. В разделе (3.2.6.) для направления нормального вектора сопряженной прямой использована переменная  $\theta$ , а для концевых точек диаметра - переменная  $\varphi$ . Т.к. в рассматриваемом сейчас случае в точке касания угловые переменные  $\theta$  и  $\varphi$  совпадают, то для сокращения количества уравнений будем использовать переменную  $\varphi$ .

Итак, известен полярный угол 1-й касательной -  $\varphi_1$ , а ищем полярный угол 2-й касательной -  $\varphi_2$ . Пользуясь тем же приемом, что и в (3.2.6.), приравняем тангенсы углов наклона касательных к оси абсцисс (3.1.2.-3) при двух различных

$$\text{углах к точкам касания} \quad \frac{\cos \varphi_1 + e}{-\sin \varphi_1} = \frac{\cos \varphi_2 + e}{-\sin \varphi_2}. \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{Тогда} \quad & \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + e \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - e \sin \varphi_1 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) - e(\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1) = \\ & = 2 \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} + 2e \sin \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} = 2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varphi_0 = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$  является биссектрисой фокального угла между

касательными, т.е. биссектрисой фокального угла диаметра, а  $\delta = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$

отклонением точек касания от биссектрисы или угловым отклонением диаметра.

(Справка. Фокальным углом диаметра назовем угол из фокуса, под которым “виден” диаметр, или, другими словами, угол из фокуса, лучи которого проходят через концевые точки диаметра.)

Приравнивая поочередно нулю множители из левой части (2), заметим, что 1-й множитель дает только тривиальные решения  $\sin \delta = 0$ ,  $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = k\pi$ ,  $\varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi$ , а 2-й множитель  $\cos \delta + e \cos \varphi_0 = 0$  (3)

является необходимым условием того, что две касательные  $\parallel$  друг другу. С другой стороны, в (3) получено уже известное ранее условие (5.1.-5), при котором полюс находится на  $\infty$ . Этот результат следовало ожидать, т.к. на плоскости эти два результата эквивалентны. Такой же вывод получен в (5.1. вывод 2). (Заметим, что в 3-х мерном и выше пространствах из факта не пересечения двух прямых, вообще говоря, не следует их  $\parallel$  друг другу).

Покажем теперь, что (3) является и достаточным условием того, чтобы найти полярные координаты 2-й точки касания.

$$\text{Справедлива система уравнений } \begin{cases} \cos \delta + e \cos \varphi_0 = 0 \\ \varphi_0 - \delta = \varphi_1 \end{cases}, \quad (4)$$

в которой известно  $\varphi_1$ . Найдем  $\varphi_2 = \varphi_0 + \delta$ .

$$\text{Преобразуем (4) } \varphi_0 = \varphi_1 + \delta, \quad \cos \delta + e \cos(\varphi_1 + \delta) = 0,$$

$\cos \delta + e \cos \varphi_1 \cos \delta - e \sin \varphi_1 \sin \delta = 0$ ,  $\cos \delta(1 + e \cos \varphi_1) = e \sin \varphi_1 \sin \delta$ . Разделим переменные  $\frac{\sin \delta}{\cos \delta} = \frac{1 + e \cos \varphi_1}{e \sin \varphi_1}$ ,  $\frac{\cos \delta}{\sin \delta} = \frac{e \sin \varphi_1}{1 + e \cos \varphi_1}$ . Используя (1.2.5.3.), имеем

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_1, 1 + e \cos \varphi_1\}) . \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_1 + \delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\cos \varphi_1, \sin \varphi_1\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_1, 1 + e \cos \varphi_1\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_1 - e \cos \varphi_1 \sin \varphi_1, e \sin^2 \varphi_1 + \cos \varphi_1 + e \cos^2 \varphi_1\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \varphi_1, \cos \varphi_1 + e\}) . \end{aligned} \quad (6)$$

Из (6) и (3.2.1.-8) видно, что **биссектриса фокального угла  $\parallel$  сопряженной касательной.**

$$\begin{aligned} \text{Искомый угол } \varphi_2 &= \varphi_0 + \delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin \varphi_1, \cos \varphi_1 + e\}) + \\ &+ \text{ang}(\mathbf{0}, \{e \sin \varphi_1, 1 + e \cos \varphi_1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e \sin^2 \varphi_1 - \cos \varphi_1 - e \cos^2 \varphi_1 - e - e^2 \cos \varphi_1, \\ &e \cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + e^2 \sin \varphi_1 - \sin \varphi_1 - e \cos \varphi_1 \sin \varphi_1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1 + e^2) \cos \varphi_1 - 2e, -\sin \varphi_1(1 - e^2)\}) . \end{aligned} \quad (7)$$

Проверим, что решение (7) удовлетворяет (1). Для этого выразим тангенс угла наклона 2-й касательной  $\frac{\cos \varphi_2 + e}{-\sin \varphi_2}$  через угол  $\varphi_1$ . Используя

$$\cos(\text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.2.3.-2a) \quad \text{и} \quad \sin(\text{ang}(\mathbf{0}, \{x, y\})) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.2.3.-3a),$$

получим выражение типа 
$$\frac{x + e\sqrt{x^2 + y^2}}{-y}, \quad (8)$$

где  $x = -(1 + e^2) \cos \varphi_1 - 2e$ ,  $y = -\sin \varphi_1 (1 - e^2)$ .

Вычислим  $x^2 + y^2$   $(-(1 + e^2) \cos \varphi_1 - 2e)^2 + (-\sin \varphi_1 (1 - e^2))^2 = (1 + e^2)^2 \cos^2 \varphi_1 +$   
 $+ 4e(1 + e^2) \cos \varphi_1 + 4e^2 + (1 - \cos^2 \varphi_1)(1 - 2e + e^4) = \cos^2 \varphi_1 + 2e^2 \cos^2 \varphi_1 + e^4 \cos^2 \varphi_1 +$   
 $+ 4e \cos \varphi_1 - 4e^3 \cos \varphi_1 + 4e^2 + 1 - 2e^2 + e^4 - \cos^2 \varphi_1 + 2e^2 \cos^2 \varphi_1 - e^4 \cos^2 \varphi_1 = 4e^2 \cos^2 \varphi_1 +$   
 $+ 4e(1 + e^2) \cos \varphi_1 + (1 + e^2)^2 = (2e \cos \varphi_1 + (1 + e^2))^2. \quad (9)$

Вычислим числитель (8)

$$-(1 + e^2) \cos \varphi_1 - 2e + 2e^2 \cos \varphi_1 + e + e^3 = -(1 - e^2)(\cos \varphi_1 + e).$$

Сокращая числитель и знаменатель (8) на множитель  $(1 - e^2)$ , получим тангенс угла наклона 1-й касательной  $\frac{\cos \varphi_1 + e}{-\sin \varphi_1}$  (что и требовалось доказать).  $\square$

Упражнение 1. Доказать, что 2-е решение (3.2.6.-7)

$$\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e \sin^2 \theta - \cos \theta \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta - \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta})\}) \quad \text{модели} \quad 1$$

эквивалентно решению (7).

Доказательство. Известны (3.2.1.-4)  $\cos \theta = \frac{\cos \varphi_1 + e}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_1 + e^2}}$  и

$$\sin \theta = \frac{\sin \varphi_1}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_1 + e^2}}. \quad \text{Вычислим} \quad \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \theta} = \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_1 + e^2 - e^2 \sin^2 \varphi_1}}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_1 + e^2}} =$$

$$= \frac{1 + e \cos \varphi_1}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_1 + e^2}} \quad (\text{берем в числителе при извлечении корня только знак '+'}, \text{ т.к.}$$

перед радикалом уже стоит знак '-').

Сокращаем 3-й и 4-й параметр  $\text{ang}()$  на положительный множитель

$$\frac{1}{(\sqrt{1 + 2e \cos \varphi_1 + e^2})^2} \quad \text{и окончательно получаем} \quad \varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e \sin^2 \varphi_1 - (\cos \varphi_1 + e) \cdot$$

$$\cdot (1 + e \cos \varphi_1), (e(\cos \varphi_1 + e) - (1 + e \cos \varphi_1) \sin \varphi_1)\} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1 + e^2) \cos \varphi_1 - 2e,$$

$$-(1 - e^2) \sin \varphi_1\}).$$

Упражнение 2. Найти полярные координаты большой оси эллипса и угол направления биссектрисы ее фокального угла (см.рис.1).

Решение. Сразу заметим, что большая ось эллипса является диаметром, т.к. касательные на ее концах  $\perp$ . Рассмотрим 2 варианта решения, в зависимости от того, какую из касательных выбрать первой, а какую второй.

### 1° вариант

Проведем в  $A_1$  - 1-ю касательную. Тогда  $\varphi_1 = 0$ . Используем (7)  
 $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1+e^2)\cos\varphi_1 - 2e, -\sin\varphi_1(1-e^2)\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1+e^2) - 2e, 0\}) = \pi$ . Из (6)  
 получим угол направления биссектрисы  $\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1 + e\}) =$   
 $= \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1+e\}) = \frac{\pi}{2}$ .

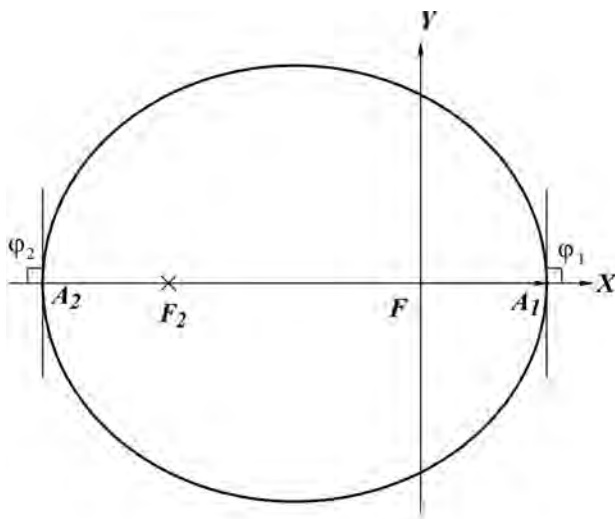


Рис. 1

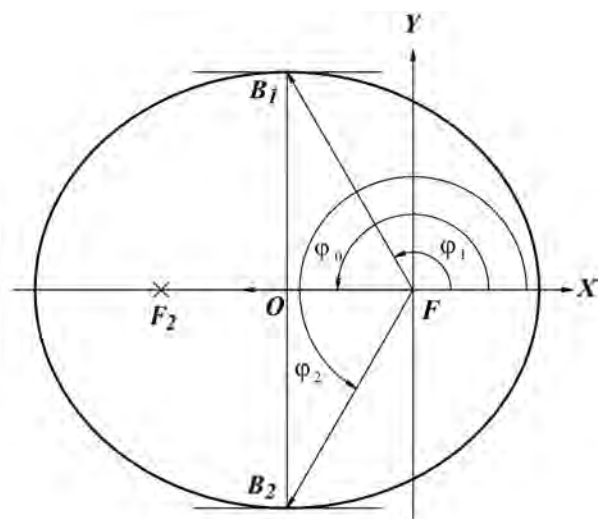


Рис. 2

### 2° вариант

Проведем в  $A_2$  - 1-ю касательную. Тогда  $\varphi_1 = \pi$ . Используем (7)  
 $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1+e^2)\cos\varphi_1 - 2e, -\sin\varphi_1(1-e^2)\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{(1+e^2) - 2e, 0\}) = 0$ . (В  
 последнем выражении использовано  $1+e^2 > 2e$ ).

$$\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sin\varphi_1, \cos\varphi_1 + e\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, -1+e\}) = \frac{3\pi}{2}. \text{ (Т.к. для эллипса } e < 1)$$

Упражнение 3. Найти  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_0$  для малой оси эллипса.

Решение.

### 1° вариант

Рассмотрим рис.2. Из (3.2.5.-1)  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e, \sqrt{1-e^2}\})$ ,  $\cos\varphi_1 = -e$ ,  
 $\sin\varphi_1 = \sqrt{1-e^2}$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1+e^2)\cos\varphi_1 - 2e, -\sin\varphi_1(1-e^2)\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e, -\sqrt{1-e^2}\})$ .  
 $\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{1-e^2}, e-e\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{1-e^2}, 0\}) = \pi$ .

## 2° вариант

(вывод  $\varphi_1, \varphi_0$  из  $\varphi_2$ ) предоставляем проверить читателю.

Упражнение 4. Пусть у эллипса  $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$  (см.рис.3). Найти  $\varphi_2, \varphi_0$ .

Упражнение 5. Пусть у гиперболы ( $e = 2$ )  $\varphi_1 = \frac{\pi}{6}$  ( $30^\circ$ ) (см.рис.4). Найти

$\varphi_2, \varphi_0$ .

Ответ.  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1+e^2)\frac{\sqrt{3}}{2} - 2e, -\frac{(1-e^2)}{2}\}) = 2,96$  ( $169,79^\circ$ ),

$\varphi_0 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{3} + 2e\}) = 1,74$  ( $99,90^\circ$ ).

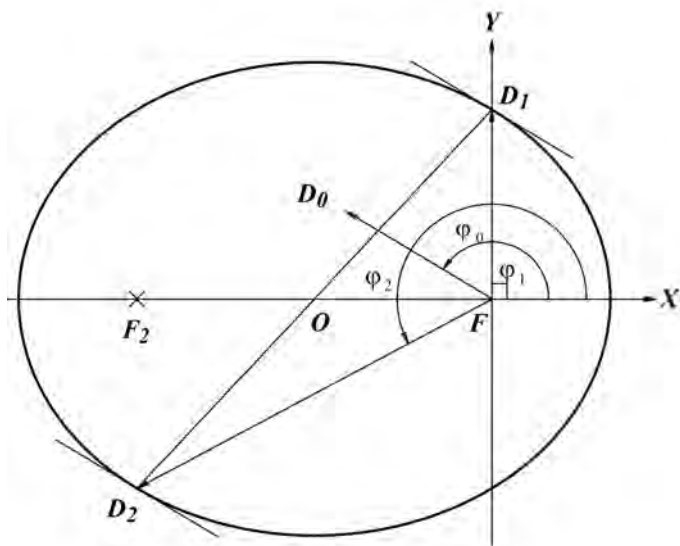


Рис. 3

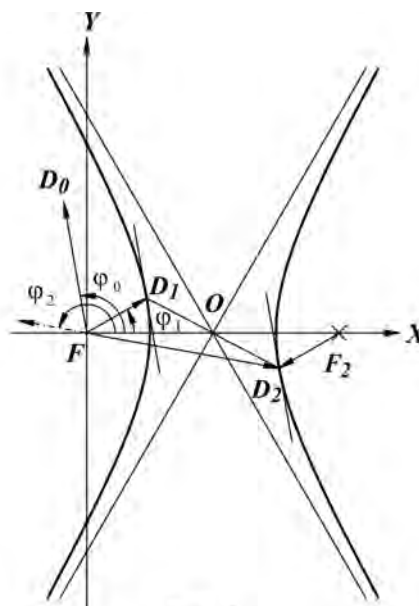


Рис. 4

Упражнение 6. Доказать, что у окружности  $\parallel$  касательные и соединяющий их диаметр  $\perp$  им.

Упражнение 7. Пусть  $D_1D_2$  диаметр эллипса (см.рис.3) или гиперболы (см.рис.4). Доказать, что отрезки  $FD_1, F_2D_2 \parallel$  и равны.

Упражнение 8. Доказать, что  $\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1+e^2)\cos\varphi_2 - 2e, -\sin\varphi_2(1-e^2)\})$ , где  $\varphi_2$  удовлетворяет (7).

Указание. Воспользоваться (9) и тем, что  $2e\cos\varphi_1 + (1+e^2) \geq 0$ .



### 2°. Декартовы координаты концевых точек диаметра

Первая конечная точка  $D_1$  находится из угла  $\varphi_1$  при помощи полярного уравнения  $D_1 = \frac{p\{\cos \varphi_1, \sin \varphi_1\}}{1 + e \cos \varphi_1}$ . (10)

Для нахождения 2-й конечной точки диаметра  $D_2$  воспользуемся (8) и (9)

$$\cos \varphi_2 = \frac{-(1+e^2)\cos \varphi_1 - 2e}{2e \cos \varphi_1 + (1+e^2)}, \quad \sin \varphi_2 = \frac{-\sin \varphi_1(1-e^2)}{2e \cos \varphi_1 + (1+e^2)}.$$

Подставляем эти значения в полярное уравнение

$$\begin{aligned} D_2 &= \frac{p\{\cos \varphi_2, \sin \varphi_2\}}{1 + e \cos \varphi_2} = \frac{p\{-(1+e^2)\cos \varphi_1 - 2e, -\sin \varphi_1(1-e^2)\}}{2e \cos \varphi_1 + (1+e^2) - e(1+e^2)\cos \varphi_1 - 2e^2} = \\ &= \frac{p\{-(1+e^2)\cos \varphi_1 - 2e, -\sin \varphi_1(1-e^2)\}}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi_1)}. \end{aligned} \quad (11)$$

Упражнение 9. Вычислите с помощью (10) и (11) координаты концевых точек большой и малой оси эллипса.

### 3°. Метод подстановки

Убедимся, сначала, что для концевых точек диаметра 2-й модели выполняется уравнение  $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = 1$ . Действительно, если  $\alpha = -\frac{1}{e}$ ,

$\beta = \frac{\cos \varphi_1 + e}{e \sin \varphi_1}$ , то  $-\frac{\cos \varphi_1}{e} + \frac{(\cos \varphi_1 + e)}{e \sin \varphi_1} \sin \varphi_1 = 1$ . Учитывая (1), данное уравнение справедливо и для  $\varphi_2$ .

Мы хотим максимально использовать результаты, полученные для 1-й модели, во 2-й и последующих моделях и тем самым сократить достаточно трудоемкий вывод формул. В этой связи предлагается следующий механизм, основанный на формулах (1.2.5.4.-9,10). Сравним параметры  $\alpha, \beta$  для 1-й модели (3.2.6.-2) и для 2-й. Параметр  $\alpha = -\frac{1}{e}$  остался при переходе к 2-й модели без

изменения. В 1-й модели  $\beta = \frac{\cos \theta}{e \sin \theta}$ , во 2-й -  $\beta = \frac{\cos \varphi_1 + e}{e \sin \varphi_1}$ .

Представим теперь  $\beta$  в общем виде для всех моделей  $\beta = \frac{C}{eS}$ . Переходя от 1-й модели к очередной модели, будем везде делать замены (подстановки) в

формулах прототипов 1-й модели. В частности, для 2-й модели применяем следующие замены  $\cos \theta \rightarrow k(\cos \varphi_1 + e)$ ,  $\sin \theta \rightarrow k(\sin \varphi_1)$ , где  $k = \text{const} \neq 0$ . (12)

Замечание (***k*-критерий**). Т.к. выражение  $\beta = \frac{C}{eS}$  однородно относительно переменных  $C, S$  (т.е.  $\beta = \frac{C}{eS} = \frac{kC}{ekS}$ ), то формулы прототипы перед заменой переменных также **должны быть однородны**. Другими словами, **нужно, чтобы после замены переменных типа  $C \rightarrow kC, S \rightarrow kS$ ,  $k$  отсутствовало после всех возможных сокращений**.

Приведем пример. Выражения  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\sin \theta|, \sqrt{(1-e^2)\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}\})$  и  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\sin \theta|, \sqrt{1-e^2 \sin^2 \theta}\})$  дают один и тот же результат при одинаковых значениях переменных. Однако, если 1-е выражение однородно и после подстановок  $C \rightarrow kC, S \rightarrow kS$  и всех сокращений имеет прежний вид  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|S|, \sqrt{(1-e^2)S^2 + C^2}\})$ , то 2-е выражение после подстановки имеет вид  $\delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|kS|, \sqrt{1-e^2 k^2 S^2}\})$ , где  $k$  не сократилось.

Приведем список важнейших формул по теме диаметр в переменных  $C, S$

- **углы, под которыми видны из фокуса конечные точки диаметра**

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\frac{1}{e} \pm \frac{C}{eS} \sqrt{\frac{1}{e^2} + \frac{C^2}{e^2 S^2} - 1}, \frac{C}{eS} \mp \frac{1}{e} \sqrt{\frac{1}{e^2} + \frac{C^2}{e^2 S^2} - 1}\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-eS^2 \pm C\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}, S(eC \pm \sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2})\}), \end{aligned} \quad (13)$$

- **концевые точки в декартовых координатах**

$$D_{1,2} = \frac{p\{-eS^2 \pm C\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}, S(eC \pm \sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2})\}}{C^2 + (1-e^2)S^2 \pm eC\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}}, \quad (14)$$

- **уравнение диаметра**  $\frac{-(1-e^2)Sx + Cy - peS}{s\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}} = 0$ , где  $\begin{cases} s = +1, & S \geq 0 \\ s = -1, & S < 0 \end{cases}$ , (15)

- **расстояние от фокуса  $F:\{0,0\}$  до диаметра**  $d_{FD} = \frac{pe|S|}{\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}}$ , (16)

$$\text{- квадрат длины диаметра } L_D^2 = \frac{4p^2(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)}{(1-e^2)^2(C^2 + (1-e^2)S^2)}, \quad (17)$$

$$\text{- тангенс угла наклона диаметра } k_D = \frac{(1-e^2)S}{C}, \quad (18)$$

**- направляющие нормального вектора диаметра**

$$\cos \phi = \frac{-(1-e^2)S}{s\sqrt{C^2 + (1-e^2)^2 S^2}}, \quad \sin \phi = \frac{C}{s\sqrt{C^2 + (1-e^2)^2 S^2}}, \quad \text{где } \begin{cases} s = +1, & S \geq 0 \\ s = -1, & S < 0 \end{cases} \quad (19)$$

**- угол наклона диаметра к оси абсцисс**

$$\psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-sC, -s(1-e^2)S\}). \quad (20)$$

#### 4°. Уравнение диаметра

Получим уравнение диаметра во 2-й модели. Делаем подстановку (12). В качестве прототипа используем или нормальное уравнение диаметра 1-й модели

$$(3.2.8.-4) \quad \frac{-(1-e^2)\sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta}{s\sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}} = 0, \quad \text{где } \begin{cases} s = +1, & \sin \theta > 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases}, \quad \text{или}$$

аналогичное ему уравнение в общем виде (14) в переменных  $C, S$ . После подстановки получаем **нормальное уравнение диаметра 2-й модели**

$$\frac{-(1-e^2)\sin \varphi_1 x + (\cos \varphi_1 + e)y - pe \sin \varphi_1}{s\sqrt{(\cos \varphi_1 + e)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2 \varphi_1}} = 0, \quad \text{где } \begin{cases} s = 1 & \sin \varphi_1 \geq 0 \\ s = -1 & \sin \varphi_1 < 0 \end{cases}. \quad (21)$$

#### 5°. Различные формулы

Покажем теперь, как перейти к остальным формулам 2-й модели. В данном случае формулы прототипы будем брать не в общем виде с переменными  $C, S$ , а используем соответствующие формулы 1-й модели (читатель может самостоятельно убедиться в равносильности этих приемов).

Название	Формула прототип из 1-й модели	Формула во 2-й модели
расстояние от фокуса $F:\{0,0\}$ до диаметра	$d_{FD} = \frac{pe \sin \theta }{\sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}}$	$d_{FD} = \frac{pe \sin \varphi_1 }{\sqrt{(\cos \varphi_1 + e)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2 \varphi_1}}$

(22)

квадрат длины диаметра	$L_D^2 =$ $= \frac{4p^2(\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta)}{(1-e^2)^2(\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta)}$	$L_D^2 =$ $= \frac{4p^2((\cos \varphi_1 + e)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2 \varphi_1)}{(1-e^2)^2((\cos \varphi_1 + e)^2 + (1-e^2) \sin^2 \varphi_1)} \quad (23)$
тангенс угла наклона диаметра	$k_D = \frac{(1-e^2) \sin \theta}{\cos \theta}$	$k_D = \frac{(1-e^2) \sin \varphi_1}{\cos \varphi_1 + e} \quad (24)$
угол наклона диаметра к оси абсцисс	$\psi = \text{ang}(\theta, \{-s \cos \theta, -s(1-e^2) \sin \theta\})$ где $\begin{cases} s = +1, & \sin \theta \geq 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases}$	$\psi = \text{ang}(\theta, \{-s(\cos \varphi_1 + e), -s(1-e^2) \sin \varphi_1\})$ где $\begin{cases} s = 1 & \sin \varphi_1 \geq 0 \\ s = -1 & \sin \varphi_1 < 0 \end{cases} \quad (25)$
$C$	$\cos \theta$	$\cos \varphi_1 + e \quad (26a)$
$S$	$\sin \theta$	$\sin \varphi_1 \quad (26b)$

Табл.1

Упражнение 10. Доказать, что для параболы удвоенный угол нормального вектора к касательной  $\theta$  совпадает с  $\varphi_1$  (3.2.6.-8).

Доказательство. Нужно доказать, что  $2\theta = \varphi$ . Используя (3.2.1.-5) и (1.2.1.-20),  $e = 1$ , имеем

$2\theta = 2\text{ang}(\theta, \{1 + \cos \varphi, \sin \varphi\}) = \text{ang}(\theta, \{1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi, 2(1 + \cos \varphi) \sin \varphi\}) = \text{ang}(\theta, \{\cos \varphi, \sin \varphi\})$ . При получении последнего равенства сокращен положительный множитель  $2(1 + \cos \varphi)$ .  $\square$

Таким образом, декартовы координаты “конечной точки диаметра” для параболы совпадают с точкой касания касательной  $D_1 = \frac{p\{\cos \varphi_1, \sin \varphi_1\}}{1 + e \cos \varphi_1}$ .

### 6.3. 3-я модель построения диаметра - хорда || касательным

#### 6.3.1. Координаты концевых точек диаметра

##### 1°. Полярные координаты концевых точек диаметра

В данном пункте рассмотрим еще один способ получения полярных координат концевых точек диаметра, когда отрезок сопряженной прямой является хордой исследуемой кривой, т.е. расположен внутри нашей

**кривой.** На рис.1,2 это хорда  $H_1H_2$ . Таким образом, исследуем взаимодействие диаметра с элементами полярного треугольника, хорда в основании которого является сопряженной для двух  $\parallel$  касательных, между которыми находится диаметр.

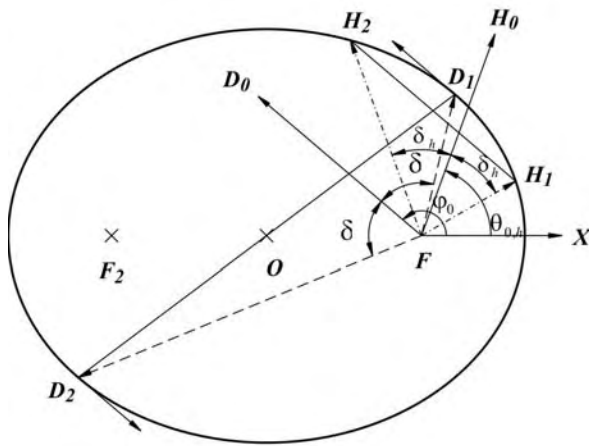


Рис. 1

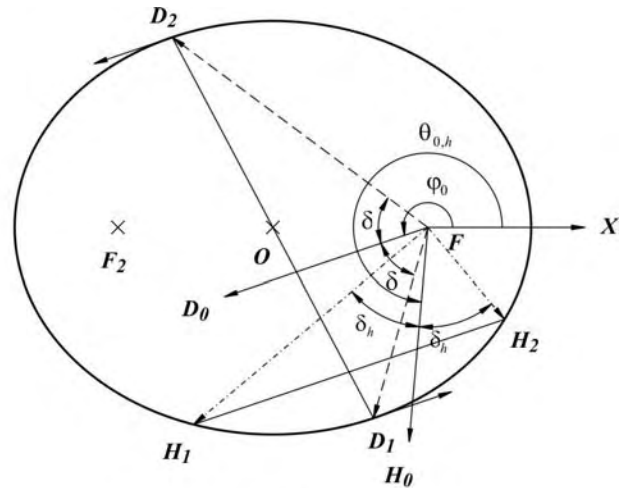


Рис. 2

Как и ранее, можно установить однозначное соответствие между хордой с одной стороны, отрезками касательных и полюсом с другой стороны, причем даже в том случае, если полюс находится на бесконечности. Таким образом, любая хорда является основанием соответствующего полярного треугольника.

Напомним, что для отрезков прямых, выступающих за границу кривой в данной работе используется термин продолжением хорды. Если потребуется вся прямая, у которой хорда является ее подмножеством (т.е. частью этой прямой), то применяется термин **прямая, образованная хордой**. (В литературе данную прямую называют поляра.)

Таким же образом, продолжение хорды, обладающую свойствами диаметра, будем называть продолжением диаметра.

Обозначим полярные углы сопряженной хорды как  $\theta_{0h}, \delta_h$ , касательной -  $\theta_t$ , диаметра, как и ранее, -  $\varphi_0, \delta$ .

Свяжем тангенсы угла наклона касательной (3.1.2.-3) и хорды (5.4.-4)

$$\frac{\cos \theta_t + e}{-\sin \theta_t} = \frac{\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h}{-\sin \theta_{0h}}, \quad (1)$$

$$\text{Решаем (1) } \cos \theta_t \sin \theta_{0h} - (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sin \theta_t = -e \sin \theta_{0h},$$

$$-\frac{1}{e} \cos \theta_t + \frac{\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h}{e \sin \theta_{0h}} \sin \theta_t = 1. \quad (2)$$

$$\text{Отсюда } \alpha = -\frac{1}{e}, \quad \beta = \frac{\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h}{e \sin \theta_{0h}}, \quad (3)$$

## 2°. Формулы подстановки

Продолжим использовать результаты, полученные для 1-й модели. Сравним параметры  $\alpha, \beta$  для 1-й модели (3.2.6.-2) и для 3-й (3). Параметр  $\alpha = -\frac{1}{e}$  остался при переходе к 3-й модели без изменения. В 1-й модели  $\beta = \frac{\cos \theta}{e \sin \theta}$ , в 3-й -  $\beta = \frac{\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h}{e \sin \theta_{0h}}$ . В силу этого, будем делать замены в формулах 1-й модели по следующей схеме

$$\cos \theta \rightarrow k(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h), \quad \sin \theta \rightarrow k(\sin \theta_{0h}), \quad \text{где } k = \text{const} > 0. \quad (4)$$

Начнем подстановки с **биссектрисы фокального угла** (3.2.6.-5)

$$\varphi_0 = \begin{cases} \text{ang}(\mathbf{O}, \{-\sin \theta, \cos \theta\}), & \sin \theta > 0 \\ \text{ang}(\mathbf{O}, \{\sin \theta, -\cos \theta\}), & \sin \theta < 0 \end{cases} \quad \text{и отклонения от нее} \quad (3.2.6.-6a)$$

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{O}, \{e|\sin \theta|, \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2) \sin^2 \theta}\}).$$

Произведя замены, имеем

$$\varphi_0 = \begin{cases} \text{ang}(\mathbf{O}, \{-\sin \theta_{0h}, \cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h\}) & \sin \theta_{0h} > 0 \quad (5-1) \\ \text{ang}(\mathbf{O}, \{\sin \theta_{0h}, -(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)\}), & \sin \theta_{0h} < 0. \quad (5-2) \end{cases} \quad (5)$$

$$\delta = \text{ang}(\mathbf{O}, \{e|\sin \theta_{0h}|, \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}\}). \quad (6)$$

Заметим, что **сопряженная хорда однозначно определяет диаметр**. С другой стороны, в силу транзитивности  $\parallel$ , сопряженная хорда не единственная хорда, определяющая данный диаметр. Так, любая хорда,  $\parallel$  сопряженной хорде, также определяет данный диаметр. (Напомним, что  $\parallel$  прямые делятся в смысле ориентации на два класса: коллинеарные -  $\downarrow\downarrow$  и антипараллельные -  $\downarrow\uparrow$ ).

У всех сопряженных хорд при  $\downarrow\downarrow$  прямых различны величины нормального вектора  $p_L$ . Однако эта величина не входит в (4) или (5), поэтому пара углов  $\varphi_0, \delta$  диаметра определяется однозначно.

Для  $\downarrow\uparrow$  прямых, кроме различных значений вектора  $p_L$ , имеем дело с изменением  $\theta_{0h} \rightarrow \theta_{0h} + \pi$  (См.5, 6).

### 3°. Декартовы координаты концевых точек диаметра и сопутствующие формулы

Приведем формулу прототип (3.2.7.-4а) из 1-й модели

$$D_{1,2} = \frac{p\{-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta})\}}{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta}}.$$

Тогда, после подстановки  $D_{1,2} =$

$$= \frac{p}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta_{0h} \pm e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta_{0h}}} \cdot \{-e \sin^2 \theta_{0h} \pm (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta_{0h}}, e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sin \theta_{0h} \pm (-\sin \theta_{0h}) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta_{0h}}\}. \quad (7)$$

Упражнение 1. Докажите, что модели 2 и 3 переходят друг в друга при стремлении хорды к касательной, т.е. при  $\delta_h \rightarrow 0$ .

Упражнение 2. Доказать, что большая ось эллипса является сопряженной хордой для малой оси эллипса.

Доказательство. Т.к. для большой оси выполняется  $\theta_{0h} = \frac{\pi}{2}$ ,  $\delta_h = \frac{\pi}{2}$  (большая ось является фокальной хордой), то из (5-1), (6) следует  $\varphi_0 = \text{ang}(\theta, \{-1, 0\}) = \pi$ ,  $\delta = \text{ang}(\theta, \{-e, \pm \sqrt{1-e^2}\})$ . (Ср. 3.5.1.-7)

Упражнение 3. Доказать, что малая ось эллипса является сопряженной хордой для большой оси эллипса.

Упражнение 4. Доказать, что фокальная хорда,  $\perp$  фокальной оси, является сопряженной хордой для большой оси эллипса и для действительной оси гиперболы.

Упражнение 5. Докажите, что

$$\cos \varphi_{1,2} = \frac{-e \sin^2 \theta_{0h} \pm (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta_{0h}}}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + \sin^2 \theta_{0h}}, \quad (8)$$

$$\sin \varphi_{1,2} = \frac{e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sin \theta_{0h} \pm (-\sin \theta_{0h}) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta_{0h}}}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + \sin^2 \theta_{0h}}. \quad (9)$$

Упражнение 6. Найти знаменатель полярного радиуса  $r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}$  для диаметра.

Решение.

$$1 + e \cos \varphi = 1 + e \frac{-e \sin^2 \theta_{0h} \pm (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + \sin^2 \theta_{0h}} =$$

$$= \frac{(1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h} + (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 \pm e (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + \sin^2 \theta_{0h}}$$

(10)

#### 4°. Уравнение диаметра

Возьмем формулу прототип (3.2.8.-4) для нормированного уравнения диаметра

$$\frac{-(1 - e^2) \sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta}{s \sqrt{\cos^2 \theta + (1 - e^2)^2 \sin^2 \theta}} = 0 \quad \begin{cases} s = +1, & \sin \theta > 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases} \quad \text{и выполним}$$

подстановки (4)

$$\frac{-(1 - e^2) \sin \theta_{0h} x + (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) y - pe \sin \theta_{0h}}{s \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2)^2 \sin^2 \theta_{0h}}} = 0, \quad \text{где} \quad \begin{cases} s = 1 & \sin \theta_{0h} \geq 0 \\ s = -1 & \sin \theta_{0h} < 0 \end{cases}. \quad (11)$$

Упражнение 7. Найти полярные и декартовы координаты концевых точек диаметра и построить нормальное уравнение диаметра, если сопряженная хорда к нему имеет  $\varphi_{0h} = \frac{\pi}{6} (30^\circ)$ ,  $\delta_h = \frac{\pi}{6} (30^\circ)$  (см. рис. 3,4). Рассмотреть отличия построения чертежа для эллипса и гиперболы.

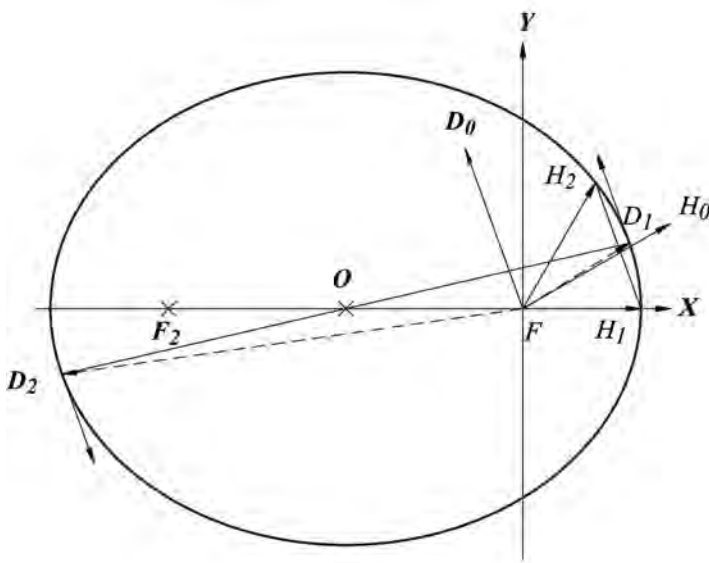


Рис. 3

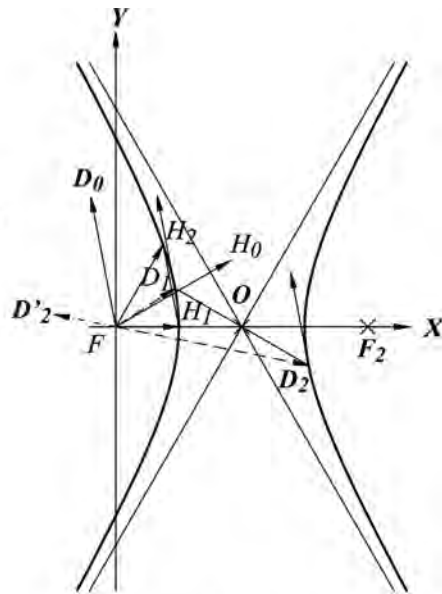


Рис. 4



Упражнение 8. Найти полярные и декартовы координаты концевых точек диаметра и построить нормальное уравнение диаметра, если сопряженная хорда к нему одним концом опирается на конец большой оси эллипса, а другим концом на конец малой оси эллипса (см.рис.5).

