В.Ф.ЗАЙЦЕВ, А.Д.ПОЛЯНИН

СПРАВОЧНИК

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

СПРАВОЧНИК ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В. Ф. ЗАЙЦЕВ, А. Д. ПОЛЯНИН

СПРАВОЧНИК
ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ

МЕЖДУНАРОДНАЯ ПРОГРАММА ОБРАЗОВАНИЯ
1996

УДК 517.9
З-17

*Издание осуществлено при поддержке
Российского фонда фундаментальных
исследований по проекту 96-0114171*

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. **Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными**: Точные решения. — М.: Международная программа образования, 1996. — 496 с. ISBN 5-7753-0017-3

Справочник содержит около 1700 дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков и их решения. Приведено много новых точных решений линейных и нелинейных уравнений.

Рассмотрен ряд уравнений нелинейной механики и теоретической физики (которые встречаются в теории тепло- и массопереноса, акустике, теории фильтрации, теории волн, теории горения, гидродинамике, теории упругости, электростатике, электродинамике и др.) Особое внимание уделено уравнениям, которые зависят от произвольных функций или содержат много свободных параметров.

Справочник предназначен для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в различных областях прикладной математики, механики, физики, химической технологии и биологии.

Табл. 3. Ил. 1. Библиогр. 90 назв.

Издание осуществлено при участии фирмы “Левша”

ISBN 5-7753-0017-3

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Точные решения (в замкнутом виде) дифференциальных уравнений всегда играли и продолжают играть огромную роль в формировании правильного понимания качественных особенностей многих явлений и процессов в различных областях естествознания. Точные решения нелинейных уравнений наглядно демонстрируют и позволяют разобраться в механизме таких важных физических явлений, как пространственная локализация процессов переноса, режимы с обострением, множественность или отсутствие стационарных состояний при определенных условиях. Теория солитонов (метод обратной задачи рассеяния), без которой немыслимы многие разделы современной теоретической физики, также во многом обязана поиску и анализу точных решений.

Большинство уравнений прикладной и теоретической физики, химии и биологии содержат параметры или функции, которые находятся экспериментально и потому не строго фиксированы. В то же время уравнения, моделирующие реальные явления и процессы, должны быть достаточно просты для того, чтобы их можно было успешно проанализировать и решить. Естественно в качестве одного из возможных критериев простоты принять требование, чтобы модельное уравнение допускало решение в замкнутом виде. При этом особый интерес для приложений представляют собой уравнения, зависящие от произвольных функций или содержащие много свободных параметров, которые можно задавать по усмотрению исследователя.

Следует отметить, что даже частные точные решения дифференциальных уравнений, которые не имеют ясного физического смысла, играют важную роль «тестовых» задач при проверке корректности и оценке точности различных численных, асимптотических и приближенных аналитических методов. Кроме того, допускающие точные решения модельные уравнения и задачи служат основой для разработки новых численных, асимптотических и приближенных методов, которые, в свою очередь, позволяют исследовать уже более сложные задачи, не имеющие точного аналитического решения.

В книге описано около 1700 линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого и второго порядков и их решения.

При отборе материала авторы отдавали наибольшее предпочтение следующим двум важным типам уравнений:

• Уравнениям, которые встречаются в различных приложениях (в теории тепло- и массопереноса, акустике, теории фильтрации, теории волн, теории горения, аэро- и гидродинамике, теории упругости, электростатике, электродинамике, радиотехнике, химической технологии, биофизике и др.).

• Уравнениям, которые зависят от произвольных функций или содержат много свободных параметров (эти функции и параметры можно фиксировать по усмотрению читателя). Остальные уравнения, как правило, содержат один или несколько таких параметров (т. е. фактически в книге рассматриваются сразу целые семейства дифференциальных уравнений с частными производными).

При составлении первой части книги (первая — четвертая главы), в которой рассматриваются уравнения первого порядка, частично использовались материалы справочников Э. Камке (1966) и А. Д. Полянина, В. Ф. Зайцева (A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, 1996). Много новых точных решений построено путем «пересчета» результатов, полученных авторами в области обыкновенных дифференциальных уравнений и приведенных в книгах: В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1993, 1995), V. F. Zaitsev, A. D. Polyanin (1994), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995).

При составлении пятой главы второй части книги, где рассматриваются линейные уравнения второго порядка, частично использовались материалы книг: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Г. Бутковский (1979), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. В. Лыков (1967), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1996). При составлении шестой главы второй части книги, где рассматриваются нелинейные уравнения второго порядка, частично использовались материалы книг: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994). Приведено много новых точных решений нелинейных уравнений, описывающих процессы переноса в неоднородных (анизотропных) средах. Ряд идей и преобразований, которые успешно используются в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, удалось обобщить и применить для поиска точных решений уравнений в частных производных.

К сожалению, авторы существенно превысили запланированный объем книги. Поэтому в последний момент им пришлось «снять» более 120 страниц текста с нелинейными уравнениями первого порядка общего вида и линейными и нелинейными уравнениями второго порядка с тремя и более независимыми переменными. О точных решениях уравнений указанных типов рекомендуем смотреть книги других авторов, которые цитировались выше.

Читателям, которые интересуются методами решения линейных уравнений математической физики, полезно обратиться к книгам: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), В. С. Владимиров (1988), Р. Курант (1964), И. Г. Петровский (1961), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972), D. Zwillinger (1989). Методам, основанным на групповом анализе нелинейных дифференциальных уравнений, посвящены книги: Н. Х. Ибрагимов (1983), Л. В. Овсянников (1978), П. Олвер (1989), N. H. Ibragimov (1994). Метод обратной задачи рассеяния (теория солитонов) излагается в книгах: М. Абловиц, Х. Сигур (1987), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Ф. Калоджеро, А. Дегасперис (1985), А. Ньюэлл (1989).

Первая часть данного справочника написана В. Ф. Зайцевым, вторая — А. Д. Поляниным.

Авторы благодарят А. И. Журова за неоценимую помощь при создании оригинал-макета этой книги.

Авторы надеются, что справочник окажется полезным для широкого круга научных работников, преподавателей вузов, инженеров и студентов, специализирующихся в области математики, механики, физики и химической технологии.

Авторы

Часть 1
УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

1. Линейные уравнения с двумя независимыми переменными

1.1. Уравнения, содержащие одну частную производную

Уравнения с двумя независимыми переменными, содержащие одну частную производную, можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения для функции $w(x, y)$, где y (или x) играет роль параметра. Решения линейных уравнений такого вида приведены ниже.

Обозначение: $\Phi = \Phi(z)$ — *произвольная функция аргумента* z

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x, y)$.

Решение: $w = \int f(x, y)\, dx + \Phi(y)$, при интегрировании переменная y рассматривается как параметр.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x, y)$.

Решение: $w = \int f(x, y)\, dy + \Phi(x)$, при интегрировании переменная x рассматривается как параметр.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x, y)w$.

Решение: $w = \Phi(y) \exp\left[\int f(x, y)\, dx\right]$, при интегрировании переменная y рассматривается как параметр.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x, y)w$.

Решение: $w = \Phi(x) \exp\left[\int f(x, y)\, dy\right]$, при интегрировании переменная x рассматривается как параметр.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x} = f(x,y)w + g(x,y).$

Решение:

$$w = E(x,y)\Big[\Phi(y) + \int \frac{g(x,y)}{E(x,y)}\,dx\Big], \qquad E(x,y) = \exp\Big[\int f(x,y)\Big]\,dx,$$

при интегрировании y рассматривается как параметр.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x,y)w + g(x,y).$

Решение:

$$w = E(x,y)\Big[\Phi(x) + \int \frac{g(x,y)}{E(x,y)}\,dy\Big], \qquad E(x,y) = \exp\Big[\int f(x,y)\Big]\,dy,$$

при интегрировании x рассматривается как параметр.

1.2. Линейные уравнения вида $f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y}=0$

1.2.1. Предварительные замечания

Линейное однородное уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = 0. \tag{1}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} \tag{2}$$

называется характеристическим уравнением, соответствующим уравнению в частных производных (1). Если известно общее решение характеристического уравнения (2)

$$\Xi(x,y) = C, \tag{3}$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w = \Phi(\Xi), \tag{4}$$

где Φ — произвольная функция. Левая часть формулы (3) $\Xi(x,y)$ называется главным интегралом уравнения в частных производных (1).

Замечание. Для краткости далее часто будем приводить только главный интеграл (3). Общее решение рассматриваемого уравнения дается формулой (4).

1.2.2. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение:

$$w = \Phi(bx - ay),$$

где Φ — произвольная функция.

2. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

При $a = b$ — уравнение коноида.

Главный интеграл: $\Xi = |x|^b|y|^{-a}$.

3. $$ay\frac{\partial w}{\partial x} + bx\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл: $\Xi = bx^2 - ay^2$.

4. $$(a_1x + b_1y + c_1)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл определяется решениями вспомогательной системы алгебраических уравнений для параметров s, λ, μ, α, β, γ:

$$(a_1 - s)(b_2 - s) = a_2b_1, \tag{1}$$
$$a_1\lambda + a_2\mu = s\lambda, \qquad b_1\lambda + b_2\mu = s\mu, \tag{2}$$
$$c_1\alpha + c_2\beta - s\gamma = c_1\lambda + c_2\mu = 0, \tag{3}$$
$$(a_1 - s)\alpha + a_2\beta = \lambda s, \quad b_1\alpha + (b_2 - s)\beta = \mu s. \tag{4}$$

Случай 1: $(a_1 - b_2)^2 - 4a_2b_1 \neq 0$.

Уравнение (1) имеет два различных корня s_1, s_2, которым соответствуют два набора решений системы (2) λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2

1.1: $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Тогда $s_1 \neq 0$, $s_2 \neq 0$, и главный интеграл имеет вид

$$\Xi = \frac{|s_1(\lambda_1x + \mu_1y) + \lambda_1c_1 + \mu_1c_2|^{s_2}}{|s_2(\lambda_2x + \mu_2y) + \lambda_2c_1 + \mu_2c_2|^{s_1}}.$$

1.2: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$. Тогда $s_1 = s = a_1 + b_2$, $s_2 = 0$. Если $\lambda_2c_1 + \mu_2c_2 = 0$, то

$$\Xi = \lambda_2x + \mu_2y.$$

Если $\lambda_2c_1 + \mu_2c_2 \neq 0$, то

$$\Xi = s\frac{\lambda_2x + \mu_2y}{\lambda_2c_1 + \mu_2c_2} - \ln|s_1(\lambda_1x + \mu_1y) + \lambda_1c_1 + \mu_1c_2|.$$

Случай 2: $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$.

Уравнение (1) имеет двойной корень $s = \frac{1}{2}(a_1 + b_2)$, а система (2) дает значения λ и μ, не равные нулю одновременно.

2.1: $s \neq 0$. Тогда находим γ из уравнения (3) и выбираем не равные нулю α и β, удовлетворяющие уравнениям (4).

$$\Xi = \ln|s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu| - \frac{s(\alpha x + \beta y + \gamma)}{s(\lambda x + \mu y) + c_1\lambda + c_2\mu}.$$

2.2: $s = 0$, при этом $b_2 = -a_1$,

$$\Xi = a_2x^2 - 2a_1xy - b_1y^2 + 2c_2x - 2c_1y.$$

5. $ax^2 \dfrac{\partial w}{\partial x} + by^2 \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{1}{by} - \dfrac{1}{ax}$.

6. $(ax^2 + by^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} + 2axy\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{ax^2 + by^2}{y}$.

7. $(A_1x - A_2)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (A_1y - A_3)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad A_n = a_n + b_nx + c_ny.$

Уравнение Хессе.

Введение однородных координат

$$x = \frac{\xi_2}{\xi_1}, \quad y = \frac{\xi_3}{\xi_1}$$

приводит к следующему уравнению с тремя независимыми переменными для $w = w(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$B_1\frac{\partial w}{\partial \xi_1} + B_2\frac{\partial w}{\partial \xi_2} + B_3\frac{\partial w}{\partial \xi_3} = 0,$$

линейными коэффициентами $B_n = a_n\xi_1 + b_n\xi_2 + c_n\xi_3$. О решении этого уравнения см. 2.1.2.20.

8. $(ax + b)y\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ay^2 - cx)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Уравнение Хессе.

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{(ax+b)^2}{cx^2 + by^2}$.

9. $ax^m \dfrac{\partial w}{\partial x} + by^n \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $m \neq 1$, $n \neq 1$:

$$\Xi = b(n-1)x^{1-m} - a(m-1)y^{1-n}.$$

2°. Главный интеграл при $m = 1$, $n \neq 1$:

$$\Xi = b\ln|x| + \frac{a}{n-1}y^{1-n}.$$

3°. Главный интеграл при $m \neq 1$, $n = 1$:

$$\Xi = \frac{b}{m-1}x^{1-m} + a\ln|y|.$$

4°. Главный интеграл при $m = 1$, $n = 1$ см. в 1.2.2.2.

10. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + (by + cx^m)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $n \neq 1$:

$$\Xi = e^{-F}y - \frac{c}{a}\int e^{-F}x^{m-n}\,dx.$$

2°. Главный интеграл при $n = 1$, $am \neq b$:
$$\Xi = x^{-b/a}y - \frac{c}{am-b}x^{\frac{am-b}{a}}.$$
3°. Главный интеграл при $n = 1$, $am = b$:
$$\Xi = x^{-b/a}y - \frac{c}{a}\ln|x|,$$
где $F = \dfrac{b}{a(1-n)}x^{1-n}$.

11. $\displaystyle ax^k\frac{\partial w}{\partial x} + (y^n + bx^m y)\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad n \neq 1.$

1°. Главный интеграл при $m \neq k-1$:
$$\Xi = e^{-F}y^{1-n} + \frac{n-1}{a}\int e^{-F}x^{-k}\,dx.$$
2°. Главный интеграл при $m = k-1$, $(n-1)b \neq ma$:
$$\Xi = x^{\frac{(n-1)b}{a}}y^{1-n} + \frac{n-1}{(n-1)b-ma}x^{\frac{(n-1)b-ma}{a}}.$$
3°. Главный интеграл при $m = k-1$, $(n-1)b = ma$:
$$\Xi = x^{\frac{(n-1)b}{a}}y^{1-n} + \frac{n-1}{a}\ln|x|,$$
где $F = \dfrac{(1-n)b}{a(m+k-1)}x^{m-k+1}$.

12. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} + (y^2 - a^2x^2 + 3a)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:
$$\Xi = -\frac{(y-ax)e^{2ax}}{xy - ax^2 + 1} + 2a\int\frac{e^{2ax}}{x}\,dx.$$

Интеграл в этой формуле может быть выражен через интегральную показательную функцию $\operatorname{Ei}(x)$.

13. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} + (ay^2 + bx^n)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл $\Xi(x,y)$ может быть найден через общее решение $\Xi(x,y) = C$ специального уравнения Риккати $y' = ay^2 + bx^n$.

14. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + anx^{n-1} - a^2x^{2n})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $n \neq -1$:
$$\Xi = \frac{E}{y - ax^n} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\left(\frac{2a}{n+1}x^{n+1}\right).$$
2°. Главный интеграл при $n = -1$, $a \neq -\frac{1}{2}$:
$$\Xi = \frac{xy + a + 1}{(2a+1)(xy - a)}x^{2a+1}.$$
3°. Главный интеграл при $n = -1$, $a = -\frac{1}{2}$:
$$\Xi = \frac{2}{2xy+1} + \ln|x|.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + ax^n y + ax^{n-1})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $n \neq -1$:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2} E\,dx, \qquad E = \exp\left(\frac{a}{n+1}x^{n+1}\right).$$

2°. Главный интеграл при $n = -1$, $a \neq 1$:

$$\Xi = \frac{xy + a}{(a-1)(xy+1)}.$$

3°. Главный интеграл при $n = -1$, $a = 1$:

$$\Xi = \frac{1}{xy+1} + \ln|x|.$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 - ax^n y - abx^n - b^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $n \neq -1$:

$$\Xi = \frac{1}{y-b}\exp\left(2bx + \frac{a}{n+1}x^{n+1}\right) + \int \exp\left(2bx + \frac{a}{n+1}x^{n+1}\right) dx.$$

2°. Главный интеграл при $n = -1$:

$$\Xi = \frac{x^a e^{2bx}}{y-b} + \int x^a e^{2bx}\,dx.$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^n y^2 + bx^{-n-2})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \sqrt{ab} - \int \frac{1}{v^2 + \beta v + 1}\,dv, \qquad v = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}x^{n+1}y, \quad \beta = \frac{n+1}{\sqrt{ab}}.$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^n y^2 + bmx^{m-1} - ab^2 x^{n+2m})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $n + m \neq -1$:

$$\Xi = \frac{E}{y - bx^m} + a\int x^n E\,dx, \qquad E = \exp\left(\frac{2ab}{n+m+1}x^{n+m+1}\right).$$

2°. Главный интеграл при $n + m = -1$, $m \neq 2ab$:

$$\Xi = \frac{x^{2ab}}{y - bx^m} + \frac{a}{2ab - m}x^{2ab-m}.$$

3°. Главный интеграл при $n + m = -1$, $m = 2ab$:

$$\Xi = \frac{x^m}{y - bx^m} + a\ln x.$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x}-[(n+1)x^ny^2-ax^{n+m+1}y+ax^m]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $n+m\neq -2$:

$$\Xi=\frac{x^{-n-1}E}{x^{n+1}y-1}-(n+1)\int x^nE\,dx,\quad E=\exp\left(\frac{a}{n+m+2}x^{n+m+2}\right).$$

2°. Главный интеграл при $n+m=2,\ a-n\neq 1$:

$$\Xi=\frac{(n+1)x^{n+1}y-a}{(n+1-a)(x^{n+1}y-1)}x^{a-n-1}.$$

3°. Главный интеграл при $n+m=2,\ a-n=1$:

$$\Xi=\frac{1}{x^{n+1}y-1}-(n+1)\ln x.$$

20. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ax^ny^2+bx^my+bcx^m-ac^2x^n)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $m,\ n\neq -1$:

$$\Xi=\frac{E}{y+c}+a\int x^nE\,dx,\qquad E=\exp\left(\frac{b}{m+1}x^{m+1}-\frac{ac}{n+1}x^{n+1}\right).$$

2°. Главный интеграл при $n=-1$:

$$\Xi=\frac{x^{-ac}E_1}{y+c}+a\int x^{-ac-1}E_1\,dx,\qquad E_1=\exp\left(\frac{b}{m+1}x^{m+1}\right).$$

3°. Главный интеграл при $m=-1$:

$$\Xi=\frac{x^bE_2}{y+c}+a\int x^{n+b}E_2\,dx,\qquad E_2=\exp\left(-\frac{ac}{n+1}x^{n+1}\right).$$

21. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+[ax^ny^2-ax^n(bx^m+c)y+bmx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $n\neq -1,\ m+n\neq -1$:

$$\Xi=\frac{E}{y-bx^m-c}+a\int x^nE\,dx,\quad E=\exp\left(\frac{abx^{n+m+1}}{n+m+1}+\frac{acx^{n+1}}{n+1}\right).$$

2°. Главный интеграл при $n=-1,\ m\neq 0$:

$$\Xi=\frac{x^{ac}}{y-bx^m-c}\exp\left(\frac{ab}{m}x^m\right)+a\int x^{ac-1}\exp\left(\frac{ab}{m}x^m\right)dx.$$

3°. Главный интеграл при $n\neq -1,\ m=-1-n$:

$$\Xi=\frac{x^{ab}}{y-bx^{-n-1}-c}\exp\left(\frac{ac}{n+1}x^{n+1}\right)+a\int x^{ab+n}\exp\left(\frac{ac}{n+1}x^{n+1}\right)dx.$$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial x}-[anx^{n-1}y^2-cx^m(ax^n+b)+cx^m]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $m\neq -1, m+n\neq -1$:

$$\Xi=\frac{E}{(ax^n+b)[(ax^n+b)y-1]}-an\int\frac{x^{n-1}E}{(ax^n+b)^2}\,dx,$$

где
$$E = \exp\Bigl(\frac{ac}{m+n+1}x^{m+n+1} + \frac{b}{m+1}x^{m+1}\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $m=-1$, $n \neq 0$:
$$\Xi = \frac{x^{bc}}{(ax^n+b)[(ax^n+b)y-1]}\exp\Bigl(\frac{ac}{n}x^n\Bigr) - an\int \exp\Bigl(\frac{ac}{n}x^n\Bigr)\frac{x^{bc+n-1}}{(ax^n+b)^2}\,dx.$$

3°. Главный интеграл при $n \neq -1$, $m=-1-n$:
$$\Xi = \frac{x^{ac}}{(ax^n+b)[(ax^n+b)y-1]}\exp\Bigl(-\frac{bc}{n}x^{-n}\Bigr) - an\int \frac{x^{ac+n-1}}{(ax^n+b)^2}\exp\Bigl(-\frac{bc}{n}x^{-n}\Bigr)\,dx.$$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^ny^2 + bx^my + ckx^{k-1} - bcx^{m+k} - ac^2x^{n+2k})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $m \neq -1$, $n+k \neq -1$:
$$\Xi = \frac{E}{y-cx^k} + a\int x^nE\,dx,$$
где
$$E = \exp\Bigl(\frac{2ac}{n+k+1}x^{n+k+1} + \frac{b}{m+1}x^{m+1}\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $m=-1$, $n+k \neq -1$:
$$\Xi = \frac{x^bE}{y-cx^k} + a\int x^{b+n}E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(\frac{2ac}{n+k+1}x^{n+k+1}\Bigr).$$

3°. Главный интеграл при $m \neq -1$, $n+k=-1$:
$$\Xi = \frac{x^{2ac}}{y-cx^k}\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}x^{m+1}\Bigr) + a\int x^{2ac+n}\exp\Bigl(\frac{b}{m+1}x^{m+1}\Bigr)\,dx.$$

4°. Главный интеграл при $m=-1$, $n+k=-1$, $2ac+b \neq k$:
$$\Xi = \frac{ay + (ac+b-k)x^k}{(2ac+b-k)(y-cx^k)}x^{2ac+b-k}.$$

5°. Главный интеграл при $m=-1$, $n+k=-1$, $2ac+b=k$:
$$\Xi = \frac{x^k}{y-cx^k} + a\ln x.$$

24. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ay^2 + by + cx^{2b})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $ac>0$:
$$\Xi = \frac{b}{\sqrt{ac}}\operatorname{arctg}\Bigl(\sqrt{\frac{a}{c}}\,x^{-b}y\Bigr) - x^b.$$

2°. Главный интеграл при $ac<0$:
$$\Xi = \frac{b}{2\sqrt{-ac}}\ln\frac{ax^{-b}y - \sqrt{-ac}}{ax^{-b}y + \sqrt{-ac}} - x^b.$$

25. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+[ay^2+(n+bx^n)y+cx^{2n}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $v=x^{-n}y$, $n\neq 0$:

$$\Xi=\int\frac{1}{av^2+bv+c}\,dv-\frac{1}{n}x^n.$$

2°. Главный интеграл при $n=0$:

$$\Xi=\int\frac{dy}{ay^2+by+c}-\ln x.$$

26. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ax^ny^2+by+cx^{-n})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\int\frac{dv}{av^2+(b+n)v+c}-\ln x,\qquad v=x^ny.$$

27. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ax^ny^2+my-ab^2x^{n+2m})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $m+n\neq 0$:

$$\Xi=\frac{x^mE}{y-bx^m}+a\int x^{m+n-1}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(\frac{2ab}{m+n}x^{m+n}\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $m=-n$:

$$\Xi=\frac{x^{2ab}(y+bx^m)}{2b(y-bx^m)}.$$

28. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+[x^{2n}y^2+(m-n)y+x^{2m}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\operatorname{arctg}(x^{n-m}y)-\frac{x^{n+m}}{n+m}.$$

29. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+[ax^{2n}y^2+(bx^n-n)y+c]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=n\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-x^n,\qquad v=x^ny.$$

30. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+[ax^{2n+m}y^2+(bx^{n+m}-n)y+cx^m]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $n+m\neq 0$:

$$\Xi=\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-\frac{x^{n+m}}{n+m},\quad v=x^ny.$$

2°. Главный интеграл при $n+m=0$:

$$\Xi=\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-\ln x,\quad v=x^ny.$$

31. $(ax+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\alpha(ay+bx)^2 + \beta(ay+bx) - bx + \gamma]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE - \frac{c}{a}\int \frac{E\,dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta}, \qquad t = ay + bx,$$

где $E = \exp\Bigl(-\int \dfrac{dt}{\alpha t^2 + \beta t + \gamma + \delta}\Bigr)$, $\delta = \dfrac{bc}{a}$.

32. $2x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + (2y^2 + xy - 2a^2x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{y + a\sqrt{x}}{2a(y - a\sqrt{x})}\exp\Bigl(-\dfrac{4a}{\sqrt{x}}\Bigr).$

33. $2x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + (2y^2 + 3xy - 2a^2x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{y + a\sqrt{x} + \frac{1}{2}x}{2a(y - a\sqrt{x} + \frac{1}{2}x)}\exp\Bigl(-\dfrac{4a}{\sqrt{x}}\Bigr).$

34. $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^2y^2 + b)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = x^{2a\lambda+1}\dfrac{axy + a\lambda + 1}{(2a\lambda + 1)(xy - \lambda)}$, где λ — корень квадратного уравнения $a\lambda^2 + \lambda + b = 0$.

35. $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^2y^2 + bxy + c)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + (b+1)v + c} - \ln x, \quad v = xy.$$

36. $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + [x^2y^2 - a^2x^4 + a(1-2b)x^2 - b(b+1)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int x^{2b}e^{ax^2}\,dx + \frac{x^{2b+1}e^{ax^2}}{x(y - ax) - b}.$$

37. $(ax^2 + b)\dfrac{\partial w}{\partial x} - [\alpha y^2 + \beta xy + \dfrac{b}{\alpha}(a + \beta)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \alpha \neq 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = -\int (ax^2 + b)^{\frac{\beta}{2a}}\,dx + \frac{(ax^2 + b)^{1 + \frac{\beta}{2a}}}{\alpha y + (a + \beta)x}.$$

38. $(ax^2 + b)\dfrac{\partial w}{\partial x} - [y^2 - 2xy + (1-a)x^2 - b]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = -\int \dfrac{dx}{ax^2 + b} + \dfrac{1}{y - x}.$

39. $(ax^2+bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}+[y^2+(2\lambda x+b)y+\lambda(\lambda-a)x^2+\mu]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{E\,dx}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{y+\lambda x - A},$$

где $E = \exp\Bigl[(2A+b)\displaystyle\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}\Bigr]$, $A = \frac{1}{2}\bigl(-b \pm \sqrt{b^2-4\mu-4\lambda c}\bigr)$.

40. $(ax^2+bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}+[y^2+(ax+\mu)y-\lambda^2x^2+\lambda(b-\mu)+\lambda c]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{E\,dx}{ax^2+bx+c} + \frac{E}{y-\lambda x}, \qquad E = \exp\Bigl[\int\frac{(2\lambda+a)x+\mu}{ax^2+bx+c}\,dx\Bigr].$$

41. $(a_2x^2+b_2x+c_2)\dfrac{\partial w}{\partial x}+[y^2+(a_1x+b_1)y-$

$-\lambda(\lambda+a_1-a_2)x^2+\lambda(b_2-b_1)x+\lambda c_2]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{E\,dx}{a_2x^2+b_2x+c_2} + \frac{E}{y-\lambda x}, \qquad E = \exp\Bigl[\int\frac{(2\lambda+a_1)x+b_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\,dx\Bigr].$$

42. $(x-a)(x-b)\dfrac{\partial w}{\partial x}-[y^2+k(y+x-a)(y+x-b)]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $a \neq b$:

$$\Xi = \frac{(x-a)^k[y+k(y+x-a)]}{(x-b)^k[y+k(y+x-b)]}, \qquad k\neq 0, \quad k\neq -1.$$

2°. Главный интеграл при $a = b$:

$$\Xi = \frac{(x-a)+[y+k(y+x-a)]}{[y+k(y+x-a)](x-a)}, \qquad k\neq 0, \quad k\neq -1.$$

43. $x(ax^2+bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x}+[y^2+(ax^2+bx+c)y-x^2]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \ln\left|\frac{y-x}{y+x}\right| - 2\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}.$$

44. $x^4\dfrac{\partial w}{\partial x}-(x^4y^2+a^2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл: $\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl[\dfrac{x(xy-1)}{a}\Bigr] - \dfrac{a}{x}$.

45. $x(ax^k+b)\dfrac{\partial w}{\partial x}+[\alpha x^n y^2+(\beta-anx^k)y+\gamma x^{-n}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{-k}E + ka\int\frac{E\,dv}{\alpha v^2+(\beta+bn)v+\gamma}, \qquad v = x^n y,$$

где $E = \exp\Bigl[kb\displaystyle\int\frac{dv}{\alpha v^2+(\beta+bn)v+\gamma}\Bigr]$.

46. $(ax^n + bx^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cy^2 - bx^{m-1}y + ax^{n-2})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = c\int \frac{E\,dx}{ax^n + bx^m + c} + \frac{xE}{xy+1},$$

где $E = \exp\Bigl[-\displaystyle\int \frac{(bx^m + 2c)dx}{x(ax^n + bx^m + c)}\Bigr].$

47. $(ax^n + bx^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^{n-2}y^2 + bx^{m-1}y + c)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = a\int \frac{x^{n-2}E\,dx}{ax^n + bx^m + c} + \frac{E}{y-x}, \qquad E = \exp\Bigl[\int \frac{(2ax^n + bx^m)dx}{x(ax^n + bx^m + c)}\Bigr].$$

48. $(ax^n + bx^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (\alpha x^k y^2 + \beta x^s y - \alpha\lambda^2 x^k + \beta\lambda x^s)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \alpha\int \frac{x^k E\,dx}{ax^n + bx^m + c} + \frac{E}{y+\lambda}, \qquad E = \exp\Bigl(\int \frac{\beta x^s - 2\alpha\lambda x^k}{ax^n + bx^m + c}\,dx\Bigr).$$

49. $x(ax^n + bx^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} -$

$$- [sx^k y^2 - (ax^n + bx^m + c)y - s\lambda x^{k+2}]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{y - x\sqrt{\lambda}}{y + x\sqrt{\lambda}}\exp\Bigl(2s\sqrt{\lambda}\int \frac{x^k\,dx}{ax^n + bx^m + c}\Bigr).$$

50. $(ax^n + bx^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(ax^n + bx^m + c)y^2 -$

$$- an(n-1)x^{n-2} - bm(m-1)x^{m-2}]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{(ax^n + bx^m + c)[(ax^n + bx^m + c)y + anx^{n-1} + bmx^{m-1}]} + \int \frac{dx}{(ax^n + bx^m + c)^2}.$$

51. $y\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y + A)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = x - y + A\ln|y + A|$.

52. $y\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(ax + 3b)y + cx^3 - abx^2 - 2b^2x]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE + b\int \frac{E\,dv}{2v^2 - av - c}, \qquad v = \frac{y - bx}{x^2},$$

где $E = \exp\Bigl(\displaystyle\int \frac{v\,dv}{2v^2 - av - c}\Bigr).$

53. $y\dfrac{\partial w}{\partial x}+[(3ax+b)y-a^2x^3-abx^2+cx]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{-1}E-a\int\frac{E\,dv}{v^2-bv-c},\qquad v=\frac{y-ax^2}{x},$$

где $E=\exp\Bigl(\displaystyle\int\frac{v\,dv}{v^2-bv-c}\Bigr)$.

54. $y\dfrac{\partial w}{\partial x}+3[(ax+b)^{-1/3}x^{-5/3}y+(ax+b)^{-2/3}x^{-7/3}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\int x^{-1/3}(ax+b)^{-2/3}\,dx+9\int\frac{dv}{27v^3-a},$$

где $v=\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{3}\Bigl(\dfrac{ax+b}{x}\Bigr)^{1/3}$.

55. $y\dfrac{\partial w}{\partial x}+\{x^{n-1}[(1+2n)x+an]y-nx^{2n}(x+a)\}\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=(x^{n+1}+ax^n-y)^{-1/n}+\int\frac{dv}{a-v^{-n}},\qquad v=x(x^{n+1}+ax^n-y)^{-1/n}.$$

56. $y\dfrac{\partial w}{\partial x}+\{[a(2n+k)x^k+b]x^{n-1}y-$

$$-(a^2nx^{2k}+abx^k-c)x^{2n-1}\}\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{-k}E-ak\int\frac{E\,dv}{nv^2-bv-c},\qquad v=x^{-n}y-ax^k,$$

где $E=\exp\Bigl(-k\displaystyle\int\frac{v\,dv}{nv^2-bv-c}\Bigr)$.

57. $(Ay+Bx+a)\dfrac{\partial w}{\partial x}-(By+kx+b)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл: $\Xi=Ay^2+kx^2+2(Bxy+ay+bx)$.

58. $(y+Ax^n+a)\dfrac{\partial w}{\partial x}-(nAx^{n-1}y+kx^m+b)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл: $\Xi=y^2+\dfrac{2k}{m+1}+2(Ax^ny+ay+bx)$.

59. $(y+ax^{n+1}+bx^n)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(anx^n+cx^{n-1})y\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{-1}E-a\int\frac{E\,dv}{nv^2-(bn+c)v+bc},\qquad v=x^{-n}y+b,$$

где $E=\exp\Bigl[-\displaystyle\int\frac{v\,dv}{nv^2-(bn+c)v+bc}\Bigr]$.

60. $xy\dfrac{\partial w}{\partial x} - [ny^2 - a(2n+1)xy - by + a^2nx^2 - abx + c]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{-1}E - a\int \frac{E\,dv}{nv^2 - bv - c}, \qquad v = y - ax,$$

где $E = \exp\Bigl(-\int \dfrac{v\,dv}{nv^2 - bv - c}\Bigr)$.

61. $(Axy - Aky + Bx - Bk)\dfrac{\partial w}{\partial x} + [Cy^2 + Dxy - (B - Dk)y]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-k)E - B\int \frac{E\,dv}{(C-A)v^2 + Dv}, \qquad v = \frac{y}{x-k},$$

где $E = \exp\Bigl[-A\int \dfrac{v\,dv}{(C-A)v^2 + Dv}\Bigr]$.

62. $x(2ay + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ [a(2-m)y^2 + b(1-m)xy + Cx^2 + Ax^{m+2}]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл: $\Xi = (Ax^m + C)^2 - 2Amx^{m-2}y(ay + bx)$.

63. $(Axy + Bx^2 + kx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (Dy^2 + Exy + Fx^2 + ky)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = xV + k\int \frac{V\,dv}{(A-D)v^2 + (B-E)v - F}, \qquad v = \frac{y}{x},$$

где $V = \exp\Bigl[\int \dfrac{(Av + B)\,dv}{(A-D)v^2 + (B-E)v - F}\Bigr]$.

64. $(2Axy + Bx^2 + kx)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ (Ay^2 + Cxy + Dx^2 + ky - C\beta x - A\beta^2 - k\beta)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE + (2A\beta + k)\int \frac{E\,dv}{Av^2 + (B-C)v - D}, \qquad v = \frac{y-\beta}{x},$$

где $E = \exp\Bigl[\int \dfrac{(2Av + B)\,dv}{Av^2 + (B-C)v - D}\Bigr]$.

65. $(2Axy + Bx^2 + kx)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ [Ay^2 + Cxy + Dx^2 + (k - A\beta)y - C\beta x - k\beta]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE + (A\beta + k)\int \frac{E\,dv}{(B-C)v - D}, \qquad v = \frac{y-\beta}{x},$$

где $E = \exp\Bigl[\int \dfrac{Av + B}{(B-C)v - D}\,dv\Bigr]$.

66. $$(Axy + Aky + Bx^2 + Bkx)\frac{\partial w}{\partial x} + {} + [Cy^2 + Dxy + k(D-B)y]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x+k)E + kB\int \frac{E\,dv}{v[(C-A)v + D - B]}, \qquad v = \frac{y}{x+k},$$

где $E = \exp\Bigl[\int \frac{(Av+B)\,dv}{v[(A-C)v + B - D]}\Bigr]$.

67. $$x(2axy + b)\frac{\partial w}{\partial x} - [a(m+3)xy^2 + b(m+2)y - cx^m]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл: $\Xi = cx^{m+2}[cx^m - 2(m+1)y(axy+b)]$.

68. $$x^2(2axy + b)\frac{\partial w}{\partial x} - (4ax^2y^2 + 3bxy - cx^2 - k)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл: $\Xi = (cx^2+k)^2 - 4cx^3y(axy+b)$.

69. $$(xy + ax^m + bx^2)\frac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + cx^m + bxy)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = |ay - cx|^{n-2} + (n-2)\int (v+b)|av - c|^{n-3}\,dv, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

70. $$x(2ax^ny + b)\frac{\partial w}{\partial x} - {} - [a(3n+m)x^ny^2 + b(2n+m)y - Ax^m - Cx^{-n}]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (Ax^{n+m} + C)^2 - 2A(n+m)x^{2n+m}y(ax^ny + b).$$

71. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (axy + b)y^2\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v(av^2 + bv + 1)} - \ln|x|, \qquad v = xy.$$

72. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ax^{2n+1}y^3 + bx^{-n-2})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^3 + (n+1)v + b} - \ln|x|, \qquad v = x^{n+1}y.$$

73. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ax^ny^3 + 3abx^{n+m}y^2 - bmx^{m-1} - 2ab^3x^{n+3m})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

1°. Главный интеграл при $n + 2m \neq -1$:

$$\Xi = \frac{E}{(y+bx^m)^2} + 2a\int x^nE\,dx, \quad E = \exp\Bigl(-\frac{6ab^2}{n+2m+1}x^{n+2m+1}\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $n = -2m - 1$:

$$\Xi = \frac{x^{-6ab^2}}{(y + bx^m)^2} + \frac{a}{3ab^2 + m} x^{-2(3ab^2+m)}.$$

3°. Главный интеграл при $n = -2m - 1$, $m = -3ab^2$:

$$\Xi = \frac{x^{2m}}{(y + bx^m)^2} + 2a \ln|x|.$$

74. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^n y^3 + 3abx^{n+m} y^2 + cx^k y -$
$$- 2ab^3 x^{n+3m} + bcx^{m+k} - bmx^{m-1})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

1°. Главный интеграл при $k \neq -1$, $n + 2m \neq -1$:

$$\Xi = \frac{E}{(y + bx^m)^2} + 2a \int x^n E\,dx,$$

где $E = \exp\left(\dfrac{2c}{k+1} x^{k+1} - \dfrac{6ab^2}{n+2m+1} x^{n+2m+1}\right)$.

2°. Главный интеграл при $k = -1$, $n + 2m \neq -1$:

$$\Xi = \frac{x^{2c} E_2}{(y + bx^m)^2} + 2a \int x^{n+2c} E_2\,dx,$$

где $E_2 = \exp\left(-\dfrac{6ab^2}{n+2m+1} x^{n+2m+1}\right)$.

3°. Главный интеграл при $k \neq -1$, $n + 2m = -1$:

$$\Xi = \frac{x^{-6ab^2} E_1}{(y + bx^m)^2} + 2a \int x^{n-6ab^2} E_1\,dx,$$

где $E_1 = \exp\left(\dfrac{2c}{k+1} x^{k+1}\right)$.

4°. Главный интеграл при $k = n + 2m = -1$, $c \neq 3ab^2 + m$:

$$\Xi = \frac{x^{2(c-3ab^2)}}{(y + bx^m)^2} + \frac{a}{c - 3ab^2 - m} x^{2(c-3ab^2-m)}.$$

5°. Главный интеграл при $k = n + 2m = -1$, $c = 3ab^2 + m$:

$$\Xi = \frac{x^{2m}}{(y + bx^m)^2} + 2a \ln|x|.$$

75. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [ax^4 y^3 + (bx^2 - 1)y + cx]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^3 + bv + c} - \frac{x^2}{2}, \qquad v = xy.$$

76. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ay^3 + 3abx^n y^2 - bnx^n - 2ab^3 x^{3n})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + bx^n} + 2a \int x^{-1} E\,dx, \qquad E = \exp\left(-\frac{3ab^2}{n} x^{2n}\right).$$

77. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [ax^{2n+1}y^3 + (bx - n)y + cx^{1-n}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^3 + bv + c} - x, \qquad v = x^n y.$$

78. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [ax^{n+2}y^3 + (bx^n - 1)y + cx^{n-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^3 + bv + c} - \frac{1}{n}x^n, \qquad v = xy.$$

79. $(Ay^2 + x^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} - (2xy - Bx^2 - a)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = Ay^3 - Bx^3 + 3(x^2y - ax).$

80. $(Ay^2 + Bx^2 - a^2B)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (Cy^2 + 2Bxy)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-a)E + 2aB\int \frac{E\,dv}{v(Av^2 - Cv - B)}, \qquad v = \frac{y}{x-a},$$

где $E = \exp\Bigl[\displaystyle\int \frac{(Av^2 + B)\,dv}{v(Av^2 - Cv - B)}\Bigr].$

81. $(Ay^2 + Bxy + Cx^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (Dy^2 + Exy + Fx^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{(Av^2 + Bv + C)\,dv}{Av^3 + (B-D)v^2 + (C-E)v - F} + \ln|x|, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

82. $(Ay^2 + 2Bxy + Dx^2 + a)\dfrac{\partial w}{\partial x} - (By^2 + 2Dxy - Ex^2 - b)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = Ay^3 - Ex^3 + 3(Bxy^2 + Dx^2y + ay - bx).$$

83. $(aAy^2 - 2bAxy + aBx^2 + ab^2A - a^3B)\dfrac{\partial w}{\partial x} -$

$\qquad - (bAy^2 - 2aBxy + bBx^2 - b^3A + a^2bB)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-a)E + 2(a^2B - b^2A)\int \Bigl[\frac{E\,dv}{(Av^2 - B)(av - b)}\Bigr], \qquad v = \frac{y-b}{x-a},$$

где $E = \exp\Bigl[\displaystyle\int \frac{(aAv^2 - 2bAv + aB)\,dv}{(Av^2 - B)(av - b)}\Bigr].$

84. $(y^2 - 2xy + x^2 + ay)\dfrac{\partial w}{\partial x} + ay\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{a}{x-y} + \ln|y|.$

85. $(Ay^2+Bxy+Cx^2+kx)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(Dy^2+Exy+Fx^2+ky)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = xV + k\int\frac{V\,dv}{Av^3+(B-D)v^2+(C-E)v-F},\qquad v=\frac{y}{x},$$

где $V=\exp\Bigl[\displaystyle\int\frac{(Av^2+Bv+C)\,dv}{Av^3+(B-D)v^2+(C-E)v-F}\Bigr]$.

86. $(Ay^2+Bxy+Cx^2-\alpha By-\alpha Cx)\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$$+\,(Dy^2+Exy+\alpha Cy-\alpha Ey)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=(x-\alpha)V+\alpha C\int\frac{V\,dv}{v[Av^2+(B-D)v+C-E]},\qquad v=\frac{y}{x-\alpha},$$

где $V=\exp\Bigl[\displaystyle\int\frac{(Av^2+Bv+C)\,dv}{v[Av^2+(B-D)v+C-E]}\Bigr]$.

87. $[A(\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2)+(2\alpha-A^2\sigma)y+(\beta-AB\sigma)x]\dfrac{\partial w}{\partial x}-$

$$-\,[B(\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2)+(\beta-AB\sigma)y+(2\gamma-B^2\sigma)x]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=[\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2-\sigma(Ay+Bx)+\sigma]\exp(Ay+Bx).$$

88. $(Ay^2+Bxy-\alpha By+kx-\alpha k)\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$$+\,[Cy^2+Dxy+(k-\alpha D)y]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=(x-\alpha)E+k\int\frac{E\,dv}{v[Av^2+(B-C)v-D]},\qquad v=\frac{y}{x-\alpha},$$

где $E=\exp\Bigl[\displaystyle\int\frac{(Av+B)\,dv}{Av^2+(B-C)v-D}\Bigr]$.

89. $(Ay^2+2Axy+Bx^2+A-B)\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$$+\,[Ay^2+2Bxy+Dx^2+2(B-D)x+D-A]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=(x-1)E+2(B-A)\int\frac{E\,dv}{Av^3+Av^2-Bv-D},\qquad v=\frac{y+1}{x-1},$$

где $E=\exp\Bigl[\displaystyle\int\frac{(Av^2+2Av+B)\,dv}{Av^3+Av^2-Bv-D}\Bigr]$.

90. $$(Ay^2 + 2Axy + Bx^2 + A - B)\frac{\partial w}{\partial x} + [Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2(B+C)x + A + C]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x+1)E + 2(A-B)\int \frac{E\,dv}{Av^3 - Av^2 - Bv - C}, \qquad v = \frac{y+1}{x+1},$$

где $E = \exp\left[\int \frac{(Av^2 - 2Av + B)\,dv}{Av^3 - Av^2 - Bv - C}\right]$.

91. $$(Ay^2 + 2Axy + Bx^2 + A - B)\frac{\partial w}{\partial x} + [Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 + 2(C-B)x - A + C]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x+1)E + 2(A-B)\int \frac{E\,dv}{Av^3 + Av^2 - Bv - C}, \qquad v = \frac{y-1}{x+1},$$

где $E = \exp\left[\int \frac{(Av^2 + 2Av + B)\,dv}{Av^3 + Av^2 - Bv - C}\right]$.

92. $$(Ay^2 - 2Axy + Bx^2 + A - B)\frac{\partial w}{\partial x} - [Ay^2 - 2Bxy - Cx^2 + 2(B+C)x - A - C]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-1)E + 2(A-B)\int \frac{E\,dv}{Av^3 - Av^2 - Bv - C}, \qquad v = \frac{y-1}{x+1},$$

где $E = \exp\left[\int \frac{(Av^2 - 2Av + B)\,dv}{Av^3 - Av^2 - Bv - C}\right]$.

93. $$(Ay^2 - 2Axy + Bx^2 + A - B)\frac{\partial w}{\partial x} + [Cy^2 + 2Bxy + Dx^2 - 2(A+C)y - 2(B+D)x + 2A + C + D]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-1)E + 2(B-A)\int \frac{E\,dv}{Av^3 - (2A+C)v^2 - Bv - D},$$

где $v = \frac{y-1}{x-1}$, $\quad E = \exp\left[\int \frac{(Av^2 - 2Av + B)\,dv}{Av^3 - (2A+C)v^2 - Bv - D}\right]$.

94. $$(Ay^2 + 4Axy + Bx^2 + 4A - B)\frac{\partial w}{\partial x} + [2Ay^2 + 2Bxy + Cx^2 - 2(C-2B)x + C - 8A]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-1)E + 2(B-4A)\int \frac{E\,dv}{Av^3 + 2Av^2 - Bv - C}, \qquad v = \frac{y+2}{x-1},$$

где $E = \exp\left[\int \frac{(Av^2 + 4Av + B)\,dv}{Av^3 + 2Av^2 - Bv - C}\right]$.

95. $(Ay^2 - 4Axy + Bx^2 + 4A - B)\dfrac{\partial w}{\partial x} -$

$$- [2Ay^2 - 2Bxy - Cx^2 + 2(2B + C)x + 8A + C]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-1)E + 2(B-4A)\int \frac{E\,dv}{Av^3 - 2Av^2 - Bv - C}, \qquad v = \frac{y-2}{x-1},$$

где $E = \exp\left[\displaystyle\int \frac{(Av^2 - 4Av + B)\,dv}{Av^3 - 2Av^2 - Bv - C}\right]$.

96. $(Ay^2 + 4Axy + Bx^2 + 4A - B)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+[Cy^2+2Bxy+2Bx^2+4(C-2A)y+2(B+2C-8A)]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-1)E + 2(B-4A)\int \frac{E\,dv}{Av^3 + (4A-C)v^2 - Bv - 2B},$$

где $v = \dfrac{y+2}{x-1}$, $\quad E = \exp\left[\displaystyle\int \frac{(Av^2 + 4Av + B)}{Av^3 + (4A-C)v^2 - Bv - 2B}\right]$.

97. $[A(\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2)+(A\delta+2\alpha)y+(A\varepsilon+\beta)x+A\sigma+\delta]\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$$+[B(\alpha y^2+\beta xy+\gamma x^2)+(B\delta+\beta)y+(B\varepsilon+2\gamma)x+B\sigma+\varepsilon]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (\alpha y^2 + \beta xy + \gamma x^2 + \delta y + \varepsilon x + \sigma)\exp(Ay + Bx).$$

98. $(\alpha Ay^2-2\beta Axy+Bx^2+\alpha\beta^2A-\alpha^2B)\dfrac{\partial w}{\partial x}+[Cy^2+2Bxy+Dx^2-$

$$-2\beta(\beta A+C)y-2(\alpha D+\beta B)x+\alpha^2D+\beta^2(2\beta A+C)]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-\alpha)E + 2(\alpha B - \beta^2 A)\int \frac{E\,dv}{\alpha Av^3 - (2\beta A + C)v^2 - Bv - D},$$

где

$$v = \frac{y-\beta}{x-\alpha}, \qquad E = \exp\left[\int \frac{\alpha Av^2 - 2\beta Av + B)\,dv}{\alpha Av^3 - (2\beta A + C)v^2 - Bv - D}\right].$$

99. $(A_{22}y^2 + A_{12}xy + A_{11}x^2 + A_2y + A_1x + A_0)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ (B_{22}y^2 + B_{12}xy + B_{11}x^2 + B_2y + B_1x + B_0)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Здесь A_{ij}, B_{ij}, A_1 произвольны, а остальные параметры определяются соотношениями

$$A_2 = -A_{12}\alpha - 2A_{22}\beta,$$
$$A_0 = -A_{11}\alpha^2 + A_{22}\beta^2 - A_1\alpha,$$

$$B_2 = (2A_{11} - B_{12})\alpha + (A_{12} - 2B_{22})\beta + A_1,$$
$$B_1 = -2B_{11}\alpha - B_{12}\beta,$$
$$B_0 = B_{11}\alpha^2 + (B_{12} - 2A_{11})\alpha\beta + (B_{22} - A_{12})\beta^2 - A_1\beta,$$

где α, β — произвольные параметры.

Главный интеграл:

$$\Xi = (x-\alpha)E + k\int \frac{E\,dv}{A_{22}v^3 + (A_{12} - B_{22})v^2 + (A_{11} - B_{12})v - B_{11}},$$

где

$$E = \exp\left[\int \frac{(A_{22}v^2 + A_{12}v + A_{11})\,dv}{A_{22}v^3 + (A_{12} - B_{22})v^2 + (A_{11} - B_{12})v - B_{11}}\right],$$
$$v = \frac{y-\beta}{x-\alpha}, \qquad k = 2A_{11}\alpha + A_{12}\beta + A_1.$$

100. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(ay^n + bx^{\frac{n}{1-n}}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^n + \frac{1}{1-n}v + b} - \ln|x|, \qquad v = yx^{\frac{1}{n-1}}.$$

101. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^{m-n-mn}y^n + bx^m)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = b\left(\frac{a}{b}\right)^{1/n}\ln|x| - \int \frac{dv}{v^n - \lambda v + 1}, \qquad v = \left(\frac{a}{b}\right)^{1/n} yx^{-m-1},$$

где $\lambda = \dfrac{m+1}{b}\left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/n}$.

102. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y + ax^{n-m}y^m + bx^{n-k}y^k)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $n \neq 1$:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^m + bv^k} - \frac{x^{n-1}}{n-1}, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

2°. Главный интеграл при $n = 1$:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^m + bv^k} - \ln|x|, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

103. $(ax^n + bx^2 + cxy)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (kx^n + bxy + cy^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл при $n \neq 2$:

$$\Xi = (kx - ay)^{n-2} - (n-2)\int (k - av)^{n-3}(b + cv)\,dv, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

104. $(ay^n + bx^2 + cxy)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ky^n + bxy + cy^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл при $n \neq 2$:

$$(kx - ay)^{n-2} - (n-2)\int \frac{(k - av)^{n-3}(b + cv)}{v^n}\,dv, \qquad v = \frac{y}{x}.$$

105. $(ax^n + by^n + x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (\alpha x^k y^{n-k} + \beta x^m y^{n-m} + y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{n-1}E + (1-n)\int \frac{E\,dv}{\alpha v^{n-k} + \beta v^{n-m} - bv^{n+1} - av}, \qquad v = \frac{y}{x},$$

где $E = \exp\Bigl[(1-n)\displaystyle\int \frac{(bv^n + a)\,dv}{\alpha v^{n-k} + \beta v^{n-m} - bv^{n+1} - av}\Bigr].$

106. $(ax^n + by^n + Ax^2 + Bxy)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ (\alpha x^k y^{n-k} + \beta x^m y^{n-m} + Axy + By^2)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{n-2}E + (2-n)\int \frac{(Bv + A)E\,dv}{\alpha v^{n-k} + \beta v^{n-m} - bv^{n+1} - av}, \qquad v = \frac{y}{x},$$

где $E = \exp\Bigl[(2-n)\displaystyle\int \frac{(bv^n + a)\,dv}{\alpha v^{n-k} + \beta v^{n-m} - bv^{n+1} - av}\Bigr].$

107. $(ay^m + bx^n + s)\dfrac{\partial w}{\partial x} - (\alpha x^k + bnx^{n-1}y + \beta)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = a\varphi(y) + \alpha\psi(x) + bx^n y + sy + \beta x,$$

где

$$\varphi(y) = \begin{cases} \dfrac{y^{m+1}}{m+1} & \text{при } m \neq -1, \\ \ln|y| & \text{при } m = -1, \end{cases} \qquad \psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{k+1}}{k+1} & \text{при } k \neq -1, \\ \ln|x| & \text{при } k = -1. \end{cases}$$

108. $(ax^n y^m + x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (bx^k y^{n+m-k} + y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{n+m-1}E - (n+m-1)a\int \frac{E\,dv}{v^m(bv^{n-k} - av)}, \qquad v = \frac{y}{x},$$

где $E = \exp\Bigl[a(1-n-m)\displaystyle\int \frac{dv}{bv^{n-k} - av}\Bigr].$

109. $x(ax^n y^m + \alpha)\dfrac{\partial w}{\partial x} - y(bx^n y^m + \beta)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{(y^a x^b)^A}{A} + \frac{(y^\alpha x^\beta)^B}{B},$$

где $A = \dfrac{m\beta - n\alpha}{a\beta - b\alpha}$, $B = \dfrac{mb - na}{a\beta - b\alpha}$.

110. $x(anx^k y^{n+k}+s)\dfrac{\partial w}{\partial x}-y(bmx^{m+k}y^k+s)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл: $\Xi=aky^n+bkx^m-s(xy)^{-k}$.

111. $$(ax^n y^m+Ax^2+Bxy)\frac{\partial w}{\partial x}+(bx^k y^{n+m-k}+Axy+By^2)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{n+m-2}E-(n+m-2)a\int\frac{(Bv+A)E\,dv}{v^m(bv^{n-k}-av)},\qquad v=\frac{y}{x},$$

где $E=\exp\Bigl[a(2-n-m)\displaystyle\int\frac{dv}{bv^{n-k}-av}\Bigr]$.

112. $(ax^n y^m+bxy^k)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(\alpha y^s+\beta)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{1-n}E+a(n-1)\int\frac{y^m E}{\alpha y^s+\beta}\,dy,$$

где $E=\exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int\frac{y^k dy}{\alpha y^s+\beta}\Bigr]$.

113. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+\bigl(y+a\sqrt{y^2+bx^2}\bigr)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл: $\Xi=x^{-1-a}\bigl(y+\sqrt{y^2+bx^2}\bigr)$.

114. $$\Bigl(e_1\frac{x+a}{r_1^3}+e_2\frac{x-a}{r_2^3}\Bigr)\frac{\partial w}{\partial x}+y\Bigl(\frac{e_1}{r_1^3}+\frac{e_2}{r_2^3}\Bigr)\frac{\partial w}{\partial y}=0,$$
$$r_1^2=(x+a)^2+y^2,\qquad r_2^2=(x-a)^2+y^2.$$

Главный интеграл: $\Xi=e_1\dfrac{x+a}{r_1}+e_2\dfrac{x-a}{r_2}$.

115. $\sqrt{f(x)}\,\dfrac{\partial w}{\partial x}+\sqrt{f(y)}\,\dfrac{\partial w}{\partial y}=0,\qquad f(t)=\displaystyle\sum_{\nu=0}^{4}a_\nu t^\nu.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\biggl(\frac{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(y)}}{x-y}\biggr)^2-a_4(x+y)^2-a_3(x+y).$$

1.2.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(y^2+a\lambda e^{\lambda x}-a^2e^{2\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{y-ae^{\lambda x}}+\int E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(\frac{2a}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr).$$

2. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + by + a(\lambda - b)e^{\lambda x} - a^2 e^{2\lambda x}]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x}} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(\frac{2a}{\lambda}e^{\lambda x} + bx\Bigr).$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + ae^{\lambda x}y - abe^{\lambda x} - b^2]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2bx + \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr).$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + axe^{\lambda x}y + ae^{\lambda x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy - 1)} + \int \frac{E}{x^2}\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\frac{a}{\lambda^2}(\lambda x - 1)e^{\lambda x}\Bigr].$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x}y^2 + be^{-\lambda x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + \lambda v + b} - x, \qquad v = e^{\lambda x}y.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (be^{\mu x}y^2 + a\lambda e^{\lambda x} - a^2 be^{(\mu+2\lambda)x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

1°. Главный интеграл при $\mu + \lambda \neq 0$:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x}} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\frac{2ab}{\lambda + \mu}e^{(\lambda+\mu)x}\Bigr].$$

2°. Главный интеграл при $\mu = -\lambda$:

$$\Xi = \frac{y - ae^{\lambda x} + 2ab}{y - ae^{\lambda x}}e^{2abx}.$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x}y^2 + by + ce^{-\lambda x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + (b + \lambda)v + c} - x, \qquad v = e^{\lambda x}y.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\mu x}y^2 + \lambda y - ab^2 e^{(\mu+2\lambda)x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

1°. Главный интеграл при $\mu + \lambda \neq 0$:

$$\Xi = \frac{E}{y - be^{\lambda x}} + a\int e^{\mu x}E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(\frac{2ab}{\mu + \lambda}e^{(\mu+\lambda)x} + \lambda x\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $\mu = -\lambda$:

$$\Xi = \frac{x^{2ab}e^{\lambda x}}{y - be^{\lambda x}} + \frac{1}{b}x^{2ab+1}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(e^{\lambda x}y^2+ae^{\mu x}y+a\lambda e^{(\mu-\lambda)x})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{y+\lambda e^{-\lambda x}}+\int e^{\lambda x}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(\frac{a}{\mu}e^{\mu x}-2\lambda x\Bigr).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x}-(\lambda e^{\lambda x}y^2-ae^{\mu x}y-ae^{(\mu-\lambda)x})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{y-e^{-\lambda x}}-\lambda\int e^{\lambda x}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(\frac{a}{\mu}e^{\mu x}-2\lambda x\Bigr).$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ae^{\mu x}y^2+abe^{(\lambda+\mu)x}-b\lambda e^{\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $\mu+\lambda\neq0$:

$$\Xi=\frac{E}{y+be^{\lambda x}}+a\int e^{\mu x}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(-\frac{ab}{\mu+\lambda}e^{(\mu+\lambda)x}\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $\mu=-\lambda$:

$$\Xi=\frac{x^{-ab}}{y+be^{\lambda x}}+a\int x^{-ab}e^{-\lambda x}\,dx.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+[ae^{(2\lambda+\mu)x}y^2+(be^{(\lambda+\mu)x}-\lambda)y+ce^{\mu x}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $\mu+\lambda\neq0$:

$$\Xi=\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-\frac{1}{\mu+\lambda}e^{(\mu+\lambda)x}.$$

2°. Главный интеграл при $\mu=-\lambda$:

$$\Xi=\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-x,\qquad v=e^{\lambda x}y.$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+[e^{\mu x}(y-be^{\lambda x})^2+b\lambda e^{\lambda x}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл: $\Xi=\dfrac{1}{y-be^{\lambda x}}+\dfrac{1}{\mu}e^{\mu x}.$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ae^{\lambda x}y^2+bnx^{n-1}-ab^2e^{\lambda x}x^{2n})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{y-bx^n}+a\int e^{\lambda x}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(2ab\int x^ne^{\lambda x}\,dx\Bigr).$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial x}(e^{\lambda x}y^2+ax^ny+a\lambda x^ne^{-\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

1°. Главный интеграл при $n\neq-1$:

$$\Xi=\frac{E}{y+\lambda e^{-\lambda x}}+\int e^{\lambda x}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(\frac{a}{n+1}x^{n+1}-2\lambda x\Bigr).$$

2°. Главный интеграл при $n=-1$:

$$\Xi=\frac{x^ae^{-2\lambda x}}{y+\lambda e^{-\lambda x}}+\int x^ae^{-\lambda x}\,dx.$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - (\lambda e^{\lambda x} y^2 - a x^n e^{\lambda x} y - a x^n)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2\lambda x} E}{y - e^{-\lambda x}} - \lambda \int e^{-\lambda x} E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(a \int x^n e^{\lambda x}\,dx\Bigr).$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a e^{\lambda x} y^2 - a b x^n e^{\lambda x} y + b n x^{n-1})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b x^n} + a \int e^{\lambda x} E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(ab \int x^n e^{\lambda x}\,dx\Bigr).$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a x^n y^2 + b\lambda e^{\lambda x} - a b^2 x^n e^{2\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b e^{\lambda x}} + a \int x^n E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2ab \int x^n e^{\lambda x}\,dx\Bigr).$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a x^n y^2 + \lambda y - a b^2 x^n e^{2\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b e^{\lambda x}} + a \int x^n E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(\lambda x + 2ab \int x^n e^{\lambda x}\,dx\Bigr).$$

20. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a x^n y^2 - a b x^n e^{\lambda x} y + b\lambda e^{\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b x^n} + a \int x^n E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(ab \int x^n e^{\lambda x}\,dx\Bigr).$$

21. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - a x^{k+1} e^{\lambda x} y + a e^{\lambda x}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1} y - 1)} - (k+1) \int x^{-k-2} E\,dx,$$

где $E = x^{-2(k+1)} \exp\Bigl(a \int x^{k+1} e^{\lambda x}\,dx\Bigr).$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a x^n y^2 - a x^n (b e^{\lambda x} + c) y + b\lambda e^{\lambda x}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b e^{\lambda x} - c} + a \int x^n E\,dx,$$

где $E = \begin{cases} \exp\Bigl(\dfrac{ac}{n+1} x^{n+1} + ab \displaystyle\int x^n e^{\lambda x}\,dx\Bigr) & \text{при } n \neq -1, \\ x^{ac} \exp\Bigl(ab \displaystyle\int \dfrac{e^{\lambda x}}{x}\,dx\Bigr) & \text{при } n = -1. \end{cases}$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [ax^n e^{2\lambda x} y^2 + (bx^n e^{\lambda x} - \lambda)y + cx^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^n e^{\lambda x}\,dx, \qquad v = e^{\lambda x} y.$$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [ae^{\lambda x}(y - bx^n - c)^2 + bnx^{n-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y - bx^n - c} + \frac{a}{\lambda} e^{\lambda x}.$$

25. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x} y^2 + ky + ab^2 x^{2k} e^{\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\frac{y}{bx^k} - ab\int x^{k-1} e^{\lambda x}\,dx.$$

26. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [ax^{2n} e^{\lambda x} y^2 + (bx^n e^{\lambda x} - n)y + ce^{\lambda x}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{n-1} e^{\lambda x}\,dx, \qquad v = x^n y.$$

27. $(ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + ke^{\nu x} y - m^2 + kme^{\nu x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + m} + \int \frac{E\,dx}{ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c}, \quad E = \exp\Bigl(\int \frac{ke^{\nu x} - 2m}{ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c}\Bigr)\,dx.$$

28. $(ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ [(ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c)y^2 - a\lambda^2 e^{\lambda x} - b\mu^2 e^{\mu x}]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = E\Bigl(y - \frac{a\lambda e^{\lambda x} + b\mu e^{\mu x}}{ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c}\Bigr)^{-1} + \int E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl(2c\displaystyle\int \frac{dx}{ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c} - 2x\Bigr).$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + 2a\lambda e^{\lambda x^2} - a^2 e^{2\lambda x^2})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x^2}} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2a\int e^{\lambda x^2}\,dx\Bigr).$$

30. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{-\lambda x^2} y^2 + \lambda xy + ab^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Big[\tfrac{1}{b} y \exp\big(-\tfrac{1}{2}\lambda x^2\big)\Big] - ab\int \exp\big(-\tfrac{1}{2}\lambda x^2\big)\,dx.$$

31. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^n y^2 + \lambda xy + ab^2 x^n e^{\lambda x^2})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Big[\tfrac{y}{b} \exp\big(-\tfrac{1}{2}\lambda x^2\big)\Big] - ab\int x^n \exp\big(\tfrac{1}{2}\lambda x^2\big)\,dx.$$

32. $y\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{\lambda x}[(2a\lambda x + a + b)y - e^{\lambda x}(a^2\lambda x^2 + abx + c)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE + \int \frac{vE\,dv}{\lambda v^2 - bv - c}, \qquad v = e^{-\lambda x} y - ax,$$

где $E = \exp\Big(a\displaystyle\int \frac{dv}{\lambda v^2 - bv - c}\Big)$.

33. $y\dfrac{\partial w}{\partial x} - [ny^2 - a(2n+1)e^x y - by + a^2 n e^{2x} + abe^x - c]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = e^{-x}E - a\int \frac{E\,dv}{nv^2 - bv - c}, \qquad v = y - ae^x,$$

где $E = \exp\Big(-\displaystyle\int \frac{dv}{nv^2 - bv - c}\Big)$.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{2\lambda x} y^3 + be^{\lambda x} y^2 + cy + de^{-\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^3 + bv^2 + (c+\lambda)v + d} - x, \qquad v = e^{\lambda x} y.$$

35. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x} y^3 + 3abe^{\lambda x} y^2 + cy - 2ab^3 e^{\lambda x} + bc)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{2cx}E}{(y+b)^2} + 2a\int e^{(\lambda+2c)x} E\,dx, \qquad E = \exp\Big(-\frac{6ab^2}{\lambda} e^{\lambda x}\Big).$$

36. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x} y^3 + 3abe^{(\lambda+\mu)x} y^2 - 2ab^3 e^{(\lambda+3\mu)x} - b\mu e^{\mu x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $2\mu + \lambda \neq 0$:

$$\Xi = \frac{E}{(y + be^{\mu x})^2} + 2a\int e^{\lambda x} E\,dx, \qquad E = \exp\Big[-\frac{ab^2}{\lambda + 2\mu} e^{(\lambda+2\mu)x}\Big].$$

2°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$, $\mu \neq -3ab^2$:
$$\Xi = \frac{e^{-6ab^2x}}{(y + be^{\mu x})^2} - \frac{a}{\mu + 3ab^2}e^{-2(\mu+3ab^2)}.$$
3°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$, $\mu = -3ab^2$:
$$\Xi = \frac{e^{2\mu x}}{(y + be^{\mu x})^2} + 2ax,$$

37. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x}y^3 + 3abe^{(\lambda+\mu)x}y^2 + 2ab^2e^{(\lambda+2\mu)x}y - b\mu e^{\mu x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

1°. Главный интеграл при $2\mu + \lambda \neq 0$:
$$\Xi = \frac{E}{(y + be^{\mu x})^2} + 2a\int e^{\lambda x}E\,dx, \qquad E = \exp\left[-\frac{2ab^2}{\lambda + 2\mu}e^{(\lambda+2\mu)x}\right].$$
2°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$, $\mu \neq -ab^2$:
$$\Xi = \frac{e^{-2ab^2x}}{(y + be^{\mu x})^2} - \frac{a}{\mu + ab^2}e^{-2(\mu+ab^2)}.$$
3°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$, $\mu = -ab^2$:
$$\Xi = \frac{e^{2\mu x}}{(y + be^{\mu x})^2} + 2ax.$$

38. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x}y^3 + 3abe^{(\lambda+\mu)x}y^2 + \mu y - 2ab^3e^{(\lambda+3\mu)x})\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$
1°. Главный интеграл при $\lambda + 2\mu \neq 0$:
$$\Xi = \frac{e^{2\mu}E}{(y + be^{\mu x})^2} - \frac{1}{3b^2}E, \qquad E = \exp\left[-\frac{6ab^2}{\lambda + 2\mu}e^{(\lambda+2\mu)x}\right].$$
2°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$:
$$\Xi = \frac{e^{2(\mu-3ab^2)x}}{(y + be^{\mu x})^2} - \frac{1}{3b^2}e^{-6ab^2x}.$$

39. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{ae^{\lambda x}y^3 + 3abe^{(\lambda+\mu)x}y^2 + [(3ab^2 + c)e^{(\lambda+2\mu)x} + s]y + b(ab^2 + c)e^{(\lambda+3\mu)x} + b(s - \mu)e^{\mu x}\}\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$
1°. Главный интеграл при $\lambda + 2\mu \neq 0$:
$$\Xi = \frac{e^{2sx}E}{(y + be^{\mu x})^2} + 2a\int e^{(\lambda+2s)x}E\,dx, \qquad E = \exp\left[\frac{2c}{\lambda + 2\mu}e^{(\lambda+2\mu)x}\right].$$
2°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$, $\mu \neq c + s$:
$$\Xi = \frac{e^{2(c+s)x}}{(y + be^{\mu x})^2} + \frac{a}{c + s - \mu}e^{2(c+s-\mu)x}.$$
3°. Главный интеграл при $\lambda = -2\mu$, $\mu = c + s$:
$$\Xi = \frac{e^{2\mu x}}{(y + be^{\mu x})^2} + 2ax.$$

40. $ae^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + by^m\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $m \neq 1$:
$$\Xi = \frac{1}{b(1-m)}y^{1-m} + \frac{1}{\alpha a}e^{-\alpha x},$$
2°. Главный интеграл при $m = 1$:
$$\Xi = \frac{1}{b}\ln y + \frac{1}{\alpha a}e^{-\alpha x}.$$

41. $ae^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл
$$\Xi = \frac{1}{\beta b}e^{-\beta y} - \frac{1}{\alpha a}e^{-\alpha x}.$$

42. $(ae^y + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $b \neq 1$:
$$\Xi = xe^{-by} - \frac{a}{1-b}e^{(1-b)y}.$$
2°. Главный интеграл при $b = 1$:
$$\Xi = xe^{-y} - ay.$$

43. $(ax^n e^{\lambda y} + bxy^m)\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:
$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int e^{(\lambda-\mu)y}E\,dy, \quad E = \exp\Big[b(n-1)\int y^m e^{-\mu y}\,dy\Big].$$

44. $(ax^n y^m + bxe^{\lambda y})\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^k\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:
$$\Xi = x^{n-1}E + (n-1)a\int y^{m-k}E\,dy, \qquad E = \exp\Big[b(n-1)\int y^{-k}e^{\lambda y}\,dy\Big].$$

45. $(ax^n y^m + bxy^k)\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:
$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int y^m e^{-\lambda y}E\,dy, \quad E = \exp\Big[b(n-1)\int y^k e^{-\lambda y}\,dy\Big].$$

1.2.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - a^2 + a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x) - a^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:
$$\Xi = \frac{E}{y - a\,\mathrm{ch}(\lambda x)} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Big].$$

2. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\lambda - a(a+\lambda)\,\mathrm{th}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\mathrm{ch}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{y - a\,\mathrm{th}(\lambda x)} + \int [\mathrm{ch}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}\,dx.$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + 3a\lambda - \lambda^2 - a(a+\lambda)\,\mathrm{th}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\mathrm{ch}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{\mathrm{sh}^2(\lambda x)[y - a\,\mathrm{th}(\lambda x) + \lambda\,\mathrm{cth}(\lambda x)]} + \int \frac{[\mathrm{ch}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{\mathrm{sh}^2(\lambda x)}\,dx.$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\lambda - a(a+\lambda)\,\mathrm{cth}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\mathrm{sh}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{y - a\,\mathrm{cth}(\lambda x)} + \int [\mathrm{sh}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}\,dx.$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + 3a\lambda - \lambda^2 - a(a+\lambda)\,\mathrm{cth}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\mathrm{sh}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{\mathrm{ch}^2(\lambda x)[y - a\,\mathrm{cth}(\lambda x) + \lambda\,\mathrm{th}(\lambda x)]} + \int \frac{[\mathrm{sh}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{\mathrm{ch}^2(\lambda x)}\,dx.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - 2\lambda^2\,\mathrm{th}^2(\lambda x) - 2\lambda^2\,\mathrm{cth}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{\mathrm{sh}^2(\lambda x)\,\mathrm{ch}^2(\lambda x)}{y - \lambda\,\mathrm{th}(\lambda x) - \lambda\,\mathrm{cth}(\lambda x)} + \int \mathrm{sh}^2(\lambda x)\,\mathrm{ch}^2(\lambda x)\,dx.$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda(a+b) - 2ab - a(a+\lambda)\,\mathrm{th}^2(\lambda x) - {} \\ {} - b(b+\lambda)\,\mathrm{cth}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\mathrm{sh}(\lambda x)]^{\frac{2b}{\lambda}}[\mathrm{ch}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}}{y - a\,\mathrm{th}(\lambda x) - b\,\mathrm{cth}(\lambda x)} + \int [\mathrm{sh}(\lambda x)]^{\frac{2b}{\lambda}}[\mathrm{ch}(\lambda x)]^{\frac{2a}{\lambda}}\,dx.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda[\mathrm{sh}(\lambda x)y^2 - \mathrm{sh}^3(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{\exp[\frac{1}{2}\,\mathrm{ch}(2\lambda x)]}{y - \mathrm{ch}(\lambda x)} + \lambda\int \mathrm{sh}(\lambda x)\exp[\tfrac{1}{2}\,\mathrm{ch}(2\lambda x)]\,dx.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \{[a \operatorname{sh}^2(\lambda x) - \lambda]y^2 - a \operatorname{sh}^2(\lambda x) + \lambda - a\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{\operatorname{sh}(\lambda x)[\operatorname{sh}(\lambda x)y - \operatorname{ch}(\lambda x)]} + \int \Big[a - \frac{\lambda}{\operatorname{sh}^2(\lambda x)}\Big] E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[\dfrac{a}{2\lambda}\operatorname{ch}(2\lambda x)\Big]$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \{[a \operatorname{ch}^2(\lambda x) - \lambda]y^2 - a \operatorname{ch}^2(\lambda x) + \lambda + a\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{\operatorname{ch}(\lambda x)[\operatorname{ch}(\lambda x)y - \operatorname{sh}(\lambda x)]} + \int \Big[a - \frac{\lambda}{\operatorname{ch}^2(\lambda x)}\Big] E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[\dfrac{a}{2\lambda}\operatorname{ch}(2\lambda x)\Big]$.

11. $2\dfrac{\partial w}{\partial x} + \{[a - \lambda + a \operatorname{ch}(\lambda x)]y^2 + a + \lambda - a \operatorname{ch}(\lambda x)\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - \operatorname{th}(\frac{1}{2}\lambda x)} + \frac{1}{2}\int [a - \lambda + a \operatorname{ch}(\lambda x)] E\,dx,$$

где

$$E = [\operatorname{ch}(\lambda x)]^{\frac{2(a-\lambda)}{\lambda}} \exp\Big[a \int \operatorname{ch}(\lambda x) \operatorname{th}\big(\tfrac{1}{2}\lambda x\big)\,dx\Big].$$

12. $(ax^n + bx \operatorname{ch}^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^k \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a \int y^{-k} E\,dy,$$

где $E = \exp\Big[b(n-1)\displaystyle\int y^{-k} \operatorname{ch}^m y\,dy\Big]$.

13. $(ax^n + bx \operatorname{th}^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^k \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a \int y^{-k} E\,dy,$$

где $E = \exp\Big[b(n-1)\displaystyle\int y^{-k} \operatorname{th}^m y\,dy\Big]$.

14. $(ax^n + bx \operatorname{ch}^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{ch}^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a \int \frac{E\,dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\Big[b(n-1)\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch}^m y\,dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)}\Big]$.

15. $(ax^n + bx\operatorname{th}^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{th}^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{E\,dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int \frac{\operatorname{th}^m y\,dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)}\Bigr]$.

16. $(ax^n y^m + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{ch}^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{y^m E\,dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int \frac{dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)}\Bigr]$.

17. $(ax^n y^m + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{th}^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{y^m E\,dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int \frac{dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)}\Bigr]$.

18. $(ax^n \operatorname{ch}^m y + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \operatorname{sh}^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{\operatorname{ch}^m y E\,dy}{\operatorname{sh}^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int \frac{dy}{\operatorname{sh}^k(\lambda y)}\Bigr]$.

19. $(ax^n \operatorname{th}^m y + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^k\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $k \neq 1$:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int y^{-k}E\operatorname{th}^m y\,dy,$$

где $E = \exp\Bigl[\dfrac{b(n-1)}{1-k}y^{1-k}\Bigr]$.

2°. Главный интеграл при $k = 1$:

$$\Xi = (xy^{-b})^{1-n} + (n-1)a\int y^{(n-1)b-1}\operatorname{th}^m y\,dy.$$

1.2.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\ln(\beta x)y - ab\ln(\beta x) - b^2]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{(2b-a)x}E}{y-b} + \int e^{(2b-a)x}E\,dx, \qquad E = \exp[ax\ln(\beta x)].$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + ax\ln^m(bx)y + a\ln^m(bx)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \qquad E = \exp\Big[a\int x\ln^m(bx)\,dx\Big].$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^ny^2 - abx^{n+1}y\ln x + b\ln x + b)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bx\ln x} + a\int x^nE\,dx, \quad E = \exp\Big[\frac{ab}{n+2}x^{n+2}\Big(\ln x - \frac{1}{n+2}\Big)\Big].$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(n+1)x^ny^2 - ax^{n+1}(\ln x)^my + a(\ln x)^m]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{x^{-2(n+1)}E}{y - x^{-n-1}} - (n+1)\int x^{-n-2}E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[a\int x^{n+1}(\ln x)^m\,dx\Big]$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a(\ln x)^ny^2 + bmx^{m-1} - ab^2x^{2m}(\ln x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bx^m} + a\int(\ln x)^nE\,dx, \qquad E = \exp\Big[2ab\int x^m(\ln x)^n\,dx\Big].$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a(\ln x)^ny^2 - abx(\ln x)^{n+1}y + b\ln x + b]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bx\ln x} + a\int(\ln x)^nE\,dx, \qquad E = \exp\Big[ab\int x(\ln x)^{n+1}\,dx\Big].$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a(\ln x)^k(y - bx^n - c)^2 + bnx^{n-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y - bx^n - c} + a\int(\ln x)^k\,dx.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [a(\ln x)^n y^2 + b(\ln x)^m y + bc(\ln x)^m - ac^2(\ln x)^n]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y+c} + a\int(\ln x)^n E\,dx, \quad E = \exp\Bigl\{\int[b(\ln x)^m - 2ac(\ln x)^n]\,dx\Bigr\}.$$

9. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + (ay + b\ln x)^2\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \ln x - \int\frac{dv}{av^2+b}, \qquad v = ay + b\ln x.$$

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + [xy^2 - A^2 x\ln^2(\beta x) + A]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2Ax}E}{y - A\ln(\beta x)} + \int e^{-2Ax}E\,dx, \qquad E = \exp[2Ax\ln(\beta x)].$$

11. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + [xy^2 - A^2 x\ln^{2k}(\beta x) + kA\ln^{k-1}(\beta x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - A\ln^k(\beta x)} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[2A\int\ln^k(\beta x)\,dx\Bigr].$$

12. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + (ax^n y^2 + b + ab^2 x^n\ln^2 x)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b\ln x} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\frac{x^n}{n^2}(2abn\ln x - 1)\Bigr].$$

13. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + [a\ln^m(\lambda x)y^2 + ky + ab^2 x^{2k}\ln^m(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{y}{bx^k}\Bigr) - ab\int x^{k-1}\ln^m(\lambda x)\,dx.$$

14. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + [ax^n(y + b\ln x)^2 - b]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{1}{y + b\ln x} + \dfrac{a}{n}x^n.$

15. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + [ax^{2n}(\ln x)y^2 + (bx^n\ln x - n)y + c\ln x]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int\frac{dv}{av^2+bv+c} - \int x^{n-1}\ln x\,dx, \qquad v = x^n y.$$

16. $x^2 \ln(ax)\dfrac{\partial w}{\partial x} - [x^2y^2 \ln(ax) + 1]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{x}{\ln(ax)\,[xy\ln(ax) - 1]} - \int \frac{dx}{\ln^2(ax)}.$$

17. $(a\ln x + b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + c(\ln x)^n y - \lambda^2 + \lambda c(\ln x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y+\lambda} + \int \frac{E\,dx}{a\ln x + b}, \qquad E = \exp\left[\int \frac{c(\ln x)^n - 2\lambda}{a\ln x + b}\right] dx.$$

18. $(a\ln x + b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(\ln x)^n y^2 + cy - \lambda^2(\ln x)^n + c\lambda]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y+\lambda} + \int \frac{(\ln x)^n E\,dx}{a\ln x + b},$$

где $E = \exp\left[\int \dfrac{c - 2\lambda(\ln x)^n}{a\ln x + b}\,dx\right].$

19. $y\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(2\ln x + a + 1)y - x(\ln^2 x + a\ln x - b)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = E\ln x + \int \frac{vE\,dv}{v^2 - av - b}, \qquad v = \frac{y}{x} - \ln x,$$

где $E = \exp\left(\int \dfrac{dv}{v^2 - av - b}\right).$

20. $(ax^n + bx\ln^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \ln^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{E\,dy}{\ln^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\left[b(n-1)\int \dfrac{\ln^m y\,dy}{\ln^k(\lambda y)}\right].$

21. $(ax^n \ln^m y + bx)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \ln^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{E\ln^m y\,dy}{\ln^k(\lambda y)},$$

где $E = \exp\left[b(n-1)\int \dfrac{dy}{\ln^k(\lambda y)}\right].$

22. $(ax^n \ln^m y + bx \ln^k y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + y^s \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int y^{-s} E \ln^m y\, dy,$$

где $E = \exp\Big[b(n-1)\int y^{-s}\ln^k y\, dy\Big]$.

1.2.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $\cos y\dfrac{\partial w}{\partial x} + \sin x\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \cos x + \sin y$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - a^2 + a\lambda\sin(\lambda x) + a^2\sin^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + a\cos(\lambda x)} + \int E\, dx, \qquad E = \exp\Big[-\frac{2a}{\lambda}\sin(\lambda x)\Big].$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - a^2 + a\lambda\cos(\lambda x) + a^2\cos^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\sin(\lambda x)} + \int E\, dx, \qquad E = \exp\Big[-\frac{2a}{\lambda}\cos(\lambda x)\Big].$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\sin(\beta x)y + ab\sin(\beta x) - b^2]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y+b} + \int E\, dx, \qquad E = \exp\Big[-2bx - \frac{a}{\beta}\cos(\beta x)\Big].$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + ax\sin^m(bx)y + a\sin^m(bx)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\, dx, \qquad E = \exp\Big[a\int x\sin^m(bx)\, dx\Big].$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\lambda + a(\lambda - a)\operatorname{tg}^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\cos(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}}{y - a\operatorname{tg}(\lambda x)} + \int [\cos(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}\, dx.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda^2 + 3a\lambda + a(\lambda - a)\operatorname{tg}^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\cos(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}}{\sin^2(\lambda x)[y - a\operatorname{tg}(\lambda x) + \lambda\operatorname{ctg}(\lambda x)]} + \int \frac{[\cos(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}}{\sin^2(\lambda x)}\,dx.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\lambda + a(\lambda - a)\operatorname{ctg}^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\sin(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}}{y + a\operatorname{ctg}(\lambda x)} + \int [\sin(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}\,dx.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda^2 + 3a\lambda + a(\lambda - a)\operatorname{ctg}^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{[\sin(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}}{\cos^2(\lambda x)[y - \lambda\operatorname{tg}(\lambda x) + a\operatorname{ctg}(\lambda x)]} + \int \frac{[\sin(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}}{\cos^2(\lambda x)}\,dx.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - y\operatorname{tg} x + a(1 - a)\operatorname{ctg}^2 x]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $a \neq \frac{1}{2}$:

$$\Xi = \frac{(\sin x)^{-2a}\cos x}{y + a\operatorname{ctg} x} + \frac{1}{1 - 2a}(\sin x)^{1-2a}.$$

2°. Главный интеграл при $a = \frac{1}{2}$:

$$\Xi = \frac{\cos x}{y\sin x + \frac{1}{2}\cos x} + \ln|\sin x|.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 - my\operatorname{tg} x + b^2\cos^{2m} x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}y\cos^{-m} x\Bigr) - b\int \cos^m x\,dx.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - 2a\operatorname{ctg}(ax)y + b^2 - a^2]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{\sin^{-2}(bx)}{y - a\operatorname{ctg}(ax) + b\operatorname{ctg}(bx)} - \frac{1}{b}\operatorname{ctg}(bx).$$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + my\operatorname{ctg} x + b^2\sin^m x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}y\sin^{-m} x\Bigr) - b\int \sin^m\,dx.$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - 2\lambda^2 \operatorname{tg}^2(\lambda x) - 2\lambda^2 \operatorname{ctg}^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{\sin^2(\lambda x)\cos^2(\lambda x)}{y - \lambda \operatorname{ctg}(\lambda x) + \lambda \operatorname{tg}(\lambda x)} + \frac{1}{8}x - \frac{1}{8\lambda}\sin(\lambda x)\cos(\lambda x).$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda(a+b) + 2ab +$
$$+ a(\lambda - a)\operatorname{tg}^2(\lambda x) + b(\lambda - b)\operatorname{ctg}^2(\lambda x)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\operatorname{tg}(\lambda x) + b\operatorname{ctg}(\lambda x)} + \int E\,dx,$$

где $E = [\cos(\lambda x)]^{-\frac{2a}{\lambda}}[\sin(\lambda x)]^{-\frac{2b}{\lambda}}$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + ax\operatorname{tg}^m(bx)y + a\operatorname{tg}^m(bx)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[a\int x\operatorname{tg}^m(bx)\,dx\Bigr].$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda\sin(\lambda x)y^2 + \lambda\sin^3(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + \cos(\lambda x)} + \lambda\int E\sin(\lambda x)\,dx, \qquad E = \exp\bigl[\tfrac{1}{2}\cos(2\lambda x)\bigr].$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda\cos(\lambda x)y^2 + \lambda\cos^3(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - \sin(\lambda x)} + \lambda\int E\cos(\lambda x)\,dx, \qquad E = \exp\bigl[-\tfrac{1}{2}\cos(2\lambda x)\bigr].$$

19. $2\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl\{[\lambda + a - a\sin(\lambda x)]y^2 + \lambda - a - a\sin(\lambda x)\bigr\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\lambda x + \frac{1}{4}\pi)} + \frac{1}{2}\int[\lambda + a - a\sin(\lambda x)]E\,dx,$$

где $E = \dfrac{1}{1 - \sin(\lambda x)}\exp\Bigl[\dfrac{a}{\lambda}\sin(\lambda x)\Bigr]$.

20. $2\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl\{[\lambda + a + a\cos(\lambda x)]y^2 + \lambda - a + a\cos(\lambda x)\bigr\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - \operatorname{tg}(\frac{1}{2}\lambda x)} + \frac{1}{2}\int[\lambda + a + a\cos(\lambda x)]E\,dx,$$

где $E = \dfrac{1}{1 + \cos(\lambda x)}\exp\Bigl[-\dfrac{a}{\lambda}\cos(\lambda x)\Bigr]$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \{[\lambda + a\sin^2(\lambda x)]y^2 + \lambda - a + a\sin^2(\lambda x)\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + \operatorname{ctg}(\lambda x)} + \int [\lambda + a\sin^2(\lambda x)]E\,dx,$$

где $E = \dfrac{1}{\sin^2(\lambda x)} \exp\Big[\dfrac{a}{2\lambda}\cos(2\lambda x)\Big].$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \{[\lambda + a\cos^2(\lambda x)]y^2 + \lambda - a + a\cos^2(\lambda x)\}\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - \operatorname{tg}(\lambda x)} + \int [\lambda + a\cos^2(\lambda x)]E\,dx,$$

где $E = \dfrac{1}{\cos^2(\lambda x)} \exp\Big[-\dfrac{a}{2\lambda}\cos(2\lambda x)\Big].$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda\sin(\lambda x)y^2 + a\cos^n(\lambda x)y - a\cos^{n-1}(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{\cos(\lambda x)[y\cos(\lambda x) - 1]} + \lambda\int \frac{E\sin(\lambda x)}{\cos^2(\lambda x)}\,dx,$$

где $E = \exp\Big[a\int \cos^n(\lambda x)\,dx\Big].$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda\sin(\lambda x)y^2 + a\sin(\lambda x)y - a\operatorname{tg}(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{\cos(\lambda x)[y\cos(\lambda x) - 1]} + \lambda\int \frac{E\sin(\lambda x)}{\cos^2(\lambda x)}\,dx,$$

где $E = \exp\Big[-\dfrac{a}{\lambda}\cos(\lambda x)\Big].$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda\sin(\lambda x)y^2 + ax^n\cos(\lambda x)y - ax^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{\cos(\lambda x)[y\cos(\lambda x) - 1]} + \lambda\int \frac{E\sin(\lambda x)}{\cos^2(\lambda x)}\,dx,$$

где $E = \exp\Big[a\int x^n\cos(\lambda x)\,dx\Big].$

26. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - ax^{k+1}(\sin x)^m y + a(\sin x)^m]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int \frac{E\,dx}{x^{k+2}},$$

где $E = \exp\Big[a\int x^{k+1}(\sin x)^m\,dx\Big].$

27. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - ax^{k+1}(\operatorname{tg} x)^m y + a(\operatorname{tg} x)^m]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y-1)} - (k+1)\int \frac{E\,dx}{x^{k+2}},$$

где $E = \exp\Bigl[a\int x^{k+1}(\operatorname{tg} x)^m\,dx\Bigr]$.

28. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a\sin^k(\lambda x+\mu)(y - bx^n - c)^2 + bnx^{n-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^x}{y - bx^n - c} + a\int e^x \sin^k(\lambda x+\mu)\,dx.$$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a\operatorname{tg}^n(\lambda x)y^2 - ab^2\operatorname{tg}^{n+2}(\lambda x) + {}$

$$+\, b\lambda\operatorname{tg}^2(\lambda x) + b\lambda]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - b\operatorname{tg}(\lambda x)} + a\int E\operatorname{tg}^n(\lambda x)\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[2ab\int \operatorname{tg}^{n+1}(\lambda x)\,dx\Bigr]$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a\operatorname{tg}^k(\lambda x+\mu)(y - bx^n - c)^2 + bnx^{n-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^x}{y - bx^n - c} + a\int e^x \operatorname{tg}^k(\lambda x+\mu)\,dx.$$

31. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a\sin^m(\lambda x)y^2 + ky + ab^2x^{2k}\sin^m(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}x^{-k}y\Bigr) - ab\int x^{k-1}\sin^m(\lambda x)\,dx.$$

32. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [a\operatorname{tg}^m(\lambda x)y^2 + ky + ab^2x^{2k}\operatorname{tg}^m(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}x^{-k}y\Bigr) - ab\int x^{k-1}\operatorname{tg}^m(\lambda x)\,dx.$$

33. $\sin^{n+1}(2x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ay^2\sin^{2n} x + b\cos^{2n} x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + n2^{n+1}v + b} - 2^{-n-1}\ln\operatorname{tg} x, \qquad v = y\operatorname{tg}^n x.$$

34. $[a\sin(\lambda x)+b]\dfrac{\partial w}{\partial x}+[y^2+c\sin(\mu x)y-d^2+cd\sin(\mu x)]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{y+d}+\int\frac{E\,dx}{a\sin(\lambda x)+b},$$

где $E=\exp\Bigl[\displaystyle\int\frac{c\sin(\mu x)-2d}{a\sin(\lambda x)+b}\,dx\Bigr].$

35. $[a\operatorname{tg}(\lambda x)+b]\dfrac{\partial w}{\partial x}+[y^2+c\operatorname{tg}(\mu x)y-d^2+cd\operatorname{tg}(\mu x)]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{y+d}+\int\frac{E\,dx}{a\operatorname{tg}(\lambda x)+b},$$

где $E=\exp\Bigl[\displaystyle\int\frac{c\operatorname{tg}(\mu x)-2d}{a\operatorname{tg}(\lambda x)+b}\,dx\Bigr].$

36. $(ax^ny^m+bx)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\cos^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{1-n}E+(n-1)a\int\frac{y^mE\,dy}{\cos^k(\lambda y)},$$

где $E=\exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int\frac{dy}{\cos^k(\lambda y)}\Bigr].$

37. $(ax^ny^m+bx)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\operatorname{tg}^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{1-n}E+(n-1)a\int\frac{y^mE\,dy}{\operatorname{tg}^k(\lambda y)},$$

где $E=\exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int\frac{dy}{\operatorname{tg}^k(\lambda y)}\Bigr].$

38. $(ax^n+bx\cos^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x}+y^k\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{1-n}E+(n-1)a\int y^{-k}E\,dy,\qquad E=\exp\Bigl[b(n-1)\int\frac{\cos^m y\,dy}{y^k}\Bigr].$$

39. $(ax^n+bx\cos^m y)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\cos^k(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=x^{1-n}E+(n-1)a\int\frac{E\,dy}{\cos^k(\lambda y)},$$

где $E=\exp\Bigl[b(n-1)\displaystyle\int\frac{\cos^m y\,dy}{\cos^k(\lambda y)}\Bigr].$

40. $\displaystyle (ax^n \cos^m y + bx)\frac{\partial w}{\partial x} + \cos^k(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{\cos^m y E\,dy}{\cos^k(\lambda y)},$$

где $\displaystyle E = \exp\left[b(n-1)\int \frac{dy}{\cos^k(\lambda y)}\right].$

41. $\displaystyle (ax^n + bx\,\mathrm{tg}^m\, y)\frac{\partial w}{\partial x} + y^k\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int y^{-k}E\,dy, \qquad E = \exp\left[b(n-1)\int y^{-k}\,\mathrm{tg}^m\, y\,dy\right].$$

42. $\displaystyle (ax^n + bx\,\mathrm{tg}^m\, y)\frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{tg}^k(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{E\,dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda y)},$$

где $\displaystyle E = \exp\left[b(n-1)\int \frac{\mathrm{tg}^m\, y\,dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda y)}\right].$

43. $\displaystyle (ax^n\,\mathrm{tg}^m\, y + bx)\frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{tg}^k(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)a\int \frac{\mathrm{tg}^m\, yE\,dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda y)},$$

где $\displaystyle E = \exp\left[b(n-1)\int \frac{dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda y)}\right].$

1.2.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda(\arcsin x)^n y - a^2 + a\lambda(\arcsin x)^n]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2ax}E}{y+a} + \int e^{-2ax}E\,dx, \qquad E = \exp\left[\lambda\int(\arcsin x)^n\,dx\right].$$

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda x(\arcsin x)^n y + \lambda(\arcsin x)^n]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \qquad E = \exp\left[\lambda\int x(\arcsin x)^n\,dx\right].$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - \lambda(\arcsin x)^n (x^{k+1}y - 1)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y-1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[\lambda\int x^{k+1}(\arcsin x)^n\,dx\Bigr]$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arcsin x)^n y^2 + ay + ab - b^2\lambda(\arcsin x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{ax}E}{y+b} + \lambda\int e^{ax}(\arcsin x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[-2b\lambda\int(\arcsin x)^n\,dx\Bigr]$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arcsin x)^n y^2 - b\lambda x^m(\arcsin x)^n y + bmx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y-bx^m} + \lambda\int(\arcsin x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[b\lambda\int x^m(\arcsin x)^n\,dx\Bigr]$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arcsin x)^n y^2 + bmx^{m-1} - \lambda b^2x^{2m}(\arcsin x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y-bm^m} = \lambda\int(\arcsin x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[2b\lambda\int x^m(\arcsin x)^n\,dx\Bigr]$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arcsin x)^n(y - ax^m - b)^2 + amx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y-ax^m-b} + \lambda\int(\arcsin x)^n\,dx.$$

8. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arcsin x)^n y^2 + ky + \lambda b^2x^{2k}(\arcsin x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{y}{bx^k}\Bigr) - \lambda b\int x^{k-1}(\arcsin x)^n\,dx.$$

9. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(\arcsin x)^m(ax^{2n}y^2 + bx^n y + c) - ny]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int\frac{dv}{av^2+bv+c} - \int x^{n-1}(\arcsin x)^m\,dx, \qquad v = x^n y.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda(\arccos x)^n y - a^2 + a\lambda(\arccos x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2ax}E}{y+a} + \int e^{-2ax}E\,dx, \qquad E = \exp\Big[\lambda\int(\arccos x)^n\,dx\Big].$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda x(\arccos x)^n y + \lambda(\arccos x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \qquad E = \exp\Big[\lambda\int x(\arccos x)^n\,dx\Big].$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - \lambda(\arccos x)^n(x^{k+1}y - 1)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y-1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[\lambda\int x^{k+1}(\arccos x)^n\,dx\Big].$

13. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arccos x)^n y^2 + ay + ab - b^2\lambda(\arccos x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{ax}E}{y+b} + \lambda\int e^{ax}(\arccos x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[-2b\lambda\int(\arccos x)^n\,dx\Big].$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arccos x)^n y^2 - b\lambda x^m(\arccos x)^n y + bmx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bx^m} + \lambda\int(\arccos x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[b\lambda\int x^m(\arccos x)^n\,dx\Big].$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arccos x)^n y^2 + bmx^{m-1} - \lambda b^2 x^{2m}(\arccos x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bm^m} = \lambda\int(\arccos x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[2b\lambda\int x^m(\arccos x)^n\,dx\Big].$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arccos x)^n(y - ax^m - b)^2 + amx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y - ax^m - b} + \lambda\int(\arccos x)^n\,dx.$$

17. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\arccos x)^n y^2 + ky + \lambda b^2 x^{2k}(\arccos x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Big(\frac{y}{bx^k}\Big) - \lambda b\int x^{k-1}(\arccos x)^n\,dx.$$

18. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(\arccos x)^m(ax^{2n}y^2 + bx^n y + c) - ny]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int\frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{n-1}(\arccos x)^m\,dx, \qquad v = x^n y.$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda(\operatorname{arctg} x)^n y - a^2 + a\lambda(\operatorname{arctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2ax}E}{y+a} + \int e^{-2ax}E\,dx, \qquad E = \exp\Big[\lambda\int(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Big].$$

20. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda x(\operatorname{arctg} x)^n y + \lambda(\operatorname{arctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \qquad E = \exp\Big[\lambda\int x(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Big].$$

21. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - \lambda(\operatorname{arctg} x)^n(x^{k+1}y - 1)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[\lambda\int x^{k+1}(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Big]$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arctg} x)^n y^2 + ay + ab - b^2\lambda(\operatorname{arctg} x)^n n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{ax}E}{y+b} + \lambda\int e^{ax}(\operatorname{arctg} x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[-2b\lambda\int(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Big]$.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arctg} x)^n y^2 - b\lambda x^m(\operatorname{arctg} x)^n y + bmx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bx^m} + \lambda\int(\operatorname{arctg} x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[b\lambda\int x^m(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Big]$.

24. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arctg} x)^n y^2 + bmx^{m-1} - \lambda b^2 x^{2m}(\operatorname{arctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - bm^m} + \lambda \int (\operatorname{arctg} x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[2b\lambda \int x^m (\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Bigr]$.

25. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arctg} x)^n (y - ax^m - b)^2 + amx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y - ax^m - b} + \lambda \int (\operatorname{arctg} x)^n\,dx.$$

26. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arctg} x)^n y^2 + ky + \lambda b^2 x^{2k}(\operatorname{arctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{y}{bx^k}\Bigr) - \lambda b \int x^{k-1} (\operatorname{arctg} x)^n\,dx.$$

27. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(\operatorname{arctg} x)^m (ax^{2n}y^2 + bx^n y + c) - ny]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{n-1} (\operatorname{arctg} x)^m\,dx, \qquad v = x^n y.$$

28. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda(\operatorname{arcctg} x)^n y - a^2 + a\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2ax}E}{y + a} + \int e^{-2ax} E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\lambda \int (\operatorname{arcctg} x)^n\,dx\Bigr].$$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + \lambda x(\operatorname{arcctg} x)^n y + \lambda(\operatorname{arcctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(xy + 1)} + \int x^{-2} E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\lambda \int x(\operatorname{arcctg} x)^n\,dx\Bigr].$$

30. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(k+1)x^k y^2 - \lambda(\operatorname{arcctg} x)^n (x^{k+1}y - 1)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1) \int x^{-k-2} E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[\lambda \int x^{k+1} (\operatorname{arcctg} x)^n\,dx\Bigr]$.

31. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n y^2 + ay + ab - b^2\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{ax}E}{y+b} + \lambda\int e^{ax}(\operatorname{arcctg} x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[-2b\lambda\int(\operatorname{arcctg} x)^n\,dx\Big]$.

32. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n y^2 - b\lambda x^m(\operatorname{arcctg} x)^n y + bmx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y-bx^m} + \lambda\int(\operatorname{arcctg} x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[b\lambda\int x^m(\operatorname{arcctg} x)^n\,dx\Big]$.

33. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n y^2 + bmx^{m-1} - \lambda b^2x^{2m}(\operatorname{arcctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y-bm^m} + \lambda\int(\operatorname{arcctg} x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\Big[2b\lambda\int x^m(\operatorname{arcctg} x)^n\,dx\Big]$.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n(y - ax^m - b)^2 + amx^{m-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y-ax^m-b} + \lambda\int(\operatorname{arcctg} x)^n\,dx.$$

35. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda(\operatorname{arcctg} x)^n y^2 + ky + \lambda b^2x^{2k}(\operatorname{arcctg} x)^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \operatorname{arcctg}\Big(\frac{y}{bx^k}\Big) - \lambda b\int x^{k-1}(\operatorname{arcctg} x)^n\,dx.$$

36. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(\operatorname{arcctg} x)^m(ax^{2n}y^2 + bx^n y + c) - ny]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int\frac{dv}{av^2+bv+c} - \int x^{n-1}(\operatorname{arcctg} x)^m\,dx, \qquad v = x^n y.$$

1.2.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \displaystyle\int\frac{dx}{f(x)} - \int\frac{dy}{g(y)}$.

2. $$f(x)\frac{\partial w}{\partial x}+[g(x)y+h(x)]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=e^{-F}y-\int e^{-F}\frac{h(x)}{f(x)}\,dx,\qquad F(x)=\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx.$$

3. $$f(x)\frac{\partial w}{\partial x}+[g(x)y+h(x)y^n]\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=e^{-F}y^{1-n}-(1-n)\int e^{-F}\frac{h(x)}{f(x)}\,dx,\qquad F(x)=(1-n)\int\frac{g(x)}{f(x)}\,dx.$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x}+f\Big(\frac{x}{y}\Big)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=\int\frac{dv}{f(v)-v}-\ln|x|,\qquad v=\frac{y}{x}.$$

5. $$f_y\frac{\partial w}{\partial x}-f_x\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Здесь f_x и f_y — частные производные функции $f=f(x,y)$ соответственно по переменным x и y.

Общее решение: $w=\Phi(f(x,y))$, где $\Phi=\Phi(\xi)$ — произвольная функция.

► *В следующих уравнениях 6–50 функции $f=f(x)$, $g=g(x)$, $h=h(x)$ — произвольные функции переменной x; a, b, c, n, λ — произвольные параметры.*

6. $$\frac{\partial w}{\partial x}+(y^2+fy-a^2-af)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{e^{2ax}E}{y-a}+\int e^{2ax}E\,dx,\qquad E=\exp\Big(\int f\,dx\Big).$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x}+(fy^2+ay-ab-b^2f)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{e^{2ax}E}{y-b}+\int e^{2ax}fE\,dx,\qquad E=\exp\Big(2b\int f\,dx\Big).$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x}+(y^2+xfy+f)\frac{\partial w}{\partial y}=0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi=\frac{E}{x(xy+1)}+\int x^{-2}E\,dx,\qquad E=\exp\Big(\int xf\,dx\Big).$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 - ax^n fy + anx^{n-1})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ax^n} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(a\int x^n f\,dx\Bigr).$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + anx^{n-1} - a^2x^{2n}f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ax^n} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2a\int x^n f\,dx\Bigr).$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [(n+1)x^n y^2 - x^{n+1}fy + f]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x^{n+1}(x^{n+1}y - 1)} - (n+1)\int x^{-n-2}E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl(\int x^{n+1} f\,dx\Bigr).$

12. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + ny + ax^{2n}f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $a > 0$:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{y}{\sqrt{a}\,x^n}\Bigr) - \sqrt{a}\int x^{n-1} f\,dx.$$

2°. Главный интеграл при $a < 0$:

$$\Xi = \operatorname{Arth}\Bigl(\frac{y}{\sqrt{|a|}\,x^n}\Bigr) + \sqrt{|a|}\int x^{n-1} f\,dx.$$

13. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [x^{2n}fy^2 + (ax^n f - n)y + bf]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v^2 + av + b} - \int x^{n-1} f\,dx, \qquad v = x^n y.$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + gy - a^2 f - ag)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\int (2af + g)\,dx.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + gy + anx^{n-1} - ax^n g - a^2x^{2n}f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ax^n} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\int (2ax^n f + g)\,dx\Bigr].$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - ax^n gy + anx^{n-1} + a^2x^{2n}(g - f)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ax^n} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[a\int x^n(2f - g)\,dx\Bigr].$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - (f'_x y^2 - fgy + g)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{f(fy - 1)} - \int \frac{f'_x E}{f^2}\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(\int fg\,dx\Bigr).$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 - fgy + g'_x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - g} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(\int fg\,dx\Bigr).$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [g(y - f)^2 + f'_x]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл: $\Xi = \dfrac{1}{y - f} + \displaystyle\int g\,dx.$

20. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(\dfrac{f'_x}{g}y^2 - \dfrac{g'_x}{f}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{f(fy + g)} + \int \frac{f'_x\,dx}{f^2 g}.$$

21. $f^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + [f'_x y^2 - g(y - f)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{f^2E}{y - f} + \int f^2E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(-\int \frac{g dx}{f^2}\Bigr).$$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(y^2 - \dfrac{f''_{xx}}{f}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{f(fy + f'_x)} + \int \frac{dx}{f^2}.$$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{\lambda x}y^2 + ae^{\lambda x}fy + \lambda f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{e^{-2\lambda x}E}{ay + \lambda e^{-\lambda x}} + \int e^{-\lambda x}E\,dx, \quad E = \exp\Bigl(a\int e^{\lambda x}f\,dx\Bigr).$$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 - ae^{\lambda x}fy + a\lambda e^{\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x}} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(a\int e^{\lambda x} f\,dx\Bigr).$$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + a\lambda e^{\lambda x} - a^2e^{2\lambda x}f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x}} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2a\int e^{\lambda x} f\,dx\Bigr).$$

26. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + \lambda y + ae^{2\lambda x}f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $a > 0$:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{e^{-\lambda x}y}{\sqrt{a}}\Bigr) - \sqrt{a}\int e^{\lambda x} f\,dx.$$

2°. Главный интеграл при $a < 0$:

$$\Xi = \operatorname{Arth}\Bigl(\frac{e^{-\lambda x}y}{\sqrt{|a|}}\Bigr) + \sqrt{|a|}\int e^{\lambda x} f\,dx.$$

27. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - (ae^{\lambda x} + b)fy + a\lambda e^{\lambda x}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x} - b} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\int (ae^{\lambda x} + b)f\,dx\Bigr].$$

28. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [e^{\lambda x}fy^2 + (af - \lambda)y + be^{-\lambda x}f]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v^2 + av + b} - \int f(x)\,dx, \qquad v = e^{\lambda x}y.$$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + gy + a\lambda e^{\lambda x} - ae^{\lambda x}g - a^2e^{2\lambda x}f)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x}} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[\int (2ae^{\lambda x}f - g)\,dx\Bigr].$$

30. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - ae^{\lambda x}gy + a\lambda e^{\lambda x} + a^2e^{2\lambda x}(g - f)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x}} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(a\int e^{\lambda x} g\,dx\Bigr).$$

31. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + 2a\lambda x e^{\lambda x^2} - a^2 f e^{2\lambda x^2})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ae^{\lambda x^2}} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2a\int e^{\lambda x^2} f\,dx\Bigr).$$

32. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + 2\lambda xy + afe^{2\lambda x^2})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $a > 0$:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{e^{-\lambda x^2} y}{\sqrt{a}}\Bigr) - \sqrt{a}\int e^{\lambda x^2} f\,dx.$$

2°. Главный интеграл при $a < 0$:

$$\Xi = \operatorname{Arth}\Bigl(\frac{e^{-\lambda x^2} y}{\sqrt{|a|}}\Bigr) + \sqrt{|a|}\int e^{\lambda x^2} f\,dx.$$

33. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (f'_x y^2 + ae^{\lambda x} fy + ae^{\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{f(fy+1)} + \int \frac{f'_x E}{f^2}\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(a\int e^{\lambda x} f\,dx\Bigr).$$

34. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fy^2 + g'_x y + afe^{2g})\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

1°. Главный интеграл при $a > 0$:

$$\Xi = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{e^{-g} y}{\sqrt{a}}\Bigr) - \sqrt{a}\int fe^{g}\,dx.$$

2°. Главный интеграл при $a < 0$:

$$\Xi = \operatorname{Arth}\Bigl(\frac{e^{-g} y}{\sqrt{|a|}}\Bigr) + \sqrt{|a|}\int fe^{g}\,dx.$$

35. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a(af + \lambda)\operatorname{th}^2(\lambda x) + a\lambda]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\operatorname{th}(\lambda x)} + \int fE\,dx, \quad E = \exp\Bigl[2a\int f\operatorname{th}(\lambda x)\,dx\Bigr].$$

36. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a(af + \lambda)\operatorname{cth}(2(\lambda x) + a\lambda]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\operatorname{cth}(\lambda x)} + \int fE\,dx, \quad E = \exp\Bigl[2a\int f\operatorname{cth}(\lambda x)\,dx\Bigr].$$

37. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a^2 f + a\lambda\operatorname{sh}(\lambda x) - a^2 f\operatorname{sh}^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\operatorname{ch}(\lambda x)} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[2a\int f\operatorname{ch}(\lambda x)\,dx\Bigr].$$

38. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 + a + a^2(\ln x)^2 f]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\ln x} + \int x^{-1} fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2a\int x^{-1} f \ln x\,dx\Bigr).$$

39. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [(y + a\ln x)^2 f - a]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{1}{y + a\ln x} + \int \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

40. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - ax(\ln x)fy + a\ln x + a]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - ax\ln x} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(a\int xf\ln x\,dx\Bigr).$$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - [ay^2\ln x - axy(\ln x - 1)f + f]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{x(\ln x - 1)[axy(\ln x - 1) - 1]} - \int \frac{E\ln x dx}{x^2(\ln x - 1)^2},$$

где $E = \exp\Bigl[a\int xf(\ln x - 1)\,dx\Bigr].$

42. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\lambda\sin(\lambda x)y^2 + f\cos(\lambda x)y - f]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{\cos(\lambda x)[\cos(\lambda x)y - 1]} + \lambda\int \frac{\sin(\lambda x)}{\cos^2(\lambda x)}E\,dx,$$

где $E = \exp\Bigl[\int f\cos(\lambda x)\,dx\Bigr].$

43. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a^2 f + a\lambda\sin(\lambda x) + a^2 f\sin^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + a\cos(\lambda x)} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[-2a\int f\cos(\lambda x)\,dx\Bigr].$$

44. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a^2 f + a\lambda\cos(\lambda x) + a^2 f\cos^2(\lambda x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\sin(\lambda x)} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Bigl[2a\int f\sin(\lambda x)\,dx\Bigr].$$

45. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a(af - \lambda)\operatorname{tg}^2(\lambda x) + a\lambda]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y - a\operatorname{tg}(\lambda x)} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Big[2a\int f\operatorname{tg}(\lambda x)\,dx\Big].$$

46. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^2 - a(af - \lambda)\operatorname{ctg}^2(\lambda x) + a\lambda]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{y + a\operatorname{ctg}(\lambda x)} + \int fE\,dx, \qquad E = \exp\Big[-2a\int f\operatorname{ctg}(\lambda x)\,dx\Big].$$

47. $g\dfrac{\partial w}{\partial x} + [afgy^3 + (bfg^3 + g'_x)y + cfg^4]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{av^3 + bv + c} - \int fg^2\,dx, \qquad v = \frac{y}{g}.$$

48. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [fy^3 + 3fhy^2 + (g + 3fh^2)y + fh^3 + gh - h'_x]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \frac{E}{(y+h)^2} + 2\int \frac{fE}{g}\,dx, \qquad E = \exp\Big(2\int \frac{dx}{g}\Big).$$

49. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[\dfrac{g'_x}{f^2(ag+b)^3}y^3 + \dfrac{f'_x}{f}y + fg'_x\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v^3 - av + 1} - \frac{1}{a}\ln|ag + b|, \qquad v = \frac{y}{f(ag+b)}.$$

50. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \Big[(y - f)(y - g)\Big(y - \dfrac{af + bg}{a + b}\Big)h +$

$$+ \frac{y - g}{f - g}f'_x + \frac{y - f}{g - f}g'_x\Big]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = E|y - f|^a|y - g|^b\left|y - \frac{af + bg}{a + b}\right|^{-a-b}, \quad E = \exp\Big[-\frac{ab}{a+b}\int (f-g)^2h\,dx\Big].$$

51. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(ax + by + c)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad b \neq 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = b\int \frac{dv}{f(v)} - x, \qquad v = ax + by + c.$$

52. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [f(y + ax^n + b) - anx^{n-1}]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{f(v)} - x, \qquad v = y + ax^n + b.$$

53. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + yf(x^n y^m)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v[mf(v)+n]} - \ln|x|, \qquad v = x^n y^m.$$

54. $mx\dfrac{\partial w}{\partial x} - [ny - mxy^k f(x)g(x^n y^m)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int v^{\frac{1-k-m}{m}} \frac{dv}{g(v)} - \int x^{\frac{n(1-k)}{m}} f(x)\,dx, \qquad v = x^n y^m.$$

55. $y^{m-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + x^{n-1} f(ax^n + by^m)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{an + bmf(v)} - \frac{1}{n}x^n, \qquad v = ax^n + by^m.$$

56. $y^n\dfrac{\partial w}{\partial x} - [ax^n + g(x)f(y^{n+1} + ax^{n+1})]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{f(v)} + (n+1)\int g(x)\,dx, \qquad v = y^{n+1} + ax^{n+1}.$$

57. $[x^n f(y) + xg(y)]\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{1-n}E + (n-1)\int \frac{f(y)E}{h(y)}\,dy, \qquad E = \exp\left[(n-1)\int \frac{g(y)}{h(y)}\,dy\right].$$

58. $\left[f\left(\dfrac{y}{x}\right) + x^a h\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[g\left(\dfrac{y}{x}\right) + yx^{a-1} h\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{-a}E + a\int \frac{h(v)E\,dv}{g(v) - vf(v)}, \qquad v = \frac{y}{x},$$

где $E = \exp\left[a\displaystyle\int \frac{f(v)\,dv}{g(v) - vf(v)}\right].$

59. $[f(ax+by) + bxg(ax+by)]\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+ [h(ax+by) - axg(ax+by)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE - \int \frac{f(v)E\,dv}{af(v) + bh(v)}, \qquad v = ax + by,$$

где $E = \exp\left[-b\displaystyle\int \frac{g(v)\,dv}{af(v) + bh(v)}\right].$

60. $$[f(ax+by) + byg(ax+by)]\frac{\partial w}{\partial x} + [h(ax+by) - ayg(ax+by)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = yE - \int \frac{h(v)E\,dv}{af(v)+bh(v)}, \qquad v = ax+by,$$

где $E = \exp\left[a\int \frac{g(v)\,dv}{af(v)+bh(v)}\right]$.

61. $$x[f(x^n y^m) + mx^k g(x^n y^m)]\frac{\partial w}{\partial x} + y[h(x^n y^m) - nx^k g(x^n y^m)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = x^{-k}E + km\int \frac{g(v)E\,dv}{v[nf(v)+mh(v)]}, \qquad v = x^n y^m,$$

где $E = \exp\left\{k\int \frac{f(v)\,dv}{y[nf(v)+mh(v)]}\right\}$.

62. $$x[f(x^n y^m) + my^k g(x^n y^m)]\frac{\partial w}{\partial x} + y[h(x^n y^m) - ny^k g(x^n y^m)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = y^{-k}E - kn\int \frac{g(v)E\,dv}{v[nf(v)+mh(v)]}, \qquad v = x^n y^m.$$

$E = \exp\left\{k\int \frac{h(v)\,dv}{v[nf(v)+mh(v)]}\right\}$.

63. $$x[sf(x^n y^m) - mg(x^k y^s)]\frac{\partial w}{\partial x} + y[ng(x^k y^s) - kf(x^n y^m)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{vg(v)} - \int \frac{dz}{zf(z)}, \qquad v = x^k y^s, \quad z = x^n y^m.$$

64. $$[f(y) + amx^n y^{m-1}]\frac{\partial w}{\partial x} - [g(x) + anx^{n-1}y^m]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int f(y)\,dy + \int g(x)\,dx + ax^n y^m.$$

65. $$f(x,\, y)\frac{\partial w}{\partial x} - g(x,\, y)\frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad \text{где} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int_{y_0}^{y} f(x_0,\, t)\,dt + \int_{x_0}^{x} g(t,\, y)\,dt,$$

где x_0, y_0 — произвольные параметры.

66. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{-\lambda x} f(e^{\lambda x} y) \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{f(v) + \lambda v} - x, \qquad v = e^{\lambda x} y.$$

67. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{-\lambda y} f(e^{\lambda y} x) \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v[\lambda v f(v) + 1]} - \ln|x|, \qquad v = e^{\lambda y} x.$$

68. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + y f(e^{\alpha x} y^m) \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v[\alpha + m f(v)]} - x, \qquad v = e^{\alpha x} y^m.$$

69. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x^n e^{\alpha y}) \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v[n + \alpha f(v)]} - \ln|x|, \qquad v = x^n e^{\alpha y}.$$

70. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [f(x) e^{\lambda y} + g(x)] \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = e^{-\lambda y} E + \lambda \int f(x) E\, dx, \qquad E = \exp\Bigl[\lambda \int g(x)\, dx\Bigr].$$

71. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [x f(x) g(x^n e^y) - n] \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{v g(v)} - \int f(x)\, dx, \qquad v = x^n e^y.$$

72. $m\dfrac{\partial w}{\partial x} + [m y^k f(x) g(e^{\alpha x} y^m) - \alpha y] \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int v^{\frac{1-k-m}{m}} \frac{dv}{g(v)} - m \int f(x) \exp\Bigl[\frac{\alpha(1-k)}{m} x\Bigr] dx, \quad v = e^{\alpha x} y^m.$$

73. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{\alpha x - \beta y} f(a e^{\alpha x} + b e^{\beta y}) \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{a\alpha + b\beta f(v)} - \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}, \quad v = a e^{\alpha x} + b e^{\beta y}.$$

74. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+[f(y+ae^{\lambda x}+b)-a\lambda e^{\lambda x}]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\int\frac{dv}{f(v)}-x,\qquad v=y+ae^{\lambda x}+b.$$

75. $\alpha xy\dfrac{\partial w}{\partial x}+[\alpha f(x^n e^{\alpha y})-ny]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=yE-\frac{1}{\alpha}\int v^{-1}E\,dv,\quad v=x^n-e^{\alpha y},\quad E=\exp\Bigl[\frac{n}{\alpha^2}\int\frac{dv}{vf(v)}\Bigr].$$

76. $[f(ax+by)+be^{\alpha y}g(ax+by)]\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$+[h(ax+by)-ae^{\alpha y}g(ax+by)]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=e^{-\alpha y}E-\alpha a\int\frac{g(v)E\,dv}{af(v)+bh(v)},\qquad v=ax+by,$$

где $E=\exp\Bigl[\alpha\displaystyle\int\frac{h(v)\,dv}{af(v)+bh(v)}\Bigr].$

77. $[f(ax+by)+be^{\alpha x}g(ax+by)]\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$+[h(ax+by)-ae^{\alpha x}g(ax+by)]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=e^{-\alpha x}E+\alpha b\int\frac{g(v)E\,dv}{af(v)+bh(v)},\qquad v=ax+by,$$

где $E=\exp\Bigl[\alpha\displaystyle\int\frac{f(v)\,dv}{af(v)+bh(v)}\Bigr].$

78. $[e^{\alpha x}f(y)+a\beta]\dfrac{\partial w}{\partial x}-[e^{\beta y}g(x)+a\alpha]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=\int e^{-\beta y}f(y)\,dy+\int e^{-\alpha x}g(x)\,dx-ae^{-\alpha x-\beta y}.$$

79. $x[f(x^n e^{\alpha y})+\alpha yg(x^n e^{\alpha y})]\dfrac{\partial w}{\partial x}+$

$+[h(x^n e^{\alpha y})-nyg(x^n e^{\alpha y})]\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Главный интеграл:

$$\Xi=yE-\int\frac{h(v)E\,dv}{v[nf(v)+\alpha h(v)]},\qquad v=x^n e^{\alpha y},$$

где $E=\exp\Bigl\{n\displaystyle\int\frac{g(v)\,dv}{v[nf(v)+\alpha h(v)]}\Bigr\}.$

80. $$[f(e^{\alpha x}y^m) + mxg(e^{\alpha x}y^m)]\frac{\partial w}{\partial x} + y[h(e^{\alpha x}y^m) - \alpha xg(e^{\alpha x}y^m)]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = xE - \int \frac{f(v)E\,dv}{v[\alpha f(v) + mh(v)]}, \qquad v = e^{\alpha x}y^m,$$

где $E = \exp\Bigl\{-m\int \frac{g(v)\,dv}{v[\alpha f(v) + mh(v)]}\Bigr\}$.

81. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + [xyf(x)g(x^n\ln y) - ny\ln y]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{g(v)} - \int x^n f(x)\,dx, \qquad v = x^n\ln y.$$

82. $$mx(\ln y)\frac{\partial w}{\partial x} + [myf(x^ny^m) - ny\ln y]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = E\ln y - \frac{1}{m}\int v^{-1}E\,dv, \quad v = x^ny^m, \quad E = \exp\Bigl[\frac{n}{m}\int \frac{dv}{vf(v)}\Bigr].$$

83. $$x[f(x^ny^m) + mg(x^ny^m)\ln y]\frac{\partial w}{\partial x} + y[h(x^ny^m) - ng(x^ny^m)\ln y]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = E\ln y - \int \frac{h(v)E\,dv}{v[nf(v) + mh(v)]}, \qquad v = x^ny^m,$$

где $E = \exp\Bigl\{n\int \frac{g(v)\,dv}{v[nf(v) + mh(v)]}\Bigr\}$.

84. $$x[f(x^ny^m) + mg(x^ny^m)\ln x]\frac{\partial w}{\partial x} + y[h(x^ny^m) - ng(x^ny^m)\ln x]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = E\ln x - \int \frac{f(v)E\,dv}{v[nf(v) + mh(v)]}, \qquad v = x^ny^m,$$

где $E = \exp\Bigl\{-m\int \frac{g(v)\,dv}{v[nf(v) + mh(v)]}\Bigr\}$.

85. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [f(y + a\,\mathrm{tg}\,x) - a\,\mathrm{tg}^2 x]\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{a + f(v)} - x, \qquad v = y + a\,\mathrm{tg}\,x.$$

86. $\cos y\dfrac{\partial w}{\partial x} + [f(x)g(\sin x \sin y) - \operatorname{ctg} x \sin y]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{g(v)} - \int f(x)\sin x\,dx, \qquad v = \sin x \sin y.$$

87. $\sin 2x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\sin 2x \cos^2 y f(x)g(\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y) - \sin 2y]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{g(v)} - \int f(x)\operatorname{tg} x\,dx, \qquad v = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$$

88. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + [x\cos^2 y f(x)g(x^{2n}\operatorname{tg} y) - n\sin 2y]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{g(v)} - \int x^{2n} f(x)\,dx, \qquad v = x^{2n}\operatorname{tg} y.$$

89. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [\cos^2 y f(x)g(e^{2x}\operatorname{tg} y) - \sin 2y]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{g(v)} - \int e^{2x} f(x)\,dx, \qquad v = e^{2x}\operatorname{tg} y.$$

90. $e^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(\lambda x + \ln y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{e^v\,dv}{f(v) + \lambda e^v} - x, \qquad v = \lambda x + \ln y.$$

91. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{\lambda y} f(\lambda y + \ln x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Главный интеграл:

$$\Xi = \int \frac{dv}{\lambda e^v f(v) + 1} - \ln x, \qquad v = \lambda y + \ln x.$$

1.3. Линейные уравнения вида $f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)$

1.3.1. Предварительные замечания

1. Рассмотрим следующее линейное неоднородное уравнение первого порядка с двумя независимыми переменными:

$$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y). \qquad (1)$$

Общее решение уравнения (1) можно представить в виде суммы любого частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения (при $h \equiv 0$).

2. Пусть известно частное решение $u(x, y)$ (главный интеграл) соответствующего однородного уравнения

$$f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (u \not\equiv \text{const}).$$

Переходя в (1) от x, y к новым переменным x, $u = u(x, y)$, получим

$$\bar{f}(x,u)\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{h}(x,u), \tag{2}$$

где $\bar{f}(x,u) = f(x,y)$, $\bar{h}(x,u) = h(x,y)$ — коэффициенты исходного уравнения (1), записанные в переменных x, u.

Уравнение (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для $w = w(x)$ с параметром u. Его общее решение имеет вид

$$w = \int \frac{\bar{h}(x,u)}{\bar{f}(x,u)}\,dx + \Phi(u), \tag{3}$$

где Φ — произвольная функция, при вычислении интеграла u рассматривается как параметр. Для нахождения общего интеграла уравнения (1) необходимо в формуле (3) после интегрирования перейти к исходным переменным x, y. Поэтому, если частное решение соответствующего однородного уравнения известно, то решение неоднородного уравнения (1) всегда может быть найдено в квадратурах.

3. Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w) = C_1, \qquad u_2(x,y,w) = C_2$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} = \frac{dw}{h(x,y)},$$

то общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1, u_2) = 0,$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов.

4. Пусть $\zeta = \zeta(x, y, w)$ — интеграл вспомогательного линейного однородного уравнения с тремя независимыми переменными

$$f(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + h(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial w} = 0. \tag{4}$$

Тогда интеграл $w(x, y)$ исходного неоднородного уравнения (1) можно получить путем разрешения алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\zeta(x,y,w) = 0 \qquad (\zeta'_w \neq 0)$$

относительно w.

О решении уравнений вида (4) см. в разд. 2.1.

1.3.2. Уравнения, содержащие степенные функции

Обозначение: $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная функция аргумента z

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c.$

Уравнение цилиндрической поверхности.

Две формы представления общего решения:

$$w = \frac{c}{a}x + \Phi(bx - ay), \qquad w = \frac{c}{b}y + \Phi(bx - ay).$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^2 - y^2.$

Общее решение: $w = \dfrac{1}{3ab}(bx^3 - ay^3) + \Phi(bx - ay).$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^n + dy^m.$

Общее решение:

$$w = \Phi(bx - ay) + \frac{c}{a}f_{n+1}(x) + \frac{d}{b}f_{m+1}(y),$$

где

$$f_\lambda(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}z^\lambda & \text{при } \lambda \neq 0, \\ \ln|z| & \text{при } \lambda = 0. \end{cases}$$

4. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^n y.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c[a(n+2)y - bx]x^{n+1}}{a^2(n+1)(n+2)} + \Phi(bx - ay) & \text{при } n \neq -1, -2; \\ \dfrac{bc}{a^2}x\bigl(1 - \ln|x|\bigr) + \dfrac{c}{a}y\ln|x| + \Phi(bx - ay) & \text{при } n = -1; \\ \dfrac{bc}{a^2}\bigl(1 + \ln|x|\bigr) - \dfrac{cy}{ax} + \Phi(bx - ay) & \text{при } n = -2. \end{cases}$$

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax.$

Общее решение: $w = ax + \Phi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = a\sqrt{x^2 + y^2}.$

Общее решение: $w = a\sqrt{x^2 + y^2} + \Phi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

7. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = a(x^2 + y^2)^s.$

Общее решение: $w = \dfrac{a}{2s}(x^2 + y^2)^s + \Phi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

8. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^n y^m.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{an+bm}x^n y^m + \Phi\bigl(y^a x^{-b}\bigr) & \text{при } an+bm \neq 0; \\ \dfrac{c}{a}x^n y^m \ln x + \Phi\bigl(y^a x^{-b}\bigr) & \text{при } an+bm = 0. \end{cases}$$

9. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^n + dy^m.$

Частный случай уравнения 1.3.8.11.

Общее решение при n, $m \neq 0$:

$$w = \frac{c}{an}x^n + \frac{d}{bm}y^m + \Phi\bigl(y^a x^{-b}\bigr).$$

10. $mx\dfrac{\partial w}{\partial x} + ny\dfrac{\partial w}{\partial y} = (ax^n + by^m)^k.$

Общее решение:

$$w = \frac{a}{mnk}(ax^n + by^m)^k + \Phi\bigl(y^m x^{-n}\bigr).$$

11. $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + axy\dfrac{\partial w}{\partial y} = by^2.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{b}{2a-1}\dfrac{y^2}{x} + \Phi(x^{-a}y) & \text{при } a \neq 1/2; \\ b\dfrac{y^2}{x}\ln|x| + \Phi(x^{-1/2}y) & \text{при } a = 1/2. \end{cases}$$

12. $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + axy\dfrac{\partial w}{\partial y} = y^2(ax + by).$

Общее решение:

$$w = \frac{(ax+by)y^2}{2x} + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

13. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + by^m\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^k + dy^s.$

Частный случай уравнения 1.3.8.11.

Общее решение при $n \neq 1$, $m \neq 1$, $k - n \neq -1$, $s - m \neq -1$:

$$w = \frac{c}{a(k-n+1)}x^{k-n+1} + \frac{d}{b(s-m+1)}y^{s-m+1} + \Phi(u),$$

где

$$u = \frac{1}{a(1-n)}x^{1-n} - \frac{1}{b(1-m)}y^{1-m}.$$

14. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^m y\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^k y^s + d.$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^m$, $h(x,y) = cx^k y^s + d$.

15. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(bx^m y + cx^k\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} = sx^p y^q + d.$

Частный случай уравнения 1.3.8.13 при $f(x) = ax^n$, $g_1(x) = bx^m$, $g_0(x) = cx^k$, $h(x,y) = sx^p y^q + d$.

16. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^m y^k \dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^p y^q + s.$

Частный случай уравнения 1.3.8.14 при $f(x) = ax^n$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = bx^m y^k$, $h(x,y) = cx^p y^q + s$.

1.3.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\exp(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\alpha + b\beta}\exp(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha + b\beta \neq 0. \\ \dfrac{c}{a} x\exp(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha + b\beta = 0. \end{cases}$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = ce^{\lambda x} + de^{\mu y}.$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}e^{\lambda x} + \frac{d}{b\mu}e^{\mu y} + \Phi(bx - ay).$$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = cye^{\lambda x} + dxe^{\mu y}.$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}e^{\lambda x}\left(y - \frac{d}{a\lambda}\right) + \frac{d}{b\mu}e^{\mu y}\left(x - \frac{a}{b\mu}\right) + \Phi(bx - ay).$$

4. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\exp(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\exp(\lambda x + \mu y) + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = axe^{\lambda x} + bye^{\mu y}.$

Общее решение:

$$w = \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} + \frac{b}{\mu}e^{\mu y} + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = aye^{\lambda x} + bxe^{\mu y}.$

Общее решение:

$$w = \frac{ay}{\lambda x}e^{\lambda x} + \frac{bx}{\mu y}e^{\mu y} + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

7. $\quad y\dfrac{\partial w}{\partial x} + ax\dfrac{\partial w}{\partial y} = by\exp(y^2 - ax^2).$

Общее решение: $w = bx\exp(y^2 - ax^2) + \Phi(y^2 - ax^2)$.

8. $\quad x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + xy\dfrac{\partial w}{\partial y} = ay^2\exp(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \frac{ay^2}{x(\lambda x + \mu y)}\exp(\lambda x + \mu y) + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

9. $\quad ae^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\exp(\gamma x - \beta y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a(\gamma-\alpha)}e^{(\gamma-\alpha)x}\left[e^{-\beta y} + \dfrac{b\beta e^{-\alpha x}}{a(\gamma - 2\alpha)}\right] + \Phi(u) & \text{при } \gamma \neq \alpha,\ 2\alpha; \\ \dfrac{c}{a}\left[xe^{-\beta y} - \dfrac{b\beta}{a\alpha^2}(\alpha x + 1)e^{-\alpha x}\right] + \Phi(u) & \text{при } \gamma = \alpha; \\ \dfrac{c}{a\alpha}\left[e^{\alpha x - \beta y} + \dfrac{b\beta}{a\alpha}(\alpha x - 1)\right] + \Phi(u) & \text{при } \gamma = 2\alpha, \end{cases}$$

где

$$u = \frac{1}{\beta b}e^{\beta y} - \frac{1}{a\alpha}e^{\alpha x}.$$

10. $\quad ae^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\exp(\gamma x - 2\beta y).$

Обозначим $u = \dfrac{1}{\beta b}e^{\beta y} - \dfrac{1}{a\alpha}e^{\alpha x}$.

1°. Общее решение при $\gamma \neq \alpha$, $\gamma \neq 2\alpha$, $\gamma \neq 3\alpha$:

$$w = \frac{c}{a(\gamma-\alpha)}\left[e^{-2\beta y} + \frac{2b\beta}{a(\gamma-2\alpha)}e^{-\alpha x - \beta y} + \right.$$
$$\left. + \frac{2b^2\beta^2}{a^2(\gamma-2\alpha)(\gamma-3\alpha)}e^{-2\alpha x}\right]e^{(\gamma-\alpha)x} + \Phi(u).$$

2°. Общее решение при $\gamma = \alpha$:

$$w = \frac{c}{a}\left[xe^{-2\beta y} - \frac{2b\beta}{a\alpha^2}(\alpha x + 1)e^{-\alpha x - \beta y} + \frac{b^2\beta^2}{a^2\alpha^3}\left(\alpha x + \frac{3}{2}\right)e^{-2\alpha x}\right] + \Phi(u).$$

3°. Общее решение при $\gamma = 2\alpha$:

$$w = \frac{c}{a\alpha}\left[e^{\alpha x - \beta y} + \frac{2b\beta}{a\alpha}(\alpha x - 1)\right]e^{-\beta y} + \Phi(u).$$

4°. Общее решение при $\gamma = 3\alpha$:

$$w = \frac{c}{a\alpha}\left[\frac{1}{2}e^{2(\alpha x - \beta y)} + \frac{b\beta}{a\alpha}e^{\alpha x - \beta y} + \frac{b^2\beta^2}{a^2\alpha^2}\left(\alpha x - \frac{3}{2}\right)\right] + \Phi(u).$$

11. $\quad ae^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = ce^{\gamma x} + se^{\mu y}.$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = ae^{\alpha x}$, $g(y) = be^{\beta y}$, $h_1(x) = ce^{\gamma x}$, $h_2(y) = se^{\mu y}$.

12. $$ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + \left(be^{\gamma x} + ce^{\lambda y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} = se^{\mu x} + ke^{\delta y} + p.$$

Частный случай уравнения 1.3.8.15 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) = be^{\gamma x}$, $g_0(x) = c$, $h(x,y) = se^{\mu x} + ke^{\delta y} + p$.

13. $$ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + \left(be^{\gamma x} + ce^{\lambda y}\right)\frac{\partial w}{\partial y} = se^{\mu x+\delta y} + k.$$

Частный случай уравнения 1.3.8.15 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) = be^{\gamma x}$, $g_0(x) = c$, $h(x,y) = se^{\mu x+\delta y} + k$.

14. $$ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\gamma x+\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y} = ce^{\mu x+\delta y} + k.$$

Частный случай уравнения 1.3.8.15 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = be^{\gamma x}$, $h(x,y) = ce^{\mu x+\delta y} + k$.

1.3.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}(\lambda x) + k\,\mathrm{sh}(\mu y).$$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\,\mathrm{ch}(\mu y) + \Phi(bx - ay).$$

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}(\lambda x) + k\,\mathrm{ch}(\mu y).$$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\,\mathrm{sh}(\mu y) + \Phi(bx - ay).$$

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y).$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

4. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y).$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

5. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{th}(\lambda x) + k\,\mathrm{th}(\mu y).$$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}\ln\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\ln\mathrm{ch}(\mu y) + \Phi(bx - ay).$$

6. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{cth}(\lambda x) + k\,\mathrm{cth}(\mu y).}$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}\ln\bigl|\mathrm{sh}(\lambda x)\bigr| + \frac{k}{b\mu}\ln\bigl|\mathrm{sh}(\mu y)\bigr| + \Phi(bx - ay).$$

7. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{th}(\lambda x + \mu y).}$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\,\mathrm{th}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

8. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{cth}(\lambda x + \mu y).}$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\bigl|\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)\bigr| + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\,\mathrm{cth}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

9. $\boldsymbol{x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y).}$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y) + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

10. $\boldsymbol{x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y).}$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y) + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

11. $\boldsymbol{x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{th}(\lambda x + \mu y).}$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y) + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

12. $\boldsymbol{x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{cth}(\lambda x + \mu y).}$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\bigl|\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)\bigr| + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

13. $\boldsymbol{a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}^m(\mu x) + s\,\mathrm{sh}^k(\beta y).}$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{sh}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{sh}^m(\mu x) + s\,\mathrm{sh}^k(\beta y)$.

14. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}^m(\mu x) + s\,\mathrm{sh}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{sh}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{sh}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{sh}^k(\beta y)$.

15. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}^m(\mu x) + s\,\mathrm{ch}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{ch}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{ch}^m(\mu x) + s\,\mathrm{ch}^k(\beta y)$.

16. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}^m(\mu x) + s\,\mathrm{ch}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{ch}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{ch}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{ch}^k(\beta y)$.

17. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{th}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{th}^m(\mu x) + s\,\mathrm{th}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{th}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{th}^m(\mu x) + s\,\mathrm{th}^k(\beta y)$.

18. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{th}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{th}^m(\mu x) + s\,\mathrm{th}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{th}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{th}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{th}^k(\beta y)$.

19. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{cth}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{cth}^m(\mu x) + s\,\mathrm{cth}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{cth}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{cth}^m(\mu x) + s\,\mathrm{cth}^k(\beta y)$.

20. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{cth}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{cth}^m(\mu x) + s\,\mathrm{cth}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{cth}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{cth}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{cth}^k(\beta y)$.

1.3.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\ln(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} c\dfrac{\alpha x + \beta y}{a\alpha + b\beta}\bigl[\ln(\alpha x + \beta y) - 1\bigr] + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha \neq -b\beta, \\ \dfrac{c}{a}x\ln(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha = -b\beta. \end{cases}$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\ln(\alpha x)+k\ln(\beta y).$

Общее решение:

$$w=\frac{c}{a\alpha}x\big[\ln(\alpha x)-1\big]+\frac{k}{b\beta}y\big[\ln(\beta y)-1\big]+\Phi(bx-ay).$$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=c(\alpha x+\beta y)^m\ln(\alpha x+\beta y).$

1°. Общее решение при $a\alpha+b\beta\neq 0$:

$$w=\frac{c(\alpha x+\beta y)^{m+1}}{(m+1)(a\alpha+b\beta)}\left[\ln(\alpha x+\beta y)-\frac{1}{m+1}\right]+\Phi(bx-ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha+b\beta=0$:

$$w=\frac{c}{a}x(\alpha x+\beta y)^m\ln(\alpha x+\beta y)+\Phi(bx-ay).$$

4. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=bx^m\ln(\alpha x+\beta y).$

Общее решение:

$$w=\frac{bx^m}{m}\left[\ln(\alpha x+\beta y)-\frac{1}{m}\right]+\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=bx\ln(\alpha x)+cy\ln(\beta y).$

Общее решение:

$$w=bx\big[\ln(\alpha x)-1\big]+cy\big[\ln(\beta y)-1\big]+\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=by\ln(\alpha x)+cx\ln(\beta y).$

Общее решение:

$$w=by\big[\ln(\alpha x)-1\big]+cx\big[\ln(\beta y)-1\big]+\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

7. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x}+by\dfrac{\partial w}{\partial y}=x^k(n\ln x+m\ln y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.7 при $f(u)=\ln u$.

8. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\ln^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\ln^m(\mu x)+s\ln^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x)=a$, $g_1(x)\equiv 0$, $g_0(x)=b\ln^n(\lambda x)$, $h(x,y)=c\ln^m(\mu x)+s\ln^k(\beta y)$.

9. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\ln^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\ln^m(\mu x)+s\ln^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x)=a$, $g(y)=b\ln^n(\lambda y)$, $h_1(x)=c\ln^m(\mu x)$, $h_2(y)=s\ln^k(\beta y)$.

1.3.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\sin(\lambda x) + k\sin(\mu y).$

Общее решение:

$$w = -\frac{c}{a\lambda}\cos(\lambda x) - \frac{k}{b\mu}\cos(\mu y) + \Phi(bx - ay).$$

2. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\cos(\lambda x) + k\cos(\mu y).$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}\sin(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\sin(\mu y) + \Phi(bx - ay).$$

3. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\sin(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} -\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\cos(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\sin(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

4. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\cos(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\sin(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\cos(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

5. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{tg}(\lambda x) + k\,\mathrm{tg}(\mu y).$

Общее решение:

$$w = -\frac{c}{a\lambda}\ln\left|\cos(\lambda x)\right| - \frac{k}{b\mu}\ln\left|\cos(\mu y)\right| + \Phi(bx - ay).$$

6. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ctg}(\lambda x) + k\,\mathrm{ctg}(\mu y).$

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a\lambda}\ln\left|\sin(\lambda x)\right| + \frac{k}{b\mu}\ln\left|\sin(\mu y)\right| + \Phi(bx - ay).$$

7. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{tg}(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} -\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\left|\cos(\lambda x + \mu y)\right| + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\,\mathrm{tg}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

8. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\operatorname{ctg}(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\bigl|\sin(\lambda x + \mu y)\bigr| + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}x\operatorname{ctg}(\lambda x + \mu y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

9. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\sin(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = -\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\cos(\lambda x + \mu y) + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

10. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\cos(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\sin(\lambda x + \mu y) + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

11. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{tg}(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = -\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\bigl|\cos(\lambda x + \mu y)\bigr| + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

12. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{ctg}(\lambda x + \mu y).$

Общее решение:

$$w = \frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\bigl|\sin(\lambda x + \mu y)\bigr| + \Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

13. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\sin^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\sin^m(\mu x) + s\sin^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\sin^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\sin^m(\mu x) + s\sin^k(\beta y)$.

14. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\sin^n(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = c\sin^m(\mu x) + s\sin^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\sin^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\sin^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\sin^k(\beta y)$.

15. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\cos^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\cos^m(\mu x) + s\cos^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\cos^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\cos^m(\mu x) + s\cos^k(\beta y)$.

16. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\cos^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\cos^m(\mu x)+s\cos^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x)=a$, $g(y)=b\cos^n(\lambda y)$, $h_1(x)=c\cos^m(\mu x)$, $h_2(y)=s\cos^k(\beta y)$.

17. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{tg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\,\mathrm{tg}^m(\mu x)+s\,\mathrm{tg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x)=a$, $g_1(x)\equiv 0$, $g_0(x)=b\,\mathrm{tg}^n(\lambda x)$, $h(x,y)=c\,\mathrm{tg}^m(\mu x)+s\,\mathrm{tg}^k(\beta y)$.

18. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{tg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\,\mathrm{tg}^m(\mu x)+s\,\mathrm{tg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x)=a$, $g(y)=b\,\mathrm{tg}^n(\lambda y)$, $h_1(x)=c\,\mathrm{tg}^m(\mu x)$, $h_2(y)=s\,\mathrm{tg}^k(\beta y)$.

19. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x)+s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x)=a$, $g_1(x)\equiv 0$, $g_0(x)=b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda x)$, $h(x,y)=c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x)+s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)$.

20. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x)+s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x)=a$, $g(y)=b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda y)$, $h_1(x)=c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x)$, $h_2(y)=s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)$.

1.3.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\arcsin\dfrac{x}{\alpha}+k\arcsin\dfrac{y}{\beta}.$

Общее решение:

$$w=\frac{c}{a}\left(x\arcsin\frac{x}{\alpha}+\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)+\frac{k}{b}\left(y\arcsin\frac{y}{\beta}+\sqrt{\beta^2-y^2}\right)+\Phi(bx-ay).$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\arccos\dfrac{x}{\alpha}+k\arccos\dfrac{y}{\beta}.$

Общее решение:

$$w=\frac{c}{a}\left(x\arccos\frac{x}{\alpha}-\sqrt{\alpha^2-x^2}\right)+\frac{k}{b}\left(y\arccos\frac{y}{\beta}-\sqrt{\beta^2-y^2}\right)+\Phi(bx-ay).$$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=c\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{\alpha}+k\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{\beta}.$

Общее решение:

$$w=\frac{c}{a}\left[x\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{\alpha}-\frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2+x^2)\right]+\\ +\frac{k}{b}\left[y\,\mathrm{arctg}\,\frac{y}{\beta}-\frac{\beta}{2}\ln(\beta^2+y^2)\right]+\Phi(bx-ay).$$

4. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c \operatorname{arcctg} \dfrac{x}{\alpha} + k \operatorname{arcctg} \dfrac{y}{\beta}$.

Общее решение:

$$w = \frac{c}{a}\left[x \operatorname{arcctg} \frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2 + x^2)\right] + \\ + \frac{k}{b}\left[y \operatorname{arcctg} \frac{y}{\beta} + \frac{\beta}{2}\ln(\beta^2 + y^2)\right] + \Phi(bx - ay).$$

5. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c \arcsin(\alpha x + \beta y)$.

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \frac{c}{a\alpha + b\beta}\left[(\alpha x + \beta y)\arcsin(\alpha x + \beta y) + \sqrt{1 - (\alpha x + \beta y)^2}\right] + \Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \frac{c}{a}x \arcsin(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay).$$

6. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c \arccos(\alpha x + \beta y)$.

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \frac{c}{a\alpha + b\beta}\left[(\alpha x + \beta y)\arccos(\alpha x + \beta y) - \sqrt{1 - (\alpha x + \beta y)^2}\right] + \Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \frac{c}{a}x \arccos(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay).$$

7. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta y)$.

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \frac{c}{a\alpha + b\beta}\Big\{(\alpha x + \beta y)\operatorname{arctg}(\alpha x + \beta y) - \\ - \frac{1}{2}\ln[1 + (\alpha x + \beta y)^2]\Big\} + \Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \frac{c}{a}x \operatorname{arctg}(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay).$$

8. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c \operatorname{arcctg}(\alpha x + \beta y)$.

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \frac{c}{a\alpha + b\beta}\Big\{(\alpha x + \beta y)\operatorname{arcctg}(\alpha x + \beta y) + \\ + \frac{1}{2}\ln[1 + (\alpha x + \beta y)^2]\Big\} + \Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \frac{c}{a}x \operatorname{arcctg}(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay).$$

9. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\arcsin(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = ax\left[\arcsin(\alpha x + \beta y) + \frac{\sqrt{1-(\alpha x+\beta y)^2}}{\alpha x + \beta y}\right] + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

10. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\arccos(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = ax\left[\arccos(\alpha x + \beta y) - \frac{\sqrt{1-(\alpha x+\beta y)^2}}{\alpha x + \beta y}\right] + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{arctg}(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = ax\left\{\operatorname{arctg}(\alpha x + \beta y) - \frac{1}{2(\alpha x+\beta y)}\ln\left[x^2 + \frac{x^2}{(\alpha x + \beta y)^2}\right]\right\} + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

12. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{arcctg}(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = ax\left\{\operatorname{arcctg}(\alpha x + \beta y) + \frac{1}{2(\alpha x+\beta y)}\ln\left[x^2 + \frac{x^2}{(\alpha x + \beta y)^2}\right]\right\} + \Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

13. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arcsin^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\arcsin^m(\mu x) + s\arcsin^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arcsin^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\arcsin^m(\mu x) + s\arcsin^k(\beta y)$.

14. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arcsin^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\arcsin^m(\mu x) + s\arcsin^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\arcsin^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\arcsin^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\arcsin^k(\beta y)$.

15. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arccos^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\arccos^m(\mu x) + s\arccos^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arccos^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\arccos^m(\mu x) + s\arccos^k(\beta y)$.

16. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arccos^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\arccos^m(\mu x) + s\arccos^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\arccos^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\arccos^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\arccos^k(\beta y)$.

17. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{arctg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\operatorname{arctg}^m(\mu x) + s\operatorname{arctg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\operatorname{arctg}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\operatorname{arctg}^m(\mu x) + s\operatorname{arctg}^k(\beta y)$.

18. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{arctg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\operatorname{arctg}^m(\mu x) + s\operatorname{arctg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\operatorname{arctg}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\operatorname{arctg}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\operatorname{arctg}^k(\beta y)$.

19. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{arcctg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\operatorname{arcctg}^m(\mu x) + s\operatorname{arcctg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\operatorname{arcctg}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\operatorname{arcctg}^m(\mu x) + s\operatorname{arcctg}^k(\beta y)$.

20. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{arcctg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\operatorname{arcctg}^m(\mu x) + s\operatorname{arcctg}^k(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.3.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\operatorname{arcctg}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\operatorname{arcctg}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\operatorname{arcctg}^k(\beta y)$.

1.3.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x).$

Общее решение: $w = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int f(x)\,dx + \Phi(bx - ay)$.

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x) + g(y).$

Общее решение: $w = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int f(x)\,dx + \dfrac{1}{b}\displaystyle\int g(y)\,dy + \Phi(bx - ay)$.

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{c}{a\alpha + b\beta}\displaystyle\int f(u)\,du + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha + b\beta \neq 0, \\ \dfrac{c}{a}f(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha + b\beta = 0, \end{cases}$$

где $u = \alpha x + \beta y$. При вычислении интеграла u считается как параметр.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x, y).$

Общее решение:

$$w = \int f(x, u + bx)\,dx + \Phi(y - bx), \qquad \text{где} \quad u = y - bx.$$

При вычислении интеграла u считается как параметр.

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = xf\Big(\dfrac{y}{x}\Big).$

Общее решение:

$$w = xf\Big(\frac{y}{x}\Big) + \Phi\Big(\frac{y}{x}\Big).$$

6. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = f(x^2 + y^2).$

Общее решение:

$$w = \Phi\Big(\frac{y}{x}\Big) + \frac{1}{2}\int f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \qquad \text{где} \quad \xi = x^2 + y^2.$$

7. $\displaystyle ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} = x^k f(x^n y^m).$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\displaystyle\int x^{k-1} f\Big(x^{\frac{an+bm}{a}} u^{\frac{m}{a}}\Big)\,dx + \Phi(u) & \text{при } an \neq -bm, \\ \dfrac{1}{ak} x^k f(x^n y^m) + \Phi(u) & \text{при } an = -bm,\ k \neq 0, \\ \dfrac{1}{a} f(x^n y^m) \ln x + \Phi(u) & \text{при } an = -bm,\ k = 0, \end{cases}$$

где $u = y^a x^{-b}$. При вычислении интеграла u считается как параметр.

8. $\displaystyle mx\frac{\partial w}{\partial x} + ny\frac{\partial w}{\partial y} = f(ax^n + by^m).$

Общее решение:

$$w = \Phi\big(y^m x^{-n}\big) + \frac{1}{nm}\int f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \qquad \text{где} \quad \xi = ax^n + by^m.$$

9. $\displaystyle ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} = f(x, y).$

Общее решение:

$$w = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x} f\big(x,\, x^{b/a} u^{1/a}\big)\,dx + \Phi(u), \qquad \text{где} \quad u = y^a x^{-b}.$$

При вычислении интеграла u считается как параметр.

10. $\displaystyle x^2\frac{\partial w}{\partial x} + xy\frac{\partial w}{\partial y} = y^k f(\alpha x + \beta y).$

Общее решение:

$$w = \frac{y^k}{x(\alpha x + \beta y)^{k-1}}\int u^{k-2} f(u)\,du + \Phi\Big(\frac{y}{x}\Big), \qquad \text{где} \quad u = \alpha x + \beta y.$$

При вычислении интеграла u считается как параметр.

11. $\displaystyle f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g(y)\frac{\partial w}{\partial y} = h_1(x) + h_2(y).$

Общее решение:

$$w = \int \frac{h_1(x)}{f(x)}\,dx + \int \frac{h_2(y)}{g(y)}\,dy + \Phi\Big(\int \frac{dx}{f(x)} - \int \frac{dy}{g(y)}\Big).$$

12. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y).$

Общее решение:

$$w = \Phi(u) + \int \frac{h(x, Gu)}{f}\,dx, \qquad \text{где} \quad u = \frac{y}{G}, \quad G = \exp\Bigl(\int \frac{g}{f}dx\Bigr).$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

13. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl[g_1(x)y + g_0(x)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y).$

Общее решение:

$$w = \Phi(u) + \int \frac{h(x, Gu+Q)}{f}\,dx, \qquad u = \frac{y-Q}{G},$$

где $G = \exp\Bigl(\int \frac{g_1}{f}dx\Bigr)$, $Q = G\int \frac{g_0 dx}{fG}$. При интегрировании величина u рассматривается как параметр.

14. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl[g_1(x)y + g_0(x)y^k\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y).$

При $k = 1$ см. уравнение 1.3.8.12. При $k \neq 1$ замена $\xi = y^{1-k}$ приводит к уравнению вида 1.3.8.13:

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + (1-k)\bigl[g_1(x)\xi + g_0(x)\bigr]\frac{\partial w}{\partial \xi} = h\bigl(x, \xi^{\frac{1}{1-k}}\bigr).$$

15. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl[g_1(x) + g_0(x)e^{\lambda y}\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y).$

Замена $z = e^{-\lambda y}$ приводит к уравнению вида 1.5.8.13:

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} - \lambda\bigl[g_1(x)z + g_0(x)\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = h\Bigl(x, -\frac{1}{\lambda}z\Bigr).$$

16. $\dfrac{f(x)}{f'(x)}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{g(y)}{g'(y)}\dfrac{\partial w}{\partial y} = h\bigl(f(x) + g(y)\bigr).$

Общее решение:

$$w = \Phi(u) + \int h(\xi)\frac{d\xi}{\xi}, \qquad \text{где} \quad u = \frac{g(y)}{f(x)}, \quad \xi = f(x) + g(y).$$

1.4. Линейные уравнения вида $f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w$

1.4.1. Предварительные замечания

1. Рассмотрим линейное однородное уравнение первого порядка вида

$$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w. \qquad (1)$$

Пусть известно частное решение $u(x,y)$ (главный интеграл) соответствующего «укороченного» однородного уравнения

$$f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (u \not\equiv \text{const}).$$

Переходя в (1) от x, y к новым переменным x, $u = u(x,y)$, получим

$$\bar{f}(x,u)\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{h}(x,u)w, \tag{2}$$

где $\bar{f}(x,u) = f(x,y)$, $\bar{h}(x,u) = h(x,y)$ — коэффициенты исходного уравнения (1), записанные в переменных x, u.

Уравнение (2) можно рассматривать как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для $w = w(x)$ с параметром u. Его решение имеет вид

$$w = \Phi(u)\exp\left[\int \frac{\bar{h}(x,u)}{\bar{f}(x,u)}\,dx\right],$$

где Φ — произвольная функция, при вычислении интеграла u рассматривается как параметр. Для нахождения общего интеграла уравнения (1) необходимо в последней формуле после интегрирования перейти к исходным переменным x, y.

2. Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w) = C_1, \qquad u_2(x,y,w) = C_2$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} = \frac{dw}{h(x,y)w},$$

то общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1,u_2) = 0,$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов.

3. Замена $\zeta = \ln|w|$ приводит к линейному неоднородному уравнению

$$f(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial y} = h(x,y),$$

которое рассматривалось в разд. 1.3.

1.4.2. Уравнения, содержащие степенные функции

Обозначение: $\Phi = \Phi(z)$ — произвольная функция аргумента z

1. $\quad a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = cw.$

Две формы представления общего решения:

$$w = \exp\left(\frac{c}{a}x\right)\Phi(bx - ay), \qquad w = \exp\left(\frac{c}{b}y\right)\Phi(bx - ay).$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = (x^2 - y^2)w.$

Общее решение: $w = \exp\left[\dfrac{1}{3ab}(bx^3 - ay^3)\right]\Phi(bx - ay).$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = (cx^n + dy^m)w.$

Общее решение:

$$w = \Phi(bx - ay)\exp\left[\frac{c}{a}f_{n+1}(x) + \frac{d}{b}f_{m+1}(y)\right],$$

где

$$f_\lambda(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}z^\lambda & \text{при } \lambda \neq 0, \\ \ln|z| & \text{при } \lambda = 0. \end{cases}$$

4. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^n yw.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{c[a(n+2)y - bx]x^{n+1}}{a^2(n+1)(n+2)}\right\}\Phi(bx - ay) & \text{при } n \neq -1, -2; \\ \exp\left[\dfrac{bc}{a^2}x(1 - \ln x) + \dfrac{c}{a}y\ln x\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } n = -1; \\ \exp\left[\dfrac{bc}{a^2}(1 + \ln x) - \dfrac{cy}{ax}\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } n = -2. \end{cases}$$

5. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = bw.$

Общее решение: $w = |y|^b\Phi(|y|^a e^{-x}).$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = aw.$

Дифференциальное уравнение для однородных функций порядка a от двух независимых переменных.

Общее решение: $w = x^a\Phi(y/x).$

7. $x\left(a\dfrac{\partial w}{\partial x} - b\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = cyw.$

Общее решение: $w = \exp\left\{\dfrac{c}{a^2}\left[(bx + ay)\ln x - bx\right]\right\}\Phi(bx + ay).$

8. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = axw.$

Общее решение: $w = e^{ax}\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

9. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = a\sqrt{x^2 + y^2}\,w.$

Общее решение: $w = \exp\left(a\sqrt{x^2 + y^2}\right)\Phi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

10. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=a(x^2+y^2)^k w.$

Общее решение: $w=\exp\left[\frac{a}{2k}(x^2+y^2)^k\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$

11. $\displaystyle ax\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}=cx^n y^m w.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{c}{an+bm}x^n y^m\right)\Phi\left(y^a x^{-b}\right) & \text{при } an+bm\neq 0,\\ \exp\left(\dfrac{c}{a}x^n y^m\ln x\right)\Phi\left(y^a x^{-b}\right) & \text{при } an+bm=0.\end{cases}$$

12. $\displaystyle ax\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}=(cx^n+ky^m)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11.

Общее решение при n, $m\neq 0$:

$$w=\exp\left(\frac{c}{an}x^n+\frac{k}{bm}y^m\right)\Phi\left(y^a x^{-b}\right).$$

13. $\displaystyle mx\frac{\partial w}{\partial x}+ny\frac{\partial w}{\partial y}=(ax^n+by^m)^k w.$

Общее решение:

$$w=\exp\left[\frac{a}{mnk}(ax^n+by^m)^k\right]\Phi\left(y^m x^{-n}\right).$$

14. $\displaystyle (x-a)\frac{\partial w}{\partial x}+(y-b)\frac{\partial w}{\partial y}=w.$

Дифференциальное уравнение конической поверхности с вершиной в точке $(a,b,0)$.

Общее решение: $\Phi\left(\dfrac{w}{x-a},\dfrac{w}{y-b}\right)=0.$

15. $\displaystyle (y+ax)\frac{\partial w}{\partial x}+(y-ax)\frac{\partial w}{\partial y}=bw.$

Общее решение:

$$w=\xi^{\frac{b}{a+1}}\Phi\left(\ln\sqrt{\xi}+\frac{a+1}{2}\int\frac{dv}{v^2+(a-1)v+a}\right),$$

где $\xi=y^2+(a-1)xy+ax^2$, $v=y/x$.

16. $\displaystyle x^2\frac{\partial w}{\partial x}+axy\frac{\partial w}{\partial y}=by^2 w.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\exp\left(\dfrac{b}{2a-1}\dfrac{y^2}{x}\right)\Phi(x^{-a}y) & \text{при } a\neq 1/2,\\ \exp\left(b\dfrac{y^2}{x}\ln x\right)\Phi(x^{-1/2}y) & \text{при } a=1/2.\end{cases}$$

17. $x^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + axy\dfrac{\partial w}{\partial y} = y^2(ax+by)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{(ax+by)y^2}{2x}\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

18. $x(ay+b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ay^2 - bx)\dfrac{\partial w}{\partial y} = ayw.$

Общее решение: $w = (x+y)\Phi\left(\dfrac{ax-b}{x+y} + a\ln\left|\dfrac{x+y}{x}\right|\right).$

19. $x(ky-x+a)\dfrac{\partial w}{\partial x} - y(kx-y+a)\dfrac{\partial w}{\partial y} = b(y-x)w.$

Общее решение: $w = (x+y-a)^b\Phi\left(\dfrac{(x+y-a)^k}{xy}\right).$

20. $axy^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^2y\dfrac{\partial w}{\partial y} = (any^2 + bmx^2)w.$

Общее решение: $w = x^n y^m \Phi(ay^2 - bx^2).$

21. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + by^m\dfrac{\partial w}{\partial y} = (cx^k + dy^s)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11.

Общее решение при $n \neq 1$, $m \neq 1$, $k-n \neq -1$, $s-m \neq -1$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a(k-n+1)}x^{k-n+1} + \frac{d}{b(s-m+1)}y^{s-m+1}\right]\Phi(u),$$

где

$$u = \frac{1}{a(1-n)}x^{1-n} - \frac{1}{b(1-m)}y^{1-m}.$$

22. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^m y\dfrac{\partial w}{\partial y} = (cx^k y^s + d)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^m$, $h(x,y) = cx^k y^s + d$.

23. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + (bx^m y + cx^k)\dfrac{\partial w}{\partial y} = (sx^p y^q + d)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.13 при $f(x) = ax^n$, $g_1(x) = bx^m$, $g_0(x) = cx^k$, $h(x,y) = sx^p y^q + d$.

24. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^m y^k\dfrac{\partial w}{\partial y} = (cx^p y^q + s)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.14 при $f(x) = ax^n$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = bx^m y^k$, $h(x,y) = cx^p y^q + s$.

25. $x[x^n + (2n-1)y^n]\dfrac{\partial w}{\partial x} + y[y^n + (2n-1)x^n]\dfrac{\partial w}{\partial y} = kn(x^n + y^n)w.$

Общее решение: $w = (x^n - y^n)^k\Phi\left(\dfrac{(x^n-y^n)^2}{xy}\right).$

26. $$x[(n-2)y^n - 2x^n]\frac{\partial w}{\partial x} + y[2y^n - (n-2)x^n]\frac{\partial w}{\partial y} = \\ = \{[a(n-2)+2b]y^n - [2a+b(n-2)]x^n\}w.$$

Общее решение: $w = x^a y^b \Phi\left(\dfrac{x^n + y^n}{x^2 y^2}\right)$.

1.4.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\exp(\alpha x + \beta y)w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{c}{a\alpha + b\beta}\exp(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha + b\beta \neq 0, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\exp(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\alpha + b\beta = 0. \end{cases}$$

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = (ce^{\lambda x} + ke^{\mu y})w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{c}{a\lambda}e^{\lambda x} + \frac{k}{b\mu}e^{\mu y}\right)\Phi(bx - ay).$$

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = (cye^{\lambda x} + kxe^{\mu y})w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}e^{\lambda x}\left(y - \frac{k}{a\lambda}\right) + \frac{k}{b\mu}e^{\mu y}\left(x - \frac{a}{b\mu}\right)\right]\Phi(bx - ay).$$

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\exp(\lambda x + \mu y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\exp(\lambda x + \mu y)\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

5. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = (axe^{\lambda x} + bye^{\mu y})w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} + \frac{b}{\mu}e^{\mu y}\right)\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = (aye^{\lambda x} + bxe^{\mu y})w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{ay}{\lambda x}e^{\lambda x} + \frac{bx}{\mu y}e^{\mu y}\right)\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

7. $y\frac{\partial w}{\partial x} + ax\frac{\partial w}{\partial y} = by\exp(y^2 - ax^2)w.$

Общее решение: $w = \exp\bigl[bx\exp(y^2 - ax^2)\bigr]\Phi(y^2 - ax^2)$.

8. $ae^{\lambda x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial y} = ce^{\gamma y}w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.13 при $f(x) = ae^{\lambda x}$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = be^{\beta x}$, $h(x,y) = ce^{\gamma y}$.

9. $ae^{\lambda x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl(ce^{\gamma x} + se^{\delta y}\bigr)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = ae^{\lambda x}$, $g(x) = be^{\beta y}$, $h_1(x) = ce^{\gamma x}$, $h_2(y) = se^{\delta y}$.

10. $ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl(be^{\gamma x} + ce^{\lambda y}\bigr)\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl(se^{\mu x} + ke^{\delta y} + p\bigr)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.15 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) = be^{\gamma x}$, $g_0(x) = c$, $h(x,y) = se^{\mu x} + ke^{\delta y} + p$.

11. $ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl(be^{\gamma x} + ce^{\lambda y}\bigr)\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl(se^{\mu x+\delta y} + k\bigr)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.15 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) = be^{\gamma x}$, $g_0(x) = c$, $h(x,y) = se^{\mu x+\delta y} + k$.

12. $ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\gamma x+\lambda y}\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl(ce^{\mu x+\delta y} + k\bigr)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.15 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = be^{\gamma x}$, $h(x,y) = ce^{\mu x+\delta y} + k$.

1.4.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\,\mathrm{sh}(\lambda x) + k\,\mathrm{sh}(\mu y)\bigr]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\,\mathrm{ch}(\mu y)\right]\Phi(bx - ay).$$

2. $a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\,\mathrm{ch}(\lambda x) + k\,\mathrm{ch}(\mu y)\bigr]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\,\mathrm{sh}(\mu y)\right]\Phi(bx - ay).$$

3. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

4. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

5. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{th}(\lambda x) + k\,\mathrm{th}(\mu y)\right]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\ln\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\ln\mathrm{ch}(\mu y)\right]\Phi(bx - ay).$$

6. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{cth}(\lambda x) + k\,\mathrm{cth}(\mu y)\right]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\ln\left|\mathrm{sh}(\lambda x)\right| + \frac{k}{b\mu}\ln\left|\mathrm{sh}(\mu y)\right|\right]\Phi(bx - ay).$$

7. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{th}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\,\mathrm{th}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

8. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{cth}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\left|\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)\right|\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\,\mathrm{cth}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

9. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

10. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{ch}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:
$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\operatorname{sh}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{th}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:
$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\operatorname{ch}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

12. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{cth}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:
$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\left|\operatorname{sh}(\lambda x + \mu y)\right|\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

13. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{sh}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{sh}^m(\mu x) + s\operatorname{sh}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\operatorname{sh}^n(\lambda x)$, $h(x, y) = c\operatorname{sh}^m(\mu x) + s\operatorname{sh}^k(\beta y)$.

14. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{sh}^n(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{sh}^m(\mu x) + s\operatorname{sh}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\operatorname{sh}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\operatorname{sh}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\operatorname{sh}^k(\beta y)$.

15. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{ch}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{ch}^m(\mu x) + s\operatorname{ch}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\operatorname{ch}^n(\lambda x)$, $h(x, y) = c\operatorname{ch}^m(\mu x) + s\operatorname{ch}^k(\beta y)$.

16. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{ch}^n(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{ch}^m(\mu x) + s\operatorname{ch}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\operatorname{ch}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\operatorname{ch}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\operatorname{ch}^k(\beta y)$.

17. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{th}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{th}^m(\mu x) + s\operatorname{th}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\operatorname{th}^n(\lambda x)$, $h(x, y) = c\operatorname{th}^m(\mu x) + s\operatorname{th}^k(\beta y)$.

18. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{th}^n(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{th}^m(\mu x) + s\operatorname{th}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\operatorname{th}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\operatorname{th}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\operatorname{th}^k(\beta y)$.

19. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{cth}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{cth}^m(\mu x) + s\operatorname{cth}^k(\beta y)\right]w.$$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\operatorname{cth}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\operatorname{cth}^m(\mu x) + s\operatorname{cth}^k(\beta y)$.

20. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{cth}^n(\lambda y)\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\operatorname{cth}^m(\mu x) + s\operatorname{cth}^k(\beta y)\right]w.$$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\operatorname{cth}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\operatorname{cth}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\operatorname{cth}^k(\beta y)$.

1.4.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\ln(\alpha x + \beta y)w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{c(\alpha x+\beta y)}{a\alpha+b\beta}\left[\ln(\alpha x+\beta y)-1\right]\right\}\Phi(bx-ay) & \text{при } a\alpha \neq -b\beta, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\ln(\alpha x+\beta y)\right]\Phi(bx-ay), & \text{при } a\alpha = -b\beta. \end{cases}$$

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\ln(\alpha x) + k\ln(\beta y)\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{\frac{c}{a\alpha}x\left[\ln(\alpha x) - 1\right] + \frac{k}{b\beta}y\left[\ln(\beta y) - 1\right]\right\}\Phi(bx - ay).$$

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c(\alpha x + \beta y)^m\ln(\alpha x + \beta y)w.$$

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \exp\left\{\frac{c(\alpha x + \beta y)^{m+1}}{(m+1)(a\alpha + b\beta)}\left[\ln(\alpha x + \beta y) - \frac{1}{m+1}\right]\right\}\Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}x(\alpha x + \beta y)^m\ln(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay).$$

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = kx^m\ln(\alpha x + \beta y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{\frac{kx^m}{m}\left[\ln(\alpha x + \beta y) - \frac{1}{m}\right]\right\}\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

5. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = \left[bx\ln(\alpha x) + cy\ln(\beta y)\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{bx[\ln(\alpha x) - 1] + cy[\ln(\beta y) - 1]\right\}\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[by\ln(\alpha x) + cx\ln(\beta y)\bigr]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\bigl\{by[\ln(\alpha x) - 1] + cx[\ln(\beta y) - 1]\bigr\}\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

7. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^k(n\ln x + m\ln y)w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.7 при $f(u) = \ln u$.

8. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\ln^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\ln^m(\mu x) + s\ln^k(\beta y)\bigr]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\ln^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\ln^m(\mu x) + s\ln^k(\beta y)$.

9. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\ln^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\ln^m(\mu x) + s\ln^k(\beta y)\bigr]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\ln^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\ln^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\ln^k(\beta y)$.

1.4.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\sin(\lambda x) + k\sin(\mu y)\bigr]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[-\frac{c}{a\lambda}\cos(\lambda x) - \frac{k}{b\mu}\cos(\mu y)\Bigr]\Phi(bx - ay).$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\cos(\lambda x) + k\cos(\mu y)\bigr]w.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\frac{c}{a\lambda}\sin(\lambda x) + \frac{k}{b\mu}\sin(\mu y)\Bigr]\Phi(bx - ay).$$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\sin(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\Bigl[-\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\cos(\lambda x + \mu y)\Bigr]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \exp\Bigl[\dfrac{c}{a}x\sin(\lambda x + \mu y)\Bigr]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

4. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\cos(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\Bigl[\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\sin(\lambda x + \mu y)\Bigr]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu \neq 0, \\ \exp\Bigl[\dfrac{c}{a}x\cos(\lambda x + \mu y)\Bigr]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda + b\mu = 0. \end{cases}$$

5. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{tg}(\lambda x) + k\,\mathrm{tg}(\mu y)\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[-\frac{c}{a\lambda}\ln\left|\cos(\lambda x)\right| - \frac{k}{b\mu}\ln\left|\cos(\mu y)\right|\right]\Phi(bx - ay).$$

6. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{ctg}(\lambda x) + k\,\mathrm{ctg}(\mu y)\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\ln\left|\sin(\lambda x)\right| + \frac{k}{b\mu}\ln\left|\sin(\mu y)\right|\right]\Phi(bx - ay).$$

7. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{tg}(\lambda x + \mu y)w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[-\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\left|\cos(\lambda x + \mu y)\right|\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda \neq -b\mu, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\,\mathrm{tg}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda = -b\mu. \end{cases}$$

8. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ctg}(\lambda x + \mu y)w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{c}{a\lambda + b\mu}\ln\left|\sin(\lambda x + \mu y)\right|\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda \neq -b\mu, \\ \exp\left[\dfrac{c}{a}x\,\mathrm{ctg}(\lambda x + \mu y)\right]\Phi(bx - ay) & \text{при } a\lambda = -b\mu. \end{cases}$$

9. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\sin(\lambda x + \mu y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[-\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\cos(\lambda x + \mu y)\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\cos(\lambda x + \mu y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\sin(\lambda x + \mu y)\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{tg}(\lambda x + \mu y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[-\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\left|\cos(\lambda x + \mu y)\right|\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

12. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{ctg}(\lambda x + \mu y)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\bigl|\sin(\lambda x + \mu y)\bigr|\Bigr]\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

13. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\sin^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\sin^m(\mu x) + s\sin^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\sin^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\sin^m(\mu x) + s\sin^k(\beta y)$.

14. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\sin^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\sin^m(\mu x) + s\sin^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\sin^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\sin^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\sin^k(\beta y)$.

15. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\cos^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\cos^m(\mu x) + s\cos^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\cos^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\cos^m(\mu x) + s\cos^k(\beta y)$.

16. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\cos^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\cos^m(\mu x) + s\cos^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\cos^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\cos^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\cos^k(\beta y)$.

17. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{tg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\,\mathrm{tg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{tg}^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{tg}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{tg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{tg}^k(\beta y)$.

18. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{tg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\,\mathrm{tg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{tg}^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{tg}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{tg}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{tg}^k(\beta y)$.

19. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)$.

20. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{ctg}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{ctg}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{ctg}^k(\beta y)$.

1.4.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c \arcsin\frac{x}{\alpha} + k \arcsin\frac{y}{\beta}\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}\left(x \arcsin\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) + \frac{k}{b}\left(y \arcsin\frac{y}{\beta} + \sqrt{\beta^2 - y^2}\right)\right]\Phi(bx - ay).$$

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c \arccos\frac{x}{\alpha} + k \arccos\frac{y}{\beta}\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}\left(x \arccos\frac{x}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) + \frac{k}{b}\left(y \arccos\frac{y}{\beta} - \sqrt{\beta^2 - y^2}\right)\right]\Phi(bx - ay).$$

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha} + k \operatorname{arctg}\frac{y}{\beta}\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{\frac{c}{a}\left[x \operatorname{arctg}\frac{x}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2 + x^2)\right] + \frac{k}{b}\left[y \operatorname{arctg}\frac{y}{\beta} - \frac{\beta}{2}\ln(\beta^2 + y^2)\right]\right\}\Phi(bx - ay).$$

4. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c \operatorname{arcctg}\frac{x}{\alpha} + k \operatorname{arcctg}\frac{y}{\beta}\right]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{\frac{c}{a}\left[x \operatorname{arcctg}\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2 + x^2)\right] + \frac{k}{b}\left[y \operatorname{arcctg}\frac{y}{\beta} + \frac{\beta}{2}\ln(\beta^2 + y^2)\right]\right\}\Phi(bx - ay).$$

5. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = c \arcsin(\alpha x + \beta y)w.$$

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c(\alpha x + \beta y)}{a\alpha + b\beta}\arcsin(\alpha x + \beta y) + \frac{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta y)^2}}{a\alpha + b\beta}\right]\Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}x \arcsin(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay).$$

6. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\arccos(\alpha x + \beta y)w.$

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c(\alpha x + \beta y)}{a\alpha + b\beta}\arccos(\alpha x + \beta y) - \frac{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta y)^2}}{a\alpha + b\beta}\right]\Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}x\arccos(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay).$$

7. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{arctg}(\alpha x + \beta y)w.$

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \exp\left\{\frac{c(\alpha x + \beta y)}{a\alpha + b\beta}\,\mathrm{arctg}(\alpha x + \beta y) - \frac{\ln[1 + (\alpha x + \beta y)^2]}{2(a\alpha + b\beta)}\right\}\Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}x\,\mathrm{arctg}(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay).$$

8. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{arcctg}(\alpha x + \beta y)w.$

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \exp\left\{\frac{c(\alpha x + \beta y)}{a\alpha + b\beta}\,\mathrm{arcctg}(\alpha x + \beta y) + \frac{\ln[1 + (\alpha x + \beta y)^2]}{2(a\alpha + b\beta)}\right\}\Phi(bx - ay).$$

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}x\,\mathrm{arcctg}(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay).$$

9. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\arcsin(\alpha x + \beta y)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[ax\arcsin(\alpha x + \beta y) + ax\frac{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta y)^2}}{\alpha x + \beta y}\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

10. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\arccos(\alpha x + \beta y)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[ax\arccos(\alpha x + \beta y) - ax\frac{\sqrt{1 - (\alpha x + \beta y)^2}}{\alpha x + \beta y}\right]\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

11. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{arctg}(\alpha x + \beta y)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{ax\,\mathrm{arctg}(\alpha x + \beta y) - \frac{ax}{2(\alpha x + \beta y)}\ln\left[x^2 + \frac{x^2}{(\alpha x + \beta y)^2}\right]\right\}\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

12. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{arcctg}(\alpha x + \beta y)w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{ax\,\mathrm{arcctg}(\alpha x + \beta y) + \frac{ax}{2(\alpha x + \beta y)}\ln\left[x^2 + \frac{x^2}{(\alpha x + \beta y)^2}\right]\right\}\Phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

13. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arcsin^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\arcsin^m(\mu x) + s\arcsin^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arcsin^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\arcsin^m(\mu x) + s\arcsin^k(\beta y)$.

14. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arcsin^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\arcsin^m(\mu x) + s\arcsin^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\arcsin^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\arcsin^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\arcsin^k(\beta y)$.

15. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arccos^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\arccos^m(\mu x) + s\arccos^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arccos^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\arccos^m(\mu x) + s\arccos^k(\beta y)$.

16. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\arccos^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\arccos^m(\mu x) + s\arccos^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\arccos^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\arccos^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\arccos^k(\beta y)$.

17. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{arctg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{arctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{arctg}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{arctg}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{arctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{arctg}^k(\beta y)$.

18. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{arctg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{arctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{arctg}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{arctg}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{arctg}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{arctg}^k(\beta y)$.

19. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{arcctg}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{arcctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{arcctg}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.12 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{arcctg}^n(\lambda x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{arcctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{arcctg}^k(\beta y)$.

20. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{arcctg}^n(\lambda y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{arcctg}^m(\mu x) + s\,\mathrm{arcctg}^k(\beta y)\right]w.$

Частный случай уравнения 1.4.8.11 при $f(x) = a$, $g(y) = b\,\mathrm{arcctg}^n(\lambda y)$, $h_1(x) = c\,\mathrm{arcctg}^m(\mu x)$, $h_2(y) = s\,\mathrm{arcctg}^k(\beta y)$.

1.4.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(x)w.$

Общее решение: $w=\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Bigr]\Phi(bx-ay).$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=[f(x)+g(y)]w.$

Общее решение: $w=\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx+\frac{1}{b}\int g(y)\,dy\Bigr]\Phi(bx-ay).$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(\alpha x+\beta y)w.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\exp\Bigl[\dfrac{c}{a\alpha+b\beta}\displaystyle\int f(u)\,du\Bigr]\Phi(bx-ay) & \text{при } a\alpha+b\beta\neq 0,\\ \exp\Bigl[\dfrac{c}{a}f(\alpha x+\beta y)\Bigr]\Phi(bx-ay) & \text{при } a\alpha+b\beta=0,\end{cases}$$

где $u=\alpha x+\beta y$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(x,y)w.$

Общее решение:

$$w=\exp\Bigl[\int f(x,u+bx)\,dx\Bigr]\Phi(y-bx),\qquad \text{где}\quad u=y-bx.$$

При вычислении интеграла u считается как параметр.

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=xf\Bigl(\dfrac{y}{x}\Bigr)w.$

Общее решение:

$$w=\exp\Bigl[xf\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr)\Bigr]\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr).$$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(x^2+y^2)w.$

Общее решение:

$$w=\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr)\exp\Bigl[\frac{1}{2}\int f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\Bigr],\qquad \text{где}\quad \xi=x^2+y^2.$$

7. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x}+by\dfrac{\partial w}{\partial y}=x^kf(x^ny^m)w.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\exp\Bigl[\dfrac{1}{a}\displaystyle\int x^{k-1}f\Bigl(x^{\frac{an+bm}{a}}u^{\frac{m}{a}}\Bigr)dx\Bigr]\Phi(u) & \text{при } an\neq -bm;\\ \exp\Bigl[\dfrac{1}{ak}x^kf(x^ny^m)\Bigr]\Phi(u) & \text{при } an=-bm,\ k\neq 0;\\ x\exp\Bigl[\dfrac{1}{a}f(x^ny^m)\Bigr]\Phi(u) & \text{при } an=-bm,\ k=0,\end{cases}$$

где $u = y^a x^{-b}$. При вычислении интеграла u считается как параметр.

8. $$mx\frac{\partial w}{\partial x} + ny\frac{\partial w}{\partial y} = f(ax^n + by^m)w.$$

Общее решение:

$$w = \Phi(y^m x^{-n})\exp\left[\frac{1}{nm}\int f(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\right], \qquad \text{где} \quad \xi = ax^n + by^m.$$

9. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} = f(x,y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{1}{a}\int \frac{1}{x} f\Bigl(x,\, x^{b/a}u^{1/a}\Bigr)\,dx\right]\Phi(u), \qquad \text{где} \quad u = y^a x^{-b}.$$

При вычислении интеграла u считается как параметр.

10. $$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + xy\frac{\partial w}{\partial y} = y^k f(\alpha x + \beta y)w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{y^k}{x(\alpha x + \beta y)^{k-1}}\int u^{k-2} f(u)\,du\right]\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr), \quad \text{где } u = \alpha x + \beta y.$$

При вычислении интеграла u считается как параметр.

11. $$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g(y)\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[h_1(x) + h_2(y)\bigr]w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\int \frac{h_1(x)}{f(x)}\,dx + \int \frac{h_2(y)}{g(y)}\,dy\right]\Phi\left(\int \frac{dx}{f(x)}\,dx - \int \frac{dy}{g(y)}\,dy\right).$$

12. $$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w.$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u)\exp\left[\int \frac{h(x,\,Gu)}{f(x)}\,dx\right], \quad u = \frac{y}{G},$$

где $G = \exp\Bigl(\int \frac{g}{f}\,dx\Bigr)$. При интегрировании величина u рассматривается как параметр.

13. $$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[g_1(x)y + g_0(x)\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w.$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u)\exp\left[\int \frac{h(x,\,Gu + Q)}{f(x)}\,dx\right], \quad u = \frac{y - Q}{G},$$

где $G = \exp\Bigl(\int \frac{g_1}{f}\,dx\Bigr)$, $Q = G\int \frac{g_0\,dx}{fG}$. При интегрировании величина u рассматривается как параметр.

14. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[g_1(x)y + g_0(x)y^k\big]\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w.$

При $k = 1$ см. уравнение 1.4.8.12. При $k \neq 1$ замена $\xi = y^{1-k}$ приводит к уравнению вида 1.4.8.13:

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + (1-k)\big[g_1(x)\xi + g_0(x)\big]\frac{\partial w}{\partial \xi} = h\Big(x,\, \xi^{\frac{1}{1-k}}\Big)w.$$

15. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[g_1(x) + g_0(x)e^{\lambda y}\big]\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w.$

Замена $z = e^{-\lambda y}$ приводит к уравнению вида 1.4.8.13:

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} - \lambda\big[g_1(x)z + g_0(x)\big]\frac{\partial w}{\partial z} = h\Big(x,\, -\frac{1}{\lambda}z\Big)w.$$

16. $\dfrac{f(x)}{f'(x)}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{g(y)}{g'(y)}\dfrac{\partial w}{\partial y} = h\big(f(x) + g(y)\big)w.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u)\exp\Big[\int h(\xi)\frac{d\xi}{\xi}\Big], \qquad \text{где} \quad u = \frac{g(y)}{f(x)}, \ \xi = f(x) + g(y).$$

1.5. Линейные уравнения вида $f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h_1(x,y)w + h_0(x,y)$

1.5.1. Предварительные замечания

1. Линейное неоднородное уравнение первого порядка с двумя независимыми переменными в общем случае имеет вид

$$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h_1(x,y)w + h_0(x,y). \qquad (1)$$

Частный случай $h_1 \equiv 0$ рассматривается в разд. 1.3, а $h_0 \equiv 0$ — в разд. 1.4.

Пусть известно частное решение $u(x,y)$ (главный интеграл) соответствующего «укороченного» однородного уравнения

$$f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (u \not\equiv \text{const}). \qquad (2)$$

Переходя в (1) от x, y к новым переменным x, $u = u(x,y)$, получим

$$\bar{f}(x,u)\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{h}_1(x,u)w + \bar{h}_0(x,u),$$

где $\bar{f}(x,u) = f(x,y)$, $\bar{h}_1(x,u) = h_1(x,y)$, $\bar{h}_0(x,u) = h_0(x,y)$ — коэффициенты исходного уравнения (1), записанные в переменных x, u.

Уравнение (2) можно рассматривать как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение для $w = w(x)$ с параметром u. Его решение имеет вид

$$w = E\Big[\int \frac{\bar{h}_0(x,u)}{\bar{f}(x,u)}E^{-1}\,dx + \Phi(u)\Big], \qquad E = \exp\Big[\int \frac{\bar{h}_1(x,u)}{\bar{f}(x,u)}\,dx\Big],$$

где Φ — произвольная функция, при вычислении интеграла u рассматривается как параметр. Для нахождения общего интеграла уравнения (1) необходимо в последней формуле после интегрирования перейти к исходным переменным x, y.

2. Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w)=C_1,\qquad u_2(x,y,w)=C_2$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y)}=\frac{dy}{g(x,y)}=\frac{dw}{h_1(x,y)w+h_0(x,y)},$$

то общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1,u_2)=0,$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов.

3. Пусть $\zeta=\zeta(x,y,w)$ — интеграл вспомогательного линейного однородного уравнения с тремя независимыми переменными

$$f(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+g(x,y)\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\bigl[h_1(x,y)w+h_0(x,y)\bigr]\frac{\partial\zeta}{\partial w}=0. \qquad (3)$$

Тогда интеграл $w(x,y)$ исходного неоднородного уравнения (1) можно получить путем разрешения алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\zeta(x,y,w)=0\qquad(\zeta'_w\neq 0)$$

относительно w.

О решении уравнений вида (3) см. в разд. 2.1.

1.5.2. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}=cw+kx^ny^m.$

Две формы представления общего решения:

$$w=\exp\Bigl(\frac{c}{a}x\Bigr)\Bigl[\Phi(bx-ay)+\frac{k}{a^{m+1}}\int x^n(bx-u)^m\exp\Bigl(-\frac{c}{a}x\Bigr)\,dx\Bigr],$$

$$w=\exp\Bigl(\frac{c}{b}y\Bigr)\Bigl[\Phi(bx-ay)+\frac{k}{b^{n+1}}\int y^m(ay+u)^n\exp\Bigl(-\frac{c}{b}y\Bigr)\,dy\Bigr],$$

где $u=bx-ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=bw+cx^ny^m.$

Общее решение:

$$w=y^b\Bigl[\Phi(y^ae^{-x})+c\int y^{m-b-1}(a\ln y-\ln u)^n\,dy\Bigr],\quad\text{где}\quad u=y^ae^{-x}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = w + ax^2 + by^2 + c.$

Общее решение: $w = ax^2 + by^2 - c + x\Phi(y/x)$.

4. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = aw + bx^n y^m.$

Общее решение:

$$w = x^a\Phi\Big(\frac{y}{x}\Big) + \begin{cases} \dfrac{bx^n y^m}{m+n-a} & \text{при } m+n \neq a, \\ bx^{a-m} y^m \ln x & \text{при } m+n = a. \end{cases}$$

5. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = axw + bx^n y^m.$

Общее решение:

$$w = e^{ax}\Big[\Phi\Big(\frac{y}{x}\Big) + bx^{-m}y^m \int x^{m+n-1}e^{-ax}\,dx\Big].$$

6. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = a\sqrt{x^2+y^2}\,w + bx^n y^m.$

Общее решение:

$$w = \exp\Big(a\sqrt{x^2+y^2}\Big)\Big[\Phi\Big(\frac{y}{x}\Big) +$$
$$+ bx^{-m}y^m \int x^{m+n-1} \exp\Big(-ax\sqrt{1+u^2}\Big)dx\Big], \quad u = \frac{y}{x}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

7. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^n y^m w + px^k y^s.$

1°. Общее решение при $an + bm \neq 0$:

$$w = \exp\Big(\frac{c}{an+bm}x^n y^m\Big)\Big[\Phi\big(y^a x^{-b}\big) + \psi(x,y)\Big],$$
$$\psi = px^{-\frac{bs}{a}} y^s \int x^{\frac{bs+ak-a}{a}} \exp\Big(-\frac{c}{an+bm}u^{\frac{m}{a}} x^{\frac{an+bm}{a}}\Big)\,dx,$$

где $u = y^a x^{-b}$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2°. Общее решение при $an + bm = 0$:

$$w = \exp\Big(\frac{c}{a}x^n y^m \ln x\Big)\Big[\Phi\big(y^a x^{-b}\big) + \psi(x,y)\Big],$$
$$\psi = \begin{cases} pk^{-2}x^{\frac{ak-bs}{a}} y^s \exp\Big(-\dfrac{c}{a}x^{-\frac{bm}{a}}y^m\Big)(k\ln x - 1) & \text{при } k \neq 0, \\ \frac{1}{2}px^{-\frac{bs}{a}} y^s \exp\Big(-\dfrac{c}{a}x^{-\frac{bm}{a}}y^m\Big)(\ln x)^2 & \text{при } k = 0, \end{cases}$$

где $u = y^a x^{-b}$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

8. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} = (cx^n + py^m)w + qx^k y^s.$$

Общее решение при n, $m \neq 0$:

$$w = \exp\Bigl(\frac{c}{an}x^n + \frac{p}{bm}y^m\Bigr)\Bigl[\Phi\bigl(y^a x^{-b}\bigr) + \\ + \frac{p}{q}x^{-\frac{bs}{a}}y^s \int x^{\frac{ak-a+bs}{a}} \exp\Bigl(-\frac{c}{an}x^n - \frac{p}{bm}u^{\frac{m}{a}}x^{\frac{bm}{a}}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где $u = y^a x^{-b}$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

9. $$(x-a)\frac{\partial w}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial w}{\partial y} = w - c.$$

Дифференциальное уравнение конической поверхности с вершиной в точке (a,b,c).

Общее решение: $\Phi\Bigl(\dfrac{w-c}{x-a}, \dfrac{w-c}{y-b}\Bigr) = 0$.

10. $$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + axy\frac{\partial w}{\partial y} = by^2 w + cx^n y^m.$$

1°. Общее решение при $a \neq 1/2$:

$$w = \exp\Bigl(\frac{b}{2a-1}\frac{y^2}{x}\Bigr)\Bigl[\Phi(x^{-a}y) + \\ + cx^{-am}y^m \int x^{am+n-2} \exp\Bigl(-\frac{b}{2a-1}u^2 x^{2a-1}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где $u = x^{-a}y$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2°. Общее решение при $a = 1/2$:

$$w = \exp\Bigl(b\frac{y^2}{x}\ln x\Bigr)\Phi(x^{-1/2}y) + \frac{2cx^n y^m}{(m+2n-2)x - by^2}.$$

11. $$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + axy\frac{\partial w}{\partial y} = y^2(ax+by)w + cx^n y^m.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\frac{(ax+by)y^2}{2x}\Bigr]\Bigl\{\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \\ + cx^{-m}y^m \int x^{m+n-2} \exp\Bigl[-\frac{(a+bu)u^2x^2}{2}\Bigr]\,dx\Bigr\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

12. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x} + bx^m y\frac{\partial w}{\partial y} = cx^p y^q w + sx^\gamma y^\delta + d.$$

Частный случай уравнения 1.5.8.5 при $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^m$, $h(x,y) = cx^p y^q$, $F(x,y) = sx^\gamma y^\delta + d$.

13. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + (bx^m y + cx^k) \dfrac{\partial w}{\partial y} = sx^p y^q w + d.$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = ax^n$, $g_1(x) = bx^m$, $g_0(x) = cx^k$, $h(x,y) = sx^p y^q$, $F(x,y) = d$.

14. $ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + bx^m y^k \dfrac{\partial w}{\partial y} = cw + sx^p y^q + d.$

Частный случай уравнения 1.5.8.7 при $f(x) = ax^n$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = bx^m$, $h(x,y) = c$, $F(x,y) = sx^p y^q + d$.

1.5.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\exp(\alpha x + \beta y)w + ke^{\gamma x}.$

1°. Общее решение при $a\alpha + b\beta \neq 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\alpha + b\beta}\exp(\alpha x + \beta y)\right]\left\{\Phi(bx - ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \exp\left[\gamma x - \frac{c}{a\alpha + b\beta}e^{\frac{(a\alpha+b\beta)x-\beta u}{a}}\right] dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2°. Общее решение при $a\alpha + b\beta = 0$:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}x\exp(\alpha x + \beta y)\right]\Phi(bx - ay) + \frac{ke^{\gamma x}}{a\gamma - c\exp(\alpha x + \beta y)}.$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = (ce^{\lambda x} + se^{\mu y})w + ke^{\nu x}.$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{c}{a\lambda}e^{\lambda x} + \frac{s}{b\mu}e^{\mu y}\right)\left\{\Phi(bx - ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \exp\left[\nu x - \frac{c}{a\lambda}e^{\lambda x} - \frac{s}{b\mu}e^{\frac{\mu bx - \mu u}{a}}\right] dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\exp(\lambda x + \mu y)w + be^{\nu x}.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\exp(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + b\int \frac{1}{x}\exp\left(\nu x - \frac{a}{\lambda + \mu u}e^{(\lambda+\mu u)x}\right) dx\right\}, \quad u = \frac{y}{x}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = (axe^{\lambda x} + bye^{\mu y})w + ce^{\nu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} + \frac{b}{\mu}e^{\mu y}\right)\left[\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + c\int \exp\left(\nu x - \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} - \frac{b}{\mu}e^{\mu u x}\right)\frac{dx}{x}\right],$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

5. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = (aye^{\lambda x} + bxe^{\mu y})w + ce^{\nu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{ay}{\lambda x}e^{\lambda x} + \frac{bx}{\mu y}e^{\mu y}\right)\left[\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + {}\right.$$
$$\left. {}+ c\int \frac{1}{x}\exp\left(\nu x - \frac{au}{\lambda}e^{\lambda x} - \frac{b}{\mu u}e^{\mu u x}\right)dx\right],$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

6. $$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + xy\frac{\partial w}{\partial y} = ay^2\exp(\lambda x + \mu y)w + be^{\nu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ay^2}{x(\lambda x + \mu y)}\exp(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + {}\right.$$
$$\left. {}+ b\int \frac{1}{x^2}\exp\left[\nu x - \frac{au^2}{\lambda + \mu u}e^{(\lambda+\mu u)x}\right]dx\right\}, \quad u = \frac{y}{x}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

7. $$x^2\frac{\partial w}{\partial x} + xy\frac{\partial w}{\partial y} = (ax^2e^{\lambda x} + by^2e^{\mu y})w + ce^{\nu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left(\frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} + \frac{by}{\mu x}e^{\mu y}\right)\left[\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + c\int \exp\left(\nu x - \frac{a}{\lambda}e^{\lambda x} - \frac{bu}{\mu}e^{\mu u x}\right)\frac{dx}{x^2}\right],$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

8. $$ae^{\lambda x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial y} = ce^{\gamma y}w + se^{\mu x + \delta y}.$$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = ae^{\lambda x}$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = be^{\beta x}$, $h(x,y) = ce^{\gamma y}$, $F(x,y) = se^{\mu x + \delta y}$.

9. $$ae^{\beta x}\frac{\partial w}{\partial x} + (be^{\gamma x} + ce^{\lambda y})\frac{\partial w}{\partial y} = sw + ke^{\mu x + \delta y}.$$

Частный случай уравнения 1.5.8.8 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) = be^{\gamma x}$, $g_0(x) = c$, $h(x,y) = s$, $F(x,y) = ke^{\mu x + \delta y}$.

10. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(be^{\gamma x} + ce^{\lambda y}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y} = se^{\mu x+\delta y}w + k.$

Частный случай уравнения 1.5.8.8 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) = be^{\gamma x}$, $g_0(x) = c$, $h(x,y) = se^{\mu x+\delta y}$, $F(x,y) = k$.

11. $ae^{\beta x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\gamma x+\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = ce^{\sigma y}w + ke^{\mu x+\delta y} + d.$

Частный случай уравнения 1.5.8.8 при $f(x) = ae^{\beta x}$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = be^{\gamma x}$, $h(x,y) = ce^{\sigma y}$, $F(x,y) = ke^{\mu x+\delta y} + d$.

1.5.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{sh}(\lambda x) + d\,\mathrm{sh}(\mu y)\right]w + k\,\mathrm{sh}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{d}{b\mu}\,\mathrm{ch}(\mu y)\right]\left\{\Phi(bx-ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \mathrm{sh}(\nu x)\exp\left[-\frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x) - \frac{d}{b\mu}\,\mathrm{ch}\left(\frac{\mu}{a}(bx-u)\right)\right]dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{ch}(\lambda x) + d\,\mathrm{ch}(\mu y)\right]w + k\,\mathrm{ch}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x) + \frac{d}{b\mu}\,\mathrm{sh}(\mu y)\right]\left\{\Phi(bx-ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \mathrm{ch}(\nu x)\exp\left[-\frac{c}{a\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x) - \frac{d}{b\mu}\,\mathrm{sh}\left(\frac{\mu}{a}(bx-u)\right)\right]dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \left[c\,\mathrm{th}(\lambda x) + d\,\mathrm{th}(\mu y)\right]w + k\,\mathrm{th}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \left[\mathrm{ch}(\lambda x)\right]^{\frac{c}{a\lambda}}\left[\mathrm{ch}(\mu y)\right]^{\frac{d}{b\mu}}\left\{\Phi(bx-ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \mathrm{th}(\nu x)\left[\mathrm{ch}(\lambda x)\right]^{-\frac{c}{a\lambda}}\left[\mathrm{ch}\left(\frac{\mu}{a}(bx-u)\right)\right]^{-\frac{d}{b\mu}}dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

4. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\operatorname{cth}(\lambda x) + d\operatorname{cth}(\mu y)]w + k\operatorname{cth}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = [\operatorname{sh}(\lambda x)]^{\frac{c}{a\lambda}}[\operatorname{sh}(\mu y)]^{\frac{d}{b\mu}}\bigg\{\Phi(bx-ay) + \\ + \frac{k}{a}\int \operatorname{cth}(\nu x)[\operatorname{sh}(\lambda x)]^{-\frac{c}{a\lambda}}\Big[\operatorname{sh}\Big(\frac{\mu}{a}(bx-u)\Big)\Big]^{-\frac{d}{b\mu}}dx\bigg\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

5. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\operatorname{th}(\lambda x) + d\operatorname{th}(\mu y)]w + k\operatorname{th}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = [\operatorname{ch}(\lambda x)]^{\frac{c}{a\lambda}}[\operatorname{ch}(\mu y)]^{\frac{d}{b\mu}}\bigg\{\Phi(bx-ay) + \\ + \frac{k}{a}\int \operatorname{th}(\nu x)[\operatorname{ch}(\lambda x)]^{-\frac{c}{a\lambda}}\Big[\operatorname{ch}\Big(\frac{\mu}{a}(bx-u)\Big)\Big]^{-\frac{d}{b\mu}}dx\bigg\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

6. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = [c\operatorname{cth}(\lambda x) + d\operatorname{cth}(\mu y)]w + k\operatorname{cth}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = [\operatorname{sh}(\lambda x)]^{\frac{c}{a\lambda}}[\operatorname{sh}(\mu y)]^{\frac{d}{b\mu}}\bigg\{\Phi(bx-ay) + \\ + \frac{k}{a}\int \operatorname{cth}(\nu x)[\operatorname{sh}(\lambda x)]^{-\frac{c}{a\lambda}}\Big[\operatorname{sh}\Big(\frac{\mu}{a}(bx-u)\Big)\Big]^{-\frac{d}{b\mu}}dx\bigg\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

7. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax\operatorname{sh}(\lambda x + \mu y)w + b\operatorname{sh}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\operatorname{ch}(\lambda x + \mu y)\Big]\bigg\{\Phi\Big(\frac{y}{x}\Big) + \\ + b\int \frac{\operatorname{sh}(\nu x)}{x}\exp\Big\{-\frac{a}{\lambda + \mu u}\operatorname{ch}[(\lambda + \mu u)x]\Big\}dx\bigg\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

8. $\boldsymbol{x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)w + b\,\mathrm{ch}(\nu x)}$.

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\,\mathrm{sh}(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+ \right.$$
$$\left. + b\int \frac{\mathrm{ch}(\nu x)}{x}\exp\left\{-\frac{a}{\lambda + \mu u}\,\mathrm{sh}[(\lambda + \mu u)x]\right\}dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

9. $\boldsymbol{x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{th}(\lambda x + \mu y)w + b\,\mathrm{th}(\nu x)}$.

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\mathrm{ch}(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + b\int \frac{1}{x}\,\mathrm{th}(\nu x)\bigl\{\mathrm{ch}[(\lambda + \mu u)x]\bigr\}^{-\frac{a}{\lambda+\mu u}}\,dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

10. $\boldsymbol{x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[ax\,\mathrm{sh}(\lambda x) + by\,\mathrm{sh}(\mu y)\bigr]w + c\,\mathrm{sh}(\nu x)}$.

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{a}{\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x) + \frac{b}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + c\int \frac{\mathrm{sh}(\nu x)}{x}\exp\left[-\frac{a}{\lambda}\,\mathrm{ch}(\lambda x) - \frac{b}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu u x)\right]dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

11. $\boldsymbol{a\,\mathrm{sh}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}^k(\nu x)w + p\,\mathrm{sh}^s(\beta y)}$.

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\,\mathrm{sh}^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{sh}^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{sh}^k(\nu x)$, $F(x,y) = p\,\mathrm{sh}^s(\beta y)$.

12. $\boldsymbol{a\,\mathrm{sh}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{sh}^k(\nu y)w + p\,\mathrm{sh}^s(\beta x)}$.

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\,\mathrm{sh}^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{sh}^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{sh}^k(\nu y)$, $F(x,y) = p\,\mathrm{sh}^s(\beta x)$.

13. $\boldsymbol{a\,\mathrm{ch}^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}^k(\nu x)w + p\,\mathrm{ch}^s(\beta y)}$.

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\,\mathrm{ch}^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{ch}^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{ch}^k(\nu x)$, $F(x,y) = p\,\mathrm{ch}^s(\beta y)$.

14. $a\,\mathrm{ch}^n(\lambda x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}^m(\mu x)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c\,\mathrm{ch}^k(\nu y)w + p\,\mathrm{ch}^s(\beta x).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\,\mathrm{ch}^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\,\mathrm{ch}^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\,\mathrm{ch}^k(\nu y)$, $F(x,y) = p\,\mathrm{ch}^s(\beta x)$.

1.5.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\ln(\alpha x) + s\ln(\beta y)\bigr]w + k\ln x.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl\{\frac{c}{a\alpha}x\bigl[\ln(\alpha x) - 1\bigr] + \frac{s}{b\beta}y\bigl[\ln(\beta y) - 1\bigr]\Bigr\}\Bigl\{\Phi(bx - ay) + \\ + \frac{k}{a}\int \ln x \exp\Bigl\{-\frac{cx}{a\alpha}\bigl[\ln(\alpha x) - 1\bigr] - \frac{bsx - su}{ab\beta}\Bigl[\ln\Bigl(\frac{b\beta x - \beta u}{a}\Bigr) - 1\Bigr]\Bigr\}dx\Bigr\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = ax^m\ln(\alpha x + \beta y)w + k\ln x.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl\{\frac{ax^m}{m}\Bigl[\ln(\alpha x + \beta y) - \frac{1}{m}\Bigr]\Bigr\}\Bigl\{\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \\ + k\int \frac{\ln x}{x}\exp\Bigl\{-\frac{ax^m}{m}\Bigl[\ln(\alpha + \beta)x - \frac{1}{m}\Bigr]\Bigr\}\,dx\Bigr\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[ax\ln(\alpha x) + by\ln(\beta y)\bigr]w + k\ln x.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl\{ax\bigl[\ln(\alpha x) - 1\bigr] + by\bigl[\ln(\beta y) - 1\bigr]\Bigr\}\Bigl\{\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \\ + k\int \frac{\ln x}{x}\exp\Bigl\{-x\bigl[a\ln(\alpha x) + bu\ln(\beta ux) - a - bu\bigr]\Bigr\}\,dx\Bigr\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

4. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \bigl[ay\ln(\alpha x) + bx\ln(\beta y)\bigr]w + k\ln x.$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl\{ay\bigl[\ln(\alpha x) - 1\bigr] + bx\bigl[\ln(\beta y) - 1\bigr]\Bigr\}\Bigl\{\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \\ + k\int \frac{\ln x}{x}\exp\Bigl\{-x\bigl[au\ln(\alpha x) + b\ln(\beta ux) - au - b\bigr]\Bigr\}\,dx\Bigr\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

5. $$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + xy \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ax^2 \ln(\alpha x) + ay^2 \ln(\beta y)\right] w + k \ln x.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{ax\left[\ln(\alpha x) - 1\right] + \frac{by^2}{x}\left[\ln(\beta y) - 1\right]\right\}\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + k\int \frac{\ln x}{x^2} \exp\left\{-x\left[a\ln(\alpha x) + bu^2 \ln(\beta ux) - a - bu^2\right]\right\} dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

6. $$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + xy \frac{\partial w}{\partial y} = \left[ay^2 \ln(\alpha x) + bx^2 \ln(\beta y)\right] w + k \ln x.$$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{\frac{ay^2}{x}\left[\ln(\alpha x) - 1\right] + bx\left[\ln(\beta y) - 1\right]\right\}\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + k\int \frac{\ln x}{x^2} \exp\left\{-x\left[au^2 \ln(\alpha x) + b\ln(\beta ux) - au^2 - b\right]\right\} dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

7. $$a\ln^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\ln^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\ln^k(\nu x) w + p\ln^s(\beta y) + q.$$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = \ln^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\ln^m(\mu x)$, $h(x, y) = c\ln^k(\nu x)$, $F(x, y) = p\ln^s(\beta y) + q$.

8. $$a\ln^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\ln^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\ln^k(\nu y) w + p\ln^s(\beta x) + q.$$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = \ln^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\ln^m(\mu x)$, $h(x, y) = c\ln^k(\nu y)$, $F(x, y) = p\ln^s(\beta x) + q$.

1.5.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left[c\sin(\lambda x) + d\sin(\mu y)\right] w + k\sin(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[-\frac{c}{a\lambda}\cos(\lambda x) - \frac{d}{b\mu}\cos(\mu y)\right]\left\{\Phi(bx - ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \sin(\nu x)\exp\left\{\frac{c}{a\lambda}\cos(\lambda x) + \frac{d}{b\mu}\cos\left[\frac{\mu}{a}(bx - u)\right]\right\} dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\cos(\lambda x) + d\cos(\mu y)\bigr]w + k\cos(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a\lambda}\sin(\lambda x) + \frac{d}{b\mu}\sin(\mu y)\right]\left\{\Phi(bx - ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \cos(\nu x)\exp\left\{-\frac{c}{a\lambda}\sin(\lambda x) - \frac{d}{b\mu}\sin\left[\frac{\mu}{a}(bx-u)\right]\right\}dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\,\mathrm{tg}(\lambda x) + d\,\mathrm{tg}(\mu y)\bigr]w + k\,\mathrm{tg}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \bigl[\cos(\lambda x)\bigr]^{-\frac{ca}{\lambda}}\bigl[\cos(\mu y)\bigr]^{-\frac{d}{b\mu}}\left\{\Phi(bx - ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \mathrm{tg}(\nu x)\bigl[\cos(\lambda x)\bigr]^{\frac{c}{a\lambda}}\left\{\cos\left[\frac{\mu}{a}(bx-u)\right]\right\}^{\frac{d}{b\mu}}dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

4. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \bigl[c\,\mathrm{ctg}(\lambda x) + d\,\mathrm{ctg}(\mu y)\bigr]w + k\,\mathrm{ctg}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \bigl[\sin(\lambda x)\bigr]^{\frac{c}{a\lambda}}\bigl[\sin(\mu y)\bigr]^{\frac{d}{b\mu}}\left\{\Phi(bx - ay) + \right.$$
$$\left. + \frac{k}{a}\int \mathrm{ctg}(\nu x)\bigl[\sin(\lambda x)\bigr]^{-\frac{c}{a\lambda}}\left\{\sin\left[\frac{\mu}{a}(bx-u)\right]\right\}^{-\frac{d}{b\mu}}dx\right\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

5. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\sin(\lambda x + \mu y)w + b\sin(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\left[-\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\cos(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + b\int \sin(\nu x)\exp\left\{\frac{a}{\lambda + \mu u}\cos[(\lambda + \mu u)x]\right\}dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

6. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\cos(\lambda x + \mu y)w + b\cos(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\sin(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + b\int \cos(\nu x)\exp\left\{-\frac{a}{\lambda + \mu u}\sin[(\lambda + \mu u)x]\right\} dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

7. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\,\mathrm{tg}(\lambda x + \mu y)w + b\,\mathrm{tg}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \exp\left[-\frac{ax}{\lambda x + \mu y}\ln\cos(\lambda x + \mu y)\right]\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \right.$$
$$\left. + b\int \mathrm{tg}(\nu x)\left\{\cos[(\lambda + \mu u)x]\right\}^{\frac{a}{\lambda+\mu u}} dx\right\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

8. $\displaystyle a\sin^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\sin^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\sin^k(\nu x)w + p\sin^s(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\sin^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\sin^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\sin^k(\nu x)$, $F(x,y) = p\sin^s(\beta y)$.

9. $\displaystyle a\sin^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\sin^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\sin^k(\nu y)w + p\sin^s(\beta x).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\sin^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\sin^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\sin^k(\nu y)$, $F(x,y) = p\sin^s(\beta x)$.

10. $\displaystyle a\cos^n(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\cos^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\cos^k(\nu x)w + p\cos^s(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a\cos^n(\lambda x)$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\cos^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\cos^k(\nu x)$, $F(x,y) = p\cos^s(\beta y)$.

1.5.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

1. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \left(c\arcsin\frac{x}{\alpha} + d\arcsin\frac{y}{\beta}\right)w + k\arcsin\frac{x}{\gamma}.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{c}{a}\left(x\arcsin\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\alpha^2 - x^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{d}{b}\left(y\arcsin\frac{y}{\beta} + \sqrt{\beta^2 - y^2}\right)\right]\left[\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{k}{a}\int f(x,u)\arcsin\frac{x}{\gamma}\,dx\right],$$

$$f(x,u) = \exp\biggl\{-\frac{c}{a}\Bigl(x\arcsin\frac{x}{\alpha} + \sqrt{\alpha^2 - x^2}\Bigr) - \\ - \frac{d}{ab}\Bigl[(bx-u)\arcsin\frac{bx-u}{a\beta} + \sqrt{a^2\beta^2 - (bx-u)^2}\Bigr]\biggr\}, \quad u = bx - ay.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \Bigl(c\arccos\frac{x}{\alpha} + d\arccos\frac{y}{\beta}\Bigr)w + k\arccos\frac{x}{\gamma}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\frac{c}{a}\Bigl(x\arccos\frac{x}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 - x^2}\Bigr) + \\ + \frac{d}{b}\Bigl(y\arccos\frac{y}{\beta} - \sqrt{\beta^2 - y^2}\Bigr)\Bigr]\Bigl[\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \frac{k}{a}\int f(x,u)\arccos\frac{x}{\gamma}\,dx\Bigr],$$

где

$$f(x,u) = \exp\biggl\{-\frac{c}{a}\Bigl(x\arccos\frac{x}{\alpha} - \sqrt{\alpha^2 - x^2}\Bigr) - \\ - \frac{d}{ab}\Bigl[(bx-u)\arccos\frac{bx-u}{a\beta} - \sqrt{a^2\beta^2 - (bx-u)^2}\Bigr]\biggr\}, \quad u = bx - ay.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \Bigl(c\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\alpha} + d\,\mathrm{arctg}\frac{y}{\beta}\Bigr)w + k\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\gamma}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\biggl\{\frac{c}{a}\Bigl[x\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\alpha} - \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2 + x^2)\Bigr] + \frac{d}{b}\Bigl[y\,\mathrm{arctg}\frac{y}{\beta} - \\ - \frac{\beta}{2}\ln(\beta^2 + y^2)\Bigr]\biggr\}\Bigl[\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \frac{k}{a}\int f(x,u)(\alpha^2 + x^2)^{\frac{c\alpha}{2a}}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\gamma}\,dx\Bigr],$$

где

$$f(x,u) = \Bigl[\beta^2 + \frac{(bx-u)^2}{a^2}\Bigr]^{\frac{d\beta}{2b}}\exp\Bigl[-\frac{cx}{a}\,\mathrm{arctg}\frac{x}{\alpha} - \\ - \frac{d(bx-u)}{ab}\,\mathrm{arctg}\frac{bx-u}{a\beta}\Bigr], \quad u = bx - ay.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

4. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = \Bigl(c\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{\alpha} + d\,\mathrm{arcctg}\frac{y}{\beta}\Bigr)w + k\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{\gamma}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\biggl\{\frac{c}{a}\Bigl[x\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{\alpha} + \frac{\alpha}{2}\ln(\alpha^2 + x^2)\Bigr] + \frac{d}{b}\Bigl[y\,\mathrm{arcctg}\frac{y}{\beta} + \\ + \frac{\beta}{2}\ln(\beta^2 + y^2)\Bigr]\biggr\}\Bigl[\Phi\Bigl(\frac{y}{x}\Bigr) + \frac{k}{a}\int f(x,u)(\alpha^2 + x^2)^{-\frac{c\alpha}{2a}}\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{\gamma}\,dx\Bigr],$$

где

$$f(x,u) = \Bigl[\beta^2 + \frac{(bx-u)^2}{a^2}\Bigr]^{-\beta d/2b}\exp\Bigl[-\frac{cx}{a}\,\mathrm{arcctg}\frac{x}{\alpha} - \\ - \frac{d(bx-u)}{ab}\,\mathrm{arcctg}\frac{bx-u}{a\beta}\Bigr], \quad u = bx - ay.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

5. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\arcsin(\alpha x + \beta y)w + b\arcsin\frac{x}{\gamma}.$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{ax\left[\arcsin(\alpha x + \beta y) + \frac{\sqrt{1-(\alpha x+\beta y)^2}}{\alpha x + \beta y}\right]\right\}\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + b\int\frac{f(x,u)}{x}\arcsin\frac{x}{\gamma}\,dx\right\}, \quad u = \frac{y}{x},$$

где

$$f(x,u) = \exp\left\{-ax\left[\arcsin[(\alpha+\beta u)x] + \frac{\sqrt{1-(\alpha+\beta u)^2x^2}}{(\alpha+\beta u)x}\right]\right\}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

6. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = ax\arccos(\alpha x + \beta y)w + b\arccos\frac{x}{\gamma}.$

Общее решение:

$$w = \exp\left\{ax\left[\arccos(\alpha x + \beta y) - \frac{\sqrt{1-(\alpha x+\beta y)^2}}{\alpha x + \beta y}\right]\right\}\left\{\Phi\left(\frac{y}{x}\right) + b\int\frac{f(x,u)}{x}\arccos\frac{x}{\gamma}\,dx\right\}, \quad u = \frac{y}{x},$$

где

$$f(x,u) = \exp\left\{-ax\left[\arccos[(\alpha+\beta u)x] - \frac{\sqrt{1-(\alpha+\beta u)^2x^2}}{(\alpha+\beta u)x}\right]\right\}.$$

При интегрировании u рассматривается как параметр.

7. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\arcsin^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\arcsin^k(\nu x)w + p\arcsin^n(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arcsin^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\arcsin^k(\nu x)$, $F(x,y) = p\arcsin^n(\beta y)$.

8. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\arcsin^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\arcsin^k(\nu y)w + p\arcsin^n(\beta x).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arcsin^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\arcsin^k(\nu y)$, $F(x,y) = p\arcsin^n(\beta x)$.

9. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\arccos^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\arccos^k(\nu x)w + p\arccos^n(\beta y).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arccos^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\arccos^k(\nu x)$, $F(x,y) = p\arccos^n(\beta y)$.

10. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\arccos^m(\mu x)\frac{\partial w}{\partial y} = c\arccos^k(\nu y)w + p\arccos^n(\beta x).$

Частный случай уравнения 1.5.8.6 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b\arccos^m(\mu x)$, $h(x,y) = c\arccos^k(\nu y)$, $F(x,y) = p\arccos^n(\beta x)$.

1.5.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x)w + g(x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Big]\Big\{\Phi(bx - ay) + \frac{1}{a}\int g(x)\exp\Big[-\frac{1}{a}\int f(x)\,dx\Big]\,dx\Big\}.$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = [f(x) + g(y)]w + p(x) + q(y).$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{1}{a}\int f(x)\,dx + \frac{1}{b}\int g(y)\,dy\Big]\Big\{\Phi(bx - ay) +$$

$$+ \frac{1}{a}\int\Big[p(x) + q\Big(\frac{bx}{a} - \frac{u}{a}\Big)\Big]\exp\Big\{-\frac{1}{a}\int\Big[f(x) + g\Big(\frac{bx}{a} - \frac{u}{a}\Big)\Big]\,dx\Big\}\,dx\Big\},$$

где $u = bx - ay$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

3. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = xf\Big(\dfrac{y}{x}\Big)w + g(x,y).$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[xf\Big(\frac{y}{x}\Big)\Big]\Big\{\Phi\Big(\frac{y}{x}\Big) + \int\frac{g(x,ux)}{x}\exp[-xf(u)]\,dx\Big\},$$

где $u = y/x$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

4. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(x,y)w + g(x,y).$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{1}{a}\int\frac{1}{x}f\big(x,\,u^{1/a}x^{b/a}\big)\,dx\Big]\Big\{\Phi(u) +$$

$$+ \frac{1}{a}\int\frac{1}{x}g\big(x,\,u^{1/a}x^{b/a}\big)\exp\Big[-\frac{1}{a}\int\frac{1}{x}f\big(x,\,u^{1/a}x^{b/a}\big)\,dx\Big]\,dx\Big\},$$

где $u = y^a x^{-b}$. При интегрировании u рассматривается как параметр.

5. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w + F(x,y).$

Общее решение:

$$w = H\Big[\Phi(u) + \int\frac{F(x,Gu)}{fH}\,dx\Big],\qquad u = \frac{y}{G},$$

где $G = \exp\Big(\int\frac{g}{f}dx\Big)$, $H = \exp\Big[\int\frac{h(x,Gu)}{f(x)}dx\Big]$. При интегровании величина u рассматривается как параметр.

6. $\displaystyle f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[g_1(x)y + g_0(x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w + F(x,y).$

Общее решение:

$$w = H\left[\Phi(u) + \int \frac{F(x,\,Gu+Q)}{fH}\,dx\right], \qquad u = \frac{y-Q}{G},$$

где $G = \exp\Bigl(\int \frac{g_1}{f}dx\Bigr)$, $Q = G\int \frac{g_0 dx}{fG}$, $H = \exp\Bigl[\int \frac{h(x,\,Gu+Q)}{f(x)}dx\Bigr]$. При интегрировании величина u рассматривается как параметр.

7. $\displaystyle f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[g_1(x)y + g_0(x)y^k\right]\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w + F(x,y).$

При $k=1$ см. уравнение 1.5.8.7. При $k\neq 1$ замена $\xi = y^{1-k}$ приводит к уравнению вида 1.5.8.8:

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + (1-k)\left[g_1(x)\xi + g_0(x)\right]\frac{\partial w}{\partial \xi} = h\Bigl(x,\,\xi^{\frac{1}{1-k}}\Bigr)w + F\Bigl(x,\,\xi^{\frac{1}{1-k}}\Bigr).$$

8. $\displaystyle f(x)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[g_1(x) + g_0(x)e^{\lambda y}\right]\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)w + F(x,y).$

Замена $z = e^{-\lambda y}$ приводит к уравнению вида 1.5.8.6:

$$f(x)\frac{\partial w}{\partial x} - \lambda\left[g_1(x)z + g_0(x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = h\Bigl(x,\,-\frac{1}{\lambda}z\Bigr)w + F\Bigl(x,\,-\frac{1}{\lambda}z\Bigr).$$

9. $\displaystyle f\frac{\partial w}{\partial x} + \left[\left(\tfrac{1}{2}f'_x + a\right)y + g\right]\frac{\partial w}{\partial y} = \left(a - \tfrac{3}{2}f'_x\right)w + f'''_{xxx}y + g''_{xx},$

где $f = f(x)$, $g = g(x)$.

Решения этого уравнения описывают все обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка вида $y''_{xx} = w(x,y)$, приводимые к автономному виду точечными преобразованиями.

1°. Общее решение при $f'''_{xxx} \neq 0$:

$$w = f^{-3/2}E[\Phi(v) + a^2V] + \frac{2ff''_{xx} - (f'_x)^2}{4f^2}y + \frac{2fg'_x - f'_x g + 2ag}{2f^2},$$

где $v = f^{-1/2}E^{-1}y - V$, $E = \exp\Bigl[a\int \frac{dx}{f(x)}\Bigr]$, $V = \int f^{-3/2}gE^{-1}\,dx$.

2°. Общее решение при $f = Ax^2 + Bx + C$:

$$w = f^{-3/2}E\left[\Phi(v) + \left(a^2 + AC - \tfrac{1}{4}B^2\right)V\right] + \frac{2fg'_x - f'_x g + 2ag}{2f^2}.$$

2. Линейные уравнения с тремя независимыми переменными

2.1. Линейные уравнения вида $f(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y}+h(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z}=0$

2.1.1. Предварительные замечания

Линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка с тремя независимыми переменными имеет вид

$$f(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x}+g(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y}+h(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z}=0. \tag{1}$$

1. Если известны два независимых интеграла (интегральный базис)

$$u_1(x,y,z)=C_1, \qquad u_2(x,y,z)=C_2$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y,z)}=\frac{dy}{g(x,y,z)}=\frac{dz}{h(x,y,z)}, \tag{2}$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w=\Phi(u_1,u_2), \tag{3}$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов.

Для конкретных уравнений, рассмотренных далее в разд. 2.1.2–2.1.6, часто будет указан только интегральный базис. Общее решение этих уравнений можно получить с помощью формулы (3).

2. Пусть известен один интеграл $u(x,y,z)=C$ системы (2). Переходя от x, y, z к новым переменным x, y, $u=u(x,y,z)$, получим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными x, y

$$\bar{f}(x,y,u)\frac{\partial w}{\partial x}+\bar{g}(x,y,u)\frac{\partial w}{\partial y}=0, \tag{4}$$

в которое u входит как параметр. Функции $\bar{f}(x,y,u)$ и $\bar{g}(x,y,u)$ получаются из $f(x,y,z)$ и $g(x,y,z)$ с помощью перехода к переменным x, z, u. О решении уравнений (4) см. раздел 1.2.

2.1.2. Уравнения, содержащие степенные функции

► Функции f, g, h линейны по переменным x, y, z

1. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}+c\frac{\partial w}{\partial z}=0.$

Интегральный базис: $u_1=bx-ay$, $u_2=cx-az$.

2. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = y^a e^{-bx}$, $u_2 = z^a e^{-cx}$.

3. $$\frac{\partial w}{\partial x} + bx\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} (cy + Az)e^{-Ax} & \text{при } bc > 0, \\ cy\cos Ax + Az\sin Ax & \text{при } bc < 0, \end{cases}$$

где $A = \sqrt{|bc|}$.

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{x^b}{y}$, $u_2 = \dfrac{x^c}{z}$.

5. $$(x + a)\frac{\partial w}{\partial x} + (y + b)\frac{\partial w}{\partial y} + (z + c)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{x + a}{z + c}$, $u_2 = \dfrac{y + b}{z + c}$.

6. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} \dfrac{cy - \alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc > 0, \\ x^\alpha \exp\Bigl(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\Bigr) & \text{при } bc < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{|bc|}$.

7. $$b^2cz\frac{\partial w}{\partial x} - a^2cx\frac{\partial w}{\partial y} + ab^2y\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где

$$s_1 = -1, \quad s_2 = \tfrac{1}{2}\bigl(1 + i\sqrt{3}\bigr), \quad s_3 = \tfrac{1}{2}\bigl(1 - i\sqrt{3}\bigr).$$

8. $$b^2cy\frac{\partial w}{\partial x} + a^2cx\frac{\partial w}{\partial y} - ab(ax + by)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = ax + by + cz, \quad u_2 = a^2x^2 - b^2y^2.$$

9. $$bcx\frac{\partial w}{\partial x} + (by + cz)\Bigl(c\frac{\partial w}{\partial y} - b\frac{\partial w}{\partial z}\Bigr) = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = by + cz, \quad u_2 = x\exp\Bigl(-\frac{by}{by + cz}\Bigr).$$

10. $bcx\dfrac{\partial w}{\partial x}+c(by+cz)\dfrac{\partial w}{\partial y}+b(by-cz)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где $s_1=1$, $s_{2,3}=\pm\sqrt{2}$.

Интегральный базис:

$$u_1=\bigl[by+(\sqrt{2}-1)cz\bigr]x^{-\sqrt{2}},\quad u_2=\bigl[by-(\sqrt{2}+1)cz\bigr]x^{\sqrt{2}}.$$

Частный интеграл: $w=b^2y^2-2bcyz-c^2z^2$.

11. $bc(by-2cz)\dfrac{\partial w}{\partial x}+ac(3cz-ax)\dfrac{\partial w}{\partial y}+ab(2ax-3by)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Интегральный базис:

$$u_1=3ax+2by+cz,\quad u_2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2.$$

12. $bc(y-z)\dfrac{\partial w}{\partial x}+ac(z-x)\dfrac{\partial w}{\partial y}+ab(x-y)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Интегральный базис:

$$u_1=ax+by+cz,\quad u_2=ax^2+by^2+cz^2.$$

13. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ax+by)\dfrac{\partial w}{\partial y}+(\alpha x+\beta y+\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где $s_1=1$, $s_2=b$, $s_3=\gamma$.

14. $cz\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ax+by)\dfrac{\partial w}{\partial y}+(ax+by+cz)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Частный случай уравнения 2.1.2.20. Один из интегралов

$$u_1=z-x-y.$$

Пусть $\rho^2=4ac+(b-c)^2\neq 0$. Сделаем преобразование, указанное в п. 2 из разд. 2.1.1. Решив полученное уравнение, находим другой интеграл:

1. При $a\neq b$:

$$u_2=\frac{2acz+(b-c-\rho)(ax+by)}{2acz+(b-c+\rho)(ax+by)}\bigl[acz^2+(b-c)(ax+by)z-(ax+by)^2\bigr]^{\frac{\rho}{b+c}}.$$

2. При $a=b$:

$$u_2=[a(x+y)+cz]\exp\left[\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)\frac{cy-ax}{z-x-y}\right].$$

15. $2bc(ax-by)\dfrac{\partial w}{\partial x}-ac(ax-by-cz)\dfrac{\partial w}{\partial y}-$

$$-ab(ax-by-3cz)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где $s_1=0$, $s_2=2$, $s_3=4$.

16. $$2bc(by - cz)\frac{\partial w}{\partial x} - ac(4ax - 3by - cz)\frac{\partial w}{\partial y} + 3ab(4ax - by - 3cz)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.20. Интегральный базис:

$$u_1 = 3ax - 3by - cz, \quad u_2 = \frac{(8ax - 5by - 3cz)^2}{2ax - by - cz}.$$

17. $$2bc(3ax - 2by + cz)\frac{\partial w}{\partial x} - 2ac(2ax - 5by + 3cz)\frac{\partial w}{\partial y} + ab(2ax - 6by + 11cz)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где $s_1 = 3$, $s_2 = 6$, $s_3 = 18$.

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{(2ax + 2by + cz)^2}{2ax - by - 2cz}, \quad u_2 = \frac{(2ax - by - 2cz)^3}{ax - 2by + 2cz}.$$

18. $$(ax + y - z)\frac{\partial w}{\partial x} - (x + ay - z)\frac{\partial w}{\partial y} + (a - 1)(y - x)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где

$$s_1 = 0, \quad s_2 = \sqrt{(a+3)(a-1)}, \quad s_3 = -\sqrt{(a+3)(a-1)}.$$

Один из интегралов: $u_1 = x + y + z$.

19. $$(Ax+cy+bz)\frac{\partial w}{\partial x} + (cx+By+az)\frac{\partial w}{\partial y} + (bx+ay+Cz)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.20, где s определяется путем решения кубического уравнения

$$(A-s)(B-s)(C-s) - [a^2(A-s) + b^2(B-s) + c^2(C-s)] + 2abc = 0.$$

20. $$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)\frac{\partial w}{\partial x} + (a_2x + b_2y + c_2z + d_2)\frac{\partial w}{\partial y} + (a_3x + b_3y + c_3z + d_3)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Вид интегрального базиса зависит от решений вспомогательных алгебраических уравнений

$$\begin{vmatrix} a_1 - s & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 - s & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 - s \end{vmatrix} = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} \alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma a_3 = \alpha s, \\ \alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = \beta s, \\ \alpha c_1 + \beta c_2 + \gamma c_3 = \gamma s, \end{cases} \tag{2}$$

и величины коэффициента

$$D = \alpha d_1 + \beta d_2 + \gamma d_3. \tag{3}$$

Сначала находят корни s кубического уравнения (1), затем соответствующие решения α, β, γ линейной системы (2). Далее вычисляется коэффициент D (3). Возможны следующие случаи.

1. Если $s = D = 0$, то один из интегралов имеет вид

$$u_1 = \alpha x + \beta y + \gamma z,$$

а второй можно получить, используя преобразование, указанное в п. 2 разд. 2.1.1.

2. Если уравнение (1) имеет два отличных друг от друга и от нуля корня s_1, s_2, то из системы (2) найдутся два набора чисел α_k, β_k, γ_k $(k = 1,\ 2)$ не равных нулю одновременно в каждом наборе, и один из интегралов будет

$$u_1 = \frac{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + D_1/s_1)^{s_2}}{(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + D_2/s_2)^{s_1}}. \qquad (4)$$

3. Если уравнение (1) имеет три различных корня s_1, s_2, s_3 не равных нулю, то интегральный базис имеет вид

$$u_1 = \frac{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + D_1/s_1)^{s_2}}{(\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z + D_2/s_2)^{s_1}}, \quad u_2 = \frac{(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z + D_1/s_1)^{s_3}}{(\alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z + D_3/s_3)^{s_1}}.$$

Если имеются кратные или нулевые корни, то можно взять $u_k \neq \mathrm{const}$ и использовать преобразование, указанное в п. 2 разд. 2.1.1.

▶ Функции f, g, h квадратичны по переменным x, y, z

21. $a\dfrac{\partial w}{\partial x} + xz\dfrac{\partial w}{\partial y} - xy\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис:

$$u_1 = y^2 + z^2, \quad u_2 = y\sin\left(\frac{x^2}{2a}\right) + z\cos\left(\frac{x^2}{2a}\right).$$

В качестве второго интеграла можно взять также функцию $u_2 = x^2 + 2a\,\mathrm{arctg}(z/y)$.

22. $acx^2\dfrac{\partial w}{\partial x} - acxy\dfrac{\partial w}{\partial y} - b^2y^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = xy$, $u_2 = 3acxyz - b^2y^3$.

23. $ax^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + by^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис образуют любые две из функций

$$u_1 = \frac{1}{by} - \frac{1}{ax}, \quad u_2 = \frac{1}{cz} - \frac{1}{by}, \quad u_3 = \frac{1}{ax} - \frac{1}{cz}.$$

24. $abx^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + cz^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2abxz\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{x^2}{z}$, $u_2 = by - \dfrac{cz^2}{3ax}$.

25. $bcxy\dfrac{\partial w}{\partial x} + c^2yz\dfrac{\partial w}{\partial y} + b^2y^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = b^2y^2 - c^2z^2$, $u_2 = \dfrac{by + cz}{x}$.

26. $cxz\dfrac{\partial w}{\partial x} + cyz\dfrac{\partial w}{\partial y} + abxy\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{y}{x}$, $u_2 = cz^2 - abxy$.

27. $bcyz\dfrac{\partial w}{\partial x} + acxz\dfrac{\partial w}{\partial y} + abxy\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = ax^2 - by^2$, $u_2 = cz^2 - by^2$.

28. $by^2\dfrac{\partial w}{\partial x} - axy\dfrac{\partial w}{\partial y} + cxz\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = ax^2 + by^2$, $u_2 = y^cz^a$.

29. $$a(y+\beta)(z+\gamma)\frac{\partial w}{\partial x} - b(x+\alpha)(z+\gamma)\frac{\partial w}{\partial y} - c(x+\alpha)(y+\beta)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = b(x+\alpha)^2 + a(y+\beta)^2, \quad u_2 = c(x+\alpha)^2 + a(z+\gamma)^2.$$

30. $cx\dfrac{\partial w}{\partial x} + cy\dfrac{\partial w}{\partial y} + (ax^2 + by^2)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = ax^2 + by^2 - 2cz$, $u_2 = y/x$.

31. $cz\dfrac{\partial w}{\partial x} - a(2ax - b)y\dfrac{\partial w}{\partial y} + a(2ax - b)z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = yz$, $u_2 = ax(ax + b) - cz$.

32. $bcxy\dfrac{\partial w}{\partial x} + a^2cx^2\dfrac{\partial w}{\partial y} - (2ax + cz)by\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = a^2x^2 - by^2$, $u_2 = x(ax + cz)$.

33. $xy\dfrac{\partial w}{\partial x} + y(y - a)\dfrac{\partial w}{\partial y} + z(y - a)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{y}{z}$, $u_2 = \dfrac{y - a}{x}$.

34. $cxz\dfrac{\partial w}{\partial x} + 2axy\dfrac{\partial w}{\partial y} - (2ax + cz)z\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = x(ax + cz)$, $u_2 = xyz$.

35. $$cxz\frac{\partial w}{\partial x}-cyz\frac{\partial w}{\partial y}+(by^2-ax)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=xy$, $u_2=2ax+by^2+cx^2$.

36. $$cxz\frac{\partial w}{\partial x}-cyz\frac{\partial w}{\partial y}+(ax^2+by^2)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=xy$, $u_2=ax^2-4by^2-cz^2$.

37. $$x(by-cz)\frac{\partial w}{\partial x}+y(cz-ax)\frac{\partial w}{\partial y}+z(ax-by)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=ax+by+cz$, $u_2=xyz$.

38. $$b(by+cz)^2\frac{\partial w}{\partial x}-ax(by+2cz)\frac{\partial w}{\partial y}+abxz\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=z(by+cz)$, $u_2=ax^2+b^2y^2-c^2z^2$.

39. $$bc(acxz+b^2y^2)\frac{\partial w}{\partial x}+ac(bcyz-2a^2x^2)\frac{\partial w}{\partial y}-$$
$$-ab(2abxy+c^2z^2)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=2acxz-b^2y^2$, $u_2=a^2x^2+bcyz$.

