АКАДЕМИЯ НАУК СССР
НАУЧНЫЙ СОВЕТ ПО КОМПЛЕКСНОЙ ПРОБЛЕМЕ «КИБЕРНЕТИКА»
СЕКЦИЯ ФИЛОСОФСКИХ ВОПРОСОВ КИБЕРНЕТИКИ

В. Н. ТРОСТНИКОВ

КОНСТРУКТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАТЕМАТИКЕ

(ФИЛОСОФСКИЙ АСПЕКТ)

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА, 1975

Книга посвящена анализу тех направлений математики, которые считают понятие бесконечного множества нечетким и в связи с этим отказываются от его использования в построении теории. Главное внимание уделено философским и научным взглядам советской школы конструктивной математики. Рассмотрены и концепции родственных течений. В книге анализируются воззрения и традиционных школ, в частности, научная концепция коллектива французских математиков, выступающих под псевдонимом Н. Бурбаки.

Ответственные редакторы

Б. В. БИРЮКОВ, Б. А. КУШНЕР

$Т\,\frac{105102-282}{042\,(02)-75}\,185-75$

ВВЕДЕНИЕ

Мнение о том, что математика занимает исключительное положение среди разделов человеческого познания восходит еще к Платону (427—347 до н. э.), начертавшему на вратах своей Академии «Профанам в геометрии вход воспрещен». В более близкое к нам время И. Кант говорил, что в каждой науке заключено столько собственно науки, сколько в ней заключено математики. И все же никогда роль математики и ее авторитет не были столь высокими, как сейчас. Распространенный термин «математизация знания» хорошо отражает один из наиболее характерных аспектов научно-технической революции — проникновение математических методов в самые различные (включая «гуманитарные») отрасли науки и широчайшее использование ЭВМ.

Однако математика развивается не только вширь, но и вглубь. Усиление ее прикладной мощи, в большой мере связанное с развитием кибернетики, стимулирует исследование внутренней проблематики. Во-первых, задачи современных содержательных наук требуют разработки новых математических формальных методов и тем самым побуждают более тщательно анализировать имеющийся на сегодня математический материал в поисках аналогий и обобщений. Во-вторых, особая ответственность, возложенная на математику все возрастающим контингентом ее потребителей, заставляет ее еще и еще раз проверять надежность своих оснований. В создавшихся условиях логические несообразности, открытые в теории множеств в конце прошлого столетия, вызывают возрастающее беспокойство некоторых ученых, иногда ставящих вопрос даже так: выживет ли математика?

Конечно, на основании такого рода статей неправильно было бы делать заключение, что вся математическая наука находится в состоянии кризиса. «Рабочая математика» продолжает прекрасно функционировать, и подавляющее большинство математиков даже не подозревают о сомнениях и раздумьях, которым иногда предаются специалисты в области логики и оснований математики. Тем не менее эти сомнения имеют определенное значение, так как могут стать зародышем серьезной перестройки всей математики, подведения под нее нового формального и логического фундамента. Важность перспективных разработок не может быть установлена с помощью голосования. Сейчас невозможно с достаточной долей уверенности предсказать, в каком направлении будет осуществляться эта перестройка (так же как невозможно дать уверенный прогноз по поводу развития познания вообще), поэтому ко всем предложениям в этой сфере нужно относиться с особенным вниманием.

Знаменательным является то обстоятельство, что сейчас специалисты по основаниям математики много внимания уделяют рассмотрению философских проблем. Разумеется, повышенный интерес к философии был свойствен и многим математикам прошлого, но если тогда философские и математические размышления протекали параллельно, то теперь философия прочно вплетается в ткань повседневной профессиональной деятельности всех ученых, которые занимаются логическими системами, формальными исчислениями, проблемами полноты и непротиворечивости, теорией вывода и т. д. Это вполне закономерно, так как в период перестройки математики именно философские соображения могут в наибольшей степени повлиять на выбор пути и содействовать формированию новых конкретных идей.

Около двух десятилетий назад в рамках советской математической школы сформировалось так называемое конструктивное направление, во многих пунктах ставшее в оппозицию традиционной математике. Оно четко изложило свою гносеологическую позицию, провозгласило определенные научные цели, поставило проблемы и уже получило ряд интересных результатов. Важно подчеркнуть, что конструктивное направление есть теоретическое построение, претендующее на то, чтобы стать *новой математикой*. Математики-конструктивисты вывели ряд теорем, являющихся аналогами известных «классических» теорем анализа, но существенно отличающихся от последних. По мнению представителей конструктивной школы, новые результаты более правильны и надежны.

Исходным философским тезисом математического конструктивизма является *фундаментальное утверждение материализма об отражении наукой объективно протекающих в реальном мире процессов*. Но ограничившись лишь этим общим положением нельзя еще построить конкретной теории доказательства и конкретной логики: отправную мысль нужно детализировать и развить в применении к тому специфическому типу отражения, который представляет собой математика. Понимая сложность и многоступенчатость математики как средства познания и неизбежность использования в этой науке абстракций разного уровня, указанное направление выдвигает на первый план идеализированное отражение математикой конструктивной деятельности человека, протекающей в сфере материальных предметов и регулируемой сознательной целевой установкой, претворенной в четкое оперативное предписание. Ясно, что в период научно-технической революции и бурного развития кибернетических дисциплин подобная трактовка сущности математики не может не вызвать интереса. Философское осмысление идей и результатов конструктивной математики, несомненно, стало сейчас актуальной проблемой.

Именно такому осмыслению и посвящена предлагаемая читателю книга. Она представляет собой первую попытку такого рода, поэтому в ней могут встретиться спорные места, а какие-то положения окажутся не до конца раскрытыми.

Уяснению основных философских и научных установок конструктивного направления в математике автору очень помогли беседы с А. А. Марковым, Н. М. Нагорным, Б. А. Кушнером, В. А. Успенским. Без их поддержки книга просто не могла бы быть написана. В то же время, всю ответственность за возможные неточности автор берет только на себя.

Поскольку в книге затронуты также общефилософские проблемы и ряд аспектов классической математики, при ее написании существенную помощь оказало обсуждение этих проблем со многими специалистами, в числе которых были С. П. Новиков, Ю. И. Манин, А. И. Лапин, С. Н. Крачковский, Г. С. Гудожник, А. Д. Урсул, Э. А. Орлова, А. Х. Шень, А. В. Браилов. При подготовке рукописи техническую помощь оказал автору Б. М. Успенский. Всем названным лицам автор выражает глубокую благодарность.

Глава 1

ГНОСЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПРЕДПОСЫЛКИ КЛАССИЧЕСКОЙ (ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННОЙ) МАТЕМАТИКИ

Во второй половине XIX столетия в математике произошли события, анализ которых представляет значительный интерес. Древняя наука, развиваясь невиданными раньше темпами, накопила в себе мощный мировоззренческий потенциал, который постепенно начал становиться явным. Возникли математические понятия и методы, рассмотрение которых для нас в данном исследовании является необходимым. Предмет нашего исследования — понятие *конструктивного объекта* в математике — невозможно определить до тех пор, пока не будет уяснено понятие *неконструктивности*, поскольку неконструктивность является характерной чертой математических методов, о которых мы говорим. Движение, стремящееся утвердить конструктивность в качестве основы математической деятельности, возникло в ходе исторического развития науки и философской мысли как оппозиционное движение по отношению ко взглядам большинства, строящего здание математической науки на элементах, которые представители оппозиции объявили существенно неконструктивными и поэтому отвергли.

Хотя в то время все еще длилась эпоха, которую Э. Белл назвал «идолопоклонничеством анализу», дифференциальное и интегральное исчисление было уже совсем не тем, каким оно было в XVII и XVIII вв.,— его основы подверглись коренной перестройке.

Предыстория вопроса такова. Как известно, математический анализ, как для краткости принято называть дифференциальное и интегральное исчисление в совокупности с его многочисленными приложениями, был заложен в 70 — 80-х годах XVII столетия Ньютоном и Лейбницем. Но это утверждение, вошедшее во все учебники, все же обладает некоторой долей условности и нуждается в комментариях и уточнениях. Еще Архимед (287—212 до н. э.) владел методом вычисления некоторых интегралов (он, конечно, не употреблял слова «интеграл»), а одно из основных понятий анализа — понятие касательной — широко использовалось в древнегреческой геометрии. В Новое время результаты, вошедшие сейчас в курс анализа, получили П. Ферма, И. Кеплер, Б. Кавальери и другие еще до Ньютона. Как Евклид, по-видимому, когда-то обобщил, подытожил и поставил на новый уровень давно практиковавшийся метод рассуждения, так и Ньютон с Лейбницем осуществили то, что к их времени вполне назрело: четко формулировали методы, употреблявшиеся задолго до них, и придали этим методам значительно большую общность. Разумеется, для такого «оформления» элементов, давно ставших неотъемлемой частью мышления математиков и астрономов, понадобились гениальные умы, и их заслуга не умаляется, а возвышается тем, что они не построили что-то на голом месте, а внесли крупнейший вклад в совершенствование инструмента познания, практикуемого прежде, и неразрывно, как мы увидим дальше, связанного с коренными особенностями человеческой психики.

Однако, несмотря на то, что к концу XVII в. были известны уже почти все основные формулы и правила дифференцирования и интегрирования, в то время и даже на протяжении всего следующего столетия обоснование методов анализа было весьма нестрогим. Часто пишут, что такие великие умы, как Ньютон или Эйлер, не ошибались, несмотря на свое беззаботное отношение к логическим основам анализа, из-за своей сверхъестественной интуиции. Не отказывая этим людям в исключительном «внутреннем зрении», все же скажем, что математические объекты, например функции, которые они изучали, принадлежали к простым классам и «патологические примеры», потребовавшие уточнения определений в анализе, на том материале просто не могли возникнуть.

Первым большим шагом вперед в подведении под практически работающий анализ серьезного логического фундамента были исследования О. Коши, поставившего во главу дифференциального исчисления теорему о среднем значении, или формулу конечных приращений. Именно этой теоремой обосновываются все важнейшие применения производных к исследованию функций, к приближенным вычислениям, к оценкам остатка степенного ряда и т. д. Со времен Коши ее называют основной теоремой анализа.

Теорема о конечных приращениях в свою очередь сводится к теореме Ролля — к утверждению, что для любой непрерывной и имеющей производную (дифференцируемой) на данном отрезке функции, которая принимает на концах отрезка равные значения, существует внутри отрезка некая точка, в которой производная функции равна нулю.

Всякому, кто усвоил понятия непрерывности и дифференцируемости, эта теорема представляется совершенно очевидной, но всякий понимает, что ее все же нужно доказывать.

Обсудим в таком случае следующие три вопроса:

Почему утверждение теоремы очевидно для нас?

Почему соображения, делающие ее очевидной, не устраняют необходимости «строгого» доказательства?

Как нужно доказывать эту теорему?

1. Очевидность теоремы можно объяснять двумя путями. «Геометрическое» объяснение состоит в указании на то обстоятельство, что при даже беглом взгляде на соответствующий чертеж нам «все становится ясно». Однако это объяснение страдает тем недостатком, что на чертеже, о котором всегда идет речь на лекциях, точка, фигурирующая в утверждении теоремы, уже найдена и горизонтальная касательная проведена. После того, как касательная, параллельная оси абсцисс, проведена, нам, конечно, «ясно», что она существует, но когда формулируются условия теоремы, то никакой касательной еще нет. Почему же мы незыблемо уверены, что на данной кривой существует точка, в которой касательная горизонтальна? По-видимому, это убеждение коренится в том, что мы, размышляя о доказательстве, воображаем опускающуюся сверху (из бесконечности) горизонтальную прямую и, моделируя с помощью внутреннего зрения этот процесс опускания, обретаем уверенность в том, что она обязательно «ляжет» на нашу кривую (то, что она будет именно касательной, уже нетрудно доказать, используя так называемую теорему Ферма). Абсцисса под точкой прикосновения и будет той точкой, о которой говорится в теореме Ролля. Таким образом, существование этой точки постигается нашим сознанием с помощью воображаемой кинематической процедуры.

Мы не настаиваем, что абсолютно все так «доказывают» про себя теорему Ролля, но выборочный опрос показывает, что этот путь мысли самый распространенный, что почти все, размышляя на эту тему, прибегают к представлению о движении.

Нужно сказать, что кинематические представления использовались в прежнее время в математике куда чаще, чем сейчас. К движению охотно обращались древнегреческие мыслители как при доказательстве теорем, так и при постановке проблем геометрии. Можно думать, что на самой заре античной математики многие линии воспринимались как траектории. Четыре наиболее известные апории Зенона, в течение двух с половиной тысяч лет стимулирующие математическую мысль («дихотомия», «Ахиллес и черепаха», «стрела», «стадион»), были сформулированы именно в терминах движения. «Спираль Архимеда» была определена ее создателем как линия, вычерчиваемая точкой, которая участвует в двух простых движениях.

Эту традицию подхватили и развили величайшие математики XVII в., заложившие основы современного математического анализа — Декарт и Ньютон. «Кинематическое образование линий являлось отправным пунктом геометрии Декарта и применяется в ней неоднократно. Конечно, данная при этом кинематическая характеристика геометрических линий как кривых, описываемых одним или несколькими непрерывными движениями, последовательно определяющими друг друга, не вполне отчетлива, так же как и заявление, что для проведения всех таких линий «нужно только то предположение, что две или несколько линий можно перемещать вдоль друг друга и что их пересечения образуют другие линии»» ([1], стр. 104). Что же касается Ньютона, то две основные задачи, решение которых привело к созданию «метода флюксий», он поставил как задачи, относящиеся к движению:

«I. Длина проходимого пути постоянно (т. е. в каждый момент времени) дана; требуется найти скорость движения в предложенное время.

II. Скорость движения постоянно дана; требуется найти длину пройденного в предложенное время пути» ([2], стр. 45).

При такой постановке задач их решение (по крайней мере на предварительном и на самом важном этапе работы), естественно, шло по кинематическому пути, т. е. при помощи рассматривания «внутренним взором» (облегченного чертежами, на которых фиксируются в статическом виде некоторые узловые стадии движения) определенного процесса.

Таким образом, анализ мышления выдающихся ученых свидетельствует о том же, о чем говорит наше самонаблюдение: в формировании представлений об истинности математических высказываний громадную роль играют кинематические визуальные образы. В случае теоремы Ролля они являются скорее всего определяющими.

2. Под влиянием требований логики, которая сама явилась сублимацией некоторых сторон естественного языка, математики все больше и больше принимали за необходимость проводить доказательства в анализе по тому же образцу, по которому они строятся в геометрии Евклида. Эта узаконенная Евклидом (и коренящаяся, как мы уже говорили, в развитии общеязыковой логики) методика состоит в том, что в доказательстве, ведущемся чисто дедуктивно, используются только те свойства объектов, которые четко сформулированы в определениях этих объектов и никакие сопутствующие свойства, как бы они ни подсказывались нам интуицией, в расчет не принимаются.

Когда в XVI—XVII вв. начали интенсивно развиваться инфинитезимальные методы, алгебра многочленов, аналитическая геометрия и как венец всего этого — дифференциальное и интегральное исчисление, перед математиками постоянно стоял образ произвольной линии, обладающей свойством, которое ближе всего можно описать как «возможность вычерчивания не отрывая руки», или, что то же самое, образ траектории произвольного непрерывного движения точки. «Неотрывность» и «непрерывность» выступают здесь как синтетические характеристики, относящиеся ко всей линии в целом и непосредственно доступные нашей интуиции.

Можно было бы в принципе дать синтетическое определение непрерывности, имеющее не локальный, а интегральный характер. Ультрасовременное определение топологического пространства в какой-то степени возвращается к «наивному» представлению о непрерывности, на которое опирались в своих исследованиях Декарт и Ньютон. Но такое определение явилось результатом громадной работы по очищению интуитивных представлений от всего второстепенного и венцом развития теоретико-множественных идей. В XVII и XVIII столетиях интуитивное представление о непрерывности не было еще расчленено на элементы и выступало как весьма сложное. Поэтому в XIX в., когда началось уточнение понятий и теорем анализа, математика пошла по другому пути. Интегральное интуитивное восприятие непрерывности было тогда слишком конкретным, а потому неявно включало в себя много более простых суждений; естественно, что его принятие на таком уровне не позволило бы последовательно проводить в жизнь принцип евклидовских доказательств. В самом деле, в наше синтетическое восприятие непрерывной линии уже входит как составной элемент уверенность в прохождении ею всякого промежуточного значения; означает ли это, что мы не должны доказывать теорему Коши — Больцано? Несомненно, что в это восприятие входит и достижение функцией изображаемой непрерывной кривой, точной верхней границы. Значит, если исходить из синтетических представлений, вовсе не обязательно доказывать вторую теорему Вейерштрасса. Это, может быть, было бы еще и не так плохо, но как быть с другими свойствами, которые также могут быть заложены в упомянутом восприятии, обеспечиваемым визуальной интуицией? Эти свойства могут быть столь же сложными, как указанные два, и при их обсуждении вполне могут возникнуть разногласия между математиками — одни будут считать, что такое-то свойство включено в определение, а другие скажут, что его все-таки надо доказывать логическим путем.

Итак, первым возражением против происходящего от визуальных представлений интегрального определения непрерывной функции было требование единого понимания математических утверждений, требование их однозначности и необходимого принятия всеми людьми, умеющими следить за логикой и понимающими смысл математических символов. Но было и другое, более конкретное, обстоятельство. Приложения математического анализа оказались такими, что в них в первую очередь исследовались *локальные свойства* функций (набор производных в данной точке), а уже от них делался переход к интегральным свойствам (площади криволинейной трапеции, длине дуги, работе на данном пути и т. д.), осуществляемый с помощью формулы Ньютона — Лейбница. Значит, нужно было вырабатывать локальные определения непрерывности и дифференцируемости. Известно, что этот вынужденный переход от синтетических представлений к аналитическим (мы пользуемся здесь терминологией Канта) давался с большим трудом. Долгое время — почти до середины XIX в.— господствовало определение основных локальных понятий анализа через главное понятие бесконечно-малой. Но по поводу того, что такое бесконечно-малая, единого мнения не существовало. Это кажется нам поразительным, поскольку относительно результатов анализа не было никаких разногласий, но это факт — строгого и общепринятого определения центрального понятия всего дифференциального исчисления не было в течение примерно полутора сотен лет. Ф. Клейн очень ярко описывает разные точки зрения на бесконечно-малую, имевшие распространение до того, как Коши, а затем Вейерштрасс, Дедекинд и Кантор поставили анализ на более строгую логическую базу, используя как центральное понятие «предел».

«У Лейбница... выступает на первый план точка зрения *приближенного определения*, согласно которой дифференциал dx *представляет конечный, но столь малый отрезок, что вдоль него отклонение кривой от касательной совершенно незаметно, неуловимо*. Эти метафизические спекуляции представляют, разумеется, лишь идеализацию простых психологических фактов, имеющих здесь место.

...Вольф в самом начале дифференциального счисления вводит дифференциалы Лейбница, но при этом особенно подчеркивает, что они не имеют *никакого реального эквивалента*.

...Нередко встречается также *метафизическое представление*, приписывающее дифференциалам реальное существование. Особенно оно распространено среди философов; но и среди представителей математической физики оно находит немало приверженцев. К числу последних принадлежал, между прочим, Пуассон, который... в очень категорической форме высказывается в том смысле, что бесконечно-малые величины не только представляют орудие исследования, но даже вполне реально существуют.

...Любсен... начиная со второго издания, помещает то, что он считает *истинным исчислением бесконечно-малых*,— *мистические опера-*

ции над бесконечно-малыми величинами... Здесь дифференциалы вводятся, как последние доли, которые возникают, например, при последовательном делении конечной величины пополам... каждая из таких долей, «хотя и отлична от абсолютного нуля, но не поддается установлению, она представляет собой бесконечно-малую, дуновение, мгновение»; далее следует английская цитата: «Бесконечно-малая — это дух отошедшей величины».

...Характерен один афоризм, который, насколько я знаю, принадлежит философу Гегелю и в прежнее время часто повторялся в книгах и лекциях; он утверждает, что функция изображает бытие вещей, а производная — их становление. Конечно, в этом утверждении есть нечто заманчивое; но только надо ясно осознавать, что подобные фразы нисколько не содействуют дальнейшему развитию математики, ибо последняя нуждается в более точных понятиях» ([3], стр. 350—355).

Эти более точные понятия и были разработаны с помощью теории пределов; они удовлетворяют большинство математиков до наших дней.

3. Итак, с современной точки зрения, теорему Ролля нужно доказывать, не обращаясь ни к чему, кроме локального определения непрерывности, т. е. кроме следующего определения:

«Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е., если для всякого положительного числа ε существует δ такое, что для всех x из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Поскольку нам не раз придется впредь иметь дело с такого рода высказываниями, договоримся сразу о сокращенных обозначениях «$\forall$» («для всякого»), «$\exists$» («существует») и «$\supset$» («следует»). В этих обозначениях локальное определение непрерывности запишется так:

$$\forall \varepsilon \exists \delta\, (|x - x_0| < \delta \supset |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon).$$

Попробуем из этого определения, без всякого использования интуитивных представлений о непрерывной функции, извлечь утверждение о том, что непрерывная на отрезке функция достигает своей верхней (или нижней) точной границы, от которого до теоремы Ролля остается совсем короткий путь, а там уж недалеко и до основной теоремы анализа — формулы конечных приращений. Это утверждение — вторая теорема Вейерштрасса — доказывается в одну минуту с помощью «первой теоремы Вейерштрасса», утверждающей, что непрерывная на отрезке (a, b) функция ограниченна, т. е.

$$\exists M \forall x \in [a, b] \, (|f(x)| < M).$$

Первая теорема Вейерштрасса доказывается методом «от противного». Предположим, что непрерывная на $[a, b]$ функция не является ограниченной. Это означало бы, что $\forall M \exists x_M \in [a, b] \, (|f(x_M)| \geqslant M)$. Беря последовательность чисел 1, 2, 3..., мы получили бы тогда последовательность точек отрезка $x_1, x_2, x_3, \ldots$, таких, что $|f(x_k)| \geqslant K$. Теперь нам придется использовать *теорему Больцано — Вейерштрасса*, гласящую, что всякая (бесконечная) последовательность точек отрезка обязательно имеет хотя бы одну точку сгущения, после этого дело пойдет быстро. Попробуем доказать теорему Больцано — Вейерштрасса.

Вот классическое доказательство, приводимое в учебниках. Разделим отрезок пополам. Хотя бы на одной из его половин будет бесконечное число членов нашей последовательности (иначе бы и на всем отрезке их было конечное число). Разделим этот полуотрезок снова пополам и т. д. В результате такой дихотомии мы получим бесконечную систему вложенных друг в друга отрезков, длины которых неограниченно уменьшаются, так как образуют геометрическую прогрессию со знаменателем $^1/_2$, причем каждый из отрезков системы содержит точки нашей последовательности (даже бесконечное число точек). Осталось, казалось бы, совсем немного: доказать, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам системы. После этого уже совсем легко доказать, что такая точка единственна и что именно она является точкой разрыва, что противоречит предположению о непрерывности нашей функции во всех точках отрезка. Утверждение о существовании точки, принадлежащей всем отрезкам системы, есть *лемма Кантора*. Доказательство этой леммы решит, таким образом, всю проблему, и анализ будет логически обоснован. Но, несмотря на то, что цель кажется уже почти достигнутой, пытаясь протянуть руку и получить то, что нам нужно, мы обнаруживаем, что все опять ускользает от нас. Дело внезапно осложняется тем, что, вопреки ожиданию, все пути, ведущие к доказательству леммы Кантора, оказываются весьма окольными.

Один путь состоит в том, чтобы провести ее доказательство, опираясь на *критерий Коши*. Он утверждает, что всякая *последовательность Коши*, или, иначе, *фундаментальная последовательность*, т. е. последовательность, расстояния между двумя любыми членами которой, начиная с некоторого номера становятся все меньше любого наперед заданного числа (сокращенно это записывается так: $\forall\varepsilon\exists N\ (p,\ q > N \supset |\, a_p - a_q\,| < \varepsilon)$) имеет предел. Применив критерий Коши к концам стягивающихся отрезков, мы легко докажем, что они сходятся, так как фундаментальность последовательности левых или правых концов очевидна; точка, к которой они сходятся и есть та самая точка, чье существование утверждается в лемме Кантора. Но теперь возникает новый вопрос: как доказать критерий Коши? Для этого есть следующие возможности. Критерий Коши, как мы сейчас покажем, удается свести к *лемме Гейне — Бореля*, которая утверждает, что из всякого *покрытия* отрезка (т. е. из такой системы открытых интервалов, что всякая точка нашего отрезка обязательно принадлежит хотя бы одному из интервалов системы) можно выделить *конечное* покрытие. Итак, пусть лемма Гейне — Бореля доказана. Покажем, что тогда последовательность Коши не может не сходиться. Предположим, что такая последовательность не сходится. Это значит, что никакое действительное число не является ее пределом. Заметим предварительно, что последовательность Коши всегда ограниченна, поскольку дальние ее члены удалены от некоторого члена не более, чем на единицу (возьмем $\varepsilon = 1$), а предыдущих членов имеется конечное число, среди которого всегда можно найти наибольший член. Возьмем отрезок, целиком содержащий всю нашу последовательность. По предположению, ни одна его точка не является пределом последовательности. Докажем еще один вспомогательный факт: если некоторая точка является для фундаментальной последовательности точкой сгущения, то она является и пределом последовательности (здесь мы доказательство воспроизводить не будем: оно несложно по идее, но реализуется с помощью довольно длинных рассуждений). Значит, мы имеем, что ни одна точка отрезка не является точкой сгущения нашей последовательности. Тогда каждую точку можно окружить открытым интервалом, содержащим лишь конечное число членов нашей последовательности. Ясно, что это будет покрытие отрезка; значит, по лемме Гейне — Бореля из нее можно выделить конечную систему интервалов, целиком покрывающую отрезок. В каждом интервале находится конечное число точек последовательности, значит, и на всем отрезке их будет конечное число, что неверно.

Но, пытаясь доказать лемму Гейне — Бореля, мы сразу же обнаружим, что самым удобным средством в этом доказательстве (методом «от противного») была бы теорема Больцано — Вейерштрасса.

Второй путь к доказательству леммы Кантора состоит в использовании утверждения, которое называется *теоремой о монотонной и ограниченной последовательности* и гласит, что такая последовательность имеет предел. Применив эту теорему, скажем, к левым концам системы вложенных отрезков, которые фигурируют в лемме Кантора, мы докажем, что они сходятся к некоторой точке отрезка, а дальше уже просто будет доказать, что эта точка принадлежит всем отрезкам системы. Но самым коротким и естественным путем к доказательству теоремы о монотонной ограниченной последовательности является путь, идущий через теорему Больцано — Вейерштрасса. Круг снова замкнулся.

Так все способы обоснования анализа приводят к «зацикливанию». И это не есть результат нашей недостаточной изобретательности, а неприятность, избежать которой невозможно. Здание дифференциального и интегрального исчисления можно, правда, обосновать еще с помощью утверждения, которое называют *аксиомой о дедекиндовом сечении* и которое гласит, что если имеются два класса действительных чисел, исчерпывающие совместно все действительные числа и не имеющие общих элементов, и если при этом каждое число первого класса меньше каждого числа второго класса, то существует действительное число, которое не больше любого числа второго класса и не меньше любого числа первого класса. Отсюда легко вывести лемму Кантора, а дальнейший путь нам известен. Но как доказать это утверждение? Уже то, что его называют аксиомой, свидетельствует о невозможности вывести его из каких-либо простых фактов.

Итак, здание анализа не может стать логически прочным, если не узаконить «декретивным образом», т. е. взять в качестве постулата одно из следующих шести эквивалентных утверждений, относящихся к свойствам действительных чисел:

1. Лемма Гейне — Бореля.
2. Теорема Больцано — Вейерштрасса.
3. Аксиома дедекиндова сечения.
4. Критерий Коши.
5. Лемма Кантора.
6. Теорема о монотонной возрастающей последовательности.