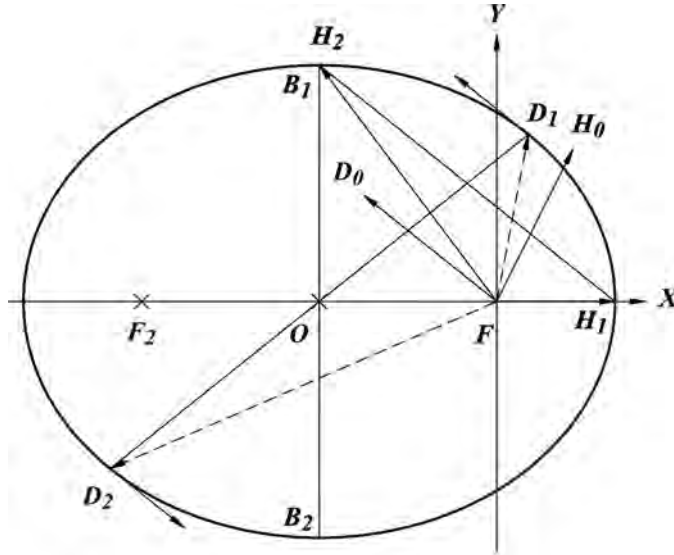


Рис. 5

## 5°. Различные формулы

Название	Формула прототип из 1-й модели	Формула в 3-й модели
расстояние от фокуса $F:\{0,0\}$ до диаметра	$d_{FD} = \frac{pe \sin\theta }{\sqrt{\cos^2\theta + (1-e^2)^2 \sin^2\theta}}$	$d_{FD} = \frac{pe \sin\theta_{0h} }{\sqrt{(\cos\theta_{0h} + e\cos\delta_h)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2\theta_{0h}}}$ <p style="text-align: right;">(1)</p>
квадрат длины диаметра	$L_D^2 = \frac{4p^2(\cos^2\theta + (1-e^2)^2 \sin^2\theta)}{(1-e^2)^2(\cos^2\theta + (1-e^2)\sin^2\theta)}$	$L_D^2 = \frac{4p^2((\cos\theta_{0h} + e\cos\delta_h)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2\theta_{0h})}{(1-e^2)^2((\cos\theta_{0h} + e\cos\delta_h)^2 + (1-e^2)\sin^2\theta_{0h})}$ <p style="text-align: right;">(2)</p>
тангенс угла наклона диаметра	$k_D = \frac{(1-e^2)\sin\theta}{\cos\theta}$	$k_D = \frac{(1-e^2)\sin\theta_{0h}}{\cos\theta_{0h} + e\cos\delta_h}$ <p style="text-align: right;">(3)</p>
Угол наклона	$\psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s\cos\theta, -s(1-e^2)\sin\theta\})$	$\psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s(\cos\theta_{0h} + e\cos\delta_h), -s(1-e^2)\sin\theta_{0h}\})$

диаметра к оси абсцисс	где $\begin{cases} s = +1, & \sin \theta \geq 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases}$	$-s(1 - e^2) \sin \theta_{0h}$ (4)
$C$	$\cos \theta$	$\cos \theta_{0h} + e \cos \delta$ (5a)
$S$	$\sin \theta$	$\sin \theta_{0h}$ (5б)

Табл.1

### 6.3.2. Сохранения элементов секущих

(По материалам работы Л.Эйлера [26]).

Докажем 1-е, несколько измененное, утверждение Л.Эйлера. Геометрическое место точек, равное по координатной сумме точек пересечения || хорд с дугой коники, есть прямая линия, || диаметру, сопряженному с этими хордами.

*Доказательство.* В (3.2.8.) доказано, что середина хорды, сопряженная с данным диаметром, принадлежит этому диаметру. Т.е.

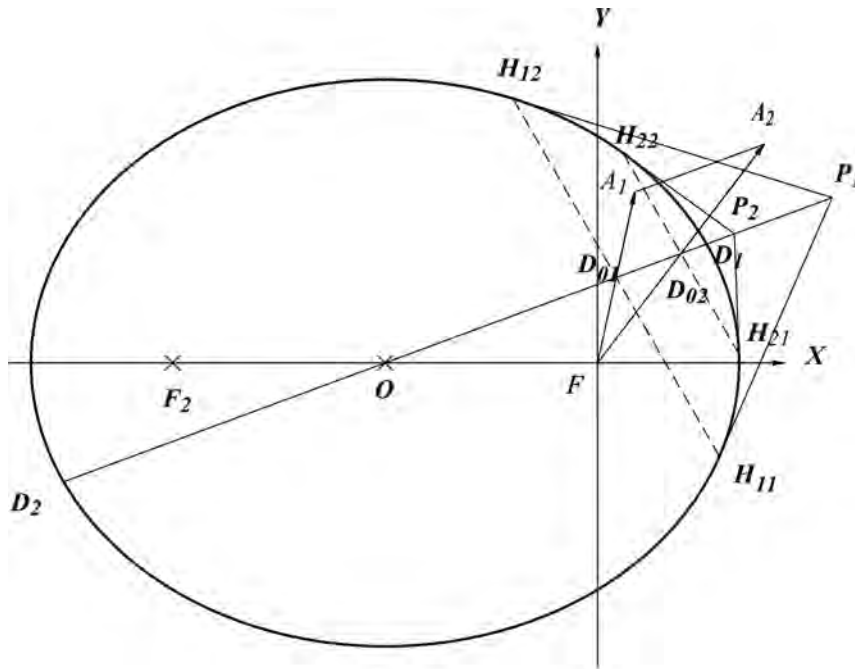


Рис. 1

$\{x_o, y_o\} = \left\{ \frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right\} = \frac{1}{2} \{x_1 + x_2, y_1 + y_2\}$ . Рассмотрим множество ||

секущих, получаемые при помощи изменения значения  $p_L$  (вариации). Эти секущие образуют при пересечении с дугой || хорды  $H_{i1}H_{i2}$  (см.рис.1). У каждой из

этих хорд есть середина  $D_{0i}$ . Таким образом, точки середины  $\parallel$  хорд есть геометрическое место точек, через которые проходит определенный диаметр. Меняя вышеприведенный коэффициент с  $\frac{1}{2}$  на 1 (т.е. увеличивая его в 2 раза), подвергнем наше множество середин хорд гомотетичному преобразованию и получим новые точки, также лежащие на одной прямой. Соединяя эти новые точки, получим новую прямую, гомотетичную исходной секущей (см.1.5.4.). Кроме того, новая прямая  $\parallel$  диаметру, проходящему через середины хорд, с коэффициентом гомотетии 2. Расстояние между новой прямой и диаметром будет в соответствии с (6.3.-11) и (1.5.4-4)

$$d = \frac{p_L}{\sqrt{2}} \left| \frac{k\sqrt{2}-1}{k} \right| = \frac{pe|\sin\theta_{0h}|}{\sqrt{(\cos\theta_{0h} + e\cos\delta_h)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2\theta_{0h}}} \frac{(2\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}}. \quad (1)$$

(На (рис.1) выбранные две точки пересечения хорд и диаметра  $D_{01}$  и  $D_{02}$  образуют среднюю линию  $\Delta FA_1A_2$ .)  $\square$

Дадим еще одну интерпретацию 1-й теоремы Эйлера.

Пусть  $\parallel$  хорды пересекают коническую кривую в точках  $H_{i1}, H_{i2}$  (рис.2).

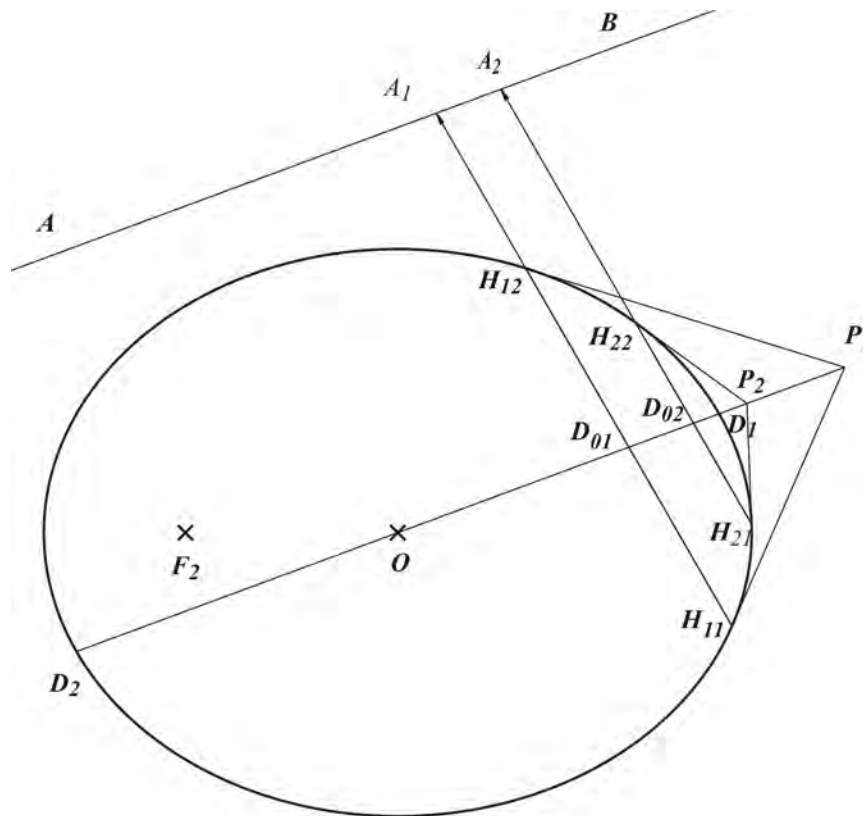


Рис. 2

Соединим середины этих хорд прямой линией и продолжим ее по обе стороны до пересечения с кривой, тем самым делая построение диаметра, сопряженного данным хордам. Проведем прямую  $AB \parallel$  построенному диаметру через произвольно выбранную точку и продолжим хорды до пересечения с этой прямой (см.рис.2). Обозначим точки пересечения хорд с прямой  $A_1A_2$  как  $A_i$ . Справедливо следующее утверждение для неориентированных длин отрезков

$$A_i H_{i1} + A_i H_{i2} = const. \quad (2)$$

Заметим, что  $(H_{i1} + H_{i2})/2 = D_{0i}$ , где  $D_{0i}$  - точки пересечения хорд с диаметром. (2) следует из равенства противоположных сторон параллелограмма, образованного хордами и их продолжениями.  $\square$

Введем положительное направление от  $H_{i1}$  к  $H_{i2}$  и воспользуемся системой *скользящих векторов*. **Векторы, расположенные вдоль некоторой прямой и перемещающиеся только вдоль этой прямой, называются скользящими** [18,§5], [16,§7]. Введем временную ориентацию **секущей** от  $H_{i1}$  к  $H_{i2}$ , которая, вообще говоря, может и не совпадать с ее постоянной ориентацией в смысле Гессе.

$$\overrightarrow{A_i H_{i1}} + \vec{L} = \overrightarrow{A_i H_{i2}}. \quad (3)$$

((см. рис.2)

Другими словами (см.3.3.2.-4),

$$A_i H_{i2} - A_i H_{i1} = \frac{2\sqrt{p^2 - 2ep p_L \cos \theta + (e^2 - 1)p_L^2}}{(1 - e^2 \sin^2 \theta)} = L(p_L, \theta) \quad (4)$$

Таким образом, **разность скользящих векторов от произвольно выбранной точки на секущей до точек пересечения секущей с дугой, равна ориентированной длине хорды**. (Ориентация хорды совпадает с выбранным направлением скользящих векторов.)

Упражнение 1 . Постройте рисунки, аналогичные 1, 2 для гиперболы.

Упражнение 2. Пусть в кривую 2-го порядка (эллипс или гиперболу) вписан параллелограмм  $ABCD$  (см.рис.3). Хорда  $P_1P_4 \parallel AD$ . Доказать, что  $P_1P_2 = P_3P_4$ . (Л.Эйлер) [26,стр. 56, п.96].

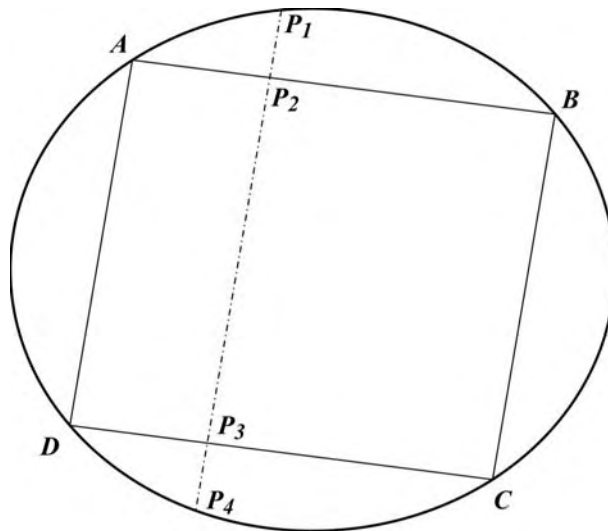


Рис.3

**6.4. 4-я модель построения диаметра - построение с помощью внешней точки**

Раскроем геометрический смысл задачи (см.рис.1, 2) (Замечание. Как и в предыдущих разделах, векторы биссектрис и векторы, противоположно направленные векторам к правой ветви гиперболы, построены только с учетом направления и без масштаба).

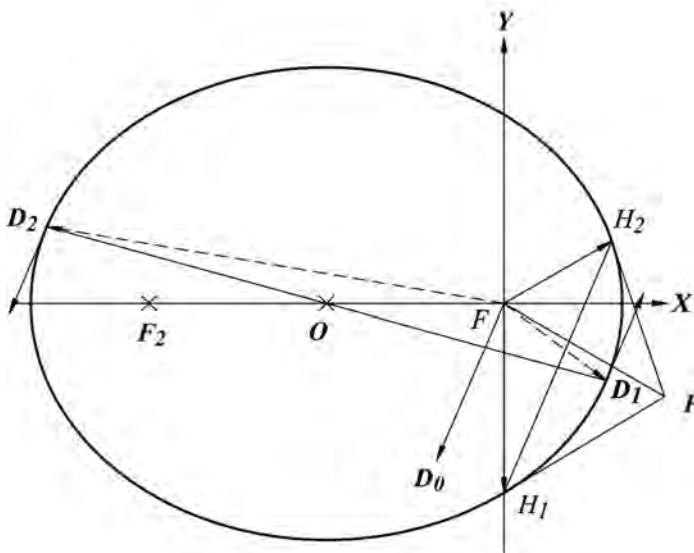


Рис. 1

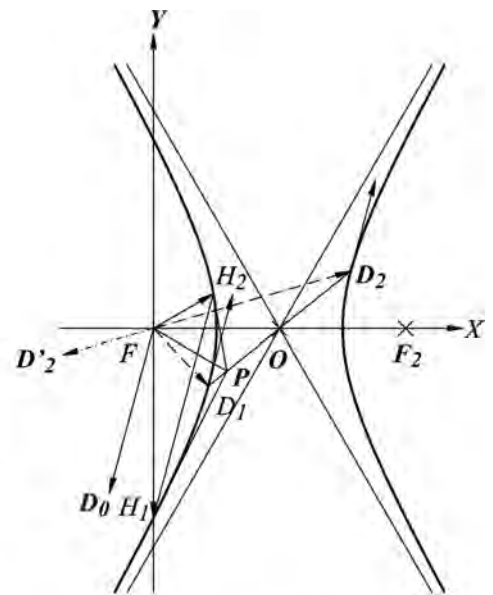


Рис. 2

Построим хорду между точками касания  $H_1, H_2$  двух касательных, пересекающихся в полюсе  $P$ . Эта хорда  $\parallel$  двум другим касательным, касающимся кривой в  $D_1, D_2$ .

Вначале рассмотрим вариант НПСК. Из (5.3.-2) имеем  $\theta_{0h} = \text{ang}(\mathbf{O}, \{F, P\})$ , а

$\cos \delta_h = \frac{P}{L_{FP}} - e \cos \theta_0$ . Подставим это выражение в (6.3.1.-5)

$$\varphi_0 = \begin{cases} \text{ang}(\mathbf{O}, \{-\sin \theta_0, \cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h\}) & \sin \theta_{0h} > 0 \\ \text{ang}(\mathbf{O}, \{\sin \theta_{0h}, -(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)\}), & \sin \theta_{0h} < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \text{ang}(\mathbf{O}, \{-\sin \theta_{0h}, (1 - e^2) \cos \theta_{0h} + \frac{pe}{L_{FP}}\}) & \sin \theta_{0h} \geq 0 & (1-1) \\ \text{ang}(\mathbf{O}, \{\sin \theta_{0h}, -((1 - e^2) \cos \theta_{0h} + \frac{pe}{L_{FP}})\}), & \sin \theta_{0h} < 0 & (1-2) \end{cases} \quad (1)$$

Упражнение 1. Найти полярные и декартовые координаты концевых точек диаметра и построить нормальное уравнение диаметра, если сопряженная хорда имеет  $\varphi_1 = 0$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  (см. рис.3,4).

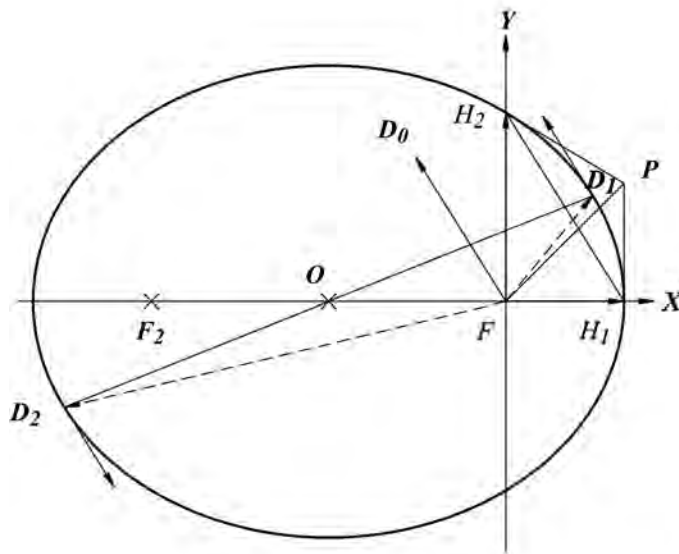


Рис. 3

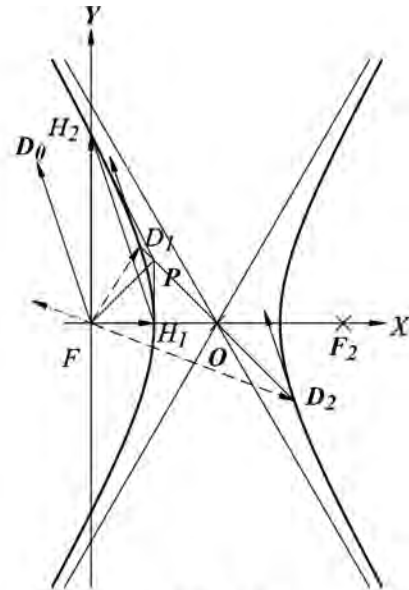


Рис. 4

### 1°. Формулы подстановки

Запишем формулы подстановки перехода от 1-й модели к 4-й

$$\cos \theta \rightarrow (1 - e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}}, \quad \sin \theta \rightarrow \sin \theta_0. \quad (2)$$

### 2°. Декартовы координаты концевых точек диаметра

Приведем формулу прототип (3.2.7.-4а)

$$D_{1,2} = \frac{p\{-e \sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta})\}}{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2) \sin^2 \theta}}.$$

Делаем подстановки (2)

$$D_{1,2} = \frac{p\{-e \sin^2 \theta \pm \left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right) \sqrt{L}, \sin \theta \left( e \left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right) \pm \sqrt{L} \right)\}}{L \pm e \left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right) \sqrt{L}},$$

$$\text{где } L = \left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right)^2 + (1-e^2) \sin^2 \theta. \quad (3)$$

### 3°. Уравнение диаметра

Возьмем формулу прототип (3.2.8.-4) для нормированного уравнения диаметра

$$\frac{-(1-e^2) \sin \theta x + \cos \theta y - pe \sin \theta}{s \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta}} = 0 \quad \begin{cases} s = +1, & \sin \theta > 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases} \quad \text{и выполним}$$

подстановки (2)

$$\frac{-(1-e^2) \sin \theta_0 x + \left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right) y - pe \sin \theta_0}{s \sqrt{\left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta_0}} = 0 \quad \begin{cases} s = +1, & \sin \theta_0 > 0 \\ s = -1, & \sin \theta_0 < 0 \end{cases}. \quad (4)$$

### 4°. Различные формулы

Название	Формула прототип из 1-й модели	Формула в 4-й модели
расстояние от фокуса $F:\{0,0\}$ до диаметра	$d_{FD} = \frac{pe  \sin \theta }{\sqrt{(1-e^2)^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}$	$d_{FD} = \frac{pe  \sin \theta_0 }{\sqrt{\left( (1-e^2) \cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta_0}}$ <p style="text-align: right;">(5)</p>

квадрат длины диаметра	$L_D^2 =$ $= \frac{4p^2(\cos^2 \theta + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta)}{(1-e^2)^2(\cos^2 \theta + (1-e^2)\sin^2 \theta)}$	$L_D^2 =$ $= \frac{4p^2 \left( \left( (1-e^2)\cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right)^2 + (1-e^2)^2 \sin^2 \theta_0 \right)}{(1-e^2)^2 \left( \left( (1-e^2)\cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right)^2 + (1-e^2)\sin^2 \theta_0 \right)}$ (6)
тангенс угла наклона диаметра	$k_D = \frac{(1-e^2)\sin \theta}{\cos \theta}$	$k_D = \frac{(1-e^2)\sin \theta_0}{(1-e^2)\cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}}}$ (7)
угол наклона диаметра к оси абсцисс	$\psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s \cos \theta, -s(1-e^2)\sin \theta\})$ где $\begin{cases} s = +1, & \sin \theta \geq 0 \\ s = -1, & \sin \theta < 0 \end{cases}$	$\psi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s \left( (1-e^2)\cos \theta_0 + \frac{pe}{L_{FP}} \right), -s(1-e^2)\sin \theta_0\})$ , где $\begin{cases} s = +1, & \sin \theta_0 \geq 0 \\ s = -1, & \sin \theta_0 < 0 \end{cases}$ (8)
$C$	$\cos \theta$	$\cos \theta_{0h} + \frac{pe}{L_{FP}} \cos \delta$ (5a)
$S$	$\sin \theta$	$\sin \theta_{0h}$ (5б)

Табл.1.

## 6.5. Основные точки, принадлежащие диаметру и его продолжению

### 6.5.1. Основные точки

(Формулы данного раздела дадим, для примера, в 3-й модели диаметра. С другой стороны, это не принципиально.)

#### 1°. Концевые точки диаметра

Повторим здесь формулу (6.3.1.-7) для полноты данного раздела

$$D_{1,2} = \frac{p}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1-e^2)\sin^2 \theta_{0h} \pm e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1-e^2)\sin^2 \theta_{0h}}} \cdot \{-e\sin^2 \theta_{0h} \pm (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1-e^2)\sin^2 \theta_{0h}}, e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)\sin \theta_{0h} \pm (-\sin \theta_{0h})\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1-e^2)\sin^2 \theta_{0h}}\}. \quad (1)$$



### 2°. Точка центра симметрии

В (3.5) показано, что центр вертикальной симметрии  $O : \{-\frac{pe}{1-e^2}, 0\}$  принадлежит диаметру. Рассмотрим еще один вариант доказательства. Для этого подставим координаты  $O$  в левую часть уравнения диаметра (6.3.1.-11)

$$\frac{-(1-e^2)\sin\theta_{0h}x + (\cos\theta_{0h} + e\cos\delta)y - pe\sin\theta_{0h}}{-\sqrt{(\cos\theta_{0h} + e\cos\delta)^2 + (1-e^2)^2\sin^2\theta_{0h}}} \quad (2)$$

и покажем, что полученное расстояние равно 0. При подстановке заметим, что необходимо и достаточно доказать равенство 0 только числителя дроби из (2). В самом деле

$$-(1-e^2)\sin\theta_{0h}\left(-\frac{pe}{1-e^2}\right) - pe\sin\theta_{0h} = (\sin\theta_{0h})(pe - pe) = 0.$$

### 3°. Точка полюса

Аналогично пункту 1°, докажем, что точка полюса также принадлежит продолжению диаметра. Подставляя координаты точки полюса (4.3.-2)

$$\frac{p}{\cos\delta + e\cos\theta_{0h}}\{\cos\theta_{0h}, \sin\theta_{0h}\} \text{ в левую часть уравнения (6.5.-9) диаметра имеем}$$

$$\frac{-(1-e^2)\sin\theta_{0h} + (\cos\theta_{0h} + e\cos\delta)y - pe\sin\theta_{0h}}{-\sqrt{(\cos\theta_{0h} + e\cos\delta)^2 + (1-e^2)^2\sin^2\theta_{0h}}}. \quad (3)$$

**Рассмотрим числитель и докажем, что он равен 0.**

Как и в предыдущем пункте, необходимо и достаточно доказать равенство 0 только числителя дроби из (3)

$$\frac{(1-e^2)\sin\theta_{0h}p\cos\theta_{0h}}{\cos\delta + e\cos\theta_{0h}} +$$

$$+ \frac{(\cos\theta_{0h} + e\cos\delta)(-p)\sin\theta_{0h}}{\cos\delta + e\cos\theta_{0h}} - pe(-\sin\theta_{0h}) = \frac{p\sin\theta_{0h}}{\cos\delta + e\cos\theta_{0h}}.$$

$$\cdot ((1-e^2)\cos\theta_{0h} - (\cos\theta_{0h} + e\cos\delta) + e(\cos\delta + e\cos\theta_{0h})). \quad (4)$$

Рассмотрим теперь 2-й сомножитель из (1), и докажем, что он всегда равен 0. В самом деле  $\cos\theta_{0h} - e^2\cos\theta_{0h} - \cos\theta_{0h} - e\cos\delta + e\cos\delta + e^2\cos\theta_{0h} = 0$ .  $\square$

#### 4°. Точка основания медианы

Докажем, что точка основания медианы полярного треугольника принадлежит диаметру. Для этого поступаем аналогично предыдущим пунктам – подставляем координаты из (5.6.5.-1)

$$\frac{P}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}} \{ \cos \delta (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta) - e \sin^2 \theta_{0h},$$

$\sin \theta_{0h} (\cos \delta + e \cos \theta_{0h}) \}$  в левую часть уравнения (6.3.1.-11), получая расстояние от точки до прямой. Но перед этим, как и ранее, приведем выражение к общему знаменателю и отбросим его вместе с общим коэффициентом  $-p$ . Таким образом

$$\begin{aligned} & -(1 - e^2) \sin \theta_{0h} (\cos \delta (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta) - e \sin^2 \theta_{0h}) + (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta) \\ & \sin \theta_{0h} (\cos \delta + e \cos \theta_{0h}) + -e \sin \theta_{0h} ((\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}) = -\sin \theta_{0h} ((1 - e^2) \cdot \\ & \cdot (\cos \delta (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta) - e \sin^2 \theta_{0h}) - (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta) (\cos \delta + e \cos \theta_{0h}) + \\ & + e((\cos \theta_{0h} + e \cos \delta)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h})) = 0. \end{aligned}$$

Необходимо и достаточно доказать, что 2-й сомножитель (числитель) тождественно равен 0. Действительно, раскрывая скобки, получим  $\cos \theta_{0h} \cos \delta + e \cos^2 \delta - e \sin^2 \theta_{0h} - e^2 \cos \theta_{0h} \cos \delta - e^3 \cos^2 \delta + e^3 \sin^2 \theta_{0h} - \cos \theta_{0h} \cos \delta - e \cos^2 \theta_{0h} - e \cos^2 \delta - e^2 \cos \theta_{0h} \cos \delta + e \cos^2 \theta_{0h} + 2e^2 \cos \theta_{0h} \cos \delta + e^2 \cos^2 \delta + e \sin^2 \theta_{0h} - e^3 \sin^2 \theta_{0h} = 0$ .

#### 6.5.2. Пересечение между сопряженной хордой и диаметром

Пусть некоторая хорда, || концевым касательным диаметра, пересекает этот диаметр. Найдем условие, при котором точка середины хорды принадлежит данному диаметру. Будем решать эту задачу в переменных  $C, S$ . Делая соответствующие подстановки в (5.6.1.-2) и (6.3.1.-11), найдем сначала точку пересечения диаметра и хорды в виде системы уравнений

$$\begin{cases} Cx + Sy = p \cos \delta \\ -(1 - e^2)Sx + Cy = peS \end{cases}, \quad (1)$$

а затем и в виде решения  $\{x, y\} = \left\{ \frac{p(C \cos \delta - eS^2)}{C^2 + (1 - e^2)S^2}, \frac{pS(eC + (1 - e^2) \cos \delta)}{C^2 + (1 - e^2)S^2} \right\}$ . (2)

Такой же результат можно получить, подставив переменные  $C, S$  в формулу

$$\text{середины хорды (5.6.5.-1) } M : \{x, y\} = \left\{ \frac{p(C \cos \delta - eS^2)}{C^2 + (1 - e^2)S^2}, \frac{pS(eC + (1 - e^2) \cos \delta)}{C^2 + (1 - e^2)S^2} \right\}. \quad (3)$$

## 6.6. Сопряженный диаметр

### 6.6.1. Сопряженный диаметр эллипса

#### 1°. Определение

В 3-й модели диаметра мы брали сопряженную хорду,  $\parallel$  концевым касательным диаметра, который с этого раздела будет называться **основной**. При пересечении с основным диаметром сопряженная хорда составляла некоторый угол (например, у окружности этот угол всегда равняется  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ )).

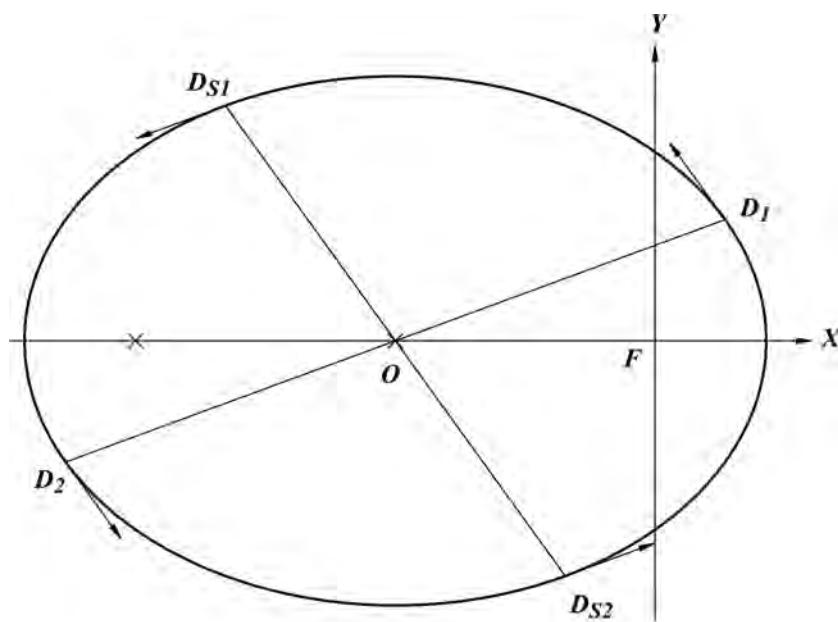


Рис. 1

В данном разделе рассмотрим не все возможные варианты сопряженных хорд, а только тот вариант, при котором **сопряженная хорда**, в свою очередь, **является диаметром**.

Таким образом, рассматриваемая хорда обладает следующими свойствами

1) **свойствами диаметра**, т.е. **концевые касательные  $\parallel$  друг другу**;

2) **концевые касательные данной хорды || основному диаметру** (см.рис.1) (кроме того, они, по определению диаметра, || между собой).

**Диаметр, обладающий такими свойствами, называется сопряженный.**

Еще раз обратим внимание, что **сопряженный диаметр эллипса выбираем из множества диаметров эллипса**. Если рассматривать конечные точки диаметра эллипса, то нахождение сопряженных конечных точек связано с отображением эллипса на себя. Можно, также интерпретировать это отображение как поворот на некоторый угол (для окружности этот угол всегда равен  $\frac{\pi}{2}$  ( $90^\circ$ )).

Ниже покажем, что такая постановка задачи для эллипса всегда имеет однозначное решение.

## 2°. Полярные координаты концевых точек сопряженного диаметра

Как и в (3.2.6.-1), **свяжем тангенсы угла наклона касательной (3.1.2.-3) и основного диаметра (6.1.-5) эллипса**

$$\frac{\cos \varphi_s + e}{-\sin \varphi_s} = \frac{(1 - e^2) \sin \theta}{\cos \theta}, \quad (1)$$

где неизвестным будет  $\varphi_s$  - полярный угол концов диаметра. Угол  $\theta$ , как и в предыдущих разделах, является углом направления нормального вектора сопряженной прямой, || касательным основного диаметра.

Преобразуем (1)  $\cos \theta \cos \varphi_s + e \cos \theta = -(1 - e^2) \sin \theta \sin \varphi_s$ ,

$$\cos \theta \cos \varphi_s + (1 - e^2) \sin \theta \sin \varphi_s = -e \cos \theta,$$

$$-\frac{1}{e} \cos \varphi_s - \frac{(1 - e^2) \sin \theta}{e \cos \theta} \sin \varphi_s = 1. \quad (2)$$

$$\text{Отсюда } \alpha = -\frac{1}{e}, \quad \beta = \frac{-(1 - e^2) \sin \theta}{e \cos \theta}. \quad (3)$$

Заметим, что сопряженный диаметр обладает всеми свойствами основного диаметра, за исключением того, что касательные на его концах || основному диаметру, а не исходной сопряженной прямой.

Рассмотрим основные элементы сопряженного диаметра, получаемые методом подстановки из соответствующих элементов основного диаметра.

**Биссектриса фокального угла**

$$\begin{aligned} \varphi_s &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha, \beta\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ -\frac{1}{e}, \frac{-(1-e^2)\sin\theta}{e\cos\theta} \right\}) = \\ &= \begin{cases} \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\cos\theta, -(1-e^2)\sin\theta\}) & \cos\theta \geq 0 \\ \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\cos\theta, -(1-e^2)\sin\theta\}) + \pi & \cos\theta < 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (4)$$

**Отклонение от биссектрисы**

$$\begin{aligned} \delta_s &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \left\{ 1, \sqrt{\frac{1}{e^2} + \frac{(1-e^2)^2 \sin^2\theta}{e^2 \cos^2\theta} - 1} \right\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\cos\theta|, \sqrt{(1-e^2)\cos^2\theta + (1-e^2)^2 \sin^2\theta}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e|\cos\theta|, \sqrt{(1-e^2)(1-e^2 \sin^2\theta)}\}). \end{aligned} \quad (5)$$

Ранее доказано, что полное решение (см.1.2.5.4.-6) в полярных координатах  $\varphi_{1,2} = \varphi_0 \mp \delta = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\alpha \pm \beta\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}, \beta \mp \alpha\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 1}\})$  с выбором последовательности углов решений и с выполнением правила обхода против часовой стрелки преобразуется

при  $\cos\theta \geq 0$

$$\begin{aligned} \varphi_{1,2} &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-e\cos^2\theta \pm (1-e^2)\sin\theta\sqrt{(1-e^2)(1-e^2 \sin^2\theta)}, \\ &\quad \cos\theta(e(1-e^2)\sin\theta \pm \sqrt{(1-e^2)(1-e^2 \sin^2\theta)})\}). \end{aligned} \quad (6)$$

Для  $\cos\theta < 0$  предоставляем получить формулу читателю.

Т.к. у эллипса  $e < 1$ , то (6) выполняется для любого направления  $\theta$ . Тем самым показано, что **каждому диаметру эллипса можно однозначно поставить в соответствие сопряженный диаметр из множества диаметров данного эллипса.**

**3°. Формулы подстановки сопряженного диаметра**

Сравним (3.2.6.-2)  $\beta = \frac{\cos\theta}{e\sin\theta}$  для 1-й модели основного диаметра и (4)

$\beta = \frac{-(1-e^2)\sin\theta}{e\cos\theta}$  для той же модели сопряженного диаметра. Напомним, что в переменных  $C, S$  для основного диаметра имеем  $C = \cos\theta, S = \sin\theta$ . С другой стороны, для сопряженного диаметра  $C_s = -(1-e^2)\sin\theta, S_s = \cos\theta,$  (7)

или  $C_s = (1-e^2)\sin\theta, S_s = -\cos\theta.$  (7а)

Из двух возможных вариантов выберем, для определенности, (7).

Итак, чтобы получить формулы сопряженного диаметра в общем виде, необходимо в формулах основного диаметра общего вида (т.е. содержащих переменные  $C, S$ ) сделать подстановки  $C \rightarrow C_s, S \rightarrow S_s$ . (8)

Если требуется перейти, например, от формул 1-й модели основного диаметра к формулам 1-й модели сопряженного диаметра, то необходимо сделать следующие подстановки

$$\cos \theta \rightarrow -(1-e^2)\sin \theta, \quad \sin \theta \rightarrow \cos \theta. \quad (9)$$

Как и ранее, при подстановке исходные формулы должны быть однородны (см. (6.2. 3<sup>o</sup>  $k$ -критерий).

Упражнение 1. Доказать формулы обратного перехода

$$C_s = -(1-e^2)S, \quad S_s = C, \quad (10)$$

Упражнение 2. Доказать, что  $C_{ss} = C, S_{ss} = S$ .