40. $$bc(x^2-a^2)\frac{\partial w}{\partial x}+c(bxy+acz)\frac{\partial w}{\partial y}+b(cxz+aby)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=\dfrac{by+cz}{x-a}$, $u_2=\dfrac{by-cz}{x+a}$.

41. $$a(y^2+z^2)\frac{\partial w}{\partial x}+x(bz-ay)\frac{\partial w}{\partial y}-x(by+az)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:
$$u_1=x^2+y^2+z^2,\quad u_2=2a\operatorname{arctg}(y/x)+b\ln(y^2+z^2).$$

42. $$bx((by+c)\frac{\partial w}{\partial x}+(b^2y^2-acx)\frac{\partial w}{\partial y}+b^2yz\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:
$$u_1=\frac{z}{ax+by},\quad u_2=\frac{ax-c}{ax+by}+\ln\left|\frac{ax+by}{x}\right|.$$

43. $$xz\frac{\partial w}{\partial x}+yz\frac{\partial w}{\partial y}+(ax^2+ay^2+bz^2)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=\dfrac{y}{x}$, $u_2=\dfrac{a(x^2+y^2)+(b-1)z^2}{(x^2+y^2)^b}$.

44. $$2cxz\frac{\partial w}{\partial x}+2cyz\frac{\partial w}{\partial y}+(cz^2-ax^2-by^2)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Частный случай уравнения 2.1.2.43. Интегральный базис:
$$u_1=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{x},\quad u_2=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{y}.$$

45. $(A_0x - A_1)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (A_0y - A_2)\dfrac{\partial w}{\partial y} + (A_0z - A_3)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0,$

$$A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y + d_\nu z; \quad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Уравнение Хессе.

Введение однородных координат $x = \xi/\tau$, $y = \eta/\tau$, $z = \zeta/\tau$ приводит к уравнению с линейными коэффициентами, но с 4 независимыми переменными для $w = w(\tau, \xi, \eta, \zeta)$:

$$B_0\frac{\partial v}{\partial \tau} + B_1\frac{\partial v}{\partial \xi} + B_2\frac{\partial v}{\partial \eta} + B_3\frac{\partial v}{\partial \zeta} = 0,$$

где $B_\nu = a_\nu\tau + b_\nu\xi + c_\nu\eta + d_\nu\zeta$. О решении этого уравнения см. разд. 3.1.

▶ Другие уравнения

46. $bc^2y^2z\dfrac{\partial w}{\partial x} + ac^2xz^2\dfrac{\partial w}{\partial y} - abxy^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = ax^2 + c^2z^2$, $u_2 = by^3 + c^3z^3$.

47. $x(by^2 - cz^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} + y(cz^2 - ax^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} + z(ax^2 - by^2)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = ax^2 + by^2 + cz^2$, $u_2 = xyz$.

48. $b(3ax^2 + by^2 + cz^2)y\dfrac{\partial w}{\partial x} - 2a(ax^2 + cz^2)x\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2abxyz\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{ax^2 + by^2 + cz^2}{z}$, $u_2 = \dfrac{2ax^2 + by^2}{z^2}$.

49. $b[a(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)x + by]\dfrac{\partial w}{\partial x} +$

$$+\, a[b(a^2x^2 + b^2y^2 - 1)y - ax]\frac{\partial w}{\partial y} + 2abz\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Преобразование $ax = \xi$, $by = \eta$ приводит к такому же уравнению, но с параметрами $a = b = 1$. Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{a^2x^2 + b^2y^2 - 1}{a^2x^2 + b^2y^2}\exp\Bigl(2\operatorname{arctg}\frac{by}{ax}\Bigr), \quad u_2 = z\exp\Bigl(2\operatorname{arctg}\frac{by}{ax}\Bigr).$$

50. $2b^2xz\dfrac{\partial w}{\partial x} + by(bz + 1)\dfrac{\partial w}{\partial y} + axy(bz + 1)^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис:

$$u_1 = bz - axy,$$

$$u_2 = \frac{bz - axy}{(bz - axy + 1)^2}\ln\left|\frac{axy}{bz + 1}\right| - \frac{1}{(bz + 1)(bz - axy + 1)} - \frac{1}{2}\ln|x|.$$

51. $bcxy^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + 2bcy^3\dfrac{\partial w}{\partial y} + 2(cyz - ax^2)^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{x^2}{y}$, $u_2 = y\exp\Bigl(\dfrac{by}{cyz - ax^2}\Bigr)$.

52. $$x(b^3y^3 - 2a^3x^3)\frac{\partial w}{\partial x} + y(2b^3y^3 - a^3x^3)\frac{\partial w}{\partial y} + 9z(a^3x^3 - b^3y^3)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = x^3y^3z$, $u_2 = \dfrac{ax}{b^2y^2} + \dfrac{by}{a^2x^2}$.

53. $$ax^2(abxy - c^2z^2)\frac{\partial w}{\partial x} + axy(abxy - c^2z^2)\frac{\partial w}{\partial y} + byz(bcyz + 2a^2x^2)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{y}{x}$, $u_2 = \dfrac{a^2bx^2y + b^2cy^2z + ac^2xz^2}{yz}$.

54. $$x(cz^4 - by^4)\frac{\partial w}{\partial x} + y(ax^4 - 2cz^4)\frac{\partial w}{\partial y} + z(2by^4 - ax^4)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = ax^4 + by^4 + cz^4$, $u_2 = x^2yz$.

55. $$x(y^n - z^n)\frac{\partial w}{\partial x} + y(z^n - x^n)\frac{\partial w}{\partial y} + z(x^n - y^n)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = xyz$, $u_2 = x^n + y^n + z^n$.

56. $$\frac{\partial w}{\partial x} + ax^ny^m\frac{\partial w}{\partial y} + bx^\nu y^\mu z^\lambda\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

1°. При $m \neq 1$, $n \neq -1$:

$$u_1 = \frac{1}{k}y^k - \frac{a}{n+1}x^{n+1}, \qquad k = 1 - m;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b\displaystyle\int x^\nu\Bigl(ku_1 + \frac{ak}{n+1}x^{n+1}\Bigr)^{\mu/k}dx, & \text{если } \lambda \neq 1; \\ \ln z - b\displaystyle\int x^\nu\Bigl(ku_1 + \frac{ak}{n+1}x^{n+1}\Bigr)^{\mu/k}dx, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

2°. При $m = 1$, $n \neq -1$:

$$u_1 = \ln y - \frac{a}{s}x^s, \qquad s = n + 1;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - by^\mu \exp\Bigl(-\dfrac{a\mu}{s}x^s\Bigr)\displaystyle\int x^\nu \exp\Bigl(\frac{a\mu}{s}x^s\Bigr)dx, & \text{если } \lambda \neq 1; \\ \ln z - by^\mu \exp\Bigl(-\dfrac{a\mu}{s}x^s\Bigr)\displaystyle\int x^\nu \exp\Bigl(\frac{a\mu}{s}x^s\Bigr)dx, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

3°. При $m \neq 1$, $n = -1$:

$$u_1 = \frac{1}{k}y^k - a\ln x, \qquad k = 1 - m;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b\displaystyle\int x^\nu(ku_1 + ak\ln x)^{\mu/k}dx, & \text{если } \lambda \neq 1; \\ \ln z - b\displaystyle\int x^\nu(ku_1 + ak\ln x)^{\mu/k}dx, & \text{если } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

4°. При $m = 1$, $n = -1$:

$$u_1 = x^{-a}y,$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \dfrac{bx^{\nu+1}y^{\mu}}{a\mu+\nu+1}, & \text{если } \lambda \neq 1,\ a\mu+\nu \neq -1; \\ \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - by^{\mu}x^{-a\mu}\ln x, & \text{если } \lambda \neq 1,\ a\mu+\nu = -1; \\ \ln z - \dfrac{bx^{\nu+1}y^{\mu}}{a\mu+\nu+1}, & \text{если } \lambda = 1,\ a\mu+\nu \neq -1; \\ \ln z - by^{\mu}x^{-a\mu}\ln x, & \text{если } \lambda = 1,\ a\mu+\nu = -1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

57. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + a\sqrt{x^2+y^2}\,\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = y/x$, $u_2 = a\sqrt{x^2+y^2} - z$.

58. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + \bigl(z - a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\bigr)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис: $u_1 = y/x$, $u_2 = x^{a-1}\bigl(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\bigr)$.

59. $$z\sqrt{y^2+z^2}\,\frac{\partial w}{\partial x} + az\sqrt{x^2+z^2}\,\frac{\partial w}{\partial y} - \bigl(x\sqrt{y^2+z^2} + ay\sqrt{x^2+z^2}\bigr)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = r^2, \quad u_2 = a\arcsin(x/r) - \arcsin(y/r), \quad \text{где } r^2 = x^2+y^2+z^2.$$

60. $$(y-z)\sqrt{f(x)}\,\frac{\partial w}{\partial x} + (z-x)\sqrt{f(y)}\,\frac{\partial w}{\partial y} + (x-y)\sqrt{f(z)}\,\frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$
$$\text{где}\quad f(t) = a_6t^6 + a_5t^5 + a_4t^4 + a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \left[\frac{(y-z)\sqrt{f(x)} + (z-x)\sqrt{f(y)} + (x-y)\sqrt{f(z)}}{(y-z)(z-x)(x-y)}\right]^2 - a_6(x+y+z)^2 - a_5(x+y+z),$$

$$u_2 = \left[\frac{y^2z^2(y-z)\sqrt{f(x)} + z^2x^2(z-x)\sqrt{f(y)} + x^2y^2(x-y)\sqrt{f(z)}}{xyz(y-z)(z-x)(x-y)}\right]^2 - a_0\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^2 - a_1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right).$$

2.1.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $$ae^{\alpha x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y} + ce^{\gamma z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha}e^{-\alpha x} + \frac{1}{b\beta}e^{-\beta y}, \qquad u_2 = -\frac{1}{b\beta}e^{-\beta y} + \frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

2. $$ae^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\alpha x}\frac{\partial w}{\partial y} + ce^{\gamma z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha}e^{-\alpha x} + \frac{1}{b\beta}e^{-\beta y}, \qquad u_2 = \frac{\beta y - \alpha x}{b\beta e^{-\alpha x} - a\alpha e^{-\beta y}} + \frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

3. $$aye^{\alpha x}\frac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y} + ce^{\gamma z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha}e^{-\alpha x} + \frac{1}{b\beta^2(\beta y+1)}e^{-\beta y}, \qquad u_2 = -\frac{1}{b\beta}e^{-\beta y} + \frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

4. $$axe^{\alpha x}\frac{\partial w}{\partial x} + bye^{\beta y}\frac{\partial w}{\partial y} + cze^{\gamma z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha}\Bigl(x^{-1}e^{-\alpha x} + \int x^{-2}e^{-\alpha x}\,dx\Bigr) + \frac{1}{b\beta}\Bigl(y^{-1}e^{-\beta y} + \int y^{-2}e^{-\beta y}\,dy\Bigr),$$
$$u_2 = -\frac{1}{a\alpha}\Bigl(x^{-1}e^{-\alpha x} + \int x^{-2}e^{-\alpha x}\,dx\Bigr) + \frac{1}{c\gamma}\Bigl(z^{-1}e^{-\gamma z} + \int z^{-2}e^{-\gamma z}\,dz\Bigr).$$

5. $$(a_1 + a_2e^{\alpha x})\frac{\partial w}{\partial x} + (b_1 + b_2e^{\beta y})\frac{\partial w}{\partial y} + (c_1 + c_2e^{\gamma z})\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a_1\alpha}\bigl[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\bigr] - \frac{1}{b_1\beta}\bigl[\beta y - \ln(b_1 + b_2e^{\beta y})\bigr],$$
$$u_2 = \frac{1}{a_1\alpha}\bigl[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\bigr] - \frac{1}{c_1\gamma}\bigl[\gamma z - \ln(c_1 + c_2e^{\gamma z})\bigr].$$

6. $$e^{\beta y}(a_1 + a_2e^{\alpha x})\frac{\partial w}{\partial x} + e^{\alpha x}(b_1 + b_2e^{\beta y})\frac{\partial w}{\partial y} + ce^{\beta y+\gamma z}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a_2\alpha}\ln(a_1 + a_2e^{\alpha x}) - \frac{1}{b_1\beta}\ln(b_1 + b_2e^{\beta y}),$$
$$u_2 = \frac{1}{a_1\alpha}\bigl[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\bigr] - \frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + ae^{\alpha x}(\alpha - ae^{\alpha x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + ce^{\beta x}(\beta - b - ce^{\beta x})\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y - ae^{\alpha x}} + \int E_1\,dx, \quad \text{где } E_1 = \exp\left(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x}\right),$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - ce^{\beta x}} + \int E_2\,dx, \quad \text{где } E_2 = \exp\left(\frac{2c}{\beta}e^{\beta x} + bx\right).$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + by + ae^{\alpha x}(\alpha - b - ae^{\alpha x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + ce^{\beta x}(z - k) - k^2\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y - ae^{\alpha x}} + \int E_1\,dx, \quad \text{где } E_1 = \exp\left(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x} + bx\right),$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - c} + \int E_2\,dx, \quad \text{где } E_2 = \exp\left(\frac{c}{\beta}e^{\beta x} + 2kx\right).$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + by + ae^{\alpha x}(y - b) - b^2\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + c(xz - 1)e^{\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y - b} + \int E_1\,dx, \quad \text{где } E_1 = \exp\left(\frac{a}{\alpha}e^{\alpha x} + 2bx\right),$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz - 1)} + \int x^2 E_2\,dx, \quad \text{где } E_2 = \exp\left[\frac{c}{\beta^2(\beta x - 1)}e^{\beta x}\right].$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + ae^{\alpha x}(x + 1)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[ce^{\beta x}z^2 + be^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E}{x(xy - 1)} + \int x^2 E\,dx, \quad \text{где } E = \exp\left[\frac{a}{\alpha^2}(\alpha x - 1)e^{\alpha x}\right],$$
$$u_2 = \int \frac{dv}{cv^2 + \beta v + b} - x, \quad \text{где } v = e^{\beta x}z.$$

11. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ay^2e^{\alpha x} + be^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[de^{\beta x}z^2 + ce^{\gamma x}(\gamma - cde^{(\beta+\gamma)x})\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + \alpha v + b} - x, \quad \text{где } v = e^{\alpha x}y;$$
$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{E}{z - ce^{\gamma x}} + \displaystyle\int E\,dx & \text{при } \beta + \gamma \neq 0, \\[2mm] \dfrac{z - ce^{\gamma x} + 2cd}{z - ce^{\gamma x}}e^{2cdx} & \text{при } \beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

где $E = \exp\left[\dfrac{2cd}{\beta + \gamma}e^{(\beta+\gamma)x}\right]$.

12. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[be^{\alpha x}y^2 + ae^{\beta x}\left(\beta - abe^{(\alpha+\beta)x}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left(cz^2e^{\gamma x} + dz + ke^{-\gamma x}\right)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \int \frac{dv}{cv^2 + (d+\gamma)v + k} - x, \quad \text{где } v = e^{\gamma x}z,$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{E}{y - ae^{\beta x}} + \displaystyle\int E\,dx & \text{при } \alpha+\beta \neq 0, \\ \dfrac{z - ae^{\beta x} + 2ab}{y - ae^{\beta x}}e^{2abx} & \text{при } \alpha+\beta = 0, \end{cases}$$

где $E = \exp\left[\dfrac{2ab}{\alpha+\beta}e^{(\alpha+\beta)x}\right]$.

13. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ae^{\alpha x}y^2 + by + ce^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\beta x}z^2 + de^{\gamma x}(z+\beta)e^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + (b+\alpha)v + c} - x, \quad \text{где} \quad v = e^{\alpha x}y,$$

$$u_2 = \frac{E}{z + \beta e^{\beta x}} + \int Ee^{\beta x}\,dx, \quad \text{где} \quad E = \exp\left(\frac{c}{\gamma}e^{\gamma x} - 2\beta x\right).$$

14. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[e^{\alpha x}y^2 + aye^{\beta x} + a\alpha e^{(\gamma-\beta)x}\right]\frac{\partial w}{\partial y} - \left[\gamma e^{\gamma x}z^2 - be^{\delta x}(z + e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y + \alpha e^{-\alpha x}} + \int e^{\alpha x}E_1\,dx, \quad \text{где} \quad E_1 = \exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\right),$$

$$u_2 = \frac{E_2}{z - e^{-\gamma x}} - \gamma\int e^{\gamma x}E_2\,dx, \quad \text{где} \quad E_2 = \exp\left(\frac{b}{\delta}e^{\delta x} - 2\gamma x\right).$$

15. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[\alpha e^{\alpha x}y^2 - ae^{\beta x}(y + e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\gamma x}(z - be^{\delta x})^2 + b\delta e^{\delta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E}{y - e^{-\alpha x}} + \alpha\int e^{\alpha x}E\,dx, \qquad u_2 = \frac{E}{z - be^{-\delta x}} + \frac{1}{\gamma}e^{\gamma x}, \qquad \text{где} \quad E = \exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\right).$$

16. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + (a_1e^{\alpha x}y^2 + \beta y + a_1b_1^2x^{2\beta}e^{\alpha x})\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[a_2x^{2n}z^2e^{\lambda x} + (b_2x^ne^{\lambda x} - n)z + ce^{\lambda x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{b_1x^\beta} - a_1b_1\int x^{\beta-1}e^{\alpha x}\,dx,$$
$$u_2 = \int\frac{dv}{a_2v^2 + b_2v + c} - \int x^{n-1}e^{\lambda x}\,dx, \quad \text{где} \quad v = x^nz.$$

17. $$(ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c)\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + k(y+m)e^{\nu x} - m^2 +\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[(de^{\alpha x} + fe^{\beta x} + g)z^2 - k\alpha^2e^{\alpha x} - f\beta^2e^{\beta x}\right] = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y+m} + \int\frac{E_1\,dx}{ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c},$$
$$u_2 = E_2\left(z - \frac{d\alpha e^{\alpha x} + f\beta e^{\beta x}}{de^{\alpha x} + fe^{\beta x} + g}\right)^{-1} + \int E_2\,dx,$$

где

$$E_1 = \exp\left[\int\frac{(ke^{\nu x} - 2m)\,dx}{ae^{\lambda x} + be^{\mu x} + c}\right], \quad E_2 = \exp\left[\int\frac{2c\,dx}{de^{\alpha x} + fe^{\beta x} + g} - 2x\right].$$

18. $$y\frac{\partial w}{\partial x} + e^{\lambda x}\left[(2a_1\lambda x + a_1 + b_1)y - e^{\lambda x}(a_1^2\lambda x^2 + a_1b_1x + c_1)\right]\frac{\partial w}{\partial y} - \\ - \left[(nz^2 - a_2(2n+1)e^xz - b_2z + a_2^2ne^{2x} + a_2b_2e^x - c_2\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = xE_1 + \int\frac{E_1v_1\,dv_1}{\lambda v_1^2 - b_1v_1 - c_1}, \qquad v_1 = e^{-\lambda x}y - a_1x,$$
$$u_2 = e^{-x}E_2 - a_2\int\frac{E_2\,dv_2}{nv_2^2 - b_2v_2 - c_2}, \quad v_2 = z - a_2e^x,$$

где

$$E_1 = \exp\left(a_1\int\frac{dv_1}{\lambda v_1^2 - b_1v_1 - c_1}\right), \quad E_2 = \exp\left(-\int\frac{dv_2}{nv_2^2 - b_2v_2 - c_2}\right).$$

19. $$(ax^ne^{\lambda y} + bxy^m)\frac{\partial w}{\partial x} + e^{\mu y}\frac{\partial w}{\partial y} + (cy^lz^k + dy^pz)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = x^{1-n}E_1 + a(n-1)\int e^{(\lambda-\mu)y}E_1\,dy,$$
$$u_2 = z^{1-k}E_2 + c(k-1)\int y^le^{-\mu y}E_1\,dy,$$

где

$$E_1 = \exp\left[b(n-1)\int y^me^{-\mu y}\,dy\right], \quad E_1 = \exp\left[d(k-1)\int y^pe^{-\mu y}\,dy\right].$$

20. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(y^2 + 2a\alpha e^{\alpha x^2} - a^2 e^{2\alpha x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + {} \\ + cz\left(e^{-2\beta x^2} z + 2b^2\beta x\right)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E}{y - ae^{\alpha x^2}} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\Bigl(2a\int e^{\alpha x^2}\,dx\Bigr),$$
$$u_2 = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\beta x^2}z\Bigr) - bc\int e^{-\beta x^2}\,dx.$$

21. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ae^{-2\alpha x^2}y^2 + 2\alpha xy + ab^2\right)\frac{\partial w}{\partial y} + {} \\ + \left(cx^\beta z^2 + 2\gamma xz + cd^2 x^\beta e^{2\gamma x^2}\right)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\alpha x^2}y\Bigr) - ab\int e^{-\alpha x^2}\,dx,$$
$$u_2 = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{d}e^{-\gamma x^2}z\Bigr) - cd\int e^{-\gamma x^2}\,dx.$$

2.1.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{1}{b\beta}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\beta y}{2}\Bigr|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{1}{c\gamma}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\Bigr|.$$

2. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{1}{b\beta}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\beta y}{2}\Bigr|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{2}{c\gamma}\operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

3. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{2}{b\beta}\operatorname{arctg}(e^{\beta y}),$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{2}{c\gamma}\operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

4. $a\,\mathrm{ch}(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{ch}(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{2}{a\alpha}\operatorname{arctg}(e^{\alpha x})-\frac{2}{b\beta}\operatorname{arctg}(e^{\beta y}),$$
$$u_2=\frac{2}{a\alpha}\operatorname{arctg}(e^{\alpha x})-\frac{2}{c\gamma}\operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

5. $a\,\mathrm{sh}(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{sh}(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\beta y)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{b\beta}\,\mathrm{ch}(\beta y),\qquad u_2=\frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{c\gamma}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\right|.$$

6. $a\,\mathrm{sh}(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{sh}(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\beta y)\,\mathrm{ch}(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z}=0.$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{b\beta}\,\mathrm{ch}(\beta y),\qquad u_2=\frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{2}{c\gamma}\operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2-a^2+a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x)-a^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{E}{y-a\,\mathrm{ch}(\lambda x)}+\int E\,dx,\qquad E=\exp\left[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right],$$
$$u_2=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{c\gamma}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\right|.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2-a^2+a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x)-a^2\,\mathrm{sh}^2(\lambda x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\left[z^2+b\beta-b(b+\beta)\,\mathrm{th}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{E}{y-a\,\mathrm{ch}(\lambda x)}+\int E\,dx,\qquad E=\exp\left[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right],$$
$$u_2=\frac{\left[\mathrm{ch}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{z-b\,\mathrm{th}(\beta x)}+\int\left[\mathrm{ch}(\beta x)\right]^{2b/\beta}dx.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+a\gamma-a(a+\gamma)\,\mathrm{th}^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\left[z^2+3b\beta-b^2-b(b+\beta)\,\mathrm{th}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{\left[\mathrm{ch}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}}{y-a\,\mathrm{th}(\gamma x)}+\int\left[\mathrm{ch}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}dx,$$
$$u_2=\frac{\left[\mathrm{ch}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{\mathrm{sh}^2(\beta x)\left[z-a\,\mathrm{th}(\beta x)+\beta\,\mathrm{cth}(\beta x)\right]}+\int\frac{\left[\mathrm{ch}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{\mathrm{sh}^2(\beta x)}\,dx.$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+3a\gamma-\gamma^2-a(a+\gamma)\operatorname{th}^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2+b\beta-b(b+\beta)\operatorname{cth}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{\left[\operatorname{ch}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}}{\operatorname{sh}^2(\gamma x)\left[y-a\operatorname{th}(\gamma x)+\gamma\operatorname{cth}(\gamma x)\right]}+\int\frac{\left[\operatorname{ch}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}}{\operatorname{sh}^2(\gamma x)}\,dx,$$
$$u_2=\frac{\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{z-b\operatorname{cth}(\beta x)}+\int\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^{2b/\beta}dx.$$

11. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+a\gamma-a(a+\gamma)\operatorname{cth}^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2+3b\beta-b^2-b(b+\beta)\operatorname{cth}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{\left[\operatorname{sh}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}}{y-a\operatorname{cth}(\gamma x)}+\int\left[\operatorname{sh}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}dx,$$
$$u_2=\frac{\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{\operatorname{ch}^2(\beta x)\left[z-a\operatorname{cth}(\beta x)+\beta\operatorname{th}(\beta x)\right]}+\int\frac{\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{\operatorname{ch}^2(\beta x)}\,dx.$$

12. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+3a\gamma-\gamma^2-a(a+\gamma)\operatorname{cth}^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2-2\beta^2\operatorname{th}^2(\beta x)-2\beta^2\operatorname{cth}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{\left[\operatorname{sh}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}}{\operatorname{ch}^2(\gamma x)\left[y-a\operatorname{cth}(\gamma x)+\gamma\operatorname{th}(\gamma x)\right]}+\int\frac{\left[\operatorname{sh}(\gamma x)\right]^{2a/\gamma}}{\operatorname{ch}^2(\gamma x)}\,dx,$$
$$u_2=\frac{\operatorname{sh}^2(\beta x)\operatorname{ch}^2(\beta x)}{z-\beta\operatorname{th}(\beta x)-\beta\operatorname{cth}(\beta x)}+\int\operatorname{sh}^2(\beta x)\operatorname{ch}^2(\beta x)\,dx.$$

13. $$\left[ax^n+bx(\operatorname{ch}y)^m\right]\frac{\partial w}{\partial x}+y^k\frac{\partial w}{\partial y}+\left[\gamma z^l+\beta z(\operatorname{th}y)^p\right]\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=x^{1-n}E_1+(n-1)a\int E_1\frac{dy}{y^k},\quad E_1=\exp\left[b(n-1)\int(\operatorname{ch}y)^m\frac{dy}{y^k}\right],$$
$$u_2=z^{1-l}E_2+(l-1)\gamma\int E_2\frac{dy}{y^p},\quad E_2=\exp\left[\beta(l-1)\int(\operatorname{th}y)^p\frac{dy}{y^k}\right].$$

14. $$\left[ax^n+bx(\operatorname{ch}y)^m\right]\frac{\partial w}{\partial x}+\left[\operatorname{ch}(\lambda y)\right]^k\frac{\partial w}{\partial y}+(\gamma z^l y^p+\beta z)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=x^{1-n}E_1+(n-1)a\int\frac{E_1\,dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)},\quad E_1=\exp\left[b(n-1)\int\frac{(\operatorname{ch}y)^m\,dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)}\right],$$
$$u_2=z^{1-l}E_2+(l-1)\gamma\int\frac{y^pE_2\,dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)},\quad E_2=\exp\left[\beta(l-1)\int\frac{dy}{\operatorname{ch}^k(\lambda y)}\right].$$

15. $\left[ax^n + bx(\operatorname{th} y)^m\right]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[\operatorname{th}(\lambda y)\right]^k\dfrac{\partial w}{\partial y} + (\gamma z^l y^p + \beta z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис:

$$u_1 = x^{1-n}E_1 + (n-1)a\int\frac{E_1\,dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)}, \quad E_1 = \exp\left[b(n-1)\int\frac{(\operatorname{th} y)^m\,dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)}\right],$$
$$u_2 = z^{1-l}E_2 + (l-1)\gamma\int\frac{y^pE_2\,dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)}, \quad E_2 = \exp\left[\beta(l-1)\int\frac{dy}{\operatorname{th}^k(\lambda y)}\right].$$

2.1.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $ax\ln(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

2. $ax(\ln x)^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис при $n \neq 1$:

$$u_1 = \frac{1}{a(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $n = 1$ см. уравнение 2.1.5.1.

3. $ax(\ln x)^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + by(\ln y)^m\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис при $m \neq 1$:

$$u_1 = \frac{1}{a(n-1)(\ln x)^{n-1}} - \frac{1}{b(m-1)(\ln y)^{m-1}},$$
$$u_2 = \frac{1}{a(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $m = 1$ см. уравнение 2.1.5.2.

4. $ax(\ln x)^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + by(\ln y)^m\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^l\dfrac{\partial w}{\partial z} = 0.$

Интегральный базис при $l \neq 1$:

$$u_1 = \frac{1}{a(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{b(m-1)(\ln y)^{m-1}},$$
$$u_2 = \frac{1}{a(n-1)(\ln x)^{n-1}} + \frac{1}{c(l-1)(\ln z)^{l-1}}.$$

При $l = 1$ см. уравнение 2.1.5.3.

5. $$ax\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x}+by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)|-\frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2=x^{-c}z^{a}.$$

6. $$ax\ln(\alpha x)(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\alpha x)(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)|-\frac{(\ln y)^{m+1}}{b(m+1)},\quad u_2=x^{-c}z^{a}.$$

При $m=-1$ см. уравнение 2.1.5.5.

7. $$ax(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial x}+by(\ln x)^n\frac{\partial w}{\partial y}+cz(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{(\ln x)^{n+1}}{a(n+1)}-\frac{(\ln y)^{m+1}}{b(m+1)},\quad u_2=x^{-c}z^{a}.$$

При $n=-1$ см. уравнение 2.1.5.6.

8. $$a\ln y\frac{\partial w}{\partial x}+bx^n y\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\gamma z)\ln y\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

1. Интегральный базис при $n\neq-1$:

$$u_1=\frac{x^{n+1}}{a(n+1)^2}\big[(n+1)\ln x-1\big]-\frac{(\ln y)^2}{2b},\quad u_2=\frac{x}{a}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

2. Интегральный базис при $n=-1$:

$$u_1=\frac{(\ln x)^2}{2a}-\frac{(\ln y)^2}{2b},\quad u_2=\frac{x}{a}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

9. $$ay^m\ln y\frac{\partial w}{\partial x}+bx^n\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cy^m z\ln y\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{x^{n+1}}{a(n+1)^2}\big[(n+1)\ln x-1\big]-\frac{y^{m+1}}{b(m+1)^2}\big[(m+1)\ln y-1\big],$$
$$u_2=\frac{x}{a}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $m=-1$ см. уравнение 2.1.5.7.

2.1.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\lambda y\operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y}+\lambda z\operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис: $u_1=yz$, $u_2=y\sin(\lambda x)$.

2. $$\mu\nu\,\mathrm{tg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\nu\,\mathrm{tg}(\mu y)\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\mu\,\mathrm{tg}(\nu z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{\sin(\lambda x)}{\sin(\mu y)}$, $u_2 = \dfrac{\sin(\mu y)}{\sin(\nu z)}$.

3. $$\mu\nu\,\mathrm{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\nu\,\mathrm{ctg}(\mu y)\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\mu\,\mathrm{ctg}(\nu z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис: $u_1 = \dfrac{\cos(\lambda x)}{\cos(\mu y)}$, $u_2 = \dfrac{\cos(\mu y)}{\cos(\nu z)}$.

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + a\gamma\sin(\gamma x) + a^2\sin^2(\gamma x)^2\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[z^2 - b^2 + b\beta\cos(\beta x) + b^2\cos^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\cos(\gamma x)} + \int E_1\,dx \quad E_1 = \exp\left[-\frac{2a}{\gamma}\sin(\gamma x)\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - b\sin(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[-\frac{2b}{\beta}\cos(\beta x)\right].$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + a\gamma\cos(\gamma x) + a^2\cos^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[z^2 - b^2 + c(z+b)\sin(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\sin(\gamma x)} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[-\frac{2a}{\gamma}\cos(\gamma x)\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z+b} + \int E_2\,dx, \qquad E_2 = \exp\left[-2bx - \frac{c}{\beta}\cos(\beta x)\right].$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - b^2 + a(y+b)\sin(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[z^2 + c(xz+1)\sin^m(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{y+b} + \int E_1\,dx, \qquad E_1 = \exp\left[-2bx - \frac{a}{\gamma}\cos(\gamma x)\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz+1)} + \int x^{-2}E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[c\int x\sin^m(\beta x)\,dx\right].$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + a(xy+1)\sin^m(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[z^2 + b\beta + b(\beta - b)\,\mathrm{tg}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{[\cos(\beta x)]^{-2b/\beta}}{z - b\,\mathrm{tg}(\beta x)} + \int[\cos(\beta x)]^{-2b/\beta}\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \quad E = \exp\left[a\int x\sin^m(\gamma x)\,dx\right].$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + a\gamma + a(\gamma - a)\,\mathrm{tg}^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + \beta^2 + 3b\beta + b(\beta - b)\,\mathrm{tg}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{\left[\cos(\gamma x)\right]^{-2a/\gamma}}{y - a\,\mathrm{tg}(\gamma x)} + \int \left[\cos(\gamma x)\right]^{-2a/\gamma} dx,$$

$$u_2 = \frac{E}{z - b\,\mathrm{tg}(\beta x) + \beta\,\mathrm{ctg}(\beta x)} + \int E\,dx, \quad E = \frac{\left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta}}{\sin^2(\beta x)}.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + \gamma^2 + 3a\gamma + a(\gamma - a)\,\mathrm{tg}^2(\gamma x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + b\beta + b(\beta - b)\,\mathrm{ctg}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{\left[\sin(\beta x)\right]^{-2b/\beta}}{z + b\,\mathrm{ctg}(\beta x)} + \int \left[\sin(\beta x)\right]^{-2b/\beta} dx,$$

$$u_2 = \frac{E}{y - a\,\mathrm{tg}(\gamma x) + \gamma\,\mathrm{ctg}(\gamma x)} + \int E\,dx, \quad E = \frac{\left[\cos(\gamma x)\right]^{-2a/\gamma}}{\sin^2(\gamma x)}.$$

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + \left[a(y^2 + bx^{2k})\sin^m(\gamma x) + ky\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[c(z^2 + dx^{2l})\,\mathrm{tg}^n(\beta x) + lz\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \mathrm{arctg}\,\frac{x^{-k}y}{b} - ab\int x^{k-1}\sin^m(\gamma x)\,dx,$$

$$u_2 = \mathrm{arctg}\,\frac{x^{-l}z}{d} - cd\int x^{l-1}\left[\mathrm{tg}(\beta x)\right]^n dx.$$

11. $$\left[ax^n + bx(\mathrm{tg}\,y)^m\right]\frac{\partial w}{\partial x} + \mathrm{tg}^k(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[cz^l(\mathrm{tg}\,y)^p + dz\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = x^{1-n}E_1 + a(n-1)\int \frac{E_1\,dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda x)}, \qquad E_1 = \exp\left[b(n-1)\int \frac{(\mathrm{tg}\,y)^m\,dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda x)}\right],$$

$$u_2 = z^{1-l}E_2 + c(l-1)\int \frac{E_2(\mathrm{tg}\,y)^p\,dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda x)}, \quad E_2 = \exp\left[d(l-1)\int \frac{dy}{\mathrm{tg}^k(\lambda x)}\right].$$

12. $$\left[ax^n + bx(\cos y)^m\right]\frac{\partial w}{\partial x} + y^k\frac{\partial w}{\partial y} + \left[cz^l + dz(\mathrm{tg}\,y)^p\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = x^{1-n}E_1 + a(n-1)\int E_1\frac{dy}{y^k}, \quad E_1 = \exp\left[b(n-1)\int(\cos y)^m\frac{dy}{y^k}\right],$$

$$u_2 = z^{1-l}E_2 + c(l-1)\int E_2\frac{dy}{y^k}, \qquad E_2 = \exp\left[d(l-1)\int(\mathrm{tg}\,y)^p\frac{dy}{y^k}\right].$$

13. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \left[(k+1)x^k y^2 - a(x^{k+1}y - 1)(\operatorname{tg} x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[d(z - bx^n - c)^2\left[\sin(\lambda x + \mu)\right]^l + bnx^{n-1}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{e^x}{z - bx^n - c} + d\int e^x\left[\sin(\lambda x + \mu)\right]^l dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E\,dx,$$

где $E = \exp\left[a\int x^{k+1}(\operatorname{tg} x)^m dx\right]$.

2.1.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

► *В уравнениях 1–4 и соответствующих решениях функцию* arcsin *можно заменить на* arccos.

1. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + b(y+a)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[z^2 + c(xz+1)(\arcsin x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{e^{-2ax}E_1}{y+a} + \int e^{-2ax}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[b\int(\arcsin x)^n dx\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz+1)} + \int x^{-2}E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[c\int x(\arcsin x)^m dx\right].$$

2. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \left[(k+1)x^k y^2 - c(x^{k+1}y - 1)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[d(z^2 - b^2)(\arcsin x)^m + a(z+b)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E_1\,dx,$$
$$u_2 = \frac{e^{ax}E_2}{z+b} + d\int e^{ax}(\arcsin x)^m E_2\,dx,$$

где

$$E_1 = \exp\left[c\int x^{k+1}(\arcsin x)^n dx\right], \quad E_2 = \exp\left[-2bd\int(\arcsin x)^m dx\right].$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \left[c(y^2 - d^2)(\arcsin x)^n + dmx^{m-1}\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[k(z - ax^p - b)^2(\arcsin x)^l + apx^{p-1}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{z - ax^p - b} + k\int(\arcsin x)^l dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - dx^m} + c\int(\arcsin x)^n E\,dx,$$

где $E = \exp\left[2cd\int x^m(\arcsin x)^n\,dx\right]$.

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x} - \left[d(y^2 + p^2x^{2k})(\arcsin x)^n + ky\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[(ax^{2l}z^2 + bx^lz + c)(\arcsin x)^m - lz\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{px^k} - dp\int x^{k-1}(\arcsin x)^n\,dx,$$
$$u_2 = \int\frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{l-1}(\arcsin x)^m\,dx, \quad \text{где } v = x^lz.$$

▶ *В уравнениях 5–8 и соответствующих решениях функцию* arctg *можно заменить на* arcctg.

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + b(y + a)(\operatorname{arctg} x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[z^2 + c(xz + 1)(\operatorname{arctg} x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{e^{-2ax}E_1}{y + a} + \int e^{-2ax}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[b\int(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz + 1)} + \int x^{-2}E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[c\int x(\operatorname{arctg} x)^m\,dx\right].$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \left[(k + 1)x^ky^2 - c(x^{k+1}y - 1)(\operatorname{arctg} x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[d(z^2 - b^2)(\operatorname{arctg} x)^m + a(z + b)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{E_1}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k + 1)\int x^{-k-2}E_1\,dx,$$
$$u_2 = \frac{e^{ax}E_2}{z + b} + d\int e^{ax}(\operatorname{arctg} x)^mE_2\,dx,$$

$$E_1 = \exp\left[c\int x^{k+1}(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\right], \quad E_2 = \exp\left[-2bd\int(\operatorname{arctg} x)^m\,dx\right].$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \left[c(y^2 - d^2)(\operatorname{arctg} x)^n + dmx^{m-1}\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[k(z - ax^p - b)^2(\operatorname{arctg} x)^l + apx^{p-1}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{z - ax^p - b} + k\int(\operatorname{arctg} x)^l\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - dx^m} + c\int(\operatorname{arctg} x)^nE\,dx, \quad E_1 = \exp\left[2cd\int x^m(\operatorname{arctg} x)^n dx\right].$$

8. $$x\frac{\partial w}{\partial x} - \left[d(y^2 + p^2x^{2k})(\operatorname{arctg} x)^n + ky\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left[(ax^{2l}z^2 + bx^lz + c)(\operatorname{arctg} x)^m - lz\right]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{px^k} - dp\int x^{k-1}(\operatorname{arctg} x)^n\,dx,$$
$$u_2 = \int\frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{l-1}(\operatorname{arctg} x)^m\,dx, \quad \text{где } v = x^lz.$$

2.1.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + [z + f(x,y)]\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = \frac{z}{x} - \int_a^x f\left(\tau, \frac{y}{x}\tau\right)\tau^{-2}\,d\tau.$$

2. $$a\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{sh}(\gamma x)\frac{\partial w}{\partial y} + f_1(x)f_2(z)\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a\gamma}\operatorname{ch}(\gamma x) - \frac{1}{b\beta}\operatorname{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a}\int f_1(x)\,dx - \int\frac{dz}{f_2(z)}.$$

3. $$a\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{sh}(\gamma x)\frac{\partial w}{\partial y} + f(x)\frac{\operatorname{sh}(\beta y)}{\operatorname{sh}(\gamma z)}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{1}{a\gamma}\operatorname{ch}(\gamma x) - \frac{1}{b\beta}\operatorname{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a}\int f(x)\,dx - \frac{1}{\gamma}\operatorname{ch}(\gamma z).$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + a\lambda\operatorname{sh}(\lambda x) - a^2\operatorname{sh}^2(\lambda x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + f(x)\operatorname{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \int f(x)\,dx - \frac{1}{\gamma}\ln\left|\operatorname{th}\frac{\gamma z}{2}\right|,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - a\operatorname{ch}(\lambda x)} + \int E\,dx, \qquad E = \exp\left[\frac{2a}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\right].$$

5. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int\frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

6. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x}+f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис при $n\neq 1$:

$$u_1=\frac{(n-1)\ln x+1}{a(n-1)^2x^{n-1}}+\int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2=\frac{x^{1-n}}{a(1-n)}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $n=1$ см. уравнение 2.1.8.2.

7. $$ax\frac{\partial w}{\partial x}+f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис при $m\neq 1$:

$$u_1=\frac{(\ln x)^2}{2a}-\int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2=\frac{1}{a}\ln x-\frac{1}{c(m-1)}(\ln z)^{1-m}.$$

При $m=1$ см. уравнение 2.1.8.2.

8. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x}+f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z}=0.$$

Интегральный базис $n\neq 1$:

$$u_1=\frac{(n-1)\ln x+1}{a(n-1)^2x^{n-1}}+\int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2=\frac{x^{1-n}}{a(1-n)}-\frac{(\ln z)^{1-m}}{c(m-1)}.$$

При $n=1$ см. уравнение 2.1.8.4.

2.2. Линейные уравнения вида $f_1\frac{\partial w}{\partial x}+f_2\frac{\partial w}{\partial y}+f_3\frac{\partial w}{\partial z}=g,\quad f_i=f_i(x,y,z)$

2.2.1. Предварительные замечания

1. Линейное неоднородное уравнение с тремя независимыми переменными имеет вид

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x}+f_2(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y}+f_3(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z}=g(x,y,z). \tag{1}$$

Если найдены три независимых интеграла

$$u_1(x,y,z,w)=C_1,\quad u_2(x,y,z,w)=C_2,\quad u_3(x,y,z,w)=C_3$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f_1(x,y,z)}=\frac{dy}{f_2(x,y,z)}=\frac{dz}{f_3(x,y,z)}=\frac{dw}{g(x,y,z)},$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1,u_2,u_3)=0,$$

где Φ — произвольная функция трех аргументов.

2. Если известен интегральный базис $u_1(x,y,z)$, $u_2(x,y,z)$ соответствующего «укороченного» однородного уравнения

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+f_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+f_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

то переход от x, y, z к новым переменным x, $u_1 = u_1(x,y,z)$, $u_2 = u_2(x,y,z)$ приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$\overline{f}_1(x,u_1,u_2)\frac{\partial w}{\partial x} = \overline{g}(x,u_1,u_2), \tag{2}$$

которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметрами u_1, u_2. Коэффициенты уравнения $\overline{f}_1$, $\overline{g}$ получаются из f_1, g в результате подстановки в них новых аргументов.

Решая уравнение (2), находим

$$w = \Phi(u_1,u_2) + \int \frac{\overline{g}(x,u_1,u_2)}{\overline{f}_1(x,u_1,u_2)}\,dx. \tag{3}$$

Здесь Φ — произвольная функция, а при вычислении интеграла u_1 и u_2 рассматриваются как параметры. Для нахождения общего интеграла уравнения (1) необходимо в формуле (3) после интегрирования перейти к исходным переменным x, y, z.

3. Если известен интегральный базис u_1, u_2 соответствующего однородного уравнения (при $g \equiv 0$) и частное решение $w_0(x,y,z)$ исходного неоднородного уравнения, то общее решение может быть найдено по формуле

$$w = w_0 + \Phi(u_1,u_2),$$

где Φ — произвольная функция.

2.2.2. Уравнения, содержащие степенные функции

► $\boxed{\text{Функции } f_1,\ f_2,\ f_3 \text{ линейны по переменным } x,\ y,\ z}$

1. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = (\alpha a + \beta b + \gamma c)(\alpha x + \beta y + \gamma z).$

Общее решение:

$$w = \tfrac{1}{2}(\alpha a + \beta b + \gamma c)(\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + \Phi(bx - ay,\ cy - bz).$$

2. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = xyz.$

Общее решение:

$$w = \tfrac{1}{2}x^2yz - \tfrac{1}{6}x^3(bz - cy) + \tfrac{1}{12}bcx^4 + \Phi(y - bx,\ z - cx).$$

3. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{-1}.$

Общее решение: $\displaystyle w = \frac{k}{a}\ln x + \Phi(bx - ay, cx - az).$

4. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n, \qquad n \neq -1.$

Общее решение: $\displaystyle w = \frac{k}{a(n+1)}x^{n+1} + \Phi(bx - ay, cx - az).$

5. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{-1}.$$

Общее решение: $w = \frac{k}{a}\ln x + \Phi\big(y^a e^{-bx}, z^a e^{-cx}\big)$.

6. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n, \qquad n \neq -1.$$

Общее решение: $w = \frac{k}{a(n+1)}x^{n+1} + \Phi\big(y^a e^{-bx}, z^a e^{-cx}\big)$.

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{-1}.$$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} (cy + Az)e^{-Ax} & \text{при } bc > 0, \\ cy\cos Ax + Az\sin Ax & \text{при } bc < 0, \end{cases}$$

где $A = \sqrt{|bc|}$.

Общее решение: $w = k\ln x + \Phi(u_1, u_2)$.

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n, \qquad n \neq -1.$$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} (cy + Az)e^{-Ax} & \text{при } bc > 0, \\ cy\cos Ax + Az\sin Ax & \text{при } bc < 0, \end{cases}$$

где $A = \sqrt{|bc|}$.

Общее решение: $w = \frac{k}{n+1}x^{n+1} + \Phi(u_1, u_2)$.

9. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = k.$$

Общее решение: $w = \frac{k}{c}\ln|z| + \Phi\Big(\frac{y^b}{x^a}, \frac{y^b}{z^c}\Big)$.

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n, \qquad n \neq 0.$$

Общее решение: $w = \frac{k}{n}x^n + \Phi\Big(\frac{x^b}{y}, \frac{x^c}{z}\Big)$.

11. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = k.$$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} \dfrac{cy - \alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc > 0, \\ x^\alpha \exp\Big(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\Big) & \text{при } bc < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{|bc|}$.

Общее решение: $w = k\ln x + \Phi(u_1, u_2)$.

12. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + bz\dfrac{\partial w}{\partial y} + cy\dfrac{\partial w}{\partial z} = kx^n, \qquad n \neq 0.$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} \dfrac{cy - \alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc > 0, \\ x^\alpha \exp\Bigl(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\Bigr) & \text{при } bc < 0, \end{cases}$$

где $\alpha = \sqrt{|bc|}$.

Общее решение: $w = \dfrac{k}{n}x^n + \Phi(u_1, u_2)$.

13. $bcx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c(by + cz)\dfrac{\partial w}{\partial y} + b(by - cz)\dfrac{\partial w}{\partial z} = k.$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = \bigl[by + (\sqrt{2} - 1)cz\bigr]x^{-\sqrt{2}}, \quad u_2 = \bigl[by - (\sqrt{2} + 1)cz\bigr]x^{\sqrt{2}}.$$

Общее решение: $w = \dfrac{k}{bc}\ln x + \Phi(u_1, u_2)$.

Частный интеграл: $w = \dfrac{k}{bc}\ln x + \Phi\bigl(b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2\bigr)$.

14. $bcx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c(by + cz)\dfrac{\partial w}{\partial y} + b(by - cz)\dfrac{\partial w}{\partial z} = kx^n, \qquad n \neq 0.$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = \bigl[by + (\sqrt{2} - 1)cz\bigr]x^{-\sqrt{2}}, \quad u_2 = \bigl[by - (\sqrt{2} + 1)cz\bigr]x^{\sqrt{2}}.$$

Общее решение: $w = \dfrac{k}{bcn}x^n + \Phi(u_1, u_2)$.

Частный интеграл: $w = \dfrac{k}{bcn}x^n + \Phi\bigl(b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2\bigr)$.

▶ Другие уравнения

15. $ax^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + by^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz^2\dfrac{\partial w}{\partial z} = abcxyz.$

Интегральный базис однородного уравнения:

$$u_1 = \frac{1}{ax} - \frac{1}{by}, \quad u_2 = \frac{1}{ax} - \frac{1}{cz}.$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$w_0 = abcxyz\left[\frac{ax\ln(ax)}{(ax - by)(ax - cz)} + \frac{by\ln(by)}{(by - ax)(by - cz)} + \frac{cy\ln(cy)}{(cz - ax)(cz - by)}\right].$$

Общее решение: $w = w_0 + \Phi(u_1,\, u_2)$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + ax^n y^m \dfrac{\partial w}{\partial y} + bx^\nu y^\mu z^\lambda \dfrac{\partial w}{\partial z} = cx^l.$

1. Интегральный базис однородного уравнения в случае $m \neq 1$, $n \neq -1$:

$$u_1 = \frac{1}{k} y^k - \frac{a}{n+1} x^{n+1}, \qquad k = 1 - m;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b \displaystyle\int x^\nu \Big(ku_1 + \frac{ak}{n+1} x^{n+1}\Big)^{\mu/k} dx & \text{при } \lambda \neq 1; \\ \ln z - b \displaystyle\int x^\nu \Big(ku_1 + \frac{ak}{n+1} x^{n+1}\Big)^{\mu/k} dx & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

2. Интегральный базис однородного уравнения в случае $m = 1$, $n \neq -1$:

$$u_1 = \ln y - \frac{a}{s} x^s, \qquad s = n + 1;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - by^\mu \exp\Big(-\dfrac{a\mu}{s} x^s\Big) \displaystyle\int x^\nu \exp\Big(\frac{a\mu}{s} x^s\Big) dx & \text{при } \lambda \neq 1; \\ \ln z - by^\mu \exp\Big(-\dfrac{a\mu}{s} x^s\Big) \displaystyle\int x^\nu \exp\Big(\frac{a\mu}{s} x^s\Big) dx & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

3. Интегральный базис однородного уравнения в случае $m \neq 1$, $n = -1$:

$$u_1 = \frac{1}{k} y^k - a \ln x, \qquad k = 1 - m;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b \displaystyle\int x^\nu (ku_1 + ak \ln x)^{\mu/k} dx & \text{при } \lambda \neq 1; \\ \ln z - b \displaystyle\int x^\nu (ku_1 + ak \ln x)^{\mu/k} dx & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

4. Интегральный базис однородного уравнения в случае $m = 1$, $n = -1$:

$$u_1 = x^{-a} y,$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \dfrac{bx^{\nu+1} y^\mu}{a\mu + \nu + 1} & \text{при } \lambda \neq 1,\ a\mu + \nu \neq -1; \\ \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - by^\mu x^{-a\mu} \ln x & \text{при } \lambda \neq 1,\ a\mu + \nu = -1; \\ \ln z - \dfrac{bx^{\nu+1} y^\mu}{a\mu + \nu + 1} & \text{при } \lambda = 1,\ a\mu + \nu \neq -1; \\ \ln z - by^\mu x^{-a\mu} \ln x & \text{при } \lambda = 1,\ a\mu + \nu = -1. \end{cases}$$

При интегрировании величина u_1 рассматривается как константа.

5. Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{c}{l+1} x^{l+1} & \text{при } l \neq -1, \\ c \ln x & \text{при } l = -1, \end{cases}$$

где u_1, u_2 — интегральный базис однородного уравнения (см. пп. 1–4).

17. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + a\sqrt{x^2+y^2}\,\dfrac{\partial w}{\partial z} = bx^n.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + w_0(x),$$

$$u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = a\sqrt{x^2+y^2} - z, \quad w_0(x) = \begin{cases} (b/n)x^n & \text{при } n \neq 0, \\ b\ln x & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

18. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + \bigl(z - a\sqrt{x^2+y^2+z^2}\bigr)\dfrac{\partial w}{\partial z} = bx^n.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + w_0(x),$$

$$u_1 = \frac{y}{x}, \ u_2 = x^{a-1}\bigl(z + \sqrt{x^2+y^2+z^2}\bigr), \ w_0(x) = \begin{cases} (b/n)x^n & \text{при } n \neq 0, \\ b\ln x & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

2.2.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $ae^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} + ce^{\gamma z}\dfrac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{ke^{(\lambda-\alpha)x}}{a(\lambda-\alpha)} & \text{при } \lambda \neq \alpha, \\ \dfrac{k}{a}x & \text{при } \lambda = \alpha, \end{cases}$$

где $u_1 = -\dfrac{1}{a\alpha}e^{-\alpha x} + \dfrac{1}{b\beta}e^{-\beta y}$, $u_2 = -\dfrac{1}{b\beta}e^{-\beta y} + \dfrac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}$.

2. $ae^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + ce^{\gamma z}\dfrac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{bk\beta}{a\lambda}\left[\dfrac{e^{-\alpha x}}{a(\lambda-\alpha)} + \dfrac{e^{-\beta y}}{b\beta}\right]e^{\lambda x} & \text{при } \lambda \neq \alpha,\ \lambda \neq 0; \\ \dfrac{k}{a\alpha}e^{\alpha x-\beta y} + \dfrac{bk\beta}{a^2\alpha}\left(x - \dfrac{1}{\alpha}\right) & \text{при } \lambda = \alpha \neq 0; \\ \dfrac{k}{a}xe^{-\beta y} - \dfrac{bk\beta}{a^2\alpha}e^{-\alpha x}\left(x + \dfrac{1}{\alpha}\right) & \text{при } \lambda = 0, \end{cases}$$

где $u_1 = -\dfrac{1}{a\alpha}e^{-\alpha x} + \dfrac{1}{b\beta}e^{-\beta y}$, $u_2 = \dfrac{\beta y - \alpha x}{b\beta e^{-\alpha x} - a\alpha e^{-\beta y}} + \dfrac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}$.

3. $axe^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x}+bye^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y}+cze^{\gamma z}\dfrac{\partial w}{\partial z}=kxe^{\lambda x}.$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,u_2)+\begin{cases}\dfrac{ke^{(\lambda-\alpha)x}}{a(\lambda-\alpha)} & \text{при } \lambda\neq\alpha;\\ \dfrac{k}{a}x & \text{при } \lambda=\alpha,\end{cases}$$

где

$$u_1=-\frac{1}{a\alpha}\Big(x^{-1}e^{-\alpha x}+\int x^{-2}e^{-\alpha x}dx\Big)+\frac{1}{b\beta}\Big(y^{-1}e^{-\beta y}+\int y^{-2}e^{-\beta y}dy\Big),$$
$$u_2=-\frac{1}{a\alpha}\Big(x^{-1}e^{-\alpha x}+\int x^{-2}e^{-\alpha x}dx\Big)+\frac{1}{c\gamma}\Big(z^{-1}e^{-\gamma z}+\int z^{-2}e^{-\gamma z}dz\Big).$$

4. $(a_1+a_2e^{\alpha x})\dfrac{\partial w}{\partial x}+(b_1+b_2e^{\beta y})\dfrac{\partial w}{\partial y}+$

$$+(c_1+c_2e^{\gamma z})\frac{\partial w}{\partial z}=k_1+k_2e^{\alpha x}.$$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,u_2)+\frac{k_1}{a_1}x+\frac{1}{\alpha}\Big(\frac{k_2}{a_2}-\frac{k_1}{a_1}\Big)\ln(a_1+a_2e^{\alpha x}),$$

где

$$u_1=\frac{1}{a_1\alpha}\big[\alpha x-\ln(a_1+a_2e^{\alpha x})\big]-\frac{1}{b_1\beta}\big[\beta y-\ln(b_1+b_2e^{\beta y})\big],$$
$$u_2=\frac{1}{a_1\alpha}\big[\alpha x-\ln(a_1+a_2e^{\alpha x})\big]-\frac{1}{c_1\gamma}\big[\gamma z-\ln(c_1+c_2e^{\gamma z})\big].$$

5. $e^{\beta y}(a_1+a_2e^{\alpha x})\dfrac{\partial w}{\partial x}+e^{\alpha x}(b_1+b_2e^{\beta y})\dfrac{\partial w}{\partial y}+$

$$+ce^{\beta y+\gamma z}\frac{\partial w}{\partial z}=k_3e^{\beta y}(k_1+k_2e^{\alpha x}).$$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,u_2)+\frac{k_1k_3}{a_1}x+\frac{k_3}{\alpha}\Big(\frac{k_2}{a_2}-\frac{k_1}{a_1}\Big)\ln(a_1+a_2e^{\alpha x}),$$

где

$$u_1=\frac{1}{a_2\alpha}\ln(a_1+a_2e^{\alpha x})-\frac{1}{b_1\beta}\ln(b_1+b_2e^{\beta y}),$$
$$u_2=\frac{1}{a_1\alpha}\big[\alpha x-\ln(a_1+a_2e^{\alpha x})\big]-\frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+\big[y^2+ae^{\alpha x}(\alpha-ae^{\alpha x})\big]\dfrac{\partial w}{\partial y}+$

$$+\big[z^2+ce^{\beta x}(\beta-b-ce^{\beta x})\big]\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\dfrac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y-ae^{\alpha x}}+\int E_1\,dx,\quad E_1=\exp\Big(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x}\Big),$$
$$u_2=\frac{E_2}{z-ce^{\beta x}}+\int E_2\,dx,\quad E_2=\exp\Big(\frac{2c}{\beta}e^{\beta x}+bx\Big).$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + by + ae^{\alpha x}(\alpha - b - ae^{\alpha x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + ce^{\beta x}(z-d) - d^2\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - ae^{\alpha x}} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x} + bx\right),$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - c} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left(\frac{c}{\beta}e^{\beta x} + 2dx\right).$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + by + ae^{\alpha x}(y - b) - b^2\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + c(xz-1)e^{\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - b} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left(\frac{a}{\alpha}e^{\alpha x} + 2bx\right),$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz-1)} + \int x^2E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[\frac{c}{\beta^2(\beta x - 1)}e^{\beta x}\right].$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + ae^{\alpha x}(x+1)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[ce^{\beta x}z^2 + be^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1 = \frac{E}{x(xy-1)} + \int x^2E\,dx, \quad E = \exp\left[\frac{a}{\alpha^2}(\alpha x - 1)e^{\alpha x}\right],$$
$$u_2 = \int\frac{dv}{cv^2 + \beta v + b} - x, \quad v = e^{\beta x}z.$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ay^2e^{\alpha x} + be^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[de^{\beta x}z^2 + ce^{\gamma x}(\gamma - cde^{(\beta+\gamma)x})\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, здесь

$$u_1 = \int\frac{dv}{av^2 + \alpha v + b} - x, \quad v = e^{\alpha x}y;$$
$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{E}{z - ce^{\gamma x}} + \displaystyle\int E\,dx & \text{при } \beta + \gamma \neq 0, \\[2mm] \dfrac{z - ce^{\gamma x} + 2cd}{z - ce^{\gamma x}}e^{2cdx} & \text{при } \beta + \gamma = 0, \end{cases}$$

где $E = \exp\left[\frac{2cd}{\beta + \gamma}e^{(\beta+\gamma)x}\right]$.

11. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[be^{\alpha x}y^2 + ae^{\beta x}(\beta - abe^{(\alpha+\beta)x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left(cz^2e^{\gamma x} + dz + ke^{-\gamma x}\right)\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, здесь

$$u_1 = \int \frac{dv}{cv^2 + (d+\gamma)v + k} - x, \qquad v = e^{\gamma x}z;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{E}{y - ae^{\beta x}} + \displaystyle\int E\,dx & \text{при } \alpha+\beta \neq 0, \\ \dfrac{z - ae^{\beta x} + 2ab}{y - ae^{\beta x}}e^{2abx} & \text{при } \alpha+\beta = 0, \end{cases}$$

где $E = \exp\left[\frac{2ab}{\alpha+\beta}e^{(\alpha+\beta)x}\right]$.

12. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ae^{\alpha x}y^2 + by + ce^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\beta x}z^2 + de^{\gamma x}(z+\beta)e^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, здесь

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + (b+\alpha)v + c} - x, \qquad v = e^{\alpha x}y;$$

$$u_2 = \frac{1}{z + \beta e^{\beta x}}\exp\left(\frac{c}{\gamma}e^{\gamma x} - 2\beta x\right) + \int \exp\left(\frac{c}{\gamma}e^{\gamma x} - \beta x\right)dx.$$

13. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(e^{\alpha x}y^2 + aye^{\beta x} + a\alpha e^{(\gamma-\beta)x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} - \left[\gamma e^{\gamma x}z^2 - be^{\delta x}(z + e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1 = \frac{1}{y + \alpha e^{-\alpha x}}\exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\right) + \int \exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - \alpha x\right)dx,$$

$$u_2 = \frac{1}{z - e^{-\gamma x}}\exp\left(\frac{b}{\delta}e^{\delta x} - 2\gamma x\right) - \gamma\int \exp\left(\frac{b}{\delta}e^{\delta x} - \gamma x\right)dx.$$

14. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[\alpha e^{\alpha x}y^2 - ae^{\beta x}(y + e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\gamma x}(z - be^{\delta x})^2 + b\delta e^{\delta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1 = \frac{1}{z - be^{-\delta x}}\exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\right) + \frac{1}{\gamma}e^{\gamma x},$$

$$u_2 = \frac{1}{y - e^{-\alpha x}}\exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\right) + \alpha\int \exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - \alpha x\right)dx.$$

15. $y\dfrac{\partial w}{\partial x}+e^{\lambda x}\big[(2a_1\lambda x+a_1+b_1)y-e^{\lambda x}(a_1^2\lambda x^2+a_1b_1x+c_1)\big]\dfrac{\partial w}{\partial y}-$
$-\big[(nz^2-a_2(2n+1)e^{x}z-b_2z+a_2^2ne^{2x}+a_2b_2e^{x}-c_2\big]\dfrac{\partial w}{\partial z}=kye^{\mu x}.$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\dfrac{k}{\mu}e^{\mu x}$, где

$$u_1=xE_1+\int\frac{E_1v_1\,dv_1}{\lambda v_1^2-b_1v_1-c_1},\qquad v_1=e^{-\lambda x}y-a_1x,$$
$$u_2=e^{-x}E_2-a_2\int\frac{E_2\,dv_2}{nv_2^2-b_2v_2-c_2},\quad v_2=z-a_2e^{x},$$
$$E_1=\exp\Bigl(a_1\int\frac{dv_1}{\lambda v_1^2-b_1v_1-c_1}\Bigr),\quad E_2=\exp\Bigl(-\int\frac{dv_2}{nv_2^2-b_2v_2-c_2}\Bigr).$$

16. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(y^2+2a\alpha e^{\alpha x^2}-a^2e^{2\alpha x^2})\dfrac{\partial w}{\partial y}+$
$+cz(e^{-2\beta x^2}z+2b^2\beta x)\dfrac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}.$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\dfrac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1=\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\beta x^2}z\Bigr)-bc\int e^{-\beta x^2}\,dx,$$
$$u_2=\frac{E}{y-ae^{\alpha x^2}}+\int E\,dx,\quad E=\exp\Bigl(2a\int e^{\alpha x^2}\,dx\Bigr).$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ae^{-2\alpha x^2}y^2+2\alpha xy+ab^2)\dfrac{\partial w}{\partial y}+$
$+(cx^{\beta}z^2+2\gamma xz+cd^2x^{\beta}e^{2\gamma x^2})\dfrac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}.$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\dfrac{k}{\lambda}e^{\lambda x}$, где

$$u_1=\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\alpha x^2}y\Bigr)-ab\int e^{-\alpha x^2}\,dx,$$
$$u_2=\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{d}e^{-\gamma x^2}z\Bigr)-cd\int e^{-\gamma x^2}\,dx.$$

2.2.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $a\operatorname{sh}(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\operatorname{sh}(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\operatorname{sh}(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z}=k\operatorname{ch}(\alpha x).$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\dfrac{k}{a\alpha}\ln|\operatorname{sh}(\alpha x)|$, где

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\Bigr|-\frac{1}{b\beta}\ln\Bigl|\operatorname{th}\frac{\beta y}{2}\Bigr|,$$
$$u_2=\frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\Bigr|-\frac{1}{c\gamma}\ln\Bigl|\operatorname{th}\frac{\gamma z}{2}\Bigr|.$$

2. $$a \operatorname{sh}(\alpha x) \frac{\partial w}{\partial x} + b \operatorname{sh}(\beta y) \frac{\partial w}{\partial y} + c \operatorname{ch}(\gamma z) \frac{\partial w}{\partial z} = k \operatorname{ch}(\alpha x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{a\alpha} \ln|\operatorname{sh}(\alpha x)|$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{1}{b\beta} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\beta y}{2}\right|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{2}{c\gamma} \operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

3. $$a \operatorname{sh}(\alpha x) \frac{\partial w}{\partial x} + b \operatorname{ch}(\beta y) \frac{\partial w}{\partial y} + c \operatorname{ch}(\gamma z) \frac{\partial w}{\partial z} = k \operatorname{ch}(\alpha x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{a\alpha} \ln|\operatorname{sh}(\alpha x)|$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{2}{b\beta} \operatorname{arctg}(e^{\beta y}),$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{2}{c\gamma} \operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

4. $$a \operatorname{ch}(\alpha x) \frac{\partial w}{\partial x} + b \operatorname{ch}(\beta y) \frac{\partial w}{\partial y} + c \operatorname{ch}(\gamma z) \frac{\partial w}{\partial z} = k \operatorname{sh}(\alpha x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{a\alpha} \ln \operatorname{ch}(\alpha x)$, где

$$u_1 = \frac{2}{a\alpha} \operatorname{arctg}(e^{\alpha x}) - \frac{2}{b\beta} \operatorname{arctg}(e^{\beta y}),$$
$$u_2 = \frac{2}{a\alpha} \operatorname{arctg}(e^{\alpha x}) - \frac{2}{c\gamma} \operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

5. $$a \operatorname{sh}(\beta y) \frac{\partial w}{\partial x} + b \operatorname{sh}(\alpha x) \frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ c \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{sh}(\beta y) \operatorname{sh}(\gamma z) \frac{\partial w}{\partial z} = k \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{sh}(\beta y).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{a\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x)$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{1}{b\beta} \operatorname{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{1}{c\gamma} \ln\left|\operatorname{th}\frac{\gamma z}{2}\right|.$$

6. $$a \operatorname{sh}(\beta y) \frac{\partial w}{\partial x} + b \operatorname{sh}(\alpha x) \frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ c \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{sh}(\beta y) \operatorname{ch}(\gamma z) \frac{\partial w}{\partial z} = k \operatorname{sh}(\alpha x) \operatorname{sh}(\beta y).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{a\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x)$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{1}{b\beta} \operatorname{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a\alpha} \operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{2}{c\gamma} \operatorname{arctg}(e^{\gamma z}).$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 - a^2 + a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x) - a^2[\mathrm{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{sh}(\mu x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)$, где

$$u_1 = \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x) - \frac{1}{c\gamma}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\right|,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - a\,\mathrm{ch}(\lambda x)} + \int E\,dx, \quad E = \exp\left[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right].$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 - a^2 + a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x) - a^2[\mathrm{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ \{z^2 + b\beta - b(b+\beta)[\mathrm{th}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{sh}(\mu x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)$, где

$$u_1 = \frac{[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{z - b\,\mathrm{th}(\beta x)} + \int [\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - a\,\mathrm{ch}(\lambda x)} + \int E\,dx, \quad E = \exp\left[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right].$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + a\alpha - a(a+\alpha)[\mathrm{th}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ \{z^2 + 3b\beta - b^2 - b(b+\beta)[\mathrm{th}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{sh}(\mu x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)$, где

$$u_1 = \frac{[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{y - a\,\mathrm{th}(\alpha x)} + \int [\mathrm{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}\,dx,$$
$$u_2 = \frac{[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\mathrm{sh}(\beta x)]^2[z - a\,\mathrm{th}(\beta x) + \beta\,\mathrm{cth}(\beta x)]} + \int \frac{[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\mathrm{sh}(\beta x)]^2}\,dx.$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + 3a\alpha - \alpha^2 - a(a+\alpha)[\mathrm{th}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ \{z^2 + b\beta - b(b+\beta)[\mathrm{cth}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{sh}(\mu x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)$, где

$$u_1 = \frac{[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\mathrm{sh}(\alpha x)]^2[y - a\,\mathrm{th}(\alpha x) + \alpha\,\mathrm{cth}(\alpha x)]} + \int \frac{[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\mathrm{sh}(\alpha x)]^2}\,dx,$$
$$u_2 = \frac{[\mathrm{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{z - b\,\mathrm{cth}(\beta x)} + \int [\mathrm{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}\,dx.$$

11. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left\{y^2+a\alpha-a(a+\alpha)[\operatorname{cth}(\alpha x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial y}+ \\ +\left\{z^2+3b\beta-b^2-b(b+\beta)[\operatorname{cth}(\beta x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial z}=k\operatorname{sh}(\mu x).$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)$, где

$$u_1=\frac{\left[\operatorname{sh}(\alpha x)\right]^{2a/\alpha}}{y-a\operatorname{cth}(\alpha x)}+\int\left[\operatorname{sh}(\alpha x)\right]^{2a/\alpha}dx,$$

$$u_2=\frac{\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{\left[\operatorname{ch}(\beta x)\right]^2\left[z-a\operatorname{cth}(\beta x)+\beta\operatorname{th}(\beta x)\right]}+\int\frac{\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^{2b/\beta}}{\left[\operatorname{ch}(\beta x)\right]^2}dx.$$

12. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left\{y^2+3a\alpha-\alpha^2-a(a+\alpha)[\operatorname{cth}(\alpha x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial y}+ \\ +\left\{z^2-2\beta^2[\operatorname{th}(\beta x)]^2-2\beta^2[\operatorname{cth}(\beta x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial z}=k\operatorname{sh}(\mu x).$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)$, где

$$u_1=\frac{\left[\operatorname{sh}(\alpha x)\right]^{2a/\alpha}}{\left[\operatorname{ch}(\alpha x)\right]^2\left[y-a\operatorname{cth}(\alpha x)+\alpha\operatorname{th}(\alpha x)\right]}+\int\frac{\left[\operatorname{sh}(\alpha x)\right]^{2a/\alpha}}{\left[\operatorname{ch}(\alpha x)\right]^2}dx,$$

$$u_2=\frac{\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^2\left[\operatorname{ch}(\beta x)\right]^2}{z-\beta\operatorname{th}(\beta x)-\beta\operatorname{cth}(\beta x)}+\int\left[\operatorname{sh}(\beta x)\right]^2\left[\operatorname{ch}(\beta x)\right]^2dx.$$

2.2.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $$ax\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x}+by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=k[\ln(\alpha x)]^n.$$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,u_2)+\begin{cases}\dfrac{k}{an}\ln^n(\alpha x) & \text{при } n\neq 0,\\ \dfrac{k}{a}\ln|\ln(\alpha x)| & \text{при } n=0,\end{cases}$$

где

$$u_1=\frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)|-\frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2=\frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)|-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

2. $$ax(\ln x)^n\frac{\partial w}{\partial x}+by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=k(\ln x)^m.$$

Общее решение ($n\neq 1$):

$$w=\Phi(u_1,u_2)+\begin{cases}\dfrac{k}{a(m-n+1)}(\ln x)^{m-n+1} & \text{при } m+1\neq n,\\ \dfrac{k}{a}\ln(\ln x) & \text{при } m+1=n,\end{cases}$$

где

$$u_1=\frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)}-\frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2=\frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $n=1$ см. уравнение 2.2.5.1.

3. $ax(\ln x)^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + by(\ln y)^m \dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = k(\ln x)^l.$

Общее решение ($m \neq 1$):

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{k}{a(l-n+1)}(\ln x)^{l-n+1} & \text{при } l+1 \neq n, \\ \dfrac{k}{a}\ln(\ln x) & \text{при } l+1 = n, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} - \frac{(\ln y)^{1-m}}{b(m-1)}, \quad u_2 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} + \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $m = 1$ см. уравнение 2.2.5.2.

4. $ax(\ln x)^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + by(\ln y)^m \dfrac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^l \dfrac{\partial w}{\partial z} = k(\ln x)^s.$

Общее решение ($l \neq 1$):

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{k}{a(s-n+1)}(\ln x)^{s-n+1} & \text{при } s+1 \neq n, \\ \dfrac{k}{a}\ln(\ln x) & \text{при } s+1 = n, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} + \frac{(\ln y)^{1-m}}{b(m-1)}, \quad u_2 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} + \frac{(\ln z)^{1-l}}{c(l-1)}.$$

При $l = 1$ см. уравнение 2.2.5.3.

5. $ax\ln(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial z} = k[\ln(\alpha x)]^n.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{k}{an}\ln^n(\alpha x) & \text{при } n \neq 0, \\ \dfrac{k}{a}\ln|\ln(\alpha x)| & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|, \quad u_2 = x^{-c}z^a.$$

6. $ax\ln(\alpha x)(\ln y)^m \dfrac{\partial w}{\partial x} + by\dfrac{\partial w}{\partial y} +$

$\qquad + cz\ln(\alpha x)(\ln y)^m \dfrac{\partial w}{\partial z} = k[\ln(\alpha x)]^n(\ln y)^m.$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{k}{an}\ln^n(\alpha x) & \text{при } n \neq 0, \\ \dfrac{k}{a}\ln|\ln(\alpha x)| & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{(\ln y)^{m+1}}{b(m+1)}, \quad u_2 = x^{-c}z^a.$$

При $m = -1$ см. уравнение 2.2.5.5.

7. $$ax \ln^m y \frac{\partial w}{\partial x} + by \ln^n x \frac{\partial w}{\partial y} + cz \ln^m y \frac{\partial w}{\partial z} = k(\ln x)^s \ln^m y.$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{k}{a(s+1)}(\ln x)^{s+1} & \text{при } s \neq -1, \\ \dfrac{k}{a}\ln(\ln x) & \text{при } s = -1, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{n+1}}{a(n+1)} - \frac{(\ln y)^{m+1}}{b(m+1)}, \quad u_2 = x^{-c} z^a.$$

При $n = -1$ см. уравнение 2.2.5.6.

8. $$a \ln y \frac{\partial w}{\partial x} + bx^n y \ln x \frac{\partial w}{\partial y} + cz \ln(\gamma z) \ln y \frac{\partial w}{\partial z} = kx^m \ln x \ln y.$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \begin{cases} \dfrac{kx^{m+1}}{a(m+1)}\left(\ln x - \dfrac{1}{m+1}\right) & \text{при } m \neq -1, \\ \dfrac{k}{2}(\ln x)^2 & \text{при } m = -1, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{x^{n+1}}{a(n+1)^2}\big[(n+1)\ln x - 1\big] - \frac{(\ln y)^2}{2b}, \quad u_2 = \frac{x}{a} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

Интегральный базис при $n = -1$:

$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \frac{(\ln y)^2}{2b}, \quad u_2 = \frac{x}{a} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

2.2.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \lambda y \operatorname{ctg}(\lambda x) \frac{\partial w}{\partial y} + \lambda z \operatorname{ctg}(\lambda x) \frac{\partial w}{\partial z} = a \sin(\alpha x).$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) - \frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x), \qquad \text{где} \quad u_1 = yz, \ u_2 = y\sin(\lambda x).$$

2. $$\mu\nu \operatorname{tg}(\lambda x) \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\nu \operatorname{tg}(\mu y) \frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\mu \operatorname{tg}(\nu z) \frac{\partial w}{\partial z} = a \sin(\lambda x).$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{a}{\lambda\mu\nu}\sin(\lambda x), \qquad \text{где} \quad u_1 = \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\mu y)}, \ u_2 = \frac{\sin(\mu y)}{\sin(\nu z)}.$$

3. $$\mu\nu \operatorname{ctg}(\lambda x) \frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\nu \operatorname{ctg}(\mu y) \frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\mu \operatorname{ctg}(\nu z) \frac{\partial w}{\partial z} = a \cos(\lambda x).$$

Общее решение:

$$w = \Phi(u_1, u_2) - \frac{a}{\lambda\mu\nu}\cos(\lambda x), \qquad \text{где} \quad u_1 = \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\mu y)}, \ u_2 = \frac{\cos(\mu y)}{\cos(\nu z)}.$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left\{y^2 - a^2 + a\alpha\sin(\alpha x) + a^2[\sin(\alpha x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left\{z^2 - b^2 + b\beta\cos(\beta x) + b^2[\cos(\beta x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \dfrac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\cos(\alpha x)} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\sin(\alpha x)\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - b\sin(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[-\frac{2b}{\beta}\cos(\beta x)\right].$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left\{y^2 - a^2 + a\alpha\cos(\alpha x) + a^2[\cos(\alpha x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + [z^2 - b^2 + c(z+b)\sin(\beta x)]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \dfrac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\sin(\alpha x)} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z + b} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[-2bx - \frac{c}{\beta}\cos(\beta x)\right].$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 - b^2 + a(y+b)\sin(\alpha x)]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left\{z^2 + c(xz+1)[\sin(\beta x)]^m\right\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \dfrac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y + b} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[-2bx - \frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz+1)} + \int x^{-2}E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left\{c\int x\left[\sin(\beta x)\right]^m dx\right\}.$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left\{y^2 + a(xy+1)[\sin(\alpha x)]^m\right\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \left\{z^2 + b\beta + b(\beta - b)[\operatorname{tg}(\beta x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \dfrac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left\{a\int x\left[\sin(\alpha x)\right]^m dx\right\},$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - b\operatorname{tg}(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta}.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + a\alpha + a(\alpha - a)[\operatorname{tg}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{z^2 + \beta^2 + 3b\beta + b(\beta - b)[\operatorname{tg}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\operatorname{tg}(\alpha x)} + \int E_1\,dx, \qquad E_1 = \big[\cos(\alpha x)\big]^{-2a/\alpha},$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - b\operatorname{tg}(\beta x) + \beta\cot(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \frac{\big[\cos(\beta x)\big]^{-2b/\beta}}{\big[\sin(\beta x)\big]^2}.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + \alpha^2 + 3a\alpha + a(\alpha - a)[\operatorname{tg}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{z^2 + b\beta + b(\beta - b)[\operatorname{ctg}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{\big[\sin(\beta x)\big]^{-2b/\beta}}{z + b\operatorname{ctg}(\beta x)} + \int \big[\sin(\beta x)\big]^{-2b/\beta}\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - a\operatorname{tg}(\alpha x) + \alpha\operatorname{ctg}(\alpha x)} + \int E\,dx, \quad E = \frac{\big[\cos(\alpha x)\big]^{-2a/\alpha}}{\big[\sin(\alpha x)\big]^2}.$$

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + \{a(y^2 + bx^{2k})[\sin(\alpha x)]^m + ky\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{(cz^2 + dx^{2l})[\operatorname{tg}(\beta x)]^n + lz\}\frac{\partial w}{\partial z} = kx\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{x^{-k}y}{b} - ab\int x^{k-1}\big[\sin(\alpha x)\big]^m\,dx,$$
$$u_2 = \operatorname{arctg}\frac{x^{-l}z}{d} - cd\int x^{l-1}\big[\operatorname{tg}(\beta x)\big]^n\,dx.$$

11. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \big[(k+1)x^k y^2 - a(x^{k+1}y - 1)(\operatorname{tg} x)^m\big]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{d(z - bx^n - c)^2[\sin(\lambda x + \mu)]^l + bnx^{n-1}\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) - \frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)$, где

$$u_1 = \frac{e^x}{z - bx^n - c} + d\int e^x\big[\sin(\lambda x + \mu)\big]^l\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E\,dx,$$
$$E = \exp\Big[a\int x^{k+1}(\operatorname{tg} x)^m\,dx\Big].$$

2.2.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

► *В уравнениях 1–4 функцию* arcsin *можно заменить на* arccos, *при этом в общем решении необходимо изменить знак перед радикалом.*

1. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2-a^2+b(y+a)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2+c(xz+1)(\arcsin x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial z}=k\arcsin\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\arcsin\dfrac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}$, где

$$u_1=\frac{e^{-2ax}E_1}{y+a}+\int e^{-2ax}E_1\,dx,\qquad E_1=\exp\Bigl[b\int(\arcsin x)^n\,dx\Bigr],$$
$$u_2=\frac{E_2}{x(xz+1)}+\int x^{-2}E_2\,dx,\qquad E_2=\exp\Bigl[c\int x(\arcsin x)^m\,dx\Bigr].$$

2. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\left[(k+1)x^ky^2-c(x^{k+1}y-1)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[d(z^2-b^2)(\arcsin x)^m+a(z+b)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=k\arcsin\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\arcsin\dfrac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}$, где

$$u_1=\frac{E_1}{x^{k+1}(x^{k+1}y-1)}-(k+1)\int x^{-k-2}E_1\,dx,$$
$$u_2=\frac{e^{ax}E_2}{z+b}+d\int e^{ax}(\arcsin x)^mE_2\,dx,$$
$$E_1=\exp\Bigl[c\int x^{k+1}(\arcsin x)^n\,dx\Bigr],\quad E_2=\exp\Bigl[-2bd\int(\arcsin x)^m\,dx\Bigr].$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\left[c(y^2-d^2)(\arcsin x)^n+dmx^{m-1}\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[k(z-ax^p-b)^2(\arcsin x)^l+apx^{p-1}\right]\frac{\partial w}{\partial z}=k\arcsin\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\arcsin\dfrac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}$, где

$$u_1=\frac{1}{z-ax^p-b}+k\int(\arcsin x)^l\,dx,$$
$$u_2=\frac{E}{y-dx^m}+c\int E(\arcsin x)^n dx,\quad E=\exp\Bigl[2cd\int x^m(\arcsin x)^n dx\Bigr].$$

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x}-\bigl[d(y^2+p^2x^{2k})(\arcsin x)^n+ky\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +\bigl[(ax^{2l}z^2+bx^lz+c)(\arcsin x)^m-lz\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=kx\arcsin\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\arcsin\frac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}$, где

$$u_1=\operatorname{arctg}\frac{y}{px^k}-dp\int x^{k-1}(\arcsin x)^n\,dx,$$
$$u_2=\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-\int x^{l-1}(\arcsin x)^m\,dx,\quad v=x^lz.$$

► *В уравнениях 5–8 функцию* arctg *можно заменить на* arcctg, *при этом в общем решении необходимо изменить знак перед логарифмом.*

5. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\bigl[y^2-a^2+b(y+a)(\operatorname{arctg}x)^n\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +\bigl[z^2+c(xz+1)(\operatorname{arctg}x)^m\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=k\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\operatorname{arctg}\frac{x}{s}-\frac{s}{2}\ln(s^2+x^2)$, где

$$u_1=\frac{e^{-2ax}E_1}{y+a}+\int e^{-2ax}E_1\,dx,\quad E_1=\exp\Bigl[b\int(\operatorname{arctg}x)^n\,dx\Bigr],$$
$$u_2=\frac{E_2}{x(xz+1)}+\int x^{-2}E_2\,dx,\quad E_2=\exp\Bigl[c\int x(\operatorname{arctg}x)^m\,dx\Bigr].$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\bigl[(k+1)x^ky^2-c(x^{k+1}y-1)(\operatorname{arctg}x)^n\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +\bigl[d(z^2-b^2)(\operatorname{arctg}x)^m+a(z+b)\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=k\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\operatorname{arctg}\frac{x}{s}-\frac{s}{2}\ln(s^2+x^2)$, где

$$u_1=\frac{E_1}{x^{k+1}(x^{k+1}y-1)}-(k+1)\int x^{-k-2}E_1\,dx,$$
$$u_2=\frac{e^{ax}E_2}{z+b}+d\int e^{ax}(\operatorname{arctg}x)^mE_2\,dx,$$
$$E_1=\exp\Bigl[c\int x^{k+1}(\operatorname{arctg}x)^n\,dx\Bigr],\quad E_2=\exp\Bigl[-2bd\int(\operatorname{arctg}x)^m\,dx\Bigr].$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\bigl[c(y^2-d^2)(\operatorname{arctg}x)^n+dmx^{m-1}\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +\bigl[k(z-ax^p-b)^2(\operatorname{arctg}x)^l+apx^{p-1}\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=k\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)+kx\operatorname{arctg}\frac{x}{s}-\frac{s}{2}\ln(s^2+x^2)$, где

$$u_1=\frac{1}{z-ax^p-b}+k\int(\operatorname{arctg}x)^l\,dx,$$
$$u_2=\frac{E}{y-dx^m}+c\int E(\operatorname{arctg}x)^n dx,\quad E=\exp\Bigl[2cd\int x^m(\operatorname{arctg}x)^n dx\Bigr].$$

8. $$x\frac{\partial w}{\partial x} - \bigl[d(y^2 + p^2x^{2k})(\operatorname{arctg} x)^n + ky\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \bigl[(ax^{2l}z^2 + bx^lz + c)(\operatorname{arctg} x)^m - lz\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = kx \operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + kx \operatorname{arctg}\frac{x}{s} - \frac{s}{2}\ln(s^2 + x^2)$, где

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{px^k} - dp\int x^{k-1}(\operatorname{arctg} x)^n\,dx,$$
$$u_2 = \int\frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{l-1}(\operatorname{arctg} x)^m\,dx, \quad v = x^lz.$$

2.2.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + [z + f(x,y)]\frac{\partial w}{\partial z} = g(x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \int\frac{g(x)}{x}\,dx$, где

$$u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = \frac{z}{x} - \int_a^x f\Bigl(\tau, \frac{y}{x}\tau\Bigr)\tau^{-2}\,d\tau.$$

2. $$a\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + f_1(x)f_2(z)\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)\operatorname{sh}(\beta y).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{1}{a}\int g(x)\,dx$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{1}{b\beta}\operatorname{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a}\int f_1(x)\,dx - \int\frac{dz}{f_2(z)}.$$

3. $$a\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x} + b\operatorname{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial y} + f(x)\frac{\operatorname{sh}(\beta y)}{\operatorname{sh}(\gamma z)}\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)\operatorname{sh}(\beta y).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \frac{1}{a}\int g(x)\,dx$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\operatorname{ch}(\alpha x) - \frac{1}{b\beta}\operatorname{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a}\int f(x)\,dx - \frac{1}{\gamma}\operatorname{ch}(\gamma z).$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl\{y^2 - a^2 + a\lambda\operatorname{sh}(\lambda x) - a^2[\operatorname{sh}(\lambda x)]^2\bigr\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + f(x)\operatorname{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \int g(x)\,dx$, где

$$u_1 = \int f(x)\,dx - \frac{1}{\gamma}\ln\Bigl|\operatorname{th}\frac{\gamma z}{2}\Bigr|,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - a\operatorname{ch}(\lambda x)} + \int E\,dx, \quad E = \exp\Bigl[\frac{2a}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\Bigr].$$

5. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{g(x)}{x}\,dx$, где
$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int \frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

6. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{g(x)}{x^n}\,dx$, где
$$u_1 = \frac{(n-1)\ln x + 1}{a(n-1)^2x^{n-1}} + \int \frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{x^{1-n}}{a(1-n)} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$
При $n = 1$ см. уравнение 2.2.8.2.

7. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z} = g(x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{g(x)}{x}\,dx$, где
$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int \frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c(m-1)}(\ln z)^{1-m}.$$
При $m = 1$ см. уравнение 2.2.8.2.

8. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z} = g(x).$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int \frac{g(x)}{x^n}\,dx$, где
$$u_1 = \frac{(n-1)\ln x + 1}{a(n-1)^2x^{n-1}} + \int \frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{x^{1-n}}{a(1-n)} - \frac{(\ln z)^{1-m}}{c(m-1)}.$$
При $n = 1$ см. 2.2.8.4.

2.3. Линейные уравнения вида $f_1\frac{\partial w}{\partial x} + f_2\frac{\partial w}{\partial y} + f_3\frac{\partial w}{\partial z} = gw$, $f_i = f_i(x, y, z)$

2.3.1. Предварительные замечания

1. Линейное неоднородное уравнение с тремя независимыми переменными имеет вид
$$f_1(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x} + f_2(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y} + f_3(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x,y,z)w. \qquad (1)$$

Если найдены три независимых интеграла
$$u_1(x,y,z,w) = C_1, \quad u_2(x,y,z,w) = C_2, \quad u_3(x,y,z,w) = C_3$$
характеристической системы
$$\frac{dx}{f_1(x,y,z)} = \frac{dy}{f_2(x,y,z)} = \frac{dz}{f_3(x,y,z)} = \frac{dw}{g(x,y,z)w},$$

то общее решение уравнения (1) можно записать в виде

$$\Phi(u_1, u_2, u_3) = 0,$$

где Φ — произвольная функция трех аргументов.

2. Если известен интегральный базис $u_1 = u_1(x,y,z)$, $u_2 = u_2(x,y,z)$ соответствующего «укороченного» однородного уравнения

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x} + f_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y} + f_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

то переход от x, y, z к новым переменным x, u_1, u_2 приводит к линейному уравнению

$$\overline{f}_1(x,u_1,u_2)\frac{\partial w}{\partial x} = \overline{g}(x,u_1,u_2)w, \qquad (2)$$

которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w = w(x)$ с параметрами u_1, u_2. Коэффициенты уравнения $\overline{f}_1$, $\overline{g}$ получаются из f_1, g в результате подстановки в них новых аргументов.

Решая уравнение (2), находим

$$w = \Phi(u_1,u_2)\exp\left[\int \frac{\overline{g}(x,u_1,u_2)}{\overline{f}_1(x,u_1,u_2)}\,dx\right]. \qquad (3)$$

Здесь Φ — произвольная функция, а при вычислении обоих интегралов u_1 и u_2 рассматриваются как параметры. Для нахождения общего интеграла уравнения (1) необходимо в формуле (3) после интегрирования перейти к исходным переменным x, y, z.

3. Пусть $g \equiv 0$. Если известен интегральный базис u_1, u_2 соответствующего однородного уравнения (при $g \equiv 0$) и частное решение $w_0(x,y,z)$ исходного неоднородного уравнения, то общее решение может быть найдено по формуле

$$w = e^{w_0}\Phi(u_1,u_2),$$

где Φ — произвольная функция.

2.3.2. Уравнения, содержащие степенные функции

► Функции f, g, h линейны по переменным x, y, z

1. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{-1}w.$

Общее решение: $w = x^{k/a}\Phi(bx - ay,\, cx - az)$.

2. $\displaystyle a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} + c\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{n}w, \quad n \neq -1.$

Общее решение: $w = \exp\left[\dfrac{k}{a(n+1)}x^{n+1}\right]\Phi(bx - ay,\, cx - az)$.

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{-1}w.$$

Общее решение: $w = x^{k/a}\Phi\bigl(y^a e^{-bx}, z^a e^{-cx}\bigr)$.

4. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n w, \quad n \neq -1.$$

Общее решение: $w = \exp\left[\frac{k}{a(n+1)}x^{n+1}\right]\Phi\bigl(y^a e^{-bx}, z^a e^{-cx}\bigr)$.

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = kx^{-1}w.$$

Общее решение: $w = x^k\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} (cy + Az)e^{-Ax} & \text{при } bc > 0, \\ cy\cos Ax + Az\sin Ax & \text{при } bc < 0, \end{cases} \quad A = \sqrt{|bc|}.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n w, \quad n \neq -1.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{n+1}x^{n+1}\right)\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} (cy + Az)e^{-Ax} & \text{при } bc > 0, \\ cy\cos Ax + Az\sin Ax & \text{при } bc < 0, \end{cases} \quad A = \sqrt{|bc|}.$$

7. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kw.$$

Общее решение: $w = z^{c/k}\Phi\left(\frac{x^a}{z^c}, \frac{y^b}{z^c}\right)$.

8. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + by\frac{\partial w}{\partial y} + cz\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n w, \quad n \neq 0.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{n}x^n\right)\Phi\left(\frac{x^b}{y}, \frac{x^c}{z}\right)$.

9. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = kw.$$

Общее решение: $w = x^k\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} \dfrac{cy - \alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc > 0, \\ x^\alpha \exp\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\right) & \text{при } bc < 0, \end{cases} \quad \alpha = \sqrt{|bc|}.$$

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + bz\frac{\partial w}{\partial y} + cy\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n w, \quad n \neq 0.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{n}x^n\right)\Phi(u_1, u_2)$, здесь

$$u_1 = cy^2 - bz^2, \quad u_2 = \begin{cases} \dfrac{cy - \alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc > 0, \\ x^\alpha \exp\left(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\right) & \text{при } bc < 0, \end{cases} \quad \alpha = \sqrt{|bc|}.$$

11. $bcx\frac{\partial w}{\partial x} + c(by+cz)\frac{\partial w}{\partial y} + b(by-cz)\frac{\partial w}{\partial z} = kw.$

Общее решение: $w = x^{\frac{k}{bc}}\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = [by + (\sqrt{2}-1)cz]x^{-\sqrt{2}}, \quad u_2 = [by - (\sqrt{2}+1)cz]x^{\sqrt{2}}.$$

Частный интеграл: $w = x^{k/bc}\Phi(b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2)$.

12. $bcx\frac{\partial w}{\partial x} + c(by+cz)\frac{\partial w}{\partial y} + b(by-cz)\frac{\partial w}{\partial z} = kx^n w, \quad n \neq 0.$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{bcn}x^n\right)\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = [by + (\sqrt{2}-1)cz]x^{-\sqrt{2}}, \quad u_2 = [by - (\sqrt{2}+1)cz]x^{\sqrt{2}}.$$

Частный интеграл: $w = \exp\left(\frac{k}{bcn}x^n\right)\Phi(b^2y^2 - 2bcyz - c^2z^2)$.

▶ Другие уравнения

13. $\frac{\partial w}{\partial x} + ax^n y^m\frac{\partial w}{\partial y} + bx^\nu y^\mu z^\lambda\frac{\partial w}{\partial z} = cx^l w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left(\frac{c}{l+1}x^{l+1}\right)\Phi(u_1, u_2) & \text{при } l \neq -1, \\ x^c\Phi(u_1, u_2) & \text{при } l = -1, \end{cases}$$

где функции $u_1 = u_1(x,y,z)$, $u_2 = u_2(x,y,z)$ приведены ниже.

1. Случай $m \neq 1$, $n \neq -1$:

$$u_1 = \frac{1}{k}y^k - \frac{a}{n+1}x^{n+1}, \qquad k = 1-m;$$

$$u_2 = \begin{cases} \frac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b\int x^\nu\left(ku_1 + \frac{ak}{n+1}x^{n+1}\right)^{\mu/k}dx & \text{при } \lambda \neq 1; \\ \ln z - b\int x^\nu\left(ku_1 + \frac{ak}{n+1}x^{n+1}\right)^{\mu/k}dx & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

2. Случай $m = 1$, $n \neq -1$:

$$u_1 = \ln y - \frac{a}{s}x^s, \qquad s = n+1;$$

$$u_2 = \begin{cases} \frac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - by^\mu\exp\left(-\frac{a\mu}{s}x^s\right)\int x^\nu\exp\left(\frac{a\mu}{s}x^s\right)dx & \text{при } \lambda \neq 1; \\ \ln z - by^\mu\exp\left(-\frac{a\mu}{s}x^s\right)\int x^\nu\exp\left(\frac{a\mu}{s}x^s\right)dx & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

3. Случай $m \neq 1$, $n = -1$:

$$u_1 = \frac{1}{k} y^k - a \ln x, \qquad k = 1 - m;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b \displaystyle\int x^{\nu} (k u_1 + a k \ln x)^{\mu/k}\, dx & \text{при } \lambda \neq 1; \\ \ln z - b \displaystyle\int x^{\nu} (k u_1 + a k \ln x)^{\mu/k}\, dx & \text{при } \lambda = 1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

4. Случай $m = 1$, $n = -1$:

$$u_1 = x^{-a} y,$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - \dfrac{b x^{\nu+1} y^{\mu}}{a\mu + \nu + 1} & \text{при } \lambda \neq 1,\ a\mu + \nu \neq -1; \\ \dfrac{z^{1-\lambda}}{1-\lambda} - b y^{\mu} x^{-a\mu} \ln x & \text{при } \lambda \neq 1,\ a\mu + \nu = -1; \\ \ln z - \dfrac{b x^{\nu+1} y^{\mu}}{a\mu + \nu + 1} & \text{при } \lambda = 1,\ a\mu + \nu \neq -1; \\ \ln z - b y^{\mu} x^{-a\mu} \ln x & \text{при } \lambda = 1,\ a\mu + \nu = -1. \end{cases}$$

При интегрировании u_1 рассматривается как константа.

14. $$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + a\sqrt{x^2 + y^2}\, \frac{\partial w}{\partial z} = b x^n w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\Bigl(\dfrac{b}{n} x^n\Bigr) \Phi\Bigl(\dfrac{y}{x},\ a\sqrt{x^2+y^2} - z\Bigr) & \text{при } n \neq 0, \\ x^b \Phi\Bigl(\dfrac{y}{x},\ a\sqrt{x^2+y^2} - z\Bigr) y & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

15. $$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + \bigl(z - a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\bigr) \frac{\partial w}{\partial z} = b x^n w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\Bigl(\dfrac{b}{n} x^n\Bigr) \Phi\Bigl(\dfrac{y}{x},\ x^{a-1} z + x^{a-1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Bigr) & \text{при } n \neq 0, \\ x^b \Phi\Bigl(\dfrac{y}{x},\ x^{a-1} z + x^{a-1}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\Bigr) & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

2.3.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $$a e^{\alpha x} \frac{\partial w}{\partial x} + b e^{\beta y} \frac{\partial w}{\partial y} + c e^{\gamma z} \frac{\partial w}{\partial z} = k e^{\lambda x} w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\Bigl[\dfrac{k}{a(\lambda - \alpha)} e^{(\lambda-\alpha)x}\Bigr] \Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda \neq \alpha, \\ \exp\Bigl(\dfrac{k}{a} x\Bigr) \Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda = \alpha, \end{cases}$$

где

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha} e^{-\alpha x} + \frac{1}{b\beta} e^{-\beta y}, \quad u_2 = -\frac{1}{b\beta} e^{-\beta y} + \frac{1}{c\gamma} e^{-\gamma z}.$$

2. $ae^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial x} + be^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + ce^{\gamma z}\dfrac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left\{\dfrac{bk\beta}{a\lambda}\left[\dfrac{e^{-\alpha x}}{a(\lambda-\alpha)} + \dfrac{e^{-\beta y}}{b\beta}\right]e^{\lambda x}\right\}\Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda \neq \alpha, \neq 0; \\ \exp\left[\dfrac{k}{a\alpha}e^{\alpha x-\beta y} + \dfrac{bk\beta}{a^2\alpha}\left(x - \dfrac{1}{\alpha}\right)\right]\Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda = \alpha \neq 0; \\ \exp\left[\dfrac{k}{a}xe^{-\beta y} - \dfrac{bk\beta}{a^2\alpha}\left(x + \dfrac{1}{\alpha}\right)e^{-\alpha x}\right]\Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda = 0, \end{cases}$$

где

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha}e^{-\alpha x} + \frac{1}{b\beta}e^{-\beta y}, \quad u_2 = \frac{\beta y - \alpha x}{b\beta e^{-\alpha x} - a\alpha e^{-\beta y}} + \frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

3. $axe^{\alpha x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + bye^{\beta y}\dfrac{\partial w}{\partial y} + cze^{\gamma z}\dfrac{\partial w}{\partial z} = kxe^{\lambda x}w.$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \exp\left[\dfrac{k}{a(\lambda-\alpha)}e^{(\lambda-\alpha)x}\right]\Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda \neq \alpha, \\ \exp\left(\dfrac{k}{a}x\right)\Phi(u_1, u_2) & \text{при } \lambda = \alpha, \end{cases}$$

где

$$u_1 = -\frac{1}{a\alpha}\left(x^{-1}e^{-\alpha x} + \int x^{-2}e^{-\alpha x}\,dx\right) + \frac{1}{b\beta}\left(y^{-1}e^{-\beta y} + \int y^{-2}e^{-\beta y}\,dy\right),$$

$$u_2 = -\frac{1}{a\alpha}\left(x^{-1}e^{-\alpha x} + \int x^{-2}e^{-\alpha x}\,dx\right) + \frac{1}{c\gamma}\left(z^{-1}e^{-\gamma z} + \int z^{-2}e^{-\gamma z}\,dz\right).$$

4. $(a_1 + a_2e^{\alpha x})\dfrac{\partial w}{\partial x} + (b_1 + b_2e^{\beta y})\dfrac{\partial w}{\partial y} +$

$+ (c_1 + c_2e^{\gamma z})\dfrac{\partial w}{\partial z} = (k_1 + k_2e^{\alpha x})w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{k_1}{a_1}x + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{k_2}{a_2} - \frac{k_1}{a_1}\right)\ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\right]\Phi(u_1, u_2),$$

где

$$u_1 = \frac{1}{a_1\alpha}\left[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\right] - \frac{1}{b_1\beta}\left[\beta y - \ln(b_1 + b_2e^{\beta y})\right],$$

$$u_2 = \frac{1}{a_1\alpha}\left[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\right] - \frac{1}{c_1\gamma}\left[\gamma z - \ln(c_1 + c_2e^{\gamma z})\right].$$

5. $e^{\beta y}(a_1 + a_2e^{\alpha x})\dfrac{\partial w}{\partial x} + e^{\alpha x}(b_1 + b_2e^{\beta y})\dfrac{\partial w}{\partial y} +$

$+ ce^{\beta y+\gamma z}\dfrac{\partial w}{\partial z} = k_3e^{\beta y}(k_1 + k_2e^{\alpha x})w.$

Общее решение:

$$w = \exp\left[\frac{k_1k_3}{a_1}x + \frac{k_3}{\alpha}\left(\frac{k_2}{a_2} - \frac{k_1}{a_1}\right)\ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\right]\Phi(u_1, u_2),$$

где

$$u_1=\frac{1}{a_2\alpha}\ln(a_1+a_2e^{\alpha x})-\frac{1}{b_1\beta}\ln(b_1+b_2e^{\beta y}),$$
$$u_2=\frac{1}{a_1\alpha}\left[\alpha x-\ln(a_1+a_2e^{\alpha x})\right]-\frac{1}{c\gamma}e^{-\gamma z}.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+ae^{\alpha x}(\alpha-ae^{\alpha x})\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2+ce^{\beta x}(\beta-b-ce^{\beta x})\right]\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y-ae^{\alpha x}}+\int E_1\,dx,\quad E_1=\exp\left(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x}\right),$$
$$u_2=\frac{E_2}{z-ce^{\beta x}}+\int E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left(\frac{2c}{\beta}e^{\beta x}+bx\right).$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+by+ae^{\alpha x}(\alpha-b-ae^{\alpha x})\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2+ce^{\beta x}(z-d)-d^2\right]\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y-ae^{\alpha x}}+\int E_1\,dx,\quad E_1=\exp\left(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x}+bx\right),$$
$$u_2=\frac{E_2}{z-c}+\int E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left(\frac{c}{\beta}e^{\beta x}+2dx\right).$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+by+ae^{\alpha x}(y-b)-b^2\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[z^2+c(xz-1)e^{\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y-b}+\int E_1\,dx,\quad E_1=\exp\left(\frac{a}{\alpha}e^{\alpha x}+2bx\right),$$
$$u_2=\frac{E_2}{x(xz-1)}+\int x^2E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left[\frac{c}{\beta^2(\beta x-1)}e^{\beta x}\right].$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2+ae^{\alpha x}(x+1)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[ce^{\beta x}z^2+be^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\frac{E}{x(xy-1)}+\int x^2E\,dx,\quad E=\exp\left[\frac{a}{\alpha^2}(\alpha x-1)e^{\alpha x}\right],$$
$$u_2=\int\frac{dv}{cv^2+\beta v+b}-x,\quad v=e^{\beta x}z.$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ay^2 e^{\alpha x} + be^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[de^{\beta x}z^2 + ce^{\gamma x}\left(\gamma - cde^{(\beta+\gamma)x}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + \alpha v + b} - x, \quad v = e^{\alpha x}y;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{z - ce^{\gamma x}}\exp\left[\dfrac{2cde^{(\beta+\gamma)x}}{\beta+\gamma}\right] + \displaystyle\int \exp\left[\dfrac{2cde^{(\beta+\gamma)x}}{\beta+\gamma}\right]dx & \text{при } \beta \neq -\gamma, \\ \dfrac{z - ce^{\gamma x} + 2cd}{z - ce^{\gamma x}}e^{2cdx} & \text{при } \beta = -\gamma. \end{cases}$$

11. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[be^{\alpha x}y^2 + ae^{\beta x}\left(\beta - abe^{(\alpha+\beta)x}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left(cz^2 e^{\gamma x} + dz + ke^{-\gamma x}\right)\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = \int \frac{dv}{cv^2 + (d+\gamma)v + k} - x, \quad v = e^{\gamma x}z;$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{y - ae^{\beta x}}\exp\left[\dfrac{2abe^{(\alpha+\beta)x}}{\alpha+\beta}\right] + \displaystyle\int \exp\left[\dfrac{2abe^{(\alpha+\beta)x}}{\alpha+\beta}\right]dx & \text{при } \alpha \neq -\beta, \\ \dfrac{z - ae^{\beta x} + 2ab}{y - ae^{\beta x}}e^{2abx}, & \text{при } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

12. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ae^{\alpha x}y^2 + by + ce^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\beta x}z^2 + de^{\gamma x}(z+\beta)e^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + (b+\alpha)v + c} - x, \quad v = e^{\alpha x}y,$$

$$u_2 = \frac{E}{z + \beta e^{\beta x}} + \int Ee^{\beta x}\,dx, \quad E = \exp\left(\frac{c}{\gamma}e^{\gamma x} - 2\beta x\right).$$

13. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(e^{\alpha x}y^2 + aye^{\beta x} + a\alpha e^{(\gamma-\beta)x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} - \left[\gamma e^{\gamma x}z^2 - be^{\delta x}\left(z + e^{-\gamma x}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w = \exp\left(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\right)\Phi(u_1, u_2)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y + \alpha e^{-\alpha x}} + \int e^{\alpha x}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\right),$$

$$u_2 = \frac{E_2}{z - e^{-\gamma x}} - \gamma\int e^{\gamma x}E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left(\frac{b}{\delta}e^{\delta x} - 2\gamma x\right).$$

14. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[\alpha e^{\alpha x}y^2-ae^{\beta x}(y+e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +\left[e^{\gamma x}(z-be^{\delta x})^2+b\delta e^{\delta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\frac{E}{z-be^{-\delta x}}+\frac{1}{\gamma}e^{\gamma x},\qquad u_2=\frac{E}{y-e^{-\alpha x}}+\alpha\int e^{\alpha x}E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(\frac{a}{\beta}e^{\beta x}-2\alpha x\Bigr).$$

15. $$y\frac{\partial w}{\partial x}+e^{\lambda x}\bigl[(2a_1\lambda x+a_1+b_1)y-e^{\lambda x}(a_1^2\lambda x^2+a_1b_1x+c_1)\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}-\\ -\bigl[(nz^2-a_2(2n+1)e^xz-b_2z+a_2^2ne^{2x}+a_2b_2e^x-c_2\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=kye^{\mu x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\Bigl(\frac{k}{\mu}e^{\mu x}\Bigr)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=xE_1+\int\frac{E_1v_1\,dv_1}{\lambda v_1^2-b_1v_1-c_1},\qquad v_1=e^{-\lambda x}y-a_1x;$$
$$u_2=e^{-x}E_2-a_2\int\frac{E_2\,dv_2}{nv_2^2-b_2v_2-c_2},\qquad v_2=z-a_2e^x;$$
$$E_1=\exp\Bigl(a_1\int\frac{dv_1}{\lambda v_1^2-b_1v_1-c_1}\Bigr),\qquad E_2=\exp\Bigl(-\int\frac{dv_2}{nv_2^2-b_2v_2-c_2}\Bigr).$$

16. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\bigl(y^2+2a\alpha e^{\alpha x^2}-a^2e^{2\alpha x^2}\bigr)\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +cz(e^{-2\beta x^2}z+2b^2\beta x)\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\beta x^2}z\Bigr)-bc\int e^{-\beta x^2}\,dx,$$
$$u_2=\frac{E}{y-ae^{\alpha x^2}}+\int E\,dx,\qquad E=\exp\Bigl(2a\int e^{\alpha x^2}\,dx\Bigr).$$

17. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\bigl(ae^{-2\alpha x^2}y^2+2\alpha xy+ab^2\bigr)\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +\bigl(cx^\beta z^2+2\gamma xz+cd^2x^\beta e^{2\gamma x^2}\bigr)\frac{\partial w}{\partial z}=ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение: $w=\exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Phi(u_1,u_2)$, где

$$u_1=\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\alpha x^2}y\Bigr)-ab\int e^{-\alpha x^2}\,dx,$$
$$u_2=\operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{d}e^{-\gamma x^2}z\Bigr)-cd\int e^{-\gamma x^2}\,dx.$$

2.3.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{ch}(\alpha x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\bigl[\mathrm{sh}(\alpha x)\bigr]^{\frac{k}{a\alpha}}$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{1}{b\beta}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\beta y}{2}\right|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{1}{c\gamma}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\right|.$$

2. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{ch}(\alpha x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\bigl[\mathrm{sh}(\alpha x)\bigr]^{\frac{k}{a\alpha}}$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{1}{b\beta}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\beta y}{2}\right|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\gamma z}\bigr).$$

3. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{ch}(\alpha x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\bigl[\mathrm{sh}(\alpha x)\bigr]^{\frac{k}{a\alpha}}$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{2}{b\beta}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\beta y}\bigr),$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right| - \frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\gamma z}\bigr).$$

4. $$a\,\mathrm{ch}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{ch}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{sh}(\alpha x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\bigl[\mathrm{ch}(\alpha x)\bigr]^{\frac{k}{a\alpha}}$, где

$$u_1 = \frac{2}{a\alpha}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\alpha x}\bigr) - \frac{2}{b\beta}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\beta y}\bigr),$$
$$u_2 = \frac{2}{a\alpha}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\alpha x}\bigr) - \frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}\bigl(e^{\gamma z}\bigr).$$

5. $$a\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\beta y)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\beta y)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\frac{k}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x) - \frac{1}{b\beta}\,\mathrm{ch}(\beta y), \quad u_2 = \frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x) - \frac{1}{c\gamma}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\right|.$$

6. $$a\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial y}+ c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\beta y)\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=k\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\beta y)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Big[\frac{k}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)\Big]$, где

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{b\beta}\,\mathrm{ch}(\beta y),\quad u_2=\frac{1}{a\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}(e^{\gamma z}).$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\{y^2-a^2+a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x)-a^2[\mathrm{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y}+ c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=k\,\mathrm{sh}(\mu x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Big[\frac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)\Big]$, где

$$u_1=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{c\gamma}\ln\Big|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\Big|,$$
$$u_2=\frac{1}{y-a\,\mathrm{ch}(\lambda x)}\exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Big]+\int\exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Big]\,dx.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\{y^2-a^2+a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x)-a^2[\mathrm{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y}+ \{z^2+b\beta-b(b+\beta)[\mathrm{th}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z}=k\,\mathrm{sh}(\mu x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Big[\frac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)\Big]$, где

$$u_1=\frac{[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{z-b\,\mathrm{th}(\beta x)}+\int[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}\,dx,$$
$$u_2=\frac{1}{y-a\,\mathrm{ch}(\lambda x)}\exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Big]+\int\exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Big]\,dx.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\{y^2+a\alpha-a(a+\alpha)[\mathrm{th}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y}+ \{z^2+3b\beta-b^2-b(b+\beta)[\mathrm{th}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z}=k\,\mathrm{sh}(\mu x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Big[\frac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)\Big]$, где

$$u_1=\frac{[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{y-a\,\mathrm{th}(\alpha x)}+\int[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}\,dx,$$
$$u_2=\frac{[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\mathrm{sh}(\beta x)]^2[z-a\,\mathrm{th}(\beta x)+\beta\,\mathrm{cth}(\beta x)]}+\int\frac{[\mathrm{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\mathrm{sh}(\beta x)]^2}\,dx.$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + 3a\alpha - \alpha^2 - a(a+\alpha)[\operatorname{th}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{z^2 + b\beta - b(b+\beta)[\operatorname{cth}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{z - b\operatorname{cth}(\beta x)} + \int[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^2[y - a\operatorname{th}(\alpha x) + \alpha\operatorname{cth}(\alpha x)]} + \int\frac{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^2}\,dx.$$

11. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + a\alpha - a(a+\alpha)[\operatorname{cth}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{z^2 + 3b\beta - b^2 - b(b+\beta)[\operatorname{cth}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{y - a\operatorname{cth}(\alpha x)} + \int[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\operatorname{ch}(\beta x)]^2[z - a\operatorname{cth}(\beta x) + \beta\operatorname{th}(\beta x)]} + \int\frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\operatorname{ch}(\beta x)]^2}\,dx.$$

12. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + 3a\alpha - \alpha^2 - a(a+\alpha)[\operatorname{cth}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \\ + \{z^2 - 2\beta^2[\operatorname{th}(\beta x)]^2 - 2\beta^2[\operatorname{cth}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^2[y - a\operatorname{cth}(\alpha x) + \alpha\operatorname{th}(\alpha x)]} + \int\frac{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^2}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^2[\operatorname{ch}(\beta x)]^2}{z - \beta\operatorname{th}(\beta x) - \beta\operatorname{cth}(\beta x)} + \int[\operatorname{sh}(\beta x)]^2[\operatorname{ch}(\beta x)]^2\,dx.$$

2.3.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $$ax\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k[\ln(\alpha x)]^n w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\frac{k}{an}\ln^n(\alpha x)\right] & \text{при } n \neq 0, \\ \Phi(u_1, u_2)[\ln(\alpha x)]^{k/a} & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

2. $$ax(\ln x)^n \frac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k(\ln x)^m w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\dfrac{k}{a(m-n+1)}(\ln x)^{m-n+1}\right] & \text{при } m+1 \neq n, \\ \Phi(u_1, u_2)(\ln x)^{k/a} & \text{при } m+1 = n, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|, \quad u_2 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $n = 1$ см. уравнение 2.3.5.1.

3. $$ax(\ln x)^n \frac{\partial w}{\partial x} + by(\ln y)^m \frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k(\ln x)^l w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\dfrac{k}{a(l-n+1)}(\ln x)^{l-n+1}\right] & \text{при } l+1 \neq n, \\ \Phi(u_1, u_2)(\ln x)^{k/a} & \text{при } l+1 = n, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} - \frac{(\ln y)^{1-m}}{b(m-1)}, \quad u_2 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} + \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $m = 1$ см. уравнение 2.3.5.2.

4. $$ax(\ln x)^n \frac{\partial w}{\partial x} + by(\ln y)^m \frac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^l \frac{\partial w}{\partial z} = k(\ln x)^s w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\dfrac{k}{a(s-n+1)}(\ln x)^{s-n+1}\right] & \text{при } s+1 \neq n, \\ \Phi(u_1, u_2)(\ln x)^{k/a} & \text{при } s+1 = n, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} + \frac{(\ln y)^{1-m}}{b(m-1)}, \quad u_2 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} + \frac{(\ln z)^{1-l}}{c(l-1)}.$$

При $l = 1$ см. уравнение 2.3.5.3.

5. $$ax\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial z} = k[\ln(\alpha x)]^n w.$$

Общее решение:

$$w = \begin{cases} \Phi(u_1, u_2)\exp\left[\dfrac{k}{an}\ln^n(\alpha x)\right] & \text{при } n \neq 0, \\ \Phi(u_1, u_2)[\ln(\alpha x)]^{k/a} & \text{при } n = 0, \end{cases}$$

где

$$u_1 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|, \quad u_2 = x^{-c}z^a.$$

6. $$ax\ln(\alpha x)(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}+\\ +cz\ln(\alpha x)(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial z}=k[\ln(\alpha x)]^n(\ln y)^m w.$$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\Phi(u_1,\,u_2)\exp\Bigl[\dfrac{k}{an}\ln^n(\alpha x)\Bigr] & \text{при } n\neq 0,\\ \Phi(u_1,\,u_2)[\ln(\alpha x)]^{k/a} & \text{при } n=0,\end{cases}$$

где

$$u_1=\frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)|-\frac{(\ln y)^{m+1}}{b(m+1)},\quad u_2=x^{-c}z^a.$$

При $m=-1$ см. уравнение 2.3.5.5.

7. $$ax\ln^m y\frac{\partial w}{\partial x}+by\ln^n x\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln^m y\frac{\partial w}{\partial z}=k\ln^s x(\ln y)^m w.$$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\Phi(u_1,\,u_2)\exp\Bigl[\dfrac{k}{a(s+1)}(\ln x)^{s+1}\Bigr] & \text{при } s\neq -1,\\ \Phi(u_1,\,u_2)(\ln x)^{k/a} & \text{при } s=-1,\end{cases}$$

где

$$u_1=\frac{(\ln x)^{n+1}}{a(n+1)}-\frac{(\ln y)^{m+1}}{b(m+1)},\quad u_2=x^{-c}z^a.$$

При $n=-1$ см. уравнение 2.3.5.6.