Чтобы построить наиболее естественный вариант анализа, нужно взять за аксиому то утверждение, которое ближе всего соответствует нашему интуитивному представлению о действительных числах. Теперь мы должны поставить вопрос: а как мы интуитивно воспринимаем понятие действительного числа, что за ассоциации оно вызывает в нашем сознании и вообще, откуда оно появляется в нашем сознании?

Тут уже не может быть двух мнений: действительные числа мыслятся нами в первую очередь как нечто, связанное с *измерением отрезков*. Именно так вошли они в научный обиход после обнаружения того факта, что диагональ единичного квадрата не выражается никаким рациональным числом; именно так входят они и в индивидуальный обиход каждого отдельного человека. Клейн рассказывает об этом следующими словами: «Исторически возникновение понятия об иррациональном числе имеет своим источником геометрическую интуицию и потребности геометрии. Представим себе ось абсцисс с нанесением на ней сгущенным комплексом рациональных точек. На этой оси остаются тогда и другие числа, как это, по-видимому, показал Пифагор примерно следующим образом. Если мы имеем прямоугольный треугольник, в котором два катета равны единице длины, то его гипотенуза равна $\sqrt{2}$... *Таким образом, мы геометрически построили такой отрезок, отложив который на оси абсцисс от нулевой точки, мы придем к точке иррациональной, то есть к такой точке, которая в нашем комплексе рациональных чисел не содержится*» ([3], стр. 47—48).

Сейчас мы настолько привыкли к несоизмеримости стороны и диагонали квадрата, что она нас не только не удивляет, но кажется чем-то вполне естественным. Но древние мыслители, которые столкнулись с ней впервые, были потрясены. Пифагор, как гласит легенда, принес в жертву богам сотню быков. Его открытие, безусловно, стоило таких расходов, поскольку оно «явилось поворотным пунктом в развитии математики. Оно разрушило раннюю систему пифагорейцев и привело к созданию новых, очень тонких и глубоких теорий. Значение этого открытия можно, пожалуй, сравнить только с открытием неевклидовой геометрии в XIX в. или теории относительности в начале XX в. Так же как и эти теории, проблема несоизмеримости получила громкую известность среди широких кругов образованных людей. Платон и Аристотель неоднократно обсуждали вопросы, связанные с несоизмеримостью» ([4], стр. 72—73).

«Тонкие и глубокие теории», о которых здесь говорится,— это дифференциальное и интегральное исчисление со всеми его приложениями, которое в самом своем фундаменте строится как теория, относящаяся к иррациональным числам, и является, таким образом, мостом, соединяющим геометрию с арифметикой. Несоединимость или плохая соединимость этих двух отделов точного знания была преодолена только с помощью введения в математику бесконечных объектов: последовательностей. Так, благодаря открытию несоизмеримых отрезков, математика стала «наукой о бесконечном».

Плохую соединимость арифметики и геометрии мы для краткости будем называть *АГ-конфликтом*. Воспользовавшись этим термином, мы можем сказать: математический анализ был построен как средство преодоления АГ-конфликта, и в результате его построения два основных способа исследования — наглядный и численный — снова, как и в раннем периоде пифагорейской философии, стали выступать в единстве. Линии, фигуры, площади, объемы стали однозначно сопоставляться с действительными числами, а правила сопоставления, развиваясь, наполняли анализ проблематикой и стимулировали совершенствование его методов.

В свете сказанного, вернемся к вопросу об интуитивном восприятии действительных чисел. Вряд ли подлежит сомнению, что действительное число есть для нас в первую очередь длина отрезка. Тот факт, что множество действительных чисел богаче, чем множество рациональных чисел, устанавливается рассмотрением диагонали квадрата, но ни в коей степени не подсказывается врожденной интуицией. Ведь до открытия несоизмеримости никто, видимо, не сомневался, что если наносить на ось абсцисс точки 1/2, 1/3, 2/3, 1/4, 2/4, 3/4, 1/5, 2/5, 3/5, 4/5, . . . , то любая точка единичного отрезка рано или поздно будет получена. Такое же мнение высказывают дети, не знающие теоремы Пифагора и ее главного следствия. Еще меньше открыто интуиции то обстоятельство, что иррациональных чисел «в бесконечное число раз больше, чем рациональных», что отрезок «состоит в основном из иррациональных чисел»; к этому утверждению математики, по их собственным признаниям, *привыкают* после того, как осваивают теорию множеств с ее понятиями мощности множества, эквивалентности множеств и т. д. Но это означает, что свойства действительных чисел, которые приняты в математическом анализе, не открыты имманентной для нашего ума интуиции, а *явились как результат длительного и постепенного развития сложной понятийной теории, имеющей конкретную цель: преодоление АГ-конфликта.* Поэтому тщетно спрашивать, какая из перечисленных выше шести аксиом «естественнее»; ни одна из них не является в строгом смысле таковой, и выбор аксиомы определяется лишь соображениями методического или педагогического характера, возникающими при построении курса у автора учебника или у лектора. Это подтверждается сравнением различных курсов: в одних берется за аксиому утверждение о сечении, в других — лемма Гейне — Бореля, в третьих — лемма Кантора и т. д.

Не должен нас смутить и часто практикуемый в серьезных современных курсах анализа способ введения действительных чисел с помощью последовательностей Коши, который состоит в следующем. Вначале определяется обычным образом последовательность Коши (фундаментальная последовательность) рациональных чисел, затем определяются арифметические действия над фундаментальными последовательностями как действия над их соответственными членами и доказывается, что в результате таких действий снова получается фундаментальная последовательность. Далее определяются положительные последовательности Коши, а через это определение устанавливаются неравенства между такими последовательностями. Затем выделяется класс нулевых последовательностей Коши, и с помощью этого класса определяется эквивалентность двух последовательностей: они эквивалентны, если их разность принадлежит нулевому классу. И наконец, дается определение действительного числа: действительным числом называется множество эквивалентных между собой фундаментальных последовательностей (именно такая схема определения действительного числа принята в конструктивной математике, поэтому мы рассмотрели эту методику достаточно подробно). Если кому-то может показаться, что при таком способе удается избежать принятия одной из приведенных выше аксиом на веру, то это, конечно, иллюзия.

Формально говоря, при таком определении действительного числа надобность в аксиомах и в самом деле отпадает, так как действительные числа теперь автоматически удовлетворяют теореме о критерии Коши.

Множество, в котором каждая последовательность Коши сходится к какому-то его элементу, называется *полным*. Мы, следовательно, *доказали* полноту множества действительных чисел, *определенных как классы эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел*. Теперь, как мы уже знаем, можно доказать лемму Гейне — Бореля (т. е. свойство «компактности» любого отрезка действительной оси), как и любое другое из шести равносильных утверждений, а затем дойти и до доказательства формулы конечных приращений. Но если мы заявим, что нам удалось совершенно чисто обосновать свойства действительных чисел и функций действительного переменного, то это будет неверно. Мы создали конструкцию (очень сложную, многоступенчатую и ни в коей мере не «открытую интуиции»), которая по самому своему построению обладает полнотой (а значит, и компактностью отрезков), позволяющей развить анализ на логической основе; однако совершенно ниоткуда не следует, что эта конструкция адекватно отражает наши интуитивные представления о действительных числах, непрерывных линиях и т. д. Другими словами, остается открытым вопрос о *познавательной значимости* нашего довольно искусственного определения «действительных чисел», или, что то же самое, вопрос о правомочности присвоения нашим искусственно построенным объектам названия «действительные числа» без отхода от языковой традиции в понимании этого термина. Описанная здесь (и любая подобная) конструкция избегает сомнительных аксиом, но в центральном своем пункте прибегает к сомнительному лингвистическому акту.

Так вырисовывается первая линия, по которой может вестись критика современного математического анализа, сводящаяся к обвинению, что его здание оказалось, хотя и внутренне логичным, но оторванным от «естественной почвы». Развивая эту линию, можно утверждать, что «непрерывность», фигурирующая в строго формальном анализе, совсем не есть та «непрерывность», которая непосредственно открыта нашей интуиции, что «гладкость» кривой в формальном анализе вовсе не тождественна всем нам понятной гладкости, и т. д. Эту мысль можно подкрепить многими убедительными фактами, из которых мы приводим лишь самый простой.

В 1861 г. К. Вейерштрасс поразил математический мир сообщением о том, что существует кривая, всюду непрерывная, но ни в одной точке не имеющая производной (Вейерштрасс фактически построил функцию, описывающую эту кривую). На языке наглядных образов это означает, что существует непрерывная линия, не имеющая ни в одной точке касательной, т. е. «всюду колючая». Это сенсационное открытие было истолковано как обнаружение ошибочности нашей интуиции. Действительно, мы не можем вообразить себе линию, которую можно нарисовать без отрыва руки, но которая не имела бы ни малейшего участка «гладкости», т. е. такого, где имелась бы касательная. Но разберемся, вправду ли это означает, что наша интуиция здесь дала серьезный сбой?

Поскольку мы интуитивно воспринимаем непрерывную кривую как кривую, вычерчиваемую без отрыва руки, то наша интуиция совершенно права. Чтобы делать на кривой «колючки», т. е. изображать точки, в которых производная отсутствует, необходимо останавливать руку в этих точках. Но при этом вычерчивание даже самого малого участка кривой займет бесконечное время.

Значит дело не в лживости интуиции. Может быть, в таком случае корни недоразумения выходят за рамки собственно математики и связаны с переносом в эту науку некоторых неправильных представлений о процессе познания вообще?

Для ответа на этот вопрос следует проанализировать влияние философии на появление и формирование дифференциального и интегрального исчисления. Конечно, не всегда это влияние было непосредственным. Но философский фон эпохи неизбежно подсказывает ученым выбор принципов познания и основополагающих идей, которыми они руководствуются в своей работе. Поэтому отрывать историю математического анализа XVII—XIX вв. от истории философии этого же периода нельзя.

Еще раз подчеркнем, что связь между конкретно-научными теориями и философскими установками всегда взаимна. Если же говорить именно о математике, то мы вправе утверждать, что ее воздействие на философию иногда было столь же заметным, как и воздействие на нее философии. И все же в целом философия значительно сильнее определяет пути развития математики, чем математика стимулирует развитие философии, поставляя ей фактический материал в виде тех или иных доказательств и помогая разработке количественной методики. На это обстоятельство нам нужно обратить особое внимание.

Мы приведем здесь только два примера, иллюстрирующих мысль об определяющем влиянии философских установок на выработку математических методов. Эти примеры относятся к ключевым моментам развития математики. Кстати, они хорошо показывают и ту косвенность, опосредствованность указанного влияния, о которой мы говорили выше. Мы убедимся, что опосредствованность не только не уменьшает влияния, а, возможно, делает его более глубоким и существенным. В то же время опосредствованность приводит к тому, что влияние не всегда замечается историками науки.

Первый из рассматриваемых нами моментов связан с созданием евклидовой геометрии. Это важнейшее научное событие произошло в середине первого тысячелетия до н. э. Все еще широко распространено мнение, будто дедуктивный метод доказательства был «изобретен» древнегреческими геометрами, выяснявшими свойства фигур. Ряд косвенных соображений, главным образом анализ текстов Платона, относящихся к проблемам геометрии, приводит автора к мысли, что дедуктивный метод был создан первоначально философами софистической школы и учителями красноречия, а затем уже был «взят на вооружение» математиками (подробное изложение этих соображений дано в

[5], гл. 1). Такого же взгляда придерживается А. Сабо, аргументируя его богатым материалом. Он пишет: «Мне кажется, возникновение метода косвенного доказательства останется неразрешимой тайной, если мы будем искать решение вопроса в исторически более ранних формах математического мышления ... метод этот был в готовой форме заимствован южноитальянскими пифагорейцами от живших в V в. до н. э. в Южной Италии элейских философов».

И далее:

«Итак, я выдвигаю следующее предположение: древнейшие греческие математики заимствовали метод косвенного доказательства от элейских философов, и, таким образом, возникновение дедуктивной математической науки может быть приписано воздействию элейской философии» ([6], стр. 347—348).

Особую убедительность этой точке зрения придает проделанный А. Сабо анализ терминологии ранних геометров, показавший, что многие слова, относящиеся как раз к дедуктивному выводу, были заимствованы из языка элеатов.

Второй пример относится к не менее важному моменту в истории математики — к созданию аналитической геометрии Декартом в начале XVII в., т. е. к первому решительному шагу на пути создания математического анализа. Изобретение Декартом метода координат описывается им самим таким образом: 10 ноября 1619 г. ему приснился некий демон, поднявший его с помощью страшного вихря на большую высоту, откуда Декарт мог наблюдать движение воздушных масс. Вглядываясь в картину развития вихря, Декарт заметил в ней определенные закономерности и понял, что, будучи познанным точными средствами исследования, вихрь перестает быть опасным и устрашающим для человека. Под впечатлением столь яркого сновидения Декарт вскоре после этого создал метод координат на плоскости, позволяющий аналитическим образом описать различные геометрические линии и траектории движения точек. Анализируя это любопытнейшее свидетельство, мы ясно видим, какую фундаментальную роль в выборе конкретного пути научного поиска сыграл философский рационализм Декарта, ставший одним из классических выражений рационализма его эпохи (об этом см. [7], стр. 39).

Кризис «интуитивного» анализа бесконечно малых не вызвал бы, вероятно, такую массу обсуждений и споров, не встретил бы такой болезненной реакции как математиков, так и некоторых философов [1], если бы перед этим не была столь широко распространенной вера в так называемую лейбницеанскую предустановленную гармонию. Для понимания сущности кризиса нам придется остановиться здесь на вопросе, какие основные причины создали эту веру.

Если говорить в самом общем плане, то главными причинами были, во-первых, остаточные формы теологического мышления и, во-вторых, хотя это может показаться на первый взгляд парадоксальным, триумф небесной механики, созданной Ньютоном и его последователями.

Первую из этих причин мы анализировать подробно не будем. Если допустить создание мира божественным творцом и затем создание этим же творцом *по своему образу и подобию* человека, то в интеллекте человека должен содержаться отблеск божественной мудрости, предначертавшей миру его свойства, и человек, следовательно, может приблизиться к тому непосредственному, полному и ясному пониманию мира, которым обладает его творец. На вторую причину обращают внимание реже, но она не менее важна, чем первая. После того как столь простые и лаконичные утверждения, как аксиомы механики Ньютона, позволили описать движение отдаленных светил, подвели теоретическую базу под экспериментальные законы Кеплера и дали возможность предсказывать местонахождение на небе еще неоткрытых планет, не осталось, вероятно, ни одного скептика, который усомнился бы в наличии предустановленной гармонии: если даже он не верил в ее божественное происхождение, он вынужден был принимать ее как неумолимый факт (именно так, видимо, относился к этому Д. Юм с его неискоренимым сомнением в существовании причинных связей). К началу XIX столетия, когда Лаплас, математически развивший идеи Канта, построил свою грандиозную космогоническую теорию, к ньютоновским аксиомам настолько уже привыкли, что стали воспринимать их как принципы, непосредственно доступные нашей интуиции. Так, ньютоновские «первопричины» заменили первопричины теологического характера, что и позволило Лапласу сказать, что в своей «Системе мира» он не нуждается в гипотезе существования

[1] См. [8], стр. 119—121.

бога. Однако смена одних «первичных начал» другими, имевшая большое мировоззренческое значение, не отразилась на идее «предустановленной гармонии» и даже, возможно, укрепила эту идею, так как новые (научные) первоначала оказались значительно более эффективными, чем старые (теологические). В другой работе ([9], гл. 3) мы подробнее анализировали влияние ньютоновской небесной механики на формирование гносеологических убеждений и поставили даже вопрос: как развивалось бы наше мировоззрение, если бы в центре нашей планетной системы находилась двойная звезда и, следовательно, движения планет были бы слишком сложными, чтобы люди сумели описать их, а затем и охватить единой механической теорией еще до наступления промышленной эпохи? Отметим здесь, что, хотя этот вопрос интересен, вряд ли на него можно дать однозначный ответ.

Причины исчезновения веры в предустановленную гармонию заслуживают отдельного рассмотрения. Мы ничего не будем говорить о такой очевидной причине, как дискредитация религиозных взглядов и остановимся на пяти чисто научных причинах.

1. Нарастающая усложненность физики. Нередко положение в физике в конце XIX в. изображают в радужных красках, утверждая, что в этот период физическая наука была близка к идеалу — к выводу всех наблюдаемых явлений из небольшого числа простых принципов при помощи одной математической дедукции. Но эта оптимистическая картина могла представиться разве лишь взору профессиональных ученых, постигших тайны сложного математического языка, пронизавшего к тому времени уже всю физическую науку, которая давно вышла за рамки механики, разветвилась на многочисленные разделы и установила в каждом разделе самостоятельные принципы, не сводимые к ньютоновским аксиомам. В частности, теория электричества стала основываться на уравнениях Максвелла, которые их автор безуспешно пытался «доказать». Как и следовало ожидать, «на тех, кто восхищался непогрешимым логическим построением электродинамики Ампера, теория Максвелла должна была производить неприятное впечатление. Физикам не удалось привести ее в стройный порядок, т. е. освободить от логических ошибок и непоследовательностей... Поэтому в конце прошлого века крупнейшие физики придерживались тезиса, выдвинутого

в 1890 г. Герцем: раз рассуждения и подсчеты, с помощью которых Максвелл пришел к своей теории электромагнетизма, полны ошибок, которые мы не можем исправить, примем шесть уравнений Максвелла как исходную гипотезу, как постулаты, на которые и будет опираться вся теория электромагнетизма» ([10], стр. 286).

Когда число исходных принципов значительно возросло, идея существования предустановленной гармонии стала вызывать сомнения. Надо также учесть, что в то время только обострялся спор между приверженцами волновой и корпускулярной точек зрения на природу света, так как были открыты новые факты как в пользу одной, так и в пользу другой концепции. К тому же в самом конце XIX столетия была обнаружена радиоактивность, вызвавшая волнения по поводу закона сохранения энергии и определенное оживление мистических настроений.

Все же, прогрессирующее усложнение теоретической физики нельзя считать прямой причиной разрушения веры в предустановленную гармонию. Это была скорее косвенная причина. В конце концов, философ, не умевший разобраться в математических формулах (без которых теперь не было физики), мог поверить на слово специалистам, что явления природы выводятся из неких доступных пониманию должным образом натренированных людей постулатов чисто логическим путем. Но вот частая смена постулатов и их условность (например, механику строили то на одной системе постулатов, то на другой), а также полное удаление этих постулатов от сферы нашей интуиции и то обстоятельство, что их выбор часто стал диктоваться лишь соображениями компактности изложения, подготавливали почву для вступления в действие других причин, создавали психологические предпосылки для принятия негативного тезиса о том, что универсального интеллигибельного ключа к тайнам Вселенной не существует вовсе.

2. Аксиоматизация математики. Она началась со вступления в силу тех идей, которые содержал в зародыше еще опубликованный в 1829 году мемуар Н. И. Лобачевского. Только через несколько десятилетий научная и методологическая революция, которую имел в виду Клиффорд, назвав Лобачевского «Коперником геометрии», наконец стала явной. Доказательство полного логического равноправия евклидовой и неевклидовой геометрий заставило наиболее проницательных ученых усом-

ниться в том, что математика обязана все время оставаться непосредственно «наукой о природе», т. е. сверять свои аксиомы с чувственно постигаемыми нами внешними фактами [2]. Начали распространяться взгляды, трактующие математическое творчество как заготовку чисто логических схем (а математику, следовательно, как творение чистого разума), которые естествоиспытатели могут по мере возникновения надобности использовать как формальную основу содержательных теорий в тех разделах, где это окажется полезным. Эти взгляды частично отразились в «конвенционализме» А. Пуанкаре, найдя отклик у ряда специалистов.

Указанное отношение к природе и происхождению аксиоматических теорий не только не исключало идеалистические взгляды (например, веру в предустановленную гармонию), но в ряде важных моментов даже содействовало сближению с идеализмом. Но как бы там ни было, проблема теперь сильно усложнилась. Фактически, вместо одного вопроса: способен ли разум исследователя уловить первопричины вещей и их сущность? — возникло два самостоятельных вопроса:

Отражает ли логика математических теорий наш материальный опыт или она лишь имманентна нашему мышлению?

Всякая ли логически безукоризненная теория когда-нибудь найдет применение в построении научной картины мира?

Поиски ответа на эти вопросы должны были ориентировать на исследование более конкретных, непосредственно связанных с математикой проблем.

В какой мере надо принимать в качестве критерия ценности математики ее практическую пользу в приложениях, и в какой мере таким критерием может служить логическая непротиворечивость?

Можно ли строго доказать логическую непротиворечивость конкретных математических теорий, например, арифметики?

Если окажется, что какая-то математическая теория является противоречивой, потеряет ли эта теория всякую практическую ценность?

---

[2] Более подробно об этом см. [11].

Ясно, что ситуация была чревата разными исходами и от нее можно было ожидать не только девальвации идеи предустановленной гармонии (при положительном ответена пятый вопрос), но и доведению ее до платонизма (в слуечае положительного ответа на второй вопрос). Однако как раз к тому времени, которое мы рассматриваем, стали появляться (пока в чисто математических и логических изданиях) первые парадоксы теории множеств, и это ставило эффективность «чистого разума» под сомнение.

3. Дух экспериментализма. Хотя эксперимент стал диктовать пути развития физике и другим естественным наукам уже с XVII столетия, в изучаемый нами период он достиг небывалого раньше совершенства и могущества. Фарадей, Герц, Ампер, Рентген, Беккерель и друпе знаменитые физики того времени подняли значение экспериментального исследования на новую высоту и значительно усовершенствовали лабораторную технику. Но еще важнее то, что они утвердили своим авторитетом *принцип непредвзятости* — основной методологический принцип, без которого немыслима плодотворная экспериментальная наука. Молодые ученые, следовавшие своим великим учителям, привыкали ничего не принимать на веру, все проверять и перепроверять, не страшиться делать самые необычные предположения и строить самые смелые гипотезы, если это помогает согласовать наблюденные факты. Постепенно стал формироваться новый тип исследователя, воспитавшего в себе способность на время эксперимента и осознания его результатов как бы забывать все, что он изучал по учебникам, чтобы избежать давления, которое могут оказать усвоенные ранее концепции на трактовку зарегистрированных явлений Такой ученый настраивался во время эксперимента на такой лад: «я ничего не знаю и не хочу знать, кроме того, что сообщают мне в данный момент мои органы чувств, а они сообщают мне только то, что такие-то стрелки стоят против таких-то делений. Только эти сообщения я должен учитывать, когда буду пытаться объяснить их, то есть увязать между собою». Нетрудно представить себе, каким образом развитие духа экспериментализма, породившее принцип непредвзятости, содействовало подрыву веры в какие бы то ни было универсальные интеллегибельные утверждения,. значит, также помогало распространению сомнений предустановленной гармонии.

4. Успехи физиологии и психологии. На вторую половину XIX столетия приходится резкий взлет физиологии, авторитету и популярности которой содействовали работы Гёте, Мюллера, Фехнера, Гельмгольца и других ученых. «С тех пор, как исследователи серьезно и ревностно обратились к естественнонаучному методу, к точному наблюдению явлений и к эксперименту, — заявил в связи с этим Гельмгольц,— в обеих науках (в физиологии и в медицине.— *В. Т.*) сказался такой подъем, какого они не могли достигнуть в продолжение тысячелетий. Я, как прежде практиковавший врач, лично могу это засвидетельствовать. Мои учебные годы совпали с таким периодом развития медицины, когда глубокомысленные и добросовестные умы приходили в полное отчаяние. Было нетрудно понять, что старые, преимущественно теоретические методы в медицине оказывались совершенно несостоятельными... Пример других естественных наук указывал, в каком направлении надо начать перестройку науки.

... Правильно поставленная работа принесла хорошие плоды быстрее, чем многие ожидали. Введение механических понятий в учение о кровообращении и дыхании, лучшее понимание явлений теплоты, более тонко разработанная физиология нервов дали вскоре практические результаты величайшей важности» ([12], стр. 64—65).

В это же время происходило сильное оживление и в области психологии, которая тогда теснейшим образом была связана с физиологией (так что в обеих науках иногда работали одни и те же исследователи). Особенно бурно развивалось ее эмпирическое направление, восходящее еще к Локку и Юму. Правильной постановке проблем и разработке методики содействовали труды Дж. Ст. Милля, Г. Спенсера, Гельмгольца, Вундта, Бехтерева, Сеченова и других ученых. Важнейшим результатом явилось то, что «натуралистами-биологами, физиологами, физиками и врачами» была открыта «психическая реальность» ([13], стр. 55). Если вспомнить, что к концу XIX в. сформировались идеи З. Фрейда, переведшего в область «реальности» некоторые явления подсознания, то не будет преувеличением сказать, что успехи физиологии и психологии заставили смотреть на человеческие способности познавать природу более «механистически», чем раньше. Понятно, какие огромные последствия таило это для гносеологии. Что же касается влияния на проблему предустановленной гармонии, то его тонко охарактеризовал сам Гельмгольц:

«Что опыт играет важную роль при распознавании значения зрительных образов и в сомнительных случаях имеет даже окончательное, решающее значение, с этим соглашаются даже те из физиологов, которые склонны отстаивать прирожденную гармонию между чувствами и внешним миром...

Из этого вытекает, что тонкая и столь поразительная гармония между нашими чувственными восприятиями и вызывающими их объектами, в сущности, за несколькими сомнительными исключениями, является индивидуальным приобретенным приспособлением, продуктом опыта, упражнения и воспоминания прежних случаев подобного рода» ([12], стр. 63—64).

5. Эволюционная точка зрения. Хорошо известно, какое колоссальное значение для развития материалистического мировоззрения имело становление эволюционизма, достигшего своего наивысшего воплощения в дарвиновском учении о происхождении видов. Идея развития, положенная в основу космогонии Канта — Лапласа и отраженная Гегелем, наполнилась после Дарвина новым конкретным содержанием, а главное,— была направлена на изучение не только неорганической, но и живой природы и приобрела большую логическую убедительность и популярность.

«Эволютивное» мышление завоевывало все большую популярность, что нашло выражение в успехе философских учений Конта, Милля, Спенсера.

Высшим выражением идеи развития, как известно, явился диалектический материализм. В XIX в. он не был еще известен широкому кругу естествоиспытателей. Однако сам ход развития науки приводил ученых-естественников и математиков к диалектическим идеям. Ученые стали все более интересоваться не готовым знанием, а процессом его приобретения, т. е. реальным механизмом познания.

В этом свете все новейшие научные достижения стали все чаще рассматриваться как относительные, приблизительные, частичные завоевания разума, а человеческое знание в целом стало представляться лишь этапом в бесконечном движении к цели, причем само это движение не рисовалось строго прямолинейным — в нем допускалось наличие ошибок, зигзагов, поправок и исправлений. Такой взгляд заставлял смотреть на предустановленную гармонию как на весьма условное понятие — ведь она, согласно эволютивной точке зрения, могла быть достигнута лишь потенциально и становилась, таким образом, не реальностью, какой она была для теологов средних веков, а неким фиктивным, предельным понятием. Но были и такие мыслители, которые делали из идеи эволюции человеческого рода еще более пессимистический вывод, утверждая, что наш разум, возникший в результате естественного отбора, приспособлен к отражению *лишь одной стороны мира* и совершенно непригоден для проникновения в остальные его стороны. К обсуждению этой позиции мы еще вернемся.

К концу XIX в. в результате кризиса религиозного мировоззрения, крупных успехов в естествознании и появления сомнений в абсолютности некоторых математических аксиом наметились важные материалистические и диалектические тенденции в развитии теории познания. Все большее число ученых стало приходить к убеждению, что познание — процесс значительно более трудный и многоступенчатый, чем было принято думать прежде, что он связан с построением вспомогательных научных понятий и категорий, не имеющих прямых прообразов в реальном мире и не определяемых познавательной ситуацией однозначно, а во многом зависящих от склонностей исследователей и их сообразительности, от удобства оперирования с этими научными абстракциями.