Доказательство. Сначала заметим, что поскольку  $C, S$  однородны, то их всегда можно взаимно сократить на одну и ту же константу, причем знак константы значения не имеет. В силу этого

$$C_{ss} = -(1-e^2)S_s = -(1-e^2)C, \quad S_{ss} = C_s = -(1-e^2)S.$$

#### 4<sup>o</sup>. Декартовы координаты концевых точек сопряженного диаметра

Возьмем формулу концевых точек в общем виде (6.2.-14) (для всех вариантов моделей диаметра) в переменных  $C, S$ :

$$D_{1,2} = \frac{p\{-eS^2 \pm C\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}, S(eC \pm \sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2})\}}{C^2 + (1-e^2)S^2 \pm eC\sqrt{C^2 + (1-e^2)S^2}}$$

и перепишем ее для сопряженного диаметра в переменных  $C_s, S_s$

$$D_{s1,s2} = \frac{p\{-eS_s^2 \pm C_s\sqrt{C_s^2 + (1-e^2)S_s^2}, S_s(eC_s \pm \sqrt{C_s^2 + (1-e^2)S_s^2})\}}{C_s^2 + (1-e^2)S_s^2 \pm eC_s\sqrt{C_s^2 + (1-e^2)S_s^2}}. \quad (12)$$

В частности, концевые точки основного диаметра в декартовых координатах 1-й модели (3.2.7.-4а)

$$D_{1,2} = \frac{p\{-e\sin^2 \theta \pm \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)\sin^2 \theta}, \sin \theta (e \cos \theta \pm \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)\sin^2 \theta})\}}{\cos^2 \theta + (1-e^2)\sin^2 \theta \pm e \cos \theta \sqrt{\cos^2 \theta + (1-e^2)\sin^2 \theta}}$$

и концевые точки сопряженного диаметра (делаем подстановки (7)) в 1-й модели

$$\begin{aligned}
D_{s_1, s_2} &= \\
&= \frac{p}{(1-e^2)\cos^2\theta + (1-e^2)^2\cos^2\theta \mp e(1-e^2)\sin\theta\sqrt{(1-e^2)\cos^2\theta + (1-e^2)^2\sin^2\theta}} \cdot \\
&\{-e\cos^2\theta \mp (1-e^2)\sin\theta\sqrt{(1-e^2)\cos^2\theta + (1-e^2)^2\sin^2\theta}, \\
&\cos\theta(-e(1-e^2)\sin\theta \pm \sqrt{(1-e^2)\cos^2\theta + (1-e^2)^2\sin^2\theta})\}. \tag{11}
\end{aligned}$$

### 5°. Различные формулы сопряженного диаметра

Приведем список важнейших формул по теме сопряженный диаметр в общем виде (т.е. в переменных  $C_s, S_s$ ):

- **уравнение сопряженного диаметра**  $\frac{-(1-e^2)S_s x + C_s y - peS_s}{s\sqrt{(1-e^2)^2 S_s^2 + C_s^2}} = 0$ ,

где  $\begin{cases} s_s = +1, & S_s \geq 0; \\ s_s = -1, & S_s < 0; \end{cases}$  (13)

- **расстояние от фокуса  $F:\{0,0\}$  до сопряженного диаметра**

$$d_{FD} = \frac{pe|S_s|}{\sqrt{(1-e^2)^2 S_s^2 + C_s^2}}; \tag{14}$$

- **квадрат длины сопряженного диаметра**

$$L_{D_s}^2 = \frac{4p^2(C_s^2 + (1-e^2)^2 S_s^2)}{(1-e^2)^2(C_s^2 + (1-e^2)S_s^2)}; \tag{15}$$

- **тангенс угла наклона сопряженного диаметра**

$$k_{D_s} = \frac{(1-e^2)S_s}{C_s}; \tag{16}$$

- **направляющие нормального вектора сопряженного диаметра**

$$\cos\phi = \frac{-(1-e^2)S_s}{s_s\sqrt{(1-e^2)^2 S_s^2 + C_s^2}}; \sin\phi = \frac{C_s}{s_s\sqrt{(1-e^2)^2 S_s^2 + C_s^2}}, \text{ где } \begin{cases} s_s = +1, & S_s \geq 0; \\ s_s = -1, & S_s < 0; \end{cases} \tag{17}$$

- **угол наклона сопряженного диаметра к оси абсцисс**

$$\psi = \text{ang}(\theta, \{-s_s C_s, -s_s(1-e^2)S_s\}). \tag{18}$$

Рассмотрим теперь **3-ю модель основного диаметра – модель с сопряженной хордой**. Эта хорда по определению  $\parallel$  концевым касательным основного диаметра, которые, в свою очередь,  $\parallel$  сопряженному диаметру. В силу транзитивности  $\parallel$  следует, что сопряженный диаметр всегда  $\parallel$  любой хорде,

сопряженной с основным диаметром. С другой стороны, у сопряженного диаметра, по определению, концевые касательные  $\parallel$  основному диаметру. Т.к. свойство  $\parallel$  является коммутативным (если прямая  $p \parallel$  прямой  $q$ , то прямая  $q \parallel$  прямой  $p$ ), поэтому основной диаметр  $\parallel$  касательным, проведенным из концевых точек сопряженного диаметра. Тем самым доказано, что **оба этих диаметра (основной и сопряженный) взаимно сопряжены.**

**У эллипса касательные, построенные из концевых точек основного и сопряженного диаметра образуют параллелограмм**, т.к. одна пара касательных  $\parallel$  основному диаметру, а вторая  $\parallel$  - сопряженному (см. рис.2).

(Забегаая вперед заметим, что подобная ситуация происходит и у гиперболы.)

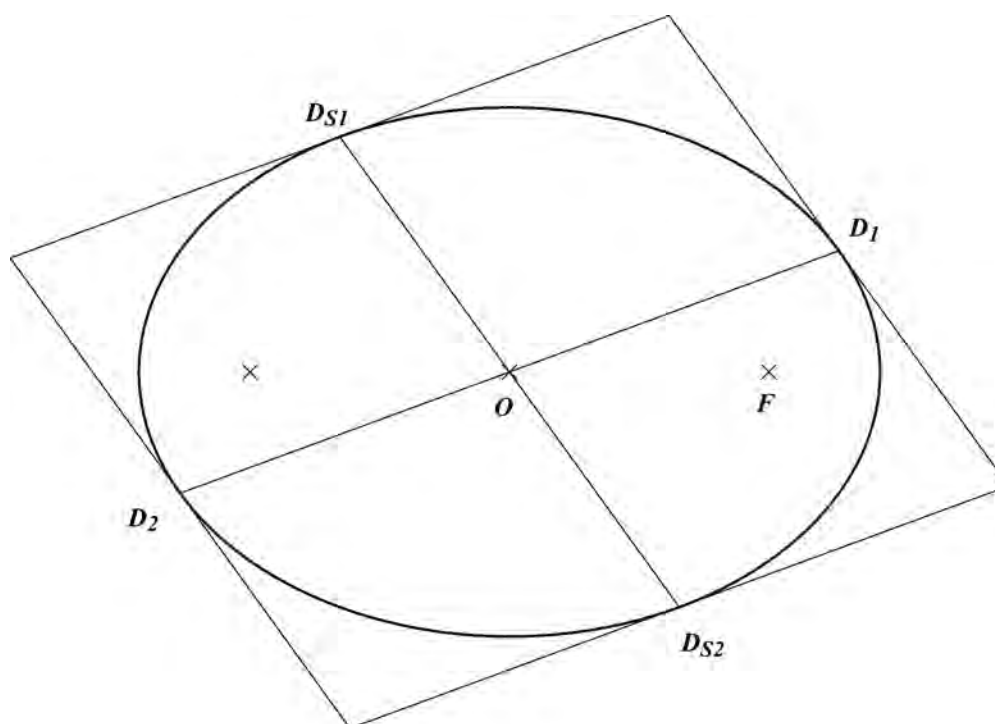


Рис. 2

Найдем **абсолютную величину разности углов между основным и сопряженным диаметрами**, причем из двух смежных углов, которые получаются при пересечении двух прямых, будем брать наименьший угол. Отсюда следует, что **наибольшим углом между диаметрами будет прямой угол.**

Т.к. мы умеем находить угол между соответствующим диаметром и осью абсцисс, то воспользуемся (1.2.1.-29), (6.1.-7) и (18)



$$\xi = \min|\psi - \psi_s| = \min|\text{ang}(\mathbf{0}, \{-sC, -s(1-e^2)S\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{-s_s C_s, -s_s(1-e^2)S_s\})| = \\ = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|s \cdot s_s (C \cdot C_s + (1-e^2)^2 S \cdot S_s)|, |s \cdot s_s ((1-e^2)S \cdot C_s - (1-e^2)S_s \cdot C)|\}).$$

Т.к.  $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ , то

$$\xi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|s \cdot s_s|(C \cdot C_s + (1-e^2)^2 S \cdot S_s)|, |s \cdot s_s|((1-e^2)S \cdot C_s - (1-e^2)S_s \cdot C)|\}) = \\ = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|(C \cdot C_s + (1-e^2)^2 S \cdot S_s)|, |(1-e^2)S \cdot C_s - (1-e^2)S_s \cdot C|\}).$$

Преобразуем последнее выражение к переменным основного диаметра  $C \cdot C_s = -(1-e^2)C \cdot S$ ,  $S \cdot S_s = CS$ ,  $S \cdot C_s = -(1-e^2)S^2$ ,  $S_s C = C^2$ . Следовательно

$$\xi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|CS| |-(1-e^2) + (1-e^2)^2|, |-(1-e^2)^2 S^2 - (1-e^2) \cdot C^2|\}) = \\ = \text{ang}(\mathbf{0}, \{|CS|e^2, |C^2 + (1-e^2)S^2|\}). \quad \square \quad (19)$$

Выясним теперь, **когда основной и сопряженный диаметры  $\perp$  друг другу**. Необходимым и достаточным условием для этого будет (см. 1.2.1.-18)

$$|CS|e^2 = 0. \quad (20)$$

Приравняем по очереди 0 сомножители (17). Рассмотрим, сначала, 1-й множитель

в 1-й модели. Тогда  $CS = \cos \theta \cdot \sin \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ . Уравнение  $\sin 2\theta = 0$  имеет

следующие корни в единичном круге (1.2.5.1.-2)  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_3 = \pi$ ,  $\theta_4 = \frac{3}{2}\pi$ .

Корни  $\theta_1 = 0$ ,  $\theta_3 = \pi$  соответствуют случаю, когда основным диаметром является малая ось эллипса, а сопряженным диаметром – большая. Как известно, эти оси взаимно  $\perp$ . Другая пара корней  $\theta_2 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_4 = \frac{3}{2}\pi$  соответствуют случаю, когда основным диаметром является большая ось эллипса, а сопряженным диаметром – малая.

Отсюда делаем вывод: **из всех пар основного и сопряженного диаметров у эллипса  $\perp$  являются только его оси**.

Равенство нулю 2-го сомножителя говорит о том, что **у окружности основной и сопряженный диаметры всегда  $\perp$** .

$$\text{Упражнение 3. Доказать}^1 \text{ [18, §244, (2)], что } k_D k_{D_s} = -(1-e^2) = -\frac{b^2}{a^2}, \quad (21)$$

где  $a, b$  - полуоси эллипса.

<sup>1</sup> Био (Biot J.V. 1774-1862) [7, стр.402].

Упражнение 4. Найти **квадрат длины сопряженного диаметра в переменных  $C, S$** .

Решение. Делаем подстановки в (15)

$$L_{D_s}^2 = \frac{4p^2(C_s^2 + (1-e^2)^2 S_s^2)}{(1-e^2)^2(C_s^2 + (1-e^2)S_s^2)} = \frac{4p^2((1-e^2)^2 S^2 + (1-e^2)^2 C^2)}{(1-e^2)^2((1-e^2)^2 C^2 + (1-e^2)S^2)} = \frac{4p^2(C^2 + S^2)}{(1-e^2)(C^2 + (1-e^2)S^2)}. \quad (22)$$

Упражнение 5. Доказать, что угол между нормальными векторами основного и сопряженного диаметров совпадает с (19).

Упражнение 6. Доказать [6,N482], что стороны прямоугольника, вписанного в эллипс,  $\parallel$  его осям.

## 6.6.2. Сопряженная гипербола и сопряженный диаметр гиперболы

### 6.6.2.1. Сопряженная гипербола

Вначале выясним, чем задача построения сопряженного диаметра у гиперболы отличается от аналогичной задачи у эллипса. Дело в том, что **единичный вектор направления касательных у эллипса принимает все направления от  $[0, 2\pi]$**  (докажите!). Отсюда следует, что **для эллипса каждому направлению диаметра можно подобрать два (!) единичных направления вектора касательной**.

У гиперболы это обстоит иначе. С одной стороны, радиус-вектор действительно пробегает направления  $[0, 2\pi]$ , и при этом конец данного радиус-вектора движется вдоль гиперболы. Но, с другой стороны, направления единичного вектора касательной ограничены асимптотами, причем существуют направления диаметра (например,  $\parallel$  оси абсцисс), для которых отсутствует такое же направление касательной (подчеркнем!) у основной гиперболы.

Возникает вопрос можно ли построить геометрическую конструкцию, на базе которой можно было бы провести сопряженные касательные,  $\parallel$  основному диаметру, а затем, соединив точки касания прямой, построить сопряженный диаметр для гиперболы?

Предположим, что существует положительный ответ на данный вопрос. Заметим, что тогда эту конструкцию можно  $\parallel$  перемещать самой себе сколь угодно далеко, при этом свойство  $\parallel$  сохраняется.

С другой стороны, существует свободное место, смежное по отношению к уже занятому основной гиперболой, и которое находится тоже между асимптотами (но по другую сторону от основной гиперболы). В этом месте могла бы поместиться другая гипербола, на основе которой можно решать задачу нахождения сопряженных касательных, || диаметрам основной гиперболы.

Ниже докажем, что наши предположения верны. Подкрепим рассуждения расчетами. В разделе (3.7.4.), посвященном асимптотам, найден **угол между асимптотами** (3.7.4.-36)  $\Delta\psi = \text{ang}(\theta, \{2 - e^2, 2\sqrt{e^2 - 1}\})$ . С другой стороны, угол, на который поворачивается **нормальный вектор касательной**  $\Delta\theta = \text{ang}(\theta, \{e^2 - 2, 2\sqrt{e^2 - 1}\})$ , является дополнительным до  $\pi$  углом между асимптотами. (Напомним, что для углов с взаимно  $\perp$  сторонами имеем два варианта: 1) при совпадающей ориентации углы равны; 2) при противоположной ориентации углы являются дополнительными до  $\pi$ .)

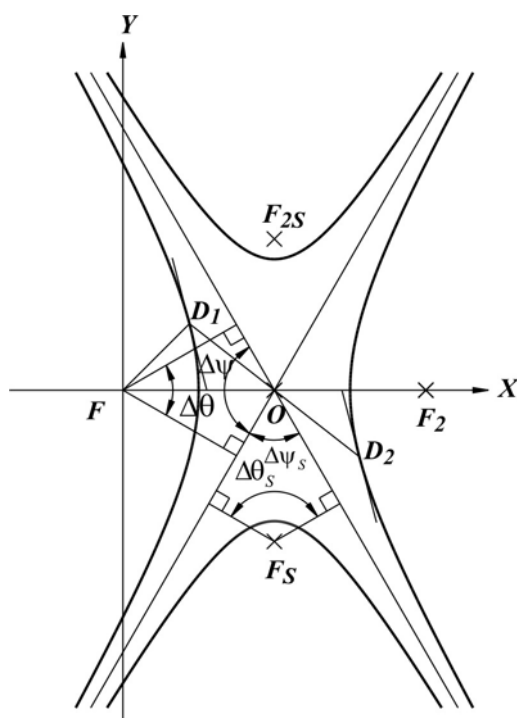


Рис. 1

Найдем **угол** (ср.3.7.4.-37), **на который поворачивается нормальный вектор основного диаметра гиперболы**. При этом воспользуемся тем, что для этого **достаточно половины одной ветви гиперболы**, которая построена между

асимптотами, т.е. построена внутри интервала: между углом 0 и углом разрыва

$\varphi_1 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, 0\})$ ,  $\varphi_2 = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{e^2 - 1}\})$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_1 &= 1, & \cos \varphi_2 &= \frac{-1}{\sqrt{1+e^2-1}} = \frac{-1}{e}, \\ \sin \varphi_1 &= 0, & \sin \varphi_2 &= \frac{\sqrt{e^2-1}}{\sqrt{1+e^2-1}} = \frac{\sqrt{e^2-1}}{e}. \end{aligned} \quad (1)$$

**Угол наклона нормального вектора основного диаметра во 2-й модели равен (6.2.-21)**

$$\psi_s = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1-e^2)\sin \varphi, \cos \varphi + e, \}). \quad (2)$$

Подставляем (1) в (2) и упрощаем

$$\psi_{s1} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}), \quad \psi_{s2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-(1-e^2)\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}, \frac{-1}{e} + e\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{e^2-1}, 1\}). \quad (3)$$

Таким образом, используя (1.2.1.-9), (1.2.1.-16), (1.2.1.-20) и (3), имеем

$$\begin{aligned} \Delta \psi_s &= 2(\text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 1\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{\sqrt{e^2-1}, 1\})) = 2(\text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{e^2-1}\})) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{2-e^2, 2\sqrt{e^2-1}\}). \end{aligned} \quad (4)$$

Сравнивая (37) и (36), получаем геометрически очевидный результат: **угол поворота нормального вектора диаметра является дополнительным до  $\pi$  по отношению к смежному углу между асимптотами**. Это означает, что “угол раствора” нормального вектора сопряженных касательных, || основному диаметру гиперболы, будет также дополнительным до  $\pi$  **смежному углу между асимптотами**.

Докажем, что в смежный угол между асимптотами может быть “вписана гипербола” с сопряженным эксцентриситетом  $e_s = \frac{e}{\sqrt{e^2-1}}$ . (5)

Тогда этот смежный угол становится дополнительным до  $\pi$  к основному углу между асимптотами.

$$\begin{aligned} \text{Доказательство. } \Delta \zeta_s &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{2-e_s^2, 2\sqrt{e_s^2-1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{2-\frac{e^2}{e^2-1}, 2\sqrt{\frac{e^2}{e^2-1}-1}\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{\frac{e^2-2}{e^2-1}, 2\frac{\sqrt{e^2-1}}{e^2-1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2-2, 2\sqrt{e^2-1}\}). \square \end{aligned}$$

Угол между главной осью кривой и осью абсцисс -  $\alpha$  **находится из соображений симметрии**. Ось симметрии сопряженной гиперболы,

расположенная внутри смежного угла асимптот, перпендикулярна горизонтальной оси основной гиперболы. Кроме того, очевидно, что вертикальная ось симметрии сопряженной гиперболы проходит через центр симметрии гиперболы, т.е. через вершину угла, образованного асимптотами. Таким образом,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . (Заметим, что оси симметрии у основной и сопряженной гипербол меняются их назначением.)

Остается найти еще **координаты фокуса (или координаты 2-х фокусов)**, а также **величину фокального параметра**  $p_s$ .

В силу симметрии, координаты фокуса сопряженной гиперболы должны лежать на вертикальной оси симметрии сопряженной гиперболы, которая играет ту же роль, что и горизонтальная ось симметрии для основной гиперболы. А чтобы асимптоты основной гиперболы служили бы асимптотами и сопряженной гиперболы, то расположим фокус сопряженной гиперболы на таком же расстоянии от общего центра симметрии, как и фокус основной гиперболы, или  $\frac{pe}{e^2 - 1} = \frac{p_s e_s}{e_s^2 - 1}$ . (6)

Обосновывая это решение, заметим, что положение фокуса основной гиперболы не зависит от величины фокального параметра или от эксцентриситета – эти параметры независимо входят в полярное уравнение Лаланда-Лапласа.

С другой стороны, для равнобочной гиперболы чертеж должен быть симметричен как для основной гиперболы, так и для сопряженной. В силу того, что положение фокусов сопряженной гиперболы не должно зависеть от своих величин фокального параметра и эксцентриситета (как это происходит у основной гиперболы - эти гиперболы “равноправны”), и, учитывая требования вертикальной симметрии, **установим фокусы сопряженной гиперболы от центра симметрии на том же расстоянии, что и фокусы основной гиперболы.**

Упражнение 1. Из (5) и (6) доказать, что  $p_s = \frac{p}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$ . (7)

### 6.6.2.2. Классический подход к построению сопряженной гиперболы

Приведем определение из [16,§116]: "Две гиперболы, заданные уравнениями  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  и  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$  (1)

в одной и той же декартовой прямоугольной системе координат с одними и теми же значениями полуосей  $a$  и  $b$ , называются сопряженными." В [18,§198] показывается, что сопряженная гипербола получается из исходной гиперболы:

- 1) при обмене в (1) осей абсцисс и ординат;
- 2) при обмене полуосей  $a$  и  $b$ .

Далее будем ставить нижний индекс " $s$ " возле сопряженных параметров. Таким образом, по определению  $a_s = b$  и  $b_s = a$ .

В полярных координатах, в которых изучаем гиперболу, имеем не два изменения, а три:

- 1\*) изменение параметров полярного уравнения:

$$p_s = p_s(p, e), \quad e_s = e_s(p, e);$$

- 2\*) нахождение координат сопряженного фокуса, из которого будет происходить построение сопряженной гиперболы;

- 3\*) поворот фокальной оси гиперболы на угол  $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  относительно центра координат.

Найдем 1\*). Сначала, используя (3.7.4.-17), сделаем обмен местами  $a$  и  $b$

$$p_s = \frac{a^2}{b}, \quad e_s = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}, \quad \text{а затем подставим значения } a \text{ и } b \text{ из (3.7.3.-2a), (3.7.4.-14)}$$

$$p_s = \frac{p^2 \sqrt{e^2 - 1}}{(e^2 - 1)^2 p} = \frac{p}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}, \quad e_s = \frac{\sqrt{\frac{p^2}{(e^2 - 1)^2} + \frac{p^2}{(e^2 - 1)}}}{\frac{p}{\sqrt{e^2 - 1}}} = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sqrt{1 + e^2 - 1}}{e^2 - 1} = \frac{e}{\sqrt{e^2 - 1}}. \quad (2)$$

$$\text{Т.к. } e > \sqrt{e^2 - 1}, \text{ то } e_s = \frac{e}{\sqrt{e^2 - 1}} > 1. \quad (3)$$

Это означает, что сопряженная гипербола не выходит из семейства гипербол.

Условие  $e_0 = \sqrt{2}$  (признак равносторонней гиперболы) является признаком и для сопряженной гиперболы: если  $1 < e < e_0$ , то  $e_s > e$ , иначе  $e_s \leq e$  (докажите!)

Найдем  $2^*$ ). В силу изменения ролей между  $a$  и  $b$ , **расстояния между вершинами в сопряженной гиперболе будет не  $2a$ , а  $2b = 2a_s$ . Центр симметрии гиперболы  $O$  остается центром симметрии и для сопряженной гиперболы (см. упражнение 3 и (рис.1)), поэтому координаты сопряженных фокусов следующие**

$$F_s : \{ae, -a_s e_s\} = \left\{ \frac{pe}{e^2 - 1}, \frac{-pe}{e^2 - 1} \right\} = \frac{pe}{e^2 - 1} \{1, -1\}, \quad (4)$$

$$F_{2s} : \{ae, a_s e_s\} = \left\{ \frac{pe}{e^2 - 1}, \frac{pe}{e^2 - 1} \right\} = \frac{pe}{e^2 - 1} \{1, 1\}. \quad (5)$$

Приведем **полярное уравнение сопряженной гиперболы в переменных основной гиперболы**

$$r_s = \frac{p_s}{1 + e_s \cos(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \frac{p}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} \left(1 + \frac{e}{(e^2 - 1)^{\frac{1}{2}}} \sin \varphi\right)} = \frac{p}{(e^2 - 1)(\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi)}. \quad (6)$$

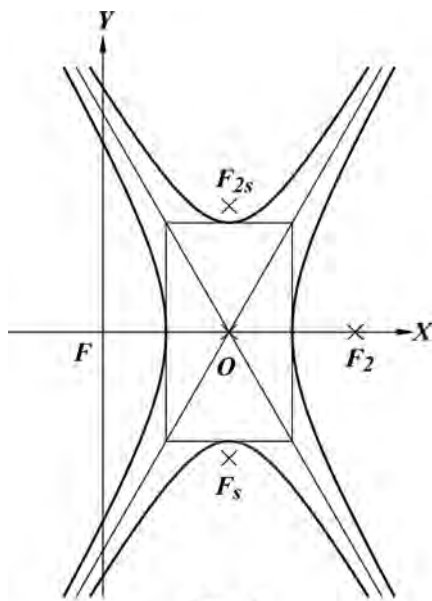


Рис. 1

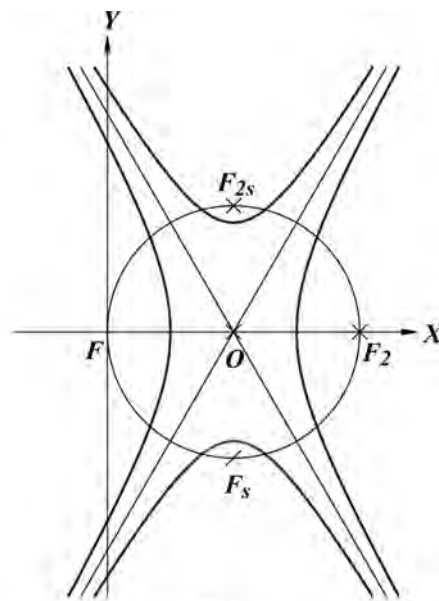


Рис. 2

Упражнение 1. Докажите, что  $a_s b_s = ab$ . (7)

Упражнение 2. Докажите, что  $a_s + f_s = a_s + \frac{p_s}{1 + e_s} = \frac{pe}{e^2 - 1}$ . (8)

Упражнение 3. Докажите, что  $\left\{ \frac{pe}{e^2 - 1}, 0 \right\} = \left\{ \frac{p_s e_s}{e_s^2 - 1}, 0 \right\}$ . (9)

Упражнение 4. Докажите, что:

1) **последовательно соединяя фокусы основной и сопряженной гипербол (например, обходя их против часовой стрелки), получим квадрат (постройте чертеж и вычислите сторону полученного квадрата);**

2) **через все фокусы основной и сопряженной гипербол можно провести окружность. Найти ее центр и радиус (см. рис.2).**

Упражнение 5. Найти **тангенс угла наклона касательной сопряженной гиперболы.**

Решение. Воспользуемся тем, что фокальная ось сопряженной гиперболы составляет угол  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  с осью абсцисс. Известно (2.7.-1), что

$$k_s = - \frac{\cos \varphi_s + e \cos \alpha}{\sin \varphi_s + e_s \sin \alpha} \Big|_{\alpha = \frac{\pi}{2}} = - \frac{\cos \varphi_s}{\sin \varphi_s + e_s} = - \frac{\sqrt{e^2 - 1} \cos \varphi_s}{\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi_s + e}. \quad (10)$$

Упражнение 6. Найти **уравнение в нормальном виде касательной сопряженной гиперболы.** (В данном случае мы не связываем направления касательной сопряженной гиперболы и основного диаметра – это сделано в следующем разделе.)

Решение. Запишем уравнение сопряженной касательной в приведенной форме  $y = k_s x + b_s$ . Подставив в это уравнение  $T : \{x, y\}$ - координаты точки касания, тангенс угла наклона  $k_s$  (10), найдем свободный член -  $b_s$ .

$$b_s = \frac{p}{(e^2 - 1)(\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi)} \cdot \left( \sin \varphi - e\sqrt{e^2 - 1} - e \sin \varphi + \frac{\sqrt{e^2 - 1} \cos \varphi}{\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi + e} (\cos \varphi + e\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi) \right). \text{ Отсюда}$$

$$y = k_s x + b_s = - \frac{\sqrt{e^2 - 1} \cos \varphi}{\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi + e} x + \frac{p}{(e^2 - 1)(\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi)(\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi + e)} \cdot \left( (\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi + e)(\sin \varphi - e\sqrt{e^2 - 1} - e \sin \varphi) + (\sqrt{e^2 - 1} \cos \varphi)(\cos \varphi + e\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi) \right).$$

Запишем **уравнение сопряженной касательной в общем виде**

$$(\sqrt{e^2 - 1} \cos \varphi)x + (\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi + e)y - \frac{p}{(e^2 - 1)(\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi)} \cdot \left( (\sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi + e)(\sin \varphi - e\sqrt{e^2 - 1} - e \sin \varphi) + (\sqrt{e^2 - 1} \cos \varphi)(\cos \varphi + e\sqrt{e^2 - 1} + e \sin \varphi) \right) = 0. \quad (11)$$



Вычислим коэффициент нормирования

$$\begin{aligned}\sqrt{A^2 + B^2} &= \sqrt{(e^2 - 1)\cos^2 \varphi + (e^2 - 1)\sin^2 \varphi - 2e\sqrt{e^2 - 1}\sin \varphi + e^2} = \sqrt{(e - \sqrt{e^2 - 1})^2} = \\ &= e - \sqrt{e^2 - 1}. \text{ Заметим, что для гиперболы всегда } e - \sqrt{e^2 - 1} > 0.\end{aligned}$$

**Нормальное уравнение сопряженной касательной гиперболы**

$$\begin{aligned}\frac{(\sqrt{e^2 - 1}\cos \varphi)x}{(e - \sqrt{e^2 - 1})} + \frac{(\sqrt{e^2 - 1}\sin \varphi + e)y}{(e - \sqrt{e^2 - 1})} - \frac{p}{(e - \sqrt{e^2 - 1})(e^2 - 1)(\sqrt{e^2 - 1} + e\sin \varphi)} \cdot \\ \cdot \left( (\sqrt{e^2 - 1}\sin \varphi + e)(\sin \varphi - e\sqrt{e^2 - 1} - e\sin \varphi) + (\sqrt{e^2 - 1}\cos \varphi)(\cos \varphi + e\sqrt{e^2 - 1} + e\sin \varphi) \right) = 0.\end{aligned}$$

Упражнение 7. Найти точки пересечения касательной сопряженной гиперболы и осей координат.

Упражнение 8. Найти интервалы монотонности сопряженной гиперболы.

Решение.

### 1<sup>о</sup> способ

Запишем полярный угол разрыва ветвей сопряженной гиперболы по аналогии с основной гиперболой (3.7.2.-2)

$$\beta_s = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{e_s^2 - 1}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \frac{\sqrt{e^2 - e^2 + 1}}{\sqrt{e^2 - 1}}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{e^2 - 1}, 1\}). \quad (12)$$

(В данном случае термин полярный угол разрыва рассматривается как критерий, который привязан к фокальной оси и, таким образом, не зависит от ориентации гиперболы).

Теперь учтем ориентацию сопряженной гиперболы – т.е. симметрию расположения углов разрыва  $\beta_s$  относительно поворота фокальной оси на угол

$\frac{\pi}{2}$ . Для нижней ветви сопряженной гиперболы имеем следующие углы разрыва

$$\begin{aligned}\varphi_{1s} &= \frac{\pi}{2} - \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{e^2 - 1}, 1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, -\sqrt{e^2 - 1}\}) \\ \varphi_{2s} &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{e^2 - 1}, 1\}) + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{e^2 - 1}\}) + \pi.\end{aligned} \quad (13)$$

### 2<sup>о</sup> способ

Найдем углы, при которых знаменатель (10) равен нулю. Для этого решим уравнение  $\sqrt{e^2 - 1} + e\sin \varphi = 0$ . Преобразуем  $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}$ . Применяя (1.2.5.1.-2),

получим  $\varphi_{1s,2s} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\pm\sqrt{1-\frac{e^2-1}{e^2}}, -\frac{\sqrt{e^2-1}}{e}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{\pm 1, -\sqrt{e^2-1}\})$ . Видно, что оба способа приводят к одинаковому результату.

Приведем примеры при  $e = \sqrt{2}$  имеем  $\beta = \frac{3\pi}{4} (135^\circ)$ ,  $\beta_s = \frac{3\pi}{4} (135^\circ)$ , при  $e = 2$  -  $\beta = \frac{2\pi}{3} (120^\circ)$ ,  $\beta_s = \frac{\pi}{3} (60^\circ)$ .  $\square$

Как и для основных ветвей гиперболы, введем малое положительное число  $\chi$ , чтобы обойти точку разрыва. Тогда интервалы монотонности для нижней ветви

$$\varphi \in (\chi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, -\sqrt{e^2-1}\}), -\chi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{e^2-1}\}) + \pi) . \quad (14)$$

Аналогично, **интервалы монотонности для верхней ветви сопряженной гиперболы**

$$\varphi \in (\chi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, \sqrt{e^2-1}\}) + \pi, -\chi + \text{ang}(\mathbf{0}, \{1, -\sqrt{e^2-1}\}) + 2\pi) . \square \quad (15)$$

Упражнение 9. Доказать, что **углы между асимптотами равны либо  $2\beta$ , если асимптоты охватывают одну из основных ветвей гиперболы, либо равны  $2\beta_s$ , если асимптоты охватывают одну из сопряженных ветвей гиперболы**. В каком случае угол меньше и почему? Доказать, что у **равнобочной гиперболы асимптоты взаимно  $\perp$** .

Докажем еще раз последнее утверждение. При  $e = \sqrt{2}$  имеем  $2\beta = \frac{3\pi}{2} (270^\circ)$ ,  $2\beta_s = \frac{3\pi}{2} (270^\circ)$  (см. упражнение 8).

Упражнение 10. Доказать, что **сумма углов разрыва основной и сопряженной гиперболы кратна  $\frac{\pi}{2}$** .

Доказательство. Геометрически этот факт очевиден, т.к. сумма пар основного и сопряженного углов равна развернутому углу (см. предыдущее упражнение), а здесь имеем дело с биссектрисой развернутого угла. Проверим это утверждение аналитически для биссектрисы. Учитывая (3.7.2.-2) и (12), имеем

$$\beta + \beta_s = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \sqrt{e^2-1}\}) + \text{ang}(\mathbf{0}, \{-\sqrt{e^2-1}, 1\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{0, 2\sqrt{e^2-1}\}) = \frac{\pi}{2} . \quad (16)$$

Упражнение 11. Доказать, что **одна и та же прямая является асимптотой для обычной и сопряженной гиперболы**.

Упражнение 12. Для гиперболы и для сопряженной гиперболы по координатам двух фокусов найти уравнения двух директрис и построить их (ср.3.5.2.)

### 6.6.2.3. Сопряженный диаметр гиперболы

Прежде чем получить формулы для сопряженного диаметра гиперболы в общем виде, решим частную задачу построения этого диаметра во 2-й модели.

Пусть исходный полярный угол 1-й касательной  $\varphi_1 = \frac{\pi}{6} (30^\circ)$ . Найдем полярные углы  $\varphi_{1S}, \varphi_{2S}$ , которые откладываются из 1-го сопряженного фокуса  $F_S$  гиперболы (см. рис.1). Используя эти углы и применяя полярное уравнение, получим искомые точки сопряженного диаметра.

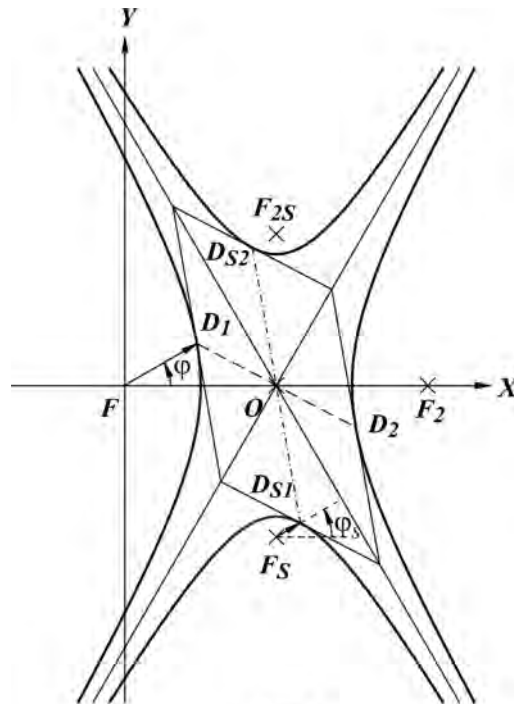


Рис. 1

Используя определение сопряженного диаметра (оно универсально и годится как для эллипса, так и для гиперболы), **приравняем тангенс угла наклона касательной сопряженной гиперболы (6.6.2.2.-10) и тангенс угла наклона основного диаметра (6.2.-24)** (сделаем, для примера, вывод формул во 2-й модели диаметра)

$$\frac{\cos \varphi_s}{-\sin \varphi_s - e_s} = \frac{(1 - e^2) \sin \varphi}{\cos \varphi + e}. \quad (1)$$

Решаем (1) относительно неизвестного угла  $\varphi_s$

$$\cos \varphi_s (\cos \varphi + e) = -(1 - e^2) \sin \varphi_s \sin \varphi - (1 - e^2) \sin \varphi e_s,$$

$$\frac{\cos \varphi_s (\cos \varphi + e)}{(e^2 - 1) e_s \sin \varphi} - \frac{\sin \varphi_s}{e_s} = 1, \quad \alpha_s = \frac{(\cos \varphi + e)}{(e^2 - 1) e_s \sin \varphi}, \quad \beta_s = -\frac{1}{e_s}. \quad (2)$$

$$\text{Т.к. (6.6.2.2.-3) } e_s = \frac{e}{\sqrt{e^2 - 1}}, \quad \text{то } \alpha_s = \frac{(\cos \varphi + e) \sqrt{e^2 - 1}}{(e^2 - 1) e \sin \varphi}, \quad \beta_s = -\frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e}. \quad (3)$$

Искомый угол (углы) находим из (1.2.5.4.-6)

$$\varphi_{s1,s2} = \text{ang} (\mathbf{0}, \{\alpha_s \mp \beta_s \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - 1}, \beta_s \pm \alpha_s \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - 1}\}). \quad (4)$$

(Таким образом, подобрана последовательность знаков “ $\mp, \pm$ ”. Выбор знаков влияет на последовательность углов  $\varphi_{s1,2}$ , что, вообще говоря, весьма условно.)

$$\cos \varphi_{s1,s2} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{s1,s2} = \frac{\alpha_s \mp \beta_s \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - 1}}{\alpha_s^2 + \beta_s^2}, \quad (4)$$

$$\sin \varphi_{s1,s2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \Big|_{s1,s2} = \frac{\beta_s \pm \alpha_s \sqrt{\alpha_s^2 + \beta_s^2 - 1}}{\alpha_s^2 + \beta_s^2}. \quad (5)$$

Сведем, далее, данную задачу к переменным

$$C_s = (\cos \varphi + e); S_s = (e^2 - 1) \sin \varphi$$

(выбор обозначений, естественно, произволен. При этом желательно, чтобы результаты работы были максимально похожи на аналогичные результаты в других разделах этой работы. С другой стороны, полной идентичности формул добиться нельзя. Это связано с поворотом системы координат на  $90^0$ ).

Следовательно,  $\alpha_s = \frac{C_s}{e_s S_s}, \quad \beta_s = \frac{1}{-e_s}$ . Подставим значения переменных

$\alpha_s, \beta_s$  в (4) и (5). Имеем

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{S_1, S_2} &= \frac{\frac{C_S}{e_S S_S} \pm \frac{1}{e_S} \sqrt{\left(\frac{C_S}{e_S S_S}\right)^2 + \left(\frac{1}{e_S}\right)^2} - 1}{\left(\frac{C_S}{e_S S_S}\right)^2 + \left(\frac{1}{e_S}\right)^2} = \frac{e_S C_S S_S \pm S_S \sqrt{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2}}{C_S^2 + S_S^2} = \\ &= \frac{S_S (e_S C_S \pm \sqrt{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2})}{C_S^2 + S_S^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\sin \varphi_{S_1, S_2} = \frac{\frac{1}{-e_S} \pm \frac{C_S}{e_S S_S} \sqrt{\left(\frac{C_S}{e_S S_S}\right)^2 + \left(\frac{1}{e_S}\right)^2} - 1}{\left(\frac{C_S}{e_S S_S}\right)^2 + \left(\frac{1}{e_S}\right)^2} = \frac{-e_S S_S^2 \pm C_S \sqrt{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2}}{C_S^2 + S_S^2}. \quad (7)$$

**Декартовы координаты концевых точек сопряженного диаметра гиперболы**

$$\begin{aligned} D_{S_1, S_2} &= \frac{p_S \{\cos \varphi_{S_1, S_2}, \sin \varphi_{S_1, S_2}\}}{1 + e_S \cos(\varphi_{S_1, S_2} - \alpha)} + r_0 = \frac{p_S \{\cos \varphi_{S_1, S_2}, \sin \varphi_{S_1, S_2}\}}{1 + e_S \sin \varphi_{S_1, S_2}} + \frac{pe}{e^2 - 1} \{1, -1\} = \\ &= \frac{p_S \{S_S (e_S C_S \pm \sqrt{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2}), -e_S S_S^2 \pm C_S \sqrt{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2}\}}{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2 \pm e_S C_S \sqrt{C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2}} + \frac{pe}{e^2 - 1} \{1, -1\}. \end{aligned} \quad (8)$$

Введем, также, следующее сокращение  $L_S = C_S^2 + (1 - e_S^2) S_S^2$  (в (8) оно встречается 4 раза).

