МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Российский химико-технологический университет
имени Д. И. Менделеева

А. Н. Шайкин

ЭЛЕМЕНТЫ АЛГЕБРЫ

Утверждено Редакционным советом
университета в качестве учебного пособия

Москва
2013

УДК [512.64+514.12](075)
ББК 22.143+22.151.5
Ш17

Рецензенты:
Доктор технических наук, профессор Российского химико-технологического университета им. Д. И. Менделеева
Л. С. Гордеев
Кандидат физико-математических наук, доцент Московского автомобильно-дорожного государственного технического университета
С. А. Изотова

Шайкин А. Н.
Ш17 Элементы алгебры: учеб. пособие / А. Н. Шайкин. – М.: РХТУ им. Д. И. Менделеева. 2013. – 120 с.

ISBN 978-5-7237-1151-8

Изложен основной материал по алгебре и некоторых тем аналитической геометрии, читаемых кафедрой высшей математики.

Охватывает векторную алгебру, прямые и плоскости, линии и поверхности второго порядка, матрицы и определители, системы линейных уравнений, комплексные числа, многочлены и рациональные дроби, линейные и евклидовы пространства, линейные операторы и квадратичные формы.

Предназначено для студентов I курса всех факультетов и колледжей РХТУ им. Д. И. Менделеева.

УДК [512.64+514.12](075)
ББК 22.143+22.151.5

ISBN 978-5-7237-1151-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Определение вектора. Линейные операции над векторами

Определение. *Направленным отрезком* называется упорядоченная пара точек пространства.

Определение. *Началом* и *концом* направленного отрезка называются, соответственно, первая и вторая точки этой пары.

Определение. *Длиной* направленного отрезка называется расстояние между этими точками.

Определение. Направленный отрезок называется *нулевым*, если его начало и конец совпадают.

Определение. Два ненулевых направленных отрезка называются *коллинеарными*, если прямые, на которых они лежат, параллельны или совпадают. Нулевой направленный отрезок считается коллинеарным любому направленному отрезку.

Определение. Два ненулевых направленных отрезка, лежащих на параллельных прямых, *сонаправлены*, если их концы лежат по одну сторону от прямой, соединяющей их начала, и *противоположно направлены*, если по разные. Если ненулевые направленные отрезки лежат на одной прямой, то они *сонаправлены* между собой, если существует направленный отрезок, сонаправленный каждому из них, и *противоположно направлены* в противном случае.

Определение. Два направленных отрезка *равны*, если они имеют одинаковую длину и сонаправлены.

Определение. *Вектором* называется любой из равных между собой направленных отрезков.

Итак, вектор – это множество, состоящее из бесконечного числа элементов. Если $\overrightarrow{AB} \in \vec{a}$, то говорят, что направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ *изображает вектор* $\vec{a}$*;* при этом на чертеже рисуется именно направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$, а говорят про него «вектор». В частности, когда мы говорим «отложим вектор $\vec{a}$ от точки O», то имеется в виду, что строится направленный отрезок $\overrightarrow{OA}$, изображающий вектор $\vec{a}$.

После того как дано определение вектора, все понятия, связанные с направленными отрезками, переносятся на векторы следующим образом: говорят, что векторы обладают некоторым свойством, если этим свойством обладают изображающие их направленные отрезки. Например, векторы называются *равными,* если равны изображающие их направленные отрезки.

Определение. *Суммой* $\vec{a}+\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, начало которого находится в произвольной точке A пространства, а конец строится следующим образом: отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$, а от точки B вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$; тогда точка C и будет концом вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Определение. *Произведением* $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α

называется вектор длины $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, сонаправленный с вектором $\vec{a}$, если $\alpha>0$, и направленный противоположно вектору $\vec{a}$, если $\alpha<0$.

Свойства сложения векторов:

1. $\forall\vec{a},\vec{b}:\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения).
2. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}:\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (ассоциативность сложения).
3. $\forall\vec{a}:\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.
4. $\forall\vec{a}:\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число:

1. $\forall\vec{a};\forall\alpha,\beta\in R:(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность).
2. $\forall\vec{a};\forall\alpha,\beta\in R:(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивность по отношению к сложению действительных чисел).
3. $\forall\vec{a},\vec{b};\forall\alpha\in R:\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (дистрибутивность по отношению к сложению векторов).
4. $\forall\vec{a}:1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Дополнительные операции

Определение. *Разностью* $\vec{a}-\vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, равный $\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$.

Определение. *Частным* $\vec{a}/\alpha$ от деления вектора $\vec{a}$ на число α $(\alpha\neq 0)$, называется вектор, равный $(1/\alpha)\cdot\vec{a}$.

Определение. Три ненулевых вектора называются *компланарными*, если будучи отложенными от одной точки, оказываются лежащими в одной плоскости. (Нулевой вектор компланарен с любыми двумя векторами).

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ называется выражение вида $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\dots+\alpha_n\vec{a}_n$, где коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ – действительные числа.

Определение. Если вектор представлен как линейная комбинация некоторых векторов, то говорят, что он *разложен* по этим векторам.

Определение. Линейная комбинация векторов называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае.

Определение. Набор векторов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,\dots,\vec{a}_n$ называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору, и *линейно независимым* в противном случае.

Теорема. Для того чтобы два вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были коллинеарны.

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы. Требуется доказать, что они коллинеарны. Так как векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы, то существуют числа α_1 и α_2, не равные нулю одновременно, и такие, что $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2=\vec{0}$. Пусть, например, $\alpha_1\neq 0$, тогда $\vec{a}_1=-(\alpha_2/\alpha_1)\cdot\vec{a}_2$; отсюда следует, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны.

Доказательство достаточности. Дано: векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны. Требуется доказать, что они линейно зависимы.

Если $\vec{a}_1=\vec{0}$, то имеет место равенство $1\cdot\vec{a}_1+0\cdot\vec{a}_2=\vec{0}$, а это означает, что векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы ($\alpha_1=1\neq 0$).

Если же $\vec{a}_1\neq\vec{0}$, то, беря α в соответствии с определением произведения вектора на число, находим $\vec{a}_2=\alpha\cdot\vec{a}_1$, или $-\alpha\cdot\vec{a}_1+1\cdot\vec{a}_2=\vec{0}$, значит векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ линейно зависимы.

Теорема. Для того чтобы три вектора были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы они были компланарны.

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависимы. Требуется доказать, что они компланарны.

Так как векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависимы, то существуют числа α_1, α_2, α_3, среди которых есть хотя бы одно, не равное нулю, такие, что $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+\alpha_3\vec{a}_3=\vec{0}$. Пусть, например, $\alpha_3\neq 0$, тогда $\vec{a}_3=-(\alpha_1/\alpha_3)\cdot\vec{a}_1-(\alpha_2/\alpha_3)\cdot\vec{a}_2$.

Векторы $-(\alpha_1/\alpha_3)\cdot\vec{a}_1$ и $-(\alpha_2/\alpha_3)\cdot\vec{a}_2$ коллинеарны соответственно векторам $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$; очевидно, сумма таких векторов, то есть вектор $\vec{a}_3$ будет компланарен с векторами $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$.

Доказательство достаточности. Дано: векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ компланарны. Требуется доказать, что эти векторы линейно зависимы.

Если векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ коллинеарны, то они линейно зависимы (теорема выше), т. е. найдутся числа α_1 и α_2, из которых по крайней мере одно не равно нулю и такие, что $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2=\vec{0}$, но тогда и $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+0\vec{a}_3=\vec{0}$, т. е. векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависимы. Пусть векторы $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ неколлинеарны. Отложим векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ от одной и той же точки O: $\overrightarrow{OA_1}=\vec{a}_1$;, $\overrightarrow{OA_2}=\vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3}=\vec{a}_3$. Так как векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ компланарны, то точки O, A_1, A_2, A_3 лежат в одной плоскости. Спроектируем точку A_3 на прямую OA_1 параллельно прямой OA_2; пусть P – эта проекция. Тогда $\overrightarrow{OA_3}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PA_3}$ и так как $\overrightarrow{OP}\parallel\vec{a}_1$ и $\vec{a}_1\neq 0$, $\overrightarrow{PA_3}\parallel\vec{a}_2$ и $\vec{a}_2\neq 0$, то беря α_1 и α_2 в соответствии с определением произведения вектора на число, находим $\overrightarrow{OP}=\alpha_1\vec{a}_1$, $\overrightarrow{PA_3}=\alpha_2\vec{a}_2$, так что $\vec{a}_3=\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2$, т.е. векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ линейно зависимы.

Теорема. Всякие четыре вектора в пространстве (R^3) линейно зависимы.

Доказательство. Если векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ компланарны, то они линейно зависимы (теорема выше), т. е. найдутся числа α_1, α_2, α_3, из которых по крайней мере одно не равно нулю и такие, что $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0}$, но тогда и $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 + 0\vec{a}_4 = \vec{0}$, т. е. векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ линейно зависимы. Пусть векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ некомпланарны. Отложим все векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ от одной и той же точки O: $\overrightarrow{OA_1} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{OA_3} = \vec{a}_3$, $\overrightarrow{OA_4} = \vec{a}_4$. Пусть P – проекция точки A_4 на плоскость OA_1A_2 параллельно прямой OA_3, а Q – проекция точки P на прямую OA_1 параллельно прямой OA_2. Тогда $\vec{a}_4 = \overrightarrow{OA_4} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{PA_4}$. Векторы $\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{QP}, \overrightarrow{PA_4}$ соответственно коллинеарны векторам $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$. Беря α_1, α_2 и α_3 в соответствии с определением произведения вектора на число, находим $\overrightarrow{OQ} = \alpha_1\vec{a}_1$, $\overrightarrow{QP} = \alpha_2\vec{a}_2$, $\overrightarrow{PA_4} = \alpha_3\vec{a}_3$, так что $\vec{a}_4 = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3$, т. е. векторы $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ линейно зависимы.

Определение. *Базисом* называется максимальный набор линейно независимых векторов, взятых в определенном порядке.

Из доказанных теорем следует, что базисом на плоскости является упорядоченная пара неколлинеарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$, лежащих в этой плоскости, а базисом в пространстве – упорядоченная тройка некомпланарных векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Определение. Если вектор $\vec{a}$ разложен по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, т. е. $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$, то числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ называются *координатами* вектора $\vec{a}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Теорема. Всякий вектор в пространстве (R^3) может быть и при том единственным образом разложен по базису в этом пространстве.

Доказательство существования разложения. Пусть есть вектор $\vec{a}$ и базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. Так как всякие четыре вектора в пространстве линейно зависимы, то найдутся числа α_0, α_1, α_2, α_3, из которых по крайней мере одно не равно нулю и такие, что $\alpha_0\vec{a} + \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}$. Если α_0=0, то $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \vec{0}$, где хотя бы одно из чисел α_1, α_2, α_3 не равно нулю. Следовательно, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно зависимы, что противоречит определению базиса. Т. е. $\alpha_0 \neq 0$. Тогда $\vec{a} = -(\alpha_1 / \alpha_0)\vec{e}_1 - (\alpha_2 / \alpha_0)\vec{e}_2 - (\alpha_3 / \alpha_0)\vec{e}_3$ – разложение вектора $\vec{a}$ по базису $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Доказательство единственности разложения. Пусть есть два разложения $\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3$ и $\vec{a} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$. Тогда $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \alpha_3\vec{e}_3 = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \beta_3\vec{e}_3$. Следовательно, получаем, что $(\alpha_1 - \beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\vec{e}_2 + (\alpha_{31} - \beta_3)\vec{e}_3 = \vec{0}$. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – базис, то векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ линейно независимы, т. е. $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0$, $\alpha_3 - \beta_3 = 0$. Значит,

$\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2$, $\alpha_3 = \beta_3$, и разложение единственно.

Координаты вектора в данном базисе определяются однозначно, поэтому если нам каким-то способом удалось их определить, то можно быть уверенными, что и любым другим способом получится тот же самый результат. При этом, конечно, если мы сменим базис, то координаты вектора, вообще говоря, изменятся.

Определение. Пусть даны два направленных отрезка $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ с общим началом. *Углом* между ними назовем наименьший из плоских углов, образованных лучами *OA* и *OB*, если $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ и $\overrightarrow{OB} \neq \vec{0}$. Если же хотя бы один из этих направленных отрезков нулевой, то угол между ними не определяется.

Определение. *Углом между двумя векторами* называется угол между изображающими их направленными отрезками, отложенными от одной точки пространства. (Обратите внимание на разницу между понятиями угла между прямыми и угла между векторами: угол между прямыми не может быть тупым, в то время как угол между векторами – может.)

Определение. Два вектора называются *ортогональными*, если угол между ними равен 90°.

1.2. Скалярное произведение векторов

Определение. *Скалярным произведением* двух ненулевых векторов называется число, равное произведению их длин на косинус угла между ними. Если хотя бы один из векторов нулевой, то их скалярное произведение по определению полагают равным нулю.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность).

2. $\forall \vec{a}:\ \vec{a} \cdot \vec{a} = \left|\vec{a}\right|^2 \geq 0$; выражение $\vec{a} \cdot \vec{a}$ называется *скалярным квадратом* вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

3. Если $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$, то $\vec{a} = \vec{0}$.

4. $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c};\ \forall \alpha, \beta \in R:\ (\alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c} = \alpha \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) + \beta \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c})$ (линейность).

Теорема. Для того чтобы два ненулевых вектора были ортогональны, необходимо и достаточно, чтобы их скалярное произведение равнялось нулю.

Доказательство необходимости. Дано: $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$. Требуется доказать, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Действительно, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos 90^{\circ} = 0$.

Доказательство достаточности. Дано: $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Требуется доказать, что $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Так как $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, то $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})=0$. Поскольку $\vec{a}\neq\vec{0}$, $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\cos\angle(\vec{a};\vec{b})=0$. Следовательно, $\angle(\vec{a};\vec{b})=90^\circ$, т. е. $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Определение. Базис называется *ортогональным*, если его векторы попарно ортогональны.

Определение. Базис называется *нормированным*, если его векторы имеют единичную длину.

Определение. Базис называется *ортонормированным*, если он ортогональный и нормированный.

Определение. Векторы ортонормированного базиса называются *ортами*.

Определение. *Направляющими косинусами* вектора называются косинусы углов α,β,γ, образуемых этим вектором с векторами ортонормированного базиса.

Замечание. $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{e}_1}{|\vec{a}|\cdot|\vec{e}_1|}=\dfrac{(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\cdot\vec{e}_1}{|\vec{a}|}=\dfrac{a_1(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)}{|\vec{a}|}=\dfrac{a_1}{|\vec{a}|}$.

Аналогично $\cos\beta=a_2/|\vec{a}|$, $\cos\gamma=a_3/|\vec{a}|$.

Свойство направляющих косинусов: $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

Определение. *Проекцией* вектора $\vec{a}$ на ненулевой вектор $\vec{b}$ называется вектор, сонаправленный вектору $\vec{b}$ и имеющий длину (с учетом знака) $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\cos\angle(\vec{a};\vec{b})$ (или, учитывая определение скалярного произведения, $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$).

Теорема. В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

Доказательство. Пусть $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$ и $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$ в ортонормированном базисе $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$. Так как $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – ортонормированный базис, то $|\vec{e}_1|=|\vec{e}_2|=|\vec{e}_3|=1$; $\vec{e}_1\perp\vec{e}_2, \vec{e}_1\perp\vec{e}_3, \vec{e}_2\perp\vec{e}_3$. Следовательно, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1=1$, $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2=1$, $\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3=1$; $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=0$, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=0$, $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=0$. Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3)\,(b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3)=$$

$$=a_1b_1\underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_1)}_{1}+a_1b_2\underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2)}_{0}+a_1b_3\underbrace{(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3)}_{0}+$$

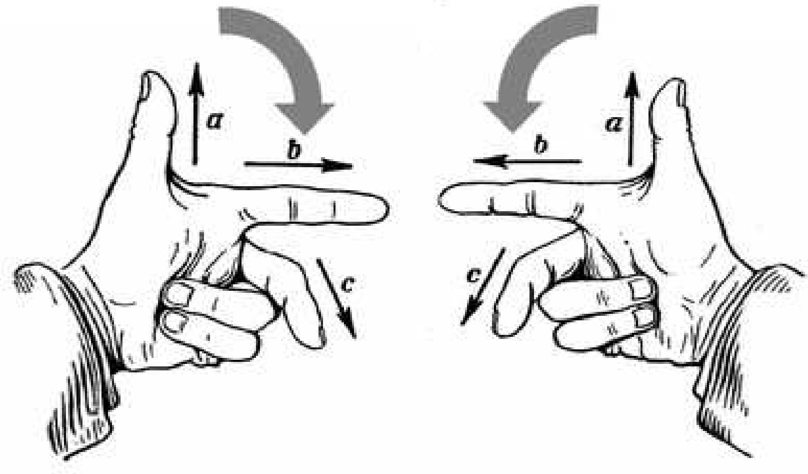
$$+a_2b_1\underbrace{(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1)}_{0}+a_2b_2\underbrace{(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_2)}_{1}+a_2b_3\underbrace{(\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3)}_{0}+$$

$$+a_3b_1\underbrace{(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1)}_{0}+a_3b_2\underbrace{(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2)}_{0}+a_3b_3\underbrace{(\vec{e}_3\cdot\vec{e}_3)}_{1}=$$

$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

1.3. Векторное произведение векторов

Определение. Упорядоченная тройка некомпланарных векторов называется *правой тройкой*, если из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого ко второму виден против часовой стрелки (рис. 1). В противном случае она называется *левой тройкой*.



Левая тройка Правая тройка

Рис. 1

При перестановке в упорядоченной тройке двух любых векторов тройка меняет ориентацию на противоположную.

Определение. *Векторным произведением* $\vec{a}\times\vec{b}$ неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, такой, что:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{b})$;

2. $\vec{c}\perp\vec{a}$ и $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3. вектор $\vec{c}$ направлен так, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ в указанном порядке образуют правую тройку.

В случае, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, их векторное произведение равно $\vec{0}$.

Свойства векторного произведения:

1. $\forall\vec{a},\vec{b}:\ \vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$ (антикоммутативность).

2. $\forall\vec{a}:\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$.

3. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c};\ \forall\alpha,\beta\in R:\ (\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\cdot(\vec{a}\times\vec{c})+\beta\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$ (линейность).

Подобно тому, как это было сделано для скалярного произведения, можно получить выражение для векторного произведения векторов через их координаты в заданном базисе. Чтобы записать их в компактной и удобной для запоминания форме, нам потребуется понятие *определителя*.

Определение. Рассмотрим четыре числа: a, b, c и d. Из них можно составить таблицу 2×2: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, которая называется *квадратной матрицей второго порядка.*

Определение. Числа a, b, c и d называются *элементами* матрицы. Элементы a и b образуют первую строку матрицы, элементы c и d – вторую строку; элементы a и c образуют первый столбец матрицы, элементы b и d – второй столбец.

Определение. Число $ad–bc$ называется *определителем* (или *детерминантом)* матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ и обозначается так: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Определение. Аналогично, таблица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$, составленная из девяти чисел, называется *квадратной матрицей третьего порядка.*

Как и в случае матрицы второго порядка, вводятся понятия элементов матрицы, ее строк и столбцов. Строки по-прежнему нумеруются сверху вниз, а столбцы – слева направо.

Определение. Число $a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$ называется *определителем* (или *детерминантом*) матрицы $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ и обозначается $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. Более полная теория матриц и определителей будет дана позже.

Теорема. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, и в этом базисе $\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ и $\vec{b} = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3$. Тогда векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ вычисляется по следующей формуле $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Доказательство. Так как $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, то $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$; $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$. Следовательно, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_1 = \vec{0}$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_2 = \vec{0}$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_3 = \vec{0}$. Поскольку, во-первых, $|\vec{e}_3| = |\vec{e}_1| \cdot |\vec{e}_2| \cdot \sin\angle(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$, во-вторых $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$, и в-третьих, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – правая тройка, то $\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$. Аналогично, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = -\vec{e}_3$, $\vec{e}_1 \times \vec{e}_3 = -\vec{e}_2$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$, $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$, $\vec{e}_3 \times \vec{e}_2 = -\vec{e}_1$. Тогда $\vec{a}\times\vec{b} = (a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3) \times (b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 + b_3\vec{e}_3) =$

$$
\begin{aligned}
&= a_1b_1\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_1)}_{\vec{0}} + a_1b_2\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_2)}_{\vec{e}_3} + a_1b_3\underbrace{(\vec{e}_1\times\vec{e}_3)}_{-\vec{e}_2} +\\
&+ a_2b_1\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_1)}_{-\vec{e}_3} + a_2b_2\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_2)}_{\vec{0}} + a_2b_3\underbrace{(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}_{\vec{e}_1} +\\
&+ a_3b_1\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_1)}_{\vec{e}_2} + a_3b_2\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_2)}_{-\vec{e}_1} + a_3b_3\underbrace{(\vec{e}_3\times\vec{e}_3)}_{\vec{0}} =\\
&= a_1b_2\vec{e}_3 - a_1b_3\vec{e}_2 - a_2b_1\vec{e}_3 + a_2b_3\vec{e}_1 + a_3b_1\vec{e}_2 - a_3b_2\vec{e}_1 =\\
&= (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{e}_1 - (a_1b_3 - a_3b_1)\vec{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{e}_3 =\\
&= \vec{e}_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix} - \vec{e}_2\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix} + \vec{e}_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}.
\end{aligned}
$$

Теорема. Длина вектора векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как на смежных сторонах.

Доказательство. $S_{\text{пар}} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{b}) = |\vec{a}\times\vec{b}|$

Теорема. Для того чтобы два вектора в пространстве были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось $\vec{0}$.

Доказательство необходимости. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ по определению.

Доказательство достаточности. Пусть $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$. Тогда $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle(\vec{a};\vec{b})=0$. Если $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, поскольку нулевой вектор коллинеарен любому. Если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то $\sin\angle(\vec{a};\vec{b})=0$. Следовательно, $\angle(\vec{a};\vec{b})=0^\circ$ или $\angle(\vec{a};\vec{b})=180^\circ$, т. е. векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны.

1.4. Смешанное произведение векторов

Определение. *Смешанным произведением* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}$ и вектора $\vec{c}$.

Свойства смешанного произведения:

1. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}$: $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{c},\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{c},\vec{a})=-(\vec{b},\vec{a},\vec{c})=-(\vec{c},\vec{b},\vec{a})=-(\vec{a},\vec{c},\vec{b})$ (полукоммутативность).

2. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d};\ \forall\alpha,\beta\in R$: $(\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b},\vec{c},\vec{d})=\alpha\cdot(\vec{a},\vec{c},\vec{d})+\beta\cdot(\vec{b},\vec{c},\vec{d})$ (линейность).

Теорема. Пусть $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, и в этом базисе $\vec{a}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3$, $\vec{b}=b_1\vec{e}_1+b_2\vec{e}_2+b_3\vec{e}_3$ и $\vec{c}=c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3$. Тогда смешанное произведение $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ вычисляется по следующей формуле $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.

Доказательство. Так как $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3$ – правый ортонормированный базис, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{e}_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-\vec{e}_2\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+\vec{e}_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix})\cdot$

$$\cdot(c_1\vec{e}_1+c_2\vec{e}_2+c_3\vec{e}_3)=c_1\cdot\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}-c_2\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}+c_3\cdot\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=$$

$=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$. (Убедитесь самостоятельно в справедливости последнего равенства).

Теорема. Модуль смешанного произведения $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$ численно равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, как на смежных сторонах.

Доказательство. $V_{пар}=S_{осн}\cdot H=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)\cdot|\vec{h}|=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{h}|=$

$=|\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot|\cos\angle(\vec{h},\vec{c})|=\left||\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{h},\vec{c})\right|=$

$=\left||\vec{a}\times\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})\right|=|(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}|=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$.

Теорема. Для того чтобы три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы их смешанное произведение равнялось нулю.

Доказательство необходимости. Дано: векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Рассмотрим различные случаи, учитывая, что $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})$. Если $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}=\vec{0}$ или $\vec{c}=\vec{0}$, то $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$. Иначе, если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то $\sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)=0$. Следовательно, $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$. Иначе, поскольку вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{c}$ лежит в ней, то $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$. Следовательно, $\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=90^\circ$, а $\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=0$, и тогда $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$.

Доказательство достаточности. Пусть $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=0$, т.е. $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\angle\left(\vec{a};\vec{b}\right)\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=0$. Если $\vec{a}=\vec{0}$, $\vec{b}=\vec{0}$ или $\vec{c}=\vec{0}$, то векторы

$\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны, поскольку $\vec{0}$ компланарен с любыми двумя векторами. Иначе, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они линейно зависимы, тогда любой вектор $\vec{c}$ линейно зависим с ними (покажите это строго по определению линейной зависимости), а тогда векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны. Иначе, $\cos\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=0$, т. е. $\angle(\vec{a}\times\vec{b},\vec{c})=90°$. Следовательно, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{c}$. Поскольку вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ ортогонален плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, а вектор $\vec{c}$ ортогонален ему, то вектор $\vec{c}$ лежит в плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.

1.5. Решение задач на векторы

В задачах, если не оговорено противное, базис считать правым ортонормированным.

Пример 1. В четырехугольнике *ABCD* точки *P* и *Q* – середины сторон *BC* и *AD*, соответственно. Выразить вектор $\overrightarrow{PQ}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$.

Решение. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}=$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. Как видим, вектор $\overrightarrow{BC}$ в это выражение входит с нулевым коэффициентом (отсутствует).

Пример 2. В параллелограмме *ABCD* точки *P* и *Q* – середины сторон *BC* и *AD*, соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$, если за базисные векторы приняты $\vec{e}_1=\overrightarrow{AD}$ и $\vec{e}_2=\overrightarrow{AB}$.

Решение. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{CQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\vec{e}_1-\frac{1}{2}\vec{e}_2$, т. е. $\overrightarrow{PQ}=(\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$.

Пример 3. В пирамиде *ABCD* точки *P* и *Q* – середины ребер *AD* и *BC*, соответственно. Найти координаты вектора $\overrightarrow{PQ}$ в базисе $\vec{e}_1=\overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2=\overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_3=\overrightarrow{AD}$.

Решение. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}=$

$=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\vec{e}_1+\frac{1}{2}\vec{e}_2-\frac{1}{2}\vec{e}_3$, т. е. $\overrightarrow{PQ}=(\frac{1}{2};\frac{1}{2};-\frac{1}{2})$ в базисе $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$.

Пример 4. Дано: $\vec{a}=(-1;2;5)$, $\vec{b}=(1;3;7)$. Найти $7\vec{a}-5\vec{b}$.

Решение. $7\vec{a}=(-7;14;35)$, $5\vec{b}=(5;15;35)$. Тогда $7\vec{a}-5\vec{b}=(-12;-1;0)$.

Пример 5. Проверить, что векторы $\vec{a}=(-1;3)$ и $\vec{b}=(2;2)$ на плоскости не коллинеарны, и разложить вектор $\vec{c}=(7;-5)$ по базису $\vec{a},\vec{b}$.

Решение. Так как $-\frac{1}{2} \neq \frac{3}{2}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Следовательно, они образуют базис на плоскости. Тогда $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Расписывая по каждой координате, получаем уравнения $7 = x \cdot (-1) + y \cdot 2$ и $2 = x \cdot 3 + y \cdot 2$, откуда $x = -3, y = 2$. Таким образом, $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Пример 6. Найти длину вектора $\vec{a} = (-3;4)$ на плоскости и вектора $\vec{b} = (1;-2;2)$ в пространстве.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$, $|\vec{b}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$.

Пример 7. Найти направляющие косинусы вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1;-1;3)$, $B(2;1;1)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$. Тогда $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$. Следовательно, $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, $\cos\beta = \frac{2}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$.

Пример 8. Вектор $\vec{a}$ образует с осями OX и OY углы 60°. Какой угол он образует с осью OZ?

Решение. Так как $\cos^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2\gamma = 1$, то $\cos\gamma = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Следовательно, $\gamma = 45^\circ$ или $\gamma = 135^\circ$.

Пример 9. Вектор $\vec{a}$ образует с осями координат равные острые углы. Найти эти углы.

Решение. Так как $\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, то $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Учитывая, что углы острые, $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Тогда $\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 10. Даны точки $A(2;0;1)$, $B(2;1;0)$, $C(1;0;0)$. Найти угол ABC.

Решение. $\overrightarrow{BA} = (0;-1;1)$, $\overrightarrow{BC} = (-1;-1;0)$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0}{\sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 0^2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = 60^\circ$.

Пример 11. Найти проекцию вектора $\vec{a} = (1;2;3)$ на ось l, образующую с координатными осями равные острые углы.

Решение. В качестве $\vec{l}$ можно взять $(1;1;1)$. Тогда

$$Пр_{\vec{l}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}.$$

Пример 12. Даны векторы $\vec{a} = (1;2;-1)$ и $\vec{b} = (2;-1;3)$. Найти $\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Решение. $\text{Пр}_{\vec a}\vec b = \dfrac{\vec a\cdot\vec b}{|\vec a|} = \dfrac{1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 3}{\sqrt{6}} = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Пример 13. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1\cdot(-5) - (-2)\cdot 3 = 1$.

Пример 14. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 9 - 2\cdot 2 + 3\cdot(-2) = -1.$$

Пример 15. Являются ли векторы $\vec a = (-4;1;-7)$, $\vec b = (2;5;9)$ и $\vec c = (-8;13;-3)$ компланарными?

Решение. $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -7 \\ 2 & 5 & 9 \\ -8 & 13 & -3 \end{vmatrix} = -4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 13 & -3 \end{vmatrix} - 1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 9 \\ -8 & -3 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -8 & 13 \end{vmatrix} =$

$= -4\cdot(-132) - 1\cdot 66 - 7\cdot 66 = 0$. Следовательно, векторы $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ – компланарны.

Пример 16. Даны векторы $\vec a = (-1;0;1)$ и $\vec b = (2;1;3)$. Найти $\vec a\times\vec b$.

Решение. $\vec a\times\vec b = \begin{vmatrix} \vec i & \vec j & \vec k \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\vec i - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}\vec j + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\vec k = -\vec i + 5\vec j - \vec k$. Т.е. $\vec a\times\vec b = (-1;5;-1)$.

Пример 17. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec a = (-1;3)$ и $\vec b = (1;2)$.

Решение. Вводя третью координату, получаем $\vec a = (-1;3;0)$ и $\vec b = (1;2;0)$. Тогда $S = |\vec a\times\vec b| = |0\vec i + 0\vec j + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\vec k| = \sqrt{0+0+(-5)^2} = 5$.

Пример 18. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;0;-1)$, $B(0;2;-3)$, $C(4;4;1)$.