8. $$a\ln y\frac{\partial w}{\partial x}+bx^n y\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\gamma z)\ln y\frac{\partial w}{\partial z}=kx^m w\ln x\ln y.$$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}\Phi(u_1,\,u_2)\exp\Bigl[\dfrac{kx^{m+1}}{a(m+1)}\Bigl(\ln x-\dfrac{1}{m+1}\Bigr)\Bigr] & \text{при } m\neq -1,\\ \Phi(u_1,\,u_2)\exp\Bigl[\dfrac{k}{2}(\ln x)^2\Bigr] & \text{при } m=-1,\end{cases}$$

где

$$u_1=\frac{x^{n+1}}{a(n+1)^2}\bigl[(n+1)\ln x-1\bigr]-\frac{(\ln y)^2}{2b},\quad u_2=\frac{x}{a}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

Интегральный базис при $n=-1$:

$$u_1=\frac{(\ln x)^2}{2a}-\frac{(\ln y)^2}{2b},\quad u_2=\frac{x}{a}-\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

2.3.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\lambda y\operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y}+\lambda z\operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial z}=a\sin(\alpha x)w.$$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,\,u_2)\exp\Bigl[-\frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\Bigr],\quad \text{где}\quad u_1=yz,\quad u_2=y\sin(\lambda x).$$

2. $$\mu\nu\operatorname{tg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x}+\lambda\nu\operatorname{tg}(\mu y)\frac{\partial w}{\partial y}+\lambda\mu\operatorname{tg}(\nu z)\frac{\partial w}{\partial z}=a\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,u_2)\exp\left[\frac{a\sin(\lambda x)}{\lambda\mu\nu}\right],\quad\text{где}\quad u_1=\frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\mu y)},\quad u_2=\frac{\sin(\mu y)}{\sin(\nu z)}.$$

3. $$\mu\nu\operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x}+\lambda\nu\operatorname{ctg}(\mu y)\frac{\partial w}{\partial y}+\lambda\mu\operatorname{ctg}(\nu z)\frac{\partial w}{\partial z}=a\cos(\lambda x)w.$$

Общее решение:

$$w=\Phi(u_1,u_2)\exp\left[-\frac{a\cos(\lambda x)}{\lambda\mu\nu}\right],\quad\text{где}\quad u_1=\frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\mu y)},\quad u_2=\frac{\cos(\mu y)}{\cos(\nu z)}.$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left\{y^2-a^2+a\alpha\sin(\alpha x)+a^2[\sin(\alpha x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\left\{z^2-b^2+b\beta\cos(\beta x)+b^2[\cos(\beta x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial z}=k\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y-a\cos(\alpha x)}+\int E_1\,dx,\quad E_1=\exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\sin(\alpha x)\right],$$
$$u_2=\frac{E_2}{z-b\sin(\beta x)}+\int E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left[-\frac{2b}{\beta}\cos(\beta x)\right].$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left\{y^2-a^2+a\alpha\cos(\alpha x)+a^2[\cos(\alpha x)]^2\right\}\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\left[z^2-b^2+c(z+b)\sin(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z}=k\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y-a\sin(\alpha x)}+\int E_1\,dx,\quad E_1=\exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right],$$
$$u_2=\frac{E_2}{z+b}+\int E_2\,dx,\qquad E_2=\exp\left[-2bx-\frac{c}{\beta}\cos(\beta x)\right].$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2-b^2+a(y+b)\sin(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\left\{z^2+c(xz+1)[\sin(\beta x)]^m\right\}\frac{\partial w}{\partial z}=k\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1=\frac{E_1}{y+b}+\int E_1\,dx,\qquad E_1=\exp\left[-2bx-\frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right],$$
$$u_2=\frac{E_2}{x(xz+1)}+\int x^{-2}E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left[c\int x\sin^m(\beta x)\,dx\right].$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + a(xy+1)[\sin(\alpha x)]^m\}\frac{\partial w}{\partial y} + \{z^2 + b\beta + b(\beta - b)[\operatorname{tg}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left\{a\int x\left[\sin(\alpha x)\right]^m dx\right\},$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - b\operatorname{tg}(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta}.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + a\alpha + a(\alpha - a)[\operatorname{tg}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \{z^2 + \beta^2 + 3b\beta + b(\beta - b)[\operatorname{tg}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\operatorname{tg}(\alpha x)} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \left[\cos(\alpha x)\right]^{-2a/\alpha},$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z - b\operatorname{tg}(\beta x) + \beta cot(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \frac{\left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta}}{\left[\sin(\beta x)\right]^2}.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 + \alpha^2 + 3a\alpha + a(\alpha - a)[\operatorname{tg}(\alpha x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \{z^2 + b\beta + b(\beta - b)[\operatorname{ctg}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{y - a\operatorname{tg}(\alpha x) + \alpha\operatorname{ctg}(\alpha x)} + \int E_1\,dx, \quad E_1 = \frac{\left[\cos(\alpha x)\right]^{-2a/\alpha}}{\left[\sin(\alpha x)\right]^2},$$
$$u_2 = \frac{E_2}{z + b\operatorname{ctg}(\beta x)} + \int E_2\,dx, \quad E_2 = \left[\sin(\beta x)\right]^{-2b/\beta}.$$

10. $$x\frac{\partial w}{\partial x} + \{a(y^2 + bx^{2k})[\sin(\alpha x)]^m + ky\}\frac{\partial w}{\partial y} + \{cz^2 + dx^{2l})[\operatorname{tg}(\beta x)]^n + lz\}\frac{\partial w}{\partial z} = kx\sin(\lambda x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{x^{-k}y}{b} - ab\int x^{k-1}\left[\sin(\alpha x)\right]^m dx,$$
$$u_2 = \operatorname{arctg}\frac{x^{-l}z}{d} - cd\int x^{l-1}\left[\operatorname{tg}(\beta x)\right]^n dx.$$

11. $\frac{\partial w}{\partial x} - \left[(k+1)x^k y^2 - a(x^{k+1}y - 1)(\operatorname{tg} x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial y} +$
$+ \left\{d(z - bx^n - c)^2\left[\sin(\lambda x + \mu)\right]^l + bnx^{n-1}\right\}\frac{\partial w}{\partial z} = s\sin(\lambda x)w.$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left[-\frac{s}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]$, где

$$u_1 = \frac{e^x}{z - bx^n - c} + d\int e^x\left[\sin(\lambda x + \mu)\right]^l dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E\,dx,$$
$$E = \exp\left[a\int x^{k+1}(\operatorname{tg} x)^m\,dx\right].$$

2.3.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

► *В уравнениях 1–4 функцию* arcsin *можно заменить на* arccos, *при этом в общем решении необходимо изменить знак перед радикалом.*

1. $\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + b(y + a)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y} +$
$+ \left[z^2 + c(xz + 1)(\arcsin x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial z} = kw\arcsin\frac{x}{s}.$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left(kx\arcsin\frac{x}{s} + \sqrt{s^2 - x^2}\right)$, где

$$u_1 = \frac{e^{-2ax}E_1}{y + a} + \int e^{-2ax}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[b\int(\arcsin x)^n\,dx\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz + 1)} + \int x^{-2}E_2\,dx, \quad E_2 = \exp\left[c\int x(\arcsin x)^m\,dx\right].$$

2. $\frac{\partial w}{\partial x} - \left[(k+1)x^k y^2 - c(x^{k+1}y - 1)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y} +$
$+ \left[d(z^2 - b^2)(\arcsin x)^m + a(z + b)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = pw\arcsin\frac{x}{s}.$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\left(px\arcsin\frac{x}{s} + \sqrt{s^2 - x^2}\right)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k+1)\int x^{-k-2}E_1\,dx,$$
$$u_2 = \frac{e^{ax}E_2}{z + b} + d\int e^{ax}(\arcsin x)^m E_2\,dx,$$
$$E_1 = \exp\left[c\int x^{k+1}(\arcsin x)^n dx\right], \quad E_2 = \exp\left[-2bd\int(\arcsin x)^m dx\right].$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \bigl[c(y^2 - d^2)(\arcsin x)^n + dmx^{m-1}\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[k(z - ax^p - b)^2(\arcsin x)^l + apx^{p-1}\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = qw\arcsin\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl(qx\arcsin\frac{x}{s} + \sqrt{s^2 - x^2}\Bigr)$, где

$$u_1 = \frac{1}{z - ax^p - b} + k\int(\arcsin x)^l\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - dx^m} + c\int(\arcsin x)^n E\,dx,\quad E = \exp\Bigl[2cd\int x^m(\arcsin x)^n dx\Bigr].$$

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x} - \bigl[d(y^2 + p^2x^{2k})(\arcsin x)^n + ky\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[(ax^{2l}z^2 + bx^l z + c)(\arcsin x)^m - lz\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = qxw\arcsin\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl(qx\arcsin\frac{x}{s} + \sqrt{s^2 - x^2}\Bigr)$, где

$$u_1 = \operatorname{arctg}\frac{y}{px^k} - dp\int x^{k-1}(\arcsin x)^n\,dx,$$
$$u_2 = \int\frac{dv}{av^2 + bv + c} - \int x^{l-1}(\arcsin x)^m\,dx,\qquad v = x^l z.$$

► *В уравнениях 5–8 функцию* arctg *можно заменить на* arcctg, *при этом в общем решении необходимо изменить знак в показателе степени.*

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[y^2 - a^2 + b(y + a)(\operatorname{arctg} x)^n\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[z^2 + c(xz + 1)(\operatorname{arctg} x)^m\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = kw\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)(s^2 + x^2)^{-s/2}\exp\Bigl(kx\operatorname{arctg}\frac{x}{s}\Bigr)$, где

$$u_1 = \frac{e^{-2ax}E_1}{y + a} + \int e^{-2ax}E_1\,dx,\quad E_1 = \exp\Bigl[b\int(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Bigr],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz + 1)} + \int x^{-2}E_2\,dx,\quad E_2 = \exp\Bigl[c\int x(\operatorname{arctg} x)^m\,dx\Bigr].$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \bigl[(k + 1)x^k y^2 - c(x^{k+1}y - 1)(\operatorname{arctg} x)^n\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[d(z^2 - b^2)(\operatorname{arctg} x)^m + a(z + b)\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = pw\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)(s^2 + x^2)^{-s/2}\exp\Bigl(px\operatorname{arctg}\frac{x}{s}\Bigr)$, где

$$u_1 = \frac{E_1}{x^{k+1}(x^{k+1}y - 1)} - (k + 1)\int x^{-k-2}E_1\,dx,$$
$$u_2 = \frac{e^{ax}E_2}{z + b} + d\int e^{ax}(\operatorname{arctg} x)^m E_2\,dx,$$
$$E_1 = \exp\Bigl[c\int x^{k+1}(\operatorname{arctg} x)^n\,dx\Bigr],\quad E_2 = \exp\Bigl[-2bd\int(\operatorname{arctg} x)^m\,dx\Bigr].$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\bigl[c(y^2-d^2)(\operatorname{arctg}x)^n+dmx^{m-1}\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}+\\+\bigl[k(z-ax^p-b)^2(\operatorname{arctg}x)^l+apx^{p-1}\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=qw\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)(s^2+x^2)^{-s/2}\exp\Bigl(qx\operatorname{arctg}\frac{x}{s}\Bigr)$, где

$$u_1=\frac{1}{z-ax^p-b}+k\int(\operatorname{arctg}x)^l\,dx,$$
$$u_2=\frac{E}{y-dx^m}+c\int(\operatorname{arctg}x)^nE\,dx,\quad E=\exp\Bigl[2cd\int x^m(\operatorname{arctg}x)^n dx\Bigr].$$

8. $$x\frac{\partial w}{\partial x}-\bigl[d(y^2+p^2x^{2k})(\operatorname{arctg}x)^n+ky\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}+\\+\bigl[(ax^{2l}z^2+bx^lz+c)(\operatorname{arctg}x)^m-lz\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=qxw\operatorname{arctg}\frac{x}{s}.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)(s^2+x^2)^{-s/2}\exp\Bigl(qx\operatorname{arctg}\frac{x}{s}\Bigr)$, где

$$u_1=\operatorname{arctg}\frac{y}{px^k}-dp\int x^{k-1}(\operatorname{arctg}x)^n\,dx,$$
$$u_2=\int\frac{dv}{av^2+bv+c}-\int x^{l-1}(\operatorname{arctg}x)^m\,dx,\qquad v=x^lz.$$

2.3.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+\bigl[z+f(x,y)\bigr]\frac{\partial w}{\partial z}=g(x)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]$, где

$$u_1=\frac{y}{x},\quad u_2=\frac{z}{x}-\int_a^x f\Bigl(\tau,\frac{y}{x}\tau\Bigr)\tau^{-2}\,d\tau.$$

2. $$a\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x}+b\operatorname{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial y}+\\+f_1(x)f_2(z)\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial z}=g(x)\operatorname{sh}(\beta y)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int g(x)\,dx\Bigr]$, где

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\operatorname{ch}(\alpha x)-\frac{1}{b\beta}\operatorname{ch}(\beta y),\quad u_2=\frac{1}{a}\int f_1(x)\,dx-\int\frac{dz}{f_2(z)}.$$

3. $$a\operatorname{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial x}+b\operatorname{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial y}+f(x)\frac{\operatorname{sh}(\beta y)}{\operatorname{sh}(\gamma z)}\frac{\partial w}{\partial z}=g(x)\operatorname{sh}(\beta y)w.$$

Общее решение: $w=\Phi(u_1,u_2)\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int g(x)\,dx\Bigr]$, где

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\operatorname{ch}(\alpha x)-\frac{1}{b\beta}\operatorname{ch}(\beta y),\quad u_2=\frac{1}{a}\int f(x)\,dx-\frac{1}{\gamma}\operatorname{ch}(\gamma z).$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 - a^2 + a\lambda \operatorname{sh}(\lambda x) - a^2[\operatorname{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + f(x)\operatorname{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl[\int g(x)\,dx\Bigr]$, где

$$u_1 = \int f(x)\,dx - \frac{1}{\gamma}\ln\Bigl|\operatorname{th}\frac{\gamma z}{2}\Bigr|,$$
$$u_2 = \frac{1}{y - a\operatorname{ch}(\lambda x)}\exp\Bigl[\frac{2a}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\Bigr] + \int \exp\Bigl[\frac{2a}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\Bigr]dx.$$

5. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]$, где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

6. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int g(x)\frac{dx}{x^n}\Bigr]$, где

$$u_1 = \frac{(n-1)\ln x + 1}{a(n-1)^2x^{n-1}} + \int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2 = \frac{x^{1-n}}{a(1-n)} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $n = 1$ см. уравнение 2.3.8.5.

7. $$ax\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]$, где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c(m-1)}(\ln z)^{1-m}.$$

При $m = 1$ см. уравнение 2.3.8.5.

8. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)w.$$

Общее решение: $w = \Phi(u_1, u_2)\exp\Bigl[\frac{1}{a}\int g(x)\frac{dx}{x^n}\Bigr]$, где

$$u_1 = \frac{(n-1)\ln x + 1}{a(n-1)^2x^{n-1}} + \int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2 = \frac{x^{1-n}}{a(1-n)} - \frac{(\ln z)^{1-m}}{c(m-1)}.$$

При $n = 1$ см. уравнение 2.3.8.7.

2.4. Линейные уравнения вида $f_1\frac{\partial w}{\partial x}+f_2\frac{\partial w}{\partial y}+f_3\frac{\partial w}{\partial z}=g_1w+g_0$

2.4.1. Предварительные замечания

1. Линейное неоднородное уравнение с тремя независимыми переменными имеет вид

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial x}+f_2(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial y}+f_3(x,y,z)\frac{\partial w}{\partial z}=g_1(x,y,z)w+g_0(x,y,z). \quad (1)$$

Если найдены три независимых интеграла

$$u_1(x,y,z,w)=C_1, \quad u_2(x,y,z,w)=C_2, \quad u_3(x,y,z,w)=C_3$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f_1(x,y,z)}=\frac{dy}{f_2(x,y,z)}=\frac{dz}{f_3(x,y,z)}=\frac{dw}{g_1(x,y,z)w+g_0(x,y,z)},$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1,u_2,u_3)=0,$$

где Φ — произвольная функция трех аргументов.

2. Если известен интегральный базис $u_1=u_1(x,y,z)$, $u_2=u_2(x,y,z)$ соответствующего «укороченного» однородного уравнения

$$f_1(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial x}+f_2(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial y}+f_3(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial z}=0,$$

то переход от x, y, z к новым переменным x, u_1, u_2 приводит к линейному уравнению

$$\bar{f}_1(x,u_1,u_2)\frac{\partial w}{\partial x}=\bar{g}_1(x,u_1,u_2)w+\bar{g}_0(x,u_1,u_2), \quad (2)$$

которое можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $w=w(x)$ с параметрами u_1, u_2. Коэффициенты уравнения $\bar{f}_1$, $\bar{g}_1$, $\bar{g}_0$ получаются из f_1, g_1, g_0 в результате подстановки в них новых аргументов.

Решая уравнение (2), находим

$$w=E\left[\Phi(u_1,u_2)+\int\frac{\bar{g}_0(x,u_1,u_2)}{\bar{f}_1(x,u_1,u_2)}E^{-1}\,dx\right], \quad E=\exp\left[\int\frac{\bar{g}_1(x,u_1,u_2)}{\bar{f}_1(x,u_1,u_2)}\,dx\right]. \quad (3)$$

Здесь Φ — произвольная функция, а при вычислении обоих интегралов u_1 и u_2 рассматриваются как параметры. Для нахождения общего интеграла уравнения (1) необходимо в формуле (3) после интегрирования перейти к исходным переменным x, y, z.

3. Пусть $g_1\equiv 0$. Если известен интегральный базис u_1, u_2 соответствующего однородного уравнения (при $g_0\equiv 0$) и частное решение $w_0(x,y,z)$ исходного неоднородного уравнения, то общее решение может быть найдено по формуле

$$w=w_0+\Phi(u_1,u_2),$$

где Φ — произвольная функция.

2.4.2. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\dfrac{\partial w}{\partial z}=kx^{-1}w+lx^m.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases} x^{k/a}\Phi(bx-ay,\,cx-az)+\dfrac{lx^{m+1}}{a(m+1)-k} & \text{при } a(m+1)\neq k,\\ x^{k/a}\Phi(bx-ay,\,cx-az)+\dfrac{l}{a}x^{k/a}\ln x & \text{при } a(m+1)=k. \end{cases}$$

2. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}+c\dfrac{\partial w}{\partial z}=kx^nw+lx^m,\quad n\neq-1.$

Общее решение:

$$w=\exp\Bigl[\frac{kx^{n+1}}{a(n+1)}\Bigr]\Bigl\{\Phi(bx-ay,\,cx-az)+\frac{l}{a}\int x^m\exp\Bigl[-\frac{kx^{n+1}}{a(n+1)}\Bigr]dx\Bigr\}.$$

3. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+by\dfrac{\partial w}{\partial y}+cz\dfrac{\partial w}{\partial z}=kx^{-1}w+lx^m.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases} x^{k/a}\Phi\bigl(y^ae^{-bx},\,z^ae^{-cx}\bigr)+\dfrac{lx^{m+1}}{a(m+1)-k} & \text{при } a(m+1)\neq k,\\ x^{k/a}\Phi\bigl(y^ae^{-bx},\,z^ae^{-cx}\bigr)+\dfrac{l}{a}x^{k/a}\ln x & \text{при } a(m+1)=k. \end{cases}$$

4. $a\dfrac{\partial w}{\partial x}+by\dfrac{\partial w}{\partial y}+cz\dfrac{\partial w}{\partial z}=kx^nw+lx^m,\quad n\neq-1.$

Общее решение:

$$w=\exp\Bigl[\frac{k}{a(n+1)}x^{n+1}\Bigr]\Phi\bigl(y^ae^{-bx},\,z^ae^{-cx}\bigr)+$$
$$+\frac{l}{a}\exp\Bigl[\frac{k}{a(n+1)}x^{n+1}\Bigr]\int x^m\exp\Bigl[-\frac{k}{a(n+1)}x^{n+1}\Bigr]\,dx\Bigr\}.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+bz\dfrac{\partial w}{\partial y}+cy\dfrac{\partial w}{\partial z}=kx^{-1}w+lx^m.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases} x^k\Phi(u_1,\,u_2)+\dfrac{l}{m+1}x^{m+1-k} & \text{при } m+1\neq k,\\ x^k\bigl[\Phi(u_1,u_2)+l\ln x\bigr] & \text{при } m+1=k, \end{cases}$$

где

$$u_1=cy^2-bz^2,\quad u_2=\begin{cases}(cy+Az)e^{-Ax} & \text{при } bc>0,\\ cy\cos Ax+Az\sin Ax & \text{при } bc<0,\end{cases}\qquad A=\sqrt{|bc|}.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+bz\dfrac{\partial w}{\partial y}+cy\dfrac{\partial w}{\partial z}=kx^nw+lx^m,\quad n\neq-1.$

Общее решение:

$$w=\exp\Bigl[\frac{k}{n+1}x^{n+1}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2)+l\int x^m\exp\Bigl[-\frac{k}{n+1}x^{n+1}\Bigr]\,dx\Bigr\},$$

где

$$u_1=cy^2-bz^2,\quad u_2=\begin{cases}(cy+Az)e^{-Ax} & \text{при } bc>0,\\ cy\cos Ax+Az\sin Ax & \text{при } bc<0,\end{cases}\quad A=\sqrt{|bc|}.$$

7. $\displaystyle ax\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}+cz\frac{\partial w}{\partial z}=\alpha w+\beta x^2.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}x^{\alpha/a}\Phi\Big(\dfrac{y^b}{x^a},\,\dfrac{z^c}{x^a}\Big)+\dfrac{\beta x^2}{2a-\alpha} & \text{при } \alpha\neq 2a,\\ x^2\Phi\Big(\dfrac{y^b}{x^a},\,\dfrac{z^c}{x^a}\Big)+\dfrac{\beta}{a}x^2\ln|x| & \text{при } \alpha=2a.\end{cases}$$

8. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}+cz\frac{\partial w}{\partial z}=kx^nw+lx^m,\quad n\neq 0.$

Общее решение:

$$w=\exp\Big(\frac{k}{n}x^n\Big)\Big[\Phi\Big(\frac{x^b}{y},\,\frac{x^c}{z}\Big)+l\int x^{m-1}\exp\Big(-\frac{k}{n}x^n\Big)\,dx\Big].$$

9. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x}+bz\frac{\partial w}{\partial y}+cy\frac{\partial w}{\partial z}=kw+lx^m.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}x^k\Phi(u_1,\,u_2)+\dfrac{l}{m-k}x^m & \text{при } m\neq k,\\ x^k\Big[\Phi(u_1,u_2)+l\ln x\Big] & \text{при } m=k,\end{cases}$$

где

$$u_1=cy^2-bz^2,\quad u_2=\begin{cases}\dfrac{cy-\alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc>0,\\ x^\alpha\exp\Big(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\Big) & \text{при } bc<0,\end{cases}\quad \alpha=\sqrt{|bc|}.$$

10. $\displaystyle x\frac{\partial w}{\partial x}+bz\frac{\partial w}{\partial y}+cy\frac{\partial w}{\partial z}=kx^nw+lx^m,\quad n\neq 0.$

Общее решение:

$$w=\exp\Big(\frac{k}{n}x^n\Big)\Big[\Phi(u_1,\,u_2)+l\int x^{m-1}\exp\Big(-\frac{k}{n}x^n\Big)\,dx\Big],$$

где

$$u_1=cy^2-bz^2,\quad u_2=\begin{cases}\dfrac{cy-\alpha z}{x^\alpha} & \text{при } bc>0,\\ x^\alpha\exp\Big(-\operatorname{arctg}\dfrac{\alpha z}{cy}\Big) & \text{при } bc<0,\end{cases}\quad \alpha=\sqrt{|bc|}.$$

11. $\displaystyle bcx\frac{\partial w}{\partial x}+c(by+cz)\frac{\partial w}{\partial y}+b(by-cz)\frac{\partial w}{\partial z}=kw+lx^m.$

Общее решение:

$$w=\begin{cases}x^{\frac{k}{bc}}\Phi(u_1,\,u_2)+\dfrac{l}{bcm-k}x^m & \text{при } bcm\neq k,\\ x^k\Big[\Phi(u_1,u_2)+\dfrac{l}{bc}\ln x\Big] & \text{при } bcm=k,\end{cases}$$

где
$$u_1 = [by + (\sqrt{2} - 1)cz]x^{-\sqrt{2}}, \quad u_2 = [by - (\sqrt{2} + 1)cz]x^{\sqrt{2}}.$$

12. $bcx\dfrac{\partial w}{\partial x} + c(by + cz)\dfrac{\partial w}{\partial y} + b(by - cz)\dfrac{\partial w}{\partial z} = kx^n w + lx^m$, $n \neq 0$.

Общее решение:
$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{bcn}x^n\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + \frac{l}{bc}\int x^{m-1}\exp\Bigl(-\frac{k}{bcn}x^n\Bigr)\,dx\Bigr],$$
где
$$u_1 = [by + (\sqrt{2} - 1)cz]x^{-\sqrt{2}}, \quad u_2 = [by - (\sqrt{2} + 1)cz]x^{\sqrt{2}}.$$

2.4.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $$(a_1 + a_2e^{\alpha x})\frac{\partial w}{\partial x} + (b_1 + b_2e^{\beta y})\frac{\partial w}{\partial y} + (c_1 + c_2e^{\gamma z})\frac{\partial w}{\partial z} = (k_1 + k_2e^{\alpha x})w + (l_1 + l_2e^{\nu x}).$$

Общее решение:
$$w = \exp\Bigl[\frac{k_1}{a_1}x + \frac{1}{\alpha}\Bigl(\frac{k_2}{a_2} - \frac{k_1}{a_1}\Bigr)\ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1, u_2) + \int\frac{(l_1 + l_2e^{\nu x})}{(a_1 + a_2e^{\alpha x})}\exp\Bigl[-\frac{k_1}{a_1}x - \frac{1}{\alpha}\Bigl(\frac{k_2}{a_2} - \frac{k_1}{a_1}\Bigr)\ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})\Bigr]\,dx\Bigr\},$$
где
$$u_1 = \frac{1}{a_1\alpha}[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})] - \frac{1}{b_1\beta}[\beta y - \ln(b_1 + b_2e^{\beta y})],$$
$$u_2 = \frac{1}{a_1\alpha}[\alpha x - \ln(a_1 + a_2e^{\alpha x})] - \frac{1}{c_1\gamma}[\gamma z - \ln(c_1 + c_2e^{\gamma z})].$$

2. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + ae^{\alpha x}(\alpha - ae^{\alpha x})]\frac{\partial w}{\partial y} + [z^2 + ce^{\beta x}(\beta - b - ce^{\beta x})]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:
$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$
где
$$u_1 = \frac{1}{y - ae^{\alpha x}}\exp\Bigl(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x}\Bigr) + \int\exp\Bigl(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x}\Bigr)\,dx,$$
$$u_2 = \frac{1}{z - ce^{\beta x}}\exp\Bigl(\frac{2c}{\beta}e^{\beta x} + bx\Bigr) + \int\exp\Bigl(\frac{2c}{\beta}e^{\beta x} + bx\Bigr)\,dx.$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + by + ae^{\alpha x}(\alpha - b - ae^{\alpha x})]\frac{\partial w}{\partial y} + [z^2 + ce^{\beta x}(z - d) - d^2]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:
$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \frac{1}{y - ae^{\alpha x}} \exp\Bigl(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x} + bx\Bigr) + \int \exp\Bigl(\frac{2a}{\alpha}e^{\alpha x} + bx\Bigr)\,dx,$$

$$u_2 = \frac{1}{z - c} \exp\Bigl(\frac{c}{\beta}e^{\beta x} + 2dx\Bigr) + \int \exp\Bigl(\frac{c}{\beta}e^{\beta x} + 2dx\Bigr)\,dx.$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[y^2 + by + ae^{\alpha x}(y - b) - b^2\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[z^2 + c(xz - 1)e^{\beta x}\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \frac{1}{y - b} \exp\Bigl(\frac{a}{\alpha}e^{\alpha x} + 2bx\Bigr) + \int \exp\Bigl(\frac{a}{\alpha}e^{\alpha x} + 2bx\Bigr)\,dx,$$

$$u_2 = \frac{1}{x(xz - 1)} \exp\Bigl[\frac{ce^{\beta x}}{\beta^2(\beta x - 1)}\Bigr] + \int x^2 \exp\Bigl[\frac{ce^{\beta x}}{\beta^2(\beta x - 1)}\Bigr]\,dx.$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl[y^2 + ae^{\alpha x}(x + 1)\bigr]\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[ce^{\beta x}z^2 + be^{-\beta x}\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \int \frac{dv}{cv^2 + \beta v + b} - x, \qquad v = e^{\beta x}z;$$

$$u_2 = \frac{1}{x(xy - 1)} \exp\Bigl[\frac{a}{\alpha^2}(\alpha x - 1)e^{\alpha x}\Bigr] + \int x^2 \exp\Bigl[\frac{a}{\alpha^2}(\alpha x - 1)e^{\alpha x}\Bigr]dx.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \bigl(ay^2e^{\alpha x} + be^{-\alpha x}\bigr)\frac{\partial w}{\partial y} + \bigl[de^{\beta x}z^2 + ce^{\gamma x}(\gamma - cde^{(\beta+\gamma)x})\bigr]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + \alpha v + b} - x, \quad v = e^{\alpha x}y,$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{z - ce^{\gamma x}}\exp\Bigl[\dfrac{2cde^{(\beta+\gamma)x}}{\beta + \gamma}\Bigr] + \displaystyle\int \exp\Bigl[\dfrac{2cde^{(\beta+\gamma)x}}{\beta + \gamma}\Bigr]dx & \text{при } \beta \neq -\gamma, \\ \dfrac{z - ce^{\gamma x} + 2cd}{z - ce^{\gamma x}}e^{2cdx} & \text{при } \beta = -\gamma. \end{cases}$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[be^{\alpha x}y^2 + ae^{\beta x}\left(\beta - abe^{(\alpha+\beta)x}\right)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left(cz^2e^{\gamma x} + dz + ke^{-\gamma x}\right)\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \int \frac{dv}{cv^2 + (d+\gamma)v + k} - x, \quad v = e^{\gamma x}z,$$

$$u_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{y - ae^{\beta x}}\exp\Bigl[\dfrac{2abe^{(\alpha+\beta)x}}{\alpha+\beta}\Bigr] + \displaystyle\int \exp\Bigl[\dfrac{2abe^{(\alpha+\beta)x}}{\alpha+\beta}\Bigr]dx & \text{при } \alpha \neq -\beta, \\ \dfrac{z - ae^{\beta x} + 2ab}{y - ae^{\beta x}}e^{2abx} & \text{при } \alpha = -\beta. \end{cases}$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(ae^{\alpha x}y^2 + by + ce^{-\alpha x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\beta x}z^2 + de^{\gamma x}(z+\beta)e^{-\beta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \int \frac{dv}{av^2 + (b+\alpha)v + c} - x, \qquad v = e^{\alpha x}y,$$

$$u_2 = \frac{1}{z + \beta e^{\beta x}}\exp\Bigl(\frac{c}{\gamma}e^{\gamma x} - 2\beta x\Bigr) + \int \exp\Bigl(\frac{c}{\gamma}e^{\gamma x} - \beta x\Bigr)\,dx.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left(e^{\alpha x}y^2 + aye^{\beta x} + a\alpha e^{(\gamma-\beta)x}\right)\frac{\partial w}{\partial y} - \left[\gamma e^{\gamma x}z^2 - be^{\delta x}(z + e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \frac{1}{y + \alpha e^{-\alpha x}}\exp\Bigl(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\Bigr) + \int \exp\Bigl(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - \alpha x\Bigr)\,dx,$$

$$u_2 = \frac{1}{z - e^{-\gamma x}}\exp\Bigl(\frac{b}{\delta}e^{\delta x} - 2\gamma x\Bigr) - \gamma\int \exp\Bigl(\frac{b}{\delta}e^{\delta x} - \gamma x\Bigr)\,dx.$$

10. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[\alpha e^{\alpha x}y^2 - ae^{\beta x}(y + e^{-\gamma x})\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[e^{\gamma x}(z - be^{\delta x})^2 + b\delta e^{\delta x}\right]\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\,dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \frac{1}{z - be^{-\delta x}}\exp\Bigl(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\Bigr) + \frac{1}{\gamma}e^{\gamma x},$$
$$u_2 = \frac{1}{y - e^{-\alpha x}}\exp\Bigl(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - 2\alpha x\Bigr) + \alpha\int\exp\Bigl(\frac{a}{\beta}e^{\beta x} - \alpha x\Bigr)dx.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y^2 + 2a\alpha e^{\alpha x^2} - a^2e^{2\alpha x^2})\dfrac{\partial w}{\partial y} +$
$$+ cz(e^{-2\beta x^2}z + 2b^2\beta x)\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\beta x^2}z\Bigr) - bc\int e^{-\beta x^2}\,dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{y - ae^{\alpha x^2}} + \int E\,dx, \quad E = \exp\Bigl(2a\int e^{\alpha x^2}\,dx\Bigr).$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ae^{-2\alpha x^2}y^2 + 2\alpha xy + ab^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} +$
$$+ (cx^\beta z^2 + 2\gamma xz + cd^2x^\beta e^{2\gamma x^2})\frac{\partial w}{\partial z} = ke^{\lambda x}w + le^{\mu x}.$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl(\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)\Bigl[\Phi(u_1, u_2) + l\int e^{\mu x}\exp\Bigl(-\frac{k}{\lambda}e^{\lambda x}\Bigr)dx\Bigr],$$

где

$$u_1 = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{b}e^{-\alpha x^2}y\Bigr) - ab\int e^{-\alpha x^2}\,dx,$$
$$u_2 = \operatorname{arctg}\Bigl(\frac{1}{d}e^{-\gamma x^2}z\Bigr) - cd\int e^{-\gamma x^2}\,dx.$$

2.4.4. Уравнения, содержащие гиперболические функции

1. $a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\,\mathrm{sh}(\beta y)\dfrac{\partial w}{\partial y} +$
$$+ c\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = k\,\mathrm{ch}(\alpha x)w + l\,\mathrm{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = [\mathrm{sh}(\alpha x)]^{\frac{k}{a\alpha}}\Bigl\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{l}{a}\int[\mathrm{sh}(\alpha x)]^{-\frac{k+a\alpha}{a\alpha}}\,\mathrm{sh}(\nu x)\,dx\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{1}{b\beta}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\beta y}{2}\Bigr|,$$
$$u_2 = \frac{1}{a\alpha}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\Bigr| - \frac{1}{c\gamma}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\Bigr|.$$

2. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{sh}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}= k\,\mathrm{ch}(\alpha x)w+l\,\mathrm{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w=[\mathrm{sh}(\alpha x)]^{\frac{k}{a\alpha}}\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{l}{a}\int[\mathrm{sh}(\alpha x)]^{-\frac{k+a\alpha}{a\alpha}}\,\mathrm{sh}(\nu x)\,dx\right\},$$

где

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right|-\frac{1}{b\beta}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\beta y}{2}\right|,$$

$$u_2=\frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right|-\frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}(e^{\gamma z}).$$

3. $$a\,\mathrm{sh}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{ch}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}= k\,\mathrm{ch}(\alpha x)w+l\,\mathrm{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w=[\mathrm{sh}(\alpha x)]^{\frac{k}{a\alpha}}\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{l}{a}\int[\mathrm{sh}(\alpha x)]^{-\frac{k+a\alpha}{a\alpha}}\,\mathrm{sh}(\nu x)\,dx\right\},$$

где

$$u_1=\frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right|-\frac{2}{b\beta}\,\mathrm{arctg}(e^{\beta y}),$$

$$u_2=\frac{1}{a\alpha}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\alpha x}{2}\right|-\frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}(e^{\gamma z}).$$

4. $$a\,\mathrm{ch}(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x}+b\,\mathrm{ch}(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+c\,\mathrm{ch}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}= k\,\mathrm{sh}(\alpha x)w+l\,\mathrm{ch}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w=[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{\frac{k}{a\alpha}}\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{l}{a}\int[\mathrm{ch}(\alpha x)]^{-\frac{k+a\alpha}{a\alpha}}\,\mathrm{ch}(\nu x)\,dx\right\},$$

где

$$u_1=\frac{2}{a\alpha}\,\mathrm{arctg}(e^{\alpha x})-\frac{2}{b\beta}\,\mathrm{arctg}(e^{\beta y}),$$

$$u_2=\frac{2}{a\alpha}\,\mathrm{arctg}(e^{\alpha x})-\frac{2}{c\gamma}\,\mathrm{arctg}(e^{\gamma z}).$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\{y^2-a^2+a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x)-a^2[\mathrm{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y}+ c\,\mathrm{sh}(\alpha x)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=k\,\mathrm{sh}(\mu x)w+l\,\mathrm{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w=\exp\left[\frac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)\right]\left\{\Phi(u_1,u_2)+l\int\mathrm{sh}(\nu x)\exp\left[-\frac{k}{\mu}\,\mathrm{ch}(\mu x)\right]dx\right\},$$

где

$$u_1=\frac{1}{\alpha}\,\mathrm{ch}(\alpha x)-\frac{1}{c\gamma}\ln\left|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\right|,$$

$$u_2=\frac{1}{y-a\,\mathrm{ch}(\lambda x)}\exp\left[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right]+\int\exp\left[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right]dx.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \{y^2 - a^2 + a\lambda \operatorname{sh}(\lambda x) - a^2[\operatorname{sh}(\lambda x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial y} + \{z^2 + b\beta - b(b+\beta)[\operatorname{th}(\beta x)]^2\}\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w + l\operatorname{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\Big\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \operatorname{sh}(\nu x)\exp\Big[-\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\,dx\Big\},$$

где

$$u_1 = \frac{1}{y - a\operatorname{ch}(\lambda x)}\exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\Big] + \int \exp\Big[\frac{2a}{\lambda}\operatorname{sh}(\lambda x)\Big]\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{z - b\operatorname{th}(\beta x)} + \int [\operatorname{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}\,dx.$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\alpha - a(a+\alpha)\operatorname{th}^2(\alpha x)]\frac{\partial w}{\partial y} + [z^2 + 3b\beta - b^2 - b(b+\beta)\operatorname{th}^2(\beta x)]\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w + l\operatorname{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\Big\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \operatorname{sh}(\nu x)\exp\Big[-\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\,dx\Big\},$$

где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{y - a\operatorname{th}(\alpha x)} + \int [\operatorname{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\operatorname{sh}(\beta x)]^2[z - a\operatorname{th}(\beta x) + \beta\operatorname{cth}(\beta x)]} + \int \frac{[\operatorname{ch}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\operatorname{sh}(\beta x)]^2}\,dx.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + 3a\alpha - \alpha^2 - a(a+\alpha)\operatorname{th}^2(\alpha x)]\frac{\partial w}{\partial y} + [z^2 + b\beta - b(b+\beta)\operatorname{cth}^2(\beta x)]\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w + l\operatorname{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\Big\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \operatorname{sh}(\nu x)\exp\Big[-\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\,dx\Big\},$$

где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^2[y - a\operatorname{th}(\alpha x) + \alpha\operatorname{cth}(\alpha x)]} + \int \frac{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^2}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{z - b\operatorname{cth}(\beta x)} + \int [\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}\,dx.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + a\alpha - a(a+\alpha)\operatorname{cth}^2(\alpha x)]\frac{\partial w}{\partial y} + [z^2 + 3b\beta - b^2 - b(b+\beta)\operatorname{cth}^2(\beta x)]\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w + l\operatorname{sh}(\nu x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\Big[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\Big\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \operatorname{sh}(\nu x)\exp\Big[-\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Big]\,dx\Big\},$$

где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{y - a\operatorname{cth}(\alpha x)} + \int [\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\operatorname{ch}(\beta x)]^2[z - a\operatorname{cth}(\beta x) + \beta\operatorname{th}(\beta x)]} + \int \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^{2b/\beta}}{[\operatorname{ch}(\beta x)]^2}\,dx.$$

10. $\frac{\partial w}{\partial x} + [y^2 + 3a\alpha - \alpha^2 - a(a+\alpha)\operatorname{cth}^2(\alpha x)]\frac{\partial w}{\partial y} +$
$+[z^2 - 2\beta^2\operatorname{th}^2(\beta x) - 2\beta^2\operatorname{cth}^2(\beta x)]\frac{\partial w}{\partial z} = k\operatorname{sh}(\mu x)w + l\operatorname{sh}(\nu x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \operatorname{sh}(\nu x)\exp\Bigl[-\frac{k}{\mu}\operatorname{ch}(\mu x)\Bigr]\,dx\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^2[y - a\operatorname{cth}(\alpha x) + \alpha\operatorname{th}(\alpha x)]} + \int \frac{[\operatorname{sh}(\alpha x)]^{2a/\alpha}}{[\operatorname{ch}(\alpha x)]^2}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{[\operatorname{sh}(\beta x)]^2[\operatorname{ch}(\beta x)]^2}{z - \beta\operatorname{th}(\beta x) - \beta\operatorname{cth}(\beta x)} + \int [\operatorname{sh}(\beta x)]^2[\operatorname{ch}(\beta x)]^2\,dx.$$

2.4.5. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $ax\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} =$
$= k[\ln(\alpha x)]^n w + l\ln(\nu x).$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2 = \frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)| - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

1°. Общее решение при $n \neq 0$:

$$w = \exp\Bigl[\frac{k\ln^n(\alpha x)}{an}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{l}{a}\int \exp\Bigl[-\frac{k\ln^n(\alpha x)}{an}\Bigr]\frac{\ln(\nu x)\,dx}{x\ln(\alpha x)}\Bigr\}.$$

2°. Общее решение при $n = 0$:

$$w = [\ln(\alpha x)]^{\frac{k}{a}}\Bigl\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{l}{a}\int \frac{\ln(\nu x)}{x}[\ln(\alpha x)]^{-\frac{k+a}{a}}\,dx\Bigr\}.$$

2. $ax(\ln x)^n\frac{\partial w}{\partial x} + by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} =$
$= k(\ln x)^m w + l\ln(\nu x).$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} - \frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2 = \frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

1°. Общее решение при $m + 1 \neq n$:

$$w = \exp\Bigl[\frac{k}{a(m-n+1)}(\ln x)^{m-n+1}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1, u_2) +$$
$$+ \frac{l}{a}\int \frac{\ln(\nu x)}{x(\ln x)^n}\exp\Bigl[-\frac{k}{a(m-n+1)}(\ln x)^{m-n+1}\Bigr]\,dx\Bigr\}.$$

2°. Общее решение при $m+1=n$:

$$w=(\ln x)^{\frac{k}{a}}\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{l}{a}\int\frac{\ln(\nu x)}{x}(\ln x)^{\frac{k-an}{a}}\,dx\right\}.$$

При $n=1$ см. уравнение 2.4.5.1.

3. $$ax(\ln x)^n\frac{\partial w}{\partial x}+by(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z}=k(\ln x)^lw+p\ln(\nu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1=\frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)}-\frac{(\ln y)^{1-m}}{b(m-1)},\quad u_2=\frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)}+\frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

1°. Общее решение при $l+1\neq n$:

$$w=\exp\left[\frac{k}{a(l-n+1)}(\ln x)^{l-n+1}\right]\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{p}{a}\int\frac{\ln(\nu x)}{x(\ln x)^n}\exp\left[-\frac{k}{a(l-n+1)}(\ln x)^{l-n+1}\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $l+1=n$:

$$w=(\ln x)^{\frac{k}{a}}\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{p}{a}\int\frac{\ln(\nu x)}{x}(\ln x)^{\frac{k-an}{a}}\,dx\right\}.$$

При $m=1$ см. уравнение 2.4.5.2.

4. $$ax(\ln x)^n\frac{\partial w}{\partial x}+by(\ln y)^m\frac{\partial w}{\partial y}+cz(\ln z)^l\frac{\partial w}{\partial z}=k(\ln x)^sw+p\ln(\nu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1=\frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)}+\frac{(\ln y)^{1-m}}{b(m-1)},\quad u_2=\frac{(\ln x)^{1-n}}{a(n-1)}+\frac{(\ln z)^{1-l}}{c(l-1)}.$$

1°. Общее решение при $s+1\neq n$:

$$w=\exp\left[\frac{k}{a(s-n+1)}(\ln x)^{s-n+1}\right]\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{p}{a}\int\frac{\ln(\nu x)}{x(\ln x)^n}\exp\left[-\frac{k}{a(s-n+1)}(\ln x)^{s-n+1}\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $s+1=n$:

$$w=(\ln x)^{\frac{k}{a}}\left\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{p}{a}\int\frac{\ln(\nu x)}{x}(\ln x)^{\frac{k-an}{a}}\,dx\right\}.$$

При $l=1$ см. уравнение 2.4.5.3.

5. $$ax\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial x}+by\ln(\beta y)\frac{\partial w}{\partial y}+cz\ln(\alpha x)\frac{\partial w}{\partial z}=k[\ln(\alpha x)]^nw+p\ln(\nu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1=\frac{1}{a}\ln|\ln(\alpha x)|-\frac{1}{b}\ln|\ln(\beta y)|,\quad u_2=x^{-c}z^a.$$

1°. Общее решение при $n \neq 0$:

$$w = \exp\left[\frac{k \ln^n(\alpha x)}{an}\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{p}{a}\int \exp\left[-\frac{k \ln^n(\alpha x)}{an}\right]\frac{\ln(\nu x)\,dx}{x\ln(\alpha x)}\right\}.$$

2°. Общее решение при $n = 0$:

$$w = [\ln(\alpha x)]^{\frac{k}{a}}\left\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{p}{a}\int \frac{\ln(\nu x)}{x}[\ln(\alpha x)]^{-\frac{k+a}{a}}\,dx\right\}.$$

2.4.6. Уравнения, содержащие тригонометрические функции

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial x} - \lambda y \operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda z \operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial z} = a\sin(\alpha x)w + b\sin(\beta x).$

Введем обозначения:

$$u_1 = yz, \quad u_2 = y\sin(\lambda x).$$

1°. Общее решение при $\alpha \neq \beta$:

$$w = \exp\left[-\frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + b\int \sin(\beta x)\exp\left[\frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\alpha = \beta$:

$$w = \exp\left[-\frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{b}{a}.$$

2. $\displaystyle \mu\nu \operatorname{tg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\nu \operatorname{tg}(\mu y)\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\mu \operatorname{tg}(\nu z)\frac{\partial w}{\partial z} =$

$$= a\sin(\lambda x)w + b\sin(\beta x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{\sin(\lambda x)}{\sin(\mu y)}, \quad u_2 = \frac{\sin(\mu y)}{\sin(\nu z)}.$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \beta$:

$$w = \exp\left[\frac{a\sin(\alpha x)}{\lambda\mu\nu}\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{b}{\mu\nu}\int \frac{\sin(\beta x)}{\operatorname{tg}(\lambda x)}\exp\left[-\frac{a\sin(\lambda x)}{\lambda\mu\nu}\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \beta$:

$$w = \exp\left[\frac{a}{\lambda\mu\nu}\sin(\lambda x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{b}{a}.$$

3. $\displaystyle \mu\nu \operatorname{ctg}(\lambda x)\frac{\partial w}{\partial x} + \lambda\nu \operatorname{ctg}(\mu y)\frac{\partial w}{\partial y} + \lambda\mu \operatorname{ctg}(\nu z)\frac{\partial w}{\partial z} =$

$$= a\cos(\lambda x)w + b\cos(\beta x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{\cos(\lambda x)}{\cos(\mu y)}, \quad u_2 = \frac{\cos(\mu y)}{\cos(\nu z)}.$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \beta$:

$$w = \exp\left[-\frac{a\cos(\lambda x)}{\lambda\mu\nu}\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + \frac{b}{\mu\nu}\int \frac{\cos(\beta x)}{\operatorname{ctg}(\lambda x)}\exp\left[\frac{a\cos(\lambda x)}{\lambda\mu\nu}\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \beta$:

$$w = \exp\left[\frac{a}{\lambda\mu\nu}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{b}{a}.$$

4. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + a\alpha\sin(\alpha x) + a^2\sin^2(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 - b^2 + {} \right.$$
$$\left. {} + b\beta\cos(\beta x) + b^2\cos^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w + l\sin(\mu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{y - a\cos(\alpha x)}\exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\sin(\alpha x)\right] + \int \exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\sin(\alpha x)\right]dx,$$
$$u_2 = \frac{1}{z - b\sin(\beta x)}\exp\left[-\frac{2b}{\beta}\cos(\beta x)\right] + \int \exp\left[-\frac{2b}{\beta}\cos(\beta x)\right]dx.$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \sin(\mu x)\exp\left[\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{l}{k}.$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + a\alpha\cos(\alpha x) + a^2\cos^2(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ \left[z^2 - b^2 + c(z + b)\sin(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w + l\sin(\mu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{y - a\sin(\alpha x)}\exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right] + \int \exp\left[-\frac{2a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right]dx,$$
$$u_2 = \frac{1}{z + b}\exp\left[-2bx - \frac{c}{\beta}\cos(\beta x)\right] + \int \exp\left[-2bx - \frac{c}{\beta}\cos(\beta x)\right]dx.$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \sin(\mu x)\exp\left[\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{l}{k}.$$

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - b^2 + a(y + b)\sin(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + {}$$
$$+ \left[z^2 + c(xz + 1)\sin^m(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w + l\sin(\mu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{y + b}\exp\left[-2bx - \frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right] + \int \exp\left[-2bx - \frac{a}{\alpha}\cos(\alpha x)\right]dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{x(xz + 1)} + \int x^{-2}E\,dx, \quad E = \exp\left[c\int x\sin^m(\beta x)\,dx\right].$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + l\int \sin(\mu x)\exp\left[\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{l}{k}.$$

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + a(xy+1)\sin^m(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + b\beta + b(\beta - b)\operatorname{tg}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w + l\sin(\mu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{z - b\operatorname{tg}(\beta x)}\left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta} + \int \left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{E}{x(xy+1)} + \int x^{-2}E\,dx, \quad E = \exp\left[a\int x\sin^m(\alpha x)\,dx\right].$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1,u_2) + l\int \sin(\mu x)\exp\left[\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1,u_2) - \frac{l}{k}.$$

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + a\alpha + a(\alpha - a)\operatorname{tg}^2(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + \beta^2 + 3b\beta + b(\beta - b)\operatorname{tg}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w + l\sin(\mu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{y - a\operatorname{tg}(\alpha x)}\left[\cos(\alpha x)\right]^{-2a/\alpha} + \int \left[\cos(\alpha x)\right]^{-2a/\alpha}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{E}{z - b\operatorname{tg}(\beta x) + \beta cot(\beta x)} + \int E\,dx, \quad E = \frac{\left[\cos(\beta x)\right]^{-2b/\beta}}{\left[\sin(\beta x)\right]^2}.$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1,u_2) + l\int \sin(\mu x)\exp\left[\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1,u_2) - \frac{l}{k}.$$

9. $$\frac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 + \alpha^2 + 3a\alpha + a(\alpha - a)\operatorname{tg}^2(\alpha x)\right]\frac{\partial w}{\partial y} + \left[z^2 + b\beta + b(\beta - b)\operatorname{ctg}^2(\beta x)\right]\frac{\partial w}{\partial z} = k\sin(\lambda x)w + l\sin(\mu x).$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{1}{z + b\operatorname{ctg}(\beta x)}\left[\sin(\beta x)\right]^{-2b/\beta} + \int \left[\sin(\beta x)\right]^{-2b/\beta}\,dx,$$

$$u_2 = \frac{E}{y - a\operatorname{tg}(\alpha x) + \alpha\operatorname{ctg}(\alpha x)} + \int E\,dx, \quad E = \frac{\left[\cos(\alpha x)\right]^{-2a/\alpha}}{\left[\sin(\alpha x)\right]^2}.$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1,u_2) + l\int \sin(\mu x)\exp\left[\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \mu$:

$$w = \exp\left[-\frac{k}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1,u_2) - \frac{l}{k}.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial x} - \left[(k+1)x^k y^2 - a(x^{k+1}y - 1)\operatorname{tg}^m x\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} + \left\{bnx^{n-1} + \right.$
$\left. + d(z - bx^n - c)^2[\sin(\lambda x + \mu)]^l\right\}\dfrac{\partial w}{\partial z} = r\sin(\lambda x)w + p\sin(\rho x).$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{e^x}{z - bx^n - c} + d\int e^x\left[\sin(\lambda x + \mu)\right]^l dx,$$
$$u_2 = \frac{E}{x^{k+1}(yx^{k+1} - 1)} - (k+1)\int \frac{E\,dx}{x^{k+2}},$$

где

$$E = \exp\left[a\int x^{k+1}(\operatorname{tg} x)^m\,dx\right].$$

1°. Общее решение при $\lambda \neq \rho$:

$$w = \exp\left[-\frac{r}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\left\{\Phi(u_1, u_2) + p\int \sin(\rho x)\exp\left[\frac{r}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]dx\right\}.$$

2°. Общее решение при $\lambda = \rho$:

$$w = \exp\left[-\frac{r}{\lambda}\cos(\lambda x)\right]\Phi(u_1, u_2) - \frac{p}{r}.$$

2.4.7. Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции

► *В уравнениях 1–3 функцию* arcsin *можно заменить на* arccos, *при этом в общем решении необходимо изменить знак перед радикалом.*

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[y^2 - a^2 + b(y+a)(\arcsin x)^n\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} +$
$+ \left[z^2 + c(xz + 1)(\arcsin x)^m\right]\dfrac{\partial w}{\partial z} = kw\arcsin\dfrac{x}{s} + l\arcsin\dfrac{x}{p}.$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{e^{-2ax}E_1}{y+a} + \int e^{-2ax}E_1\,dx, \quad E_1 = \exp\left[b\int(\arcsin x)^n\,dx\right],$$
$$u_2 = \frac{E_2}{x(xz+1)} + \int x^{-2}E_2 \qquad E_2 = \exp\left[c\int x(\arcsin x)^m\,dx\right].$$

1°. Общее решение при $s \neq p$:

$$w = \exp\left(kx\arcsin\frac{x}{s} + \sqrt{s^2 - x^2}\right)\left[\Phi(u_1, u_2) + \right.$$
$$\left. + l\int \arcsin\frac{x}{p}\exp\left(-kx\arcsin\frac{x}{s} - \sqrt{s^2 - x^2}\right)dx\right].$$

2°. Общее решение при $s = p$:

$$w = \exp\left(kx\arcsin\frac{x}{s} + \sqrt{s^2 - x^2}\right)\Phi(u_1, u_2) - \frac{l}{k}.$$

2. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\left[(k+1)x^k y^2-c(x^{k+1}y-1)(\arcsin x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[a(z+b)+\right.$$
$$\left.+d(z^2-b^2)(\arcsin x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial z}=rw\arcsin\frac{x}{s}+l\arcsin\frac{x}{p}.$$

Введем обозначения:

$$u_1=\frac{E_1}{x^{k+1}(yx^{k+1}-1)}-(k+1)\int\frac{E_1\,dx}{x^{k+2}},\quad E_1=\exp\left[c\int x^{k+1}(\arcsin x)^n dx\right],$$
$$u_2=\frac{e^{ax}E_2}{z+b}+d\int e^{ax}(\arcsin x)^m E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left[-2bd\int(\arcsin x)^m dx\right].$$

1°. Общее решение при $s\neq p$:

$$w=\exp\left(rx\arcsin\frac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}\right)\left[\Phi(u_1,u_2)+\right.$$
$$\left.+l\int\arcsin\frac{x}{p}\exp\left(-rx\arcsin\frac{x}{s}-\sqrt{s^2-x^2}\right)dx\right].$$

2°. Общее решение при $s=p$:

$$w=\exp\left(rx\arcsin\frac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}\right)\Phi(u_1,u_2)-\frac{l}{r}.$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial x}-\left[c(y^2-d^2)(\arcsin x)^n+dmx^{m-1}\right]\frac{\partial w}{\partial y}+\left[apx^{p-1}+\right.$$
$$\left.+k(z-ax^p-b)^2(\arcsin x)^l\right]\frac{\partial w}{\partial z}=rw\arcsin\frac{x}{s}+v\arcsin\frac{x}{q}.$$

Введем обозначения:

$$u_1=\frac{1}{z-ax^p-b}+k\int(\arcsin x)^l\,dx,$$
$$u_2=\frac{E}{y-dx^m}+c\int E(\arcsin x)^n dx,\quad E=\exp\left[2cd\int x^m(\arcsin x)^n dx\right].$$

1°. Общее решение при $s\neq q$:

$$w=\exp\left(rx\arcsin\frac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}\right)\left[\Phi(u_1,u_2)+\right.$$
$$\left.+v\int\arcsin\frac{x}{q}\exp\left(-rx\arcsin\frac{x}{s}-\sqrt{s^2-x^2}\right)dx\right].$$

2°. Общее решение при $s=q$:

$$w=\exp\left(rx\arcsin\frac{x}{s}+\sqrt{s^2-x^2}\right)\Phi(u_1,u_2)-\frac{v}{r}.$$

► *В уравнениях 4, 5 функцию* arctg *можно заменить на* arcctg, *при этом в общем решении необходимо изменить знак в показателе степени.*

4. $$\frac{\partial w}{\partial x}+\left[y^2-a^2+b(y+a)(\operatorname{arctg}x)^n\right]\frac{\partial w}{\partial y}+$$
$$+\left[z^2+c(xz+1)(\operatorname{arctg}x)^m\right]\frac{\partial w}{\partial z}=kw\operatorname{arctg}\frac{x}{s}+l\operatorname{arctg}\frac{x}{p}.$$

Введем обозначения:

$$u_1=\frac{e^{-2ax}E_1}{y+a}+\int e^{-2ax}E_1\,dx,\quad E_1=\exp\left[b\int(\operatorname{arctg}x)^n\,dx\right],$$
$$u_2=\frac{E_2}{x(xz+1)}+\int x^{-2}E_2\,dx,\quad E_2=\exp\left[c\int x(\operatorname{arctg}x)^m\,dx\right].$$

1°. Общее решение при $s \neq p$:

$$w = (s^2 + x^2)^{-s/2} \exp\Big(kx \operatorname{arctg} \frac{x}{s}\Big) \Big[\Phi(u_1, u_2) + \\ + l \int (s^2 + x^2)^{s/2} \operatorname{arctg} \frac{x}{p} \exp\Big(-kx \operatorname{arctg} \frac{x}{s}\Big)\, dx\Big].$$

2°. Общее решение при $s = p$:

$$w = (s^2 + x^2)^{-s/2} \exp\Big(kx \operatorname{arctg} \frac{x}{s}\Big) \Phi(u_1, u_2) - \frac{l}{k}.$$

5. $$\frac{\partial w}{\partial x} - \big[(k+1)x^k y^2 - c(x^{k+1}y - 1)(\operatorname{arctg} x)^n\big] \frac{\partial w}{\partial y} + \big[a(z+b) + \\ + d(z^2 - b^2)(\operatorname{arctg} x)^m\big] \frac{\partial w}{\partial z} = rw \operatorname{arctg} \frac{x}{s} + l \operatorname{arctg} \frac{x}{p}.$$

Введем обозначения:

$$u_1 = \frac{E_1}{x^{k+1}(yx^{k+1} - 1)} - (k+1) \int \frac{E_1\, dx}{x^{k+2}}, \quad E_1 = \exp\Big[c \int x^{k+1} (\operatorname{arctg} x)^n dx\Big],$$

$$u_2 = \frac{e^{ax} E_2}{z+b} + d \int e^{ax} (\operatorname{arctg} x)^m E_2 dx, \quad E_2 = \exp\Big[-2bd \int (\operatorname{arctg} x)^m\, dx\Big].$$

1°. Общее решение при $s \neq p$:

$$w = (s^2 + x^2)^{-s/2} \exp\Big(rx \operatorname{arctg} \frac{x}{s}\Big) \Big[\Phi(u_1, u_2) + \\ + l \int (s^2 + x^2)^{s/2} \operatorname{arctg} \frac{x}{p} \exp\Big(-rx \operatorname{arctg} \frac{x}{s}\Big)\, dx\Big\}.$$

2°. Общее решение при $s = p$:

$$w = (s^2 + x^2)^{-s/2} \exp\Big(rx \operatorname{arctg} \frac{x}{s}\Big) \Phi(u_1, u_2) - \frac{l}{r}.$$

2.4.8. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $$a \frac{\partial w}{\partial x} + b \frac{\partial w}{\partial y} + c \frac{\partial w}{\partial z} = F(x, y, z) w + G(x, y, z).$$

Частный случай уравнения 2.4.8.10 при $f(x) = a$, $g_1(x) \equiv 0$, $g_0(x) = b$, $h_1(x, y) \equiv 0$, $h_0(x, y) = c$.

2. $$x \frac{\partial w}{\partial x} + y \frac{\partial w}{\partial y} + z \frac{\partial w}{\partial z} = aw + f(x, y, z).$$

Общее решение:

$$w = x^a \Big[\Phi\Big(\frac{y}{x}, \frac{z}{x}\Big) + \int f(x, xu_1, xu_2) \frac{dx}{x^{a+1}}\Big], \qquad u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = \frac{z}{x}.$$

При вычислении интеграла u_1 и u_2 рассматриваются как параметры.

3. $$ax \frac{\partial w}{\partial x} + by \frac{\partial w}{\partial y} + cz \frac{\partial w}{\partial z} = F(x, y, z) w + G(x, y, z).$$

Частный случай уравнения 2.4.8.10 при $f(x) = ax$, $g_1(x) = b$, $g_0(x) \equiv 0$, $h_1(x, y) = c$, $h_0(x, y) \equiv 0$.

4. $x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + \bigl[z + f(x,y)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial z} = g(x)w + h(x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2) + \int h(x)\exp\Bigl[-\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\frac{dx}{x}\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{y}{x}, \quad u_2 = \frac{z}{x} - \int_a^x f\Bigl(\tau,\, \frac{y}{x}\tau\Bigr)\tau^{-2}\,d\tau.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl\{y^2 - a^2 + a\lambda\,\mathrm{sh}(\lambda x) - a^2[\mathrm{sh}(\lambda x)]^2\bigr\}\dfrac{\partial w}{\partial y} +$

$$+ f(x)\,\mathrm{sh}(\gamma z)\frac{\partial w}{\partial z} = g(x)w + h(x).$$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2) + \int h(x)\exp\Bigl[-\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]dx\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{1}{y - a\,\mathrm{ch}(\lambda x)}\exp\Bigl[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Bigr] + \int \exp\Bigl[\frac{2a}{\lambda}\,\mathrm{sh}(\lambda x)\Bigr]dx,$$

$$u_2 = \int f(x)\,dx - \frac{1}{\gamma}\ln\Bigl|\mathrm{th}\,\frac{\gamma z}{2}\Bigr|.$$

6. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = g(x)w + h(x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2) + \frac{1}{a}\int h(x)\exp\Bigl[-\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\frac{dx}{x}\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int\frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

7. $ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz\ln(\gamma z)\dfrac{\partial w}{\partial z} = g(x)w + h(x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2) + \frac{1}{a}\int h(x)\exp\Bigl[-\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\frac{dx}{x^n}\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{(n-1)\ln x + 1}{a(n-1)^2x^{n-1}} + \int\frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{x^{1-n}}{a(1-n)} - \frac{1}{c}\ln|\ln(\gamma z)|.$$

При $n = 1$ см. уравнение 2.4.8.6.

8. $ax\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(y)\ln x\dfrac{\partial w}{\partial y} + cz(\ln z)^m\dfrac{\partial w}{\partial z} = g(x)w + h(x).$

Общее решение:

$$w = \exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2) + \frac{1}{a}\int h(x)\exp\Bigl[-\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\frac{dx}{x}\Bigr\},$$

где

$$u_1 = \frac{(\ln x)^2}{2a} - \int\frac{dy}{f(y)}, \quad u_2 = \frac{1}{a}\ln x - \frac{1}{c(m-1)}(\ln z)^{1-m}.$$

При $m = 1$ см. уравнение 2.4.8.6.

9. $$ax^n\frac{\partial w}{\partial x}+f(y)\ln x\frac{\partial w}{\partial y}+cz(\ln z)^m\frac{\partial w}{\partial z}=g(x)w+h(x).$$

Общее решение:

$$w=\exp\Bigl[\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\Bigl\{\Phi(u_1,u_2)+\frac{1}{a}\int h(x)\exp\Bigl[-\int g(x)\frac{dx}{x}\Bigr]\frac{dx}{x^n}\Bigr\},$$

где

$$u_1=\frac{(n-1)\ln x+1}{a(n-1)^2x^{n-1}}+\int\frac{dy}{f(y)},\quad u_2=\frac{x^{1-n}}{a(1-n)}-\frac{(\ln z)^{1-m}}{c(m-1)}.$$

При $n=1$ см. уравнение 2.4.8.8.

10. $$f(x)\frac{\partial w}{\partial x}+[g_1(x)y+g_0(x)]\frac{\partial w}{\partial y}+[h_1(x,y)z+h_0(x,y)]\frac{\partial w}{\partial z}=F(x,y,z)w+G(x,y,z).$$

Общее решение:

$$w=E_1\Bigl[\Phi(u,v)+\int\frac{G(x,\xi,\eta)}{f(x)}E_1^{-1}\,dx\Bigr],$$

где

$$u=E_1y+\int\frac{g_0(x)E_1}{f(x)}\,dx,\qquad v=E_2z+\int\frac{h_0(x,\xi)E_2}{f(x)}\,dx,$$

$$\xi=E_2^{-1}\Bigl[u-\int\frac{g_0(x)E_2}{f(x)}\,dx\Bigr],\quad \eta=E_3^{-1}\Bigl[v-\int\frac{h_0(x,\xi)E_3}{f(x)}\,dx\Bigr],$$

$$E_1=\exp\Bigl[\int\frac{F(x,\xi,\eta)}{f(x)}\,dx\Bigr],\quad E_2=\exp\Bigl[-\int\frac{g_1(x)\,dx}{f(x)}\Bigr],$$

$$E_3=\exp\Bigl[-\int\frac{h_1(x,\xi)\,dx}{f(x)}\Bigr].$$

При интегрировании ξ, η рассматриваются как параметры. В окончательной формуле необходимо выразить все величины через исходные переменные.

11. $$f\frac{\partial w}{\partial x}-\bigl[(\alpha-f'_x)y+g\bigr]\frac{\partial w}{\partial y}-(\alpha z-f''_{xx}y+g'_x)\frac{\partial w}{\partial z}=(\alpha+2f'_x)w-2f'''_{xxx}z-f''''_{xxxx}y+g'''_{xxx},\quad f=f(x),\ g=g(x).$$

Решения этого уравнения определяют все обыкновенные дифференциальные уравнения 3-го порядка вида $y'''_{xxx}=w(x,y,z)$, где $y'_x=z$, которые приводимы к автономному виду точечными преобразованиями.

1°. Общее решение при $f'''_{xxx}\neq 0$:

$$w=f^{-2}E[\Phi(u,v)+\alpha^3V]+\frac{2ff''_{xx}-(f'_x)^2}{f^2}z+\alpha\frac{fg'_x-f'_xg-\alpha g}{f^3}+\frac{f^2f'''_{xxx}-2ff'_xf''_{xx}+(f'_x)^3}{f^3}y+\frac{[ff''_{xx}-(f'_x)^2]g+f(f'_xg'_x-fg''_{xx})}{f^3},$$

где

$$u=f^{-1}E^{-1}y+V,\quad v=f^{-1}E^{-1}(fz-f'_xy+g)-\alpha V,$$

$$E=\exp\Bigl[-\alpha\int\frac{dx}{f(x)}\Bigr],\qquad V=\int f^{-2}gE^{-1}\,dx.$$

2°. Общее решение при $f = Ax^2 + Bx + C$:

$$w = f^{-2}E[\Phi(u,v) + \alpha(\alpha^2 + 4AC - B^2)V] - \\ - \frac{f''_{xx}g - f'_x g'_x + fg''_{xx}}{f^2} + \alpha\frac{fg'_x - f'_x g - \alpha g}{f^3}.$$

3. Уравнения с четырьмя и более независимыми переменными

3.1. Предварительные замечания

1. Рассмотрим линейное однородное уравнение с n независимыми переменными

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1,\,2,\ldots,n. \tag{1}$$

1.1. Если известны $(n-1)$ независимых интегралов (интегральный базис)

$$u_1(x_1,\ldots,x_n) = C_1,\ \ u_2(x_1,\ldots,x_n) = C_2,\ \ \ldots,\ \ u_{n-1}(x_1,\ldots,x_n) = C_{n-1}$$

характеристической системы

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{dx_2}{f_2(x_1,\ldots,x_n)} = \cdots = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)}, \tag{2}$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$w = \Phi(u_1,u_2,\ldots,u_{n-1}),$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов.

1.2. Пусть известен один интеграл $u(x_1,\,\ldots,\,x_n) = C$ системы (2). Переходя от $x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,x_n$ к новым переменным $x_1,\,\ldots,\,x_{n-1},\,u$, получим линейное однородное уравнение в частных производных первого порядка, у которого число независимых переменных меньше на единицу:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \tilde{f}_i(x_1,\ldots,x_{n-1},u)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0; \qquad i = 1,\,2,\ldots,n-1,$$

а величина u входит как параметр.

2. Линейное неоднородное уравнение с n независимыми переменными имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial w}{\partial x_i} = g(x_1,\ldots,x_n)w + h(x_1,\ldots,x_n); \quad i = 1,\ldots,n. \tag{3}$$

2.1. Если известны n независимых интегралов (интегральный базис)

$$u_1(x_1,\ldots,x_n,w) = C_1,\ \ u_2(x_1,\ldots,x_n,w) = C_2,\ \ \ldots,\ \ u_n(x_1,\ldots,x_n,w) = C_n$$

характеристической системы

$$\frac{dx_1}{f_1(x_1,\dots,x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{f_n(x_1,\dots,x_n)} = \frac{dw}{g_i(x_1,\dots,x_n)w + h_i(x_1,\dots,x_n)},$$

то общее решение уравнения (3) имеет вид

$$w = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_n),$$

где Φ — произвольная функция своих аргументов.

2.2. Пусть известен интегральный базис $u_k = u_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, соответствующего «укороченного» однородного уравнения, т.е. уравнения (1). Переходя от x_1, x_2, …, x_n к новым переменным x_1, u_1, …, u_{n-1}, получим линейное уравнение

$$\tilde{f}_1(x,\vec{u})\frac{\partial w}{\partial x} = \tilde{g}(x,\vec{u})w + \tilde{h}(x,\vec{u}), \qquad x = x_1,$$

которое можно рассматривать как линейное обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка для функции $w = w(x)$ с вектором параметров $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{n-1})$. Решая это уравнение, находим

$$w = E\left[\Phi(\vec{u}) + \int \frac{\tilde{h}(x,\vec{u})}{\tilde{f}_1(x,\vec{u})}E^{-1}\,dx\right], \quad E = \exp\left[\int \frac{\tilde{g}(x,\vec{u})}{\tilde{f}_1(x,\vec{u})}\,dx\right].$$

Здесь Φ — произвольная функция, а при вычислении обоих интегралов компоненты вектора $\vec{u}$ рассматриваются как параметры. Для нахождения общего интеграла уравнения (3) необходимо после интегрирования перейти к исходным переменным x_1, …, x_n.

2.3. Пусть $g \equiv 0$. Если известен интегральный базис $\vec{u}$ соответствующего однородного уравнения (при $h \equiv 0$) и частное решение $w_0 = w_0(x_1, \dots, x_n)$ исходного неоднородного уравнения, то общее решение может быть найдено по формуле

$$w = w_0 + \Phi(\vec{u}),$$

где Φ — произвольная функция.

3.2. Конкретные уравнения

1. $$\alpha\frac{\partial w}{\partial x_1} + \beta\frac{\partial w}{\partial x_2} - \gamma\frac{\partial w}{\partial x_3} - \delta\frac{\partial w}{\partial x_4} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \beta x_1 - \alpha x_2 + \delta x_3 - \gamma x_4,$$
$$u_2 = \beta x_1 + \alpha x_2 + \delta x_3 + \gamma x_4,$$
$$u_3 = \delta x_1 + \alpha x_4.$$

2. $$\beta\gamma\delta\frac{\partial w}{\partial x_1}+\alpha\gamma\delta(\gamma x_3-\delta x_4)\frac{\partial w}{\partial x_2}+\alpha\beta\delta(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3)\frac{\partial w}{\partial x_3}+ \\ +\alpha\beta\gamma(\alpha x_1+\beta x_2+\delta x_4)\frac{\partial w}{\partial x_4}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\beta x_2-\gamma x_3-\delta x_4,\quad u_2=(\gamma x_3-\delta x_4)e^{-\alpha x_1},$$
$$u_3=(\alpha\gamma x_1x_3-\alpha\delta x_1x_4-\alpha x_1-\beta x_2-\delta x_4-1)e^{-\alpha x_1}.$$

3. $$\alpha\beta\gamma x_1\frac{\partial w}{\partial x_1}+\beta\gamma(\beta x_3+\gamma x_4)\frac{\partial w}{\partial x_2}+ \\ +\alpha\gamma(\alpha x_2+\gamma x_4)\frac{\partial w}{\partial x_3}+\alpha\beta(\alpha x_2+\beta x_3)\frac{\partial w}{\partial x_4}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=x_1(\alpha x_2-\beta x_3),\ u_2=x_1(\alpha x_2-\gamma x_4),\ u_3=\frac{\alpha x_2+\beta x_3+\gamma x_4}{x_1^2}.$$

4. $$\beta\gamma\delta(\beta x_2+\gamma x_3+\delta x_4)\frac{\partial w}{\partial x_1}+\alpha\gamma\delta(\alpha x_1+\gamma x_3+\delta x_4)\frac{\partial w}{\partial x_2}+ \\ +\alpha\beta\delta(\alpha x_1+\beta x_2+\delta x_4)\frac{\partial w}{\partial x_3}+\alpha\beta\gamma(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3)\frac{\partial w}{\partial x_4}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{\delta x_4-\beta x_2}{\delta x_4-\alpha x_1},\qquad u_2=\frac{\delta x_4-\gamma x_3}{\delta x_4-\alpha x_1},$$
$$u_3=(\delta x_4-\alpha x_1)^3(\alpha x_1+\beta x_2+\gamma x_3+\delta x_4).$$

5. $$x_1x_3\frac{\partial w}{\partial x_1}+x_2x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}+x_3^2\frac{\partial w}{\partial x_3}+(x_1x_2+ax_3x_4)\frac{\partial w}{\partial x_4}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{x_2}{x_1},\quad u_2=\frac{x_3}{x_1},\quad u_3=\begin{cases} x_1^{1-a}\dfrac{x_2}{x_3}+(a-1)x_4x_1^{-a} & \text{при } a\neq 1,\\ \dfrac{x_4}{x_1}-\dfrac{x_2\ln x_1}{x_3} & \text{при } a=1.\end{cases}$$

6. $$(\gamma\delta x_3x_4-\alpha\beta x_1x_2^2)\frac{\partial w}{\partial x_1}+\alpha\gamma x_2x_3\frac{\partial w}{\partial x_2}+ \\ +\alpha\gamma x_3^2\frac{\partial w}{\partial x_3}+\alpha\gamma x_3x_4\frac{\partial w}{\partial x_4}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\frac{x_3}{x_2},\quad u_2=\frac{x_4}{x_2},\quad u_3=\left(\alpha x_1-\frac{\gamma\delta x_3x_4}{\beta x_2^2}\right)\exp\left(\frac{\beta x_2^2}{\gamma x_3}\right).$$

7. $$\beta\gamma\delta x_2x_3x_4\frac{\partial w}{\partial x_1}+\alpha\gamma\delta x_1x_3x_4\frac{\partial w}{\partial x_2}+ \\ +\alpha\beta\delta x_1x_2x_4\frac{\partial w}{\partial x_3}+\alpha\beta\gamma x_1x_2x_3\frac{\partial w}{\partial x_4}=0.$$

Интегральный базис:

$$u_1=\alpha x_1^2-\beta x_2^2,\quad u_2=\beta x_2^2-\gamma x_3^2,\quad u_3=\gamma x_3^2-\delta x_4^2.$$

8. $$\sum_{i=1}^{n}(X - x_i)\frac{\partial w}{\partial x_i} = 0, \quad X = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Интегральный базис:

$$u_\nu = \frac{X - nx_\nu}{X - nx_{\nu+1}}; \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1.$$

См. также 3.1.4.

9. $$\sum_{\mu=1}^{n}\left(a_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}x_\nu\right)\frac{\partial w}{\partial x_\mu} = 0.$$

Пусть $s_1, \ldots, s_n$ — корни характеристического определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - s & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - s & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} - s \end{vmatrix}.$$

Для каждого значения s_i можно найти n чисел b_{ij}, не равных одновременно нулю, для которых выполняются соотношения

$$\sum_{j=1}^{n} a_{jk}b_{ij} = b_{ik}s_i; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

и число

$$d_i = \sum_{k=1}^{n} a_{k0}b_{ik}.$$

1. Если $s_i = d_i = 0$, то один из интегралов

$$u_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j.$$

2. Если s_i и s_j отличны друг от друга и от нуля, один из интегралов

$$u_j = \frac{\left(\dfrac{d_i}{s_i} + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{ik}x_k\right)^{s_j}}{\left(\dfrac{d_j}{s_j} + \sum\limits_{k=1}^{n} b_{jk}x_k\right)^{s_i}}.$$

Если все s_i различны, то можно таким образом получить интегральный базис.

10. $$\sum_{\nu=1}^{m}(A_0x_\nu - A_\nu)\frac{\partial w}{\partial x_\nu} = 0, \qquad \text{где} \quad A_\nu = a_{\nu 0} + \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}x_\mu.$$

Уравнение Хессе. Введением однородных координат

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad x_2 = \frac{\xi_2}{\xi_0}, \quad \ldots, \quad x_m = \frac{\xi_m}{\xi_0},$$

уравнение Хессе сводится к уравнению для $w = w(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_m)$

с $m+1$ независимыми переменными, но с линейными коэффициентами

$$\sum_{\nu=0}^{m} B_\nu \frac{\partial w}{\partial \xi_\nu} = 0, \qquad \text{где} \quad B_\nu = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu}\xi_\mu.$$

О решении этого уравнения см. 3.2.9.

11. $$\sum_{\nu=1}^{m} (A_\nu - A_0 x_\nu)\frac{\partial w}{\partial x_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial w}{\partial y_\nu} = 0,$$
$$A_\nu = a_{\nu 0} + \sum_{\mu=1}^{m} a_{\nu\mu}x_\mu.$$

Методом Хессе (см. уравнение 3.2.10) можно добиться, чтобы первые m коэффициентов стали линейными. После введения однородных координат

$$x_1 = \frac{\xi_1}{\xi_0}, \quad \ldots, \quad x_m = \frac{\xi_m}{\xi_0}$$

получаем уравнение

$$\sum_{\nu=0}^{m} B_\nu \frac{\partial \zeta}{\partial \xi_\nu} + \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(y_1, \ldots, y_n)\frac{\partial \zeta}{\partial y_\nu} = 0, \quad \text{где } B_\nu = \sum_{\mu=0}^{m} a_{\nu\mu}\xi_\mu.$$

12. $$\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu \frac{\partial w}{\partial x_\nu} = aw.$$

Уравнение однородных функций порядка a. Общее решение:

$$w = x_n^a \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

13. $$\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)}\frac{\partial w}{\partial x_\nu} = 0, \qquad f(t) = \sum_{\nu=0}^{2n} a_\nu t^\nu, \ F(t) = \prod_{k=1}^{n}(t - x_k).$$

Преобразование $\xi_\nu = 1/x_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ приводит к такому же уравнению для $w = w(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ с $f^*(t) = a_0 t^{2n} + \cdots + a_{2n}$ вместо $f(t)$. Поэтому, если для первоначального уравнения найден какой-нибудь интеграл, то второй интеграл получают, заменяя x_ν на $1/x_\nu$ и $a_0, \ldots, a_{2n}$ на $a_{2n}, \ldots, a_0$.

Интегралами служат функции:

1) $$w = \left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{F'(x_\nu)}\right)^2 - a_{2n}\left(\sum_{\nu=1}^{n} nx_\nu\right)^2 - a_{2n-1}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu,$$

2) $$w = F(c)\left(\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(c - x_\nu)F'(x_\nu)}\right)^2 - \frac{f(c)}{F(c)} - a_{2n}F(c),$$ где c — любое,

3) $$w = \sqrt{F(\alpha)F(\beta)}\sum_{\nu=1}^{n} \frac{\sqrt{f(x_\nu)}}{(x_\nu - \alpha)(x_\nu - \beta)F'(x_\nu)},$$ где α, β — два корня уравнения $f(x) = 0$.

4. Нелинейные уравнения

4.1. Квазилинейные уравнения вида $f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w)$

4.1.1. Предварительные замечания

1. Рассмотрим квазилинейное уравнение вида

$$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w). \qquad (1)$$

Пусть известно частное решение $u(x,y)$ (главный интеграл) соответствующего линейного однородного уравнения

$$f(x,y)\frac{\partial u}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial u}{\partial y} = 0 \qquad (u \not\equiv \text{const}).$$

Переходя в (1) от x, y к новым переменным x, $u = u(x,y)$, получим

$$\overline{f}(x,u)\frac{\partial w}{\partial x} = \overline{h}(x,u,w),$$

где $\overline{f}(x,u) = f(x,y)$, $\overline{h}(x,u,w) = h(x,y,w)$.

Уравнение (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение для $w = w(x)$ с параметром u. Его решение после перехода к исходным переменным x, y приводит к решению уравнения (1).

2. Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w) = C_1, \qquad u_2(x,y,w) = C_2$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y)} = \frac{dy}{g(x,y)} = \frac{dw}{h(x,y,w)},$$

то общее решение неоднородного уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1,u_2) = 0,$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов.

3. Пусть $\zeta = \zeta(x,y,w)$ — интеграл вспомогательного линейного однородного уравнения с тремя независимыми переменными

$$f(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + h(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial w} = 0. \qquad (2)$$

Тогда интеграл $w(x,y)$ исходного неоднородного уравнения (1) можно получить путем разрешения алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\zeta(x,y,w) = 0 \qquad (\zeta'_w \neq 0)$$

относительно w.

О решении уравнений вида (2) см. в разд. 2.1.

4.1.2. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}=\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma w}-\frac{1}{\gamma}(\alpha a+\beta b).$$

Общее решение: $\Phi\Bigl(bx-ay,\ \frac{\gamma}{a}x-2\sqrt{\alpha x+\beta y+\gamma w}\Bigr)$.

2. $$\frac{\partial w}{\partial x}+k\frac{\partial w}{\partial y}=(ax+by+cw)^n.$$

Подстановка $v(x,y)=ax+by+cw(x,y)$ приводит к уравнению 1.5.2.3:

$$\frac{\partial v}{\partial x}+k\frac{\partial v}{\partial y}=cv^n+a+b.$$

3. $$a\frac{\partial w}{\partial x}+b\frac{\partial w}{\partial y}=w^n+c.$$

Общее решение: $\Phi\Bigl(bx-ay,\ a\int\frac{dw}{w^n+c}-x\Bigr)=0$.

4. $$x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}=w-a\sqrt{w^2-x^2-y^2}.$$

Общее решение: $\Phi\Bigl(\frac{y}{x},\ x^{a+1}\bigl(w+\sqrt{w^2-x^2-y^2}\,\bigr)\Bigr)=0$.

5. $$x^2\Bigl(a\frac{\partial w}{\partial x}-b\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)=(w-bx-ay)^2.$$

Общее решение: $w=\dfrac{[(a+b)x+ay]\Phi(bx+ay)-ax(bx+ay)}{\Phi(bx+ay)-ax}$.

Особое решение: $w=(a+b)x+ay$.

6. $$(x^2\pm a^2)\frac{\partial w}{\partial x}+(y^2\pm a^2)\frac{\partial w}{\partial y}= \\ =bx^ny^m\Bigl[\frac{n(x^2\pm a^2)}{x}+\frac{m(y^2\pm a^2)}{y}\Bigr]w^2.$$

Общее решение:

$$w=[\Phi(v)-bx^ny^m]^{-1},\quad v=\begin{cases}\dfrac{a(x-y)}{a^2+xy}, & \text{для знака «+»;}\\[2mm] \dfrac{(x-2a)(y+2a)}{(x+2a)(y-2a)}, & \text{для знака «−».}\end{cases}$$

7. $$ax^2\frac{\partial w}{\partial x}+by^2\frac{\partial w}{\partial y}=cw^2.$$

Общее решение: $w=\dfrac{1}{c}\Bigl[\dfrac{1}{ax}+\Phi\Bigl(\dfrac{1}{by}-\dfrac{1}{ax}\Bigr)\Bigr]^{-1}$.

8. $$y^{2a}\Bigl(ax\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}\Bigr)=c(y^aw-x^b)^2.$$

Общее решение: $\Phi\Bigl(\dfrac{x^b}{y^a},\ y^{c/b}\exp\Bigl(\dfrac{y^a}{y^aw-x^b}\Bigr)\Bigr)=0$.

Особое решение: $w = \dfrac{x^b}{y^a}$.

9. $$(xy + a^2)\left(x\frac{\partial w}{\partial x} - y\frac{\partial w}{\partial y}\right) = a(x^2 + y^2)w^2.$$

Общее решение: $w = \left[\dfrac{a(y^2 - x^2)}{2(xy + a^2)} + \Phi(xy)\right]^{-1}$.

4.1.3. Другие уравнения

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + b\frac{\partial w}{\partial y} = e^{\lambda w}\sin(\alpha x + \beta y).$$

Общее решение:

$$e^{-\lambda w} = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\alpha a + \beta b}\cos(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay), & \text{если } \alpha a + \beta b \neq 0; \\ -\dfrac{\lambda}{b}y\sin(\alpha x + \beta y) + \Phi(bx - ay), & \text{если } \alpha a + \beta b = 0. \end{cases}$$

2. $$(A_1 - A_0x)\frac{\partial w}{\partial x} + (A_2 - A_0y)\frac{\partial w}{\partial y} = f(w),$$

где $A_\nu = a_\nu + b_\nu x + c_\nu y$, $\nu = 0,\ 1,\ 2$.

Из разд. 2.1.1 (п. 3) следует, что решение этого уравнения можно выразить через решение соответствующего линейного однородного уравнения с тремя независимыми переменными

$$(A_1 - A_0x)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + (A_2 - A_0y)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + f(w)\frac{\partial \zeta}{\partial w} = 0.$$

Применяя метод Хессе (см. разд. 3.1), можно добиться, чтобы первые два коэффициента стали линейными по независимым переменным.

3. $$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h_2(x,y)w^2 + h_1(x,y)w + h_0(x,y).$$

Пусть известно частное решение уравнения $w_0 = w_0(x,y)$. Замена $\zeta = w - w_0$ приводит к уравнению вида 4.1.3.4 при $m = 2$:

$$f\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = h_2\zeta^2 + (2h_2w_0 + h_1)\zeta.$$

4. $$f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h_1(x,y)w + h_2(x,y)w^m.$$

Замена $\xi = w^{1-m}$ приводит к линейному неоднородному уравнению

$$f(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = (1-m)h_1(x,y)\xi + (1-m)h_2(x,y),$$

которое рассматривается в разд. 1.5.

5. $\displaystyle f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h_1(x,y) + h_2(x,y)e^{\lambda w}.$

Замена $\xi = e^{-\lambda w}$ приводит к линейному неоднородному уравнению

$$f(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = -\lambda h_1(x,y)\xi + \lambda h_2(x,y),$$

которое рассматривается в разд. 1.5.

6. $\displaystyle f(x,y)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y)\varphi(w).$

Замена $\xi = \int \frac{dw}{\varphi(w)}$ приводит к линейному неоднородному уравнению

$$f(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial x} + g(x,y)\frac{\partial \xi}{\partial y} = h(x,y),$$

которое рассматривается в разд. 1.3.

4.2. Квазилинейные уравнения вида $f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w)$

4.2.1. Предварительные замечания

1. Общее квазилинейное уравнение с частными производными первого порядка с двумя независимыми переменными имеет вид

$$f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w). \qquad (1)$$

Частный случай $f'_w \equiv g'_w \equiv 0$ рассматривается в разд. 4.1.

Если известны два независимых интеграла

$$u_1(x,y,w) = C_1, \qquad u_2(x,y,w) = C_2$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f(x,y,w)} = \frac{dy}{g(x,y,w)} = \frac{dw}{h(x,y,w)},$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1, u_2) = 0,$$

где Φ — произвольная функция двух аргументов.

2. Пусть $\zeta = \zeta(x,y,w)$ — интеграл вспомогательного линейного однородного уравнения с тремя независимыми переменными

$$f(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial y} + h(x,y,w)\frac{\partial \zeta}{\partial w} = 0. \qquad (2)$$

Тогда интеграл $w(x,y)$ исходного неоднородного уравнения (1) можно получить путем разрешения алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\zeta(x,y,w) = 0 \qquad (\zeta'_w \neq 0)$$

относительно w.

О решении уравнений вида (2) см. в разд. 2.1.

4.2.2. Уравнения, содержащие степенные функции

▶ Функции f, g, h линейны по переменной w

1. $$a\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Общее решение:

$$\Phi(xw - ay, w) = 0 \qquad \text{или} \qquad ay = xw + \overline{\Phi}(w),$$

где Φ и $\overline{\Phi}$ — произвольные функции.

2. $$w\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} = a.$$

Общее решение: $\Phi(w^2 - 2ax, w - ay) = 0$.
Полный интеграл — параболический цилиндр:

$$(w + C_1)^2 = 2a(x + C_1 y) + C_2.$$

3. $$w\frac{\partial w}{\partial x} + a\frac{\partial w}{\partial y} = x.$$

Общее решение: $\Phi\big((x + w)e^{-y/a},\ (x - w)e^{y/a}\big) = 0$.

4. $$(a - w)\frac{\partial w}{\partial x} + (a + w)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Общее решение: $\Phi\big(w,\ x(w + a) + y(w - a)\big) = 0$.
Частное решение: $w = \dfrac{a(y - x) + C}{y + x}$.

5. $$(a + bw)\frac{\partial w}{\partial x} + (c + dw)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Частный случай уравнения 4.2.4.1 при $f(w) = \dfrac{c + dw}{a + bw}$.

6. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (aw + bx^k + c)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Частный случай уравнения 4.2.4.3 при $f(w) = aw$, $g(x) = bx^k + c$.

7. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (aw + bx^k)(cy^m + d)\frac{\partial w}{\partial y} = 0.$$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w) = aw + bx^k$, $g(y) = cy^m + d$.

8. $$\frac{\partial w}{\partial x} + (aw + b)\frac{\partial w}{\partial y} = cw + d.$$

Частный случай уравнения 4.2.4.7 при $f(w) = aw + b$, $g(w) = cw + d$.

9. $$[m(w-c)-n(y-b)]\frac{\partial w}{\partial x}+[n(x-a)-l(w-c)]\frac{\partial w}{\partial y}=l(y-b)-m(x-a).$$

Уравнение винтовой поверхности и поверхности тел вращения.

Общее решение:

$$\Phi\bigl((x-a)^2+(y-b)^2+(w-c)^2,\ lx+my+nw\bigr)=0.$$

10. $$(w-ay)\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}=cw.$$

Общее решение: $\Phi\bigl(w^b y^{-c},\ c(bx+ay)-bw\bigr)=0$.

11. $$(y^2-aw)\frac{\partial w}{\partial x}+by\frac{\partial w}{\partial y}=cw.$$

Общее решение: $\Phi\left(\frac{w}{y},\ aw+cx-\frac{c}{2b}y^2\right)=0$.

12. $$[b(x+y)-c(x+w)]\frac{\partial w}{\partial x}+[c(y+w)-a(x+y)]\frac{\partial w}{\partial y}=a(x+w)-b(y+w).$$

Общее решение: $\Phi(ax+by+cw,\ xy+yw+xw)=0$.

13. $$\frac{\partial w}{\partial x}-axw\frac{\partial w}{\partial y}=bx.$$

Общее решение: $\Phi(aw^2+2by,\ 2w-bx^2)=0$.

14. $$[x(y+a)-w]\frac{\partial w}{\partial x}+[1-(y+a)^2]\frac{\partial w}{\partial y}=(y+a)w-x.$$

Общее решение: $\Phi\bigl(x+(y+a)w,\ x(y+a)+w\bigr)=0$.

15. $$ayw\frac{\partial w}{\partial x}+bxw\frac{\partial w}{\partial y}=cxy.$$

Общее решение: $aw^2=cx^2+\Phi(ay^2-bx^2)$.

16. $$axw\frac{\partial w}{\partial x}+byw\frac{\partial w}{\partial y}=cxy.$$

Общее решение:

$$(a+b)w^2=2cxy+\Phi(x^{-b}y^a) \quad \text{при} \quad b\neq -a,$$
$$aw^2=2cxy\ln x+\Phi(xy) \quad \text{при} \quad b=-a.$$

17. $$axw\frac{\partial w}{\partial x}+byw\frac{\partial w}{\partial y}=\alpha x^2+\beta y^2.$$

Общее решение: $abw^2=\alpha bx^2+a\beta y^2+\Phi(x^{-b}y^a)$.

18. $$w\frac{\partial w}{\partial x}-(1+3y)\frac{\partial w}{\partial y}=3w.$$

Общее решение: $w=3x+\Phi(x+yw)$.

► **Функции f, g, h квадратичны по переменной w**

18. $(a+bw+cw^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(\alpha+\beta w+\gamma w^2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.1 при $f(w)=\dfrac{\alpha+\beta w+\gamma w^2}{a+bw+cw^2}$.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(aw^2+bw+cx^k+d)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.3 при $f(w)=aw^2+bw$, $g(x)=cx^k+d$.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(aw^2+bx^k)(cy^m+d)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w)=aw^2+bx^k$, $g(y)=cy^m+d$.

21. $(ay^m+b)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(cw^2+dx^k)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w)=cw^2+dx^k$, $g(y)=(ay^m+b)^{-1}$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(aw^2+bw+c)\dfrac{\partial w}{\partial y}=\alpha w^2+\beta w+\gamma.$

Частный случай уравнения 4.2.4.7 при $f(w)=aw^2+bw+c$, $g(w)=\alpha w^2+\beta w+\gamma$.

23. $awx\dfrac{\partial w}{\partial x}+byw\dfrac{\partial w}{\partial y}=\alpha x^2+\beta y^2+\gamma w^2.$

1°. Общее решение при $a\neq\gamma$, $b\neq\gamma$:

$$w^2=x^{2\gamma/a}\Phi(x^{-b}y^a)+\frac{\alpha x^2}{a-\gamma}+\frac{\beta y^2}{b-\gamma}.$$

2°. Общее решение при $a\neq\gamma$, $b=\gamma$:

$$w^2=x^{2b/a}\Phi(x^{-b}y^a)+\frac{\alpha x^2}{a-b}+\frac{2\beta y^2\ln x}{a}.$$

3°. Общее решение при $a=\gamma$, $b\neq\gamma$:

$$w^2=x^2\Phi(x^{-b}y^a)+\frac{2\alpha x^2\ln x}{a}+\frac{\beta y^2}{b-a}.$$

4°. Общее решение при $a=b=\gamma$:

$$w^2=x^2\Phi\Big(\frac{y}{x}\Big)+\frac{2}{a}(\alpha x^2+\beta y^2)\ln x.$$

24. $ayw\dfrac{\partial w}{\partial x}+bxw\dfrac{\partial w}{\partial y}=xy(\alpha x^2+\beta y^2+\gamma w^2).$

Общее решение:

$$w^2=\exp(\gamma x^2/a)\Phi(ay^2-bx^2)+\frac{\beta b-\alpha a}{4\gamma a}x^2-\frac{\beta y^2}{2\gamma}-\frac{\alpha a+\beta b}{4\gamma^2}.$$

25. $x(w+ax)\dfrac{\partial w}{\partial x}+y(w+ay)\dfrac{\partial w}{\partial y}=w^2-a^2xy.$

Общее решение: $\Phi\Big(\dfrac{w}{x}+a\ln|y|,\ \dfrac{w}{y}+a\ln|x|\Big)=0.$

26. $(A_0x-A_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(A_0y-A_2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=A_0w-A_3,$

где $A_\nu=a_\nu+b_\nu x+c_\nu y+d_\nu w;\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ 3.$

Введение новой искомой функции $\zeta=\zeta(x,y,w)$ приводит к уравнению Хессе с тремя независимыми переменными 2.1.2.45.

27. $ax^2(by-cw)\dfrac{\partial w}{\partial x}+by^2(cw-ax)\dfrac{\partial w}{\partial y}=cw^2(ax-by).$

Общее решение: $\Phi(xyw,\ abxy+bcyw+acxw)=0.$

28. $(a+bx^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(\alpha+\beta w^2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=\gamma.$

1°. Общее решение при $ab>0$:

$$\Phi\Big(\sqrt{ab}\,w-\gamma\operatorname{arctg}\big(\sqrt{b/a}\,x\big),\ \alpha w+\tfrac{1}{3}\beta w-\gamma y\Big)=0.$$

2°. Общее решение при $ab<0$:

$$\Phi\Big(\sqrt{-2ab}\,w-\gamma\ln\frac{bx-\sqrt{-ab}}{bx+\sqrt{-ab}},\ \alpha w+\tfrac{1}{3}\beta w-\gamma y\Big)=0.$$

29. $b(by+cw)^2\dfrac{\partial w}{\partial x}-a^2x(by+2cw)\dfrac{\partial w}{\partial y}=a^2xw.$

Общее решение:

$$\Phi\big(w(cw+by),\ a^2x^2+b^2y^2+c^2w^2\big)=0.$$

30. $(ax^2-by^2-cw^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}+2axy\dfrac{\partial w}{\partial y}=2axw.$

Общее решение: $\Phi\Big(\dfrac{ax^2+by^2+cw^2}{y},\ \dfrac{w}{y}\Big)=0.$

31. $(w^2+2by^2)x\dfrac{\partial w}{\partial x}-(w-3ax^3)y\dfrac{\partial w}{\partial y}=(3ax^3w-2by^2)w.$

Один из интегралов: $w=ax^3+by^2+C.$

32. $by(3ax^2+by^2+cw^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}-2ax(ax^2+cw^2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=2abxyw.$

Общее решение: $\Phi\Big(\dfrac{ax^2+by^2+cw^2}{w},\ \dfrac{2ax^2+by^2}{w^2}\Big)=0.$

33. $b(a^2xy-abyw-b^2w^2)\dfrac{\partial w}{\partial x}+ab(bxw-axy-ay^2)\dfrac{\partial w}{\partial y}=$

$=a^2(axy+bxw+byw+ay^2-ax^2).$

Общее решение:

$$\Phi(ax^2+ay^2+2byw,\ a^2x^2+b^2w^2+2a^2xy)=0.$$

34. $ax^2w^2\dfrac{\partial w}{\partial x} + by^2w^2\dfrac{\partial w}{\partial y} = cx^2y^2.$

Общее решение:

$$a^2b^2\left(\frac{1}{ax} - \frac{1}{by}\right)^3 w^3 - 3c\left(\frac{by}{ax} - \frac{ax}{by}\right) + 6c\ln\left|\frac{by}{ax}\right| = \Phi\left(\frac{1}{ax} - \frac{1}{by}\right).$$

35. $xy(a^2xy + 2b^2w^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} + byw(byw - ax^2)\dfrac{\partial w}{\partial y} = bw^2(byw - ax^2).$

Общее решение: $\Phi\left(\dfrac{w}{y},\ \dfrac{b^2w^2}{ax} + \dfrac{bxw}{y} + ay\right) = 0.$

► Другие функции f, g, h

36. $(a + bw^k)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c + dw^m)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.1 при $f(w) = \dfrac{c + d^m}{a + bw^k}$.

37. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (aw^k + bx^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.3 при $f(w) = aw^k$, $g(x) = bx^m + c$.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (aw^k + bx^m + c)(dy^n + s)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w) = aw^k + bx^m + c$, $g(y) = dy^n + s$.

39. $(ay^m + b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cw^k + dx^n + s)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w) = cw^k + dx^n + s$, $g(y) = (ay^m + b)^{-1}$.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (aw^n + b)\dfrac{\partial w}{\partial y} = c.$

Общее решение: $\Phi\left(w - cx,\ \dfrac{aw^{n+1}}{n+1} + bw - cy\right) = 0.$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + (aw^k + b)\dfrac{\partial w}{\partial y} = cw^m + d.$

Частный случай уравнения 4.2.4.7 при $f(w) = aw^k + b$, $g(w) = cw^m + d$.

42. $(ax + by + cw)^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + k\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 1.$

Общее решение: $\displaystyle\int \frac{dw}{cw^{-n} + a + b} = x + \Phi(y - kx).$

43. $\left(a+\sqrt{w-\alpha x-\beta y}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}+b\dfrac{\partial w}{\partial y}=\alpha a+\beta b.$

Общее решение:

$$\Phi\left(cy-bw,\ ay+2b\sqrt{w-\alpha x-\beta y}\right)=0,\quad \text{где } c=\alpha a+\beta b.$$

Особое решение: $w=\alpha x+\beta y$.

44. $x\dfrac{\partial w}{\partial x}+\left(y-\sqrt{a^2-w^2}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Общее решение: $x-y+\sqrt{a^2-w^2}=\Phi(w)$.

45. $(x^2+w^2-a)\dfrac{\partial w}{\partial x}+\left(xy+\sqrt{a-w^2}\sqrt{x^2+y^2+w^2-a}\right)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Общее решение: $\Phi\left(w,\ \dfrac{xy+\sqrt{a-w^2}\sqrt{x^2+y^2+w^2-a}}{x^2+w^2-a}\right)=0.$

4.2.3. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $\mu(w+ae^{\lambda x})\dfrac{\partial w}{\partial x}+\lambda(w+ae^{\mu y})\dfrac{\partial w}{\partial y}=\lambda\mu(w^2-a^2e^{\lambda x+\mu y}).$

Преобразование $\xi=e^{\lambda x}$, $\eta=e^{\mu y}$ приводит к уравнению 4.2.2.25.

2. $ax^2w\dfrac{\partial w}{\partial x}+bye^{ax}\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Общее решение: $\Phi\left(w,\ a^2w\ln y-b\displaystyle\int\frac{e^{ax}\,dx}{x^2}\right)=0.$

3. $(a+be^{\lambda w})\dfrac{\partial w}{\partial x}+(c+de^{\mu w})\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.1 при $f(w)=\dfrac{c+de^{\mu w}}{a+be^{\lambda w}}$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ae^{\lambda w}+be^{\mu x}+c)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.3 при $f(w)=ae^{\lambda w}$, $g(x)=be^{\mu x}+c$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ae^{\lambda w}+be^{\mu x}+c)(de^{\nu y}+s)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w)=ae^{\lambda w}+be^{\mu x}+c$, $g(y)=de^{\nu y}+s$.

6. $(ae^{\nu y}+b)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ce^{\lambda w}+de^{\mu x}+s)\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Частный случай уравнения 4.2.4.6 при $f(x,w)=ce^{\lambda w}+de^{\mu x}+s$, $g(y)=(ae^{\nu y}+b)^{-1}$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial x}+(ae^{\lambda w}+b)\dfrac{\partial w}{\partial y}=ce^{\lambda w}+d.$

Частный случай уравнения 4.2.4.7 при $f(w)=ae^{\lambda w}+b$, $g(w)=ce^{\lambda w}+d$.

4.2.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Это уравнение представляет собой закон сохранения количества вещества (или какой-либо другой величины) и часто встречается в механике сплошных сред, гидродинамике, газодинамике, акустике, теории фильтрации, химической технологии и нелинейной оптике (см., например, Дж. Уизем, 1977). Здесь независимые переменные x и y играют соответственно роль времени и координаты, w играет роль плотности переносимой величины, а $q = \int f(w)\,dw$ — ее расхода.

1. Общее решение:

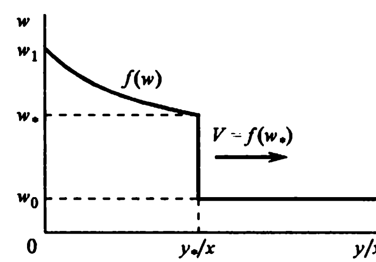
$$\Phi(y - xf(w), w) = 0 \qquad \text{или} \qquad y = xf(w) + \overline{\Phi}(w),$$

где Φ и $\overline{\Phi}$ — произвольные функции.

2. В физических приложениях часто ищут решение исходного уравнения со следующими начальным (при $x = 0$) и граничным (при $y = 0$) условиями:

$$w(y, 0) = w_0, \quad w(0, x) = w_1,$$

где w_0, w_1 — некоторые константы. Для определенности далее считаем, что $0 \leqslant w_0 < w_1$.



Исходное уравнение является гиперболическим уравнением первого порядка, описывающим волновое движение величины w. Структура решения зависит от функции $f(w)$. При $f(w) > 0$ ($w_0 < w < w_1$) возникает опрокидывание волнового фронта и волна имеет вид «ступеньки» (функции с разрывом первого рода, см. рис.).

Соответствующее автомодельное решение определяется формулами

$$f(w) = \frac{y}{x} \qquad \text{при} \quad 0 < \frac{y}{x} < V,$$
$$w = w_0 \qquad \text{при} \quad V < \frac{y}{x} < \infty.$$

Фронт скачка движется со скоростью $V = f(w_*)$. Величина w на фронте ударной волны изменяется скачком от значения w_* до w_0 ($w_0 < w_* < w_1$). Величина w_* определяется из равенства

$$f(w_*) = \frac{q(w_*) - q(w_0)}{w_* - w_0}, \quad \text{где} \quad q(w) = \int f(w)\,dw.$$

2. $[yf(w) - x]\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение: $\Phi\bigl(w,\, 2xy - y^2 f(w)\bigr) = 0.$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + [f(w) + g(x)]\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение: $y = xf(w) + \int g(x)\,dx + \Phi(w)$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x)g(y)h(w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение:

$$\Phi(u, w) = 0, \qquad \text{где} \quad u = \int \frac{dy}{g(y)} - h(w)\int f(x)\,dx.$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x, w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение:

$$y = \int_a^x f(\xi, w)\,d\xi + \Phi(w),$$

где $\Phi(w)$ — произвольная функция, a — любое.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(x, w)g(y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int_a^x f(\xi, w)\,d\xi + \Phi(w),$$

где $\Phi(w)$ — произвольная функция, a — любое.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = g(w).$

Общее решение:

$$y = \int \frac{f(w)}{g(w)}dw + \Phi\Big(x - \int \frac{dw}{g(w)}\Big).$$

8. $f_y(x, y, w)\dfrac{\partial w}{\partial x} - f_x(x, y, w)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общее решение: $\Phi\big(w,\ f(x, y, w)\big) = 0$.

4.3. Нелинейные уравнения с двумя независимыми переменными общего вида

4.3.1. Предварительные замечания

1. Рассмотрим общее нелинейное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными

$$F(x, y, w, p, q) = 0, \qquad \text{где} \quad p = \frac{\partial w}{\partial x}, \ q = \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{1}$$

Пусть найден один первый интеграл

$$\Phi(x, y, w, p, q) = C_1 \tag{2}$$

системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dw}{Pp+Qq} = -\frac{dp}{X+Wp} = -\frac{dq}{Y+Wq}, \tag{3}$$

где

$$X = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad W = \frac{\partial F}{\partial w}, \quad P = \frac{\partial F}{\partial p}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial q}.$$

Считаем, что уравнение (2) вместе с уравнением (1) можно разрешить относительно p, q:

$$p = \varphi_1(x, y, w, C_1), \qquad q = \varphi_2(x, y, w, C_1).$$

Тогда полный интеграл уравнения (1) является общим решением вполне интегрируемого уравнения Пфаффа

$$dw = \varphi_1(x, y, w, C_1)\,dx + \varphi_2(x, y, w, C_1)\,dy. \tag{4}$$

В это общее решение войдет другая произвольная константа C_2. Поэтому полный интеграл уравнения (1) зависит от двух произвольных констант:

$$\Xi(x, y, w, C_1, C_2) = 0. \tag{5}$$

Одним из первых интегралов системы (3) является соотношение $F(x, y, w, p, q) = C$, поэтому интеграл Φ должен быть отличен от F. Однако наличие известного соотношения (1) позволяет понизить порядок системы (3) на единицу.

2. Если исходное уравнение не содержит явно искомой функции, т.е. имеет вид $F(x, y, p, q) = 0$, то интеграл (2) тоже можно искать в форме $\Phi(x, y, p, q) = C_1$. В этом случае система (3) записывается так:

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = -\frac{dp}{X} = -\frac{dq}{Y}.$$

Соответствующее уравнение Пфаффа (4) принимает вид

$$dw = \varphi_1(x, y, C_1)\,dx + \varphi_2(x, y, C_1)\,dy$$

и может быть проинтегрировано в квадратурах.

3. Исключая C_1, C_2 из трех уравнений — уравнения (5) и уравнений

$$C_2 = f(C_1), \qquad \frac{\partial \Xi}{\partial C_1} + \frac{\partial \Xi}{\partial C_2}\frac{df(C_1)}{dC_1} = 0,$$

где f — произвольная функция, получим общий интеграл уравнения (1)

$$U\big(x, y, f(x, y), w\big) = 0.$$

4. Пусть $\Xi(x, y, w, C_1, C_2) = 0$ — полный интеграл уравнения (1). Тогда, исключая C_1, C_2 из трех уравнений — уравнения (5) и уравнений

$$\frac{\partial \Xi}{\partial C_1} = 0, \qquad \frac{\partial \Xi}{\partial C_2} = 0,$$

найдем особый интеграл уравнения (1).

4.3.2. Уравнения вида $F(x,y,w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w)$

1. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = a\dfrac{\partial w}{\partial y} + b.$

Полный интеграл:

$$w = C_1 x + \frac{C_1^2 - b}{a} y + C_2.$$

В случае $a = 1$, $b = 0$ через параболу $w = x^2$, $y = 0$ проходит интегральная поверхность $w = \dfrac{x^2}{1-4y}$, где $y < \frac{1}{4}$.

2. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \dfrac{\partial w}{\partial y} + w + x = 0.$

Полный интеграл в неявном виде:

$$R + (C_1 - 1)\ln|1 - C_1 + R| + \tfrac{1}{2}x + C_1 y = C_2,$$

где $R^2 = C_1^2 - 2C_1 - w - x$.

3. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + a\dfrac{\partial w}{\partial y} = bx + cy.$

Полный интеграл:

$$w = \begin{cases} \pm\dfrac{2}{3b}(bx + C_1)^{3/2} + \dfrac{cy^2}{2a} - \dfrac{C_1}{a}y + C_2 & \text{при } b \neq 0, \\ C_1 x + \dfrac{cy^2}{2a} - \dfrac{C_1^2}{a}y + C_2 & \text{при } b = 0. \end{cases}$$

4. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = ax\dfrac{\partial w}{\partial y} + bxy.$

Уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$w = \pm\frac{2x}{3}\sqrt{C_1 x} + \frac{2C_1 y - by^2}{2a} + C_2.$$

5. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + x\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$w = \frac{C_1^2}{4}y - \frac{x^2}{4} \pm \frac{x}{4}\sqrt{x^2 + C_1^2} \pm \frac{C_1^2}{4}\operatorname{Arsh}\frac{x}{C_1} + C_2.$$

Кроме того, для $|x| > C_1 > 0$

$$w = -\frac{C_1^2}{4}y - \frac{x^2}{4} \pm \frac{x}{4}\sqrt{x^2 - C_1^2} \mp (\operatorname{sign} x)\frac{C_1^2}{4}\operatorname{Arch}\left|\frac{x}{C_1}\right| + C_2,$$

причем значение $\operatorname{Arch}|x/C_1|$ должно быть выбрано положительным.

6. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + x\dfrac{\partial w}{\partial x} - \dfrac{\partial w}{\partial y} + 2w = 0.$

Полный интеграл:

$$w = 2C_1xy^3 + C_1^2y^6 + C_2y^2.$$

Полным интегралом является также

$$w = C_1y^2 - \left(x + \frac{C_2}{y}\right).$$

7. $3\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + x\dfrac{\partial w}{\partial x} + (y+a)\dfrac{\partial w}{\partial y} = w.$

Уравнение Клеро. Полный интеграл:

$$w = C_1x + C_2y + 3C_1^2 + aC_2.$$

Интегралом также является $w = -\frac{1}{12}x^2 + C(y+a)$. Особого интеграла нет.

8. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ay\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y} = c.$

Полный интеграл:

$$w = C_1x + \frac{c - C_1^2}{b}y - \frac{aC_1}{2b}y^2 + C_2.$$

9. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ay^2\dfrac{\partial w}{\partial y} + ayw + by^4 = 0.$

Полный интеграл:

$$yw = \frac{b}{4a}y^4 + C_1x + \frac{C_1^2}{2ay^2} + C_2.$$

Полным интегралом будет также

$$yw = \frac{b}{4a}y^4 - \frac{a}{2}y^2(x + C_1)^2 + C_2.$$

10. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ay^2\dfrac{\partial w}{\partial y} = b.$

Уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$w = C_1x + \frac{C_1^2 - b}{ay} + C_2.$$

11. $\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + y^3\dfrac{\partial w}{\partial y} = x^2 - y^2.$

Уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$w = \pm\left[\frac{x}{2}\sqrt{x^2 + C_1} + \frac{C_1}{2}\varphi(x)\right] - \frac{C_1}{2y^2} + \ln|y| + C_2,$$

где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \operatorname{Arsh} \dfrac{x}{\sqrt{C_1}} & \text{для } C_1 > 0; \\ (\operatorname{sign} x) \operatorname{Arch} \dfrac{|x|}{\sqrt{-C_1}} & \text{для } C_1 < 0,\ |x| > |C_1|; \\ 0 & \text{для } C_1 = 0, \end{cases}$$

при этом под Arch надо понимать положительную ветвь.

12. $\displaystyle \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + aw\frac{\partial w}{\partial y} = bw^2.$

Полный интеграл:

$$w = C_2 \exp\bigl(\lambda x + \lambda C_1 y\bigr), \qquad \text{где} \quad \lambda = -\tfrac{1}{2}aC_1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2C_1^2 + 4b}.$$

Интегралом будет также функция $w = C\exp(by/a)$.

13. $\displaystyle \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + aw\left(y\frac{\partial w}{\partial y} - w\right) = 0.$

Полный интеграл:

$$w = C_1 \exp\bigl[aC_2 x + (1 - aC_2^2)\ln|y|\bigr].$$

14. $\displaystyle x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 = a\frac{\partial w}{\partial y}.$

Уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$w = 2\sqrt{C_1 x} + \frac{C_1}{a}y + C_2.$$

15. $\displaystyle x^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - y^2\frac{\partial w}{\partial y} = w.$

Полный интеграл: $w = C_1 \exp \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{4}(\ln x + C_2)^2.$

16. $\displaystyle \left(x\frac{\partial w}{\partial x} + w\right)^2 = a\frac{\partial w}{\partial y}.$

Полный интеграл:

$$w = 2\sqrt{\frac{C_1}{x}} + \frac{C_1 y + C_2}{ax}.$$

Полным интегралом является также функция

$$w = \frac{C_1}{x} - \frac{a}{y + C_2}.$$

17. $\displaystyle x^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ayw\frac{\partial w}{\partial y} = bw^2.$

Полный интеграл:

$$w = C_2 x^{\lambda} y^{\lambda C_1}, \qquad \text{где} \quad \lambda = -\tfrac{1}{2}aC_1 \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{a^2C_1^2 + 4b}.$$

Интегралом будет также функция $w = Cy^{b/a}$.