**Итак, декартовы координаты концевых точек сопряженного диаметра гиперболы в компонентах**

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{p_S (S_S (e_S C_S + \sqrt{L_S}))}{L_S + e_S C_S \sqrt{L_S}} + \frac{pe}{e^2 - 1}, \quad x_2 = \frac{p_S (S_S (e_S C_S - \sqrt{L_S}))}{L_S - e_S C_S \sqrt{L_S}} + \frac{pe}{e^2 - 1}, \\ y_1 &= \frac{p_S (-e_S S_S^2 + C_S \sqrt{L_S})}{L_S + e_S C_S \sqrt{L_S}} - \frac{pe}{e^2 - 1}, \quad y_2 = \frac{p_S (-e_S S_S^2 - C_S \sqrt{L_S})}{L_S - e_S C_S \sqrt{L_S}} - \frac{pe}{e^2 - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

**Найдем координаты концевых точек сопряженного диаметра гиперболы при полярных углах  $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ .**

**Декартовы координаты концевых точек удовлетворяют векторному уравнению**

$$D_S : \Big|_{\varphi=0} = \frac{p}{(e^2 - 1)(\sqrt{e^2 - 1} + e)} \{0, 1\} + \frac{pe}{e^2 - 1} \{1, -1\},$$

$$D_S : \left|_{\varphi=\pi} = \frac{p}{(e^2-1)(\sqrt{e^2-1}+e)} \{0,-1\} + \frac{pe}{e^2-1} \{1,1\},$$

$$D_S : \left|_{\varphi=\frac{\pi}{2}} = \frac{p}{(e^2-1)(\sqrt{e^2-1}+e)} \{e\sqrt{e^2-1}-e, 1-e\sqrt{e^2-1}-e\} = \{r_{0x}, r_{0y} + f_S\},$$

$$D_S : \left|_{\varphi=\frac{3\pi}{2}} = \frac{p}{(e^2-1)(\sqrt{e^2-1}-e)} \{e\sqrt{e^2-1}+e, -1-e\sqrt{e^2-1}+e\} = \{p_S + r_{0x}, -r_{0y} - f_S\},$$

Выведем **уравнение сопряженного диаметра гиперболы**. Поступим, для этого, аналогично, (3.2.8), т.е. будем искать уравнение прямой сначала в общем виде  $Ax + By + C = 0$ , где  $A = y_2 - y_1$ ,  $B = x_1 - x_2$ ,  $C = x_2y_1 - x_1y_2$ .

$$A = y_2 - y_1 = \frac{p_S(-e_S S_S^2 - C_S \sqrt{L_S})}{L_S - e_S C_S \sqrt{L_S}} - \frac{p_S(-e_S S_S^2 + C_S \sqrt{L_S})}{L_S + e_S C_S \sqrt{L_S}} = \frac{p_S}{L_S^2 - e_S^2 C_S^2 L_S}.$$

$$\cdot (-e_S S_S^2 L_S - e_S^2 S_S^2 C_S L_S^{\frac{1}{2}} - C_S L_S^{\frac{3}{2}} - e_S C_S^2 L_S + e_S S_S^2 L_S - e_S^2 S_S^2 C_S L_S^{\frac{1}{2}} - C_S L_S^{\frac{3}{2}} + e_S C_S^2 L_S) =$$

$$= \frac{p_S}{L_S^2 - e_S^2 C_S^2 L_S} \cdot (-2e_S^2 S_S^2 C_S L_S^{\frac{1}{2}} - 2C_S L_S^{\frac{3}{2}}) = \frac{-2p_S C_S L_S^{\frac{1}{2}} (C_S^2 + S_S^2)}{L_S (1 - e_S^2) (C_S^2 + S_S^2)} = \frac{-2p_S C_S}{L_S^{\frac{1}{2}} (1 - e_S^2)},$$

$$B = x_1 - x_2 = \frac{p_S (S_S (e_S C_S + \sqrt{L_S}))}{L_S + e_S C_S \sqrt{L_S}} - \frac{p_S (S_S (e_S C_S - \sqrt{L_S}))}{L_S - e_S C_S \sqrt{L_S}} = \frac{p_S S_S}{L_S^2 - e_S^2 C_S^2 L_S}.$$

$$\cdot (e_S C_S L_S - e_S^2 C_S^2 L_S^{\frac{1}{2}} + L_S^{\frac{3}{2}} - e_S C_S L_S - e_S C_S L_S - e_S^2 C_S^2 L_S^{\frac{1}{2}} + L_S^{\frac{3}{2}} + e_S C_S L_S) = \frac{p_S S_S}{L_S (1 - e_S^2) (C_S^2 + S_S^2)}.$$

$$\cdot (-2 e_S^2 C_S^2 L_S^{\frac{1}{2}} + 2L_S^{\frac{3}{2}}) = \frac{2p_S S_S L_S^{\frac{1}{2}} (1 - e_S^2) (C_S^2 + S_S^2)}{L_S (1 - e_S^2) (C_S^2 + S_S^2)} = \frac{2p_S S_S}{L_S^{\frac{1}{2}}}. \quad (10)$$

Прежде чем вычислить значение свободного члена  $C$ , используем тот факт, что по абсолютной величине слагаемое  $\frac{pe}{e^2-1}$  у координат  $x_1, x_2, y_1, y_2$  одно и то же. Введем обозначение  $\alpha = \frac{pe}{e^2-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Отсюда } C = x_2 y_1 - x_1 y_2 &= (\bar{x}_2 + \alpha)(\bar{y}_1 - \alpha) - (\bar{x}_1 + \alpha)(\bar{y}_2 - \alpha) = \bar{x}_2 \bar{y}_1 - \alpha x_2 + a \bar{y}_1 - \alpha^2 - \\ &- \bar{x}_1 \bar{y}_2 + \alpha x_2 - a \bar{y}_1 + \alpha^2 = \bar{x}_2 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_2 + \alpha((\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)) = \bar{C} + \alpha(B - A). \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \bar{C} = x_2 y_1 - x_1 y_2 &= \left( \frac{p_s (S_s (e_s C_s - \sqrt{L_s}))}{L_s - e_s C_s \sqrt{L_s}} \right) \left( \frac{p_s (-e_s S_s^2 + C_s \sqrt{L_s})}{L_s + e_s C_s \sqrt{L_s}} \right) - \left( \frac{p_s (S_s (e_s C_s + \sqrt{L_s}))}{L_s + e_s C_s \sqrt{L_s}} \right) \\ &\cdot \left( \frac{p_s (-e_s S_s^2 - C_s \sqrt{L_s})}{L_s - e_s C_s \sqrt{L_s}} \right) = \frac{p_s^2 S_s}{(1 - e_s^2) L_s (C_s^2 + S_s^2)} (-e_s^2 C_s S_s^2 + e_s C_s^2 L_s^{\frac{1}{2}} + e_s S_s^2 L_s^{\frac{1}{2}} - C_s L_s + \\ &+ e_s^2 C_s S_s^2 + e_s C_s^2 L_s^{\frac{1}{2}} + e_s S_s^2 L_s^{\frac{1}{2}} + C_s L_s) = \frac{2 p_s^2 e_s S_s}{(1 - e_s^2) L_s^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Сокращаем коэффициенты  $A, B, C$  на множитель  $\frac{2 p_s e_s}{(1 - e_s^2) L_s^{\frac{1}{2}}}$ . Получаем

**уравнение общего вида сопряженного диаметра для гиперболы или уравнение общего вида диаметра сопряженной гиперболы**

$$-C_s x + (1 - e_s^2) S_s y + p_s e_s S_s + \frac{p e}{(e^2 - 1)} (C_s + (1 - e_s^2) S_s) = 0. \quad (13)$$

Докажем, что **центр симметрии**  $O: \left\{ \frac{p e}{e^2 - 1}, 0 \right\}$  принадлежит найденному диаметру. Действительно

$$-C_s \frac{p e}{e^2 - 1} + p_s e_s S_s + \frac{p e (1 - e_s^2) S_s}{(e^2 - 1)} + \frac{p e}{e^2 - 1} C_s = 0, \quad p_s e_s + \frac{p e (1 - e_s^2)}{e^2 - 1} = 0,$$

$$\frac{p e}{(e^2 - 1)^2} + \frac{p e}{e^2 - 1} \left( 1 - \frac{e^2}{e^2 - 1} \right) = 0. \quad \square \text{ (Последнее равенство эквивалентно (6.6.2.2. -9)).}$$

Доказана теорема Аполлония: **точка пересечения сопряженного диаметра и оси абсцисс всегда совпадает с точкой центра симметрии гиперболы.**

**Тангенс угла наклона диаметра сопряженной гиперболы**  $k_{D_s} = \frac{C_s}{(1 - e_s^2) S_s}$ .

(14)

Применяя (10), найдем **квадрат длины сопряженного диаметра**

$$\begin{aligned} L_{D_s}^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = B^2 + A^2 = \left( \frac{2 p_s S_s}{L_s^{\frac{1}{2}}} \right)^2 + \left( \frac{-2 p_s C_s}{L_s^{\frac{1}{2}} (1 - e_s^2)} \right)^2 = \\ &= \frac{4 p_s^2}{L_s} \left( \frac{C_s^2}{(1 - e_s^2)^2} + S_s^2 \right) = \frac{4 p^2 (C_s^2 + (1 - e_s^2)^2 S_s^2)}{(1 - e_s^2)^2 (C_s^2 + (1 - e_s^2) S_s^2)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Построим, теперь, **уравнение сопряженной касательной**. Эта касательная проходит через одну из концевых точек диаметра и || основному диаметру. Как

обычно в этой работе, для этого воспользуемся приведенным уравнением  $y_s = k_D x_s + b_s$ , где  $k_D$  определяется (6.1.-5). Выберем, для определенности, 1-ю концевую точку сопряженного диаметра. Тогда

$$x_1 = \frac{p_s(S_s(e_s C_s + \sqrt{L_s}))}{L_s + e_s C_s \sqrt{L_s}} + \frac{pe}{e^2 - 1}, y_1 = \frac{p_s(-e_s S_s^2 + C_s \sqrt{L_s})}{L_s + e_s C_s \sqrt{L_s}} - \frac{pe}{e^2 - 1}.$$

Учитывая, что  $C_s = (\cos \varphi + e)$ ,  $S_s = (e^2 - 1) \sin \varphi$ ,  $L_s = C_s^2 + (1 - e_s^2) S_s^2$  и  $k_D = \frac{(1 - e^2) \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{-S_s}{C_s}$ , запишем уравнение для определения  $b$

$$\frac{p_s(-e_s S_s^2 + C_s \sqrt{L_s})}{L_s + e_s C_s \sqrt{L_s}} - \frac{pe}{e^2 - 1} = \frac{-S_s}{C_s} \left( \frac{p_s(S_s(e_s C_s + \sqrt{L_s}))}{L_s + e_s C_s \sqrt{L_s}} + \frac{pe}{e^2 - 1} \right) + b. \quad \text{Сокращаем}$$

на одинаковые слагаемые в левой и правой частях, получим

$$b = \frac{p_s(C_s^2 + S_s^2) \sqrt{L_s}}{C_s(L_s + e_s C_s \sqrt{L_s})} + \frac{pe}{e^2 - 1} \left( \frac{S_s}{C_s} - 1 \right), \quad b = \frac{p_s(C_s^2 + S_s^2)}{C_s(\sqrt{L_s} + e_s C_s)} + \frac{pe}{e^2 - 1} \left( \frac{S_s - C_s}{C_s} \right).$$

#### Приведенное уравнение сопряженной касательной гиперболы

$$y = \frac{-S_s}{C_s} x + \frac{p_s(C_s^2 + S_s^2)}{C_s(\sqrt{L_s} + e_s C_s)} + \frac{pe}{e^2 - 1} \left( \frac{S_s}{C_s} - 1 \right). \quad (16)$$

#### Уравнение общего вида сопряженной касательной гиперболы

$$S_s x + C_s y - \frac{p_s(C_s^2 + S_s^2)}{(\sqrt{L_s} + e_s C_s)} - \frac{pe}{e^2 - 1} (S_s - C_s) = 0. \quad (17)$$

Получим **уравнение общего вида сопряженной касательной гиперболы в переменных обычной гиперболы**

$$(e^2 - 1) \sin \varphi x + (\cos \varphi + e) y - \frac{p((\cos \varphi + e)^2 + (e^2 - 1)^2 \sin^2 \varphi)}{(e^2 - 1)^{\frac{3}{2}} (\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 - \sin^2 \varphi} + \frac{e}{\sqrt{e^2 - 1}} (\cos \varphi + e))} - \frac{pe}{e^2 - 1} ((e^2 - 1) \sin \varphi - (\cos \varphi + e)) = 0$$

Упражнение 1. Доказать<sup>2</sup> [18, §245, (2)], что  $k_D k_{D_s} = (e^2 - 1) = \frac{b^2}{a^2}$ ,

где  $a, b$  - полуоси гиперболы.  $\square$

<sup>2</sup> Био (Biot) [7, стр.402].



Упражнение 2. Доказать, что три прямых: асимптота, касательная и касательная сопряженной гиперболы пересекаются в одной точке (см. рис.1).

Упражнение 3. Докажите что площадь параллелограмма  $ABCD$  (см.рис.1), описанного около гиперболы, равна  $4ab$  (теорема Аполлония).

Упражнение 4. Построить параллелограмм из касательных (см. рис.1).

Решение. Строим первую касательную в выбранной точке 1-й ветви гиперболы, находим вторую касательную, параллельную первой (модель диаметра 2). Далее находим точки пересечения этих касательных с асимптотами. Точки пересечения последовательно соединяем.

упражнение 5. Доказать (см.рис.2), что:

а)  $P_1P_3 = FF_2 = \frac{2pe}{e^2 - 1}$ ;

б) прямоугольники  $P_1P_2P_3P_4$  и  $FP_1F_2P_3$  равны;

в)  $\psi = \text{ang}(0, \{e - 1, \sqrt{e^2 - 1}\})$ .

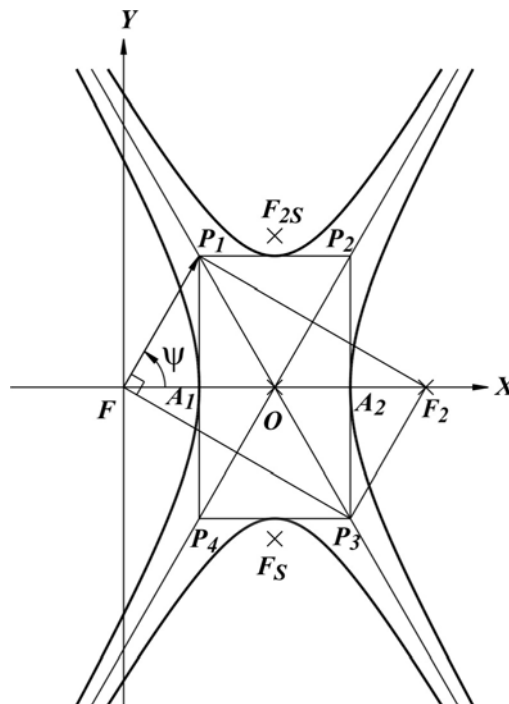


Рис.2

### 6.7. Свойство биссектрисы фокального угла сопряженного диаметра эллипса и гиперболы

**Теорема 1.** Биссектриса фокального угла, опирающегося на сопряженный диаметр, || основному диаметру.

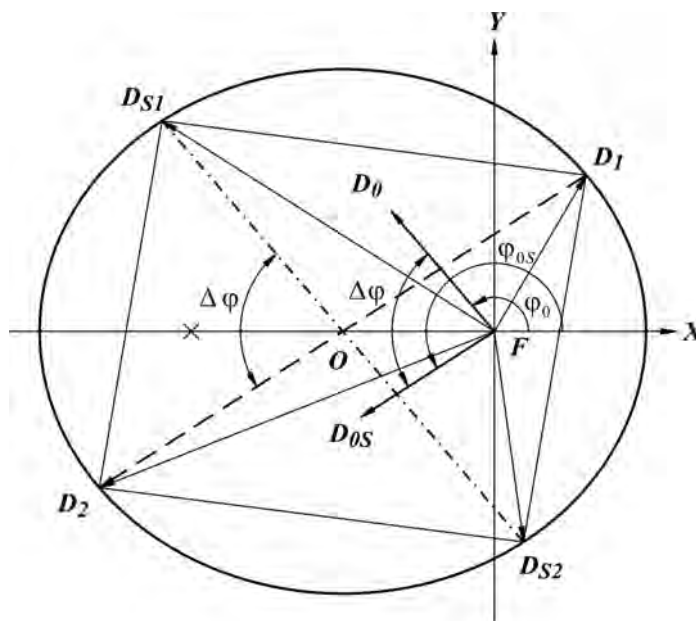


Рис. 1

*Доказательство.* Касательные сопряженного диаметра по определению  $\parallel$  основному диаметру. Этим касательным (3.2.6.)  $\parallel$  биссектриса сопряженного диаметра. (Напомним, что свойство параллельности транзитивно.)

**Теорема 2.** Биссектриса фокального угла, в котором основанием является основной диаметр,  $\parallel$  сопряженному диаметру.

Основной диаметр сопряжен сопряженному диаметру (6.6. теорема 1). Из этой теоремы и следует данное утверждение.

### 6.8. 5-я модель построения основного диаметра - диаметр, проходящий через точку основания медианы полярного треугольника

Соединив две различные точки на основном диаметре или его продолжении, получим **отрезок прямой, сопряженный сопряженному диаметру**. Например, с этой целью можно соединить: две концевые точки диаметра; полюс и центр симметрии; точку основания медианы полярного треугольника и центр симметрии и т.д. При этом полученный отрезок будет  $\parallel$  касательным сопряженного диаметра.

(Точку центра симметрии удобно брать второй из точек, т.к. она для всех диаметров одна и та же.)

Ищем **уравнение диаметра** сначала в **общем виде**  $Ax + By + C = 0$ , где  $A = y_2 - y_1$ ,  $B = x_1 - x_2$ ,  $C = x_2 y_1 - x_1 y_2$ . (1)

Нормализуем уравнение диаметра в смысле Гессе

$$\frac{Ax + By + C}{s\sqrt{A^2 + B^2}} = 0, \text{ где } s = \pm 1 \text{ и имеет знак, противоположный знаку } C. \quad (2)$$

Конечные точки диаметра можно найти, например, решив численно задачу пересечения коники и прямой  $\frac{Ax + By + C}{s\sqrt{A^2 + B^2}} = 0$  (см.3.3.1.).

$$\text{Тангенс угла наклона диаметра } k_D = -\frac{A}{B}. \quad (3)$$

Найдем направляющие нормального вектора диаметра

$$\cos \phi = \frac{-A}{s\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \sin \phi = \frac{B}{s\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$\text{где } \begin{cases} s = +1, & C \leq 0 \\ s = -1, & C > 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Отсюда получим угол наклона диаметра к оси абсцисс

$$\psi = \phi + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-sA, sB\}) + \frac{\pi}{2} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-sB, -sA\}). \quad (7)$$

Т.к. касательные сопряженного диаметра  $\parallel$  основному диаметру, то построенный основной диаметр может служить сопряженной прямой для сопряженного диаметра (см.3.2.6.).

Приведем полезную для приложений теорему.

**Теорема 1. Свойство медианы полярного треугольника. Медиана полярного треугольника пересекает дугу коники в точке, наиболее удаленной от хорды.**

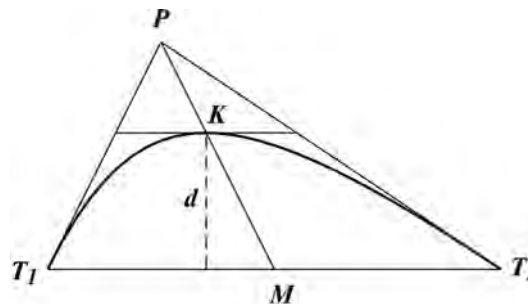


Рис. 1

**Доказательство.** Рассмотрим полярный треугольник  $T_1T_2P$ . Из свойства модели диаметра 5, медиана  $PM$  является частью диаметра. В точке пересечения диаметра и кривой, касательная  $K \parallel$  сопряженной хорде  $T_1T_2$ . Следовательно, в

силу малой теоремы Ферма [24,стр.223] следует, что  $K$  является точкой дуги, наиболее удаленной от хорды (точкой максимума).  $\square$

Найдем отклонение  $d_{MAX}$ , которое называется **высотой сегмента**. Для этого подставим в нормальное уравнение хорды (5.6.1.-3)

$$\frac{(\cos \varphi_{0h} + e \cos \delta_h)x + (\sin \varphi_{0h})y - p \cos \delta_h}{s\sqrt{(\cos \varphi_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + \sin^2 \varphi_{0h}}} = 0$$

координаты конечных точек диаметра (модель 3) (6.3.1.-7)  $D_{1,2}\{x, y\} =$

$$= \frac{p}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h} \pm e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}} \cdot \{-e \sin^2 \theta_{0h} \pm (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}, \sin \theta_{0h}(e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \pm \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}})\}.$$

В связи с тем, что при подстановке получаются достаточно громоздкие выражения, введем следующие обозначения

$$K = \frac{p}{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h} \pm e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}},$$

$$X = -e \sin^2 \theta_{0h} \pm (\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)\sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}};$$

$$Y = \sin \theta_{0h}(e(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h) \pm \sqrt{(\cos \theta_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + (1 - e^2) \sin^2 \theta_{0h}}).$$

$$\text{Тогда } d_{MAX} = \left| \frac{(\cos \varphi_{0h} + e \cos \delta_h)KX + (\sin \varphi_{0h})KY - p \cos \delta_h}{\sqrt{(\cos \varphi_{0h} + e \cos \delta_h)^2 + \sin^2 \varphi_{0h}}} \right|. \quad (8)$$

(В переменных  $C, S$  имеем

$$K = \frac{p}{C^2 + (1 - e^2)S^2 \pm eC\sqrt{C^2 + (1 - e^2)S^2}}, X = -eS^2 \pm C\sqrt{C^2 + (1 - e^2)S^2},$$

$$Y = S(-eC \pm \sqrt{C^2 + (1 - e^2)S^2}), d_{MAX} = \left| \frac{K \cdot C \cdot X - K \cdot S \cdot Y - p \cos \delta_h}{\sqrt{C^2 + S^2}} \right|. \quad (8a)$$

Видно, что (8)/(8a) дают 2 решения, поскольку в данных формулах подставлены координаты от 2-х конечных точек диаметра. Получив 2 ответа, можно их сравнить и выбрать (в соответствии с конкретной постановкой задачи), например, наименьшее из 2-х  $d_{MAX}$ .

Приведем формулировки двух **оптимизационных задач**, основанных на использовании данной теоремы. Эти задачи назовем **прямой и обратной**.

1) **Прямая задача:** даны коника и полярный треугольник, найти  $d_{MAX}$ .

Эта задача решена выше.

2) **Обратная задача:** даны полярный треугольник и  $d_{MAX}$ , построить конику.

Приводим алгоритм.

2.1) Построим прямую,  $\parallel$  основанию этого треугольника, пересекающей его боковые стороны и отстоящей от этого основания на заданном  $d_{MAX}$ .

2.2) Находим точку пересечения построенной прямой и медианы полярного треугольника.

2.3) К данной точке пересечения добавляем еще 4 точки - по одному разу вершины основания полярного треугольника и дважды вершину полярного треугольника, не принадлежащую основанию (см. 2.1.1.). По 5 точкам строим конику.  $\square$

Упражнение 1. Пусть в параболе хорда соединяет следующие точки, заданные полярными углами  $\varphi_1 = 0; \varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Найти высоту сегмента, опирающегося на эту хорду.

**Теорема 2.** Пусть середины двух хорд, не проходящих через центр симметрии, соединены отрезком прямой, проходящем через центр симметрии (либо продолжение этого отрезка проходит через центр симметрии). Тогда эти хорды  $\parallel$  друг другу.

Доказательство предоставляем читателю.

Упражнение 2. Доказать теорему Аполлония: **если диаметр делит пополам хорду, то касательные в концевых точках диаметра  $\parallel$  этой хорде  $II_5, II_6$  [21, стр.57].**

## 6.9. Вписанный/описанный параллелограммы. Теоремы сохранения Аполлония

### 6.9.1. Вспомогательные утверждения

Напомним читателю некоторые утверждения элементарной геометрии. (Буквой  $S$  здесь обозначим площадь фигур.)

Пусть  $ABCD$  - параллелограмм. Тогда

1) **В точке пересечения диагоналей  $O$  диагонали делятся пополам:**  $|OC| = |OA|$ ,  
 $|OB| = |OD|$ ;

2)  $S_{\Delta OBC} = S_{\Delta OAB} = |OC| \cdot |OB| \sin \alpha$ , т.к.

$\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ ;

3)  $S_{ABCD} = 4S_{\Delta OBC} \sin \alpha = |AC| |BD| \sin \alpha$  - **площадь параллелограмма равна произведению диагоналей на синус угла между ними, причем угол между диагоналями можно брать и смежный;**

4)  $|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$  - **сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон параллелограмма.**

Упражнение 1. Докажите 4).

Рекомендация. Используйте теорему косинусов, 1) и  $\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ .

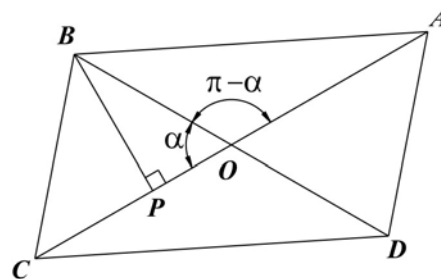


Рис. 1

### 6.9.2. Сумма квадратов основного и сопряженного диаметров

**Теорема.** Сумма квадратов основного и сопряженного диаметров есть величина постоянная и равна сумме квадратов осей (Аполлоний VII<sub>12</sub> [21, стр.71], [18, §251].)

Нужно доказать (см. рис.1), что  $|D_1 D_2|^2 + |D_{S_1} D_{S_2}|^2 = const = 4(a^2 + b^2)$ . (оси  $a, b$  - на рис. 1 не показаны).

Напишем формулы в общем виде для всех моделей диаметра (т.е. в переменных  $C, S$ ). Из (6.1.-2а), (6.6.1.-22), (3.5.1.-11) имеем

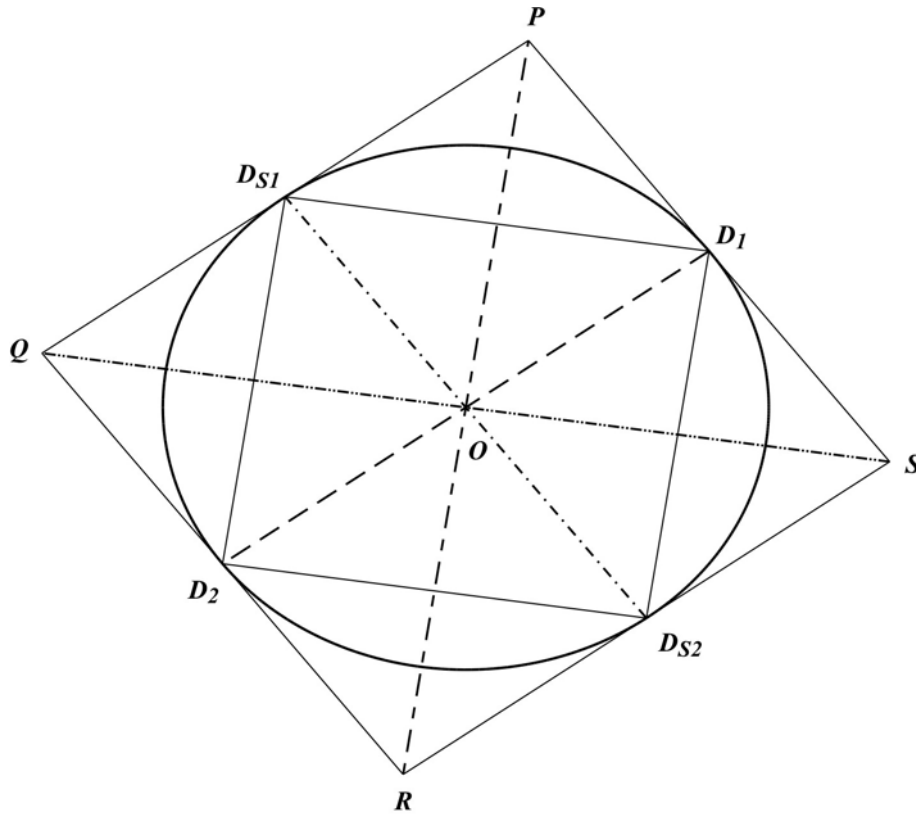


Рис. 1

$$\begin{aligned}
 L_D^2 + L_{D_s}^2 &= \frac{4p^2(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)}{(1-e^2)^2(C^2 + (1-e^2)S^2)} + \frac{4p^2(C^2 + S^2)}{(1-e^2)(C^2 + (1-e^2)S^2)} \\
 &= \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} \left( \frac{C^2 + (1-e^2)^2 S^2}{C^2 + (1-e^2)S^2} + \frac{(1-e^2)C^2 + (1-e^2)S^2}{C^2 + (1-e^2)S^2} \right) = \\
 &= \frac{4p^2}{(1-e^2)^2} \left( \frac{(2-e^2)C^2 + (2-3e^2+e^4)S^2}{C^2 + (1-e^2)S^2} \right) = \frac{4p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2} \left( \frac{C^2 + (1-e^2)S^2}{C^2 + (1-e^2)S^2} \right) = \frac{4p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2}. \quad (1)
 \end{aligned}$$

**Сумма квадратов полуосей дает, естественно, результат в 4 раза меньше (см. 3.5.1.-11), чем сумма квадратов осей.**

Упражнение 1. Доказать, что **сумма квадратов сторон вписанного параллелограмма в эллипс, построенного на двух сопряженных диаметрах,**

**равна** 
$$\frac{4p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2}.$$

(2)

Упражнение 2. Доказать, что **сумма квадратов диагоналей описанного параллелограмма в эллипс, построенного на двух сопряженных диаметрах,**

**равна** 
$$\frac{8p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2} = 8(a^2 + b^2).$$
 (3)

Упражнение 3. Найти **отношение квадратов длин основного и сопряженного диаметра**. Проверить выведенную формулу для отношения квадратов большой и малой оси эллипса.

$$\text{Ответ. } \frac{L_D^2}{L_{D_s}^2} = \frac{(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)}{(1-e^2)(C^2 + S^2)}. \quad (4)$$

Для большой оси эллипса  $S = 0, C = 1$ . Отсюда  $\frac{a^2}{b^2} = \frac{1}{1-e^2}$ .

### 6.9.3. Площадь вписанного на диаметрах параллелограмма

*Теорема.* **Площадь вписанного параллелограмма, построенного на двух сопряженных диаметрах, есть величина постоянная и равна площади прямоугольника, построенного на осях** (см. рис.1) (Аполлоний VII<sub>31</sub> [21, стр. 72], [18,§251]).

из (3.5.1.-2), (3.5.1.-8) найдем площадь прямоугольника, построенного на

$$\text{осях } 2a \cdot 2b = \frac{2p}{(1-e^2)} \cdot \frac{2p}{\sqrt{(1-e^2)}} = \frac{4p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Будем вычислять площадь вписанного параллелограмма

$$S_{ABCD} = L_D L_S \sin(\varphi_0 - \varphi_{0S}). \quad (2)$$

Для этого сначала вычислим произведение длины основного диаметра на сопряженный. Из (6.2.-2а), (6.6.1.-22)

$$\begin{aligned} L_D \cdot L_{D_s} &= \sqrt{\frac{4p^2(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)}{(1-e^2)^2(C^2 + (1-e^2)S^2)^2}} \cdot \sqrt{\frac{4p^2(C^2 + S^2)}{(1-e^2)(C^2 + (1-e^2)S^2)}} = \\ &= \frac{4p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)(C^2 + S^2)}{(C^2 + (1-e^2)S^2)^2}}. \end{aligned} \quad (3)$$



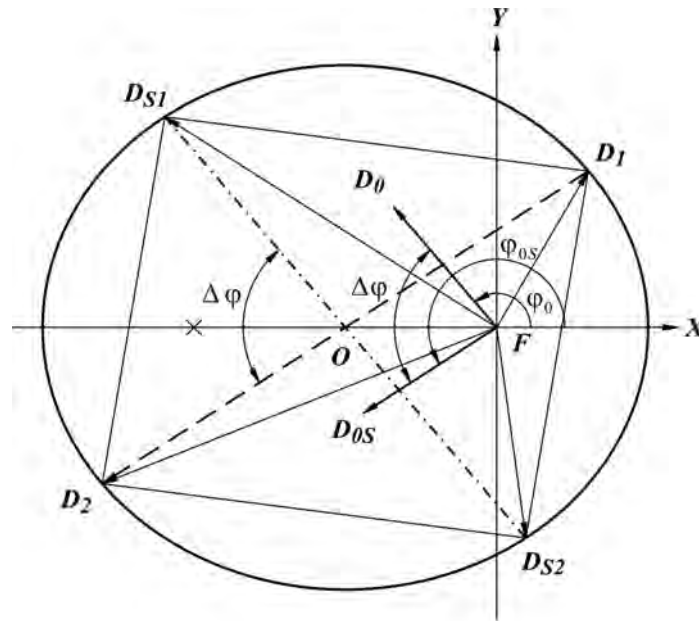


Рис. 1

Синус угла между основным и сопряженным диаметром можно найти двумя способами.

### 1<sup>о</sup> способ

В силу || биссектрис фокальных углов соответствующим диаметрам, **разность между направлением биссектрис равна углу между диаметрами.** Найдем, применяя (3.2.6.-2), эту разность углов

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \varphi_0 - \varphi_{0S} = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \frac{C}{S}\}) - \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \frac{C_S}{S_S}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \frac{C}{S}\}) - \\ &- \text{ang}(\mathbf{0}, \{-1, \frac{-(1-e^2)S}{C}\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{1 - (1-e^2), -\frac{C}{S} - \frac{(1-e^2)S}{C}\}) = \\ &= \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2, \frac{-C^2 - (1-e^2)S^2}{CS}\}). \end{aligned} \quad (4)$$

Т.к. нужно абсолютное значение разности углов, то

$$|\Delta\varphi| = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2, \left| \frac{-C^2 - (1-e^2)S^2}{CS} \right|\}) = \text{ang}(\mathbf{0}, \{e^2|CS|, |C^2 + (1-e^2)S^2|\}). \quad (5)$$

$$\sin(|\Delta\varphi|) = \frac{|C^2 + (1-e^2)S^2|}{\sqrt{e^4 C^2 S^2 + (C^2 + (1-e^2)S^2)^2}}. \quad (6)$$

### 2<sup>о</sup> способ

Мы уже находили минимальный угол между основным и сопряженным диаметрами в (6.6.1.-19).

$\sin(|\Delta\varphi|)$  находится, как и в способе 1-м.  $\square$

Преобразуем подкоренное выражение знаменателя (6):

$$e^4 C^2 S^2 + (C^2 + (1 - e^2) S^2)^2 = (C^2 + (1 - e^2) S^2)(C^2 + S^2). \quad \text{Сокращаем общие}$$

сомножители в (3), (6) и получим инвариант

$$S_{ABCD} = L_D L_{D_S} \sin|\Delta\varphi| = \frac{4p^2}{(1-e)^2}. \quad (7)$$

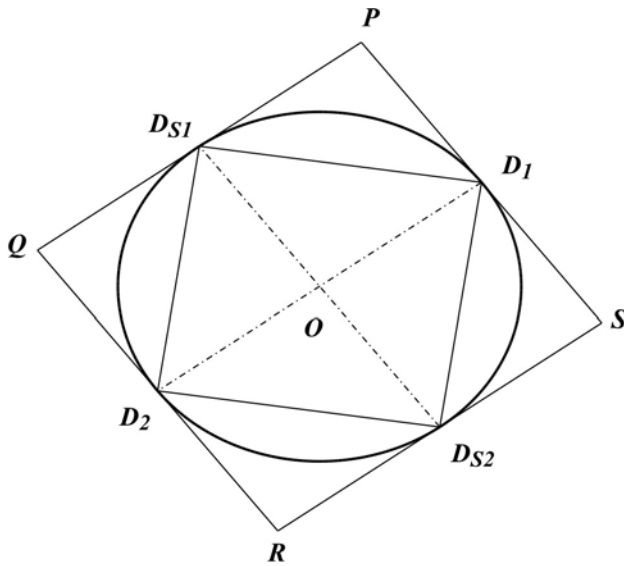


Рис. 2

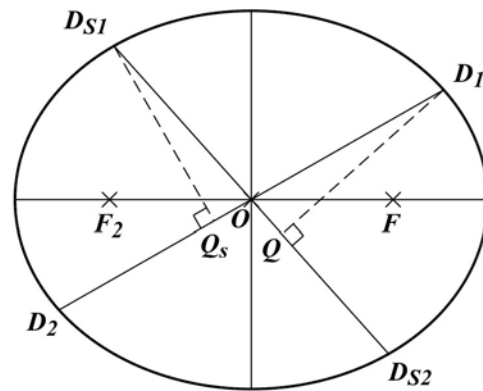


Рис. 3

Упражнение 1. Доказать, что площадь описанного вокруг эллипса

параллелограмма (см.рис.2)  $S_{PQRS} = \frac{8p^2}{(1-e)^2}$ . (8)

Упражнение 2. Пусть  $D_1D_2$  - основной диаметр, а  $D_{S1}D_{S2}$  - сопряженный (см.рис.3). Доказать, что площадь описанного вокруг эллипса параллелограмма равна  $2a \cdot 2b = 2D_{S1}D_{S2} \cdot D_1Q = 2D_1D_2 \cdot D_{S1}Q_S$ . (9)

[ср.19, стр.327, (11)].

Упражнение 3. Найти длины сторон вписанного параллелограмма, построенного на двух сопряженных диаметрах эллипса.