Решение. $\overrightarrow{AB} = (1;2;-2)$, $\overrightarrow{AC} = (5;4;2)$. Тогда

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 5 & 2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}\vec{k}|=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+(-12)^2+(-6)^2}=\frac{18}{2}=9.$$

Пример 19. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Выразить векторы $\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})$ и $\vec{y}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})}{2}\times(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2})$ через вектор $\vec{z}=\vec{a}\times\vec{b}$.

Решение. По свойствам векторного произведения

$$\vec{x}=(\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\times\vec{a}+\vec{b}\times\vec{a}-\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{b}=-2(\vec{a}\times\vec{b})=-2\vec{z},$$

$$\vec{y}=\frac{(\vec{a}+\vec{b})}{2}\times(\vec{b}-\frac{\vec{a}}{2})=\frac{1}{2}(\vec{a}\times\vec{b})+\frac{1}{2}(\vec{b}\times\vec{b})-\frac{1}{4}(\vec{a}\times\vec{a})-\frac{1}{4}(\vec{b}\times\vec{a})=\frac{3}{4}(\vec{a}\times\vec{b})=\frac{3}{4}\vec{z}.$$

Пример 20. Найти объем параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и высоту, опущенную из вершины A_1 на основание $ABCD$, если $A(1;2;3)$, $B(9;6;4)$, $D(3;0;4)$, $A_1(5;2;6)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(8;4;1)$, $\overrightarrow{AD}=(2;-2;1)$, $\overrightarrow{AA_1}=(4;0;3)$. Тогда

$$V=|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA_1})|=|\begin{vmatrix}8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 4 & 0 & 3\end{vmatrix}|=48.$$ Площадь основания

$$S=|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 8 & 4 & 1\\ 2 & -2 & 1\end{vmatrix}|=\sqrt{6^2+(-6)^2+(-24)^2}=18\sqrt{2}.$$ Тогда высота

$$h=\frac{V}{S}=\frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Пример 21. Найти объем тетраэдра $ABCD$ и высоту, опущенную из вершины D, если $A(0;0;2)$, $B(3;0;5)$, $C(1;1;0)$, $D(4;1;2)$.

Решение. $\overrightarrow{AB}=(3;0;3)$, $\overrightarrow{AC}=(1;1;-2)$, $\overrightarrow{AD}=(4;1;0)$. Тогда

$$V=\frac{1}{6}|(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}|\begin{vmatrix}3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 4 & 1 & 0\end{vmatrix}|=\frac{1}{6}|-3|=\frac{1}{2}.$$ Площадь основания

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}|=\frac{1}{2}|\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & 0 & 3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}|=\frac{1}{2}\sqrt{(-3)^2+9^2+3^2}=\frac{3\sqrt{11}}{2}.$$ Тогда высота

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{1}{\sqrt{11}}.$$

1.6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 11 & 55 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \log_a b & e^{-a} \\ e^a & \log_b a \end{vmatrix}$.

Задача 2. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{vmatrix} = 1$; б) $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ x-2 & x \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} \sin x + 1 & \sin x - 2 \\ -2 & \sin x \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} \log_2 x - 3 & 2 \\ \log_2 x + 3 & \log_2 x \end{vmatrix} = 0$.

Задача 3. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 1 \\ -5 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin x & 0 & -\cos x \end{vmatrix}$.

Задача 4. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & x & 0 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix} = -1$; б) $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ x & 1 & x \\ -5 & -5 & 4 \end{vmatrix} = 0$;

в) $\begin{vmatrix} a & a & a \\ -a & a & x \\ -a & -a & x \end{vmatrix} = 0$; г) $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix} = 0$.

Задача 5. Написать разложение вектора $\vec{x}$ по векторам $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

а) $\vec{x} = (0;-8;9), \vec{p} = (0;-2;1), \vec{q} = (3;1;-1), \vec{r} = (4;0;1)$;

б) $\vec{x} = (8;-7;-13), \vec{p} = (0;1;5), \vec{q} = (3;-1;2), \vec{r} = (-1;0;1)$;

в) $\vec{x} = (2;7;5), \vec{p} = (1;0;1), \vec{q} = (1;-2;0), \vec{r} = (0;3;1)$;

г) $\vec{x} = (-15;-20;-1), \vec{p} = (0;2;1), \vec{q} = (0;1;-1), \vec{r} = (5;-3;2)$.

Задача 6. Коллинеарны ли векторы $\vec{c}_1$ и $\vec{c}_2$, построенные по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$?

а) $\vec{a} = (-1;2;8), \vec{b} = (3;7;-1), \vec{c}_1 = 4\vec{a} - 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 9\vec{b} - 12\vec{a}$;

б) $\vec{a} = (2;0;-5), \vec{b} = (1;-3;4), \vec{c}_1 = 2\vec{a} - 5\vec{b}, \vec{c}_2 = 5\vec{a} - 2\vec{b}$;

в) $\vec{a} = (4;2;-7), \vec{b} = (5;0;-3), \vec{c}_1 = \vec{a} - 3\vec{b}, \vec{c}_2 = 6\vec{b} - 2\vec{a}$;

г) $\vec{a} = (-1;3;4), \vec{b} = (2;-1;0), \vec{c}_1 = 6\vec{a} - 2\vec{b}, \vec{c}_2 = \vec{b} - 3\vec{a}$.

Задача 7. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

а) $A(1;4;-1), B(-2;4;-5), C(8;4;0)$;

б) $A(0;1;0), B(0;2;1), C(1;2;0)$;

в) $A(-4;0;4), B(-1;6;7), C(1;10;9)$;

г) $A(-2;4;-6), B(0;2;-4), C(-6;8;-10)$.

Задача 8. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) $\vec{a} = 6\vec{p} - \vec{q}, \vec{b} = 5\vec{q} + \vec{p}, |\vec{p}| = 1/2, |\vec{q}| = 4, \widehat{\vec{p};\vec{q}} = 5\pi/6$;

б) $\vec{a} = 2\vec{p} + 3\vec{q}, \vec{b} = \vec{p} - 2\vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 1, \widehat{\vec{p};\vec{q}} = \pi/3$;

в) $\vec{a} = 2\vec{p} - 3\vec{q}, \vec{b} = 5\vec{p} + \vec{q}, |\vec{p}| = 2, |\vec{q}| = 3, \widehat{\vec{p};\vec{q}} = \pi/2$;

г) $\vec{a} = 3\vec{p} + 2\vec{q}, \vec{b} = 2\vec{p} - \vec{q}, |\vec{p}| = 4, |\vec{q}| = 4, \widehat{\vec{p};\vec{q}} = 3\pi/4$.

Задача 9. Компланарны ли векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$?

а) $\vec{a} = (4;1;1), \vec{b} = (-9;-4;-9), \vec{c} = (6;2;6)$;

б) $\vec{a} = (-3;3;3), \vec{b} = (-4;7;6), \vec{c} = (3;0;-1)$;

в) $\vec{a} = (-7;10;-5), \vec{b} = (0;-2;-1), \vec{c} = (-2;4;-1)$;

г) $\vec{a} = (7;4;6), \vec{b} = (2;1;1), \vec{c} = (19;11;17)$.

Задача 10. Вычислить объем тетраэдра с вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$:

а) $A_1(-2;-1;-1), A_2(0;3;2), A_3(3;1;-4), A_4(-4;7;3)$;

б) $A_1(-3;-5;6), A_2(2;1;-4), A_3(0;-3;-1), A_4(-5;2;-8)$;

в) $A_1(2;-4;-3), A_2(5;-6;0), A_3(-1;3;-3), A_4(-10;-8;7)$;

г) $A_1(1;-1;2), A_2(2;1;2), A_3(1;1;4), A_4(6;-3;8)$.

Задача 11. Найти расстояние от точки M_0 до плоскости, проходящей через точки M_1, M_2, M_3:

а) $M_1(1;1;2), M_2(-1;1;3), M_3(2;3;8), M_0(2;-2;4)$;

б) $M_1(2;3;1), M_2(4;1;-2), M_3(-5;-4;8), M_0(6;3;7)$;

в) $M_1(1;1;-1), M_2(2;3;1), M_3(-3;-7;6), M_0(3;2;1)$;

г) $M_1(1;5;-7), M_2(-3;6;3), M_3(1;-1;2), M_0(-2;7;3)$.

Задача 12. Найти единичный вектор, перпендикулярный плоскости ABC:

а) $A(-1;2;-2), B(13;14;1), C(14;15;2)$;

б) $A(7;-5;0), B(8;3;-1), C(8;5;1)$;

в) $A(-3;6;4), B(8;-3;5), C(0;-3;7)$;

г) $A(2;5;-3), B(7;8;-1), C(9;7;4)$.

Задача 13. Найти угол между плоскостями:

а) $x + y + z\sqrt{2} - 1 = 0,\ \ 3x + y + z\sqrt{2} - 5 = 0$;

б) $3x - y - 5 = 0,\ \ 2x + y - 3 = 0$;

в) $x + y + z\sqrt{2} - 3 = 0,\ \ x - y + z\sqrt{2} - 1 = 0$;

г) $x+2y-2z-7=0,\ \ x+y-35=0$.

Задача 14. Найти абсциссу точки A, равноудаленной от точек B и C:

а) $A(x;0;0), B(1;5;9), C(3;7;11)$;

б) $A(x;0;0), B(4;6;8), C(2;4;6)$;

в) $A(x;0;0), B(1;2;3), C(2;6;10)$;

г) $A(x;0;0), B(-2;-4;-6), C(-1;-2;-3)$.

Задача 15. Исследовать на линейную зависимость систему векторов:

а) $\vec{a}=(1;2;3), \vec{b}=(6;5;9), \vec{c}=(7;8;9)$;

б) $\vec{a}=(2;1;0), \vec{b}=(-5;0;3), \vec{c}=(3;4;3)$;

в) $\vec{a}=(2;0;2), \vec{b}=(1;-1;0), \vec{c}=(0;-1;-2)$;

г) $\vec{a}=(-2;1;5), \vec{b}=(4;-3;0), \vec{c}=(0;-1;10)$.

1.7. Ответы

1. а) -1; б) 0; в) 1; г) 0. **2.** а) ± 1; б) $-6;1$; в) $\dfrac{\pi}{2}+2\pi k, k\in Z$; г) $64;0,5$. **3.** а) 40; б) -21; в) 0; г) 1. **4.** а) $0,6$; б) $1;-14/9$; в) Если $a=0$, то $x\in R$, если $a\neq 0$, то $x=-a$; г) Если $ab+bc+ac=0$ и $abc=0$, то $x\in R$, если $ab+bc+ac=0$ и $abc\neq 0$, то $x\in\varnothing$, если $ab+bc+ac\neq 0$, то $x=-\dfrac{abc}{ab+bc+ac}$. **5.** а) $\vec{x}=2\vec{p}-4\vec{q}+3\vec{r}$; б) $\vec{x}=-4\vec{p}+3\vec{q}+\vec{r}$; в) $\vec{x}=4\vec{p}-2\vec{q}+\vec{r}$; г) $\vec{x}=-8\vec{p}-13\vec{q}-3\vec{r}$. **6.** а) да; б) нет; в) да; г) да. **7.** а) 135°; б) 60°; в) 0°; г) 180°. **8.** а) 31; б) $7\sqrt{3}$; в) 102; г) $56\sqrt{2}$. **9.** а) нет; б) да; в) нет; г) да. **10.** а) $V=70/3; h=140/\sqrt{1021}$; б) $V=191/6; h=191/\sqrt{573}$; в) $V=73; h=146/\sqrt{83}$; г) $V=6; h=3\sqrt{6}$. **11.** а) $49/(3\sqrt{21})$; б) $40/\sqrt{42}$; в) $3/\sqrt{5}$; г) $35/\sqrt{737}$. **12.** а) $(\pm\dfrac{9}{\sqrt{206}};\mp\dfrac{11}{\sqrt{206}};\pm\dfrac{2}{\sqrt{206}})$; б) $(\pm\dfrac{9}{\sqrt{83}};\mp\dfrac{1}{\sqrt{83}};\pm\dfrac{1}{\sqrt{83}})$; в) $(\pm\dfrac{3}{\sqrt{178}};\pm\dfrac{5}{\sqrt{178}};\pm\dfrac{12}{\sqrt{178}})$; г) $(\pm\dfrac{17}{\sqrt{851}};\mp\dfrac{21}{\sqrt{851}};\mp\dfrac{11}{\sqrt{851}})$. **13.** а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 45°. **14.** а) 18; б) 15; в) 63; г) -21. **15.** а) линейно независимы; б) линейно зависимы; в) линейно независимы; г) линейно зависимы.

2. ЛИНИИ И ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Прямая на плоскости

Теорема. Прямая, проходящая через точку $M_0(x_0,y_0)$ под углом α к положительному направлению оси OX $(\alpha \neq 90^\circ)$ имеет уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент.

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка прямой (рис. 2). Рассмотрим случай $0^\circ<\alpha<90^\circ$ (другой случай рассматривается аналогично). Так как прямые (N,M_0) и (OX) параллельны, то $\angle MM_0N=\alpha$. Тогда $k=\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{|MN|}{|M_0N|}=\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$.

Следовательно, $y-y_0=k(x-x_0)$.

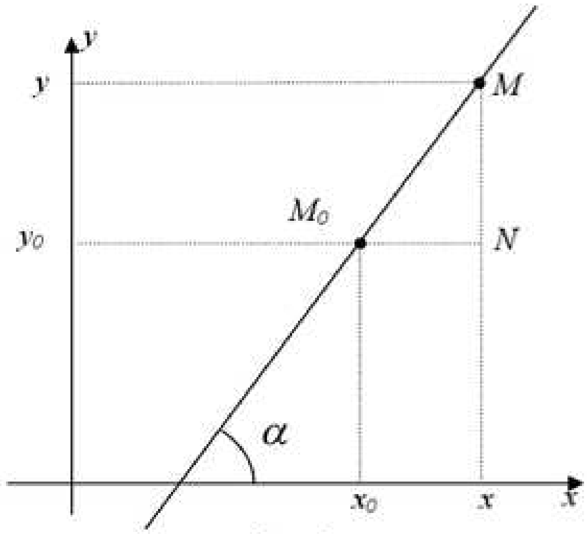


Рис. 2

Следствие. Если $M_0 \in OY$, т. е. $M_0(0,b)$, то уравнение прямой, проходящей через эту точку под углом α к положительному направлению оси OX $(\alpha \neq 90^\circ)$ имеет уравнение $y=k\cdot x+b$, где $k=\operatorname{tg}\alpha$ – угловой коэффициент.

Доказательство. Подставим в выведенное уравнение прямой координаты точки M_0: $y-b=k(x-0)$. Тогда $y=k\cdot x+b$.

Замечание. Если $\alpha=90^\circ$, то уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0,y_0)$, очевидно, имеет вид $x=x_0$.

Замечание. Уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$ с параметром k является *уравнением пучка прямых*, проходящих через точку M_0, кроме прямой $x=x_0$.

Определение. Уравнение $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ называется *уравнением прямой в отрезках*. Эта прямая пересекает оси координат в точках $(a;0)$ и $(0;b)$.

Теорема. Прямая, проходящая через две точки $M_1(x_1,y_1)$ и $M_2(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2,\ x_1\neq x_2)$ имеет уравнение $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Доказательство. Пусть $M(x,y)$ – произвольная точка прямой (рис. 3). Рассмотрим случай $0^\circ<\alpha<90^\circ$ (другой случай рассматривается аналогично).

Легко видеть, что $\Delta M_1MP \sim \Delta M_1M_2N$ (по двум углам). Тогда $\dfrac{M_1P}{M_1N}=\dfrac{MP}{M_2N}$, т. е. $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

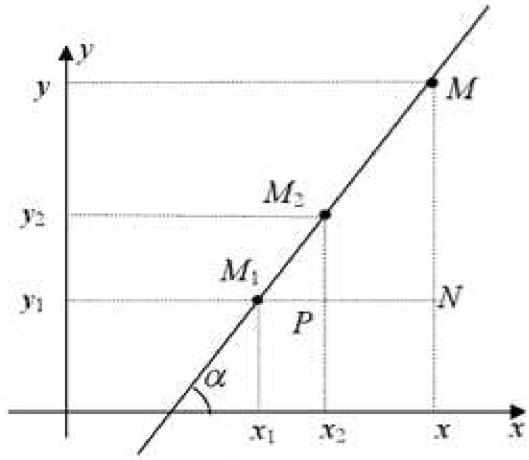


Рис. 3

Теорема. Уравнение вида $Ax+By+C=0$, где $A^2+B^2\neq 0$, есть уравнение прямой, и обратно, любая прямая может быть задана уравнением такого вида.

Доказательство. Пусть дано уравнение $Ax+By+C=0$, и пусть $B\neq 0$. Тогда это уравнение можно привести к виду $y=-\dfrac{A}{B}x-\dfrac{C}{B}$, т. е. к виду $y=k\cdot x+b$, про который доказано, что он задает прямую, пересекающую ось OY в точке $M_0(0,b)$ и проходящую под углом α $(\alpha\neq 90^\circ)$ к положительному направлению оси OX. Если B = 0, то $A\neq 0$. Тогда уравнение можно привести к виду $x=-C/A$, то есть к виду $x=x_0$ уравнения прямой, пересекающей ось OX в точке $M_0(x_0,0)$ и проходящей под углом $\alpha=90^\circ$ к положительному направлению оси OX. Обратно, пусть есть невертикальная прямая. Тогда она имеет уравнение вида $y=k\cdot x+b$. Это уравнение можно привести к виду $k\cdot x-y+b=0$, т. е. к виду $Ax+By+C=0$. Если прямая вертикальная, то ее уравнение $x=x_0$ можно привести к виду $x+0\cdot y-x_0=0$, т. е. к виду $Ax+By+C=0$.

Теорема. Пусть есть две прямые, уравнения которых $y=k_1\cdot x+b_1$ и $y=k_2\cdot x+b_2$. Тогда угол между ними (острый) можно получить из формулы $\operatorname{tg}\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$.

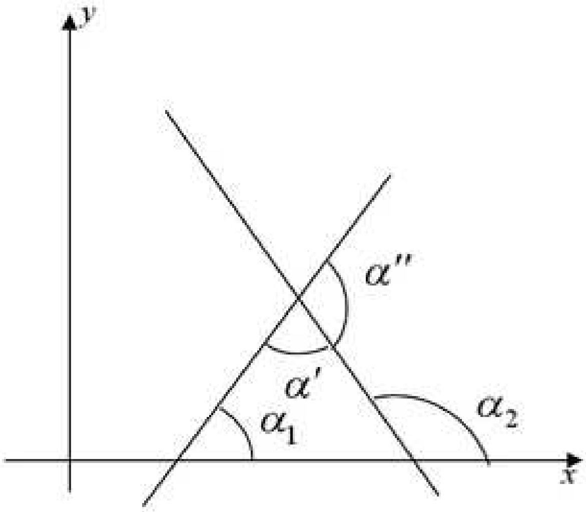


Рис. 4

Доказательство. Так как внешний угол α_2 (рис. 4) треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним, то $\alpha_2=\alpha_1+\alpha'$, или $\alpha'=\alpha_2-\alpha_1$. Если α' – острый, то $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha'>0$. Если α' – тупой, то $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha''=-\operatorname{tg}\alpha'$ $(\operatorname{tg}\alpha'<0)$. Тогда по определению модуля, по формуле разности тангенсов и определению k_1 и k_2

имеем $\operatorname{tg}\alpha = |\operatorname{tg}\alpha'| = \left|\dfrac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2}\right| = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}\right|$.

Следствие. Пусть есть две прямые, уравнения которых $y = k_1 \cdot x + b_1$ и $y = k_2 \cdot x + b_2$. Тогда они параллельны, т. е. $\alpha = 0$, $\operatorname{tg}\alpha = 0$, если $\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2} = 0$, т. е. $k_1 = k_2$, и перпендикулярны, т. е. $\alpha = 90^\circ$, $\operatorname{tg}\alpha$ не существует, если $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$, т. е. $k_1 \cdot k_2 = -1$.

2.2. Прямая и плоскость в пространстве

Утверждения и формулы данного раздела являются следствиями тех фактов, что были получены в векторной алгебре. Поэтому их доказательства не приводятся.

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору

Каждую плоскость в пространстве можно представить как линейное уравнение, называемое *общим уравнением* плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$, где $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$. Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\vec{n} = (A; B; C)$, *нормального* (т. е. перпендикулярного) к плоскости.

Если в общем уравнении плоскости $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат. При $A = 0$ ($B = 0$, $C = 0$) плоскость параллельна оси OX (оси OY, оси OZ) соответственно. При $A = B = 0$ ($A = C = 0$, $B = C = 0$) плоскость параллельна плоскости (x, y) (плоскости (x, z), плоскости (y, z)).

Дана точка $M(x_0; y_0; z_0)$ и вектор $\vec{n} = (A; B; C)$. *Уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору*, имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Дана прямая как пересечение плоскостей $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Уравнение любой плоскости, проходящей через данную прямую, имеет вид:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где λ и μ – некоторые действительные числа.

Уравнение плоскости, проходящей через три точки

Через три данные точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$ проходит только одна плоскость, уравнение которой получается из условия компланарности радиус-векторов точек плоскости

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0,$$

для этого необходимо вычислить определитель и привести полученное уравнение к общему виду.

Нормальное уравнение плоскости

В *векторной форме* уравнение плоскости имеет вид $\vec{r}\cdot\vec{n}+D=0$, $\vec{r}=\{x,y,z\}$. Если нормальный вектор плоскости – единичный, т. е.

$$\vec{n}=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right),\ |\vec{n}|=1,$$

то уравнение плоскости можно записать в виде

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ (*нормальное уравнение плоскости*),

где p – расстояние от начала координат до плоскости, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ – *направляющие косинусы нормали*

$$\cos\alpha=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\beta=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \cos\gamma=\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

где α,β,γ – углы между нормалью плоскости и осями координат OX, OY, OZ соответственно.

Общее уравнение плоскости может быть приведено к нормальному виду умножением на нормирующий множитель $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ находится по формуле, полученной подстановкой точки в нормальное уравнение

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Уравнение плоскости в отрезках

Если в общем уравнении $D\neq 0$, то, разделив на $-D$, приведем уравнение плоскости к виду *в отрезках*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$$

где $a=-\dfrac{D}{A}$, $b=-\dfrac{D}{B}$, $c=-\dfrac{D}{C}$ определяют соответственно абсциссу, ординату и аппликату точек пересечения плоскости с осью OX – $(a,0,0)$, осью OY – $(0,b,0)$, осью OZ – $(0,0,c)$.

Угол между плоскостями

Угол φ *между двумя плоскостями* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ находят как угол между их нормальными векторами $\vec{n}_1=\{A_1,B_1,C_1\}$ и $\vec{n}_2=\{A_2,B_2,C_2\}$:

$$\cos\varphi=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Плоскости параллельны, когда их нормали коллинеарны, т. е. $A_1/A_2=B_1/B_2=C_1/C_2$. *Плоскости перпендикулярны*, когда их нормали перпендикулярны, т. е. $\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2=A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Прямая в пространстве

Уравнения прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$ имеют вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$.

Уравнения прямой, проходящей через данную точку $M_1(x_1,y_1,z_1)$ *параллельно данному направляющему вектору* $\vec{s}=(l,m,n)$ – *канонические уравнения прямой* $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$.

Вводя параметр t, $\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}=t$, получаем *параметрический вид уравнений прямой*

$$\begin{cases} x=lt+x_1 \\ y=mt+y_1 \\ z=nt+z_1 \end{cases}.$$

Каждая прямая в пространстве может быть представлена системой двух уравнений (задана как пересечение двух плоскостей)

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}.$$

Угол между двумя прямыми

Прямые заданы в каноническом виде $\dfrac{x-x_1}{l_1}=\dfrac{y-y_1}{m_1}=\dfrac{z-z_1}{n_1}$, $\dfrac{x-x_2}{l_2}=\dfrac{y-y_2}{m_2}=\dfrac{z-z_2}{n_2}$. Угол φ между прямыми определяется как угол между их направляющими векторами $\vec{s}_1=(l_1,m_1,n_1)$, $\vec{s}_2=(l_2,m_2,n_2)$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2|}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|} = \frac{|l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2|}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}\sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Очевидны условия *параллельности* $l_1 / l_2 = m_1 / m_2 = n_1 / n_2$, и *перпендикулярности* прямых $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

Пересечение прямой и плоскости

Угол ψ *между прямой и плоскостью* определяют через угол θ между направляющим вектором прямой $\vec{s} = (l, m, n)$ и нормалью плоскости $\vec{N} = (A, B, C)$:

$$\sin\psi = \sin(90^\circ - \theta) = \cos\theta = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Прямая и плоскость параллельны, если направляющий вектор $\vec{s}$ прямой ортогонален нормальному вектору плоскости $\vec{N}$, т. е. $Al + Bm + Cn = 0$. *Прямая и плоскость взаимно перпендикулярны*, если направляющий вектор $\vec{s}$ и нормаль $\vec{N}$ параллельны $A / l = B / m = C / n$.

Если $Al + Bm + Cn \neq 0$, то прямая и плоскость имеют единственную точку пересечения, определить которую можно из системы

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}. \end{cases}$$

Удобно использовать параметрический вид уравнений прямой

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ x = lt + x_1, \\ y = mt + y_1, \\ z = nt + z_1. \end{cases}$$

Решением системы будет значение параметра $t = t_0$, при котором прямая и плоскость пересекутся. По значению параметра находят соответствующие x_0, y_0, z_0 – координаты точки пересечения.

2.3. Кривые второго порядка

Окружность

Определение. *Окружностью* называется геометрическое место точек на плоскости, равноудаленных от некоторой точки, называемой *центром*. Расстояние от точек окружности до центра называется *радиусом*.

Теорема. Если точка $M(x, y)$ принадлежит окружности с центром в начале координат и радиуса r, то ее координаты удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = r^2$, и обратно.

Доказательство легко следует из теоремы Пифагора.

Определение. Уравнение $x^2+y^2=r^2$ называется *каноническим уравнением окружности*.

Эллипс

Определение. *Эллипсом* называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых сумма расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть данное число $2a$, большее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Теорема. Если точка $M(x,y)$ принадлежит эллипсу с фокусами в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ и сумма расстояний от нее до фокусов равна $2a$, то ее координаты удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=a^2-c^2$, и обратно.

(Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ называется *каноническим уравнением эллипса.*)

Доказательство. По определению эллипса имеем: $|MF_1|+|MF_2|=2a$, т. е. $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$. Перенося один радикал в правую часть, и возводя обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4xc$. Еще раз возводя обе части уравнения в квадрат, получаем: $a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$,

$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{x^2c^2}{a^2}$, $\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$. Учитывая, что $b^2=a^2-c^2$, имеем: $\frac{b^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$, т. е. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Обратно, пусть точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Докажем, что $MF_1+MF_2=2a$. Действительно, $MF_1+MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=$

$$=\sqrt{(x+c)^2+b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}+\sqrt{(x-c)^2+b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}=$$

$$=\sqrt{x^2+2xc+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}+\sqrt{x^2-2xc+c^2+b^2-\frac{b^2x^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2}+\sqrt{\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2xc+c^2+b^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+c^2+b^2}+\sqrt{\left(\frac{a^2-b^2}{a^2}\right)x^2-2xc+c^2+b^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}\right)^2+2xc+a^2}+\sqrt{\left(\frac{cx}{a}\right)^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2}=$$

$=\left|\frac{cx}{a}+a\right|+\left|\frac{cx}{a}-a\right|=a+\frac{cx}{a}+a-\frac{cx}{a}=2a$, поскольку $|x|\le a$ и $c\le a$.

Определение. *Эксцентриситетом эллипса* называется отношение фокального расстояния c к большой полуоси a, т. е. $e=\frac{c}{a}$. Легко видеть, что $e\in[0;1)$.

Замечание. Если фокусы находятся на оси OY, то $b>a$.

Гипербола

Определение. *Гиперболой* называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых модуль разности расстояний до двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть данное положительное число $2a$, меньшее, чем расстояние $2c$ между фокусами.

Теорема. Если точка $M(x,y)$ принадлежит гиперболе с фокусами в точках $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ и модуль разности расстояний от нее до фокусов равен $2a$, то ее координаты удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, где $b^2=c^2-a^2$, и обратно. (Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ называется *каноническим уравнением гиперболы.*)

Доказательство. По определению гиперболы имеем: $|MF_1-MF_2|=2a$, т.е. $|\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}|=2a$. Тогда получается, что $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$. Перенося один радикал в правую часть, и возводя обе части уравнения в квадрат, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2,$$

$\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4xc-4a^2$. Еще раз возводя обе части уравнения в квадрат, получаем: $a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2xc+x^2c^2$,

$x^2+c^2+y^2=a^2+\frac{x^2c^2}{a^2}$, $\frac{a^2-c^2}{a^2}x^2+y^2=a^2-c^2$. Учитывая, что $b^2=c^2-a^2$, имеем: $-\dfrac{b^2}{a^2}x^2+y^2=-b^2$, т. е. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Обратно, пусть точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Докажем, что $|MF_1-MF_2|=2a$. Действительно, $MF_1-MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=$

$$=\sqrt{(x+c)^2+b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)}-\sqrt{(x-c)^2+b^2(\frac{x^2}{a^2}-1)}=$$

$$=\sqrt{x^2+2xc+c^2-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}}-\sqrt{x^2-2xc+c^2-b^2+\frac{b^2x^2}{a^2}}=$$

$$=\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+a^2}-\sqrt{\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)x^2-2xc+a^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)x^2+2xc+a^2}-\sqrt{\left(\frac{a^2+b^2}{a^2}\right)x^2-2xc+a^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}\right)^2+2xc+a^2}-\sqrt{\left(\frac{cx}{a}\right)^2-2xc+a^2}=\sqrt{\left(\frac{cx}{a}+a\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{cx}{a}-a\right)^2}=$$

$$=\left|\frac{cx}{a}+a\right|-\left|\frac{cx}{a}-a\right|=\left[\begin{array}{ll}\frac{cx}{a}+a-\frac{cx}{a}+a=2a & (x\ge a)\\ -\frac{cx}{a}-a+\frac{cx}{a}-a=-2a & (x\le a)\end{array}\right.$$

Т. е. $MF_1-MF_2=\pm 2a$. Следовательно $|MF_1-MF_2|=2a$.

Определение. *Эксцентриситетом гиперболы* называется отношение фокального расстояния c к действительной полуоси a, т. е. $e=\dfrac{c}{a}$. Легко видеть, что $e\in(1;+\infty)$.

Замечание. Если фокусы находятся на оси OY, то каноническое уравнение будет $\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{x^2}{a^2}=1$.

Теорема. Гипербола, уравнение которой $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$, имеет асимптоты $y=\pm\dfrac{b}{a}x$.