Эти факторы и определили возникновение противоречия между «интуитивным» анализом и математикой, идущей ему на смену. Схема этого противоречия довольно характерна для науки вообще. Вот она.

На ранней стадии развития какой-либо науки люди пользуются полуинтуитивными представлениями об объектах, изучаемых этой наукой, и эти представления достаточно хорошо отражают либо известные из опыта *фактически существующие* свойства объектов, либо глубоко укоренившиеся особенности человеческого восприятия, традицию описания и объяснения, характерную для данной эпохи, а чаще всего и то и другое вместе. Начиная с какого-то момента, вследствие повысившихся требований к предсказательной силе науки и необходимости в связи с этим изучать стороны объектов, недоступные интуиции, а также вследствие повышения значения количественного, числового изучения объектов, наука все более перестраивается как *формально-логическая* понятийная система с наложением интерпретации на ее четкие структуры. При такой перестройке встает проблема разработки строгих определений понятий, прообразами которых являются внешние объекты, изучаемые данной наукой. Ведь без точных определений невозможна формальная числовая обработка данных и дедуктивный вывод результатов. Проблема решается таким образом: какое-то из интуитивно доступных нам свойств объекта берется за главное, и на нем строится точное определение соответствующего понятия строгой теории. После этого вступает в силу уже не зависящий от нас механизм логического вывода; мы дальше не можем повлиять на следствия нашего определения. Но, поскольку мы ухватились только за часть информации, доставляемой нам интуицией, и в интересах строгости пренебрегаем остальной информацией, может случиться (и всегда случается), что выводы, абсолютно строгие, будут все-таки на каком-то отдаленном этапе уже резко противоречить нашей интуиции. В физике таких примеров неисчислимое множество; один из них — теория о заполнении пространства бесконечно плотным фоном, «дыры» в котором есть элементарные частицы. Идеализируя объект, беря какие-то существенные его стороны и отметая другие ради простоты и ясности теории, мы жертвуем многообразием объекта, объемом его содержания. Получается весьма близкое тому, что В. И. Ленин назвал «огрублением» живого объекта мыслью, поскольку чувственная интуиция все же больше информации дает нам о «живом объекте», чем понятийно-логическая схема, т. е. «мысль». Но отсюда вовсе не следует, что нужно идти за Бергсоном и изучать объекты с помощью «интеллектуальной симпатии». Мы скажем далее подробно, почему такое изучение неприемлемо для науки. Тем не менее не только полезно, но и необходимо ставить вопрос о соответствии понятийных формальных категорий, выглядящих более или менее надежными, интуитивным представлениям об объекте, особенно в таких случаях, когда конструкции формальной системы становятся чрезвычайно усложненными и обнаруживают свойства, резко не согласующиеся с интуитивным пониманием объекта. Такая постановка означает необходимый контроль за тем, чтобы формальная теория не «отрывалась» от жизни, закономерную регулярную ревизию, необходимую для самой формальной системы более, чем для чего-либо другого, поэтому она не должна восприниматься как бергсонианство. Ставить такой вопрос — долг не только ученого, занимающегося конкретной областью и заинтересованного в развитии своей науки и в повышении ее познавательной ценности, но и философа, занимающегося эпистемологией и теорией познания в целом.

В этой связи любопытно привести слова Джемса, который, усматривая большое зло в явлении, названном им «порочным интеллектуализмом», писал:

«Интеллектуализм коренится в нашей способности, дающей нам главное превосходство над животными, а именно в способности приводить сырой поток нашего чисто чувственного опыта в систему понятий. . .

Начало интеллектуализма в порочном смысле относится к тому времени, когда Сократ и Платон учили, что то, что вещь есть в действительности, высказано в ее о п р е д е л е н и и. Со времени Сократа нас учили, что действительность состоит из сущностей, а не из явлений, и что, зная определение вещей, мы, тем самым, познаем их сущность.

Пока все обстоит благополучно. Злоупотребление понятиями начинается вместе с привычкой употреблять их одинаково как в положительном, так и отрицательном смысле, т. е. не только для того, чтобы приписывать вещам известные свойства, но и для того, чтобы отрицать у них те свойства, с которыми они являются нашим чувствам» ([14], стр. 120—121).

Конструкция Вейерштрасса возможна потому, что при построении анализа в силу необходимости взяли за основу именно локальное определение непрерывности (непрерывность в точке, определенная через предел). После этого, чрезвычайно сложным образом конструируя полное множество, которое «декретивно» объявили адекватным нашим представлениям о числовой прямой, мы сумели строго логически вывести такое интуитивно очевидное свойство гладкой непрерывной кривой, имеющей на концах равную высоту, как наличие точки с горизонтальной касательной. Этим свойством удалось затем логически обосновать многочисленные применения дифференциального и интегрального исчисления. Но издержки «интеллектуального метода» все же возникли, и одной из них явилась кривая Вейерштрасса. Использовав в определении непрерывности лишь локальные интуитивные представления (и то неизвестно, в полной ли мере), мы пренебрегли интегральными и, как оказалось, вступили с ними в противоречие. Это не значит, что нужно перестраивать из-за этого одного факта анализ — то, чтó мы учли, возможно, гораздо важнее того, чтó мы отбросили. Но тем не менее мы обязаны со всей ясностью понимать, что формальное определение понятия непрерывности не адекватно отражает наше чувственно-наглядное представление о непрерывности, что это — «р а з н ы е непрерывности».

Еще более разительные результаты дает математическое исследование понятия «кривой» — казалось бы, понятия очень хорошо данного нам в интуиции. Пока изучались «нормальные» кривые, какими их мыслил Декарт, все обходилось без особенно строгих определений. Но по мере развития теоретической части анализа и появления «патологических» кривых все больше назревала необходимость выработать строгое общее определение кривой. Вопреки тому, что можно было ожидать, эта задача оказалась весьма нелегкой. Во-первых, надо было дать определение в такой форме, чтобы его естественным обобщением было определение поверхности, трехмерного тела и т. д. Так, математика начала двигаться к выдвижению идеи многообразия, частным случаем которого явилось бы одномерное многообразие, вложенное в пространство произвольной размерности,— кривая.

Здесь у нас нет возможности описывать все логические трудности, возникшие на этом пути, так как это далеко увело бы нас в сторону от основной темы; история выработки современного понятия кривой достойна отдельной монографии солидного объема. Укажем только, что при одном из естественных способов определения многообразия, учитывающем, казалось бы, все потребности анализа, такое очевидное многообразие, как сфера, не подпадает под это определение. Такого вопиющего несоответствия между интуицией и строгим пониманием допустить было уже нельзя и потребовалась коррекция и без того сложного определения. В конце концов было разработано принятое сейчас определение многообразия (и его частного случая — кривой), которое доступно только математику достаточно высокой квалификации, ибо в него входит много понятий, требующих долгого предварительного изучения и освоения. Но можно ли утверждать, что теперь термин «кривая» окончательно перешел из области интуиции в область строгой логики? Мы думаем, что утверждать так — значит в корне неправильно понимать роль и значение современной математики и приписывать ей цели, достичь которых она просто не в состоянии. В одном из наиболее полных курсов анализа (Лорана Шварца) сказано: «Многообразие размерности 1 называется *кривой*, многообразие размерности 2 — *поверхностью*, а многообразие размерности $N - 1$ называется *гиперповерхностью*. Однако эти слова использовались и используются в столь различных смыслах, что надо быть осторожным при их применении. Принято рассматривать лемнискату Бернулли как «кривую», однако из-за своей особой точки она не является многообразием» ([15], стр. 327). Здесь скептически настроенный читатель может воскликнуть: «Гора родила мышь!» Стоило ли десятками лет кропотливо совершенствовать и шлифовать понятие кривой, чтобы в итоге в него не вошла такая несомненная кривая, как лемниската Бернулли (восьмерка)? Невольно можно пожалеть, что Джемс не знал таких вещей — он нашел бы здесь необычайно благоприятную почву для своей критики «порочного интеллектуализма». И все же вводить в математику понятие непрерывного и дифференцируемого многообразий очень стоило: эти понятия обеспечили огромный прогресс многих ее разделов, соединив ранее разобщенные проблемы, осветив ярким светом многие труднейшие вопросы. По поводу же конфуза с лемнискатой Бернулли и подобными ей линиями, мы можем лишь отметить, что «кривая» в строгом математическом смысле есть некая искусственная конструкция, характер которой определяется пользой, приносимой ею математической науке, и осмысливанием некоторых сторон наглядно-содержательного образа кривой, но отнюдь не отражающая интуицию адекватно. Термин «кривая» никогда не может перейти полностью из сферы интуитивного понимания в сферу логического понимания, поскольку математика и логика не ставят целью подавление нашей интуиции. Есть и всегда, вероятно, будут существовать д в е «кривые» — общеязыковая и математическая, и нелепо ставить вопрос: какая из них лучше. Каждая работает в своей области и выполняет свои функции.

Но в конце XIX — начале XX века многие выдающиеся умы не понимали этой простой истины. Когда, например, Пеано опубликовал пример кривой, целиком заполняющей квадрат, Пуанкаре воскликнул: «Как могла интуиция до такой степени обмануть нас!» ([16], стр. 133). Это восклицание прекрасно передает взгляд на математику, господствовавший в то время повсеместно. Узнав о «патологическом» примере Пеано, Пуанкаре, не колеблясь (несмотря на свой скептицизм), сделал вывод, что неправа именно интуиция, а не сложившаяся теория. Это произошло потому, что идея предустановленной гармонии держалась в математике дольше, чем в какой-либо другой науке, и трактовалась в ней как картезианское совпадение разума и мира, которое, если смотреть глубже, сводилось к онтологизации математических объектов, которое можно назвать «математическим платонизмом», поскольку при этом как бы подразумевается, что функции, векторные пространства, операторы (например, интегралы) и т. д. не «изобретаются» человеческим мышлением, а предзаданы на неких «платоновских небесах» в форме неких «эйдосов». Конечно, этот взгляд имел свои корни и стимулировался объективными обстоятельствами: громадными успехами приложений математики и все возрастающей логической стройностью этой науки. Разработка общих алгебраических и теоретико-групповых методов и проникновение их во все разделы математического знания в качестве цементирующей прослойки произвели сильное впечатление на специалистов. Но особенно большую роль в том, что математика стала восприниматься как логически безупречная «царица наук», адекватно отражающая в с е соотношения Вселенной, и сделалась поэтому последним убежищем платонизма и концепции предустановленной гармонии, сыграло развитие теории множеств, о котором мы будем говорить особо. Постепенное изменение взгляда на аксиоматические теории разрушало идею гармонии в первую очередь в глазах философов, физиков и естествоиспытателей и гораздо менее в глазах самих математиков. Позиция последних становилась такой: «не наше дело искать приложения, мы заготавливаем свои теории впрок; однако история науки показывает, что всякая логическая безукоризненная математическая конструкция рано или поздно используется в содержательных разделах знания, то есть оказывается моделью чего-то реального,—

значит всякая логически правильная идея *существует*». Иногда к этому добавлялось: «мы не знаем, *почему* математика, порожденная чистым разумом, соответствует природе, но это факт, который должен быть признан. Видимо, наш ум, сам по себе, способен проникнуть в самые глубины мирового устройства». Эта позиция математиков того времени выражена в публичных высказываниях авторитетов, которые можно было бы цитировать в большом количестве.

Наиболее ярко тенденция к онтологизации математических понятий была выражена Ш. Эрмитом. Он говорил: «Я верю, что числа и функции анализа не являются произвольным созданием нашего разума; я думаю, что ни существуют вне нас. . . » ([17], стр. 29). Психологическим основанием для придания аксиоматически определенным и построенным дедуктивным образом математическим понятиям статуса объективных вещей было то, что эти понятия казались в то время обладавшими свойством, присущим реальным объектам: независимостью поведения. Все люди, умеющие читать и понимать математический текст, должны были неизбежным образом, независимо от своего желания, согласиться, что, например, интеграл от аналитической функции по такому-то контуру равен нулю. Следовательно, свойства функции выступали как внешние. Г. Герц справедливо заметил, что каждому, кто изучает математику, «трудно отделаться от ощущения, что математические формулы обладают независимым существованием и своим собственным интеллектом, будто они умнее нас, умнее даже тех, кто их открыл» ([7], стр. 16).

Надо отметить, что привычка онтологизировать *математические* понятия оказалась исключительно устойчивой и продолжает порождать высказывания идеалистического толка. В качестве примера можно привести взгляд на математические понятия современного американского физика Е. Вигнера. В своем докладе в Нью-Йоркском университете в 1959 г. Вигнер говорил: «Математический язык удивительно хорошо приспособлен для формулировки физических законов. Это чудесный дар, который мы не понимаем и которого не заслуживаем. Нам остается лишь благодарить за него судьбу и надеяться, что и в своих будущих исследованиях мы сможем по-прежнему пользоваться им» ([18], стр. 197). Из этих слов можно понять, что их автор не пытается объяснить эффективность математики как орудия физических исследований ни отражением этой наукой некоторых объективных законов природы, явившимся результатом огромного коллективного труда ученых, ни постоянным совершенствованием ее методов, ее *приспособлением* для описания законов, ни эволюционной адаптацией человеческого мозга к окружающему миру. Эффективность математики предстает у Вигнера как необъяснимый факт, как типичное таинственное воплощение предустановленной гармонии — предустановленной неизвестно кем и почему. Высказывания в том же духе можно было бы приводить и еще; все они свидетельствуют о живучести платонистского взгляда на математику, особенно среди тех, кто не знает как следует ее современных оснований.

Кульминационным пунктом в процессе онтологизации математических сущностей нужно считать конец XIX в., когда математика приняла в качестве своей логической базы созданную Кантором теорию множеств. Официальное провозглашение теоретико-множественных представлений фундаментом математики состоялось в 1897 г.: оно содержалось в речи Ж. Адамара на I Международном конгрессе математиков в Цюрихе. Процесс перестройки математического анализа (как и других, более молодых разделов математики) с целью укрепления логического каркаса, начатый еще О. Коши, обрел теперь совершенно ясное направление.

Огромный успех канторовского «Менгенлере» [3] и то, что в этом учении математики увидели давно необходимый им единообразный метод логического, содержательного, методологического и педагогического обоснования конкретных математических дисциплин, объясняется просто. Математика никогда не изучает единичное, а всегда интересуется свойствами и отношениями, которые присущи бесконечному числу объектов. Проблема, даст ли соединение двух яблок и трех яблок пять яблок, не относится к математике; эта наука не нисходит до таких частностей и устанавливает, что два любых объекта и три любых объекта составляют пять объектов. Вот еще одна, не столь примитивная иллюстрация. Доказано, что до такого-то X (это число постоянно растет) справедливо ут-

---

[3] Учение о множествах (нем.).

верждение, что не существует целых положительных чисел A, B, C, удовлетворяющих равенству $A^x + B^x = C^x$, если x больше двух (и также целое). Однако этот результат, потребовавший большого труда людей и машин, вообще говоря, мало интересует математиков и ценится ими довольно низко: им необходимо знать, верно ли это утверждение *для любого X, превосходящего 2*, т. е. верна ли Большая теорема Ферма.

Как пишет Э. Мендельсон об аксиоматической теории множеств фон Неймана — Бернайса — Гёделя, она была «задумана как теория, трактующая о классах, а не о предметах. Мотивом в пользу этого послужило то обстоятельство, что математика не нуждается в объектах, не являющихся классами, вроде коров или молекул. Все математические объекты и отношения могут быть выражены в терминах одних только классов» ([19], стр. 178—179). Те же мотивы вызвали к жизни более раннюю, «наивную» теорию множеств Кантора.

Таким образом, теория множеств узаконила давно укоренившееся в умах математиков стремление к осмысливанию не индивидуальных особенностей, а черт и характеристик целых групп объектов, совокупностей. Важно отметить, что такую совокупность математик мыслит как единый объект более высокого порядка (это, вероятно, связано с психологической особенностью человека, заключающейся в том, что в фокусе сознания трудно удерживать одновременно несколько разнородных вещей, поэтому то, что находится в этом фокусе, имеет тенденцию «гомогенизироваться», т. е. выступать как целостность). Этим пристрастием математиков рассуждать сразу о бесконечных совокупностях, имея при этом перед собой образ некоей целостности, продиктовано определение, данное Кантором множеству: «Под множеством понимают объединение в одно общее объектов, хорошо различимых нашей интуицией или нашей мыслью» ([17], стр. 37—38).

Вторая привлекательная сторона теории множеств состояла в том, что впервые в истории математики была проведена классификация множеств на основе новоизобретенного понятия «мощности» и получены поразительные результаты: доказательство несчетности континуума, равномощность множества точек отрезка и квадрата и т. д. Все это воодушевило математиков; им казалось, что перед их наукой открываются новые невиданные перспективы.

Была и третья причина. Упомянутый выше «АГ-конфликт» преодолевался, как мы видели, с помощью постепенной арифметизации анализа, поскольку арифметический подход давал больше возможностей для применения дедуктивного метода исследования, чем наглядный. Определение непрерывности и дифференцируемости через предел, а предела — через арифметические неравенства обеспечивало анализу форму, удобную для логической обработки. Но арифметизация выхолащивала живое содержание науки, задуманной Ньютоном и Лейбницем как орудие исследования фигур и траекторий и в этом же духе развиваемой Эйлером, Лагранжем и Гауссом. Великая традиция образного мышления в анализе приходила в противоречие с требованиями нового этапа его развития, но привычка к наглядности вынуждена была уступить стремлению к логической строгости. Появление канторовских идей, казалось, снимало это противоречие — понятие произвольного множества, помещаясь в самом основании математики, воскрешало синтетическое мышление, не отказываясь, как думали тогда, от арифметизации аппарата дифференциального и интегрального исчисления. Появлялась возможность продолжать двигаться по логическому пути, применяя для этого теоретико-множественные методы, импонирующие наглядной интуиции.

Появление теории множеств означало революцию в анализе, имевшую громадные последствия, вызвавшую сначала резкое усиление онтологизации математических понятий, а затем ее довольно быстрый закат. В период наивысшего расцвета теория множеств отодвинула в сторону арифметику, которую до этого стали уже официально считать «царицей математики», и оказала огромное влияние на методику преподавания математики.

Не много в истории науки было событий, которые могли бы по своему значению сравниться с теоретико-множественной перестройкой математики. Это мощное движение привело к переосмысливанию оснований математики, к расколу учения об основаниях на несколько несогласных друг с другом школ и поставило перед теорией познания ряд важнейших и неотложных проблем.

Вторжение в математику понятий и методов теории множеств привело к возникновению той ситуации скрытого под внешним благополучием напряжения, чреватого взрывом, которое совершенно определенно можно назвать затянувшимся кризисом оснований математики. Выход из этого кризиса, по мнению одних, может прекратить само существование математики в прежнем смысле этого слова — превратить ее в полуописательную науку гуманитарного типа, по мнению других,— привести к созданию нескольких различных по методам и предпосылкам математик, по мнению третьих,— резко сузить ее рамки. Но о современных последствиях царствования «менгенлере» мы будем говорить подробнее дальше, а сейчас нам следует вернуться ко времени первого появления этой теории.

Ф. Клейн, свидетель начала теоретико-множественного переворота, близкий друг Г. Кантора, так охарактеризовал новое учение:

«Прежде всего несколько слов о тех общих идеях, которые выработал Кантор по вопросу о положении, занимаемом учением о совокупностях по отношению к геометрии и анализу; эти идеи выставляют в особенном свете значение учения о совокупностях. Через всю историю математики так же, как и через все философские рассуждения о природе, проходит, как известно, различие между дискретной величиной арифметики и непрерывной величиной геометрии. В новейшее время особенно стали выдвигать на первый план дискретную величину как наиболее легкую для понимания; на целые натуральные числа стали смотреть, как на данные простейшие понятия, выводя из них по известному способу рациональные и иррациональные числа; таким образом, в конце концов был получен весь аппарат, необходимый для господства анализа в геометрии, т. е. аналитическая геометрия. Эту тенденцию современного развития математики можно назвать арифметизацией геометрии: геометрическая идея непрерывности оказывается сведенной к идее целых чисел. . .

И вот, в противовес этому одностороннему предпочтению целых чисел, Кантор желает, как он сам мне говорил на Съезде Естествоиспытателей в Касселе,— достигнуть «истинного слияния арифметики и геометрии» в учении о совокупностях — другими словами, он желает представить учение о целых числах, с одной стороны, и теорию различных образов, непрерывно составленных из точек, с другой стороны, . . . как равноправные и объединенные главы общего учения о совокупностях» ([3], стр. 434—435).

Здесь Клейн с большой яркостью показывает, что урегулирование древнего «АГ-конфликта» было одной из главных (если не единственной) причин разработки теории множеств. Конфликтующие объекты — целые числа и геометрические образы — стали толковаться Кантором и его последователями как два ростка, имеющие общие корни в понятии множества, которое, таким образом, выступило как более первичное «третье», как объект не числовой и не геометрической природы, открытый самым глубинным слоям нашей интуиции, наиболее четко различаемый нашими «внутренними очами», а следовательно, и наиболее надежный.

Попытаемся проанализировать эту претензию и ответить на следующие вопросы:

На самом ли деле теория множеств дает возможность обосновать как арифметику, так и геометрию?

На самом ли деле понятие множества, как оно выступает в теории Кантора, непосредственно открыто нашей изначальной интуиции и, следовательно, должно быть выбрано как первичное, неопределимое понятие всей математики?

В «Основаниях арифметики» (1884) Г. Фреге разработан метод определения натурального числа, основанный на специфической трактовке понятия «понятие». Это определение натурального числа через «объем понятия», в систематической форме изложенное в «Основных законах арифметики» Фреге, можно истолковать как редукцию «числа» к «множеству». Мы изложим идею этой редукции в соединении с идеей Дж. фон Неймана об индуктивном порождении натуральных чисел, отправной точкой которого является пустое множество.

Вначале мы определяем *тождество двух множеств* как их составленность из одинаковых элементов. Затем определяем *пустое множество* как множество, которое не тождественно самому себе. Затем определяем равномощность двух множеств как возможность установления взаимно-однозначного соответствия между их элементами.

Далее рассматриваем множество, элементом которого является только пустое множество (и больше ничего). Наконец, вводим в рассмотрение множество всех множеств, ему равномощных. Это множество мы называем натуральным числом *«единица»*.

Теперь возьмем множество, элементами которого являются пустое множество и множество, состоящее из одного пустого множества. Множество всех равномощных ему множеств назовем натуральным числом *«два»*.

После этого рассмотрим множество, имеющее следующие элементы: пустое множество, множество, состоящее из одного пустого множества, и множество, содержащее в качестве элементов пустое множество, множество, состоящее из пустого и содержащего только пустое множеств, а также содержащее множество, элементами которого являются два упомянутых множества. Это множество породит класс равномощных ему множеств, который мы назовем натуральным числом *«три»*.

Для определения натуральных чисел «четыре», «пять» и т. д. будем действовать аналогичным образом, присоединяя каждый раз в качестве элемента множество, полученное на предыдущем этапе, и рассматривая множество всех множеств, равномощных данному конкретному множеству, построенному нами в результате построения единообразных по своей сути шагов. В современных обозначениях этот процесс построения натурального ряда выглядит несколько компактнее, чем при словесном его описании. Обозначим пустое множество символом $\varnothing$, а фигурные скобки будем употреблять для обозначения множества, заданного перечислением своих элементов. Тогда натуральный ряд определяется следующей процедурой:

1 есть множество всех множеств, равномощных $\{\varnothing\}$
2 есть множество всех множеств, равномощных $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
3 есть множество всех множеств, равномощных $\{\varnothing, \{\varnothing\},$
$$\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$$

. . . .

Ознакомившись с таким разъяснением понятия натурального числа, вспоминаешь латинское изречение «объяснить темное через еще более темное». Чтобы осознать сложную и искусственную конструкцию, призванную облегчить (!) понимание природы натуральных чисел, нужно затратить большое интеллектуальное усилие. Но даже тогда, когда идея этой конструкции становится ясной, остаются очень серьезные возражения против ее целесообразности.

Прежде всего весьма смутным является определение пустого множества, как «не тождественного самому себе». Вообще понятие пустого множества весьма нетривиально и успешно осваивается сознанием лишь на довольно высокой степени его развития (поздно оно появилось и в коллективном сознании — в науке). В теории множеств оно вводится для унификации операций (без него нельзя было бы говорить, например, о пересечении двух множеств как множестве, так как не всегда имеются общие элементы у двух множеств), и считать это понятие более простым, чем понятие натурального числа, никак нельзя. Кроме того, конструкция сильно усложняется постоянным требованием строго отличать некоторое множество от множества, единственным элементом которого является это множество, т. е. отличать M от $\{M\}$. Ясно, что в теории множеств это требование, впервые подчеркнутое Фреге, существенно, так как иначе нельзя будет выполнить главное условие восприятия множества как «единого», но для разъяснения понятия натурального числа оно вряд ли подходит. Построенные вышеуказанным образом натуральные числа имеют своими стандартными образцами неоднородные по иерархии структуры, тогда как при обычном интуитивном понимании натурального ряда как результата присоединения все новых единиц, все входящие в него единицы равноправны, принадлежат к одному и тому же типу.

Но самое главное, решающее возражение против изложенной схемы состоит в том, что уже на первом шаге построения натуральных чисел, т. е. при построении единицы, используется понятие, развитие которого приводит к противоречиям в математике.

Трактовать числа как множества всех множеств, равномощных данному, понадобилось по понятной причине: в этом случае сложение натуральных чисел сводится к объединению множеств. Но в этом подходе крылась возможность возникновения парадокса, как это впервые заметил Б. Рассел. Вот в чем состоит сущность этого парадокса, сыгравшего важную роль в истории математики и в развитии ее оснований. Если допустить свободное обращение с таким термином, как «множество всех множеств, обладающих свойством P», то вскоре придется столкнуться с крайне неприятной ситуацией. Возьмем в качестве P свойство «содержать само себя в качестве элемента». Таким свойством, например, обладает натуральное число «единица», определенное выше, так как оно есть совокупность в с е х множеств, равномощных множеству $\{\varnothing\}$, а само оно как раз и равномощно этому множеству. С другой стороны, есть, конечно, и множества, не обладающие этим свойством: например, множество всех четных чисел, которое не есть четное число. Рассмотрим теперь такое множество M: множество всех множеств, не о б л а д а ю щ и х свойством P. В рамках построений Фреге мы получаем вполне заурядное множество, аналогичных которому на страницах его «Оснований» очень много, т. е. с точки зрения теории множеств, обосновывающей арифметику, мы получаем вполне законный математический объект (даже в некотором смысле более надежный, чем натуральное число). Но может ли такой объект выступать в нашем сознании как нечто определенное, даже при специальной тренировке воображения? Оказывается, что никак не может, поскольку этот «объект» противоречит самому себе. Чтобы убедиться в этом, достаточно поставить вопрос: обладает ли объект M свойством P? Нетрудно обнаружить, что любой ответ на этот вопрос будет ложным. Пусть, скажем, M обладает свойством P, т. е. содержит само себя. Но в таком случае оно не содержало бы себя, так как в M входят т о л ь к о те множества, которые не содержат себя. Из этого противоречия как будто бы следует, что наше предположение было ошибочным и M не обладает свойством P. Но и это неверно. Действительно, пусть M не обладает свойством P, т. е. не содержит самого себя в качестве своего элемента. Но тогда оно должно содержать самого себя, ибо оно включает в себя в с е множества, не содержащие себя. Снова получаем противоречие.

Свои сомнения относительно правомочности рассмотрения подобного рода объектов молодой Рассел изложил в письме Фреге от 16 июня 1902 г. Это был серьезный предупредительный сигнал о том, что в царстве множеств не все обстоит благополучно. Несмотря на то, что до широких кругов математиков этот сигнал не дошел и по сей день, 16 июня 1902 г. можно считать официальной датой, отмечающей начало заката «менгенлере». Таким образом, это учение наслаждалось «безоблачным царствованием» всего пять лет, если говорить «строго юридически». По существу же теоретико-множественный образ мышления начал доминировать у математиков задолго до 1897 г. (до выступления Адамара) и продолжает доминировать в умах большинства и сейчас — спустя более чем 70 лет после 1902 г.