Решение. Воспользуемся теоремой косинусов, (5) и (6.9.2.-1). Обозначим квадрат одной стороны параллелограмма -  $L_1^2$ , а другой -  $L_2^2$ . Напомним, что  $\varphi_1 = \pi - \varphi_2$  (как смежные углы). С другой стороны, нас и в этом случае интересует абсолютное значение угла (в данном случае неважно, какая сторона угла считается первой, а какая второй). Т.к.  $\cos(\pi \pm \varphi) = -\cos \varphi$ , то

$\cos \varphi_{1,2} = \pm \frac{e^2 CS}{\sqrt{(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)(C^2 + S^2)}}$ . Кроме того, в применяемых формулах

необходимо брать половинки диаметров, а не целые. Тогда

$$\begin{aligned} L_{1,2}^2 &= \frac{L_D^2 + L_{D_s}^2}{4} - \frac{2L_D \cdot L_{D_s} \cos \Delta \varphi_{1,2}}{4} = \frac{p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2} \mp \\ &\mp \frac{2p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)(C^2 + S^2)}{(C^2 + (1-e^2)S^2)^2}} \frac{e^2 CS}{\sqrt{(C^2 + (1-e^2)^2 S^2)(C^2 + S^2)}} = \frac{p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2} \mp \\ &\mp \frac{2p^2}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{e^2 CS}{C^2 + (1-e^2)S^2}. \end{aligned} \quad (10)$$

Проверим (10) для осей эллипса. В силу (6.6.1.-20)  $e^2 CS = 0$ , т.к. оси взаимно  $\perp$ . Отсюда  $L_1 = L_2$ . Следовательно, квадрат расстояния между верхней точкой малой оси и точкой перигея (постройте чертеж!) по теореме Пифагора

$$L^2 = \left( \frac{-pe}{1-e^2} - \frac{p}{1+e} \right)^2 + \left( \frac{p\sqrt{1-e^2}}{1-e^2} \right)^2 = \frac{p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2}. \square$$

Используя (10), можно еще раз доказать теорему Аполлония о сумме квадратов сторон вписанного параллелограмма (см. 6.9.2.-1). Т.к. 2-е слагаемое из (10) входит в сумму с разными знаками, то в итоге оно сокращается. Поэтому

$$\sum_{i=1}^4 L_i^2 = \frac{4p^2(2-e^2)}{(1-e^2)^2}.$$

#### 6.9.4. Произведение частей диаметра. Теорема Аполлония

**Теорема.** Пусть основной диаметр делится сопряженной хордой в некоторой точке  $M$  на две части. Тогда отношение произведения длин этих отрезков диаметра к квадрату половины длины сопряженной хорды равно отношению квадратов длин основного и сопряженного диаметров

$$\frac{L_{D_1M} L_{D_2M}}{\left( \frac{L_h}{2} \right)^2} = \frac{L_D^2}{L_{D_s}^2}. \quad (1)$$

**Доказательство.** Данная теорема является следствием теоремы Л.Эйлера о произведении частей секущих.

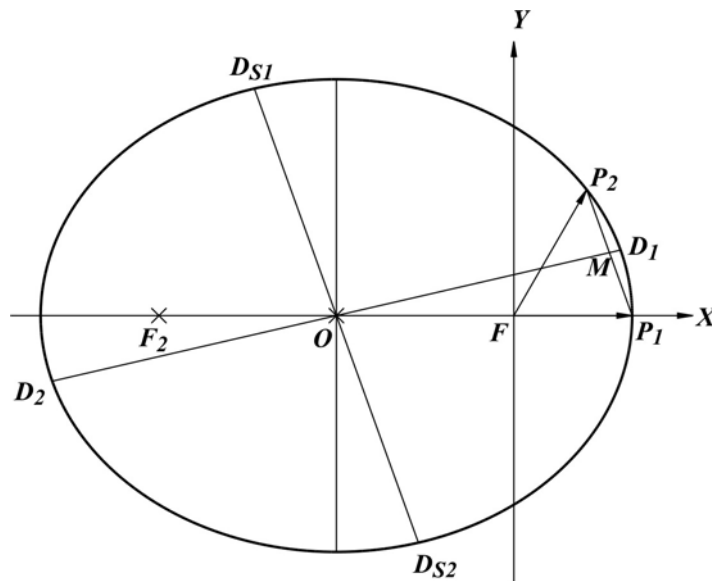


Рис. 1

Первая пара секущих (см.рис.1) – основной диаметр и сопряженная к нему хорда, пересекающиеся в произвольной точке на основном диаметре. Вторая пара секущих – тот же основной диаметр и сопряженный диаметр, пересекающиеся в центре симметрии коники. Основной диаметр  $\parallel$  сам себе (свойство рефлексивности  $\parallel$ ), сопряженная хорда  $\parallel$  сопряженному диаметру (свойство транзитивности  $\parallel$ ). Условие теоремы Л.Эйлера выполнено.  $\square$

$$\text{Из (1) следует } \frac{L_{D_1M} L_{D_2M}}{L_D^2} = \frac{L_h^2}{4L_{D_s}^2}, \quad \left( \frac{L_{D_1M}}{L_D} \right) \left( \frac{L_{D_2M}}{L_D} \right) = \frac{L_h^2}{4L_{D_s}^2}. \quad (1a)$$

В связи с тем, что нет принципиальных отличий между основным и сопряженным диаметрами, то соответствующее соотношение можно написать и для сопряженного диаметра (напишите!).

Обобщение данных соотношений см. в (6.10).

Упражнение 1. Пользуясь выводами данной теоремы, доказать, что **величина половины фокальной хорды,  $\perp$  большой оси эллипса, равна  $p$ .**

Решение. Пусть  $\alpha, \beta$ - величины большой оси эллипса, получаемые при делении ее фокальной хордой, а  $f$  - фокусное расстояние эллипса. Обозначим длину большой оси эллипса -  $2a$ , длину малой оси -  $2b$ . Тогда в точке деления (фокус)

$$\frac{L_h}{2} = L_{D_s} \sqrt{\alpha\beta} = 2b \sqrt{\frac{(2a-f)f}{2a \cdot 2a}} = \frac{2p}{\sqrt{1-e^2}} \sqrt{\frac{\left(\frac{2p}{1-e^2} - \frac{p}{1+e}\right) \frac{p}{1+e}}{\frac{2p}{1-e^2} \frac{2p}{1-e^2}}} = \frac{2p}{\sqrt{1-e^2}} \frac{\sqrt{1-e^2}}{2} = p.$$

### 6.9.5. Элементы описанного параллелограмма эллипса

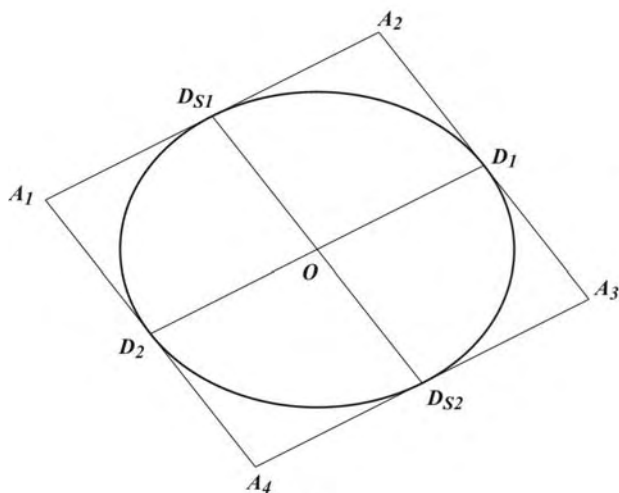


Рис. 1

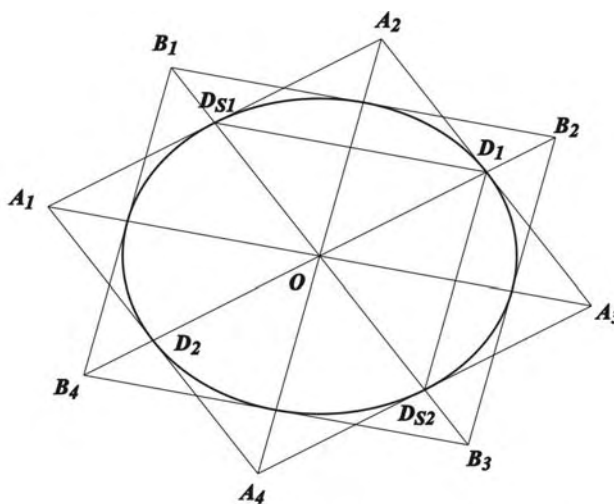


Рис. 2

**Теорема** [6, стр.142, N708]. Построим около эллипса на основном и сопряженном диаметрах описанный параллелограмм (см. рис.1). Проведем в данном параллелограмме две диагонали. Части этих диагоналей внутри эллипса образуют новую пару сопряженных диаметров (любой из них можно считать основным и, соответственно, другой - сопряженным) (см.рис.2). Если построим на новых диаметрах параллелограмм, то его диагонали пройдут через первую пару диаметров. Таким образом, имеем группу из 2-х пар диаметров.

Объясним подробнее рисунки и докажем теорему. На (рис.1) видно параллелограмм  $A_1A_2A_3A_4$ , основной диаметр  $D_1D_2$  и сопряженный диаметр  $D_{S1}D_{S2}$ . Проведем диагонали  $A_1A_3$ ,  $A_2A_4$  и перейдем к (рис.2). Видно, что  $C_1C_3$ ,  $C_2C_4$  являются диаметрами, как секущие, проходящие через центр (диагонали параллелограмма пересекаются в его центре). Эти диаметры взаимно сопряжены, т.к.  $D_1D_{S1} \parallel A_1A_3$ , как средняя линия  $\Delta A_1A_2A_3 \parallel$  основанию этого треугольника. Аналогично можно доказать, что пара диаметров  $C_1C_3$ ,  $C_2C_4$  порождают диаметры  $D_1D_2$  и  $D_{S1}D_{S2}$ . Таким образом, создано множество, состоящее из 2-х пар сопряженных диаметров. Или, другими словами, конечная

группа из 2-х элементов, где 1 элемент состоит из пары основного и сопряженного диаметров.

Очевидна, также, следующая теорема.

**Теорема.** Если из внешней точки построены две касательные и одна из них опирается на конечную точку основного диаметра, а другая опирается на конечную точку сопряженного диаметра, то длины этих частей касательных равны, соответственно, половинам основного и сопряженного диаметров.

Упражнение 1. Доказать, что периметр описанного вокруг эллипса параллелограмма равен удвоенной сумме соответствующих основного и сопряженного диаметров. Найдите формулу этой суммы.

### 6.10. Задачи на диаметр

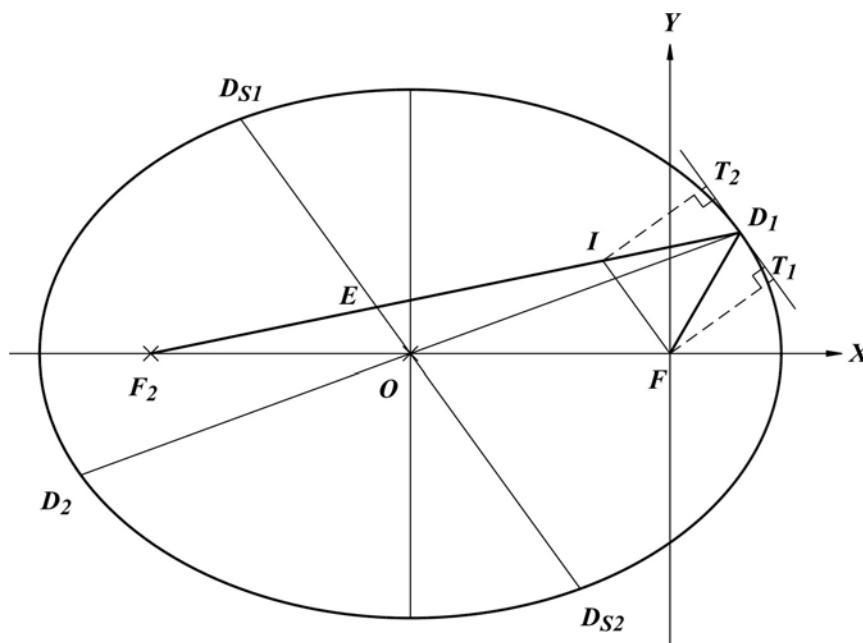


Рис. 1

Упражнение 1. Проведем радиус-вектор между одной из конечных точек основного диаметра и левым фокусом эллипса (см.рис.1). Доказать, что расстояние между данной конечной точкой диаметра и точкой пересечения радиус-вектора (или его продолжения) с сопряженным диаметром равно большой полуоси эллипса (И.Ньютон (I. Newton)) [19,стр. 325-326]. (1)

Решение. Проведем отрезок  $FI \parallel D_{s1}D_{s2}$ . В силу свойства транзитивности  $\parallel$ ,  $FI \parallel T_1T_2$ . Отсюда  $\Delta D_1FT_1 = \Delta D_1IT_2$ , т.к.  $FT_1 = IT_2$  и  $\angle FD_1T_1 = \angle ID_1T_2$  - свойство касательной эллипса. Отсюда  $ID_1 = FD_1$ . В  $\Delta IF_2F$  отрезок  $EO$  - средняя линия, т.к.

$F_2O = OF$ . Следовательно  $F_2E = EI$ . Т.к.  $FD_1 + D_1F_2 = 2a$ , то половина этого расстояния равно  $ED_1 = a$  (т.к.  $F_2E + FD_1 = EI + ID_1$ ).

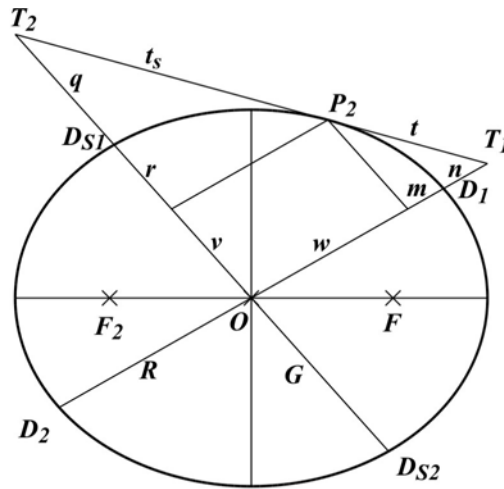


Рис. 2

Упражнение 2. Дано: эллипс, основной диаметр  $D_1D_2$  длиной  $2R$  и сопряженный диаметр  $D_{S1}D_{S2}$  длиной  $2G$  (см.рис.2). Доказать, что:

$$\text{a) } \frac{1}{G} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q} \quad (\text{ср. 1.5.8.-7}); \quad (2)$$

$$\text{b) } \frac{1}{R} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \quad (\text{ср. 1.5.8.-7}); \quad (3)$$

$$\text{c) } \frac{v}{G} = \frac{G}{q+G} \quad \text{или} \quad G^2 = v(q+G); \quad (4)$$

(ср. 1.5.8.-7), [21, стр. 120], [19, стр.330,(1)]

$$\text{d) } \frac{w}{R} = \frac{R}{(n+R)} \quad \text{или} \quad R^2 = w(n+R); \quad (5)$$

(ср. 1.5.8.-7), [21, стр. 120], [19, стр.330,(2)].

е) всегда  $n \geq m$  и  $q \geq r$  (равенство выполнимо при  $n = m = 0$ ,  $q = r = 0$ );

$$\text{f) } \frac{(2R+n)n}{(R+n)^2} = \frac{G^2}{(G+q)^2}; \quad (6)$$

$$\text{g) } \frac{(2G+q)q}{(G+q)^2} = \frac{R^2}{(R+n)^2}; \quad (7)$$

$$\text{h) } (2R+n)n(2G+q)q = G^2R^2. \quad (8)$$

Решения.

Докажем (2). Из (5.16.-1а) следует  $\frac{q(2G-r)}{(2G+q)r} = 1$ . Отсюда  $\frac{q}{r} = \frac{2G+q}{2G-r}$ ;

$$2G\frac{q}{r} - q = 2G + q; \quad 2G\left(\frac{q}{r} - 1\right) = 2q; \quad G = \frac{qr}{q-r}; \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}. \square$$

Равенство (2) можно получить сразу из (5.17.-6).  $\square$

Докажем (4). Предположим, что (4) верно. Тогда  $G^2 = (G-r)(G+q)$ ,

$$G^2 = G^2 + Gq - Gr - qr, \quad qr = G(q-r), \quad \frac{1}{G} = \frac{1}{r} - \frac{1}{q}. \text{ Получено (2). } \square$$

Докажем (6), (7) и (8). Рассмотрим (6.9.4.-1)  $\frac{L_{D_1M}L_{D_2M}}{\left(\frac{L_h}{2}\right)^2} = \frac{L_D^2}{L_{D_s}^2}$ . В этом случае

$$L_D = 2R, \quad L_{D_s} = 2G, \quad \frac{L_h}{2} = v = G - r, \quad L_{D_1M} = 2R - m, \quad L_{D_2M} = m. \text{ Из (2) } r = \frac{Gq}{G+q}, \text{ из (3)}$$

$$m = \frac{Rn}{R+n}. \text{ Тогда } \left(2R - \frac{Rn}{R+n}\right) \frac{Rn}{R+n} = \frac{4R^2 \left(G - \frac{Gq}{G+q}\right)^2}{4G^2}, \quad \frac{n(2R+n)}{(R+n)^2} = \frac{G^2}{(G+q)^2}. \text{ Т.к.}$$

основной и сопряженный диаметр равноправны, то справедливо  $\frac{q(2G+q)}{(G+q)^2} = \frac{R^2}{(R+n)^2}$ . Перемножим соответственно левые и правые части

равенств (6) и (7), сократим на общие множители и получим (8)

$$(2R+n)n(2G+q)q = R^2G^2. \square$$

Упражнение 2. Доказать, что **асимптоты гиперболы являются самосопряженными диаметрами** [18, стр.442].

Упражнение 3. Постройте соответствующие чертежи и сформулируйте теоремы для гиперболы, соответствующие теоремам (6.9.2) – (6.9.4) для эллипса.

Упражнение 4. Доказать, что:

1) **коника, описанная около параллелограмма, всегда центральная и ее центр всегда совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма;**

2) **коника, вписанная в параллелограмм, всегда центральная и ее центр всегда совпадает с точкой пересечения диагоналей параллелограмма** [6, стр.141, N706].



## 7. Нормаль

### 7.1. Уравнение нормали

Начнем строить уравнение нормали в виде  $y - y_1 = k_{norm}(x - x_1)$ , где (3.1.-2)

$P_1 : \{x_1, y_1\} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ . Заметим, что конец радиус-вектора является

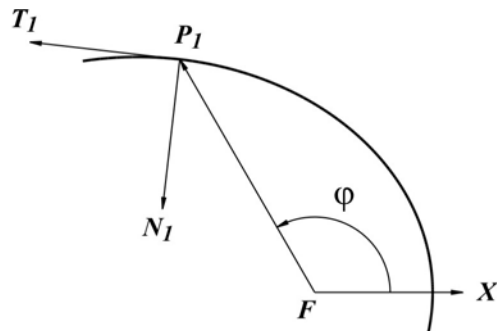


Рис. 1

одновременно точкой касания для касательной  $T_1$  (см. рис. 1) и точкой, через которую проходит нормаль. Из (3.1.-3) **тангенс угла наклона нормали**

$$k_{norm} = k_{norm}(\varphi) = -\frac{1}{k_{\tan g}(\varphi)} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + e}, \text{ т.к. по}$$

определению **нормаль в точке касания**  $\perp$  **касательной**. Следовательно,

$$y - \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + e} \left( x - \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right). \quad (*)$$

Теперь преобразуем его к приведенному виду  $y = kx + b$ . Т.к. при  $x = 0$   $y = b$ ,

то

$$b = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{p \sin \varphi \cos \varphi}{(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)} = \frac{p \sin \varphi (\cos \varphi + e - \cos \varphi)}{(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)} = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)}.$$

Таким образом,  $y = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi + e} x + \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)}$ . Приводя к общему

знаменателю, получим **уравнение нормали в общем виде** в системе координат Кеплера

$$\sin \varphi (1 + e \cos \varphi) x - (1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e) y + pe \sin \varphi = 0. \quad (1)$$

Находим **коэффициент нормирования**

$$s\sqrt{A^2 + B^2} = -(1 + e \cos \varphi) \sqrt{\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi + 2e \cos \varphi + e^2} = -(1 + e \cos \varphi) \sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2} \quad \text{и}$$

нормируем (1)

$$\frac{(-\sin \varphi) x + (\cos \varphi + e) y}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} - \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi) \sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} = 0. \quad (2)$$

Теперь можем вывести **единичный вектор направления нормали**

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}} \{-B, A\} = \frac{1}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} \{-(\cos \varphi + e), -\sin \varphi\}. \quad (3)$$

(Ср. с единичным вектором касательной (3.1.-4))

Подставляя в (2) координаты фокуса  $F : \{0,0\}$ , получим **расстояние от**

**фокуса до нормали** 
$$\frac{-pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi) \sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}. \quad (4)$$

У параболы ( $e = 1$ ) при  $\varphi = \pi$  (асимптотическое направление) знаменатель (4) равен 0. Таким образом, при данных параметрах расстояние от фокуса до нормали равно  $\infty$ .

Упражнение 1. Исследуйте (4) для гиперболы.  $\square$

Найдем **точки пересечения нормали и осей координат.**

**Ось абсцисс**  $y = 0$

$$\sin \varphi (1 + e \cos \varphi)x + pe \sin \varphi = 0, \quad \sin \varphi ((1 + e \cos \varphi)x + pe) = 0.$$

1)  $\sin \varphi = 0, \varphi = 0, \pi$ . Нормаль совпадает с осью абсцисс. (5a)

2)  $x = \frac{-pe}{1 + e \cos \varphi} = -re$ . (5b)

**Ось ординат**  $x = 0$

$$-(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)y + pe \sin \varphi = 0, \quad y = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)}. \quad \square \quad (6)$$

Найдем **точки пересечения нормали и директрис.**

**Директриса**  $x = \frac{p}{e}$

$$\sin \varphi (1 + e \cos \varphi) \frac{p}{e} - (1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)y + pe \sin \varphi = 0,$$

$$\mathcal{Q}_1 : \left\{ \frac{p}{e}, \frac{p \sin \varphi (1 + e \cos \varphi + e^2)}{e(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)} \right\}. \quad \square \quad (7)$$

**Директриса**  $x = -\frac{p(1 + e^2)}{e(1 - e^2)}$

$$\sin \varphi (1 + e \cos \varphi) \left( -\frac{p(1 + e^2)}{e(1 - e^2)} \right) - (1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)y + pe \sin \varphi = 0,$$

$$\mathcal{Q}_2 : \left\{ -\frac{p(1 + e^2)}{e(1 - e^2)}, \frac{p \sin \varphi (e^2(1 - e^2) - (1 + e \cos \varphi)(1 + e^2))}{e(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)} \right\}. \quad \square \quad (8)$$

Найдем расстояния  $d_{1,2}$  от точки пересечения нормали с осью абсцисс (5б) до фокусов

1) расстояние до фокуса (центр системы координат)

$$d_1 = \left| \frac{pe}{1 + e \cos \varphi} \right|; \quad (9)$$

2) расстояние до другого фокуса (эллипс и гипербола)

$$d_2 = \left| \frac{-2pe}{1 - e^2} - \left( \frac{-pe}{1 + e \cos \varphi} \right) \right| = \left| \frac{pe(1 + 2e \cos \varphi + e^2)}{(1 - e^2)(1 + e \cos \varphi)} \right|. \quad (10)$$

**Теорема 1. (Оптическое свойство коник).** Нормаль из некоторой точки коники является биссектрисой угла между радиус-векторами, проведенными из фокусов к данной точке.

*Доказательство.* Используем свойство биссектрисы делить сторону треугольника пропорционально прилежащим сторонам

$$\frac{d_1}{d_2} = \left| \frac{(1 - e^2)}{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)} \right| = \left| \frac{r_1}{r_2} \right|. \quad (11)$$

См.далее сл. упражнение.

Упражнение 2. Подробно разберите варианты теоремы 1, когда нормаль является биссектрисой

1) внутреннего угла, 2) внешнего угла.

Какие из этих вариантов имеют отношение к эллипсам, гиперболам? Постройте соответствующие чертежи.

*Указание.* Для параболы рассмотрите данный вопрос, используя формулы для эллипса или гиперболы и предельный переход  $e \rightarrow 1$ .

Упражнение 3. Убедитесь аналитически, что касательная и нормаль у каждой точки коники взаимно  $\perp$ .

Упражнение 4. При каких значениях полярного угла  $\varphi$  нормаль

1)  $\parallel$  оси абсцисс, 2)  $\parallel$  оси ординат.

## 7.2. Свойство биссектрисы смежного угла, образованного пересекающимися нормальями

Вначале объясним (рис.1.). Проведем из фокуса  $F$  два радиус-вектора  $FT_1$  и  $FT_2$ . В точках  $T_1$  и  $T_2$  построим касательные и продолжим их до

пересечения в полюсе  $P$ , а с другой стороны, в тех же точках  $T_1$  и  $T_2$  построим нормали и продолжим их до пересечения в  $N$ . Проведем из фокуса нормали к нормалям -  $FQ_1, FQ_2$ . Рассмотрим  $\angle T_2NT_1$  (в дальнейшем  $N$ ). Проведем из угла  $N$  биссектрису  $B_N$ , а из угла  $P$  биссектрису  $B_P$ . Докажем, что:

- 1) **угол при полюсе  $P$  дополнительный до  $\pi$  углу в точке пересечения нормалей  $N$ ;**
- 2) **биссектрисы этих углов параллельны, т.е.  $B_N \parallel B_P$ .**

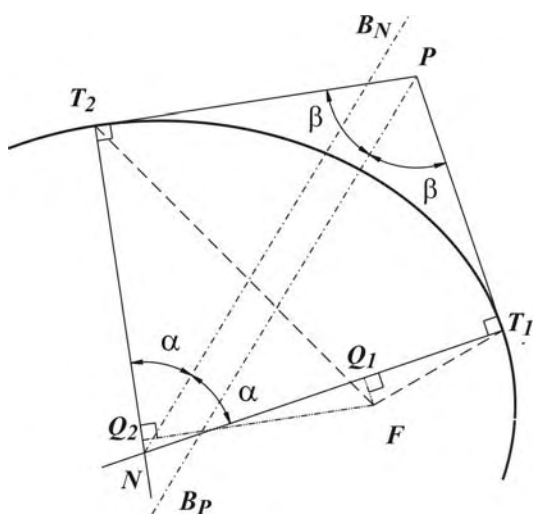


Рис. 1

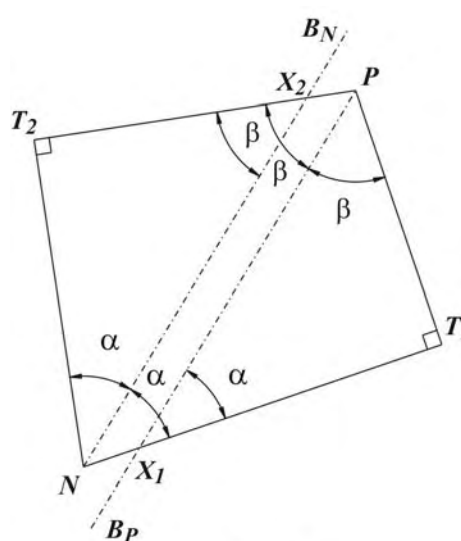


Рис. 2

## 1°. Геометрическое доказательство

### 1-й вариант

Выделим из рис.1. четырехугольник  $T_1PT_2N$  с биссектрисами  $NB_N$  и  $PB_P$  (см. рис.2). Обозначим точками  $X_1, X_2$  пересечение биссектрис со сторонами четырехугольника.

Перейдем к доказательству утверждений. Заметим сразу, что исследуемый четырехугольник всегда выпуклый, т.к. выпуклы на рассматриваемых участках порождающие его дуги коник, а нормали по краям дуг всегда направлены во внутреннюю часть дуги (для гиперболы берем участок на одной из ветвей). Теперь рассмотрим углы. Т.к. углы при точках  $T_1, T_2$  по определению прямые, а сумма всех внутренних углов выпуклого четырехугольника равна  $4\pi$ , то сумма двух других углов при вершинах  $P, N$  этого четырехугольника будет равна  $2\pi - 2\frac{\pi}{2} = \pi$ . Этим доказано утверждение 1).

Пусть угол при вершине  $P$  равен  $2\beta$ . Тогда угол при вершине  $N$  равен  $2\alpha = \pi - 2\beta$ . Отсюда  $\alpha = \frac{\pi}{2} - \beta$ .

Рассмотрим прямоугольный  $\Delta PT_1X_1$ .  $\angle X_1PT_1 = \beta$ , т.к. образован биссектрисой  $PB_P$ . Следовательно, противоположный  $\angle PX_1T_1 = \frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$ . Известно, что если внешний и внутренний односторонние углы при двух прямых и секущей равны, то эти прямые  $\parallel$ .

### 2-й вариант

Рассмотрим (рис.1).  $\angle Q_1FQ_2 = \angle T_2PT_1$ , как углы с взаимно  $\parallel$  сторонами и одинаково ориентированные. С другой стороны, т.к.  $FQ_1 \perp NT_1$  и  $FQ_2 \perp NT_2$ , то  $\angle Q_1FQ_2$  и  $\angle T_2NT_1$  противоположно ориентированы и являются углами с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, доказано 1). Если углы  $N$  и  $P$  дополнены до  $\pi$ , то их половинки дополнены до  $\frac{\pi}{2}$ . Таким образом, имеем два подобных прямоугольных треугольника -  $\Delta PT_1N, \Delta PT_2N$ , т.к. у них одинаковые острые углы. Предлагаем закончить этот вариант читателю.

### 2°. Аналитическое доказательство

Для этого варианта доказательства важно, что угол из фокуса -  $\angle Q_1FQ_2$ , образованный нормальными к нормальям, является дополнительным до  $\pi$   $\angle T_2NT_1$  ( $N$ ). Другими словами  $\angle Q_1FQ_2$  равен смежному  $\angle T_2NT_1$ .

Из (3.2.1.-7) получаем тангенс угла наклона касательной  $k = \frac{\cos \varphi + e}{-\sin \varphi}$ .

Складывая два уравнения (3.2.1.-7) для получения уравнения биссектрисы между касательными (аналогичным образом мы поступали в (1.9), (4.5.)), получим **тангенс угла наклона биссектрисы между касательными**

$$k_p = \frac{\cos \varphi_1 + e + \cos \varphi_2 + e}{-\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2} = \frac{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2e}{-(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}. \quad (1)$$

(Напомним, что нормальный вектор  $\perp$  прямой, а тангенсу угла наклона прямой соответствует котангенс нормального вектора.)

Таким же образом из (7.1. -1) найдем **тангенс угла биссектрисы между нормальными к нормальям**

$$k_N = \frac{-\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2}{\cos \varphi_1 + e + \cos \varphi_2 + e} = \frac{-(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2)}{\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + 2e}. \quad (2)$$

Из того, что биссектрисы смежных углов  $\perp$  между собой (1.9 теорема 3), и соотношений  $\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{y}{x}$ ,  $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{x}{y}$ , следует доказательство теоремы.  $\square$

Угол при полюсе в НПСК вычисляется по (5.7.1.-8). Отсюда найдем угол при  $N$

$$\begin{aligned} N &= \pi - \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{-e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta\}, |2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)|) = \\ &= \operatorname{ang}(\mathbf{0}, \{e^2 + 2e \cos \varphi_0 \cos \delta + \cos 2\delta\}, |2 \sin \delta (\cos \delta + e \cos \varphi_0)|). \end{aligned} \quad (1)$$

Упражнение 1. Найдите расстояние между этими биссектрисами. Проведите анализ, когда это расстояние а) наименьшее, б) наибольшее.

Указание. Расстояние между биссектрисами равно разности между нормальными векторами к ним.

Упражнение 2. Найдите геометрическое место точек пересечения нормалей ( $N$ ), если угол при полюсе прямой.

### 7.3. Нормаль из внешней точки

Уточним постановку задачи: нужно найти такую точку на дуге, чтобы продолжение нормали, построенное в этой точке, проходило через заданную внешнюю точку  $P: \{x_p, y_p\}$ . В дальнейшем, эта нормаль, как прямая, будет определяться 2-мя точками - внешней  $P$  и ближайшей точкой пересечения с дугой -  $N$ , которая будет задаваться полярным углом  $\varphi$ . Теперь уточним слово ближайшая. Например, для эллипса, линия нормали, проходящая через его геометрический центр, порождает в точках пересечения параллельные касательные. А это значит, обе точки пересечения могли бы удовлетворять условиям нашей задачи, т.к. нормаль,  $\perp$  одной из параллельных линий,  $\perp$  и другой. Из того, что  $P$  - внешняя, одна из точек пересечения будет ближе к  $P$ , а 2-я точка, естественно, дальше чем первая, на величину диаметра кривой по направлению нормали. Для определенности выберем ближайшую точку. Таким образом, данную задачу сведена к нахождению полярного угла  $\varphi$ .

Возьмем уравнение нормали из (7.1.-1) и перенесем члены, содержащие  $\sin \varphi$ , в левую часть равенства, а оставшийся член - в правую. Тогда

$$\sin \varphi(1 + e \cos \varphi)x_p + pe \sin \varphi = (1 + e \cos \varphi)(\cos \varphi + e)y_p,$$

$$\sin \varphi(x_p + x_p e \cos \varphi + pe) = y_p \cos \varphi + y_p e \cos^2 \varphi + y_p e + e^2 y_p \cos \varphi,$$

$$\sqrt{1 - \cos^2 \varphi}((x_p + pe) + x_p e \cos \varphi) = y_p e \cos^2 \varphi + (y_p + e^2 y_p) \cos \varphi + y_p e. \quad \text{В данном}$$

уравнении неизвестным является полярный угол  $\varphi$ . Обозначим, для краткости,  $z = \cos \varphi$ ,  $a = (x_p + pe)$ ,  $b = (y_p + e^2 y_p) = y_p(1 + e^2)$  и временно не будем писать нижние индексы у переменных  $x_p, y_p$ . Возведем обе части иррационального уравнения в квадрат. Тогда

$$(1 - z^2)(a^2 + 2axe z + x^2 e^2 z^2) = y^2 e^2 z^4 + b^2 z^2 + y^2 e^2 + 2bye z^3 + 2y^2 e^2 z^2 + 2bye z,$$

$$a^2 + 2axe z + x^2 e^2 z^2 - a^2 z^2 - 2axe z^3 - x^2 e^2 z^4 = y^2 e^2 z^4 + 2yeb z^3 + (b^2 + 2y^2 e^2) z^2 + 2bye z + y^2 e^2.$$

Мы получили уравнение 4-й степени. Выпишем коэффициенты при степенях  $z$

$$\begin{array}{l} z^4 \\ z^3 \\ z^2 \\ z^1 \\ z^0 \end{array} \left\| \begin{array}{l} x^2 e^2 + y^2 e^2 = e^2(x^2 + y^2) \\ 2bye + 2axe = 2e(ax + by) \\ a^2 + b^2 - 2x^2 e^2 + 2y^2 e^2 = a^2 + b^2 + 2e^2(-x^2 + y^2) \\ -2axe + 2bye = 2e(-ax + by) \\ a^2 + y^2 e^2 \end{array} \right. \quad (1)$$

Для решения уравнения 4-й степени читатель может воспользоваться, например, методом Феррари [11 стр. 44, 1.8-15]. В силу теоремы Гаусса о количестве корней многочлена, возможных решений может оказаться 4. Далее сделаем 4-х этапную фильтрацию выбранных решений.

1) Т.к.  $z = \cos \varphi$ , то выберем только действительные решения, удовлетворяющие условию  $|z| \leq 1$ .

2) Каждому решению  $z$ , за счет того, что  $\varphi = \text{ang}(\mathbf{0}, \{z, \pm \sqrt{1 - z^2}\}) + 2\pi n$  соответствует 2 полярных угла. Выберем среди этих углов только те углы, которые входят в интервал дуги.

3) Среди оставшихся углов выберем те, которые удовлетворяют уравнению нормали (7.1.-1) или (7.1.-2).

4) Далее по этим углам с помощью полярного уравнения построим точки. Если точек окажется более одной, то из них выберем ту, расстояние до которой от полюса будет минимальным.  $\square$

### 7.4. Радиус кривизны<sup>1</sup>

Известна [24,572,76] формула радиуса кривизны в полярных координатах

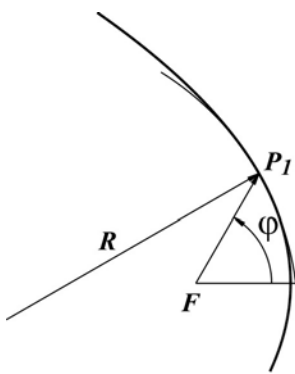


Рис. 1

$$R = \frac{(r^2 + r_\varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2r_\varphi'^2 - rr_\varphi''}. \text{ Подготовим элементы этой формулы}$$

$$r^2 = \frac{p^2}{(1 + e \cos \varphi)^2}, \quad r' = -\frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \text{ или } pe \sin \varphi (1 + e \cos \varphi)^{-2},$$

$$r'' = pe(\cos \varphi (1 + e \cos \varphi)^{-2} + 2e \sin^2 \varphi (1 + e \cos \varphi)^{-3}) =$$

$$= \frac{pe}{(1 + e \cos \varphi)^3} (\cos \varphi (1 + e \cos \varphi) + 2e \sin^2 \varphi) =$$

$$\frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^3} (\cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi + 2e^2 \sin^2 \varphi).$$

Находим знаменатель

$$r^2 + 2r_\varphi'^2 - rr_\varphi'' = p^2 \left( \frac{1}{(1 + e \cos \varphi)^2} + \frac{2e^2 \sin^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^4} - \frac{e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi + 2e^2 \sin^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^4} \right) =$$

$$= \frac{p^2}{(1 + e \cos \varphi)^4} (1 + 2e \cos \varphi + e^2 \cos^2 \varphi + 2e^2 \sin^2 \varphi - e \cos \varphi - e^2 \cos^2 \varphi - 2e^2 \sin^2 \varphi) =$$

$$= \frac{p^2 (1 + e \cos \varphi)}{(1 + e \cos \varphi)^4} = \frac{p^2}{(1 + e \cos \varphi)^3}.$$

Теперь числитель  $(r^2 + r_\varphi'^2)^{\frac{3}{2}} = \left( \frac{p^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} + \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^4} \right)^{\frac{3}{2}} =$

$$= \left( \frac{p^2 ((\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi)}{(1 + e \cos \varphi)^4} \right)^{\frac{3}{2}} = \frac{p^3 ((\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \varphi)^6}.$$

Окончательно  $R = \frac{p((\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \varphi)^3}, \quad (1)$

или  $R = \frac{p(1 + 2e \cos \varphi + e^2)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \varphi)^3}, \quad (1a)$

Упражнение 1. Доказать, что радиус кривизны в эллипсе минимален в вершинах большой оси (для  $\varphi = 0, \varphi = \pi$ ).

Упражнение 2. Доказать, что радиус кривизны в эллипсе максимален в вершинах малой полуоси.