Доказательство. Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty}|MP|=0$. Действительно (рис. 5),

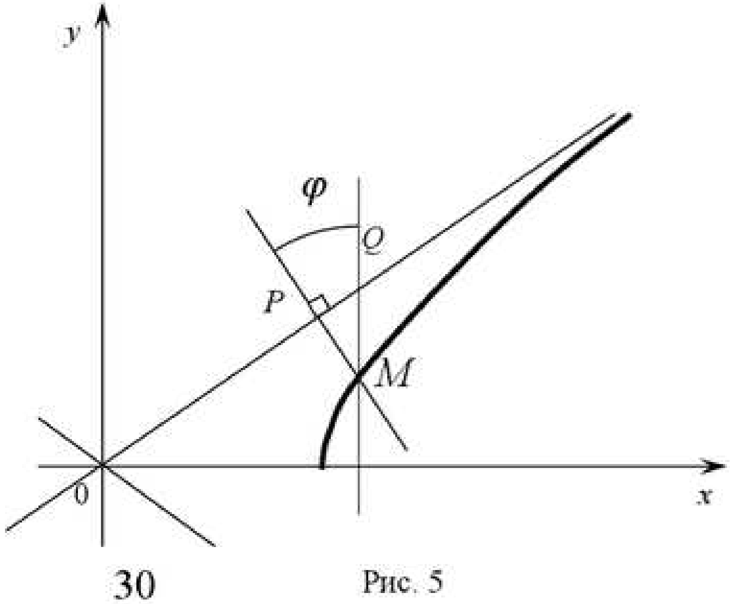


Рис. 5

$$\lim_{x\to+\infty}|MP| = \lim_{x\to+\infty}|MQ|\cdot\cos\varphi =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}|y_M - y_Q|\cdot\cos\varphi =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left|\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{b}{a}x\right|\cdot\cos\varphi = = \frac{b}{a}\cdot\cos\varphi\cdot\lim_{x\to+\infty}\left|\sqrt{x^2-a^2}-x\right| =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\cos\varphi\cdot\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{\left(\sqrt{x^2-a^2}-x\right)\cdot\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right| = \frac{b}{a}\cdot\cos\varphi\cdot\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{x^2-a^2-x^2}{\sqrt{x^2-a^2}+x}\right| =$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\cos\varphi\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{a^2}{\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|} = \frac{ab\cdot\cos\varphi}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\sqrt{x^2-a^2}+x\right|} = 0.$$

Парабола

Определение. *Параболой* называется геометрическое место точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, не проходящей через фокус, и называемой директрисой.

Определение. Расстояние от фокуса параболы до ее директрисы называется *параметром* параболы.

Эксцентриситет параболы принимается равным единице.

Теорема. Если точка $M(x,y)$ принадлежит параболе с фокусом в точке $F(\frac{p}{2},0)$ и директрисой $x=-\frac{p}{2}$, то ее координаты удовлетворяют уравнению $y^2=2px$, и обратно. (Уравнение $y^2=2px$ называется *каноническим уравнением параболы*.)

Доказательство. По определению параболы имеем: $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right|$. Это уравнение эквивалентно следующему: $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$. Раскрывая скобки, получаем: $x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4}$. Приводя подобные слагаемые, имеем: $y^2=2px$. Обратно, пусть точка $M(x,y)$ удовлетворяет уравнению $y^2=2px$. Докажем, что расстояние от точки M до фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы. Действительно, расстояние от точки M до фокуса $|MF|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=$

$\sqrt{x^2 - px + \frac{p^2}{4} + 2px} = \sqrt{x^2 + px + \frac{p^2}{4}} = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$, т. е. расстояние $|MF|$ равно расстоянию от точки M до директрисы.

Замечание. Если фокус находятся на оси OY ($F(0, \frac{p}{2})$), а директриса имеет уравнение $y = -\frac{p}{2}$, то каноническое уравнение будет $x^2 = 2py$.

Общее уравнение кривой второго порядка

Общее уравнение кривой второго порядка $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a = 0$, заданное в декартовой системе координат, определяет одну из следующих девяти линий (см. табл. 1).

Таблица 1

Классификация кривых второго порядка

Группа	№	Уравнение линии	Название линии
I	1	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	Эллипс
	2	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	Мнимый эллипс
	3	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$	Две мнимые пересекающиеся прямые
	4	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	Гипербола
	5	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	Две пересекающиеся прямые
II	6	$x^2 = 2py$	Парабола
III	7	$x^2 = a^2 (a \neq 0)$	Две параллельные прямые
	8	$x^2 = -a^2 (a \neq 0)$	Две мнимые параллельные прямые
	9	$x^2 = 0$	Две совпадающие прямые

2.4. Поверхности второго порядка

Утверждения и формулы данного раздела доказываются аналогично тем, что были даны для кривых второго порядка. Поэтому их доказательства не приводятся.

Сфера

Определение. *Сферой* называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от фиксированной точки, называемой центром (рис. 6). Расстояние от точек сферы до центра называется *радиусом*.

Теорема. Сфера радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

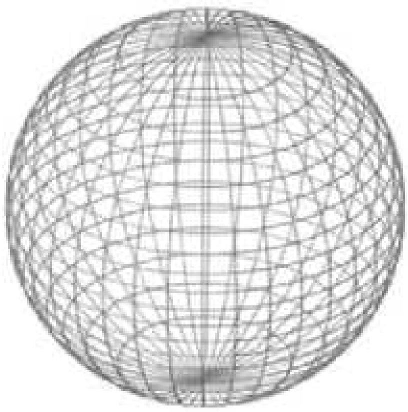


Рис. 6. Сфера

Эллипсоид

Определение. *Эллипсоидом* называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (рис. 7).

Исследуем форму эллипсоида. Из уравнения видно, что координаты точек поверхности ограничены: $|x|\le a$, $|y|\le b$, $|z|\le c$.

Эллипсоид обладает тремя плоскостями симметрии, тремя осями симметрии и центром симметрии. Ими служат соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

Для выяснения формы эллипсоида рассмотрим его сечения плоскостями. Найдем линию пересечения эллипсоида с плоскостью XOY. Так как любая точка плоскости XOY имеет нулевую третью координату, $z=0$, то координаты точек эллипсоида на плоскости XOY удовлетворяют уравнению $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Получаем, что линия пересечения является эллипсом с полуосями a и b. Аналогично, сечение в плоскости YOZ дает эллипс $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ с полуосями b и

c, а сечение плоскостью XOZ – эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ с полуосями a и c.

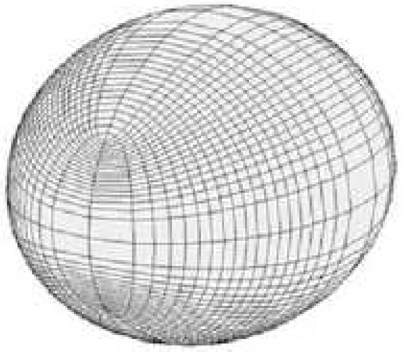


Рис. 7. Эллипсоид

Так же, как для эллипса, точки пересечения эллипсоида с координатными осями называются вершинами эллипсоида, центр симметрии – центром эллипсоида. Если полуоси попарно различны, то эллипсоид называется трехосным. Если две полуоси равны друг другу, то эллипсоид называется эллипсоидом вращения. Эллипсоид вращения может быть получен вращением эллипса вокруг одной из осей.

Гиперболоиды

Определение. *Однополостным гиперболоидом* называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

Исследуем форму однополостного гиперболоида. Так же, как эллипсоид, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат (рис. 8).

Для построения гиперболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости $z=0$, поэтому $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Это уравнение на плоскости XOY задает эллипс с полуосями a и b. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости $x=0$, поэтому $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это уравнение гиперболы на плоскости YOZ, где действительная полуось равна b, а мнимая полуось равна c. Сечение плоскостью XOZ также является гиперболой с уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

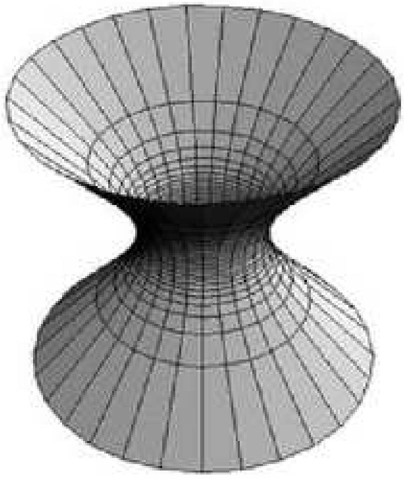


Рис. 8. Однополостный гиперболоид

Если $a=b$, то сечения гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости XOY, являются окружностями. В этом случае поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения и может быть получена вращением гиперболы, лежащей в плоскости YOZ, вокруг оси OZ.

Сечение однополостного гиперболоида может быть и парой прямых, называемых *прямолинейными образующими* (рис. 9). Если точку их пересечения взять на горловом эллипсе $(M_0(x_0;y_0;0))$, то уравнениями прямолинейных образующих будут: $\dfrac{x-x_0}{-\frac{a}{b}y_0}=\dfrac{y-y_0}{\frac{b}{a}x_0}=\dfrac{z}{c}$, $\dfrac{x-x_0}{\frac{a}{b}y_0}=\dfrac{y-y_0}{-\frac{b}{a}x_0}=\dfrac{z}{c}$.

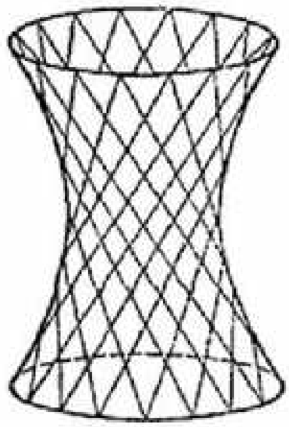


Рис. 9. Сечения однополостного гиперболоида

Определение. *Двуполостным гиперболоидом* называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$

Исследуем форму двуполостного гиперболоида (рис. 10). Так же, как эллипсоид и однополостный гиперболоид, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат.

Для построения гиперболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости $z=0$, поэтому $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$. Координаты ни одной точки плоскости XOY не могут удовлетворять данному уравнению. Следовательно, двуполостный гиперболоид не пересекает эту плоскость. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости $x=0$, поэтому $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$. Это уравнение гиперболы на плоскости YOZ, где действительная полуось равна c, а мнимая полуось равна b. Сечение плоскостью XOZ также является гиперболой, с уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$.

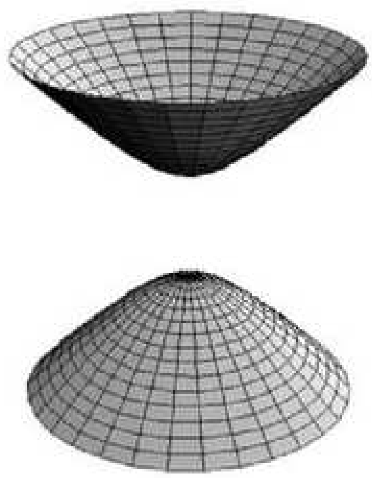


Рис. 10. Двуполостный гиперболоид

Если $a=b$, то сечения гиперболоида плоскостями, параллельными плоскости XOY, являются окружностями. В этом случае поверхность называется двуполостным гиперболоидом вращения и может быть получена вращением гиперболы, лежащей в плоскости YOZ, вокруг оси OZ.

Конус

Определение. *Конусом* (*второго порядка*) называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$. Исследуем форму конуса (рис. 11). Так же, как эллипсоид и гиперболоиды, он имеет три плоскости симметрии, три оси симметрии и центр симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости, координатные оси и начало координат. Для построения конуса найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью

XOY. На этой плоскости $z = 0$, поэтому $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Координаты только одной точки плоскости XOY могут удовлетворять данному уравнению, а именно, начала координат. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости $x = 0$, поэтому $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$. Это уравнение пары прямых $z = \pm\frac{c}{b}y$ на плоскости YOZ. Сечение плоскостью XOZ также является парой прямых с уравнением $z = \pm\frac{c}{a}x$.

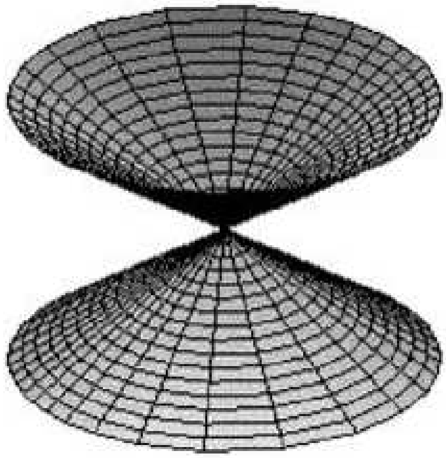


Рис. 11. Конус

Точка пересечения конуса с плоскостью XOY называется вершиной конуса.

Если $a = b$, то сечения конуса плоскостями параллельными плоскости XOY представляют собой окружности. В этом случае поверхность называется прямым круговым конусом и может быть получена вращением прямой, лежащей в плоскости YOZ, вокруг оси OZ.

Параболоиды

Определение. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$. Исследуем форму эллиптического параболоида (рис. 12). Он имеет две плоскости симметрии и ось симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости XOZ, YOZ и координатная ось OZ. Для построения эллиптического параболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости $z = 0$, поэтому $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$. Координаты только одной точки плоскости XOY могут удовлетворять данному уравнению, а именно, начала координат. При положительном z получаем эллипс. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости $x=0$, поэтому $\frac{y^2}{b^2}=z$. Это уравнение параболы на плоскости YOZ. Сечение плоскостью XOZ также является параболой.

Рис. 12. Эллиптический параболоид

Если $a=b$, то сечения плоскостями, параллельными плоскости XOY, представляют собой окружности. В этом случае поверхность называется параболоидом вращения и может быть образована вращением параболы, лежащей в плоскости YOZ, вокруг оси OZ.

Определение. *Гиперболическим параболоидом* называется поверхность, уравнение которой в некоторой декартовой системе координат имеет вид $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$. Исследуем форму гиперболического параболоида (рис. 13). Так же, как и эллиптический параболоид, он имеет две плоскости симметрии и ось симметрии. Ими являются соответственно координатные плоскости XOZ, YOZ и координатная ось OZ. Для построения гиперболического параболоида найдем его сечения различными плоскостями. Найдем линию пересечения с плоскостью XOY. На этой плоскости $z=0$, поэтому $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$. Это уравнение определяет на плоскости XOY пару прямых $y=\pm\frac{b}{a}x$. Найдем линию пересечения с плоскостью YOZ. На этой плоскости $x=0$, поэтому $-\frac{y^2}{b^2}=z$. Это уравнение на плоскости YOZ задает параболу, ветви которой направлены вниз. Сечение плоскостью XOZ также является параболой $\frac{x^2}{a^2}=z$, но ее ветви направлены вверх.

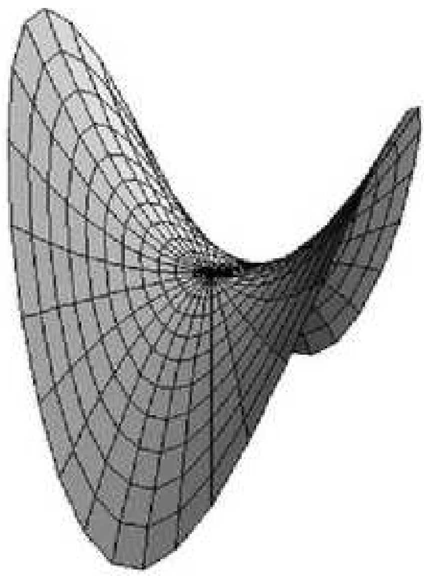


Рис. 13. Гиперболический параболоид

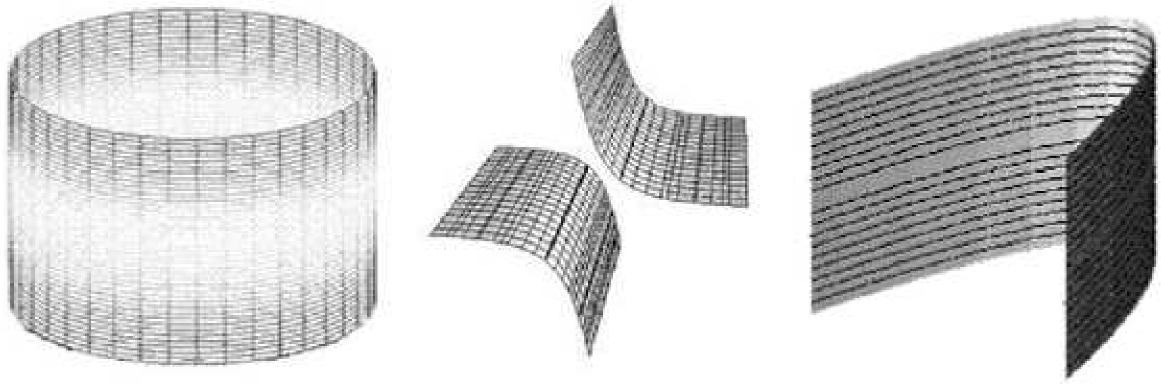
Цилиндры

Определение. *Цилиндрической поверхностью* называется геометрическое место параллельных прямых, пересекающих данную линию. Эта линия называется направляющей, а параллельные прямые – образующими.

Уравнение вида $F(x;y)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси OZ. На плоскости XOY уравнение $F(x;y)=0$ определяет направляющую рассматриваемой цилиндрической поверхности. Таким образом, если уравнение поверхности не содержит в явном виде какой-либо переменной, то это уравнение определяет в пространстве цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси отсутствующего переменного и направляющей, которая в плоскости двух других переменных имеет то же самое уравнение. Нас будут интересовать только те цилиндрические поверхности, которые являются поверхностями второго порядка.

Определение. Поверхность, которая в некоторой декартовой системе координат задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, называется эллиптическим цилиндром, поверхность, которая задается уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, называется гиперболическим цилиндром, а которая задается уравнением $y^2=2px$, называется параболическим цилиндром (рис. 14).

Для того чтобы построить цилиндрическую поверхность, достаточно нарисовать на плоскости XOY направляющую, уравнение которой на этой плоскости совпадает с уравнением самой поверхности, и затем через точки направляющей провести образующие параллельно оси OZ. Для наглядности следует построить также одно-два сечения плоскостями, параллельными плоскости XOY. В каждом таком сечении получим такую же кривую, как и исходная направляющая.



а б в

Рис. 14. Виды цилиндров:
а – эллиптический; б – гиперболический; в – параболический

Общее уравнение поверхности второго порядка

Общее уравнение поверхности второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0,$$

заданное в декартовой системе координат, определяет одну из следующих семнадцати поверхностей (см. табл. 2).

Таблица 2

Классификация поверхностей второго порядка

Группа	№	Уравнение поверхности	Название поверхности
I	1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	Эллипсоид
	2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	Мнимый эллипсоид
	3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	Мнимый конус
	4	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	Однополостный гиперболоид
	5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$	Двуполостный гиперболоид
	6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	Конус

Окончание табл. 2

Группа	№	Уравнение поверхности	Название поверхности
II	7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$	Эллиптический параболоид
	8	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$	Гиперболический параболоид
III	11	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Две мнимые пересекающиеся плоскости
	12	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	Гиперболический цилиндр
	13	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	Две пересекающиеся плоскости
IV	14	$y^2=2px$	Параболический цилиндр
V	15	$\frac{x^2}{a^2}=1$	Две параллельные плоскости
	16	$\frac{x^2}{a^2}=-1$	Две мнимые параллельные плоскости
	17	$\frac{x^2}{a^2}=0$	Две совпадающие плоскости

2.5. Решение задач на линии и поверхности

Пример 1. Составить уравнение прямой линии, образующей с осью OX угол 60° и пересекающей ось OY в точке (0,–2). Выяснить, проходит ли эта прямая через точки $A(\sqrt{3},1)$ и $B(2,5)$.

Решение. Из условия задачи следует, что начальная ордината b=–2, угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}$, следовательно, имеем $y=x\sqrt{3}-2$. Подставляя в искомое уравнение прямой координаты точки A вместо текущих координат, получим 1=3–2, т. е. 1=1. Прямая проходит через точку $A(\sqrt{3},1)$. Аналогично, подставляя в уравнение координаты точки B, получим: $5\neq\sqrt{3}-2$. Прямая не проходит через точку B.

Пример 2. Уравнение $15x-3y+2=0$ привести к уравнению с угловым коэффициентом.

Решение. Данное уравнение решим относительно y, получим уравнение $y=5x+2/3$. Отсюда видно, что $k=5$, $b=2/3$.

Пример 3. Написать уравнение прямой, проходящей через данные точки $A(2,-5)$ и $B(1,3)$.

Решение. Запишем уравнение данной прямой

$$\frac{y-(-5)}{3-(-5)}=\frac{x-2}{1-2}\Rightarrow\frac{y+5}{8}=-(x-2)\Rightarrow 8x+y-11=0.$$

Пример 4. Написать уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1,2)$: а) параллельно вектору $\vec{S}(3,4)$, б) перпендикулярно вектору $\vec{N}(2,-3)$.

Решение. а) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{4}$ или $4x-3y+2=0$, б) $2(x-1)-3(y-2)=0$ или $2x-3y+4=0$.

Пример 5. Найти угол между прямыми $y=2x+1$ и $y=0,5x+3$.

Решение. $\operatorname{tg}\varphi=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\dfrac{0,5-2}{1+2\cdot0,5}\right|=\dfrac{3}{4}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4}$.

Пример 6. Выбрать значение коэффициента B прямой $2x+By+3=0$ таким, чтобы эта прямая была: а) параллельна прямой $4x-3y+5=0$, б) перпендикулярна прямой $x-5y-4=0$.

Решение. Используя условие параллельности прямых, получим $A_1/A_2=B_1/B_2\Rightarrow\dfrac{2}{4}=\dfrac{B}{-3}\Rightarrow4\cdot B=-6$, $B=-\dfrac{3}{2}$. Используя условие перпендикулярности прямых, получим $A_1A_2+B_1B_2=0\Rightarrow2\cdot1+(-5)\cdot B=0$, $B=2/5$.

Пример 7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-3y+5=0$ и $x+2y-1=0$, а также: а) точку $M(-2,3)$, б) перпендикулярно прямой $x+y-1=0$.

Решение. Решая систему $\begin{cases} 2x-3y+5=0 \\ x+2y-1=0 \end{cases}$, получаем точку пересечения прямых $M_0(-1,1)$. а) Уравнение прямой, проходящей через две точки, будет $\dfrac{x+1}{-2+1}=\dfrac{y-1}{3-1}$, т. е. $2x+y+1=0$. б) Прямая $x+y-1=0$ имеет угловой коэффициент -1, тогда перпендикулярная ей ищется в виде $y=x+b$. С учетом прохождения ее через $M_0(-1,1)$, имеем $y=x+2$.

Пример 8. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1;-6;5)$ перпендикулярно вектору $\vec{n}=(9;2;-1)$.

Решение. $9(x-1)+2(y+6)-(z-5)=0$ или $9x+2y-z+14=0$.

Пример 9. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-2;4;5)$ и прямую P пересечения плоскостей $9x-y+5z-12=0$, $3x+5y-z-1=0$.

Решение. Используем формулу пучка плоскостей, проходящих через прямую P: $9x-y+5z-12+\mu(3x+5y-z-1)=0$.

Найдем значение параметра μ, при котором из пучка плоскостей выделяется искомая плоскость. Для этого координаты точки A подставим в полученное уравнение пучка

$$9(-2)-4+5\cdot5-12+\lambda\big(3(-2)+5\cdot4-5-1\big)=0,\ -9+8\lambda=0,\ \lambda=\frac{9}{8}.$$

Искомое уравнение плоскости

$$9x-y+5z-12+\frac{9}{8}(3x+5y-z-1)=0,\ 99x+37y+31z-105=0.$$

Ответ: $99x+37y+31z-105=0$.

Пример 10. Даны точки $M_1(1,2,1)$, $M_2(0,-1,4)$, $M_3(-3,1,5)$. Составить уравнение плоскости $M_1M_2M_3$.

Решение: $\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ (0-1) & (-1-2) & (4-1) \\ (-3-1) & (1-2) & (5-1) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ -1 & -3 & 3 \\ -4 & -1 & 4 \end{vmatrix}=$

$$=(x-1)\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}-(y-2)\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}+(z-1)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=(x-1)(-9)-(y-2)8+(z-1)(-11)=0,$$

$$9x+8y+11z-36=0.$$

Ответ: общее уравнение плоскости $9x+8y+11z-36=0$.

Пример 11. Даны точки $A(-1,0,9)$, $B(4,1,2)$, $C(7,3,5)$. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно вектору BC.

Привести его к нормальному виду.

Решение. Вектор BC имеет вид $\overrightarrow{BC}=(3;2;3)$. Составим общее уравнение искомой плоскости

$$3(x+1)+2y+3(z-9)=0\text{, т. е. } 3x+2y+3z-24=0.$$

Найдем нормирующий множитель $\mu=\dfrac{1}{\sqrt{3^2+2^2+3^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{22}}$. Умножая уравнение плоскости на нормирующий множитель, получим нормальное уравнение плоскости $x\dfrac{3}{\sqrt{22}}+y\dfrac{2}{\sqrt{22}}+z\dfrac{3}{\sqrt{22}}-\dfrac{24}{\sqrt{22}}=0$, где коэффициенты при x,y,z – соответствующие направляющие косинусы нормали, расстояние от начала координат до плоскости $p=\dfrac{24}{\sqrt{22}}$.

Ответ: общее уравнение плоскости: $3x+2y+3z-24=0$; нормальное уравнение: $x\dfrac{3}{\sqrt{22}}+y\dfrac{2}{\sqrt{22}}+z\dfrac{3}{\sqrt{22}}-\dfrac{24}{\sqrt{22}}=0$.

Пример 12. Даны точки $A(0,4,-1)$, $B(3,1,2)$, $C(-2,2,5)$. Найти расстояние от точки $M(4,5,6)$ до плоскости ABC.

Решение. Составим уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x & y-4 & z+1 \\ 3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 6 \end{vmatrix}=0,\ -12x-24(y-4)-12(z+1)=0,\ x+2y+z-7=0.$$

Расстояние от точки M до плоскости ABC:

$$d=\frac{|4+2\cdot5+6-7|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}}=\frac{13}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: расстояние от точки M до плоскости ABC равно $\dfrac{13}{\sqrt{6}}$.

Пример 13. Записать уравнение плоскости в отрезках $3x+y-2z+4=0$.

Решение. Запишем $3x+y-2z=-4$, разделим на -4, $\dfrac{3x}{-4}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{2}=1$, $\dfrac{x}{-4/3}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{2}=1$ – уравнение в отрезках. Данная плоскость пересекает ось OX при $x=-4/3$, ось OY при $y=-4$, ось OZ при $z=2$.

Пример 14. При каком значении параметра μ две плоскости будут перпендикулярны: $2x-y+3z-1=0$, $3x+y+\mu\cdot z-5=0$.

Решение. Если плоскости перпендикулярны, то верно равенство $2\cdot3-1+3\mu=0$. Отсюда $\mu=-\dfrac{5}{3}$.

Ответ: при значении параметра $\mu=-\dfrac{5}{3}$ две плоскости будут взаимно перпендикулярны.

Пример 15. Известны точки $A(-1;4;-2)$, $B(2;1;3)$, $C(7;2;1)$ и плоскость $3x+5y-z+1=0$. Составить уравнение плоскости ABC. Найти угол φ между данной плоскостью и плоскостью ABC.

Решение. Уравнение плоскости ABC $\begin{vmatrix} x+1 & y-4 & z+2 \\ 3 & -3 & 5 \\ 8 & -2 & 3 \end{vmatrix}=0$,

$$x+1+31(y-4)+18(z+2)=0,\ x+31y+18z-87=0.$$

Нормаль $\overrightarrow{N}=(1;31;18)$. Найдем угол между плоскостями

$$\cos\varphi=\frac{|3\cdot 1+5\cdot 31-1\cdot 18|}{\sqrt{3^2+5^2+1^2}\sqrt{1^2+31^2+18^2}}=\frac{140}{\sqrt{45010}},\ \varphi=\arccos\left(\frac{140}{\sqrt{45010}}\right).$$

Ответ: уравнение плоскости ABC $x+31y+18z-87=0$, угол между плоскостями $\varphi=\arccos\left(\dfrac{140}{\sqrt{45010}}\right)$.

Пример 16. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(1;7;-1)$ перпендикулярно данным плоскостям $x-y+5z-5=0$, $2x-y-3z+11=0$.

Решение. Нормальные векторы данных плоскостей $\overrightarrow{N_1}=(1;-1;5)$, $\overrightarrow{N_2}=(2;-1;-3)$. Так как искомая плоскость перпендикулярна данным плоскостям, то ее нормальный вектор $\overrightarrow{N}$ перпендикулярен $\overrightarrow{N_1}$ и $\overrightarrow{N_2}$. Следовательно, можно найти $\overrightarrow{N}$ как векторное произведение

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix}=8\vec{i}+13\vec{j}+\vec{k}\cdot$$

Зная нормальный вектор и точку, составим уравнение искомой плоскости

$$8(x-1)+13(y-7)+(z+1)=0,\ \text{т. е. } 8x+13y+z-98=0.$$

Ответ: общее уравнение плоскости, перпендикулярной двум данным плоскостям, $8x+13y+z-98=0$.

Пример 17. Прямая задана как пересечение двух плоскостей. Составить канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} 5x-y+z+1=0, \\ 3x+2y-z-7=0. \end{cases}$$

Решение. Исключим z, сложив уравнения системы $8x+y-6=0$.

Исключим y, прибавив ко второму уравнению первое, умноженное на 2,

$13x+z-5=0$. Выразим из полученных равенств

$$x=\frac{y-6}{-8}=\frac{z-5}{-13}, \text{ т.е. } \frac{x}{1}=\frac{y-6}{-8}=\frac{z-5}{-13}.$$

Ответ: канонические уравнения прямой $\frac{x}{1}=\frac{y-6}{-8}=\frac{z-5}{-13}$.

Пример 18. Прямая задана как пересечение двух плоскостей. Составить канонические уравнения прямой.

$$x-4y+5z+12=0,$$
$$2x-3y+4z-1=0.$$

Решение. Исключим x, вычитая из второго уравнения первое, умноженное на 2, $5y-6z-25=0$. Умножим первое уравнение на 4, второе – на 5, запишем разницу полученных выражений $6x+y-53=0$.

Выразим из полученных равенств $y=\dfrac{6\left(z+\frac{25}{6}\right)}{5}=-6\left(x-\frac{53}{6}\right)$,

$\dfrac{x-\frac{53}{6}}{-1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+\frac{25}{6}}{5}$ – канонические уравнения.