В своем письме Рассел изложил следующие логико-математические соображения: «. . . Я обнаружил, что согласен с Вами во всем главном, особенно с Вашим непринятием каких бы то ни было психологических моментов в логике и с тем большим значением, которое Вы отводите системе обозначений в основаниях математики и в формальной логике, каковые, впрочем, трудно отделить друг от друга. Вместе с рассмотрением многих специальных вопросов, я нашел в Вашей работе обсуждения, разграничения и определения, которых не найдешь в работах других логиков. В частности, если говорить о функциях, я собственным путем пришел ко взглядам, совпадающим с Вашими во всех деталях. Имеется только одно место, в котором я встретился с трудностью. Вы утверждаете, что функция так же может рассматриваться, как неопределяемый элемент. Я тоже так думал раньше, но теперь эта точка зрения кажется мне сомнительной из-за следующего противоречия. Пусть w есть предикат «быть предикатом, не относящимся к самому себе». Относится ли он к себе? Из любого ответа на этот вопрос следует противоположный. Остается заключить, что это не предикат. Точно так же не является множеством (целостностью) множество таких множеств, которые, рассматриваемые как целостности, не содержат себя. Отсюда я делаю заключение, что при некоторых обстоятельствах заданная определением совокупность не представляет собой целостности. . . Четкая трактовка фундаментальных логических проблем, в которых бессильна символика, в значительной степени оправдана; в Ваших трудах она дана лучше, чем где бы то ни было, поэтому я хочу выразить Вам глубокое уважение. Очень жаль, что Вы еще не опубликовали второго тома «Основных законов»; надеюсь, что это скоро произойдет.

С почтением, Ваш

Бертран Рассел ([20], стр. 124).

Интересно, что как раз в момент получения письма Рассела Фреге имел на руках верстку второго тома «Основных законов арифметики», который, по признанию Фреге (он сумел это написать только в послесловии, так как текст менять было уже поздно), был обесценен после обнаружения парадокса Рассела. Так по существу закончилась неудачная попытка обосновать арифметику с помощью теории множеств, задумавшая еще Кантором. «Наивная» теория множеств вскоре была заменена аксиоматической формальной системой (Цермело, 1908 г.), в которой подобные парадоксы не имели места, но такая система была довольно искусственной, и уже не могла претендовать на объяснение натуральных чисел. Она стала сосуществовать с арифметикой на равноправных началах.

Обратимся теперь к геометрии. На первый взгляд, может показаться, что здесь у теории множеств лучшие шансы, так как геометрические фигуры кажется естественным мыслить как множества точек. Но развитие оснований геометрии показало, что эту науку удобнее всего «водружать» не на аксиомы теории множеств, а непосредственно на геометрические аксиомы. В 1899 г. появилась ставшая давно классической книга Гильберта «Основания геометрии», наложившая отпечаток на все последующие исследования в области метаматематики. За прошедшие более чем 70 лет ни разу не возникало нужды пересматривать геометрическую концепцию Гильберта, поэтому можно считать, что проблема обоснования геометрии «закрыта».

Точка зрения Гильберта, победившая все другие, состоит в том, что геометрические объекты не рассматриваются как множества точек и вообще этим объектам не приписывается какая-либо «природа».

«Геометрия, так же как и арифметика, требует для своего построения только немногих простых основных положений. Эти основные положения называются *аксиомами* геометрии. . . Настоящее исследование представляет собою новую попытку установить для геометрии полную и возможно более простую систему аксиом и вывести из этих аксиом важнейшие геометрические теоремы так, чтобы при этом стало совершенно ясно значение как различных групп аксиом, так и следствий, получающихся из отдельных аксиом» ([21], стр. 55).

Такими словами Гильберт начинает свою книгу. Далее он дает определения основных объектов геометрии:

«Мы мыслим три... системы вещей: вещи первой системы мы называем точками... вещи второй системы мы называем прямыми... вещи третьей системы мы называем плоскостями... точки называются также элементами линейной геометрии, точки и прямые — элементами плоской геометрии, точки, прямые и плоскости — элементами пространственной геометрии или элементами пространства.

Мы мыслим точки, прямые и плоскости в определенных соотношениях и обозначаем эти соотношения различными словами, как-то: «лежать», «между», «конгруентный», «параллельный», «непрерывный». Точное и для математических целей полное описание этих соотношений достигается *аксиомами* геометрии» (там же, стр. 56).

Таким образом, принятое обоснование геометрии не пошло по пути использования теории множеств как более надежной базы, чем собственно геометрическая аксиоматика.

2. Теперь обсудим вопрос о постижимости понятия множества как «многого в едином» глубинной и «самой надежной» интуицией человека.

В рассматриваемый нами период — на рубеже двух столетий,— когда теоретико-множественное мышление, а с ним и онтологизация математических понятий достигли апогея, в качестве простых, непосредственно ясных и годных для использования в самых фундаментальных областях математики рассматривались множества всех множеств с таким-то свойством, множества, содержащие себя, и т. д. Можем ли мы сейчас поверить, что эти понятия могли тогда восприниматься как элементарные, так что, доходя до этих понятий, математик не имел больше никаких вопросов и недоумений и не нуждался в уточнениях определений? По нашему мнению, признать это невозможно, и непоколебимая вера в первичность множеств канторовского «менгенлере» была некоей любопытной формой проявления в конкретной научной теории идеалистической философской установки, которую мы назвали выше «математическим платонизмом». Ведь опровергнуть тезис об «интуитивной ясности» здесь легко было с помощью несложного самонаблюдения.

Возьмем хотя бы термин «множество, содержащее самого себя в качестве элемента». Не будем говорить о парадоксе Рассела, возникающем при рассмотрении всех таких множеств. Зададимся скромной задачей: представить себе хотя бы одно такое множество, убедиться, что такое понятие адаптирует к себе нашу интуицию, что последняя не отвергнет его, как нечто невозможное.

Когда кто-нибудь читает лекции по логике или пишет на эту тему книгу и хочет проиллюстрировать противоречия, возникающие в основаниях математики, он приводит обычно парадокс Рассела, а поскольку в последнем идет речь о множестве всех множеств, не содержащих себя самого (и, видимо, чувствуя, что интуиция неискушенного в «менгенлере» человека в этом месте должна быть озадачена), дает пример такого множества. Чаще всего приводятся три примера: «список всех списков» («каталог всех каталогов» и т. д.); «множество всех абстрактных понятий»; «множество всех множеств, описываемых семью русскими словами»[4]. Подвергая все эти три классических примера внимательному анализу, мы приходим к выводу, что им не может быть отведено места в нашем сознании как чему-то целостному, что они представляют собой нечто вроде миража, рассеивающегося при приближении.

Начнем со «списка всех списков». Содержит ли он сам себя? Вообразим этот список, так сказать, в его потенциальной реальности: это будет длинный лист бумаги или рулон, где будут перечислены *названия* всех существующих списков. Таким образом, элементами глобального списка будут не сами списки как физические объекты, а только *имена* списков. В числе прочих в нем будет находиться и собственное его имя, но не будет в нем *его самого*, то есть рулона или листа бумаги, в котором он реализован. Если уж проявлять строгость в том смысле, чтобы отличать множество от множества, единственным элементом которого оно является, то как же можно столь беззаботно отождествлять вещь с ее именем и, не делая никаких пояснений, переходить дальше. Разумеется, предположение о бесконечной длине спис-

---

[4] Вся соль в том, что в этом определении содержится как раз семь русских слов.

ка списков ничего в принципе не меняет. Значит существование такого объекта, который якобы содержит сам себя, в данном случае признается интуицией не потому, что ей доступны такие вещи, а, напротив, потому, что она усыплена правдоподобным по внешней форме словесным рассуждением, и читатель (а может быть и автор) доверился «умным людям» и не вдумался в существо дела.

Рассмотрим теперь «множество абстрактных понятий». Заметим предварительно, что всякое множество является абстрактным понятием. Если это сразу кажется неверным, то такая реакция лишь показывает, насколько невнимательными мы бываем именно в самых существенных вопросах. Когда в математической литературе вводится понятие множества, оно обычно иллюстрируется примерами. Приведем несколько таких пояснений, взятых из одного из наиболее фундаментальных учебников по математическому анализу и из принятого в Бельгии и во Франции школьного учебника.

В учебнике Л. Шварца мы читаем:

«*Множеством* называется совокупность некоторых объектов. Примеры: Множество учащихся одного выпуска,

множество точек плоскости. . .» (стр. 9)

В «Современной математике» Папи, в первом томе (для 6-го класса) написано:

«Примеры:

. . .

E3 Этот отряд солдат

E4 Этот класс учеников

E5 Эта пара обуви. . .» (стр. 1).

Ни тот, ни другой автор (и вообще ни один автор, которого нам приходилось читать) не подчеркивает, что множеством является *понятие* об учащихся одного выпуска или о роте солдат, ибо математика не изучает людей, а кроме того, если под множествами понимать не понятия, а физически существующие вещи, то нельзя было бы говорить об операциях над множествами. Например, объединить множества E3 и E4 из учебника Папи мы можем только в сознании — при таком объединении мы делаем операции (мысленные) над понятиями, а не бегаем за школьниками и солдатами, чтобы собрать их в одно помещение. Снова, как и в случае списка списков, неразличение *вещи* и ее *отражения* (там отражением было имя, здесь им является мысленное понятие или знак), возможно, в некоторых аспектах исследования несущественное, в других его аспектах приводит к возникновению иллюзий, ничего реального не отражающих. Согласно принципу одинаковой погрешности незачем делать вычисления до шестого знака, если исходные данные вычислены до третьего знака. Когда же поясняют теорию множеств, то в самом начале делают «погрешность», величину которой даже трудно оценить: смешивают объективно существующие предметы с их зашифровкой в сознании или в условном языке. Ясно, что после этого вся замечательная строгость рассуждений, которой славится математика, не имеет ни малейшего смысла.

Но вернемся к множеству абстрактных понятий. Поскольку, как мы сейчас выяснили, *всякое* множество есть абстрактное понятие (возможно, некоторые психологи скажут, что и всякое абстрактное понятие сводится к понятию какого-либо множества, но это нам сейчас неважно), то множество абстрактных понятий включает в себя множество всех множеств. Но таковое множество не может быть постигнуто интуицией, так как предположение о его существовании приводит к «парадоксу Кантора». Доказано, что множество, составленное из всех подмножеств данного множества, превосходит первое по мощности. Множество всех множеств включает в себя все свои подмножества, поэтому должно быть мощнее себя самого.

Наконец, о третьем примере. По замыслу конструкторов этого множества, оно должно содержать самого себя, поскольку описывается семью русскими словами. Но и в этом случае иллюзорность множества становится несомненной при самом легком размышлении. Вспомним основное канторовское определение множества: элементы должны быть хорошо различаемы нашей интуицией или нашей мыслью. Сейчас это требование часто выражают так: нужно иметь критерий, с помощью которого относительно каждого объекта можно судить, является ли он элементом данного множества или же не является. В рассматриваемом примере такого критерия, конечно, существовать не может, так как всякое множество можно описать разными способами и разным числом слов, поэтому надо договариваться об однозначном языке, а это уведет нас в бездну семантических проблем, которые значительно сложнее, чем даже математические проблемы. Если же не делать никаких оговорок о языке, то *любое* множество можно описать семью русскими словами, создав подходящий шифр.

Но оставим даже в стороне «множества, содержащие себя», и рассмотрим понятия, связанные с на самом деле воспринимаемыми нашей наглядно-содержательной интуицией множествами. Трудно отказать математику в том, что он достаточно ясно воспринимает своей интуицией, скажем, множество всех целых чисел или множество всех окружностей данной плоскости как нечто целостное и определенное.

Действительно, факты сознания такого рода существуют и каждый из нас знаком с ними по своему личному опыту. Несомненно, эти элементы сознания играют громадную роль в математическом творчестве и в изучении математики. Бесспорно, что такие явления психики, наряду с другими явлениями, составляют исходный материал не только математического мышления, но и мышления вообще. Вглядимся пристальнее в природу этих элементов. Самым правильным подходом здесь будет изучение показаний самих математиков, особенно если эти математики имеют научные заслуги и известны своей способностью к самонаблюдению.

В этом смысле для нас большую ценность представляют показания Ж. Адамара, который известен не только значительными математическими результатами, но и своими психологическими исследованиями. В одном из таких исследований Адамар анализирует работу своего сознания в тот момент, когда он мысленно доказывает теорему о том, что множество простых чисел бесконечно.

«Я повторяю последовательные этапы классического доказательства этой теоремы, записывая рядом с каждым из них соответствующий образ, возникающий в моем мозгу. Например, нам нужно доказать, что существует простое число, большее 11:

Этапы доказательства	Мои умственные образы
Я рассматриваю все простые числа от 2 до 11, т. е. 2, 3, 5, 7, 11.	Я вижу неопределенную массу.

Я образую их произведение $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11 = N$	Так как N число достаточно большое, я представляю себе точку, достаточно далеко удаленную от этой массы.
Я прибавляю к этому произведению единицу и получаю $N+1$	Я вижу вторую точку, недалеко от первой.
Это число, если не является простым, должно иметь простой делитель, который и является искомым.	Я вижу некоторое место, расположенное между неопределенной массой и первой точкой» ([22], стр. 73).

Процесс математического размышления, столь хорошо описанный Ж. Адамаром, несомненно, знаком многим людям, которые размышляли над теоремами, всегда относящимися к каким-то множествам объектов. Метод размышления о множествах как о неопределенных пятнах является широчайше распространенным (пожалуй, всякий другой метод нужно считать исключением). Диаграммы Эйлера — Венна, на которых множества изображаются кругами или эллипсами, а их элементы — точками или пятнышками, являются самым апробированным и эффективным методическим приемом объяснения теоретико-множественных понятий, лучше всего помогают в доказательстве теорем и постановке проблем. Вряд ли можно сомневаться в том, что, скажем, теорема Кантора — Бернштейна о том, что если имеется взаимно-однозначное отображение множества A на подмножество множества B и такое же отображение B на подмножество A, то A и B равномощны, вчерне была доказана с помощью нарисованных на бумаге и возникающих в воображении «пятен», а потом уже была оформлена строго логически.

А. В. Славин в связи с этим пишет: «Иконическая модель, важнейшая функция которой заключается в наглядном представлении чувственно-невоспринимаемых явлений, есть одна из наиболее широко распространенных форм, синтезирующих изобразительные и неизобразительные компоненты. Внимание читателя уже обращалось на то, что, вводя математический аппарат в теоретическую физику, нельзя предполагать, будто специальные знаки и уравнения совершенно избавляют от необходимости обращаться к языку наглядных образов, связывающему нашу мысль с материальными предметами и их отношениями» ([23], стр. 207—208).

Об огромном значении зрительного образа в работе мышления было известно давно, так как об этом свидетельствуют простейшие самонаблюдения и воспоминания о ходе собственной мысли. Однако до возникновения экспериментальной психологии, применяющей в своих исследованиях лабораторную технику, трудно было выявить подлинное место сенсо-моторного, в частности, зрительного механизма в деятельности интеллекта, и проблема обсуждалась лишь на уровне общефилософских дискуссий. На рубеже XIX и XX вв. стали выдвигаться уже опирающиеся на экспериментальный материал обобщения. Еще Джемс высказал идею о том, что нельзя говорить об отдельном, изолированном ощущении вне общего «потока сознания» (именно Джемс ввел этот термин в обиход), складывающегося из непрерывной смены довольно сложных и трудноуловимых состояний психики. Подобные мысли высказывал и Бергсон, хотя у него, пожалуй, более важная роль, чем зрительному восприятию, отводилась внутреннему ощущению дискретного времени. Важный вклад в сознание связи между зрительным аппаратом человека и его мышлением внес М. Вертгеймер, который первым ясно сформулировал идею об уникальных организующих свойствах сенсорных механизмов. Именно после работ Вертгеймера (1912 и позже) начало складываться «современное представление о том, что фактически в воспринятом образе нет ничего, что свидетельствовало бы о его точности или «подлинности», и что все воспринятые образы представляют собой перекодированные варианты входного сигнала, которые в принципе не могут быть абсолютно идентичны ему» ([24], стр. 25).

Конечно, нужно учитывать, что сам Вертгеймер давал собственным экспериментальным результатам идеалистическую трактовку и тем самым в значительной степени повлиял на отрицательное отношение к своим работам со стороны материалистически мыслящих физиологов и психологов. Мистические теории гештальтистов о «полях» психики, обеспечивающих целостность восприятия, не могли содействовать популяризации полученного материала. И все же, если брать чисто фактологический аспект исследований Вертгеймера и его последователей, то можно думать, что они в какой-то степени конкретизировали и тем самым подкрепили догадку об активности восприятия.

Активность эта проявляется, например, в мобилизации зрительных элементов психики при исследовании теоретико-множественных проблем. С помощью диаграмм Эйлера — Венна весьма удобно продумывать операции и отношения — включение, пересечение множеств, объединение множеств; конъюнкцию, дизъюнкцию и импликацию высказываний и т. д. Интересно отметить, что для восприятия операций и отношений нужны образы неотчетливой формы (пятна), так как они не должны толкать мышление на путь изучения конкретных объектов, а должны моделировать, представлять в сознании лишь общую идею отношения. Снова процитируем Адамара:

«Итак, если я должен думать о каком-нибудь силлогизме, я о нем думаю не словами — слова мне не позволили бы понять, правилен ли силлогизм или ложен,— а с помощью интерпретации, аналогичной интерпретации Эйлера, пользуясь, однако, не кругами, а какими-то пятнами неопределенной формы, так как для того, чтобы представлять себе эти пятна, находящимися одно внутри или вне другого, я не должен их видеть имеющими строго определенную форму» ([22], стр. 73). Дальше Адамар снова возвращается к этому механизму своего мышления: «можно легко понять, почему мне мог быть необходим механизм такого типа. . . Он мне необходим. . . , чтобы не сбить с пути» (там же, стр. 74).

Наконец, приведем место из письма Альберта Эйнштейна, присланного Адамару в ответ на вопрос последнего о роли слов и неречевых элементов в мышлении.

«Элементы, о которых я только что говорил, у меня бывают обычно визуального или изредка двигательного типа. Слова или другие условные знаки приходится подыскивать (с трудом) только во вторичной стадии, когда эта игра ассоциаций дала некоторый результат, и может быть при желании воспроизведена.

Из того, что я сказал, ясно, что игра в элементы нацелена на аналогию с некоторыми разыскиваемыми логическими связями» (там же, стр. 80).

Известно, какую колоссальную роль играет в восприятии и обработке информации зрительный канал. Многие утверждают, что по нему приходит к нам большая часть всей информации о внешнем мире. Об этом писал еще Леонардо да Винчи. Современные ученые часто говорят, что среди органов чувств, дающих человеку информацию об окружающей среде, глаз должен быть поставлен на первое место, что картина окружающего мира отражается в сознании преимущественно через зрение. Конечно, точный вклад того или иного канала измерить трудно, однако несомненно, что «зрительный тип» восприятия чрезвычайно распространен. Но в таком случае было бы удивительно, если бы наше сознание не использовало визуальные элементы *для обработки информации после восприятия*, для классификации и систематизации воспринятого, для наложения на воспринятый материал определенных структур, создающих информационную разгрузку.

Методологическое положение о том, что не существует бесструктурного бытия и бесструктурного сознания, оформлено семиотикой в конкретное утверждение: преодоление противопоставления чувственное — понятийное в известной мере осуществляется при переходе на уровень знаков. Именно знаки выражают одно посредством другого. Лингвист и психолог Р. Якобсон так оценивает место знаков в нашей психической деятельности:

«Знаки — необходимая поддержка для мысли. Для мысли, обращенной к обществу (стадия сообщения), и для мысли, находящейся в процессе подготовки к этому (стадия формулировки), наиболее обычной системой знаков является собственно речь; но внутренняя мысль, особенно когда это мысль творческая, охотно использует другие системы знаков, более гибкие и менее стандартизованные, чем речь, и которые оставляют больше свободы, подвижности творческой мысли. . .» ([22], стр. 92).

Приведенная нами цитата нуждается в комментарии. Некоторые из представителей семиотики испытали влияние логического неопозитивизма, призывающего оставить «псевдопроблемы» и заняться уточнением языка. Они повторяют заблуждение неопозитивизма, будто научные проблемы можно решать на формальном (в случае семиотики — на знаковом) уровне, не переходя на содержательный уровень, поскольку непонятно, что он собой представляет. Подобная позиция отметает живое развитие познания, так как формализованные методы во многих сферах исследования становятся недостаточными и не удовлетворяют ученых. «Выздоровление» от неопозитивистских концепций наблюдается сейчас даже у многих из тех зарубежных ученых, которые испытали на себе позитивистское влияние. Конечно, многие конкретные результаты семиотического подхода, если видеть за ними содержательную сторону, оказываются весьма ценными для материалистической науки.

В решении математических проблем визуальные образы и представления участвуют постоянно. В этой связи поучительно ознакомиться с отчетом известного мнемониста, описанного в работе А. Лурия «Маленькая книжка о большой памяти», который фигурирует в ней под первой буквой фамилии — «Ш». Зрительный тип мышления Ш. был выражен чрезвычайно ярко, поэтому все характерные особенности «внутреннего» использования визуальных образов, не всегда уловимые у большинства людей, у него прослеживаются с большой полнотой. Вот рассказ Ш. о том, как он решал известную арифметическую «головоломку»:

Дается задача: «Мудрец и путешественник сидели на лужайке. У путешественника было 2 хлебца, у мудреца — 3. К ним подошел прохожий, они предложили ему покушать и поделили поровну хлеб на 3 части. После еды прохожий, поблагодарив за угощение, дал им 10 яиц. Как мудрец и путешественник поделили между собою полученные 10 яиц?»

«. . .У меня возникают образы: двое (*A* и *B*) сидят на лужайке. К ним присоединяется прохожий (*C*). Вся группа располагается треугольником. Между ними появляются хлебцы. Люди исчезают и заменяются буквами *A*, *B*, *C*, а неправильной формы хлебцы — продолговатыми дощечками. Дощечки, принадлежащие *A*,— серого цвета, принадлежащие *B*,— белые. Двумя горизонтальными линиями разрезаю дощечки на три равные группы кубиков. Получается следующая картина:

За 5 съеденных кубиков *C* дал 10 яиц. У *A* — 6 кубиков, из которых он сам съел первый вертикальный ряд и 2 кубика из второго ряда, *B* — со своей стороны,— с такой же конфигурацией съел столько же» ([25], стр. 59).

Здесь любопытно то обстоятельство, что Ш., обладавший чудесной способностью представлять себе предметы и людей во всех деталях, заменил образы участников трапезы буквами, то есть сделал свои визуальные знаки максимально неопределенными, в точном соответствии с принципом, подмеченным Адамаром. Выполнить эту операцию Ш. было довольно трудно: он постоянно жаловался на то, что именно конкретность образов мешает ему думать, сбивает с толку логику. Вот как протекал у него, например, процесс усвоения простейшего физического закона, излагаемого в школьном учебнике:

«Я читаю Ш. простое правило — каждый школьник воспринимает его без труда.

«*Если над сосудом находится углекислый газ, то, чем выше будет его давление, тем больше его растворится в воде*». Казалось бы, какие подводные камни в этом отвлеченном, но совсем несложном тексте?

«Когда вы мне дали эту фразу, я сразу же увидел... Вот сосуд..., вот тут расположено это «над»... Я вижу линию, над линией я вижу облачко, оно идет вверх... это газ, вот я читаю дальше... Чем выше его давление..., газ поднимется..., а потом здесь что-то плотное... Это «его давление». Но оно выше..., давление поднимается вверх... «тем больше его растворится в воде»..., вода стала тяжелая..., а газ? А «выше давление» — оно все ушло вверх... Ну, как, если «выше давление» — как же он может раствориться в воде?» (там же, стр. 71).

Это замечательное описание проливает, как мы полагаем, свет на то, почему у большинства математиков возникает необходимость в использовании *неопределенных* визуальных образов в своей мыслительной работе и блестяще подтверждает точку зрения Адамара на эту проблему. Как правило, математика интересуют *весьма общие отношения*, *инварианты*, а не частные, конкретные связи и формы, то есть *универсальные структурные элементы*. Особенно настойчиво эта тенденция математики начала проявляться как раз во второй половине XIX в., когда были открыты инварианты квадратичных форм, выработано понятие группы и, наконец, провозглашена «Эрлангенская программа» Клейна, объявлявшая геометрию наукой об инвариантах различных групп движения. Развиваясь в этом направлении, математическая наука все меньше занималась отношениями данных конкретных единичных объектов (скажем, взаимоотношениями точки и прямой, поглощавшими столько внимания классической аналитической геометрии). Естественно, что и мышление математиков перестраивалось в связи с этим, адаптируясь к новым проблемам, что в нем все чаще стали фигурировать «расплывчатые» внутренние образы, идеально представляющие *общие схемы* отношений и дававшие сознанию отвлечься от универсалий и переключиться на частности, подобно тому, как это делало сознание Ш. Одним из первых документально зарегистрированных использований расплывчатых зрительных образов было, вероятно, употребление диаграмм Л. Эйлером в его «Письмах к немецкой принцессе», в которых он объясняет свойства силлогизмов, то есть весьма общие структурные отношения. Эти диаграммы иногда считают революцией в математической идеографии, подготовившей развитие теории множеств и математической логики. Метод Эйлера получил наибольшее развитие и сыграл большую роль как раз во второй половине XIX в.

Активное включение «расплывчатых пятен» в инструментарий мыслительной деятельности математиков показывает, что интеллект обладает свойством приспосабливать свой внутренний материал, предназначенный природой для одних целей, к другим целям. Не солидаризуясь с теоретическими концепциями гештальтпсихологов, мы в некотором смысле согласны с ними в том, что наше зрительное восприятие обладает тенденцией формировать в сознании «целостности». Атомарное, мозаичное воспроизведение объектов этим нашим внутренним механизмом невозможно. Многочисленные «иллюзии зрения», хорошо теперь изученные и систематизированные, дают дополнительное доказательство того, что зрительное восприятие стремится к синтезу, к организации частей в единую целостную сущность, которая значительно легче (с точки зрения информационной нагрузки) постигается сознанием, чем сумма отдельных составляющих. Достаточно вспомнить «схватывание» нашим сознанием известной фигуры то как вазы, то как пары профилей — в обоих случаях мы создаем подходящий образ. О том же свидетельствует наше желание увидеть в пятнах на потолке или в очертаниях облаков фигуры животных или людские головы, то есть накладывать на воспринимаемое искусственную структуру, которая в силу особенностей нашей психики представляется нам единой и неразложимой, то есть элементарной. В случае же, когда сознание проводит обработку современных математических проблем, оно вынуждено пользоваться менее конкретными визуальными знаками. Рисуя диаграмму Эйлера — Венна, мы чертим круги или эллипсы, так как более сложная конфигурация заставила бы глаз искать в ней подходящий гештальт, на который можно было бы опереться в восприятии, и это отвлекло бы от усмотрения отношений. Таким образом, *используя нашу врожденную способность оперировать в мышлении зрительными образами, математики развивают в себе дополнительное умение создавать визуальные образы, достаточно неопределенные для того, чтобы не сбиться на изучение частных свойств, и достаточно цельные и определенные, чтобы охватить с их помощью конкретные свойства структуры.*

Заключая это важное для нас рассмотрение, мы можем сказать, что *одним из определяющих моментов в некритическом принятии канторовской теории множеств и почти единодушном согласии, что она может и должна служить логической базой всей математики, была выработанная к концу XIX в. особенность мышления математиков, заключавшаяся в том, что в их работе постоянно использовались при осмыслении структурных отношений цельные зрительные образы неопределенной формы, в точности соответствующие пониманию множества как «многого в едином»*. Поскольку эти образы были *зрительными*, они связывались с геометрией; поскольку с их помощью представлялись *операции и отношения*, они связывались с алгеброй и арифметикой, поэтому на теоретико-множественные методы и возлагались те надежды преодоления АГ-конфликта, о которых говорил Клейну Кантор. Именно поэтому, несмотря на повсеместную дискредитацию идеи «предустановленной гармонии», онтологизация неконструктивных понятий оказалась в математике столь живучей; был получен ряд конкретных результатов, относящихся к характеристике множеств, и тем самым было создано основание для перевода этого понятия из разряда интуитивных в разряд точных. Мы имеем в виду разработанную Кантором классификацию множеств по их мощности, по кардинальным числам. Множества обрели численную меру и стали поэтому полноправными математическими объектами, а не только подсобными понятиями. Это присвоение множеству статуса строгого понятия, бесспорно, чрезвычайно сильно содействовало последней и самой яркой во всей истории науки вспышке математического платонизма, так как визуальные гештальты, с которыми вольно или невольно ассоциировался в сознании всякого математика термин «множество», ощущаются нами ка «снимки» или «копии» реально существующих объектов Но коль скоро множества связываются в сознании с реальными группами тел (как раз это и сквозит во все «определениях» множеств, даваемых до сего дня в школьных и вузовских учебниках), выступающими как едино целое, то и все другие математические объекты, которые как тогда считалось, могут быть сведены к множества и выражены в терминах множеств, также начинают автоматически онтологизироваться.