<sup>1</sup> И.Ньютон (1671) [7, стр.409]



### 7.5. Координаты центра кривизны. Эволюта

Пусть в некоторой точке на кривой с координатами  $\{x, y\}$  радиус кривизны кривой  $R$ . Тогда, рассматривая нормаль как ориентированную прямую и двигаясь от этой точки  $\{x, y\}$  по направлению вектора нормали на расстояние  $R$ , получим координаты центра кривизны  $\{\xi = x + Rn_x, \eta = y + Rn_y\}$ . (1)

Подставляя из (3.1.-2) полярные координаты  $\{x, y\} = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \{\cos \varphi, \sin \varphi\}$ , из

$$(7.5.-1) R = \frac{p((\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \varphi)^3}, \text{ из (7.1.-3) направляющие нормали, получим}$$

$$\begin{cases} \xi = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{p((\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \varphi)^3} \left( \frac{\cos \varphi + e}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}} \right) \\ \eta = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{p((\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi)^{\frac{3}{2}}}{(1 + e \cos \varphi)^3} \frac{\sin \varphi}{\sqrt{(\cos \varphi + e)^2 + \sin^2 \varphi}} \end{cases}$$

$$\text{или} \begin{cases} \xi = \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \left( \cos \varphi - \frac{(1 + 2e \cos \varphi + e^2)(\cos \varphi + e)}{(1 + e \cos \varphi)^2} \right) \\ \eta = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \left( 1 - \frac{1 + 2e \cos \varphi + e^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} \right) \end{cases}.$$

Далее, преобразуем каждую компоненту центра кривизны отдельно

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^3} (\cos \varphi + 2e \cos^2 \varphi + e^2 \cos^3 \varphi - \cos \varphi - e - 2e \cos^2 \varphi - 2e^2 \cos \varphi - e^2 \cos \varphi - e^3) = \\ &= \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^3} (\cos \varphi(1 + e \cos \varphi)^2 - (1 + 2e \cos \varphi + e^2)(\cos \varphi + e)) = \\ &= \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^3} (e^2 \cos^3 \varphi - e - 3e^2 \cos \varphi - e^3), \end{aligned}$$

$$\eta = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \left( 1 - \frac{1 + 2e \cos \varphi + e^2}{(1 + e \cos \varphi)^2} \right) = \frac{pe^2 \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^3} (\cos^2 \varphi - 1) = -\frac{pe^2 \sin^3 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^3}.$$

Окончательно

$$\{\xi(\varphi), \eta(\varphi)\} = \frac{p}{(1 + e \cos \varphi)^3} \{(e^2 \cos^3 \varphi - e - 3e^2 \cos \varphi - e^3), -e^2 \sin^3 \varphi\}. \quad (2)$$

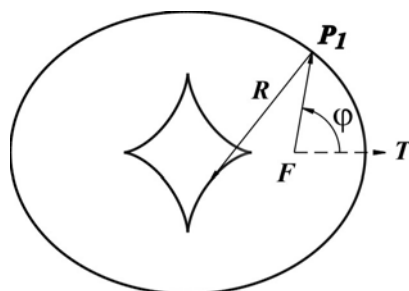


Рис. 1

**Геометрическое место центров кривизны называется эволютой** [24,стр.578] (см. рис.1). Формула (1) дает возможность построить эволюты эллипса, гиперболы, или параболы на основе однозначной зависимости декартовых координат центра кривизны от полярного угла, проводимого из фокуса.

### 7.6. Определение и уравнение параллельных дуг

В данной работе ограничимся определением и очень кратким изучением параллельных дуг только для дуг коник. Отметим при этом, что изучаемые нами дуги конических кривых непрерывны (за исключением гиперболы), гладки и не самопересекаются.

Назовем **|| дугой (п.д.)** геометрическое место точек, полученных путем движения точек исходной дуги вдоль вектора нормали на некоторое постоянное число со знаком  $h$ . Векторное уравнение для || дуг будет следующим  $v = r + hn$ . В декартовых координатах, выраженных через полярные коэффициенты, оно выглядит так

$$\begin{cases} \xi = \frac{p \cos \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{h(\cos \varphi + e)}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} \\ \eta = \frac{p \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} - \frac{h \sin \varphi}{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}} \end{cases}, \quad (1)$$

где  $\xi$  - абсцисса в.п.д., а  $\eta$  - ее ордината.

На рис.1 изображен более жирной линией эллипс. Внутри него расположена параллельная дуга с параметром  $h > 0$ , а снаружи находится дуга с параметром  $h < 0$ .

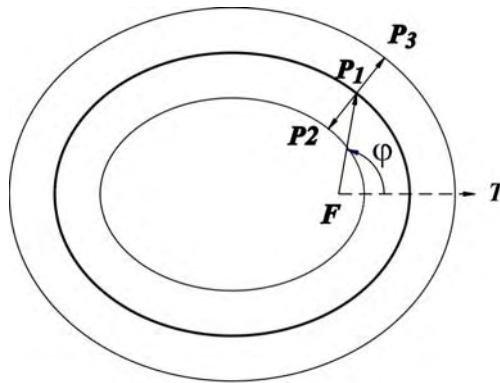


Рис. 1

Из (1) следует, что при  $|h| \rightarrow 0$ , п.д. стремится к исходной кривой.

Напомним, что эллипс, гипербола и парабола симметричны относительно фокальной оси. Чисто геометрически из построения видно, что и дуга в.п.д. также симметрична относительно этой оси.

Аналитически это следует из следующего. Знаменатель в (1) из-за четной функции  $\cos \varphi$  и для  $\xi$ , и для  $\eta$ , как у первого слагаемого  $1 + e \cos \varphi$  четный, так и у второго слагаемого  $\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}$ , также четный.

Числитель  $h(\cos \varphi + e)$  для  $\xi$  также четный. При делении четной функции на четную, получается четная функция (докажите!), т.е. абсцисса  $\xi(-\varphi) = \xi(\varphi)$  является четной функцией. Числитель  $\eta$  пропорционален  $\sin \varphi$ , и, следовательно, он нечетный, а знаменатель, как было сказано выше, четный. При делении нечетной функции на четную, получается нечетная функция (докажите!). Поэтому ордината  $\eta(-\varphi) = -\eta(\varphi)$  нечетная. Отсюда следует **зеркальная симметрия п.д. относительно вертикальной оси симметрии** (на (рис.1) не показано).

Задачи на || дуги встречаются в производстве одежды – технологические припуски на швы, в механике при изучении траектории режущего инструмента, в картографии при определении || зон и в других областях.

## 8. Некоторые интегральные свойства

Прежде чем приступить к изложению данного материала, заметим следующее.

Для облегчения сверки ответов с таблицами интегралов в данной главе использованы *классические обратные тригонометрические функции*. Предлагаем читателю самостоятельно перевести соответствующие результаты данной главы на основе функции  $ang()$ .

### 8.1. Длина дуги

Известна формула дуги [25,гл.10,§1,(56)], т.н. спрямляемой кривой

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + (r_\varphi')^2} d\varphi. \quad (1)$$

(Для более полной информации о спрямляемых кривых см. [25,гл.10,§1]. Там же есть все остальные необходимые ссылки.)

Подставим в (1) формулу полярного радиуса Лаланда-Лапласа

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \text{ Тогда}$$

$$L = p \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\frac{1}{(1 + e \cos \varphi)^2} + \frac{e^2 \sin^2 \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^4}} d\varphi = p \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi. \quad (2)$$

Формула (2) после нескольких несложных преобразований, выражается через эллиптические интегралы (они подразделяются на 3 рода), которые **в общем случае не выражаются через элементарные функции** [4, стр. 176 - 177]. Таким образом, невозможно привести “простую” формулу длины дуги эллипса, гиперболы, а также и длины одной волны синусоиды, где имеем те же проблемы.

С другой стороны, знание значений длин дуг крайне важно для целого ряда технических задач. Поэтому в этой работе принят компромиссный вариант: в приложении П2. приведен на одном из Паскале-подобных языков текст программы, вычисляющий данный интеграл численно. Надеемся, что читатель легко разберется в тексте программы и трансформирует ее под свои нужды.

Прилагаемая программа позволяет вычислять интегралы численно на основе алгоритма Гаусса с 12 узлами (количество узлов выбирает пользователь для достижения необходимой точности). Алгоритм Гаусса, является для технических задач, по нашему мнению, самым простым, точным, и быстродействующим. С другой стороны, мы хотим предупредить читателя, что полное обоснование алгоритма Гаусса не является тривиальным.

Вернемся к (2). Частные случаи (2), а именно: длину дуги окружности при  $e=0$  и длину дуги параболы при  $e=1$  можно вычислить “традиционным” интегрированием, чем сейчас и займемся.

### 8.1.1. Длина дуги окружности

$$L = \lim_{e \rightarrow 0} p \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi = p \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (1)$$

В 1-м интеграле (1) выполнен предельный переход, потому что подинтегральная функция равномерно зависит от параметра  $e$ . Тестируем (1): вычислим  $L$ , если дуга опирается на фокальную хорду при  $p=1$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$  и

$$\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}.$$

В этом случае (1) дает  $\pi$ , программа П2. – 3.141592653589790.

(Ошибочной является только последняя цифра – 0. Удивительный результат!)

### 8.1.2. Длина дуги параболы

$$L = \lim_{e \rightarrow 1} p \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{\sqrt{1 + 2e \cos \varphi + e^2}}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi = \sqrt{2} p \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}}. \quad (1)$$

Рассмотрим последний неопределенный интеграл

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + \cos \varphi)^{\frac{3}{2}}} = \int \frac{d\varphi}{\left( \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{3}{2}} \int \frac{d\varphi}{\left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= 2^{-\frac{1}{2}} \int \frac{d\frac{\varphi}{2}}{\left( \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} = 2^{-\frac{1}{2}} \int \frac{dt}{\cos^3 t}. \quad (2)$$

(Выше уже обосновано допустимость предельного перехода. Кроме того,  $t = \frac{\varphi}{2}$ .)

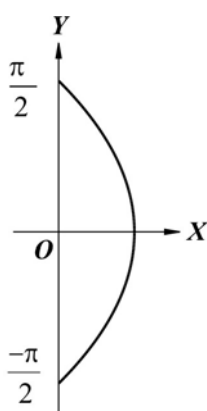


Рис. 1

Последний интеграл возьмем по частям и выведем при этом рекуррентную<sup>1</sup> формулу. (Заметим, что переменная  $x$  выглядит привычнее, чем переменные  $\varphi$  и  $t$ . Мы и в дальнейшем будем сводить интегралы к привычному для читателя виду, чтобы, при желании, можно было сверять их с таблицами неопределенных интегралов).

Итак, пусть  $u = \frac{1}{\cos x}$ ,  $v = \frac{1}{\cos^2 x}$ . Тогда  $\int \frac{1}{\cos x} \left( \frac{dx}{\cos^2 x} \right) = \frac{tgx}{\cos x} - \int \frac{\sin^2 x}{\cos x \cos^2 x} =$

$$\frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{(1 - \cos^2 x) dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^3 x} + \int \frac{dx}{\cos x}. \quad (3)$$

<sup>1</sup> Как указывает С.Я.Лурье в сноске к §211 (стр. 342) [Леонард Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т.1. ОНТИ, М., Л., 1936, - стр.353], термин «рекуррентный» применительно к рядам ввел А.Муавр уже в 1720. Этим термином активно пользовался Л.Эйлер.

Т.к.  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$ . (Этот интеграл также вычисляется рекуррентно [25, стр. 78]. Попробуйте вычислить его самостоятельно.) Обозначим неизвестный интеграл -  $I$ . Следовательно

$$I = \frac{\sin x}{\cos^2 x} - I + \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C. \text{ Или } I = \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C. \quad (4)$$

$$\text{Отсюда } L = p \left( \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right) \Bigg|_{x_1 = \frac{\varphi_1}{2}}^{x_2 = \frac{\varphi_2}{2}}. \quad (5)$$

Пусть  $p = 20$ ,  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$ . Вычислим (5)

$$\begin{aligned} L &= 20 \left( \frac{\sin x}{2 \cos^2 x} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| \right) \Bigg|_{x_1 = \frac{\pi}{4}}^{x_2 = \frac{\pi}{4}} = \\ &= 20 \left( \left( \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) \right| - \left( \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} \right) \right| \right) = 20 \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \cdot \left( \ln \operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} - \right. \right. \\ &\left. \left. - \ln \operatorname{tg} \frac{\pi}{8} \right) \right) = 20 \left( \sqrt{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8}}{\operatorname{tg} \frac{\pi}{8}} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

Выражение (6) 45.9117429878.

Длина дуги на основе П2 45.9117429876.

## 8.2. Площадь сектора

Известно [25, 194, 9], что площадь сектора в полярных координатах

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \left( \frac{p}{1 + e \cos \varphi} \right)^2 d\varphi = \frac{p^2}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{(1 + e \cos \varphi)^2} d\varphi. \quad (1)$$

Рассмотрим неопределенный интеграл  $\int \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}$ . (2)

Заметим, что в предыдущих разделах выведенные формулы с некоторыми ограничениями годились сразу и для эллипса, и для гиперболы, и для параболы. Однако, по современной методологии интеграл (2) нужно вычислять тремя

различными способами, в зависимости от эксцентриситета: 1)  $e < 1$  (эллипс); 2)  $e = 1$  (парабола); 3)  $e > 1$  (гипербола).

### 8.2.1. Площадь сектора, ограниченного дугой параболы

Вначале рассмотрим вариант 2)  $e = 1$  (парабола), как самый простой.

Делаем классическую [25, стр.74] замену переменной  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ . Отсюда

$x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ . Далее выразим  $\cos x$  через  $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Заметим, что

$$\cos x = \cos 2 \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}. \quad (*)$$

Таким образом, задача сведена к поиску функций  $\sin^2 \frac{x}{2} = f_1(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})$  и

$$\cos^2 \frac{x}{2} = f_2(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}).$$

$$\text{Найдем их: } \operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}, \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} \quad (**)$$

$$\text{и } \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{1 - \sin^2 \frac{x}{2}}. \quad (***)$$

Для упрощения записи в уравнениях (\*\*) и (\*\*\*), сделаем замены  $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} = T$ ,

$\cos^2 \frac{x}{2} = C$ ,  $\sin^2 \frac{x}{2} = S$ . Решим (\*\*) относительно  $C$

$$T = \frac{1-C}{C}, TC = 1-C, TC + C = 1, C = \frac{1}{T+1}.$$

И, аналогично, решим (\*\*\*) относительно  $S$

$$T = \frac{S}{1-S}, T - TS = S, T = S(1+T), S = \frac{T}{1+T}.$$

Подставим найденные значения в (\*)

$$\cos x = \frac{1}{T+1} - \frac{T}{T+1} = \frac{1-T}{T+1} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$



Теперь имеем возможность собрать все части интеграла  $\int \frac{dx}{(1 + \cos x)^2}$

$$\int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = 2\int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}\right)^2} = 2\int \frac{(1+t^2)^2 dt}{4(1+t^2)} = \frac{1}{2}\int (1+t^2)dt =$$

$$= \frac{1}{2}tg \frac{x}{2} + \frac{1}{6}tg^3 \frac{x}{2} + const. \quad (1)$$

Пренебрегая, временно, нормализацией граничных углов, вычислим, для примера, площадь параболы в системе координат Кеплера при  $p=1$ ,  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{p^2}{2} \left( \frac{1}{2}tg \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{6}tg^3 \frac{\varphi}{2} \right) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) - \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

### 8.2.2. Формула понижения $\int \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}$ при $e \neq 1$

Метод взятия интеграла  $\int \frac{dx}{(1 + e \cos x)^2}$  при  $e \neq 1$  состоит из 2-х этапов. На 1-м этапе снижают степень выражения под интегралом до 1. Этот этап общий для эллипса и гиперболы, и применяемые формулы называются **формулами понижения**. На 2-м этапе берут  $\int \frac{dx}{1 + e \cos x}$  уже с учетом  $e > 1$  или  $e < 1$ .

Выведем общую формулу понижения, приведенную в сборнике задач Демидовича<sup>1</sup>.

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n} = -\frac{b dx}{(n-1)(a^2 - b^2)(a + b \cos x)^n} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)} \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-1}} - \frac{(n-2)}{(n-1)(a^2 - b^2)} \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{n-2}}, \quad |a| \neq |b| \text{ и } n - \text{натуральное число.} \quad (1)$$

Заменяя, временно, показатель степени  $n$  на  $m$ , выведем рекуррентное соотношение  $\int \frac{dx}{(a + b \cos x)^m} = \int \frac{(a + b \cos x) dx}{(a + b \cos x)^{m+1}} = a \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^{m+1}} + b \int \frac{\cos x dx}{(a + b \cos x)^{m+1}}. \quad (2)$

<sup>1</sup> Б.П.Демидович. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М., 1972., стр.178, N 2059.

2-й интеграл из (2) возьмем по частям

$$b \int \frac{\cos x dx}{(a+b \cos x)^{m+1}} = \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{m+1}} - (m+1) \int \frac{b^2 \sin^2 x dx}{(a+b \cos x)^{m+2}}. \quad (3)$$

Теперь преобразуем 2-й интеграл из (3)

$$\begin{aligned} -(m+1) \int \frac{(b^2 - b^2 \cos^2 x) dx}{(a+b \cos x)^{m+2}} &= -(m+1) \int \frac{(b^2 - a^2 + a^2 - b^2 \cos^2 x) dx}{(a+b \cos x)^{m+2}} = -(m+1) \int \frac{(b^2 - a^2) dx}{(a+b \cos x)^{m+2}} - \\ -(m+1) \int \frac{(a - b \cos x) dx}{(a+b \cos x)^{m+1}} &= (m+1)(a^2 - b^2) \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{m+2}} - (m+1) \int \frac{(a + a - a - b \cos x) dx}{(a+b \cos x)^{m+1}} = \\ &= (m+1)(a^2 - b^2) \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{m+2}} - 2(m+1)a \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^{m+1}} + (m+1) \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^m}. \end{aligned}$$

Обозначим  $J_m = \int \frac{dx}{(a+b \cos x)^m}$  и соберем все слагаемые в рекуррентное

выражение  $J_m = aJ_{m+1} + \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{m+1}} + (m+1)(a^2 - b^2)J_{m+2} - 2(m+1)aJ_{m+1} + (m+1)J_m$ .

Приведем подобные члены и перенесем член, содержащий наибольший показатель  $J_{m+2}$  в левую часть равенства, а остальные в правую

$$-(m+1)(a^2 - b^2)J_{m+2} = \frac{b \sin x}{(a+b \cos x)^{m+1}} - (2m+1)aJ_{m+1} + mJ_m \text{ или}$$

$$J_{m+2} = -\frac{b \sin x}{(m+1)(a^2 - b^2)(a+b \cos x)^{m+1}} + \frac{(2m+1)a}{(m+1)(a^2 - b^2)} J_{m+1} - \frac{m}{(m+1)(a^2 - b^2)} J_m.$$

Делая теперь замену  $m+2 = n$ , откуда  $m = n-2$ , получим

$$J_n = -\frac{b \sin x}{(n-1)(a^2 - b^2)(a+b \cos x)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{(n-1)(a^2 - b^2)} J_{n-1} - \frac{(n-2)}{(n-1)(a^2 - b^2)} J_{n-2} \square$$

Т.к. в нашем частном случае показатель степени подинтегрального выражения  $n = 2$ , то в последней формуле остаются только два члена

$$J_2 = -\frac{b \sin x}{(a^2 - b^2)(a+b \cos x)} + \frac{a}{(a^2 - b^2)} J_1 \quad \text{или}$$

$$\int \frac{dx}{(a+b \cos x)^2} = -\frac{b \sin x}{(a^2 - b^2)(a+b \cos x)} + \frac{a}{(a^2 - b^2)} \int \frac{dx}{a+b \cos x} + C. \quad (4)$$

(Константы  $a = 1, b = e$  подставим только в конечную формулу.)

### 8.2.3. Площадь сектора, ограниченного дугой эллипса

Возьмем  $\int \frac{dx}{a+b\cos x}$ , где  $a=1$ ,  $b=e < 1$ , с помощью подстановок  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ ,

$$x \in (-\pi, \pi), \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t}{1+t}.$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a+b\cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)(a+b\frac{1-t}{1+t})} = 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)(\frac{a+at^2+b-bt^2}{1+t^2})} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{(a+b)+(a-b)t^2} = \frac{2}{(a+b)} \int \frac{dt}{1+\frac{(a-b)}{(a+b)}t^2} = \frac{2}{(a+b)} \int \frac{dt}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2} = \\ &= \frac{2}{(a+b)\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}} \int \frac{d\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t}{1+\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}t\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + \operatorname{const}. \end{aligned}$$

Теперь все отдельные компоненты формулы готовы, и можем собрать их

$$S = \frac{p^2}{2} \left( -\frac{e \sin \varphi}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi)} + \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right) + C. \quad (1)$$

Т.к.  $S(0) = 0$  и оба слагаемых (1) при  $\varphi = 0$  равны 0, то  $C = 0$ .

Окончательно **площадь сектора эллипса**

$$S = \frac{p^2}{2} \left( -\frac{e \sin \varphi}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi)} + \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \right) \Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \quad (2)$$

Вычислим, в качестве примера, полную площадь эллипса. Так как первообразная функция  $S$  содержит разрывную функцию тангенс, то нельзя применить формулу (1) к интервалу  $(0, 2\pi)$ . Но, учитывая симметрию эллипса относительно фокальной оси, найдем  $S$  на интервале  $(0, \pi - \alpha)$ , где  $\alpha$  малое число. Затем, устремляя  $\alpha \rightarrow 0$ , найдем предел  $S$  на интервале  $(0, \pi)$ , если он существует. Предположим, что это так (мы докажем это), то увеличив в 2 раза найденный предел  $S$ , получим искомую площадь эллипса. Реализуем этот план.

Исследуем 1-е слагаемое  $S_1 = \frac{e \sin \varphi}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi)}$ . Т.к.  $e^2 < e < 1$  и  $e \cos \varphi \leq e < 1$ ,

то знаменатель  $S_1 > 0$ . Но  $e \sin 0 = e \sin \pi = 0$ . Поэтому  $S_1 = 0$ .

$$\text{2-е слагаемое } S_2 = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right).$$

$$S_2(0) = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{0}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} 0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{\varphi \rightarrow \pi} S_2(\varphi) &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi} \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \\ &= \lim_{\varphi \rightarrow \pi-0} \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{(1-e^2)^3}}. \end{aligned}$$

$$S \Big|_0^\pi = \frac{p^2}{2} \frac{\pi}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \text{ и полная площадь эллипса } S = \frac{\pi p^2}{\sqrt{(1-e^2)^3}}. \quad (3)$$

Сравним (3) с известной формулой в декартовых координатах  $S = \pi ab$ .

Действительно, учитывая (3.5.1.-2), (3.5.1.-8)

$$S = \frac{\pi p^2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} = \pi \frac{p}{(1-e^2)} \frac{p}{\sqrt{(1-e^2)}} = \pi ab. \quad (4)$$

Выполним теперь численные расчеты с помощью алгоритма Гаусса – программы П2. Выпишем для этого два числа 2454.3507651430 - П2 и  
2454.3692606170 - (4).

Видно, что совпадение результатов не очень хорошее – ошибка идет уже в 6-й значащей цифре. Это означает, что 12 узлов недостаточно для вычисления площади полного эллипса, т.е. при  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ . Т.к. изменить количество узлов в программе дело достаточно хлопотное (после этого программу необходимо заново тщательно тестировать!), попробуем разбить этот интервал на две части и, пользуясь аддитивностью интеграла, представить его в виде суммы интегралов  $S \Big|_{-\pi}^\pi = S \Big|_{-\pi}^0 + S \Big|_0^\pi$ . В этом случае  $S \Big|_{-\pi}^\pi = 2454.3692565916$ , т.е. получен результат намного лучше – ошибка идет уже в 9-й значащей цифре.

Преобразуем (1) к виду, часто применяемому в астрономических задачах (см.

$$\text{К.Ф.Гаусс [8,стр.7]} \quad \frac{p^2}{(1-e^2)^3} (E - \sin E). \quad (5)$$

Сделаем замену переменных  $\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg} \frac{E}{2}$ . (6)

Преобразуем 2-е слагаемое (2)

$$\frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) = \frac{2}{\sqrt{(1-e^2)^3}} \operatorname{arctg} \left( \operatorname{tg} \frac{E}{2} \right) = \frac{E}{\sqrt{(1-e^2)^3}}. \quad (7)$$

Теперь преобразуем 1-е слагаемое (2). Для этого перейдем к тригонометрическим функциям половинного аргумента

$$\begin{aligned} -\frac{e \sin \varphi}{(1-e^2)(1+e \cos \varphi)} &= -\frac{2e \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{(1-e^2)(\sin^2 \frac{\varphi}{2} + \cos^2 \frac{\varphi}{2} + e(\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}))} = \\ &= -\frac{2e \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{(1-e^2) \left( (1+e) \cos^2 \frac{\varphi}{2} + (1-e) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)}. \end{aligned}$$

Делим числитель и знаменатель на

$$(1+e) \cos^2 \frac{\varphi}{2}, \text{ получая } -\frac{2e \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi}{2}}}{(1+e)(1-e^2) \left( 1 + \frac{(1-e) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1+e) \cos^2 \frac{\varphi}{2}} \right)} = -\frac{2e \operatorname{tg} \frac{E}{2}}{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} (1+e)(1-e^2) \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} \right)}.$$

Т.к.  $\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \sin 2x$ , то (8)

$$-\frac{2e \operatorname{tg} \frac{E}{2}}{\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} (1+e)(1-e^2) \left( 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{E}{2} \right)} = \frac{e \sin E}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Собираем части вместе  $\frac{p^2}{(1-e^2)^3} E - \frac{p^2}{(1-e^2)^3} \sin E = \frac{p^2}{(1-e^2)^3} (E - \sin E)$ . □

Упражнение 1. Постройте график  $E = f(\varphi)$  при  $\varphi \in [0, \pi)$ ,  $e = 0.25, 0.5, 0.75$ .

Упражнение 2. Постройте график  $S(E)$ .

### 8.2.4. Площадь сектора, ограниченного дугой гиперболы

Интеграл  $\int \frac{dx}{a+b \cos x}$ , где  $a=1$ ,  $b=e>1$ , берем с помощью тех же подстановок  $t = tg \frac{x}{2}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ ,  $x = 2 \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t}{1+t}$ , как и в случае эллипса.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a+b \cos x} &= \int \frac{2dt}{(1+t^2)(a+b \frac{1-t^2}{1+t^2})} = 2 \int \frac{dt}{(1+t^2)(\frac{a+at^2+b-bt^2}{1+t^2})} = \\ &= 2 \int \frac{dt}{(a+b)-(b-a)t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

Но из-за того, что  $b > a$ , знаменатель в (1) записан в другом виде, чем в случае эллипса.

Интеграл (1) возьмем, следуя [25, стр. 21, стр. 82]. Для краткости письма, заменим константы  $a+b = g^2$  и  $b-a = f^2$ . Тогда  $2 \int \frac{dt}{(a+b)-(b-a)t^2} = \int \frac{2dt}{g^2 - f^2 t^2}$ .

Разложим подинтегральное выражение на простые дроби

$$\frac{2}{g^2 - f^2 t^2} = \frac{A}{g - ft} + \frac{B}{g + ft}. \text{ Затем приведем правую часть к общему знаменателю и}$$

запишем уравнения для определения коэффициентов  $A, B$

$$Ag + Aft + Bg - Bft = 2. \quad \begin{cases} t^1 | Af - Bf = 0, & f(A - B) = 0, & A - B = 0, & A = B \\ t^0 | Ag + Bg = 2, & g(A + B) = 2, & 2Ag = 2, & A = B = \frac{1}{g}. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{2dt}{g^2 - f^2 t^2} &= \frac{1}{g} \int \frac{dt}{g - ft} + \frac{1}{g} \int \frac{dt}{g + ft} = -\frac{1}{gf} \int \frac{dft}{-g + ft} + \frac{1}{gf} \int \frac{dft}{g + ft} = -\frac{1}{gf} \ln|g - ft| \\ &+ \frac{1}{gf} \ln|g + ft| + C = \frac{1}{gf} \ln \left| \frac{g + ft}{g - ft} \right| + C = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2}} \right| + C. \end{aligned}$$

Т.к.  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}$ , то можно дать еще один вариант представления [25, стр. 82]

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2}} \right| + C = \\
& = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2})(\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2})}{(\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} - \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2})(\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2})} \right| + C = \\
& = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2} + \sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2})^2}{(\sqrt{b+a} \cos \frac{x}{2})^2 - (\sqrt{b-a} \sin \frac{x}{2})^2} \right| + C = \\
& = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{(b+a) \cos^2 \frac{x}{2} + 2\sqrt{b^2 - a^2} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + (b-a) \sin^2 \frac{x}{2}}{(b+a) \cos^2 \frac{x}{2} - (b-a) \sin^2 \frac{x}{2}} \right| + C = \\
& = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{b(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}) + a(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}) + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a(\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}) + b(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2})} \right| + C = \\
& = \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \right| + C. \tag{2}
\end{aligned}$$

Также, как и при выводе площади эллипса, доказывается, что  $C = 0$ .

Учитывая, что  $a=1$ ,  $b=e$ , (8.2.-1), (8.2.2.-1) (2), соберем все компоненты в окончательную формулу **площади сектора гиперболы**

$$S = \frac{p^2}{2} \left( \frac{e \sin \varphi}{(e^2 - 1)(1 + e \cos \varphi)} + \frac{1}{\sqrt{e^2 - 1}} \ln \left| \frac{e + \cos \varphi + \sqrt{e^2 - 1} \sin \varphi}{1 + e \cos \varphi} \right| \right) \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2}. \tag{3}$$

Предоставляем читателю доказать, что площадь гиперболы в системе Кеплера (углы временно не нормализуем) при  $p=1$ ,  $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ ,  $\varphi_2 = -\frac{\pi}{2}$

$$S = \frac{e}{e^2 - 1} + \frac{\ln(2e^2 - 1 + 2e\sqrt{e^2 - 1})}{2\sqrt{e^2 - 1}}. \tag{4}$$

## П1. Формулы тригонометрии<sup>1</sup>

### П1.1. Формулы сложения и вычитания аргументов

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta, \quad (1)$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (3)$$

### П1.2. Формулы приведения

Функция	Аргумент						
	$\frac{\pi}{2} - \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$	$\pi - \alpha$	$\pi + \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$	$2\pi - \alpha$
$\sin t$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos t$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$
$\operatorname{tg} t$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} t$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

Табл.1

### П1.3. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1, \quad (1)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi, n \in Z, \quad (2)$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi, n \in Z, \quad (3)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad (4)$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad (5)$$

<sup>1</sup> Гусев В.А. Мордкович А.Г. Математика. Справочные материалы. Книга для учащихся.-2 –е изд.- М.: Просвещение, 1990, - 416 стр. Стр .125-128.



$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1 \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

#### П1.4. Формулы двойного угла

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}. \quad (3)$$

#### П1.5. Формулы половинного угла

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - \sin^2 \alpha, \quad (1)$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}, \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (3)$$

#### П1.6. Формулы понижения степени

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad (1)$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (2)$$

#### П1.7. Формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (1)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (2)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (3)$$

---

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad (4)$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}. \quad (5)$$

**П1.8. Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму**

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)}{2}, \quad (1)$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)}{2}, \quad (2)$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}. \quad (3)$$

## П2. Квадратурная формула Гаусса

[9, стр. 277], [1, стр. 684 и стр. 710]

```
// интегрируется любая функция на интервале [nA,nB], представимая в виде
// cFun=y(x). Ее имя - cFun - передается в программу
FUNCTION intrg(cFun,nA,nB) // вычисление интеграла методом Гаусса
//***** Объявление локальных переменных *****
//**** количество узлов n=12 взято из [1, стр. 710] ****
LOCAL aX:={0.125233408511469, 0.367831498998180, 0.587317954286617,;
          0.769902674194305, 0.904117256370475, 0.981560634246719}
LOCAL aW:={0.249147045813403, 0.233492536538355, 0.203167426723066,;
          0.160078328543346, 0.106939325995318, 0.047175336386512}
LOCAL i,j,nSum:=0,nBam,nBap,aSi:={-1,1}
LOCAL nY
//*****
SET DECIMALS TO 15 // установить число десятичных разрядов 15
nBam:=(nB-nA)/2 // размер полуинтервала, на котором берется интеграл
nBap:=(nB+nA)/2 // среднее число на интервале
FOR i=1 TO LEN(aX) // цикл, зависящий от количества узлов
  FOR j=1 TO 2
    nY:=aSi[j]*nBam*aX[i]+nBap // расчет абсциссы функции
    nSum:=nSum+aW[i]*cFun(nY) // суммирование ординаты функции, умножен-
    // ной на весовой коэффициент
  NEXT
NEXT
NEXT
SET DECIMALS TO 10 // установить число десятичных разрядов 10
RETURN nBam*nSum // возвращаемое значение
```

## П3. Некоторые свойства определителей

### 1°. Некоторые свойства определителей

Определителем квадратной матрицы  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  называется

число, равное алгебраической сумме всевозможных произведений по  $n$  элементов, расположенных в разных строках и разных столбцах.

Как правило, с помощью данного определения определители не вычисляются (на практике для этого применяют приведенные ниже свойства). В силу этого, здесь не дано относительно сложное правило по вычислению знака перед каждым слагаемым данной суммы [см. 14, §4].

Применяются несколько вариантов формы записи определителя:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = |a_{ik}|.$$

Свойство 1. Определитель не меняется при транспонировании (т.е. при вращении относительно главной диагонали, когда строки и столбцы меняются местами). Таким образом, некоторое свойство, доказанное для строк, годится для столбцов и наоборот.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - 1 \cdot 3 = 5, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 7 \\ 4 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 5 \\ 6 & 7 & 10 \end{vmatrix}.$$

Свойство 2. Если одна из строк (столбец) определителя состоит из нулей, то определитель равен 0.

Свойство 3. При перестановке строк (столбцов) определитель меняет знак.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Свойство 4. Определитель, содержащий две одинаковые строки (два одинаковых столбца) равен 0.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ 3 & 6 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 5. Определитель, содержащий две пропорциональные строки (столбца), равен 0

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 3 & 6 & 18 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. Если все элементы  $i$ -й строки ( $i$ -го столбца) определителя представлены в виде суммы двух слагаемых  $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$ , то определитель равен сумме двух определителей, причем в первом определителе суммы в  $i$ -й строке ( $i$ -м столбце) стоит первое слагаемое  $b_{ij}$ , а во втором определителе суммы в этом месте стоит  $c_{ij}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1+4 & 2+7 & 6+5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 3 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 7 & 5 \\ 3 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix}.$$

Свойство 7. Если одна из строк (столбец) определителя есть линейная комбинация его других строк (столбцов), то определитель равен 0

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3+6 & 3+5 & 7+9 \\ 3 & 3 & 7 \\ 6 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 8. Определитель не изменяется, если к элементам одной из его строк (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженной на одно и то же число (положительное или отрицательное)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 3+0 & 8+2 \cdot 4 & 7+6 \cdot 4 \\ 7 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Свойство 9. *Алгебраическое дополнение* каждого элемента  $a_{ij}$  получается вычислением определителя  $n-1$  порядка со знаком (определение ниже), путем вычеркивания  $i$  строки и  $j$  столбца, на котором стоит элемент  $a_{ij}$ .

*Знак алгебраического дополнения* берут '+' (т.е. оставляют без изменения знак определителя  $n-1$  порядка), если сумма чисел номер строки +



столбец определителя при  $i = 1, n$  заменен на столбец свободных членов

$$\begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

**Правило Крамера.** Если определитель системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными  $\Delta$  не равен нулю, то данная система обладает единственным решением

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (3)$$

Пример  $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 5 \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 13 \\ 0x_1 + 1x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$

Решение.  $\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot 2 + 3 \cdot 18 = 62,$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 5 & -3 \\ 13 & 2 & 4 \\ 11 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 13 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 11 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 2 - 13 \cdot 18 + 11 \cdot 26 = 62,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & -3 \\ -3 & 13 & 4 \\ 0 & 11 & 3 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 13 & 4 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 48 = 124,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -3 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & 11 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 13 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 9 + 3 \cdot 50 = 186,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{62}{62} = 1, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{124}{62} = 2, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{186}{62} = 3. \square$$

Правило Крамера незаменимо при теоретических исследованиях системы линейных алгебраических уравнений. С другой стороны, при численном решении той же системы оно мало эффективно (большое число алгебраических операций) и значительно уступает, например, методу исключения (элиминации) Гаусса.

## П4. Ф.Лагир (Philippe de La Hire)<sup>1</sup>



В данной работе скажем лишь несколько слов об этом великом человеке. Он родился в Париже 18 Марта 1640 г. Начиная Филипп как художник под руководством отца – профессора Академии живописи и скульптуры. Позже Филипп едет в Италию для совершенствования мастерства. Впоследствии это мастерство проявилось на качестве рисунков и чертежей, помещенных в его многочисленных публикациях. Отец Филиппа был дружен с известным геометром Ж.Дезаргом, основателем проективной геометрии. Это знакомство и природное желание изучать все глубоко, в частности законы перспективы, привели юношу в математику, которую он изучил самостоятельно.

В 1673 г. он публиковал свою первую работу по геометрии, основанную на проективных методах. В 1679 г. он издал свою вторую работу по геометрии. А в 1685 г. вышел в свет фундаментальный труд ученого о конических сечениях (копия титульного листа и несколько страниц из этого труда на латыни см. ниже.

---

<sup>1</sup> Источники информации: Интернет, собственные исследования, А.Н.Боголюбов «Математики механики», библиографический справочник, КИЕВ, «НАУКОВА ДУМКА», 1963г., -640 стр., А.И.Бородин, А.С.Бугай «Выдающиеся математики», Биограф.слов.-справ. Киев, Рад.шк.,1987г.-656 стр.



Мы поместили эти страницы для того, чтобы читатель смог ознакомиться с образцами 1685 г. работ по геометрии.) Эта работа принесла ученому мировую известность и поставила его в первые ряды выдающихся математиков. Достаточно сказать, что на этот труд неоднократно ссылался И.Ньютон [19] и известные математики следующих поколений. Эту работу обсуждали такие серьезные историки математики, как М.Кантор, Г.Вилейтнер, А.П.Юшкевич и др.. Ф.Лагир оригинально доказал более 300 (!) теорем Аполлония, т.е. почти все. Кроме этого, он привел доказательства новых теорем (одна из них – “теорема о биссектрисе фокального угла” положена в основу данной работы).

Ф.Лагир один из первых понял невозможность построения “вечного двигателя” и в 1678 направил во французскую Академию Наук соответствующий мемуар.

В том же году ученого избрали в члены французской Академии Наук в секцию математики, а через 4 года он занимает в этой Академии еще один пост в секции архитектуры.

С 1683 г. он профессор математики Коллеж де Франс.

В 1693 г. он издал наследие Френикля де-Бюсси по теории чисел – магическим квадратам  $4^2$ , которых де-Бюсси построил 880 штук.

Ф.Лагир изучал кривые – эпициклоиду, конхоиду, рулетты. В 1694 г. он выпустил первую систематическую работу в этой области - «Мемуар об эпициклоидах», в котором выяснял возможность применения эпициклоид для зубьев зубчатых колес. В этой работе Ф.Лагир сам указывал своего предшественника Дезарга [7,стр.285].

В 1708 г. он вычислил длину кардиоиды.

Ф.Лагир ввел термин “начало координат” и обозначил его буквой  $O$ , обобщил метод координат, рассматривал полюсы и поляры.

Количество выпущенных ученым работ по астрономии, математике, физике, геодезии впечатляет. В частности, для астрономии он изучал движение Солнца, Луны и планет. Им спроектировано несколько инструментов для Парижской Обсерватории. Много внимания Ф.Лагир уделял изготовлению карт территории Франции.

Умер Ф.Лагир в Париже 21 апреля 1718 г.

Его именем назван кратер на видимой стороне Луны.

# SECTIONES CONICÆ

*IN NOVEM LIBROS DISTRIBUTÆ,*

In quibus quicquid hætenus observatione dignum cum à veteribus,  
tùm à recentioribus Geometris traditum est, novis  
contractisque demonstrationibus explicatur;

*Multis etiam & exquisitis Propositionibus recens inventis  
illustratur.*

Accesserunt Sectiones Pyramidum super basibus Parabolicis, Ellipticis,  
& Hyperbolicis, unà cum Sectionibus Cylindrorum, quibus  
substernuntur Circuli, aut Conicæ Sectiones.

*Cum Appendice de Sectionibus Conicis omnium generum, eadem &  
universalis methodo, ac magna facilitate demonstratis,  
& aliis curvis ex iisdem fontibus deductis.*

ADJECTA DEMUM EST

Brevis Expositio Propositionum septem Librorum Conicorum Apollonii  
Pergæi, quæ cum superius demonstratis conferuntur.