Ответ: $\dfrac{x-\frac{53}{6}}{-1}=\dfrac{y}{6}=\dfrac{z+\frac{25}{6}}{5}$ – канонические уравнения прямой.

Пример 19. Привести уравнения прямой к каноническому виду

$$\begin{cases} x+y-3z+3=0, \\ 3x-3y+z+6=0. \end{cases}$$

Решение. Покажем, как можно решить эту задачу иначе. Нормальные векторы данных плоскостей $\overrightarrow{N_1}=(1;1;-3)$ и $\overrightarrow{N_2}=(3;-3;1)$. Прямая принадлежит первой плоскости, а это значит, что её направляющий вектор $\vec{s}$ перпендикулярен нормали $\overrightarrow{N_1}$; принадлежит также второй плоскости – вектор $\vec{s}$ перпендикулярен нормали $\overrightarrow{N_2}$. Искомый направляющий вектор прямой имеет вид

$$\overrightarrow{N}=\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=-8\vec{i}-10\vec{j}-6\vec{k}.$$

Выберем точку на прямой: пусть $x_0=-3$, тогда из системы $\begin{cases} y-3z=0, \\ -3y+z-3=0. \end{cases}$

$y_0=-\frac{9}{8}$, $z_0=-\frac{3}{8}$, точка $M\left(-3;-\frac{9}{8};-\frac{3}{8}\right)$. Составим канонические уравнения

$$\frac{x+3}{-8}=\frac{y+\frac{9}{8}}{-10}=\frac{z+\frac{3}{8}}{-6},\text{ т. е. }\frac{x+3}{4}=\frac{y+\frac{9}{8}}{5}=\frac{z+\frac{3}{8}}{3}.$$

Ответ: канонические уравнения прямой $\frac{x+3}{4}=\frac{y+\frac{9}{8}}{5}=\frac{z+\frac{3}{8}}{3}$.

Пример 20. Составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M(3;1;0) перпендикулярно плоскостям $x-5y+z-1=0$, $3x-y-2z+4=0$.

Решение. Для составления канонических уравнений прямой необходимо найти ее направляющий вектор $\vec{s}$ из условия перпендикулярности прямой двум плоскостям $\vec{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2$, где $\vec{N}_1=(1;-5;1), \vec{N}_2=(3;-1;-2)$ – нормали плоскостей

$$\overline{s}=\vec{N}_1\times\vec{N}_2=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ 1 & -5 & 1\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=11\overline{i}+5\overline{j}+14\overline{k}.$$

Зная точку и направляющий вектор, составляем уравнения прямой $\frac{x-3}{11}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{14}$.

Ответ: канонические уравнения прямой $\frac{x-3}{11}=\frac{y-1}{5}=\frac{z}{14}$.

Пример 21. Даны точки $A(0,1,3)$, $B(-2,1,4)$ и уравнение плоскости $6x+y+5z+1=0$. Составить уравнение прямой AB. Найти точку пересечения прямой и плоскости и угол между ними.

Решение. Составим уравнения прямой AB: $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{1}$. Направляющий вектор прямой AB имеет вид $\vec{s}=(-2;0;1)$. Нормальный вектор плоскости $\vec{N}=(6;1;5)$. $\vec{s}\cdot\vec{N}=-7\neq 0$, следовательно, прямая и плоскость не параллельны и имеют единственную точку пересечения.

Положим $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{1}=t$. Тогда параметрические уравнения прямой имеют вид $\begin{cases}x=-2t,\\ y=1,\\ z=t+3.\end{cases}$

Подставляя в уравнение плоскости и решая его относительно t, найдем значение параметра $6(-2t)+1+5(t+3)+1=0$, $t_0=\frac{17}{7}$. Подставляем в параметрические уравнения $x_0=-\frac{34}{7}$, $y_0=1$, $z_0=\frac{38}{7}$. Точка пересечения прямой и плоскости $P\left(-\frac{34}{7};1;\frac{38}{7}\right)$. Найдем угол

$$\sin\psi=\frac{|-2\cdot 6+0\cdot 1+1\cdot 5|}{\sqrt{2^2+0^2+1^2}\sqrt{6^2+1^2+5^2}}=\frac{7}{\sqrt{310}},\ \psi=\arcsin\frac{7}{\sqrt{310}}.$$

Ответ: уравнения прямой AB $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-3}{1}$, точка пересечения прямой и плоскости $P\left(-\frac{34}{7};1;\frac{38}{7}\right)$, угол между ними $\psi=\arcsin\frac{7}{\sqrt{310}}$.

Пример 22. Даны точки $A(1,2,3)$, $B(0,3,1)$, $C(11,-2,4)$ и уравнения прямой $\frac{x-1}{-1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+2}{2}$. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно плоскости ABC.

Решение. Для того чтобы составить уравнение искомой плоскости, найдем ее нормальный вектор $\vec{N}$ и одну точку. Составим уравнение плоскости ABC:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 10 & -4 & 1 \end{vmatrix}=-7(x-1)-19(y-2)-6(z-3)=-7x-19y-6z+63=0,$$

т. е. $7x+19y+6z-63=0$.

Нормаль плоскости ABC имеет вид $\vec{N}_1=(7;19;6)$. Искомая плоскость перпендикулярна плоскости ABC, следовательно, их нормали взаимно перпендикулярны. Также из условий задачи вектор $\vec{N}$ перпендикулярен направляющему вектору прямой $\vec{s}=(-1;2;2)$. Это означает, что будем искать

$$\vec{N}=\vec{N}_1\times\vec{s}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 7 & 19 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=26\vec{i}-20\vec{j}+33\vec{k}.$$

Для нахождения точки искомой плоскости представим уравнение данной прямой в параметрическом виде

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z+2}{2}=t,\ \begin{cases} x=-t+1, \\ y=2t+7, \\ z=2t-2. \end{cases}$$

Выберем любое значение параметра t. Пусть $t_0=0$, тогда $x_0=1$, $y_0=7$, $z_0=-2$, т. е. выбрана точка $M(1;7;-2)$.

Итак, составим общее уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости:

$$26(x-1)-20(y-7)+33(z+2)=0,\ \text{т. е. } 26x-20y+33z+180=0.$$

Ответ: $26x-20y+33z+180=0$.

Пример 23. Плоскость $4x-3y+9z+36=0$ вырезает в системе координат треугольник. Составим канонические уравнения высот треугольника.

Решение. Нормаль плоскости $\vec{N}=(4;-3;9)$. Вершины треугольника лежат на пересечении плоскости с осями координат $A(-9;0;0)$, $B(0;12;0)$, $C(0;0;-4)$. Составим уравнения высоты CK, опущенной на сторону AB, как прямой, перпендикулярной нормали $\vec{N}$ и вектору $\overrightarrow{AB}=(9;12;0)$. А это значит, что направляющий вектор $\vec{s}_C$ искомой высоты CK определяется векторным произведением

$$\vec{s}_C=\vec{N}\times\overrightarrow{AB}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -3 & 9\\ 9 & 12 & 0\end{vmatrix}=-108\bar{i}+81\bar{j}+75\bar{k}.$$

Составим уравнение CK, зная точку C и вектор $\vec{s}_C$:

$$\frac{x}{-108}=\frac{y}{81}=\frac{z+4}{75},\text{ т. е. }\frac{x}{-36}=\frac{y}{27}=\frac{z+4}{25}.$$

Аналогично направляющий вектор $\vec{s}_A$ высоты AM опущенной на сторону BC, имеет вид

$$\vec{s}_A=\vec{N}\times\overrightarrow{BC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -3 & 9\\ 0 & -12 & -4\end{vmatrix}=120\bar{i}+16\bar{j}-48\bar{k}.$$

Уравнение AM: $\dfrac{x+9}{120}=\dfrac{y}{16}=\dfrac{z}{-48}$, т. е. $\dfrac{x+9}{15}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-6}$

Направляющий вектор высоты BN, опущенной на сторону AC, есть

$$\vec{s}_B=\vec{N}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 4 & -3 & 9\\ 9 & 0 & -4\end{vmatrix}=12\bar{i}+97\bar{j}+27\bar{k},$$

тогда $\dfrac{x}{12}=\dfrac{y-12}{97}=\dfrac{z}{27}$ – уравнение высоты BN.

Ответ: $\dfrac{x}{-36}=\dfrac{y}{27}=\dfrac{z+4}{25}$ – уравнение высоты CK; $\dfrac{x+9}{15}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-6}$ – уравнение высоты AM; $\dfrac{x}{12}=\dfrac{y-12}{97}=\dfrac{z}{27}$ – уравнение высоты BN.

Пример 24. Даны вершины в основании прямой призмы $A(5;1;2)$, $B(2;1;3)$, $C(4;5;5)$. Ребро AA_1 перпендикулярно основанию ABC, его длина равна $\sqrt{14}$. Составить уравнения оснований призмы ABC, $A_1B_1C_1$, уравнения прямых AA_1, A_1B_1 (Рассмотреть один из случаев).

Решение. Уравнение основания ABC:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-1 & z-2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -4(x-5)+8(y-1)-12(z-2)=0,$$

$$-4x+8y-12z+36=0,\ \ x-2y+3z-9=0.$$

Нормальный вектор плоскости ABC: $\vec{N}=(1;-2;3)$. Уравнения ребра AA_1 – уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно $\vec{N}$: $\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$. Необходимо найти координаты вершины A_1. Приведем уравнения AA_1 к параметрическому виду

$$\begin{cases} x=t+5, \\ y=-2t+1, \\ z=3t+2. \end{cases}$$

Узнаем, какое значение параметра t соответствует точке A_1 $|AA_1|=\sqrt{(1^2+(-2)^2+3^2)t^2}=|t|\sqrt{14}=\sqrt{14}$, т. е. $t_0=\pm1$. Рассмотрим только случай $t_0=1$. Координаты точки A_1: $x_0=6$, $y_0=-1$, $z_0=5$. Основание $A_1B_1C_1$ параллельно ABC, т. е. $x-6-2(y+1)+3(z-5)=0$ или $x-2y+3z-23=0$. Прямая A_1B_1 параллельна AB. Уравнения AB: $\frac{x-5}{-3}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-2}{1}$. Тогда $\vec{s}=(-3;0;1)$ – направляющий вектор AB. Следовательно, $\frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-5}{1}$ – уравнения A_1B_1.

Ответ: $x-2y+3z-9=0$ – уравнение основания призмы ABC, $x-2y+3z-23=0$ – уравнение $A_1B_1C_1$, $\frac{x-5}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{3}$ – уравнения AA_1, $\frac{x-6}{-3}=\frac{y+1}{0}=\frac{z-5}{1}$ – уравнения A_1B_1

Пример 25. Составить каноническое уравнение эллипса, зная, что большая его ось $2a$=10 и эксцентриситет $e=0{,}8$.

Решение. $c=ae=5\cdot0{,}8=4$, а b находим из равенства $b^2=a^2-c^2=25-16=9$, b =3. Подставляя найденные значения a=5, b=3 в уравнение эллипса, получим искомое уравнение $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Пример 26. Написать уравнение гиперболы по данной полуоси a = 1 и полуфокусному расстоянию c = 2.

Решение. Из равенства $a^2 + b^2 = c^2$ найдем полуось b: $1 + b^2 = 4$, т. е. $b=\sqrt{3}$. Искомое уравнение гиперболы будет иметь вид $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{3}=1$.

Пример 27. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы $x = -5y^2$.

Решение. Перепишем уравнение так: $y^2=-\frac{1}{5}x$ и, сравнивая его с уравнением $y^2 = -2px$, получим $2p=\frac{1}{5}$, т. е. $p=0{,}1$. Координаты фокуса $\left(-\frac{1}{20},0\right)$ и уравнение директрисы $x=1/20$.

Пример 28. Найти координаты вершины параболы, заданной уравнением $x=y^2+4y+1$. Написать уравнение оси симметрии.

Решение. Найдем координаты вершины параболы: $x=(y^2+4y+4)-4+1$, т. е. $x + 3=(y + 2)^2$. Следовательно, вершина параболы лежит в точке $(-3,-2)$. Уравнение оси параболы $y = -2$.

Пример 29. Уравнение линии второго порядка

$$9x^2+16y^2-90x+32y+97=0$$

привести к каноническому виду, определить тип и построить.

Решение. Сгруппируем слагаемые, содержащие только x, и слагаемые, содержащие только y: $9(x^2-10x)+16(y^2+2y)+97=0$. Дополним выражения в скобках до полных квадратов:

$$9(x^2-10x+25-25)+16(y^2+2y+1-1)+97=0,$$

$$9((x-5)^2-25)+16((y+1)^2-1)+97=0,$$

$$9(x-5)^2+16(y+1)^2=144,$$

$$\frac{(x-5)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1,$$

$$\frac{(x')^2}{16}+\frac{(y')^2}{9}=1, \text{ где } x'=x-5,\ y'=y+1.$$

Получили, что имеем уравнение эллипса с полуосями $a=4$, $b=3$ и центром в точке $O'(5,-1)$. Теперь построим его (рис. 15).

Пример 30. Нарисовать поверхность $4x^2-y^2+z^2+8x-4y-z-3=0$.

Решение. Выделим полные квадраты по переменным x, y и z:

$$4(x^2+2x+1)-4-(y^2+4y+4)+4+(z^2-2z+1)-1=3, \text{ т. е.}$$

$$4(x+1)^2-(y+2)^2+(z-1)^2=4. \text{ Разделим обе части на 4:}$$

$$\frac{(x+1)^2}{1^2}-\frac{(y+2)^2}{2^2}+\frac{(z-1)^2}{2^2}=1.$$

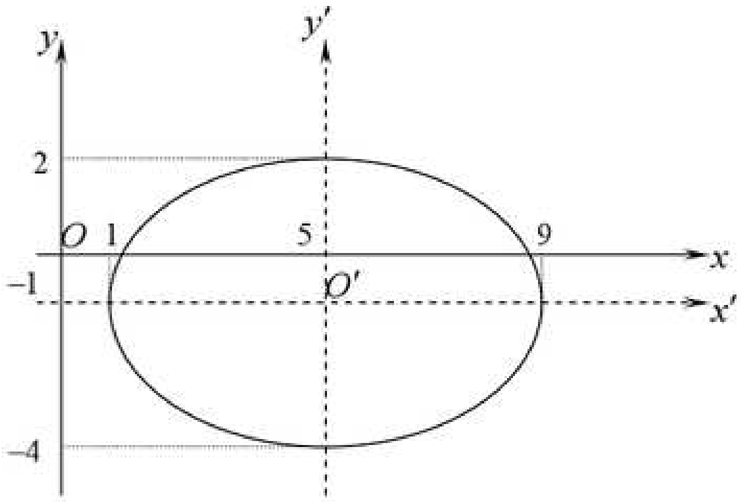


Рис. 15

Введем новую систему координат с началом в точке $O'(-1,-2,1)$, получающуюся из старой параллельным переносом. Получим, что в новой системе поверхность задается уравнением $\frac{(x')^2}{1^2}-\frac{(y')^2}{2^2}+\frac{(z')^2}{2^2}=1$. Произведем построение поверхности с помощью сечений. В сечении плоскостью $X'O'Z'$ получаем эллипс с уравнением $\frac{(x')^2}{1^2}+\frac{(z')^2}{2^2}=1$. Его полуоси равны 1 и 2 и лежат соответственно на осях $O'X'$ и $O'Z'$. В сечении плоскостью $X'O'Y'$ получаем гиперболу с уравнением $\frac{(x')^2}{1^2}-\frac{(y')^2}{2^2}=1$. Ее мнимая ось лежит на оси $O'Y'$, а действительная ось лежит на оси $O'X'$, полуоси соответственно равны 2 и 1. В сечении плоскостью $Y'O'Z'$ получаем равностороннюю гиперболу с уравнением $-\frac{(y')^2}{2^2}+\frac{(z')^2}{2^2}=1$. Ее мнимая ось лежит на оси $O'Y'$, а действительная ось лежит на оси $O'Z'$, обе полуоси равны 2. Для большей наглядности нарисуем еще два сечения плоскостями параллельными плоскости $X'O'Z'$. В сечениях получим эллипсы, подобные эллипсу в плоскости $X'O'Z'$. По рассмотренным сечениям можно представить себе форму гиперболоида и его расположение в пространстве (рис. 16).

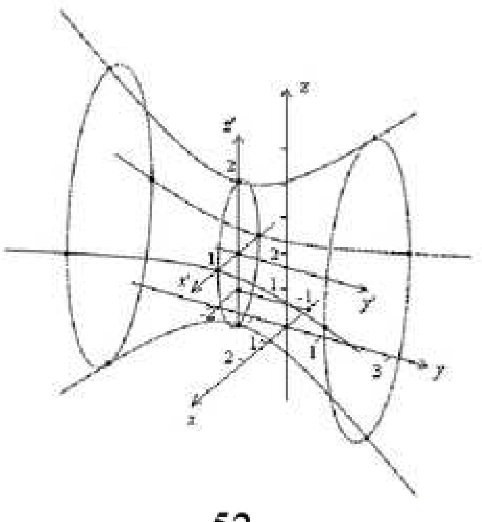


Рис. 16

2.6. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти угловой коэффициент каждой из прямых, которые заданы уравнениями:

а) $2x-3y+1=0$; б) $6x+7y+2=0$; в) $3y-4=0$; г) $5x-8=0$.

Задача 2. Найти расстояние от точки A до прямой P.

а) $A(2,6)$; $-12x+5y+25=0$; б) $A(-3,2)$; $8x-6y+5=0$;

в) $A(9,-1)$; $3x+8y-4=0$; г) $A(5,13)$; $14x-2y+11=0$.

Задача 3. Даны координаты двух точек A, B и уравнение прямой P. Составить уравнения прямых, проходящих через точку A и образующих с прямой P угол $\alpha = 45^\circ$. Составить уравнение прямой AB. Найти угол β между прямыми AB и P.

а) $A(12,6)$, $B(0,11)$; $4x+5y+6=0$; б) $A(-1,-4)$, $B(6,1)$; $x-5y+10=0$;

в) $A(3,-5)$, $B(6,9)$; $x+7y+2=0$; г) $A(3,4)$, $B(4,-3)$; $-5x+3y+3=0$.

Задача 4. Даны вершины треугольника ABC. Найти: точку пересечения его высот.

а) $A(-2,3)$, $B(-7,-3)$, $C(4,-1)$; б) $A(-1,-3)$, $B(1,2)$, $C(5,1)$;
в) $A(2,-1)$, $B(4,7)$, $C(5,2)$; г) $A(1,0)$, $B(-1,6)$, $C(5,4)$.

Задача 5. Даны вершины треугольника ABC. Найти уравнения его медиан.

а) $A(-2,3)$, $B(-6,-3)$, $C(4,-1)$; б) $A(-1,-3)$, $B(1,3)$, $C(5,1)$;
в) $A(2,-1)$, $B(4,7)$, $C(6,1)$; г) $A(1,0)$, $B(-1,4)$, $C(3,2)$.

Задача 6. Даны точки A и B. Найти уравнение серединного перпендикуляра к отрезку AB.

а) $A(-2,3)$, $B(-6,-3)$; б) $A(-1,-3)$, $B(1,3)$;
в) $A(2,-1)$, $B(4,7)$; г) $A(1,0)$, $B(-1,4)$.

Задача 7. Даны точка M и вектор $\vec{n}$. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через данную точку перпендикулярно данному вектору.

а) $M(7,-7,3)$; вектор $\vec{n}(2,-2,5)$; б) $M(4,-3,8)$; вектор $\vec{n}(-2,3,3)$;
в) $M(10,7,1)$; вектор $\vec{n}(-2,1,12)$; г) $M(5,4,4)$; вектор $\vec{n}(2,2,3)$.

Задача 8. Составить общее уравнение плоскости, проходящей через данные точки A, B,C. Составить уравнения прямой, проходящей через точку A перпендикулярно построенной плоскости ABC.

а) $A(2,0,1)$, $B(4,1,3)$, $C(5,1,0)$; б) $A(3,2,1)$, $B(4,5,-1)$, $C(3,1,0)$;
в) $A(6,3,1)$, $B(7,0,-2)$, $C(3,3,4)$; г) $A(0,2,2)$, $B(1,-2,5)$, $C(5,1,3)$.

Задача 9. Даны точки A, B и вектор $\vec{s}$. Составить уравнения прямой AB и уравнения прямой, проходящей через точку A параллельно вектору $\vec{s}$; найти угол между этими прямыми.

а) $A(5,0,1)$, $B(2,3,-1)$;вектор $\vec{s}(0,1,3)$;

б) $A(2,-3,1)$, $B(5,0,2)$;вектор $\vec{s}(6,6,7)$;

в) $A(2,3,5)$, $B(4,1,3)$;вектор $\vec{s}\,(4,5,-6)$;
г) $A(0,4,0)$, $B(2,-3,-1)$;вектор $\vec{s}\,(5,-6,5)$.

Задача 10. Даны две противоположные вершины квадрата, лежащего в плоскости, проходящей через начало координат. Составить уравнения диагоналей квадрата.

а) $A(1;0;7), C(3;4;1)$; б) $A(9;3;2), C(7;5;-2)$;
в) $A(4;4;5), C(1;-1;2)$; г) $A(7;1;2), C(5;-1;6)$.

Задача 11. Даны прямая и плоскость. Определить угол между прямой и плоскостью. Найти точку M пересечения прямой и плоскости. Составить уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно данной плоскости.

а) $\frac{x+1}{-3}=\frac{y+21}{-1}=\frac{z-1}{1}$, $5x+7y-z+4=0$;

б) $\frac{x+7}{0}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+2}{5}$, $3x+4y-z+5=0$;

в) $\frac{x+1}{7}=\frac{y-1}{-7}=\frac{z-3}{6}$, $x-3y+z+17=0$;

г) $\frac{x+8}{0}=\frac{y-14}{-4}=\frac{z}{5}$, $4x+7y-z+7=0$.

Задача 12. Прямая задана как пересечение двух плоскостей, привести уравнения прямой к каноническому виду.

а) $\begin{cases}5x+2y-4z+7=0\\ 8x+3y+z-2=0\end{cases}$ б) $\begin{cases}x+2y+z-4=0\\ x+y+5z-6=0\end{cases}$

в) $\begin{cases}-x+4y+5z-12=0\\ 3x+y+4z-3=0\end{cases}$ г) $\begin{cases}3x-4y-z+1=0\\ 4x+5y+2z-4=0\end{cases}$

Задача 13. Даны точки A, B и плоскость P. Найти расстояние от точки A до плоскости P. Составить уравнение плоскости, проходящей через данные точки A, B перпендикулярно плоскости P.

а) $A(5,-3,5)$, $B(4,1,2)$; $2x-5y+z-10=0$;
б) $A(3,4,-2)$, $B(8,5,0)$; $-x+y+6z=0$;
в) $A(-1,-4,-3)$, $B(2,0,7)$; $x-y+5z-15=0$;
г) $A(4,-3,-1)$, $B(7,4,2)$; $2x-6y+z+6=0$.

Задача 14. Дана точка A и две плоскости. Найти угол между данными плоскостями. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A перпендикулярно обеим плоскостям. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку A и прямую пересечения данных плоскостей.

а) $A(1,1,4)$; $8x-y+z-8=0$, $3x+2y-z+6=0$;
б) $A(-1,3,2)$; $7x-y-z+7=0$, $x+5y+z-10=0$;
в) $A(1,0,5)$; $2x+2y+z-4=0$, $3x+y-2z+6=0$;
г) $A(0,2,1)$; $12x+y-z+1=0$, $-3x+5y+z-15=0$.

Задача 15. Составить уравнение окружности в каждом из следующих

случаев:
а) центр окружности совпадает с точкой $C(1;\ -1)$ и прямая $5x-12y+9=0$ является касательной к окружности;
б) окружность проходит через точки $A(3;\ 1)$ и $B(-1;\ 3)$, а ее центр лежит на прямой $3x-y-2=0$;
в) окружность проходит через три точки $A(1;\ 1)$, $B(1;\ -1)$, $C(2;\ 0)$;
г) окружность проходит через три точки: $M_1(-1;\ 5)$, $M_2(-2;\ -2)$, $M_3(5;\ 5)$.

Задача 16. Составить уравнения эллипса, фокусы которого расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:
а) точка $M_1(2;\ -2)$ эллипса и его большая полуось a=4;
б) точки $M_1(4;\ -\sqrt{3})$ и $M_2(2\sqrt{2};\ 3)$ эллипса;
в) точка $M_1(2;\ -5/3)$ эллипса и его эксцентриситет e=2/3;
г) точка $M_1(-\sqrt{5};\ 2)$ эллипса и расстояние между его директрисами, равное 10.

Задача 17. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны:
а) точка $M_1(-5;\ 3)$ гиперболы и эксцентриситет $e=\sqrt{2}$;
б) точка $M_1(9/2;\ -1)$ гиперболы с уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{2}{3}x$;
в) точка $M_1(-3;\ 5/2)$ гиперболы и уравнения директрис $x=\pm\dfrac{4}{3}$;
г) уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{3}{4}x$ и уравнения директрис $x=\pm\dfrac{16}{5}$.

Задача 18. Составить уравнение параболы, вершина которой находится в начале координат, зная, что:
а) парабола расположена симметрично относительно оси OX и проходит через точку $A(9;\ 6)$;
б) парабола расположена симметрично относительно оси OX и проходит через точку $B(-1;\ 3)$;
в) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $C(1;\ 1)$;
г) парабола расположена симметрично относительно оси OY и проходит через точку $D(4;\ -8)$.

Задача 19. Какие геометрические образы определяются следующими уравнениями:
а) $8x^2-12xy+17y^2+16x-12y+3=0$;
б) $17x^2-18xy-7y^2+34x-18y+7=0$;
в) $2x^2+3xy-2y^2+5x+10y=0$;
г) $6x^2-6xy+9y^2-4x+18y+14=0$.

Задача 20. Какие геометрические образы определяются следующими уравнениями:

а) $x^2+4xy+4y^2+4x+y-15=0$;

б) $9x^2+24xy+16y^2-120x+90y=0$;

в) $4x^2+4xy+y^2-12x-6y+5=0$;

г) $x^2-6xy+9y^2+4x-12y+4=0$.

Задача 21. Определить координаты центра и радиус сферы:

а) $x^2+y^2+z^2-12x+4y-6z=0$;

б) $x^2+y^2+z^2+8x=0$;

в) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-22=0$;

г) $x^2+y^2+z^2-6z-7=0$.

Задача 22. Определить расположение точек относительно сферы $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=49$:

а) $A(3,0,4)$; б) $B(3,5,0)$; в) $C(3,4,4)$; г) $D(5,4,6)$.

Задача 23. Определить расположение плоскостей относительно сферы $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-4)^2=25$:

а) $2x+2y+z+2=0$; б) $2x+2y+z+5=0$;

в) $2x+2y+z+11=0$; г) $2x+2y+z-10=0$.

Задача 24. Составить уравнение:

а) конуса с вершиной в точке S(5; 0; 0), образующие которого касаются сферы $x^2+y^2+z^2=9$;

б) цилиндра, описанного около двух сфер: $(x-2)^2+(y-1)^2+z^2=25$, $x^2+y^2+z^2=25$;

в) поверхности, образованной вращением эллипса $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$, z=0 вокруг оси OX;

г) поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{16}-\frac{z^2}{9}=1$, y=0 вокруг оси OZ.

Задача 25. Какие поверхности определяются следующими уравнениями:

а) $4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0$;

б) $x^2+z^2-4x-4z+4=0$;

в) $x^2+y^2-z^2-2y+2z=0$;

г) $x^2+y^2-6x+6y-4z+18=0$.