Главным достижением Кантора в этой области (он имеет громадные заслуги и в других отделах математики достаточно упомянуть лишь введенное им понятие равномерной непрерывности функции) было установление неравномощности счетного множества и континуума действительных чисел, выполненное с помощью знаменитого «диагонального процесса», о котором нам предстоит не раз говорить. Воспроизведем вкратце этот результат.

Кантор начал с естественного вопроса: нельзя ли установить отношение порядка для бесконечных множеств причем такое, которое было бы естественным обобщением отношения порядка для конечных множеств. Оказалось, что имеется способ решения этой проблемы. Основой при установлении отношения «следует за» может служит операция взаимно-однозначного отображения (биекция) двух множеств.

Вот сущность предварительных определений Кантора. 1) Если между множествами A и B можно установить биекцию, они считаются равномощными и ни одно из них не следует за другим. 2) Если можно установить биекцию между A и подмножеством B, но **невозможно установить биекцию** между A и **всем** B, то B (по мощности) следует за A.

С помощью уже упомянутой теоремы Кантора — Бернштейна удалось показать, что определяемое так «следование за» есть отношение порядка, т. е. оно транзитивно и антисимметрично, а также является обобщением отношения порядка для конечных множеств, где из двух множеств то считается «следующим за», в котором больше элементов. После таких уточнений терминов сразу же встал вопрос: а существуют ли различные по мощности бесконечные множества, не одна ли имеется бесконечность?

Ответ дает теорема о том, что множество действительных чисел является более мощным, чем множество натуральных чисел. Приведем доказательство этой исторической теоремы, сделав предварительно два упрощающих замечания. Во-первых, мы будем рассматривать действительные числа, только находящиеся между нулем и единицей (интуитивно ясно, что для всех действительных чисел сказанное будет тем более верно), во-вторых, примем без доказательства тот факт (также интуитивно ясный), что всякое действительное число из рассматриваемого интервала может быть записано двоичной дробью с нулевой характеристикой и бесконечно длинной мантиссой (возможно, начиная с некоторого момента в мантиссе начнутся нули; в этом случае, разумеется, число будет рациональным).

Теперь начнем доказывать теорему от противного. Предположим, что установлена биекция между натуральным рядом и нашим множеством действительных чисел, т. е. произведена «нумерация» действительных чисел следующего типа:

$$\begin{array}{ll}
\text{№ } 1: & 0,\ A_{11}\ A_{12}\ A_{13}\ldots \\
\text{№ } 2: & 0,\ A_{21}\ A_{22}\ A_{23}\ldots \\
\text{№ } 3: & 0,\ A_{31}\ A_{32}\ A_{33}\ldots \\
\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$

Здесь каждое из чисел A либо нуль, либо единица. Рассмотрим теперь следующее число: $0, A_{11}A_{22}A_{33}\ \ldots$ (диагональ таблицы), а затем изменим каждую из его двоичных цифр на противоположную, т. е. образуем число $0, B_1B_2B_3\ \ldots$, где $B_i = 0$, если $A_{ii} = 1$ и $B_i = 1$, если $A_{ii} = 0$. Очевидно, последнее число не совпадает ни с одним из занумерованных нами чисел, так как от каждого из них отличается хотя бы одним двоичным знаком. Но мы предположили, что нами была произведена нумерация *всех* действительных чисел. Это противоречие и доказывает теорему.

С другой стороны, натуральный ряд может быть легко отображен биективно на часть множества действительных чисел, расположенных между нулем и единицей,— например, на множество «обратных натуральных чисел» 1, 1/2, 1/3, 1/4... Согласно определению отношения порядка для множеств по Кантору получается, что множество действительных чисел «богаче» множества нату ральных чисел, то есть континуум мощнее счетного мно жества.

Воспроизведенное сейчас осуществление диагонально процедуры, приводящей к возникновению последователь ности, не входящей в пересчет, как выяснилось много поз же Кантора, может стать отправной точкой для соверше но другого заключения. Таким образом, чисто матема тический аспект проблемы неразрывно связан с философ ским ее аспектом. Другое (не канторовское) заключени может сделать лишь тот математик, который категорическ отказывается от признания актуальной бесконечности лишает ее какого бы то ни было онтологического стату са и считает лишь артефактом интуиции, главным образо зрительной и двигательной, и отказывается понимат множество как «многое в едином».

В дальнейшем мы увидим, какого рода заключени делает из диагонального процесса представитель конст руктивной школы математики (см. стр. 166).

Только разобравшись в нейрофизиологических и пси хологических механизмах, накладывающих на наше ос воение мира определенную печать, можно было рассчи тывать «вычесть» из картины мира элементы, привносимы мозговыми структурами, и получить более объективну информацию о том, что находится вне нас. Короче говоря нужно было сильно продвинуть исследование процессо познания, опираясь на новейшие данные физиологии психологии, семиотики и других смежных наук. Это важный процесс развития начался вместе с двадцаты столетием.

Глава 2

О БОРЬБЕ МАТЕРИАЛИЗМА И ИДЕАЛИЗМА В МЕТОДОЛОГИИ НАУКИ НА РУБЕЖЕ XIX и XX СТОЛЕТИЙ

История науки показывает нам, что почти все серьезные явления в развитии человеческого познания назревают постепенно и обусловливаются многими предварительными факторами и событиями. Поэтому деление истории той или иной науки на этапы весьма условно, незаметно для большинства современников, начало одного этапа бывает обычно погружено в эпоху наибольшего внешнего расцвета предыдущего этапа. Так произошло и на этот раз. В то самое время, когда теория множеств достигла наибольшего триумфа и приобретала черты господствующей в основаниях математики дисциплины, против нее начали выдвигаться возражения, а главное, созревали взгляды, которые привели постепенно к значительной дискредитации «наивной» теории множеств и к необходимости ее замены более строгими построениями. Мы имеем в виду не внутриматематические взгляды, обладающие известной инерцией, а общенаучные взгляды, ежедневно порождаемые исследовательской практикой в самых разных областях знания. На рубеже XIX и XX вв. эта практика неизмеримо расширилась и предъявила возросшие требования к метатеории. Наметилось беспокоящее ученых несоответствие между прежними гносеологическими принципами, несущими на себе следы еще средневекового мышления, и новыми научными фактами. Это расхождение явилось одним из гносеологических источников «кризиса» оснований математики.

Вот как представляли себе сложившуюся ситуацию представители «точного» знания тех лет.

Г. Герц писал:

«Ближайшая и в определенном смысле важнейшая задача нашего сознательного изучения природы состоит в том, чтобы найти возможность предвидеть будущий опыт и в соответствии с этим регулировать наши действия в настоящем. Основой для решения этой задачи познания при всех обстоятельствах служит предшествующий опыт, полученный из случайных наблюдений или из специальных экспериментов.

Метод, которым мы всегда пользуемся при выводе будущего из прошедшего, чтобы достигнуть этого предвидения, состоит в следующем: мы создаем себе внутренние образы или символы внешних предметов, причем создаем их такими, чтобы логически необходимые следствия этих представлений в свою очередь были образами естественно необходимых следствий отображенных предметов. Чтобы это требование вообще было выполнимым, должно существовать некоторое соответствие между природой и нашим умом. Опыт учит нас, что это требование выполнимо и что такое соответствие существует в действительности» ([26], стр. 13).

Далее Герц писал:

«Первоначально в механике понимали под «принципом» в строгом смысле каждое высказывание, которое нельзя было в свою очередь привести к другим положениям самой же механики, но которое можно было рассматривать как непосредственный результат, вытекающий из других источников познания» (там же, стр. 15).

Затем автор разъясняет, как надо понимать термин «научный принцип» с новой точки зрения.

«...Можно было бы еще утверждать: немыслимо, чтобы принцип Гамильтона или другой принцип аналогичного характера представлял собой фактически основной закон механики и вместе с тем основной закон природы; ибо предпосылкой основного закона являются простота и ясность, в то время как принцип Гамильтона, если его детально проанализировать, представляет собой чрезвычайно сложное высказывание. Он не только ставит происходящее в настоящий момент движение в зависимость от последствий, которые могут выявляться в будущем, предполагая существование у неживой природы намерений, но, что еще хуже, он предполагает существование у природы бессмысленных намерений. Ибо интеграл, минимум которого требует принцип Гамильтона, не имеет простого физического значения, кроме того, представляется непонятной целью природы приведение математического выражения к минимуму или его вариации к нулю.

Обычный ответ, который современная физика всегда готова дать на подобного рода нападки, заключается в том, что предпосылки, на которых основываются эти рассмотрения, имеют метафизическое происхождение, но физика отказалась от них и не считает больше своей обязанностью удовлетворять требованиям метафизики. Она не придает больше никакого значения соображениям, которые в свое время высказывались метафизиками в пользу принципов, указывающих на цель в природе.

...Теперь мы вправе утверждать, что, если наши картины хорошо приспособлены к вещам, действительные отношения между вещами должны выражаться простыми отношениями между образами... Наше требование простоты касается, следовательно, не природы, а картин, которые мы создаем себе о ней» (там же, стр. 38—39).

Таким образом, хотя Герц и признает существование «некоторого соответствия» между нашим умом и природой, он допускает, что это соответствие может быть весьма косвенным, идущим через искусственные вспомогательные построения вроде принципа Гамильтона, который с прежней точки зрения никак нельзя было бы рассматривать как закон природы. Теперь, по мнению Герца, это делать можно — не потому, что такие построения стали более ясными для нашей интуиции, а потому, что не надо более требовать от интуиции способности непосредственно проникать в сущность природы. Любая, сколь угодно странная на вид теория, если она удовлетворительно описывает поведение реальных тел, должна приниматься нами как объяснение.

С мнением Герца интересно сопоставить взгляды Э. Маха — физика, проявлявшего интерес к психологии научного творчества. Мах настойчиво пытался обобщить некоторые методы, применявшиеся в исследовательской работе, на все человеческое познание в целом.

«Моя точка зрения устраняет все метафизические вопросы,— не побоялся провозгласить этот ученый,— как те, которые признаются неразрешимыми только в настоящее время, так и те, которые признаются неразрешимыми вообще и навсегда. Все, что мы можем знать о мире, выражается в наших ощущениях, которые могут быть вполне освобождены от индивидуальных влияний наблюдателей. Все, что мы можем знать, получается разрешением задач математического типа — установлением функциональной зависимости между чувственными элементами. Знанием этой зависимости исчерпывается все наше знание действительности» ([27], стр. 110). Это — типично «махистский» ход мысли, включая столь любимые Махом «чувственные элементы». И в нем мы видим определенное сходство с тем, о чем писал Герц. Вместо добротного, фундаментального познания мира, в возможности которого были убеждены многие поколения философов и естествоиспытателей, Мах, как и Герц, предлагает некий суррогат познания — описание функциональных зависимостей. Однако Мах идет дальше Герца и не утверждает, что хорошее описание такого типа в принципе возможно — даже о «некотором» соответствии между умом и природой речи уже не идет. Самое большее, что мы можем сделать,— это пытаться найти указа́нное функциональное соответствие между явлениями.

Темы, поднятые профессиональными естествоиспытателями, подхватили профессиональные философы. Вот что писал в своей книге «Гуманизм» известный в то время философ Ф. К. С. Шиллер:

«Мы принимаем фундаментальное допущение науки. что существуют универсальные и вечные законы, т. е. что индивидуальными свойствами вещей, как и местными и временными обстоятельствами, в которых они находятся, можно пренебрегать — не потому, что мы уверены в теоретической безукоризненности такого пренебрежения, а потому, что видим в нем практические удобства. **Мы хотим научиться предсказывать будущее поведение вещей, чтобы приспосабливать к нему собственное поведение**» ([28], стр. 103—104).

Выделенная Шиллером фраза — почти точное повторение основной методологической установки Герца. Что же касается существования универсальных (и, конечно, постижимых человеческим умом) законов, то о них Шиллер ничего с уверенностью сказать не может. Это роднит его позицию с позицией Маха.

Т. Беер, один из наиболее активных популяризаторов науки начала XX в., в связи с поисками «универсальных законов» рисовал следующую безотрадную картину:

«Было что-то недостойное мыслящих существ в этой глупой бесплодной отчаянной возне с пустыми мнимыми проблемами, столь дорогими для людей слабых, как доро го для них все, что оправдывает их существование: адепты этих проблем, потерявшие в конце концов последний остаток разума, подобно жертвам увлечения идеей «перпетуум мобиле», достойны не сожаления, а насмешки: они напоминают глупого голубя, который, оставив цветущий сад, без конца бросается на мнимые цветы, нарисованные на бумажных обоях.

У громадного большинства естествоиспытателей в конце концов пропал всякий интерес к философии, не перестающей все снова и снова погружаться в самые бесплодные и бессмысленные мудрствования» ([27], стр. 24).

Позже Беер вновь возвращается к теме «универсальных законов».

«Тысячелетиями существовал онтологический предрассудок, что только то, что абсолютно, физически реально... Наоборот, наиболее прогрессивные естествоиспытатели конца XIX столетия не признают ничего абсолютного..., не мудрствуют о последних причинах» (там же, стр. 39).

Сопоставляя все эти высказывания, легко уловить в них нечто общее, что как раз и отражает сущность интересующей нас здесь тенденции. Кратко ее можно охарактеризовать как отказ от господствующего прежде убеждения в принципиальной возможности постижения окончательных законов, управляющих всем миром, то есть возможности отыскать универсальный и простой ключ, открывающий дорогу к познанию Вселенной как целого и всех ее частей в отдельности. Говоря еще короче, можно назвать эту тенденцию *отказом от идеи предустановленной гармонии между человеческим разумом и реальным миром.*

Тот факт, что именно эта философская линия являлась определяющей в становлении многих школ конца прошлого — начала нынешнего века, может быть подтвержден многочисленными цитатами из сочинений того времени. Почти каждая статья, посвященная методологии науки, начиналась тогда выпадами против веры в абсолюты, против бессмысленных поисков универсального ключа, против дикарской веры в первопричины и т. д., после чего следовали конкретные предложения, как же следует выходить из положения, оказавшегося столь неблагоприятным.

Нужно отметить, что если специалисты в конкретных областях знания подходили к гносеологическим неурядицам как к отрицательному явлению и стремились большей частью преодолеть трудности, то многие философы заняли совершенно другую позицию и объявили кризис нормальным явлением. Именно такую точку зрения мы имели в только что приведенных цитатах Шиллера и Беера. Стремление «узаконить» агностицизм, возродить скептические взгляды на возможность познания мира, придать научным теориям видимость субъективных конструкций диктовалось, разумеется, «социальным заказом» со стороны терявшего уверенность в себе господствующего класса капиталистического общества. Но именно в научном материале того времени многие философы находили ценную для себя аргументацию. Конечно, мы должны помнить, что одни из этих философов были откровенными пропагандистами буржуазной идеологии, а другие искренне стремились к истине. В последнем случае в их сочинениях, наряду с заблуждениями. содержатся интересные мысли, нашедшие впоследствии разработку с диалектико-материалистических позиций.

Честным и глубоким мыслителем был, например, Ч. Пирс, внесший солидный вклад в математическую логику. Отметим, что прагматизм как философское направление считает Пирса своим создателем. Во всяком случае, система взглядов У. Джемса, на самом деле, не сложилась бы такой, какой мы ее знаем, если бы не сильнейшее впечатление, произведенное на Джемса «Принципом Пирса». Этот принцип гласит:

«Рассмотри, какие эффекты, могущие предположительно иметь практическое значение, может вызвать объект твоего понятия; понятие об этих эффектах и исчерпает тогда понятие об объекте».

Несмотря на стилистическую тяжеловесность, эту фразу можно было бы назвать очень четкой, если бы в ней не употреблялись слова, которые можно трактовать по-разному. Мы говорим, разумеется, о словах «практическое значение», которые очень растяжимы. В зависимости от того, что понимать под «эффектами, имеющими предположительно практическое значение», можно истолковывать «принцип Пирса» совершенно по-разному. Знакомство с другими идеями Пирса и его вера в науку, в частности в математику и логику, приводит нас к убеждению, что «practical bearings» он понимал в широком смысле, включая в понятие и такие аспекты, как «вспомогательное значение для построения теории». В этой трактовке практическое значение имеет любое научное понятие, правильно отражающее действительность.

Джемс истолковал термин «practical bearings» в узком смысле. Это и было, видимо, причиной его последующего раскола с Пирсом. Такое толкование обязано не недоразумению, не ошибке — Джемс *захотел* так «прочитать» тезис Пирса, поскольку ему нужно было дополнить позитивной частью свой слишком насыщенный негативными положениями плюрализм, и он не увидел здесь такой позитивной программы.

Чтобы понять сущность плюрализма, лучше всего ознакомиться с некоторыми принципиально важными высказываниями самого Джемса, которые он часто повторяет в своих работах в различной, но всегда достаточно ясной формулировке.

Во вступлении к своему главному философскому сочинению Джемс пишет:

«К счастью, наша эпоха, по-видимому, опять становится философской... Слегка похоже на то, как будто старинный английский эмпиризм, который в течение столь продолжительного времени был вытеснен у нас из моды более благородно звучащими германскими формулами, оперился снова и готовится взлететь выше прежнего» ([14], стр. 1).

Для Джемса «германские формулы», то есть цельные философские системы Гегеля, Фихте и т. д.,— не что иное, как пустословие, спекуляция, праздное мудрствование. Философия начинается там, где начинается скептицизм по отношению к «формулам» и где доверяют только непосредственным восприятиям. Немецкие умствования Джемс называет еще «рационализмом» и «порочным интеллектуализмом». Вот его разъяснения по поводу этих терминов:

«Люди так уже созданы, что они предпочитают верить в рациональный мир и жить в рациональном мире. Но рациональное имеет, по крайней мере, четыре измерения: интеллектуальное, эстетическое, моральное и практическое; а найти мир рациональный в наивысшей степени *одновременно во всех этих отношениях* — дело нелегкое. С интеллектуальной точки зрения, мир механического материализма — самый рациональный мир, потому что его явления подвергаются нами математическому вычислению. Но механический мир безобразен, как безобразна арифметика, и не морален. С моральной точки зрения мир атеизма в достаточной степени рационален, но зато он полон интеллектуальных несовершенств. В свою очередь, мир практических сделок, столь рациональный в глазах политика, военного или человека, у которого преобладают деловые способности, так, что они никогда не подали бы голоса за изменение характера этого мира, иррационален для морального или артистического темперамента» (там же, стр. 62—63).

Возвратившись дальше к этой теме, Джемс предлагает выход из положения:

«Выход... состоит, по-видимому, в том, чтобы открыто признать форму всего целого и формы каждого единичного за два отличных друг от друга порядка свидетелей и присвоить каждому низшему свидетелю знание только своего собственного «содержания», а высшему свидетелю — познание всех низших свидетелей, познание их целого содержания, сложенного вместе, познание их отношений друг к другу и познание того, в какой степени каждому из них присуще незнание» (там же, стр. 110).

Этот выход по Джемсу есть плюрализм. Он сродни *эмпиризму*, в то время как *монизм* тяготеет к рационализму:

«С точки зрения монизма — мир не собрание фактов, но один великий все содержащий факт, вне которого нет ничего: ничто — его единственная альтернатива. Когда монизм имеет идеалистический характер, то этот всеобъемлющий факт представляется как всеобъемлющий абсолютный дух, который создает частные факты тем, что мыслит их, все равно как мы создаем предметы во сне, грезя о них, или персонажей в романе, воображая их» (там же, стр. 20).

Монизм, рационализм и порочный интеллектуализм отчуждают Вселенную от человека, тогда как плюрализм и эмпиризм приближают ее:

«Я существо ограниченное раз и навсегда, и все категории моей симпатии тесно связаны с ограниченным миром как таковым, и с вещами, имеющими историю...

Абсолютисты особенно сильно подчеркивают «вневременный» характер абсолюта. Плюралисты, напротив, отстаивают такую же реальность времени, как и всего иного, и по их мнению, нет в мире ничего такого, что стояло бы вне исторического процесса... Мир, в котором каждый из нас чувствует себя в интимном кругу своего дома, есть мир существ, имеющих историю; их истории сплетаются с нашей историей и мы можем прийти им на помощь в превратностях их судьбы и рассчитывать на помощь с их стороны...

Плюрализм, изгоняя призрак абсолютного, изгоняет великого разрушителя той единственной жизни, в которой мы у себя дома, и, таким образом, освобождает природу от полной отчужденности. Все наши цели, основания, мотивы, объекты желания и отвращения, поводы к нашему огорчению или к нашей радости — все это мы находим в мире ограниченного многообразия, потому что в нем одном нечто действительно совершается, в нем одном имеют место события» (там же, стр. 26—27).

Пока, однако, похвалы плюралистическому образу мышления звучат не слишком убедительно, поскольку еще не указана конкретная методологическая платформа, на основе которой новая философская школа смогла бы решать те или иные проблемы. Вот тут-то и находит свое применение «принцип Пирса». Опираясь на этот принцип, «прагматист решительно, раз навсегда отворачивается от целой кучи застарелых привычек, дорогих профессиональным философам. Он отворачивается от абстракций и недоступных вещей, от словесных решений, от скверных априорных аргументов, от твердых неизменных принципов, от замкнутых систем, от мнимых абсолютов и начал. Он обращается к конкретному, к доступному, к фактам, к действию, к власти» ([29], стр. 37). Именно «доступное», в частности «действие» и «власть», рассматривается Джемсом как то, что охватывается термином Пирса «практически значимое», и более того, как все содержание этого термина. Это значит, что положительная программа Джемса состоит в следующем: объявить бессмысленными все понятия, не включающие в себя элементов действия и власти, и отказаться от использования этих понятий в любых рассуждениях и любых теориях. Очевидно, что такая методология плоха хотя бы потому, что не дает никакого фундамента для обсуждения сложных научных вопросов, постоянно использующих понятия, не имеющие никакого отношения ни к власти, ни к действию, ни к чему-либо «доступному».

Наряду с этой типично прагматистской философской платформой, у Джемса звучат и мотивы, продиктованные его занятиями психологией. Именно психологический материал привел его к заключению, что человеческий интеллект не является пассивным зеркалом, отражающим мир «как он есть», а проявляет в процессе отражения определенную активность.

Послушаем самого Джемса. В своей «Психологии» он пишет:

«Четвертая особенность душевных процессов, на которую нам нужно обратить внимание при первоначальном поверхностном описании потока сознания, заключается в следующем: сознание всегда бывает б о л е е з а и н т е р е с о в а н о в о д н о й с т о р о н е о б ъ е к т а м ы с л и, ч е м в д р у г о й, п р о и з в о д я в о в с е в р е м я п р о ц е с с а м ы ш л е н и я и з в е с т н ы й в ы б о р м е ж д у е г о э л е м е н т а м и, о т в е р г а я о д н и и з н и х и п р е д п о ч и т а я д р у г и е» ([15], стр. 126).

Известно, что развитие идеи активности интеллекта, отражающего объективный мир, Джемс в дальнейшем направил по ложному пути. Этот путь завел его впоследствии в тупик субъективизма и замаскированного модной терминологией фидеизма. Социальные установки Джемса и недостаточно высокий уровень развития психологии того времени не позволили ему придать этой ценной идее правильную и ясную форму. Она была заглушена в его сочинениях массой других утверждений, высказанных с тем же темпераментом и с той же убежденностью и оказавшихся ложными или малозначительными.

Тезис об активности человеческого сознания в свое время, как известно, был решительно подчеркнут Марксом.

Однако конкретно-научная разработка этого тезиса требовала долгого накопления опытных данных. Предстоял еще длинный и трудный путь научного развития, предстояла разработка экспериментальной техники психологических измерений, предстояло создание кибернетики и идей математического моделирования психики, предстояло выдвижение идеи о *структурах*, прежде чем мысль об активной роли человеческого интеллекта в познании мира стала достоянием не только научной философии, но и частных наук о человеке.

Другим крупным философом начала нашего века, оказавшим сильное влияние на взгляды естествоиспытателей, был А. Бергсон.

Это влияние определяется в первую очередь тем, что в отличие от буржуазных философов, акцентирующих «разрушение», начинавших с отрицаний, он ставит ударение на позитивных утверждениях, причем для поддержки этих утверждений привлекает самые последние достижения науки и апеллирует к широко распространившемуся «эволютивному» образу мышления.

Бергсон в одних местах вполне рационалистичен (так же как «научным» является весь его «системный» подход), а в других местах антирационалистичен, поэтому разные стороны его философии привлекали к себе разных естествоиспытателей и математиков. Некоторых подкупала кажущаяся простота предпосылок, на которых возводит Бергсон свою теорию: вся эта теория фактически основана на одном утверждении, которое его автор излагает на первой же странице своего главного труда, прямо заявляя, что дальше ничего принципиально нового не будет, а начнется лишь извлечение многочисленных конкретных следствий из основной аксиомы. Другими словами, детективного романа, погони за ускользающей истиной, кончающейся успешной развязкой, у Бергсона не получается — он презирает такого рода завлекающие трюки, практикуемые другими философами его времени, и предстает перед читателем (во всяком случае, по форме) как солидный мыслитель доброй старой выучки.

Вот центральное утверждение Бергсона, его философский постулат.

«В нашей способности понимать,— писал он,— мы видим просто прибавление к нашей способности действовать, все более точное, сложное и гибкое приспособление сознания живых существ к данным условиям их существования. Отсюда следует, что наш ум, в узком смысле слова, имеет целью обеспечить нашему телу его пребывание в среде, представить отношения внешних вещей между собой, наконец, постигнуть материю мыслью. Таков один из выводов настоящего труда. Мы увидим, что человеческий ум среди неодушевленных предметов, в частности среди твердых тел, чувствует себя как дома. Здесь наша деятельность имеет опорный пункт, здесь наша техника берет свои рабочие инструменты.

Мы увидим, что наши понятия образованы по форме твердых тел и что поэтому наш ум одерживает свои лучшие победы в геометрии, где открывается родство логической мысли с неодушевленной материей и где уму приходится только следовать своему естественному движению...» ([31], стр. 1—2).

Из этого Бергсон делает вывод, что логическая мысль принципиально не способна проникнуть в истинную природу жизни, понять глубокий смысл эволюции. Поскольку мысль в процессе борьбы человека за существование возникла как средство, с помощью которого люди эффективно воздействуют на неживые предметы, то как она может быть приспособлена для постижения чего-то другого — например жизни, сознания? С таким же правом, говорит Бергсон, можно также утверждать, что часть равна целому, действие поглощает причину, камень, лежащий на морском берегу, изображает форму волны. Он пишет: «Мы ясно чувствуем, что ни одна из категорий нашей мысли, как, например, единство, множественность, механическая причинность, разумная целесообразность и т. д., не могут быть точно применены к живым предметам. Кто скажет, где начинается и где кончается индивидуальность, является ли живое существо единым или многим, клеточки ли соединяются в организм или организм разделяется на клеточки?» (там же, стр. 2).