18. $x(x+1)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - 2axw\frac{\partial w}{\partial x} - y^2\frac{\partial w}{\partial y} + w^2 = 0.$

Общее решение в параметрическом виде:

$$w = xu - v, \qquad x = \frac{v^2}{u^2}\left[\Phi'_z(z) - 1\right],$$

параметры u, v связаны неявным соотношением, содержащим произвольную функцию Φ :

$$\frac{1}{v} = -\frac{1}{u} + \Phi(z), \qquad \text{где} \quad z = \frac{1}{u} - \frac{1}{y}.$$

Для $\Phi(z) = (C_1 z + 1) + C_2$, в частности, получается полный интеграл

$$\left(\frac{C_1+1}{y} - C_2\right)w = \left(1 \pm \sqrt{|C_1 x|}\,\right)^2.$$

19. $y(y^2+1)\left(x\frac{\partial w}{\partial x} - w\right)^2 + x\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + 1\right] = (y^2+1)\frac{\partial w}{\partial y}.$

Общее решение в параметрическом виде:

$$w = xu - v, \qquad x = \frac{v^2(1+y^2)}{2(1+uy)^2}\Phi'_z(z),$$

параметры u, v связаны неявным соотношением, содержащим произвольную функцию Φ:

$$v = -\frac{2}{y^2 + \Phi(z)}, \qquad \text{где} \quad z = \frac{u-y}{1+uy}.$$

20. $w^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + aw\frac{\partial w}{\partial y} = bx + cy.$

Полный интеграл:

$$w^2 = \frac{1}{6b}(4bx + C_1)^{3/2} + \frac{c}{a}y^2 - \frac{C_1}{2a}y + C_2.$$

4.3.3. Уравнения вида $F(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w)$

1. $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = a.$

Полный интеграл: $w = aC_1 x + \frac{y}{C_1} + C_2.$

2. $\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = axy + b.$

Полный интеграл:

$$w = \begin{cases} y\sqrt{ax^2 + C_1} + b\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2 + C_1} + C_2 & \text{при } b \neq 0, \\ C_1 x^2 + \dfrac{a}{4C_1}y^2 + C_2 & \text{при } b = 0. \end{cases}$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = w^a.$

Полный интеграл:

$$w = \begin{cases} \dfrac{2-a}{2C_1}\left(C_1^2 x + y + C_2\right)^{\frac{2}{2-a}} & \text{при } a \neq 2, \\ C_2 \exp\left(C_1 x + \dfrac{y}{C_1}\right) & \text{при } a = 2. \end{cases}$$

В случае $a = 1$ полными интегралами являются также функции

$$w = (x - C_1)(y - C_2) \qquad \text{и} \quad w = \frac{1}{4C_1}(C_1 x + y - C_2)^2.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = Ax^a y^b w^c.$

Однородное уравнение. Полный интеграл:

$$w = \begin{cases} \dfrac{2-a}{2C_1}\left(AC_1^2 u + v + C_2\right)^{\frac{2}{2-a}} & \text{при } a \neq 2, \\ C_2 \exp\left(AC_1 u + \dfrac{v}{C_1}\right) & \text{при } a = 2, \end{cases}$$

где

$$u = \begin{cases} \dfrac{x^{a+1}}{a+1}, & \text{если } a \neq -1; \\ \ln|x|, & \text{если } a = -1; \end{cases} \qquad v = \begin{cases} \dfrac{y^{b+1}}{b+1}, & \text{если } b \neq -1; \\ \ln|y|, & \text{если } b = -1. \end{cases}$$

5. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = bw.$

Полный интеграл в неявном виде:

$$b(x + C_1 y) + C_2 = R + a\ln|R - a|, \qquad \text{где} \quad R^2 = 4Abw + a^2.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = a\dfrac{\partial w}{\partial x} + b\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Полный интеграл:

$$w = C_1 + C_2 x + C_3 y, \qquad \text{где} \quad C_2 C_3 = aC_2 + bC_3.$$

7. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Полные интегралы в трех различных формах:

$$w = xy + x\sqrt{y^2 + C_1} + C_2,$$
$$w = xy + y\sqrt{x^2 + C_1} + C_2,$$
$$w = \frac{(x + C_1 y)^2}{2C_1} + C_2.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} = w.$

Уравнение Клеро. Полный интеграл: $w = C_1 x + C_2 y + C_1 C_2$, особый интеграл $w = -xy$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + ay\dfrac{\partial w}{\partial x} + bx\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \; ab \neq 0.$

Полный интеграл: $w = \dfrac{C_1 - 1}{2}\Big(bx^2 - \dfrac{a}{C_1}y^2\Big) + C_2.$

10. $\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x} + a\Big)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y} + bw\Big) = c.$

Подстановка $x = u$, $y = \ln v$, $w = Az + Bv - u$ приводит к уравнению 4.3.3.17

$$\frac{\partial z}{\partial u}\left[\frac{A^2}{c}v\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{abA}{c}u + \frac{bA(B+1)}{c}v + \frac{bA^2}{c}z\right] = 1.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \sin y\Big) = \sin x.$

Уравнение с разделяющимися переменными. Полный интеграл:

$$w = C_1\cos x - \cos y - \frac{y}{C_1} + C_2.$$

12. $2\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + y\dfrac{\partial w}{\partial x} + x\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) + x^2 + y^2 = 0.$

Подстановка

$$z = w + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}, \quad u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$$

приводит к уравнению $z_u^2 - z_v^2 = 2u^2$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big(k\dfrac{\partial w}{\partial y} + ax + by + cw\Big) = 1, \quad c \neq 0.$

Полагая $z = -\dfrac{bk}{c} + ax + by + cw$, получаем уравнение 4.3.3.10: $(z_x - a)(cz + kz_y) = c^2$.

14. $2x\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial y} = a.$

Полный интеграл: $w^2 = 2(y - C_1)(C_2x - a)$.

15. $2x\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial y} + a\dfrac{\partial w}{\partial x} = 0.$

Полный интеграл в неявном виде:

$$(aC_1w + C_1^2x^2)^{3/2} - \tfrac{3}{2}aC_1^2(xw + ay) = C_1^3x^3 + C_2.$$

16. $y\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial x} + a\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0, \; a \neq 0.$

1°. Полный интеграл:

$$w = C_1y \pm \sqrt{2aC_1x + C_2}. \tag{1}$$

2°. Первая форма общего интеграла в параметрическом виде:

$$x = \Phi(v) + \frac{av}{2u^2}, \quad y = u\Phi'_v(v) - \frac{a}{2u}, \quad w = uv\Phi'_v(v) + \frac{av}{2u}.$$

Если положить $\Phi(v) = \frac{1}{2}C_1 v + C_2$, то получается первый интеграл

$$w = \frac{x - C_2}{C_1}\left(y \pm \sqrt{y^2 + aC_1}\,\right).$$

3°. Вторая форма общего интеграла в параметрическом виде:

$$x = \Phi(u) - \left(u + \frac{a}{v^2}\right)\Phi'_u(u), \qquad w = xv - v\Phi(u),$$

где $u = (2yv + a)v^{-2}$. Если положить $\Phi(u) = C_1 u + C_2$, то получается первый интеграл (1).

4°. Третья форма общего интеграла в параметрическом виде:

$$(w - yu)^2 = 2axu + 2\Phi(u), \qquad y^2 = \frac{[ax + \Phi'_u(u)]^2}{2axu + 2\Phi(u)}.$$

Полагая $\Phi(u) = C_1 u - C_2$, получаем полный интеграл

$$w = \frac{C_2 y}{ax + C_1} - \frac{ax + C_1}{2y}.$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial x}\left(ky\dfrac{\partial w}{\partial y} + ax + by + cw\right) = 1, \quad k \neq 0.$

Полный интеграл:

$$w = \begin{cases} -\dfrac{b}{k+c}y - \dfrac{k}{c}Ay^{-c/k} + \varphi(x), & \text{если } k + c \neq 0; \\ \dfrac{b}{c}y(\ln y - 1) + Ay + \varphi(x), & \text{если } k + c = 0. \end{cases}$$

Здесь $\varphi(x) = \dfrac{1}{c}\sqrt{2cx + C_2}$ при $a = 0$. При $a \neq 0$ функция φ задается в неявном виде: $a\varphi - \ln(c\varphi + ax) = C_2$.

18. $(x - y)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} + (x - w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (w - y)\dfrac{\partial w}{\partial y} = 0.$

Общий интеграл в параметрической форме:

$$\begin{aligned} x &= \Phi(z) + \frac{z}{u}(2u - v + 1)\Phi'_z(z), \\ y &= \Phi(z) + \frac{z}{v}(2v - u + 1)\Phi'_z(z), \\ w &= xu + yv - (u + v - 1)\Phi(z), \\ z &= \frac{1}{uv}(u + v - 1)^3. \end{aligned}$$

19. $xy\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = a.$

Полный интеграл: $w = aC_1 \ln|x| + \dfrac{1}{C}{}_1 \ln|y| + C_2$.

20. $xy\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y} = aw^2.$

Полный интеграл: $w = C_2 x^{aC_1} y^{1/C_1}$.

21. $(x^2+a)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big(\dfrac{\partial w}{\partial y}-1\Big)+xy^2\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Полный интеграл:

$$w=\pm\frac{C_1^2}{2}\ln(x^2+a)+C_2+\begin{cases}C_1\operatorname{arctg}\dfrac{y}{C_1} & \text{при верхнем знаке,}\\ C_1\operatorname{Arth}\dfrac{y}{C_1} & \text{при нижнем знаке.}\end{cases}$$

22. $[(1-x)^2-y]\Big[(1-x)\Big(1-\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)-w\Big]\dfrac{\partial w}{\partial y}=a(1-x)^2.$

Полный интеграл:

$$w=(1-x)\left[\int\frac{1}{4u}\left(1\pm\sqrt{1+\frac{8au}{u+C_1}}\right)du+C_2\right],\qquad u=\frac{C_1y}{(1-x)^2}.$$

23. $w\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}+a\dfrac{\partial w}{\partial x}+bw=0.$

Полный интеграл в неявном виде:

$$-a\ln\left|a\pm\sqrt{4bC_1w^2+a^2}\,\right|\pm\sqrt{4bC_1w^2+a^2}=2b(x+C_1y+C_2).$$

24. $w\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}=x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Полный интеграл: $w^2=\dfrac{1}{C_1C_2}(C_1x+C_2y)^2+C_3.$

25. $w\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}+x^2y\dfrac{\partial w}{\partial x}+xy^2\dfrac{\partial w}{\partial y}=xyw.$

Полный интеграл: $w^2=C_1x^2+C_2y^2+C_1C_2$. Особый интеграл $w=0$.

26. $(w+a)\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}=bw^2.$

Полный интеграл в неявном виде:

$$x+bC_1^2y+C_2=C_1\big(2\sqrt{w+a}+u\big),$$

где

$$u=\begin{cases}\sqrt{a}\ln\dfrac{\sqrt{w+a}-\sqrt{a}}{\sqrt{w+a}+\sqrt{a}} & \text{при } a>0,\\ \sqrt{-a}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{w+a}{-a}} & \text{при } a<0.\end{cases}$$

Решением также является $w=0$.

27. $(a+b)w\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}+by\dfrac{\partial w}{\partial x}+ax\dfrac{\partial w}{\partial y}=0.$

Однородное уравнение. Полный интеграл:

$$w^2=C_3-\frac{aC_2+bC_1}{(a+b)C_1C_2}(C_1x^2+C_2y^2).$$

28. $w^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\dfrac{\partial w}{\partial y}=xy+a.$

Полагая $2z=w^2$, получаем уравнение 4.3.3.2 $z_xz_y=xy+a$.

4.3.4. Уравнения вида $F(x,y,w)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + G(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + f(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial x} + g(x,y,w)\frac{\partial w}{\partial y} = h(x,y,w)$

1. $$a\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + b\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = cw^2.$$

Полный интеграл:
$$w = C_3 \exp\bigl(\lambda C_1 x + \lambda C_2\bigr), \quad \text{где} \quad \lambda^2 = \frac{c}{C_1(aC_1 + bC_2)}.$$

2. $$x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + ay^2 = 0.$$

Полный интеграл: $w = C_1 x e^y - \dfrac{a}{C_1}(y^2 + 2y + 2)e^{-y} + C_2$.

3. $$x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + y\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = 1.$$

Полный интеграл:
$$w = \sqrt{4x + C_1^2} + C_1 \ln\left|\frac{\sqrt{4x + C_1^2} - C_1}{y}\right| + C_2.$$

4. $$ax\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - (ay + b)\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + cy(ay + b)^2 = 0.$$

Полный интеграл: $w = C_1 x(ay + b) + \dfrac{cy^2}{2C_1} + C_2$.

5. $$y(w^2 + 1)\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + xw\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = 4x^2 y.$$

Полный интеграл в неявном виде:
$$\int \sqrt{C_1(C_1 w^2 + C_2 w + C_1)}\, dw = C_1 x^2 + C_2 y^2 + C_3.$$

6. $$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + w^2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = w^2.$$

Полный интеграл в неявном виде:
$$\pm(C_1 x + C_2 y + C_3) = R + C_1 \ln\frac{R - C_1}{w}, \qquad \text{где} \quad R^2 = C_1 C_2 w^2 + C_1^2.$$

4.4. Квазилинейные уравнения с тремя и более независимыми переменными

4.4.1. Предварительные замечания

1. Квазилинейное уравнение с тремя независимыми переменными имеет вид
$$f_1\frac{\partial w}{\partial x} + f_2\frac{\partial w}{\partial y} + f_3\frac{\partial w}{\partial z} = f_0, \quad f_i = f_i(x,y,z,w). \tag{1}$$

Если найдены три независимых интеграла (интегральный базис)

$$u_1(x,y,z,w) = C_1, \quad u_2(x,y,z,w) = C_2, \quad u_3(x,y,z,w) = C_3$$

характеристической системы

$$\frac{dx}{f_1} = \frac{dy}{f_2} = \frac{dz}{f_3} = \frac{dw}{f_0},$$

то общее решение уравнения (1) имеет вид

$$\Phi(u_1,\, u_2,\, u_3) = 0, \tag{2}$$

где Φ — произвольная функция трех аргументов.

Далее для краткости часто будем указывать только интегральный базис u_1, u_2, u_3. Общее решение строится по формуле (2).

2. Пусть $\zeta = \zeta(x,y,z,w)$ — интеграл вспомогательного линейного однородного уравнения с четырьмя независимыми переменными

$$f_1\frac{\partial\zeta}{\partial x} + f_2\frac{\partial\zeta}{\partial y} + f_3\frac{\partial\zeta}{\partial z} + f_0\frac{\partial\zeta}{\partial w} = 0. \tag{3}$$

Тогда интеграл $w(x,y,z)$ исходного неоднородного уравнения (1) можно получить путем разрешения алгебраического (трансцендентного) уравнения

$$\zeta(x,y,z,w) = 0 \qquad (\zeta'_w \neq 0)$$

относительно w. О решении уравнений вида (3) см. в разд. 3.1.

4.4.2. Отдельные уравнения

1. $$\beta\gamma(\beta y + \gamma z + \delta w)\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha\gamma(\gamma z + \alpha x + \delta w)\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha\beta(\alpha x + \beta y + \delta w)\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{\alpha x - \beta y}{\beta y - \gamma z}, \quad u_2 = w, \quad u_3 = (\alpha x - \beta y)^2(\alpha x + \beta y + \gamma z + \tfrac{3}{2}\delta w) = 0.$$

2. $$\beta\gamma(\beta y + \gamma z + \delta w)\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha\gamma(\gamma z + \alpha x + \delta w)\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha\beta(\alpha x + \beta y + \delta w)\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\alpha\beta\gamma}{\delta}(\alpha x + \beta y + \gamma z).$$

Интегральный базис:

$$u_1 = v(\delta w - \alpha x)^3, \quad u_2 = v(\delta w - \beta y)^3, \quad u_3 = v(\delta w - \gamma z)^3 = 0,$$

где $v = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta w$.

3. $$(\gamma\delta z w - \alpha\beta x y^2)\frac{\partial w}{\partial x} + \alpha\gamma y z\frac{\partial w}{\partial y} + \alpha\gamma z^2\frac{\partial w}{\partial z} = \alpha\gamma z w.$$

Интегральный базис:

$$u_1 = \frac{w}{y}, \quad u_2 = \frac{z}{y}, \quad u_3 = \left(\alpha x - \frac{\gamma\delta z w}{\beta y^2}\right)\exp\left(\frac{\beta y^2}{\gamma z}\right).$$

Особое решение: $w = \dfrac{\alpha\beta x y^2}{\gamma\delta z}$.

4. $\alpha\frac{\partial w}{\partial x}+\beta\frac{\partial w}{\partial y}+\gamma\frac{\partial w}{\partial z}=k\sqrt{w}.$

Общее решение: $w=\left[\frac{kx}{2\alpha}+\Phi(\alpha y-\beta x,\,\beta z-\gamma y)\right]^2.$

5. $2bx^2w^2\frac{\partial w}{\partial x}-2bxyw^2\frac{\partial w}{\partial y}-(bxw^2+ay)z\frac{\partial w}{\partial z}=-(bxw^2+ay)w.$

Общее решение: $\Phi(ay^2-bxw^2,\,xy,\,w/z)=0.$

6. $\sum\limits_{\nu=1}^{m-1}(A_0x_\nu-A_\nu)\frac{\partial z}{\partial x_\nu}=A_0z-A_m,$

где $A_\nu=a_{\nu 0}+\sum\limits_{\mu=1}^{m-1}a_{\nu\mu}x_\mu+a_{\nu n}z.$

Если известно решение уравнения Хессе 3.1.10

$$w=\Phi(x_1,\ldots,x_m),$$

где $x_m=z$, то, разрешая уравнение $\Phi(x_1,\ldots,x_{m-1},z)=0$ относительно z, получаем решение исходного уравнения.

Часть 2
УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

5. Линейные уравнения второго порядка

5.1. Классификация уравнений. Граничные и начальные условия

5.1.1. Приведение к каноническому виду уравнений с частными производными в случае двух независимых переменных

1. Простейшие примеры уравнений, встречающиеся в приложениях. Выделяют три основных типа дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, решения которых имеют характерные качественные различия.

Типичный пример уравнения *гиперболического типа* — волновое уравнение

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{1}$$

где переменная t играет роль времени, а переменная x — пространственной координаты. Отметим, что члены со старшими производными в уравнении (1) имеют разные знаки.

Типичный пример уравнения *параболического типа* — уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{2}$$

где переменная t играет роль времени, а переменная x — пространственной координаты. Отметим, что в уравнении (2) имеется только один член со старшими производными.

Типичный пример уравнения *эллиптического типа* — уравнение Лапласа:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \tag{3}$$

где переменные x и y играют роль пространственных координат. Отметим, что члены со старшими производными в уравнении (3) имеют одинаковые знаки.

Любое линейное уравнение второго порядка в частных производных с двумя независимыми переменными с помощью подходящих преобразований может быть приведено к более простому уравнению, у которого будет одна из трех комбинаций старших производных, указанных выше в конкретных примерах (1), (2) и (3) (см. пп. 3–5).

2. Типы уравнений. Уравнения характеристик. Рассмотрим общее уравнение второго порядка с частными производными в случае двух независимых переменных

$$a(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2b(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c(x,y)\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = F\left(x,y,w,\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y}\right), \qquad (4)$$

где a, b, c — некоторые функции от x и y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно.

Уравнение (4) в точке (x_0, y_0) принадлежит к

гиперболическому типу, если в этой точке $b^2 - ac > 0$,

параболическому типу, если в этой точке $b^2 - ac = 0$,

эллиптическому типу, если в этой точке $b^2 - ac < 0$.

Для того, чтобы привести уравнение (4) к каноническому виду, надо записать уравнение характеристик

$$a\,dy^2 - 2b\,dx\,dy + c\,dx^2 = 0, \qquad (5)$$

которое распадается на два уравнения

$$a\,dy - \left(b + \sqrt{b^2 - ac}\right) dx = 0, \qquad (6)$$

$$a\,dy - \left(b - \sqrt{b^2 - ac}\right) dx = 0, \qquad (7)$$

и найти их общие интегралы.

3. Канонический вид уравнений гиперболического типа: $b^2 - ac > 0$. Общие интегралы

$$\varphi(x,y) = C_1, \qquad \psi(x,y) = C_2$$

уравнений (6) и (7) будут вещественными и различными. Они определяют два различных семейства вещественных характеристик.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi(x,y), \qquad \eta = \psi(x,y),$$

приведем уравнение (4) к каноническому виду (первая каноническая форма)

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} = F_1\left(\xi,\eta,w,\frac{\partial w}{\partial \xi},\frac{\partial w}{\partial \eta}\right).$$

Преобразование
$$\xi = t + z, \qquad \eta = t - z$$
приводит полученное уравнение к другому каноническому виду (вторая каноническая форма)
$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = F_2\Bigl(t, z, w, \frac{\partial w}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial z}\Bigr),$$
где $F_2 = 4F_1$. Левая часть этого уравнения с точностью до переобозначений совпадает с левой частью волнового уравнения (1).

4. Канонический вид уравнений параболического типа: $b^2 - ac = 0$. Уравнения (6) и (7) в этом случае совпадают и имеют один общий интеграл
$$\varphi(x, y) = C.$$

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам
$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \eta(x, y),$$
где $\eta = \eta(x, y)$ — любая дважды дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию невырожденности якобиана $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ в рассматриваемой области, приведем уравнение (1) к каноническому виду
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_3\Bigl(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Bigr).$$
В качестве функции η можно выбрать $\eta = x$ или $\eta = y$.

Отметим, что в данном случае преобразованное уравнение, как и уравнение теплопроводности (2), имеет только один член со старшей производной.

5. Канонический вид уравнений эллиптического типа: $b^2 - ac < 0$. Общие интегралы уравнений (6) и (7) в этом случае будут комплексно сопряженными и определяют два семейства мнимых характеристик.

Пусть общий интеграл уравнения (6) имеет вид
$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = C, \qquad i^2 = -1,$$
где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — вещественные функции.

Переходя от x, y к новым независимым переменным ξ, η по формулам
$$\xi = \varphi(x, y), \qquad \eta = \psi(x, y),$$
приведем уравнение (4) к каноническому виду
$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} = F_4\Bigl(\xi, \eta, w, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}\Bigr).$$
Левая часть этого уравнения с точностью до переобозначений совпадает с левой частью уравнения Лапласа (3).

5.1.2. Граничные и начальные условия

1. Предварительные замечания. Для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка будем использовать краткое обозначение

$$\boldsymbol{L}\,[w(x,t)] = \Phi(x,t), \qquad x \in V, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{L}$ — линейный дифференциальный оператор $(\boldsymbol{L}\,[0] = 0)$, V — открытая (не включающая границу) пространственная область, в которой ищется решение w; $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Переменная t играет роль времени, а переменные x_1, x_2, ..., x_n — роль пространственных координат (двумерной области V соответствует $n = 2$, а трехмерной — $n = 3$).

Уравнение (1) называется однородным, если $\Phi(x,t) \equiv 0$.

Рассмотрим типичные задачи, которые встречаются при описании различных процессов в пространственной области V с границей S. Уравнение (1) должно быть дополнено граничными и начальными условиями, которые будут различными в зависимости от типа уравнения.

2. Уравнения эллиптического типа. Уравнения эллиптического типа описывают установившиеся процессы, которые не зависят от времени t. В этом случае в уравнении (1) следует положить $w(x,t) \equiv w(x)$, $\Phi(x,t) \equiv \Phi(x)$.

Искомая функция w должна удовлетворять граничным (краевым) условиям

$$\boldsymbol{L}_s\,[w(x)] = f(x), \qquad x \in S. \tag{2}$$

Здесь и далее считается, что оператор $\boldsymbol{L}_s$ является линейным и удовлетворяет условию $\boldsymbol{L}_s\,[0] = 0$.

Граничное условие (2) называется однородным, если $f(x) \equiv 0$. Краевая задача (1), (2) называется однородной, если $\Phi \equiv 0$, $f \equiv 0$.

3. Уравнения параболического типа. Уравнения параболического типа описывают неустановившиеся процессы, которые зависят от времени t $(t \geqslant 0)$.

Искомая функция w в этом случае должна удовлетворять граничному и начальному условиям:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_s\,[w(x,t)] &= f(x,t), && x \in S,\\ w &= g(x) && \text{при } t = 0 \ (x \in V). \end{aligned} \tag{3}$$

Другими словами должна быть известной функция w на границе области S при всех $t > 0$ и должно быть задано начальное распределение функции w при $t = 0$ в рассматриваемой области V.

Начальное условие в (3) называется однородным, если $g(x) \equiv 0$. Краевая задача (1), (3) называется однородной, если $\Phi \equiv 0$, $f \equiv 0$, $g \equiv 0$.

4. Уравнения гиперболического типа. Уравнения гиперболического типа описывают неустановившиеся волновые процессы, которые зависят от времени t $(t \geqslant 0)$.

Искомая функция w в этом случае должна удовлетворять граничному и двум начальным условиям:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_s\,[w(x,t)] &= f(x,t), && x \in S, \\ w &= g(x) && \text{при} \quad t=0 \quad (x \in V), \\ \frac{\partial w}{\partial t} &= h(x) && \text{при} \quad t=0 \quad (x \in V). \end{aligned} \tag{4}$$

Другими словами, должна быть известной функция w на границе области S при всех $t > 0$ и должны быть заданы начальные распределения при $t = 0$ функции w и ее производной по времени $\partial_t w$ в рассматриваемой области V.

Начальные условия в (4) называются однородными, если $g(x) \equiv 0$ и $h(x) \equiv 0$. Краевая задача (1), (4) называется однородной, если $\Phi \equiv 0$, $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, $h \equiv 0$.

5. Основные типы краевых задач. Для любых (эллиптических, параболических и гиперболических) уравнений в частных производных второго порядка в зависимости от вида граничных условий (2) (см. также аналогичное условие в (3)) принято выделять четыре основных типа краевых задач.

а) *Первая краевая задача.* Требуется найти решение рассматриваемого уравнения, когда искомая функция $w(x,t)$ принимает заданные значения на границе области S:

$$w(x,t) = f_1(x,t) \qquad \text{для} \qquad x \in S. \tag{5}$$

б) *Вторая краевая задача.* На границе области S задается производная по (внешней) нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = f_2(x,t) \qquad \text{для} \qquad x \in S. \tag{6}$$

в) *Третья краевая задача.* На границе области S задана линейная связь между искомой функцией и ее производной по нормали:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + s(x,t)w = f_3(x,t) \qquad \text{для} \qquad x \in S. \tag{7}$$

Обычно принимается, что $s(x,t) = \text{const}$.

г) *Смешанные краевые задачи.* В этом случае на разных участках границы задаются условия различных типов, перечисленных выше в пп. а), б) и в).

При $f_1 \equiv 0$, $f_2 \equiv 0$, $f_3 \equiv 0$ соответствующие граничные условия (5), (6), (7) будут однородными.

5.1.3. Функция Грина. Структура решения задач с однородными граничными и начальными условиями

1. Уравнения эллиптического типа. Решение линейного неоднородного уравнения эллиптического типа

$$\boldsymbol{L}\,[w(x)] = \Phi(x), \qquad x \in V, \tag{1}$$

с однородными граничными условиями

$$\boldsymbol{L_s}\,[w(x)] = 0, \qquad x \in S, \tag{2}$$

можно записать в виде интеграла

$$w(x) = \int_V G(x,\xi)\Phi(\xi)\,d\xi. \tag{3}$$

Функция $G(x,\xi)$ называется функцией Грина (функцией источника).

Методы построения функций Грина для различных уравнений в частных производных описаны, например, в книгах Р. Куранта (1964), А. Н. Тихонова, А. А. Самарского (1972), В. М. Бабича, М. Б. Капилевича, С. Г. Михлина и др. (1964).

2. Уравнение параболического типа. Решение линейного неоднородного уравнения параболического типа

$$\boldsymbol{L}\,[w(x,t)] = \Phi(x,t), \qquad x \in V, \tag{4}$$

с однородными граничным и начальным условиями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_s}\,[w(x,t)] = 0, &\qquad x \in S, \\ w = 0 &\qquad \text{при} \quad t = 0 \quad (x \in V). \end{aligned} \tag{5}$$

можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_0^t \int_V G(x,\xi,t,\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{6}$$

где $G(x,\xi,t,\tau)$ — функция Грина.

Если коэффициенты левой части уравнения (4) не зависят от t (т.е. левая часть уравнения не меняется при замене t на $t+\text{const}$), то функция Грина зависит только от трех аргументов $G(x,\xi,t,\tau) = G(x,\xi,t-\tau)$.

Физический смысл функции Грина: для уравнения теплопроводности (уравнение (2) из раздела 5.1.1) $G(x,\xi,t)$ — температура, созданная в точке x в момент времени t тепловым источником единичной интенсивности, сосредоточенным в точке ξ в момент времени $t = 0$.

3. Уравнение гиперболического типа. Решение линейного неоднородного уравнения гиперболического типа с правой частью $\Phi(x,t)$ и однородными граничным и начальными условиями

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L_s}\,[w(x,t)] = 0, &\qquad x \in S, \\ w = 0 &\qquad \text{при} \quad t = 0 \quad (x \in V), \\ \frac{\partial w}{\partial t} = 0 &\qquad \text{при} \quad t = 0 \quad (x \in V) \end{aligned} \tag{7}$$

также можно представить в виде (6), где $G(x,\xi,t,\tau)$ — соответствующая этой задаче функция Грина.

4. Преобразования, приводящие к однородным граничным и начальным условиям. С помощью функции Грина (которая здесь считается известной) можно решать также задачи с неоднородными начальными и граничными условиями. Для этого нужно ввести новую зависимую переменную по формуле

$$u(x,t) = w(x,t) - \psi(x,t), \tag{8}$$

где функция ψ должна удовлетворять неоднородным начальным и граничным условиям (выбор функции ψ носит чисто алгебраический характер и не связан с рассматриваемым уравнением). В результате для функции $u(x,t)$ получим неоднородное уравнение с измененной правой частью $\overline{\Phi}(x,t)$ с однородными начальными и граничными условиями. Решение этой задачи теперь можно представить с помощью функции Грина по формуле (6) (или (3)), в которой следует заменить w и Φ соответственно на u и $\overline{\Phi}$.

Отметим, что выбор функции ψ в преобразовании (8) не является однозначным.

В разделах 5.2.5 и 5.3.5 приведены примеры преобразований вида (8), которые приводят к однородным начальным и граничным условиям.

В разделах 5.2.3 и 5.3.3 даны формулы, позволяющие с помощью функции Грина решать неоднородные уравнения с неоднородными начальными условиями.

Литература к разд. 5.1.1 — 5.1.3: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Г. Бутковский (1979), И. Г. Петровский (1961), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.2. Уравнения параболического типа

5.2.1. Уравнение вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Уравнение теплопроводности. Уравнения этого вида часто встречаются в теории тепло- и массопереноса ($0 < t < +\infty$).

1. Точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= Ax + B,\\
w(x,t) &= A(x^2 + 2a^2t) + B,\\
w(x,t) &= A(x^3 + 6a^2xt) + B,\\
w(x,t) &= A(x^4 + 12a^2x^2t + 12a^4t^2) + B,\\
w(x,t) &= A(x^5 + 20a^2x^3t + 60a^4xt^2) + B,\\
w(x,t) &= A(x^6 + 30a^2x^4t + 180a^4x^2t^2 + 120a^6t^3) + B,
\end{aligned}$$

$$w(x,t) = A\exp(a^2\lambda^2 t \pm \lambda x) + B,$$
$$w(x,t) = A\frac{1}{\sqrt{t}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4a^2t}\Bigr) + B,$$
$$w(x,t) = A\frac{x}{t^{3/2}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4a^2t}\Bigr) + B,$$
$$w(x,t) = A\exp(-a^2\lambda^2 t)\cos(\lambda x) + B,$$
$$w(x,t) = A\exp(-a^2\lambda^2 t)\sin(\lambda x) + B,$$
$$w(x,t) = A\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Bigr) + B,$$

где $\operatorname{erf} z \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

2. Область: $-\infty < x < +\infty$,

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:
$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Bigr] f(\xi)\,d\xi.$$

Частный случай: $f(x) = \begin{cases} A & \text{при } |x| < x_0, \\ B & \text{при } |x| > x_0. \end{cases}$

Решение:
$$w = \frac{1}{2}(A-B)\Bigl[\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x_0 - x}{2a\sqrt{t}}\Bigr) + \operatorname{erf}\Bigl(\frac{x_0 + x}{2a\sqrt{t}}\Bigr)\Bigr] + B.$$

3. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

3.1. $w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$w = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:
$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\Bigl\{\exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\Bigr] - \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\Bigr]\Bigr\} f(\xi)\,d\xi.$$

Частный случай: $f(x) = A$. *Решение:* $w = A\operatorname{erf}\Bigl(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Bigr)$.

3.2. $w = 0$ при $t = 0$ (начальное условие)

$w = g(t)$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:
$$w(x,t) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Bigr]\frac{g(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

Частный случай: $g(x) = \begin{cases} A & \text{при } 0 < t < T, \\ B & \text{при } T < t. \end{cases}$

Решение:
$$w = \begin{cases} A\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Bigr) & \text{при } 0 < t < T, \\ A\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\Bigr) + (B-A)\operatorname{erfc}\Bigl(\frac{x}{2a\sqrt{t-T}}\Bigr) & \text{при } T < t, \end{cases}$$

где $\operatorname{erfc} x \equiv 1 - \operatorname{erf} x$.

3.3. $w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)
$w = g(t)$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\} f(\xi)\, d\xi + \\ + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

4. Область: $0 < x < +\infty$. Вторая краевая задача.

4.1. $w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)
$\partial_x w = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\} f(\xi)\, d\xi.$$

4.2. $w = 0$ при $t = 0$ (начальное условие)
$\partial_x w = g(t)$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = -\frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

Частный случай: $g(t) = -A$.
Решение:

$$w = 2Aa\sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) - Ax \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right).$$

4.3. $w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)
$\partial_x w = g(t)$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\} f(\xi)\, d\xi - \\ - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\, d\tau.$$

5. Область: $0 < x < +\infty$. Третья краевая задача.

5.1. $w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)
$\partial_x w - kw = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] - \\ - 2k \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} - k\eta\right] d\eta.$$

5.2. $w = 0$ при $t = 0$ (начальное условие)

$\partial_x w - kw = kg(t)$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = -\frac{ak}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x, t-\tau)\, d\tau,$$

где

$$H(x,t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) - k \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2t} - k\eta\right] d\eta.$$

Частный случай: $g(t) = \begin{cases} -A & \text{при } 0 < t < T, \\ -B & \text{при } T < t. \end{cases}$

Решение:

$$w = \begin{cases} AW(x,t) & \text{при } 0 < t < T, \\ AW(x,t) + (B-A)W(x,t-T) & \text{при } T < t, \end{cases}$$

где

$$W(x,t) = \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) - \exp(kx + a^2k^2t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}} + ak\sqrt{t}\right).$$

5.3. $w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$\partial_x w - kw = kg(t)$ при $x = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi - \frac{ak}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x,t-\tau)\, d\tau,$$

где функции $G(x,\xi,t)$ и $H(x,t)$ см. в пп. 5.1 и 5.2.

6. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

6.1. Однородные граничные условия:

$w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$w = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

$w = 0$ при $x = l$ (граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) dx.$$

Частный случай: $f(x) = A$.

Решение:

$$w(x,t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \exp\left[-\frac{a^2(2n+1)^2\pi^2t}{l^2}\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{l}\right].$$

Частный случай: $f(x) = Ax$.

Решение:

$$w(x,t) = \frac{2Al}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \exp\left(-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right).$$

6.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t)\exp\Bigl(-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где

$$M_n(t) = \int_0^l f(x)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\,dx + \frac{a^2n\pi}{l}\int_0^t \exp\Bigl(\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)g(t)\,dt - {}$$
$$- (-1)^n\frac{a^2n\pi}{l}\int_0^t \exp\Bigl(\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)h(t)\,dt.$$

7. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

7.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\exp\Bigl(-\frac{a^2n^2\pi^2t}{l^2}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где

$$b_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\,dx; \qquad n = 1,\ 2,\dots$$

7.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

О решении этой задачи см. п. 6 в разделе 5.2.2 при $\Phi \equiv 0$.

8. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

8.1. Однородные граничные условия ($b > 0$):

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - bw = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + bw = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^l \frac{y_n(x)y_n(\xi)}{\|y_n\|^2}\exp(-a^2\lambda_n^2t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{b}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x), \quad \|y_n\|^2 = \frac{b}{\lambda_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{b^2}{\lambda_n^2}\right),$$

а λ_n — положительные корни следующего трансцендентного уравнения: $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{2b}{\lambda^2 - b^2}$.

8.2. Неоднородные граничные условия ($b > 0$, $c > 0$):

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_x w - bw = g(t)$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$\partial_x w + cw = h(t)$	при	$x = l$	(граничное условие)

О решении этой задачи см. п. 7 в разделе 5.2.2 при $\Phi \equiv 0$.

9. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

9.1а. Однородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$\partial_x w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w = \int_0^l G(x, \xi, t) f(\xi)\, d\xi,$$

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\left(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) + \\ + \vartheta\left(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right) - \vartheta\left(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\right),$$

где $\vartheta(x,t)$ — функция Якоби:

$$\vartheta(x,t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \exp(-\pi^2 n^2 t)\cos(2\pi n x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x-n)^2}{4t}\right].$$

Первый ряд быстро сходится при больших t, а второй — при малых t.

9.1б. Неоднородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = g(t)$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$\partial_x w = h(t)$	при	$x = l$	(граничное условие)

О решении этой задачи см. п. 8 в разделе 5.2.2 при $\Phi \equiv 0$.

9.2а. Однородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_x w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w = \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Bigl(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\Bigr) + \vartheta\Bigl(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\Bigr) - \\ - \vartheta\Bigl(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\Bigr) - \vartheta\Bigl(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2 t}{l}\Bigr).$$

Здесь $\vartheta(x,t)$ — функция Якоби (см. п. 9.1).

9.2б. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) &\quad &\text{при} \quad t = 0 &\quad &\text{(начальное условие)} \\ \partial_x w &= g(x) &\quad &\text{при} \quad x = 0 &\quad &\text{(граничное условие)} \\ w &= h(x) &\quad &\text{при} \quad x = l &\quad &\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

О решении этой задачи см. п. 8 в разделе 5.2.2 при $\Phi \equiv 0$.

Литература к разд. 5.2.1: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.2.2. Уравнение вида $\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t)$

1. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi + \int_0^t \int_{-\infty}^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где функция $G(x,\xi,t)$ описывается формулой

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\Bigr].$$

2. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

$$\begin{aligned} w &= f(x) &\quad &\text{при} \quad t = 0 &\quad &\text{(начальное условие)} \\ w &= g(t) &\quad &\text{при} \quad x = 0 &\quad &\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\, d\xi + \\ + \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\Bigl[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\Bigr] \frac{g(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{3/2}} + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \Bigl\{ \exp\Bigl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\Bigr] - \exp\Bigl[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\Bigr] \Bigr\}.$$

3. Область: $0 < x < +\infty$. Вторая краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_x w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi -$$
$$- \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right] \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\,d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] \right\}.$$

4. Область: $0 < x < +\infty$. Третья краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_x w - kw = kg(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi -$$
$$- \frac{ak}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{g(\tau)}{\sqrt{t-\tau}} H(x,t-\tau)\,d\tau + \int_0^t \int_0^{+\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right] + \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2 t}\right] -$$
$$- 2k \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\xi+\eta)^2}{4a^2 t} - k\eta\right] d\eta,$$
$$H(x,t) = \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right) - k \int_0^{+\infty} \exp\left[-\frac{(x+\eta)^2}{4a^2 t} - k\eta\right] d\eta.$$

5. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

5.1. Однородные граничные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Psi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{l}\right) \exp\left(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{l^2}\right).$$

5.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 5.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} M_n(t)\exp\Bigl(-\frac{a^2n^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr),$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a^2n^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr),$$

$$M_n(t) = \int_0^l f(x)\sin\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)dx + \frac{a^2n\pi}{l}\int_0^t \exp\Bigl(\frac{a^2n^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr)g(t)\,dt - \\ - (-1)^n\frac{a^2n\pi}{l}\int_0^t \exp\Bigl(\frac{a^2n^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr)h(t)\,dt.$$

6. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

6.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\Bigl(\frac{n\pi x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{n\pi\xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a^2n^2\pi^2 t}{l^2}\Bigr).$$

6.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 6.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

7. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

7.1. Однородные граничные условия ($b > 0$, $c > 0$):

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - bw = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + cw = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\|y_n\|^2} y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a^2\lambda_n^2 t),$$

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{b}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x),$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{c}{2\lambda_n^2}\frac{\lambda_n^2 + b^2}{\lambda_n^2 + c^2} + \frac{b}{2\lambda_n^2} + \frac{l}{2}\left(1 + \frac{b^2}{\lambda_n^2}\right).$$

Здесь λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{b+c}{\lambda^2 - bc}$.

7.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - bw = g(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + cw = h(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = \frac{h(t) - (1+cl)g(t)}{b+c+bcl} + x\frac{cg(t) + bh(t)}{b+c+bcl} + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 7.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

8. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

8.1а. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w = \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Big(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big) + \\ + \vartheta\Big(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big),$$

где $\vartheta(x,t)$ — функция Якоби (см. п. 9 в разделе 5.2.1).

8.1б. Неоднородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = g(t)$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$\partial_x w = h(t)$	при	$x = l$	(граничное условие)

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = g(t) + xh(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 8.1а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

8.2а. Однородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_x w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w = \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

$$G(x,\xi,t) = \vartheta\Big(\frac{x-\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big) + \vartheta\Big(\frac{x+\xi}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big) - \\ - \vartheta\Big(\frac{x+\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big) - \vartheta\Big(\frac{x-\xi-2l}{4l}, \frac{a^2t}{l}\Big),$$

где $\vartheta(x,t)$ — функция Якоби (см. п. 9 в разделе 5.2.1).

8.2б. Неоднородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_x w = g(t)$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = h(t)$	при	$x = l$	(граничное условие)

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = (x-l)g(t) + h(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 8.2a (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

Литература к разд. 5.2.2: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Г. Бутковский (1979), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.2.3. Другие уравнения с постоянными коэффициентами

Предварительные замечания и формулы. В данном разделе часто будут приводиться только выражения для функции Грина, а решение соответствующих задач с однородными граничными условиями определяется по формуле (1). Для решения задач с неоднородными граничными условиями сначала следует использовать подходящее преобразование (2)–(6), после чего решение преобразованной задачи определяется по формуле (1).

1. Однородные граничные условия. Решения краевых задач (рассматриваемых в данном разделе) в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с однородными граничными условиями и общим начальным условием

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_0^l G(x,\xi,t) f(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \tag{1}$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина.

2. Неоднородные граничные условия. Задачи с неоднородными граничными условиями с помощью подходящих линейных преобразований вида $w(x,t) = \psi(x,t) + u(x,t)$, где u — новая искомая величина, сводятся к задачам с однородными граничными условиями, решение которых можно получить по формуле (1) (где будут стоять преобразованные функции $\bar{f}$, $\bar{g}$ и $\bar{\Phi}$). Укажем конкретный вид таких преобразований для основных краевых задач в области $0 < x < l$.

Первая краевая задача:

$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u(x,t). \tag{2}$$

Вторая краевая задача:

$$\partial_x w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u(x,t). \tag{3}$$

Третья краевая задача:

$$\begin{aligned} &\partial_x w - bw = g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ &\partial_x w + cw = h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = \frac{h(t) - (1 + cl)g(t)}{b + c + bcl} + x\frac{cg(t) + bh(t)}{b + c + bcl} + u(x,t). \tag{4}$$

Смешанные краевые задачи.

Случай 1:

$$\begin{aligned} w &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = g(t) + xh(t) + u(x,t). \tag{5}$$

Случай 2:

$$\begin{aligned} \partial_x w &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ w &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = (x - l)g(t) + h(t) + u(x,t). \tag{6}$$

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

При $b < 0$ это уравнение встречается в задачах массопереноса с объемной химической реакцией.

1. Некоторые точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

1. $w(x,t) = (Ax + B)e^{bt}$,
2. $w(x,t) = A\exp\big[(a^2\lambda^2 + b)t \pm \lambda x\big] + B$,
3. $w(x,t) = A\exp\big[(b - a^2\lambda^2)t\big]\cos(\lambda x) + B$,
4. $w(x,t) = A\exp\big[(b - a^2\lambda^2)t\big]\sin(\lambda x) + B$,
5. $w(x,t) = A\dfrac{1}{\sqrt{t}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{4a^2t} + bt\Big) + B$,
6. $w(x,t) = A\dfrac{x}{t^{3/2}}\exp\Big(-\dfrac{x^2}{4a^2t} + bt\Big) + B$,
7. $w(x,t) = Ae^{bt}\operatorname{erf}\Big(\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}\Big) + B$,

где $\operatorname{erf} z$ — интеграл вероятностей.

2. Упрощающее преобразование. Замена $w(x,t)=e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разделе 5.2.1. Начальное условие для новой переменной u не меняется, а неоднородная часть в граничных условиях умножается на функцию e^{-bt}. Учитывая сказанное, нетрудно получить решение исходного уравнения с начальными и граничными условиями, которые рассматривались в разделе 5.2.1. Для примера приведем ниже решения двух типичных задач.

3. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} + bt\biggr] f(\xi)\,d\xi.$$

4. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\biggl\{\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\biggr] - \exp\biggl[-\frac{(x+\xi)^2}{4a^2t}\biggr]\biggr\}e^{bt}f(\xi)\,d\xi +$$
$$+\frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \exp\biggl[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\biggr]\exp[b(t-\tau)]\frac{g(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{3/2}}.$$

См. также уравнение 5.2.3.2 при $\Phi \equiv 0$.

2. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw + \Phi(x,t).$$

Замена $w(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u + e^{-bt}\Phi(x,t)$, которое подробно рассматривается в разделе 5.2.2.

1. Область: $-\infty < x < \infty$.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$
$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\biggl[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t} + bt\biggr].$$

2. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x=l \quad \text{(граничное условие)}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n \xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t + bt\Bigr).$$

3. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$$\begin{aligned} &w = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ &\partial_x w = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\ &\partial_x w = 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{1}{l}\Bigl[1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \cos\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\cos\Bigl(\frac{\pi n \xi}{l}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t + bt\Bigr).$$

4. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

$$\begin{aligned} &w = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ &\partial_x w - c_1 w = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\ &\partial_x w + c_2 w = 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp\bigl[(b - a^2\lambda_n^2)t\bigr]}{\|y_n\|^2},$$

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{c_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x),$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{c_2}{2\lambda_n^2}\,\frac{\lambda_n^2 + c_1^2}{\lambda_n^2 + c_2^2} + \frac{c_1}{2\lambda_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1 + \frac{c_1^2}{\lambda_n^2}\Bigr).$$

где λ_n — положительные корни уравнения: $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{c_1 + c_2}{\lambda^2 - c_1 c_2}$.

5. Область: $0 < x < l$. Смешанная краевая задача.

$$\begin{aligned} &w = f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ &\partial_x w = 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\ &w = 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} \cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n \xi)\exp(-a^2\lambda_n t + bt), \qquad \lambda_n = \frac{\pi}{2l}(2n+1).$$

3. $$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\frac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t).$$

Замена $w(x,t) = \exp(\lambda t + \mu x)u(x,t)$, где $\lambda = -\dfrac{b^2}{4a^2}$, $\mu = -\dfrac{b}{2a^2}$, приводит к уравнению $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u + \exp(-\lambda t - \mu x)\Phi(x,t)$, которое подробно рассматривается в разделе 5.2.2.

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$w = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

$w = 0$ при $x = l$ (граничное условие)

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a^2}(\xi - x) - \frac{b^2}{4a^2}t\right] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t\right).$$

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$\partial_x w = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

$\partial_x w = 0$ при $x = l$ (граничное условие)

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = -\frac{b\exp\left(\frac{b\xi}{a^2}\right)}{a^2\left[1 - \exp\left(\frac{bl}{a^2}\right)\right]} + \\ + \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a^2}(\xi - x) - \frac{b^2}{4a^2}t\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\exp\left(-\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}t\right),$$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \mu_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \mu_n = \frac{bl}{2a^2\pi n}.$$

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

$w = f(x)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$\partial_x w - c_1 w = 0$ при $x = 0$ (граничное условие)

$\partial_x w + c_2 w = 0$ при $x = l$ (граничное условие)

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \exp\left(\frac{b}{a^2}\xi - \frac{b^2}{4a^2}t\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a^2\lambda_n^2 t)}{\|y_n\|^2},$$

$$y_n(x) = \exp\left(\frac{b}{2a^2}x\right)\left[\cos(\lambda_n x) + \frac{1}{\lambda_n}\left(c_1 + \frac{b}{2a^2}\right)\sin(\lambda_n x)\right],$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{1}{2\lambda_n^2}\left[\left(c_2 - \frac{b}{2a^2}\right)\frac{\lambda_n^2 + \frac{b^2}{4a^4} + c_1^2 + c_1\frac{b}{a^2}}{\lambda_n^2 + \frac{b^2}{4a^4} + c_2^2 - c_2\frac{b}{a^2}} + \right. \\ \left. + c_1 + \frac{b}{2a^2} + l\left(\lambda_n^2 + \frac{b^2}{4a^4} + c_1^2 + c_1\frac{b}{a^2}\right)\right],$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{c_1 + c_2}{\lambda^2 - c_1c_2 + \frac{b}{2a^2}(c_1 - c_2)}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw + \Phi(x,t).$

Замена $w(x,t) = \exp(\lambda t + \mu x)u(x,t)$, где $\lambda = c - \frac{b^2}{4a^2}$, $\mu = -\frac{b}{2a^2}$, приводит к уравнению $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u + \exp(-\lambda t - \mu x)\Phi(x,t)$, которое подробно рассматривается в разделе 5.2.2.

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a^2}(\xi - x) + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t\right] \times \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)\sin\left(\frac{\pi n \xi}{l}\right)\exp\left(-\frac{a^2\pi^2 n^2}{l^2}t\right).$$

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = -\frac{b\exp\left(\dfrac{b\xi}{a^2} + ct\right)}{a^2\left[1 - \exp\left(\dfrac{bl}{a^2}\right)\right]} + \\ + \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a^2}(\xi - x) + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)}{1+\mu_n^2}\exp\left(-\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}t\right),$$

$$y_n(x) = \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + \mu_n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right), \qquad \mu_n = \frac{bl}{2a^2\pi n}.$$

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - c_1 w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + c_2 w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \exp\left[\frac{b}{a^2}\xi + \left(c - \frac{b^2}{4a^2}\right)t\right]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-a^2\lambda_n^2 t)}{\|y_n\|^2},$$

$$y_n(x) = \exp\left(\frac{b}{2a^2}x\right)\left[\cos(\lambda_n x) + \frac{1}{\lambda_n}\left(c_1 + \frac{b}{2a^2}\right)\sin(\lambda_n x)\right],$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{1}{2\lambda_n^2}\left[\left(c_2 - \frac{b}{2a^2}\right)\frac{\lambda_n^2 + \dfrac{b^2}{4a^4} + c_1^2 + c_1\dfrac{b}{a^2}}{\lambda_n^2 + \dfrac{b^2}{4a^4} + c_2^2 - c_2\dfrac{b}{a^2}} + \right.$$
$$\left. + c_1 + \frac{b}{2a^2} + l\left(\lambda_n^2 + \frac{b^2}{4a^4} + c_1^2 + c_1\frac{b}{a^2}\right)\right],$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения:

$$\frac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \frac{c_1 + c_2}{\lambda^2 - c_1c_2 + \dfrac{b}{2a^2}(c_1 - c_2)}.$$

Литература к разд. 5.2.3: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. Г. Бутковский (1979), Г. Карслоу, Д. Егер (1964), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.2.4. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие степенные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\left(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right),$$
$$w(x,t) = A(x^2 + 2a^2t)\exp\left(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right),$$
$$w(x,t) = A\exp\left(\lambda x + \lambda^2a^2t + \tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right).$$

2. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\left(\frac{1}{2}bt^2 + ct\right)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.2 при $f(x) = bx + c$. Кроме того, частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = b$, $g(t) = c$.

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\left(btx + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + ct\right),$$
$$w(x,t) = A(x + a^2bt^2)\exp\left(btx + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + ct\right),$$
$$w(x,t) = A\exp\left[x(bt + \lambda) + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + a^2b\lambda t^2 + (a^2\lambda^2 + c)t\right],$$
$$w(x,t) = A\exp(-\lambda t)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\left(\frac{2}{3ab}\xi^{3/2}\right), \quad \xi = bx + c + \lambda,$$
$$w(x,t) = A\exp(-\lambda t)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\left(\frac{2}{3ab}\xi^{3/2}\right), \quad \xi = bx + c + \lambda,$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + ct\bigr), \quad z = x + a^2bt^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + ct + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = b$, $g(t) = ct + s$.

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = A\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + st\bigr),\\
&w(x,t) = A(x + a^2bt^2)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + st\bigr),\\
&w(x,t) = A\exp(\tfrac{1}{2}ct^2 - \lambda t)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3ab}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx + s + \lambda,\\
&w(x,t) = A\exp(\tfrac{1}{2}ct^2 - \lambda t)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3ab}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = bx + s + \lambda,
\end{aligned}$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl(btx + \tfrac{1}{3}a^2b^2t^3 + \tfrac{1}{2}ct^2 + st\bigr), \quad z = x + a^2bt^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - (bx^2 + c)w.$

1. Частный случай уравнения 5.2.9.2 при $f(x) = -bx^2 - c$. Кроме того, частный случай уравнения 5.2.9.7 при $f(t) = -c$ (поэтому оно может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами).

2. Точные решения (A, λ — любые):

$$\begin{aligned}
&w(x,t) = A\exp\Bigl[(a\sqrt{b} - c)t + \frac{\sqrt{b}}{2a}x^2\Bigr],\\
&w(x,t) = A\exp\Bigl[-(a\sqrt{b} + c)t - \frac{\sqrt{b}}{2a}x^2\Bigr],\\
&w(x,t) = A\exp\Bigl(-\lambda t - \frac{\sqrt{b}}{2a}x^2\Bigr)\Phi\Bigl(\frac{c+\lambda}{4a\sqrt{b}} + \frac{1}{4},\ \frac{1}{2};\ \frac{\sqrt{b}}{a}x^2\Bigr),\\
&w(x,t) = A\exp\Bigl(-\lambda t - \frac{\sqrt{b}}{2a}x^2\Bigr)x\Phi\Bigl(\frac{c+\lambda}{4a\sqrt{b}} + \frac{3}{4},\ \frac{3}{2};\ \frac{\sqrt{b}}{a}x^2\Bigr),
\end{aligned}$$

где $\Phi(\alpha,\ \beta;\ z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\dots(\beta+m-1)}\,\dfrac{z^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(bt + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a^2(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3)\bigr],$$
$$w(x,t) = A\bigl[x + a^2(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2)\bigr]\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a^2\phi(t)\bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct + \lambda) + a^2\lambda(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2 + \lambda t) + a^2\phi(t)\bigr],$$

где $\phi(t) = \frac{1}{20}b^2t^5 + \frac{1}{4}bct^4 + \frac{1}{3}c^2t^3$.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a^2(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3)\bigr],$$
$$z = x + a^2\bigl(\tfrac{1}{3}bt^3 + ct^2\bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxt + cx + dt + e)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = bt + c$, $g(t) = dt + e$.

1. Частное решение:

$$w(x,t) = \exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct) + a^2(\tfrac{1}{20}b^2t^5 + \tfrac{1}{4}bct^4 + \tfrac{1}{3}c^2t^3) + \tfrac{1}{2}dt^2 + et\bigr].$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\bigl[x(\tfrac{1}{2}bt^2+ct)+a^2(\tfrac{1}{20}b^2t^5+\tfrac{1}{4}bct^4+\tfrac{1}{3}c^2t^3)+\tfrac{1}{2}dt^2+et\bigr],$$
$$z = x+a^2(bt^2+2ct)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx^2 + ct + d)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.7 при $f(t) = ct + d$.

1. Точные решения (A — любое):

$$w(x,t) = A\exp\biggl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (a\sqrt{b} + d)t\biggr],$$
$$w(x,t) = Ax\exp\biggl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (3a\sqrt{b} + d)t\biggr].$$

2. Преобразование (C — произвольная постоянная)

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\biggl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + \frac{1}{2}ct^2 + (a\sqrt{b} + d)t\biggr],$$
$$z = x\exp\bigl(2a\sqrt{b}\,t\bigr), \quad \tau = \frac{a}{4\sqrt{b}}\exp\bigl(4a\sqrt{b}\,t\bigr) + C$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(-bx + ct + d)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.8 при $f(t) = ct + d$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx^2 t^n + cxt^m + dt^k)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = dt^k$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = 2Ax + A(bt^2 + 2ct) + B,$$
$$w(x,t) = A\left(x + \tfrac{1}{2}bt^2 + ct\right)^2 + 2a^2At,$$
$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + \tfrac{1}{2}\lambda bt^2 + (a^2\lambda^2 + \lambda c)t\right].$$

2. Замена $z = x + \frac{1}{2}bt^2 + ct$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.11 при $f(x) = bx$. Кроме того, частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x) = A\int \exp\left(-\frac{b}{2a^2}x^2\right) dx + B,$$
$$w(x,t) = Axe^{bt} + B,$$
$$w(x,t) = Abx^2e^{2bt} + Aa^2e^{2bt} + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\left(2b\lambda xe^{bt} + 2a^2b\lambda^2e^{2bt}\right) + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \frac{A^2}{2b}e^{2bt} + B, \quad z = Axe^{bt},$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^2 + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = bt^2 + c$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = A\left(x + \tfrac{1}{3}bt^3 + ct\right) + B,$$
$$w(x,t) = A\left(x + \tfrac{1}{3}bt^3 + ct\right)^2 + 2a^2At,$$
$$w(x,t) = A\exp\left[\lambda x + \tfrac{1}{3}\lambda bt^3 + \lambda(a^2\lambda + c)t\right].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{3}bt^3 + ct$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(bt + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = bt + c$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = Ax \exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr) + B,$$
$$w(x,t) = Ax^2 \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr) + 2Aa^2 \int \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\lambda x \exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr) + a^2\lambda^2 \int \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt\Bigr] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = A\int \exp\bigl(bt^2 + 2ct\bigr)\,dt + B, \quad z = x\exp\bigl(\tfrac{1}{2}bt^2 + ct\bigr),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cx + d)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.36 при $k(t) = a^2$, $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c$, $s(t) = d$.

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a^2}x + \frac{1}{3}a^2c^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A(x + a^2ct^2)\exp\Bigl[ctx - \frac{b}{2a^2}x + \frac{1}{3}a^2c^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(ct + \lambda - \frac{b}{2a^2}\Bigr) + \frac{1}{3}a^2c^2t^3 + a^2c\lambda t^2 + \Bigl(a^2\lambda^2 + d - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\lambda t - \frac{b}{2a^2}x\Bigr)\sqrt{\xi}\,J_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3ac}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = cx + \lambda + d - \frac{b^2}{4a^2},$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl(-\lambda t - \frac{b}{2a^2}x\Bigr)\sqrt{\xi}\,Y_{1/3}\Bigl(\frac{2}{3ac}\xi^{3/2}\Bigr), \quad \xi = cx + \lambda + d - \frac{b^2}{4a^2},$$

где $J_{1/3}(\xi)$ и $Y_{1/3}(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\Bigl[ctx - \frac{b}{2a^2}x + \frac{1}{3}a^2c^2t^3 + \Bigl(d - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)t\Bigr], \quad z = x + a^2ct^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2 \partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cx+d)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.36 при $k(t)=a^2$, $f(t)=b$, $g(t)=0$, $h(t)=c$, $s(t)=d$.

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x+\Bigl(d+\frac{a^2c^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\Bigl(x-\frac{2a^2c}{b^2}\Bigr)\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x+\Bigl(b+d+\frac{a^2c^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\frac{a^2\lambda^2}{2b}e^{2bt}+\lambda e^{bt}\Bigl(x-\frac{2a^2c}{b^2}\Bigr)-\frac{c}{b}x+\Bigl(d+\frac{a^2c^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr].$$

Более сложные решения см. в 5.2.4.35.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[-\frac{c}{b}x+\Bigl(d+\frac{a^2c^2}{b^2}\Bigr)t\Bigr],$$
$$\tau = \frac{a^2}{2b}e^{2bt},\quad z = e^{bt}\Bigl(x-\frac{2a^2c}{b^2}\Bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (dx+e)w.$

При $b=0$ см. уравнение 5.2.4.14. При $b\neq 0$ замена $z = x + c/b$ приводит к уравнению вида 5.2.4.15:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bz\frac{\partial w}{\partial z} + (dz+e-cd/b)w.$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2(ax+b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ax^2+2abx+c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.33 и частный случай уравнения 5.2.9.37. Замена $w(x,t)=u(x,t)\exp\bigl(-\frac{1}{2}ax^2-bx\bigr)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (ax+b)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (cx^2+dx+e)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.33 и частный случай уравнения 5.2.9.37.

1. Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\bigl(\tfrac{1}{2}Ax^2\bigr),$$

где A — корень квадратного уравнения $A^2+aA+c=0$, дает уравнение вида 5.2.4.16:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[(2A+a)x+b\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \bigl[(bA+d)x+e\bigr]u,$$

которое сводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

2. Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\left(\tfrac{1}{2}Ax^2 + Bx + Ct\right)$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \big[(2A+a)x + 2B + b\big]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \big[(A^2 + aA + c)x^2 + (2AB + aB + bA + d)x + B^2 + bB + A + e - C\big]u.$$

Подходящим выбором коэффициентов A, B, C можно различным образом упростить исходное уравнение.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (ax+bt+c)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (sx^2+ptx+qt^2+kx+lt+m)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.37.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{x}{t}\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Уравнение Ильковича. Оно описывает массоперенос к поверхности растущей капли, которая вытекает из тонкого капилляра в раствор жидкости (массовый расход движущейся по капилляру жидкости считается постоянным).

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = Axt^b + B,$$
$$w(x,t) = A(2b+1)x^2t^{2b} + 2Aa^2t^{2b+1} + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\left(\lambda xt^b + \frac{a^2\lambda^2}{2b+1}t^{2b+1}\right) + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным

$$\tau = \frac{1}{2b+1}t^{2b+1}, \quad z = xt^b,$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

3. Решение исходного уравнения в важном частном случае

$w = w_0$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = w_s$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w \to w_0$	при	$x \to \infty$	(граничное условие)

(w_0, w_s — некоторые постоянные) выражается через функцию вероятностей:

$$\frac{w - w_s}{w_0 - w_s} = \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{2b+1}}{2a}\frac{x}{\sqrt{t}}\right), \quad \operatorname{erf}\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\xi \exp(-\xi^2)\,d\xi.$$

Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985).

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^k x + ct^m)\dfrac{\partial w}{\partial x} + st^n w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = bt^k$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^n$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right).$

Это уравнение встречается в плоских задачах теплопроводности (теплообмен кругового цилиндра с окружающей средой, r — радиальная координата).

1. Точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned}
w(r) &= A + B\ln r,\\
w(r,t) &= A + 4a^2Bt + Br^2,\\
w(r,t) &= A + B\bigl(4a^2t\ln r + r^2\ln r - r^2\bigr),\\
w(r,t) &= A + \frac{B}{t}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right),\\
w(r,t) &= A + B\int_1^\zeta e^{-z}\,\frac{dz}{z}, \qquad \zeta = \frac{r^2}{4a^2t},\\
w(r,t) &= A\exp(-a^2\lambda^2t)J_0(\lambda r),\\
w(r,t) &= A\exp(-a^2\lambda^2t)Y_0(\lambda r),
\end{aligned}$$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя.

2. Область: $0 < r < R$. Первая краевая задача.

2.1.	$w = w_0$	при	$t = 0$	(начальное условие)
	$w = w_R$	при	$r = R$	(граничное условие)
	$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

где $w_0 = \text{const}$, $w_R = \text{const}$.

Решение:

$$\frac{w(r,t) - w_R}{w_0 - w_R} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\mu_n J_1(\mu_n)}\exp\left(-\mu_n^2\frac{a^2t}{R^2}\right)J_0\left(\mu_n\frac{r}{R}\right),$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 2.4048$, $\mu_2 = 5.5201$, $\mu_3 = 8.6537$, $\mu_4 = 11.7915$, $\mu_5 = 14.9309$. При $n \to \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \to \pi$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 122).

2.2.	$w = f(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
	$w = 0$	при	$r = R$	(граничное условие)
	$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Big(-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big),$$

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\mu_n)} \int_0^R r f(r) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big)\, dr,$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 121).

3. Область: $0 < r < R$. Вторая краевая задача.

3.1.

$w = w_0$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_r w = g_R$	при	$r = R$	(граничное условие)
$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

где $w_0 = \text{const}$, $g_R = \text{const}$.

Решение:

$$w(r,t) = w_0 + g_R R\Big[2\frac{a^2 t}{R^2} - \frac{1}{4}\Big(1 - 2\frac{r^2}{R^2}\Big) - \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n^2 J_0(\mu_n)} \exp\Big(-\mu_n^2 \frac{a^2 t}{R^2}\Big) J_0\Big(\mu_n \frac{r}{R}\Big)\Big],$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 3.8317$, $\mu_2 = 7.0156$, $\mu_3 = 10.1735$, $\mu_4 = 13.3237$, $\mu_5 = 16.4706$. При $n \to \infty$ имеем $\mu_{n+1} - \mu_n \to \pi$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 176).

3.2.

$w = f(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_r w = g(t)$	при	$r = R$	(граничное условие)
$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r)\, dr + \frac{2a}{R} \int_0^t g(\tau)\, d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \exp\Big(-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R^2}\Big) J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big) H_n(r,t),$$

$$H_n(r,t) = \frac{1}{J_0^2(\mu_n)} \Big[\frac{2}{R^2} \int_0^R r f(r) J_0\Big(\frac{\mu_n r}{R}\Big)\, dr + \frac{2a}{R} \int_0^t g(\tau) \exp\Big(\frac{a^2\mu_n^2 \tau}{R^2}\Big)\, d\tau\Big],$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_1(\mu_n) = 0$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 176).

4. Область: $0 < r < R$. Третья краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = w_0 & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r w = k(w_R - w) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\
w \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Считается, что $k = \text{const}$, $w_0 = \text{const}$, $w_R = \text{const}$.

Решение:

$$
\frac{w(r,t) - w_0}{w_R - w_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Bigl(-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr) J_0\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr), \quad A_n = \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n[J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]},
$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\mu_n J_1(\mu_n) - kRJ_0(\mu_n) = 0$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 164).

5. Область: $R_1 < r < R_2$. Первая краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
w = w_1 & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\
w = w_2 & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Считается, что $w_1 = \text{const}$, $w_2 = \text{const}$.

Решение:

$$
w(r,t) = \frac{1}{\ln m}\Bigl(w_1 \ln\frac{R_2}{r} + w_2 \ln\frac{r}{R_1}\Bigr) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\Bigl(-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R_1^2}\Bigr)\Psi_n(r),
$$

$$
\Psi_n(r) = Y_0(\mu_n)J_0\Bigl(\mu_n\frac{r}{R_1}\Bigr) - J_0(\mu_n)Y_0\Bigl(\mu_n\frac{r}{R_1}\Bigr), \quad m = \frac{R_2}{R_1},
$$

$$
A_n = \frac{\pi^2\mu_n^2 J_0(m\mu_n)}{2R_1^2[J_0^2(\mu_n) - J_0^2(m\mu_n)]}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)\Psi_n(r)\,dr - {}
$$

$$
{} - \frac{\pi J_0(m\mu_n)[w_2 J_0(\mu_n) - w_1 J_0(m\mu_n)]}{J_0^2(\mu_n) - J_0^2(m\mu_n)},
$$

где $J_0(z)$, $Y_0(z)$ — функции Бесселя; μ_n — корни характеристического уравнения

$$
J_0(\mu)Y_0(m\mu) - J_0(m\mu)Y_0(\mu) = 0.
$$

Численные значения первых пяти корней $\mu_n = \mu_n(m)$ в диапазоне $1.4 \leqslant m \leqslant 4.0$ приведены в книге А. В. Лыкова (1967) на стр. 135.

6. Область: $R_1 < r < R_2$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r w = g_1(t) & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_r w = g_2(t) & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{2}{R_2^2 - R_1^2}\left\{\int_{R_1}^{R_2} r f(r)\,dr + a^2 \int_0^t \left[R_2 g_2(\tau) - R_1 g_1(\tau)\right] d\tau\right\} +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp(-\beta_n t) G_n(t) \Psi_n(r), \quad A_n = \pi \frac{\mu_n^2}{R_1^2} \frac{J_1^2(\mu_n) J_1^2(m\mu_n)}{J_1^2(\mu_n) - J_1^2(m\mu_n)},$$
$$\Psi_n(r) = J_0\Bigl(\mu_n \frac{r}{R_1}\Bigr) \frac{Y_1(\mu_n)}{J_1(\mu_n)} - Y_0\Bigl(\mu_n \frac{r}{R_1}\Bigr), \quad m = \frac{R_2}{R_1}, \quad \beta_n = \frac{a^2 \mu_n^2}{R_1^2},$$
$$G_n(t) = \frac{\pi}{2}\int_{R_1}^{R_2} r f(r) \Psi_n(r)\,dr - \frac{a^2 R_1}{\mu_n}\int_0^t \exp(\beta_n \tau)\left[\frac{g_2(\tau)}{J_1(m\mu_n)} - \frac{g_1(\tau)}{J_1(\mu_n)}\right] d\tau,$$

где $J_k(z)$, $Y_k(z)$ — функции Бесселя ($k = 0,\ 1$); μ_n — корни характеристического уравнения

$$J_1(\mu) Y_1(m\mu) - J_1(m\mu) Y_1(\mu) = 0.$$

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 178).

7. Область: $R_1 < r < R_2$. Третья краевая задача.

$w = f(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_r w = -k_1(w_s - w)$	при	$r = R_1$	(граничное условие)
$\partial_r w = k_2(w_s - w)$	при	$r = R_2$	(граничное условие)

Считается, что $w_s = \mathrm{const}$.

Решение:

$$w(r,t) = w_s - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{B_n} \exp(-a^2 \lambda_n^2 t) F_n(r, \lambda_n),$$
$$F_n(r,\lambda) = -\left[k_1 Y_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n Y_1(\lambda_n R_1)\right] J_0(\lambda_n r) +$$
$$+ \left[k_1 J_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n J_1(\lambda_n R_1)\right] Y_0(\lambda_n r),$$
$$A_n = \pi^2 \lambda_n^2 \left[k_2 J_0(\lambda_n R_2) - \lambda_n J_1(\lambda_n R_2)\right]^2 \int_{R_1}^{R_2} r\left[w_s - f(r)\right] F_n(r,\lambda)\,dr,$$
$$B_n = (\lambda_n^2 + k_2^2)\left[k_1 J_0(\lambda_n R_1) + \lambda_n J_1(\lambda_n R_1)\right]^2 -$$
$$- (\lambda_n^2 + k_1^2)\left[k_2 J_0(\lambda_n R_2) - \lambda_n J_1(\lambda_n R_2)\right]^2,$$

где λ_n — корни характеристического уравнения

$$\left[k_1 J_0(\lambda R_1) + \lambda J_1(\lambda R_1)\right]\left[k_2 Y_0(\lambda R_2) - \lambda Y_1(\lambda R_2)\right] -$$
$$- \left[k_2 J_0(\lambda R_2) - \lambda J_1(\lambda R_2)\right]\left[k_1 Y_0(\lambda R_1) + \lambda Y_1(\lambda R_1)\right] = 0.$$

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 255).

8. Область: $0 < r < \infty$. Вторая краевая задача.

Эта задача встречается в теории диффузионного следа за каплей и твердой частицей.

$w = f(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_r w = 0$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2a^2}\int_0^\infty \frac{x}{t}\exp\Big(-\frac{x^2+r^2}{4a^2t}\Big)I_0\Big(\frac{xr}{2a^2t}\Big)f(x)\,dx,$$

где $I_0(x)$ — модифицированная функция Бесселя.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Big) + \Phi(r,t).$?

Это уравнение встречается в плоских задачах теплопроводности с тепловыделением (функция Φ пропорциональна количеству тепла, выделяемому в единицу времени в рассматриваемом объеме).

1. Область: $0 < r < R$. Первая краевая задача.

1.1. $w = f(r)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$w = 0$ при $r = R$ (граничное условие)

$w \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \int_0^R G(r,\xi,t)f(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_0^R G(r,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где

$$G(r,\xi,t) = \sum_{n=1}^\infty \frac{2\xi}{R^2J_1^2(\mu_n)}J_0\Big(\mu_n\frac{r}{R}\Big)J_0\Big(\mu_n\frac{\xi}{R}\Big)\exp\Big(-\frac{a^2\mu_n^2t}{R^2}\Big).$$

Здесь μ_n — корни функции Бесселя: $J_0(\mu_n) = 0$ (численные значения первых пяти корней μ_n указаны в 5.2.4.22, п. 2.1).

1.2. $w = f(r)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$w = g(t)$ при $r = R$ (граничное условие)

$w \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Замена $w(r,t) = u(r,t) + g(t)$ приводит к задаче из п. 1.1 для величины u, в которой вместо функции $\Phi(r,t)$ будет стоять $\Phi(r,t) - g_t'(t)$, а вместо $f(r)$ — функция $f(r) - g(0)$.

2. Область: $0 < r < R$. Вторая краевая задача.

$w = f(r)$ при $t = 0$ (начальное условие)

$\partial_r w = g(t)$ при $r = R$ (граничное условие)

$w \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \frac{2}{R^2}H(0,t) + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{J_0(\lambda_n r)}{J_0^2(\lambda_n R)}\exp\big(-a^2\lambda_n^2 t\big)H(\lambda_n,t),$$

где

$$H(\lambda_n,t) = \int_0^R \xi f(\xi)J_0(\lambda\xi)\,d\xi + a^2RJ_0(\lambda R)\int_0^t g(\tau)\exp\big(a^2\lambda^2\tau\big)\,d\tau +$$
$$+ \int_0^t\int_0^R \xi J_0(\lambda\xi)\exp\big(a^2\lambda^2\tau\big)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

λ_n — корень характеристического уравнения: $J_0'(\lambda R) = 0$, где штрих обозначает производную.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 341).

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right).$

Это уравнение встречается в сферически-симметричных задачах теплопроводности (теплообмен шара с окружающей средой, r — радиальная координата). Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{rr}u$, которое рассматривается в разделе 5.2.1.

1. Точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$
\begin{aligned}
w(r) &= A + B\frac{1}{r},\\
w(r,t) &= A + 6a^2Bt + Br^2,\\
w(r,t) &= A + 2a^2B\frac{t}{r} + Br,\\
w(r,t) &= A + \frac{B}{t^{3/2}}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right),\\
w(r,t) &= A + \frac{B}{r\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{r^2}{4a^2t}\right),\\
w(r,t) &= Ar^{-1}\exp(a^2\lambda^2t \pm \lambda r) + B,\\
w(r,t) &= Ar^{-1}\exp(-a^2\lambda^2t)\cos(\lambda r) + B,\\
w(r,t) &= Ar^{-1}\exp(-a^2\lambda^2t)\sin(\lambda r) + B.
\end{aligned}
$$

2. Область: $0 < r < R$. Первая краевая задача.

2.1.	$w = w_0$	при	$t = 0$	(начальное условие)
	$w = w_R$	при	$r = R$	(граничное условие)
	$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Считается, что $w_0 = \mathrm{const}$, $w_R = \mathrm{const}$.

Решение:

$$\frac{w(r,t) - w_R}{w_0 - w_R} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}R}{\pi n r}\sin\left(\frac{\pi n r}{R}\right)\exp\left(-\frac{a^2\pi^2n^2t}{R^2}\right).$$

Зависимость средней температуры $\overline{w}$ от времени t:

$$\frac{\overline{w} - w_R}{w_0 - w_R} = \frac{6}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\exp\left(-\frac{a^2\pi^2n^2t}{R^2}\right), \qquad \overline{w} = \frac{1}{V}\int_v w\,dv,$$

где V — объем шара радиусом R.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 107).

2.2. $w = f(r)$ при $t = 0$ (начальное условие)
$w = g(t)$ при $r = R$ (граничное условие)
$w \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r}\sin\Bigl(\frac{\pi n r}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a^2\pi^2 n^2 t}{R^2}\Bigr)F_n(t),$$

$$F_n(t) = \int_0^R r f(r)\sin\Bigl(\frac{\pi n r}{R}\Bigr)\,dr - (-1)^n \pi n a^2\int_0^t g(\tau)\exp\Bigl(\frac{a^2\pi^2 n^2 \tau}{R^2}\Bigr)\,d\tau.$$

Литература: К. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 230).

3. Область: $0 < r < R$. Вторая краевая задача.

3.1. $w = w_0$ при $t = 0$ (начальное условие)
$\partial_r w = g_R$ при $r = R$ (граничное условие)
$w \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Считается, что $w_0 = \mathrm{const}$, $g_R = \mathrm{const}$.

Решение:

$$w(r,t) = w_0 + g_R R\biggl[\frac{3a^2 t}{R^2} + \frac{5r^2 - 3R^2}{10R^2} - \\ - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2R}{\mu_n^3\cos(\mu_n)r}\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\exp\Bigl(-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr)\biggr],$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\operatorname{tg}(\mu_n) - \mu_n = 0$. Приведем численные значения первых пяти корней (с точностью до четвертого знака после запятой): $\mu_1 = 4.4934$, $\mu_2 = 7.7253$, $\mu_3 = 10.9041$, $\mu_4 = 14.0662$, $\mu_5 = 17.2208$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 164).

3.2. $w = f(r)$ при $t = 0$ (начальное условие)
$\partial_r w = g(t)$ при $r = R$ (граничное условие)
$w \neq \infty$ при $r = 0$ (граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 f(r)\,dr + \frac{3a}{R}\int_0^t g(\tau)\,d\tau + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\exp\Bigl(-\frac{a^2\mu_n^2 t}{R^2}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)H_n(r,t),$$

$$H_n(r,t) = \frac{2}{\mu_n^2\cos(\mu_n)r}\biggl[\frac{1}{R\mu_n}\int_0^R r f(r)\sin\Bigl(\frac{\mu_n r}{R}\Bigr)\,dr + \\ + a\int_0^t g(\tau)\exp\Bigl(\frac{a^2\mu_n^2\tau}{R^2}\Bigr)\,d\tau\biggr],$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $\operatorname{tg}(\mu_n) - \mu_n = 0$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 169).

4. Область: $0 < r < R$. Третья краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = w_0 & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r w = k(w_R - w) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\
w \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

где $k = \text{const}$, $w_0 = \text{const}$, $w_R = \text{const}$.

Решение:

$$
\frac{w(r,t) - w_0}{w_R - w_0} = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{R}{r} \sin\left(\frac{\mu_n r}{R}\right) \exp\left(-\frac{a^2 \mu_n^2 t}{R^2}\right),
$$

$$
A_n = \frac{2}{\mu_n} \frac{\sin \mu_n - \mu_n \cos \mu_n}{\mu_n - \sin \mu_n \cos \mu_n},
$$

где μ_n — положительные корни трансцендентного уравнения: $(kR - 1)\operatorname{tg}(\mu_n) + \mu_n = 0$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 226).

5. Область: $R_1 < r < R_2$. Первая краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
w = w_1 & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\
w = w_2 & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Считается, что $w_1 = \text{const}$, $w_2 = \text{const}$.

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,t) = {} & \frac{R_1 w_1}{r} + \frac{(r - R_1)(R_2 w_2 - R_1 w_1)}{r(R_2 - R_1)} + \\
& + \frac{2}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{\pi n (r - R_1)}{R_2 - R_1}\right] \exp\left[-\frac{\pi^2 n^2 a^2 t}{(R_2 - R_1)^2}\right] \left\{ \frac{R_2 w_2 \cos \pi n - R_1 w_1}{\pi n} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{R_2 - R_1} \int_{R_1}^{R_2} r f(r) \sin\left[\frac{\pi n (r - R_1)}{R_2 - R_1}\right] dr \right\}.
\end{aligned}
$$

Литература: К. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

6. Область: $R_1 < r < R_2$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_r w = 0 & \text{при} \quad r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_r w = 0 & \text{при} \quad r = R_2 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Граничные условия соответствуют теплоизолированным поверхностям $r = R_1$ и $r = R_2$.

Решение:

$$w(r,t) = \frac{3}{R_2^3 - R_1^3}\int_{R_1}^{R_2} r^2 f(r)\,dr + \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\bigl(-a^2\lambda_n^2 t\bigr)F_n(r),$$

$$A_n = \frac{2}{R_2 - R_1}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)F_n(r)\,dr,$$

где

$$F_n(r) = \frac{(1 + R_2^2\lambda_n^2)^{1/2}\{\sin[\lambda_n(r - R_1)] + R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r - R_1)]\}}{\bigl[(1 + R_1^2\lambda_n^2)(1 + R_2^2\lambda_n^2) + (R_2 - R_1)(R_1R_2\lambda_n^2 - 1)\bigr]^{1/2}}.$$

Здесь λ_n — корни характеристического уравнения

$$(\lambda^2 R_1R_2 + 1)\,\mathrm{tg}[\lambda(R_2 - R_1) - \lambda(R_2 - R_1) = 0.$$

Литература: К. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

7. Область: $R_1 < r < R_2$. Третья краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_r w = k_1 w & \text{при} & r = R_1 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_r w = -k_2 w & \text{при} & r = R_2 & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Считается, что $|k_1| + |k_2| \neq 0$.

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{r}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\bigl(-a^2\lambda_n^2 t\bigr)F_n(r), \quad A_n = \frac{2}{R_2 - R_1}\int_{R_1}^{R_2} rf(r)F_n(r)\,dr,$$

где

$$F_n(r) = \frac{(H^2 + R_2^2\lambda_n^2)^{1/2}\{G\sin[\lambda_n(r - R_1)] + R_1\lambda_n\cos[\lambda_n(r - R_1)]\}}{\bigl[(G^2 + R_1^2\lambda_n^2)(H^2 + R_2^2\lambda_n^2) + (GR_2 + HR_1)(GH + R_1R_2\lambda_n^2)\bigr]^{1/2}},$$

$$G = k_1R_1 + 1, \qquad H = k_2R_2 - 1,$$

λ_n — корни характеристического уравнения

$$(GH - R_1R_2\lambda^2)\sin[\lambda(R_2 - R_1) + \lambda(R_1H + R_2G)\cos[\lambda(R_2 - R_1) = 0.$$

Предельным случаям $k_1 = 0$, $k_2 \to \infty$ и $k_2 = 0$, $k_1 \to \infty$ соответствуют смешанные краевые задачи.

Литература: К. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 242).

8. Область: $R < r < \infty$. Первая краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(r) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = g(t) & \text{при} & r = R & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2ar\sqrt{\pi t}}\int_R^{\infty} \xi f(\xi)\left\{\exp\left[-\frac{(r-\xi)^2}{4a^2t}\right] - \exp\left[-\frac{(r+\xi-2R)^2}{4a^2t}\right]\right\}d\xi +$$
$$+ \frac{2R}{r\sqrt{\pi}}\int_z^{\infty} g\left(t - \frac{(r-R)^2}{4a^2\tau}\right)\exp(-\tau^2)\,d\tau, \quad z = \frac{r-R}{2a\sqrt{t}}.$$

Литература: К. Карслоу, Д. Егер (1964, стр. 243).

Частный случай:

$$f(r) = w_0, \quad g(t) = w_R, \qquad \text{где} \quad w_R,\, w_0 = \text{const}.$$

Решение:

$$\frac{w - w_0}{w_R - w_0} = \frac{R}{r} \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{r - R}{2a\sqrt{t}}\Bigr),$$

где $\operatorname{erfc} z \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_z^\infty \exp(-\xi^2)\, d\xi$ — *интеграл вероятностей.*

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \Bigl(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Bigr) + \Phi(r, t).$

Это уравнение встречается в сферически-симметричных задачах теплопроводности с тепловыделением (функция Φ пропорциональна количеству тепла, выделяемому в единицу времени в рассматриваемом объеме).

1. Область: $0 < r < R$. Первая краевая задача.

$w = f(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = g(t)$	при	$r = R$	(граничное условие)
$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Замена $u(r, t) = rw(r, t)$ приводит к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\Phi(r, t),$$

которое рассматривается в разделе 5.2.1. Начальные и граничные условия принимают вид

$u = rf(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$u = Rg(t)$	при	$r = R$	(граничное условие)
$u = 0$	при	$r = 0$	(граничное условие)

Используя результаты решения задачи для функции u (см. п. 5.2 в разд. 5.2.2), в итоге получим:

$$w(r, t) = \frac{1}{r} \int_0^t \int_0^R \xi G(r, \xi, t - \tau) \Phi(\xi, \tau)\, d\xi\, d\tau + {} + \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} M_n(t) \exp\Bigl(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{R^2}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr),$$

где

$$G(r, \xi, t) = \frac{2}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr) \sin\Bigl(\frac{n\pi \xi}{R}\Bigr) \exp\Bigl(-\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{R^2}\Bigr),$$

$$M_n(t) = \int_0^R r f(r) \sin\Bigl(\frac{n\pi r}{R}\Bigr) dr - (-1)^n a^2 n\pi \int_0^t \exp\Bigl(\frac{a^2 n^2 \pi^2 t}{R^2}\Bigr) g(t)\, dt.$$

2. Область: $0 < r < R$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = f(r) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(t) & \text{при} \quad r = R & \text{(граничное условие)} \\
w \neq \infty & \text{при} \quad r = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,t) = {} & \frac{3}{R^3}\int_0^R r^2 f(r)\,dr + \frac{3a^2}{R}\int_0^t g(\tau)\,d\tau + \frac{3}{R^3}\int_0^t\int_0^R r^2\Phi(r,\tau)\,dr\,d\tau + \\
& + \frac{2}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n r)}{r\sin^2(\lambda_n R)}\exp(-a^2\lambda_n^2 t)\int_0^R rf(r)\sin(\lambda_n r)\,dr + \\
& + 2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n r)}{r\sin(\lambda_n R)}\exp(-a^2\lambda_n^2 t)\int_0^t g(\tau)\exp(a^2\lambda_n^2\tau)\,d\tau + \\
& + \frac{2}{R^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n r)}{\sin^2(\lambda_n R)}\int_0^t\int_0^R \Phi(r,\tau)r\sin(\lambda_n r)\exp(a^2\lambda_n^2\tau)\,dr\,d\tau,
\end{aligned}
$$

где λ_n — корни характеристического уравнения $\operatorname{tg}(\lambda_n R) - \lambda_n R = 0$.

Литература: А. В. Лыков (1967, стр. 337).

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1-2\beta}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя. При $\beta = 0$ см. уравнение 5.2.4.22, а при $\beta = -\frac{1}{2}$ — уравнение 5.2.4.24.

1. Точные решения:

$$
\begin{aligned}
w(x) &= A + Bx^{2\beta}, \\
w(x,t) &= A + 4(1-\beta)Bt + Bx^2, \\
w(x,t) &= A + 4(1+\beta)Btx^{2\beta} + Bx^{2\beta+2}, \\
w(x,t) &= A + Bt^{\beta-1}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr), \\
w(x,t) &= A + B\frac{x^{2\beta}}{t^{\beta+1}}\exp\Bigl(-\frac{x^2}{4t}\Bigr), \\
w(x,t) &= A + B\int_0^{\zeta} z^{\beta-1}e^{-z}\,dz, \quad \zeta = \frac{x^2}{4t}, \\
w(x,t) &= A + B\frac{x^{\beta}}{t}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\lambda^2}{4t}\Bigr)I_{\beta}\Bigl(\frac{\lambda x}{2t}\Bigr), \\
w(x,t) &= A + B\frac{x^{\beta}}{t}\exp\Bigl(-\frac{x^2+\lambda^2}{4t}\Bigr)I_{-\beta}\Bigl(\frac{\lambda x}{2t}\Bigr),
\end{aligned}
$$

где A, B, λ — произвольные постоянные, $I_\beta(z)$ — модифицированная функция Бесселя.

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

$$
\begin{array}{lll}
w = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
w = g(t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\Big(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Big)I_\beta\Big(\frac{\xi x}{2t}\Big)\,d\xi + {} \\ + \frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\Big[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}}.$$

Частный случай: $f(x)=a$, $g(x)=b$, *где* a, b *— константы.*
Решение:

$$w = \frac{(a-b)}{\Gamma(\beta)}\gamma\Big(\beta,\frac{x^2}{4t}\Big)+b, \qquad \gamma(\beta,z)=\int_0^z \xi^{\beta-1}e^{-\xi}\,d\xi,$$

где $\gamma(\beta,z)$ *— неполная гамма-функция,* $\Gamma(\beta)=\gamma(\beta,+\infty)$ *— гамма-функция.*

3. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

$$w=f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\big(x^{1-2\beta}\partial_x w\big)=g(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\Big(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\Big)I_{-\beta}\Big(\frac{\xi x}{2t}\Big)\,d\xi - {} \\ - \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\Big[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}}.$$

4. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Третья краевая задача.

$$w=0 \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\big[x^{1-2\beta}\partial_x w + a(w_s-w)\big]=0 \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Здесь a и w_s — некоторые постоянные.

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w = \frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t \varphi(\tau)\exp\Big[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\Big]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}},$$

где функция $\varphi(t)$ задается в виде степенного ряда

$$\varphi(t)=\sum_{n=0}^\infty \frac{(-\lambda t^\beta)^n}{\Gamma(n\beta+1)}, \qquad \lambda=\frac{2^{2\beta-1}a\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\beta)}.$$

который сходится для всех x.

Литература: W. G. L. Sutton (1943).

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1-2\beta}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t).$

При $\beta=0$ см. уравнение 5.2.4.23, а при $\beta=-\frac{1}{2}$ — уравнение 5.2.4.25.

1. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Первая краевая задача.

$$w=f(x) \quad \text{при} \quad t=0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$w=g(t) \quad \text{при} \quad x=0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right)I_\beta\left(\frac{\xi x}{2t}\right)d\xi +$$
$$+\frac{x^{2\beta}}{2^{2\beta}\Gamma(\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1+\beta}} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)\frac{\xi^\beta x^\beta}{t-\tau}\exp\left[-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right]I_p\left(\frac{\xi x}{2(t-\tau)}\right)d\xi\,d\tau.$$

2. Область: $0 \leqslant x < \infty$. Вторая краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\left(x^{1-2\beta}\frac{\partial w}{\partial x}\right) = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение при $0 < \beta < 1$:

$$w = \frac{x^\beta}{2t}\int_0^\infty f(\xi)\xi^{1-\beta}\exp\left(-\frac{x^2+\xi^2}{4t}\right)I_{-\beta}\left(\frac{\xi x}{2t}\right)d\xi -$$
$$-\frac{2^{2\beta-1}}{\Gamma(1-\beta)}\int_0^t g(\tau)\exp\left[-\frac{x^2}{4(t-\tau)}\right]\frac{d\tau}{(t-\tau)^{1-\beta}} +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^\infty \Phi(\xi,\tau)\frac{\xi^\beta x^\beta}{t-\tau}\exp\left[-\frac{x^2+\xi^2}{4(t-\tau)}\right]I_{-\beta}\left(\frac{\xi x}{2(t-\tau)}\right)d\xi\,d\tau.$$

Литература: W. G. L. Sutton (1943).

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xe^{ct}, \qquad \tau = \frac{a^2}{2c}e^{2ct} + \text{const},$$

получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\lambda}{z}\frac{\partial w}{\partial z}, \qquad \lambda = \frac{b}{a^2}.$$

При разных значениях λ см. уравнения 5.2.4.22, 5.2.4.24, 5.2.4.26.

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(ct^k x + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = ct^k$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.26 при $f(x) = a^2 x$, $\Phi \equiv 0$.

Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x) = Ax + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2t + A(x\ln x - x) + B,$$
$$w(x,t) = 2Aa^2tx + Ax^2 + B,$$
$$w(x,t) = Aa^4t^2 + 2Aa^2t(x\ln x - x) + A(x^2\ln x - \tfrac{5}{2}x^2) + B,$$
$$w(x,t) = Aa^4t^2x + Aa^2tx^2 + \tfrac{1}{6}Ax^3 + B,$$
$$w(x,t) = 2Aa^6t^3x + 3Aa^4t^2x^2 + Aa^2tx^3 + \tfrac{1}{12}Ax^4 + B,$$
$$w(x,t) = e^{\lambda t}\sqrt{x}\Big[AJ_1\Big(\frac{2}{a}\sqrt{-\lambda x}\Big) + BY_1\Big(\frac{2}{a}\sqrt{-\lambda x}\Big)\Big] \quad \text{при } \lambda < 0,$$
$$w(x,t) = e^{\lambda t}\sqrt{x}\Big[AI_1\Big(\frac{2}{a}\sqrt{\lambda x}\Big) + BK_1\Big(\frac{2}{a}\sqrt{\lambda x}\Big)\Big] \quad \text{при } \lambda > 0,$$

где $J_1(z)$ и $Y_1(z)$ — функции Бесселя, $I_1(z)$ и $K_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx + c)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big(\frac{\sqrt{b}}{a}x + ct\Big), \quad z = x\exp\big(2a\sqrt{b}\,t\big), \quad \tau = \frac{a}{2\sqrt{b}}\exp\big(2a\sqrt{b}\,t\big)$$

приводит к более простому уравнению вида 5.2.4.30:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

32. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^kx + ct^m)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = bt^k$, $g(t) = ct^m$.

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^kw.$

Частный случай уравнения 5.2.9.39 при $f(t) = a^2$, $g(t) = 0$, $h(t) = bt^k$, $s(t) = 0$.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Big[(x + b)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

1. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\Big[(x + b)\frac{\partial w}{\partial x}\Big].$$

2. Замена $x = \frac{1}{4}z^2 - b$ приводит к уравнению вида 5.2.4.22:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}\Big).$$

ТАБЛИЦА 1
Точные решения уравнения 5.2.4.35 при различных значениях определяющих параметров (λ — произвольный параметр)

Частное решение: $w(x,t)=\exp(hx-\lambda t)F(\xi)$, где $\xi=\dfrac{x-\mu}{p}$					
Условия	h	p	μ	F	Параметры
$a_2\neq 0$, $D\neq 0$	$\dfrac{D-a_1}{2a_2}$	$-\dfrac{a_2}{A(h)}$	$-\dfrac{b_2}{a_2}$	$\mathcal{J}(a,b;\xi)$	$a=B(h)/A(h)$, $b=(a_2b_1-a_1b_2)a_2^{-2}$
$a_2=0$, $a_1\neq 0$	$-\dfrac{a_0}{a_1}$	1	$-\dfrac{2b_2h+b_1}{a_1}$	$\mathcal{J}(a,\frac{1}{2};k\xi^2)$	$a=B(h)/(2a_1)$, $k=-a_1/(2b_2)$
$a_2\neq 0$, $a_1^2=4a_0a_2$	$-\dfrac{a_1}{2a_2}$	a_2	$-\dfrac{b_2}{a_2}$	$\xi^\alpha Z_{2\alpha}(\beta\sqrt{\xi})$	$\alpha=\dfrac{1}{2}-\dfrac{2b_2h+b_1}{2a_2}$, $\beta=2\sqrt{B(h)}$
$a_2=a_1=0$, $a_0\neq 0$	$-\dfrac{b_1}{2b_2}$	1	$\dfrac{4(b_0+\lambda)b_2-b_1^2}{4a_0b_2}$	$\xi^{1/2}Z_{1/3}(k\xi^{3/2})$	$k=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{a_0}{b_2}\right)^{1/2}$
Обозначения: $D^2=a_1^2-4a_0a_2$, $A(h)=2a_2h+a_1$, $B(h)=b_2h^2+b_1h+b_0+\lambda$					

35. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=(a_2x+b_2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(a_1x+b_1)\dfrac{\partial w}{\partial x}+(a_0x+b_0)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.33 при $f(x)=a_2x+b_2$, $g(x)=a_1x+b_1$, $h(x)=a_0x+b_0$.

Пусть

$$\mathcal{J}(a,b;x)=C_1\Phi(a,b;x)+C_2\Psi(a,b;x),\qquad C_1,\ C_2 \text{ — любые},$$

является произвольным решением вырожденного гипергеометрического уравнения

$$xy''_{xx}+(b-x)y'_x-ay=0,$$

а функция

$$Z_\nu(x)=C_1J_\nu(x)+C_2Y_\nu(x),\qquad C_1,\ C_2 \text{ — любые},$$

является произвольным решением уравнения Бесселя

$$x^2y''_{xx}+xy'_x+(x^2-\nu^2)y=0.$$

Результаты решения исходного уравнения приведены в итоговой табл. 1.

О вырожденных гипергеометрических функциях Φ и Ψ см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1973). О функциях Бесселя J_ν и Y_ν см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974).

36. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 xt \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + ct^k)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.39 при $f(t) = a^2 t$, $g(t) = 0$, $h(t) = b$, $s(t) = ct^k$.

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 xt^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^m \dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^n w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.39 при $f(t) = a^2 t^k$, $g(t) = bt^m$, $h(t) = 0$, $s(t) = ct^n$.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x\Big(a^2 t^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^m \dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^n w\Big).$

Частный случай уравнения 5.2.9.39 при $f(t) = a^2 t^k$, $g(t) = bt^m$, $h(t) = ct^n$, $s(t) = 0$.

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = \big(A \ln|x| + B\big)|x|^k \exp\big[(c - ak^2)t\big],$$
$$w(x,t) = A\big(2at + \ln^2|x|\big)|x|^k \exp\big[(c - ak^2)t\big],$$
$$w(x,t) = A|x|^\lambda \exp\big[(c + a\lambda^2 - 2ak\lambda)t\big],$$

где $k = \dfrac{a-b}{2a}$.

2. Преобразование

$$w(x,t) = |x|^k \exp\big[(c - ak^2)t\big] u(z,t), \quad z = \ln|x|, \qquad k = \frac{a-b}{2a}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a\partial_{zz} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^k + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = bt^k + c$.

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\Big(\frac{b}{k+1} t^{k+1} + ct\Big) u(z,\tau), \quad z = \ln|x|, \quad \tau = a^2 t$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 5.2.3.3:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{\partial u}{\partial z}.$$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx \dfrac{\partial w}{\partial x} + (cx^n + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.33 при $f(x) = ax^2$, $g(x) = bx$, $h(x) = cx^n + s$, n — любое.

При $c = 0$ см. уравнение 5.2.4.39.

Точные решения при $c \neq 0$:

$$w(x,t) = Ae^{-\lambda t} x^{\frac{a-b}{2a}} J_\nu\left(\frac{2}{n}\sqrt{\frac{c}{a}}\, x^{\frac{n}{2}}\right), \quad \nu = \frac{1}{an}\sqrt{(a-b)^2 - 4a(s+\lambda)},$$

$$w(x,t) = Ae^{-\lambda t} x^{\frac{a-b}{2a}} Y_\nu\left(\frac{2}{n}\sqrt{\frac{c}{a}}\, x^{\frac{n}{2}}\right), \quad \nu = \frac{1}{an}\sqrt{(a-b)^2 - 4a(s+\lambda)},$$

где A, λ — произвольные постоянные; $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя.

42. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_1 x^2 + b_1 x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.33 при $f(x) = a_2 x^2$, $g(x) = a_1 x^2 + b_1 x$, $h(x) = a_0 x^2 + b_0 x + c_0$.

1. Точные решения при $a_1^2 \neq 4a_0 a_2$:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= A\exp(-\lambda t + \mu x) x^k \Phi\left(\alpha,\, 2k + \tfrac{b_1}{a_2};\, -\gamma x\right),\\ w(x,t) &= A\exp(-\lambda t + \mu x) x^k \Psi\left(\alpha,\, 2k + \tfrac{b_1}{a_2};\, -\gamma x\right), \end{aligned} \qquad (1)$$

где A, λ — произвольные постоянные, $k = k(\lambda)$ — корень квадратного уравнения $a_2 k^2 + (b_1 - a_2)k + c_0 + \lambda = 0$,

$$\mu = \frac{\sqrt{a_1^2 - 4a_0 a_2} - a_1}{2a_2}, \quad \alpha = \frac{(b_1 + 2a_2 k)\mu + b_0 + a_1 k}{2a_2 \mu + a_1}, \quad \gamma = 2\mu + \frac{a_1}{a_2},$$

$\Phi(\alpha, \beta; z)$ и $\Psi(\alpha, \beta; z)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

О вырожденных гипергеометрических функциях см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1973).

2. Точные решения при $a_1^2 = 4a_0 a_2$:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= A\exp\left(-\lambda t - \frac{a_1}{2a_2}x\right) x^k \xi^m J_{2m}\left(2\sqrt{p\xi}\right), \quad \xi = \frac{x}{a_2},\\ w(x,t) &= A\exp\left(-\lambda t - \frac{a_1}{2a_2}x\right) x^k \xi^m Y_{2m}\left(2\sqrt{p\xi}\right), \quad \xi = \frac{x}{a_2}, \end{aligned} \qquad (2)$$

где A, λ — произвольные постоянные, $k = k(\lambda)$ — корень квадратного уравнения $a_2 k^2 + (b_1 - a_2)k + c_0 + \lambda = 0$,

$$m = \frac{1}{2} - k - \frac{b_1}{2a_2}, \quad p = -\frac{a_1}{2a_2}(b_1 + 2a_2 k) + b_0 + a_1 k = 0,$$

$J_m(z)$ и $Y_m(z)$ — функции Бесселя.

О функциях Бесселя см. М. Абрамовиц, И. Стиган (1979), Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974).

Замечание. В решениях (1), (2) параметр k можно считать произвольным, а параметр $\lambda = -a_2 k^2 - (b_1 - a_2)k - c_0$.

43. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (a_1 x^{n+1} + b_1 x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (a_0 x^{2n} + b_0 x^n + c_0) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.33 в случае $f(x) = a_2 x^2$, $g(x) = a_1 x^{n+1} + b_1 x$, $h(x) = a_0 x^{2n} + b_0 x^n + c_0$, где n — любое.

Замена $z = \xi^n$ приводит к уравнению вида 5.2.4.42:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_2 n^2 \xi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + n\left(a_1 \xi^2 + \beta \xi\right) \frac{\partial w}{\partial \xi} + (a_0 \xi^2 + b_0 \xi + c_0) w,$$

где $\beta = b_1 + a_2(n-1)$.

44. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 t^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b t^m x \dfrac{\partial w}{\partial x} + c t^n w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.40 при $f(t) = a^2 t^k$, $g(t) = b t^m$, $h(t) = c t^n$.

45. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^3 t^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b t^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + c t^l w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.45 при $k=3$, $f(t) = a^2 t^m$, $g(t) = b t^n$, $h(t) = c t^l$.

46. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b w.$

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = e^{bt}(Ax + B),$$
$$w(x,t) = A e^{bt}\left(2a^2 t x + \frac{1}{x}\right),$$
$$w(x,t) = A x \exp\left[(b + a^2 \lambda^2) t + \frac{\lambda}{x}\right].$$

2. Преобразование $w(x,t) = x e^{bt} u(\xi, t)$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2 \partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4 t^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b t^m w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2 t^k$, $g(t) = b t^m$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = (Ax + B) \exp\left(\frac{b}{m+1} t^{m+1}\right),$$
$$w(x,t) = A\left(\frac{2a^2}{k+1} t^{k+1} x + \frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{b}{m+1} t^{m+1}\right),$$
$$w(x,t) = A x \exp\left(\frac{b}{m+1} t^{m+1} + \frac{a^2 \lambda^2}{k+1} t^{k+1} + \frac{\lambda}{x}\right).$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = x \exp\left(\frac{b}{m+1} t^{m+1}\right) u(\xi, \tau), \quad \xi = \frac{1}{x}, \quad \tau = \frac{a^2}{k+1} t^{k+1}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

48. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (x^2+a^2)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

1. Однородные граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
&w = 0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
&w = 0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \int_0^l G(x,\xi,t)f(\xi)\,d\xi,
$$

где

$$
G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\exp(-\lambda_n^2 t)}{\|y_n\|^2(\xi^2+a^2)^2},\qquad \lambda_n^2 = \left[\frac{\pi n a}{\operatorname{arctg}(l/a)}\right]^2 - a^2,
$$

$$
y_n(x) = \sqrt{x^2+a^2}\sin\left[\pi n\frac{\operatorname{arctg}(x/a)}{\operatorname{arctg}(l/a)}\right],\qquad \|y_n\|^2 = \frac{\operatorname{arctg}(l/a)}{2a},
$$

$$
n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots
$$

Литература: А. Г. Бутковский (1979, стр. 69).

2. Неоднородные граничные условия:

$$
\begin{aligned}
&w = f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
&w = g(t) &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
&w = h(t) &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$
w(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t)-g(t)] + u(x,t),
$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

49. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (x-a)^2(x-b)^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - cw, \qquad a \neq b.$

Преобразование

$$
w(x,t) = (x-b)e^{-ct}u(\xi,\tau),\quad \xi = \ln\frac{x-a}{x-b},\quad \tau = (a-b)^2 t
$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$
\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},
$$

которое рассматривается в разд. 5.2.3.

50. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2 + bx + c)^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + kw.$

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\bigl[(ac - \tfrac{1}{4}b^2 + k)t\bigr](ax^2 + bx + c)^{1/2}u(\xi,t), \quad \xi = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

51. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^{1-k} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (см. уравнение 5.2.9.50) и является частным случаем 5.2.9.26 при $f(x) = a^2 x^{1-k}$.

1. При $k = -1$ это — частный случай уравнения 5.2.4.39, а при $k = -3$ это — уравнение вида 5.2.4.46 (в этих случаях уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами).

Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x) = Ax + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2 k(k+1)t + Ax^{k+1} + B,$$
$$w(x,t) = Aa^2(k+1)(k+2)tx + Ax^{k+2} + B,$$
$$w(x,t) = A\Bigl[a^2 k(k+1)t^2 + 2tx^{k+1} + \frac{x^{2k+2}}{a^2(k+1)(2k+1)}\Bigr] + B,$$
$$w(x,t) = A\Bigl[a^2(k+1)(k+2)t^2 x + 2tx^{k+2} + \frac{x^{2k+3}}{a^2(k+1)(2k+3)}\Bigr] + B,$$
$$w(x,t) = e^{\lambda t}\sqrt{x}\left[AJ_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{aq}x^q\right) + BY_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{-\lambda}}{aq}x^q\right)\right] \quad \text{при } \lambda < 0,$$
$$w(x,t) = e^{\lambda t}\sqrt{x}\left[AI_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{aq}x^q\right) + BK_{\frac{1}{2q}}\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{aq}x^q\right)\right] \quad \text{при } \lambda > 0,$$

где $q = \frac{1}{2}(k+1)$, $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя, $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ — модифицированные функции Бесселя.

Пусть $2/(k+1) = 2m + 1$, где m — целое число. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = e^{\lambda t}x(x^{1-2q}D)^{m+1}\left[A\exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{aq}x^q\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{aq}x^q\right)\right] \quad \text{при } m \geqslant 0,$$
$$w(x,t) = e^{\lambda t}x(x^{1-2q}D)^{-m}\left[A\exp\left(\frac{\sqrt{\lambda}}{aq}qx^q\right) + B\exp\left(-\frac{\sqrt{\lambda}}{aq}x^q\right)\right] \quad \text{при } m < 0,$$

где $D = \dfrac{d}{dx}$, $q = \dfrac{k+1}{2} = \dfrac{1}{2m+1}$.

2. Решение исходного уравнения в области $0 \leqslant x < \infty$ при наиболее распространенных условиях

$$w = w_0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$w = w_s \quad \text{при} \quad x = 0,$$

где $w_0 = \text{const}$, $w_s = \text{const}$, имеет вид

$$\frac{w - w_s}{w_0 - w_s} = \frac{1}{\Gamma(\nu)}\gamma\Big(\nu,\ \frac{\nu^2}{a^2}\frac{x^{k+1}}{t}\Big), \qquad \nu = \frac{1}{k+1}.$$

Здесь $\Gamma(\nu) = \gamma(\nu, \infty)$ — гамма-функция, $\gamma(\nu, \zeta) = \int_0^\zeta \zeta^{\nu-1} e^{-\zeta} d\zeta$ — неполная гамма-функция.

3. Преобразование

$$\tau = \tfrac{1}{4}a^2(k+1)^2 t, \qquad \xi = x^{\frac{k+1}{2}}$$

приводит к уравнению вида 5.2.4.26:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1 - 2\beta}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad \text{где} \quad \beta = \frac{1}{k+1}.$$

4. Укажем два дискретных преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения (при которых меняется параметр k).

4.1. Точечное преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{w}{x} \qquad (\text{преобразование } \mathcal{F})$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 z^{k+3} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

Преобразование $\mathcal{F}$ меняет параметры уравнения по схеме:

$$k \stackrel{\mathcal{F}}{\Longrightarrow} -k - 2.$$

Повторное действие преобразования $\mathcal{F}$ приводит к исходному уравнению.

4.2. Используя преобразование Беклунда (см. 5.2.9.26, п. 5)

$$\xi = x^k, \quad w = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad (\text{преобразование } \mathcal{H})$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной ξ, получим

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 k^2 \xi^{\frac{k-1}{k}} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}. \tag{2}$$

Преобразование $\mathcal{H}$ меняет параметры уравнения по схеме:

$$k \stackrel{\mathcal{H}}{\Longrightarrow} \frac{1}{k}.$$

Повторное действие преобразования $\mathcal{H}$ приводит к исходному уравнению.

Комбинация преобразований $\mathcal{G}=\mathcal{H}\circ\mathcal{F}$ меняет параметры уравнения по схеме

$$k \overset{\mathcal{G}}{\Longrightarrow} -\frac{1}{k+2}.$$

Исходное уравнение сводится к уравнению с постоянными коэффициентами при $k=-3$ (см. 5.2.4.46). Подставляя это значение в (2), получим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\xi^{4/3}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \tag{3}$$

которое также приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Используя преобразования $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, аналогичным образом можно найти и некоторые другие уравнения рассматриваемого типа, которые приводятся к уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами.

52. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t)=b$. Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xe^{bt}, \quad \tau = \frac{a^2}{b(2-k)}e^{b(2-k)t} + \text{const},$$

получим уравнение вида 5.2.4.51:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

53. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Bigl(x^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + mx^{m-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

1. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^m\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$$

2. При $m=2$ см. уравнение 5.2.4.39. При $m\neq 2$ переходя от t, x к новым переменным $\tau=\frac{1}{4}a^2(2-m)^2t$, $z=x^{\frac{2-m}{2}}$, получим уравнение вида 5.2.4.26:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{m}{2-m}\frac{1}{z}\frac{\partial w}{\partial z}.$$

54. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\Bigl(x^{2m}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + mx^{2m-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr).$

Частный случай уравнения 5.2.9.30 при $f(x)=ax^m$, $g(t)=h(t)=0$. При $m=1$ см. уравнение 5.2.4.39.

Замена

$$\xi = \begin{cases} \dfrac{1}{1-m}x^{1-m} & \text{при } m\neq 1,\\ \ln|x| & \text{при } m=1 \end{cases}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2\partial_{\xi\xi}w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

55. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(bt^m + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = bt^m + c$.

56. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = at^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^m x + ct^k)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (dt^l x + et^p)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.36 (поэтому оно может быть сведено к уравнению с постоянными коэффициентами, которое рассматривается в разд. 5.2.1).

57. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = at^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bt^m x + ct^k)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (dt^l x^2 + et^p x + st^q)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.37.

58. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k t^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^s w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.45 при $f(t) = a^2 t^m$, $g(t) = bt^n$, $h(t) = ct^s$.

59. $(1 - y^2)\dfrac{\partial w}{\partial x} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}$.

Уравнение массопереноса в пленке жидкости с параболическим профилем скорости.

1. Точные решения (A, B, λ — произвольные постоянные):

$$w(x,y) = A + By,$$
$$w(x,y) = A\exp(-a\lambda^2 x)\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda y^2\right)\Phi\left(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda y^2\right),$$
$$w(x,y) = A\exp(-a\lambda^2 x)\,y\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda y^2\right)\Phi\left(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda y^2\right),$$

где $\Phi(\alpha,\ \beta;\ z) = 1 + \sum\limits_{m=1}^{\infty} \dfrac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m-1)}{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)}\dfrac{z^m}{m!}$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

В практических приложениях наиболее часто встречаются смешанные граничные условия, которые рассмотрены ниже. Физический смысл переменных: w — концентрация; x и y — безразмерные координаты, отсчитываемые соответственно вдоль и поперек пленки (значение $y = 0$ соответствует свободной поверхности пленки, а $y = 1$ — твердой поверхности, по которой она стекает), $\mathrm{Pe} = 1/a$ — число Пекле.

2. Массообмен между газом и пленкой жидкости описывается граничными условиями

$$
\begin{aligned}
w &= 0 \quad &&\text{при} \quad x = 0 \quad &&(0 \leqslant y \leqslant 1),\\
w &= 1 \quad &&\text{при} \quad y = 0 \quad &&(x > 0),\\
\partial_y w &= 0 \quad &&\text{при} \quad y = 1 \quad &&(x > 0).
\end{aligned}
$$

ТАБЛИЦА 2

Собственные значения λ_m и коэффициенты разложения A_m в решении (1)

m	λ_m	A_m	m	λ_m	A_m
1	2,2631	1,3382	6	22,3181	−0,1873
2	6,2977	−0,5455	7	26,3197	0,1631
3	10,3077	0,3589	8	30,3209	−0,1449
4	14,3128	−0,2721	9	34,3219	0,1306
5	18,3159	0,2211	10	38,3227	−0,1191

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями имеет вид

$$w = 1 - \sum_{m=1}^{\infty} A_m \exp\bigl(-a\lambda_m^2 x\bigr) F_m(y),$$
$$F_m(y) = y\exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_m y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda_m y^2\bigr), \qquad (1)$$

где функции F_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения λ_m являются решениями трансцендентного уравнения

$$\lambda_m \Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{3}{2};\ \lambda_m\bigr) - \Phi\bigl(\tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m\bigr) = 0.$$

Коэффициенты ряда A_m вычисляются по формулам

$$A_m = \frac{\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)F_m(y)\,dy}{\displaystyle\int_0^1 (1-y^2)\bigl[F_m(y)\bigr]^2\,dy}, \qquad \text{где}\quad m = 1,\ 2,\ \ldots$$

В табл. 2 указаны 10 первых собственных значений λ_m и коэффициентов A_m, вычисленных в работе Z. Rotem, J. E. Neilson (1966).

Асимптотика решения при $ax \to 0$ определяется формулой

$$w = \operatorname{erfc}\Bigl(\frac{y}{2\sqrt{ax}}\Bigr),$$

где $\operatorname{erfc} z = \int_z^{\infty} \exp\bigl(-\xi^2\bigr)\,d\xi$ — дополнительный интеграл вероятностей.

3. Растворение пластины ламинарной пленкой жидкости описывается граничными условиями

$$\begin{aligned} w &= 0 && \text{при}\quad x = 0 && (0 \leqslant y \leqslant 1);\\ \partial_y w &= 0 && \text{при}\quad y = 0 && (x > 0);\\ w &= 1 && \text{при}\quad y = 1 && (x > 0). \end{aligned}$$

Решение исходного уравнения с этими граничными условиями имеет вид

$$w = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} A_m \exp\bigl(-a\lambda_m^2 x\bigr) G_m(y),$$
$$G_m(y) = \exp\bigl(-\tfrac{1}{2}\lambda_m y^2\bigr)\,\Phi\bigl(\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m y^2\bigr), \qquad (2)$$

где функции G_m и коэффициенты A_m и λ_m не зависят от параметра a.

Собственные значения λ_m являются решениями трансцендентного уравнения

$$\Phi\left(\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{4}\lambda_m,\ \tfrac{1}{2};\ \lambda_m\right)=0.$$

Для определения λ_m удобно использовать приближенную зависимость

$$\lambda_m = 4m+1{,}68 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{3}$$

максимальная погрешность которой меньше 0,2%.

Численные значения коэффициентов A_m хорошо аппроксимируются формулами

$$A_0 = 1{,}2; \quad A_m = 2{,}27\,(-1)^m\lambda_m^{-7/6} \qquad \text{при} \quad m=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где собственные значения λ_m приведены в (3). Максимальная погрешность выражений для A_m составляет меньше 0,1%.

Асимптотика решения при $ax\to 0$ определяется формулой

$$w=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}\Gamma\left(\tfrac{1}{3},\ \tfrac{2}{9}\zeta\right), \quad \zeta=\frac{(1-y)^3}{ax},$$

где $\Gamma(\alpha,z)=\int_z^\infty e^{-\xi}\xi^{\alpha-1}d\xi$ — неполная гамма-функция, $\Gamma(\alpha)=\Gamma(\alpha,0)$ — гамма-функция, $\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\approx 2{,}679$.

Литература: А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996).

5.2.5. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие экспоненциальные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(be^{\lambda t}+c\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t)=be^{\lambda t}+c$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$w(x,t)=(Ax+B)\exp\left(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t}+ct\right),$$
$$w(x,t)=A(x^2+2a^2t)\exp\left(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t}+ct\right),$$
$$w(x,t)=A\exp\left(\mu x+a^2\mu^2t+\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t}+ct\right).$$

2. Замена $w(x,t)=u(x,t)\exp\left(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t}+ct\right)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u=a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\left(be^{\lambda t}+cx\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t)=c$, $g(t)=be^{\lambda t}$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{1}{3}a^2c^2t^3\Bigr),$$

$$w(x,t) = A\bigl(x + a^2ct^2\bigr)\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{1}{3}a^2c^2t^3\Bigr),$$

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[x(ct+\mu) + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{1}{3}a^2c^2t^3 + a^2c\mu t^2 + a^2\mu^2 t\Bigr].$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl(cxt + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{1}{3}a^2c^2t^3\Bigr), \quad z = x + a^2ct^2$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda x} - c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.2 при $f(x) = be^{\lambda x} - c$.

Точные решения (A, μ — произвольные постоянные):

$$w(x,t) = A\exp(-\mu t)J_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{a\lambda}e^{\lambda x/2}\Bigr), \quad \nu = \frac{2}{a\lambda}\sqrt{c-\mu},$$

$$w(x,t) = A\exp(-\mu t)Y_\nu\Bigl(\frac{2\sqrt{b}}{a\lambda}e^{\lambda x/2}\Bigr), \quad \nu = \frac{2}{a\lambda}\sqrt{c-\mu},$$

где $J_\nu(\xi)$ и $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\lambda t} + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = c$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}xe^{\lambda t} + \frac{a^2b^2}{2\lambda^3}e^{2\lambda t} + ct\Bigr),$$

$$w(x,t) = A\Bigl(x + \frac{2a^2b}{\lambda^2}e^{\lambda t}\Bigr)\exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}xe^{\lambda t} + \frac{a^2b^2}{2\lambda^3}e^{2\lambda t} + ct\Bigr),$$

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[x\Bigl(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \mu\Bigr) + \frac{a^2b^2}{2\lambda^3}e^{2\lambda t} + \frac{2a^2b\mu}{\lambda^2}e^{\lambda t} + (a^2\mu^2 + c)t\Bigr].$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}xe^{\lambda t} + \frac{a^2b^2}{2\lambda^3}e^{2\lambda t} + ct\Bigr), \quad z = x + \frac{2a^2b}{\lambda^2}e^{\lambda t}$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\lambda t} + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = be^{\lambda t} + c$.

1. Точные решения (A, μ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Big) + a^2\phi(t)\Big],$$

$$w(x,t) = A\Big[x + a^2\Big(\frac{2b}{\lambda^2}e^{\lambda t} + ct^2\Big)\Big]\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Big) + a^2\phi(t)\Big],$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct + \mu\Big) + a^2\mu\Big(\frac{2b}{\lambda^2}e^{\lambda t} + ct^2 + \mu t\Big) + a^2\phi(t)\Big],$$

где $\phi(t) = \frac{1}{2}b^2\lambda^{-3}e^{2\lambda t} + 2bc\lambda^{-3}(\lambda t - 1)e^{\lambda t} + \frac{1}{3}c^2t^3$.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[x\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Big) + a^2\phi(t)\Big], \quad z = x + a^2\Big(\frac{2b}{\lambda^2}e^{\lambda t} + ct^2\Big)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^2(be^{\lambda t} + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.4 при $f(t) = be^{\lambda t} + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda t} + ce^{\mu t})w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = be^{\lambda t} + ce^{\mu t}$.