2.7. Ответы

1. а) $\frac{2}{3}$; б) $-\frac{6}{7}$; в) 0; г) не существует. **2.** а) $\frac{31}{13}$; б) $\frac{31}{10}$; в) $\frac{15}{\sqrt{73}}$; г) $\frac{11}{2\sqrt{2}}$.
3. а) $9x+y=114$, $x-9y=42$, $5x+12y=132$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{23}{80}$; б) $2x+3y=-14$, $3x-2y=5$, $5x-7y=23$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{9}{20}$; в) $3x-4y=29$, $4x+3y=-3$, $14x-3y=57$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{101}{7}$; г) $4x+y=16$, $x-4y=-13$, $7x+y=25$, $\beta=\operatorname{arctg}\frac{81}{112}$. **4.** а) $(-\frac{31}{14};\frac{117}{28})$; б) $(-\frac{41}{11};-\frac{21}{11})$; в) $(2;-4)$; г) $(1;0)$.
5. а) $5x+y+7=0$, $4x-7y+3=0$, $x+8y+4=0$; б) $5x-4y-7=0$, $4x+y-7=0$, $x-5y=0$; в) $5x-3y-13=0$, $x-4=0$, $2x+3y+-15=0$; г) $x-1=0$, $x+y-3=0$, $y-2=0$. **6.** а) $2x+3y+8=0$; б) $x+3y=0$; в) $x+4y-15=0$; г) $x-2y+4=0$. **7.** а) $2x-2y+5z-43=0$; б) $2x-3y-3z+7=0$; в) $2x-y-12z-1=0$; г) $2x+2y+3z-30=0$.
8. а) $3x-8y+z-7=0$, $\frac{x-2}{3}=\frac{y}{-8}=\frac{z-1}{1}$; б) $5x-y+z-14=0$, $\frac{x-3}{5}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-1}{1}$; в) $3x-2y+3z-15=0$, $\frac{x-6}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-1}{3}$; г) $x-14y+19z-10=0$, $\frac{x}{1}=\frac{y-2}{-14}=\frac{z-2}{19}$. **9.** а) $\frac{x-5}{-3}=\frac{y}{3}=\frac{z-1}{-2}$, $\frac{x-5}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{3}$, $\arccos(-\frac{3}{2\sqrt{55}})$; б) $\frac{x-2}{3}=\frac{y+3}{3}=\frac{z-1}{1}$, $\frac{x-2}{6}=\frac{y+3}{6}=\frac{z-1}{7}$, $\arccos\frac{43}{11\sqrt{19}}$; в) $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-5}{-1}$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y-3}{5}=\frac{z-5}{-6}$, $\arccos\frac{5}{\sqrt{231}}$; г) $\frac{x}{2}=\frac{y-4}{-7}=\frac{z}{-1}$, $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{-6}=\frac{z}{5}$, $\arccos\frac{47}{6\sqrt{129}}$. **10.** а) $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-7}{-3}$, $\frac{x-2}{17}=\frac{y-2}{20}=\frac{z-4}{19}$; б) $\frac{x-9}{1}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z-2}{2}$, $\frac{x-8}{11}=\frac{y-4}{7}=\frac{z}{-2}$; в) $\frac{x-4}{3}=\frac{y-4}{5}=\frac{z-5}{3}$, $\frac{x-2,5}{9}=\frac{y-1,5}{39}=\frac{z-3,5}{-74}$; г) $\frac{x-7}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-2}{-2}$, $\frac{x-6}{19}=\frac{y}{1}=\frac{z-4}{10}$.
11. а) $\arcsin\frac{23}{5\sqrt{33}}$, $(\frac{424}{23},-\frac{334}{23},-\frac{126}{23})$, $3x-y+8z-26=0$; б) $\arcsin\frac{11}{\sqrt{1066}}$, $(-7,\frac{41}{11},-\frac{12}{11})$, $8x-5y+4z+79=0$; в) $\arcsin\frac{34}{\sqrt{1474}}$, $(-\frac{73}{17},\frac{73}{17},\frac{3}{17})$, $11x-y-14z+54=0$; г) $\arcsin\frac{33}{\sqrt{2706}}$, $(-8,\frac{170}{33},\frac{365}{33})$, $31x-20y-16z+528=0$. **12.**

а) $\dfrac{x}{14}=\dfrac{y-\frac{1}{14}}{-37}=\dfrac{z-\frac{25}{14}}{-1}$; б) $\dfrac{x}{9}=\dfrac{y-\frac{14}{9}}{-4}=\dfrac{z-\frac{8}{9}}{-1}$; в) $\dfrac{x}{11}=\dfrac{y-3}{-11}=\dfrac{z}{-13}$; г) $\dfrac{x}{3}=\dfrac{y+\frac{2}{3}}{10}=\dfrac{z-\frac{11}{3}}{-31}$. **13.** а) $\sqrt{30}$, $11x+5y+3z-55=0$; б) $\dfrac{11}{\sqrt{38}}$, $2x-16y+3z+64=0$; в) $\dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $30x-5y-7z-11=0$; г) $\dfrac{25}{\sqrt{41}}$, $25x+3y-32z-123=0$. **14.** а) $\arccos\dfrac{21}{2\sqrt{231}}$, $x-11y-13z+62=0$, $53x-7y+10z-86=0$; б) $\arccos\dfrac{1}{9\sqrt{17}}$, $x-2y+9z-11=0$, $115x+53y+17z-78=0$; в) $\arccos\dfrac{2}{\sqrt{14}}$, $5x-7y+4z-25=0$, $11x+5y-5z+14=0$; г) $\arccos\dfrac{32}{\sqrt{5110}}$, $2x-3y+21z-15=0$, $21x-7y-z+15=0$. **15.** а) $(x-1)^2+(y+1)^2=4$; б) $(x-2)^2+(y-4)^2=10$; в) $(x-1)^2+y^2=1$; г) $(x-2)^2+(y-1)^2=25$. **16.** а) $x^2+3y^2=16$; б) $3x^2+4y^2=60$; в) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$; г) $\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{6}=1$. **17.** а) $x^2-y^2=16$; б) $\dfrac{x^2}{18}-\dfrac{y^2}{8}=1$; в) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$, $\dfrac{9x^2}{61}-\dfrac{16y^2}{305}=1$; г) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. **18.** а) $y^2=4x$; б) $y^2=-9x$; в) $x^2=y$; г) $x^2=-2y$.
19. а) эллипс; б) гипербола; в) две пересекающиеся прямые; г) мнимый эллипс.
20. а) парабола; б) парабола; в) две параллельные прямые; г) две совпадающие прямые. **21.** а) $O(6,-2,3)$, $R=7$; б) $O(-4,0,0)$, $R=4$; в) $O(1,-2,3)$, $R=6$; г) $O(0,0,3)$, $R=4$. **22.** а) внутри; б) снаружи; в) принадлежит; г) снаружи. **23.** а) пересекает; б) касается; в) не пересекает; г) пересекает и является диаметральной. **24.** а) $9(x-5)^2+16y^2-16z^2=0$; б) $x^2-4xy+4y^2+5z^2=125$; в) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{9}=1$; г) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{z^2}{9}=1$. **25.** а) конус; б) круговой цилиндр; в) конус; г) круговой параболоид.

3. АЛГЕБРА МНОГОЧЛЕНОВ

3.1. Комплексные числа

Определение. *Мнимой единицей* называется такое число i, что $i^2 = -1$.

Определение. Выражение $a + bi$, где a и b действительные числа и i – мнимая единица, называется *комплексным числом*, записанным в *алгебраической форме*. Здесь число a называется *действительной частью*, а число bi – *мнимой частью* комплексного числа.

Имеются обозначения Re и Im. Если $z = a + bi$, то $\operatorname{Re} z = a$, а $\operatorname{Im} z = b$. Комплексное число, у которого b равно нулю, является действительным, а у которого a равно нулю, называют *чисто мнимым*.

Комплексное число $z = a + bi$ равно 0, если $a = 0$ и $b = 0$.

Комплексные числа $z = a_1 + b_1 i$ и $z = a_2 + b_2 i$ равны, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Понятия больше и меньше к комплексным числам, вообще говоря, неприменимы, поскольку сравнение на множестве комплексных чисел удовлетворительно ввести нельзя.

Определение. Для комплексного числа $z = a + bi$ комплексное число $\bar{z} = a - bi$ называется *комплексно сопряженным*.

Операции над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$.

Вычитание: $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$.

Умножение: $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$, в частности, $(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$, т. е. произведение сопряженных комплексных чисел есть действительное неотрицательное число.

Деление:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i,$$

где c и d не обращаются одновременно в ноль.

Операции над комплексными числами обладают теми же свойствами (коммутативность, ассоциативность, дистрибутивность и т.д.), что и действительные. Из свойств операции комплексного сопряжения отметим: $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$, $\bar{\bar{z}} = z$.

Геометрическая интерпретация

Пусть дано комплексное число $z = a + bi$. На координатной плоскости (рис. 17) можно поставить точку с координатами (a,b). Получается способ задания взаимно-однозначного соответствия между комплексными числами и точками плоскости. Запись $z = a + bi$ использует декартовы координаты точки, соответствующей этому числу. Положение точки на плоскости вполне определяется также заданием ее полярных координат: расстояния r от начала координат до точки и угла φ между положительным направлением оси абсцисс и направлением из начала координат на эту точку.

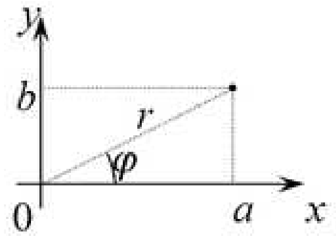


Рис. 17

Число r является неотрицательным действительным числом, причем оно равно нулю лишь для точки 0. Для комплексного числа, лежащего на действительной оси (т. е. являющегося действительным), число r будет его модулем. Поэтому r называют *модулем* комплексного числа z и обозначают $|z|$. Угол φ называют *аргументом* комплексного числа z и обозначают $\arg z$. Угол φ может принимать любые действительные значения, как положительные, так и отрицательные. Положительные углы отсчитываются против часовой стрелки, а отрицательные – по часовой. Если углы отличаются друг от друга на число, кратное 2π, то соответствующие им точки плоскости совпадают. Поэтому из равенства двух комплексных чисел следует, что их модули равны, а аргументы отличаются друг от друга на число, кратное 2π. Аргумент не определен лишь для числа 0, но это число вполне определяется равенством $|0| = 0$.

Тригонометрическая и показательная формы

Между декартовыми и полярными координатами имеется следующая очевидная связь: $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$, и наоборот, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$ при $a \neq 0$ и $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ при $a = 0$. Тогда вместо $z = a + bi$ можно написать $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Такая запись называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Для однозначности иногда договариваются, что $\varphi \in [0, 2\pi)$ (иногда, что $\varphi \in (-\pi, \pi]$). Если учесть формулу Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то получим $z = re^{i\varphi}$. Такая запись называется *показательной формой* комплексного числа.

Перемножим два комплексных числа в тригонометрической форме: $z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$. Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются. Аналогично сделаем с делением: $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$, и получим вывод: при делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются. Операция произведения комплексного числа в тригонометрической форме самого на себя несколько раз даст результат, называемый *формулой Муавра*:

$$z^n = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

т. е. при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Извлечение корня n-й степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\cdot(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}),$$

где $k = 0,1,2,...,n-1$. Все значения корня n-й степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в 0 и делят эту окружность на n равных частей.

3.2. Многочлены и рациональные дроби

Определение. Выражение $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ называется *многочленом* (*полиномом*) степени n от неизвестной x.

Определение. *Корнем* многочлена $f(x)$ называется такое число c, что $f(c) = 0$.

Теорема (*Безу*). Остаток от деления многочлена $f(x)$ на $x - c$ равен $f(c)$.

Теорема (*Основная теорема алгебры*). Всякий многочлен с любыми числовыми коэффициентами, степень которого не меньше единицы, имеет хотя бы один корень, в общем случае комплексный.

Следствие. Для любого многочлена $f(x)$ степени n существует разложение $f(x) = a_0(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$, единственное с точностью до порядка множителей, где $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ в общем случае комплексные.

Следствие. Всякий многочлен степени n ($n \geq 1$) имеет n корней, в общем случае комплексных, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность. (Кратность корня можно понимать как количество вхождений корня a_i в разложение $f(x) = a_0(x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$.)

Следствие. Комплексные корни всякого многочлена с действительными коэффициентами попарно сопряжены.

Следствие. Всякий многочлен с действительными коэффициентами степени больше, чем второй разложим на множители степени не более второй с действительными коэффициентами. При этом линейные множители вида $x - a$ соответствуют действительным корням a многочлена, а множители вида $x^2 + bx + c$ ($D < 0$) соответствуют парам сопряженных комплексных корней.

Определение. *Рациональной дробью* называется дробь, в числителе и знаменателе которой стоят многочлены.

Определение. Рациональная дробь называется *правильной*, если степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, и *неправильной* – иначе.

Можно доказать, что всякая неправильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби.

Определение. Правильная рациональная дробь называется *простейшей*, если в ее знаменателе стоит натуральная степень приведенного (т. е. с единичным коэффициентом при старшем члене) неразложимого на множители многочлена.

Выше утверждалось, что всякий многочлен степени, выше второй, можно разложить на множители степени, не выше второй (все коэффициенты, естественно, предполагаются действительными).

Простейшие дроби делятся на следующие четыре типа:

1. $\dfrac{A}{x-a}$;

2. $\dfrac{A}{(x-a)^{\alpha}}$ ($\alpha \in N,\ \alpha \geq 2$);

3. $\dfrac{Bx+C}{x^2+bx+c}$ (дискриминант знаменателя $D<0$);

4. $\dfrac{Bx+C}{\left(x^2+bx+c\right)^{\beta}}$ (дискриминант знаменателя $D<0$, $\beta \in N,\ \beta \geq 2$).

Можно доказать, что всякую правильную рациональную дробь можно разложить в сумму простейших, причем единственным образом (с точностью до перестановки слагаемых).

Алгоритм этого разложения следующий:

1. Разложить знаменатель на множители.

2. Разложить данную дробь на сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами в числителях так, что множителям знаменателя вида $(x-a)^{\alpha}$ (т. е. a – корень знаменателя степени α) соответствуют α простейших дробей вида $\dfrac{A_m}{(x-a)^m}$ ($m=1,2,\ldots,\alpha$), где A_m – неизвестные пока числа, а множителям вида $\left(x^2+bx+c\right)^{\beta}$ (здесь многочлен x^2+bx+c не имеет действительных корней) соответствуют β простейших дробей вида $\dfrac{B_n x+C_n}{\left(x^2+bx+c\right)^n}$ ($n=1,2,\ldots,\beta$), где B_n и C_n – также неизвестные пока числа.

3. Для нахождения неизвестных коэффициентов надо правую часть искомого разложения привести к общему знаменателю (им должен получиться

изначальный знаменатель).

4. Можно доказать, что два многочлена равны (в функциональном смысле) тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x (т. е. когда многочлены равны в алгебраическом смысле). Поэтому у получившегося в числителе многочлена и у многочлена в изначальном числителе приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x. При этом получается система линейных алгебраических уравнений, у которой число уравнений должно (если все сделано правильно) совпадать с числом неизвестных.

5. Решить полученную систему уравнений (если все сделано правильно, то метод гарантирует, что решение существует и единственно).

6. Подставить найденные числа в разложение на свои места.

3.3. Решение задач на многочлены

Пример 1. Перемножить комплексные числа $(2+3i)(3-4i)$.

Решение. $(2+3i)(3-4i)=6+9i-8i-12i^2=6+i+12=18+i$.

Пример 2. Выполнить деление $\dfrac{2+3i}{3-4i}$.

Решение. $\dfrac{2+3i}{3-4i}=\dfrac{(2+3i)(3+4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\dfrac{2+9i+8i+12i^2}{9-16i^2}=\dfrac{2+17i-12}{9+16}=$

$$=\frac{-10+17i}{25}=-0,4+0,68i.$$

Пример 3. Решить уравнение $z^2-4z+5=0$.

Решение. $D=16-20=-4$, $z=\dfrac{4\pm 2i}{2}=2\pm i$.

Пример 4. Найти корни $\sqrt[3]{-i}$.

Решение. Так как $-i=0-1i$, то $a=0,\ b=-1$, $r=\sqrt{0^2+(-1)^2}=1$, $\begin{cases}\cos\varphi=0\\ \sin\varphi=-1\end{cases}$, т. е. $\varphi=3\pi/2$. Тогда $-i=\cos(3\pi/2)+i\sin(3\pi/2)$. Следовательно, $\sqrt[3]{-i}=\cos\dfrac{3\pi/2+2\pi k}{3}+i\sin\dfrac{3\pi/2+2\pi k}{3}$, где $k=0,1,2.$

При $k=0$: $\sqrt[3]{-i}=\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2)=0+i=i$.

При $k=1$: $\sqrt[3]{-i}=\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$.

При $k=2$: $\sqrt[3]{-i}=\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{i}{2}$.

Пример 5. Разложить рациональную дробь

$$\frac{x^6-x^5-6x^3+2x^2+9x+1}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$$

на простейшие.

Решение. Разделим числитель на знаменатель уголком:

$$\begin{array}{r|l}
-\; x^6-x^5-6x^3+2x^2+9x+1 & x^5-2x^3+2x^2-3x+2 \\ \cline{2-2}
x^6-2x^4+2x^3-3x^2+2x & x-1 \\ \cline{1-1}
-\; -x^5+2x^4-8x^3+5x^2+7x+1 & \\
-x^5+2x^3-2x^2+3x-2 & \\ \cline{1-1}
2x^4-10x^3+7x^2+4x+3 &
\end{array}$$

Получим: $\dfrac{x^6-x^5-6x^3+2x^2+9x+1}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}=x-1+\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$. Разложим знаменатель на множители: $x^5-2x^3+2x^2-3x+2=$

$$=x^5+x^3-3x^3-3x+2x^2+2=x^3(x^2+1)-3x(x^2+1)+2(x^2+1)=$$

$$=(x^2+1)(x^3-3x+2)=(x^2+1)(x^3-x-2x+2)=(x^2+1)(x(x^2-1)-2(x-1))=$$

$$=(x^2+1)(x(x-1)(x+1)-2(x-1))=(x^2+1)(x-1)(x^2+x-2)=(x^2+1)(x-1)^2(x+2).$$

Тогда разложение должно иметь вид: $\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}=$

$$=\frac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}=\frac{A}{(x+2)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-1)^2}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=$$

$$=\frac{A(x-1)^2(x^2+1)+B(x+2)(x-1)(x^2+1)+C(x+2)(x^2+1)+(Dx+E)(x+2)(x-1)^2}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}=$$

$$=\frac{(A+B+D)x^4+(-2A+B+C+E)x^3+(2A-B+2C-3D)x^2+(-2A+B+C+2D-3E)x+(A-2B+2C+2E)}{(x+2)(x-1)^2(x^2+1)}.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x из начального и конечного числителей, получаем систему:

$$\begin{cases}A+B+D=2\\-2A+B+C+E=-10\\2A-B+2C-3D=7\\-2A+B+C+2D-3E=4\\A-2B+2C+2E=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=3\\B=-2\\C=1\\D=1\\E=-3.\end{cases}$$

Таким образом, $\dfrac{x^6-x^5-6x^3+2x^2+9x+1}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$.

3.4. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Вычислить выражения:

а) $(2+i)(3-i)+(2+3i)(3+4i)$; б) $(2+i)(3+7i)-(1+2i)(5+3i)$;

в) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$; г) $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$.

Задача 2. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases}(1+i)z_1+(1-i)z_2=1+i\\(1-i)z_1+(1+i)z_2=1+3i\end{cases}$; б) $\begin{cases}iz_1+(1+i)z_2=2+2i\\2iz_1+(3+2i)z_2=5+3i\end{cases}$;

в) $\begin{cases}(1-i)z_1-3z_2=-i\\2z_1-(3+3i)z_2=3-i\end{cases}$; г) $\begin{cases}2z_1-(2+i)z_2=-i\\(4-2i)z_1-5z_2=-1-2i\end{cases}$.

Задача 3. Решить уравнения:

а) $z^2=-4$; б) $z^2+iz=0$;

в) $z^2+2z+5=0$; г) $5z^2-2z+2=0$.

Задача 4. Решить уравнения:

а) $z^2=i$; б) $z^2=3-4i$;

в) $z^2-5z+4+10i=0$; г) $z^2+(2i-7)z+13-i=0$.

Задача 5. Найти тригонометрическую форму числа:

а) 5; б) i; в) -2; г) $-3i$.

Задача 6. Найти тригонометрическую форму числа:

а) $1-i$; б) $-1+i\sqrt{3}$; в) $1+i\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; г) $1-(2+\sqrt{3})i$.

Задача 7. Вычислить выражения:

а) $(1+i)^{1000}$; б) $(1+i\sqrt{3})^{150}$; в) $(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2})^{24}$; г) $(\dfrac{\sqrt{3}+i}{1-i})^{30}$.

Задача 8. Записать в алгебраической форме элементы множества:

а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[3]{i}$; в) $\sqrt[4]{-4}$; г) $\sqrt[6]{-27}$.

Задача 9. Разделить с остатком:

а) $x^4-2x^3+4x^2-6x+8$ на $x-1$;

б) $2x^5-5x^3-8x$ на $x+3$;

в) $3x^5+x^4-19x^2-13x-10$ на $x-2$;

г) $x^4-3x^3-10x^2+2x+5$ на $x+2$.

Задача 10. Определить кратность корня многочлена:

а) $x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$; $x=2$;

б) $x^5+7x^4+16x^3+8x^2-16x-16$ на $x=-2$;

в) $3x^5+2x^4+x^3-10x-8$ на $x=-1$;

г) $x^5-6x^4+2x^3+36x^2-27x-54$ на $x=3$.

Задача 11. Разложить на множители с действительными коэффициентами:

а) x^4+x^2-6x-8; б) x^3-3x^2+4x-2;

в) $x^4+3x^3-12x^2-13x-15$; г) x^3-2x^2-5x+6.

Задача 12. Разложить на сумму простейших:

а) $\dfrac{4x-57}{(x-6)(x+5)}$; б) $\dfrac{8x}{(x-1)(x+3)}$;

в) $\dfrac{x+14}{x^2+3x-4}$; г) $\dfrac{8x+1}{x^2-x-6}$.

Задача 13. Разложить на сумму простейших:

а) $\dfrac{5x^3+2x^2+7x-2}{(x^2+2)(x^2+x+1)}$; б) $\dfrac{8x+8}{x^4+10x^2+9}$;

в) $\dfrac{x^4+2}{x^2(x-1)}$; г) $\dfrac{x^3+2x+1}{x^3(x+1)}$.

Задача 14. Разложить на сумму простейших:

а) $\dfrac{x^2}{x^4-16}$; б) $\dfrac{1}{x^4+4}$;

в) $\dfrac{x}{(x+1)(x^2+1)^2}$; г) $\dfrac{1}{(x^4-1)^2}$.

3.5. Ответы

1. а) $1+18i$; б) $4i$; в) $5+i$; г) $\dfrac{13}{2}+\dfrac{1}{2}i$. **2.** а) $(i;1+i)$; б) $(2;1-i)$; в) $\varnothing$; г) $(\dfrac{(2+i)c-i}{2};c)$, где c – любое комплексное число. **3.** а) $\pm 2i$; б) 0; $-i$; в) $-1\pm 2i$; г) $0,2\pm 0,6i$.**4.** а) $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$; б) $\pm(2-i)$; в) $5-2i$; $2i$; г) $5-3i$; $2+i$. **5.** а) $5(\cos 0+i\sin 0)$; б) $\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$; в) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$; г) $3(\cos(-\dfrac{\pi}{2})+i\sin(-\dfrac{\pi}{2}))$. **6.** а) $\sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+i\sin(-\dfrac{\pi}{4}))$; б) $2(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3})$; в) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$; г) $(\sqrt{6}+\sqrt{2})(\cos(-\dfrac{5\pi}{12})+i\sin(-\dfrac{5\pi}{12}))$. **7.** а) 2^{500}; б) 2^{150}; в) $(2+\sqrt{3})^{12}$; г) $2^{15}i$. **8.** а) $1;-\dfrac{1}{2}\pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{i}{2};-i$; в) $1\pm i;-1\pm i$; г) $\pm i\sqrt{3}$; $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i)$; $\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)$.
9. а) частное x^3-x^2+3x-3, остаток 5; б) частное $2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$, остаток –327; в) частное $3x^4+7x^3+14x^2+9x+5$, остаток 0; г) частное x^3-5x^2+2, остаток 1. **10.** а) 3; б) 4; в) 2; г) 3. **11.** а) $(x+1)(x-2)(x^2+x+4)$;

б) $(x-1)(x^2-2x+2)$; в) $(x-3)(x+5)(x^2+x+1)$; г) $(x-1)(x-3)(x+2)$.

12. а) $\frac{7}{x+5}-\frac{3}{x-6}$; б) $\frac{2}{x-1}+\frac{6}{x+3}$; в) $\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+4}$; г) $\frac{3}{x+2}+\frac{5}{x-3}$.

13. а) $\frac{3x}{x^2+2}+\frac{2x-1}{x^2+x+1}$; б) $\frac{x+1}{x^2+1}-\frac{x+1}{x^2+9}$; в) $x+1-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x-1}$;

г) $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{2}{x+1}$.

14. а) $\frac{1}{8(x-2)}-\frac{1}{8(x+2)}+\frac{1}{2(x^2+4)}$;

б) $\frac{x+2}{8(x^2+2x+2)}-\frac{x-2}{8(x^2-2x+2)}$; в) $-\frac{1}{4(x+1)}+\frac{x-1}{4(x^2+1)}+\frac{x+1}{2(x^2+1)^2}$;

г) $\frac{1}{16(x-1)^2}-\frac{3}{16(x-1)}+\frac{1}{16(x+1)^2}+\frac{1}{4(x^2+1)}+\frac{3}{16(x+1)}+\frac{1}{4(x^2+1)^2}$.

4. МАТРИЦЫ, ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СИСТЕМЫ

4.1. Матрицы. Основные определения

Определение. *Матрицей* называется прямоугольная таблица, в каждой клетке которой стоит какое-нибудь число или выражение.

Матрицы обычно обозначают большими буквами латинского алфавита, например A, B, C.

Определение. Матрица имеет *размерность* $m \times n$, если она имеет m строк и n столбцов.

Определение. *Элементом* матрицы называется содержимое ее клетки.

Элементы матрицы обычно обозначают малыми буквами латинского алфавита с двумя индексами, где первый индекс – номер строки, а второй – номер столбца, где элемент расположен, например a_{ij} – элемент, расположенный на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Матрицу обычно записывают следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковую размерность и их элементы, стоящие на одинаковых местах, равны.

Определение. Матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю.

Нулевую матрицу будем обозначать O (в то время как число – 0).

Определение. *Матрицей-строкой* называется матрица размерности $1 \times n$. Ее также называют *вектор-строкой*.

Определение. *Матрицей-столбцом* называется матрица размерности $m \times 1$. Ее также называют *вектор-столбцом*.

Определение. *Транспонированными* называются матрицы, у которых строки (столбцы) одной являются столбцами (строками) другой. (Также говорят, что одна матрица получена из другой транспонированием).

Матрицу, полученную из матрицы A транспонированием, будем обозначать A^T.

Определение. Матрица называется *квадратной*, если число ее строк равно числу ее столбцов.

О размерности квадратной матрицы говорят одним числом, например квадратная матрица размерности n.

Определение. *Главную диагональ* квадратной матрицы образуют элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}.

Определение. *Побочную диагональ* квадратной матрицы образуют элементы a_{n1}, $a_{n-1,2}$, …, a_{1n}.

Определение. Квадратная матрица называется *диагональной*, если все ее элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю.

Определение. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* (*нижнетреугольной*), если все ее элементы, расположенные ниже (выше) главной диагонали, равны нулю.

Определение. Квадратная матрица называется *единичной*, если элементы ее главной диагонали равны единице, а все остальные – нулю.

Единичную матрицу будем обозначать E. Очевидно, что она является диагональной.

4.2. Операции над строками матрицы

Определение. *Элементарными преобразованиями строк* матрицы называются преобразования следующих трех типов:

1. *Перестановка местами двух строк.*

Условное обозначение: , где стрелки указывают на строки, переставляемые местами.

2. *Замена строки суммой этой строки и другой, предварительно умноженной на какое-либо число λ.*

Условное обозначение: , где стрелка указывает на изменяемую строку, а множитель λ ставится рядом с преобразуемой строкой.

3. *Умножение элементов строки на ненулевое число λ.*

Условное обозначение λ ставится рядом с преобразуемой строкой.

Аналогично вводятся *элементарные преобразования столбцов* матрицы.

4.3. Ступенчатые матрицы

Определение. *Опорным элементом строки* матрицы называется первый слева ненулевой элемент этой строки.

Условное обозначение: обводится кружочком или квадратиком.

Определение. Матрица называется *ступенчатой* (*имеющей ступенчатый вид*), если опорный элемент каждой последующей строки расположен правее опорного элемента предыдущей.

В частности, опорный элемент первой строки может находиться в любом месте, нулевая строка (все элементы которой – нули) может располагаться под любой строкой, а ниже нулевой строки могут находиться только нулевые.

Определение. Матрица имеет *ступенчатый вид Гаусса*, если:

- она имеет ступенчатый вид;
- все опорные элементы равны единице;
- над опорными элементами всюду выше стоят только нули.

Поскольку в некоторых доказательствах мы собираемся использовать *принцип математической индукции*, то приведем его формулировку.

Принцип математической индукции. Пусть сформулировано некоторое утверждение, зависящее от натурального числа n. Тогда, доказав что

- это утверждение верно для некоторого начального n_0 (доказав *базу* индукции);
- это утверждение верно для $n = l$, предполагая, что утверждение верно для всех $n < l$ (доказав *шаг* индукции, принимая *индуктивное предположение*);

можно сделать вывод, что данное утверждение верно для любого натурального n.

Теорема. *Любая матрица A может быть приведена к ступенчатой матрице с помощью элементарных преобразований строк первого и второго типов.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу строк матрицы. Если имеется всего одна строка, то матрица A уже ступенчатая. Пусть теперь матрица A содержит m строк, где $m \geq 2$. Предположим, что матрицу с числом строк, меньшим m, можно привести к ступенчатому виду. Если матрица A нулевая, то она ступенчатая. Если A ненулевая, то в ней есть хоть один ненулевой элемент. Ненулевой элемент располагается в какой-то строке. Значит, в матрице A есть ненулевые строки. Выберем ту строку, в которой опорный элемент располагается в столбце с наименьшим номером, скажем с номером k_1. Применив преобразование первого типа, перенесем эту строку на первое место. Тогда матрица примет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{2k_1} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & b_{mk_1} & \dots \end{pmatrix},$$

причем $b_{1k_1} \neq 0$. Теперь будем применять преобразования второго типа: ко второй строке прибавим первую, умноженную на $-\dfrac{b_{2k_1}}{b_{1k_1}}$, к третьей строке – первую, умноженную на $-\dfrac{b_{3k_1}}{b_{1k_1}}$, и т. д. После применения $m-1$ таких элементарных преобразований добьемся того, что в k_1 столбце всюду, кроме первой строки, будут нули:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_{1k_1} & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Отбросим первую строку. Оставшаяся матрица имеет $m-1$ строку. По индуктивному предположению ее можно привести к ступенчатому виду:

$$G = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ .. & \ldots & \ldots & \ldots & D \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{pmatrix}.$$

Пусть первые ненулевые элементы строк ступенчатой матрицы G располагаются в столбцах с номерами $k_2,\ldots,k_r$. Тогда $k_2 < \ldots < k_r$ по определению ступенчатой матрицы. Но осуществляя элементарные преобразования уменьшенной матрицы, можно считать, что мы делаем элементарные преобразования матрицы C, не использующие первой строки. Поскольку при выполнении этих элементарных преобразований нули, стоявшие в первых k_1 столбцах матрицы C, не могли исчезнуть, то $k_1 < k_2$. Таким образом, мы получили матрицу

$$H = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & b_{1k_1} & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & D \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \end{pmatrix},$$

которая ступенчатая.

Теорема. *Любая матрица A может быть приведена к матрице, имеющей ступенчатый вид Гаусса, с помощью элементарных преобразований строк.*

Доказательство. Поскольку любая матрица A может быть приведена к ступенчатой матрице с помощью элементарных преобразований строк первого и второго типов, то считаем, что первый пункт определения матрицы, имеющей ступенчатый вид Гаусса, выполнен. Теперь применим преобразования третьего типа. Умножим каждую ненулевую строку на число, обратное ее опорному элементу. Стал выполненным и второй пункт определения матрицы, имеющей ступенчатый вид Гаусса. При этом первый пункт не перестал выполняться. Далее для каждой строки i, имеющей опорный элемент b_{ik_i}, кроме первой, в порядке возрастания i сделаем следующее. К каждой строке j, такой что $j<i$, прибавим i-ю строку, умноженную на $-\dfrac{b_{jk_i}}{b_{ik_i}} = -b_{jk_i}$. Таким образом, над опорным элементом b_{ik_i} всюду выше появятся нули. При этом, поскольку в i-й строке до элемента b_{ik_i} стоят нули, то не пропадут нули, стоявшие в j-й строке ($j< i$) до k_j-го столбца, и нули, сделанные в j-й строке ($j< i$) в столбцах между k_j-м и k_i-м столбцами над опорными элементами строк с номерами между j и i. Следовательно, будут выполненными все три пункта определения матрицы, имеющей ступенчатый вид Гаусса.

4.4. Линейная зависимость строк матрицы

Поскольку строку матрицы можно рассматривать как n-мерный вектор, а для векторов вводились понятия линейной зависимости и независимости, то можно рассматривать эти понятия применительно к строкам матрицы. Используя обозначения $\vec{a}_i$ для i-й строки матрицы и $\vec{0}$ для нулевой, имеем следующие определения.