*Autore PH. DE LA HIRE Regio Matheseos Professore  
& Regia Scientiarum Academia Socio.*



PARISIIS;

Apud STEPHANUM MICHALLET, viâ Jacobæâ sub signo S. Pauli.

M. DC. LXXXV.

CUM PRIVILEGIO REGIS.

188

LIBER OCTAVUS.

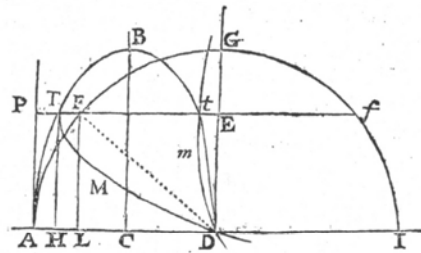
parabola describi posset, sequeretur per tertiam propositionem hujus libri rectas à foco hujusce parabolæ ad puncta A & C ductas æquales esse

rectis Ad, CD, cum tamen recta AC conjungens puncta AC sit minor eisdem rectis Ad, CD in hoc casu.

PROPOSITIO XX.

Omnes Parabolæ, ut DMT, Dmt per centrum C circuli AFG transeuntes, quarum focus in peripheriâ semicirculi AFG, & axis t FT parallelus diametro IDA circuli, habent vertices ut T, t in lineâ Ellipticâ ATBtD, cujus ratio axis minoris AD ad axem majorem duplum CB, ut 1 ad 2, & semiparameter axis parabolæ erit axis intercepta pars FP inter focum F & rectam AP contingentem circulum in puncto A.

A centro D circuli AFG recta DEG perpendicularis ad diametrum ID, erit etiam perpendicularis & ordinata ad axem PFE parabolæ; sed propter circulum recta FD à foco ad punctum D parabolæ æqualis est DA; quare per tertiam propositionem hujus libri recta DA æqualis EP superat EF quantitate FP æquali semiparametro axis, & ipsius terminus T bifecabit FP: à punctis T, F ductis TH, FL perpendicularibus ad DA, punctum H bifecabit LA, & erit IL dupla DH; quare rectangulum DH, HA erit quarta pars rectanguli IL, LA æqualis quadrato LF, vel HT; quare rectangulum DH, HA se habet ad quadratum HT, ut unum ad quatuor, & pro cæteris Parabolis eadem manebit proportio rectangulorum sub partibus rectæ DA ad quadrata rectarum à terminis axium, ut T, ad rectam DA perpendicularium; quare si sit Ellipsis



cujus axis AD, & ei conjugatus duplus rectæ CB, quæ æqualis ponitur DA; manifestum est per tertiam propositionem tertii libri hanc Ellipsum DtBTA transire per vertices omnium parabolârûm, ut t, T, quod erat ostendum.

COROLLARIUM.

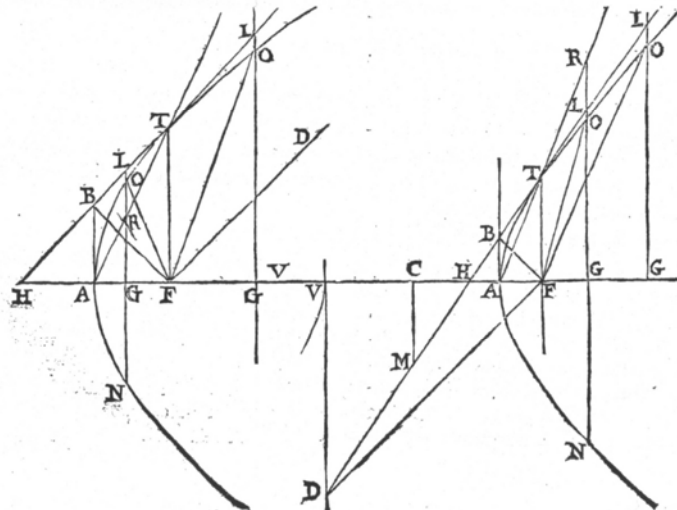
Manifestum est duas Parabolâs DMT, Dmt habere suos axes in eadem recta linea Ff, in quâ positi sunt foci F, f; & præterea parametrum Parabolæ Dmt superare parametrum Parabolæ DMT quantitate rectæ FE, vel DL quater sumptæ, cum tP sit quarta pars parametri pa-

rabolæ Dmt, & similiter TP sit quarta pars parametri Parabolæ DMT, & recta tP superet rectam TP quantitate tT, quæ æqualis EF; nam fE, EF sunt æquales inter se propter circulum, & ft, tP etiam inter se æquales propter parabolam Dmt.

PROPOSITIO XXI.

PROBLEMA.

Super rectâ HF indeterminatâ datur focus F sectionis conicæ, & recta FT perpendicularis ad HF terminata in T, quæ sit ordinata per focum F ad axem super rectâ HF positum; sitque tandem recta HT contingens sectionem in puncto T, & occurrens axi in H; quærentur termini AV axis in quo positi sunt foci.



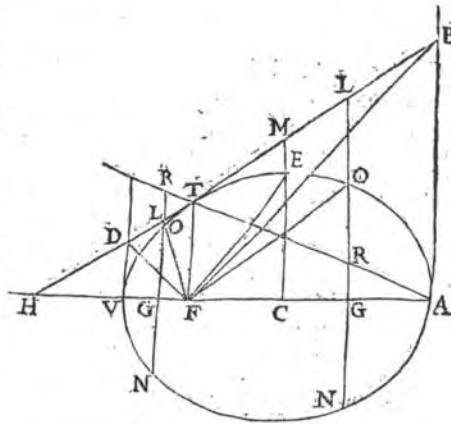
LIBER OCTAVUS.

189

Ductis rectis FB, FD, quæ angulos rectos utrinque positos ad punctum F, & à rectis HFG, & TF constitutos, bifariam dividant, ab occurribus B, D rectarum FB, FD cum rectâ HT, ductis perpendicularibus BA, DV ad rectam HF, dico puncta A & V esse quæsitos terminos axis.

Per constructionem triangulum AFB rectangulum in A est isosceles, cum angulus AFB sit femirectus, nam reliquus ABF erit etiam femirectus, & latera AF, AB erunt inter se æqualia; quamobrem per 13<sup>am</sup>. propositionem hujus libri punctum A erit terminus axis sectionis; nam alia recta AB à puncto A ad easdem partes puncti F posito, duci non poterit, ita ut AB, & AF sint æquales inter se, anguli enim ad F & B essent femirecti, & recta FB situm suum non mutaret.

Eadem erit methodus demonstrationis pro reliquo termino V axis, si recta FD occurrat contingenti HT in puncto D, nam in Parabolâ recta FD bifecans angulum rectum TFG erit æquidistans contingenti HT, angulus enim THF est femirectus propter rectas AH, AB æquales inter se, ut in eadem propof. 13<sup>a</sup>. hujus ostensum est.



In Ellipsi & hyperbolâ altero termino ut A invento, reliquus V reperietur, si fiat ut FA ad AH, sic FV ad VH; nam per corollarium primum 21<sup>æ</sup>. propositionis secundi libri diameter VA dividitur harmonicè in punctis VHA F.

PROPOSITIO XXII.

*Isdem positis ut supra in Ellipsi, si sit axis CE conjugatus axi AV, & occurrens contingenti HT in M:*

*Dico quadratum CH minus quadrato CV, vel CM ipsi æquali per duodecimam propositionem hujus libri, se habere ad quadratum CH, ut quadratum CE ad quadratum CV.*

In figuris præced. In propositione præcedenti ostendimus rectam HA divisam esse harmonicè in punctis HVFA, & per octavam propositionem tertii libri rectæ CH, CV, CF sunt in continuâ proportionem, quamobrem quadratum CH ad quadratum CV, ut quadratum CV ad quadratum CF, & divi-

dendo quadratum CH minus quadrato CV, vel CM, ad quadratum CH, ut quadratum CV minus quadrato CF, quod æquale est quartæ parti figuræ, vel semiaxis minoris CE quadrato per septimam hujus, ad quadratum CV, quod erat demonstrandum.

COROLLARIUM.

Sequitur etiam rectangulum HA, HV æquale quadrato CH minus quadrato CV, se habe-

te ad quadratum CH, ut quadratum CE ad quadratum CV.

PROPOSITIO XXIII.

*Si per focum F sectionis conicæ, vel sectionum oppositarum, agatur recta linea LP utrinque terminata in L, & P ad sectionem, vel ad sectiones oppositas; per puncta LP ductis contingentibus LE, PE, si contingentes sibi mutuo occurrant in E, à puncto E ductâ rectâ EF ad focum; sed si rectæ contingentes in P & L sunt inter se æquidistantes, ductâ rectâ FE per focum F ipsis contingentibus parallelâ.*

*Dico rectam FE esse perpendiculararem ad rectam PL.*

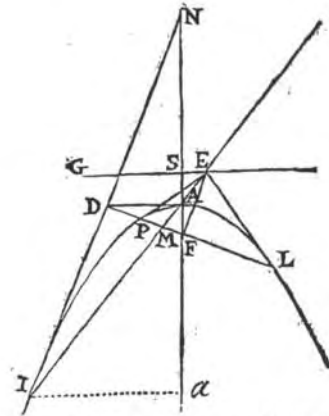
Hæ figuræ pro cæteris. Ductis axe CFA per trigésimam quintam propositionem secundi libri, & rectis CG, AD perpendicularibus ad axem in ipsis terminis A & C, à puncto D in quo recta LP occurrit rectæ AD, si non sit ei parallela, ductâ contingentem DIN in puncto I per 40<sup>am</sup>. propofit. libri secundi. Propter contingentes DA, DI, & PE, LE in occurribus P, L rectæ DL tanquam à puncto D

ductæ, per 27<sup>am</sup>. prop. libri secundi recta AI conveniet in E cum contingentibus in P & L, vel eisdem erit æquidistans, si non concurrant, & recta DL dividetur harmonicè in punctis DPL, & similiter recta AE in punctis AME, si contingentes in P & L concurrant in E, sin minus recta AI bifecabitur à puncto M.

LIBER OCTAVUS.

PRO PARABOLA.

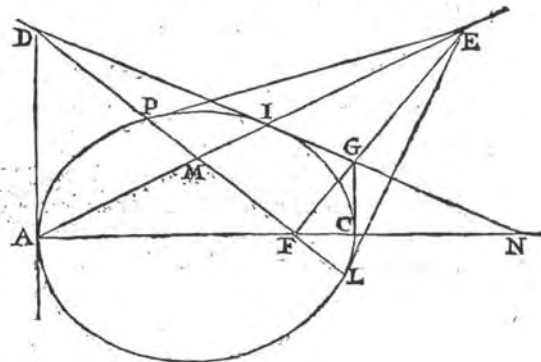
Contingens  $IN$  bifariam dividitur in  $D$  à contingente  $AD$ , nam per septimam propositionem libri secundi recta contingens  $AD$  est æquidistans ordinatæ  $Ia$  à puncto  $I$  ad axem  $NA$ , & per vigesimam propositionem ejus libri recta  $NA$  bisecatur à termino  $A$ . Quare per primam propositionem hujus libri, & per generationem foci recta  $DF$  erecta perpendicularis per punctum  $D$  ad rectam  $IN$  transibit per focum; quare etiam recta  $DF$  à foco ad punctum  $D$  ducta erit perpendicularis ad  $IN$ ; sed à puncto  $F$  rectæ  $FE$ ,  $FA$ ,  $FM$ ,  $FI$  ad divisiones harmonicè rectæ  $EI$ , sunt harmonicales, & recta  $IN$  bifariam dividitur in  $D$  ab his harmonicis, quare manifestum est harmonicalem  $FE$  esse parallelam rectæ  $IN$ ; nam per punctum  $I$  recta ducta æquidistans  $FE$  bisecabitur ab harmonicis  $FD$ ,  $FN$  per decimam quartam propositionem primi libri, & hæc recta necessariò congruet rectæ  $IN$ , cum alia duci non possit ab eisdem similiter divisa, & per



punctum  $I$  ducta: quamobrem recta  $EF$  parallela rectæ  $IN$ , erit perpendicularis ad  $LP$ , quod erat ostendendum.

PRO ELLIPSI, HYPERBOLA, ET SECTIONIBUS OPPOSITIS.

Per 29<sup>am</sup> propositionem secundi libri recta  $DN$  dividitur harmonicè in punctis  $DIGN$ , si occurrat axi in  $N$ ; sed etiam superius ostendimus rectam  $AE$  dividi harmon. in  $AMIE$ , & punctum  $I$  commune est utrique divisioni; quamobrem si reliqua puncta divisionis utriusque rectæ connectantur hoc ordine, scilicet puncta  $AN$ ,  $DM$ , &  $EG$  per 18<sup>am</sup> propositionem libri primi hæc tres rectæ in unum & idem punctum  $F$  concurrent, in quod rectæ  $AN$ ,  $DMF$  concurrent; sed per decimam propositionem hujus libri rectæ  $EGF$ ,  $DF$  angulum rectum constituunt in puncto  $F$ , quod erat prapositum.



Si recta  $LP$  primò ducta fuerit axi conjuncta, contingentes in  $L$  &  $P$  punctis congruentibus terminis  $C$  &  $A$  axis erunt inter se parallelæ, & perpendiculares ad axem; quare recta  $FE$  his parallelis parallela erit etiam perpendicularis ad axem:

Sed si recta  $PL$  sit axi perpendicularis & non occurrat contingenti  $AD$ , erit hæc recta  $PL$  utrobique ad axem ordinata, & contingentes in

$P$  &  $L$  sibi mutuo occurrent super axe, unde patet prapositum.

Tandem, si contingens  $GID$  sit parallela axi, bifariam in iisdem punctis dividetur, nam erit contingens in termino axis minoris, & reliqua, ut in superiori demonstratione fient manifesta.

COROLLARIUM.

Supple figuram hujus casus. Eadem methodo in sectionibus oppositis demonstrabimus rectam  $EF$  ductam ad focum  $F$  ab occursu  $E$ , in quo contingens  $LE$  ducta per pun-

ctum  $L$ , quod est occurfus rectæ  $FL$  asymptoto æquidistantis, esse perpendicularem ad hanc rectam  $FL$ .

PROPOSITIO XXIV.

Si duæ rectæ lineæ  $AI$ ,  $AB$  contingentes sectionem conicam, vel sectiones oppositas, sibi invicem occurrant in puncto  $A$ ; à contractibus  $BI$ , & occursu  $A$  ductis rectis  $BF$ ,  $IF$ ,  $AF$  ad alterutrum focorum  $F$ :

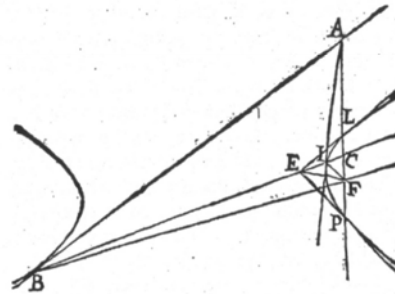
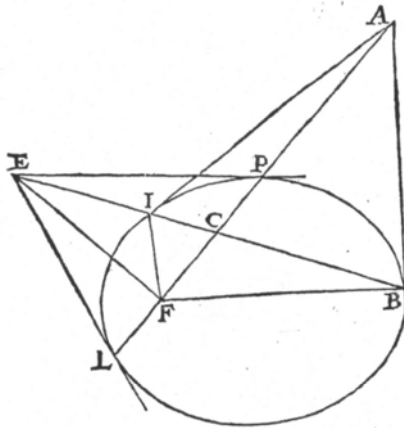
Dico rectam  $AF$  bifariam dividere angulum  $BFI$  ad focum à rectis  $BF$ ,  $IF$  constitutum.

Hæc figura pro omnibus faciant.

Per punctum  $P$  in quo recta  $AF$  sectioni occurrat ducta contingente  $PE$ , junctisque contac-

LIBER OCTAVUS.

191



tibus à rectâ B I, hæc recta B I occurret contin-  
genti P E in puncto E, vel erit ei parallela, &  
per 27, & 19<sup>am</sup>. propos. secundi libri recta B E  
dividitur harmonicè in punctis B C I E, vel bifa-  
riam tantum in punctis B C I, si recta A F sit sec-  
tionis diameter; sed per præcedentem propositi-  
onem recta E F erit perpendicularis ad F P A; & in  
utroque casu, sive recta F E sit æquidistans rectæ  
B I, sive ei occurrat in E, rectæ F E, F I, F A,  
F B erunt harmonicales secundum generationem  
harmonicalem primo libro traditam; quamob-

rem propter angulum rectum E F A à duabus ex  
illis E F, F A comprehensum, per decimasex-  
tam propositionem libri primi recta F A bifariam  
dividet angulum B F I à reliquis harmonicalibus  
B F, I F factum; quod erat demonstrandum.

In sectionibus oppositis recta A F non dividit  
angulum ab ipsismet B F, I F constitutum; sed  
illum, qui est deinceps, & ab iisdem rectis com-  
prehenditur, earum alterutrâ ultra punctum F  
productâ.

PROPOSITIO XXV.

PROBLEMA.

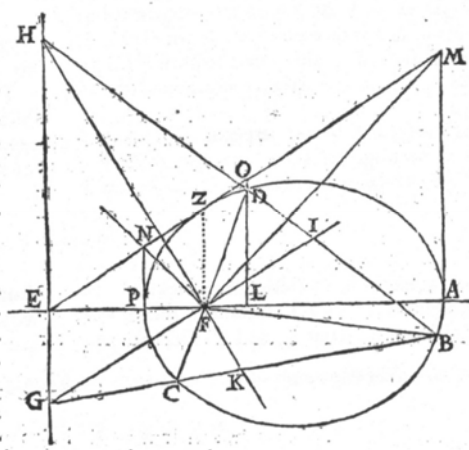
*Sectionis Conicæ datis tribus punctis B C D, & focorum altero F; determinare axem po-  
sitione, & magnitudine.*

Hæc fi-  
gura præ-  
ceteris.

Junctis punctis B C à rectâ B C G, & ductis  
ad focum rectis F C, B C, angulus B F C bifa-  
riam dividatur à rectâ F K, ad quam ponatur  
perpendicularis F G per punctum F occurrens re-  
ctæ B C in G, vel ipsi B C parallela; sed primum  
occurrat in G: similiter diviso angulo B F D à  
rectâ F I, ad quam sit perpendicularis F H occur-  
rens rectæ B D in H; per puncta G, & H agatur  
recta G H, quæ transibit etiam per tertium pun-  
ctum inventum ope divisionis anguli C F D ead-  
em methodo ac puncta G, & H:

Dico rectam A F E perpendicularem ductam  
per focum F ad rectam G H, determinare positio-  
nem axis majoris scilicet Ellipseos, & determinati  
hyperbolæ: sed ipsius magnitudo methodo se-  
quenti reperietur.

A quovis datorum punctorum, ut D, demissâ  
perpendiculari rectâ O D L in rectam A E, ponat-  
ur L O æqualis F D, & agatur E O; à foco F du-  
ctâ rectâ F M angulum A F M æqualem semirecto  
constituente, & occurrente rectæ E O in M;  
similiter facto angulo E F N semirecto, & recta  
F N occurrat rectæ E O in N; à punctis M, N  
ductis perpendicularibus M A, N P ad E A;



Dico puncto A & P esse terminos axis majoris  
Ellipseos, & determinati hyperbolæ super rectâ  
A F E; sed in Parabolâ recta F M erit parallela  
E O; quare unicus terminus P reperiri poterit,  
qui bifecabit rectam F E.

## П5. Лаланд (Jerome La Lande)

(По материалам работы Г.Е.Павловой «Жозеф Жером Франсуа Лаланд», материалам, опубликованным в интернете, и собственным исследованиям автора.)

Жозеф Жером Франсуа Лаланд (Josef-Jerome Francoisde Lalande) родился 11 июля 1732 г. в небольшом французском городке Бурк-ан-Бресе у швейцарской границы, недалеко от Лиона.

В 10 лет он поступил учиться в иезуитский коллеж. (Известно, что до конца 18 века, во Франции эти учебные заведения давали относительно дешевое и качественное образование. Особое внимание там обращалось на преподавание естественных наук, главным образом математики и физики, а также на изучение словестности и языков.)

Лаланд свободно читал и писал на латинском и греческом языках. Он увлеченно изучал классическую литературу. Исторические примеры древних оказали заметное влияние на юношу.

В 1744 г. Лаланд пишет свой первый трактат на латинском языке о наблюдении кометы. В 1748 г. он наблюдает солнечное затмение, которое очень поразило юношу.

Родители настаивали, чтобы их сын продолжил карьеру адвоката. И 16-летний Лаланд, с большим трудом вняв слезам матери и протестам отца, поехал в Париж продолжить свою юридическую карьеру.

Однако счастливые обстоятельства способствовали более тесному сближению Лаланда с астрономией. Так, он поселился в Париже в доме прокурора, в котором также жил известный французский астроном Жозеф Николя Делиль. Несколько слов о соседе. В частности, Делиль посещал Англию, где был представлен Ньютоном и его ученику и соратнику Галлею. (Наверное, трудно найти читателя, который бы не слышал о комете Галлея или не видел ее лично.) В 1714 г. Делиль избирался в Парижскую Академию Наук, с 1724 г. в течение 22 лет работал на службе Петербургской Академии Наук.

Лаланд стал слушателем лекций Делиля, свободно пользовался его библиотекой и архивом, помогал знаменитому астроному в наблюдениях. В 1768

---

г., сразу же после смерти Делиля, он составил подробную биографию учителя и опубликовал ее в нескольких изданиях.

Лаланд продолжил учебу в Коллеж де Франс, где посещал лекции по физике и математике видного ученого П.-Ш. Лемонье.

В 1751 г. астрономы многих стран готовились измерить параллакс Луны и по нему определить расстояние от Земли до Луны. По предложению Лемонье, Академия направила в Берлин тогда никому не известного юношу – Жерома Лаланда.

У молодого астронома жизнь в Берлине была очень насыщена. Ночи он проводил в обсерватории, днем брал уроки у Л.Эйлера, который тогда находился в Берлине, вечером Лаланд принимал участие в различных философских беседах, которые оказали существенное влияние на его мировоззрение.

Немецкие ученые сразу же отметили точность и правильность наблюдений Лаланда. И по предложению президента Берлинской Академии Наук Пьера Мопертюи 19-летнего (!) юношу избирают почетным членом Берлинской академии наук.

После года пребывания в Берлине Лаланд в 1752 г. возвращается в Париж уже признанным ученым.

Заслуги Лаланда перед европейскими астрономическим и математическим обществами необычайно велики. Занимаясь подготовкой кадров будущих астрономов, Лаланд сумел в достаточно короткие сроки обучить астрономов практически для всей Европы. С большинством из своих учеников Лаланд состоял в переписке. Помощь он оказывал не только методическую – его организаторский талант позволил европейским астрономам неоднократно координировать свои усилия. Для вновь открываемых обсерваторий Лаланд оказывал содействие в закупке оборудования. В частности, очень много оборудования и карт при личном содействии Лаланда было направлено в Петербург для наблюдения прохождения Венеры по диску Солнца в 1761г. Русские ученые - М.В. Ломоносов, Н.И.Попов, С.Я.Румовский принимали в этих научных исследованиях самое активное участие. Это, кстати, как пишет Г.Е.Павлова [стр.33], первое участие российской академии наук в международной научной кооперации. Во время этого прохождения М.В.



Ломоносов сделал замечательное открытие<sup>1</sup> - Венера имеет собственную атмосферу.

Лаланд поражал современников широтой своих интересов. Перечислим только некоторые его публикации:

1751г. – “Научные принципы музыкальной гармонии”, 1758г. – “Дух справедливости создает славу и процветание империи”, 1761г. – “Искусство бумажника”, 1762г. – “Искусство пергаменщика”, 1764г. – “Искусство картонажника”, “Искусство замшенника” и “Искусство кожевника”, 1765г. – “Искусство сыромятника”, 1766г. - “Искусство сафьянщика” и др.

Издательская деятельность Лаланда впечатляет - он опубликовал почти 150 мемуаров. В течении своей жизни Лаланд трижды издал свой капитальный 3-х томный труд по астрономии (ниже приведена копия титульного листа его последнего издания в 1792 г.), дважды издавал «Историю математики» Монтукля, причем последние 2 тома составил сам. Его логарифмические пятизначные таблицы<sup>2</sup> до сих пор обращаются во множестве изданий, настольной книгой каждого астронома стала изданная в 1803 г. “Астрономическая библиография”.

Ученые многих стран высоко оценили эту работу Лаланда. Так, выдающийся русский астроном 19 в., директор Пулковской обсерватории В.Я. Струве писал о труде французского ученого: «“Астрономическая библиография” Лаланда – труд самый полный, который имеется по астрономической литературе... очень мало важных работ мы не отыщем в книге Лаланда».

Многократно цитирует в 4-м томе «История математики» (“Geschichte der Mathematik”) Лаланда выдающийся историк математики и естествознания профессор Moritz Cantor. Последнее свидетельствует о многом.

Но основным занятием Лаланда была астрономия. Даже в бурную эпоху революции, Лаланду удалось провести наблюдения около 50000 звезд.

Дружеские отношения в 90 годах сложились между Лаландом и Наполеоном. Наполеон часто встречался с Лаландом, посещал его обсерваторию, где, как говорят, жадно слушал лекции (по всей видимости, юный честолюбец не

---

<sup>1</sup> М.В. Ломоносов. Явление Венеры на Солнце, наблюдаемое в Санктпетербургской императорской академии наук мая 26 дня 1761 года. Санкт-Петербург, 1761 (М.В.Ломоносов, ПСС, т.4, стр. 361-376),

<sup>2</sup> Об этих таблицах хорошо отзывался К.Ф.Гаусс [8, стр.15]

---

исключал для себя вариантов научной карьеры). Наполеон вел философские разговоры, спорил. Часто они встречались не одни. Сохранились воспоминания известного геометра Монжа (также одного из учителей Наполеона) об одной из таких встреч, во время которой Наполеон назвал Лаланда христианским атеистом. Лаланд с достоинством ответил: «Мой атеизм – это результат моих размышлений о Вселенной, мой христианизм – результат моей надежды на людей».

Во время итальянского похода французских войск Лаланд посылал письма Наполеону. Беспokoясь за судьбу итальянских астрономов и обсерваторий, он просил не грабить и не разрушать обсерватории.

Сохранилось письмо, в котором Наполеон отвечает Лаланду: «Всякий раз, когда я могу быть полезен науке и людям, которые ею занимаются с таким успехом, - отвечал Наполеон Лаланду,- я следую своей склонности и чувствую, что этим приношу себе честь». Далее он пишет: «Из всех наук, - заключает он, астрономия является наукой самой полезной разуму и торговле; - вместе с тем она более всего нуждается в дальних связях и в существовании ученого сословия. Счастлива республика, где люди подчас, как и в других государствах, подвержены страстям и зависти, но где слава даруется по достоинству и гению, которые ее получают безраздельно». Наполеон умел красиво говорить. А были ли его слова искренни, читатель поймет очень скоро.

Во время штурма одного из итальянских городов – Вероны, была разрушена обсерватория и астрономы остались без средств к существованию, получаемых ранее из городского муниципалитета. Лаланд вступился за итальянских астрономов, среди которых были его ученики, и надо отдать должное Наполеону, тогда «зло войны» было, насколько это возможно, исправлено.

Возвратившись в декабре 1797 г. в Париж после победоносной итальянской компании, Наполеон продолжал оказывать внимание французским ученым, интересовался деятельностью Национального института и принимал активное участие в его работе. В частности, Наполеон Бонапарт сделал доклад в том же году на заседании Национального института о работах итальянского инженера Л. Маскерони (1750-1800), который занимался теорией геометрических

---

построений, теорией многоугольников и интегральным исчислением<sup>1</sup>. (Интересно отметить, что работа «Геометрия циркуля» Л.Маскерони вышла в Павии в том же 1797г. - Наполеон был оперативен.)

Однако позже, став в 1799 г. первым консулом, а вскоре и императором, Наполеон целиком подчинил себе Национальный институт, перед которым ранее заискивал. И отношения диктатора с учеными продолжали ухудшаться.

Гнев императора вызвали две атеистические работы Лаланда. Однако особый гнев вызвали строки, осуждающие захватнические войны. *«Я думаю, - писал Лаланд, - что способствовать прогрессу науки – это значит выполнить первую обязанность друга человечества. Главная из всех аксиом, которую важно понять человечеству – это то, что наука есть истинная слава и мир - ее истинное благополучие. Таким образом, философы должны способствовать развитию науки и, может быть, тем уменьшить число монстров, которые управляют государствами и обагрят кровью землю, т.е. те, кто ведет войну. И это они делают, прикрываясь религией».*

Наполеон запустил механизм репрессий и пытался лишить Лаланда возможности выступать в печати. Однако ученый продолжал свою научную деятельность и продолжал публиковать в различных журналах свои результаты. В дальнейшем, по приказу Наполеона Лаланд был смещен со всех занимаемых должностей, о его заслугах в астрономии было запрещено упоминать в печати. Окружение Наполеона сделало все возможное, чтобы забыть о недавно столь популярном и уважаемом всеми ученом. Только коллеги и ученики Лаланда по Академии Наук скромно отметили его кончину в апреле 1807 г.

Много позже, в 1889 г. Л. Амиабль отмечал, что Лаланд *«дал своим современникам высокий пример, как презирать величие и власть. Он остался твердо стоять на своем в то время, когда столько гениев преклонялись перед триумфом деспотизма».*

Мы считаем, что подвиг Лаланда сродни подвигу другого астронома – Джордано Бруно.

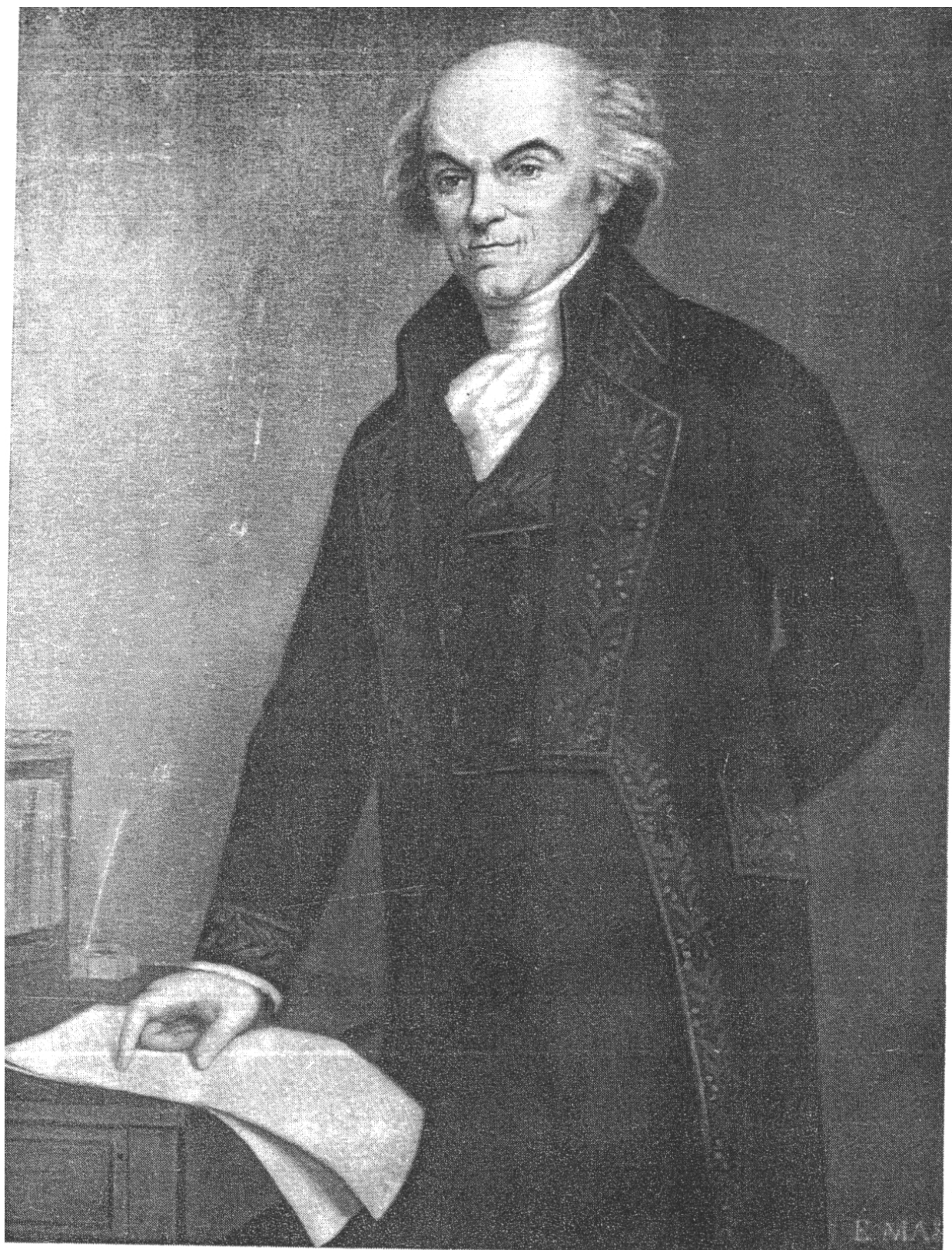
---

<sup>1</sup> С.А. Ануфриенко. «Симметрия относительно окружности», МИФ N1/1996-97 (Информация в Интернете)  
О Маскерони см.также [3,стр.231],[7,стр.166,стр.358-359]

---

Как пишет Г.Е.Павлова «Только в 1869 г., спустя шестьдесят с лишним лет после кончины ученого, в Бурк-ан-Бресе появилась первая книга, рассказывавшая о роли Лаланда на его родине».

По всей видимости, запретами Наполеона и объясняется тот факт, что полярное уравнение, цитируемое, как правило, в подавляющем большинстве современных учебников по аналитической геометрии, не имеет до сих пор своего автора. В связи с вышесказанным, надеемся, что в наше просвещенное время это уравнение, в конце концов, обретет имя своего творца (творцов) и будет называться именем Лаланда или же Лаланда-Лапласа.



Ж. Ж. Ф. Лаланд в 90-е годы.  
Портрет работы Е. Массе.  
Парижская астрономическая обсерватория. (Масло).

# ASTRONOMIE

P A R

JÉRÔME LE FRANÇAIS (LA LANDE),

De l'Académie des sciences de Paris; de celles de Londres, de Pétersbourg, de Berlin, de Stockholm, de Bologne, etc.; Inspecteur du Collège royal, et Directeur de l'Observatoire de l'École royale militaire.

TROISIÈME ÉDITION, REVUE ET AUGMENTÉE,

TOME TROISIÈME.



A P A R I S ,

Chez la Veuve DESAINT, rue du Foin Saint-Jacques;

DE L'IMPRIMERIE DE P. DIDOT L'AÎNÉ.

M. DCC. XCII.

364

ASTRONOMIE, LIV. XXI.

metre FCV (3385); ainsi le cercle osculateur intercepte toujours sur le diametre FV de l'ellipse une partie FS égale au parametre de ce diametre.

3411. Pour trouver la valeur de FP l'on considerera que  $FH : FC :: FS : FP$ ; donc  $FP = \frac{CE^2}{FH}$ ; mais  $CE^2 = \frac{a^2 b^2}{FH^2}$  (3394); donc  $\frac{1}{2} FP = \frac{a^2 b^2}{FH^2}$ ; or  $FH^3 = \frac{b^4}{FN^3}$  (3392); donc  $\frac{1}{2} FP = \frac{a^2}{b^4} FN^3$ . Le parametre  $p = \frac{2b^2}{a}$ , ou  $p^2 = \frac{4b^4}{a^2}$ ; donc  $\frac{1}{2} FP = \frac{4FN^3}{p^2}$ ; c'est-à-dire supposant  $a = 1$ ,  $\frac{1}{2} FP = \frac{4b^3}{pp} \sqrt{1 - xx + bbxx^3}$  (3408), et mettant  $4b^4$  à la place de  $pp$ ,  $\frac{1}{b} (1 - xx + bbxx)^{\frac{3}{2}}$ : nous en avons fait usage (2686).

3412. L'équation de l'ellipse, entre le rayon vecteur et l'anomalie vraie (1234), est celle dont on fait usage dans les calculs de l'attraction (3621, 3654). Dans une ellipse dont le demi-axe est  $a$ , l'anomalie  $MSA = u$ , le rayon vecteur  $SM$  (FIG. 285)  $= r$ , l'excentricité  $CS = e$ , le demi-parametre  $= p = \frac{bb}{a} = \frac{aa - ee}{a}$ , l'on a  $\frac{p}{r} = \frac{a - e \cos. u}{a}$ . En effet  $r = \frac{a^2 + ex}{a}$  (3403),  $a^2 = ar - ex$ ; substituant cette valeur dans  $\frac{aa - ee}{a}$ , on a  $p = \frac{ar - ex - e^2}{a} = \frac{ar - e(e + x)}{a}$ . Or  $SB = SM \cdot \cos. MSB$ , ou  $e + x = r \cos. u$ ; donc  $p = \frac{ar - er \cos. u}{a}$  et  $\frac{p}{r} = \frac{a - e \cos. u}{a}$ , expression dans laquelle le parametre  $p = \frac{aa - ee}{a}$ . Si l'on fait  $a = 1$ , l'on aura  $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. u$ , ou  $r = \frac{p}{1 - e \cos. u}$ ; c'est le rayon vecteur  $r$  en parties de la distance moyenne  $a$  qui est prise pour unité.

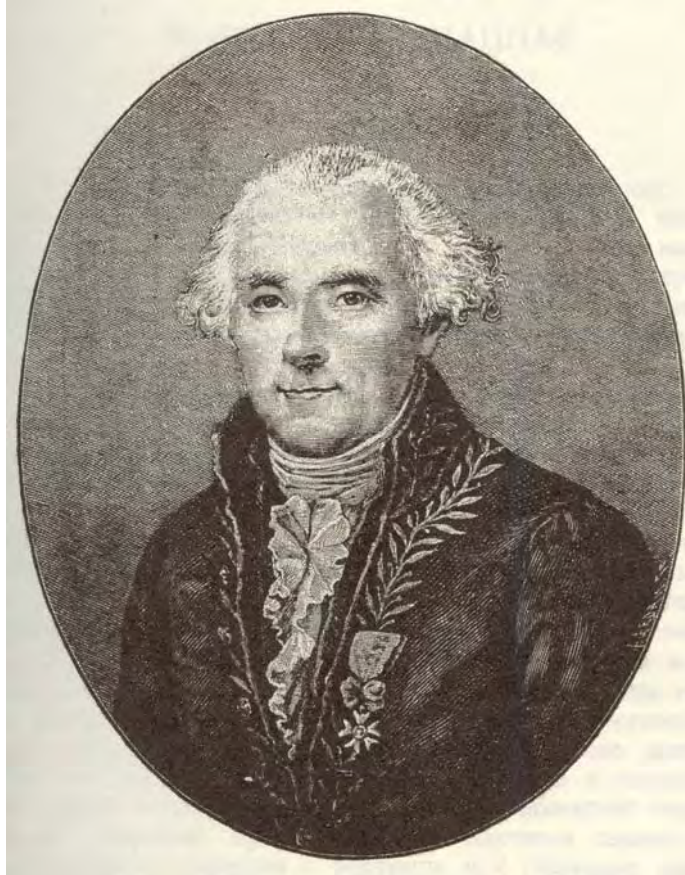
3413. Si l'on suppose  $u = 90^\circ$ , on aura  $r = p$ , c'est-à-dire qu'alors le rayon vecteur est égal au demi-parametre de l'ellipse; ce qui est connu d'ailleurs, puisque l'ordonnée entiere au foyer d'une section conique est toujours égale au parametre.