Приведенные нами выдержки являются ключевыми и дают возможность понять всю концепцию А. Бергсона. Можно заметить, что для него отсутствие «предустановленной гармонии» между миром и разумом является не эмпирическим фактом, как для Джемса, а закономерным следствием эволюции человеческого рода с целью приспособления к условиям существования. Бергсон не потому отрицает предустановленную гармонию, что следует «английскому скептицизму», а потому, что беспристрастным взором ученого видит невозможность выработки такой гармонии природой. Природа наделила человека логикой, т. е. рационалистической частью интеллекта, в узко утилитарных целях, и она не могла поступить иначе. Она не задумывала рассудок как универсальное средство познания. Как она дала кошке когти только для удержания мыши, а не для чего-либо другого, так и человеку она дала рассудок для того, чтобы он управлялся с «твердыми телами», и укоренившееся по давней ошибке стремление использовать логику для познания, например жизни, выглядит так же нелепо, как выглядело бы стремление кошки использовать свои когти, скажем, для переваривания пищи.

Здесь явно прослеживается путь, ведущий к плюрализму, так как если, согласно основной установке Бергсона, разные стороны человеческого ума сформировались в историческом процессе под воздействием разных граней действительности, то не может быть единого критерия истины. Но Бергсон строит свое отрицательное предложение таким образом, что из него, по его мнению, оказывается возможным извлечь тезис, открывающий все же дорогу к познанию. Для проникновения в сущность мира нужно лишь применять к каждой его стороне соответствующую часть интеллекта — так сказать, вместо единой предустановленной гармонии прошлого теперь появляются две такие гармонии. Твердым телам, неживой природе соответствует логика; ее и нужно включать в работу при взаимодействии с простейшим миром твердых тел, при математическом изучении линий, фигур, поверхностей. Жизни, особенно ее сложным проявлениям, общению с себе подобными, биологической и общественной активности соответствует *инстинкт*; его и следует употреблять в этой сфере. Инстинкт, или *интуиция*, по Бергсону, есть «такой род *интеллектуальной симпатии*, посредством которого человек переносится внутрь объекта, чтобы слиться с тем, что есть в нем единственного и, следовательно, невыразимого» ([32], стр. 6).

Этот способ познания, согласно Бергсону, является единственно допустимым, если объектом познания служит живое существо, историческое событие или общественное явление, однако он может быть применен и к сложным ситуациям неорганического мира, в общем, ко всему, что не столь примитивно, как «твердые тела». В частности, Бергсон утверждал, что именно интуиция обеспечивает нам ясное понимание второго закона термодинамики. Естественно, что эту интуицию Бергсон объявляет более высокой формой познания, чем рассудок.

Поскольку в одной из последующих глав нам предстоит говорить о математическом интуиционизме и там постоянно будет употребляться слово «интуиция», нам следует подробнее остановиться на учении Бергсона об интуиции, в частности проанализировать его тезис об интуиции как высшей форме познания.

Известно, как существенно помогает наглядносодержательное усмотрение «сути дела» и догадка, т. е. интуиция, в решении самых разнообразных творческих проблем, как важно, например, для физика или представителя технических наук «чувствовать» изучаемый им процесс.

Все великие ученые обладали этим «физическим чутьем», а такие гении, как Ньютон, Фарадей или Резерфорд, развивали его до непостижимой степени. Они часто могли заранее предвидеть результат, и эксперимент или вычисление лишь подтверждало то, что уже было им «интуитивно ясно». Не есть ли это как раз «познание высшего типа»? Не только математику или физику необходимо «чувство объекта»; без него, вероятно, не будет ни выдающегося химика, ни успешно работающего в своей области инженера, ни тем более биолога.

Признавая исключительную ценность интуиции не только в науке, но и в любой интеллектуальной работе, мы тем не менее должны выяснить, обладает ли интуитивное проникновение в объект такими свойствами, которые позволили бы назвать его высшим по сравнению с систематическим научным познанием, осуществляемым на базе логики. Мы будем исходить из того, что познавательная деятельность человечества имеет ярко выраженный *общественный характер*, поскольку в ином случае ее нельзя было бы признать явлением человеческой культуры, фактором цивилизации и прогресса. Ведь все наши духовные ценности создаются в результате постепенного накопления, возможного благодаря хранению соответствующей информации и ее передаче от поколения к поколению, от одних людей к другим людям. Все эти ценности находятся в коллективном владении, никто не пересоздает их заново и самые выдающиеся мыслители делают свой вклад в эту сокровищницу лишь после того, как воспользовались ее богатством в период своей учебы, во время формирования своего интеллекта. Таким образом, необходимым качеством человеческого познания является *куммулятивность, подразумевающая возможность хранения познанного и его передачи*.

Другим обязательным качеством человеческого познания нужно считать его *надежность*. Ненадежное знание не может содействовать прогрессу общества и не может порождать новое знание (даже будучи куммулятивным), так как из ложных предпосылок обычно вытекают ложные следствия. Конечно, проблема надежности знания, если ставить ее в философском плане, очень сложна и ее решение требует создания обоснованных критериев истинности и разработки хороших методов верификации. Мы не будем, однако, обсуждать ее здесь подробно, а подчеркнем лишь, что познание человечеством окружающего мира и самого себя есть процесс добывания таких сведений, которые обладают, если не полной, то *достаточно высокой* надежностью.

После того, как мы сформулировали эти требования, нам легко убедиться, что бергсоновская «интеллектуальная симпатия» не удовлетворяет ни первому, ни второму из них и, следовательно, не только не является высшей формой познания, но и вообще не представляет собой познания в строгом смысле этого слова.

Действительно, интуитивное познание не может храниться в виде текста, диаграммы, формулы, фотографии и т. д. Могут, конечно, сохраняться в каких-то фиксированных формах результаты интуитивного познания, но, во-первых, Бергсон говорит не о фиксируемых результатах, а о самом процессе проникновения в объект (вспомните, что целью этого проникновения является улавливание *невыразимого*), а такой процесс принципиально нельзя закрепить на бумаге или каким-то другим способом. Если Ньютон, размышляя о всемирном тяготении, понял с помощью своей колоссальной интуиции нечто большее, чем он выразил в своем знаменитом законе, то это большее пропало для потомства. Во-вторых, если какое-то знание, добытое с помощью интуиции, может быть все же зафиксировано с целью передачи и накопления, то оно часто при этом может быть получено и логическим путем. Исключение, возможно, представляет художественное, образное познание мира, которое можно передать и сохранить в полотнах живописцев, в партитурах симфоний и т. д., вызывающих в душе чуткого или натренированного зрителя и слушателя эмоциональное возбуждение и создающих у него ощущение «проникновения в невыразимое». Но было бы явной натяжкой назвать освоение человеком каких-то «мировых соотношений» с помощью произведений искусства чем-то высшим по сравнению с систематическим научным освоением мира при помощи разрабатываемых многими поколениями философов и ученых понятийных структур. Художественное «познание» сугубо индивидуально, оно зависит от множества случайных факторов, а поэтому не обладает даже минимальной надежностью. Известно, например, что многие произведения литературы и искусства на своих современников оказывали совершенно другое впечатление, чем на позднейшие поколения. Те, кто наслаждается картиной или симфонией, сплошь и рядом «понимают» их совсем не так, как понимал автор. Шедевры искусства скорее являются «спусковым крючком», включающим в действие личный внутренний мир со всей его уникальностью и неповторимостью. Именно поэтому имеют право на существование истолкования шедевров, лежащие в широком диапазоне. Следовательно, мы вынуждены констатировать, что в этой области принципиально невозможно отыскать удовлетворительные критерии истинности, а значит вопрос обеспечения надежности знания здесь либо не может быть поставлен вообще, либо (в случае расширения понятия «надежность» по отношению к интеллектуальным процессам и их продуктам) приобретает существенно иной смысл, чем в случае науки.

«Ненадежно» не только художественное восприятие, но и всякое восприятие, основанное на эмоциях, а не на рассудке и логике, поскольку оно содержит существенно *субъективный элемент.* Обратимся для примера к некоторым проблемам биологии. Эрнст Мах писал, что «задолго до развития научной психологии человек заметил, что отношение животного к тем или другим физическим влияниям гораздо легче предвидеть, т. е. понять, если приписать ему ощущения, воспоминания, подобные нашим» ([34], стр. 39). Действительно, такой метод аналогии служит определенным инструментом биологического познания в отсутствие других методов. Согласно Бергсону, такое «познание» живого существа надо считать высшим, более совершенным, чем то, которое обеспечивает, скажем, учение о рефлексах или об ауторитмии, так как приписывание животному внутреннего мира, подобного нашему, как раз и обеспечивает возможность «интеллектуальной симпатии». Но посмотрим, можно ли назвать это познание высшим? Профессиональные дрессировщики давно знали, что «антропоморфизация» зверей не обеспечивает успеха в работе с ними и что единственным ключом к достижению цели здесь является научный подход. Когда лев рычит и скалит зубы, это не всегда означает, что он пришел в ярость, а когда он проявляет внешние признаки дружелюбия, не значит, что он и в самом деле настроен кротко. Непонимание этого не раз приводило к трагедиям. Громадные достижения современной науки о поведении животных, получившей сильный толчок к развитию благодаря замечательным работам Конрада Лоренца, не оставляют уже сомнения в том, что «проникновение внутрь живого существа» может быть осуществлено не с помощью «симпатии», а только с помощью тонкой и строгой понятийной теории, использующей все достижения нейрологии, экспериментальной психологии, кибернетики, генетики и т. д. Подход по рецепту Бергсона является здесь самым предварительным и приблизительным и, как правило, ошибочным и бесполезным. Впечатляющие результаты дрессировки китообразных и акул, демонстрируемые в океанариуме Мериленда, целиком обязаны научной этологии, а не изучению дельфинов проникновением в их душу посредством мистического интеллектуального усилия.

Короче говоря, учение Бергсона, несмотря на свою внешнюю наукообразность, не имеет к науке никакого отношения, и его формальная наукообразность служит лишь прекрасно задуманным приемом, учитывающим уважение к науке со стороны миллионов людей. Рассуждения Бергсона, блестящие по своей литературной форме и представляющиеся на первый взгляд глубокомысленными, при внимательном анализе сводятся к многословному изложению тезиса об ограниченности человеческого разума. Рассуждения эти совершенно бесплодны, поскольку метод интеллектуальной симпатии, выдвигаемый в этих рассуждениях для восстановления (хотя бы частичного) гармонии между нашим интеллектом и внешним миром, оказывается весьма ограниченным по области своего применения. Человек может воспользоваться этим методом разве лишь затем, чтобы доставить себе некоторое индивидуальное удовольствие, испытать субъективное ощущение познания (иногда довольно сильное и яркое, особенно если индивидуум обладает возбудимым темпераментом и художественным складом психики), которое почти невозможно адекватно передать другим и даже сохранить надолго в собственном воспоминании и которое нельзя использовать для какого бы то ни было действия, так как оно почти всегда является ошибочным с точки зрения объективных критериев.

Если бы человечество в своем стремлении к познанию пошло бы по пути, указанному Бергсоном, оно возвратилось бы к библейским временам, когда странствующие пророки и пророчицы, впадая в состояние экзальтации (между прочим, с помощью как раз того психического напряжения, которое пропагандирует Бергсон как условие «интеллектуальной симпатии»), вещали толпе различные «истины», а каждый из слушателей мог истолковать их по-своему. Будучи, возможно, очень убедительным субъективно, такое «знание» имело бы тенденцию распасться на отдельные убеждения, столь же несхожие между собой, сколь несхожи по особенностям своей психики разные люди.

В случае победы этой тенденции знание перестало бы представлять собой нечто целостное, не могло бы развиваться и не имело бы никакого серьезного внешнего приложения. Развивая эту мысль до ее логического конца, нужно признать, что наилучшей предпосылкой завоевания такого рода «знания» человечеством было бы массовое потребление наркотических средств.

Но если бы даже тенденцию к раздроблению знания, приобретаемого бергсоновским способом, удалось преодолеть, т. е. привести в непосредственное соответствие отдельные субъективные «прозрения» индивидуумов, это означало бы нечто гораздо худшее. Когда для согласования убеждений отдельных людей используется не разум и логика, а «интеллектуальная симпатия», то есть прямое воздействие на эмоции, это неизбежно приводит к возникновению массовых психозов, кончающихся в наше время весьма плачевно. При таком методе согласования общество теряет из виду внешние ориентиры, начинает руководствоваться подогреваемыми пропагандой и идеологизированным искусством субъективными критериями, и, в конце концов, приходит к серьезному конфликту между своим унифицированным психическим настроем и объективными факторами.

Как ни печально, но приходится констатировать, что идеи А. Бергсона были с энтузиазмом подхвачены идеологами «третьего рейха». Это, конечно, не было случайностью. Их привлекло как раз то соединение (пусть чисто внешнее) наукообразности и системности и антирационализма, о котором мы уже говорили. Вот как об этом пишет известный философ М. Бунге, знающий об особенностях психического климата гитлеризма не понаслышке, а по собственному опыту (включая опыт пребывания в тюрьме): «Нацистская Германия превозносила... инстинкт, «симпатическое понимание», или эмпатию, усмотрение сущностей и интуицию ценностей и норм... Интуитивизм наряду с другими формами оккультизма и обскурантизма не только сделался при нацизме философией официальной, но стал также частью идеологии нацизма и оказался пригодным для его целей — насаждения варварства и разрушения культуры. Сам нацизм в сфере идеологии был подготовлен многочисленными философами и «духоучеными», возносившими инстинкт и интуицию над разумом, восприятие цельности над анализом, непосредственное познание над логически выведенным (характерным для науки), самоочевидность над доказательством» ([33], стр. 41—42).

Заканчивая наше рассмотрение позиции Бергсона, мы приходим, таким образом, к выводу, что если в ней содержалось нечто ценное для последующего развития научной методологии, то это было стремление объяснить особенности человеческого интеллекта его эволюцией. Интересно сопоставить в этом пункте точку зрения Бергсона со взглядом Л. Больцмана. В 1904 г. на научном конгрессе в Сен-Луи Больцман говорил:

«...Несомненно, что мы бы не могли чего-либо воспринять, если бы нам не были прирождены некоторые формы связывания восприятий, т. е. формы мышления. Если мы захотим назвать их законами мышления, то они в такой же мере априорны, в какой они имеются в нашей душе или, лучше, в нашем мозгу раньше какого-либо восприятия. Но ничто мне не кажется столь малообоснованным, как заключение из априорности в этом смысле об абсолютной достоверности и непогрешимости их. Эти законы мышления образовались вследствие того же закона э в о л ю ц и и, как оптический аппарат глаза или нагнетательный аппарат сердца. В процессе развития человечества все нецелесообразное было отброшено, и таким путем образовались та простота и законченность, которые так легко смешать с непогрешимостью. В такой же мере возбуждает наше удивление совершенное устройство глаза, уха и сердца. Но тем не менее мы не приписываем этим органам абсолютного совершенства. Столь же мало мы должны считать абсолютно непогрешимыми и законы мышления. Именно они образовались вследствие нужды в ясном понимании того, что необходимо для развития жизни и что практически полезно» ([12], стр. 170—171).

Как видно из этой цитаты, эволюционный подход к мышлению стал в начале двадцатого столетия уже нормой мышления естествоиспытателя. Учение же об интеллектуальной симпатии, якобы обоснованное эволюционными соображениями, скорее сыграло (независимо от желания его автора) скорее отрицательную роль.

Для полноты картины нам следует еще обратиться к взглядам еще одного философа идеалистического толка рассматриваемого времени — Э. Маха.

Мы не будем излагать здесь известную ленинскую критику философских взглядов Маха и махизма в целом, а, опираясь на положения В. И. Ленина, осветим вопросы, которые существенны для дальнейшего изложения.

Рассматривая концепцию Маха, следует учитывать, что он был видным ученым-естественником и поэтому видел современную ему науку «с близкого расстояния». Надо иметь также в виду признание Эйнштейна в том, что на разработку теории относительности положительно повлияли методологические идеи Маха.

Интерес Маха к философским вопросам развился из его стремления к изучению используемых в научной практике методов исследования. Сам Э. Мах неоднократно подчеркивал, что он не философ, а всего лишь ученый, пытающийся найти принципы наиболее эффективной организации экспериментальной и теоретической научной деятельности.

Философская концепция Маха основана на еще меньшем числе исходных положений, чем даже учение Бергсона. По существу, вся ее подоплека выражена в следующих словах самого Маха:

«Мне пришла в голову мысль, что два чувственных объекта только тогда кажутся сходными, когда элементы соответствующих им двух комплексов ощущений тождественны... Отсюда естественно возникла мысль, что вообще в основе всякой абстракции лежат общие, реальные психические элементы конкретных явлений, охватываемых понятием» ([27], стр. 71).

Такое психологическое наблюдение Мах подкрепляет многочисленными примерами из своей жизни и воспоминаниями о виденном. Он рассказывает о том, как, случайно и неожиданно увидев свое отражение в зеркале, принял его за реального другого человека или как его дети по вечерам боялись подходить к стулу, на котором висел сюртук, принимая его за живое существо. Все эти оптические иллюзии и ошибки зрения проистекают, по мнению Маха, от того, что мы создаем себе образ воспринимаемого объекта только на основании совокупности атомарных чувственных сигналов, идущих от этого объекта, и не нуждаясь ни в чем другом. Во всех приведенных им примерах совокупность атомарных сигналов (которые Мах называет *элементами*), идущих от реального объекта, была такой, какой она должна была бы быть, идя от того объекта, с которым был спутан реальный. Другими словами, наше суждение о том, что происходит во внешнем мире, основано только на чувственных элементах и никакие другие соображения не могут на него влиять.

Отсюда Мах делает два неопровержимых, по его мнению и по мнению его последователей, вывода, на которых строится все остальное:

1. Чувственные элементы — единственное, что нам дано непосредственно.

2. Поэтому только они являются надежной опорой построения науки, которая, следовательно, должна заключаться в отыскании хорошего описания связей между элементами.

Нетрудно почувствовать здесь несколько капитулянтскую реакцию на крушение предустановленной гармонии: раз проникнуть в сущность мира человеческому уму не дано, то и не будем пытаться этого делать, а займемся классификацией и систематизацией того, что единственно дано нам непосредственно — ощущениями. Однако отложим пока критику такого рода и рассмотрим оба постулата Маха более внимательно.

Мах всегда категорически отрекался от обвинений в субъективном идеализме. Он разъяснял, что предлагает ограничиться одними ощущениями не потому, что отрицает существование чего-либо другого (скажем, внешнего мира), а только потому, что они непосредственно знакомы каждому и поэтому могут образовать базу для взаимопонимания. Кроме того, они из-за своей непосредственной данности более всего другого заслуживают доверия. Если выразить принцип Маха с предельной простотой, то он прозвучит так: «верю только тому, что вижу (слышу, осязаю и т. д.) и не верю никаким умствованиям». Это и есть та точка зрения, которая, как мы видели, объявлялась Махом устраняющей «все метафизические вопросы». Почему эта позиция импонировала некоторым естествоиспытателям и математикам? Потому что она во многом упрощала теоретическую реакцию ученого, особенно экспериментатора, поставленного перед необходимостью разрабатывать качественно новые научные взгляды. А обстоятельства, вызывающие такую необходимость, в конце XIX столетия сложились в связи с открытием радиоактивности и другими результатами.

Мы уже упоминали дух экспериментализма, характерный для физики (и всех естественных наук) того времени и породивший популярность принципа непредвзятости в научных исследованиях. Вот с его-то философским обобщением с идеалистических позиций мы и имеем дело в работах Маха. Поэтому некоторые естествоиспытатели, примеряя точку зрения Маха прежде всего к своей конкретной работе в лаборатории или за письменным столом, зачастую находили ее весьма правильной и симпатизировали своему философствующему коллеге. «Что у кого болит, тот о том и говорит»,— гласит пословица. У физиков тех лет «болели головы» от несоответствия существующей теории и некоторых настойчивых экспериментальных фактов (а вскоре заболели еще сильнее от опыта Майкелсона), и они должны были сделать то, что всегда делается в такой ситуации: отвлечься от всех соображений, которые могли быть внушены учебниками, воспитанием, университетским курсом, распространенными мнениями и т. д., и посмотреть на факты, то есть «показания стрелок», «чистым взором»— в этом был единственный шанс выйти из тупика.

Узость области применимости точки зрения Маха и ошибочность ее распространения на познание в целом обнаруживается, впрочем, при самом поверхностном анализе. Интересно, что для опровержения Маха даже не нужно ни на что ссылаться, *кроме... как на самого Маха*. Вот, например, такое опровергающее главную мысль автора место из «Анализа ощущений»:

«Исследование *физиологическое* может носить характер строго физический. Я могу проследить распространение физического процесса по какому-нибудь чувственному нерву к центральному органу, разыскивать отсюда его различные пути к мышцам, сокращения которых вызывают новые физические изменения в окружающей среде. Во время этих наблюдений я *не должен* думать об *ощущениях* наблюдаемого человека или животного» ([34], стр. 55).

Это совершенно правильно. Отвлечение от мысли об ощущениях исследуемого живого существа не только допустимо в таких обстоятельствах, но и является необходимым условием наиболее эффективного достижения узкой и конкретной цели. Но вряд ли на этом основании Мах допустил бы правомочность следующего обобщения: «значит, вообще, нет смысла говорить об ощущениях живого существа». Ситуация же, вызвавшая к жизни махизм, может быть охарактеризована описанием, представляющим «негативную копию» только что приведенного. Попробуем построить этот аналог:

«Исследование *физическое* может носить характер строго чувственной регистрации. Я могу учитывать только показания моего зрения: видимые положения стрелок, появление светлых и темных колец и т. д. В это время я *не должен* думать о *физических процессах*, происходящих с изучаемыми телами».

Это тоже правильно, если учесть, что мысль о физических процессах предполагает теорию, усвоенную ранее. Но если эта теория вышла из доверия, то в таких обстоятельствах лучше всего доверять только непосредственным показаниям органов чувств. Но из этого правильного утверждения Мах неправомерно посчитал возможным сделать обобщающий вывод: «значит *нет смысла*, *вообще*, говорить о физических процессах, протекающих независимо от наших ощущений». Такой вывод нужно считать столь же неубедительным, сколь неубедителен соответствующий вывод из первого утверждения.

Но у Маха содержатся и значительно более сильные потенциальные аргументы против себя самого. Это как раз приведенные им описания оптических иллюзий и ошибок зрения. Каждому из нас хорошо знакомы явления, о которых пишет Мах. Мы видим висящий на стуле сюртук как сюртук или как фигуру притаившегося злодея в зависимости от того, чтó мы ожидаем увидеть, то есть в зависимости от наших представлений о ситуации, имеющихся в настоящий момент. Это значит, что мы увидим то или другое, смотря по тому, какая «теория» будет нами принята на время разглядывания объекта. Мы увидим то, что «захотим» увидеть (конечно, это «желание» чаще всего находится в области подсознательного и не всегда может быть проанализировано). Иными словами, эти примеры убеждают нас в том, что бессмысленно говорить *не о концепциях относительно физической реальности, не зависящей от наших ощущений, а о сколько-нибудь организованных ощущениях, не зависящих от принятых нами концепций, относящихся к реальности.* Дело в том, что мозг накладывает свою структуру на чувственный образ не только в период сознательного осмысливания, но и прямо в момент бессознательного восприятия. Лягушка, как выяснилось, не видит неподвижной мухи и погибает голодной смертью, хотя муха лежит около ее рта. Кошка не реагирует на свое отражение в зеркале, а собака не узнает кошку на картинке. Эти животные не потому так «плохо видят», что у них плохое зрение — низкая разрешающая способность или недостаточная чувствительность сетчатки, — а потому, что у них «плохой мозг». Данные современной психологии все более подтверждают участие центральной нервной системы в образовании даже самых примитивных чувственных восприятий (то есть «элементов» Маха), и об этом мы будем говорить подробнее дальше. Но, поскольку дело обстоит таким образом, можно ли говорить об «ощущениях, которые могут быть вполне освобождены от индивидуальных влияний наблюдателей», как того хотел Мах? Разве Ньютон видел то же самое, что и другие, созерцая сложную картину окружающего мира, когда с дерева упало яблоко? Ведь он, вероятно, видел в этот момент не только яблоко, но и часть поверхности другого тела — огромной Земли, в то время как другие в аналогичных случаях видели лишь яблоко и траву под яблоней. Разве специалист видит то же самое, что случайный наблюдатель в сложной рентгенограмме или в фотографии треков элементарных частиц?

Освободить ощущение от каких бы то ни было влияний понятийных структур, особенно подсознательных, и таким образом создать единую для всех людей базу, на которой можно будет возводить лишенную предвзятости науку — замысел безнадежный, неосуществимый как по логическим причинам, так и из-за того, что это противоречит данным науки о мозге. Современные неопозитивисты, часто цитирующие Маха как одного из своих предтеч, уже, конечно, не выражаются так категорично. Но все же они часто не прочь намекнуть, что точка зрения Маха в вопросах сугубо исследовательских себя оправдывает. Мы уже говорили, в каких пределах мы согласны допустить принцип непредвзятости, и если речь идет об этих пределах, то спорить с неопозитивистами у нас нет причины. Но тогда возникает вопрос: при чем здесь Мах? Желательность отвлечения от всех предварительных соображений в процессе научного поиска была провозглашена задолго до Маха, а в практике научной работы применялась систематически уже со времен Галилея и Паскаля.

Учение Э. Маха при своем появлении вызвало бурный отклик: его автор был превознесен до небес. Цитированный уже Беер писал, что Мах походя решил задачу, оказавшуюся не по плечу поколениям философов, в том числе и Канту.

Но популярность Маха оказалась недолговечной. Несостоятельный субъективнс-идеалистический характер взглядов основателя махизма, с исчерпывающей полнотой раскрытый еще В. И. Лениным, привел к постепенной дискредитации методологических и практических указаний Э. Маха о том, как следует строить науку. Теперь мы можем сказать: «прошло сто лет, и что ж осталось?» Ничего, кроме поучительного урока на тему «как не следует рассуждать, и почему».

Итак, мы рассмотрели основные течения идеалистической философии рубежа веков, оказавшие воздействие на развитие исследований в области оснований математики. Идеалистическим школам противостояла диалектико-материалистическая философия, являвшаяся фундаментом многих естественнонаучных концепций, значение которых постоянно возрастает.

Гносеологическую концепцию основателей диалектического материализма К. Маркса и Ф. Энгельса коротко можно охарактеризовать так: мир познаваем, но его познание достигается на трудном пути ошибок и их исправлений, накопления научной информации, совершенствования теорий и методов исследования. Отсюда видно, что полное познание мира является потенциальным. Таким образом, наличие предустановленной гармонии как предпосылки проникновения человеческого ума в *сущ-*

ность вселенной (путем озарения или прозрения) решительно отвергается.

Всякое познание неполно и относительно и касается не всей вселенной, а какой-то ее части. Тем не менее, потенциальная познаваемость мира подразумевает, конечно, существование *соответствия* между человеческим интеллектом и природой. Это соответствие К. Марксом и Ф. Энгельсом трактуется как соответствие между частью и целым, возникающее вследствие единства мира, коренящегося в его материальности.

Маркс об этом говорил так:

«Лишь тогда, когда природа признается вполне свободной от сознательного разума, рассматривается в самой себе как разум, она становится полным достоянием разума» ([35], стр. 214).

Эти основные положения развивались и раскрывались основателями диалектического материализма во многих произведениях. Но в конце XIX — начале XX столетия развитие философской мысли и накопление массы новых научных данных сделало необходимым ответить на ряд тонких гносеологических вопросов, которые прежде не ставились, и в связи с этим еще раз подчеркнуть главные принципы диалектического материализма. Эту работу проделал В. И. Ленин. В 1909 г. вышла его книга «Материализм и эмпириокритицизм», в которой содержалось философское обобщение новейших достижений естествознания с позиции диалектического материализма.