Определение. Строка матрицы называется *линейной комбинацией* строк $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$, если ее можно представить в виде суммы $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$, где $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ – действительные числа.

Определение. Линейная комбинация $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n$ называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Определение. Набор из нескольких строк матрицы называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих строк, равная нулевой строке, т. е. $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$, где не все λ_i равны нулю.

Определение. Набор из нескольких строк матрицы называется *линейно независимым*, если равенство $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + ... + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ возможно только в тривиальном случае.

4.5. Ранг матрицы. Базисные строки

Определение. *Рангом* матрицы называется максимальное число линейно независимых строк этой матрицы.

Определение. Говорят, что *базисными строками матрицы можно объявить* те ее строки, которые являются линейно независимыми, а их число равно рангу матрицы.

Выбор базисных строк, вообще говоря, неоднозначен.

Теорема. *Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях строк.*

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по числу примененных элементарных преобразований. Пусть применено одно элементарное преобразование.

Если это элементарное преобразование первого типа, то новая матрица содержит те же строки, что и старая, только в другом порядке. Соответственно, линейно независимыми остались в точности те наборы строк, которые были таковыми.

Если применено элементарное преобразование второго типа, то строки $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_i, ..., \vec{a}_n$ старой матрицы перешли в строки $\vec{a}_1, ..., \vec{a}_i + \lambda\vec{a}_j, ..., \vec{a}_n$ новой матрицы. Сначала покажем, что при переходе от старой матрицы к новой ранг не мог увеличиться. Пусть ранг старой матрицы равен r, т. е. старая матрица имеет r линейно независимых строк, но любые $r+1$ ее строк линейно зависимы. Предположим противное: в новой матрице имеется $r+1$ линейно независимых строк. Поскольку при переходе от старой матрицы к новой изменениям подверглась только i-я строка, то $r+1$ линейно независимых строк содержат i-ю строку и без i-й строки оставшиеся r строк линейно независимы. Таким образом, пусть $\vec{a}_{k_1},...,\vec{a}_{k_r},\vec{a}_i+\lambda\vec{a}_j$ – линейно независимые строки. По определению линейной независимости $\lambda_1\vec{a}_{k_1}+...+\lambda_r\vec{a}_{k_r}+\lambda_{r+1}(\vec{a}_i+\lambda\vec{a}_j)=\vec{0}$ только в тривиальном случае. Т. е. $\lambda_1\vec{a}_{k_1}+...+\lambda_r\vec{a}_{k_r}+\lambda_{r+1}\vec{a}_i+\lambda_{r+1}\lambda\vec{a}_j=\vec{0}$ только при $\lambda_1=...=\lambda_r=\lambda_{r+1}=0$. Но тогда, если строка a_j содержится среди строк $\vec{a}_{k_1},...,\vec{a}_{k_r}$ старой матрицы, то $r+1$ строка, а если строка a_j не содержится среди строк $\vec{a}_{k_1},...,\vec{a}_{k_r}$ старой матрицы, то $r+2$ строки старой матрицы являются линейно независимыми. Полученное противоречие показывает, что ранг новой матрицы не больше ранга старой. Заметим, что от новой матрицы можно вернуться к старой, прибавляя к i-й строке $\vec{a}_i+\lambda\vec{a}_j$ j-ю строку $\vec{a}_j$, умноженную на $-\lambda$. Следовательно, аналогично доказывается, что ранг старой матрицы не больше ранга новой.

Если применено элементарное преобразование третьего типа, то строки $\vec{a}_1,...,\vec{a}_i,...,\vec{a}_n$ старой матрицы перешли в строки $\vec{a}_1,...,\lambda\vec{a}_i,...,\vec{a}_n$ новой матрицы, где $\lambda\neq 0$. Очевидно, что изменения коснулись только таких линейных комбинаций строк, в которых есть i-я строка. Т. е. линейной комбинации $L=\lambda_1\vec{a}_{k_1}+...+\lambda_q\vec{a}_i+...+\lambda_r\vec{a}_{k_r}$ строк старой матрицы соответствует линейная комбинация $L'=\lambda_1'\vec{a}_{k_1}+...+\lambda_q'\lambda\vec{a}_i+...+\lambda_r'\vec{a}_{k_r}$ строк новой матрицы. Эти линейные комбинации будут равны, если $\lambda_1=\lambda_1',...,\lambda_q=\lambda_q'\lambda,...,\lambda_r=\lambda_r'$, причем из равенства $\lambda_q=\lambda_q'$ следует, что $\lambda_q=0$ в точности тогда, когда $\lambda_q'=0$. Поэтому, если существует нетривиальный набор $\lambda_1,...,\lambda_q,...,\lambda_r$, такой что $L=\vec{0}$, то существует нетривиальный набор $\lambda_1',...,\lambda_q',...,\lambda_r'$, такой что $L'=\vec{0}$, и наоборот. Следовательно, элементарное преобразование третьего типа сохраняет отношение линейной зависимости (или независимости) на наборах соответствующих строк старой и новой матриц, а значит, не меняется ранг.

Доказав теорему для случая одного элементарного преобразования, в предположении, что мы можем доказать ее для случая (t–1)-го элементарного преобразования, докажем для случая t элементарных преобразований ($t>1$). Пусть A – начальная матрица, B – конечная, а C – матрица, возникшая после применения к A первого из элементарных преобразований. Тогда на основании доказанного ранги матриц A и C равны, а на основании индуктивного предположения ранги C и B равны. Следовательно, ранги A и B равны.

Используя эту теорему можно находить ранг матрицы как число ненулевых строк в ее ступенчатом виде (т. е. в ступенчатой матрице, полученной из данной с помощью элементарных преобразований строк). Аналогично базисными строками можно объявить те строки изначальной матрицы, которые при приведении к ступенчатому виду перешли в ненулевые.

4.6. Определители

Дадим индуктивное определение определителя (разложением по первой строке).

Определение. Определителем (n-го порядка) назовем отображение, которое определено на множестве квадратных матриц (размерности $n\times n$), принимает значения на множестве действительных чисел и организовано следующим образом:

- при $n=1$ квадратной матрице первого порядка ставится в соответствие то число, которое содержится в ее клетке, т. е. $|A|=|a|=a$, где $|\ \ |$ – обозначение для определителя;
- предполагая определенными определители порядка n, где $n<k$, определитель порядка k введем соотношением

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}-$$

$$-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}+\dots+(-1)^{n+1}a_{1n}\begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} \end{vmatrix}.$$

Помимо обозначения $|A|$ также используются обозначения ΔA и $\det A$.

Теорема. *Определители можно вычислять разложением по любому столбцу или по любой строке, при этом имеют место равенства:*

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}M_{ik}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{kj}M_{kj},$$

где M_{ik} (M_{kj}) называется минором $(n-1)$-го порядка, соответствующим элементу a_{ik} (a_{kj}) и является определителем матрицы, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й (k-й) строки и k-го (j-го) столбца.

Доказательство. Если по определению определителя расписать его миноры $(n-1)$-го порядка до сумм произведений чисел, то можно увидеть, что результат не зависит от того, разложением по какой строке или какому столбцу мы пользовались при сведении вычисления определителя n-го порядка к вычислению этих миноров.

Теорема. *Если матрица A содержит нулевую строку, то определитель* $|A|=0$.

Доказательство. Если разложить определитель по нулевой строке, то очевидно получим 0.

Теорема. *Если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью одного элементарного преобразования строк первого типа, то* $|A| = -|B|$.

Доказательство. Пусть от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью перемены местами i-й и j-й строк. Разложив определители этих матриц по i-й строке, каждый из получившихся миноров $(n-1)$-го порядка разложим по j-й строке. В результате увидим, что полученные разложения будут отличаться только знаками при слагаемых.

Теорема. *Если матрица A содержит две одинаковые строки, то определитель* $|A| = 0$.

Доказательство. С одной стороны, переставляя местами две одинаковые строки, получим определитель, отличающийся от исходного знаком. С другой стороны, это тот же самый определитель. Очевидно, только число 0 обладает таким свойством.■

Теорема. *Если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью одного элементарного преобразования строк второго типа, то* $|A| = |B|$.

Доказательство.

$$|B| = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \dots & a_{i,n-1} + \lambda a_{j,n-1} & a_{in} + \lambda a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1}(a_{i1} + \lambda a_{j1}) \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \ldots +$$

$$+ (-1)^{i+n}(a_{in} + \lambda a_{jn}) \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+1} a_{i1} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j2} & \dots & a_{j,n-1} & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{i+n} a_{in} \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} +$$

$$+\lambda\left((-1)^{i+1}a_{j1}\begin{vmatrix}\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{j2}&\dots&a_{j,n-1}&a_{jn}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\end{vmatrix}+\dots+(-1)^{i+n}a_{jn}\begin{vmatrix}\dots&\dots&\dots&\dots\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{jn}\\ \dots&\dots&\dots&\dots\end{vmatrix}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{i1}&a_{i2}&\dots&a_{i,n-1}&a_{in}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{j,n-1}&a_{jn}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{vmatrix}+\lambda\begin{vmatrix}\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{j,n-1}&a_{jn}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\ a_{j1}&a_{j2}&\dots&a_{j,n-1}&a_{jn}\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\end{vmatrix}=|A|+\lambda\cdot 0=|A|,$$

поскольку один из определителей содержит две одинаковых строки.

Теорема. *Если от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью одного элементарного преобразования строк третьего типа, где $\lambda\neq 0$ – соответствующий коэффициент, то $|B|=\lambda\cdot|A|$.*

Доказательство. Пусть от матрицы A к матрице B можно перейти с помощью домножения i-й строки на $\lambda\neq 0$. Разложив определитель матрицы B по i-й строке и вынеся за скобки λ, в скобках получим разложение по i-й строке определителя матрицы A.

Теорема. *Определитель ступенчатой матрицы равен произведению ее элементов, стоящих на главной диагонали.*

Доказательство. Раскладывая определитель в соответствии с его определением до сумм произведений его элементов, учитывая определение ступенчатого вида матрицы, убеждаемся, что все слагаемые кроме одного наверняка будут нулями. Оставшееся слагаемое есть произведение элементов главной диагонали.

Теорема. *Определитель матрицы A равен определителю транспонированной матрицы A^T.*

Доказательство. Раскладывая определители матриц A и A^T в соответствии с определением определителя до сумм произведений элементов этих матриц, получаем выражения, отличающиеся только порядком слагаемых и порядком множителей в слагаемых. Следовательно, $|A|=|A^T|$.

Таким образом, все теоремы о свойствах определителя, доказанные для строк, также имеют место и для столбцов.

Теорема. *Строки (столбцы) квадратной матрицы линейно независимы тогда и только тогда, когда ее определитель отличен от нуля.*

Доказательство. Основываясь на свойствах определителя, заметим, что если от квадратной матрицы A к квадратной матрице B перешли с помощью элементарных преобразований строк, то определители этих матриц либо оба нулевые, либо оба ненулевые.

Если строки матрицы A размерности r линейно независимы, то число ненулевых строк в ее ступенчатом виде равно r. Тогда число опорных элементов равно r. Поскольку они стоят в разных строках и столбцах, сдвигаясь с каждой строкой направо, то опорные элементы совпадают с элементами главной диагонали. Следовательно, среди элементов главной диагонали нет нулевых, а значит, определитель ступенчатой матрицы неравен нулю.

Обратно, если определитель ступенчатой матрицы неравен нулю, то среди элементов главной диагонали нет нулевых. Тогда она не имеет нулевых строк. Следовательно, ранг матрицы A равен ее размерности r, т. е. строки матрицы A линейно независимы.

Для столбцов утверждение следует из того, что $|A| = |A^T|$.

Теорема. *У всякой матрицы A ранга r имеется r линейно независимых столбцов, и любой набор из более чем r столбцов линейно зависим.*

Доказательство. Рассмотрим минор M порядка r, составленный из элементов матрицы A, находящихся на пересечении базисных строк, и столбцов, в которых будут стоять опорные элементы, если матрицу A привести к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк (таких столбцов будет также r). При приведении матрицы A к ступенчатому виду Гаусса минор M перейдет в минор M' от единичной матрицы размерности r. Следовательно, $|M'| = 1$. Тогда $|M| \neq 0$, а значит, столбцы минора M линейно независимы. Получается, что столбцы матрицы A, содержащие столбцы минора M, тоже линейно независимы.

Если предположить, что имеется $r+1$ линейно независимый столбец матрицы A, то, взяв минор M порядка $r+1$, с элементами, принадлежащими этим столбцам и какой-нибудь $(r+1)$-й строке, получим, что минор M имеет $r+1$ линейно независимый столбец, т. е. $|M| \neq 0$. При приведении матрицы A к ступенчатому виду минор M перейдет в минор M'. При этом $|M'| \neq 0$. Следовательно, ступенчатый вид матрицы A имеет по крайней мере $(r+1)$-у ненулевую строку, что противоречит тому, что ранг матрицы A равен r.

Определение. Говорят, что *базисными столбцами матрицы можно объявить* те ее столбцы, которые являются линейно независимыми, а их число равно рангу матрицы.

Определение. Говорят, что *базисным минором матрицы можно объявить* ее минор, элементы которого располагаются на пересечении строк и столбцов, которые можно объявить базисными.

Выбор базисного минора, вообще говоря, неоднозначен. Базисный минор неравен нулю. Его порядок равен рангу матрицы. Минор матрицы, порядок которого больше порядка базисного минора, равен нулю. Таким образом, ранг матрицы равен не только максимальному числу линейно независимых строк этой матрицы, но и максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы, и максимальному порядку отличного от нуля минора этой матрицы. Также ранг матрицы A равен рангу матрицы A^T, транспонированной к матрице A.

4.7. Операции над матрицами

Определение. *Суммой двух матриц* A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C той же размерности, элементы которой равны $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Для обозначения суммы двух матриц используется запись $C = A + B$. Операция получения суммы матриц называется их *сложением*.

Теорема. *Сложение матриц коммутативно, т. е.* $A + B = B + A$.

Доказательство. Пользуясь определением суммы двух матриц и коммутативностью сложения чисел $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$, убеждаемся в очевидности данного утверждения.

Теорема. *Сложение матриц ассоциативно, т. е.*

$$(A + B) + C = A + (B + C).$$

Доказательство. Пользуясь определением суммы двух матриц и ассоциативностью сложения чисел, убеждаемся в очевидности данного утверждения.

Эти теоремы позволяют не заботиться о порядке следования слагаемых матриц при сложении двух или большего числа матриц.

Определение. *Произведением матрицы* A (размерности $m \times n$) *на действительное число* λ называется матрица C той же размерности, элементы которой равны $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

Для обозначения произведения матрицы на число используется запись $C = \lambda A$ или $C = A\lambda$. Операция получения произведения матрицы на число называется *умножением* матрицы на это число.

Теорема. *Умножение матрицы на число ассоциативно относительно числового множителя, т. е.* $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$.

Доказательство. Пользуясь определением произведения матрицы на число и ассоциативностью умножения чисел, убеждаемся в очевидности данного утверждения.

Теорема. *Умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения матриц, т. е.* $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

Доказательство. Пользуясь определением произведения матрицы на число и дистрибутивностью умножения чисел относительно их сложения, убеждаемся в очевидности данного утверждения.

Теорема. *Умножение матрицы на число дистрибутивно относительно сложения чисел, т. е.* $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

Доказательство. Пользуясь определением произведения матрицы на число и дистрибутивностью умножения чисел относительно их сложения, убеждаемся в очевидности данного утверждения.

Определение. *Разностью* двух матриц A и B одинаковой размерности $m \times n$ называется матрица C той же размерности, которая в сумме с матрицей B дает матрицу A.

Для обозначения разности двух матриц используется запись $C = A - B$. Операция получения разности матриц называется их *вычитанием*. Легко убедиться, что разность C двух матриц A и B может быть получена по правилу $C = A + (-1) \cdot B$.

Определение. *Нулевой* (не по внешнему виду, а по роли в алгебраической структуре) называется такая матрица O, что для любой матрицы A верно $A + O = O + A = A$.

Легко убедиться, что единственной такой матрицей является матрица, которую мы раньше назвали нулевой по внешнему виду, т. е. матрица размерности той же, что и A, состоящая из одних нулей.

Определение. *Противоположной* к матрице A называется такая матрица $(-A)$ той же размерности, что и A, для которой верно $A + (-A) = (-A) + A = O$.

Легко убедиться, что $(-A) = -1 \cdot A$ – единственная такая матрица для каждой матрицы A. Если $A = O$, то она противоположна сама себе.

Определение. *Произведением матрицы* A, имеющей размерность $m \times n$, *на матрицу* B, имеющую размерность $n \times p$, называется матрица C, имеющая размерность $m \times p$, элементы которой равны $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$ ($i = 1, 2, ..., m$; $k = 1, 2, ..., n$; $j = 1, 2, ..., p$).

Для обозначения произведения матрицы A на матрицу B используют запись $C = A \cdot B$. Операция получения произведения матрицы A на матрицу B называется *перемножением* этих матриц.

Матрицу A можно умножить не на всякую матрицу B: необходимо, чтобы число столбцов матрицы A было равно числу строк матрицы B. Оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ можно определить лишь в том случае, когда число столбцов A совпадает с числом строк B, число строк A совпадает с числом столбцов B. При этом обе матрицы $A \cdot B$ и $B \cdot A$ будут квадратными, но размерности их будут, вообще говоря, различными. Для того чтобы оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ не только были определены, но и имели одинаковую размерность, необходимо и достаточно, чтобы обе матрицы A и B были квадратными матрицами одного и того же порядка.

Теорема. *Умножение матриц (при условии, что оно определено) ассоциативно, т. е.*

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

Доказательство. Чтобы произведения были возможны, необходимо, чтобы матрица A имела размерность $m \times n$, матрица B имела размерность $n \times p$, а матрица C имела размерность $p \times r$. Тогда элемент d_{il} матрицы $(A \cdot B) \cdot C$ равен

$d_{il} = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jk} \right) \cdot c_{kl}$, а элемент d'_{il} матрицы $A \cdot (B \cdot C)$ равен $d'_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} b_{jk} c_{kl} \right)$. Равенство $d_{il} = d'_{il}$ вытекает из возможности изменения порядка суммирования относительно j и k.

Теорема. *Умножение матриц (при условии, что оно определено) дистрибутивно относительно сложения матриц, т. е.* $(A+B)C = AC + BC$ или $A(B+C) = AB + AC$.

Доказательство. Пользуясь определениями перемножения и сложения матриц и дистрибутивностью умножения чисел относительно их сложения, убеждаемся в очевидности данного утверждения.

Вопрос о коммутативности произведения матрицы A на матрицу B имеет смысл ставить лишь для квадратных матриц A и B одинаковой размерности, поскольку только для таких матриц A и B оба произведения AB и BA определены и являются матрицами одинаковых порядков.

Легко убедиться, что произведение двух квадратных матриц, вообще говоря, некоммутативно.

Действительно, пусть $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда $AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $BA=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Определение. *Единичной* (не по внешнему виду, а по роли в алгебраической структуре) называется такая матрица E, что для любой квадратной матрицы A верно $A \cdot E = A$ или $E \cdot A = A$.

Легко убедиться, что единственной такой матрицей будет матрица, которую мы раньше назвали единичной по внешнему виду, т. е. матрица размерности той же, что и A, у которой элементы главной диагонали равны единице, а все остальные – нулю. Действительно, если предположить, что E' – другая единичная матрица, то по определению $E' = E'E = E$. Причем $A \cdot E = E \cdot A$, т. е. матрица E является как левой единичная, так и правой единичной матрицей, поскольку коммутирует с любой квадратной матрицей.

4.8. Обратная матрица

Определение. *Обратной* к квадратной матрице A называется такая матрица A^{-1} той же размерности, что и A, для которой верно $A \cdot A^{-1} = E$ или $A^{-1} \cdot A = E$.

Легко убедиться, что если для матрицы A существует правая обратная матрица B, т. е. $A \cdot B = E$, то она единственная, и существует левая обратная матрица C, которая совпадает с B, т. е. $B \cdot A = E$. Действительно, равенства $C = CE = CAB = EB = B$ показывают, что всякая левая обратная матрица C совпадает с B. Аналогично показывается, что всякая правая обратная матрица совпадает с C, а на основании вышедоказанного, совпадает и с B.

Остался открытым вопрос существования обратной матрицы.

Определение. *Невырожденной* называется матрица, определитель которой отличен от нуля.

Теорема. *Обратная матрица существует у невырожденных матриц и только у них.*

Доказательство. Пусть матрица A – невырожденная, т. е. $|A| \neq 0$. Тогда существует матрица

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \cdots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – *алгебраическое дополнение* элемента a_{ij}, определяемое как $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, где M_{ij} – минор элемента a_{ij}. Покажем, что матрица B является обратной для A, т. е. матрица $C=AB$ единичная.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \frac{1}{|A|} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{1}{|A|} \cdot |A| = 1, \text{ если } i = j, \\ \frac{1}{|A|} \cdot |\tilde{A}| = 0, \text{ если } i \neq j, \end{bmatrix}$$

поскольку матрица $\tilde{A}$ имеет две одинаковых строки $(a_{i1}, \ldots, a_{i,k-1}, a_{i,k+1}, \ldots, a_{in})$. Таким образом, $C=E$.

Один из способов вычисления обратной матрицы следующий.

1. Составить расширенную матрицу $(A|E)$, приписав после матрицы A за вертикальной чертой единичную матрицу той же размерности, что и A.
2. Матрицу $(A|E)$ с помощью элементарных преобразований строк привести к ступенчатому виду Гаусса.

Если при этом на месте матрицы A получилась матрица E, то за вертикальной чертой находится матрица A^{-1}. В противном случае $|A| = 0$ и матрица A^{-1} не существует.

4.9. Системы линейных уравнений

Определение. *Системой линейных уравнений*, состоящей из m уравнений с n неизвестными $x_1, \ldots, x_n$, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где $a_{11},\ldots,a_{mn},b_1,\ldots,b_m$ – некоторые числа.

Определение. *Матрицей системы* называется матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. *Столбцом свободных членов* называется вектор-столбец

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Определение. *Столбцом неизвестных* называется вектор-столбец

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Тогда в *матричной записи* система линейных уравнений может быть записана в виде $A\vec{x} = \vec{b}$.

Определение. *Расширенной матрицей системы* называется матрица, полученная приписыванием к A справа после вертикальной черты столбца свободных членов $\vec{b}$, обозначаемая $(A|\vec{b})$.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены всех ее уравнений равны нулю, и *неоднородной* – в противном случае.

Определение. *Решением* системы линейных уравнений называется упорядоченный набор n чисел (n-мерный вектор-столбец) $\vec{\alpha}$, при подстановке которого в систему линейных уравнений вместо $\vec{x}$ получаем систему тождеств.

Определение. *Общим решением* системы линейных уравнений называется совокупность всех ее решений.

Определение. Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* – в противном случае.

4.10. Специальный случай

Рассмотрим системы линейных уравнений с квадратной матрицей, определитель которой неравен нулю.

Теорема (правило Крамера). *Система из n уравнений с n неизвестными в случае, когда определитель матрицы системы отличен от нуля, имеет* *решение, и притом только одно. Это решение находится по формулам*

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} \quad (\text{для всех } i = 1, \dots, n),$$

где через Δ обозначен определитель матрицы системы, а через Δ_i – определитель матрицы, полученной из матрицы системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Доказательство. Возьмем расширенную матрицу системы и припишем к ней сверху произвольную ее строку, например j-ю. В результате получится квадратная матрица порядка $n+1$. В этой матрице две одинаковые строки, и поэтому ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{j1} & \dots & a_{jn} & b_j \\ a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & b_n \end{vmatrix} = 0.$$

Раскладывая определитель по первой строке, имеем

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ji} M_i + (-1)^{n+1+1} b_j \Delta = 0,$$

где M_i – определитель матрицы, полученной из расширенной матрицы системы вычеркиванием i-го столбца. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{ji} M_i = (-1)^{n+1} b_j \Delta.$$

Поскольку $\Delta \neq 0$, можно написать

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+n} a_{ji} M_i}{\Delta} = b_j \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \frac{(-1)^{i+n} M_i}{\Delta} = b_j,$$

откуда, сравнивая с $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_i = b_j$, делаем вывод, что $x_i = \frac{(-1)^{i+n} M_i}{\Delta}$ $(i = 1, \dots, n)$ удовлетворяют j-му уравнению системы. Поскольку выражения для x_i не зависят от j, то они удовлетворяют всем уравнениям системы. Тем самым существование решения доказано. Учитывая, что $M_i = (-1)^{n-i} \Delta_i$, получаем нужный вид для формул Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Осталось доказать единственность полученного решения. Предположим, есть два решения $\vec{\alpha}$ и $\vec{\beta}$. Подставим эти решения в систему: $A\vec{\alpha} = \vec{b}$ и $A\vec{\beta} = \vec{b}$. Тогда

$$A\vec{\alpha} = A\vec{\beta} \Leftrightarrow A^{-1}A\vec{\alpha} = A^{-1}A\vec{\beta} \Leftrightarrow E\vec{\alpha} = E\vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \vec{\beta},$$

поскольку существование обратной матрицы гарантируется ненулевым определителем матрицы A.

Также системы линейных уравнений $\sum_{i=1}^{n} a_{ji}x_i = b_j$ $(j=1,2,\ldots,m)$ с квадратной матрицей, определитель которой неравен нулю, можно решать с помощью нахождения обратной матрицы, или, другими словами, решая матричное уравнение $A\vec{x}=\vec{b}$. Поскольку $|A|\neq 0$, обратная матрица A^{-1} существует. Поэтому $\vec{x}=A^{-1}\vec{b}$ – решение системы.

4.11. Критерий совместности

Вернемся к произвольной системе m уравнений с n неизвестными.

Теорема (Кронекер – Капелли). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг ее матрицы равен рангу расширенной матрицы.*

Доказательство. Покажем, что если к матрице системы применить элементарное преобразование строк, то система, соответствующая полученной матрице, будет равносильна изначальной системе.

Элементарному преобразованию первого типа соответствует перемена местами двух уравнений системы. Очевидно, новая система будет равносильна старой.

Элементарному преобразованию второго типа соответствует замена одной из строк (например i-й) системы на сумму этой строки и другой строки (например j-й) системы, умноженной на какое-либо число (например λ). Поскольку от новой системы к старой также можно перейти с помощью одного преобразования строк второго типа, то достаточно показать, что всякое решение старой системы будет решением новой. Пусть $(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ – решение старой системы. Сомнение может вызвать только i-е уравнение новой системы. Однако выкладки

$$(a_{i1}+\lambda a_{j1})\alpha_1+\ldots+(a_{in}+\lambda a_{jn})\alpha_n=(a_{i1}\alpha_1+\ldots+a_{in}\alpha_n)+$$
$$+\lambda(a_{j1}\alpha_1+\ldots+a_{jn}\alpha_n)=b_i+\lambda b_j$$

рассеивают это сомнение.

Элементарному преобразованию третьего типа соответствует умножение какой-нибудь строки системы на ненулевое число. Очевидно, новая система будет равносильна старой.

Теперь приведем расширенную матрицу систему к ступенчатому виду Гаусса. Поскольку при этом столбцы не менялись местами, то тем самым оказалась приведенной к ступенчатому виду и матрица (нерасширенная) системы. Система, соответствующая ступенчатому виду расширенной матрицы, равносильна изначальной системе.

Возможны два случая.

1. Существует строка в ступенчатом виде расширенной матрицы, в которой опорный элемент находится в столбце свободных членов. Очевидно,

что расширенная матрица имеет ранг, на единицу больший, чем ранг матрицы системы. С другой стороны, соответствующее такой строке уравнение системы решений не имеет.

2. Если указанной строки нет, то ранг расширенной матрицы равен рангу матрицы системы. Покажем, что в этом случае система совместна. Пусть ранг равен r, а опорные элементы располагаются в столбцах с номерами $k_1,...,k_r$, причем $1 \le k_1 < k_2 < ... < k_r \le n$. Тогда неизвестные $x_{k_1},...,x_{k_r}$ *можно объявить главными* (*базисными*), а остальные *можно объявить свободными*. Кроме того, отбросим уравнения полученной системы, соответствующие нулевым строкам в ступенчатом виде Гаусса расширенной матрицы, что дает систему, равносильную исходной. Перенеся свободные неизвестные в правую часть, придем к системе

$$\begin{cases} a'_{1k_1}x_{k_1} = b'_1 - L_1 \\ a'_{2k_2}x_{k_2} = b'_2 - L_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{rk_r}x_{k_r} = b'_r - L_r, \end{cases}$$

где через L_i обозначена сумма свободных неизвестных, умноженных на стоящие перед ними коэффициенты i-го уравнения. Поскольку коэффициенты $a'_{1k_1},...,a'_{rk_r}$ отличны от нуля, то при отсутствии свободных переменных имеем единственное решение, а при наличии свободных переменных, придавая им различные значения, однозначно определяем главные неизвестные и, тем самым, имеем бесконечно много решений. Придавая свободным переменным всевозможные значения, получим общее решение системы.

Таким образом, система имеет единственное решение, когда ранг ее матрицы равен рангу ее расширенной матрицы и числу неизвестных и меньше или равен числу уравнений, т. е. отсутствуют свободные неизвестные.

При доказательстве теоремы Кронекера – Капелли общее решение совместной системы было получено методом, который называется *метод Гаусса*.

1. Составить расширенную матрицу $(A|\vec{b})$ и привести ее к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований строк.

а) Если существует строка в ступенчатом виде расширенной матрицы, в которой опорный элемент находится в столбце свободных членов, то система несовместна и решение окончено.

б) Если такой строки нет, то система совместна, главными переменными объявляем те, которые соответствуют базисным столбцам, а остальные переменные объявляем свободными.

2. Привести ступенчатую матрицу к ступенчатому виду Гаусса.

3. Написать систему линейных уравнений, соответствующую матрице, построенной на шаге 2, обозначив свободные неизвестные числами $C_1,...,C_k$.

4. Выразить из полученной системы главные неизвестные через

свободные.

5. Записать общее решение в виде $x_j = f_j(C_1,\dots,C_k),\ j = 1,\dots,n$.

4.12. Однородные системы

Линейная однородная система алгебраических уравнений всегда совместна, так как всегда имеет нулевое решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, называемое тривиальным. Поэтому интересно выяснить, когда имеются нетривиальные решения.

Теорема. *Линейная однородная система алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее ранг меньше числа неизвестных.*

Доказательство. Приведем данную однородную систему к ступенчатому виду. Очевидно, она при этом останется однородной. Также ясно, что число главных неизвестных равно рангу системы. Следовательно, существуют свободные неизвестные, что в соответствии с методом Гаусса обеспечивает существование ненулевых решений.