3414. Si l'on compte le mouvement de la planete d'un autre point qui soit plus éloigné que l'apside d'une quantité  $m$ , l'anomalie vraie au lieu d'être  $u$  sera  $u - m$ ; et il faudra mettre  $u - m$  dans l'équation à la place de  $u$ : l'on trouvera (3812),  $\frac{p}{r} = 1 - e \cos. mX \cos. u - \sin. m \sin. u$ , et faisant les constantes  $e \cos. m = h$  et  $eX \sin. m = g$ , on aura  $\frac{p}{r} = 1 - h \cos. u - g \sin. u$ ; c'est la forme sous laquelle on l'emploie dans le calcul des attractions (3617), l'apside étant immobile.

3415. Si dans le même temps que la planete décrit un angle  $u$  la ligne des apsides avançoit elle-même, c'est-à-dire si l'apside étoit mobile, de façon que le mouvement de la planete par rapport



## П6. Лаплас (P. S. Laplace)



Родился

Пьер Симон Лаплас 28 марта 1749 г. в маленьком местечке Бомоне на Оже в семье простого крестьянина.

В настоящей работе мы не имеем возможности подробно рассказать о великом французском ученом Пьере Симоне Лапласе и поэтому отсылаем читателя к специальной литературе на эту тему<sup>1</sup>.

Скажем лишь следующее. Авторитет Лапласа был столь велик, он сделал для науки так много, что даже, несмотря на особые отношения с Наполеоном, он и в посленаполеоновскую эпоху был обласкан всеми последующими королями Франции.

<sup>1</sup> 1. А. и Е. Андроновы. Лаплас. Жизнь, мировоззрение, место в истории науки. М., «Московский рабочий», 1930 г.

2. Ф.Араго . Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров в 2-х томах. Москва-Ижевск 2000.

3. Б.А. Воронцов-Вельяминов. Лаплас. Изд 2-е. М., «Наука», 1985 г.,- 287 стр.

4. «Коперник. Галилей. Кеплер. Лаплас и Эйлер. Кетле.» Биографические повествования. Урал, 1980, 1998г.



---

Историки науки отмечают особую сосредоточенность Лапласа, способностью углубляться в свой предмет. Все его труды отличает удивительная тщательность, любовь к порядку. Они написаны простым, но изысканным языком.

Перечислим несколько официальных званий ученого: маркиз, пэр Франции, член Французской академии, Французского института, комиссии долгот и всех академий и ученых обществ Европы.

Умер Лаплас 5 марта 1827 г.

Мы приводим ниже копии одной и той же работы Лапласа на двух языках: в оригинале на французском и перевод этой же части на немецком. Видно, что Лаплас не цитирует Лаланда в оригинале на французском. Ссылка на работу Лаланда появляется только в немецком переводе (см. сноску 5 на последней странице-копии), благодаря замечательному переводчику J.C.Burckhardt. Такое легко объяснить, с одной стороны, запретом Наполеона на упоминание имени Лаланда, а с другой стороны, простотой вывода полярного уравнения - простые фрагменты теории как ранее, так и сейчас, цитируются нечасто.

---

—

TRAITÉ  
DE  
MÉCANIQUE CÉLESTE,

PAR P. S. LAPLACE,

Membre de l'Institut national de France, et du Bureau  
des Longitudes.

TOME PREMIER.

---

DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.

A PARIS,

Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques,  
quai des Augustins.

---

A N V I I.

## PREMIÈRE PARTIE, LIVRE II. 115

tituant, au lieu de  $dt$ , sa valeur  $\frac{xdy - ydx}{c}$ , donnée par la loi de la proportionnalité des aires aux temps, on aura

$$0 = \frac{c^2 \cdot (dx^2 + dy^2)}{(xdy - ydx)^2} + 2 \cdot f(Pdx + Qdy).$$

Transformons, pour plus de simplicité, les coordonnées  $x$  et  $y$ , en rayon vecteur, et en angle traversé, conformément aux usages astronomiques. Soit  $r$  le rayon mené du centre du soleil à celui de la planète, ou son rayon vecteur; soit  $\nu$  l'angle qu'il forme avec l'axe des  $x$ ; on aura

$$x = r \cdot \cos. \nu; \quad y = r \cdot \sin. \nu; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2};$$

d'où l'on tire,

$$dx^2 + dy^2 = r^2 d\nu^2 + dr^2; \quad xdy - ydx = r^2 d\nu.$$

Si l'on désigne ensuite par  $\phi$  la force principale qui anime la planète; on aura, par le n°. précédent,

$$P = \phi \cdot \cos. \nu; \quad Q = \phi \cdot \sin. \nu; \quad \phi = \sqrt{P^2 + Q^2};$$

ce qui donne

$$Pdx + Qdy = \phi dr;$$

on aura donc

$$0 = \frac{c^2 \cdot \{r^2 d\nu^2 + dr^2\}}{r^4 d\nu^2} + 2f\phi dr;$$

d'où l'on tire

$$d\nu = \frac{c dr}{r \cdot \sqrt{-c^2 - 2r^2 f\phi dr}}. \quad (3)$$

Cette équation donnera, au moyen des quadratures, la valeur de  $\nu$  en  $r$ , lorsque la force  $\phi$  sera connue en fonction de  $r$ ; mais si, cette force étant inconnue, la nature de la courbe qu'elle fait décrire, est donnée; alors, en différentiant l'expression précédente de  $2f\phi dr$ , on aura pour déterminer  $\phi$ , l'équation

$$\phi = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{2} \cdot d \cdot \left\{ \frac{dr^2}{r^4 d\nu^2} \right\}. \quad (4)$$

Les orbites des planètes sont des ellipses dont le centre du soleil occupe un des foyers; or si dans l'ellipse, on nomme  $\varpi$  l'angle que le grand axe fait avec l'axe des  $x$ ; si, de plus, on fixe au foyer,

## 114 MÉCANIQUE CÉLESTE,

l'origine des  $x$ , et que l'on désigne par  $a$ , le demi-grand axe, et par  $e$ , le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; on aura

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos.(\nu - \varpi)};$$

équation qui devient celle d'une parabole, lorsque  $e = 1$ , et  $a$  est infini; et qui appartient à l'hyperbole, lorsque  $e$  surpasse l'unité, et  $a$  est négatif. Cette équation donne

$$\frac{dr^2}{r^4 d\nu^2} = \frac{2}{ar \cdot (1 - e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2 \cdot (1 - e^2)};$$

et par conséquent,

$$\varphi = \frac{c^2}{a \cdot (1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2};$$

ainsi les orbites des planètes et des comètes étant des sections coniques; la force  $\varphi$  est réciproque au carré de la distance du centre de ces astres à celui du soleil.

On voit de plus, que si la force  $\varphi$  est réciproque au carré de la distance, ou exprimée par  $\frac{h}{r^2}$ ,  $h$  étant un coefficient constant; l'équation précédente des sections coniques, satisfera à l'équation différentielle (4) entre  $r$  et  $\nu$ , que donne l'expression de  $\varphi$ , lorsqu'on y change  $\varphi$  dans  $\frac{h}{r^2}$ . On a alors  $h = \frac{c^2}{a \cdot (1 - e^2)}$ , ce qui forme une équation de condition entre les deux arbitraires  $a$  et  $e$ , de l'équation aux sections coniques; les trois arbitraires  $a$ ,  $e$  et  $\varpi$ , de cette équation, se réduisent donc à deux seules arbitraires distinctes, et comme l'équation différentielle entre  $r$  et  $\nu$ , n'est que du second ordre, l'équation finie aux sections coniques, en est l'intégrale complète.

Il suit de-là que si la courbe décrite est une section conique, la force est en raison inverse du carré des distances; et réciproquement, que si la force suit la raison inverse du carré des distances, la courbe décrite est une section conique.

3. L'intensité de la force  $\varphi$ , relativement à chaque planète et à chaque comète, dépend du coefficient  $\frac{c^2}{a \cdot (1 - e^2)}$ ; les loix de Kepler donnent encore le moyen de le déterminer. En effet, si

## 114 MÉCANIQUE CÉLESTE,

l'origine des  $x$ , et que l'on désigne par  $a$ , le demi-grand axe, et par  $e$ , le rapport de l'excentricité au demi-grand axe; on aura

$$r = \frac{a \cdot (1 - e^2)}{1 + e \cdot \cos.(\nu - \varpi)};$$

équation qui devient celle d'une parabole, lorsque  $e = 1$ , et  $a$  est infini; et qui appartient à l'hyperbole, lorsque  $e$  surpasse l'unité, et  $a$  est négatif. Cette équation donne

$$\frac{dr^2}{r^4 d\nu^2} = \frac{2}{ar \cdot (1 - e^2)} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2 \cdot (1 - e^2)};$$

et par conséquent,

$$\varphi = \frac{c^2}{a \cdot (1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r^2};$$

ainsi les orbites des planètes et des comètes étant des sections coniques; la force  $\varphi$  est réciproque au carré de la distance du centre de ces astres à celui du soleil.

On voit de plus, que si la force  $\varphi$  est réciproque au carré de la distance, ou exprimée par  $\frac{h}{r^2}$ ,  $h$  étant un coefficient constant;

l'équation précédente des sections coniques, satisfera à l'équation différentielle (4) entre  $r$  et  $\nu$ , que donne l'expression de  $\varphi$ , lorsqu'on y change  $\varphi$  dans  $\frac{h}{r^2}$ . On a alors  $h = \frac{c^2}{a \cdot (1 - e^2)}$ , ce qui forme

une équation de condition entre les deux arbitraires  $a$  et  $e$ , de l'équation aux sections coniques; les trois arbitraires  $a$ ,  $e$  et  $\varpi$ , de cette équation, se réduisent donc à deux seules arbitraires distinctes, et comme l'équation différentielle entre  $r$  et  $\nu$ , n'est que du second ordre, l'équation finie aux sections coniques, en est l'intégrale complète.

Il suit de-là que si la courbe décrite est une section conique, la force est en raison inverse du carré des distances; et réciproquement, que si la force suit la raison inverse du carré des distances, la courbe décrite est une section conique.

3. L'intensité de la force  $\varphi$ , relativement à chaque planète et à chaque comète, dépend du coefficient  $\frac{c^2}{a \cdot (1 - e^2)}$ ; les lois de Kepler donnent encore le moyen de le déterminer. En effet, si

## PREMIÈRE PARTIE, LIVRE II. 115

l'on nomme  $T$  le temps de la révolution d'une planète; l'aire que son rayon vecteur décrit pendant ce temps, étant la surface même de l'ellipse planétaire, elle sera  $\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1-e^2}$ ,  $\pi$  étant le rapport de la demi-circonférence au rayon; mais l'aire décrite pendant l'instant  $dt$ , est, par ce qui précède,  $\frac{1}{2} c dt$ ; la loi de la proportionnalité des aires aux temps, donnera donc la proportion,

$$\frac{1}{2} \cdot c dt : \pi a^2 \cdot \sqrt{1-e^2} :: dt : T;$$

d'où l'on tire

$$c = \frac{2\pi \cdot a^2 \cdot \sqrt{1-e^2}}{T}.$$

Relativement aux planètes, la loi de Kepler, suivant laquelle les carrés des temps de leurs révolutions, sont comme les cubes des grands axes de leurs ellipses, donne  $T^2 = k^2 \cdot a^3$ ,  $k$  étant le même pour toutes les planètes; on a donc

$$c = \frac{2\pi \cdot \sqrt{a \cdot (1-e^2)}}{k}.$$

$2a \cdot (1-e^2)$  est le paramètre de l'orbite, et dans diverses orbites, les valeurs de  $c$  sont comme les aires tracées par les rayons vecteurs en temps égal; ces aires sont donc comme les racines carrées des paramètres des orbites.

Cette proportion a également lieu relativement aux orbites des comètes, comparées soit entre elles, soit aux orbites des planètes; c'est un des points fondamentaux de leur théorie qui satisfait si exactement à tous leurs mouvemens observés. Les grands axes de leurs orbites, et les temps de leurs révolutions étant inconnus, on calcule le mouvement de ces astres, dans une orbe parabolique, et en exprimant par  $D$  leur distance périhélie, on suppose

$$c = \frac{2\pi \cdot \sqrt{2D}}{k},$$

ce qui revient à faire  $e$  égal à l'unité, et  $a$  infini, dans l'expression précédente de  $c$ ; on a donc encore relativement aux comètes,  $T^2 = k^2 \cdot a^3$ , en sorte que l'on peut déterminer les grands axes de leurs orbites, lorsque leurs révolutions sont connues.

Maintenant, l'expression de  $c$  donne

$$\frac{c^2}{a \cdot (1-e^2)} = \frac{4\pi^2}{k^2};$$

# Mechanik des Himmels

von

P. S. Laplace,

Mitgliede des Französischen National - Instituts und der  
Commission für die Meeres - Länge.

---

Aus dem Französischen übersetzt

und

mit erläuternden Anmerkungen versehen

von

J. C. Burckhardt.



---

Erster Theil.

---

Berlin

bey F. T. LaGarde,  
1800.

## Zweytes Buch.

*Vom Gesetz der allgemeinen Schwere und von der Bewegung der Schwerpunkte der himmlischen Körper.*

---

### Erstes Kapitel.

*Von dem aus den Erscheinungen hergeleiteten Gesetz der allgemeinen Schwere.*

1. Nachdem wir die Gesetze der Bewegung entwickelt haben, so wollen wir vermittelst dieser Gesetze und vermittelst der Gesetze der himmlischen Bewegungen, welche wir umständlich in unserm Werk *Exposition du système du monde* gegeben haben, uns zum allgemeinen Gesetz dieser Bewegungen erheben. Unter allen Erscheinungen scheint die elliptische Bewegung der Planeten und Kometen um die Sonne am geschicktesten zur Entdeckung desselben zu seyn; wir wollen daher sehen, was sie hierüber giebt. Wir nennen  $x$  und  $y$  die rechtwinklichten Koordinaten eines Planeten in der Ebene seiner Bahn, und wir nehmen für den Anfangspunkt den Mittelpunkt der Sonne an; wir nennen ferner  $P$  und  $Q$  die mit den Axen der  $x$  und  $y$  parallelen Kräfte, welche auf diesen Planeten während seiner relativen Bewegung um die Sonne wirken, und wir nehmen an, daß diese Kräfte gegen den Anfangspunkt der Koordinaten wirken; es sey endlich  $dt$  das Element der Zeit, welches wir als beständig ansehen, so werden wir nach dem zweyten Kapitel des ersten Buchs folgende Gleichungen haben:

*Erster Theil.*



146

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + P \quad (1)$$

$$0 = \frac{d^2y}{dt^2} + Q \quad (2).$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit  $-y$ , die zweyte mit  $x$ , und addirt sie, so erhält man <sup>1)</sup>

$$0 = \frac{d \cdot (x dy - y dx)}{dt^2} + x \cdot Q - y \cdot P.$$

Man sieht leicht, daß  $x dy - y dx$  die doppelte Winkelfläche ist, [welche der Radius vector des Planeten um die Sonne während des Augenblicks  $dt$  beschreibt <sup>2)</sup>]; diese Winkelfläche ist auch dem Differenzial der Zeit proportional, vermöge des ersten Keplerischen Gesetzes; man hat also

$$x dy - y dx = c dt,$$

wo  $c$  eine beständige GröÙe ist; folglich ist das Differenzial des ersten Theils dieser Gleichung gleich Null. Dieses giebt

$$x \cdot Q - y \cdot P = 0.$$

Es folgt hieraus, daß die Kräfte  $P$  und  $Q$  sich zu einander wie  $x$  und  $y$  verhalten, und daß also ihre Zusammengesetzte durch den Anfangspunkt der Koordinaten, das heißt durch den Mittelpunkt der Sonne geht. Da übrigens die von dem Planeten beschriebene krumme Linie gegen die Sonne hohl ist, so ist es augenscheinlich, daß die Kraft, wodurch dieselbe beschrieben wird, nach diesem Gestirn gerichtet ist.

Das Gesetz, daß die Flächen den Zeiten, in welchen sie beschrieben worden, proportional sind, führt uns also zu dem ersten merkwürdigen Resultat, nämlich, daß die Kraft, welche auf die Planeten und die Kometen wirkt, gegen den Mittelpunkt der Sonne gerichtet ist.

1)  $\frac{x d^2y - y d^2x}{dt} + Qx - Py = 0$ . Nun ist aber, wenn man theilweise integrirt,  $x d^2y = d \cdot (x dy) - dx \cdot dy$ ,

und  $-y d^2x = -d \cdot (y dx) + dy \cdot dx$ ; folglich die Summe beider GröÙen gleich  $d \cdot (x dy) - d \cdot (y dx)$  oder  $d \cdot (x dy - y dx)$ .

2) Wenn man  $r$  den Radius vector und  $\nu$  den Winkel nennt, welchen er mit der Axe macht, so ist das doppelte Differenzial der Fläche gleich  $r^2 \cdot d\nu$ . Es ist aber  $x = r \cos \nu$  und  $y = r \sin \nu$  und  $dx = dr \cdot \cos \nu - d\nu \cdot r \sin \nu$  und  $dy = dr \cdot \sin \nu + d\nu \cdot r \cos \nu$ ; folglich hat man  $-y dx = -y \cdot dr \cdot \cos \nu + y \cdot d\nu \cdot r \sin \nu$  und  $x dy = x \cdot dr \cdot \sin \nu + x \cdot d\nu \cdot r \cos \nu$ , oder  $-y dx = -r dr \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu + r^2 d\nu \cdot \sin \nu^2$  und  $x dy = r \cdot dr \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu + r^2 \cdot d\nu \cdot \cos \nu^2$ , folglich die Summe beider GröÙen gleich  $r^2 \cdot d\nu (\sin \nu^2 + \cos \nu^2) = r^2 \cdot d\nu$ .

2. Wir wollen nun das Gesetz bestimmen, nach welchem diese Kraft in verschiedenen Abständen von diesem Gestirn wirkt. Es ist klar, daß die Natur der elliptischen Bewegung uns auf dieses Gesetz führen muß, weil die Planeten und Kometen bey jedem Umlauf sich abwechselnd der Sonne nähern und sich von ihr entfernen. Wir wollen in dieser Rücksicht die Differenzialgleichungen (1) und (2) des vorhergehenden Satzes vornehmen. Multiplicirt man die erste mit  $dx$ , die zweyte mit  $dy$ , und addirt sie, so erhält man

$$0 = \frac{dx \cdot d^2x + dy \cdot d^2y}{dt^2} + P dx + Q dy,$$

und wenn man integrirt

$$0 = \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} + 2 \int (P dx + Q dy),$$

wo die willkührliche beständige GröÙe durch das Integralzeichen angedeutet wird. Substituirt man statt  $dt$  seinen Werth  $\frac{xdy - ydx}{c}$ , welcher durch das Gesetz, daß die Flächen sich wie die Zeiten verhalten, gegeben ist, so erhält man

$$0 = \frac{c^2 \cdot (dx^2 + dy^2)}{(xdy - ydx)^2} + 2 \int (P dx + Q dy).$$

Wir wollen nun um mehrerer Einfachheit willen die Koordinaten  $x$  und  $y$  in den Radius vector und in den von ihm beschriebenen Winkel, dem astronomischen Gebrauch gemäß, verwandeln. Es sey  $r$  der aus dem Mittelpunkt der Sonne zum Mittelpunkt des Planeten gezogene Radius vector, und  $\nu$  der Winkel, welchen er mit der Axe der  $x$  macht, so wird man

$$x = r \cdot \cos \nu; \quad y = r \cdot \sin \nu; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

haben; hieraus erhält man

$$dx^2 + dy^2 = r^2 d\nu^2 + dr^2; \quad xdy - ydx = r^2 d\nu.$$

Bezeichnet man ferner durch  $\phi$  die Hauptkraft, welche auf den Planeten wirkt, so wird man nach dem vorhergehenden Satz

3) Die Werthe von  $dx$  und  $dy$  sind in der zweyten Anmerkung gegeben worden; quadriert man sie, so hat man

$$dx^2 = dr^2 \cdot \cos^2 \nu + d\nu^2 \cdot r^2 \cdot \sin^2 \nu - 2 dr \cdot d\nu \cdot r \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu$$

$$dy^2 = dr^2 \cdot \sin^2 \nu + d\nu^2 \cdot r^2 \cdot \cos^2 \nu + 2 dr \cdot d\nu \cdot r \cdot \sin \nu \cdot \cos \nu$$

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + d\nu^2 r^2.$$

Der Beweis der folgenden Formel findet sich in der zweyten Anmerkung selbst.

148

$$P = \phi \cdot \cos \nu; \quad Q = \phi \cdot \sin \nu; \quad \phi = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

haben: dieses giebt

$$P dx + Q dy = \phi dr^4);$$

man wird also haben

$$0 = \frac{c^2 \cdot (r^2 d\nu^2 + dr^2)}{r^4 d\nu^2} + 2 \cdot \int \phi dr.$$

Hierdurch erhält man

$$d\nu = \frac{c dr}{r \cdot \sqrt{-c^2 - 2r^2 \cdot \int \phi dr}}; \quad (3)$$

diese Gleichung wird vermöge der Quadraturen den Werth von  $\nu$  durch  $r$  geben, wofern die Kraft  $\phi$  durch eine Function von  $r$  gegeben ist. Ist hingegen die Kraft unbekannt, die Natur der krummen Linie aber, welche durch sie beschrieben wird, gegeben: so wird man zur Bestimmung von  $\phi$  folgende Gleichung erhalten, wenn man den vorhergehenden Ausdruck von  $2 \cdot \int \phi dr$  differenziert:

$$\phi = \frac{c^2}{r^3} - \frac{c^2}{2} \cdot \frac{d \cdot \left( \frac{dr^2}{r^4 d\nu^2} \right)}{dr}. \quad (4)$$

Die Planetenbahnen sind Ellipsen, in deren einem Brennpunkt sich der Mittelpunkt der Sonne befindet. Nennt man nun für die Ellipse,  $\varpi$  den Winkel, welchen die große Axe mit der Axe der  $x$  macht; nimmt man ferner den Brennpunkt für den Anfangspunkt der  $x$  an, und bezeichnet man die halbe große Axe mit  $a$ , und das Verhältniß der Eccentricität zur halben großen Axe mit  $e$ , so hat man <sup>5)</sup>

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\nu - \varpi)},$$

eine Gleichung, welche sich in die Gleichung einer Parabel verwandelt, wenn  $e = 1$  und  $a$  unendlich ist, und welche einer Hyperbel angehört, wenn  $e$  größer als die Einheit und  $a$  negativ ist. Diese Gleichung giebt <sup>6)</sup>

4) Es ist  $P dx = \phi \cdot \cos \nu \cdot (dr \cdot \cos \nu - d\nu \cdot r \sin \nu) = dr \cdot \phi \cos^2 \nu - d\nu \cdot \phi \cdot r \sin \nu \cdot \cos \nu$   
 und  $Q dy = \phi \cdot \sin \nu \cdot (dr \cdot \sin \nu + d\nu \cdot r \cos \nu) = dr \cdot \phi \sin^2 \nu + d\nu \cdot \phi \cdot r \sin \nu \cdot \cos \nu$ ,  
 folglich die Summe  $P dx + Q dy = dr \cdot \phi (\cos^2 \nu + \sin^2 \nu) = dr \cdot \phi$ .

5) Man sehe La Lande's Astronomie dritte Auflage §. 3412.

6) Aus  $r [1 + e \cdot \cos(\nu - \varpi)] = a(1 - e^2)$  findet man durch Differenzieren  
 $dr [1 + e \cdot \cos(\nu - \varpi)] - d\nu \cdot e r \cdot \sin(\nu - \varpi) = 0$ ; substituirt man statt  $1 + e \cdot \cos(\nu - \varpi)$  seinen

## Предметный указатель

### А

Автополярные (самосопряженные)  
треугольники 306

Асимптотическое направление 145,146,  
157,196,200,251,257,264,266,  
339,337

### Б

#### Биссектриса

- угла между направлениями 53, 148,118,  
250,403

- угла между прямыми 117-118,250,407

- смежного угла, образованного

пересекающимися нормальными 405-408

- фокального угла 154-156,164,165,168,  
190,192,223,225,226, 244, 247,248,  
251-253,254,256-258,264,274,275,277,  
278,284,292,299,300, 304-308,316,324,  
325,342-345,352,359,367,380,387-388,  
395

### Г

Гармоническое соотношение 284,326,327,  
337

#### Гипербола

-, асимптоты 161,205-208,210-212,214-  
216,268,372-375,380,387,402

-, интервалы монотонности 201,379,380

-, основные точки и элементы 204-216

-, преобразования между левым и правым  
фокусом 216-223

-, полярный угол и длина радиус-вектора  
из правого фокуса 219-223

-, разность расстояний от фокусов до  
некоторой точки на ветви 218

-, расстояние из правого фокуса  
до некоторой точки на ветви  
217-218

-, оптические свойства касательной 223-  
227

-, упражнения 202-203,205-206,208-217,  
230

### Д

Двойные точки 100

#### Диаметр

квадраты основного и сопряженного  
диаметров 392-393

-, площадь вписанного параллелограмма  
393-396

-, 1-я модель и общие вопросы 159-162,174,

247-248,255,279,309,340,362-389,  
392-402,408

-, 2-я модель 341-350

-, 3-я модель 350-359,362,365,369

-, 4-я модель 359-362

-, 5-я модель 388-391

-, пересечение между сопряженной хордой  
364-365,397-399,400-402

- сопряженный, биссектриса фокального  
угла 387-388,395

- сопряженный, гипербола 381-387

-, задачи 400-402

Директриса 148,151,170-172,174,183,198,  
205-207,231-232,259,261,263,278-279,  
326,381,404

#### Дуга, длина

- окружности 415

- параболы 415-417

#### Дуга, преобразования

-, зеркальное отображение 134

-, перемещение на вектор 132

-, поворот 133

### И

Идентификация областей на плоскости 115

#### Имена

Аполлоний 9,11,16,19,20,35,106,122,124,  
161,169,177,188,223,230,385-386,  
391-393,396,434

Архимед 11,19-20, 35,122,199

Гаусс 16,35,121,126-127,130,140,172,199,  
238,407,413,420,427,442

Гессе 68,71,93,141,153,163,185,249,277,  
358,388

Кеплер 121,138-141,146,149,152,157,171,  
176,185,197,200,228,232,248,283, 309,  
325,329,336,401,417,423

Лагир 13,14,16,244,250,264,433-439

Лаланд 9,121-122,138,152,232,375,440-448

Лаплас 9,121-122,138,152,232,375,449-460

Ньютон 13,177,315,400

Эйлер 16,30,81,332,356-358,397,441

Инварианты. Получение параметров  
полярного уравнения 231-243

Инверсия 99-106, 400-401

Инволюция 99

### К

#### Касательная

-, вектор направления 135-137,139,145,372

-, длина от точки касания до полюса

301-303

- , зеркальные координаты фокуса  
148,186-193,198,225-226
- , координаты проекции фокуса 146-147,  
174,183-186,195-197
- , построение циркулем и неразмеченной  
линейкой 148,156,197,226-227
- , расстояние до фокуса 146,182-185,231
- , уравнение 144-146
- , условие  $\parallel$  оси абсцисс 152-153
- , условие  $\parallel$  заданной прямой 153-157
- Квадратурная формула Гаусса 414-415,  
417,422,429
- Классический подход к построению  
сопряженной гиперболы 376-381
- Координаты основания медианы полярного  
треугольника 287-288,364,388
- Координаты полюса 245-246,257-258
- Координаты точек касания 263-272
- Координаты точки пересечения диагоналей  
четырёхугольника фокус-полюс 284-  
287,337-338
- Координаты центра кривизны 411-412

**М**Методы

- наименьших квадратов 127-128
- подстановки 347-349,352-354,360-364,  
366-368,372,390-397
- пятиточечные схемы 124-126,391

**Н**

- Некоторые интегральные свойства коник  
414-425
- Некоторые свойства определителей 430-433
- Нормаль  
свойство биссектрисы смежного угла,  
образованного пересекающимися  
нормальными 405-408
- , уравнение 403-405
- , из внешней точки 408-409
- Нормальное уравнение стороны фокального  
угла 249

**О**

- Обмен точек местами 27-28
- Одинаково рассчитываемые точки для всех  
типов коник 168-170
- Определение диаметра 159-162
- Определение системы координат Кеплера  
138-140
- Особенности работы с полярным  
уравнением в обобщенной полярной  
системе координат – ОПСК 200-201
- Отклонение от полюса до стороны  
фокального угла 249-250, 273-274

**П**Парабола

- , оптические свойства 198-199,405
- , основные элементы и соотношения 196-  
199
- , свойство касательной 196-199
- Параллельные дуги 412-413
- Площадь сектора 417-418
- , ограниченного дугой гиперболы 424-425
- , ограниченного дугой параболы 418-419
- , ограниченного дугой эллипса 421-423
- Площади фигур, ограниченные прямыми  
- фокального треугольника 303-304  
- четырехугольника фокус-полюс 304-305  
- полярного треугольника, ограниченного  
касательными и хордой 305-306
- Половина фокального угла, как функция  
координат полюса 263-272
- Пучки прямых 65-67, 116-117

Полярное уравнение

- , горизонтальная и вертикальная  
симметрия 141-143
- , общие сведения 121-124
- , определение расположения точки по  
отношению к кривой 135,263-272
- , полярные параметры 121-137,231-243
- Преобразования  
- вращение точек 84  
- гомотетии 91-93,357
- движения, сохранение углов 98-106
- декартовых координат 77-79
- зеркальные отображения точек 85
- зеркальные отображения лучей 89-91
- инверсии 99-106
- координаты проекции точки на прямую  
79-84
- симметрии 93-98
- смежные и полюсные 254
- Принцип двойственности (взаимности,  
корреляции) 322-326
- Прямая(ые)  
- , вращение 113-115
- , нормальный вектор, нормальное  
уравнение 57,63,68-73,75,81-82,90-93,  
107,109-110,114-115,118,141-142,145,  
153-154,157,160-161,163-164,170,175,  
183,202,207,216,224,232,249,275,277-  
278,298-300,307,340,342,348-  
350,352,354,360,366,369,372-374,378-  
390,407,408
- пассивно ориентированная, отклонение  
точки 110-113
- активно ориентированная, отклонение  
точки 111-114
- , пересечение прямых 66-67,71-76,118-119

- , в новой системе координат 114-116
- , приведенное уравнение 60
- , соединяющая фокус с полюсом 246-248
- , уравнение, проходящее через центр координат 64
- , уравнение через 2 точки 64
- , уравнение в общем виде 65-67
- , уравнение в отрезках на осях 70-71

**Р**

- Радиус кривизны 410
- Расстояния от точек касания до биссектрисы фокального угла 304-305
- Расстояние точки пересечения диагоналей четырехугольника фокус-полюс до фокуса 285
- Расстояние от фокуса до полюса 254-256
- Решение тригонометрических уравнений при помощи функции  $\text{ang}()$
- , простейшие 50-51,215,292,372,380
- ,  $\text{tg}(\varphi) = \frac{b}{a}$  51
- ,  $\cos \varphi = a$ ,  $\sin \varphi = b$ ,  
 $|a|, |b| \leq 1$ ,  $a^2 + b^2 = 1$  51-52,343
- ,  $\alpha \cos \varphi + \beta \sin \varphi = 1$  52-56,154-156,  
164-165,347,368,382-383

**С**

- Секущие
- , точки пересечения прямой линии и дуги 163-168
- , сохранения элементов 356-359
- Сопряженная гипербола 372-381
- Сопряженный диаметр
- гиперболы 381-387
- эллипса 365-372
- Софокусные эллипс и гипербола 227-231
- Стрела прогиба 125,389-391

**Т**

- Таблицы
- коэффициенты квадратичной формы 128
- коэффициенты при параметрах  $\text{ang}()$
- определение функции направления 23
- простейшие тригонометрические уравнения 50
- прямые тригонометрические функции от  $\text{ang}()$  45
- часто используемые углы 36
- центры симметрии коник 143
- , 2-я модель диаметра 349-350
- , 3-я модель диаметра 355-356
- , 4-я модель диаметра 361-362

Теорема (ы)

- , автополярные треугольники 306-309
- Аполлония, площадь вписанного на диаметрах параллелограмма 394-396
- Аполлония, произведение частей диаметра 397-399
- Аполлония, сумма квадратов основного и сопряженного диаметров 392-394
- Брианшона 319-321
- , гармоническое соотношение 326-331
- , корреляция полюсов и хорд 322-326
- Лагира, свойство биссектрисы фокального угла 244-251
- Паскаля 315-319
- , свойство медианы полярного треугольника 389-391
- , точка пересечения диагоналей вписанного четырехугольника 311-315
- , угол, вписанный в окружность 38-39
- Фалеса 39,72,75
- Штейнера 124-126
- Эйлера, произведение частей секущих 332-337

**У**Угол(ы)

- , абсолютная разность 31,38,296,370-371
- вписанный в окружность 38-39
- , дополнительные 27,37,39,59-60,119,  
373-374,406-407
- , измерение 58-60
- , интервалы 25-27,30,39,42,58-60,98-99,  
103,130,163,165,201-203,257-258,374,  
379-380,409,421-422
- , наименьший 38,69,104,370
- между биссектрисой фокального угла и хордой 299
- между радиус-векторами и хордой 297-299
- нормализованный 25-26
- , отрицательный 24-26,57-58,74,141,202
- , сумма/разность 31,42,53,216,290,296,340,  
374
- , часто используемые 36,270
- n-кратных аргументов 33,350,374
- половинного аргумента 33,302
- четырехугольника фокус-полюс 288-301,  
408
- Уравнение биссектрисы фокального угла 248,250,274-275

**Ф**Функции- направления  $\text{ang}()$ 

- , геометрическая интерпретация 47-49
- и обратные тригонометрические функции 40-44
- и прямые тригонометрические функции 44-47,303,330,344
- , определение и свойства 22-40
- , условия неизменности 28-29
- , тригонометрическое представление 29-31,40-41,298
- длины 22
- перемещения точки 62
- Формулы тригонометрии 424-426

**Х**Хорда ( $\chi$ )

- , длина хорды 167,176,178,280-283,304-305,338,358
- , проекции хорды 166-167
- , расстояния и отклонения от фокуса, полюса 283-284,304-305,334
- , точка пересечения 309-311,317,321,324,330,338
- фокальная 163-166,169,175,199,256,275,279-281,283,291,328,339,341,353,399
- , уравнение 276-279,283,307

**Э**

Эволюта 411-412

Элементы описанного параллелограмма эллипса 399-400

Эллипс

- , зеркальное отображение левого фокуса относительно касательной 186-187
- , оптические свойства касательной 188-193
- , основные элементы и соотношения 172-179
- , полярный угол и радиус из левого фокуса 180-183
- , преобразования между правым и левым фокусом 179-183
- , проекция левого фокуса на касательную 183-185
- , радиус-вектор из левого фокуса 179
- , сумма длин радиус-векторов от фокусов до некоторой точки на дуге 180
- , упражнения 193-196

## Литература

1. Под редакцией М.Абрамовича и И.Стиган. Справочник по специальным функциям. М., «Наука», 1979, -832 стр.
2. А.Адлер. Теория геометрических построений, Л., УЧПЕДГИЗ, 1940,-232 стр.
3. Б.И.Аргунов, М.Б.Балк Геометрические построения на плоскости, Учпедгиз, изд.2, М., 1957. - 267 с.
4. И.Я.Бакельман. Инверсия. М., «Наука», 1966. - 80 стр.
5. Н.С.Бахвалов. Численные методы. М., «Наука», 1975, - 632 стр.
6. С.В. Бахвалов, П.С. Моденов, А.С. Пархоменко. Сборник задач по аналитической геометрии. «Наука». М., 1964, - 440 стр.
7. Г.Вилейтнер. История математики от Декарта до середины XIX столетия. Перевод с немецкого под редакцией А.П.Юшкевича. Государственное издательство физико - математической литературы, М., 1960. - 468 стр.
8. К.Ф.Гаусс. Теория движения небесных телъ, обращающихся вокруг солнца по коническимъ сечениямъ. М., въ Типографіи Бахметева, 1859, - 314 стр .
9. Н.И.Данилина, Н.С. Дубровская, О.П. Кваша и др. Численные методы. Учебник для техникумов. М., «Высш. школа», 1976, - 368 стр.
10. В.В.Зайцев, В.В.Рыжков, М.И.Сканави. Элементарная математика. Повторительный курс. «Наука». М., 1974, - 592 стр.
11. Г.Корн, Т.Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. «Наука». М., 1975, - 832 стр.
12. T.Koshy. Fibonacci and Lucas numbers with applications. A Wiley-Interscience Publication. New York, 2001,-654 p.
13. Р.Курант, Г.Роббинс. Что такое математика? – 3-е изд., испр. и доп. – М.:МЦНМО,2001.- 568 с.
14. А.Г. Курош. Курс высшей алгебры. Изд. 9-е. «Наука». М., 1968,- 432 стр.
15. Ю.В.Линник. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М., 1958, -334 стр.
16. П.С.Моденов. Аналитическая геометрия. Московский университет. 1969, - 699 стр.
17. П.С.Моденов. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. Высшая школа. М., 1960. – 767 с.



- 
18. Н.И.Мусхелешвили. Курс аналитической геометрии. ОГИЗ. М., 1947, - 644 стр.
  19. Isaac Newton. The Principia. Mathematical Principles of Natural Philosophy. A New Translation by I.Bernard Cohen and Anne Whitman, assisted by Julia Budenz. University of California Press. Berkeley, Los Angeles, London. 1999, - 975 p.
  20. А.В.Погорелов. Аналитическая геометрия. Изд. 4-е. "Наука". М., 1978, - 208 стр.
  21. Б.А. Розенфельд. Аполлоний Пергский. МЦНМО, М.,, 2004, - 176 стр.
  22. George Salmon. Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Nach der freien Bearbeitung von Wilhelm Fiedler. Neu Herausgegeben von Dr. Friedrich Dingeldey. Achte Auflage. Leipzig und Berlin. Verlag von B.G.Teubner. 1915, - 448 S.
  23. А.Г.Свешников, А.Н.Тихонов. Теория функций комплексной переменной. М., «Наука», 1967. - 304 стр.
  24. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.1. М.,1969, - 608 стр.
  25. Г.М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. т.2. М.,1970, - 800 стр.
  26. Л.Эйлер. Введение в анализ бесконечно малых, т.2. Государственное издательство физико-математической литературы, М., 1961, - 391 стр.
  27. И.М. Яглом. Геометрические преобразования. Т.1 движения и преобразования подобия. Государственное издательство технико-теоретической литературы, М., 1955, - 281 стр.