Центральным пунктом в этом произведении Ленина является знаменитое место, которое несколько условно называют «определением материи» и которое, по существу, представляет собой одновременное определение как материи, так и сознания и, несмотря на свою лаконичность, содержит в зародыше основные гносеологические и методологические установки *диалектического материализма*. Вот это место:

«Материя есть философская категория для обозначения объективной реальности, которая дана человеку в ощущениях его, которая копируется, фотографируется, отображается нашими ощущениями, существуя независимо от них» ([36], стр. 131).

Несколько дальше В. И. Ленин добавляет: «Конечно, и противоположность материи и сознания имеет абсолютное значение только в пределах очень ограниченной области: в данном случае исключительно в пределах основного гносеологического вопроса о том, что признать первичным и что вторичным. За этими пределами относительность данного противоположения несомненна» ([36], стр. 151).

Эти тезисы являются *фундаментальными* в том смысле, что они имеют форму утверждений, истинность которых не должна зависеть от времени. Как всякое философское направление, признающее эволюцию познания, диалектический материализм предполагает возможность получения нами совершенно новых данных о строении материи, о психических механизмах и т. д., но не предполагает необходимости в связи с этим менять фундаментальные тезисы. С другой стороны, если бы эти тезисы были расширены, расшифрованы более подробно — скажем, если бы были перечислены конкретные объекты, исчерпывающие материальный мир и конкретные механизмы отображения этих объектов человеческим сознанием, то с течением времени они могли бы устареть и потребовать переформулировки. Процесс перестройки представлений об объекте или субъекте — закономерный и необходимый процесс развития, но он относится к области конкретных наук и не может изменить главных черт философской концепции. О таком научном процессе В. И. Ленин писал в связи с проблемой «исчезновения материи», вызванного математизацией физики:

««Материя исчезает»—это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже: исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо *единственное* «свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство *быть объективной реальностью*, существовать вне нашего сознания» ([36], стр. 275).

Итак, материя это не совсем то же, что объект, а сознание не тождественно субъекту. Как правильно пишет Л. Г. Антипенко: «Понятие материи относится к объективной реальности, которая противостоит сознанию и в принципе отражается им... Поскольку к объекту относится лишь то из объективной реальности, что на данном этапе исторического развития общества становится предметом теоретической и практической деятельности человека, субъекта как социального существа, понятие объекта (мира) оказывается у́же по своему объему, чем понятие материи. Но в любом случае объект, противополагаемый субъекту, остается по ту же сторону сознания, что и материя, он никогда не становится смесью или единством материального и идеального ([37], стр. 21—22).

Как мы уже сказали, определение материи у Ленина неразрывно связано с определением сознания; это объясняется тем, что одно определяется через другое: материя есть то, что отражается сознанием, а сознание есть высшая форма материи, приобретающая способность к отражению. Ленин подчеркивал, что это — не порочный круг, а одновременное определение двух основных гносеологических категорий. Это определение имеет своим основанием материалистический м о н и з м. Монизм, которого придерживается диалектический материализм вне теории познания, основан на убеждении, что «все сущее есть материя (в том числе и жизнь)», но не допускает утверждения, что в каком-либо смысле все сущее есть сознание.

Кроме возражения, связанного с возникновением якобы порочного круга, которое было отведено еще самим В. И. Лениным, против фундаментального тезиса диалектического материализма были выдвинуты и другие возражения. Одно из них часто повторяется противниками материализма до сих пор. Это — обвинение в ненужном «удвоении» мира, в некоей избыточности, содержащейся якобы в диалектико-материалистической концепции. Придерживаясь сенсуализма, говорят они, марксисты признают, что всю информацию, на основании которой мы строим свои суждения, мы получаем через чувства; каким же таинственным образом мы узнаем тогда о чем-то, что стоит за восприятием и находится по ту сторону восприятия, и зачем это нечто вводить в понятийную систему, если все равно оно дается нам, как признает диалектический материализм, только в ощущениях? Не проще ли с точки зрения логики считать науку способом эффективно описывать связи между ощущениями, а не познанием этого непонятного «нечто»— материи?

Мы имеем здесь в виду главным образом точку зрения современного неопозитивизма. Опровержение этой позитивистской критики содержится уже в «Материализме и эмпириокритицизме».

Ленин указывает, что, действительно, в определенном смысле диалектический материализм предполагает существование чего-то большего, чем то, о чем непосредственно сообщают наши ощущения, то есть в самом деле несет в себе идею определенной избыточности сущего по сравнению с воспринимаемым. Но эта избыточность подтверждается не путем сверхчувственного восприятия и вовсе не обладает мистическим характером, она постоянно и каждодневно доказывается, причем, в конечном счете, показаниями наших органов чувств, подвергнутыми мыслительной обработке. «Для материалиста мир богаче, живее, разнообразнее, чем он кажется,— писал В. И. Ленин,— ибо каждый шаг развития науки открывает в нем новые стороны» ([36], стр. 130).

Итак, по ту сторону наших сегодняшних чувственных показаний стоит не таинственное «нечто», а то, что принесут нам наши усиленные приборами и инструментами чувства завтра. Другими словами, материя, трактуемая Лениным как предельное понятие, необходима для подтверждения и обоснования возможности прогресса познания (а эта возможность подтверждается чувственно доступными нам фактами).

Но это только одна сторона ответа. Другая состоит в том, что отрицание материалистами сверхчувственного восприятия не исключает способности человека убедиться в чем-то косвенным способом. Это очень важное для нас соображение, и мы обсудим его более развернуто.

Мы уже говорили о том, что нельзя полностью исключить роль центральной нервной системы с ее специфическими структурами даже в простейшем, чувственном восприятии. Эта роль подтверждена современной наукой. Образно говоря, ощущают не глаза и уши, а мозг, который даже в самый момент восприятия проводит очень тонкую аналитическую и синтетическую работу, что-то разъединяет, а что-то соединяет, классифицирует и отбирает импульсы, идущие к нему от периферийных рецепторов, и группирует их по достаточно сложным критериям. И хотя в начале двадцатого столетия не было еще ни глубоких исследований по психологии восприятия, ни тонких нейрофизиологических исследований корковых анализаторов мозга, ни математических моделей нервной сети, ни кибернетического моделирования психики, Ленин уже тогда утверждал совершенно определенно

«Мы не можем представить, выразить, смерить, изобразить движения, не прервав непрерывного, не упростив, угрубив, не разделив, не омертвив живого. Изображение движения мыслью есть всегда огрубление, омертвление, — и не только мыслью, но и ощущением, и не только движения, но и всякого понятия» ([38], стр. 233). Обратим в этой цитате особое внимание на слова «не только мыслью, но и ощущением». В них абсолютно недвусмысленно утверждается, что уже сам акт чувственного восприятия предполагает активность психики, ее селекционную и классификационную работу. Экспериментальная психология принесла новые данные, подтверждающие это ленинское положение. Как пишет Жан Пиаже, «мы не можем говорить о чистом опыте, или «эмпирических истинах», не зависящих от логических отношений. Другими словами, опыт не может быть интерпретирован в абстракции от понятийного и логического аппарата, который и делает возможной такую интерпретацию. В наших экспериментах с Б. Инельдер маленьких детей просили ответить на вопрос: когда поверхность воды в стеклянной трубке горизонтальна и когда нет? Мы обнаружили, что дети не воспринимают «горизонтальность» до тех пор, пока они не окажутся способными построить каркас пространственных отношений. Для построения такого каркаса они нуждаются в геометрических операциях, а при построении этих операций необходимо употребление логических операций» ([39], стр. 576).

Но если встать на такую позицию в отношении простого, чувственного восприятия, то совершенно естественно признать активную роль психики в столь сложном деле, как образование и усовершенствование теоретических понятий. Фундаментальное понятие материи, выработанное в результате долгого развития человеческой мысли, разумеется, есть продукт не одних только «чувственных сигналов» в самом прямом смысле этого термина, но и размышления (речь идет здесь о «материи» как философской категории, а не как об объективной реальности в «наивном», не систематизированном и логически не оформленном понимании), принимающего в расчет многоступенчатый критерий практики и учитывающего не только чувственные факты, но и их связи, то есть проделывающего большую обобщающую работу. Разве это участие мысли в построении картины мира может быть основанием для обвинения, будто диалектический материализм оставляет лазейку для сверхчувственного восприятия или «удваивает» объект познания? Понятие материи не простой «дубликат» ощущений, а н у ж н о е для представления познания неограниченным поступательным процессом понятие, о б о с н о в а н н о е не голыми наблюдениями, а всей совокупностью познавательных средств человеческого ума, включающих в себя как наблюдение, так и его теоретическую обработку.

Принцип активности восприятия, не раз отмеченный В. И. Лениным, дополненный последующими уточнениями, которые сделало возможным развитие нейропсихологии, кибернетики, семиотики и других конкретно-научных дисциплин, позволяет сегодня высказать тезис о двойной детерминированности психики. Идея о том, что как непосредственное чувственное восприятие, так и формы более сложного информационного взаимодействия с окружающим миром, связанные с построением понятийных теорий, отражают не только свойства внешней среды, но и некоторые структуральные и функциональные особенности наших внутренних (мозговых) анализаторов, становится все более убедительной, поскольку за последнее время получен огромный материал, касающийся действия этих анализаторов. Неудивительно, что эта идея находит все больше сторонников среди ведущих советских философов. Вот что, например, пишет по этому поводу Д. И. Дубровский: «Если в первом приближении обычно подчеркивается только зависимость продукта отражения от отображаемого объекта, то при более глубоком рассмотрении отражательного процесса становится необходимым учитывать зависимость содержания указанного продукта от природы отображающей системы и ее особенностей в данный период. Лишь при этом условии можно с большой степенью точности выделить такое содержание, которое действительно независимо от субъекта. Прямолинейное выведение всех свойств отображения только из внешнего объекта как раз и приводит зачастую к субъективизму и грубым заблуждениям» ([40], стр. 179).

В вопросе об активности человеческого сознания, отражающего мир, точка зрения В. И. Ленина противостояла кантианским взглядам, предполагающим существование априорных законов восприятия. По Канту разум категорически предписывает форму тем представлениям о действительности, которые в нем возникают. По Ленину разум приспосабливается к природе, делая это постепенно и в меру своих возможностей, которые все время расширяются.

Необходимо также подчеркнуть отличие ленинского допущения селекционной работы разума и того факта, что разум по необходимости «омертвляет» действительность, от «гуманизма» Шиллера, который от того же исходного пункта пошел в совсем другом направлении. Активность психики, которая в понимании Джемса приобретает смысл «деятельности», а в понимании Ленина — «адаптации к объективной реальности», у Шиллера затмевает собою все и становится определяющей силой. Нам полезно здесь ознакомиться с кратким, но достаточно ясным изложением «гуманистической» концепции, от которой решительно отмежевался Ленин как раз в то время, когда эта концепция только возникла и приобрела огромную популярность.

«Гуманизм сам по себе представляет простейшую философскую концепцию: он сводится просто к принятию того взгляда, что философская проблематика касается человеческого существа, стремящегося постигнуть чувственно данный ему мир средствами своего ума. Даже прагматизм не может претендовать на большую простоту и большую близость к тривиальности когнитивного метода, ибо если человек не будет учитывать в своих рассуждениях относительно опыта своей собственной природы, то о чем же, простите, он будет рассуждать? Какая польза будет ему от постижения совершенно чуждой ему вселенной? И тем не менее, даже прагматизм подвергается нападкам меньше, чем великий принцип, что человек есть мера собственного опыта и, следовательно, неискоренимый фактор любого данного в опыте мира. Протагоровский принцип может иногда показаться парадоксальным введенным в заблуждение людям, которые полагают, что он противоречит «независимости» «внешнего мира». Однако это — результат недоразумения. Гуманизм не вступает в противоречие с реализмом здравого смысла; он вовсе не отрицает того, что обычно понимают под «внешним миром». Он весьма уважает прагматическую ценность понятий, которые фактически работают — в противоположность метафизике, которая презирает такие понятия. Он лишь настаивает на том, что «внешний мир» реалистов все же зависит от человеческого опыта и осмеливается также добавить, что материал человеческого опыта не полностью определяется конструкцией действительного внешнего мира» ([28], стр. 12—13)

Как мы видим, Шиллер начинает с посылок вполне приемлемых для сторонника материалистической версии сенсуализма. Но выводы, которые он делает из этих посылок, граничат уже с субъективным идеализмом. Это происходит потому, что «внешний мир» в смысле «картина, которую строит человечество о внешнем мире в соответствии со своими текущими возможностями познания» незаметно смешивается с реально существующим и н е з а в и с я щ и м о т у р о в н я н а ш и х з н а н и й внешним миром, допущение существования которого является основной гносеологической и методологической установкой диалектического материализма (без этого допущения не обходится также ни один ученый, на какой бы «теоретической» философской платформе он ни стоял). В дополнение к той критике, которую высказал в адрес подобных утверждений еще В. И. Ленин, сделаем одно замечание, которое, между прочим, относится и к некоторым заявлениям Джемса. Шиллер хочет доказать основное положение гуманизма — необходимость принять субъективную полезность как критерий истинности, а в качестве решающего аргумента приводит следующее соображение: какую субъективную пользу приносят философские установки, не совпадающие с гуманизмом? Иначе говоря, он уже в исходном утверждении принимает то, что потом собирается доказывать начиная с еще необоснованного применения своего критерия к частному случаю проверки на истинность философских систем.

Теперь нам следует перейти к более узким аспектам вопроса, касающимся чистой методологии. Здесь диалектический материализм устанавливает непременное принятие при проведении любого экспериментального или теоретического научного исследования предположения, что сознание, в частности, сознание экспериментатора в физических опытах или испытуемого в психологических измерениях, является лишь частью объемлющего сущего — материального мира, не зависящего от этого сознания. Как мы только что сказали, подавляющее большинство естествоиспытателей всегда стоят на этой точке зрения (на это неоднократно указывал В. И. Ленин) и как раз поэтому получают объективно ценные научные результаты.

Можно поставить вопрос, в каком смысле следует понимать диалектико-материалистический тезис о познаваемости мира, если процесс его познания является потенциально бесконечным? Анализ всей совокупности ленинских высказываний по этому вопросу не оставляет сомнений в том, что под познаваемостью мира понимается *разрешимость в каждый данный исторический момент тех конкретных проблем, которые выдвинуты на повестку дня развитием науки*. Познаваемым в прямом смысле слова является объект, поставленный закономерным ходом вещей в поле зрения науки; познаваемой в предельном, теоретическом смысле является материя как таковая.

Поучительно сопоставить эту трактовку познания с мнением такого выдающегося ученого как Д. Гильберт. Выступая в августе 1900 г. на 2-м Международном конгрессе математиков в Париже, он сказал:

«...убеждение в разрешимости каждой математической проблемы является для нас большим подспорьем в работе мы слышим внутри себя постоянный призыв: вот проблема, ищи решение. Ты можешь найти его» ([41], стр. 22). Как видно, и здесь «стихийная» философия естествоиспытателя совпадает в принципе с более тщательно разработанной философской концепцией диалектического материализма.

Итак, в вопросе о предустановленной гармонии Ленин занял вполне определенную позицию. Он подтвердил свою солидарность с известным утверждением Энгельса о «соответствии» между разумом и природой, происходящем из того, что «продукты человеческого мозга, будучи сами в конечном счете продуктами природы, не противоречат остальной природной связи, а соответствуют ей» ([36], стр. 160). Но далее он решительно подчеркнул сложность процесса познания и его асимптотический характер, а также то обстоятельство, что создаваемые нами понятийные структуры по необходимости (в силу объективных законов нашего мышления), хотя и помогают нам понять объективные свойства материи, являются несовершенными и приблизительными. Следовательно, принятие материи как внешней реальности, отражаемой сознанием, является не вопросом «чистого принципа» (как склонен считать неопозитивист), ничего не меняющего в нашем отношении к природе и самим себе. Это фундаментальное допущение влекло за собой признание законов природы, и, хотя не предписывало им заранее какую-либо конкретную форму, приводило к убеждению о том, что эти законы более стабильны и вечны, чем наше кратковременное существование, и что они распространяются на физическую сторону деятельности живых организмов как на часть материи. Одним из важных выводов из этого положения является заключение, что функционирование психики тоже подчинено некоторым непреложным и вечным законам. Последующее развитие науки (в частности, логики и психологии) позволило составить определенное представление об их характере.

Глава 3

ВОЗРАСТАЮЩЕЕ ЗНАЧЕНИЕ ФОРМАЛЬНЫХ МЕТОДОВ В СОВРЕМЕННОЙ МАТЕМАТИКЕ

После того, как мы достаточно подробно рассмотрели ситуацию, возникшую в начале нашего века в философии и гносеологии, нам будет легче понять корни того движения в метаматематике, которое все более настойчиво стало отвергать выводы анализа и требовать пересмотра его оснований, главным образом — пересмотра фундаментальных положений теории множеств. В этой тенденции сказалась общая неудовлетворенность ученых теоретико-познавательными принципами, переставшими быть релевантными и все более явно возникавшая необходимость уделить в гносеологии место активности человеческой психики, существенно влияющей на создаваемый понятийный аппарат различных наук. Приближался тот момент, когда эффективное познание внешнего мира становилось невозможным без того, чтобы сделать существенный шаг вперед в познании человеческого мышления

Обрисованный нами философский фон, конечно, действовал на метаматематику не прямо, а косвенно. В ранних «оппозиционных» теориях, касающихся оснований математики, сказывался скорее общий дух эпохи, чем конкретные философские школы.

Первым из математиков подверг критике онтологизацию множеств Л. Кронекер (1823—1891). В последний период жизни он выдвинул систему взглядов на математическую науку, которые современники называли «революцией» (правда, те, кто был настроен к Кронекеру недоброжелательно, предпочитали слово «путч»). Главной мишенью его нападок стали иррациональные числа, а провозглашенная им программа заключалась в *арифметизации анализа*, понимаемой таким образом, что в нем не осталось никакого места для теоретико-множественных понятий. Обсуждая, например, теорему Линдемана о трансцендентности числа π, Кронекер с едкой иронией спрашивал: «Какова польза в вашем прекрасном исследовании, касающемся π? Зачем изучать такие проблемы, если иррациональных (а значит и трансцендентных) чисел не существует?» Можно себе представить, с каким скептицизмом должен он был встретить канторовское доказательство несчетности континуума. Согласно основному убеждению Кронекера, натуральные числа являются благороднейшими созданиями всевышнего и ни одного числа, кроме натуральных (и производных от них рациональных, множество которых счетно), не существует.

Вот как описывает Е. Т. Белл критику, с которой Кронекер обрушился на теорию множеств:

«Поскольку рассуждения, применяющиеся Кантором в теории бесконечных множеств, большей частью неконструктивны, Кронекер считал их опасной формой математического умопомешательства. Видя, как математика под влиянием Кантора превращается в сумасшедший дом и будучи страстно преданным тому, что он считал истинной математикой, Кронекер обрушился на «позитивную теорию бесконечности» и на ее легко ранимого автора, используя все средства, попадавшие ему под руку, и трагическим результатом этого было то, что в дом умалишенных попала не математика, а сам Кантор» ([7], стр. 570).

Кронекер противостоял не только Кантору, а также и Вейерштрассу, развившему представление о действительных числах как последовательностях. Как можно сейчас полагать, основная причина, по которой Кронекер не мог принять ни той, ни другой концепций, состояла в его непоколебимой убежденности, что математика может, сохраняя надежность, использовать только натуральные числа (их «создал бог») и те понятия, которые удается свести к натуральным числам с помощью конечного числа шагов. Это можно назвать требованием финитного конструктивизма на базе арифметики. Естественно, что в рамках такого осторожного подхода к математическим построениям не укладывался ни один из славных результатов Вейерштрасса и, таким образом, дело жизни последнего полностью обесценивалось, с точки зрения последователей Кронекера. Вейерштрасс с горечью писал об этом в одном из писем Софье Ковалевской (в 1885 году):

«Но что хуже всего, Кронекер использует весь свой авторитет, чтобы объявить тех, кто разрабатывает современную теорию функций, грешниками перед богом... Когда Кронекер делает следующее заявление, которое я привожу слово в слово: «Если время и силы позволят мне, я сам продемонстрирую математическому миру, что не только геометрия, но также арифметика может быть отправной точкой в анализе и обосновать его гораздо более строгим способом. Если я не смогу сделать этого сам, сделают те, кто придет после меня..., и они поймут полную некорректность всех тех заключений, которые делает так называемый анализ в настоящее время»,— когда такое заявление делает человек, чей выдающийся талант и значительные заслуги в науке меня, как и всех его коллег, искренне восхищают, это не только издевательство над теми, чье знание он объявляет ошибкой, а предмет неустанных трудов и размышлений предает анафеме, но это также прямой призыв к молодому поколению оставить его нынешних лидеров и собраться вокруг него как приверженцев новой системы, которая д о л ж н а быть создана. Поистине это печально, и я полон сожаления, видя, что человек, чья слава не подвергается сомнению, побуждаемый хорошо понятными причинами — чувством собственной значимости,— доходит до таких крайностей, неприятных последствий от коих для других людей он, видимо, не замечает» ([7], стр. 480—481).

Как очевидно из этих строк, Вейерштрасс (ему было в то время 70 лет и здоровье начало ухудшаться) воспринял критику Кронекера как личный выпад и объяснял ее болезненным неудовлетворенным честолюбием. Но нам вполне ясно сейчас, что это была, несомненно, чисто научная, принципиальная критика, естественно исходившая из особого взгляда Кронекера на содержание таких понятий, как «доказательство» и «существование». Обвиняя Кронекера в оригинальничании ради геростратовой славы (его больше всего сердило, что Кронекер не довольствуется «заслуженной» славой, добытой в области обычной математики), Вейерштрасс проявлял необъективность и даже наивность уже потому, что ничего особенно оригинального Кронекер, по существу, не выдвигал. Он просто вернулся к рассмотрению более чем двухтысячелетней проблемы существования актуальной бесконечности, затронутой Аристотелем, обсуждавшейся средневековыми схоластами, служившей пищей для размышления многих философов разных эпох. Эту затрагивающую основы теории познания проблему Кронекер перенес на конкретную научную область. В этом отношении его можно признать математиком более глубоким, чем многие его современники. Его же слова о тех, «кто придет после», являются просто-таки пророческими. Если провозвестником «новой религии» и виновником математического раскола нужно по праву считать Брауэра, то Леопольду Кронекеру должна быть отведена роль предтечи — именно он подготовил сцену для выхода Брауэра, интуиционистов, ультраинтуиционистов и конструктивистов и публично провозгласил их скорый приход.

Второй фигурой крупного масштаба, действовавшей в период безраздельного господства «классической» математики, но способствовавшей появлению новых взглядов в основаниях математики, был Анри Пуанкаре (1854—1912). Его выступления по философским вопросам науки так же были реакцией на математической платонизм, но направлялись по отличной от кронекеровской линии.

Занимаясь основаниями математики, Пуанкаре интересовался не столько конструктивностью и природой иррациональных чисел, сколько значением аксиоматических методов в математике. В ходе этих раздумий Пуанкаре разработал точку зрения *конвенционализма*, оказавшую впоследствии большое влияние на становление философского неопозитивизма. Истоки этой линии творчества Пуанкаре возможно лежат в его изящном математическом результате, который заключался в построении еще одной евклидовой модели для неевклидовой геометрии. Мы опишем частный случай модели Пуанкаре, реализующий на евклидовой плоскости геометрию Лобачевского.

Рассмотрим некоторую полуплоскость, которую будем называть «плоскостью». Всякую полуокружность с центром на границе полуплоскости, а также всякую прямую, перпендикулярную границе полуплоскости, будем называть «прямой». «Точкой» назовем обычную точку, т. е. в этом случае названия в кавычках и без кавычек будут у нас означать одно и то же. «Углом» между двумя «прямыми» назовем обычный угол, как он определяется для пересекающихся линий (угол между касательными в точке пересечения). «Параллельными» назовем «прямые», которые имеют общую точку на границе полуплоскости. Рассмотрев «треугольники», состоящие из отрезков «прямых», мы обнаружили, что сумма «углов» у них меньше двух прямых. Поинтересуемся теперь, сколько «прямых» можно провести через данную «точку», «параллельно» данной «прямой». Мы быстро обнаружим, что таких «прямых» всегда можно построить две. Можно, далее, с помощью особой формулы ввести «расстояние» между двумя «точками», так что оно будет удовлетворять всем требованиям, предъявляемым к расстоянию — окажется всегда неотрицательным, равным нулю только в случае совпадения точек, симметричным и удовлетворяющим неравенству треугольника (фактически вводить это расстояние мы здесь не будем; желающие изучить вопрос более подробно, могут найти материал в книге Л. Феликс «Элементарная математика в современном изложении». М., 1967). После этого на нашей «плоскости» установится метрика и можно будет строить геометрию, то есть доказывать различные теоремы, относящиеся к нашим объектам, названия которых взяты в кавычки. Среди этих теорем будет, скажем, такая: «Через каждую «точку» можно провести бесчисленное множество «прямых» не пересекающихся с данной «прямой», и все эти «прямые» будут лежать внутри «угла», образованного двумя «прямыми», «параллельными» данной». Заметим, что доказательство этого и других утверждений мы будем вести обычными методами евклидовой геометрии, поскольку закавыченные объекты есть объекты обычной евклидовой геометрии, расположенные на полуплоскости. Так возникнет некая система утверждений, выведенная на основании аксиом евклидовой геометрии и относящаяся к закавыченным объектам.

Теперь разовьем другую систему утверждений. Примем аксиоматику геометрии Лобачевского, регулирующую поведение точек и прямых, т. е. заменим пятый постулат Евклида постулатом Лобачевского, оставив остальные аксиомы без изменения. Тогда можно будет вывести множество теорем, относящихся к точкам и прямым неевклидовой плоскости.

После этого сравним две полученные разными путями системы утверждений. В результате сравнения мы убедимся, что теоремы оказались в точности аналогичными: каждой теореме, выведенной при помощи евклидовых постулатов и утверждающей нечто о «точках» и «прямых», будет соответствовать теорема, выведенная при помощи аксиоматики Лобачевского и утверждающая т о ж е с а м о е об обычных точках и прямых.

Эта модель, как и прежние модели (первая из них принадлежала Бельтрами, но требовала для реализации стереометрического рассмотрения), имела главной целью доказать равную степень непротиворечивости геометрий Евклида и Лобачевского, их одинаковую логическую надежность. В самом деле, если бы в геометрии Лобачевского можно было получить противоречие, то есть доказать некую теорему и ее отрицание, то такое же противоречие можно было бы получить и в геометрии Евклида в системе высказываний, относящихся к тем евклидовым объектам, названия которых мы взяли в кавычки. Разумеется, верно и обратное: если противоречие реализовалось бы в евклидовой геометрии, то его можно было бы воспроизвести и в геометрии Лобачевского с помощью модели Пуанкаре.

Осмысливая этот результат, Пуанкаре пришел к выводу, что свойства прямых условны, а наше знание о них относительно.

Сравнивая релятивистскую позицию Пуанкаре с господствовавшими тогда платонистскими взглядами на природу математических объектов, можно констатировать, что первый стоял на более реалистической платформе. Известно, что В. И. Ленин воздал должное А. Пуанкаре как крупному ученому, но критиковал его философские взгляды. Оглядываясь назад, мы видим, что ценными оказались именно научные идеи Пуанкаре, в то время как его гносеологические выводы, сделанные под влиянием распространенной тогда идеалистической философии, не послужили какому-либо развитию познания и остались интересными лишь для историка.

Согласно исходным положениям конвенционализма, надлежало тщательно исследовать дедуктивные возможности всякой теории, отвлекаясь н а э т о в р е м я от аналогии с внешними объектами, могущими быть сознательными или бессознательными прообразами элементов нашей теории, не позволить названиям этих элементов, заимствованным обычно из естественного языка, увлечь наш ум на путь ассоциаций и считать эти названия совершенно условными, а уже п о с л е э т о г о устанавливать (по соглашению!) интерпретацию фигурирующих в дедуктивной теории элементов. В рамках конвенционализма невозможно было утверждать существование непосредственно открытых человеческой интуиции первоэлементов математического мышления, вроде множеств, поэтому Пуанкаре стоял в стороне от увлечения множествами. Но по этой же причине он не мог встать на точку зрения Кронекера — признать первоэлементами натуральные числа. Вообще, позиция конвенционализма скорее имела негативные, чем позитивные достоинства, но в тот период это как раз было полезным.