Теорема. *Линейная однородная система алгебраических уравнений, у которой число уравнений равно числу неизвестных, имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда определитель ее матрицы равен нулю.*

Доказательство. Линейная однородная система алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее ранг меньше числа неизвестных, а значит меньше числа строк. Таким образом, линейно независимых строк меньше общего числа строк, т. е. все строки матрицы будут линейно зависимы. Тогда определитель матрицы равен нулю.

Определение. *Линейным векторным пространством* называется множество элементов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\dots$ (называемых *векторами*) **любой природы** с введенными над ними операциями *сложения* и *умножения на число*, если выполнены три условия:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ множества ставится в соответствие третий элемент $\vec{c}$ этого множества, называемый *суммой* (обозначение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$).

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу $\vec{a}$ множества и любому действительному числу λ ставится в соответствие элемент $\vec{d}$ этого множества, называемый *произведением элемента $\vec{a}$ на число λ* (обозначение $\vec{d} = \lambda\vec{a}$).

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:

Свойства сложения векторов:

1. $\forall \vec{a},\vec{b} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность сложения).
2. $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c} : \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c}$ (ассоциативность сложения).
3. $\forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

4. $\forall \vec{a} : \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число:

5. $\forall \vec{a}; \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha\beta)\vec{a} = \alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность).
6. $\forall \vec{a}; \forall \alpha, \beta \in R : (\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$ (дистрибутивность по отношению к сложению действительных чисел).
7. $\forall \vec{a}, \vec{b}; \forall \alpha \in R : \alpha\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (дистрибутивность по отношению к сложению векторов).
8. $\forall \vec{a} : 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Теорема. *Множество решений линейной однородной системы алгебраических уравнений является линейным векторным пространством.*

Доказательство. Поскольку решения можно рассматривать как векторы и нулевой вектор всегда принадлежит множеству решений, достаточно проверить линейность. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\beta_1, ..., \beta_n)$ – два решения однородной системы. Покажем, что $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ и $\lambda\vec{\alpha}$ – тоже решения этой системы. Для этого подставим их в *i*-е уравнение системы:

$$a_{i1}(\alpha_1 + \beta_1) + ... + a_{in}(\alpha_n + \beta_n) = (a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n) + (a_{i1}\beta_1 + ... + a_{in}\beta_n) = 0,$$

$$a_{i1}(\lambda\alpha_1) + ... + a_{in}(\lambda\alpha_n) = \lambda(a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n) = \lambda 0 = 0.$$

Теорема. *Пространство решений линейной однородной системы алгебраических уравнений с n неизвестными и матрицей ранга r имеет размерность k=n–r.*

Доказательство. В соответствии с методом Гаусса, в общем решении свободные переменные могут принимать произвольные значения, их количество равно *k=n–r*, а главные переменные определяются через свободные однозначно.

Тогда любой упорядоченный набор из *k=n–r* линейно независимых решений однородной системы образует *базис* в пространстве решений.

Определение. *Фундаментальной системой решений* линейной однородной системы алгебраических уравнений называется базис в пространстве решений этой системы.

Особо выделяют фундаментальную систему решений, состоящую из вектор-столбцов $\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k$, получаемых из общего решения однородной системы подстановкой вместо вектора свободных неизвестных $(C_1, ..., C_k)$ поочередно следующих векторов

$$(1, 0, ..., 0),\ (0, 1, 0, ..., 0),\ ...\ , (0, ..., 0, 1).$$

С использованием этой фундаментальной системы решений общее решение однородной системы записывается в виде $\vec{x} = C_1\vec{e}_1 + ... + C_k\vec{e}_k$, где $C_1, ..., C_k$ – произвольные константы.

Теорема. *Общее решение совместной неоднородной системы равно сумме ее частного решения и общего решения соответствующей однородной* *системы*.

Доказательство. Покажем, что сумма любого решения неоднородной системы и любого решения соответствующей однородной системы есть решение неоднородной системы. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ и $\vec{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ – решения однородной и неоднородной систем, соответственно. Подставляя в любое (например, в i-е) уравнение неоднородной системы на место неизвестных сумму этих решений, получаем $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\alpha_j + \beta_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\alpha_j + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j = 0 + b_i = b_i$.

Теперь покажем, что разность двух произвольных решений неоднородной системы является решением соответствующей однородной системы. Пусть $\vec{\beta} = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ и $\vec{\gamma} = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$ – два решения неоднородной системы. Подставляя в любое (например, в i-е) уравнение однородной системы на место неизвестных разность этих решений, получаем $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}(\beta_j - \gamma_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\beta_j + \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j = b_i - b_i = 0$.

Из доказанного вытекает, что, найдя одно решение неоднородной системы и складывая его с каждым решением соответствующей однородной системы, мы получим все решения неоднородной системы.

4.13. Решение задач на матрицы, определители, системы

Пример 1. Привести матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ к ступенчатому виду Гаусса. Чему равен ее ранг. Найти базисный минор.

Решение. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{array}{ll} -1 & -2 \\ & \\ \swarrow & \\ & \swarrow \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -6 & -12 \end{pmatrix}\begin{array}{ll} & \\ -1 & 6 \\ \swarrow & \\ & \swarrow \end{array} \to$

$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \nwarrow \\ -3 \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – ступенчатый вид Гаусса. Ранг равен 2 (число ненулевых строк в ступенчатом виде), базисными строками можно объявить 1 и 2 (перешедшие в ненулевые), базисными столбцами 1 и 3 (содержащие в ступенчатом виде первые слева ненулевые элементы строк).

Тогда в качестве базисного минора можно взять $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (состоит из элементов начальной матрицы, стоящих на пересечении базисных строк и столбцов).

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \quad 1 \\ \swarrow \quad \\ \quad \swarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \\ 3 & 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0$, так как содержит две одинаковых строки.

Пример 3. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{matrix} 1 & \nearrow & & \\ -1 & & \nearrow & \end{matrix} \end{array} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ (раскладываем по третьей строке) $= \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \quad \nwarrow \\ \nwarrow \quad \\ 1 \quad -2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -5 & 0 & -5 \\ 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} =$ (раскладываем по второму столбцу) $= -\begin{vmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(-25+20) = 5$.

Пример 4. Перемножить матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3+3\cdot2 & 1\cdot2+2\cdot3+3\cdot1 \\ 3\cdot1+2\cdot3+1\cdot2 & 3\cdot2+2\cdot3+1\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 11 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Решить матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$

Решение. Поскольку $X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$, то найдем обратную матрицу: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} 2 \\ \swarrow \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \nwarrow \\ 1 \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$. Тогда $X = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 5. Решить систему по правилу Крамера: $\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

Решение. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 6 + 8 = -1$;

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 + 2 = -3,\ x_1 = 3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + 6 - 8 - 9 = -8,\ x_2 = 8;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 3 + 4 + 1 = 1,\ x_3 = -1.$$

Пример 6. Исследовать на совместность и решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6 \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4 \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases}.$$

Решение. Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду: $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 4 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} -1 \\ \swarrow \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right) \updownarrow \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 7 & 3 & 1 & 6 \\ 9 & 4 & 1 & 7 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} -2 -9 \\ \swarrow \\ \swarrow \end{matrix} \to$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10\\ 0 & 22 & 10 & -2 & 20\end{array}\right)\begin{matrix}\\ -2\\ \swarrow\end{matrix}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 11 & 5 & -1 & 10\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\cdot 1/11\to$$

(по теореме Кронекера – Капелли система совместна)

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -2 & -1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\begin{matrix}\nwarrow\\ 2\\ \\ \end{matrix}\to\left(\begin{array}{cccc|c}1 & 0 & -1/11 & 9/11 & -2/11\\ 0 & 1 & 5/11 & -1/11 & 10/11\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right).$$

Соответствующая система имеет вид: $\begin{cases}x_1-\dfrac{1}{11}x_3+\dfrac{9}{11}x_4=-\dfrac{2}{11}\\ x_2+\dfrac{5}{11}x_3-\dfrac{1}{11}x_4=\dfrac{10}{11}\end{cases}$ или

$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{11}x_3-\dfrac{9}{11}x_4-\dfrac{2}{11}\\ x_2=-\dfrac{5}{11}x_3+\dfrac{1}{11}x_4+\dfrac{10}{11}\end{cases}$. Тогда общее решение системы будет

$\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{11}c_1-\dfrac{9}{11}c_2-\dfrac{2}{11}\\ x_2=-\dfrac{5}{11}c_1+\dfrac{1}{11}c_2+\dfrac{10}{11}\\ x_3=c_1\\ x_4=c_2\end{cases}$, где c_1 и c_2 – произвольные числа.

Пример 7. Найти фундаментальную систему решений однородной системы $\begin{cases}5x_1+3x_2+2x_3-4x_4=0\\ 4x_1+2x_2+3x_3-6x_4=0\\ 17x_1+11x_2+4x_3-8x_4=0\end{cases}$.

Решение. Приведем матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix}5 & 3 & 2 & -4\\ 4 & 2 & 3 & -6\\ 17 & 11 & 4 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}\nwarrow\\ -1\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 3 & -6\\ 17 & 11 & 4 & -8\end{pmatrix}\begin{matrix}-4 & -17\\ \swarrow & \\ & \swarrow\end{matrix}\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 7 & -14\\ 0 & -6 & 21 & -42\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -3\\ \swarrow\end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -2 & 7 & -14\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\cdot(-1/2)\to$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & -3{,}5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}\nwarrow\\ -1\\ \\ \end{matrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 2{,}5 & -5\\ 0 & 1 & -3{,}5 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Соответствующая система имеет вид: $\begin{cases} x_1 + 2,5x_3 - 5x_4 = 0 \\ x_2 - 3,5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ или

$\begin{cases} x_1 = -2,5x_3 + 5x_4 \\ x_2 = 3,5x_3 - 7x_4 \end{cases}$. Тогда общее решение системы будет $\begin{cases} x_1 = -2,5c_1 + 5c_2 \\ x_2 = 3,5c_1 - 7c_2 \\ x_3 = c_1 \\ x_4 = c_2 \end{cases}$, где c_1 и c_2 – произвольные числа. Тогда фундаментальную систему решений можно взять такую: $\vec{e}_1 = (-2,5;3,5;1;0)$, $\vec{e}_2 = (5;-7,5;0;1)$.

4.14. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Найти ранг матрицы. Какой ее минор можно объявить базисным?

а) $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & -4 & 1 & 1 & 7 \\ 10 & -2 & -1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & -3 & -1 \\ 3 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 5 & 1 & -1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

Задача 3. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

Задача 4. Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 10 & 13 \\ 3 & 5 & 11 & 16 & 21 \\ 2 & -7 & 7 & 7 & 2 \\ 1 & 4 & 5 & 3 & 10 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 5 & 6 & 4 \\ 5 & 9 & 7 & 8 & 6 \\ 6 & 12 & 13 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 6 & 5 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$;

в) $\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 35 & 59 & 71 & 52 & 19 \\ 42 & 70 & 77 & 54 & 23 \\ 43 & 68 & 72 & 52 & 20 \\ 29 & 49 & 65 & 50 & 15 \\ 34 & 111 & 70 & 69 & 2 \end{vmatrix}$.

Задача 5. Перемножить матрицы:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 29 \\ 2 & 19 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -1 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 6. Выполнить действия:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -3 \\ 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & -5 & -2 \\ 2 & -2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2$.

Задача 7. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Задача 8. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Задача 9. Найти обратную матрицу:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 10. Решить матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $X \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$; г) $X \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 8 & 11 \end{pmatrix} - X$.

Задача 11. Решить системы по правилу Крамера:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 4 \\ 5x_1 + 9x_2 = 20 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 3x_1 - 4x_2 = 7 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x_1 - 7x_2 + x_3 = 11 \\ 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases}$.

Задача 12. Исследовать на совместность и найти общее решение:

а) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 3x_4 + 8x_5 = 1 \\ -2x_1 + 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2 \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5 \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12 \end{cases}$.

Задача 13. Найти фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0 \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0 \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0 \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x_1-4x_2+5x_3+3x_4=0 \\ 3x_1-6x_2+4x_3+2x_4=0 \\ 4x_1-8x_2+17x_3+11x_4=0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 3x_1+2x_2+x_3+3x_4+5x_5=0 \\ 6x_1+4x_2+3x_3+5x_4+7x_5=0 \\ 9x_1+6x_2+5x_3+7x_4+9x_5=0 \\ 3x_1+2x_2+4x_4+8x_5=0 \end{cases}$; г) $\begin{cases} 3x_1+5x_2+2x_3=0 \\ 4x_1+7x_2+5x_3=0 \\ x_1+x_2-4x_3=0 \\ 2x_1+9x_2+6x_3=0 \end{cases}$.

4.15. Ответы

1. а) 2; например, $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$; б) 2; например, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$; в) 3; например, $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$; г) 2; например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. **2.** а) 1; б) -1; в) 40; г) 0. **3.** а) -8; б) -3; в) -9; г) 18. **4.** а) 52; б) 5; в) 100; г) 10; **5.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 6 & 14 & -2 \\ 10 & -19 & 17 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. **6.** а) $\begin{pmatrix} -1 & -4 & -1 \\ 2 & 9 & -7 \\ 13 & -9 & 15 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 5 & 4 & 5 & 11 \\ 6 & 6 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 12 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. **7.** а) $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3/2 & 1/2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$. **8.** а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 7 & -8 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/7 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1/3 \end{pmatrix}$. **9.** а)

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

10. а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 11 & 3 \\ -24 & -7 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. **11.** а) $(4;0)$; б) $(2,2;0,1)$; в) $(1;-1;3)$; г) $(-2;-1;1)$. **12.** а) $(-\frac{c_1}{5}-4c_2+\frac{2}{5};-\frac{8c_1}{5}-c_2+\frac{1}{5};c_1;c_2;0)$; б) $(-\frac{4c_1}{3}-\frac{c_2}{3}+\frac{1}{3};c_1;c_2;1)$; в) несовместна; г) $(3;2;1)$. **13.** а) $(8;-6;1;0);(-7;5;0;1)$; б) $(2;1;0;0);(-2;0;5;7)$; в) $(-2;3;0;0;0);(-4;0;3;3;0);(-8;0;9;0;3)$; г) система имеет только тривиальное решение.

5. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

5.1. Понятие линейного пространства

Определение. *Линейным (векторным) пространством* называется множество элементов $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...$ (называемых *векторами*) **любой природы** с введенными над ними операциями *сложения* и *умножения на число*, если выполнены три условия:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ множества ставится в соответствие третий элемент $\vec{c}$ этого множества, называемый *суммой* (обозначение $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$).

II. Имеется правило, посредством которого любому элементу $\vec{a}$ множества и любому действительному числу λ ставится в соответствие элемент $\vec{d}$ этого множества, называемый *произведением элемента $\vec{a}$ на число λ* (обозначение $\vec{d}=\lambda\vec{a}$).

III. Указанные два правила подчинены следующим восьми аксиомам:

Свойства сложения векторов:

1. $\forall\vec{a},\vec{b}:\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (коммутативность сложения).
2. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c}:\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}$ (ассоциативность сложения).
3. $\exists\vec{0}\ \forall\vec{a}:\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (особая роль нулевого элемента).
4. $\forall\vec{a}\ \exists\vec{a}':\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$ (существование противоположного элемента).

Свойства умножения вектора на число:

5. $\forall\vec{a};\forall\alpha,\beta\in R:(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$ (ассоциативность).
6. $\forall\vec{a};\forall\alpha,\beta\in R:(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (дистрибутивность по отношению к сложению действительных чисел).
7. $\forall\vec{a},\vec{b};\forall\alpha\in R:\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (дистрибутивность по отношению к сложению векторов).
8. $\forall\vec{a}:1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (особая роль числового множителя 1).

Теорема. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент, равный произведению произвольного элемента $\vec{a}$ на число 0; и для каждого элемента $\vec{a}$ существует единственный противоположный элемент, равный произведению этого элемента $\vec{a}$ на число -1.

Определение. *Линейной комбинацией* элементов $\vec{a}_1,\vec{a}_2,...,\vec{a}_n$ линейного пространства называется выражение вида $\alpha_1\vec{a}_1+\alpha_2\vec{a}_2+...+\alpha_n\vec{a}_n$, где коэффициенты $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ – числа.

Определение. Если элемент линейного пространства представлен как линейная комбинация некоторых элементов линейного пространства, то говорят, что он *разложен* по этим элементам.

Определение. Линейная комбинация элементов линейного пространства называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае.

Определение. Набор элементов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейного пространства называется *линейно зависимым*, если существует нетривиальная линейная комбинация этих элементов, равная нулевому элементу, и *линейно независимым* в противном случае.

Теорема. Набор элементов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейного пространства является *линейно зависимым* тогда и только тогда, когда хоть какой-нибудь один из этих элементов можно представить в виде линейной комбинации остальных.

Следствие. Если среди элементов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейного пространства имеется нулевой элемент, то эти элементы линейно зависимы.

Следствие. Если часть элементов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ линейного пространства являются линейно зависимыми, то и все эти элементы являются линейно зависимыми.

Определение. *Базисом* линейного пространства называется максимальный набор линейно независимых элементов этого пространства, взятых в определенном порядке.

Определение. *Размерностью* пространства называется число элементов его базиса.

Теорема. В линейном пространстве размерности n любые n линейно независимых упорядоченных элементов образуют базис.

Теорема. Всякий элемент линейного пространства может быть и при том единственным образом разложен по базису в этом пространстве (т. е. представлен как линейная комбинация базисных векторов).

Определение. Числа в этом разложении называются *координатами* этого элемента в этом базисе.

Теорема. При сложении двух любых элементов линейного пространства их координаты (относительно любого базиса этого пространства) складываются; при умножении произвольного элемента на любое число все координаты этого элемента умножаются на это число.

5.2. Преобразование координат при смене базиса

Определение. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ и $\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2, \ldots, \vec{e}\,'_n$ – два произвольных базиса линейного пространства, которые договоримся называть старый и новый, соответственно. Пусть выражение одного базиса через другой имеет вид:

$$\begin{cases} \vec{e}_1' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \vec{e}_2' = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \vec{e}_n' = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

Тогда матрицу

$$S = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

будем называть *матрицей перехода* от старого базиса к новому.

Если ввести обозначения $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и $e' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n')$, то можно в матричной форме записать $e' = e \cdot S$. Очевидно, что $e = e' \cdot S^{-1}$, где S^{-1} – матрица, обратная к S.

Пусть элемент $\vec{x}$ линейного пространства имеет разложения $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n$ и $\vec{x} = x_1'\vec{e}_1' + x_2'\vec{e}_2' + \ldots + x_n'\vec{e}_n'$ по старому и новому базисам, соответственно. Если ввести обозначения

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \ldots \\ x_n' \end{pmatrix},$$

то можно в матричной форме записать $\vec{x} = e \cdot x$ и $\vec{x} = e' \cdot x'$. Приравнивая правые части этих равенств, получаем $e \cdot x = e' \cdot x'$. Учитывая, что $e = e' \cdot S^{-1}$, имеем $e' \cdot S^{-1} \cdot x = e' \cdot x'$, откуда $x' = S^{-1} \cdot x$, что и выражает связь между преобразованием базисов и преобразованием соответствующих координат:

Теорема. Если переход от старого базиса к новому осуществляется с помощью матрицы S, то переход от координат произвольного элемента в старом базисе к координатам этого элемента в новом базисе осуществляется с помощью матрицы S^{-1}.

5.3. Евклидовы пространства

Определение. Линейное пространство называется *евклидовым*, если выполнены два условия:

I. Имеется правило, посредством которого любым двум элементам $\vec{a}$ и $\vec{b}$ этого пространства ставится в соответствие действительно число, называемое *скалярным произведением* этих элементов и обозначаемое $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b}:\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность).

2. $\forall\vec{a}$: $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2\geq 0$; выражение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ называется *скалярным квадратом* элемента $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^2$.

3. Если $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$, то $\vec{a}=\vec{0}$.

4. $\forall\vec{a},\vec{b},\vec{c};\ \forall\alpha,\beta\in R$: $(\alpha\cdot\vec{a}+\beta\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}=\alpha\cdot(\vec{a}\cdot\vec{c})+\beta\cdot(\vec{b}\cdot\vec{c})$ (линейность).

Важно заметить, что здесь мы абстрагируемся от природы изучаемых объектов, от конкретного вида правил образования суммы элементов и произведения элемента на число, от конкретного вида правила, ставящего в соответствие двум объектам их скалярное произведение.

Теорема (неравенство Коши – Буняковского). Для любых двух элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ произвольного эвклидова пространства справедливо неравенство $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2\leq\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2$.

Доказательство. Для любого действительного числа λ по аксиоме 2 скалярного произведения верно, что $(\lambda\vec{a}-\vec{b})^2\geq 0$. Пользуясь остальными аксиомами скалярного произведения, имеем $\lambda^2\cdot\vec{a}^2-2\lambda\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2\geq 0$. Мы знаем, что квадратный трехчлен будет неотрицательным при любых значениях λ только в случае неположительности его дискриминанта, т. е. $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2-\vec{a}^2\cdot\vec{b}^2\leq 0$, откуда следует доказываемое неравенство.

Определение. Линейное пространство называется *нормированным*, если выполнены два условия:

I. Имеется правило, посредством которого каждому элементу $\vec{a}$ этого пространства ставится в соответствие действительно число, называемое *нормой* этого элемента и обозначаемое $\|\vec{a}\|$.

II. Указанное правило подчинено следующим четырем аксиомам:

1. $\forall\vec{a}\ \forall\lambda\in R$: $\|\lambda\cdot\vec{a}\|=|\lambda|\cdot\|\vec{a}\|$.

2. $\forall\vec{a}$: $\vec{a}\neq\vec{0}\Rightarrow\|\vec{a}\|>0$.

3. $\|\vec{0}\|=0$.

4. $\forall\vec{a},\vec{b}$: $\|\vec{a}+\vec{b}\|\leq\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$ (неравенство треугольника или неравенство Минковского).

Теорема. Всякое евклидово пространство является нормированным, если в нем норму любого элемента $\vec{a}$ ввести как $\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}^2}$.

Доказательство. Выполнение всех аксиом кроме 4 – очевидно. Проверим аксиому 4: $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\sqrt{(\vec{a}+\vec{b})^2}=\sqrt{\vec{a}^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b})+\vec{b}^2}\leq$

по неравенству Коши – Буняковского

$$\leq\sqrt{\vec{a}^2+2\sqrt{\vec{a}^2}\sqrt{\vec{b}^2}+\vec{b}^2}=\sqrt{\left(\sqrt{\vec{a}^2}+\sqrt{\vec{b}^2}\right)^2}=\sqrt{\vec{a}^2}+\sqrt{\vec{b}^2}=\|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|.$$

Определение. Два элемента евклидового пространства называются *ортогональными*, если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Определение. Базис линейного пространства называется *ортогональным*, если его элементы попарно ортогональны.

Определение. Базис линейного пространства называется *нормированным*, если норма каждого его элемента равна 1.

Определение. Базис линейного пространства называется *ортонормированным*, если он ортогональный и нормированный.

В n-мерном евклидовом пространстве любой базис можно преобразовать в ортонормированный. Осуществляется это с помощью процесса ортогонализации.

Процесс ортогонализации (Шмидт):

Пусть $\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ – не ортонормированный базис. Шаг за шагом строим элементы: $\vec{e}_1'=\vec{e}_1$; $\vec{e}_k'=\vec{e}_k-\sum\limits_{i=1}^{k-1}\frac{\vec{e}_k\cdot\vec{e}_i'}{\vec{e}_i'\cdot\vec{e}_i'}\cdot\vec{e}_i'$, где $k=2,...,n$. Базис $\vec{e}_1',\vec{e}_2',...,\vec{e}_n'$ – ортогональный. Если каждый элемент нового базиса поделить на его длину, то получим ортонормированный базис.

5.4. Линейные операторы

Определение. *Линейным оператором* **A**, действующим из пространства V в пространство W, называется отображение вида $\mathbf{A}:V\to W$, сопоставляющее каждому элементу $\vec{x}$ пространства V некоторый элемент $\vec{y}$ пространства W (обозначение $\vec{y}=\mathbf{A}\vec{x}$), так что для любых элементов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$ пространства V и любых чисел λ_1 и λ_2 выполняется условие: $\mathbf{A}(\lambda_1\vec{x}_1+\lambda_2\vec{x}_2)=\lambda_1\mathbf{A}\vec{x}_1+\lambda_2\mathbf{A}\vec{x}_2$ (иногда это условие, называемое *линейностью*, подразделяют на два: $\mathbf{A}(\vec{x}_1+\vec{x}_2)=\mathbf{A}\vec{x}_1+\mathbf{A}\vec{x}_2$ – *аддитивность* и $\mathbf{A}(\lambda\vec{x})=\lambda\mathbf{A}\vec{x}$ – *однородность*).

Если пространство W является числовым, то линейный оператор называют линейным *функционалом*.

Определение. *Суммой* **A**+**B** линейных операторов **A** и **B** называется оператор, определяемый равенством $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\vec{x}=\mathbf{A}\vec{x}+\mathbf{B}\vec{x}$.

Определение. *Произведением* $\lambda\mathbf{A}$ линейного оператора **A** на число λ называется оператор, определяемый равенством $(\lambda\mathbf{A})\vec{x}=\lambda(\mathbf{A}\vec{x})$.

Определение. *Нулевым* оператором (обозначение **O**) называется оператор, отображающий все элементы пространства V в нулевой элемент пространства W (т. е. оператор **O** действует по правилу $\mathbf{O}\vec{x}=\vec{0}$).

Определение. *Противоположным* для оператора **A** называется оператор $-\mathbf{A}=(-1)\mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{A}:V\to V$.

Определение. *Единичным* (*тождественным*) оператором **E** называется оператор, отображающий каждый элемент пространства V в себя (т. е. $\mathbf{E}\vec{x}=\vec{x}$).

Определение. *Обратным* для оператора **A** называется оператор $\mathbf{A}^{-1}$

такой, что $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$

Теорема. Множество линейных операторов, действующих из V в W, с указанными выше операциями образует линейное пространство.

Доказательство. Выполнение всех условий из определения линейного пространства очевидно.

Определение. *Ядром* линейного оператора $\mathbf{A}$ (обозначается $\ker \mathbf{A}$) называется множество всех тех элементов $\vec{x}$ пространства V, для которых $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{0}$.

Определение. Образом линейного оператора $\mathbf{A}$ (обозначается $\operatorname{im} \mathbf{A}$) называется множество всех элементов $\vec{y}$ пространства V, представимых в виде $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x}$.

Сумма размерностей ядра и образа дает размерность пространства. Для того, чтобы оператор имел обратный необходимо и достаточно, чтобы $\ker \mathbf{A} = \vec{0}$ или чтобы размерность образа совпадала с размерностью пространства.

5.5. Матрица линейного оператора и ее преобразование при смене базиса

Пусть $\mathbf{A}: V \to V$. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис в пространстве V. Пусть $\vec{x} \in V$. Можно в матричной форме записать $\vec{x} = e \cdot x$, где $e = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ и $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Пусть

$$\begin{cases} \mathbf{A}\vec{e}_1 = a_{11}\vec{e}_1 + a_{12}\vec{e}_2 + \ldots + a_{1n}\vec{e}_n \\ \mathbf{A}\vec{e}_2 = a_{21}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + \ldots + a_{2n}\vec{e}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathbf{A}\vec{e}_n = a_{n1}\vec{e}_1 + a_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + a_{nn}\vec{e}_n. \end{cases}$$

Если ввести матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то в матричной форме можно записать $\mathbf{A}e = eA$, где $\mathbf{A}e = (\mathbf{A}\vec{e}_1, \mathbf{A}\vec{e}_2, \ldots, \mathbf{A}\vec{e}_n)$. Такая матрица A называется *матрицей оператора* $\mathbf{A}$ в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Тогда $\vec{y} = \mathbf{A}\vec{x} = \mathbf{A}(ex) =$ (по линейности) $= (\mathbf{A}e)x = eAx$. Если ввести обозначение $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)^T$, то можно записать $\vec{y} = ey$. Тогда получаем $ey = eAx$ или $y = Ax$.

Покажем, как происходит преобразование матрицы линейного оператора при переходе от базиса к базису.

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ и $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, ..., \vec{e}'_n$ – два произвольных базиса линейного пространства (старый и новый). Пусть S – матрица перехода от старого базиса к новому, т. е. $e' = e \cdot S$. Тогда выше было показано, что $x' = S^{-1} \cdot x$ и $y' = S^{-1} \cdot y$. Пусть A и B – матрицы линейного оператора в старом и новом базисах, т. е. $y = Ax$ и $y' = Bx'$. Подставляя в последнее равенство выражения новых координат через старые, получаем $S^{-1} \cdot y = B \cdot S^{-1} \cdot x$. Учитывая $y = Ax$, имеем $S^{-1} \cdot A \cdot x = B \cdot S^{-1} \cdot x$. Тогда $S^{-1} \cdot A = B \cdot S^{-1}$. Следовательно $B = S^{-1} \cdot A \cdot S$.

Матрица нулевого оператора – нулевая в любом базисе. Матрица единичного оператора является единичной в любом базисе.

Если в линейном пространстве V задан базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ и A – квадратная матрица порядка n, то существует единственный линейный оператор **A**, матрицей которого в заданном базисе является A.

Для того, чтобы линейный оператор имел обратный необходимо и достаточно, чтобы матрица этого оператора была невырожденной (без разницы, в каком базисе, поскольку невырожденная матрица линейного оператора, т. е. матрица с ненулевым определителем, является таковой в любом базисе).

Определитель матрицы линейного оператора не меняется при переходе к другому базису.

Определение. *Рангом* линейного оператора называется ранг его матрицы (без разницы, в каком базисе, поскольку ранг матрицы линейного оператора не меняется при переходе к другому базису).

5.6. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Определение. *Характеристическим многочленом* линейного оператора **A** ($\mathbf{A}: V \to V$) называется многочлен относительно λ:

$$|A - \lambda E| = \sum_{k=0}^{n} d_k \lambda^k,$$

где d_k – коэффициенты при λ^k.

Коэффициенты d_k не зависят от выбора базиса (говорят, что они являются *инвариантами*). В частности, коэффициент d_{n-1}, равный $a_{11} + a_{22} + ... + a_{nn}$, называемый следом оператора (обозначается $\operatorname{tr}\mathbf{A}$) является инвариантом.

Определение. Уравнение $|A - \lambda E| = 0$ называется *характеристическим уравнением* линейного оператора **A**.

Определение. Пространство V_1 называется *инвариантным подпространством* оператора **A**, если для каждого $\vec{x}$, принадлежащего V_1, элемент $\mathbf{A}\vec{x}$ также принадлежит V_1. Примерами инвариантных подпространств оператора **A** являются $\ker \mathbf{A}$ и $\operatorname{im} \mathbf{A}$.