1. Точные решения (A, B, β — любые):

$$w(x,t) = (Ax + B)\exp\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Big),$$

$$w(x,t) = A(x^2 + 2a^2t)\exp\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Big),$$

$$w(x,t) = A\exp\Big(\beta x + a^2\beta^2 t + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Big).$$

2. Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Big)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda x} + ce^{\mu t} + d)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big(\frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Big)$ приводит к уравнению вида 5.2.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (be^{\lambda x} + d)u.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda x+\mu t} + c)w.$

При $\lambda = 0$ см. уравнение 5.2.5.1, а при $\mu = 0$ — уравнение 5.2.5.3.

При $\lambda \neq 0$ преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)e^{kx}, \quad z = x + \frac{\mu}{\lambda}t, \qquad \text{где} \quad k = \frac{\mu}{2a^2\lambda},$$

приводит к уравнению вида 5.2.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (be^{\lambda z} + c + a^2 k^2)u.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda t} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$w(x,t) = Ax + A\Big(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Big) + B,$$

$$w(x,t) = A\Big(x + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Big)^2 + 2a^2 At,$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[\mu x + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + (c + a^2\mu^2)t\Big].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda x} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.11 при $f(x) = be^{\lambda x} + c$.

1. Точные решения:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= A\exp(-\mu t + k\lambda x)\Phi\Big(k,\, 2k + 1 + \frac{c}{a^2\lambda};\, -\frac{b}{a^2\lambda}e^{\lambda x}\Big),\\ w(x,t) &= A\exp(-\mu t + k\lambda x)\Psi\Big(k,\, 2k + 1 + \frac{c}{a^2\lambda};\, -\frac{b}{a^2\lambda}e^{\lambda x}\Big), \end{aligned} \qquad (1)$$

где A, μ — произвольные постоянные; $k = k(\mu)$ — корень квадратного уравнения $(a\lambda)^2 k^2 + c\lambda k + \mu = 0$; $\Phi(\alpha, \beta; z)$ и $\Psi(\alpha, \beta; z)$ — вырожденные гипергеометрические функции.

Замечание. В решениях (1) параметр k можно считать произвольным, а параметр $\mu = -(a\lambda)^2 k^2 - c\lambda k$.

2. Другие частные решения (A, B — любые):

$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big(-\frac{b}{a^2\lambda}e^{\lambda x} - \frac{c}{a^2}x\Big),$$

$$w(x,t) = Aa^2 t + A\int F(x)\Big(\int \frac{dx}{F(x)}\Big)dx,$$

$$w(x,t) = Aa^2 tG(x) + A\int F(x)\Big(\int \frac{G(x)\,dx}{F(x)}\Big)dx, \quad G(x) = \int F(x)\,dx.$$

3. Замена $z = e^{\lambda x}$ приводит к уравнению вида 5.2.4.42:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\lambda^2 z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda z(bz + c + a^2\lambda)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\lambda t} + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = be^{\lambda t} + c$.

1. Точные решения (A, B, μ — произвольны):

$$w(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Bigr),$$

$$w(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2A\int F^2(t)\,dt,$$

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\mu xF(t) + a^2\mu^2\int F^2(t)\,dt\Bigr] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + ct\Bigr),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

13. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda t} + ce^{\mu t})\frac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B, β — любые):

$$w(x,t) = Ax + A\Bigl(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr) + B,$$

$$w(x,t) = A\Bigl(x + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr)^2 + 2a^2At,$$

$$w(x,t) = A\exp\Bigl(\beta x + \frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t} + a^2\beta^2 t\Bigr).$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \dfrac{c}{\mu}e^{\mu t}$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

14. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda t+\mu x} + c)\frac{\partial w}{\partial x}.$

При $\lambda = 0$ см. уравнение 5.2.5.11, а при $\mu = 0$ — уравнение 5.2.5.10. При $\mu \neq 0$ замена $z = x + (\lambda/\mu)t$ приводит к уравнению вида 5.2.5.11:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Bigl(be^z + c - \frac{\lambda}{\mu}\Bigr)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

15. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (be^{\lambda t} + cx)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.36 при $k(t) = a^2$, $f(t) = c$, $g(t) = be^{\lambda t}$, $h(t) = s(t) = 0$.

16. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\lambda t} + c)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.36 при $k(t) = a^2$, $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = c$, $h(t) = s(t) = 0$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bxe^{\lambda t} + ce^{\mu t})\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.36 при $k(t) = a^2$, $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = s(t) = 0$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(be^{\lambda t} + ce^{\mu t})\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = be^{\lambda t} + ce^{\mu t}$.

1. Точные решения (A, B, β — произвольны):

$$w(x,t) = AxF(t) + B, \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr),$$
$$w(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2A\int F^2(t)\,dt,$$
$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\beta xF(t) + a^2\beta^2\int F^2(t)\,dt\Bigr] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = \exp\Bigl(\frac{b}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{c}{\mu}e^{\mu t}\Bigr),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\lambda t} + s)w.$

Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[-\frac{b}{2a^2}x + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t} + \Bigl(s - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)t\Bigr]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\lambda x} + s)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl(-\dfrac{b}{2a^2}x\Bigr)$ приводит к уравнению вида 5.2.5.3:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Bigl(ce^{\lambda x} + s - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)u.$$

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\lambda t} + se^{\mu t})w.$

Замена

$$w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl(-\frac{b}{2a^2}x + \frac{c}{\lambda}e^{\lambda t} + \frac{s}{\mu}e^{\mu t} - \frac{b^2}{4a^2}t\Bigr)$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{xx}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ce^{\lambda x} + se^{\mu t})w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\left(\dfrac{s}{\mu}e^{\mu t}\right)$ приводит к уравнению вида 5.2.5.20:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + ce^{\lambda x}u.$$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{2bt}w.$

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \frac{A^2}{2b}e^{2bt} + B, \quad z = Axe^{bt},$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами вида 5.2.3.1:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + cA^{-2}w.$$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a_2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(a_1 e^{\lambda x} + b_1\right)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left(a_0 e^{2\lambda x} + b_0 e^{\lambda x} + c_0\right)w.$

Замена $z = e^{\lambda x}$ приводит к уравнению вида 5.2.4.42:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a_2\lambda^2 z^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda z\left(a_1 z + b_1 + a_2^2\lambda\right)\frac{\partial w}{\partial z} + \left(a_0 z^2 + b_0 z + c_0\right)w.$$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(bxe^{\lambda t} + \dfrac{c}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(be^{\lambda t} + cx\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = c$, $g(t) = be^{\lambda t}$.

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(bxe^{\lambda t} + c\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = c$.

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(bxe^{\lambda t} + ce^{\mu t}\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$.

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(be^{\lambda t} + c\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = be^{\lambda t} + c$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(be^{\lambda t} + ce^{\mu t}\right)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = be^{\lambda t} + ce^{\mu t}$.

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x\left(be^{\lambda t} + c\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = be^{\lambda t} + c$.

32. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x\left(be^{\lambda t} + ce^{\mu t}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = be^{\lambda t} + ce^{\mu t}$.

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 e^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.26 при $f(x) = a^2 e^{\lambda x}$, $\Phi \equiv 0$.

Точные решения (A, B, μ — любые):

$$
\begin{aligned}
w(x) &= Ax + B,\\
w(x,t) &= A\left(a^2\lambda^2 t + e^{-\lambda x}\right),\\
w(x,t) &= A\left(a^2\lambda^3 tx + \lambda x e^{-\lambda x} + 2e^{-\lambda x}\right),\\
w(x,t) &= A\left(2a^4\lambda^4 t^2 + 4a^2\lambda^2 t e^{-\lambda x} + e^{-2\lambda x}\right),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t) J_0\left(\frac{2\sqrt{\mu}}{a\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda x\right)\right),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t) Y_0\left(\frac{2\sqrt{\mu}}{a\mu}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda x\right)\right),
\end{aligned}
$$

где $J_0(\xi)$, $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 e^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw$.

1. Точные решения (A, B, μ — любые):

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= e^{bt}(Ax + B),\\
w(x,t) &= Ae^{bt}\left(a^2\lambda^2 t + e^{-\lambda x}\right),\\
w(x,t) &= Ae^{bt}\left(a^2\lambda^3 tx + \lambda x e^{-\lambda x} + 2e^{-\lambda x}\right),\\
w(x,t) &= Ae^{bt}\left(2a^4\lambda^4 t^2 + 4a^2\lambda^2 t e^{-\lambda x} + e^{-2\lambda x}\right),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t) J_0\left(\frac{2\sqrt{\mu + b}}{a\lambda}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda x\right)\right),\\
w(x,t) &= A\exp(-\mu t) Y_0\left(\frac{2\sqrt{\mu + b}}{a\mu}\exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda x\right)\right),
\end{aligned}
$$

где $J_0(\xi)$, $Y_0(\xi)$ — функции Бесселя.

2. Замена $w(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению вида 5.2.5.33: $\partial_t u = a^2 e^{\lambda x}\partial_{xx} u$.

35. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 e^{\lambda x} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(be^{\beta t} + c\right)w$.

Замена $w(x,t) = \exp\left(\dfrac{b}{\beta}e^{\beta t} + ct\right)u(x,t)$ приводит к уравнению вида 5.2.5.33: $\partial_t u = a^2 e^{\lambda x}\partial_{xx} u$.

36. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\left(e^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \lambda e^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

1. Исходное уравнение можно записать в более привычном для приложений виде:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda x}\frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

2. Переходя к новой переменной $z = e^{-\lambda x}$, приходим к уравнению вида 5.2.4.30:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2\lambda^2 z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Точное решение исходного уравнения (при постоянных значениях функции w на границе и в начальный момент времени) приведено в книге А. В. Лыкова (1967).

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 e^{2\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda x}\left(a\lambda e^{\lambda x} + b\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.25 при $f(t) = b$, $g(t) = 0$.

Замена $\xi = \dfrac{1}{a\lambda}(1 - e^{-\lambda x})$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2\partial_{\xi\xi}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 e^{2\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda x}\left(a\lambda e^{\lambda x} + be^{\mu t}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\beta t}w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.25 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\beta t}$.

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\lambda t}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu t}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\beta t}w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.35 при $f(t) = ae^{\lambda t}$, $g(t) = be^{\mu t}$, $h(t) = ce^{\beta t}$.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ae^{\lambda t}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxe^{\mu t}\dfrac{\partial w}{\partial x} + cxe^{\beta t}w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.36 при $k(t) = ae^{\lambda t}$, $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = 0$, $h(t) = ce^{\beta t}$, $s(t) = 0$.

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 e^{\lambda x+\mu t}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\beta t}w.$

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\left(\frac{b}{\beta}e^{\beta t}\right)u(x,\tau), \quad \tau = \frac{a^2}{\mu}e^{\mu t}$$

приводит к уравнению вида 5.2.5.33: $\partial_\tau u = e^{\lambda x}\partial_{xx}u$.

5.2.6. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие гиперболические функции

► Уравнения, содержащие гиперболические косинусы

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(b \operatorname{ch}^k \omega t + c\right) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ch}^k \omega t + cx) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{ch}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ch}^k \omega t + cx^2) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ch}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{ch}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial w}{\partial x} + (c \operatorname{ch}^k \omega t + s) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c \operatorname{ch}^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx \operatorname{ch}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c \operatorname{ch}^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \operatorname{ch}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ch}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b \operatorname{ch}^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{ch}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{ch}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b\operatorname{ch}^k \omega t + c$.

► Уравнения, содержащие гиперболические синусы

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl(b\operatorname{sh}^k \omega t + c\bigr)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + cx^2)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{sh}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\operatorname{sh}^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c\operatorname{sh}^k \omega t + s$.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\operatorname{sh}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c\operatorname{sh}^k \omega t$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\operatorname{sh}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t$, $g(t) = c$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{sh}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{sh}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b\operatorname{sh}^k \omega t + c$.

► Уравнения, содержащие гиперболические тангенсы

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl(b\operatorname{th}^k \omega t + c\bigr)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{th}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\operatorname{th}^k \omega t$.

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{th}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{th}^k \omega t + cx^2)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\operatorname{th}^k \omega t$.

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{th}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{th}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b\operatorname{th}^k \omega t + c$.

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\operatorname{th}^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c\operatorname{th}^k \omega t + s$.

32. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Bigl(cx\operatorname{th}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c\operatorname{th}^k \omega t$.

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \operatorname{th}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b \operatorname{th}^k \omega t$, $g(t) = c$.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{th}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b \operatorname{th}^k \omega t + c$.

35. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{th}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b \operatorname{th}^k \omega t + c$.

36. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{th}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b \operatorname{th}^k \omega t + c$.

► Уравнения, содержащие гиперболические котангенсы

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{cth}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{cth}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t$.

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{cth}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{cth}^k \omega t + cx^2)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t$.

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{cth}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

42. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{cth}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b \operatorname{cth}^k \omega t + c$.

43. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c \operatorname{cth}^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c \operatorname{cth}^k \omega t + s$.

44. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\operatorname{cth}^k\omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c\operatorname{cth}^k\omega t$.

45. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\operatorname{cth}^k\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b\operatorname{cth}^k\omega t$, $g(t) = c$.

46. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{cth}^k\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b\operatorname{cth}^k\omega t + c$.

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\operatorname{cth}^k\omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b\operatorname{cth}^k\omega t + c$.

48. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\operatorname{cth}^k\omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b\operatorname{cth}^k\omega t + c$.

5.2.7. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие логарифмические функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b\ln t + c$.

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp(bt\ln t - bt + ct)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{xx}^2 u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c\ln t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = b$, $g(t) = c\ln t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\ln^k t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b\ln^k t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (-bx^2 + c\ln^k t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.7 при $f(t) = c\ln^k t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Замена $z = x + bt\ln t - bt + ct$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2\partial_{zz}^2 w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \ln t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b \ln t + c$.

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = B\exp(bt\ln t - bt + ct),$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx + c \ln t)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b$, $g(t) = c \ln t$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \ln t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b \ln t$, $g(t) = c$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx \dfrac{\partial w}{\partial x} + (c \ln t + d)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.39 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b$, $h(t) = 0$, $s(t) = c \ln t + d$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \ln t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b \ln t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \ln x\, w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.20 при $f(t) = b$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^k \ln x\, w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.20 при $f(t) = bt^k$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \ln^2 x\, w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.21 при $f(t) = b$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^k \ln^2 x\, w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.21 при $f(t) = bt^k$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \ln^2 x + c \ln x \ln t + d \ln^2 t)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.41 при $k(t) = a^2$, $f(t) = 0$, $g(t) = 0$, $h(t) = b$, $s(t) = c \ln t$, $p(t) = d \ln^2 t$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b\ln t + c$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\ln t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.45 при $f(t) = a^2$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\ln t + c$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\ln t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b\ln t + c$.

5.2.8. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие тригонометрические функции

► Уравнения, содержащие косинусы

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl(b\cos^k \omega t + c\bigr)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\cos^k \omega t$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\cos^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + cx^2)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\cos^k \omega t$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\cos^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c\cos^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c\cos^k \omega t + s$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx\cos^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c\cos^k \omega t$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx\cos^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b\cos^k \omega t$, $g(t) = c$.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\cos^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b\cos^k \omega t + c$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\cos^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b\cos^k \omega t + c$.

► Уравнения, содержащие синусы

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + cx)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b\sin^k \omega t$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\sin^k \omega t + c)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + cx^2)w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b\sin^k \omega$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b\sin^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b\sin^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b\sin^k \omega t + c$.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (c \sin^k \omega t + s)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c \sin^k \omega t + s$.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx \sin^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c \sin^k \omega t$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b \sin^k \omega t$, $g(t) = c$.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b \sin^k \omega t + c$.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \sin^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b \sin^k \omega t + c$.

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \sin^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b \sin^k \omega t + c$.

► Уравнения, содержащие тангенсы

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{tg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{tg}^k \omega t + cx)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t$.

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{tg}^k \omega t + c)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{tg}^k \omega t + cx^2)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t$.

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{tg}^k \omega t + c)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{tg}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial w}{\partial x} + (c \operatorname{tg}^k \omega t + s) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c \operatorname{tg}^k \omega t + s$.

32. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx \operatorname{tg}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c \operatorname{tg}^k \omega t$.

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \operatorname{tg}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t$, $g(t) = c$.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{tg}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

35. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{tg}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

36. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{tg}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b \operatorname{tg}^k \omega t + c$.

► **Уравнения, содержащие котангенсы**

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.1 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ctg}^k \omega t + cx) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.6 при $f(t) = c$, $g(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t$.

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.3 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ctg}^k \omega t + cx^2) w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.9 при $f(t) = c$, $g(t) = 0$, $h(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t$.

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.10 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

42. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.12 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

43. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial w}{\partial x} + (c \operatorname{ctg}^k \omega t + s) w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.17 при $f(t) = 0$, $g(t) = b$, $h(t) = c \operatorname{ctg}^k \omega t + s$.

44. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left(cx \operatorname{ctg}^k \omega t + \dfrac{b}{x}\right) \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.15 при $f(t) = c \operatorname{ctg}^k \omega t$.

45. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bx \operatorname{ctg}^k \omega t + c) w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.18 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t$, $g(t) = c$.

46. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) w$.

Частный случай уравнения 5.2.9.19 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) w$.

Частный случай уравнения 5.2.4.42 при $f(t) = a^2$, $g(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

48. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x(b \operatorname{ctg}^k \omega t + c) \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 5.2.9.22 при $f(t) = b \operatorname{ctg}^k \omega t + c$.

5.2.9. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) w$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = (Ax + B) \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A(x^2 + 2a^2 t) \exp\left[\int f(t)\,dt\right],$$

$$w(x,t) = A \exp\left[\lambda x + \lambda^2 a^2 t + \int f(t)\,dt\right].$$

2. Замена $w(x,t) = u(x,t) \exp\left[\int f(t)\,dt\right]$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2 \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.32 при $s(x) \equiv 1$, $p(x) = a^2 = \text{const}$, $q(x) = -f(x)$, $\Phi \equiv 0$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)w.$

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + a^2\int F^2(t)\,dt\Big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

$$w(x,t) = A\Big[x + 2a^2\int F(t)\,dt\Big]\exp\Big[xF(t) + a^2\int F^2(t)\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + \lambda x + a^2\lambda^2 t + a^2\int F^2(t)\,dt + 2a^2\lambda\int F(t)\,dt\Big].$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[xF(t) + a^2\int F^2(t)\,dt\Big], \quad z = x + 2a^2\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \int f(t)\,dt$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^2 f(t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.37.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [f(x) + g(t)]w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$ приводит к уравнению вида 5.2.9.2:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x)u.$$

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + [xf(t) + g(t)]w.$

1. Точные решения (A, λ — любые):

$$w(x,t) = A\exp\Big[xF(t) + a^2\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big], \quad F(t) = \int f(t)\,dt,$$

$$w(x,t) = A\Big[x + 2a^2\int F(t)\,dt\Big]\exp\Big[xF(t) + a^2\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = \exp\Big[xF(t) + \lambda x + a^2\lambda^2 t + 2a^2\lambda\int F(t)\,dt + a^2\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big].$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\exp\Big[xF(t) + a^2\int F^2(t)\,dt + \int g(t)\,dt\Big], \quad z = x + 2a^2\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \int f(t)\,dt$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[-bx^2 + f(t)\bigr]w.$

1. Точные решения (A — любое):

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + a\sqrt{b}\,t + \int f(t)\,dt\Bigr],$$

$$w(x,t) = Ax\exp\Bigl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + 3a\sqrt{b}\,t + \int f(t)\,dt\Bigr].$$

2. Преобразование (C — произвольная постоянная)

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + a\sqrt{b}\,t + \int f(t)\,dt\Bigr],$$

$$z = x\exp\bigl(2a\sqrt{b}\,t\bigr), \quad \tau = \frac{a}{4\sqrt{b}}\exp\bigl(4a\sqrt{b}\,t\bigr) + C$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x\bigl[-bx + f(t)\bigr]w.$

1. Точное решение (A, B — произвольные постоянные)

$$w(x,t) = \exp\Bigl[\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2 + xF(t) + a\sqrt{b}\,t + a^2\int_A^t F^2(t)\,dt\Bigr],$$

$$F(t) = \exp\bigl(2a\sqrt{b}\,t\bigr)\int_B^t f(\tau)\exp\bigl(-2a\sqrt{b}\,\tau\bigr)\,d\tau.$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = \exp\Bigl(\frac{\sqrt{b}}{2a}x^2\Bigr)u(z,\tau), \ z = x\exp\bigl(2a\sqrt{b}\,t\bigr), \ \tau = \frac{1}{4a\sqrt{b}}\exp\bigl(4a\sqrt{b}\,t\bigr)$$

приводит к уравнению вида 5.2.9.6:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \Bigl[x\Phi(\tau) + \frac{1}{4\tau}\Bigr]u,$$

где $\Phi(\tau) = \dfrac{1}{k\tau}f\Bigl(\dfrac{\ln\tau + \ln k}{k}\Bigr)$, $k = 4a\sqrt{b}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[x^2 f(t) + xg(t) + h(t)\bigr]w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.37.

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = Ax + A\int f(t)\,dt + B,$$

$$w(x,t) = A\Bigl[x + \int f(t)\,dt\Bigr]^2 + 2a^2At,$$

$$w(x,t) = A\exp\Bigl[\lambda x + a^2\lambda^2 t + \lambda\int f(t)\,dt\Bigr].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int f(t)\,dt$, получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_t w = a^2\partial_{zz}w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Частный случай уравнения 5.2.9.29. Имеет точные решения вида

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x),$$

где функция $u = u(x)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$a^2 u''_{xx} + f(x)u'_x + \lambda u = 0.$$

Другие точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big[-\frac{1}{a^2}\int f(x)\,dx\Big],$$

$$w(x,t) = Aa^2 t + A\int\Big(\int \frac{dx}{F(x)}\Big)F(x)\,dx,$$

$$w(x,t) = Aa^2 t\Phi(x) + A\int\Big(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{F(x)}\Big)F(x)\,dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Более сложные решения указаны далее в п. 2.

2. Исходное уравнение для любой функции $f(x)$ допускает точные аналитические решения вида

$$w_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \varphi_{n,k}(x). \tag{1}$$

Подставляя выражение (1) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,k} = \varphi_{n,k}(x)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$a^2\varphi''_{n,n} + f(x)\varphi'_{n,n} = 0,$$

$$a^2\varphi''_{n,k} + f(x)\varphi'_{n,k} = (k+1)\varphi_{n,k+1}; \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера k, находим решение (A, B — любые):

$$\begin{aligned} &\varphi_{n,n}(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Big[-\frac{1}{a^2}\int f(x)\,dx\Big],\\ &\varphi_{n,k}(x) = n(n-1)\ldots(k+1)\mathbf{L}_f^{n-k}\big[\varphi_{n,n}(x)\big]; \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\mathbf{L}_f[y(x)] \equiv \frac{1}{a^2}\int F(x)\Big(\int \frac{y(x)\,dx}{F(x)}\Big)\,dx. \tag{3}$$

Степени оператора определяются так: $\mathbf{L}_f^k[y(x)] = \mathbf{L}_f\big[\mathbf{L}_f^{k-1}[y(x)]\big]$.

Формулы (1)–(3) дают точное аналитическое решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n w_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является точным решением однородного уравнения.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x f(t) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Обобщенное уравнение Ильковича. Оно описывает массоперенос к поверхности растущей капли, которая вытекает из тонкого капилляра в раствор жидкости (массовый расход движущейся по капилляру жидкости произвольным образом зависит от времени).

1. Точные решения (A, B, λ — произвольны):

$$w(x,t) = Ax \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big] + B,$$

$$w(x,t) = Ax^2F^2(t) + 2Aa^2 \int F^2(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x F(t) + a^2\lambda^2 \int F^2(t)\,dt\Big] + B.$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = B\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = a^2 \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

3. Решение исходного уравнения в частном случае

$$\begin{aligned} &w = w_0 &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\ &w = w_s &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\ &w \to w_0 &&\text{при}\quad x \to \infty &&\text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

(w_0, w_s — некоторые постоянные) имеет вид

$$\frac{w - w_s}{w_0 - w_s} = \operatorname{erf}\Big(\frac{z}{2a\sqrt{\tau}}\Big), \quad \operatorname{erf}\xi = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi \exp(-\xi^2)\,d\xi,$$

$$\tau = \int_0^t F^2(t)\,dt, \quad z = xF(t), \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

где $\operatorname{erf}\xi$ — функция вероятностей.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x - bt) \dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$w(x,t) = A + B\int F(z)\,dz, \quad F(z) = \exp\Big[-\frac{1}{a^2}\int f(z)\,dz - \frac{b}{a^2}z\Big],$$

$$w(x,t) = Aa^2t + A\int\Big(\int \frac{dz}{F(z)}\Big)F(z)\,dz,$$

$$w(x,t) = Aa^2t\Phi(z) + A\int\Big(\int \frac{\Phi(z)\,dz}{F(z)}\Big)F(z)\,dx, \quad \Phi(z) = \int F(z)\,dz,$$

где $z = x - bt$.

2. Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x - bt$, получим уравнение с разделяющимися переменными вида 5.2.9.11:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \big[f(z) + b\big]\frac{\partial w}{\partial z}.$$

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{1}{\sqrt{t}}f\Big(\dfrac{x}{\sqrt{t}}\Big)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Переходя от t, x к новым переменным $\tau = \ln t$, $\xi = \dfrac{x}{\sqrt{t}}$, получим уравнение с разделяющимися переменными вида 5.2.9.11:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \big[f(\xi) + \tfrac{1}{2}\xi\big]\frac{\partial w}{\partial \xi}.$$

2. Решение исходного уравнения в частном случае

$$\begin{aligned} &w = w_0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ &w = w_s && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\ &w \to w_0 && \text{при} \quad x \to \infty && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

(w_0, w_s — некоторые постоянные) имеет вид

$$\frac{w - w_0}{w_s - w_0} = \frac{\int_\xi^\infty \exp[-\Phi(\xi)]\,d\xi}{\int_0^\infty \exp[-\Phi(\xi)]\,d\xi}, \qquad \Phi(\xi) = \frac{1}{4a^2}\xi^2 + \frac{1}{a^2}\int_0^\xi f(\xi)\,d\xi,$$

где $\xi = x/\sqrt{t}$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big[xf(t) + \dfrac{b}{x}\Big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$w(x,t) = Ax^k \exp\Big[k\int f(t)\,dt\Big] + B, \quad k = 1 - \frac{b}{a^2},$$

$$w(x,t) = Ax^2F(t) + 2A(a^2 + b)\int F(t)\,dt + B, \quad F(t) = \exp\Big[2\int f(t)\,dt\Big].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad z = xF(t), \qquad \text{где} \quad F(t) = B\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим более простое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{b}{z}\frac{\partial w}{\partial z},$$

которое рассматривается в разд. 5.2.4 (см. уравнения 5.2.4.22, 5.2.4.24, 5.2.4.26).

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big[xf(t) + \dfrac{b}{x}\Big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big]$ приводит к уравнению вида 5.2.9.15:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Big[xf(t) + \frac{b}{x}\Big]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

В частном случае $b = 0$ см. уравнение 5.2.9.12.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big] \dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование (A, B, C — произвольные постоянные)

$$\tau = \int F^2(t)\,dt + A, \quad F(t) = B\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$
$$z = xF(t) + \int g(t)F(t)\,dt + C,$$
$$w(t,x) = u(\tau,z)\exp\Big[\int h(t)\,dt\Big]$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = a^2\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \big[xf(t) + g(t)\big]w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.39.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.40.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \ln x f(t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.41.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \ln^2 x f(t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.41.

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$w(x,t) = Ax\exp\Big[\int f(t)\,dt\Big] + B,$$
$$w(x,t) = Ax^{2-k}F(t) + Aa^2(k-1)(k-2)\int F(t)\,dt,$$

где $F(t) = \exp\Big[(2-k)\int f(t)\,dt\Big]$.

2. Переходя от x, t к новым переменным z, τ по формулам

$$z = xF(t), \quad \tau = a^2\int F^{2-k}(t)\,dt, \quad F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big],$$

получим уравнение вида 5.2.4.51:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = z^k \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + bw.$

Замена $w(x,t) = e^{bt}u(x,t)$ приводит к уравнению вида 5.2.9.22:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 x^k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xf(t)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2x^{2k}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ax^k\big[akx^{k-1} + f(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Замена $\xi = \dfrac{1}{a}\begin{cases} \dfrac{x^{1-k}}{1-k} & \text{при } k \neq 1, \\ \ln|x| & \text{при } k = 1 \end{cases}$ приводит к частному случаю уравнения 5.2.9.35:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + f(t)\frac{\partial w}{\partial \xi} + g(t)w.$$

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2e^{2\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda x}\big[a\lambda e^{\lambda x} + f(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Замена $\xi = \dfrac{1}{a\lambda}\big(1 - e^{-\lambda x}\big)$ приводит к частному случаю уравнения 5.2.9.35:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + f(t)\frac{\partial w}{\partial \xi} + g(t)w.$$

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t).$

1. Это уравнение вида 5.2.9.32 при $s(x) = 1/f(x)$, $p(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$. Частные решения однородного уравнения ($\Phi \equiv 0$) имеют вид

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x), \tag{1}$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$f(x)u''_{xx} + \lambda u = 0. \tag{2}$$

Процедура построения решений конкретных краевых задач для исходного уравнения с помощью частных решений вида (1) подробно описана в 5.2.9.32.

Основная проблема здесь состоит в исследовании вспомогательного уравнения (2), которое далеко не всегда допускает аналитическое решение (поэтому часто приходится прибегать к численным методам решения). Значительное число конкретных разрешимых уравнений вида (2) приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995, 1996).

2. Точные решения однородного уравнения (A, B, x_0 — любые):

$$w(x) = Ax + B,$$

$$w(x,t) = At + AF(x), \quad F(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi,$$

$$w(x,t) = Atx + AG(x), \quad G(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,\xi\,d\xi,$$

$$w(x,t) = At^2 + 2AtF(x) + 2A\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}F(\xi)\,d\xi,$$

$$w(x,t) = At^2x + 2AtG(x) + 2A\int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}G(\xi)\,d\xi.$$

Более сложные решения указаны далее в п. 3.

3. Однородное уравнение ($\Phi \equiv 0$) для любой функции $f(x)$ допускает точные аналитические решения вида

$$w_n(x,t) = t^n + \sum_{k=0}^{n-1} t^k \varphi_{n,k}(x). \qquad (3)$$

Подставляя выражение (3) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,k} = \varphi_{n,k}(x)$ получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$f(x)\varphi''_{n,k} = (k+1)\varphi_{n,k+1},$$
$$k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1; \quad \varphi_{n,n} \equiv 1.$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера k, находим

$$\varphi_{n,k}(x) = n(n-1)\ldots(k+1)\mathbf{L}_f^{n-k}[1]. \qquad (4)$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\mathbf{L}_f[y(x)] \equiv \int\left(\int \frac{y(x)}{f(x)}\,dx\right)dx = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)} y(\xi)\,d\xi + Ax + B, \qquad (5)$$

где x_0, A, B — любые. Степени оператора определяются, как обычно: $\mathbf{L}_f^k[y(x)] = \mathbf{L}_f\left[\mathbf{L}_f^{k-1}[y(x)]\right]$, а константы A, B при повторных действиях оператора $\mathbf{L}_f$ в этой формуле, вообще говоря, могут быть различными.

Формулы (3), (4) определяют точное аналитическое решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений (3):

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n w_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является точным решением однородного уравнения.

Укажем также другие точные аналитические решения однородного уравнения (n — натуральное число):

$$w_n(x,t) = t^n x + \sum_{k=0}^{n-1} t^k \phi_{n,k}(x), \quad \phi_{n,k}(x) = n(n-1)\ldots(k+1)\mathbf{L}_f^{n-k}[x],$$

где оператор $\mathbf{L}_f$ описывается формулой (5). Произвольная линейная комбинация этих решений с линейной комбинацией решений вида (3) также будет решением исходного уравнения.

4. Неоднородное уравнение при

$$\Phi(x,t) = g_n(x)t^n \qquad (n = 0,\ 1,\ 2,\ldots) \qquad (6)$$

для произвольных функций $f(x)$, $g_n(x)$ имеет частное аналитическое решение вида

$$\bar{w}_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \psi_{n,k}(x), \tag{7}$$

где функции $\psi_{n,k} = \psi_{n,k}(x)$ вычисляются по формулам

$$\psi_{n,k}(x) = \begin{cases} -\mathbf{L}_f\,[g_n(x)] & \text{при } k = n, \\ -n(n-1)\ldots(k+1)\mathbf{L}_f^{n-k+1}\,[g_n(x)] & \text{при } k = 0,\,1,\,\ldots,\,n-1 \end{cases} \tag{8}$$

с помощью интегрального оператора $\mathbf{L}_f$ (5).

Если неоднородная часть уравнения представима в виде суммы

$$\Phi(x,t) = \sum_{n=1}^{N} g_n(x)t^n,$$

то одно из решений является суммой частных решений вида (7):

$$\bar{w}(x,t) = \sum_{n=1}^{N} \bar{w}_n(x,t).$$

Например, при

$$\Phi(x,t) = g(x)t + h(x),$$

где $g(x)$, $h(x)$ — произвольные функции, исходное уравнение имеет частное решение вида

$$\bar{w}(x,t) = -t\psi(x) - \int_{x_0}^{x} \frac{\psi(\xi) + h(\xi)}{f(\xi)}(x-\xi)\,d\xi,$$

$$\psi(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{g(\xi)}{f(\xi)}(x-\xi)\,d\xi, \quad x_0 \text{ — любое.}$$

Суммируя различные решения однородного уравнения (см. п. 3) с любым частным решением неоднородного уравнения, можно получить широкий класс частных решений неоднородного уравнения.

5. Укажем два дискретных преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения (при которых меняется функция f). Пусть $\Phi \equiv 0$.

5.1. Преобразование

$$z = \frac{1}{x}, \quad u = \frac{w}{x} \qquad \text{(точечное преобразование)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 z^4 f\left(\frac{1}{z}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

5.2. Сначала сделаем замену

$$\xi = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В результате имеем уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[F(\xi)\frac{\partial w}{\partial \xi}\Big],$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически:

$$F = \frac{1}{f(x)}, \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

Вводя новую неизвестную функцию $v = v(\xi, t)$ по формуле

$$w = \frac{\partial v}{\partial \xi} \qquad \text{(преобразование Беклунда)}$$

и интегрируя полученное уравнение по переменной ξ, приходим к искомому уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial t} = F(\xi)\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}.$$

Для степенных и экспоненциальных функций указанное преобразование действует по схеме:

$$f(x) = ax^k \quad \Longrightarrow \quad F(\xi) = A\xi^{\frac{k}{k-1}},$$
$$f(x) = ae^{-\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad F(\xi) = \lambda\xi,$$

где $A = \dfrac{1}{a}\big[a(1-k)\big]^{\frac{k}{k-1}}$.

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = Ax + A\int g(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\Big[x + \int g(t)\,dt\Big]^2 + 2A\int f(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda x + \lambda^2\int f(t)\,dt + \lambda\int g(t)\,dt\Big].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int f(t)\,dt + A, \qquad z = x + \int g(t)\,dt + B,$$

получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = AxG(t) + B, \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$
$$w(x,t) = Ax^2G^2(t) + 2A\int f(t)G^2(t)\,dt + B,$$
$$w(x,t) = A\exp\Big[\lambda xG(t) + \lambda^2\int f(t)G^2(t)\,dt\Big].$$

2. Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int f(t)G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = B\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим уравнение с постоянными коэффициентами $\partial_\tau w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Это уравнение можно представить в виде уравнения 5.2.9.32:

$$s(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr],$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad p(x) = \exp\Bigl[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad q(x) \equiv 0.$$

2. Точные решения имеют вид

$$w(x,t) = e^{-\lambda t}u(x), \tag{1}$$

где функция $u(x)$ ищется путем решения следующего линейного обыкновенного дифференциального уравнения с параметром λ:

$$f(x)u''_{xx} + g(x)u'_x + \lambda u = 0. \tag{2}$$

Процедура построения решений конкретных краевых задач для исходного уравнения с помощью частных решений вида (1) подробно описана в 5.2.9.32. Значительное число конкретных разрешимых уравнений вида (2) приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995).

3. Другие частные решения (A, B — любые):

$$w(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],$$

$$w(x,t) = At + A\int F(x)\Bigl(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx,$$

$$w(x,t) = At\Phi(x) + A\int F(x)\Bigl(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)dx, \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Более сложные решения указаны далее в п. 4.

4. Исходное уравнение для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ допускает точные аналитические решения вида

$$w_n(x,t) = \sum_{k=0}^{n} t^k \varphi_{n,k}(x). \tag{3}$$

Подставляя выражение (3) в исходное уравнение и приравнивая члены при одинаковых степенях t, для определения функций $\varphi_{n,k} = \varphi_{n,k}(x)$

получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений (штрихи соответствуют производным по x):

$$f(x)\varphi''_{n,n} + g(x)\varphi'_{n,n} = 0,$$
$$f(x)\varphi''_{n,k} + g(x)\varphi'_{n,k} = (k+1)\varphi_{n,k+1}; \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1.$$

Интегрируя эти уравнения последовательно в порядке убывания номера k, находим решение (A, B — любые):

$$\begin{aligned} &\varphi_{n,n}(x) = A + B\int F(x)\,dx, \quad F(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr],\\ &\varphi_{n,k}(x) = n(n-1)\ldots(k+1)\mathbf{L}_f^{n-k}\bigl[\varphi_{n,n}(x)\bigr]; \quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, n-1. \end{aligned} \tag{4}$$

Здесь интегральный оператор $\mathbf{L}_f$ вводится следующим образом:

$$\mathbf{L}_f[y(x)] \equiv \int F(x)\Bigl(\int \frac{y(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Bigr)\,dx. \tag{5}$$

Степени оператора определяются так: $\mathbf{L}_f^k[y(x)] = \mathbf{L}_f\bigl[\mathbf{L}_f^{k-1}[y(x)]\bigr]$.

Формулы (3), (4) дают точное аналитическое решение исходного уравнения для произвольной функции $f(x)$.

Линейная комбинация частных решений (3):

$$w(x,t) = \sum_{n=0}^{N} C_n w_n(x,t) \qquad (C_n \text{ — произвольны})$$

также является точным решением однородного уравнения.

5. Замена

$$\xi = \int \varphi(x)\,d\xi, \quad \varphi(x) = \exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Bigr]$$

приводит к уравнению вида 5.2.9.26:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = F(\xi)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2},$$

где функция $F = F(\xi)$ определяется путем исключения переменной x из выражений

$$F = f(x)\varphi^2(x), \quad \xi = \int \varphi(x)\,dx.$$

30. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f^2(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)\bigl[f'_x(x) + g(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Замена $\xi = \int \frac{dx}{f(x)}$ приводит к частному случаю уравнения 5.2.9.35:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + g(t)\frac{\partial w}{\partial \xi} + h(t)w.$$

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(f'_x + 2g + \varphi)\dfrac{\partial w}{\partial x} + (fg'_x + g^2 + g\varphi + \psi)w,$
где $f = f(x)$, $g = g(x)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$.

Преобразование

$$w(x,t) = u(\xi,t)\exp\Bigl(-\int \frac{g}{f}\,dx\Bigr), \quad \xi = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к частному случаю уравнения 5.2.9.35:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \varphi(t)\frac{\partial u}{\partial \xi} + \psi(t)u.$$

32. $s(x)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[p(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] - q(x)w + \Phi(x,t).$

Считается, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны.

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

1.1. Однородные граничные условия:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w = \int_0^l G(x,\xi,t)s(\xi)f(\xi)\,d\xi + \int_0^t\int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (1)$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda_n t)\frac{y_n(\xi)y_n(x)}{\|y_n\|^2}, \qquad \|y_n\|^2 = \int_0^l s(x)y_n^2(x)\,dx, \qquad (2)$$

λ_n и $y_n(x)$ — собственные значения и собственные функции задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0; \qquad (3)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \qquad (4)$$

При $s(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$ все собственные значения λ_n положительны. Если λ_n расположены в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots$, то при $n \to \infty$ для собственных значений и собственных функций справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{\delta^2} + O(1), \qquad \delta = \int_0^l \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\,dx,$$

$$\frac{y_n(x)}{\|y_n\|} = \left[\frac{4}{\delta^2 s(x)p(x)}\right]^{1/4} \sin\left[\frac{\pi n}{\delta}\int_0^x \sqrt{\frac{s(x)}{p(x)}}\,dx\right] + O\Bigl(\frac{1}{n}\Bigr).$$

1.2. Неоднородные граничные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = g(t) + \frac{x}{l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 1.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

2.1. Однородные граничные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

2.2. Неоднородные граничные условия:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_x w = g(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w = h(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = xg(t) + \frac{x^2}{2l}[h(t) - g(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 2.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

3.1. Однородные граничные условия ($b > 0$, $c > 0$):

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_x w - bw = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w + cw = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x - by = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x + cy = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

3.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} w = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - bw = g(t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + cw = h(t) & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = \frac{h(t) - (1+cl)g(t)}{b+c+bcl} + x\frac{cg(t)+bh(t)}{b+c+bcl} + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 3.1 (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

4. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

4.1а. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} w = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.1б. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} w = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = g(t) & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = h(t) & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = g(t) + xh(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 4.1а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

4.2а. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{lll} w = f(x) & \text{при} \quad t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} \quad x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = 0 & \text{при} \quad x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.2б. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w &= g(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)} \\ w &= h(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = (x - l)g(t) + h(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 4.2а (при этом соответственно изменятся функции f и Φ).

Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964).

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(x)w + \Phi(x,t).$

1. Это уравнение можно представить в виде уравнения 5.2.9.32:

$$s(x)\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w + s(x)\Phi(x,t),$$

где

$$s(x) = \frac{1}{f(x)}\exp\left[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right], \quad p(x) = \exp\left[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right],$$
$$q(x) = -\frac{h(x)}{f(x)}\exp\left[\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right].$$

2. Рассмотрим однородное уравнение при $\Phi(x,t) \equiv 0$. Пусть известно нетривиальное частное решение $w_0 = w_0(x)$ обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x)w_0'' + g(x)w_0' + h(x)w_0 = 0, \tag{1}$$

соответствующего стационарному случаю ($\partial_t w \equiv 0$). Тогда другими частными решениями исходного уравнения будут функции:

$$w(x) = Aw_0 + Bw_0\int \frac{F}{w_0^2}dx, \quad F = \exp\left(-\int \frac{g}{f}dx\right),$$
$$w(x,t) = Atw_0 + Aw_0\int \frac{F}{w_0^2}\left(\int \frac{w_0^2\,dx}{fF}\right)dx,$$
$$w(x,t) = Atw_0\Phi + Aw_0\int \frac{F}{w_0^2}\left(\int \frac{w_0^2\Phi}{fF}dx\right)dx, \quad \Phi = \int \frac{F}{w_0^2}dx.$$

Широкий класс более сложных точных аналитических решений исходного уравнения можно указать, сделав предварительно замену $w(x,t) = w_0(x)u(x,t)$, которая приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left[2f(x)\frac{w_0'(x)}{w_0(x)} + g(x)\right]\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (2)$$

Отсюда с помощью результатов п. 4 из 5.2.9.29 следует, что любое нетривиальное частное решение вспомогательного линейного обыкновенного дифференциального уравнения (1) порождает бесконечное множество точных аналитических решений исходного уравнения в частных производных.

3. Пусть известно частное нестационарное решение $w_0 = w_0(x,t)$ $(\partial_t w_0 \not\equiv 0)$ однородного уравнения при $\Phi \equiv 0$. Тогда функции

$$w_n(x,t) = \frac{\partial^n w_0}{\partial t^n}(x,t),$$

полученные дифференцированием этого решения по переменной t, также будут частными решениями рассматриваемого уравнения.

Кроме того, новое частное решение можно искать в виде

$$\bar{w}(x,t) = \int_{t_0}^{t} w_0(x,\tau)\,d\tau + \phi(x), \qquad (3)$$

где неизвестная функция $\phi(x)$ находится после подстановки выражения (4) в исходное уравнение. Построив решение (3), можно указанным способом строить следующее решение и т.д.

4. Случай $\Phi \equiv 0$, $h(x) = h = \text{const}$.

Точные решения (A, B — любые):

$$w(x,t) = e^{ht}\big[A + B\int F(x)\,dx\big], \quad F(x) = \exp\Big[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Big],$$
$$w(x,t) = Ae^{ht}\Big[t + \int F(x)\Big(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\Big)dx\Big],$$
$$w(x,t) = Ae^{ht}\Big[t\Phi(x) + \int F(x)\Big(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Big)dx\Big], \quad \Phi(x) = \int F(x)\,dx.$$

Замена $w(x,t) = e^{ht}v(x,t)$ приводит к уравнению вида 5.2.9.29:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial v}{\partial x}.$$

34. $\boldsymbol{\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.}$

1. Точные решения (A, B — любые):

$$w(x,t) = \big[A + B\int F(x)\,dx\big]H(t),$$
$$w(x,t) = A\Big[t + \int F(x)\Big(\int \frac{dx}{f(x)F(x)}\Big)dx\Big]H(t),$$
$$w(x,t) = A\Big[t\Phi(x) + \int F(x)\Big(\int \frac{\Phi(x)\,dx}{f(x)F(x)}\Big)dx\Big]H(t).$$

При записи этих формул использованы следующие обозначения:

$$H(t)=\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\quad F(x)=\exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],\quad \Phi(x)=\int F(x)\,dx.$$

2. Замена $w(x,t)=u(x,t)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 5.2.9.29:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

35. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+g(t)\frac{\partial w}{\partial x}+h(t)w.$

Частный случай уравнения 5.2.9.36.

Преобразование

$$w(x,t)=u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\quad z=x+\int g(t)\,dt,\quad \tau=\int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u=\partial_{zz}u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

36. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t}=k(t)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\bigl[xf(t)+g(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x}+\bigl[xh(t)+s(t)\bigr]w.$

Сделаем преобразование

$$w(x,t)=\exp\bigl[x\alpha(t)+\beta(t)\bigr]u(z,\tau),\quad \tau=\varphi(t),\quad z=x\psi(t)+\chi(t),\qquad (1)$$

где неизвестные функции $\alpha(t)$, $\beta(t)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ находятся далее из условия максимального упрощения полученного уравнения. Для новой зависимой переменной $u(z,\tau)$ имеем

$$\varphi'_t\frac{\partial u}{\partial \tau}=k\psi^2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\bigl[x(f\psi-\psi'_t)+2k\psi\alpha+g\psi-\chi'_t\bigr]\frac{\partial u}{\partial z}+$$
$$+\bigl[x(f\alpha+h-\alpha'_t)+k\alpha^2+g\alpha+s-\beta'_t\bigr]u.$$

Пусть неизвестные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi'_t=k\psi^2,\qquad (2)$$
$$\psi'_t=f\psi,\qquad (3)$$
$$\chi'_t=2k\alpha\psi+g\psi,\qquad (4)$$
$$\alpha'_t=f\alpha+h,\qquad (5)$$
$$\beta'_t=k\alpha^2+g\alpha+s.\qquad (6)$$

Тогда исходное уравнение преобразованием (1)–(6) приводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

которое подробно рассматривается в разд. 5.2.1.

Систему (2)–(6) можно решить последовательно, начиная, например, с уравнения (3) в следующем порядке: (3) → (2) → (5) → (6) → (4). В результате получим искомые функции

$$\psi = C_1 \exp\Bigl(\int f\,dt\Bigr), \quad C_1 \neq 0,$$
$$\varphi = \int k\psi^2\,dt + C_2,$$
$$\alpha = \psi \int \frac{h}{\psi}dt + C_3\psi,$$
$$\beta = \int \bigl(k\alpha^2 + g\alpha + s\bigr)\,dt + C_4,$$
$$\chi = \int (2k\alpha + g)\psi\,dt + C_5,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 — произвольные постоянные.

Замечание. Аналогичным образом можно упростить неоднородное уравнение с дополнительным слагаемым $\Phi(x,t)$ в правой части.

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \bigl[xf(t) + g(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl[x^2 h(t) + xs(t) + p(t)\bigr]w.$

Замена $w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2\bigr]u(x,t)$ приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[x(4k\varphi + f) + g\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \\ + \bigl[x^2(h + 2f\varphi + 4k\varphi^2 - \varphi'_t) + x(s + 2g\varphi) + p + 2k\varphi\bigr]u. \qquad (1)$$

Выбираем функцию $\varphi = \varphi(t)$ так, чтобы она была решением (частным) обыкновенного дифференциального уравнения Риккати

$$\varphi'_t = 4k\varphi^2 + 2f\varphi + h. \qquad (2)$$

Тогда преобразованное уравнение (1) становится уравнением вида 5.2.9.36:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[x(4k\varphi + f) + g\bigr]\frac{\partial u}{\partial x} + \bigl[x(s + 2g\varphi) + p + 2k\varphi\bigr]u.$$

Большое число конкретных разрешимых уравнений Риккати (2) приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995).

В частном случае, при выполнении условий

$$k = af, \quad h = bf, \qquad \text{где} \quad a, b = \text{const},\ f = f(t),$$

частными решениями уравнения (2) являются корни квадратного уравнения $4a\varphi^2 + 2\varphi + b = 0$ $(\varphi = \text{const})$.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \bigl[h_1(x) + h_2(t)\bigr]w.$

Замена $w(x,t) = u(x,t)\exp\Bigl[\int h_2(t)\,dt\Bigr]$ приводит к уравнению вида 5.2.9.33:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial u}{\partial x} + h_1(x)u.$$

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = xf(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \big[xh(t) + s(t)\big]w.$

Сделаем преобразование

$$\tau = \varphi(t), \quad z = x\psi(t), \quad w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Big[x\alpha(t) + \int s(t)\,dt\Big], \tag{1}$$

где неизвестные функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\alpha(t)$ находятся далее из условия максимального упрощения полученного уравнения. Для новой зависимой переменной $u(z,\tau)$ имеем

$$\varphi_t'\frac{\partial u}{\partial \tau} = zf\psi\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{z}{\psi}(2f\psi\alpha + g\psi - \psi_t')\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{z}{\psi}(f\alpha^2 + g\alpha + h - \alpha_t')u.$$

Пусть неизвестные функции удовлетворяют системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\varphi_t' = f\psi, \tag{2}$$
$$\psi_t' = 2f\alpha\psi + g\psi, \tag{3}$$
$$\alpha_t' = f\alpha^2 + g\alpha + h. \tag{4}$$

Тогда исходное уравнение преобразованием (1)–(4) приводится к уравнению вида 5.2.4.30:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Систему (2)–(4) будем решать последовательно, начиная с уравнения (4) в следующем порядке: (4) $\to$ (3) $\to$ (2).

Уравнение Риккати (4) можно решать отдельно. Большое число конкретных разрешимых уравнений этого вида приведено в следующих справочниках: Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1995), A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev (1995).

Считая, что решение $\alpha = \alpha(t)$ уравнения (4) получено, находим решения уравнений (3), (4) в виде (C_1, C_2 — любые):

$$\psi(t) = C_1\exp\Big[\int(2f\alpha + g)\,dt\Big], \qquad \varphi(t) = \int f\psi\,dt + C_2.$$

Замечание. Преобразованием (1)–(4) можно упростить неоднородное уравнение с дополнительным слагаемым $\Phi(x,t)$ в правой части.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^2 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Замена $x = \pm e^{\xi}$ приводит к уравнению вида 5.2.9.35:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \big[g(t) - f(t)\big]\frac{\partial w}{\partial \xi} + h(t)w.$$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^2 k(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x\big[f(t)\ln x + g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x} +$
$\qquad\qquad + \big[h(t)\ln^2 x + s(t)\ln x + p(t)\big]w.$

Замена $z = \ln x$ приводит к уравнению вида 5.2.9.37:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = k(t)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \big[zf(t) + g(t) - k(t)\big]\frac{\partial w}{\partial z} + \big[z^2 h(t) + zs(t) + p(t)\big]w.$$

42. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^4 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = x\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \qquad \xi = \frac{1}{x}, \qquad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_\tau u = \partial_{\xi\xi} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

43. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (x-a)^2(x-b)^2 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w, \qquad a \neq b.$

Преобразование

$$w(x,t) = (x-b)\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau), \quad \xi = \ln\frac{x-a}{x-b}, \quad \tau = (a-b)^2\int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi},$$

которое рассматривается в разд. 5.2.3.

44. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = (ax^2+bx+c)^2 f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = (ax^2+bx+c)^{1/2}\exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(\xi,\tau),$$

$$\xi = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c}, \qquad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \bigl(ac - \tfrac{1}{4}b^2\bigr)u,$$

которое рассматривается в разд. 5.2.3.

45. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^k f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$!! см. стр 316. 324!!

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr], \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-k}(t)\,dt,$$

где $G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]$, приводит к уравнению вида 5.2.4.51:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

46. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = e^{\lambda x} f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr]u(x,\tau), \qquad \tau = \int f(t)\,dt$$

приводит к уравнению вида 5.2.5.33:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = e^{\lambda x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)g(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + h(t)w.$

1. Точные решения (A, B, x_0 — любые):

$$w(x,t) = (Ax+B)H(t),$$
$$w(x,t) = A\big[T(t)+F(x)\big]H(t),$$
$$w(x,t) = A\big[T(t)x+\Phi(x)\big]H(t),$$
$$w(x,t) = A\left[T^2(t)+2T(t)F(x)+2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}F(\xi)\,d\xi\right]H(t),$$
$$w(x,t) = A\left[T^2(t)x+2T(t)\Phi(x)+2\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\Phi(\xi)\,d\xi\right]H(t).$$

Здесь использованы краткие обозначения:

$$H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],\qquad T(t)=\int g(t)\,dt,$$
$$F(x) = \int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}d\xi,\qquad \Phi(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\xi\,d\xi.$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right]u(x,\tau),\qquad \tau=\int g(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = f(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Широкий класс точных аналитических решений этого уравнения описан в 5.2.9.26.

48. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t=\int\frac{h^2(x)}{f(x)}dx + A,\qquad z=yh(x),\qquad \text{где}\quad h(x)=B\exp\left[-\int\frac{g(x)}{f(x)}dx\right],$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = \partial_{zz}w$, которое рассматривается в разделе 5.2.1.

Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996), A. D. Polyanin, V. V. Dilman (1994).

49. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} - h(x)w.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя с объемной химической реакцией первого порядка (обычно $h \equiv \text{const}$).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$w(x,y) = u(t,z)\exp\Bigl[-\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\Bigr], \quad t = \int \frac{\varphi^2(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = y\varphi(x),$$

где $\varphi(x) = B\exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr]$, приводит к уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t w = \partial_{zz} w$, которое рассматривается в разделе 5.2.1.

Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985).

50. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Это уравнение встречается в задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц и капель), x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Bigl[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению вида 5.2.4.51:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов и др. (1996), A. D. Polyanin, V. V. Dilman (1994).

51. $f\Bigl(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}g\Bigl(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\Bigr)\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Это уравнение является обобщением уравнения теплового пограничного слоя на плоской пластине.

1. Переходя от x, y к новым переменным $t = \ln x$, $\xi = \dfrac{y}{\sqrt{x}}$, получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$f(\xi)\frac{\partial w}{\partial t} + \bigl[g(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi f(\xi)\bigr]\frac{\partial w}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}. \tag{1}$$

Частные решения этого уравнения имеют вид

$$w(t,\xi) = Ae^{\lambda t}\phi(\xi),$$

где функции $\phi(\xi)$ удовлетворяют обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\phi''_{\xi\xi} = \bigl[g(\xi) - \tfrac{1}{2}\xi f(\xi)\bigr]\phi'_\xi + \lambda f(\xi)\phi.$$

2. Решение исходного уравнения с граничными условиями

$$x = 0,\ w = w_0; \quad y = 0,\ w = w_s; \quad y \to \infty,\ w = w_0$$

(w_0, w_s — некоторые постоянные) имеет вид

$$\frac{w - w_0}{w_s - w_0} = \frac{\int_\xi^\infty \exp[-\Phi(\xi)]\,d\xi}{\int_0^\infty \exp[-\Phi(\xi)]\,d\xi}, \qquad \Phi(\xi) = \int_0^\xi \bigl[\tfrac{1}{2}\xi f(\xi) - g(\xi)\bigr]\,d\xi,$$

где $\xi = y/\sqrt{x}$. Считается, что при $\xi > 0$ справедливо неравенство $\xi f(\xi) > 2g(\xi)$.

3. Уравнение теплового пограничного слоя на плоской пластине задается соотношениями:

$$f(\xi) = \Pr F'_\xi(\xi), \qquad g(\xi) = \tfrac{1}{2}\Pr\bigl[\xi F'_\xi(\xi) - F(\xi)\bigr],$$

где $F(\xi)$ — решение Блазиуса в задаче о продольном обтекании плоской пластины поступательным потоком, $\Pr$ — число Прандтля (x — координата, направленная вдоль пластины, а y — координата, направленная по нормали к поверхности пластины). Формулы п. 2 в этом случае переходят в решение Э. Польгаузена. Подробности см. в книге А. М. Кутепова, А. Д. Полянина, З. Д. Запрянова и др. (1996).

52. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[g(x)y - \dfrac{a}{y}\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

При $a = 1$ уравнения этого вида описывают распределение концентрации во внутренней области диффузионного следа за движущейся частицей и каплей.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\right],$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{a}{z}\frac{\partial w}{\partial z}$$

(см. уравнения 5.2.4.1 — 5.2.4.3).

Литература: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985).

53. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[g(x)y - \dfrac{a}{y}\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + h(x)w.$

Замена $w(x,y) = u(x,y)\exp\left[\int \frac{h(x)}{f(x)}dx\right]$ приводит к уравнению вида 5.2.9.52:

$$f(x)\frac{\partial u}{\partial x} + \left[g(x)y - \frac{a}{y}\right]\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

54. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \left[g(x)y^n - \dfrac{a}{y}\right]\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$

Преобразование

$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}dx + A, \quad \xi = \frac{2}{n+1}\bigl[yh(x)\bigr]^{\frac{n+1}{2}},$$

где $h(x) = B\exp\left[-\int \frac{g(x)}{f(x)}dx\right]$; A, B — произвольные постоянные, приводит к уравнению вида 5.2.4.26:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{1-2\beta}{\xi}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \qquad \beta = \frac{1-a}{n+1}$$

(см. также уравнения 5.2.4.22, 5.2.4.24).

5.3. Уравнения гиперболического типа

5.3.1. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$

Уравнение колебаний струны. Уравнения этого вида часто встречаются в теории упругости, аэродинамике, акустике, электродинамике ($0 < t < +\infty$).

1. Общее решение:

$$w(x,t) = \varphi(x+at) + \psi(x-at),$$

где φ и ψ — произвольные функции. ***Физическая интерпретация решения***: пара бегущих волн, распространяющихся соответственно влево и вправо вдоль оси x с постоянной скоростью a.

2. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) &\quad \text{при} \quad t &= 0 &\quad &\text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) &\quad \text{при} \quad t &= 0 &\quad &\text{(начальное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение (формула Даламбера):

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi.$$

3. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

3.1.
$$
\begin{aligned}
w &= f(x) &\quad \text{при} \quad t &= 0 &\quad &\text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) &\quad \text{при} \quad t &= 0 &\quad &\text{(начальное условие)}\\
w &= 0 &\quad \text{при} \quad x &= 0 &\quad &\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

3.2.
$$
\begin{aligned}
w &= f(x) &\quad \text{при} \quad t &= 0 &\quad &\text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) &\quad \text{при} \quad t &= 0 &\quad &\text{(начальное условие)}\\
w &= h(t) &\quad \text{при} \quad x &= 0 &\quad &\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$w(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a},\\[2ex] \dfrac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + h\Big(t - \dfrac{x}{a}\Big) & \\ & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается и выражение для $w(x,t)$ совпадает с решением Даламбера для бесконечной прямой (см. п. 2).

4. Область: $0 < x < +\infty$. Вторая краевая задача.

4.1.
$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}[G(x+at) - G(x-at)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } t < \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \frac{1}{2a}[G(x+at) + G(at-x)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при } t > \frac{x}{a}, \end{cases}
$$

где $G(z) = \int_0^z g(\xi)\,d\xi$.

4.2.
$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w = h(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}[G(x+at) - G(x-at)] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} \quad t < \frac{x}{a}, \\ \frac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \frac{1}{2a}[G(x+at) + G(at-x)] - \\ \qquad\qquad\qquad - aH\left(t - \frac{x}{a}\right) \quad \text{при} \quad t > \frac{x}{a}, \end{cases}
$$

где $G(z) = \int_0^z g(\xi)\,d\xi$, $H(z) = \int_0^z h(\xi)\,d\xi$. В области $t < x/a$ влияние граничных условий не сказывается и выражение для $w(x,t)$ совпадает с решением Даламбера для бесконечной прямой (см. п. 2).

5. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}\\
w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \bigl[A_n \cos(a\lambda_n t) + B_n \sin(a\lambda_n t)\bigr] \sin(\lambda_n x), \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},
$$

$$
A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin(\lambda_n x)\,dx, \qquad B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l g(x)\sin(\lambda_n x)\,dx.
$$

6. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{n=1}^{\infty}\bigl[A_n\cos(a\lambda_n t) + B_n\sin(a\lambda_n t)\bigr]\cos(\lambda_n x),
$$

$$
\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad A_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx, \qquad B_0 = \frac{1}{l}\int_0^l g(x)\,dx,
$$

$$
A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\lambda_n x)\,dx, \qquad B_n = \frac{2}{a\pi n}\int_0^l g(x)\cos(\lambda_n x)\,dx.
$$

7. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w - bw = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}\\
\partial_x w + bw = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\bigl[A_n\cos(a\lambda_n t) + B_n\sin(a\lambda_n t)\bigr]\bigl[\lambda_n\cos(\lambda_n x) + b\sin(\lambda_n x)\bigr],
$$

$$
A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l \bigl[\lambda_n\cos(\lambda_n x) + b\sin(\lambda_n x)\bigr] f(x)\,dx,
$$

$$
B_n = \frac{1}{a\lambda_n\|X_n\|^2}\int_0^l \bigl[\lambda_n\cos(\lambda_n x) + b\sin(\lambda_n x)\bigr] g(x)\,dx,
$$

$$
\|X_n\|^2 = \int_0^l \bigl[\lambda_n\cos(\lambda_n x) + b\sin(\lambda_n x)\bigr]^2 dx = \tfrac{1}{2}l(b^2 + \lambda_n^2) + b,
$$

где λ_n — неотрицательные корни уравнения: $\operatorname{ctg}(\lambda l) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\lambda}{b} - \dfrac{b}{\lambda}\right)$.

8. Область: $0 < x < l$. Смешанная краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}\\
w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\bigl[A_n\cos(a\lambda_n t) + B_n\sin(a\lambda_n t)\bigr]\cos(\lambda_n x), \qquad \lambda_n = \frac{\pi(2n+1)}{2l},
$$

$$
A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos(\lambda_n x)\,dx, \qquad B_n = \frac{2}{al\lambda_n}\int_0^l g(x)\cos(\lambda_n x)\,dx.
$$

Литература к разд. 5.3.1: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.3.2. Уравнение вида $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Phi(x,t)$

1. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau.
$$

2. Область: $0 < x < +\infty$. Первая краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
w = h(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = w_1(x,t) + \frac{1}{2a} w_2(x,t),
$$

где

$$
w_1(x,t) = \begin{cases}
\frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \frac{x}{a}, \\
\frac{1}{2}[f(x+at) - f(at-x)] + \frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + h\Big(t - \frac{x}{a}\Big) & \text{при } t > \frac{x}{a},
\end{cases}
$$

$$
w_2(x,t) = \begin{cases}
\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t < \frac{x}{a}, \\
\int_0^{t-x/a} \int_{a(t-\tau)-x}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int_{t-x/a}^{t} \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t > \frac{x}{a}.
\end{cases}
$$

3. Область: $0 < x < +\infty$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x w = h(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = w_1(x,t) + \frac{1}{2a} w_2(x,t),
$$

где

$$w_1(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at} g(\xi)\,d\xi & \text{при } t < \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{1}{2}[f(x+at) + f(at-x)] + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{0}^{x+at} g(\xi)\,d\xi + \\ \qquad + \displaystyle\int\limits_0^{at-x} g(\xi)\,d\xi - a\int\limits_0^{t-x/a} h(\xi)\,d\xi & \text{при } t > \dfrac{x}{a}, \end{cases}$$

$$w_2(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int\limits_0^t \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t < \dfrac{x}{a}, \\ \displaystyle\int\limits_0^{t-x/a} \int\limits_0^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \int\limits_0^{t-x/a} \int\limits_0^{a(t-\tau)-x} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau + \\ \qquad + \displaystyle\int\limits_{t-x/a}^{t} \int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} \Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau & \text{при } t > \dfrac{x}{a}. \end{cases}$$

Литература к разд. 5.3.2: А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.3.3. Другие уравнения с постоянными коэффициентами

Предварительные замечания и формулы. В данном разделе часто будут приводиться только выражения для функции Грина, а решение соответствующих задач с однородными граничными условиями определяется по формуле (1). Для решения задач с неоднородными граничными условиями сначала следует использовать подходящее преобразование (2)–(6), после чего решение преобразованной задачи определяется по формуле (1).

1. Однородные граничные условия. Решения краевых задач (рассматриваемых в данном разделе) в области $0 \leqslant x \leqslant l$ с однородными граничными условиями и общими начальными условиями

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

можно записать в виде

$$w(x,t) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\Big[G(x,\xi,t)\Big] f(\xi)\,d\xi + \int_0^l G(x,\xi,t) g(\xi)\,d\xi + \\ + \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau, \qquad (1)$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина.

2. Неоднородные граничные условия. Задачи с неоднородными граничными условиями с помощью подходящих линейных преобразований вида $w(x,t) = \psi(x,t) + u(x,t)$, где u — новая искомая величина, сводятся к задачам с однородными граничными условиями, решение которых можно получить по формуле (1) (где будут стоять преобразованные функции $\overline{f}$, $\overline{g}$ и $\overline{\Phi}$). Укажем конкретный вид таких преобразований для основных краевых задач в области $0 < x < l$.

Первая краевая задача:

$$w = h_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = h_l(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = h_0(t) + \frac{x}{l}[h_l(t) - h_0(t)] + u(x,t). \tag{2}$$

Вторая краевая задача:

$$\partial_x w = h_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w = h_l(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = xh_0(t) + \frac{x^2}{2l}[h_l(t) - h_0(t)] + u(x,t). \tag{3}$$

Третья краевая задача:

$$\partial_x w - bw = h_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w + cw = h_l(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = \frac{h_l(t) - (1+cl)h_0(t)}{b+c+bcl} + x\frac{ch_0(t) + bh_l(t)}{b+c+bcl} + u(x,t). \tag{4}$$

Смешанные краевые задачи.

Случай 1:

$$w = h_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$\partial_x w = h_l(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = h_0(t) + xh_l(t) + u(x,t). \tag{5}$$

Случай 2:

$$\partial_x w = h_0(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = h_l(t) \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Преобразование:

$$w(x,t) = (x - l)h_0(t) + h_l(t) + u(x,t). \tag{6}$$

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

1. Точные решения:

$$w = \cos(\lambda x)[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)], \qquad b = a^2\lambda^2 - \mu^2,$$
$$w = \sin(\lambda x)[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)], \qquad b = a^2\lambda^2 - \mu^2,$$
$$w = \exp(\pm\lambda x)[A\exp(\mu t) + B\exp(-\mu t)], \quad \mu = \sqrt{a^2\lambda^2 + b}, \quad b > -a^2\lambda^2,$$
$$w = \exp(\pm\lambda x)[A\cos(\mu t) + B\sin(\mu t)], \quad \mu = \sqrt{|a^2\lambda^2 + b|}, \quad b < -a^2\lambda^2,$$
$$w = \exp(\pm\mu t)[A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x)], \quad a\lambda = \sqrt{b - \mu^2}, \qquad b > \mu^2,$$
$$w = \exp(\pm\lambda x)(At + B), \qquad b = -a^2\lambda^2,$$
$$w = \exp(\pm\mu t)(Ax + B), \qquad b = \mu^2,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение при $b = c^2 > 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] + \frac{ct}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{I_1\left(c\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} I_0\left(c\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}\right) g(\xi)\,d\xi,$$

где $I_0(z)$, $I_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

Решение при $b = -c^2 < 0$:

$$w(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+at) + f(x-at)] - \frac{ct}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{J_1\left(c\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}\right)}{\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}} f(\xi)\,d\xi + \\ + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} J_0\left(c\sqrt{t^2 - (x-\xi)^2/a^2}\right) g(\xi)\,d\xi,$$

где $J_0(z)$, $J_1(z)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого и первого порядков.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 w + \Phi(x,t).$

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{(граничное условие)}$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = l \quad \text{(граничное условие)}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\frac{\sin\bigl(t\sqrt{a^2\lambda_n^2+b^2}\bigr)}{\sqrt{a^2\lambda_n^2+b^2}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{al}\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\lambda_n x)\cos(\lambda_n\xi)\frac{\sin\bigl(a\sqrt{\lambda_n^2+b^2}\,t\bigr)}{\sqrt{\lambda_n^2+b^2}}, \qquad \lambda_n = \frac{\pi n}{l}.$$

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - c_1 w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + c_2 w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin\bigl(a\sqrt{\lambda_n^2+b^2}\,t\bigr)}{a\|y_n\|^2\sqrt{\lambda_n^2+b^2}},$$

$$y_n(x) = \cos(\lambda_n x) + \frac{c_1}{\lambda_n}\sin(\lambda_n x),$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{c_2}{2\lambda_n^2}\,\frac{\lambda_n^2+c_1^2}{\lambda_n^2+c_2^2} + \frac{c_1}{2\lambda_n^2} + \frac{l}{2}\Bigl(1+\frac{c_1^2}{\lambda_n^2}\Bigr),$$

где λ_n — положительные корни уравнения $\dfrac{\operatorname{tg}(\lambda l)}{\lambda} = \dfrac{c_1+c_2}{\lambda^2-c_1c_2}$.

3. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - b\frac{\partial w}{\partial x} + \Phi(x,t).$

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\Bigl[\frac{b}{2a^2}(x-\xi)\Bigr]\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\mu_n}}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\sin\bigl(t\sqrt{\mu_n}\bigr),$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}, \qquad \mu_n = \frac{b^2}{4a^2} + a^2\lambda_n^2.$$

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(x,\xi,t) = \frac{bt\exp\left(-\dfrac{b\xi}{a^2}\right)}{a^2\left[1-\exp\left(-\dfrac{bl}{a^2}\right)\right]} + \exp\left(-\frac{b\xi}{a^2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin(a\lambda_n t)}{a\lambda_n\|y_n\|^2},
$$

$$
y_n(x) = \exp\left(\frac{bx}{2a^2}\right)\left[\cos(\mu_n x) - \frac{b}{2a^2}\frac{\sin(\mu_n x)}{\mu_n}\right],
$$

$$
\lambda_n = \sqrt{\frac{\pi^2 n^2}{l^2} + \frac{b^2}{4a^4}}, \quad \mu_n = \frac{\pi n}{l}, \quad \|y_n\|^2 = \frac{l}{2}\left(1 + \frac{b^2 l^2}{4a^4\pi^2 n^2}\right).
$$

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x w - c_1 w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x w + c_2 w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Функция Грина:

$$
G(x,\xi,t) = \exp\left(-\frac{b}{a^2}\xi\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y_n(x)y_n(\xi)\sin(a\lambda_n t)}{a\lambda_n\|y_n\|^2},
$$

$$
y_n(x) = \exp\left(\frac{bx}{2a^2}\right)\left[\cos(\mu_n x) + \left(c_1 - \frac{b}{2a^2}\right)\frac{\sin(\mu_n x)}{\sqrt{\mu_n}}\right], \quad \mu_n = \sqrt{\lambda_n^2 - \frac{b^2}{4a^4}},
$$

$$
\|y_n\|^2 = \frac{c_2 + \dfrac{b}{2a^2}}{2\lambda_n^2 - \dfrac{b^2}{2a^4}}\,\frac{\lambda_n^2 + c_1^2 - c_1\dfrac{b}{a^2}}{\lambda_n^2 + c_2^2 + c_2\dfrac{b}{a^2}} + \frac{c_1 - \dfrac{b}{2a^2}}{2\lambda_n^2 - \dfrac{b^2}{2a^4}} + l\,\frac{\lambda_n^2 + c_1^2 - c_1\dfrac{b}{a^2}}{2\lambda_n^2 - \dfrac{b^2}{2a^4}},
$$

где λ_n — положительные корни трансцендентного уравнения

$$
\frac{\operatorname{tg}\left(l\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}a^{-4}b^2}\right)}{\sqrt{\lambda^2 - \frac{1}{4}a^{-4}b^2}} = \frac{c_1 + c_2}{\lambda^2 - c_1 c_2 + \frac{1}{2}a^{-2}b(c_2 - c_1)}.
$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Замена $w(x,t) = \exp(-\frac{1}{2}kt)u(x,t)$ приводит к уравнению вида 5.3.3.1 для функции u:

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{4}k^2 u.
$$

Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \exp(-\tfrac{1}{2}kt)\sum_{n=1}^{\infty}[A_n\cos(\lambda_n t) + B_n\sin(\lambda_n t)]\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr),$$

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2} - \frac{1}{4}k^2}, \quad A_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\,dx,$$

$$B_n = \frac{k}{2\lambda_n}A_n + \frac{2}{l\lambda_n}\int_0^l g(x)\sin\Bigl(\frac{\pi n x}{l}\Bigr)\,dx.$$

См. также уравнение 5.3.3.8.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw.$

Телеграфное уравнение. Замена $w(x,t) = \exp(-\frac{1}{2}kt)u(x,t)$ приводит к уравнению вида 5.3.3.1 для функции u:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (b + \tfrac{1}{4}k^2)u.$$

См. также уравнения 5.3.3.6, 5.3.3.7.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $w(x,t) = \exp(\lambda x + \mu t)u(x,t)$, где $\lambda = -\dfrac{b}{2a^2}$, $\mu = -\dfrac{k}{2}$, приводит к уравнению вида 5.3.3.1:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Bigl(c + \frac{k^2}{4} - \frac{b^2}{4a^2}\Bigr)u.$$

Область: $-\infty < x < +\infty$.

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)

Решение при $a = 1$:

$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}\exp(-\tfrac{1}{2}kt)\Bigl\{\exp(-\tfrac{1}{2}bt)f(x-t) + \exp(\tfrac{1}{2}bt)f(x+t) +$$

$$+ \int_{x-t}^{x+t}\Bigl[\frac{1}{2}kJ_0(\lambda z) - \lambda\frac{t}{z}J_1(\lambda z)\Bigr]\exp\bigl[-\tfrac{1}{2}b(x-\xi)\bigr]f(\xi)\,d\xi +$$

$$+ \int_{x-t}^{x+t}J_0(\lambda z)\exp\bigl[-\tfrac{1}{2}b(x-\xi)\bigr]g(\xi)\,d\xi\Bigr\},$$

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{4c - b^2 + k^2}, \quad z = \sqrt{(x-\xi)^2 - t^2}.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw + \Phi(x,t).$

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$\begin{array}{rlll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a^2}(\xi - x) - \frac{k}{2}t\right]\left[\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{\mu_n}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\,\mathrm{sh}(\mu_n t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\nu_n}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\sin(\nu_n t)\right], \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$
$$\mu_n = \sqrt{\frac{1}{4}k^2 + c - a^2\lambda_n^2 - \frac{b^2}{2a^2}}, \quad \nu_n = \sqrt{a^2\lambda_n^2 + \frac{b^2}{2a^2} - \frac{1}{4}k^2 - c},$$

где N — такое число, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\frac{1}{4}k^2 + c - a^2\lambda_n^2 - \frac{b^2}{2a^2} \leqslant 0$.

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

$$\begin{array}{rlll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = -\frac{b\exp\left(\dfrac{b}{a^2}\xi - \dfrac{k}{2}t\right)\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\frac{1}{4}k^2 + c}\right)}{a^2\sqrt{\frac{1}{4}k^2 + c}\left[1 - \exp\left(\dfrac{bl}{a^2}\right)\right]} +$$
$$+ \frac{2}{l}\exp\left[\frac{b}{2a^2}(\xi - x) - \frac{k}{2}t\right]\left[\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\mu_n\beta_n}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\,\mathrm{sh}(\mu_n t) + \right.$$
$$\left. + \sum_{n=N}^{\infty}\frac{1}{\nu_n\beta_n}\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_n\xi)\sin(\nu_n t)\right],$$
$$\mu_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{4}k^2 + c} & \text{при } n = 0, \\ \sqrt{\frac{1}{4}k^2 + c - a^2\lambda_n^2 - \frac{1}{2}a^{-2}b^2} & \text{при } n \geqslant 1, \end{cases}$$
$$\nu_n = \sqrt{a^2\lambda_n^2 + \tfrac{1}{2}a^{-2}b^2 - \tfrac{1}{4}k^2 - c}, \quad \beta_n = 1 + \frac{b^2l^2}{4a^4\pi^2n^2}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

где N — такое число, что при $n \geqslant N$ выполняется неравенство $\frac{1}{4}k^2 + c - a^2\lambda_n^2 - \frac{1}{2}a^{-2}b^2 \leqslant 0$.

Литература к разд. 5.3.3: А. Г. Бутковский (1979), М. М. Смирнов (1968), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.3.4. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw.$

Уравнение малых колебаний тяжелой однородной нити, вращающейся с постоянной угловой скоростью $\omega = \sqrt{b}$ вокруг оси.

Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$$
\begin{aligned}
w &= f(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) &&\text{при}\quad t = 0 &&\text{(начальное условие)}\\
w &\neq \infty &&\text{при}\quad x = 0 &&\text{(граничное условие)}\\
w &= 0 &&\text{при}\quad x = l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n \cos(a\lambda_n t) + \frac{B_n}{a\lambda_n}\sin(a\lambda_n t)\Big] J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big),
$$

$$
\lambda_n = \sqrt{\frac{\mu_n^2}{4l} - \frac{b}{a^2}},\quad A_n = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_n)}\int_0^l f(x) J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)\,dx,
$$

$$
B_n = \frac{1}{lJ_1^2(\mu_n)}\int_0^l g(x) J_0\Big(\mu_n\sqrt{\frac{x}{l}}\Big)\,dx,
$$

где μ_n — положительные корни функции Бесселя: $J_0(\mu) = 0$.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 75).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{2}{2n+1} x \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$

Общее решение:

$$
w(x,t) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\left[\frac{\Phi(\sqrt{2(2n+1)x} + at) + \Psi(\sqrt{2(2n+1)x} - at)}{\sqrt{x}}\right],
$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 9).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $x = ke^z$ ($k \neq 0$) приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 5.3.3.3: $\partial_{tt} w = a\partial_{zz} w + (b-a)\partial_z w + cw$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big[(l^2 - x^2)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2x\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Область: $0 \leqslant x \leqslant l$. Первая краевая задача.

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w \neq \infty$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos(a\lambda_n t) + \frac{B_n}{\lambda_n}\sin(a\lambda_n t)\Big]P_{2n-1}\Big(\frac{x}{l}\Big),$$

$$\lambda_n = \sqrt{2n(2n-1)}, \quad A_n = \frac{4n-1}{l}\int_0^l f(x)P_{2n-1}\Big(\frac{x}{l}\Big)\,dx,$$

$$B_n = \frac{4n-1}{al}\int_0^l g(x)P_{2n-1}\Big(\frac{x}{l}\Big)\,dx,$$

где $P_k(x) = \dfrac{1}{2^k k!}\dfrac{d^k}{dx^k}\big[(x^2-1)^k\big]$ — полиномы Лежандра.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 79).

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\Big).$

Уравнение осесимметричных колебаний газа (r — радиальная координата).

1. Область: $0 \leqslant r < R$. Первая краевая задача.

$w = f(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(r)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w \neq \infty$	при	$r = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$r = R$	(граничное условие)

Решение:

$$w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos\Big(\frac{a\lambda_n t}{R}\Big) + \frac{B_n}{\lambda_n}\sin\Big(\frac{a\lambda_n t}{R}\Big)\Big]J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R}\Big),$$

$$A_n = \frac{2}{R^2 J_1^2(\lambda_n)}\int_0^R \xi f(\xi)J_0\Big(\frac{\lambda_n \xi}{R}\Big)\,d\xi,$$

$$B_n = \frac{2}{aRJ_1^2(\lambda_n)}\int_0^R \xi g(\xi)J_0\Big(\frac{\lambda_n \xi}{R}\Big)\,d\xi,$$

где λ_n — положительные корни функции Бесселя: $J_0(\lambda) = 0$.

Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980, стр. 533).

2. Область: $0 \leqslant r < R$. Вторая краевая задача.

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
w &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_r w &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
\begin{aligned}
w(r,t) &= \frac{2}{R^2}\int_0^R [f(\xi) + tg(\xi)]\xi\,d\xi + \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos\Big(\frac{a\lambda_n t}{R}\Big) + \frac{B_n}{\lambda_n}\sin\Big(\frac{a\lambda_n t}{R}\Big)\Big]J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R}\Big),\\
A_n &= \frac{2}{R^2 J_0^2(\lambda_n)}\int_0^R \xi f(\xi)J_0\Big(\frac{\lambda_n\xi}{R}\Big)\,d\xi,\\
B_n &= \frac{2}{aRJ_0^2(\lambda_n)}\int_0^R \xi g(\xi)J_0\Big(\frac{\lambda_n\xi}{R}\Big)\,d\xi,
\end{aligned}
$$

где λ_n — положительные корни функции Бесселя: $J_1(\lambda) = 0$.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 78).

6. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\Big(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\Big) + \Phi(x,t).$

Область: $0 \leqslant r < R$. Первая краевая задача.

1. Однородные условия:

$$
\begin{aligned}
w &= 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= 0 && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
w &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}\\
w &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение:

$$
w(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(t)J_0\Big(\frac{\lambda_n r}{R}\Big),
$$

$$
A_n(t) = \frac{R}{a\lambda_n}\int_0^t d\tau\int_0^R f(\xi,\tau)J_0\Big(\frac{\lambda_n\xi}{R}\Big)\sin\Big[\frac{a\lambda_n}{R}(t-\tau)\Big]\,d\xi,
$$

где λ_n — положительные корни функции Бесселя: $J_0(\lambda) = 0$.

Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980, стр. 533).

2. Неоднородные условия:

$$
\begin{aligned}
w &= f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
w &\neq \infty && \text{при} \quad r = 0 && \text{(граничное условие)}\\
w &= 0 && \text{при} \quad r = R && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}
$$

Решение представляет собой сумму $w(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t)$, где w_1 — решение соответствующего однородного уравнения 5.3.4.5 с неоднородными начальными условиями, а w_2 — решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями, которое приведено в п. 1.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right).$

Уравнение сферически-симметричных колебаний газа (r — радиальная координата).

1. Общее решение:

$$w(t,r) = \frac{\varphi(r+at) + \psi(r-at)}{r},$$

где φ и ψ — произвольные функции.

2. Преобразование к уравнению с постоянными коэффициентами. Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2},$$

которое подробно рассматривалось в разделе 5.3.1.

3. Область: $0 \leqslant r < \infty$.

$$\begin{aligned} &w = f(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ &\partial_t w = g(r) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\end{aligned}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2r}\bigl[(r-at)F(r-at) + (r+at)F(r+at)\bigr] + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\xi G(\xi)\,d\xi,$$

$$F(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{при } \xi > 0,\\ f(-\xi) & \text{при } \xi < 0,\end{cases} \qquad G(\xi) = \begin{cases} g(\xi) & \text{при } \xi > 0,\\ g(-\xi) & \text{при } \xi < 0.\end{cases}$$

Решение в центре сферы:

$$w(0,t) = atf'(at) + f(at) + tg(at).$$

Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980, стр. 517).

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r}\right) + \Phi(r,t).$

1. Преобразование к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами. Замена $u(r,t) = rw(r,t)$ приводит к неоднородному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\Phi(r,t),$$

которое подробно рассматривалось в разделе 5.3.2.

2. Область: $0 \leqslant r < \infty$.

1. Однородные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_t w = 0 \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$w(r,t) = \frac{1}{2ar}\int_0^t d\tau \int_{r-a(t-\tau)}^{r+a(t-\tau)} \xi\Psi(\xi,\tau)\,d\xi, \quad \Psi(\xi,\tau) = \begin{cases} \Phi(\xi,\tau) & \text{при } \xi > 0, \\ \Phi(-\xi,\tau) & \text{при } \xi < 0. \end{cases}$$

2. Неоднородные условия:

$$w = f(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_t w = g(r) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение представляет собой сумму $w(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t)$, где w_1 — решение соответствующего однородного уравнения 5.3.4.7 с неоднородными начальными условиями, а w_2 — решение неоднородного уравнения с однородными начальными условиями, которое приведено в п. 1.

Литература: Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980, стр. 517).

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\left[\dfrac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \dfrac{2}{r}\dfrac{\partial w}{\partial r} - \dfrac{n(n+1)}{r^2}w\right], \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Общее решение:

$$w(t,r) = r^n\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^n\left[\frac{\Phi(r+at) + \Psi(r-at)}{r}\right],$$

где Φ и Ψ — произвольные функции.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 9, 10).

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{2a}{x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + b^2 w, \qquad 0 < 2a < 1.$

Общее решение:

$$w(x,t) = \int_0^1 \frac{\Phi[t + x(2\xi-1)]}{[\xi(1-\xi)]^{1-a}}\bar{J}_{a-1}\Big(2bx\sqrt{\xi(1-\xi)}\Big)\,d\xi +$$
$$+ x^{1-2a}\int_0^1 \frac{\Psi[t + x(2\xi-1)]}{[\xi(1-\xi)]^{a}}\bar{J}_{-a}\Big(2bx\sqrt{\xi(1-\xi)}\Big)\,d\xi,$$

где Φ и Ψ — произвольные функции; $\bar{J}_{-\nu}(z) = \Gamma(1-\nu)2^{-\nu}z^{\nu}J_{-\nu}(z)$; $J_{-\nu}(z)$ — функции Бесселя.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 11).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = (ax+b)^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование

$$u = \frac{w}{ax+b}, \quad z = at + \frac{1}{ax+b}, \quad y = -at + \frac{1}{ax+b}$$

приводит к уравнению $\partial_{zy}u = 0$. Поэтому общее решение исходного уравнения имеет вид

$$w = (ax+b)\big[f(z)+g(y)\big],$$

где $f = f(z)$, $g = g(y)$ — произвольные функции.

Литература: N. H. Ibragimov (1994).

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)$.

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

1.1. Случай $0 < m < 1$:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos(\lambda_n t) + \frac{B_n}{\lambda_n}\sin(\lambda_n t)\right]X_n(x), \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{2}(2-m)l^{\frac{m-2}{2}},$$

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l f(x)X_n(x)\,dx, \quad B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2}\int_0^l g(x)X_n(x)\,dx,$$

$$X_n(x) = x^{\frac{1-m}{2}}J_p\left(\mu_n\left(\frac{x}{l}\right)^{\frac{2-m}{2}}\right), \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\,dx, \quad p = \left|\frac{1-m}{2-m}\right|,$$

где μ_n — n-й положительный корень функции Бесселя: $J_p(\mu) = 0$.

1.2. Случай $1 \leqslant m < 2$:

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w \neq \infty$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение дается формулами, приведенными выше в п. 1.1.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 28, 77).

2. Область: $0 < x < l$. Смешанная краевая задача.

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$(x^m \partial_x w) = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение при $0 < m < 1$:

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n \cos(\lambda_n t) + \frac{B_n}{\lambda_n} \sin(\lambda_n t) \Big] X_n(x), \quad \lambda_n = \frac{\mu_n}{2}(2-m) l^{\frac{m-2}{2}},$$

$$A_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l f(x) X_n(x)\, dx, \quad B_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int_0^l g(x) X_n(x)\, dx,$$

$$X_n(x) = x^{\frac{1-m}{2}} J_{-p}\Big(\mu_n \Big(\frac{x}{l}\Big)^{\frac{2-m}{2}}\Big), \quad \|X_n\|^2 = \int_0^l X_n^2(x)\, dx, \quad p = \frac{1-m}{2-m},$$

где μ_n — корни функции Бесселя: $J_{-p}(\mu) = 0$.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 29, 77).

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = t^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

1. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)

Решение при $m > 0$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(2\beta)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^1 f\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} (2\xi - 1)\Big) [\xi(1-\xi)]^{\beta-1} d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-2\beta)}{\Gamma^2(1-\beta)} t \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} (2\xi - 1)\Big) [\xi(1-\xi)]^{-\beta} d\xi,$$

где

$$\beta = \frac{m}{2(m+2)}, \qquad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1} ds.$$

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 13, 52).

2. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

$w = f(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$\partial_t w = g(x)$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = 0$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w = 0$	при	$x = l$	(граничное условие)

Решение при $m > -1$:

$$w(x,t) = \sqrt{t} \sum_{n=1}^{\infty} \Big[A_n J_{-p}\Big(2p\lambda_n t^{\frac{1}{2p}}\Big) + B_n J_p\Big(2p\lambda_n t^{\frac{1}{2p}}\Big) \Big] \sin(\lambda_n x),$$

$$A_n = \Gamma(1-p)(\lambda_n p)^p \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin(\lambda_n x)\, dx, \quad p = \frac{1}{m+2},$$

$$B_n = \Gamma(1+p)(\lambda_n p)^{-p} \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin(\lambda_n x)\, dx, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{l},$$

где $\Gamma(p)$ — гамма-функция.

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 27, 75).

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = t^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^{\frac{m-2}{2}} \dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad m \geqslant 2.$

Область $-\infty < x < +\infty$.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$
$$\partial_t w = g(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \qquad \text{(начальное условие)}$$

1. Решение при $|b| < \frac{1}{2}m$:

$$w(x,t) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 f\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} (2\xi - 1)\Big) \xi^{\beta-1} (1-\xi)^{\alpha-1} d\xi +$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} t \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} (2\xi - 1)\Big) \xi^{-\alpha} (1-\xi)^{-\beta} d\xi,$$

где

$$\alpha = \frac{m-2b}{2(m+2)}, \quad \beta = \frac{m+2b}{2(m+2)}, \quad \Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1} ds.$$

2. Решение при $b = \frac{1}{2}m$:

$$w(x,t) = f\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}\Big) +$$
$$+ \frac{2t}{m+2} \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} (2\xi - 1)\Big) (1-\xi)^{-\frac{m}{m+2}} d\xi.$$

3. Решение при $b = -\frac{1}{2}m$:

$$w(x,t) = f\Big(x - \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}}\Big) +$$
$$+ \frac{2t}{m+2} \int_0^1 g\Big(x + \frac{2}{m+2} t^{\frac{m+2}{2}} (2\xi - 1)\Big) (1-\xi)^{-\frac{m}{m+2}} d\xi.$$

Литература: М. М. Смирнов (1968, стр. 13, 52).

15. $t^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kt \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Замена $t = Ae^\tau$ $(A \neq 0)$ приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 5.3.3.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + (k-1) \frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \frac{\partial w}{\partial x} + cw.$$

16. $t^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + kt \dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 x^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Преобразование

$$t = Ae^\tau, \quad x = Be^\xi, \qquad A \neq 0, \ B \neq 0$$

приводит к уравнению с постоянными коэффициентами вида 5.3.3.4:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} + (k-1) \frac{\partial w}{\partial \tau} = a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + (b - a^2) \frac{\partial w}{\partial \xi} + cw.$$

5.3.5. Уравнения с переменными коэффициентами, содержащие произвольные функции

1. $s(x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w + \Phi(x,t).$

Считаем, что функции s, p, p'_x, q — непрерывны и выполняются неравенства $s > 0$, $p > 0$.

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

1.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ \partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\ w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\ w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)} \end{aligned}$$

Решение:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\left[f_n \cos\bigl(\sqrt{\lambda_n}\,t\bigr) + \frac{g_n}{\sqrt{\lambda_n}}\sin\bigl(\sqrt{\lambda_n}\,t\bigr) + \varphi_n(t)\right] y_n(x). \qquad (1)$$

Здесь собственные значения λ_n и собственные функции $y_n(x)$ определяются путем решения задачи Штурма — Лиувилля для линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[p(x)y'_x]'_x + [\lambda s(x) - q(x)]y = 0; \qquad (2)$$

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l, \qquad (3)$$

где f_n и g_n — коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ при разложении по ортогональной с весом $s(x)$ системе собственных функций $y_n(x)$ и функции $\varphi_n(t)$ вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{\|y_n\|^2}\int_0^l s(x)f(x)y_n(x)\,dx,\\ g_n &= \frac{1}{\|y_n\|^2}\int_0^l s(x)g(x)y_n(x)\,dx,\\ \varphi_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}\,\|y_n\|^2}\int_0^t \sin\bigl[\sqrt{\lambda_n}\,(t-\tau)\bigr]\,d\tau \int_0^l \Phi(x,\tau)y_n(x)\,dx,\\ \|y_n\|^2 &= \int_0^l s(x)y_n^2(x)\,dx. \end{aligned} \qquad (4)$$

Относительно двухточечной краевой задачи (2), (3) известно следующее:

1. Существует счетное множество собственных значений $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \cdots$, которым соответствуют нетривиальные решения задачи — собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, y_n, y_{n+1}, …

2. При $q \geqslant 0$ все собственные значения λ_n положительны.

3. Собственные функции $y_n(x)$ и $y_m(x)$ при $n \neq m$ ортогональны между собой с весом $s(x)$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant l$:

$$\int_0^l y_n(x) y_m(x) s(x)\,dx = 0 \quad \text{при} \quad n \neq m.$$

4. Произвольная функция $F(x)$, дважды непрерывно дифференцируемая и удовлетворяющая граничным условиям $F(0) = F(l) = 0$, разлагается в равномерно и абсолютно сходящийся ряд по собственным функциям $\{y_n(x)\}$:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n y_n(x), \qquad F_n = \frac{1}{\|y_n\|^2} \int_0^l s(x) F(x) y_n(x)\,dx,$$

где формула для $\|y_n\|^2$ приведена в (4).

Отметим, что для оценки величины собственных значений можно использовать вариационные и другие методы. См., например, С. Г. Михлин (1970), С. Гулд (1970), L. D. Akulenko, S. V. Nesterov (1995).

1.2. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
w &= h_0(t) && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\
w &= h_l(t) && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = h_0(t) + \frac{x}{l}[h_l(t) - h_0(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 1.1 (при этом соответственно изменятся функции f, g и Φ).

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

2.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_x w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (4), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (2) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \tag{5}$$

2.2. Неоднородные граничные условия:

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x w = h_0(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x w = h_l(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = xh_0(t) + \frac{x^2}{2l}[h_l(t) - h_0(t)] + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 2.1 (при этом соответственно изменятся функции f, g и Φ).

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

3.1. Однородные граничные условия ($b > 0$, $c > 0$):

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x w - bw = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x w + cw = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (4), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (2) с граничными условиями

$$y'_x - by = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x + cy = 0 \quad \text{при} \quad x = l. \tag{6}$$

3.2. Неоднородные граничные условия:

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_x w - bw = h_0(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x w + cw = h_l(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = \frac{h_l(t) - (1+cl)h_0(t)}{b+c+bcl} + x\frac{ch_0(t) + bh_l(t)}{b+c+bcl} + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 3.1 (при этом соответственно изменятся функции f, g и Φ).

4. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

4.1а. Однородные граничные условия:

$$
\begin{array}{llll}
w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
\partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\
w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\
\partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)}
\end{array}
$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (4), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (2) с граничными условиями

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.1б. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{rlll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ w = h_0(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = h_l(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = h_0(t) + xh_l(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 4.1а (при этом соответственно изменятся функции f, g и Φ).

4.2а. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{rlll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (4), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (2) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.2б. Неоднородные граничные условия:

$$\begin{array}{rlll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = h_0(t) & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ w = h_l(t) & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Переходя к новой зависимой переменной $u(x,t)$ по формуле

$$w(x,t) = (x - l)h_0(t) + h_l(t) + u(x,t),$$

получим аналогичное уравнение с однородными граничными условиями, которое рассматривалось выше в п. 4.2а (при этом соответственно изменятся функции f, g и Φ).

Замечание. Формулу (1) можно записать в следующем виде:

$$w(x,t) = \int_0^l \frac{\partial}{\partial t}\Big[G(x,\xi,t)\Big] s(\xi)f(\xi)\,d\xi + \int_0^l G(x,\xi,t)s(\xi)g(\xi)\,d\xi +$$
$$+ \int_0^t \int_0^l G(x,\xi,t-\tau)\Phi(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau,$$

где $G(x,\xi,t)$ — функция Грина:

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n(\xi)y_n(x)\sin(\sqrt{\lambda_n}\,t)}{\sqrt{\lambda_n}\,\|y_n\|^2}.$$

Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), И. Г. Петровский (1961), М. М. Смирнов (1968), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

2. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + F(x,t), \qquad 0 < a(x) < \infty.$

Это уравнение можно представить в виде уравнения 5.3.5.2:

$$s(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + s(x)F(x,t),$$

где

$$s(x) = \frac{1}{a(x)}\exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right], \quad p(x) = \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}dx\right], \quad q(x) \equiv 0.$$

3. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial w}{\partial x} + c(x)w + F(x,t).$

Это уравнение можно представить в виде уравнения 5.3.5.1:

$$s(x)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w + s(x)F(x,t),$$

где

$$s(x) = \frac{1}{a(x)}\exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right], \quad p(x) = \exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right],$$
$$q(x) = -\frac{c(x)}{a(x)}\exp\left[\int \frac{b(x)}{a(x)}\,dx\right].$$

4. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + a(t)\frac{\partial w}{\partial t} = b(t)\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - q(x)w\right\}.$

1. Область: $0 < x < l$. Первая краевая задача.

1.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) &&\text{при}\quad t=0 &&\text{(начальное условие)}\\
w &= 0 &&\text{при}\quad x=0 &&\text{(граничное условие)}\\
w &= 0 &&\text{при}\quad x=l &&\text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty}\big[f_n U_n^1(t) + g_n U_n^2(t)\big]y_n(x), \tag{1}$$

где

$$f_n = \frac{1}{\|y_n\|^2}\int_0^l f(x)y_n(x)\,dx, \quad g_n = \frac{1}{\|y_n\|^2}\int_0^l g(x)y_n(x)\,dx, \qquad (2)$$
$$\|y_n\|^2 = \int_0^l y_n^2(x)\,dx.$$

Собственные значения λ_n и собственные функции $y_n(x)$ в формуле (1) определяются путем решения задачи Штурма — Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$[p(x)y'_x]'_x + [\lambda - q(x)]y = 0; \qquad (3)$$
$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l,$$

а функции $U_n^1(t)$ и $U_n^2(t)$ являются линейно независимыми решениями обыкновенного дифференциального уравнения:

$$U''_{tt} + a(t)U'_t + \lambda_n^2 b(t)U = 0$$

с начальными условиями

$$U_n^1 = 1, \quad (U_n^1)'_t = 0 \quad \text{при} \quad t = 0,$$
$$U_n^2 = 0, \quad (U_n^2)'_t = 1 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

1.2. Неоднородные граничные условия. Используя замену, указанную в п. 1.2 для уравнения 5.3.5.1, приходим к однородным граничным условиям, рассмотренным выше.

2. Область: $0 < x < l$. Вторая краевая задача.

2.1. Однородные граничные условия:

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение этой задачи дается формулами (1)–(2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

2.2. Неоднородные граничные условия. Используя замену, указанную в п. 2.2 для уравнения 5.3.5.1, приходим к однородным граничным условиям, рассмотренным выше.

3. Область: $0 < x < l$. Третья краевая задача.

3.1. Однородные граничные условия ($b > 0$, $c > 0$):

$$\begin{array}{llll} w = f(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_t w = g(x) & \text{при} & t = 0 & \text{(начальное условие)} \\ \partial_x w - bw = 0 & \text{при} & x = 0 & \text{(граничное условие)} \\ \partial_x w + cw = 0 & \text{при} & x = l & \text{(граничное условие)} \end{array}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x - by = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x + cy = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

3.2. Неоднородные граничные условия. Используя замену, указанную в п. 3.2 для уравнения 5.3.5.1, приходим к однородным граничным условиям, рассмотренным выше.

4. Область: $0 < x < l$. Смешанные краевые задачи.

4.1а. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\
\partial_x w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.1б. Неоднородные граничные условия. Используя замену, указанную в п. 4.1б для уравнения 5.3.5.1, приходим к однородным граничным условиям, рассмотренным выше.

4.2а. Однородные граничные условия:

$$\begin{aligned}
w &= f(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_t w &= g(x) && \text{при} \quad t = 0 && \text{(начальное условие)}\\
\partial_x w &= 0 && \text{при} \quad x = 0 && \text{(граничное условие)}\\
w &= 0 && \text{при} \quad x = l && \text{(граничное условие)}
\end{aligned}$$

Решение этой задачи дается формулами (1), (2), где собственные значения и собственные функции λ_n и $y_n(x)$ определяются путем решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения (3) с граничными условиями

$$y'_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad y = 0 \quad \text{при} \quad x = l.$$

4.2б. Неоднородные граничные условия. Используя замену, указанную в п. 4.2б для уравнения 5.3.5.1, приходим к однородным граничным условиям, рассмотренным выше.

Литература: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко (1985).

5.4. Уравнения эллиптического типа

5.4.1. Уравнение Лапласа $\Delta w = 0$

Уравнение Лапласа часто встречается в гидро- и аэромеханике, теории тепло- и массопереноса, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики.

Физический смысл уравнения Лапласа: оно описывает стационарное распределение температуры при отсутствии источников тепла в рассматриваемой области.

1. Определение. Краевые задачи для уравнения Лапласа.

Уравнение Лапласа имеет вид:

$$\Delta w = 0, \qquad \Delta w \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i^2}.$$

Первая краевая задача. На границе S области V задана функция w:

$$w = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S,$$

где $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Решение уравнения Лапласа ищется в области V.

Первую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Дирихле.

Вторая краевая задача. На границе S области V задана производная по (внешней) нормали функции w:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = g(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S.$$

Вторую краевую задачу для уравнения Лапласа часто называют задачей Неймана.

Третья краевая задача. На границе S области V задана линейная связь между функцией w и ее производной:

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} + a(\mathbf{x})w = h(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in S,$$

где $a(\mathbf{x}) \geqslant 0$. Обычно $a = \text{const}$.

Смешанные краевые задачи. В смешанных задачах на разных частях границы S задаются различные краевые условия.

Если функции f, g, h равны нулю, то соответствующие граничные условия называются однородными.

2. Плоский (двумерный) случай.

2.1. Точные решения. Уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат x, y:

$$\Delta w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Пусть $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — любая аналитическая функция комплексного переменного $z = x + iy$ (u и v — вещественные функции вещественных переменных x и y, $i^2 = -1$). Тогда действительная и мнимая части функции f удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta u = 0, \qquad \Delta v = 0.$$

Напомним, что необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции f являются условия Коши — Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Некоторые точные решения уравнения Лапласа в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
w &= ax + by + c,\\
w &= a(x^2 - y^2) + bxy,\\
w &= \exp(\pm kx)(a\cos ky + b\sin ky),\\
w &= (a\cos kx + b\sin kx)\exp(\pm ky),\\
w &= (a\,\mathrm{sh}\;kx + b\,\mathrm{ch}\;kx)(\alpha\cos ky + \beta\sin ky),\\
w &= (a\cos kx + b\sin kx)(\alpha\,\mathrm{sh}\;ky + \beta\,\mathrm{ch}\;ky),
\end{aligned}$$

где a, b, k, α, β — произвольные постоянные.

Некоторые точные решения уравнения Лапласа в полярной системе координат ρ, φ ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$):

$$\begin{aligned}
w &= a\ln\rho + b,\\
w &= \left(a\rho^m + \frac{b}{\rho^m}\right)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi),
\end{aligned}$$

где $m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$; a, b, α, β — произвольные постоянные.

2.2. Первая краевая задача для полуплоскости.

Граничное условие:

$$w = f(x) \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение ($y > 0$):

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{yf(x_0)\,dx_0}{(x_0 - x)^2 + y^2}.$$

2.3. Вторая краевая задача для полуплоскости.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = f(x) \qquad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение ($y > 0$):

$$w(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x_0)\ln\sqrt{(x_0 - x)^2 + y^2}\,dx_0 + C,$$

где C — произвольная постоянная.

2.4. Первая краевая задача для круга.

Граничное условие:

$$w = f(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Решение внутренней задачи ($\rho \leqslant R$):

$$w(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{R^2 - \rho^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}\, d\psi.$$

Эту формулу принято называть интегралом Пуассона.

Решение внутренней задачи в виде ряда:

$$w(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\, d\psi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \cos(n\psi)\, d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \sin(n\psi)\, d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3, \dots$$

Решение внешней задачи ($\rho \geqslant R$):

$$w(\rho, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \frac{\rho^2 - R^2}{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}\, d\psi.$$

Решение внешней задачи в виде ряда:

$$w(\rho, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{R}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

2.5. Вторая краевая задача для круга.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = f(\varphi) \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Функция $f(\varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости:

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi)\, d\varphi = 0.$$

Решение внутренней задачи ($\rho \leqslant R$):

$$w(\rho, \varphi) = \frac{R}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) \ln \frac{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi - \psi) + R^2}{R^2}\, d\psi + C,$$

где C — произвольная постоянная (эту формулу принято называть интегралом Дини).

Решение внутренней задачи в виде ряда:

$$w(\rho,\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + C,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение внешней задачи ($\rho \geqslant R$):

$$w(\rho,\varphi) = -\frac{R}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\ln\frac{\rho^2 - 2R\rho\cos(\varphi-\psi) + R^2}{\rho^2}\,d\psi + C,$$

где C — произвольная постоянная.

Решение внутренней задачи в виде ряда:

$$w(\rho,\varphi) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) + C,$$

где коэффициенты a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи, C — произвольная постоянная.

2.6. Третья краевая задача для круга.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} + kw = f(\varphi) \quad \text{при} \quad \rho = R.$$

Решение внутренней задачи ($\rho \leqslant R$):

$$w(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{kR+n}\left(\frac{\rho}{R}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\,d\psi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Решение внешней задачи ($\rho \geqslant R$):

$$w(\rho,\varphi) = \frac{a_0}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R}{kR-n}\left(\frac{R}{\rho}\right)^n (a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты a_0, a_n, b_n определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

2.7. Первая краевая задача для кольца ($R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$).

Граничные условия:

$$w = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad \rho = R_1,$$
$$w = f_2(\varphi) \quad \text{при} \quad \rho = R_2.$$

Решение:

$$w(\rho,\varphi) = A + B\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi),$$

где коэффициенты A, B, A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$A = \frac{1}{2}\frac{a_0^{(1)} - a_0^{(2)}}{\ln R_1 - \ln R_2}, \qquad B = \frac{a_0^{(2)}\ln R_1 - a_0^{(1)}\ln R_2}{\ln R_1 - \ln R_2},$$

$$A_n = \frac{R_2^n a_n^{(2)} - R_1^n a_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \qquad B_n = \frac{R_2^n b_n^{(2)} - R_1^n b_n^{(1)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}},$$

$$C_n = \frac{R_2^n a_n^{(1)} - R_1^n a_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}, \qquad D_n = \frac{R_2^n b_n^{(1)} - R_1^n b_n^{(2)}}{R_2^{2n} - R_1^{2n}}.$$

Здесь $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i=1,\ 2)$ — коэффициенты Фурье функций $f_1(\varphi)$ и $f_2(\varphi)$:

$$a_0^{(i)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_i(\psi)\,d\psi,$$

$$a_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_i(\psi)\cos(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots,$$

$$b_n^{(i)} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_i(\psi)\sin(n\psi)\,d\psi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \dots$$

2.8. Вторая краевая задача для кольца ($R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$). Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = f_1(\varphi) \quad \text{при} \quad \rho = R_1,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = f_2(\varphi) \quad \text{при} \quad \rho = R_2.$$

Решение:

$$w(\rho,\varphi) = B\ln\rho + \sum_{n=1}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^n}(C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi) + C,$$

где коэффициенты B, A_n, B_n, C_n, D_n определяются по формулам

$$B = \frac{1}{2}R_1 a_0^{(2)}, \quad A_n = \frac{R_2^{n+1} a_n^{(2)} - R_1^{n+1} a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}, \quad B_n = \frac{R_2^{n+1} b_n^{(2)} - R_1^{n+1} b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})},$$

$$C_n = (R_1R_2)^{n+1}\frac{R_1^{n-1} a_n^{(2)} - R_2^{n-1} a_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})}, \quad D_n = (R_1R_2)^{n+1}\frac{R_1^{n-1} b_n^{(2)} - R_2^{n-1} b_n^{(1)}}{n(R_2^{2n} - R_1^{2n})},$$

константы $a_n^{(i)}$, $b_n^{(i)}$ $(i = 1,\ 2)$ определяются теми же формулами, что и для первой краевой задачи, C — произвольная постоянная.

Замечание. Отметим, что должно выполняться следующее равенство $a_0^{(2)} R_1 = a_0^{(1)} R_2$, которое является следствием условия разрешимости задачи: $\int_{\rho=R_1} f_1\, dS + \int_{\rho=R_2} f_2\, dS = 0$.

2.9. Первая краевая задача для прямоугольника.

Граничные условия:

$$w = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$w = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sh}\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right] \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi}{a}y\right),$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются формулами

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_0^b f_1(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_0^b f_2(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi,$$
$$C_n = \frac{2}{\mu_n} \int_0^a f_3(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \quad D_n = \frac{2}{\mu_n} \int_0^a f_4(\xi) \sin\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi,$$
$$\lambda_n = b \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \quad \mu_n = a \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right).$$

2.10. Вторая краевая задача для прямоугольника.

Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f_1(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = f_2(y) \quad \text{при} \quad x = a,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = f_3(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = f_4(x) \quad \text{при} \quad y = b.$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$w(x,y) = -\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{ch}\left[\frac{n\pi}{b}(a-x)\right] \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{ch}\left[\frac{n\pi}{a}(b-y)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi}{a}y\right) + K,$$

где коэффициенты A_n, B_n, C_n, D_n определяются формулами (K — произвольная постоянная)

$$A_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_0^b f_1(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi, \quad B_n = \frac{2}{\lambda_n} \int_0^b f_2(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{b}\right) d\xi,$$
$$C_n = \frac{2}{\mu_n} \int_0^a f_3(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi, \quad D_n = \frac{2}{\mu_n} \int_0^a f_4(\xi) \cos\left(\frac{n\pi\xi}{a}\right) d\xi,$$
$$\lambda_n = n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi a}{b}\right), \quad \mu_n = n\pi \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right).$$

2.11. Смешанные краевые задачи для прямоугольника.

1. На двух противоположных сторонах прямоугольника заданы краевые условия первого рода, а на двух других — условия второго рода:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = g(x) \quad \text{при} \quad y = b,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = h(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = s(y) \quad \text{при} \quad x = a.$$

Решение ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\lambda_{ba}} \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \operatorname{sh}\left[\frac{\pi n}{a}(b-y)\right] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g_n}{\lambda_{ba}} \cos\left(\frac{\pi n x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n y}{a}\right) -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b h_n}{\pi n \lambda_{ab}} \operatorname{ch}\left[\frac{\pi n}{b}(a-x)\right] \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b s_n}{\pi n \lambda_{ab}} \operatorname{ch}\left(\frac{\pi n x}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right),$$
$$\lambda_{ab} = \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n a}{b}\right), \qquad \lambda_{ba} = \operatorname{sh}\left(\frac{\pi n b}{a}\right),$$

где f_n, g_n, h_n, s_n — коэффициенты Фурье соответствующих функций:

$$f_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(\xi) \cos\left(\frac{\pi n \xi}{a}\right) d\xi, \quad g_n = \frac{2}{a} \int_0^a g(\xi) \cos\left(\frac{\pi n \xi}{a}\right) d\xi,$$
$$h_n = \frac{2}{b} \int_0^b h(\xi) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{b}\right) d\xi, \quad s_n = \frac{2}{b} \int_0^b s(\xi) \sin\left(\frac{\pi n \xi}{b}\right) d\xi.$$

2. На двух соседних сторонах прямоугольника заданы краевые условия первого рода, а на двух других — условия второго рода:

$$w = f(y) \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = g(x) \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial x} = h(y) \quad \text{при} \quad x = a, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = s(x) \quad \text{при} \quad y = b,$$

где $f(0) = g(0)$.

Решение ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$w(x,y) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{f}_n}{\operatorname{ch}\omega_{ab}} \operatorname{ch}\left(\omega_{ab}\frac{a-x}{a}\right) \sin\left(\omega_{ab}\frac{y}{a}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overline{g}_n}{\operatorname{ch}\omega_{ba}} \sin\left(\omega_{ba}\frac{x}{b}\right) \operatorname{ch}\left(\omega_{ba}\frac{b-y}{b}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi h_n}{a(2n+1)\operatorname{ch}\omega_{ab}} \operatorname{sh}\left(\omega_{ab}\frac{x}{a}\right) \sin\left(\omega_{ab}\frac{y}{a}\right) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi s_n}{b(2n+1)\operatorname{ch}\omega_{ba}} \sin\left(\omega_{ba}\frac{x}{b}\right) \operatorname{sh}\left(\omega_{ba}\frac{y}{b}\right),$$
$$\omega_{ab} = \frac{\pi(2n+1)a}{2b}, \qquad \omega_{ba} = \frac{\pi(2n+1)b}{2a},$$

где $\overline{f}_n$, $\overline{g}_n$, h_n, s_n — коэффициенты Фурье соответствующих функций

$$\overline{f}_n = \frac{2}{b}\int_0^b \overline{f}(\xi)\sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{b}\xi\right]d\xi,\quad \overline{g}_n = \frac{2}{a}\int_0^a \overline{g}(\xi)\sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}\xi\right]d\xi,$$
$$h_n = \frac{2}{b}\int_0^b h(\xi)\sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{b}\xi\right]d\xi,\quad s_n = \frac{2}{a}\int_0^a s(\xi)\sin\left[\frac{\pi(2n+1)}{a}\xi\right]d\xi,$$
$$\overline{f}(y) = f(y) - f(0),\quad \overline{g}(x) = g(x) - g(0).$$

2.12. Область произвольной формы. Метод конформных отображений. Всякую плоскую односвязную область, ограниченную кусочно-гладкой кривой, можно взаимно однозначно отобразить на единичный круг. Первая краевая задача для такой области сводится к первой краевой задаче для круга, которая рассмотрена ранее.

Пусть $\zeta = \zeta(z)$ — аналитическая функция, реализующая это отображение из комплексной области $z = x + iy$ в комплексную область $\zeta = u + iv$, где $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ — новые независимые переменные. Учитывая, что действительная и мнимая части аналитических функций удовлетворяют условиям Коши — Римана $\partial_x u = \partial_y v$, $\partial_y u = -\partial_x v$, имеем

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \left|\frac{d\zeta}{dz}\right|\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right).$$

Поэтому при этом преобразовании уравнение Лапласа в плоскости xy переходит в уравнение Лапласа в плоскости uv. Естественно следует преобразовать и граничное условие.

Значительное число конформных отображений (т.е. осуществляемых аналитическими функциями) для областей различной формы можно найти, например, в книгах М. М. Лаврентьева, Б. В. Шабата (1973) и В. И. Лаврика, В. Н. Савенкова (1970).

3. Трехмерный случай.

3.1. Точные решения. Уравнение Лапласа в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z:

$$\Delta w \equiv \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0.$$

Некоторые точные решения уравнения Лапласа в декартовой системе координат:

$$w = ax + by + cz + d,$$
$$w = ax^2 + by^2 - (a+b)z^2 + \alpha xy + \beta xz + \gamma yz,$$
$$w = \cos(k_1 x + k_2 y)\exp(\pm kz),$$
$$w = \sin(k_1 x + k_2 y)\exp(\pm kz),$$
$$w = \exp(k_1 x + k_2 y)\cos(kz + a),$$
$$w = \exp(\pm kx)\cos(k_1 y + a)\cos(k_2 z + b),$$
$$w = \operatorname{ch}(k_1 x)\operatorname{ch}(k_2 y)\cos(kz + b),$$

$$w = \operatorname{ch}(k_1 x)\operatorname{sh}(k_2 y)\cos(kz + b),$$
$$w = \operatorname{ch}(kx)\cos(k_1 y + a)\cos(k_2 z + b),$$
$$w = \operatorname{sh}(k_1 x)\operatorname{sh}(k_2 y)\sin(kz + b),$$
$$w = \operatorname{sh}(kx)\sin(k_1 y + a)\sin(k_2 z + b),$$

где a, b, c, d, α, β, γ, k_1, k_2 — произвольные постоянные, $k = \sqrt{k_1^2 + k_2^2}$.

Некоторые точные решения уравнения Лапласа в сферической системе координат r, θ, φ ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$):

$$w = \frac{a}{r} + b,$$
$$w = \left(ar^n + \frac{b}{r^{n+1}}\right)P_n(\cos\theta),$$
$$w = \left(ar^n + \frac{b}{r^{n+1}}\right)P_n^m(\cos\theta)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots, n$; a, b, α, β — произвольные постоянные, $P_n(\xi)$ — полиномы Лежандра, $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра.

Некоторые точные решения уравнения Лапласа в цилиндрической системе координат ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$):

$$w = \left(a\rho^m + \frac{b}{\rho^m}\right)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi)(A + Bz),$$
$$w = J_m(k\rho)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi)\exp(\pm kz),$$
$$w = Y_m(k\rho)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi)\exp(\pm kz),$$
$$w = I_m(k\rho)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi)(A\cos kz + B\sin kz),$$
$$w = K_m(k\rho)(\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi)(A\cos kz + B\sin kz),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; A, B, a, b, k, α, β — произвольные постоянные, $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.2. Первая краевая задача для полупространства.