Определение. Число λ называется *собственным значением* (*собственным числом*) оператора **A**, если существует **ненулевой** элемент $\vec{x}$ такой, что $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$. При этом элемент $\vec{x}$ называется *собственным вектором* оператора **A**, отвечающим собственному значению λ.

Множество собственных векторов, отвечающих одному собственному значению, является инвариантным подпространством.

Для того, чтобы число λ было собственным значением оператора **A**, необходимо и достаточно, чтобы это число было корнем характеристического уравнения оператора **A**.

Каждый линейный оператор имеет собственное значение (вообще говоря, комплексное).

Для того, чтобы матрица A линейного оператора **A** в данном базисе была диагональной, необходимо и достаточно, чтобы базисные элементы были собственными векторами этого оператора.

Собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы.

Если характеристический многочлен оператора, действующего в n-мерном пространстве, имеет n различных корней, то в некотором базисе матрица оператора имеет диагональный вид.

5.7. Канонический вид линейных операторов

Из определения собственного вектора следует, что элемент $\vec{x}$ является собственным вектором оператора **A**, отвечающим собственному значению λ, если выполняется соотношение $(A - \lambda E)\vec{x} = 0$.

Определение. Элемент $\vec{x}$ называется *присоединенным* вектором оператора **A**, отвечающим собственному значению λ, если для некоторого целого $m \geq 1$ выполняются соотношения $(A - \lambda E)^m \vec{x} \neq 0$ и $(A - \lambda E)^{m+1} \vec{x} = 0$. При этом число m называется *порядком* присоединенного вектора $\vec{x}$. Таким образом, если $\vec{x}$ – присоединенный вектор порядка m, то элемент $(A - \lambda E)^m \vec{x}$ – собственный вектор оператора.

Пусть **A** – линейный оператор, действующий в n-мерном евклидовом пространстве V. Существует базис, образованный из собственных и присоединенных векторов оператора **A**, в котором матрица B оператора **A** имеет следующий клеточный вид

$$B = \begin{pmatrix} \square & & & 0 \\ & \square & & \\ & & \dots & \\ 0 & & & \square \end{pmatrix},$$

где клетка □ представляет собой следующую матрицу

$$\square=\begin{pmatrix} \lambda_k 1\ 0 \dots 0 \\ 0\ \lambda_k 1 \dots 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ 0\ 0\ 0 \dots 1 \\ 0\ 0\ 0 \dots \lambda_k \end{pmatrix}.$$

Такая форма матрицы B оператора **A** называется *жордановой* формой, а ее клетки – *жордановыми клетками*. Жорданова форма единственна с точностью до порядка расположения клеток, который зависит от порядка нумерации собственных значений. Клетки матрицы B (их количество равно числу собственных векторов) содержат собственные значения. Если для какого-то собственного значения собственных векторов меньше, чем кратность этого значения, то появляются клетки размера больше, чем 1, в которых над главной диагональю (см. определение жордановой клетки) стоят единицы.

5.8. Квадратичные формы

Определение. *Квадратичной формой* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от n неизвестных называется многочлен от n переменных второй степени, не содержащий членов первой степени и свободного члена

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + \dots +$$
$$+ a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_jx_i + \dots + a_{n-1,n}x_{n-1}x_n + a_{n,n-1}x_nx_{n-1},$$

причем $a_{ij} = a_{ji}\ \forall i, j = 1, 2, \dots, n\ (i \neq j)$.

Квадратичную форму обычно записывают в виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{ij}x_ix_j + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Из коэффициентов a_{ij} можно составить квадратную матрицу n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

которая называется *матрицей квадратичной формы f*, а ее ранг r называется *рангом квадратичной формы f*.

Если $r = n$, т. е. матрица A невырождена ($|A| \neq 0$), то и квадратичная форма f называется *невырожденной*.

Из условия $a_{ij} = a_{ji}\ \forall\ i, j = 1, 2, \dots, n\ (i \neq j)$ следует, что $A = A^T$, т. е. матрица A – *симметрическая*.

Обратно, для любой симметрической матрицы A n-го порядка можно указать квадратичную форму f от n неизвестных, имеющую элементы матрицы A своими коэффициентами.

Если $x=(x_1,x_2,...,x_n)^T$ – вектор-столбец из n неизвестных, то квадратичную форму f (с матрицей A), можно записать в матричном виде:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x^T Ax.$$

Пусть есть два базиса e и e'. В базисе e вектор $\vec{x}$ можно записать как $\vec{x}=ex$, а в базисе e' как $\vec{x}=e'x'$. Пусть S – матрица перехода от e к e', т. е. $e'=eS$. Тогда, как было показано раньше, $x'=S^{-1}x$. Пусть квадратичная форма f в базисе e имеет вид $f=x^TAx$, а в базисе e' – $f=(x')^TBx'$. Таким образом, $(x')^TBx'=x^TAx$, т. е. $(S^{-1}x)^TBS^{-1}x=x^TAx$. Так как для матриц имеют место формулы $(PQ)^T=Q^TP^T$ и $(P^{-1})^T=(P^T)^{-1}$, то получаем $x^T(S^{-1})^TBS^{-1}x=x^TAx$, потом $x^T(S^T)^{-1}BS^{-1}x=x^TAx$, откуда $(S^T)^{-1}BS^{-1}=A$. Следовательно, $B=S^TAS$.

Матрица B тоже должна получиться симметрической, т. е. $B^T=B$. Действительно, $B^T=(S^TAS)^T=S^TA^T(S^T)^T=S^TAS=B$, так как матрица A – симметрическая по условию ($A^T=A$).

Если матрица S является ортогональной ($S^{-1}=S^T$), то преобразование называется *ортогональным*.

Ранг квадратичной формы не изменяется при переходе к другому базису.

Определение. Квадратичная форма $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ имеет *канонический вид*, если **все** коэффициенты при произведениях различных неизвестных равны нулю, т. е. $a_{ij}=0$ $(i\neq j)$, и **не все** $a_{ii}=0$. Канонический вид квадратичной формы называется *нормальным*, если все ненулевые коэффициенты равны 1.

Таким образом, в каноническом виде квадратичная форма записывается следующим образом: $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2$, где не все $a_{ii}=0$.

Любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому (и даже нормальному) виду с помощью перехода к некоторому базису. При этом число ненулевых коэффициентов в этом каноническом виде (т. е. коэффициентов при квадратах неизвестных) не зависит от этого преобразования и равно рангу этой квадратичной формы.

Одним из методов приведения квадратичной формы к каноническому (и даже нормальному) виду является метод Лагранжа, заключающийся в последовательном выделении полных квадратов.

Также любая квадратичная форма может быть приведена к каноническому (но не нормальному) виду с помощью ортогонального преобразования, причем коэффициенты при квадратах неизвестных будут совпадать с собственными значениями матрицы A квадратичной формы, а столбцы матрицы S преобразования будут состоять из соответствующих попарно-ортогональных векторов, образующих базис пространства собственных векторов матрицы A квадратичной формы.

Канонический вид квадратичной формы не единственный, но верна следующая теорема.

Теорема (*закон инерции*). Если квадратичная форма приводится к каноническому виду двумя различными способами, то число членов с положительными коэффициентами, так же, как и число членов с отрицательными коэффициентами, в обоих случаях будет одно и то же.

Определение. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *положительно определенной*, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, $\dots$, x_n, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ (т. е. кроме набора неизвестных, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Определение. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *положительно полуопределенной*, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, $\dots$, x_n.

Определение. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *отрицательно определенной*, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, $\dots$, x_n, $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ (т. е. кроме набора неизвестных, когда $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Определение. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *отрицательно полуопределенной*, если $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$ на любых наборах значений неизвестных x_1, x_2, $\dots$, x_n.

Определение. Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется *неопределенной*, если существуют наборы значений неизвестных x_1, x_2, $\dots$, x_n, на которых $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0$ и $f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$.

Положительно определенная квадратичная форма после приведения к каноническому виду будет иметь только положительные коэффициенты при квадратах всех n неизвестных. Для положительно полуопределенной формы (после приведения к каноническому виду) – неотрицательные коэффициенты (некоторые могут быть равны нулю).

Аналогичные утверждения имеют место для отрицательно определенных и полуопределенных квадратичных форм.

Теорема 3 (*критерий Сильвестра*). Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда все *окаймляющие миноры* матрицы квадратичной формы положительны. Т. е.

$$\Delta_1 = a_{11} > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \quad \dots \quad , \quad \Delta_n = |A| > 0.$$

Квадратичная форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки окаймляющих миноров матрицы A квадратичной формы чередуются, начиная со знака «минус», т. е. $\Delta_1 = a_{11} < 0$,

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$$

Если есть две квадратичные формы f и g, определенные в действительном линейном пространстве, причем f – положительно определенная, то можно указать такой базис, в котором f будет иметь нормальный вид, а g – канонический. Т. е. две квадратичные формы, одна из которых положительно определенная, могут быть приведены к каноническому (а одна даже к нормальному) виду одновременно, т. е. одним и тем же преобразованием. Это делается в два этапа. Сначала применяется преобразование, приводящее положительно определенную квадратичную форму к нормальному виду (его можно получить, например, методом выделения полных квадратов). При этом другая квадратичная форма как-то преобразуется. На втором этапе, найдя собственные векторы матрицы второй квадратичной формы, осуществляем ортогональное преобразование, приводящее вторую квадратичную форму к каноническому виду. При этом вид первой квадратичной формы остается нормальным, так как ортогональное преобразование единичную матрицу переводит в единичную.

5.9. Решение задач на линейные пространства

Пример 1. Ортонормировать базис:

$$\vec{e}_1=(1;1;0),\ \vec{e}_2=(0;1;1),\ \vec{e}_1=(1;0;1).$$

Решение. $\vec{e}_1'=\vec{e}_1=(1;1;0)$,

$$\vec{e}_2'=\vec{e}_2-\frac{\vec{e}_2\cdot\vec{e}_1'}{\vec{e}_1'\cdot\vec{e}_1'}\cdot\vec{e}_1'=(0,1,1)-\frac{(0,1,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}(1,1,0)=(0,1,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)=(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1),$$

$$\vec{e}_3'=\vec{e}_3-\frac{\vec{e}_3\cdot\vec{e}_1'}{\vec{e}_1'\cdot\vec{e}_1'}\cdot\vec{e}_1'-\frac{\vec{e}_3\cdot\vec{e}_2'}{\vec{e}_2'\cdot\vec{e}_2'}\cdot\vec{e}_2'=(1,0,1)-\frac{(1,0,1)\cdot(1,1,0)}{(1,1,0)\cdot(1,1,0)}\cdot(1,1,0)-$$

$$-\frac{(1,0,1)\cdot(-1/2,1/2,1)}{(-1/2,1/2,1)\cdot(-1/2,1/2,1)}\cdot(-1/2,1/2,1)=(1,0,1)-\frac{1}{2}(1,1,0)-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)=(\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}).$$

Получили ортогональный базис. Теперь его нормируем (нормируем векторы, его составляющие):

$$\vec{e}_1''=(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0),\ \vec{e}_1''=(-\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{6};\frac{\sqrt{6}}{3}),\ \vec{e}_1''=(\frac{\sqrt{3}}{3};-\frac{\sqrt{3}}{3};\frac{\sqrt{3}}{3}).$$

Базис $\vec{e}_1'', \vec{e}_2'', \vec{e}_3''$ является ортонормированным.

Пример 2. Оператор дан матрицей A в некотором базисе:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 2 & 1\\ -3 & 3 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 3 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора в базисе из собственных и присоединенных векторов.

Решение. Найдем характеристический многочлен:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & 2 & 1\\ -3 & 3-\lambda & 2 & 1\\ -3 & 2 & 3-\lambda & 1\\ -2 & 1 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^4-6\lambda^3+13\lambda^2-12\lambda+4=(\lambda-1)^2(\lambda-2)^2.$$

Тогда получаем его корни: $\lambda_{1,2}=1$, $\lambda_{3,4}=2$.

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda=1:(A-1E)\vec{h}=\vec{0}$, т. е.

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 2 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Выполним элементарные преобразования строк с целью обнулить все элементы столбца, кроме выделенного (в каждой строке и каждом столбце не более одного выделенного элемента):

$$\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 2 & \boxed{1}\\ -2 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ -3 & 2 & 2 & \boxed{1}\\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1 & \boxed{1}\\ \boxed{1} & -1 & -1 & 0\end{pmatrix},$$

откуда $\begin{cases}-b-c+d=0\\ a-b-c=0\end{cases}$. Пусть $b=C_1$, $c=C_2$. Тогда $a=C_1+C_2$, $d=C_1+C_2$.

Полагая сначала $C_1=1$, $C_2=0$, а затем $C_1=0$, $C_2=1$, получаем два собственных вектора, соответствующих $\lambda=1$:

$$\vec{h}_1=(1,1,0,1)^T \text{ и } \vec{h}_2=(1,0,1,1)^T.$$

Найдем собственные векторы, соответствующие собственному значению $\lambda=2:(A-2E)\vec{h}=\vec{0}$, т. е.

$$\begin{pmatrix}-4 & 2 & 2 & 1\\ -3 & 1 & 2 & 1\\ -3 & 2 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Выполним элементарные преобразования строк с целью обнулить все элементы столбца, кроме выделенного (в каждой строке и каждом столбце не более одного выделенного элемента):

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & \boxed{1} \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix},$$

откуда $\begin{cases} d=0 \\ -a+b=0 \\ -a+c=0 \end{cases}$. Пусть $a=C$. Тогда $b=c=C$. Полагая $C=1$, получаем только один собственный вектор, соответствующий $\lambda=2$: $\vec{h}_3=(1,1,1,0)^T$. Поскольку $\lambda=2$ – корень кратности 2, то необходимо найти присоединенный вектор $(A-2E)\vec{h}=\vec{h}_3$, т.е.

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Выполним элементарные преобразования строк с целью обнулить все элементы столбца, кроме выделенного (в каждой строке и каждом столбце не более одного выделенного элемента):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ -3 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 2 & 2 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \end{array}\right),$$

откуда $\begin{cases} d=1 \\ -a+b=0 \\ -a+c=0 \end{cases}$. Пусть $a=C$. Тогда $b=c=C$. Полагая $C=0$, получаем присоединенный вектор $\vec{h}_3'$ к собственному вектору $\vec{h}_3$: $\vec{h}_3'=(0,0,0,1)^T$.

Найдем матрицу оператора в базисе из собственных и присоединенных векторов $\vec{h}_1,\vec{h}_2,\vec{h}_3,\vec{h}_3'$ (обозначим ее B). Матрица перехода от старого базиса к новому запишется из векторов нового базиса следующим образом: $S=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица, обратная к ней (если ее найти) будет:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$

Пример 3. Составить матрицу A квадратичной формы от трех неизвестных $f(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - x_2x_3$.

Решение. Матрица этой квадратичной формы имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -0,5 \\ 0 & -0,5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 4. Указать квадратичную форму f, соответствующую симметрической матрице

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Является ли указанная квадратичная форма невырожденной?

Решение. Порядок матрицы A равен трем, поэтому квадратичная форма f будет зависеть от трех неизвестных. Тогда

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 - 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Вычислим определитель: $|A| = -40 - 3 - 3 + 5 - 2 - 36 = -79$. Поскольку $|A| \neq 0$, то квадратичная форма f невырождена.

Пример 5. Дана квадратичная форма

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - 2x_2^2 + 5x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

Привести эту форму к каноническому виду с помощью перехода к другому базису.

Решение. Выделим вначале полный квадрат по переменной x_1, получим:

$$f = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3) - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 =$$

$$= ((x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3) - 2x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_2x_3 =$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_2x_3.$$

Далее, выделим полные квадраты по переменным x_2 и x_3:

$$f = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - 3 \cdot \left(x_2^2 - \frac{8}{3} x_2 x_3 \right) + 4x_3^2 =$$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-3\cdot\left(\left(x_2-\frac{4}{3}x_3\right)^2-\frac{16}{9}x_3^2\right)+4x_3^2=$$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-3\cdot\left(x_2-\frac{4}{3}x_3\right)^2+\frac{16}{3}x_3^2+4x_3^2=$$

$$=(x_1-x_2+x_3)^2-3\cdot\left(x_2-\frac{4}{3}x_3\right)^2+\frac{28}{3}x_3^2.$$

Положим

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3, \\ y_2=x_2-\dfrac{4}{3}x_3, \\ y_3=x_3. \end{cases}$$

Тогда квадратичная форма f примет канонический вид:

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-3y_2^2+\frac{28}{3}y_3^2.$$

Покажем, что y_1,y_2,y_3 – базис. В матричном виде замена переменных

$$\begin{cases} y_1=x_1-x_2+x_3, \\ y_2=x_2-\dfrac{4}{3}x_3, \\ y_3=x_3, \end{cases}$$

приводящая квадратичную форму f к каноническому виду $g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2-3y_2^2+\frac{28}{3}y_3^2$, выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $S^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеет ненулевой определитель. Поэтому и матрица S (столбцами которой являются координаты в старом базисе векторов нового базиса) также невырождена. Заметим, что ранг исходной квадратичной формы f равен 3, так как число ненулевых коэффициентов в каноническом виде равно 3.

Пример 6. Привести квадратичную форму $f(x_1,x_2)=2x_1^2+5x_2^2+4x_1x_2$ к каноническому виду двумя способами: с помощью ортогонального преобразования (записать явный вид этого преобразования) и методом Лагранжа. Проверить выполнение закона инерции.

Решение. *1-й способ.* Матрица квадратичной формы имеет вид: $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. Собственные значения:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 1, \\ \lambda = 6. \end{array}\right.$$

Тогда ортонормированный базис собственных векторов:

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ (для } \lambda = 1\text{)}; \ \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix} \text{ (для } \lambda = 6\text{)}.$$

Векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ (в силу того, что матрица A – симметрическая, собственные числа различны) взаимно-ортогональны. Впрочем, условие ортогональности $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ можно проверить и непосредственно, так как скалярное произведение $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = 0$. Отсюда, матрица S ортогонального преобразования имеет вид:

$$S = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Тогда явный вид этого ортогонального преобразования следующий:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{2}{\sqrt{5}} y_1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_2, \\ x_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}} y_1 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} y_2. \end{cases}$$

С помощью этого преобразования квадратичная форма f примет вид:

$$g(y_1, y_2) = y_1^2 + 6y_2^2.$$

2-й способ. Выделим полные квадраты по переменным x_1 и x_2:

$$f(x_1, x_2) = 2(x_1^2 + 2x_1x_2) + 5x_2^2 = 2((x_1 + x_2)^2 - x_2^2) + 5x_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + 3x_2^2.$$

Положим $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_2$. Тогда квадратичная форма f примет вид: $h(z_1, z_2) = 2z_1^2 + 3z_2^2$.

Закон инерции, очевидно, выполняется.

Пример 7. Является ли положительно определенной квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$?

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Тогда $\Delta_1 = 5 > 0$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$, $\Delta_3 = \det(A) = 20 + 2 + 2 - 1 - 16 - 5 = 2 > 0$.

Значит, по критерию Сильвестра, квадратичная форма $f(x_1, x_2, x_3)$ является положительно определенной.

Пример 8. Привести к каноническому виду одновременно две квадратичные формы

$$45x_1^2 + 72x_1x_2 + 18x_1x_3 + 45x_2^2 + 18x_2x_3 + 18x_3^2,$$

$$90x_1^2+144x_1x_2+36x_1x_3+106x_2^2+36x_2x_3+36x_3^2.$$

Решение. Матрица первой квадратичной формы $A=\begin{pmatrix}45&36&9\\36&45&9\\9&9&18\end{pmatrix}$, а второй – $B=\begin{pmatrix}90&72&18\\72&106&18\\18&18&36\end{pmatrix}$. Легко проверить, что первая квадратичная форма положительно определенная. Приведем ее к каноническому виду, выделяя полные квадраты. $45x_1^2+72x_1x_2+18x_1x_3+45x_2^2+18x_2x_3+18x_3^2=$

$$=36x_1^2+72x_1x_2+36x_2^2+9x_1^2+18x_1x_3+9x_3^2+9x_2^2+18x_2x_3+9x_3^2=$$

$$=(6x_1+6x_2)^2+(3x_1+3x_3)^2+(3x_2+3x_3)^2=(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2,$$

где $x_1'=6x_1+6x_2$, $x_2'=3x_1+3x_3$, $x_3'=3x_2+3x_3$. Так как $x'=S^{-1}x$, то $S_1^{-1}=\begin{pmatrix}6&6&0\\3&0&3\\0&3&3\end{pmatrix}$. Тогда $S_1=\begin{pmatrix}1/12&1/6&-1/6\\1/12&-1/6&1/6\\-1/12&1/6&1/6\end{pmatrix}$. Следовательно, $C=S_1^TAS_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, а $D=S_1^TBS_1=\begin{pmatrix}19/9&-2/9&2/9\\-2/9&22/9&-4/9\\2/9&-4/9&22/9\end{pmatrix}$. Теперь найдем характеристический многочлен матрицы D: $\begin{vmatrix}19/9-\lambda&-2/9&2/9\\-2/9&22/9-\lambda&-4/9\\2/9&-4/9&22/9-\lambda\end{vmatrix}=$ $=-\lambda^3+7\lambda^2-16\lambda+12$, и его корни $\lambda_1=3$, $\lambda_{2,3}=2$. Собственные векторы, соответствующие $\lambda_1=3$, имеют вид $\vec{h}=\begin{pmatrix}C\\-2C\\2C\end{pmatrix}$. Тогда в качестве базисного можно взять (нормированный) $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1/3\\-2/3\\2/3\end{pmatrix}$. Собственные векторы, соответствующие $\lambda_{2,3}=2$, имеют вид $\vec{h}=\begin{pmatrix}2C_1-2C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}$. Легко проверить, что каждый из них ортогонален $\vec{h}_1$. Выберем два, ортогональных между собой.

Пусть $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Тогда $\vec{h}_3$ найдем из равенства $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2C_1-2C_2\\C_1\\C_2\end{pmatrix}=0$, т.е. $4C_1-4C_2+C_1=0$. Значит, в качестве $\vec{h}_3$ можно взять $\vec{h}_3=\begin{pmatrix}-2\\4\\5\end{pmatrix}$. Нормировав $\vec{h}_2$ и $\vec{h}_3$, получим $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}2/\sqrt{5}\\1/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix}$ и $\vec{h}_3=\begin{pmatrix}-2/(3\sqrt{5})\\4/(3\sqrt{5})\\5/(3\sqrt{5})\end{pmatrix}$. Записывая $\vec{h}_1$, $\vec{h}_2$ и $\vec{h}_3$ как столбцы матрицы, получим матрицу ортогонального преобразования $S_2=\begin{pmatrix}1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/(3\sqrt{5})\\-2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/(3\sqrt{5})\\2/3 & 0 & 5/(3\sqrt{5})\end{pmatrix}$. Следовательно, $E=S_2^TCS_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, а $F=S_2^TDS_2=\begin{pmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$. Тогда преобразование, приводящее к каноническому виду одновременно две данные квадратичные формы, будет иметь матрицу $S=S_1\cdot S_2=\begin{pmatrix}-7/36 & \sqrt{5}/15 & -\sqrt{5}/45\\1/4 & 0 & 0\\-1/36 & 0 & \sqrt{5}/9\end{pmatrix}$, а сами квадратичные формы будут приведены к виду $(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2$ и $3(x_1')^2+2(x_2')^2+2(x_3')^2$.

5.10. Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Доказать, что e – базис. Найти координаты $\vec{x}$ в этом базисе, если они даны в стандартном:

а) $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;

б) $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

в) $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3)$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

г) $e=(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)$, $\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\1\\3\\1\end{pmatrix}$, $\vec{e}_4=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\4\end{pmatrix}$, $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix}$.

Задача 2. Найти координаты вектора $\vec{x}$ в базисе e', если они даны в базисе e:

а) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$;

б) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right)$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$;

в) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$;

г) $e=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\3\\3\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}3\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\2\\0\end{pmatrix}\right)$; $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\4\\-2\end{pmatrix}$

Задача 3. Ортонормировать базис e:

а) $e=\left(\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}\right)$;

б) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$;

в) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$;

г) $e=\left(\begin{pmatrix}2\\0\\4\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\4\\2\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\3\\3\end{pmatrix}\right)$.

Задача 4. Найти матрицу оператора $\mathbf{A}$ в базисе e', если она дана в базисе e:

а) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\right)$; $A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$;

б) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right)$; $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$;

в) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$;

г) $e=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}\right)$; $e'=\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$; $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&3&0\\0&0&0&4\end{pmatrix}$

Задача 5. Найти собственные значения и собственные (и присоединенные) векторы оператора, заданного матрицей:

а) $\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2&1\\3&4\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}3&-1\\4&-1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&1\\-2&3\end{pmatrix}$.

Задача 6. Найти матрицу оператора в базисе из собственных и присоединенных векторов, если она дана в стандартном базисе:

а) $\begin{pmatrix}0&1&0\\-4&4&0\\-2&1&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}12&-6&-2\\18&-9&-3\\18&-9&-3\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}4&-5&2\\5&-7&3\\6&-9&4\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&-3&3\\-2&-6&13\\-1&-4&8\end{pmatrix}$.

Задача 7. Привести к нормальному виду методом выделения полных квадратов:

а) $x_1^2+x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

б) $x_1^2-2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $x_1^2-3x_3^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

г) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$.

Задача 8. Привести к каноническому виду методом ортогонального преобразования, найдя собственные векторы матрицы квадратичной формы:

а) $3x_2^2+3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2x_3$;

б) $7x_1^2+7x_2^2+7x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

в) $x_1^2-2x_1x_2-2x_1x_3-2x_2x_3$;

г) $3x_1^2+3x_2^2-x_3^2-6x_1x_3+4x_2x_3$.

Задача 9. Проверить квадратичные формы на знакоопределенность:

а) $3x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_1x_2$;

б) $5x_1^2+3x_2^2+4x_3^2+4x_1x_3+4x_2x_3$;

в) $27x_1^2+3x_2^2-10x_1x_2$;

г) $-2x_1^2-4x_2^2-3x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3$.

Задача 10. Привести к каноническому виду одновременно две квадратичные формы и найти матрицу данного преобразования:

а) $45x_1^2+72x_1x_2+18x_1x_3+45x_2^2+72x_2x_3+153x_3^2$,

$90x_1^2+144x_1x_2+36x_1x_3+106x_2^2+192x_2x_3+342x_3^2$;

б) $45x_1^2+72x_1x_2+18x_1x_3+45x_2^2+54x_2x_3+90x_3^2$,

$90x_1^2+144x_1x_2+36x_1x_3+106x_2^2+140x_2x_3+196x_3^2$;

в) $45x_1^2+72x_1x_2+18x_1x_3+45x_2^2+36x_2x_3+45x_3^2$,

$90x_1^2+144x_1x_2+36x_1x_3+106x_2^2+88x_2x_3+94x_3^2$;

г) $45x_1^2+72x_1x_2+18x_1x_3+45x_2^2+18x_2x_3+18x_3^2$,

$81x_1^2+132x_1x_2+54x_1x_3+102x_2^2+48x_2x_3+27x_3^2$.

5.11. Ответы

1. а) $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\\1/2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. **2.** а) $\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1\\2/3\\1/2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}-3\\-5/2\\-3/2\\4\end{pmatrix}$. **3.** а) $\left(\begin{pmatrix}3/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{10}\\3/\sqrt{10}\end{pmatrix}\right)$; б) $\left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\1/\sqrt{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix}\right)$;

в) $\left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\\1/\sqrt{3}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1/\sqrt{6}\\2/\sqrt{6}\\-1/\sqrt{6}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}\right)$; г) $\left(\begin{pmatrix}1/\sqrt{5}\\0\\2/\sqrt{5}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2/\sqrt{55}\\5/\sqrt{55}\\-1/\sqrt{55}\\1/\sqrt{22}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-4/\sqrt{22}\\1/\sqrt{22}\\2/\sqrt{22}\\5/\sqrt{55}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-2/\sqrt{66}\\-5/\sqrt{66}\\1/\sqrt{66}\\6/\sqrt{66}\end{pmatrix}\right)$.

4. а) $\begin{pmatrix}5&1\\2&0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3/2&3/4&-1\\2/3&1&0\\1/4&-3/8&3/2\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}2&2&1\\-1/2&1/3&-1/3\\0&-2/3&2/3\end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix}3&0&0&0\\0&4&0&0\\0&-2&2&0\\-2&-3&0&1\end{pmatrix}$. **5.** а) $\lambda_{1,2}=3$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\vec{h}_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$; б) $\lambda_1=1$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, $\lambda_1=5$,

$\vec{h}_2=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; в) $\lambda_{1,2}=1$, $\vec{h}_1=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{h}_1'=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$; г) $\lambda_{1,2}=2\pm i$, $\vec{h}_{1,2}=\begin{pmatrix}1\\1\pm i\end{pmatrix}$.

6. а) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

7. а) $(x_1')^2+(x_2')^2-(x_3')^2$; б) $(x_1')^2-(x_2')^2-(x_3')^2$; в) $(x_1')^2-(x_2')^2$; г) $(x_1')^2-(x_2')^2-(x_3')^2-(x_4')^2$. **8.** а) $4(x_1')^2+4(x_2')^2-2(x_3')^2$; б) $6(x_1')^2+6(x_2')^2+9(x_3')^2$; в) $(x_1')^2+\sqrt{3}(x_2')^2-\sqrt{3}(x_2')^2$; г) $3(x_1')^2+(1+\sqrt{17})(x_2')^2+(1-\sqrt{17})(x_2')^2$. **9.** а) положительно определена; б) положительно определена; в) положительно определена; г) отрицательно определена. **10.** а) $(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2$, $3(x_1')^2+2(x_2')^2+2(x_3')^2$, $\begin{pmatrix}-19/90&\sqrt{5}/15&2\sqrt{5}/45\\4/15&0&-\sqrt{5}/15\\-1/90&0&2\sqrt{5}/45\end{pmatrix}$; б) $(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2$, $3(x_1')^2+2(x_2')^2+2(x_3')^2$, $\begin{pmatrix}-5/24&\sqrt{5}/15&\sqrt{5}/30\\19/72&0&-\sqrt{5}/18\\-1/72&0&\sqrt{5}/18\end{pmatrix}$; в) $(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2$, $3(x_1')^2+2(x_2')^2+2(x_3')^2$, $\begin{pmatrix}-11/54&\sqrt{5}/15&2\sqrt{5}/135\\7/27&0&-\sqrt{5}/27\\-1/54&0&2\sqrt{5}/27\end{pmatrix}$; г) $(x_1')^2+(x_2')^2+(x_3')^2$, $2(x_1')^2+3(x_2')^2+(x_3')^2$, $\begin{pmatrix}1/9&-7/36&-1/9\\0&1/4&0\\1/9&-1/36&2/9\end{pmatrix}$.