Граничное условие:

$$w = f(x, y) \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение ($z > 0$):

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zf(x_0, y_0)\,dx_0\,dy_0}{\left[(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

3.3. Вторая краевая задача для полупространства.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = f(x, y) \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение ($z > 0$):

$$w(x, y, z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x_0, y_0)\,dx_0\,dy_0}{\sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + z^2}} + C,$$

где C — произвольная постоянная.

3.4. Первая краевая задача для сферы.

Граничное условие:

$$w = f(\theta, \varphi) \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Решение внутренней задачи ($r \leqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \frac{R^2 - r^2}{(r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2)^{3/2}} \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0,$$
$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0).$$

Эту формулу принято называть интегралом Пуассона для сферы.

Решение в виде ряда:

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n Y_n(\theta, \varphi),$$
$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где

$$A_{00} = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \, d\theta \, d\varphi,$$
$$A_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos\theta) \cos m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$
$$B_{nm} = \frac{(2n+1)(n-m)!}{2\pi(n+m)!} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) P_n^m(\cos\theta) \sin m\varphi \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$
$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x), \qquad P_n(x) \text{ — полиномы Лежандра.}$$

Решение внешней задачи ($r \geqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = \frac{R}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta_0, \varphi_0) \frac{r^2 - R^2}{(r^2 - 2Rr\cos\gamma + R^2)^{3/2}} \sin\theta_0 \, d\theta_0 \, d\varphi_0,$$

где $\cos\gamma$ определяется той же формулой, что и для внутренней задачи.

Решение в виде ряда:

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} Y_n(\theta, \varphi),$$
$$Y_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{n} (A_{nm}\cos m\varphi + B_{nm}\sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней задачи.

3.5. Вторая краевая задача для сферы.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = f(\theta, \varphi) \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Функция $f(\theta, \varphi)$ должна удовлетворять условию разрешимости:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.$$

Решение внутренней задачи ($r \leqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R}{n} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta) + C,$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней первой краевой задачи, C — произвольная постоянная.

Решение внешней задачи ($r \geqslant R$):

$$w(r, \theta, \varphi) = -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{R}{n+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) P_n^m(\cos\theta),$$

где коэффициенты A_{nm} и B_{nm} определяются теми же формулами, что и для внутренней первой краевой задачи; произвольная постоянная опущена.

3.6. Первая краевая задача для цилиндра.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} w &= f(\varphi, z) && \text{при} \quad \rho = a, \\ w &= g_1(\rho, \varphi) && \text{при} \quad z = 0, \\ w &= g_2(\rho, \varphi) && \text{при} \quad z = b. \end{aligned}$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant \rho \leqslant a$, $0 \leqslant z \leqslant b$):

$$\begin{aligned} w(\rho, \varphi, z) = {} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{I_n\left(\frac{\pi m \rho}{b}\right)}{I_n\left(\frac{\pi m a}{b}\right)} (A_{nm} \cos n\varphi + B_{nm} \sin n\varphi) \sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right) + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_m^n \rho}{a}\right) (C_{nm}^{(1)} \cos n\varphi + D_{nm}^{(1)} \sin n\varphi) \frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\mu_m^n (b-z)}{a}\right]}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m^n b}{a}\right)} + \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n\left(\frac{\mu_m^n \rho}{a}\right) (C_{nm}^{(2)} \cos n\varphi + D_{nm}^{(2)} \sin n\varphi) \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m^n z}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{\mu_m^n b}{a}\right)}, \end{aligned}$$

где постоянные коэффициенты определяются по формулам

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi b(1 + \delta_{n0})} \int_0^{2\pi} \int_0^{b} f(\varphi, z) \cos(n\varphi) \sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right) d\varphi \, dz,$$

$$B_{nm} = \frac{2}{\pi b} \int_0^{2\pi} \int_0^{b} f(\varphi, z) \sin(n\varphi) \sin\left(\frac{\pi m z}{b}\right) d\varphi \, dz,$$

$$C_{nm}^{(i)} = \frac{2}{\pi a^2(1+\delta_{n0})[J_n'(\mu_n)]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a g_i(\rho,\varphi)\cos(n\varphi) J_n\Bigl(\frac{\mu_m^n \rho}{a}\Bigr)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$D_{nm}^{(i)} = \frac{2}{\pi a^2[J_n'(\mu_n)]^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a g_i(\rho,\varphi)\sin(n\varphi) J_n\Bigl(\frac{\mu_m^n \rho}{a}\Bigr)\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$\delta_{n0} = \begin{cases} 1 & \text{при } n=0, \\ 0 & \text{при } n\neq 0, \end{cases} \qquad i=1,\ 2,$$

$J_n(\rho)$ — функция Бесселя, μ_m^n — m-й корень уравнения $J_n(\mu) = 0$.

3.7. Первая краевая задача для прямоугольного параллелепипеда.

Граничные условия:

$$\begin{aligned} &w = f_1(y,z) \quad \text{при} \quad x=0, && w = f_2(y,z) \quad \text{при} \quad x=a, \\ &w = f_3(x,z) \quad \text{при} \quad y=0, && w = f_4(x,z) \quad \text{при} \quad y=b, \\ &w = f_5(x,y) \quad \text{при} \quad z=0, && w = f_6(x,y) \quad \text{при} \quad z=c. \end{aligned}$$

Решение внутренней задачи ($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$):

$$\begin{aligned} w(x,y) = {}& \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}^2 \operatorname{sh}(\lambda_{mn}^1 x) + f_{mn}^1 \operatorname{sh}[\lambda_{mn}^1(a-x)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^1 a)} \sin\Bigl(\frac{\pi m y}{b}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n z}{c}\Bigr) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}^4 \operatorname{sh}(\lambda_{mn}^2 y) + f_{mn}^3 \operatorname{sh}[\lambda_{mn}^2(b-y)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^2 b)} \sin\Bigl(\frac{\pi m x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n z}{c}\Bigr) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{mn}^5 \operatorname{sh}(\lambda_{mn}^3 z) + f_{mn}^6 \operatorname{sh}[\lambda_{mn}^3(c-z)]}{\operatorname{sh}(\lambda_{mn}^3 c)} \sin\Bigl(\frac{\pi m x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr), \end{aligned}$$

где постоянные коэффициенты определяются формулами

$$\lambda_{mn}^1 = \pi\sqrt{\frac{m^2}{b^2} + \frac{n^2}{c^2}}, \quad \lambda_{mn}^2 = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{c^2}}, \quad \lambda_{mn}^3 = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}},$$

$$f_{mn}^i = \begin{cases} \dfrac{4}{bc}\displaystyle\int_0^b\int_0^c f_i(y,z)\sin\Bigl(\frac{\pi m y}{b}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n z}{c}\Bigr)\,dy\,dz & \text{при } i=1,\ 2; \\ \dfrac{4}{ac}\displaystyle\int_0^a\int_0^c f_i(x,z)\sin\Bigl(\frac{\pi m x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n z}{c}\Bigr)\,dx\,dz & \text{при } i=3,\ 4; \\ \dfrac{4}{ab}\displaystyle\int_0^a\int_0^b f_i(x,y)\sin\Bigl(\frac{\pi m x}{a}\Bigr)\sin\Bigl(\frac{\pi n y}{b}\Bigr)\,dx\,dy & \text{при } i=5,\ 6. \end{cases}$$

Литература к разд. 5.4.1: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), А. Г. Бутковский (1979), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.4.2. Уравнение Пуассона $\Delta w + \Phi(x) = 0$

1. Предварительные замечания.

Уравнение Пуассона, как и уравнение Лапласа, часто встречается теории тепло- и массопереноса, в гидро- и аэромеханике, теории упругости, электростатике и других областях механики и физики. ***Физический*** *смысл уравнения Пуассона*: оно описывает стационарное распределение температуры при наличии источников тепла в рассматриваемой области.

Уравнение Лапласа является частным случаем уравнения Пуассона при $\Phi \equiv 0$. Краевые задачи для уравнения Пуассона формулируются так же, как и для уравнения Лапласа (см. раздел 5.4.1).

Решение уравнения Пуассона в области V с однородными граничными условиями на границе S можно записать в виде

$$w = \int_V G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)\Phi(\boldsymbol{x}_0)\,dv_0, \tag{1}$$

где $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)$ — функция Грина, $\boldsymbol{x} = \{x^1, x^2, \dots, x^n\}$, $\boldsymbol{x}_0 = \{x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n\}$. Интегрирование в формуле (1) ведется по переменным x_0^i. Функция Грина симметрична относительно своих аргументов: $G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0) = G(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{x})$.

Решение уравнения Пуассона с неоднородными граничными условиями складывается из решения уравнения Пуассона с однородными граничными условиями (1) и решения уравнения Лапласа с неоднородными граничными условиями (эти решения для областей различной формы приведены в разделе 5.4.1).

Решение первой краевой задачи для уравнения Пуассона с неоднородным граничным условием

$$w = f(\boldsymbol{x}), \qquad \boldsymbol{x} \in S,$$

можно записать в виде

$$w = \int_V G(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_0)\Phi(\boldsymbol{x}_0)\,dv_0 - \int_S f(\boldsymbol{x}_0)\frac{\partial G}{\partial \nu_0}\,ds_0, \tag{2}$$

где $\dfrac{\partial G}{\partial \nu_0}$ — производная функции Грина на границе S, взятая по направлению внешней нормали к S.

Далее часто будут рассматриваться только задачи с однородными граничными условиями с указанием функции Грина, которая позволяет находить решение по формулам (1) или (2).

2. Плоский (двумерный) случай.

2.1. Область: $-\infty < x, y < +\infty$.

Решение:

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x_0, y_0)\ln\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}}\,dx_0\,dy_0.$$

2.2. Первая краевая задача для полуплоскости.

Граничное условие:

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Решение ($y > 0$):

$$w(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Phi(x_0,y_0)\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}\,dx_0\,dy_0 + \\ + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{yf(x_0)\,dx_0}{(x_0-x)^2+y^2}.$$

2.3. Первая краевая задача для четвертьплоскости.
Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

Функция Грина ($x > 0,\ y > 0$):

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2+(y-y_0)^2}}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\sqrt{(x+x_0)^2+(y+y_0)^2}}.$$

2.4. Первая краевая задача для круга.
Граничное условие:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R.$$

Функция Грина для внутренней задачи ($\rho \leqslant R$):

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{\rho} - \ln\left(\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{\rho_*}\right)\right],$$

где

$$\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}, \quad \rho_* = \sqrt{(x-x_*)^2+(y-y_*)^2},$$
$$\rho_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2}, \qquad x_* = \frac{R^2}{\rho_0^2}x_0, \quad y_* = \frac{R^2}{\rho_0^2}y_0.$$

Функция Грина для внутренней задачи в виде рядов ($\rho \leqslant R$):

$$G(\rho,\varphi,\rho_0,\varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\begin{cases} -\ln\rho + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\rho_0}{\rho}\right)^n\cos[n(\varphi-\varphi_0)] \\ \hfill \text{при } 0 \leqslant \rho_0 < \rho \leqslant R, \\ -\ln\rho_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{\rho}{\rho_0}\right)^n\cos[n(\varphi-\varphi_0)] \\ \hfill \text{при } 0 \leqslant \rho < \rho_0 \leqslant R, \end{cases}$$

2.5. Первая краевая задача для прямоугольника.
Граничные условия:

$$w = 0 \ \text{при} \ x = 0, \qquad w = 0 \ \text{при} \ x = a,$$
$$w = 0 \ \text{при} \ y = 0, \qquad w = 0 \ \text{при} \ y = b.$$

Функция Грина ($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b$):

$$w(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{ab}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(\lambda_n x)\sin(\lambda_m y)\sin(\lambda_n x_0)\sin(\lambda_m y_0)}{\lambda_n^2+\lambda_m^2},$$
$$\lambda_n = \frac{\pi n}{a}, \qquad \lambda_m = \frac{\pi m}{b}.$$

2.6. Область произвольной формы. Метод конформных отображений. Всякую плоскую односвязную область V в плоскости xy, ограниченную кусочно-гладкой кривой, можно с помощью конформного отображения взаимно однозначно отобразить на верхнюю полуплоскость или на единичный круг в плоскости uv. При конформном отображении уравнение Пуассона в плоскости xy переходит в уравнение Пуассона в плоскости uv (при таком преобразовании в уравнении изменится функция Φ и в граничном условии — функция f). Поэтому первая краевая задача для плоской области V сводится к первой краевой задаче для верхней полуплоскости или круга, которые рассмотрены ранее.

Функция Грина:

$$G(x,y,x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\omega(z)-\bar{\omega}(\zeta)}{\omega(z)-\omega(\zeta)}\right|, \qquad z = x+iy, \quad \zeta = x_0+iy_0,$$

где $\omega(z)$ — конформное отображение области V в плоскости z на верхнюю полуплоскость в плоскости ζ, черта сверху обозначает комплексно-сопряженную величину.

Значительное число конформных отображений (т.е. осуществляемых аналитическими функциями) областей различной формы на верхнюю полуплоскость можно найти, например, в книгах М. М. Лаврентьева, Б. В. Шабата (1973) и В. И. Лаврика, В. Н. Савенкова (1970).

3. Трехмерный случай.

3.1. Область: $-\infty < x, \ y, \ z < +\infty$.

Решение:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\Phi(x_0,y_0,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}.$$

3.2. Первая краевая задача для полупространства.

Область: $-\infty < x, \ y < +\infty, \ 0 \leqslant z < +\infty$.

Граничное условие:

$$w = f(x,y) \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Решение:

$$w(x,y,z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{zf(x_0,y_0)\,dx_0\,dy_0}{\left[(x_0-x)^2+(y_0-y)^2+z^2\right]^{3/2}} + \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{R_-}-\frac{1}{R_+}\right)\Phi(x_0,y_0,z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0,$$

где

$$R_- = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$

$$R_+ = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}.$$

3.3. Вторая и третья краевые задачи для полупространства.

Область: $-\infty < x, \ y < +\infty, \ 0 \leqslant z < +\infty$.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial z} + aw = 0 \qquad \text{при} \qquad z = 0.$$

Значению $a = 0$ соответствует вторая краевая задача.

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} + \right.$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} -$$
$$\left. - 2\int_{z_0}^{+\infty} \frac{\exp[-a(z_0-t)]\,dt}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+t)^2}}\right].$$

3.4. Первая краевая задача для двугранного угла.

Область: $-\infty < x < +\infty$, $0 \leqslant y$, $z < +\infty$.

Граничные условия:

$$w = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0,$$
$$w = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}} - \right.$$
$$- \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2}} -$$
$$- \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z-z_0)^2}} +$$
$$\left. + \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2+(z+z_0)^2}}\right].$$

3.5. Первая краевая задача для октанта.

Область: $0 \leqslant x < +\infty$, $0 \leqslant y < +\infty$, $0 \leqslant z < +\infty$.

Граничные условия:

$$w = 0 \qquad \text{при} \quad x = 0,$$
$$w = 0 \qquad \text{при} \quad y = 0,$$
$$w = 0 \qquad \text{при} \quad z = 0.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{m=0}^{1}\sum_{n=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} \frac{(-1)^{m+n+k}}{\sqrt{X_m^2+Y_n^2+Z_k^2}},$$
$$X_m = x - (-1)^m x_0, \quad Y_n = y - (-1)^n y_0, \quad Z_k = z - (-1)^k z_0.$$

3.6. Первая краевая задача для слоя.

Область: $-\infty < x$, $y < +\infty$, $0 \leqslant z \leqslant l$.

Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = l.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0-2nl)^2}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0-2nl)^2}}\right].$$

*3.7. **Первая краевая задача для сферы.***
Область: $x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2$.
Граничное условие:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad r = R.$$

Функция Грина:

$$G(x,y,z,x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r} - \frac{R}{r_0}\frac{1}{r_*}\right),$$

где

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2},$$
$$r_* = \sqrt{(x-x_*)^2+(y-y_*)^2+(z-z_*)^2},$$
$$r_0 = \sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}, \quad x_* = \frac{R^2}{r_0^2}x_0, \quad y_* = \frac{R^2}{r_0^2}y_0, \quad z_* = \frac{R^2}{r_0^2}z_0.$$

Литература к разд. 5.4.2: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), А. Г. Бутковский (1979), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.4.3. Уравнение Гельмгольца $\Delta w + \lambda w = \Phi(\mathrm{x})$

К уравнению Гельмгольца приводит широкий класс задач, связанных с установившимися колебаниями (механическими, акустическими, электромагнитными и др.).

1. Предварительные замечания.

*1.1. **Некоторые определения.*** При $\Phi = 0$ уравнение Гельмгольца называется однородным, при $\Phi \neq 0$ — неоднородным.

Краевые задачи для уравнения Гельмгольца формулируются так же, как и для уравнения Лапласа (см. раздел 5.4.1.). Однородной краевой задачей называется краевая задача для однородного уравнения с однородными краевыми условиями (частным решением однородной краевой задачи является $w = 0$).

Значения параметра $\lambda = \lambda_n$, при которых существуют нетривиальные (т.е. отличные от тождественного нуля) решения однородной краевой задачи, называются собственными значениями, а соответствующие им решения $w = w_n$ — собственными функциями данной краевой задачи. Далее считается, что область V конечна.

1.2. Свойства собственных значений и собственных функций.

1. Существует бесконечное множество собственных значений $\{\lambda_n\}$, которое образует дискретный спектр данной краевой задачи.

2. Все собственные значения положительны, за исключением собственных значений второй краевой задачи, для которой существует $\lambda_0 = 0$ (соответствующая собственная функция $w_0 = \mathrm{const}$). Собственные значения будем располагать в порядке возрастания $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots$

3. Собственные значения стремятся к бесконечности с возрастанием их номера. Справедливы следующие асимптотические оценки:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n} = \frac{V_2}{4\pi} \qquad \text{для двумерной области,}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\lambda_n^{3/2}} = \frac{V_3}{6\pi^2} \qquad \text{для трехмерной области,}$$

где V_2 — площадь двумерной области, V_2 — объем трехмерной области.

4. Собственные функции определены с точностью до постоянного множителя. Собственные функции, соответствующие разным собственным значениям $\lambda_n \neq \lambda_m$, ортогональны:

$$\int_V w_n w_m \, dv = 0.$$

5. Всякая дважды непрерывно дифференцируемая функция $f = f(\mathbf{x})$, удовлетворяющая граничным условиям соответствующей краевой задачи, может быть разложена в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям этой краевой задачи:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} a_n w_n, \qquad \text{где} \quad a_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_V f w_n \, dv, \quad \|w_n\|^2 = \int_V w_n^2 \, dv.$$

Если f суммируема с квадратом, то ряд сходится в среднем.

6. Собственные значения первой краевой задачи не возрастают при расширении области.

1.3. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца с однородными краевыми условиями. Имеются три возможности:

1) Если параметр λ не равен ни одному из собственных значений, то существует решение задачи, определяемое рядом

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda - \lambda_n} w_n, \quad \text{где} \quad A_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_V \Phi w_n \, dv, \quad \|w_n\|^2 = \int_V w_n^2 \, dv.$$

2) Если $\lambda = \lambda_k$, то условием существования решения неоднородной задачи будет условие ортогональности функции Φ к собственной функции w_k:

$$\int_V \Phi w_k \, dv = 0.$$

Решение в этом случае имеет вид

$$w = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{A_n}{\lambda_k - \lambda_n} w_n + \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{A_n}{\lambda_k - \lambda_n} w_n + C w_k, \quad A_n = \frac{1}{\|w_n\|^2} \int_V \Phi w_n \, dv,$$

где $\|w_n\|^2 = \int_V w_n^2 \, dv$, C — произвольная постоянная.

3) Если $\lambda = \lambda_k$ и $\int_V \Phi w_k \, dv \neq 0$, то краевая задача для неоднородного уравнения не имеет решения.

1.4. Решение неоднородного уравнения Гельмгольца с неоднородными краевыми условиями. В случае неоднородных краевых задач делается любая замена зависимой переменой, приводящая к однородным краевым условиям (таких замен существует бесконечно много). Решение преобразованной задачи далее строится по схеме, указанной выше в п. 1.3.

Далее будут указаны собственные значения и собственные функции наиболее важных однородных краевых задач для уравнения Гельмгольца. Решения соответствующих неоднородных краевых задач строятся методом, указанным в пп. 1.3, 1.4.

2. Плоский (двумерный) случай.

2.1. Точные решения. Однородное уравнение Гельмгольца в прямоугольной декартовой системе координат x, y:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \lambda w = 0.$$

Некоторые точные решения однородного уравнения Гельмгольца в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned}
&w = (ax+b)(\alpha \cos ky + \beta \sin ky), && \lambda = k^2,\\
&w = (ax+b)(\alpha \operatorname{ch} ky + \beta \operatorname{sh} ky), && \lambda = -k^2,\\
&w = (a \cos kx + b \sin kx)(\alpha y + \beta), && \lambda = k^2,\\
&w = (a \operatorname{ch} kx + b \operatorname{sh} kx)(\alpha y + \beta), && \lambda = -k^2,\\
&w = (a \cos k_1 x + b \sin k_1 x)(\alpha \cos k_2 y + \beta \sin k_2 y), && \lambda = k_1^2 + k_2^2,\\
&w = (a \cos k_1 x + b \sin k_1 x)(\alpha \operatorname{ch} k_2 y + \beta \operatorname{sh} k_2 y), && \lambda = k_1^2 - k_2^2,\\
&w = (a \operatorname{ch} k_1 x + b \operatorname{sh} k_1 x)(\alpha \cos k_2 y + \beta \sin k_2 y), && \lambda = -k_1^2 + k_2^2,\\
&w = (a \operatorname{ch} k_1 x + b \operatorname{sh} k_1 x)(\alpha \operatorname{ch} k_2 y + \beta \operatorname{sh} k_2 y), && \lambda = -k_1^2 - k_2^2,
\end{aligned}$$

где a, b, α, β — произвольные постоянные.

Некоторые точные решения однородного уравнения Гельмгольца в полярной системе координат ρ, φ $(x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi)$:

$$w = [aJ_0(k\rho) + bY_0(k\rho)](\alpha\varphi + \beta), \quad \lambda = k^2,$$
$$w = [aI_0(k\rho) + bK_0(k\rho)](\alpha\varphi + \beta), \quad \lambda = -k^2,$$
$$w = [aJ_m(k\rho) + bY_m(k\rho)](\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi), \quad \lambda = k^2,$$
$$w = [aI_m(k\rho) + bK_m(k\rho)](\alpha\cos m\varphi + \beta\sin m\varphi), \quad \lambda = -k^2,$$

где $m = 1,\ 2,\ \ldots$; a, b, α, β — произвольные постоянные; $J_m(\rho)$ и $Y_m(\rho)$ — функции Бесселя, $I_m(\rho)$ и $K_m(\rho)$ — модифицированные функции Бесселя.

2.2. Первая краевая задача для прямоугольника $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$. Граничные условия:

$$w = 0 \ \text{при}\ x = 0, \qquad w = 0 \ \text{при}\ x = a,$$
$$w = 0 \ \text{при}\ y = 0, \qquad w = 0 \ \text{при}\ y = b.$$

Собственные значения (их удобно отмечать двойным индексом):

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

где $n = 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$w_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad \|w_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

2.3. Вторая краевая задача для прямоугольника $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$. Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{при}\ x = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \ \text{при}\ x = a,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \ \text{при}\ y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \ \text{при}\ y = b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$w_{nm} = \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad \|w_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}(1 + \delta_{n0})(1 + \delta_{m0}),$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

2.4. Третья краевая задача для прямоугольника $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$. Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial x} - c_1 w = 0 \ \text{при}\ x = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial x} + c_2 w = 0 \ \text{при}\ x = a,$$
$$\frac{\partial w}{\partial y} - c_3 w = 0 \ \text{при}\ y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} + c_4 w = 0 \ \text{при}\ y = b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \mu_n^2 + \nu_m^2,$$

где μ_n и ν_m — корни трансцендентных уравнений

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(c_1 + c_2)\mu}{\mu^2 - c_1 c_2}, \qquad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(c_3 + c_4)\nu}{\nu^2 - c_3 c_4}.$$

Собственные функции:

$$w_{nm} = (\mu_n \cos \mu_n x + c_1 \sin \mu_n x)(\nu_n \cos \nu_n y + c_3 \sin \nu_n y).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\left[\dfrac{a}{2} + \dfrac{(c_1 + c_2)(\mu_n^2 + c_1 c_2)}{(\mu_n^2 + c_1^2)(\mu_n^2 + c_2^2)}\right]}{\sqrt{\mu_n + c_1^2}} \frac{\left[\dfrac{b}{2} + \dfrac{(c_3 + c_4)(\nu_m^2 + c_3 c_4)}{(\nu_m^2 + c_3^2)(\nu_m^2 + c_4^2)}\right]}{\sqrt{\nu_m + c_2^2}}.$$

2.5. Смешанные краевые задачи для прямоугольника.

1. На двух противоположных сторонах прямоугольника заданы краевые условия первого рода, а на двух других — условия второго рода:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \pi^2\left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right),$$

где $n = 1, 2, 3, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$w_{nm} = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \qquad \|w_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}(1 + \delta_{m0}),$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

2. На двух соседних сторонах прямоугольника заданы краевые условия первого рода, а на двух других — условия второго рода:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0,$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a, \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\pi^2}{4}\left[\frac{(2n+1)^2}{a^2} + \frac{(2m+1)^2}{b^2}\right],$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 0, 1, 2, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$w_{nm} = \sin\left[\frac{\pi(2n+1)x}{2a}\right]\sin\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2b}\right], \qquad \|w_{nm}\|^2 = \frac{ab}{4}.$$

2.6. Первая краевая задача для круга $(0 \leqslant \rho \leqslant R)$.

Граничное условие:

$$w = 0 \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни функции Бесселя $J_n(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = J_n\bigl(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\cos n\varphi, \qquad w_{nm}^{(2)} = J_n\bigl(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}\,\bigr)\sin n\varphi.$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$w_{0m}(1) = J_0(\rho\sqrt{\lambda_{0m}}\,).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\pi R^2(1+\delta_{n0})}{2\xi_{nm}^2}[J_n'(\xi_{nm})]^2, \qquad k = 1,\,2; \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

2.7. Вторая краевая задача для круга $(0 \leqslant \rho \leqslant R)$.

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \qquad \text{при} \quad \rho = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни производной функции Бесселя: $J_n'(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}\,)\cos n\varphi, \qquad w_{nm}^{(2)} = J_n(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}\,)\sin n\varphi.$$

В этих формулах $n = 0,\,1,\,2,\,\ldots$; при $n \neq 0$ параметр m принимает значения $m = 1,\,2,\,3,\,\ldots$; при $n = 0$ имеется корень $\xi_{00} = 0$ (соответствующая ему собственная функция $w_{00} = 1$).

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$w_{0m}(1) = J_0\bigl(\rho\sqrt{\lambda_{0m}}\,\bigr).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\pi^2 R^2(1+\delta_{n0})}{2\xi_{nm}^2}(\xi_{nm}^2 - n^2)[J_n(\xi_{nm})]^2, \quad \|w_{00}\|^2 = \pi R^2,$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

2.8. Третья краевая задача для круга $(0 \leqslant \rho \leqslant R)$.
Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} + cw = 0 \qquad \text{при} \qquad \rho = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — k-й корень трансцендентного уравнения: $zJ_n'(\xi)+cRJ_n(\xi)=0$.
Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = J_n\big(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}\,\big)\cos n\varphi, \qquad w_{nm}^{(2)} = J_n\big(\rho\sqrt{\lambda_{nm}}\,\big)\sin n\varphi,$$

где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\ m = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$
Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\pi R^2(1+\delta_{n0})}{2\xi_{nm}^2}(c^2R^2+\xi_{nm}^2-n^2)[J_n(\xi_{nm})]^2, \quad k = 1,\ 2;$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

2.9. Первая краевая задача для кольца $(R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2)$.
Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \xi_{nm}^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где ξ_{nm} — корни трансцендентного уравнения:

$$J_n(zR_1)Y_n(\xi R_2) - J_n(\xi R_2)Y_n(zR_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$\begin{aligned} w_{nm}^{(1)} &= [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\cos n\varphi, \\ w_{nm}^{(2)} &= [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\sin n\varphi. \end{aligned} \tag{1}$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi\xi_{nm}^2}\,\frac{J_n^2(\xi_{nm}R_1) - J_n^2(\xi_{nm}R_2)}{J_n^2(\xi_{nm}R_2)}, \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

2.10. Вторая краевая задача для кольца $(R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2)$.
Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad \frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \xi_{nm}^2, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots,$$

где ξ_{nm} — корни трансцендентного уравнения:

$$J_n'(\xi R_1)Y_n'(\xi R_2) - J_n'(\xi R_2)Y_n'(\xi R_1) = 0.$$

При $n = 0$ существует также корень $\xi_{00} = 0$ и соответствующая ему собственная функция $w_{00}^{(1)} = 1$.

Собственные функции:

$$w_{nm}^{(1)} = [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\cos n\varphi,$$
$$w_{nm}^{(2)} = [J_n(\xi_{nm}\rho)Y_n(\xi_{nm}R_1) - J_n(\xi_{nm}R_1)Y_n(\xi_{nm}\rho)]\sin n\varphi.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{2(1+\delta_{n0})}{\pi\xi_{nm}^2}\left\{\left(1-\frac{n^2}{R_2^2\xi_{nm}^2}\right)\left[\frac{J_n'(\xi_{nm}R_1)}{J_n'(\xi_{nm}R_2)}\right]^2 - \left(1-\frac{n^2}{R_1^2\xi_{nm}^2}\right)\right\},$$
$$\|w_{00}^{(1)}\|^2 = \pi(R_2^2 - R_1^2); \quad k = 1,\,2; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$$

2.11. Первая краевая задача для сектора радиуса R с углом α. Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни функции Бесселя $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm} = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\xi_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{4}\left[J'_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm})\right]^2.$$

2.12. Вторая краевая задача для сектора радиуса R с углом α. Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \qquad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial \varphi} = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни функции Бесселя $J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{nm} = J_{\frac{n\pi}{\alpha}}\left(\xi_{nm}\frac{\rho}{R}\right)\cos\left(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\right), \qquad w_{00} = 1.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{4}(1+\delta_{n0})\Big(1 - \frac{n^2}{\xi_{nm}^2}\Big)\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm})\Big]^2, \qquad \|w_{00}\|^2 = \frac{\alpha R^2}{2}.$$

2.13. Первая краевая задача для кольцевого сектора **($R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$).** Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2,$$
$$w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad \varphi = \alpha.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nm} = \frac{\xi_{nm}^2}{R^2},$$

где ξ_{nm} — корни трансцендентного уравнения:

$$J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_1) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_2) - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_2) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{nm} = \Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}\rho) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_1) - J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_1) Y_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}\rho)\Big] \sin\Big(\frac{n\pi}{\alpha}\varphi\Big).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{nm}^{(k)}\|^2 = \frac{\alpha}{\pi^2 \xi_{nm}^2} \frac{\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_1)\Big]^2 - \Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_2)\Big]^2}{\Big[J_{\frac{n\pi}{\alpha}}(\xi_{nm}R_2)\Big]^2}.$$

3. Трехмерный случай.

3.1. Точные решения.

Однородное уравнение Гельмгольца в прямоугольной декартовой системе координат x, y, z:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \lambda w = 0.$$

Некоторые точные решения однородного уравнения Гельмгольца в декартовой системе координат:

$$w = (a_k \cos kx + b_k \sin kx)(a_n \cos ny + b_n \sin ny)(\alpha z + \beta), \qquad \lambda = k^2 + n^2;$$
$$w = (a_k \cos kx + b_k \sin kx)(a_n \operatorname{ch} ny + b_n \operatorname{sh} ny)(\alpha z + \beta), \qquad \lambda = k^2 - n^2;$$
$$w = (a_k \cos kx + b_k \sin ky)(a_n \cos ny + b_n \sin ny)(a_m \cos mz + b_m \sin mz),$$
$$\lambda = k^2 + n^2 + m^2;$$
$$w = (a_k \operatorname{ch} kx + b_k \operatorname{sh} ky)(a_n \cos ny + b_n \sin ny)(a_m \cos mz + b_m \sin mz),$$
$$\lambda = -k^2 + n^2 + m^2;$$
$$w = (a_k \operatorname{ch} kx + b_k \operatorname{sh} ky)(a_n \operatorname{ch} ny + b_n \operatorname{sh} ny)(a_m \cos mz + b_m \sin mz),$$
$$\lambda = -k^2 - n^2 + m^2;$$
$$w = (a_k \operatorname{ch} kx + b_k \operatorname{sh} ky)(a_n \operatorname{ch} ny + b_n \operatorname{sh} ny)(a_m \operatorname{ch} mz + b_m \operatorname{sh} mz),$$
$$\lambda = -k^2 - n^2 - m^2,$$

где a_k, a_n, a_m, b_k, b_n, b_m, α, β — произвольные постоянные.

Некоторые точные решения однородного уравнения Гельмгольца в сферической системе координат r, θ, φ ($x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$):

$$w = \frac{1}{r}(a\sin kr + b\cos br), \qquad \lambda = k^2,$$

$$w = \frac{1}{r}(a\,\mathrm{sh}\,kr + b\,\mathrm{ch}\,br), \qquad \lambda = -k^2,$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}(kr)\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m\sin m\varphi), \quad \lambda = k^2,$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{r}}Y_{n+1/2}(kr)\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m\sin m\varphi), \quad \lambda = k^2,$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{r}}I_{n+1/2}(kr)\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m\sin m\varphi), \quad \lambda = -k^2,$$

$$w = \frac{1}{\sqrt{r}}K_{n+1/2}(kr)\sum_{m=0}^{n}P_n^m(\cos\theta)(\alpha_m\cos m\varphi + \beta_m\sin m\varphi), \quad \lambda = -k^2,$$

где $n = 1, 2, \ldots$; a, b, α_m, β_m — произвольные постоянные; $P_n^m(\xi)$ — присоединенные функции Лежандра; $J_\nu(\xi)$, $Y_\nu(\xi)$ — функции Бесселя, $I_\nu(\xi)$, $K_\nu(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

Некоторые точные решения однородного уравнения Гельмгольца в цилиндрической системе координат ρ, φ, z ($x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$):

$$w = \bigl[aJ_m(\rho\sqrt{\lambda}) + bY_m(\rho\sqrt{\lambda})\bigr](\alpha_1\varphi + \beta_1)(\alpha_2 z + \beta_2 b),$$

$$w = J_m\bigl(\rho\sqrt{\lambda + k^2}\bigr)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi)\exp(\pm kz),$$

$$w = Y_m\bigl(\rho\sqrt{\lambda + k^2}\bigr)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi)\exp(\pm kz),$$

$$w = I_m\bigl(\rho\sqrt{\lambda - k^2}\bigr)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi)(\alpha\cos kz + \beta\sin kz),$$

$$w = K_m\bigl(\rho\sqrt{\lambda - k^2}\bigr)(a\cos m\varphi + b\sin m\varphi)(\alpha\cos kz + \beta\sin kz),$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots$; a, b, k, α, β — произвольные постоянные, $J_m(\xi)$ и $Y_m(\xi)$ — функции Бесселя, $I_m(\xi)$ и $K_m(\xi)$ — модифицированные функции Бесселя.

3.2. Первая краевая задача для прямоугольного параллелепипеда **($0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$, $0 \leqslant z \leqslant c$).**

Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad x = a,$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad y = b,$$

$$w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = c.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right),$$

где m, n, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Собственные функции и квадрат нормы функций:

$$w_{mnk} = \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi k z}{c}\right), \qquad \|w_{mnk}\|^2 = \frac{abc}{8}.$$

3.3. Вторая краевая задача для прямоугольного параллелепипеда **($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$).**

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad && \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = a,\\
&\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad && \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{при} \quad y = b,\\
&\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad && \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = c.
\end{aligned}$$

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{k^2}{c^2}\right),$$

где $m,\ n,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Собственные функции:

$$w_{mnk} = \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi k z}{c}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{mnk}\|^2 = \frac{abc}{8}(1+\delta_{m0})(1+\delta_{n0})(1+\delta_{k0}), \qquad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j,\\ 0 & \text{при } i \neq j.\end{cases}$$

3.4. Третья краевая задача для прямоугольного параллелепипеда **($0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b,\ 0 \leqslant z \leqslant c$).**

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial w}{\partial x} - h_1 w = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \qquad && \frac{\partial w}{\partial x} + h_2 w = 0 \quad \text{при} \quad x = a,\\
&\frac{\partial w}{\partial y} - h_3 w = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \qquad && \frac{\partial w}{\partial y} + h_4 w = 0 \quad \text{при} \quad y = b,\\
&\frac{\partial w}{\partial z} - h_5 w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad && \frac{\partial w}{\partial z} + h_6 w = 0 \quad \text{при} \quad z = c,
\end{aligned}$$

где все $h_i = \text{const}$.

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = (\mu_m)^2 + (\nu_n)^2 + (\sigma_k)^2,$$

где μ_n, ν_n, σ_k — положительные корни трансцендентных уравнений:

$$\operatorname{tg}(\mu a) = \frac{(h_1+h_2)\mu}{\mu^2 - h_1 h_2}, \quad \operatorname{tg}(\nu b) = \frac{(h_3+h_4)\nu}{\nu^2 - h_3 h_4}, \quad \operatorname{tg}(\sigma c) = \frac{(h_5+h_6)\sigma}{\sigma^2 - h_5 h_6}.$$

Собственные функции:

$$w_{mnk} = (\mu_m \cos\mu_m x + h_1 \sin\mu_m x)(\nu_n \cos\nu_n y + h_3 \sin\nu_n y) \times$$
$$\times (\sigma_k \cos\sigma_k z + h_5 \sin\sigma_k z).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{mnk}\|^2 = \frac{[a+F(\mu_n,h_1,h_2)][b+F(\nu_m,h_3,h_4)][c+F(\sigma_k,h_5,h_6)]}{8(\mu_m^2+h_1^2)(\nu_n^2+h_3^2)(\sigma_k^2+h_5^2)},$$

где

$$F(\alpha,\beta,\gamma) = 2\frac{(\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta\gamma)}{(\alpha^2+\beta^2)(\alpha^2+\gamma^2)}.$$

3.5. Первая краевая задача для сферы ($r \leqslant R$).

Граничное условие:

$$w = 0 \qquad \text{при} \quad r = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{nk} = \frac{\xi_{nk}^2}{R^2},$$

где ξ_{nk} — корни функции Бесселя: $J_{n+1/2}(\xi)=0$. Отметим, что $J_{n+1/2}(\xi)$ выражаются через элементарные функции, см. Г. Бейтмен, А. Эрдейи (1974).

Собственные функции:

$$w_{mnk}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\Bigl(\xi_{nk}\frac{r}{R}\Bigr)P_n^m(\cos\theta)\cos m\varphi,$$

$$w_{mnk}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{r}}J_{n+1/2}\Bigl(\xi_{nk}\frac{r}{R}\Bigr)P_n^m(\cos\theta)\sin m\varphi,$$

где $P_n^m(t) = (1-t^2)^{m/2}\dfrac{d^m}{dt^m}P_n(t)$, $P_n(t)$ — полиномы Лежандра.

Собственные функции, обладающие шаровой симметрией (которые не зависят от θ и φ):

$$w_{00k}^{(1)} = J_{1/2}\Bigl(\xi_{nk}\frac{r}{R}\Bigr).$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией (которые не зависят от φ):

$$w_{0nk}^{(1)} = J_{n+1/2}\Bigl(\xi_{nk}\frac{r}{R}\Bigr)P_n(\cos\theta).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{mnk}^{(i)}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})(m+n)!\,R^3}{(2n+1)(n-m)!\,\xi_{nk}}\bigl[J'_{n+1/2}(\xi_{nk})\bigr]^2, \quad i=1,\ 2,$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

3.6. Вторая краевая задача для сферы ($r \leqslant R$).

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 0 \qquad \text{при} \qquad r = R.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{00} = 0; \qquad \lambda_{nk} = \frac{\xi_{nk}^2}{R^2},$$

где ξ_{nk} — корни функции трансцендентного уравнения:

$$2\xi J'_{n+1/2}(\xi) - J_{n+1/2}(\xi) = 0.$$

Собственные функции:

$$w^{(1)}_{mnk} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Big(\xi_{nk}\frac{r}{R}\Big) P^m_n(\cos\theta)\cos m\varphi, \quad w^{(1)}_{000} = 1,$$

$$w^{(2)}_{mnk} = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+1/2}\Big(\xi_{nk}\frac{r}{R}\Big) P^m_n(\cos\theta)\sin m\varphi,$$

где $P^m_n(t)$ — присоединенные функции Лежандра.

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(i)}_{mnk}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})(m+n)!\,R^3}{(2n+1)(n-m)!\,\xi^2_{nk}}\left[1 - \frac{n(n+1)}{\xi^2_{nk}}\right]\left[J_{n+1/2}(\xi_{nk})\right]^2,$$

где $i = 1,\,2$; δ_{m0} — символ Кронекера.

*3.7. **Третья краевая задача для сферы** ($r \leqslant R$).*

Граничное условие:

$$\frac{\partial w}{\partial r} + hw = 0 \qquad \text{при} \qquad r = R.$$

Собственные значения λ_{nk} и собственные функции $w^{(1)}_{mnk}$, $w^{(2)}_{mnk}$ определяются по формулам, приведенным для первой краевой задачи, где ξ_{nk} — корень трансцендентного уравнения:

$$2\xi J'_{n+1/2}(\xi) - (1 - 2Rh)J_{n+1/2}(\xi) = 0.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(i)}_{mnk}\|^2 = \frac{2\pi(1+\delta_{m0})(m+n)!\,R^3}{(2n+1)(n-m)!\,\xi^2_{nk}}\left[1 - \frac{n(n+1) + 4Rh(1-Rh)}{\xi^2_{nk}}\right]\left[J_{n+1/2}(\xi_{nk})\right]^2,$$

где $i = 1,\,2$; δ_{m0} — символ Кронекера.

*3.8. **Первая краевая задача для кругового цилиндра** ($0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant z \leqslant a$).*

Граничные условия:

$$w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\xi^2_{nk}}{R^2}; \qquad n = 0,\,1,\,\ldots; \quad m,\,k = 1,\,2,\,\ldots,$$

где ξ_{nk} — корни функции Бесселя: $J_n(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$w^{(1)}_{mnk} = J_n\Big(\xi_{nk}\frac{\rho}{R}\Big)\cos n\varphi \sin\Big(\frac{\pi m z}{a}\Big),$$

$$w^{(2)}_{mnk} = J_n\Big(\xi_{nk}\frac{\rho}{R}\Big)\sin n\varphi \sin\Big(\frac{\pi m z}{a}\Big).$$

Собственные функции, обладающие осевой симметрией:

$$w^{(1)}_{0mk} = J_0\Big(\xi_{0k}\frac{\rho}{R}\Big)\sin\Big(\frac{\pi m z}{a}\Big).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(i)}_{mnk}\|^2 = \frac{\pi R^2 a}{4}(1+\delta_{n0})\left[J'_n(\xi_{nk})\right]^2, \quad i = 1,\,2,$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

3.9. Вторая краевая задача для кругового цилиндра $(0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant a)$.

Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{при} \quad z = a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{000} = 0, \quad \lambda_{mnk} = \frac{\pi^2 m^2}{a^2} + \frac{\xi_{nk}^2}{R^2}; \qquad n = 0,\, 1,\, \ldots; \quad m,\, k = 0,\, 1,\, \ldots,$$

где ξ_{nk} — корни производной функции Бесселя: $J_n'(\xi) = 0$.

Собственные функции:

$$w_{mnk}^{(1)} = J_n\Bigl(\xi_{nk}\frac{\rho}{R}\Bigr)\cos n\varphi \cos\Bigl(\frac{\pi m z}{a}\Bigr), \qquad w_{000}^{(1)} = 1,$$
$$w_{mnk}^{(2)} = J_n\Bigl(\xi_{nk}\frac{\rho}{R}\Bigr)\sin n\varphi \cos\Bigl(\frac{\pi m z}{a}\Bigr).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w_{mnk}^{(i)}\|^2 = \frac{\pi R^2 a}{4\xi_{nk}^2}(1 + \delta_{n0})(\xi_{nk}^2 - n^2)\bigl[J_n(\xi_{nk})\bigr]^2, \quad \|w_{000}^{(1)}\|^2 = \pi R^2 a,$$

где $i = 1,\, 2$; δ_{m0} — символ Кронекера.

3.10. Третья краевая задача для кругового цилиндра $(0 \leqslant \rho \leqslant R,\ 0 \leqslant z \leqslant a)$.

Граничные условия:

$$\frac{\partial w}{\partial \rho} + h_0 w = 0 \quad \text{при} \quad \rho = R,$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} - h_1 w = 0 \quad \text{при} \quad z = 0,$$
$$\frac{\partial w}{\partial z} + h_2 w = 0 \quad \text{при} \quad z = a,$$

где все h_i — некоторые постоянные.

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \nu_m^2 + \frac{\xi_{nk}^2}{R^2},$$

где ν_m и ξ_{nk} — корни трансцендентных уравнений:

$$\operatorname{tg}(\nu a) = \frac{(h_1 + h_2)\nu}{\nu^2 - h_1 h_2}, \qquad \xi J_n'(\xi) + R h_0 J_n(\xi) = 0.$$

Собственные функции:

$$w_{mnk}^{(1)} = J_n\Bigl(\xi_{nk}\frac{\rho}{R}\Bigr)\cos n\varphi\, \frac{\nu_m \cos \nu_m z + h_1 \sin \nu_m z}{\sqrt{\nu_m^2 + h_1^2}},$$
$$w_{mnk}^{(2)} = J_n\Bigl(\xi_{nk}\frac{\rho}{R}\Bigr)\sin n\varphi\, \frac{\nu_m \cos \nu_m z + h_1 \sin \nu_m z}{\sqrt{\nu_m^2 + h_1^2}}.$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(i)}_{mnk}\|^2 = \frac{\pi R^2}{2\xi^2_{nk}}(1+\delta_{n0})(R^2h_0^2+\xi^2_{nk}-n^2)\left[J_n(\xi_{nk})\right]^2\left[\frac{a}{2}+\frac{(h_1+h_2)(\nu^2_m+h_1h_2)}{(\nu^2_m+h_1^2)(\nu^2_m+h_2^2)}\right].$$

3.11. Первая краевая задача для полого кругового цилиндра $(R_1 \leqslant \rho \leqslant R_2,\ 0 \leqslant z \leqslant a)$.

Граничные условия:

$$w=0 \quad \text{при} \quad \rho = R_1, \qquad w=0 \quad \text{при} \quad \rho = R_2,$$
$$w=0 \quad \text{при} \quad z=0, \qquad w=0 \quad \text{при} \quad z=a.$$

Собственные значения:

$$\lambda_{mnk} = \frac{\pi^2k^2}{a^2} + \xi^2_{mn}; \qquad n = 0, 1, \ldots; \quad m, k = 1, 2, \ldots,$$

где ξ_{mn} — корни трансцендентного уравнения:

$$J_n(\xi R_1)Y_n(\xi R_2) - J_n(\xi R_2)Y_n(\xi R_1) = 0.$$

Собственные функции:

$$w^{(1)}_{mnk} = [J_n(\xi_{mn}\rho)Y_n(\xi_{mn}R_1) - J_n(\xi_{mn}R_1)Y_n(\xi_{mn}\rho)]\cos n\varphi \sin\left(\frac{\pi kz}{a}\right),$$
$$w^{(2)}_{mnk} = [J_n(\xi_{mn}\rho)Y_n(\xi_{mn}R_1) - J_n(\xi_{mn}R_1)Y_n(\xi_{mn}\rho)]\sin n\varphi \sin\left(\frac{\pi kz}{a}\right).$$

Квадрат нормы собственных функций:

$$\|w^{(i)}_{mnk}\|^2 = \frac{a}{\pi\xi_{mn}}(1+\delta_{n0})\frac{[J_n(\xi_{mn}R_1)]^2 - [J_n(\xi_{mn}R_2)]^2}{[J_n(\xi_{mn}R_2)]^2}, \qquad i = 1, 2,$$

где δ_{m0} — символ Кронекера.

Литература к разд. 5.4.3: В. М. Бабич, М. Б. Капилевич, С. Г. Михлин и др. (1964), Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов (1980), А. Н. Тихонов, А. А. Самарский (1972).

5.4.4. Оператор Лапласа в ортогональных криволинейных системах координат

1. Произвольная ортогональная система координат. Криволинейные координаты x^1, x^2, x^3 задаются как функции прямоугольных декартовых координат x, y, z:

$$x^1 = x^1(x,y,z), \quad x^2 = x^2(x,y,z), \quad x^3 = x^3(x,y,z).$$

Используя эти формулы, можно выразить x, y, z через криволинейные координаты x^1, x^2, x^3:

$$x = x(x^1,x^2,x^3), \quad y = y(x^1,x^2,x^3), \quad z = z(x^1,x^2,x^3).$$

Компоненты метрического тензора g_{ij} определяются по формулам

$$g_{ij}(x^1,x^2,x^3) = \left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^j} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^j}\right)_{x^1,x^2,x^3},$$
$$g_{ij}(x^1,x^2,x^3) = g_{ji}(x^1,x^2,x^3); \qquad i,j = 1, 2, 3.$$

Система координат является ортогональной, если выполняются соотношения

$$g_{ij}(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j.$$

Оператор Лапласа в ортогональной криволинейной системе координат x^1, x^2, x^3 имеет вид:

$$\Delta w \equiv \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{11}}\frac{\partial w}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{22}}\frac{\partial w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{\sqrt{g}}{g_{33}}\frac{\partial w}{\partial x^3}\right)\right],$$

где $g = g_{11}g_{22}g_{33}$.

2. Цилиндрические координаты ρ, φ, z (применяются и как полярные координаты на плоскости xy). Преобразования координат ($0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\begin{aligned} &\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, && x = \rho\cos\varphi, \\ &\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \ \left(\sin\varphi = \frac{y}{\rho}\right), && y = \rho\sin\varphi, \\ &z = z, && z = z. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\rho\rho} = 1, \quad g_{\varphi\varphi} = \rho^2, \quad g_{zz} = 1, \quad \sqrt{g} = \rho.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial w}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

3. Сферические координаты r, θ, φ. Преобразования координат ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\begin{aligned} &r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, && x = r\sin\theta\cos\varphi, \\ &\theta = \arccos\frac{z}{r}, && y = r\sin\theta\sin\varphi, \\ &\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \ \left(\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), && z = r\cos\theta. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\varphi\varphi} = r^2\sin^2\theta, \quad \sqrt{g} = r^2\sin\theta.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}.$$

4. Координаты вытянутого эллипсоида вращения σ, τ, φ. Преобразования координат ($\sigma \geqslant 1 \geqslant \tau \geqslant -1$):

$$x^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\cos^2\varphi, \quad y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)\sin^2\varphi, \quad z = a\sigma\tau.$$

Специальная система координат u, v, φ ($0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\begin{aligned} &\sigma = \operatorname{ch} u, && x = a\operatorname{sh} u\sin v\cos\varphi, \\ &\tau = \cos v, && y = a\operatorname{sh} u\sin v\sin\varphi, \\ &\varphi = \varphi, && z = a\operatorname{ch} u\cos v. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2),$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{sh}^2 u \sin^2 v.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(\sigma^2 - 1)\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1 - \tau^2)\frac{\partial w}{\partial\tau}\right] + \frac{\sigma^2 - \tau^2}{(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2)}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} \right\}.$$

5. Координаты сплюснутого эллипсоида вращения σ, τ, φ. Преобразования координат ($\sigma \geqslant 0$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$):

$$x^2 = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)\cos^2\varphi, \quad y^2 = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)\sin^2\varphi, \quad z = a\sigma\tau.$$

Специальная система координат u, v, φ ($0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$):

$$\begin{aligned} \sigma &= \operatorname{sh} u, & x &= a \operatorname{ch} u \sin v \cos\varphi, \\ \tau &= \cos v, & y &= a \operatorname{ch} u \sin v \sin\varphi, \\ \varphi &= \varphi, & z &= a \operatorname{sh} u \cos v. \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 + \sigma^2}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 + \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = a^2(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2),$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \cos^2 v), \quad g_{\varphi\varphi} = a^2 \operatorname{ch}^2 u \sin^2 v.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{a^2(\sigma^2 + \tau^2)} \left\{ \frac{\partial}{\partial\sigma}\left[(1 + \sigma^2)\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right] + \frac{\partial}{\partial\tau}\left[(1 - \tau^2)\frac{\partial w}{\partial\tau}\right] + \frac{\sigma^2 + \tau^2}{(1 + \sigma^2)(1 - \tau^2)}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2} \right\}.$$

6. Координаты эллиптического цилиндра σ, τ, z (применяются и как эллиптические координаты на плоскости xy). Преобразования координат ($\sigma \geqslant 0$, $-1 \leqslant \tau \leqslant 1$):

$$x = a\sigma\tau, \quad y^2 = a^2(\sigma^2 - 1)(1 - \tau^2), \quad z = z.$$

Специальная система координат u, v, z ($0 \leqslant u < \infty$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$):

$$\begin{aligned} \sigma &= \operatorname{ch} u, & x &= a \operatorname{ch} u \cos v, \\ \tau &= \cos v, & y &= a \operatorname{sh} u \sin v, \\ z &= z, & z &= z, \end{aligned}$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{\sigma^2 - 1}, \quad g_{\tau\tau} = a^2 \frac{\sigma^2 - \tau^2}{1 - \tau^2}, \quad g_{zz} = 1,$$

$$g_{uu} = g_{vv} = a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v), \quad g_{zz} = 1.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{a^2(\operatorname{sh}^2 u + \sin^2 v)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{\sigma^2 - 1}}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sqrt{\sigma^2 - 1}\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right) + \frac{\sqrt{1 - \tau^2}}{a^2(\sigma^2 - \tau^2)}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sqrt{1 - \tau^2}\frac{\partial w}{\partial\tau}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

7. Параболические координаты σ, τ, φ. Преобразования координат:

$$x = \sigma\tau\cos\varphi, \quad y = \sigma\tau\sin\varphi, \quad z = \tfrac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2).$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \sigma^2 + \tau^2, \quad g_{\varphi\varphi} = \sigma^2\tau^2.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left[\frac{1}{\sigma}\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\sigma\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right) + \frac{1}{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\tau\frac{\partial w}{\partial\tau}\right) + \left(\frac{1}{\sigma^2}+\frac{1}{\tau^2}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right].$$

8. Координаты параболического цилиндра σ, τ, z (применяются и как параболические координаты на плоскости xy). Преобразования координат:

$$x = \sigma\tau, \quad y = \tfrac{1}{2}(\tau^2 - \sigma^2), \quad z = z.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \sigma^2 + \tau^2, \quad g_{zz} = 1.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{\sigma^2+\tau^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

9. Бицилиндрические координаты σ, τ, z (применяются и как биполярные координаты на плоскости xy). Преобразования координат:

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = z.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2}, \quad g_{zz} = 1.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{1}{a^2}(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\sigma^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\tau^2}\right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

10. Тороидальные координаты σ, τ, φ. Преобразования координат ($-\pi \leqslant \sigma \leqslant \pi$, $0 \leqslant \tau < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$):

$$x = \frac{a\operatorname{sh}\tau\cos\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad y = \frac{a\operatorname{sh}\tau\sin\varphi}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}, \quad z = \frac{a\sin\sigma}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2\operatorname{sh}^2\tau}{(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)^2}.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{(\operatorname{sh}\tau - \cos\sigma)^3}{a^2\operatorname{sh}\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\operatorname{sh}\tau}{\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma}\frac{\partial w}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{\operatorname{sh}\tau(\operatorname{ch}\tau - \cos\sigma)}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right].$$

11. Биполярные координаты σ, τ, φ. Преобразования координат ($-\infty < \sigma < \infty$, $0 \leqslant \tau < \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$):

$$x = \frac{a\sin\tau\cos\varphi}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau}, \quad y = \frac{a\sin\tau\sin\varphi}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau}, \quad z = \frac{a\operatorname{sh}\sigma}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau}.$$

Компоненты метрического тензора:

$$g_{\sigma\sigma} = g_{\tau\tau} = \frac{a^2}{(\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau)^2}, \quad g_{\varphi\varphi} = \frac{a^2\sin^2\tau}{(\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau)^2}.$$

Лапласиан:

$$\Delta w = \frac{(\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau)^3}{a^2\sin\tau}\left[\frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{\sin\tau}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau}\frac{\partial w}{\partial\sigma}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\sin\tau}{\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau}\frac{\partial w}{\partial\tau}\right) + \frac{1}{\sin\tau(\operatorname{ch}\sigma - \cos\tau)}\frac{\partial^2 w}{\partial\varphi^2}\right].$$

Литература к разд. 5.4.4: Г. Корн, Т. Корн (1984).

6. Нелинейные уравнения второго порядка

6.1. Уравнения параболического типа

6.1.1. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw(1 - w).$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова — Фишера.

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии. Частный случай уравнения 6.1.1.3 при $m = 2$.

1. Точные решения (C — любое):

$$w(x,t) = \left[1 + C\exp\left(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\right)\right]^{-2},$$
$$w(x,t) = \left[-1 + C\exp\left(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\right)\right]^{-2},$$
$$w(x,t) = \frac{1 + 2C\exp\left(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\right)}{\left[1 + C\exp\left(-\tfrac{5}{6}at \pm \tfrac{1}{6}\sqrt{6a}\,x\right)\right]^2}.$$

О точных решениях см. также п. 2 уравнения 6.1.1.3.

2. Замена $u = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = -a$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - au(1 - u).$$

Литература: В. П. Маслов, В. Г. Данилов, К. А. Волосов (1987).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} - w(1-w)(a-w).$

Частный случай уравнения 6.1.1.4 при $m = 2$.

1. Имеются три стационарных однородных решения: $w = w_k$, где $w_1 = 0$, $w_2 = 1$, $w_3 = a$. Стационарное неоднородное решение задается неявно (A, B — любые):

$$\int \frac{dw}{\sqrt{\frac{1}{4}w^4 - \frac{1}{3}(a+1) + \frac{1}{2}aw^2 + A}} = \pm x + B.$$

2. Точные нестационарные решения (A, B, C — любые):

$$w(x,t) = \frac{1}{1 + A\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \frac{1}{2}(2a-1)t\right]},$$
$$w(x,t) = \frac{a}{1 + A\exp\left[\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}\,a\,x + \frac{1}{2}a(2-a)t\right]},$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{th}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,x + \tfrac{1}{4}(1-2a)t + A\right],$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a\,\mathrm{th}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}\,ax + \tfrac{1}{4}a(a-2)t + A\right],$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{2}(1+a) + \tfrac{1}{2}(1-a)\,\mathrm{th}\left[\pm\tfrac{1}{4}\sqrt{2}(1-a)x + \tfrac{1}{4}(1-a^2)t + A\right],$$
$$w(x,t) = \frac{A\exp(z_1) + aB\exp(z_2)}{A\exp(z_1) + B\exp(z_2) + C},$$
$$z_1 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,x + \left(\tfrac{1}{2} - a\right)t, \quad z_2 = \pm\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\,ax + a\left(\tfrac{1}{2}a - 1\right)t.$$

3. Укажем два преобразования, сохраняющих вид исходного уравнения. Замена $u = 1 - w$ приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_1 = 1 - a$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(1-u)(1-a-u).$$

Преобразование

$$v(z,\tau) = 1 - \frac{1}{a}w(x,t), \quad \tau = a^2 t, \quad z = ax$$

приводит к уравнению аналогичного вида с параметром $a_2 = 1 - a^{-1}$:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - v(1-v)\left(1 - \frac{1}{a} - v\right).$$

Поэтому, если функция $w_1 = w(x,t;\,a)$ является решением, то функции

$$w_2 = 1 - w(x,t;\,1-a),$$
$$w_3 = a - aw(ax, a^2t;\,1-a^{-1})$$

также будут решениями исходного уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

Литература: T. Kawahara, M. Tanaka (1983), N. H. Ibragimov (1994).

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m.$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова.

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1. Точные решения (C — любое):

$$w(x,t) = \left[\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)\right]^{\frac{2}{1-m}}, \tag{1}$$

$$w(x,t) = \left[-\beta + C\exp(\lambda t \pm \mu x)\right]^{\frac{2}{1-m}}, \tag{2}$$

где параметры λ, μ, β определяются по формулам:

$$\lambda = \frac{a(1-m)(m+3)}{2(m+1)}, \quad \mu = \sqrt{\frac{a(1-m)^2}{2(m+1)}}, \quad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}}.$$

2. Решения (1), (2) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + aw + bw^m = 0. \tag{3}$$

Точное решение уравнения (3) при

$$\sigma = 1, \quad a = \frac{2(m+1)}{(m+3)^2} \qquad (m \neq \pm 1,\, m \neq -3)$$

можно записать в параметрическом виде

$$z = \frac{m+3}{m-1}\ln\left[kC_1^{1-m}\frac{m-1}{m+3}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1 \pm \tau^{m+1}}} + C_2\right], \qquad b = \mp\frac{m+1}{2k^2},$$

$$w = C_1^2\tau\left[kC_1^{1-m}\frac{m-1}{m+3}\int\frac{d\tau}{\sqrt{1 \pm \tau^{m+1}}} + C_2\right]^{\frac{2}{m-1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, τ — параметр.

Уравнение (3) заменой $y(w) = w'_z$ приводится к уравнению Абеля

$$yy'_w - \sigma y + aw + bw^m = 0. \tag{4}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина приведены точные решения уравнений (3), (4) для некоторых пар параметров m, a ($\sigma = 1$, b — любое).

Для случая $a = -1$, $b = 1$ решение (1) при $\beta = 1$, $C = 1$ указано в книге В. П. Маслова, В. Г. Данилова, К. А. Волосова (1987).

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw + bw^m + cw^{2m-1}.$

Это уравнение встречается в задачах тепло- и массопереноса, теории горения, биологии и экологии.

1. Точные решения (C — любое):

$$w(x,t) = \left[\beta + C\exp(\lambda t + \mu x)\right]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где параметры β, λ, μ определяются путем решения системы алгебраических уравнений:

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \tag{2}$$

$$\mu^2 - (1-m)\lambda + a(1-m)^2 = 0, \tag{3}$$

$$\mu^2 - \lambda + (1-m)[2a + (b/\beta)] = 0. \tag{4}$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(4) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

2. Решение (1) является частным случаем более широкого класса решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t,$$

которые описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0. \tag{5}$$

Замена $y(w) = w'_z$ приводит (5) к уравнению Абеля

$$yy'_w - \sigma y + aw + bw^m + cw^{2m-1} = 0,$$

общие решения которого для некоторых m (на параметры a, b, c накладываются ограничения) приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995).

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2 w^{2m-1}.$

Точные решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t$$

описываются автономным уравнением

$$w''_{zz} - \lambda w'_z + aw^{m-1} + bmw^m - mb^2 w^{2m-1} = 0. \tag{1}$$

Можно показать, что при $\lambda = 1$ однопараметрическое семейство решений уравнения (1) удовлетворяет уравнению первого порядка:

$$w'_z = w - bw^m + \frac{a}{mb}. \tag{2}$$

Интегрируя (2), получим решение в неявном виде (A — любое):

$$\int \frac{dw}{a + mbw - mb^2 w^m} = \frac{1}{mb} z + A. \tag{3}$$

В частном случае $a = 0$ из формулы (3) имеем

$$w(z) = \left\{C\exp\left[(1-m)z\right] + b\right\}^{\frac{1}{1-m}},$$

где C — произвольная постоянная.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + w\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Уравнение Бюргерса.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x,t) = \lambda + \frac{2}{x+\lambda t+A},$$
$$w(x,t) = \frac{4x+2A}{x^2+Ax+2t+B},$$
$$w(x,t) = \frac{6(x^2+2t+A)}{x^3+6xt+3Ax+B},$$
$$w(x,t) = \frac{2\lambda}{1+A\exp(-\lambda^2 t-\lambda x)},$$
$$w(x,t) = -\lambda + A\frac{\exp[A(x-\lambda t)]-B}{\exp[A(x-\lambda t)]+B},$$
$$w(x,t) = -\lambda + 2A\,\mathrm{th}\big[A(x-\lambda t)+B\big],$$
$$w(x,t) = \frac{\lambda}{\lambda^2 t+A}\left[2\,\mathrm{th}\left(\frac{\lambda x+B}{\lambda^2 t+A}\right)-\lambda x-B\right],$$
$$w(x,t) = -\lambda + 2A\,\mathrm{tg}\big[A(\lambda t-x)+B\big],$$
$$w(x,t) = \frac{2\lambda\cos(\lambda x+A)}{B\exp(\lambda^2 t)+\sin(\lambda x+A)},$$
$$w(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi(t+\lambda)}}\exp\left[-\frac{(x+A)^2}{4(t+\lambda)}\right]\left[B+A\,\mathrm{erf}\left(\frac{x+A}{2\sqrt{t+\lambda}}\right)\right]^{-1},$$

где $\mathrm{erf}\,z \equiv \dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z \exp(-\xi^2)\,d\xi$ — интеграл вероятностей (функция ошибок).

Другие решения можно получить по формуле (преобразование Хопфа — Коула)

$$w(x,t) = \frac{2}{u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad (1)$$

где $u = u(x,t)$ — решение линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2)$$

которое рассматривалось в разд. 5.2.1.

2. Область: $-\infty < x < +\infty$.

$$w = f(x) \quad \text{при} \quad t = 0 \quad \text{(начальное условие)}$$

Решение:

$$w(x,t) = 2\frac{\partial}{\partial x}\ln F(x,t),$$

где

$$F(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t} - \frac{1}{2}\int_0^{\xi} f(\xi')\,d\xi'\right]d\xi.$$

3. Уравнение Бюргерса связано с линейным уравнением теплопроводности (2) преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{2}uw = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial(uw)}{\partial x} = 0.$$

Это преобразование используется при решении конкретных краевых задач.

Литература: О. В. Руденко, С. И. Солуян (1975), N. H. Ibragimov (1994).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Растяжение независимых переменных по формулам $x = \frac{a}{b}z$, $t = \frac{a}{b^2}\tau$ приводит к уравнению 6.1.1.6:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + w\frac{\partial w}{\partial z}.$$

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. Точное решение (C, λ — любые):

$$w(x,t) = \left[C\exp\left(-\frac{\lambda m}{a}z\right) - \frac{b}{\lambda(m+1)}\right]^{-1/m}, \qquad z = x + \lambda t.$$

Более широкое семейство решений типа бегущей волны см. в 6.1.4.7 при $f(w) = bw^m$.

2. Существуют точные решения вида

$$w = t^{-\frac{1}{2m}}\varphi(\xi), \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.8 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct + s$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \frac{1}{2}ct^2 + st$, получим уравнение вида 6.1.1.8:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m\frac{\partial w}{\partial z}.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (bw^m + ct^k)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.8 при $f(w) = bw^m$, $g(t) = ct^k$.

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \dfrac{c}{k+1}t^{k+1}$, получим уравнение вида 6.1.1.8:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + bw^m\frac{\partial w}{\partial z}.$$

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2.$

1. Точные решения (A, B, C, λ — произвольные постоянные):

$$\begin{aligned}
w(x) &= \frac{a}{b}\ln|Ax+B|+C,\\
w(x,t) &= A^2bt \pm Ax + B,\\
w(x,t) &= -\frac{(x+A)^2}{4bt} - \frac{a}{2b}\ln t + B,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^2+2at+Ax+B|+C,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^3+6axt+Ax+B|+C,\\
w(x,t) &= \frac{a}{b}\ln|x^4+12ax^2t+12a^4t^2+A|+B,\\
w(x,t) &= -\frac{a^2\lambda^2}{b}t + \frac{a}{b}\ln|\cos(\lambda x+A)|+B.
\end{aligned}$$

2. Замена

$$w(x,t) = \frac{a}{b}\ln|u(x,t)|$$

приводит к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которое рассматривается в разд. 5.2.1.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw + s.$

Частный случай уравнения 6.1.4.10 при $f(t)=b$, $g(t)=c$, $h(t)=s$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bcw^2 + sw + k.$

Частный случай уравнения 6.1.4.11 при $f, g, h = \text{const}$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\big), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\varphi'_t = bc\varphi^2 + s\varphi + k, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (2bc\varphi + s - ac)\psi. \tag{3}$$

Решения системы уравнений (2), (3) описываются формулами (C_1, C_2 — любые):

$$\varphi(t) = \lambda + \frac{2bc\lambda + s}{C_1\exp\big[-(2bc\lambda+s)t\big] - bc},$$

$$\psi(t) = \frac{C_1C_2\exp\big[-(2bc\lambda+s+ac)t\big]}{\big\{C_1\exp\big[-(2bc\lambda+s)t\big]-bc\big\}^2},$$

где $\lambda = \lambda_1$ и $\lambda = \lambda_2$ — корни квадратного уравнения

$$bc\lambda^2 + s\lambda + k = 0.$$

О более сложных решениях, содержащих гиперболические и тригонометрические функции по переменной x, см. работы В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1988, 1989) и уравнение 6.1.4.11 при f, g, $h = \mathrm{const}$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 + st^n w + kt^m.$

Частный случай уравнения 6.1.4.11 при $f = \mathrm{const}$, $g = st^n$, $h = kt^m$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + c.$

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu,$$

которое рассматривается в разд. 5.2.3.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bt^n\dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^m.$

Частный случай уравнения 6.1.4.9 при $f(t) = at^n$, $g(t) = bt^m$.

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bt^n\frac{\partial u}{\partial x} + ct^m u.$$

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bt^n\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ct^m w + st^k.$

Частный случай уравнения 6.1.4.10 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^m$, $h(t) = st^k$.

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{a}{w}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 6.1.4.12 при $f(w) = a/w$.

Замена

$$u = \begin{cases} \dfrac{1}{a+1}w^{a+1} & \text{при } a \neq -1, \\ \ln|w| & \text{при } a = -1 \end{cases}$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^k\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2.$

Частный случай уравнения 6.1.4.12 при $f(w) = aw^k$. При $k = 0$ см. уравнение 6.1.1.11, а при $k = -1$ — уравнение 6.1.1.18.

Замена

$$u = \int \exp\left(\frac{a}{k+1}w^{k+1}\right) dw$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw^m \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + (bx + ct + s)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 6.1.4.14 при $f(w) = aw^m$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + s$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2 + cw + s$.

Частный случай уравнения 6.1.4.17 при f, $g = \mathrm{const}$. Уравнения аналогичного вида рассматривались в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1988, 1989).

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^2 + (ct + d)w + st + k$.

Частный случай уравнения 6.1.4.17 при $f(t) = ct + d$, $g(t) = st + k$.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + (ct + d)w + pt + k$.

Частный случай уравнения 6.1.4.18 при $f(t) \equiv 0$, $g(t) = b$, $h(t) = ct + d$, $s(t) = pt + k$.

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + c\dfrac{\partial w}{\partial x} + pw + q$.

Частный случай уравнения 6.1.4.18 при $f(t) = b$, $g(t) = c$, $h(t) = p$, $s(t) = q$.

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + cw^2 + pw + q$.

Частный случай уравнения 6.1.4.17 при $f(t) = p$, $g(t) = q$.

Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Замена $w = 1/v$ дает уравнение вида 6.1.1.32:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{v^2}\frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Поэтому решения исходного уравнения $w = w(x,t)$ выражаются через решения $u = u(y,t)$ линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

по формулам

$$w = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad x = u.$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x,t)$, следует исключить y.

Литература: Н. Х. Ибрагимов (1983).

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^m w^5.$

Частный случай уравнения 6.1.4.19 при $f(x) = bx^m$.

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Замена $u = w^{1-k}$ приводит к уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{k}{1-k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bxt^n \dfrac{\partial w}{\partial x} + ct^k w.$

Частный случай уравнения 6.1.4.21 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{4-k} w^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 6.1.1.31.

Преобразование

$$w(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.39:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au^k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n w^k \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1. Замена $u = w^{1-k}$ приводит к уравнению вида 6.1.1.46:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ax^n \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{k}{1-k}}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

2. Преобразование

$$w(x,t) = xu(z,t), \quad z = 1/x$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = az^{4-n-k} u^k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

32. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 6.1.1.38 при $m = -2$.

Введем новую искомую функцию $z = z(x,t)$ по формуле $w = \dfrac{\partial z}{\partial x}$, а затем проинтегрируем полученное уравнение по переменной x. В результате имеем

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^{-2} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}. \qquad (1)$$

Это уравнение преобразованием годографа

$$x = u, \quad z = y \tag{2}$$

приводится к линейному уравнению теплопроводности для функции $u = u(y, t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}. \tag{3}$$

Преобразование (2) означает, что зависимая переменная z принимается за независимую переменную, а независимая переменная z — за зависимую переменную.

Решения исходного уравнения $w = w(x, t)$ выражаются через решения $u = u(y, t)$ линейного уравнения (3) по формулам

$$w = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{-1}, \quad x = u(y, t). \tag{4}$$

Чтобы получить в явном виде зависимость $w = w(x, t)$, из (4) следует исключить y.

Литература: G. Bluman, S. Kumei (1980), Н. Х. Ибрагимов (1983).

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b.$

Преобразование

$$x = -\frac{2}{bu}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad w(x, t) = -\frac{b}{2}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^{-1} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = 0, \quad \text{где} \quad \Phi = \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]^{-1}, \; \Psi = \frac{1}{u}\left(\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right).$$

Отсюда следует, что любому решению $u = u(x, t)$ линейного уравнения теплопроводности с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

соответствует решение (1) исходного нелинейного уравнения.

Литература: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983).

34. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw.$

Частный случай уравнения 6.1.4.40 при $m = -2$, $f(t) = a$, $g(t) = b$, $h(t) = c$.

Преобразование (A, B — любые):

$$w(x, t) = e^{ct}u(z, \tau), \quad z = x + bt + A, \quad \tau = B - \frac{1}{2c}e^{-2ct}$$

приводит к уравнению вида 6.1.1.32:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Литература: В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), случай $b = 0$.

35. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{a}{(w+b)^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + c\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$u(z,t) = w(x,t) + b, \qquad z = x + ct$$

приводит к уравнению вида 6.1.1.32:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

36. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Специальный частный случай уравнения 6.1.1.38 при $m = -4/3$ (допускает больше инвариантных решений, чем при $m \neq -4/3$).

1. Отдельные частные решения см. в 6.1.1.38 при $m = -4/3$.

2. Существуют решения следующего вида:

$$\begin{aligned}
w(x,t) &= f_1(x),\\
w(x,t) &= t^{3/4} f_2(x),\\
w(x,t) &= x^{-3} f_3(t),\\
w(x,t) &= f_4(x - \lambda t),\\
w(x,t) &= f_5(x^2 t^{-1}),\\
w(x,t) &= e^t f_6(xe^{2t/3}),\\
w(x,t) &= x^{3C} f_7(tx^{-4C-2}),\\
w(x,t) &= x^{-3} f_8\left(t - \frac{1}{x}\right),\\
w(x,t) &= x^{-3} f_9\left(\frac{tx^2}{(x+1)^2}\right),
\end{aligned}$$

где C, λ — любые. Подставляя эти выражения в исходное уравнения, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f_n(z)$.

3. Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$w(x,t) = (Ax+B)^{-3}u(z,t), \quad z = \pm\frac{1}{A(Ax+B)}$$

приводит к уравнению такого вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-4/3}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Поэтому, если функция $w_1 = w(x,t)$ является решением, то функция

$$w_2 = \frac{1}{(Ax+B)^3}w\left(\frac{\pm 1}{A(Ax+B)}, t\right)$$

также будет решением исходного уравнения. Сказанное позволяет «размножать» точные решения.

Литература: Л. В. Овсянников (1978), N. H. Ibragimov (1994).

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^{-4/3}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bx^m w^{-1/3}$.

1. При $m = 0$, $ab > 0$ преобразование

$$w(x,t) = \exp(\pm 3\lambda x) z(\xi, t), \quad \xi = \frac{1}{2\lambda}\exp(\pm 2\lambda x), \qquad \lambda = \Big(\frac{b}{3a}\Big)^{1/2}$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.36:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\Big). \tag{1}$$

При $m = 0$, $ab < 0$ преобразование

$$w(x,t) = \frac{z(\xi,t)}{\cos^3(\lambda x)}, \quad \xi = \frac{1}{\lambda}\operatorname{tg}(\lambda x), \qquad \lambda = \Big(-\frac{b}{3a}\Big)^{1/2}$$

также приводит к уравнению (1).

Литература: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

2. При $m \neq 0$ см. уравнение 6.1.4.20 при $f(x) = bx^m$. Исходное уравнение в этом случае с помощью более сложного преобразования (в которое будут входить функции Бесселя) также можно привести к более простому уравнению (1).

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)$.

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса, теории горения и теории фильтрации. При $m = -2$ см. уравнение 6.1.1.32.

1. Точные решения:*

$$w(x) = (Ax + B)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = (\pm kx + k\lambda t + A)^{1/m}, \quad k = \lambda m/a,$$

$$w(x,t) = \Big[\frac{m(x-A)^2}{2a(m+2)(B-t)}\Big]^{\frac{1}{m}},$$

$$w(x,t) = t^{-\frac{1}{m+2}}\Big[A - \frac{m}{2a(m+2)}x^2 t^{-\frac{2}{m+2}}\Big]^{\frac{1}{m}},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные. Третье решение соответствует режиму с обострением (решение неограниченно возрастает на конечном интервале времени).

Литература: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

---

* Здесь и далее, для краткости, точные решения нелинейных уравнений обычно приводятся только в области их пространственной локализации, где $w \not\equiv 0$.

2. Решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t$$

определяются неявно формулой

$$a\int \frac{w^m\,dw}{\lambda w + C_1} = C_2 - z, \qquad z = \pm x - \lambda t,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение, а значению $C_1 = 0$ — второе решение в п. 1.

3. Решения в виде произведения функций различных переменных имеют вид

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x), \tag{1}$$

где зависимость $f = f(x)$ задается неявно формулой

$$\int \frac{f^m\,df}{\sqrt{C_1 - bf^{m+2}}} = \pm x + C_2, \qquad b = \frac{2\lambda}{am(m+2)},$$

λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

4. Автомодельные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 < x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$2a\bigl(w^m w'_z\bigr)'_z + zw'_z = 0, \qquad z = xt^{-1/2}. \tag{2}$$

Решениями такого вида обычно описываются ситуации, когда искомая функция принимает постоянные значения в начальных и граничных условиях.

Частному решению уравнения (2) при $w(z) = k_2 z^{2/m}$ отвечает третье решение в п. 1.

Х. Фуджита (H. Fujita, 1952) получил общее решение уравнения (2) при $m = -1$ и $m = -2$. Об этих решениях подробно написано в книге А. В. Лыкова (1967).

В случае граничных условий

$$w = 1 \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = 0 \quad \text{при} \quad z = \infty$$

решение уравнения (2) является локализованным и имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} &w = (1 - Z)^{1/m}\frac{P(1 - Z, m)}{P(1, m)} && \text{при} \quad 0 \leqslant Z \leqslant 1,\\ &w = 0 && \text{при} \quad 1 \leqslant Z < \infty, \end{aligned}$$

где

$$Z = \frac{z}{z_0}, \quad z_0^2 = \frac{2a}{mP(1, m)}, \quad P(\xi, m) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k,$$

$b_0 = 1$, $b_1 = -\frac{1}{2}[m(m+1)]^{-1}$, …; см. А. А. Самарский, И. М. Соболь (1963).

5. Автомодельные решения вида

$$w = t^{-\frac{1}{m+2}} F(\xi), \quad \xi = xt^{-\frac{1}{m+2}} \qquad (0 < x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка

$$a(m+2)F^m F'_\xi + \xi F'_\xi = C, \qquad \xi = xt^{-\frac{1}{m+2}}, \tag{3}$$

где C — произвольная постоянная.

Значению $C = 0$ в уравнении (3) соответствует последнее решение в п. 1, которое описывает тепловую волну от плоского источника. Подробности см. в книге Я. Б. Зельдовича, Ю. П. Райзера (1966).

Сделаем замену $\varphi = F^m$ в уравнении (3). В результате получим

$$\varphi'_\xi = \alpha\varphi^{-1/m} - \beta\xi, \tag{4}$$

где $\alpha = \dfrac{mC}{a(m+2)}$, $\beta = \dfrac{m}{a(m+2)}$.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведены общие решения уравнения (4) для значений $m = -1$ и $m = 1$.

6. Более общие решения вида

$$w = t^\beta g(\zeta), \quad \zeta = xt^{-\frac{m\beta+1}{2}}, \qquad \beta \text{ — любое},$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1\zeta G^{-\frac{m}{m+1}} G'_\zeta + A_2 G^{\frac{1}{m+1}}, \qquad G = g^{m+1}, \tag{5}$$

где $A_1 = -(m\beta+1)/(2a)$, $A_2 = \beta(m+1)/a$. Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметра m приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995).

7. Решения вида

$$w = e^{-2\lambda t}\varphi(y), \quad y = xe^{\lambda mt}, \qquad \lambda \text{ — любое},$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(\varphi^m \varphi'_y)'_y = \lambda my\varphi'_y + \lambda(n-2)\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода). Замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

8. Решения вида

$$w = (t+A)^{-1/m}\psi(u), \quad u = x + b\ln(t+A), \qquad A,\ \lambda \text{ — любые},$$

определяются из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(\psi^m\psi'_u)'_u = b\psi'_u - \psi/m. \tag{7}$$

Введение новой зависимой переменной по формуле $p(\psi) = \frac{a}{b}\psi^m\psi'_u$ с учетом равенства $\frac{d}{du} = \frac{b}{a}\psi^{-m}p\frac{d}{d\psi}$ приводит (7) к уравнению Абеля второго рода

$$pp'_\psi = p - s\psi^{m+1}, \qquad s = a/(mb^2).$$

Общие решения этого уравнения при $m = -3,\ -2,\ -\frac{3}{2},\ -1$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

Литература к уравнению 6.1.1.38: Л. В. Овсянников (1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^k.$

Частный случай уравнения 6.1.4.44 при $f(w) = aw^m$, $g(w) = bw^k$. При $b = 0$ см. уравнение 6.1.1.38. При $m = -4/3$, $k = -1/3$ см. уравнение 6.1.1.37.

1. Пространственно-однородное и стационарное решения (последнее записано в неявной форме):

$$w(t) = \begin{cases} \big[(1-k)bt + C\big]^{\frac{1}{1-k}} & \text{при } k \neq 1, \\ Ce^{bt} & \text{при } k = 1, \end{cases}$$

$$\int w^m\Big[A - \frac{2b}{a(m+k+1)}w^{m+k+1}\Big]^{-1/2} dw = \pm x + B,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2. Решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t$$

описываются автономным уравнением

$$a[w^m w'_z]'_z - \lambda w'_z + bw^k = 0. \qquad (1)$$

Замена

$$y(w) = \frac{a}{\lambda}w^m w'_z$$

преобразует (1) к уравнению Абеля

$$yy'_w - y = -ab\lambda^{-2}w^{m+k}. \qquad (2)$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведены точные решения уравнения (2) при $m + k = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$.

3. Автомодельные решения вида

$$w = t^{\frac{1}{1-k}}u(\xi), \quad \xi = xt^{\frac{k-m-1}{2(1-k)}}$$

описываются нелинейным уравнением

$$a(u^m u'_\xi)'_\xi + \frac{m-k+1}{2(1-k)}\xi u'_\xi + bu^k - \frac{1}{1-k}u = 0.$$

4. Случай $k = m + 1$.

4.1. Точное решение в виде произведения ($a = b = 1$):

$$w(x,t) = \begin{cases} \left[\dfrac{2(m+1)}{m(m+2)} \dfrac{\cos^2(\pi x/L)}{(T_0 - t)}\right]^{1/m} & \text{при } |x| \leqslant \dfrac{L}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \dfrac{L}{2}, \end{cases} \qquad (3)$$

где $L = 2\pi(m+1)^{1/2}/m$. Решение (3) описывает режим с обострением для $t \in [0, T_0)$.

Литература: Н. В. Змитренко, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов, А. А. Самарский (1976); А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

4.2. Точное решение в виде произведения функций разных аргументов:

$$w(x,t) = \left(\frac{Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x} + D}{m\lambda t + C}\right)^{1/m},$$

$$B = \frac{\lambda^2(m+1)^2}{4b^2A(m+2)^2}, \quad D = -\frac{\lambda(m+1)}{b(m+2)}, \quad \mu = m\sqrt{-\frac{b}{a(m+1)}},$$

где A, C, λ — произвольные постоянные, $ab(m+1) < 0$.

Общий вид решения в виде произведения (C, λ — любые):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(\varphi^m\varphi'_x)'_x + b\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \qquad (4)$$

Решение уравнения (4) в неявной форме:

$$\int \varphi^m \left[A - \frac{2\lambda}{a(m+2)}\varphi^{m+2} - \frac{b}{a(m+1)}\varphi^{2m+2}\right]^{-1/2} dw = \pm x + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

4.3. Решения, содержащие экспоненциальные функции (считается, что $ab(m+1) < 0$):

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)e^{\lambda x}\right]^{1/m}, \qquad \lambda = \pm m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \qquad (5)$$

где $f = f(t)$ и $g = g(t)$ определяются из системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2, \qquad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg.$$

Интегрируя, получим

$$f(t) = (C_1 - bmt)^{-1}, \quad g(t) = C_2(C_1 - bmt)^{-\frac{m+2}{m+1}},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Более сложные решения, содержащие экспоненциальные функции, имеют вид (A, B — любые):

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)(Ae^{\lambda x} + Be^{-\lambda x})\right]^{1/m}, \qquad \lambda = m\sqrt{\frac{-b}{a(m+1)}}, \tag{6}$$

где $f = f(t)$ и $g = g(t)$ определяются из автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{4bmAB}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg. \tag{7}$$

Исключив из этой системы t, получим однородное уравнение первого порядка

$$f'_g = \frac{m+1}{m+2}\frac{f}{g} + \frac{4AB}{m+2}\frac{g}{f}. \tag{8}$$

Подстановка $\zeta = f/g$ приводит (8) к уравнению с разделяющимися переменными. Интегрируя, находим решение уравнения (8) (C_1 — любое):

$$f = \pm g\left(4AB + C_1 g^{-\frac{2}{m+2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

Подставляя это выражение во второе уравнение системы (7), получим уравнение с разделяющимися переменными для функции $g = g(t)$.

4.4. Решения, содержащие гиперболические функции:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \left[f(t) + g(t)\,\mathrm{ch}(\lambda x)\right]^{1/m}, \\ w(x,t) &= \left[f(t) + g(t)\,\mathrm{sh}(\lambda x)\right]^{1/m}, \end{aligned} \tag{9}$$

являются частными случаями формулы (6) при $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{1}{2}$ и $A = \frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ соответственно.

4.5. Решения, содержащие тригонометрические функции (считается, что $ab(m+1) > 0$):

$$w(x,t) = \left[f(t) + g(t)\cos(\lambda x + C)\right]^{1/m}, \qquad \lambda = m\sqrt{\frac{b}{a(m+1)}}, \tag{10}$$

где $f = f(t)$ и $g = g(t)$ определяются из системы автономных обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f'_t = bmf^2 + \frac{bm}{m+1}g^2, \quad g'_t = \frac{bm(m+2)}{m+1}fg,$$

которая совпадает с системой (7) при $AB = \frac{1}{4}$.

Литература к пп. 4.4, 4.5: M. Bertsch, R. Kersner, L. A. Peletier (1985), В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

5. Случай $k = 1 - m$. Точные решения:

$$w(x,t) = \left[\frac{1}{F}x^2 + AF^{-\frac{m}{m+2}} - \frac{bm^2}{4a(m+1)}F\right]^{1/m},$$

$$F = F(t) = B - \frac{2a(m+2)}{m}t,$$

где A, B — произвольные постоянные.

Литература: R. Kersner (1978).

6. Случай $k = 1$. Исходное уравнение с помощью преобразования (Л. К. Мартинсон, К. Б. Павлов, 1972)

$$w(x,t) = v(x,\tau)e^{bt}, \quad \tau = \frac{a}{bm}e^{bmt} + \text{const}$$

приводится к уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}\left(v^m \frac{\partial v}{\partial x}\right).$$

Литература к уравнению 6.1.1.39: В. А. Дородницын (1979, 1982), В. А. Дородницын, С. Р. Свирщевский (1983), В. А. Галактионов, В. А. Дородницын, Г. Г. Еленин, С. П. Курдюмов, А. А. Самарский (1986), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n w.$

Частный случай уравнения 6.1.4.22 при $f(t) = bt^n$.

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.23 при $f(t) = bt^n$.

42. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n w + ct^k w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.24 при $f(t) = bt^n$, $g(t) = ct^k$.

43. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bw^{1+m} + ct^n w + st^k w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.25 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^k$.

При $n = m = 0$ это уравнение рассматривалось в работах В. А. Галактионова, С. А. Посашкова (1988, 1989).

44. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bx^n w^{1+m}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.26 при $f(x) = bx^n$.

45. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^{\frac{3m+4}{m+1}}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 6.1.1.46.

Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}}u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

46. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = ax^n \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса и является частным случаем уравнения 6.1.4.47 при $f(w) = aw^m$. При $n = 0$ см. уравнение 6.1.1.38.

1. Точные решения (A, B, λ — любые):

$$w(x) = (Ax + B)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = k(\lambda t + A)^{-\frac{1}{m}} x^{\frac{2-n}{m}}, \quad k = \left[\frac{m\lambda}{a(n-2)(2+m-n-nm)}\right]^{\frac{1}{m}},$$

$$w(x,t) = t^{(1-n)\beta}\left[\frac{m\beta}{a(2-n)}\left(xt^{\beta}\right)^{2-n} + A\right]^{\frac{1}{m}}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2},$$

$$w(x,t) = \exp(-\lambda t)\left[\frac{\lambda}{a}(m+1)^2 x^{\frac{m}{m+1}} \exp(\lambda m t) + A\right]^{\frac{1}{m}}, \quad n = \frac{m+2}{m+1}.$$

2. Решения в виде произведения функций различных переменных имеют вид

$$w(x,t) = (\lambda t + A)^{-1/m} f(x),$$

где зависимость $f = f(x)$ выражается через решения уравнения Эмдена — Фаулера:

$$F''_{xx} + \frac{\lambda(m+1)}{am} x^{-n} F^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad F = f^{m+1}. \tag{1}$$

Частному решению этого уравнения степенного вида отвечает второе решение исходного уравнения в п. 1.

Уравнение (1) допускает понижение порядка и подробно исследовалось в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994, 1995), где приведены его точные решения для 26 различных пар значений параметров n, m.

3. При $n \neq -2$ решения вида

$$w = w(z), \quad z = xt^{\frac{1}{n-2}} \qquad (0 < x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a(2-n)\left(w^m w'_z\right)'_z + z^{1-n} w'_z = 0. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994) приведено общее решение уравнения (2) при $m = -1$, n — любое.

4. Более общие решения вида

$$w = t^{\alpha} g(\zeta), \quad \zeta = xt^{\beta}, \qquad \beta = \frac{m\alpha + 1}{n-2}, \ \alpha \text{ — любое},$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$a\zeta^n\left(g^m g'_\zeta\right)'_\zeta = \beta\zeta g'_\zeta + \alpha g. \tag{3}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае

$$\alpha = \frac{1-n}{nm+n-m-2}, \quad \beta = \frac{1}{nm+n-m-2}$$

первый интеграл уравнения (3) имеет вид

$$ag^m g'_\zeta = \beta\zeta^{1-n}g + C. \tag{4}$$

Значению $C = 0$ в (4) соответствует третье решение в п. 1.

В общем случае замена $G = g^{m+1}$ приводит (3) к уравнению

$$G''_{\zeta\zeta} = A_1\zeta^{1-n}G^{-\frac{m}{m+1}}G'_\zeta + A_2\zeta^{-n}G^{\frac{1}{m+1}}, \tag{5}$$

где $A_1 = \beta/a$, $A_2 = \alpha(m+1)/a$. Точные аналитические решения уравнения (5) при различных значениях параметров n, m приведены в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995).

5. Решения вида

$$w = e^{\lambda(n-2)t}\varphi(y), \quad y = xe^{\lambda mt}, \qquad \lambda \text{ — любое},$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$ay^n(\varphi^m\varphi'_y)'_y = \lambda my\varphi'_y + \lambda(n-2)\varphi. \tag{6}$$

Это уравнение является однородным и поэтому допускает понижение порядка (после чего может быть преобразовано к уравнению Абеля второго рода).

В частном случае $n = \dfrac{m+2}{m+1}$ уравнение (6) имеет первый интеграл вида

$$a\varphi^m\varphi'_y = \lambda my^{-\frac{1}{m+1}}\varphi + C.$$

Значению $C = 0$ соответствует последнее решение в п. 1.

В общем случае замена $\Phi = \varphi^{m+1}$ приводит (6) к уравнению, которое с точностью до переобозначений совпадает с (5).

6. При $n = 2$ существуют решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \ln|x| - \lambda t,$$

которые определяются неявно по формулам

$$a(m+1)\int\frac{w^m\,dw}{aw^{m+1} - \lambda(m+1)w + C_1} = \xi + C_2, \quad \xi = \ln|x| - \lambda t,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Частному случаю $C_1 = 0$ соответствует решение

$$w = \left[\frac{\lambda(m+1)}{a} + C|x|^{\frac{m}{m+1}}\exp\left(-\frac{m\lambda}{m+1}t\right)\right]^{\frac{1}{m}},$$

где C — любое.

7. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1}{m+1}} u(z,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a z^{\frac{4+3m-n-nm}{m+1}} \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a}{w^2+b^2}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Точные решения (A, B — любые):

$$w(x) = b\,\mathrm{tg}(Ax+B),$$

$$w(x,t) = -bx\left(A - 2ab^{-2}t - x^2\right)^{-1/2},$$

$$w(x,t) = Ab\exp(ab^{-2}t - x)\left\{1 - A^2\exp\left[2(ab^{-2}t - x)\right]\right\}^{-1/2}.$$

Эти и другие решения и некоторые преобразования рассматривались в работах И. Ш. Ахатова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

48. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\left(\dfrac{ax+b}{cw+k}\right)^2\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Преобразование

$$z = ax+b, \quad u = \frac{cw+k}{ax+b} \qquad (a,\ c \neq 0)$$

приводит к уравнению вида 6.1.1.49:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = a^2\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

Литература: A. Munier, J. R. Burgan, J. Gutierres, E. Fijalkow, M. R. Feix (1981).

49. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 6.1.4.38 при $f(x) = ax^n$.

1. Пусть $m \neq -1$, $2m-2n-nm+3 \neq 0$. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}} u(\xi,t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}} u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{1}$$

где $A = a\left(\dfrac{2m-2n-nm+3}{m+1}\right)^2$.

2. В частном случае $n = \dfrac{3m+4}{2m+3}$ преобразованное уравнение сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 6.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^m\frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

3. В частном случае $n=2$, $m=-2$ преобразованное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^{-2}\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)$$

и совпадает с уравнением 6.1.1.32 (которое приводится к линейному уравнению теплопроводности).

50. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса. При $n=0$ см. уравнение 6.1.1.38. Значению $n=1$ соответствуют плоские задачи с осевой симметрией, а значению $n=2$ — сферически-симметричные задачи. В теории статистической турбулентности встречаются уравнения при $n=5$.

Точные решения:

$$w(x) = \left(Ax^{1-n} + B\right)^{\frac{1}{m+1}},$$

$$w(x,t) = \left[\frac{m(\pm x + A)^2}{B - kt}\right]^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm+m+2),$$

$$w(x,t) = \left[A(kt+B)^{-\frac{m(n+1)}{nm+m+2}} - \frac{mx^2}{kt+B}\right]^{\frac{1}{m}}, \quad k = 2a(nm+m+2),$$

$$w(x,t) = \left[A\exp\left(-\frac{4a\lambda}{m}t\right) + \lambda x^2\right]^{\frac{1}{m}}, \quad n = -\frac{m+2}{m},$$

где A, B, λ — произвольные постоянные.

Литература: Я. Б. Зельдович, А. С. Компанеец (1950), Г. И. Баренблатт (1952, 1978), Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер (1966), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), Л. И. Седов (1972).

51. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = k(ax^2+bx+c)^m w^{4-2m}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.36 при $f(u) = ku^{-2m}$.

1. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int\frac{dx}{ax^2+bx+c} \tag{1}$$

приводит к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ku^{4-2m}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^{5-2m}, \tag{2}$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z+\lambda t)$ и решения в виде произведения функций различных аргументов $u = f(t)g(z)$.

Используя замену $\varphi = u^{2m-3}$, из (2) получим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi^n\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right) + p\varphi^{n+1},$$

$$n = \frac{4-2m}{2m-3}, \quad p = k(2m-3)(ac - \tfrac{1}{4}b^2),$$

которое допускает широкий класс точных решений (см. 6.1.1.39, п. 4).

2. Исходное уравнение преобразованием

$$w(x,t) = \left[v(\xi,t)\right]^{\frac{1}{2m+3}}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m} \tag{3}$$

приводится к дивергентному виду (см. уравнение 6.1.4.38):

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi)v^{\frac{4-2m}{2m-3}}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{4}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^m}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}. \tag{5}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (4), когда функцию $F = F(\xi)$ можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1,\ a=1,\ b=0,\ c=1;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1,\ a=-1,\ b=0,\ c=1;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=\tfrac{1}{2},\ a=-1,\ b=0,\ c=1.$$

6.1.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w}.$

Уравнения этого вида встречаются в задачах тепло- и массопереноса и теории горения.

1. Точные решения (C — любое):

$$w(x,t) = -\frac{2}{\lambda}\ln\left[\beta + C\exp\left(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\lambda t\right)\right],$$
$$w(x,t) = -\frac{2}{\lambda}\ln\left[-\beta + C\exp\left(\pm\mu x - \tfrac{1}{2}a\lambda t\right)\right], \qquad \beta = \sqrt{-\frac{b}{a}},\ \mu = \sqrt{\frac{a\lambda}{2}}.$$

2. Более широкий класс точных решений типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = x + \sigma t$$

описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$w''_{zz} - \sigma w'_z + a + be^{\lambda w} = 0. \tag{1}$$

Замена $u(w) = w'_z$ приводит (1) к уравнению Абеля

$$uu'_w - \sigma u + a + be^{\lambda w} = 0. \tag{2}$$

При $\sigma = 1$, $b = -a$, $\lambda = 2/a$ общее решение уравнения (2) можно записать в параметрическом виде (В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995):

$$w = a\ln\left|\frac{\tau^2+1}{\tau}(\operatorname{arctg}\tau + C)\right|, \quad u = \frac{a}{\tau}\left[\tau + (\tau^2-1)(\operatorname{arctg}\tau + C)\right].$$

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a + be^{\lambda w} + ce^{2\lambda w}$.

Уравнения этого вида встречаются в задачах тепло- и массопереноса и теории горения.

Точные решения (C — любое):

$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln\bigl[\beta + C\exp(\mu x - a\lambda t)\bigr], \tag{1}$$

где параметры β, μ определяются путем решения двух алгебраических уравнений:

$$a\beta^2 + b\beta + c = 0, \tag{2}$$

$$\beta^2\mu^2 + \lambda c = 0. \tag{3}$$

Квадратное уравнение (2) для β решается независимо. В общем случае система (2)–(3) дает четыре набора искомых параметров, которым отвечают четыре точных решения исходного уравнения.

Решения (1) являются частными случаями более широкого класса решений типа бегущей волны $w = w(x + \sigma t)$.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 6.1.4.7 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

Помимо точных решений типа бегущей волны $w = w(x + \lambda t)$, существуют также точные решения вида

$$w = \varphi(\xi) - \frac{1}{2\lambda}\ln t, \qquad \xi = \frac{x}{\sqrt{t}}.$$

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda t}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + ce^{\mu t}w + se^{\nu t}$.

Частный случай уравнения 6.1.4.10 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$, $h(t) = se^{\nu t}$.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda w}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2$.

Частный случай уравнения 6.1.4.12 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

Замена

$$u = \int \exp\Bigl(\frac{a}{\lambda}e^{\lambda w}\Bigr)\,dw$$

приводит к линейному уравнению с постоянными коэффициентами $\partial_t u = \partial_{xx} u$, которое рассматривается в разд. 5.2.1.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda t}w$.

Частный случай уравнения 6.1.4.22 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda t}w^{1-m}$.

Частный случай уравнения 6.1.4.23 при $f(t) = be^{\lambda t}$.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda t}w + ce^{\mu t}w^{1-m}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.24 при $f(t) = be^{\lambda t}$, $g(t) = ce^{\mu t}$.

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

1. Точные решения (A, B, C, μ — любые):

$$w(x) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax + B),$$
$$w(x,t) = -\frac{1}{\lambda}\ln(C - a\lambda\mu t) + \frac{1}{\lambda}\ln(\tfrac{1}{2}\lambda\mu x^2 + Ax + B).$$

2. Существуют также решения вида ($\lambda = 1$):

$$w(x,t) = 2t + f(z), \qquad z = xe^{-t},$$
$$w(x,t) = x + g(y), \qquad y = te^{x},$$
$$w(x,t) = C\ln x + h(\xi), \qquad \xi = tx^{1-2C},$$

где C — любое. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, можно получить обыкновенные дифференциальные уравнения для определения функций $f(z)$, $g(y)$, $h(\xi)$.

Литература: Л. В. Овсянников (1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), N. H. Ibragimov (1994).

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n.$

Частный случай уравнения 6.1.4.28 при $f(t) = bt^n$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\mu t}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.28 при $f(t) = be^{\mu t}$.

12. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + ce^{\mu t}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.30 при $f(t) = ce^{\mu t}$, $g(t) = 0$.

13. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + bt^n e^{-\lambda w}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.29 при $f(t) = 0$, $g(t) = bt^n$.

14. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{-\lambda w + \mu t}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.29 при $f(t) = 0$, $g(t) = be^{\mu t}$.

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w} \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\mu t} + ce^{-\lambda w + \nu t}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.29 при $f(t) = be^{\mu t}$, $g(t) = ce^{\nu t}$.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w} + c + se^{-\lambda w}.$

Частный случай уравнения 6.1.4.30 при $f(t) = c$, $g(t) = s$.

Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + (bx + c)e^{\lambda w}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda(bx + c)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + be^{\lambda w + \mu x}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda be^{\mu x}\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 6.1.4.42 при $f(x) = ax^n$, $g(x) = 0$.

20. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w + \mu x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 6.1.4.42 при $f(x) = ae^{\mu x}$, $g(x) = 0$.

21. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(we^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Точное решение (A, B — любые):

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(Ax + \frac{a}{\lambda}A^2t + B\right).$$

Литература: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

6.1.3. Уравнения, содержащие логарифмические функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw \ln w.$

Точные решения (A, B — любые):

$$w(x,t) = \exp\bigl(Ae^{at}x + A^2e^{2at} + Be^{at}\bigr),$$
$$w(x,t) = \exp\bigl(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}ax^2 + Ae^{at}\bigr),$$
$$w(x,t) = \exp\Bigl[-\frac{ax^2}{4(1+e^{-at})} + \tfrac{1}{2}(e^{at} + A)\ln(1+e^{-at})\Bigr],$$
$$w(x,t) = \exp\Bigl[-\frac{ax^2}{4(1+Ae^{-at})} + \frac{1}{2A}(e^{at} + B)\ln(1+Ae^{-at})\Bigr].$$

Литература: В. А. Дородницын (1979, 1982), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw \ln w + bw.$

Замена $w = e^{-b/a}u$ приводит к уравнению 6.1.1.7:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + au \ln u.$$

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw \ln w + (bx + c)w.$

Частный случай уравнения 6.1.4.3.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw \ln w + (bx + ct + k)w.$

Частный случай уравнения 6.1.4.4.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + aw \ln w + (bx^2 + cx + k)w.$

Частный случай уравнения 6.1.4.5.

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1 + kw)\bigl[a \ln^2(1 + kw) + b\ln(1 + kw) + c\bigr].$

Частный случай уравнения 6.1.4.6.

Литература: В. А. Галактионов, С. А. Посашков (1988, 1989).

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + bw \ln w.$

Точное решение (A, B — любые):

$$w(x,t) = \exp\Bigl[-\frac{bx^2}{4a(1-Ae^{-bt})} + Be^{bt} - \frac{1}{2}a(n+1)e^{bt}\ln(1-Ae^{-bt})\Bigr].$$

Литература: А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987).

6.1.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w).$

Уравнение Колмогорова — Петровского — Пискунова.

Уравнения этого вида часто встречаются в различных задачах тепло- и массопереноса (f — скорость объемной реакции), теории горения, биологии и экологии. Для функций $f = f(w)$ степенного, экспоненциального и логарифмического вида см. соответственно уравнения 6.1.1.1–6.1.1.5, 6.1.2.1–6.1.2.2 и 6.1.3.1–6.1.3.2.

1. Решение, однородное по пространственной координате $w = w(t)$:

$$\int \frac{dw}{f(w)} = t + C, \qquad C \text{ — любое.}$$

2. Стационарное решение $w = w(x)$:

$$\int \Bigl[C_1 + \frac{2}{a^2} \int f(w)\,dw\Bigr]^{-1/2} dw = C_2 \pm x.$$

3. Решения типа бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ описывается автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$a^2 w''_{zz} - \lambda w'_z + f(w) = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = (a^2/\lambda)\xi, \quad u(w) = w'_\xi$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u + (a/\lambda)^2 f(w) = 0. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(w)$.

В книгах В. П. Маслова, В. Г. Данилова, К. А. Волосова (1987), А. А. Самарского, В. А. Галактионова, С. П. Курдюмова, А. П Михайлова (1987) указано много точных решений исходного уравнения для различных функций $f = f(w)$.

2. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t) w \ln w + g(t) w.$

1. Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\Phi(t)x + \Psi(t)\bigr],$$

где функции $\Phi(t)$ и $\Psi(t)$ определяются по формулам

$$\Phi(t) = Ae^F, \quad \Psi(t) = Be^F + e^F \int e^{-F}(aA^2 e^{2F} + g)\,dt, \qquad F = \int f\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

2. Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = e^F\Bigl(A - 4a\int e^F dt\Bigr)^{-1}, \quad F = \int f\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(2a\varphi + g)\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

3. Существуют также точные решения более общего вида:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 6.1.4.5), которая может быть проинтегрирована.

3. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)w\ln w + \bigl[g(t)x + h(t)\bigr]w.$

1. Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi(t)x + \psi(t)\bigr],$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются по формулам

$$\varphi(t) = Ae^F + e^F\int e^{-F}g\,dt, \quad F = \int f\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^F + e^F\int e^{-F}(a\varphi^2 + h)\,dt,$$

A, B — произвольные постоянные.

2. Существуют также точные решения более общего вида:

$$w(x,t) = \exp\bigl[\varphi_2(t)x^2 + \varphi_1(t)x + \varphi_0(t)\bigr],$$

где функции $\varphi_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений (см. уравнение 6.1.4.5), которая может быть проинтегрирована.

4. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w\ln w + \bigl[bf(x)t + g(x)\bigr]w.$

Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\bigl[-bt + \varphi(x)\bigr],$$

где функция $\varphi(x)$ определяется путем решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a\varphi''_{xx} + a(\varphi'_x)^2 + f(x)\varphi + g(x) + b = 0.$$

При f, $g = \text{const}$ это уравнение подстановкой $u(\varphi) = (\varphi'_x)^2$ приводится к линейному уравнению первого порядка.

5. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(t)w\ln w+\big[g(t)x^2+h(t)x+s(t)\big]w.$

Точные решения:

$$w(x,t)=\exp\big[\varphi_2(t)x^2+\varphi_1(t)x+\varphi_0(t)\big],$$

где функции $\varphi_n(t)$ $(n=1,\,2,\,3)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются, штрих обозначает производную по t)

$$\varphi_2'=4a\varphi_2^2+f\varphi_2+g, \tag{1}$$

$$\varphi_1'=4a\varphi_2\varphi_1+f\varphi_1+h, \tag{2}$$

$$\varphi_0'=f\varphi_0+a\varphi_1^2+2a\varphi_2+s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi_2=\varphi_2(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много решений этого уравнения для различных функций f и g.

Если решение уравнения (1) известно, то решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

6. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+(bw+c)\big[k\ln^2(bw+c)+f(t)\ln(bw+c)+g(t)\big].$

Замена

$$bw+c=\exp u,\quad u=u(x,t)$$

приводит к уравнению вида 6.1.4.11:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+bku^2+bf(t)u+bg(t),$$

которое имеет экспоненциальные и синусоидальные решения по переменной x.

7. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Решения типа бегущей волны

$$w=w(z),\quad z=x+\lambda t$$

определяются неявной зависимостью

$$\int\frac{a^2\,dw}{\lambda w-F(w)+A}=z+B,\qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где A, B — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\big[f(w)+g(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z=x+\int g(t)\,dt$, получим уравнение вида 6.1.4.7:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+f(w)\frac{\partial w}{\partial z}.$$

9. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + f(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t).$

Замена $u = e^w$ приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t)\frac{\partial u}{\partial x} + g(t)u.$$

10. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(t)w + h(t).$

Точные решения:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi, \tag{1}$$
$$\psi'_t = (4f\varphi + g)\psi, \tag{2}$$
$$\chi'_t = g\chi + 2a\varphi + f\psi^2 + h. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции φ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого последовательно определяются решения уравнений (2) и (3), которые линейны относительно функций ψ и χ. В итоге получим

$$\begin{aligned} &\varphi = e^G\Big(A_1 - 4\int e^G f\,dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,\\ &\psi = A_2 \exp\Big[\int(4f\varphi + g)\,dt\Big],\\ &\chi = A_3 e^G + e^G\int e^{-G}(2a\varphi + f\psi^2 + h)\,dt, \end{aligned} \tag{4}$$

где A_1, A_2, A_3 — произвольные постоянные.

Предельному переходу $A_1 \to \infty$ в (4) соответствует вырожденное решение с $\varphi \equiv 0$.

11. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1. Точные решения:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\big(\pm x\sqrt{-b}\,\big), \qquad b < 0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi'_t = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$
$$\psi'_t = (2bf\varphi + g - ab)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g, h.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\Big[-abt + \int(2bf\varphi + g)\,dt\Big], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

Отметим два частных случая интегрирования уравнения (2).

Решение уравнения (2) при $h \equiv 0$:

$$\varphi(t) = e^G\Big(C_1 - b\int fe^G\,dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$

где C_1 — произвольная постоянная.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\, \beta = \text{const}),$$

то решение уравнения (2) имеет вид

$$\int \frac{\varphi\,d\varphi}{b\varphi^2 + \alpha\varphi + \beta} = \int f\,dt + C_2, \tag{5}$$

где C_2 — произвольная постоянная. После интегрирования левой части выражения (5) можно получить явный вид зависимости $\varphi = \varphi(t)$.

2. Точные решения более общего вида:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\big[A\exp\big(x\sqrt{-b}\big) + B\exp\big(-x\sqrt{-b}\big)\big], \qquad b < 0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf(\varphi^2 + 4AB\psi^2) + g\varphi + h, \tag{7}$$

$$\psi'_t = 2bf\varphi\psi + g\psi - ab\psi. \tag{8}$$

Из уравнения (8) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (7). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}\big(x\sqrt{-b}\big), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2},$$

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}\big(x\sqrt{-b}\big), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3. Точные решения вида (c — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\bigl(x\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0, \tag{9}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = bf\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr) + g\varphi + h, \tag{10}$$

$$\psi'_t = 2bf\varphi\psi + g\psi - ab\psi. \tag{11}$$

Из уравнения (11) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (10). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g, $h = \text{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

12. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr],$$

приводит для функции $u = u(x,t)$ к линейному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

которое рассматривается в разд. 5.2.1.

13. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + g(x)\frac{\partial w}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr],$$

приводит к линейному уравнению для функции $u = u(x,t)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x)\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Некоторые точные аналитические решения полученного уравнения (при произвольной функции g) приведены в 5.2.9.11.

14. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\Bigl(\frac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial w}{\partial x}.$

Замена

$$u = \int F(w)\,dw, \qquad \text{где} \quad F(w) = \exp\Bigl[\int f(w)\,dw\Bigr],$$

приводит для функции $u = u(x,t)$ к линейному уравнению вида 5.2.9.17:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\frac{\partial u}{\partial x}.$$

15. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{f(t)}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w\ln w.$

Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\big[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\big],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g не указываются)

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + g\varphi,$$
$$\psi'_t = 2(n+1)f\varphi + g\psi.$$

Последовательно интегрируя, получим

$$\varphi(t) = e^G\Big(A - 4\int fe^G dt\Big)^{-1}, \quad G = \int g\,dt,$$
$$\psi(t) = Be^G + 2(n+1)e^G\int f\varphi e^{-G}dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

16. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \Big[xg(t) + \dfrac{h(t)}{x}\Big]\dfrac{\partial w}{\partial x} +$
$+ s(t)w\ln w + \big[x^2p(t) + q(t)\big]w.$

Точные решения:

$$w(x,t) = \exp\big[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\big],$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi'_t = 4f\varphi^2 + (2g+s)\varphi + p, \tag{1}$$
$$\psi'_t = s\psi + 2(f+h)\varphi + q. \tag{2}$$

При $p \equiv 0$ уравнение (1) является уравнением Бернулли и легко интегрируется. В общем случае уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много решений этого уравнения. После решения уравнения (1) определяется решение линейного уравнения (2) для функции $\psi = \psi(t)$.

17. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + cw^2 + f(t)w + g(t).$

1. Точные решения, содержащие экспоненту:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\lambda x), \quad \lambda = \Big(\frac{-c}{a+b}\Big)^{1/2}, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + f\varphi + g, \tag{2}$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{3}$$

Уравнение (2) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Риккати и может быть сведено к линейному уравнению второго порядка. В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много решений этого уравнения для различных функций f, g.

В частности, при $g \equiv 0$ уравнение (2) является уравнением Бернулли, которое легко интегрируется. В другом случае при f, $g = \mathrm{const}$ частное решение уравнения (2) является константой $\varphi = \varphi_0$, которая является корнем квадратного уравнения $c\varphi_0^2 + f\varphi_0 + g = 0$. Замена $u = \varphi - \varphi_0$ приводит к уравнению Бернулли.

Если решение уравнения (2) известно, то решение уравнения (3) для функции $\psi = \psi(t)$ определяется по формуле

$$\psi(t) = C\exp\left[\int (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\,dt\right], \tag{4}$$

где C — произвольная постоянная.

2. Точные решения, содержащие гиперболический косинус (A — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\lambda x + A), \qquad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{5}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f и g не указываются)

$$\varphi'_t = c\varphi^2 - b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{6}$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{7}$$

Из уравнения (7) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (6). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, $g = \mathrm{const}$ это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

3. Точные решения, содержащие гиперболический синус (A — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\lambda x + A), \qquad \lambda = \left(\frac{-c}{a+b}\right)^{1/2},$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g,$$

$$\psi'_t = (a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi.$$

4. Точные решения, содержащие тригонометрические функции (A — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos(\lambda x + A), \quad \lambda = \left(\frac{c}{a+b}\right)^{1/2}, \tag{8}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\varphi'_t = c\varphi^2 + b\lambda^2\psi^2 + f\varphi + g, \tag{9}$$

$$\psi'_t = (-a\lambda^2\varphi + 2c\varphi + f)\psi. \tag{10}$$

Из уравнения (10) можно выразить φ через ψ, а затем подставить в (9). В итоге получается нелинейное уравнение второго порядка для функции ψ (при f, g = const это уравнение является автономным и допускает понижение порядка).

18. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)^2 + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w + s(t).$

Точные решения:

$$w(x,t) = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t),$$

где функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\chi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h, s не указываются):

$$\varphi'_t = 2(2f + a)\varphi^2 + h\varphi, \tag{1}$$

$$\psi'_t = (4f\varphi + 2a\varphi + h)\psi + 2g\varphi, \tag{2}$$

$$\chi'_t = (2a\varphi + h)\chi + f\psi^2 + g\psi + s. \tag{3}$$

Уравнение (1) для функции $\varphi = \varphi(t)$ является уравнением Бернулли и легко интегрируется. После этого решения уравнений (2), (3) строятся последовательно (каждое из них линейно относительно искомой функции).

19. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = aw^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x)w^5.$

1. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} + f(x)u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{w}{u}$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial z}{\partial t} = az^4\frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}. \tag{2}$$

Используя замену $v = z^{-3}$, получим уравнение 6.1.1.36:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(v^{-4/3}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right).$$

Точные решения этого уравнения см. в 6.1.1.38 при $m = -4/3$.

2. Точные решения в виде произведения (C — любое):

$$w(x,t) = (4\lambda t + C)^{-1/4}g(x),$$

где функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$ag''_{xx} + f(x)g + \lambda g^{-3} = 0.$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995):

$$Ag^2 = -\frac{\lambda}{a}u^2 + u^2\left(B + A\int\frac{dx}{u^2}\right)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

20. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)w^{-1/3}.$

1. Замена $w = v^{-3}$ приводит к уравнению вида 6.1.4.19:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = av^4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \tfrac{1}{3}f(x)v^5.$$

2. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} - \tfrac{1}{3}f(x)u = 0.$$

Преобразование

$$\xi = \pm\int\frac{dx}{u^2}, \quad z = wu^3$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к уравнению 6.1.1.36

$$\frac{\partial z}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right),$$

точные решения которого см. в 6.1.1.38 при $m = -4/3$.

21. $\displaystyle\frac{\partial w}{\partial t} = a^2w^m\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + xf(t)\frac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\left[\int f(t)\,dt\right], \quad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.28:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2u^m\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

22. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x)=u(x,\tau)F(t),\qquad \tau=\int F^m(t)\,dt,\qquad F(t)=\exp\Bigl[\int f(t)\,dt\Bigr]$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=a\frac{\partial}{\partial x}\Bigl(u^m\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr).$$

При $m=-2$ об этом уравнении см. 6.1.1.32.

23. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(t)w^{1-m}.$

Замена $u=w^m$ приводит к уравнению вида 6.1.4.18:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a}{m}\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)^2+mf(t),$$

которое допускает решения вида $u=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$.

24. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(t)w+g(t)w^{1-m}.$

Замена $u=w^m$ приводит к уравнению вида 6.1.4.18:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a}{m}\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)^2+mf(t)u+mg(t),$$

которое допускает решения вида $u=\varphi(t)x^2+\psi(t)x+\chi(t)$.

25. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+bw^{1+m}+f(t)w+g(t)w^{1-m}.$

При $b=0$ см. уравнение 6.1.4.24.

Замена $u=w^m$ приводит к уравнению вида 6.1.4.17:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{a}{m}\Bigl(\frac{\partial u}{\partial x}\Bigr)^2+bmu^2+mf(t)u+mg(t),$$

которое допускает решения следующих типов:

$$u(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\exp(\pm\lambda x),$$
$$u(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\operatorname{ch}(\lambda x+C),$$
$$u(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\operatorname{sh}(\lambda x+C),$$
$$u(x,t)=\varphi(t)+\psi(t)\cos(\lambda x+C),$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр λ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

26. $\dfrac{\partial w}{\partial t}=a\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)+f(x)w^{1+m}.$

Точные решения в виде произведения функций разных аргументов:

$$w=(\lambda mt+C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается уравнением

$$a\psi''_{xx} + (m+1)f(x)\psi + \lambda(m+1)\psi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \qquad \psi = \varphi^{m+1}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведены точные решения этого уравнения для некоторых функций $f(x)$.

27. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + xf(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(t)w.$

Обобщение уравнения Ильковича на нелинейный случай с объемной реакцией.

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)G(t), \quad z = xF(t), \quad \tau = \int F^2(t)G^m(t)\,dt,$$

где функции F и G определяются формулами

$$F(t) = \exp\Big[\int f(t)\,dt\Big], \quad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a^2\frac{\partial}{\partial z}\Big(u^m\frac{\partial u}{\partial z}\Big).$$

В частном случае $m = -2$ это уравнение может быть преобразовано к линейному уравнению теплопроводности с постоянными коэффициентами (см. 6.1.1.32).

28. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t).$

Преобразование

$$w(x,t) = u(x,\tau) + F(t), \quad \tau = \int \exp[\lambda F(t)]\,dt, \qquad F(t) = \int f(t)\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.2.9:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = a\frac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\frac{\partial w}{\partial x}\Big).$$

29. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + f(t) + g(t)e^{-\lambda w}.$

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 6.1.4.18:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \lambda f(t)u + \lambda g(t),$$

которое допускает решения вида $u = \varphi(t)x^2 + \psi(t)x + \chi(t)$.

30. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + be^{\lambda w} + f(t) + g(t)e^{-\lambda w}.$

При $b = 0$ см. уравнение 6.1.4.29.

Замена $u = e^{\lambda w}$ приводит к уравнению вида 6.1.4.17:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = au\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + bu^2 + \lambda f(t)u + \lambda g(t),$$

которое допускает решения следующих типов:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\exp(\pm\mu x), \\ u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{ch}(\mu x + C), \\ u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\operatorname{sh}(\mu x + C), \\ u(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\cos(\mu x + C), \end{aligned}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ описываются системой обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, параметр μ является корнем квадратного уравнения, C — произвольная постоянная.

31. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = a\dfrac{\partial}{\partial x}\left(e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)e^{\lambda w}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$a\psi''_{xx} + \lambda f(x)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

32. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1. Точные решения в виде произведения (C — любое):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{xx} + \lambda\big[f(x)\big]^{-1}\varphi^{1-m} = 0. \tag{1}$$

При $m = 1$ решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = -\lambda\int_{x_0}^{x}\frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi + A\xi + B,$$

где A, B, x_0 — любые.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений уравнения (1) для различных функций $f(x)$.

2. Преобразование $u = w/x$, $\xi = 1/x$ приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(\xi)u^m\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \qquad F(\xi) = \xi^{4-m}f(1/\xi).$$

33. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(x)w^{m+1}.$

Точные решения в виде произведения (C — любое):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$f(x)\varphi^m\varphi''_{xx} + g(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \qquad (1)$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (1) имеет вид

$$\varphi''_{xx} + (b/a)x^{k-n}\varphi + (\lambda/a)x^{-n}\varphi^{1-m} = 0. \qquad (2)$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений уравнения (2) для различных значений параметров n, m, k.

34. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1. Уравнение допускает точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

$$w = w(y), \qquad y = \frac{(x+a)^2}{t+b}.$$

2. Замена $u = \displaystyle\int \frac{dw}{f(w)}$ приводит к уравнению вида 6.1.4.43:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(u)\frac{\partial u}{\partial x}\right],$$

где функция F задается параметрически

$$F(u) = f(w), \qquad u = \int \frac{dw}{f(w)}.$$

Для получения явной зависимости $F = F(u)$ из этих формул следует исключить w.

35. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^4 f\Big(\dfrac{w}{x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование $u = w/x$, $\xi = 1/x$ приводит к более простому уравнению вида 6.1.4.34:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}.$$

36. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = w^4 f\Big(\dfrac{w}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^5 f(u),$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

37. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + g(t)w^{1-m}$.

Точные решения:

$$w(x,t) = \big[\varphi(t)x^2 + \psi(t)\big]^{1/m},$$

где функции $\varphi = \varphi(x)$, $\psi = \psi(x)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\varphi'_t = \frac{2(m+2)}{m} f\varphi^2, \qquad \psi'_t = 2f\varphi\psi + mg.$$

Интегрируя, получим

$$\varphi = \frac{1}{F}, \quad \psi = F^{-\frac{m}{m+1}}\Big(A + m\int gF^{\frac{m}{m+1}}\,dt\Big),$$
$$F = B - \frac{2(m+2)}{m}\int f\,dt,$$

где A, B — произвольные постоянные.

38. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(x)w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big]$.

1. Точные решения в виде произведения (C — любое):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(x)\varphi^m\varphi'_x]'_x + \lambda\varphi = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$z = \int \frac{dx}{f(x)}, \qquad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi''_{zz} + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \tag{2}$$

где функция $F = F(z)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = \lambda(m+1)f(x), \qquad z = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений уравнения (2) для различных функций $F = F(z)$.

2. Преобразование

$$w(x,t) = \big[\psi(x)\big]^{\frac{1}{m+1}}u(\xi,t), \quad \xi = \int \big[\psi(x)\big]^{\frac{m+2}{m+1}}dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big[F(\xi)u^m \frac{\partial w}{\partial \xi}\Big],$$

где функция $F = F(\xi)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = f[\psi(x)]^{\frac{3m+4}{m+1}}, \quad \xi = \int \big[\psi(x)\big]^{\frac{m+2}{m+1}}dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

39. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(x)w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + g(x)w^{m+1}.$

Точные решения в виде произведения (C — любое):

$$w(x,t) = (m\lambda t + C)^{-1/m}\varphi(x),$$

где функция $\varphi = \varphi(x)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(x)\varphi^m \varphi'_x]'_x + g(x)\varphi^{m+1} + \lambda\varphi = 0. \qquad (1)$$

Преобразование

$$z = \int \frac{dx}{f(x)}, \qquad \Phi = \varphi^{m+1}$$

приводит (1) к уравнению

$$\Phi''_{zz} + F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} + G(z)\Phi = 0, \qquad (2)$$

где функции $F = F(z)$ и $G = G(z)$ задаются параметрически с помощью формул

$$\begin{cases} F = \lambda(m+1)f(x), \\ z = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} G = (m+1)f(x)g(x), \\ z = \displaystyle\int \frac{dx}{f(x)}. \end{cases}$$

В частном случае $f(x) = ax^n$, $g(x) = bx^k$ уравнение (2) имеет вид

$$\Phi''_{zz} + Az^{\frac{n}{1-n}}\Phi^{\frac{1}{m+1}} + Bz^{\frac{n+k}{1-n}}\Phi = 0, \qquad n \neq 1, \qquad (3)$$

где $A = \lambda a(m+1)\bigl[a(1-n)\bigr]^{\frac{n}{1-n}}$, $B = ab(m+1)\bigl[a(1-n)\bigr]^{\frac{n+k}{1-n}}$.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений уравнения (3) для различных значений параметров n, m, k.

40. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(x,t) = u(z,\tau)\exp\Bigl[\int h(t)\,dt\Bigr],\ z = x + \int g(t)\,dt,\ \tau = \int f(t)\exp\Bigl[m\int h(t)dt\Bigr]\,dt$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl(w^m \frac{\partial w}{\partial z}\Bigr).$$

41. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \bigl[xg(t) + h(t)\bigr]\dfrac{\partial w}{\partial x} + s(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)S(t), \quad z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)S^m(t)\,dt,$$

где функции S и G определяются формулами

$$S(t) = \exp\Bigl[\int s(t)\,dt\Bigr], \quad G(t) = \exp\Bigl[\int g(t)\,dt\Bigr],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.38:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Bigl(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\Bigr).$$

При $m = -2$ об этом уравнении см. 6.1.1.32.

42. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(x)e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr] + g(x)e^{\lambda w}.$

Точные решения в виде суммы функций разных аргументов:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln(\lambda t + C) + \varphi(x),$$

где λ, C — произвольные постоянные, а функция $\varphi(x)$ описывается линейным обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$[f(x)\psi'_x]'_x + \lambda g(x)\psi + \lambda = 0, \qquad \psi = e^{\lambda\varphi}.$$

43. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr].$

Это уравнение часто встречается в нелинейных задачах тепло- и массопереноса (f — аналог коэффициента теплопроводности или диффузии) и теории фильтрации. При $f(w) = aw^{-2}$ см. уравнение 6.1.1.32, $f(w) = aw^m$ — уравнение 6.1.1.38.

1. Решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t$$

определяются неявно по формуле

$$\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + C_1} = C_2 - z, \qquad z = \pm x - \lambda t, \tag{1}$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

2. Решения вида

$$w = w(z), \quad z = \frac{x}{\sqrt{t}} \qquad (0 < x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\bigl[f(w)w'_z\bigr]'_z + \tfrac{1}{2}zw'_z = 0, \qquad z = xt^{-1/2}. \tag{2}$$

Решения указанного вида обычно соответствуют постоянным значениям w в начальных и граничных условиях для исходного уравнения в частных производных (a, $b = \text{const}$):

$w = b$	при	$t = 0$	(начальное условие)
$w = a$	при	$x = 0$	(граничное условие)
$w \to b$	при	$x \to \infty$	(граничное условие)

При этом граничные условия для уравнения (2) имеют вид:

$$w = a \quad \text{при} \quad z = 0, \qquad w = b \quad \text{при} \quad z \to \infty. \tag{3}$$

При $f(w) = aw^{-1}$, $f(w) = aw^{-2}$, $f(w) = (\alpha w^2 + \beta w + \gamma)^{-1}$ общие решения уравнения (2) получил Х. Фуджита (H. Fujita, 1952). Об этих решениях см. в книгах А. В. Лыкова (1967) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993).

3. Опишем простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное аналитическое (частное) решение. Для этого проинтегрируем уравнение (2) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную w будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(w) = -\frac{1}{2} z'_w \left(\int z\,dw + A \right), \qquad A \text{ — любое.} \tag{4}$$

Подставляя в правую часть формулы (4) конкретную зависимость $z = z(w)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(w)$, для которых уравнение (2) имеет решение $z = z(w)$. Явный вид решения $w = w(z)$ получается обращением зависимости $z = z(w)$.

Описанный метод разработал Ж. Филип (J. R. Philip, 1960), который получил большое число точных решений исходного уравнения для различных зависимостей $f = f(w)$. Некоторые его результаты, соответствующие задаче с начальными и граничными условиями (2) при $a = 1$, $b = 0$, приведены ниже в табл. 3. Все решения записаны в неявном виде $z = z(w)$ в области их пространственной локализации $0 \leqslant w \leqslant 1$.

4. Опишем другой простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное аналитическое (частное) решение. Прямой проверкой можно убедиться, что уравнение (2) удовлетворяется, если положить

$$w = \phi'_z, \quad f(w) = \frac{s + \phi - z\phi'_z}{2\phi''_{zz}}, \tag{5}$$

где $\phi = \phi(z)$ — произвольная функция, s — произвольная постоянная. Выражения (4) представляют собой параметрическую форму задания зависимости $f = f(w)$, которая получается после исключения z.

Полагая, например, в формулах (5)

$$\phi(z) = bz + \frac{1}{\lambda}(b - a)e^{-\lambda z} \qquad (\lambda > 0,\ a > b),$$

после исключения z находим

$$f(w) = \frac{A}{w - b} + B + C\ln(w - b), \qquad w = b + (a - b)e^{-\lambda z},$$

где $A = -\frac{1}{2}s\lambda^{-1}$, $B = \frac{1}{2}\lambda^{-2}\bigl[1 + \ln(a - b)\bigr]$, $C = -\frac{1}{2}\lambda^{-2}$. Отметим, что это решение удовлетворяет граничным условиям (3). Аналогичным образом могут быть построены и другие функции $f(w)$.

ТАБЛИЦА 3
Точные решения уравнения 6.1.4.43 для различных зависимостей $f = f(w)$, где $z = xt^{-1/2}$.

№	Функция $f = f(w)$	Решение $z = z(w)$	Условия
1	$\dfrac{n}{2}w^n - \dfrac{n}{2(n+1)}w^{2n}$	$1 - w^n$	$n > 0$
2	$\dfrac{n}{2(n+1)}\left[(1-w)^{n-1} - (1-w)^{2n}\right]$	$(1-w)^n$	$n > 0$
3	$\dfrac{n}{2(1-n)}w^{-2n} - \dfrac{n}{2}w^{-n}$	$w^{-n} - 1$	$0 < n < 1$
4	$\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	$\cos\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
5	$\frac{1}{8}\sin(\pi w)\left[\pi w + \sin(\pi w)\right]$	$\cos^2\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
6	$\frac{1}{16}\sin^2(\pi w)\left[5 + \cos(\pi w)\right]$	$\cos^3\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
7	$\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2}\pi w\right)\left[\cos\left(\frac{1}{2}\pi w\right) + \frac{1}{2}\pi w - 1\right]$	$1 - \sin\left(\frac{1}{2}\pi w\right)$	
8	$\dfrac{w \arccos w + 1}{2\sqrt{1-w^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arccos w$	
9	$\dfrac{\pi - 2(1-w)\arcsin(1-w)}{4\sqrt{2w-w^2}} - \dfrac{1}{2}$	$\arcsin(1-w)$	
10	$\dfrac{w \arcsin w}{4\sqrt{1-w^2}} + \dfrac{1}{4}w^2$	$\sqrt{1-w^2}$	
11	$\frac{1}{2}(1 - \ln w)$	$-\ln w$	

5. Еще один способ построения функций $f(w)$, для которых уравнение (2) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{w} = \bar{w}(z)$ — некоторое решение уравнения (2) с функцией $f(w)$. Тогда $\bar{w} = \bar{w}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $\left[F(w)w'_z\right]'_z + \frac{1}{2}zw'_z = 0$ при

$$F(w) = f(w) + Ag(w) \qquad (A\text{ — любое}), \tag{6}$$

где функция $g = g(w)$ задается параметрически формулами

$$g(w) = \frac{1}{\bar{w}'_z}, \quad w = \bar{w}(z). \tag{7}$$

Например, для степенной зависимости $f(w) = aw^m$ частным решением уравнения (2) будет функция $\bar{w} = bz^{2/m}$, где b — некоторая константа. Из формул (6), (7) получим, что $\bar{w}$ будет также являться решением уравнения (2) и при $f(w) = aw^m + Aw^{\frac{m-2}{2}}$.

Для первого решения, приведенного в табл. 3, этот метод дает однопараметрическое семейство функций

$$f(w) = \frac{n}{2}w^n - \frac{n}{2(n+1)}w^{2n} + Aw^{n-1},$$

для которых уравнение (2) имеет решение $z = 1 - w^n$.

6. Преобразование

$$\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = \int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy + \int_{t_0}^{t} f\big(w(x_0,\tau)\big)\Big[\frac{\partial w}{\partial x}(x,\tau)\Big]_{x=x_0} d\tau, \qquad \bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)} \tag{8}$$

переводит ненулевое решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Big[\bar{f}(\bar{w})\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{x}}\Big], \qquad \bar{f}(w) = \frac{1}{w^2} f\Big(\frac{1}{w}\Big). \tag{9}$$

В частном случае степенной зависимости $f(w) = aw^m$ преобразование (8) приводит к уравнению (9), где $\bar{f}(w) = aw^{-m-2}$.

Литература к уравнению 6.1.4.43: Л. В. Овсянников (1978), А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов (1987), W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994).

44. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(w).$

1. Точные решения и преобразования (групповая классификация) уравнений данного вида для различных функций $f = f(w)$, $g = g(w)$ подробно рассматривались в работах В. А. Дородницына (1979, 1982), В. А. Дородницына, С. Р. Свирщевского (1983), В. А. Галактионова, В. А. Дородницына, Г. Г. Еленина, С. П. Курдюмова, А. А. Самарского (1986), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994).

Конкретные уравнения этого вида см. в разд. 6.1.1 — 6.1.3.

2. Решения типа бегущей волны

$$w = w(z), \quad z = \pm x + \lambda t$$

определяются из автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(w)w'_z]'_z - \lambda w'_z + g(w) = 0. \tag{1}$$

Замена

$$y(w) = \frac{1}{\lambda} f(w) w'_z$$

приводит (1) к уравнению Абеля

$$yy'_w - y = \varphi(w), \qquad \varphi(w) = -\lambda^{-2} f(w) g(w). \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994, 1995) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $\varphi = \varphi(w)$.

45. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + g(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Переходя от t, x к новым переменным t, $z = x + \int g(t)\,dt$, получим более простое уравнение вида 6.1.4.43:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big].$$

46. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + xg(t)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

Обобщение уравнения Ильковича на нелинейный случай.

Переходя от t, x к новым переменным (A, B — произвольные постоянные)

$$\tau = \int G^2(t)\,dt + A, \quad z = xG(t), \qquad \text{где} \quad G(t) = B\exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

для функции $w(\tau, z)$ получим более простое уравнение вида 6.1.4.43:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[f(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big].$$

47. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = x^{1-n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

К этому уравнению приводятся нелинейные задачи диффузионного пограничного слоя (f — аналог коэффициента диффузии, $n = 1, 2, 3$), которые описываются уравнением 6.1.4.57. При $n = 1$ см. уравнение 6.1.4.43, а при $f(w) = aw^m$ — уравнение 6.1.1.46.

1. При $n \neq -1$ решения вида

$$w = w(z), \quad z = xt^{-\frac{1}{n+1}} \qquad (0 < x < \infty)$$

определяются из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(n+1)\big[f(w)w'_z\big]'_z + z^n w'_z = 0, \tag{1}$$

которое часто рассматривается с граничными условиями (3) из 6.1.4.43.

Общее решение уравнения (1) при $f(w) = a(w+b)^{-1}$, n — любое, приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993).

2. Опишем простой способ поиска функций $f(w)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое (частное) решение. Для этого проинтегрируем уравнение (1) по z, а затем сделаем преобразование годографа (переменную w будем считать независимой, а z — зависимой). В результате получим

$$f(w) = -\frac{1}{n+1}z'_w\Big(\int z^n\,dw + A\Big), \qquad A \text{ — любое.} \tag{2}$$

Подставляя в правую часть формулы (2) конкретную зависимость $z = z(w)$, будем получать однопараметрическое семейство функций $f(w)$, для которых уравнение (1) имеет решение $z = z(w)$. Явный вид решения $w = w(z)$ находится обращением зависимости $z = z(w)$.

Выбирая, например, $z = (1-w)^k$, из формулы (2) получим соответствующую функцию

$$f(w) = A(1-w)^{k-1} - \frac{k}{(n+1)(nk+1)}(1-w)^{k(n+1)}, \qquad A \text{ — любое.}$$

3. Другой способ построения функций $f(w)$, для которых уравнение (1) допускает точное аналитическое решение, заключается в следующем. Пусть $\bar{w} = \bar{w}(z)$ — некоторое решение уравнения (1) с функцией $f(w)$. Тогда $\bar{w} = \bar{w}(z)$ будет также решением и более сложного уравнения $(n+1)[F(w)w'_z]'_z + z^n w'_z = 0$ при

$$F(w) = f(w) + Ag(w) \qquad (A \text{ — любое}), \tag{3}$$

а функция $g = g(w)$ задается параметрически формулами

$$g(w) = \frac{1}{\bar{w}'_z}, \quad w = \bar{w}(z). \tag{4}$$

Например, для степенной зависимости $f(w) = aw^m$ частным решением уравнения (1) будет функция $\bar{w} = bz^{\frac{n+1}{m}}$, где b — некоторая константа. Из формул (3), (4) получим, что $\bar{w}$ будет также являться решением уравнения (1) и при $f(w) = aw^m + Aw^{\frac{m-n-1}{n+1}}$.

4. При $n = -1$ существуют решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \ln|x| + \lambda t,$$

которые определяются неявно по формулам

$$\int \frac{f(w)\,dw}{\lambda w + F(w) + C_1} = \xi + C_2, \quad \xi = \ln|x| + \lambda t, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где λ, C_1, C_2 — произвольные постоянные. Значению $\lambda = 0$ соответствует стационарное решение.

Литература: А. Д. Полянин (1980), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1993).

48. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = x^k f(t) \frac{\partial}{\partial x}\left(w^m \frac{\partial w}{\partial x}\right) + xg(t)\frac{\partial w}{\partial x} + h(t)w.$

Преобразование

$$w(t,x) = u(z,\tau)H(t), \quad z = xG(t), \quad \tau = \int f(t)G^{2-k}(t)H^m(t)\,dt,$$

где функции G и H определяются формулами

$$G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right], \quad H(t) = \exp\left[\int h(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.1.46:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = z^k \frac{\partial}{\partial z}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

49. $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = f(t)\varphi(w)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left[xg(t) + h(t)\right]\frac{\partial w}{\partial x}.$

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\left[\int g(t)\,dt\right],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.4.34:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \varphi(w)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}.$$

50. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(t)\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \big[xg(t)+h(t)\big]\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Преобразование

$$z = xG(t) + \int h(t)G(t)\,dt, \quad \tau = \int f(t)G^2(t)\,dt, \qquad G(t) = \exp\Big[\int g(t)\,dt\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.4.43:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big].$$

51. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(w_x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1. Замена $u(x,t) = w_x$ приводит к уравнению вида 6.1.4.43:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(u)\frac{\partial u}{\partial x}\Big].$$

2. Преобразование годографа

$$\bar{x} = w(x,t), \quad \bar{w}(\bar{x},t) = x$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \bar{f}(\bar{w}_{\bar{x}})\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial \bar{x}^2}, \qquad \bar{f}(z) = z^{-2}f(1/z).$$

Эти и другие преобразования подробно рассматривались в работах И. Ш. Ахатова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994). Там же указаны точные решения.

52. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = f(x)g(w)h(w_x)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Преобразование годографа (x принимается за зависимую переменную, а w — за независимую переменную)

$$x = u, \quad w = y$$

приводит к уравнению аналогичного вида для функции $u = u(y,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(y)f(u)\overline{h}(u_y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad \text{где} \quad \overline{h}(z) = z^{-2}h(1/z).$$

53. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[F(w,w_x)\Big], \qquad w_x = \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1. Преобразование

$$\bar{t} = t - t_0, \quad \bar{x} = -\int_{x_0}^{x} w(y,t)\,dy - \int_{t_0}^{t} F\big(w(x_0,\tau),\, w_x(x_0,\tau)\big)\,d\tau, \qquad \bar{w}(\bar{x},\bar{t}) = \frac{1}{w(x,t)} \tag{1}$$

переводит (ненулевое) решение $w(x,t)$ исходного уравнения в решение $\bar{w}(\bar{x},\bar{t})$ уравнения аналогичного вида

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}\Big[\bar{F}(\bar{w},\, \bar{w}_{\bar{x}})\Big],$$

где

$$\bar{F}(w,w_x) = wF(w^{-1},\, w^{-3}w_x). \tag{2}$$

2. В частном случае

$$F(w, w_x) = g(w)(w_x)^k$$

из формулы (2) получим

$$\bar{F}(w, w_x) = \bar{g}(w)(w_x)^k, \qquad \bar{g}(w) = w^{1-3k} g(w^{-1}).$$

Литература: W. Strampp (1982), J. R. Burgan, A. Munier, M. R. Feix, E. Fijalkow (1984), N. H. Ibragimov (1994).

54. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 6.1.4.51:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f(z) = F'_z(z).$$

Это и другие преобразования подробно рассматривались в работах И. Ш. Ахатова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989), Н. Х. Ибрагимова (N. H. Ibragimov, 1994). Там же указаны некоторые точные решения.

55. $\dfrac{\partial w}{\partial t} = F\left(x,\ w,\ \dfrac{\partial w}{\partial x},\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w = F(x,\ w,\ w'_x,\ w''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad w = \psi(z)u$$

и последующего сокращения обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u,\ u'_z,\ u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad w(x,t) = \psi(z)u(z,t)$$

проводится к уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{F}\left(u,\ \frac{\partial u}{\partial z},\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

которое допускает частные решения типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

Сказанное позволяет различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995) использовать для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

56. $f(x)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big].$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен капель и пузырей с потоком).

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^2(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Big[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.4.43:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big].$$

Литература: А. Д. Полянин (1980), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1993).

57. $f(x)y^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(x)y^n\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[\varphi(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big].$

Это уравнение встречается в нелинейных задачах диффузионного пограничного слоя (массообмен твердых частиц и капель), x — координата, направленная вдоль поверхности тела, y — координата, направленная по нормали к поверхности тела.

Преобразование (A, B — произвольные постоянные)

$$t = \int \frac{h^{n+1}(x)}{f(x)}\,dx + A, \quad z = yh(x), \qquad \text{где} \quad h(x) = B\exp\Big[-\int \frac{g(x)}{f(x)}\,dx\Big],$$

приводит к более простому уравнению вида 6.1.4.47:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = z^{1-n}\frac{\partial}{\partial z}\Big[\varphi(w)\frac{\partial w}{\partial z}\Big].$$

Литература: А. Д. Полянин (1980), В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин (1993).

6.2. Уравнения гиперболического типа

6.2.1. Уравнения, содержащие степенные функции

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m.$

Частный случай уравнения 6.2.4.1 при $f(w) = bw^m$.

Точные решения:

$$w(x,t) = k\big(x + \lambda t + A\big)^{\frac{2}{1-m}}, \qquad k = \left[\frac{2(1+m)(\lambda^2 - a^2)}{b(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}},$$

$$w(x,t) = s\big[a^2(t+A)^2 - (x+B)^2\big]^{\frac{1}{1-m}}, \qquad s = \left[\frac{b(1-m)^2}{4a^2}\right]^{\frac{1}{1-m}},$$

где λ, A, B — произвольные постоянные.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

Точное решение при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = k\bigl[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x+\beta)^{2-n}\bigr]^{\frac{1}{1-m}}, \qquad k = \left[\frac{b(1-m)^2}{2a(2-n)(nm-3n+4)}\right]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где C — любое.

2. Решение (1) является частным случаем более широкого класса точных решений вида

$$w = w(z), \quad z = \bigl[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x+\beta)^{2-n}\bigr]^{\frac{n}{2(2-n)}},$$

где функция $w = w(z)$ определяется из уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} = \frac{b}{an^2} z^{\frac{4(1-n)}{n}} w^m. \tag{2}$$

При $n = 1$ решение уравнения (2) имеет вид:

$$\int \left[C_1 + \frac{2b}{a(m+1)} w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено более 20 точных решений уравнения (1) для некоторых значений параметров n и m.

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x+\beta| + C,$$

где функция $w = w(y)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} - aBw'_y + bw^m = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = \left[\frac{b(1-m)}{aB} y + C\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ замена $u(w) = \dfrac{aB^2 - A^2}{aB} w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2} w^m,$$

точные решения которого для $m = -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

4. Существуют также решения вида $w = t^{\frac{2}{1-m}} f(\xi)$, $\xi = (x+\beta)t^{\frac{2}{n-2}}$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^m, \qquad a > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

Точное решение при $n \neq 2$:

$$w(x,t) = k\big[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4x^{2-n}\big]^{\frac{1}{1-m}},$$
$$k = \left[\frac{b(1-m)^2}{2a(2-n)(4-n-nm)}\right]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где C — любое.

2. Решение (1) является частным случаем более широкого класса точных решений вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4(x)^{2-n}\big]^{\frac{n}{2(n-2)}},$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{b}{an^2}\xi^{-\frac{4}{n}} w^m. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено более 20 точных решений уравнения (2) для некоторых значений параметров n и m.

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(z), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из автономного уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{zz} + aBw'_z + bw^m = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(z) = \left[\frac{b(m-1)}{aB}z + C\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ замена $u(w) = \dfrac{A^2 - aB^2}{aB}w'_z$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2}w^m,$$

точные решения которого для $m = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

4. Существуют также решения вида $w = t^{\frac{2}{1-m}} f(\xi)$, $\xi = xt^{\frac{2}{n-2}}$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + bw^m, \qquad a > 0.$

При $n = 1$ и $n = 2$ уравнение описывает плоские осесимметричные и сферически-симметричные нелинейные волны.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

Точное решение:

$$w(x,t) = k\big[a(t+C)^2 - x^2\big]^{\frac{1}{1-m}}, \quad k = \left[\frac{b(1-m)^2}{2a(2+n-nm)}\right]^{\frac{1}{1-m}}, \tag{1}$$

где C — любое.

2. Решение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений вида

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \big[a(2-n)^2(t+C)^2 - 4x^{2-n}\big]^{-\frac{n}{2}},$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{b}{4an^2}\xi^{-\frac{2(n+1)}{n}}w^m. \tag{2}$$

В частном случае $n = -1$ решение уравнения (2) имеет вид:

$$\int\left[C_1 + \frac{1}{2a(m+1)}w^{m+1}\right]^{-1/2}dw = \pm\xi + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено более 20 точных решений уравнения (1) для некоторых значений параметров n и m.

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(y)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + aBw'_y + bw^m = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = \left[\frac{b(m-1)}{aB}y + C\right]^{\frac{1}{1-m}}.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ замена $u(w) = \dfrac{A^2 - aB^2}{aB}w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{b(A^2 - aB^2)}{a^2B^2}w^m,$$

точные решения которого для $m = -2,\ -1,\ -\frac{1}{2},\ 0,\ 1$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

4. Существуют также решения вида $w = t^{\frac{2}{1-m}}f(\xi)$, $\xi = xt^{\frac{2}{n-2}}$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bw^m \dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 6.2.4.8 при $f(w) = bw^m$.

1. Точное решение в виде бегущей волны:

$$w(x,t) = \left[\frac{bm(x+\lambda t + C)}{(m+1)(a^2-\lambda^2)}\right]^{-1/m}, \tag{1}$$

где λ, C — произвольные постоянные.

Решение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений типа бегущей волны:

$$\int \frac{dw}{A + bw^{m+1}} = \frac{x + \lambda t + C}{(m+1)(\lambda^2 - a^2)},$$

где λ, A, C — произвольные постоянные.

2. Существуют точные решения вида $w = t^{-1/m} f(x/t)$.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1} w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.9 при $f(w) = bw^m$.

1. Точные решения, зависящие только от одной координаты: $w(t) = At + B$ и $w = w(x)$, которое задается неявно:

$$\int \frac{dw}{a(m+1)w - bw^{m+1} + A} = \frac{1}{a(m+1)} \ln|x| + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2. При $n \neq 2$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \left[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)}\Big[a(1-n) + bw^m\Big]\frac{1}{z} w'_z = 0. \tag{1}$$

Замена $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{anw - \dfrac{2b}{m+1} w^{m+1} + C_1} = \frac{1}{a(2-n)} \ln|z| + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(\xi), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2) w''_{\xi\xi} + B\big(bw^m - a\big) w'_\xi = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{dw}{bw^{m+1} - a(m+1)w + C_1} = -\frac{B\xi}{(m+1)(aB^2 - A^2)}.$$

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1} w^m \dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^k, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.10 при $f(w) = bw^m$, $g(w) = cw^k$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c\left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bcw^2 + kw + s.$

Частный случай уравнения 6.2.4.13 при $f(t) = c$, $g(t) = k$, $h(t) = s$.
Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1. Если выполнено неравенство $2Abc + k - a^2 b = \sigma^2 > 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x,t) = A + \bigl[C_1 \exp(\sigma t) + C_2 \exp(-\sigma t)\bigr] \exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Если выполнено неравенство $2Abc + k - a^2 b = -\sigma^2 < 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x,t) = A + \bigl[C_1 \cos(\sigma t) + C_2 \sin(\sigma t)\bigr] \exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\bigr).$$

О более сложных решениях см. 6.2.4.13.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ct^n \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + bct^n w^2 + st^m w + pt^k.$

Частный случай уравнения 6.2.4.13 при $f(t) = ct^n$, $g(t) = st^m$, $h(t) = pt^k$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 2a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Частный случай уравнения 6.2.1.12.
Точные решения (A, B, C, D, λ — любые):

$$w(x,t) = \pm\bigl[A(x + a\lambda t) + B\bigr]^{1/2} + \tfrac{1}{2}\lambda^2,$$
$$w(x,t) = a^2 A^2 t^2 + Bt + Ax + C,$$
$$w(x,t) = \tfrac{1}{6} A^{-2} (aAt + B)^4 + Ct + D + x(aAt + B).$$

Литература: S. Tomotika, K. Tamada (1950).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 w^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^n w^5.$

Частный случай уравнения 6.2.4.14 при $f(x) = bx^n$.

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial}{\partial x}\left(w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right).$

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики. Частный случай уравнения 6.2.4.16 при $f(w) = a^2 w^m$.

1. Решения в виде произведения функций:

$$w = f(x) g(t),$$

где зависимости функций $f = f(x)$ и $g = g(t)$ задаются неявно по формулам

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} f^{m+2}\right)^{-1/2} f^m\,df = C_2 \pm x, \qquad \int \left(C_3 + \frac{2a^2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_4 \pm t, \tag{1}$$

C_1, C_2, C_3, C_4, λ — произвольные постоянные.

Частному случаю $C_1 = C_3 = 0$ соответствует решение

$$w(x,t) = \left(\frac{\pm bx + c}{abt + s}\right)^{2/m}, \tag{2}$$

где b, c, s — любые.

2. Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \lambda t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — любые)

$$\lambda^2 w - \frac{a^2}{m+1} w^{m+1} = Az + B. \tag{3}$$

При $m = -\frac{1}{2}, 1, 2, 3$ из формулы (3) можно получить явный вид зависимости $w = w(z)$.

3. Автомодельные решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+a}{t+b}$$

описываются уравнением (C — любое):

$$(\xi^2 - a^2 w^m) w'_\xi = C. \tag{4}$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение $w = (\xi/a)^{2/m}$, см. формулу (2). При $C \neq 0$ принимая в (4) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 - a^2 w^m. \tag{5}$$

Общее решение уравнения (5) выражается через функции Бесселя, см. книги Э. Камке (1976) и В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995).

4. Существуют более общие автомодельные решения вида (W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams, 1981):

$$w = (t+b)^{2k} F(z), \quad z = \frac{x+a}{(t+b)^{mk+1}},$$

где a, b, k — произвольные постоянные, а функция $F = F(z)$ определяется путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$2k(2k-1)F + (mk+1)(mk-4k+2)zF'_z + (mk+1)^2 z^2 F''_{zz} = a^2(F^m F'_z)'_z,$$

которое допускает понижение порядка.

5. Автомодельные решения (μ — любое):

$$w = e^{-2\mu t}\varphi(y), \quad y = xe^{\mu m t}$$

определяются путем решения обобщенно-однородного обыкновенного дифференциального уравнения

$$4\mu^2\varphi + \mu^2 m(m-4)y\varphi'_y + (\mu m)^2 y^2 \varphi''_{yy} = a^2(\varphi^m \varphi'_y)'_y,$$

которое допускает понижение порядка.

6. Автомодельные решения (A, b, c — любые):

$$w = (\pm t + A)^{-2/m}\psi(u), \quad u = x + b\ln(\pm t + A) + c$$

определяются путем решения автономного обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{2(m+2)}{m^2}\psi - \frac{b(m+4)}{m}\psi'_u + b^2\psi''_{uu} = a^2(\psi^m \psi'_u)'_u. \qquad (6)$$

Отметим два частных случая, когда полученное уравнение интегрируется в квадратурах. При $m = -2$ уравнение (6) допускает первый интеграл, который представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. При $m = -4$ уравнение (6) заменой $G(\psi) = (\psi'_u)^2$ сводится к линейному уравнению первого порядка.

В общем случае уравнение (6) заменой $H(\psi) = \psi'_u$ сводится к уравнению первого порядка.

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1. Точное решение (A, C — любые):

$$w(x,t) = kx^{\frac{2-n}{m}}(At+C)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{2A^2(m+2)}{a(2-n)(2-n-m)}\right]^{\frac{1}{m}}. \qquad (1)$$

Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \qquad (2)$$

$$f'_{xx} - (\lambda/a)x^{-n} f^{1-m} = 0. \qquad (3)$$

Общее решение уравнения (2) записывается в неявной форме

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (At+C)^{-2/m}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено более 20 точных решений уравнения Эмдена — Фаулера (3) для некоторых значений параметра m.

2. Существуют автомодельные решения вида:

$$w = (t+b)^{\frac{(n-2)k-2}{m}} F(y), \quad y = xt^k,$$

где b, k — любые.

3. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{z}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a z^{4-n-m} u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{4}$$

В частном случае $n = 4 - m$ уравнение (4) сильно упрощается:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и допускает, например, решения типа бегущей волны $u = u(z + \mu t)$.

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a \dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n w^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.18 при $f(x) = ax^n$.

1. Точное решение (A, C — любые):

$$w(x,t) = kx^{\frac{2-n}{m}} (At + C)^{-\frac{2}{m}}, \qquad k = \left[\frac{2A^2(m+2)}{a(2-n)(m-n+2)}\right]^{\frac{1}{m}}. \tag{1}$$

Выражение (1) является частным случаем более широкого семейства точных решений в виде произведения функций разных аргументов:

$$w = f(x)g(t),$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(t)$ определяются путем решения уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{2}$$

$$a[x^n f^{m+1} f'_x]'_x - \lambda f = 0. \tag{3}$$

Общее решение уравнения (2) записывается в неявной форме

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} f^{m+2}\right)^{-1/2} df = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $f(t)$ имеем

$$f(t) = (At + C)^{-2/m}, \qquad A = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

При $n \neq 1$, $m \neq -1$ преобразование

$$z = x^{1-n}, \quad \varphi = u^{m+1}$$

приводит (3) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$\varphi''_{zz} = \frac{\lambda(m+1)}{a(1-n)^2} z^{\frac{n}{1-n}} \varphi^{\frac{1}{m+1}}. \tag{4}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено более 20 точных решений уравнения (4) для некоторых значений параметра m.

2. Существуют автомодельные решения вида:

$$w = (t+b)^{\frac{(n-2)k-2}{m}} F(y), \quad y = xt^k,$$

где b, k — любые.

3. Пусть $m \neq -1$, $2m - 2n - nm + 3 \neq 0$. Преобразование

$$w(x,t) = x^{\frac{1-n}{m+1}} u(\xi,t), \quad \xi = x^{\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}}$$

приводит к уравнению аналогичного вида:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\xi^{\frac{3m-3n-2nm+4}{2m-2n-nm+3}} u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right), \tag{5}$$

где $A = a\left(\frac{2m-2n-nm+3}{m+1}\right)^2$.

В частном случае $n = \frac{3m+4}{2m+3}$ уравнение (5) сильно упрощается и совпадает (с точностью до переобозначений) с уравнением 6.2.1.12:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A \frac{\partial}{\partial \xi}\left(u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right).$$

15. $\displaystyle\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = k(ax^2 + bx + c)^m w^{4-2m} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

Частный случай уравнения 6.2.4.20 при $f(u) = ku^{-2m}$.

1. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2 + bx + c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$

приводит к уравнению вида 6.2.4.21:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ku^{4-2m} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k(ac - \tfrac{1}{4}b^2)u^{5-2m},$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$ и решения в виде произведения функций разных аргументов $u = f(t)g(z)$.

2. Исходное уравнение преобразованием

$$w(x,t) = \left[v(\xi,t)\right]^{\frac{1}{2m+3}}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^m} \tag{1}$$

приводится к дивергентному виду

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[F(\xi) v^{\frac{4-2m}{2m-3}} \frac{\partial v}{\partial \xi}\right], \tag{2}$$

где функция $F(\xi)$ задается параметрически следующими формулами:

$$F(\xi) = \frac{k}{(ax^2+bx+c)^m}, \qquad \xi = \int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^m}. \tag{3}$$

Отметим некоторые частные случаи уравнения (2), когда функцию $F = F(\xi)$ в (3) можно записать в явном виде:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1,\ a=1,\ b=0,\ c=1;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\operatorname{ch}^2\xi}{v^2}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=1,\ a=-1,\ b=0,\ c=1;$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = k\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\xi^{-3/2}}{\cos\xi}\frac{\partial v}{\partial \xi}\right), \qquad m=\tfrac{1}{2},\ a=-1,\ b=0,\ c=1.$$

6.2.2. Уравнения, содержащие экспоненциальные функции

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}$.

Частный случай уравнения 6.2.4.1 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

1. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(B^2-a^2A^2)}{b\lambda(Ax+Bt+C)^2}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(B^2-a^2A^2)}{b\lambda\cos^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(a^2A^2-B^2)}{b\lambda\operatorname{ch}^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(B^2-a^2A^2)}{b\lambda\operatorname{sh}^2(Ax+Bt+C)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(\frac{8a^2C}{b\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda}\ln\left|(x+A)^2 - a^2(t+B)^2 + C\right|,$$

где A, B, C — произвольные постоянные.

2. Преобразование независимых переменных

$$z = x - at, \qquad y = x + at$$

приводит к уравнению вида 6.2.2.22:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial y} = -\tfrac{1}{4}a^{-2}b\exp(\lambda w).$$

Поэтому общее решение исходного уравнения описывается формулами

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\bigl[f(z)+g(y)\bigr] - \frac{2}{\lambda}\ln\left|k\int\exp\bigl[f(z)\bigr]\,dz - \frac{b\lambda}{8a^2k}\int\exp\bigl[g(y)\bigr]\,dy\right|,$$
$$z = x - at, \qquad y = x + at,$$

где $f = f(z)$, $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольный параметр.

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.2.5 при $b = an$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^k}\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(x^k \dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

При $k = 1$ и $k = 2$ уравнение описывает плоские осесимметричные и сферически-симметричные нелинейные волны. Частный случай уравнения 6.2.2.5 при $n = 0$, $b = ak$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x+\beta)^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Замена $z = x + \beta$ приводит к частному случаю уравнения 6.2.2.5 при $b = 0$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = az^n \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + ce^{\lambda w}.$$

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\lambda w}, \qquad a > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. При $n \neq 2$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a(2-n)^2(t+C)^2 - x^{2-n}.$$

Здесь функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi w''_{\xi\xi} + Aw'_{\xi} = Be^{\lambda w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{a(4-3n)+2b}{2a(2-n)}, \quad B = \frac{c}{a(2-n)^2}.$$

При $A \neq 1$ точное решение уравнения (1) дается формулой

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big(\frac{1-A}{\lambda B\xi}\Big).$$

При $A = 1$, что соответствует $b = \frac{1}{2}an$, точные решения уравнения (1) имеют вид

$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{2a(2-n)^2}{c\lambda\xi(\ln|\xi|+q)^2}\Big],$$
$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{2ap^2(2-n)^2}{c\lambda\xi\cos^2(p\ln|\xi|+q)}\Big],$$
$$w(\xi) = \frac{1}{\lambda}\ln\Big[\frac{-2ap^2(2-n)^2}{c\lambda\xi\,\mathrm{ch}^2(p\ln|\xi|+q)}\Big],$$

где p, q — произвольные постоянные.

При $A \neq 1$ замена $\xi = kz^{\frac{1}{1-A}}$ $(k = \pm 1)$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} = \frac{kB}{(1-A)^2} z^{\frac{2A-1}{1-A}} e^{\lambda w}. \tag{2}$$

В частном случае $A = \frac{1}{2}$, что соответствует $b = a(n-1)$, решения уравнения (2) имеют вид:

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-a(2-n)^2}{2kc\lambda(z+q)^2}\right],$$
$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{ap^2(2-n)^2}{2kc\lambda\operatorname{ch}^2(pz+q)}\right],$$
$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-ap^2(2-n)^2}{2kc\lambda\cos^2(pz+q)}\right],$$

где p, q — произвольные постоянные.

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(y)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + (b-a)Bw'_y + ce^{\lambda w} = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$w(y) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{c\lambda}{B(b-a)}y + C_1\right].$$

Решения уравнения (3) при $b = a$:

$$w(y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(A^2 - aB^2)}{c\lambda(y+q)^2}\right],$$
$$w(y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2p^2(aB^2 - A^2)}{c\lambda\operatorname{ch}^2(py+q)}\right],$$
$$w(y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2p^2(A^2 - aB^2)}{c\lambda\cos^2(py+q)}\right],$$

где p, q — произвольные постоянные.

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + cw^m, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.2.10 при $b = a\lambda$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.2.11 при $b = a\lambda$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + cw^m, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Частный случай уравнения 6.2.2.10 при $b = 0$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. Частный случай уравнения 6.2.2.11 при $b = 0$.

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + cw^m, \qquad a > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. Существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \left[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t + C)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\frac{1}{z}w'_z + \frac{c}{ak\lambda^2}w^m = 0. \tag{1}$$

Это уравнение имеет точное решение

$$w(z) = \left\{\frac{2k\lambda\left[a\lambda(m-3) + 2b(1-m)\right]}{c(1-m)^2 z^2}\right\}^{\frac{1}{m-1}}.$$

При $b = a\lambda$ общее решение уравнения (1) задается неявно:

$$\int\left[C_1 - \frac{2c}{ak\lambda^2(m+1)}w^{m+1}\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $b \neq \frac{1}{2}a\lambda$ замена $\xi = z^{\frac{2b - a\lambda}{a\lambda}}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} + \frac{ac}{k(2b - a\lambda)^2}\xi^{\frac{4(a\lambda - b)}{2b - a\lambda}} w^m = 0. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995) приведено более 20 общих решений уравнения (2) для некоторых значений параметра m.

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\mu w}, \qquad a > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной переменной: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. Существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \left[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t + C)^2\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\frac{1}{z}w'_z + \frac{c}{ak\lambda^2}e^{\mu w} = 0. \tag{1}$$

Точное решение уравнения (1) имеет вид:

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{2k\lambda(a\lambda - 2b)}{c\mu z^2}\right].$$

Укажем некоторые другие точные решения уравнения (1):

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2ak\lambda^2}{c\mu(z+B)^2}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{2aA^2k\lambda^2}{c\mu\,\mathrm{ch}^2(Az+B)}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2aA^2k\lambda^2}{c\mu\,\mathrm{sh}^2(Az+B)}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{-2aA^2k\lambda^2}{c\mu\cos^2(Az+B)}\right] \qquad \text{при } b = a\lambda,$$

$$w(z) = \frac{1}{\mu}\ln\left[\frac{8ABak\lambda^2}{c\mu(Az^2+B)^2}\right] \qquad \text{при } b = \tfrac{1}{2}a\lambda,$$

где A, B — произвольные постоянные.

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Частный случай уравнения 6.2.4.8 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

Точное решение в виде бегущей волны:

$$w = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{\exp(Ax + A\mu t + B) - b}{A(a^2-\mu^2)}\right],$$

где μ, A, B — произвольные постоянные.

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}e^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.9 при $f(w) = be^{\lambda w}$.

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}w^n\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.11 при $f(w) = bw^n$.

15. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x+\mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.11 при $f(w) = be^{\mu w}$.

16. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x+\mu w}\dfrac{\partial w}{\partial x} + ce^{\beta w}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.12 при $f(w) = be^{\mu w}$, $g(w) = ce^{\beta w}$.

17. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2w^4\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}w^5$.

Частный случай уравнения 6.2.4.14 при $f(x) = be^{\lambda x}$.

18. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda w}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

1. Точные решения:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(x+A)^2}{\operatorname{ch}^2(Bt+C)}\right], \qquad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\operatorname{ch}^2(Ax+B)}{(t+C)^2}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ax+B)}{\operatorname{ch}^2(Ct+D)}\right], \quad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{ch}^2(Ax+B)}{\operatorname{sh}^2(Ct+D)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ax+B)}{\operatorname{ch}^2(Ct+D)}\right], \quad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{ch}^2(Ax+B)}{\cos^2(Ct+D)}\right],$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{4BC\beta^2(x+A)^2}{a(Be^{\beta t}+Ce^{-\beta t})^2}\right], \quad w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{(Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x})^2}{4aAB\beta^2(t+C)^2}\right],$$

где A, B, C, D, β — произвольные постоянные.

2. Автомодельные решения вида

$$w = w(z), \quad z = \frac{x+A}{t+B}$$

описываются уравнением

$$(ae^{\lambda w} - z^2)w''_{zz} - zw'_z = 0,$$

которое допускает понижение порядка.

19. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.16 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

1. Точные решения:

$$w(x,t) = \frac{2}{\lambda}\ln|Ax+B| - \frac{2}{\lambda}\ln|\pm A\sqrt{a}\,t + C|, \tag{1}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(aA^2x^2 + Bx + C) - \frac{2}{\lambda}\ln(aAt + D), \tag{2}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\cos^2(pt+q)}\right], \tag{3}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\operatorname{sh}^2(pt+q)}\right], \tag{4}$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ax^2 + Bx + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-p^2}{aA\operatorname{ch}^2(pt+q)}\right], \tag{5}$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные. Формулы (1) — (5) исчерпывают все решения, которые являются суммой функций разных переменных.

2. Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \mu t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — любые)

$$\lambda\mu^2 w - ae^{\lambda w} = Az + B.$$

3. Автомодельные решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+a}{t+b}$$

описываются уравнением

$$(\xi^2 w'_\xi)'_\xi = (ae^{\lambda w} w'_\xi)'_\xi,$$

которое допускает первый интеграл

$$(\xi^2 - ae^{\lambda w}) w'_\xi = C. \qquad (6)$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение вида (1). При $C \neq 0$ принимая в (6) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 - ae^{\lambda w},$$

которое рассмотрено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995).

20. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x} w^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.17 при $f(x) = ae^{\lambda x}$.

21. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x + \mu t + \beta w} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad a > 0.$

Замена $\beta u = \lambda x + \mu t + \beta w$ приводит к уравнению вида 6.2.2.18:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = ae^{\beta u} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

22. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = ae^{\lambda w}.$

Уравнение Лиувилля.

1. Общее решение:

$$w = \frac{1}{\lambda}\left[f(x) + g(y)\right] - \frac{2}{\lambda} \ln\left|k \int \exp\left[f(x)\right] dx + \frac{a\lambda}{2k} \int \exp\left[g(y)\right] dy\right|,$$

где $f = f(x)$, $g = g(y)$ — произвольные функции, k — произвольный параметр.

2. Уравнение Лиувилля связано с линейным уравнением $\partial_{yx} u = 0$ преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{2k}{\lambda} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(w+u)\right],$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{a}{k} \exp\left[\frac{1}{2}\lambda(w-u)\right].$$

3. Линеаризация исходного уравнения может быть произведена также любой из двух дифференциальных подстановок ($\lambda = 1$):

$$w = \ln\left(\frac{2}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right), \qquad v = v(x, y), \qquad (1)$$

$$w = \ln\left[2\left(1 + \operatorname{tg}^2 z\right) \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y}\right], \qquad z = z(x, y). \qquad (2)$$

Литература: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), N. H. Ibragimov (1994).

6.2.3. Другие уравнения, содержащие параметры

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b \sin w.$

Уравнение Sine-Gordon. Встречается в различных областях физики (сверхпроводимость, дислокация в кристаллах, волны в ферромагнитных материалах, лазерные импульсы в двухфазной среде и др.).

1. Точные решения ($a = 1$, $b = -1$):

$$w(x,t) = 4 \operatorname{arctg}\left[\exp\left(\pm \frac{x - \lambda t + C}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)\right], \tag{1}$$

$$w(x,t) = 4 \operatorname{arctg}\left[\frac{\lambda \operatorname{sh}(kx + A)}{\operatorname{ch}(k\lambda t + B)}\right], \quad k = (1-\lambda^2)^{-1/2}, \tag{2}$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные.

Формула (1) отвечает односолитонному решению, а формула (2) — двусолитонному решению Перринга — Скирма.

Решение (2) является частным случаем более общего решения вида

$$w(x,t) = 4 \operatorname{arctg}[f(x)g(t)],$$

где функции $f = f(x)$ и $g = g(x)$ определяются путем решения двух автономных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} (f'_x)^2 &= \alpha f^4 + (1+\beta) f^2 - \gamma, \\ (g'_t)^2 &= \gamma g^4 + \beta g^2 - \alpha, \end{aligned} \tag{3}$$

где α, β, γ — произвольные постоянные. Решения уравнений (3) выражаются через эллиптические функции.

2. N-солитонное решение описывается формулами ($a = 1$, $b = -1$):

$$w(x,t) = \arccos\left[1 - 2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(\ln F)\right],$$

$$F = \det M_{ij}, \quad M_{ij} = \frac{2}{a_i + a_j} \operatorname{ch}\left(\frac{z_i + z_j}{2}\right),$$

$$z_i = \pm \frac{x - \lambda_i t + C_i}{\sqrt{1 - \lambda_i^2}}, \quad a_i = \pm\sqrt{\frac{1-\lambda_i}{1+\lambda_i}},$$

где λ_i, C_i — произвольные постоянные.

3. Е. Д. Белоколос (1995) получил общую формулу для решения уравнения Sine-Gordon с произвольными начальными и граничными условиями.

4. Преобразование

$$z = x - at, \quad y = x + at$$

приводит к уравнению вида 6.2.3.6: $\partial_{zy} w = -\frac{1}{4} a^{-2} \sin w$.

Литература: Дж. Уизем (1977), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\sin w + \frac{1}{2} c \sin\left(\frac{1}{2} w\right).$

Двойное уравнение Sine-Gordon.

О точных решениях этого уравнения см. Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\,\mathrm{ch}(bw)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.16 при $f(w) = a\,\mathrm{ch}(bw)$.

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a\,\mathrm{sh}(bw)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right], \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.16 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}(bw)$.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a\,\mathrm{sh}\, w.$

Об этом уравнении см. В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), A. Grauel (1985).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = a \sin w.$

Уравнение Бонэ (*O. Bonnet*).

1. Точное решение:

$$w(x,y) = 4\,\mathrm{arctg}\big[\exp(Aax + a^{-1}y + B)\big],$$

где A, B — произвольные постоянные.

2. Преобразование Беклунда ($a = 1$):

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial w}{\partial x} + 2k\sin\left(\frac{w+u}{2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{2}{k}\sin\left(\frac{w-u}{2}\right) \end{aligned} \qquad (1)$$

переводит исходное уравнение в такое же уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \sin u.$$

Формулы (1) позволяют по одному точному решению последовательно генерировать другие решения этого уравнения.

Литература: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983), В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский (1980), N. H. Ibragimov (1994).

6.2.4. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w).$

Обобщенное уравнение Клейна — Гордона.

При $f(w) = aw^m$, $f(w) = ae^{\lambda w}$, $f(w) = a\sin w$ см. соответственно уравнения 6.2.1.1, 6.2.2.1, 6.2.3.1.

1. Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = \mu x + \lambda t$$

описываются автономным обыкновенным дифференциальным уравнением $(\lambda^2 - a^2\mu^2)w''_{zz} = f(w)$. Его решения можно представить в неявном виде:

$$\int \left[A + \frac{2}{\lambda^2 - a^2\mu^2} \int f(w)\,dw\right]^{-1/2} dw = B \pm z, \qquad (1)$$

где A, B — произвольные постоянные.

С. В. Нестеров (1978) указал несколько случаев, когда решение (1) можно записать в явном виде ($a = \mu = 1$):

$$f(w) = -b^2 \frac{\operatorname{th} w}{\operatorname{ch}^2 w}, \quad w(z) = \operatorname{Arsh}\left[\operatorname{sh} k \sin\left(\frac{bz + c}{\operatorname{ch} k \sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right],$$

$$f(w) = -b^2 \frac{\operatorname{tg} w}{\cos^2 w}, \quad w(z) = \arcsin\left[\sin k \sin\left(\frac{bz + c}{\cos k \sqrt{\lambda^2 - 1}}\right)\right],$$

где k, c — произвольные постоянные. В этих случаях периодическим решениям по z с периодом 2π отвечают следующие зависимости скорости волны λ от амплитуды b:

$$\lambda^2 = 1 + b^2 \operatorname{ch}^{-2} k,$$

$$\lambda^2 = 1 + b^2 \cos^{-2} k.$$

2. Точные решения вида:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a^2(t + C_1)^2 - \tfrac{1}{4}(x + C_2)^2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi w''_{\xi\xi} + w'_\xi - a^{-2} f(w) = 0.$$

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a(x + \beta)^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w), \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде. При $n = 0$ см. уравнение 6.2.4.1.

1. Замена $y = x + \beta$ приводит к частному случаю уравнения 6.2.4.5 при $b = 0$.

2. При $n \neq 2$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \qquad z = \left[\tfrac{1}{4}a(2 - n)^2(t + C)^2 - (x + \beta)^{2-n}\right]^{\frac{n}{2(2-n)}},$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} - \frac{4}{an^2} z^{\frac{4(1-n)}{n}} f(w) = 0. \qquad (1)$$

В частном случае $n = 1$ решение уравнения (1) имеет вид:

$$\int \left[C_1 + \frac{8}{a} F(w)\right]^{-1/2} dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведен ряд точных решений уравнения (1) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[a(x+\beta)^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + f(w), \qquad a > 0.$

Сделаем замену $z = x + \beta$, а затем продифференцируем по z выражение в квадратных скобках в правой части уравнения. В результате приходим к частному случаю уравнения 6.2.4.5 при $b = an$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = az^n \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + anz^{n-1}\frac{\partial w}{\partial z} + f(w).$$

4. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{a}{x^m}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^m \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + f(w), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.5 при $n = 0$ и $b = am$. При $m = 1$ и $m = 2$ уравнение описывает плоские осесимметричные и сферически-симметричные нелинейные волны.

5. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + bx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w), \qquad a > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. При $n \neq 2$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(\xi), \qquad \xi = \tfrac{1}{4}a(2-n)^2(t+C)^2 - x^{2-n}.$$

Здесь функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$\xi w''_{\xi\xi} + Aw'_\xi - Bf(w) = 0, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{a(4-3n)+2b}{2a(2-n)}, \quad B = \frac{1}{a(2-n)^2}.$$

При $A \neq 1$ замена $\xi = kz^{\frac{1}{1-A}}$ $(k = \pm 1)$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{zz} - \frac{kB}{(1-A)^2} z^{\frac{2A-1}{1-A}} f(w) = 0. \tag{2}$$

В частном случае $A = \frac{1}{2}$, что соответствует $b = a(n-1)$, решение уравнения (2) имеет вид:

$$\int \Bigl[C_1 + 8kBF(w)\Bigr]^{-1/2} dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(y)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + (b-a)Bw'_y + f(w) = 0. \tag{3}$$

Решения уравнения (3) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$(b-a)B\int \frac{dw}{f(w)} = -y + C_1.$$

Решения уравнения (3) при $b = a$:

$$\int \Bigl[C_1 + \frac{2}{A^2 - aB^2}F(w)\Bigr]^{-1/2} dw = \pm y + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

При $A \neq \pm B\sqrt{a}$ и $b \neq a$ замена $u(w) = \dfrac{aB^2 - A^2}{B(a-b)}w'_y$ приводит (3) к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = \frac{A^2 - aB^2}{B^2(a-b)^2}f(w),$$

точные решения которого для различных функций $f = f(w)$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

6. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + f(w), \qquad a > 0.$

Частный случай уравнения 6.2.4.7 при $b = a\lambda$.

7. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w), \qquad a > 0.$

Уравнение распространения нелинейных волн в неоднородной среде.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. Существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \bigl[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\bigr]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2(a\lambda - b)}{a\lambda}\,\frac{1}{z}w'_z + \frac{1}{ak\lambda^2}f(w) = 0. \tag{1}$$

При $b = a\lambda$ решение уравнения (1) имеет вид:

$$\int \Bigl[C_1 - \frac{2}{ak\lambda^2}F(w)\Bigr]^{-1/2} dw = \pm z + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

При $b \neq \frac{1}{2}a\lambda$ замена $\xi = z^{\frac{2b-a\lambda}{a\lambda}}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} + \frac{a}{k(2b-a\lambda)^2}\xi^{\frac{4(a\lambda-b)}{2b-a\lambda}} f(w) = 0. \tag{2}$$

В книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина приведен ряд точных решений уравнения (2) для некоторых зависимостей $f = f(w)$.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

Точные решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \qquad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ задается неявно с помощью формул (A, B — любые)

$$(\lambda^2 - a^2)\int \frac{dw}{F(w) + A} = z + B, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

Стационарному решению соответствует значение $\lambda = 0$.

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{n-1} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}$.

1. Решения, зависящие только от одной переменной: $w(t) = At + B$ и $w = w(x)$, которое задается неявно

$$\int \frac{dw}{aw - F(w) + A} = \frac{1}{a}\ln|x| + B, \quad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2. При $n \neq 2$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \left[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\right]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)}\left[a(1-n) + f(w)\right]\frac{1}{z}w'_z = 0. \tag{1}$$

Замена $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{anw - 2F(w) + C_1} = \frac{1}{a(2-n)}\ln|z| + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. При $n \neq 2$ существуют также точные решения вида:

$$w = w(\xi), \qquad \xi = xt^{\frac{2}{n-2}},$$

где функция $w = w(\xi)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\left[a\xi^{n-1} - \frac{4}{(n-2)^2}\xi\right]w''_{\xi\xi} + \left[\xi^{n-2}f(w) + \frac{2(n-4)}{(n-2)^2}\right]w'_\xi = 0.$$

4. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(y), \quad y = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(y)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{yy} + B\big[f(w) - a\big]w'_y = 0,$$

решение которого при $A \neq \pm B\sqrt{a}$ дается формулой

$$\frac{aB^2 - A^2}{B}\int\frac{dw}{F(w) - aw + C_1} = -y, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

10. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + x^{n-1}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. При $n \neq 2$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \big[ka(2-n)^2(t+C)^2 - 4kx^{2-n}\big]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2}{a(2-n)}\big[a(1-n) + f(w)\big]\frac{1}{z}w'_z - \frac{1}{ak(2-n)^2}g(w) = 0.$$

3. При $n = 2$ существуют решения вида (A, B, C — любые):

$$w = w(\xi), \quad z = At + B\ln|x| + C,$$

где функция $w = w(\xi)$ определяется из обыкновенного автономного дифференциального уравнения

$$(aB^2 - A^2)w''_{\xi\xi} + B\big[f(w) - a\big]w'_\xi + g(w) = 0. \tag{1}$$

Решение уравнения (1) при $A = \pm B\sqrt{a}$:

$$B\int\big[f(w) - a\big]\frac{dw}{g(w)} = -\xi + C_1.$$

В общем случае замена $u(w) = w'_\xi$ приводит (1) к уравнению Абеля, точные решения которого для различных функций $f = f(w)$ и $g = g(w)$ можно найти в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

11. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\lambda x}f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}.$

1. При $\lambda = 0$ см. уравнение 6.2.4.8.

2. При $\lambda \neq 0$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \big[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t+C)^2\big]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2}{z}\Big[1 - \frac{1}{a\lambda}f(w)\Big]w'_z = 0. \tag{1}$$

Замена $u(w) = zw'_z$ приводит (1) к уравнению первого порядка с разделяющимися переменными. После интегрирования получим решение в неявном виде:

$$\int \frac{dw}{2F(w) - a\lambda w + C_1} = \frac{1}{a\lambda} \ln|z| + C_2, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. Существуют также точные решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = t^2 e^{\lambda x},$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$(a\lambda^2\xi^2 - 4\xi)w''_{\xi\xi} + \bigl[\lambda\xi f(w) + a\lambda^2\xi - 2\bigr]w'_\xi = 0.$$

12. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + e^{\lambda x} f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g(w).$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(t)$.

2. При $\lambda \neq 0$ существуют точные решения вида (C — любое):

$$w = w(z), \quad z = \bigl[4ke^{-\lambda x} - ak\lambda^2(t + C)^2\bigr]^{1/2}, \qquad k = \pm 1,$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{2}{z}\Bigl[1 - \frac{1}{a\lambda} f(w)\Bigr]w'_z + \frac{1}{ak\lambda^2} g(w) = 0.$$

3. При $\lambda = 0$ существуют точные решения типа бегущей волны (см. уравнение 6.2.4.21).

13. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(t)\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr)^2 + bf(t)w^2 + g(t)w + h(t).$

1. Точные решения:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\exp\bigl(\pm x\sqrt{-b}\bigr), \qquad b < 0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{tt} = bf\varphi^2 + g\varphi + h, \tag{2}$$

$$\psi''_{tt} = (2bf\varphi + g - a^2 b)\psi. \tag{3}$$

Если удается найти решение $\varphi = \varphi(t)$ уравнения (2), то функцию $\psi = \psi(t)$ можно получить путем решения уравнения (3), линейного относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g = \alpha f, \quad h = \beta f \qquad (\alpha,\, \beta = \text{const}),$$

то частные решения уравнения (2) имеют вид

$$\varphi = k_1, \quad \varphi = k_2, \tag{4}$$

где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2 + \alpha k + \beta = 0$. В этом случае уравнение (3) записывается так

$$\psi''_{tt} = \left[(2bk_n + \alpha)f - a^2 b\right]\psi, \qquad n = 1,\, 2. \tag{5}$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(t)$. В частном случае $f = \mathrm{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2. Точные решения более общего вида:

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\left[A\exp\left(x\sqrt{-b}\right) + B\exp\left(-x\sqrt{-b}\right)\right], \qquad b < 0, \tag{6}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= bf\left(\varphi^2 + 4AB\psi^2\right) + g\varphi + h, \\ \psi''_{tt} &= 2bf\varphi\psi + g\psi - a^2 b\psi. \end{aligned}$$

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{ch}\left(x\sqrt{-b}\right), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2}, \\ w(x,t) &= \varphi(t) + \psi(t)\,\mathrm{sh}\left(x\sqrt{-b}\right), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. Точные решения вида (c — любое):

$$w(x,t) = \varphi(t) + \psi(t)\cos\left(x\sqrt{b} + c\right), \qquad b > 0, \tag{7}$$

где функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} \varphi''_{tt} &= bf\left(\varphi^2 + \psi^2\right) + g\varphi + h, \\ \psi''_{tt} &= 2bf\varphi\psi + g\psi - a^2 b\psi. \end{aligned}$$

14. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 w^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(x) w^5.$

1. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a^2 u''_{xx} + f(x)u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = \frac{w}{u}$$

упрощает исходное уравнение и приводит его к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2 z^4 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2}.$$

Это уравнение имеет, например, такие решения (A, B, C, D, λ — любые):

$$z(\xi, t) = A\xi t + B\xi + Ct + D,$$

$$z(\xi, t) = \lambda^{-1/4}(t + C)^{-1/2}\left[\frac{3\lambda}{4A^2} + \left(\frac{A}{a}\xi + B\right)^2\right]^{1/2}.$$

Второе решение является частным случаем решения в виде произведения функций разных аргументов $z(\xi, t) = f(\xi)g(t)$. Существуют также автомодельные решения вида

$$z = t^k \varphi(\zeta), \quad \zeta = \xi t^{-2k-1},$$

где k — любое.

2. Точные решения в виде произведения (C — любое):

$$w(x, t) = (\pm 2\lambda t + C)^{-1/2} g(x),$$

где функция $g = g(x)$ определяется из уравнения Ермакова

$$a^2 g''_{xx} + f(x)g - 3\lambda^2 g^{-3} = 0. \tag{2}$$

Если известно частное решение $u = u(x)$ линейного уравнения (1), то общее решение нелинейного уравнения (2) имеет вид (см., например, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995):

$$Ag^2 = \frac{3\lambda^2}{a^2}u^2 + u^2\left(B + A\int \frac{dx}{u^2}\right)^2,$$

где A, B — произвольные постоянные ($A \neq 0$).

15. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial x}\left(w^{-4/3}\frac{\partial w}{\partial x}\right) + f(x)w^{-1/3}, \quad a > 0.$

1. Пусть $u = u(x)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$au''_{xx} - \tfrac{1}{3}f(x)u = 0. \tag{1}$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dx}{u^2}, \quad z = wu^3 \tag{2}$$

приводит исходное уравнение к более простому уравнению вида 6.2.1.12:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a\frac{\partial}{\partial \xi}\left(z^{-4/3}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right).$$

2. При $f = b = \text{const}$ решение вспомогательного уравнения (1), которое входит в преобразование (2), описывается формулами:

$$u(x) = \begin{cases} C_1 \exp(\lambda x) + C_2 \exp(-\lambda x) & \text{при } ab > 0, \\ C_1 \cos(\lambda x) + C_2 \sin(\lambda x) & \text{при } ab < 0, \end{cases}$$

где $\lambda = \left|\tfrac{1}{3}b/a\right|^{1/2}$; C_1, C_2 — любые.

При $f(x) = bx^m$ или $f(x) = be^{\beta x}$ решения уравнения (1) выражаются через функции Бесселя.

16. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right].$

Это уравнение встречается в задачах волновой и газовой динамики.

1. Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x \pm \lambda t,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — любые)

$$\lambda^2 w - \int f(w)\,dw = Az + B.$$

2. Автомодельные решения

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+a}{t+b}$$

описываются уравнением

$$(\xi^2 w'_\xi)'_\xi = \left[f(w)w'_\xi\right]'_\xi,$$

которое допускает первый интеграл

$$\left[\xi^2 - f(w)\right]w'_\xi = C. \tag{1}$$

Частному случаю $C = 0$ отвечает решение

$$\xi^2 = f(w).$$

При $C \neq 0$ принимая в (1) w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 - f(w). \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $f = f(w)$.

Уравнение (2) подстановкой $\xi = -Cy'_w/y$ сводится к линейному уравнению второго порядка: $y''_{ww} = C^{-2}f(w)y$.

Литература: W. F. Ames, R. J. Lohner, E. Adams (1981).

17. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(x)w^m\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1. Точные решения в виде произведения:

$$w(x,t) = g(t)h(x),$$

где функции $g = g(t)$ и $h = h(x)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{1}$$

$$h''_{xx} - \lambda\left[f(x)\right]^{-1}h^{1-m} = 0, \tag{2}$$

где λ — любое.

Общее решение уравнения (1) записывается в неявной форме:

$$\int\left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2}g^{m+2}\right)^{-1/2}dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (at + C)^{-2/m}, \qquad a = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

При $m = 1$ общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$h(x) = \lambda \int_{x_0}^{x} \frac{(x-\xi)}{f(\xi)}\,d\xi + Ax + B,$$

где A, B, x_0 — любые.

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений обобщенного уравнения Эмдена — Фаулера (2) для различных функций $f = f(x)$.

2. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x}w(x,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = z^{4-m} f\left(\frac{1}{z}\right) u^m \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

18. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[f(x)w^m \frac{\partial w}{\partial x}\right].$

1. Точные решения в виде произведения:

$$w(x,t) = g(t)h(x),$$

где функции $g = g(t)$ и $h = h(x)$ определяются из обыкновенных дифференциальных уравнений

$$g''_{tt} - \lambda g^{m+1} = 0, \tag{1}$$
$$[f(x)h^m h'_x]'_x - \lambda h = 0, \tag{2}$$

где λ — любое.

Общее решение уравнения (1) записывается в неявной форме:

$$\int \left(C_1 + \frac{2\lambda}{m+2} g^{m+2}\right)^{-1/2} dg = C_2 \pm t,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Отсюда, в частности, при $C_1 = 0$ для функции $g(t)$ имеем

$$g(t) = (at + C)^{-2/m}, \qquad a = \pm\sqrt{\frac{\lambda m^2}{2(m+2)}}.$$

Преобразование

$$z = \int \frac{dx}{f(x)}, \quad \Phi = h^{m+1}$$

приводит (2) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$\Phi''_{zz} - F(z)\Phi^{\frac{1}{m+1}} = 0, \tag{3}$$

где функция $F = F(z)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$F = \lambda(m+1)f(x), \qquad z = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995, разд. 2.3, 2.7) приведено много точных решений уравнения (3) для различных функций $F = F(z)$.

2. Преобразование

$$w(x,t) = \bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{1}{m+1}} u(\xi,t), \quad \xi = \int \bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{m+2}{m+1}} dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}$$

приводит к уравнению аналогичного вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\mathcal{F}(\xi) u^m \frac{\partial u}{\partial \xi}\right],$$

где функция $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\xi)$ задается (параметрически) с помощью формул

$$\mathcal{F} = f(x)\bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{3m+4}{m+1}}, \quad \xi = \int \bigl[\psi(x)\bigr]^{\frac{m+2}{m+1}} dx, \qquad \psi(x) = \int \frac{dx}{f(x)}.$$

19. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^4 f\left(\frac{w}{x}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1. Точное решение:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — любые.

2. Преобразование

$$u(z,t) = \frac{1}{x} w(x,t), \quad z = \frac{1}{x}$$

приводит к более простому уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$ и автомодельные решения вида $u = u(z/t)$.

20. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = w^4 f\left(\frac{w}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

1. Точное решение:

$$w(x,t) = Axt + Bx + Ct + D,$$

где A, B, C, D — любые.

2. Преобразование

$$w(x,t) = u(z,t)\sqrt{ax^2+bx+c}, \qquad z = \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

приводит к уравнению вида 6.2.4.21:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u^4 f(u)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \left(ac - \tfrac{1}{4}b^2\right)u^5 f(u),$$

которое допускает решения типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

21. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f(w)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t$$

описываются автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$[f(w) - \lambda^2]w''_{zz} + g(w)w'_z + h(w) = 0,$$

которое с помощью замены $u(w) = w'_z$ приводится к уравнению Абеля

$$[f(w) - \lambda^2]uu'_w + g(w)u + h(w) = 0. \qquad (1)$$

Подстановка $\xi = -\displaystyle\int \frac{g(w)\,dw}{f(w) - \lambda^2}$ приводит (1) к каноническому виду

$$uu'_\xi - u = F(\xi), \qquad (2)$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F(\xi) = \frac{h(w)}{g(w)}, \qquad \xi = -\int \frac{g(w)\,dw}{f(w) - \lambda^2}.$$

Большое число точных решений уравнений Абеля (2) для различных зависимостей $F = F(\xi)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

22. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x} + h(w).$

Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t$$

описываются автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\{[f(w) - \lambda^2]w'_z\}'_z + g(w)w'_z + h(w) = 0,$$

которое с помощью замены

$$u(w) = [f(w) - \lambda^2]w'_z$$

приводится к уравнению Абеля

$$uu'_w + g(w)u + h(w)[f(w) - \lambda^2] = 0. \qquad (1)$$

Подстановка $\xi = -\displaystyle\int g(w)\,dw$ приводит (1) к каноническому виду

$$uu'_\xi - u = F(\xi), \qquad (2)$$

где функция $F = F(\xi)$ задается параметрически с помощью формул

$$F(\xi) = \frac{h(w)}{g(w)}[f(w) - \lambda^2], \qquad \xi = -\int g(w)\,dw.$$

Большое число точных решений уравнений Абеля (2) для различных зависимостей $F = F(\xi)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1995).

23. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + k\dfrac{\partial w}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b\dfrac{\partial w}{\partial x} + f(w).$

Решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t$$

описываются автономным обыкновенным дифференциальным уравнением

$$(\lambda^2 - a^2)w''_{zz} + (k\lambda - b)w'_z = f(w). \tag{1}$$

1. Решение при $\lambda = \pm a$:

$$(\pm ak - b)\int\frac{dw}{f(w)} = z + C, \qquad \text{где } A\text{ — любое.}$$

2. Решение при $\lambda = b/k$:

$$\int\Big[A + \frac{2}{\lambda^2 - a^2}\int f(w)\,dw\Big]^{-1/2}dw = B \pm z,$$

где A, B — произвольные постоянные.

В общем случае при $\lambda \neq \pm a$ и $\lambda \neq b/k$ уравнение (1) заменой $u(w) = \dfrac{\lambda^2 - a^2}{b - k\lambda}w'_z$ сводится к уравнению Абеля

$$uu'_w - u = F(w), \qquad F(w) = \frac{\lambda^2 - a^2}{(b - k\lambda)^2}f(w). \tag{2}$$

В книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено более 70 точных решений уравнения (2) для различных зависимостей $F = F(w)$.

24. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + f(w)\dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big].$

Точные решения в виде бегущей волны:

$$w = w(z), \quad z = x + \lambda t,$$

где функция $w = w(z)$ задается неявно (A, B — любые):

$$\int\frac{g(w) - \lambda^2}{\lambda F(w) + A}dw = z + B, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw.$$

Другие точные решения описаны в работе В. А. Байкова, Р. К. Газизова, Н. Х. Ибрагимова (1989).

25. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = f\Big(\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$

При $f(z) = -z$ это уравнение встречается в аэродинамике (в теории околозвуковых течений газа).

1. Замена $v(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 6.2.4.16:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[f(v)\frac{\partial v}{\partial x}\Big].$$

2. Исходное уравнение преобразованием Лежандра (нижние индексы обозначают частные производные)

$$\tau = w_x, \quad z = w_t, \quad u = tw_t + xw_x - w$$

приводится к линейному уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = f(\tau)\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Литература: N. H. Ibragimov (1994).

26. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Замена $u(x,t) = \dfrac{\partial w}{\partial x}$ приводит к уравнению вида 6.2.4.25:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad f(z) = F'_z(z).$$

Литература: N. H. Ibragimov (1994).

27. $\displaystyle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F\left(x,\, w,\, \frac{\partial w}{\partial x},\, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right).$

Пусть вспомогательное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$w = F(x,\, w,\, w'_x,\, w''_{xx})$$

после линейного преобразования

$$x = \varphi(z), \quad w = \psi(z)u$$

и последующего сокращения обеих частей на функцию $\psi(z)$ приводится к автономному виду

$$u = \mathcal{F}(u,\, u'_z,\, u''_{zz}),$$

где $\mathcal{F} = F/\psi$. Тогда рассматриваемое уравнение в частных производных таким же преобразованием

$$x = \varphi(z), \quad w(x,t) = \psi(z)u(z,t)$$

приводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mathcal{F}\left(u,\, \frac{\partial u}{\partial z},\, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

которое допускает точные решения типа бегущей волны $u = u(z + \lambda t)$.

Сказанное позволяет различные известные преобразования обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Э. Камке, 1976, В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, 1995) использовать для построения точных решений уравнений в частных производных. Если исходное уравнение было линейным, то такие преобразования будут приводить к линейным уравнениям с постоянными коэффициентами.

6.3. Уравнения эллиптического типа

6.3.1. Уравнения, содержащие произвольные параметры

1. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ae^{\lambda w}.$

Это уравнение встречается в теории горения и является частным случаем уравнения 6.3.2.1 при $f(w) = ae^{\lambda w}$.

1. Точные решения:

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(A^2+B^2)}{a\lambda(Ax+By+C)^2}\right], \qquad a\lambda > 0,$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(A^2+B^2)}{a\lambda\cos^2(Ax+By+C)}\right], \qquad a\lambda > 0,$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2(A^2+B^2)}{a\lambda\,\mathrm{sh}^2(Ax+By+C)}\right], \qquad a\lambda > 0,$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-2(A^2+B^2)}{a\lambda\,\mathrm{ch}^2(Ax+By+C)}\right], \qquad a\lambda < 0,$$
$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(-\frac{8C}{a\lambda}\right) - \frac{2}{\lambda}\ln\left[(x+A)^2+(y+B)^2+C\right],$$

где A, B, C, λ — произвольные постоянные.

2. Исходное уравнение связано с линейным уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (1)$$

преобразованием Беклунда

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{1}{2}\lambda\frac{\partial w}{\partial y} = \left(\tfrac{1}{2}a\lambda\right)^{1/2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\lambda w\right)\sin u, \qquad (2)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} - \tfrac{1}{2}\lambda\frac{\partial w}{\partial x} = \left(\tfrac{1}{2}a\lambda\right)^{1/2}\exp\left(\tfrac{1}{2}\lambda w\right)\cos u. \qquad (3)$$

Пусть имеется (частное) решение $u = u(x,y)$ уравнения Лапласа (1). Тогда (2) можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно $w = w(y)$ с параметром x. Оно приводится к линейному уравнению с помощью замены $z = \exp\left(-\tfrac{1}{2}\lambda w\right)$. В результате получим

$$w = -\frac{2}{\lambda}F - \frac{2}{\lambda}\ln\left[C(x) - k\int \sin u\exp(-F)\,dy\right], \qquad F = \int\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)dy;$$

при интегрировании x считается как параметр. Функция $C(x)$ определяется после подстановки этого выражения в уравнение (3).

Литература: Д. А. Франк-Каменецкий (1987), Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

2. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\,\mathrm{sh}(\lambda w).$

Частный случай уравнения 6.3.2.1 при $f(w) = a\,\mathrm{sh}(\lambda w)$.

1. Точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = Ax + By + C,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int \left[C_1 + \frac{2a\operatorname{ch}(\lambda w)}{\lambda(A^2+B^2)}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z,$$

A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{1}{z} w'_z = a\operatorname{sh}(\lambda w).$$

Об исходном уравнении см. работу A. C. Ting, H. H. Cheb, Y. C. Lee (1987).

3. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = a\sin(\lambda w).$

Частный случай уравнения 6.3.2.1 при $f(w) = a\sin(\lambda w)$.

1. Точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = Ax + By + C,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы

$$\int \left[C_1 - \frac{2a\cos(\lambda w)}{\lambda(A^2+B^2)}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z,$$

A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \sqrt{(x+C_1)^2 + (y+C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{1}{z} w'_z = a\sin(\lambda w).$$

3. Точное решение $a = \lambda = 1$:

$$u(x,y) = 4\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg}\mu)\frac{\operatorname{ch} F}{\operatorname{ch} G},$$
$$F = \frac{\cos\mu}{\sqrt{1+\beta^2}}(x - \beta y), \quad G = \frac{\sin\mu}{\sqrt{1+\beta^2}}(x + \beta y),$$

где β, μ — произвольные постоянные.

Литература: Р. Буллаф, Ф. Кодри (1983).

4. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^p, \qquad a, b > 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.4 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^p$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{A}{z} w'_z = Bw^p, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $p \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w = \left[\frac{2(1 + p + A - Ap)}{B(1-p)^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} z^{\frac{2}{1-p}}.$$

3.2. При $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения:

$$\int \left[C_1 + \frac{2c(3n-4)^2 w^{p+1}}{ab(p+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. Замена $\xi = z^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{B}{(1-A)^2} \xi^{\frac{2A}{1-A}} w^p. \tag{2}$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра p приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994, 1995).

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = cw^p, \qquad a, b > 0.$

Уравнение теории массопереноса с объемной реакцией p-го порядка в анизотропном случае. Частный случай уравнения 6.3.2.2 при $f(w) = cw^p$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{A}{z} w'_z = B w^p, \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $p \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w = \left[\frac{2(1+p+A-Ap)}{B(1-p)^2}\right]^{\frac{1}{p-1}} z^{\frac{2}{1-p}}.$$

3.2. При $m = 4/n$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(w)$:

$$\int \left[C_1 + \frac{2cn^2 w^{p+1}}{ab(p+1)(2-n)^4}\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. Замена $\xi = z^{1-A}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{B}{(1-A)^2} \xi^{\frac{2A}{1-A}} w^p. \qquad (2)$$

Более 20 точных решений уравнения (2) для различных значений параметра p приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994, 1995).

6. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\lambda w}, \qquad a, b > 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.4 при $k = s = 0$, $f(w) = ce^{\lambda w}$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{A}{z} w'_z = B e^{\lambda w}, \qquad (1)$$

где

$$A = \frac{3nm - 4n - 4m + 4}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w(z) = -\frac{1}{\lambda} \ln\left[\frac{B\lambda}{2(1-A)} z^2\right].$$

3.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \dfrac{4n-4}{3n-4}$, $B = \dfrac{c(3n-4)^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2\beta^2}{\lambda B\cos^2(\beta z + C)}\right] \qquad \text{при } \lambda B > 0,$$

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2\beta^2}{\lambda B\,\mathrm{sh}^2(\beta z + C)}\right] \qquad \text{при } \lambda B > 0,$$

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-2\beta^2}{\lambda B\,\mathrm{ch}^2(\beta z + C)}\right] \qquad \text{при } \lambda B < 0,$$

где β, C — произвольные постоянные.

3.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \dfrac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(-\frac{8C}{\lambda B}\right) - \frac{2}{\lambda}\ln(z^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

7. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = ce^{\lambda w}, \qquad a, b > 0.$

Уравнение стационарной теории горения в анизотропном случае. Частный случай уравнения 6.3.2.2 при $f(w) = ce^{\lambda w}$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left[b(2-m)^2x^{2-n} + a(2-n)^2y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{A}{z}w'_z = Be^{\lambda w}, \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4-nm}{(2-n)(2-m)}, \qquad B = \frac{4c}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) при $A \neq 1$ допускает точное решение вида

$$w(z) = -\frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{B\lambda}{2(1-A)}z^2\right].$$

3.2. При $A = 0$, что соответствует $m = \dfrac{4}{n}$, $B = \dfrac{cn^2}{ab(2-n)^4}$, из (1) получаем еще несколько семейств точных решений исходного уравнения:

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2\beta^2}{\lambda B\cos^2(\beta z + C)}\right] \quad \text{при } \lambda B > 0,$$

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{2\beta^2}{\lambda B\,\mathrm{sh}^2(\beta z + C)}\right] \quad \text{при } \lambda B > 0,$$

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-2\beta^2}{\lambda B\,\mathrm{ch}^2(\beta z + C)}\right] \quad \text{при } \lambda B < 0,$$

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{-8\beta^2 C_1 C_2}{\lambda B(C_1 e^{\beta z} + C_2 e^{-\beta z})^2}\right],$$

где β, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3.3. При $A = 1$, что соответствует $m = \frac{n}{n-1}$, из (1) получаем другое семейство точных решений исходного уравнения:

$$w(z) = \frac{1}{\lambda}\ln\left(-\frac{8C}{\lambda B}\right) - \frac{2}{\lambda}\ln(z^2 + C), \qquad B = \frac{4c(n-1)^2}{ab(2-n)^4},$$

где C — произвольная постоянная.

8. $ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^m, \qquad a, b > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $\lambda\mu \neq 0$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = (b\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y})^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{3}{z}w'_z = Aw^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\lambda^2\mu^2}. \tag{1}$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) допускает точное решение вида

$$w = \left[\frac{ab(2-m)\lambda^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}} z^{\frac{2}{1-m}}.$$

3.2. Замена $\xi = z^{-2}$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \tfrac{1}{4}A\xi^{-3}w^m,$$

решение которого при $m = 3$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева и А. Д. Полянина (1993, 1995).

9. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = cw^m, \qquad a, b > 0.$

Уравнение теории массопереноса с объемной реакцией n-го порядка в анизотропном случае. Частный случай уравнения 6.3.2.5 при $f(w) = cw^m$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $\lambda\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$w = w(z), \qquad z = \left(b\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} - \frac{1}{z}w'_z = Aw^m, \qquad A = \frac{4c}{ab\lambda^2\mu^2}. \qquad (1)$$

3. Укажем некоторые точные решения уравнения (1).

3.1. Уравнение (1) допускает точное решение вида

$$w = \left[\frac{abm\lambda^2\mu^2}{c(1-m)^2}\right]^{\frac{1}{m-1}} z^{\frac{2}{1-m}}.$$

2. Замена $\xi = z^2$ приводит (1) к уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \tfrac{1}{4}A\xi^{-1}w^m,$$

решения которого при $m = -1$ и $m = -2$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева и А. Д. Полянина (1993, 1995).

10. $ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\beta w}, \qquad a, b > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $\lambda\mu \neq 0$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left(b\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{3}{z}w'_z = Ae^{\beta w}, \qquad A = \frac{4c}{ab\lambda^2\mu^2}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) допускает точное решение

$$w = -\frac{1}{\beta}\ln\left(-\frac{1}{4}A\beta z^2\right).$$

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = ce^{\beta w}, \qquad a, b > 0.$

Уравнение теории горения в анизотропном случае. Частный случай уравнения 6.3.2.5 при $f(w) = ce^{\beta w}$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $\lambda\mu \neq 0$ существуют точные решения вида

$$w = w(z), \qquad z = \left(b\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y}\right)^{1/2},$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} - \frac{1}{z}w'_z = Ae^{\beta w}, \qquad A = \frac{4c}{ab\lambda^2\mu^2}. \qquad (1)$$

Уравнение (1) допускает точное решение

$$w = -\frac{1}{\beta}\ln\Bigl(\frac{1}{4}A\beta z^2\Bigr).$$

12. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cw^m, \qquad a, b > 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.7 при $k = s = 0$, $f(w) = cw^m$.

13. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\lambda y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\beta w}, \qquad a, b > 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.7 при $k = s = 0$, $f(w) = ce^{\beta w}$.

14. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr) = cw^m, \qquad a, b > 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.7 при $k = an$, $s = b\lambda$, $f(w) = cw^m$.

15. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Bigl(ax^n\dfrac{\partial w}{\partial x}\Bigr) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Bigl(be^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr) = ce^{\beta w}, \qquad a, b > 0.$

Частный случай уравнения 6.3.2.7 при $k = an$, $s = b\lambda$, $f(w) = ce^{\beta w}$.

16. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = c\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + bcw^2 + kw + s.$

Частный случай уравнения 6.3.2.8 при $f(x) = c$, $g(x) = k$, $h(x) = s$.
Пусть A — корень квадратного уравнения $bcA^2 + kA + s = 0$.

1. Если выполнено неравенство $2Abc + k + a^2b = \sigma^2 > 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x, y) = A + \bigl[C_1\exp(\sigma x) + C_2\exp(-\sigma x)\bigr]\exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr),$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Если выполнено неравенство $2Abc + k + a^2b = -\sigma^2 < 0$, то точные решения имеют вид

$$w(x, y) = A + \bigl[C_1\cos(\sigma x) + C_2\sin(\sigma x)\bigr]\exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr).$$

О более сложных решениях см. 6.3.2.8.

17. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = cx^n\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + bcx^n w^2 + kx^m w + sx^l.$

Частный случай уравнения 6.3.2.8 при $f(x) = cx^n$, $g(x) = kx^m$, $h(x) = sx^l$.

18. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = ce^{\lambda x}\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2 + bce^{\lambda x}w^2 + ke^{\mu x}w + se^{\nu x}.$

Частный случай уравнения 6.3.2.8 при $f(x) = ce^{\lambda x}$, $g(x) = ke^{\mu x}$, $h(x) = se^{\nu x}$.

19. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 w^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = by^n w^5.$

Частный случай уравнения 6.3.2.9 при $f(y) = by^n$.

20. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 w^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = be^{\lambda y} w^5.$

Частный случай уравнения 6.3.2.9 при $f(y) = be^{\lambda y}$.

21. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + ae^{\lambda w} \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \qquad a > 0.$

Точные решения:

$$w(x,y) = Axy + By + Cx + D,$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\operatorname{sh}^2(Bx+C)}\right], \qquad w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{B^2}{a}\frac{(y+A)^2}{\cos^2(Bx+C)}\right], \qquad w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{1}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{(x+C)^2}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\right], \qquad w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\operatorname{sh}^2(Ay+B)}{\operatorname{sh}^2(Cx+D)}\right], \qquad w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{C^2}{aA^2}\frac{\cos^2(Ay+B)}{\cos^2(Cx+D)}\right],$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

22. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(ae^{\lambda w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = 0, \qquad a > 0.$

1. Точные решения:

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln(-aA^2y^2 + By + C) - \frac{2}{\lambda}\ln(-aAx + D),$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{aA\operatorname{ch}^2(px+q)}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\cos^2(px+q)}\right],$$

$$w(x,y) = \frac{1}{\lambda}\ln(Ay^2 + By + C) + \frac{1}{\lambda}\ln\left[\frac{p^2}{-aA\operatorname{sh}^2(px+q)}\right],$$

где A, B, C, D, p, q — произвольные постоянные.

2. Существуют решения в вида

$$w = w(z), \quad z = y \pm \mu x,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формулы (A, B — любые)

$$\lambda\mu^2 w + ae^{\lambda w} = Az + B.$$

3. Автомодельные решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+a}{t+b}$$

описываются уравнением

$$(\xi^2 w'_\xi)'_\xi + (ae^{\lambda w} w'_\xi)'_\xi = 0,$$

которое допускает первый интеграл

$$(\xi^2 + ae^{\lambda w})w'_\xi = C.$$

Принимая w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати

$$C\xi'_w = \xi^2 + ae^{\lambda w},$$

решение которого выражается через функции Бесселя.

6.3.2. Уравнения, содержащие произвольные функции

1. $a^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(w).$

Это уравнение встречается в теории тепло- и массопереноса и теории горения.

1. Точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = Ax + By + C,$$

где зависимость $w = w(z)$ задается неявно с помощью формул

$$\int \left[C_1 + \frac{2}{a^2A^2 + b^2B^2} F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где A, B, C, C_1, C_2 — произвольные постоянные.

2. Точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \sqrt{b^2(x + C_1)^2 + a^2(y + C_2)^2},$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные, а функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{1}{z} w'_z = (ab)^{-2} f(w).$$

2. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(ax^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(by^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) = f(w), \qquad a, b > 0.$

Уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае. Частный случай уравнения 6.3.2.4 при $k = an$, $s = bm$.

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left[b(2 - m)^2 x^{2-n} + a(2 - n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} + \frac{A}{z} w'_z = Bf(w), \tag{1}$$

где

$$A = \frac{4 - nm}{(2-n)(2-m)}, \quad B = \frac{4}{ab(2-n)^2(2-m)^2}.$$

При $m = 4/n$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(w)$:

$$\int \left[C_1 + \frac{2n^2}{ab(2-n)^4} F(w)\right]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

3. Замена $\xi = z^{1-A}$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \frac{B}{(1-A)^2} \xi^{\frac{2A}{1-A}} f(w). \tag{2}$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f = f(w)$ приведено в книгах В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1993, 1994, 1995).

3. $\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(ax+c)^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[(by+s)^m \dfrac{\partial w}{\partial y}\right] = f(w).$

Преобразование

$$\xi = ax + c, \quad \eta = by + s$$

приводит к уравнению вида 6.3.2.2:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(a^2 \xi^n \frac{\partial w}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(b^2 \eta^m \frac{\partial w}{\partial \eta}\right) = f(w).$$

4. $ax^n \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + by^m \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + kx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x} + sy^{m-1}\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(w), \quad a, b > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $n \neq 2$, $m \neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \left[b(2-m)^2 x^{2-n} + a(2-n)^2 y^{2-m}\right]^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$Aw''_{zz} + \frac{B}{z} w'_z = f(w), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4} ab(2-n)^2(2-m)^2,$$
$$B = \tfrac{1}{4}(2-n)(2-m)\left[ab(3nm - 4n - 4m + 4) + 2bk(2-m) + 2as(2-n)\right].$$

При $B = 0$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(w)$:

$$\int \Big[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\Big]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

5. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big(ae^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big) + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big(be^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big) = f(w), \qquad a, b > 0.$

Уравнение теории тепло- и массопереноса и теории горения в анизотропном случае. Частный случай уравнения 6.3.2.6 при $k = a\lambda$, $s = b\mu$.

При $\lambda\mu \neq 0$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \big(b\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y}\big)^{1/2},$$

где функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$w''_{zz} - \frac{1}{z}w'_z = Af(w), \qquad A = \frac{4}{ab\lambda^2\mu^2}. \tag{1}$$

Замена $\xi = z^2$ приводит (1) к обобщенному уравнению Эмдена — Фаулера

$$w''_{\xi\xi} = \tfrac{1}{4}A\xi^{-1}f(w),$$

решения которого при $f(w) = (\alpha w + \beta)^{-1}$ и $f(w) = (\alpha w + \beta)^{-2}$ приведены в книгах В. Ф. Зайцева и А. Д. Полянина (1993, 1995).

6. $ae^{\lambda x}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + be^{\mu y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + ke^{\lambda x}\dfrac{\partial w}{\partial x} + se^{\mu y}\dfrac{\partial w}{\partial y} = f(w), \qquad a, b > 0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w = w(x)$ и $w = w(y)$.

2. При $\lambda\mu \neq 0$ существуют точные решения вида:

$$w = w(z), \qquad z = \big(b\mu^2 e^{-\lambda x} + a\lambda^2 e^{-\mu y}\big)^{1/2}.$$

Здесь функция $w = w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$Aw''_{zz} + \frac{B}{z}w'_z = f(w), \tag{1}$$

где

$$A = \tfrac{1}{4}ab\lambda^2\mu^2, \quad B = \tfrac{1}{4}\lambda\mu(3ab\lambda\mu - 2bk\mu - 2as\lambda).$$

При $B = 0$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f = f(w)$:

$$\int \Big[C_1 + \frac{2}{A}F(w)\Big]^{-1/2} dw = C_2 \pm z, \qquad F(w) = \int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

7. $ax^n\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+be^{\lambda y}\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}+kx^{n-1}\dfrac{\partial w}{\partial x}+se^{\lambda y}\dfrac{\partial w}{\partial y}=f(w), \qquad a,\, b>0.$

1. Существуют решения, зависящие только от одной координаты: $w=w(x)$ и $w=w(y)$.

2. При $\lambda\neq 0$, $n\neq 2$ существуют точные решения вида:

$$w=w(z), \qquad z=\bigl[b\lambda^2x^{2-n}+a(2-n)^2e^{-\lambda y}\bigr]^{1/2}.$$

Здесь функция $w=w(z)$ определяется из обыкновенного дифференциального уравнения

$$Aw''_{zz}+\frac{B}{z}w'_z=f(w), \tag{1}$$

где

$$A=\tfrac14 ab\lambda^2(2-n)^2, \quad B=\tfrac14\lambda(2-n)\bigl[ab\lambda(4-3n)+2bk\lambda-2as(2-n)\bigr].$$

При $B=0$ из (1) получаем (семипараметрическое) семейство точных решений исходного уравнения для произвольной функции $f=f(w)$:

$$\int\Bigl[C_1+\frac{2}{A}F(w)\Bigr]^{-1/2}dw=C_2\pm z, \qquad F(w)=\int f(w)\,dw,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

8. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}+a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}=f(x)\Bigl(\dfrac{\partial w}{\partial y}\Bigr)^2+bf(x)w^2+g(x)w+h(x).$

1. Точные решения:

$$w(x,y)=\varphi(x)+\psi(x)\exp\bigl(\pm y\sqrt{-b}\bigr), \qquad b<0, \tag{1}$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются путем решения обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами (аргументы у функций f, g, h не указываются)

$$\varphi''_{xx}=bf\varphi^2+g\varphi+h, \tag{2}$$
$$\psi''_{xx}=(2bf\varphi+g+a^2b)\psi. \tag{3}$$

Если удается найти решение $\varphi=\varphi(x)$ уравнения (2), то функцию $\psi=\psi(x)$ можно получить путем решения уравнения (3), линейного относительно ψ.

Если функции f, g, h пропорциональны:

$$g=\alpha f, \quad h=\beta f \qquad (\alpha,\, \beta=\mathrm{const}),$$

то частные решения уравнения (2) имеют вид

$$\varphi=k_1, \quad \varphi=k_2, \tag{4}$$

где k_1, k_2 — корни квадратного уравнения $bk^2+\alpha k+\beta=0$. В этом случае уравнение (3) записывается так:

$$\psi''_{xx}=\bigl[(2bk_n+\alpha)f+a^2b\bigr]\psi, \qquad n=1,\,2. \tag{5}$$

В книгах Э. Камке (1976), В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995) приведено много точных решений линейного уравнения (5) для различных зависимостей $f = f(x)$. В частном случае $f = \mathrm{const}$ общее решение уравнения (5) является суммой экспонент (или синуса и косинуса).

2. Точные решения более общего вида:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\bigl[A\exp\bigl(y\sqrt{-b}\bigr) + B\exp\bigl(-y\sqrt{-b}\bigr)\bigr], \qquad b < 0, \quad (6)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} = bf\bigl(\varphi^2 + 4AB\psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + a^2b\psi.$$

Отметим два частных случая решения вида (6), которые выражаются через гиперболические функции:

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{ch}\bigl(y\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = \tfrac{1}{2},$$
$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\,\mathrm{sh}\bigl(y\sqrt{-b}\bigr), \qquad A = \tfrac{1}{2},\ B = -\tfrac{1}{2}.$$

3. Точные решения вида (c — любое):

$$w(x,y) = \varphi(x) + \psi(x)\cos\bigl(y\sqrt{b} + c\bigr), \qquad b > 0, \quad (7)$$

где функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяются путем решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами

$$\varphi''_{xx} = bf\bigl(\varphi^2 + \psi^2\bigr) + g\varphi + h,$$
$$\psi''_{xx} = 2bf\varphi\psi + g\psi + a^2b\psi.$$

9. $\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + a^2 w^4 \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = f(y)w^5.$

Пусть $u = u(y)$ — любое нетривиальное (частное) решение линейного обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$a^2 u''_{yy} - f(y)u = 0. \quad (1)$$

Преобразование

$$\xi = \int \frac{dy}{u^2}, \qquad z = \frac{w}{u}$$

сильно упрощает исходное уравнение и приводит его к виду

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a^2 z^4 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} = 0. \quad (1)$$

Это уравнение не зависит от функции f (явно) и имеет точное решение

$$z(x,\xi) = Ax\xi + B\xi + Cx + D,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Кроме того, уравнение (1) имеет точные решения, например, следующей структуры:

$$z(x,\xi) = g(x)h(\xi),$$
$$z(x,\xi) = x^k\varphi(\zeta), \quad \zeta = \xi x^{-2k-1},$$

где k — любое.

10. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[g(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] = 0.$

1. Точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = ax + by$$

определяются неявной зависимостью

$$\int\big[a^2f(w) + b^2g(w)\big]\,dw = Az + B,$$

где A, B — произвольные постоянные.

2. Точные решения вида

$$w = w(\xi), \quad \xi = \frac{x+\alpha}{y+\beta}$$

являются решениями обыкновенного дифференциального уравнения

$$[f(w)w'_\xi]'_\xi + [\xi^2 g(w)w'_\xi]'_\xi = 0. \tag{1}$$

Интегрируя уравнение (1) и принимая w за независимую переменную, для функции $\xi = \xi(w)$ получим уравнение Риккати (C — любое):

$$C\xi'_w = g(w)\xi^2 + f(w). \tag{2}$$

Большое число точных решений уравнения (2) для различных функций $f = f(w)$ и $g = g(w)$ приведено в книге В. Ф. Зайцева, А. Д. Полянина (1995).

3. В частном случае $g(w) = k^2 f(w)$ преобразование

$$\bar{x} = kx, \quad u = \int f(w)\,dw$$

приводит к уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

которое рассматривалось в разд. 5.4.1.

11. $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial x}\Big] + \dfrac{\partial}{\partial y}\Big[f(w)\dfrac{\partial w}{\partial y}\Big] = g_1(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial x} + g_2(x,y)\dfrac{\partial w}{\partial y}.$

Нелинейное уравнение конвективного тепло- и массопереноса.

В плоских задачах конвективного теплообмена жидких металлов, использующих модель идеальной жидкости, компоненты скорости жидкости g_1 и g_2 можно выразить через потенциал $\varphi = \varphi(x,y)$ и функцию тока $\psi = \psi(x,y)$ по формулам:

$$g_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad g_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial x}. \tag{1}$$

Функция φ определяется путем решения уравнения Лапласа $\Delta\varphi = 0$. В конкретных задачах потенциал φ и функцию тока ψ можно найти с помощью методов теории функций комплексного переменного (см. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, 1973 и Л. И. Седов, 1966).

Переходя в уравнении конвективного теплообмена от x, y к новым переменным φ, ψ (преобразование Буссинеска) с учетом равенств (1), получим более простое уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right] + \frac{\partial}{\partial\psi}\left[f(w)\frac{\partial w}{\partial\psi}\right] = \frac{\partial w}{\partial\varphi}. \tag{2}$$

Уравнение (2) допускает точные решения вида

$$w = w(z), \quad z = a\varphi + b\psi + c,$$

где функция $w(z)$ задается неявно с помощью выражения

$$(a^2 + b^2)\int\frac{f(w)\,dw}{aw + C_1} = z + C_2,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

В работе А. П. Борзых, Г. П. Черепанова (1978) получено общее решение исходного уравнения в линейном случае $f(w) = \text{const}$ при условии (1). Л. К. Мартинсон (1980) построил асимптотическое решение задачи при $f(w) = kw^m$ и $g_1 = \lambda G_1$, $g_2 = \lambda G_2$ в предельном случае $\lambda \to \infty$, $G_i = O(1)$.

Асимптотические и приближенные аналитические решения широкого класса таких и более сложных линейных и нелинейных уравнений в различных задачах конвективного тепло- и массопереноса в вязкой жидкости см. в книгах: Ю. П. Гупало, А. Д. Полянин, Ю. С. Рязанцев (1985), А. М. Кутепов, А. Д. Полянин, З. Д. Запрянов, А. В. Вязьмин, Д. А. Казенин (1996), A. D. Polyanin, V. V. Dilman (1994).

Список литературы

Абловиц М., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи. — М.: Мир, 1987. — 479 с.

Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.

Ахатов И. Ш., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Нелокальные симметрии. Эвристический подход. В кн.: Современные проблемы математики, т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР) — М.: 1989, с. 3–83.

Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. — М.: Наука, 1964. — 368 с.

Байков В. А., Газизов Р. К., Ибрагимов Н. Х. Методы возмущений в групповом анализе. В кн.: Современные проблемы математики, т. 34 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1989, с. 85–147.

Баренблатт Г. И. Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. — М.: Гидрометеоиздат, 1978. — 208 с.

Баренблатт Г. И. О некоторых неустановившихся движениях жидкости и газа в пористой среде. // Прикл. матем. и механика, 1952, т. 16, № 1, с. 67 – 78.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 1. — М.: Наука, 1973. — 296 с.

Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. — М.: Наука, 1974. — 296 с.

Белоколос Е. Д. Общая формула для решений уравнения Sin-Gordon с начальными и граничными условиями. // Теор. и матем. физика, 1995, т. 103, № 3, с. 358–367.

Бицадзе А. В., Калиниченко Д. Ф. Сборник задач по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1985. — 312 с.

Борзых А. А., Черепанов Г. П. Плоская задача теории конвективной теплопередачи и массообмена. // Прикл. матем. и механика, 1978, т. 42, № 5, с. 848–855.

Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. — М.: Наука, 1980. — 686 с.

Буллаф Р., Кодри Ф. Солитоны. — М.: Мир, 1983. — 408 с.

Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1979. — 224 с.

Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1988. — 512 с.

Галактионов В. А., Дородницын В. А., Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Квазилинейное уравнение теплопроводности: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. В кн.: Современные проблемы математики, т. 28 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1986, с. 95–206.

Галактионов В. А., Посашков С. А. О новых точных решениях параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1989, т. 29, № 4, с. 497–506.

Галактионов В. А., Посашков С. А. Точные решения параболических уравнений с квадратичными нелинейностями. — М.: Препринт № 115 Института прикл. математики АН СССР, 1988. — 24 с.

Гулд С. Вариационные методы в задачах о собственных значениях. — М.: Мир, 1970. — 328 с.

Гупало Ю. П., Полянин А. Д., Рязанцев Ю. С. Массотеплообмен реагирующих частиц с потоком. — М.: Наука, 1985. — 336 с.

Дородницын В. А. Групповые свойства и инвариантные решения уравнений нелинейной теплопроводности с источником или стоком. — М.: Препринт № 57 Института прикл. математики АН СССР, 1979. — 32 с.

Дородницын В. А. Об инвариантных решениях уравнения нелинейной теплопроводности с источником. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1982, т. 22, № 6, с. 1393–1400.

Дородницын В. А., Свирщевский С. Р. О группах Ли — Беклунда, допускаемых уравнением теплопроводности с источником. — М.: Препринт № 101 Института прикл. математики АН СССР, 1983. — 28 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по нелинейным дифференциальным уравнениям: Приложения в механике, точные решения. — М.: Наука, 1993. — 464 с.

Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Точные решения. — М.: Наука, 1995. — 560 с.

Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов: Метод обратной задачи. — М.: Наука, 1980. — 320 с.

Зельдович Я. Б., Компанеец А. С. К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры. В кн.: Сборник, посв. 70-летию А. Ф. Иоффе. — М.: Изд. АН СССР, 1950, с. 61–71.

Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966. — 688 с.

Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Теория режимов с обострением в сжимаемых средах. В кн.: Современные проблемы математики, т. 28 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). — М.: 1987, с. 3–94.

Змитренко Н. В., Курдюмов С. П., Михайлов А. П., Самарский А. А. Возникновение структур в нелинейных средах и нестационарная термодинамика режимов с обострением. — М.: Препринт № 74 Института прикл. математики АН СССР, 1976. — 67 с.

Ибрагимов Н. Х. Группы преобразований в математической физике. — М.: Наука, 1983. — 280 с.

Калоджеро Ф., Дегасперис А. Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. — М.: Мир, 1985. — 472 с.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976. — 576 с.

Камке Э. Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. — М.: Наука, 1966. — 260 с.

Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. — М.: Наука, 1964. — 488 с.

Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов И. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической проблеме. // Бюллетень МГУ. Секция А, 1937, т. 1, вып. 6, с. 1–25.

Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1984. — 832 с.

Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964. — 830 с.

Кутепов А. М., Полянин А. Д., Запрянов З. Д., Вязьмин А. В., Казенин Д. А. Химическая гидродинамика. — М.: Квантум, 1996. — 336 с.

Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1973. — 736 с.

Лаврик В. И., Савенков В. Н. Справочник по конформным отображениям. — Киев, Наукова Думка, 1970. — 252 с.

Лыков А. В. Теория теплопроводности. — М.: Высшая школа, 1967. — 600 с.

Мартинсон Л. К. Плоская задача конвективного теплопереноса в нелинейной среде. // Прикл. матем. и механика, 1980, т. 44, № 1, с. 181–185.

Мартинсон Л. К, Павлов К. Б. К вопросу о пространственной локализации тепловых возмущений в теории нелинейной теплопроводеости. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1972, т. 12, № 4, с. 1048–1054.

Маслов В. П., Данилов В. Г., Волосов К. А. Математическое моделирование процессов тепломассопереноса. — М.: Наука, 1987. — 352 с.

Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

Нестеров С. В. Примеры нелинейных уравнений Клейна — Гордона, разрешимых в элементарных функциях. В кн.: Прикладные вопросы математики (Труды Моск. Энергетического института). — М.: 1978, с. 68–70.

Ньюэлл А. Солитоны в математике и физике. — М.: Мир, 1989. — 326 с.

Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. — 400 с.

Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. — 639 с.

Петровский И. Г. Лекции об уравнениях с частными производными. — М.: Физматгиз, 1961. — 400 с.

Полянин А. Д. Об интегрировании нелинейных нестационарных уравнений конвективного тепло- и массообмена. // Доклады АН СССР, 1980, т. 251, № 4, с. 817–820.

Полянин А. Д. О решении некоторых нелинейных погранслойных задач нестационарной диффузии (теплопроводности). // Доклады АН СССР, 1980, т. 254, № 1, с. 53–56.

Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975. — 288 с.

Самарский А. А., Соболь И. М. Примеры численного расчета температурных волн. // Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1963, т. 3, № 4, с. 702–719.

Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. — М.: Наука, 1987. — 480 с.

Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1972. — 440 с.

Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. — М.: Наука, 1966. — 448 с.

Смирнов М. М. Задачи по уравнениям математической физики. — М.: Наука, 1975. — 112 с.

Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1972. — 736 с.

Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977. — 624 с.

Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической технологии. — М.: Наука, 1987. — 502 с.

Akulenko L. D., Nesterov S. V. Accelerated convergence method in the Sturm — Liouville problem. // Russian J. Math. Phys., 1995, v. 3, No. 4.

Ames W. F. Nonlinear Partial Differential Equations in Engineering, v. 2. — New York, Academic Press, 1972.

Ames W. F., Lohner J. R., Adams E. Group properties of $u_{tt} = \left[f(u)u_x\right]_x$. // Int. J. Nonlinear Mech., 1981, v. 16, No. 5–6, p. 439.

Bertsch M., Kersner R., Peletier L. A. Positivity versus localization in degenerate diffusion equations. // Nonlinear Analys., Theory, Meth. and Appl., 1985, v. 9, No. 9, p. 987–1008.

Bluman G. W., Cole J. D. Similarity Methods for Differential Equations. — New York, Springer Verlag, 1974. — 332 p.

Bluman G. W., Kumei S. On the remarkable nonlinear diffusion equation $[a(u+b)^{-2}u_x]_x - u_t = 0$. // J. Math. Phys., 1980, v. 21, No. 5, p. 1019–1023.

Burgan J. R., Munier A., Feix M. R., Fijalkow E. Homology and the nonlinear heat diffusion equation. // SIAM J. Appl. Math., 1984, v. 44, No. 1, p. 11.

Crank J. The Mathematics of Diffusion. — Oxford, Clarendon Press, 1975.

Fisher R. A. The wave of advanse of advantageneous genes. // Annals of Eugenics, 1937, v. 7, p. 355–369.

Fujita H. The exact pattern of a concentration-dependent diffusion in a semi-infinite medium. Part II. // Textile Res., 1952, v. 22, p. 823.

Grauel A. Sinh-Gordon equation, Painlevé property and Bäcklund transformation. // Physica A, 1985, v. 132, p. 557–568.

Ibragimov N. H. (editor), Ames W. F., Anderson R. L., Dorodnitsyn V. A., Ferapontov E. V., Gazizov R. K., Svirshevskii S. P. CRC Handbook of Lie Group to Differential Equations, v. 1. — Boca Raton, CRC Press, 1994. — 429 p.

Kawahara T., Tanaka M. Interactions of traveling fronts: an exact solution of a nonlinear diffusion equations. // Phys. Lett., 1983, v. 97, p. 311.

Kersner R. On some properties of weak solutions of quasilinear degenerate parabolic equations. // Acta Math. Academy of Sciences, Hung., 1978, v. 32, No. 3–4, p. 301–330.

Matsuno Y. Exact solutions for the nonlinear Klein — Gordon and Liouville equations in for dimensional Euclidean space. // J. Math. Physics, 1987, v. 28, No. 10, p. 2317–2322.

Munier A., Burgan J. R., Gutierres J., Fijalkow E., Feix M. R. Group transformations and the nonlinear heat diffusion equation. // SIAM J. Appl. Math., 1981, v. 40, No. 2, p. 191.

Philip J. R. General method of exact solution of the concentration-dependent diffusion equation. // Australian Journal of Physics, 1960, v. 13, No. 1, p. 13–20.

Polyanin A. D., Dilman V. V. Methods of Modeling Equations and Analogies in Chemical Engineering. — Boca Raton, CRC Press, 1994. — 364 p.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of Exact Solutions for Ordinary Differential Equations. — Boca Raton — New York, CRC Press, 1995. — 720 p.

Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbuch der linearen Differentialgleichungen. — Heidelberg — Berlin, Spectrum Akad. Verlag, 1996. — 460 S.

Rotem Z., Neilson J. E. Exact solution for diffusion to flow down an incline. // Can. J. Chem. Engng., 1966, v. 47, p. 341–346.

Strampp W. Bäcklund transformations for diffusion equations. // Physica D, 1982, No. 6, p. 113.

Sutton W. G. L. On the equation of diffusion in a turbulent medium. // Proc. Poy. Soc., Ser. A, 1943, v. 138, No. 988, p. 48–75.

Ting A. S., Cheb H. H., Lee Y. C. Exact solutions of a nonlinear boundary value problem: the vortices of the two-dimensional sinh-Poisson equation. // Physica D, 1987, p. 37–66.

Tomotika S., Tamada K. Studies on two-dimensional transonic flows of compressible fluid. Part 1. // Quart. Appl. Math., 1950, v. 7, p. 381.

Zaitsev V. F., Polyanin A. D. Discrete-Group Methods for Integrating Equations of Nonlinear Mechanics. — Boca Raton, CRC Press, 1994. — 312 p.

Zwillinger D. Handbook of Differential Equations. — San Diego, Academic Press, 1989. — 673 p.

Справочное издание

ЗАЙЦЕВ Валентин Федорович
ПОЛЯНИН Андрей Дмитриевич

СПРАВОЧНИК ПО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Компьютерная верстка А.И.Журов
Корректор О.А.Бутусова

Подписано к печати с оригинал-макета 17.07.96.
Формат 60 х 90/16. Бумага кн.-журн. Усл. печ. л. 31
Уч.-изд. л. 31 Тираж 1000 экз. Заказ № 390

Издательство "Международная программа образования"
Лицензия ЛР № 064461 от 22.02.96.
Москва 117049 а/я 644 Тел.: 955-35-14

Отпечатано с готового оригинал-макета
Марийским полиграфическо-издательским
комбинатом. 424000, гЙошкар-Ола,
ул. Комсомольская, 112.