Нам интересно познакомиться с тем, как характеризовал взгляды Пуанкаре его современник, французский философ Л. Ружье.

«... открытие неевклидовой геометрии было началом значительной революции в теории познания и, следовательно, в наших метафизических концепциях, касающихся человека и вселенной. Коротко можно сказать, что это открытие имело следствием крушение той дилеммы, в которой требованиями традиционной логики замыкалась теория познания: принципы науки суть или *аподиктические* истины (логические заключения, синтетические априори) или *ассерторические* истины (факты чувственного наблюдения). Пуанкаре, почерпнув свое вдохновение из трудов Лобачевского и Римана, указал, что в особо важном случае геометрии возможно и другое решение: принципы могут быть простыми условными соглашениями... Однако, далеко не независимые от наших умов и природы, они существуют только благодаря молчаливому соглашению всех умов и в сильнейшей степени зависят от фактических внешних условий того окружающего нас мира, в котором нам пришлось жить» ([69], стр. 167).

Но если принципы «в сильнейшей степени зависят» от внешних условий объективно существующего мира, то по какому праву они могут быть названы «условными соглашениями»? Ведь это противоречит языковым нормам. Если мы употребляем прилагательное «условный», то обычно понимаем под этим возможность пересоглашения и отмены значения, определенного условием.

Подводя итог рассмотрению конвенционализма, можно сказать, что в этом учении было больше от личности Пуанкаре, чем от четко разработанного метода. В руках такого выдающегося ученого, которым был его создатель, конвенционализм мог представлять некоторую эвристическую ценность. Однако доведенный до абсурда далеко не столь выдающимися последователями, он приводил ко многим заблуждениям. Вот, что, например, пишет об этом Н. Бурбаки:

«Мы были свидетелями также, особенно в то время, когда аксиоматический метод только начал развиваться, расцвета уродливых структур, полностью лишенных приложений, единственное достоинство которых заключалось в том, что, изучая их, можно было дать точную оценку значимости каждой аксиомы, выясняя, что происходит, когда эту аксиому удаляют или видоизменяют» ([17], стр. 11).

Хотя, как мы только что показали, Пуанкаре внес важный вклад в движение за пересмотр оснований классического математического анализа, одним из ведущих лидеров «оппозиции» нужно считать голландского математика Л. Брауэра (1881—1966). Вторым лидером был Г. Вейль (1885—1955).

Иногда полагают, что скептицизм Брауэра по отношению к теоретико-множественному мышлению математиков был вызван парадоксами теории множеств, два из которых (парадокс Рассела и парадокс Кантора) мы выше рассмотрели. Действительно, наличие антиномий такого типа не может не вызвать неудовлетворенности и подозрения по поводу логической прочности фундамента математики (точнее — по поводу прочности канторовской теории множеств) у всякого независимо мыслящего ученого и не заставить задуматься над правомочностью безоговорочного употребления такого понятия, как произвольное множество. Возможно, антиномии действительно явились поводом для открытого выступления Брауэра. Но уже при жизни Брауэра было найдено несколько способов избавить теорию множеств от обнаруженных парадоксов и разработана достаточно надежная аксиоматическая теория множеств Цермело — Френкеля и фон Неймана — Бернайса — Гёделя. Но Брауэр отнюдь не снял после этого своих возражений против «классической» математики, а постоянно развивал их и пытался создать новую позитивную платформу оснований математики. Изгнание парадоксов ничего не меняло для Брауэра, поскольку его замыслы простирались гораздо дальше простого «ремонта». Брауэр не только снова поднял и заострил проблемы, связанные с бесконечностью, поставленные еще философами элейской школы, но и подверг сомнению правильность использования в математике логических законов. Как пишет Н. А. Шанин, «критика абстракции актуальной бесконечности предпринималась в истории науки и до Брауэра. Однако критика, данная Брауэром, затрагивает не только абстракцию актуальной бесконечности, но и классическую логику, строящую теорию логического вывода (в случае бесконечной области объектов изучения) на основе тех представлений, которые вырастают из абстракции актуальной бесконечности. Благодаря этому критика, предпринятая Брауэром, существенно шире и глубже той критики, с которой выступали предшественники Брауэра» ([42], стр. 18).

Исходным требованием Брауэра (и Вейля) было, по-видимому, придание математической науке достаточной надежности — требование, само по себе никем до них не отвергавшееся и открыто признанное не обязательным некоторыми влиятельными школами совсем недавно [1]. Расхождение с большинством состояло у них в критерии надежности и выборе тех средств, которыми надежность должна быть обеспечена. Брауэр и Вейль отвергли как ненадежное понятие актуальной бесконечности, то есть понятие бесконечного множества существующего одновременно всеми своими элементами, законченного в своем построении, а также объявили неправомочной сложившуюся математическую традицию применять к бесконечностям обычную «аристотелеву» логику, включающую в себя закон исключенного третьего. Они считали, что такое применение может привести к ошибочным результатам. Дело в том, что аристотелева логика появилась в нашей речи в результате практики оперирования с конечными предметами, поэтому, по мнению Брауэра, нет никаких оснований переносить ее на объекты, не являющиеся конечными, никакой вещественной практики обращения с которыми у нас нет и не может быть.

Поясним эту мысль на примере. «Близнецами» назовем два простых числа, отличающихся на две единицы, то есть стоящих в ряду нечетных чисел подряд. Близнецами являются 11 и 13, 17 и 19, 41 и 43, 101 и 103 и т. д. До сих пор неизвестно, является ли множество близнецов бесконечным. Определим теперь число H, которое равно единице, если множество близнецов конечно, и равно нулю, если оно бесконечно. Можем ли мы, применяя привычный закон исключенного третьего, заявить, что истинным явля-

[1] Например, школой Н. Бурбаки.

ется утверждение: «H равно единице или H равно нулю»? По мнению Брауэра, это утверждение нельзя считать истинным. На языке формальной логики это означает, что дизъюнкция $(H = 1) \vee (H = 0)$ не может считаться тавтологией. Другое дело, если бы мы определили H так: 1, если имеются близнецы между 10^{10} и 10^{20}, и 0, если их там нет. В этом случае мы имели бы дело с конечным объектом — участком натурального ряда,— а такие объекты, как мы знаем из опыта, подчиняются закону исключенного третьего: они либо обладают каким-то свойством, либо не обладают им. В этом случае дизъюнкция $(H = 1) \vee \vee (H = 0)$ должна считаться истинной.

Такая трактовка дизъюнкции, то есть непринятие двузначной логики как универсального инструмента исследования, была вызвана следующими соображениями. Допустим, нам удалось из предположения о том, что существует число M, за которым уже нет близнецов, вывести «стандартную ложь», скажем, утверждение «$1 = 0$». Следует ли нам в этом случае считать, что нами доказана теорема о бесконечности числа близнецов, то есть утверждение «$H = 0$»? Сторонники взглядов Брауэра на логику в математических рассуждениях считают, что ни в коем случае нельзя, тогда как «классики» категорически ответят, что можно. Сейчас мы увидим, что аргументы первых (несмотря на естественное желание всякого человека сразу согласиться со вторыми) не лишены убедительности. Чтобы лучше была видна идея аргументов, введем для предиката «простое» обозначение P.

Высказывание «$H = 0$» равносильно следующему высказыванию:

$$\forall M \exists N > M\, (P(N) \,\&\, P(N+2))$$

(«Для любого М существует превосходящее его N такое, что N и $N + 2$ оба простые числа»). Высказывание «$H = 1$» равносильно следующему:

$$\exists M \forall N > M \urcorner (P(N) \,\&\, P(N+2))$$

(«Существует М такое, что для любого большего числа N невозможно, что N и $N + 2$ оба простые числа»). Теперь представим, что нам удалось осуществить указанный вывод, то есть доказать утверждение:

$$\urcorner (\exists M \forall N > M \urcorner (P(N) \,\&\, P(N+2))). \qquad (*)$$

Согласно обычным правилам логики из доказанного (*) следовало бы первое из наших высказываний, т. е. «$H = 0$», так как (*) означает ($H = 1$), а вследствие истинности дизъюнкции $(H = 1) \vee (H = 0)$ (правило исключенного третьего), мы получаем $H = 0$. Но для Брауэра из (*) не следует первое наше высказывание, поскольку он не признает истинности этой дизъюнкции, и опровержение ее первого члена не свидетельствует об истинности второго. Глубокие побудительные причины такой позиции лежат в следующем: если бы Брауэр принял закон исключенного третьего, то ему пришлось бы считать доказанным из косвенных соображений (возникновение противоречия) высказывание «Для любого M существует превосходящее его N такое, что N и $N + 2$ оба простые». Но вот как раз этого Брауэр и не может принять, ибо для него утверждение «для всякого M *существует* N такое...» означает «Для всякого M *можно построить* N такое...» Способ же доказательства существования N с помощью отвержения одного из членов дизъюнкции и применения правила исключенного третьего не дает никаких указаний на то, как фактически построить N по данному M. Другими словами, перестройка логики, предпринятая Брауэром, вытекает главным образом из *конструктивного понимания утверждений о существовании математических объектов*. Именно тезис «существовать — значит быть построенным» явился исходным пунктом реформаторской деятельности Брауэра, произвел наибольшее впечатление на его современников и оказал самое существенное влияние на дальнейшее развитие возражений классической математике. Конструктивный тезис Брауэра воплотил в ясной формулировке сомнения, терзавшие многих мыслителей древности и средневековья, дал четкий облик тем реалистическим взглядам на математические объекты, которые высказывались довольно расплывчато многими математиками XVIII и XIX вв. Поэтому именно Брауэра надлежит назвать тем человеком, который сделал следующий крупный шаг вперед в исследовании проблемы бесконечного после Зенона Элейского. Кронекер не сформулировал своих сомнений в таком виде, чтобы был понятен их главный пункт, на котором можно было бы строить положительную программу; кроме того его принятие натуральных чисел как первично данных сущностей имело мистический оттенок. Как бы ни видоизменялись дальше взгляды на обоснование математики, не учитывать того, что сделано в этой области Брауэром не сможет уже ни один специалист, занимающийся математической логикой или философией науки.

Посмотрим теперь, в чем заключалась положительная часть учения Брауэра, существование которой отличало последнего от Зенона и других критиков актуальной бесконечности. Для этого лучше всего познакомиться с фрагментом из выступления Брауэра на международном конгрессе по философским проблемам науки, состоявшемся в Амстердаме в 1948 г. Это была еще одна попытка разъяснить идеи, которые он стремился положить в основу реформированной математики и которые так часто встречали непонимание или толковались неправильно. Мы по необходимости приведем довольно длинную цитату, не прерывая ее комментариями, поскольку каждое слово в ней имеет важный смысл.

«Прежде всего,— отмечал он,— мы должны уяснить все фазы сознания, совершающего переход от своих глубин к внешнему миру, в котором мы сотрудничаем и ищем взаимопонимания. Мое данное выступление вовсе не рассчитано на непременное наличие такого взаимопонимания, и в некотором смысле его можно рассматривать как монолог...

Сознание в своем глубинном убежище, как можно думать, медленно и пассивно совершает колебания между неподвижностью и ощущением. Вероятно, лишь в состоянии возбуждения становится возможным первый шаг упомянутого выше перехода. Этим шагом является движение времени. С помощью движения времени имеющееся в данный момент ощущение передается следующему моменту, так что сознание сохраняет бывшее ощущение как ощущение прошедшего времени и, более того, из-за различения между настоящим и прошедшим сознание отходит от них обоих, а также от неподвижности, и так возникает *мысль*.

В форме мысли сознание выступает как субъект, воспринимающий настоящее вместе с прошедшим в качестве объекта. А путем повторения этого процесса объект может быть расширен до всего множественного и пестрого мира ощущений...

Математика возникает в тот момент, когда от удвоения, порождаемого движением времени, отнимаются все качества субъекта и когда остающаяся пустая форма универсального субстрата удвоения подвергается, в качестве глубинной математической интуиции, неограниченному раскрытию, порождая новые математические сущности в форме *предопределенных или более или менее естественно формирующихся* бесконечных последовательностей полученных прежде математических сущностей, и в форме *математических категорий*, то есть свойств, которые мы предполагаем присущими прежде полученным математическим сущностям и удовлетворяющим условию, что если они относятся к определенной математической сущности, то они относятся и ко всем другим сущностям, определенным таким же образом» ([43], стр. 618—619).

Как мы видим, математика в понимании Брауэра является чем-то вроде исследования вдумчивой личностью потаенных глубин своей психики. Поскольку основой интеллектуальных процессов, на которых зиждется математическое творчество, является по Брауэру интуиция времени, то направление, заложенное Брауэром в основаниях математики, получило название интуиционистской математики, или *интуиционизма*.

Вот как описывает интуиционистскую математику видный последователь Брауэра А. Гейтинг:

«...Совершенно справедливо давать оценку математической системы по ее полезности. Я допускаю, что с этой точки зрения у интуиционизма до сих пор было мало шансов на успех, так как было бы преждевременно подчеркивать немногие и слабые признаки того, что он может принести какую-либо пользу в физике: по-моему, у него больше шансов принести пользу в философии, истории и социальных науках. Действительно, с интуиционистской точки зрения математика является изучением определенных функций человеческого разума и, как таковая, сродни этим наукам. Однако является ли польза единственным мерилом ценности? Легко привести такие сферы деятельности, которые никоим образом не служат науке и тем не менее не лишены ценности. Таковы искусство, спорт, развлечения. Мы заявляем, что у интуиционизма есть ценность такого же рода, которую трудно описать заранее, но которая ясно ощущается, когда непосредственно имеешь дело с ним. Вы знаете, как трудна для философов проблема определения понятия ценности в искусстве, однако любой образованный человек ощущает эту ценность. Аналогично обстоит дело и с ценностью интуиционистской математики» ([44], стр. 19]).

Итак, вопреки широчайше распространенному представлению о несхожести и даже противоположности «точных» и «гуманитарных» наук математика, по мнению интуиционистов, оказывается значительно более «гуманитарной» областью деятельности, чем, скажем, техника. Возможно даже, по невысказанному убеждению интуиционистов, она представляет собой самую гуманитарную науку, единственную *истинную науку о человеке*.

Второе, на что следует обратить сейчас внимание — это важная роль «чувства времени» в объяснении интуиционистами математической деятельности. Интересно сопоставить этот взгляд с высказываниями А. Бергсона о роли времени в работе сознания:

«Несомненно, что наша психическая жизнь полна неожиданностей. В тысячах случаев прошлое резко обрывается и будущее кажется нисколько не связанным с ним. Но отрывочность этих явлений выделяется только на непрерывной основе...

Наше сознание, искусственно выделившее и разделившее их, принуждено затем соединять их искусственной же связью. Для этого оно придумывает аморфное, безразличное, неподвижное я, в котором тянутся, нанизываются одно на другое психологические состояния...

Что же касается психической жизни, как она развертывается в покрывающих ее символах, то не трудно видеть, что время образует ее существенный материал» ([31], стр. 8—10).

Как мы видим, между Бергсоном и Брауэром в этом пункте имеется явное сходство. «Ощущение времени», из которого рождается арифметика, кладется в основу и такими современными интуиционистами, как Гейтинг. Конечно, философия Бергсона была весьма популярной в то время, когда формировались взгляды Брауэра и она могла воздействовать на выработку последним своей метанаучной платформы. И все же вряд ли следует уделять много времени вскрытию преемственности Бергсон — Брауэр — Гейтинг, ибо идея чистой интуиции времени как подножья арифметики имеет значительно более ранний источник — Канта. Несомненно, замысел Брауэра несет на себе печать кантианской трактовки одной из двух составных частей математики. Как известно, вторую ее часть — геометрию,— Кант основывал на чистой интуиции пространства. Утверждение Канта, что человеческий разум может воспринимать вещи лишь в терминах врожденного представления о трехмерном (евклидовом) пространстве, к сегодняшнему моменту можно считать окончательно и решительно опровергнутым. Его делает несостоятельным не только существование неевклидовых геометрий, к которым разум математика привыкает настолько, что не чувствует никакого различия между ними и евклидовой геометрией, но, главное, эксперименты психологов, установившие, что понятие трехмерного евклидового пространства не является имманентным элементом человеческого мышления, а вырабатывается у ребенка в результате сложного процесса обработки информации, доставляемой не только созерцанием, но и осуществлением операций. По поводу же ощущения времени как основы восприятия арифметических фактов обстоятельной критики, насколько нам известно, высказано пока не было.

Сказанное ни в коей степени не означает, что Брауэра надо трактовать как неокантианца. Как правильно пишет М. Бунге, «Долг математического интуиционизма Канта сводится к двумя идеям: а) по мнению интуиционистов время — но не пространство — есть априорная форма интуиции и по существу входит в понятие числа, порождаемое процессом счета; б) понятия математики по существу своему конструктивны: они не чистые знаки (формализм) и не постигаются в готовом виде (платоновский реализм идей), они дело человеческого ума. Первое утверждение, несомненно, кантианское, но со вторым согласятся многие мыслители, не разделяющие взглядов Канта» ([33], стр. 47).

Действительно, второе утверждение, пожалуй, примут многие философы и математики, которые не придерживаются учения об априорных формах восприятия, но делают акцент на *активности* человеческого сознания, постигающего окружающую действительность. Ясно, что от признания факта вмешательства некоторых структурных особенностей человеческого восприятия и мышления в процесс создания картины внешнего мира, от допущения того, что эти особенности в какой-то степени накладываются на образ объективной реальности, возникающий в нашем сознании, что человек постоянно пытается объяснить мир «поудобнее» для своих мыслительных механизмов далеко до тезиса Канта о возможности воспринимать мир только в готовой априорной раме и невозможности узнать что-либо о «вещах в себе». Диалектико-материалистическая гносеология допускает развитие структур нашего сознания, их постоянное совершенствование и приспособление к окружающему миру, в то время как кантианство исключает такое приспособление.

Нам очень важно подчеркнуть принципиальность различия между двумя указанными точками зрения, которые на первый взгляд могут показаться схожими.

Кантианец утверждает, что мы ничего не можем знать о вещах как таковых. Все что мы о них знаем, есть результат наложения законов нашего восприятия и мышления на остающееся нам неизвестным «нечто», находящееся вне нас и воздействующее на наши органы чувств. На всех наших представлениях и теориях лежит имманентная печать наших возможностей воспринимать и осмысливать. Отделить те стороны представлений и теорий, которые продуцируются вещами с их свойствами от сторон, которые продуцируются априорными законами восприятия, невозможно даже в принципе.

Материалист не отрицает, что как непосредственное сенсорное восприятие, так и понятийное мышление накладывают отпечаток своих особенностей на образ действительности, возникающий в нашем сознании. По его мнению, отрицать это — значило бы вступать в противоречие с данными психологии и психиатрии. Из клинической практики известно, что при мозговых травмах, задевающих некоторые внешние участки коры, не имеющие отношения к «сознанию» (т. е. являющиеся как бы внешним для нашего «я» преобразователем информации), вещи и люди представляются больному совсем не такими, как до травмы. Из собственного опыта мы знаем, что объяснение зависит от нашего настроения, самочувствия и так далее. Конечно, такие факторы не сказываются на построении науки, но это подтверждает влияние свойств мозга на картину окружающего, возникающего в глубинах нашей психики.

Данные современной психологии и семиотики (широко практикующих «структурный» подход в его рациональной, свободной от неубедительных философских натяжек форме) свидетельствуют, что совершенно необходимо тщательно отделять вмешательство нашего структурированного «я» в процесс образования ощущений и его роль в создании наших теоретических концепций. В первом и втором случае включаются в действие разные структуры и их нужно анализировать по отдельности, а затем изучать взаимосвязь между ними.

Правда, последователи Канта тоже не утверждают, что априорные законы чувственного восприятия совпадают с априорными законами мышления. Наоборот, они трактуют их как вполне различные. Именно об этом различии свидетельствует *учение Канта о категориях* — не одном, а множестве априорных законов, каждый из которых управляет своей областью. Классификация способов, с помощью которых мы создаем свои суждения — одна из центральных теорий Канта.

Однако материалист в этом пункте далек от кантианца. Главная причина, по которой он отвергает кантовский априоризм, состоит в том, что он не рассматривает связь между законами восприятия и мышления как раз навсегда заданную и неизменную. Более того, он делает акцент на том, что указанная связь постоянно развивается и меняется. Структуры нашего мозга, обеспечивающие некоторые стороны осознанного чувственного восприятия, не только не являются независимыми от понятийных структур, концепций, теоретических установок, но, в конечном счете, определяются ими. Последние, в свою очередь, сильно зависят от структур, управляющих непосредственным восприятием, и когда это возможно, используют особенности этих структур. Но важно то, что понятийные структуры в меньшей степени определяются сенсомоторными структурами (и совсем не определяются «априорными категориями»), чем объективной реальностью, к которой они, будучи весьма изменчивыми и мобильными, постоянно стремятся максимально приспособиться.

Кантианец в этом месте мог бы упрекнуть материалиста, что он ставит законы мышления выше законов чувственного восприятия, и тем самым склоняется к картезианству. Но материалист возразил бы, что с его точки зрения вопрос о предпочтительности или главенстве тех или иных структур лишен смысла. *Сенсомоторные структуры и понятийные структуры*, сказал бы он, *образуют единый, сильно взаимосвязанный комплекс, который со временем совершенствуется, адаптируясь к объективному миру*.

Чтобы сделать свою мысль более ясной, материалист мог бы привести следующую иллюстрацию. Математика, например, охотно использует сенсомоторные структуры, имеющиеся на данный исторический момент у людей, выработанные в процессе направленного эволюционного развития человечества (но не врожденные и не постоянные!). Иначе и не может быть, поскольку мышление должно опираться на знаки, а знаки удобно черпать из глубинных структур психики и их комбинаций. Поэтому математика активно взяла на вооружение чувственный образ множества, *возникновение которого обязано нашей способности* (она также не априорна, но очень устойчива и всеобща) мыслить совокупность как единое целое. В частности, математика опиралась на наше восприятие множества действительных чисел как совокупности точек отрезка, диктуемое особенностями наших зрительных и моторных анализаторов, расположенных в коре мозга. В итоге, мы имеем здесь явное воздействие сенсомоторных структур на понятийные структуры, приведшее к разработке канторовской теории множеств, которая дала важный логико-теоретический результат: континуум является более мощным множеством, чем множество рациональных чисел. Эта теорема была получена чисто дедуктивным методом, то есть уже не с помощью сенсомоторных, а с помощью понятийных средств. Но, будучи доказанной, она оказала сильнейшее влияние на чувственное восприятие математиков: ведь мы знаем, что сейчас каждый математик «видит» отрезок действительной оси по-иному, чем видели его прежде — его сенсомоторные и зрительные структуры изменились под действием обратной связи с понятийным аппаратом. Можно ли в таком случае сказать, какая структура более важна — чувственный образ множества, вызвавший к жизни теорию Кантора, или эта теория, переделавшая первоначальный образ?

В противоположность кантианству диалектический материализм подчеркивает, что активный комплекс нашей психики *развивается не изнутри, а под воздействием внешнего мира*, что он прилаживается к миру, а не диктует ему свои законы, как это полагал Кант. Продолжив в этой связи обсуждение примера с теорией множеств, мы можем высказать гипотезу, что в дальнейшем развитии этой теории последнее слово будет принадлежать не соображениям удобства использования сенсомоторных структур и рождаемых ими образов и не логической красоте понятийной системы, а тому, насколько эта теория будет плодотворной для развития всей совокупности наших знаний, адекватность которой, в конечном счете, определяется сложным и многоступенчатым критерием практики. Если существующая теория множеств исчерпает себя, окажется далее бесполезной и будет заменена, например, конструктивной теорией множеств, где нет никаких мощностей, превосходящих счетную, то математики по-прежнему, как до Пифагора, станут «видеть» отрезок числовой оси не более богатым точками, чем любое счетное множество.

При дискуссиях на эту тему, часто ставят вопрос: если мы вообразим разумное вещество с другой планеты, имеющее совершенно другие механизмы чувственного восприятия и мышления, то будут ли его теории похожими на наши? В ответе на этот вопрос еще раз проявится глубокое несходство позиций материалиста и кантианца. По мнению второго, «марсианин» будет видеть и понимать мир совершенно по-другому и все его теории будут другими. Первый выскажет иное мнение. Он не станет отрицать, что наука инопланетянина может по внешнему виду коренным образом отличаться от нашей, поскольку ему для познания мира будет удобно использовать совсем другие структуры чувственного восприятия, а также другую логику. И в то же время он подчеркнет, что, независимо от использования структур сознания, более привычных и удобных для предполагаемого разумного существа, у всех разумных существ теории получатся изоморфными, так как все они, какими бы свойствами ни обладали их носители, являются результатом адаптации к одной и той же объективно существующей реальности, то есть, если пользоваться кантианской терминологией, к одному и тому же «нечто».

С очерченной выше диалектико-материалистической точки зрения утверждение интуиционизма о конструктивности математических понятий представляется для оснований математики исторически прогрессивным. С другой стороны, вряд ли можно одобрить стремление докопаться до изначальных структур сознания, изменить которые не в силах ни развитие науки, ни даже медленное эволюционное изменение человеческого генотипа,— структур, на которых мы будто бы вынуждены всегда возводить все наше познание. По мнению Бунге, именно поиски окончательных корней, стремление к фундаментализму и полнейшей надежности были одной из главных побудительных причин реформаторской деятельности Брауэра, и это мнение не лишено оснований. Косвенное признание тезиса фундаментализма имеется у Гейтинга, хотя последний отличается от своего учителя бо́льшим релятивизмом: «В действительности все математики, даже интуиционисты, убеждены, что в каком-то смысле математика имеет отношение к вечным истинам» ([44], стр. 11). Слово «даже» употреблено здесь потому, что под неинтуиционистами понимаются «классики», то есть сторонники стихийного платонизма, считающие, что математика не просто «имеет отношение» к вечным истинам, а только и делает, что изучает эти истины. Интуиционизм родился именно из отрицания математического платонизма, но от фундаментальности отказаться не захотел. Он сохранил признание абсолютной истинности математических утверждений, но стал трактовать ее не как соответствие чему-то, что существует в фиксированном царстве идей и не зависит от нас, а как последовательное и корректное развертывание данных нам в глубинной интуиции структур, выскочить за пределы которых нам не дано. Понятно с этой точки зрения, почему Гейтинг назвал интуиционистскую математику «изучением определенных функций человеческого разума».

Рассмотрев некоторые важные особенности концепции Брауэра, мы подошли вплотную к одной из центральных его идей. Постулировав некие изначальные свойства человеческой психики и рассматривая математическое творчество как «чистое» выявление этих свойств, Брауэр отождествляет математику с *конструктивной деятельностью мышления, опирающейся на механизм построения в сознании неограниченно продолжающегося натурального ряда, но состоящий всегда из конечного числа элементарных шагов*. Таким образом, всякое правильно построенное математическое понятие рассматривается как состоящее из конечного числа кирпичиков, положенных друг на друга по четко определенным правилам. Здесь нам необходимо уточнить основной термин нашего исследования. Если истолковывать понятие «конструктивность» предельно широко, можно объявить конструктивным объектом и такое образование, как «множество всех множеств», поскольку оно является результатом определенного языкового построения, стимулированного некими (вызванными волевым усилием) расплывчатыми зрительными образами. Но в соответствии с установившейся в науке об основаниях математики традицией мы не будем понимать конструктивные объекты так общо. Всюду, где мы будем говорить о конструктивной процедуре, мы будем иметь в виду мыслительную деятельность, состоящую из конечного числа достаточно элементарных и отрефлексированных сознанием шагов, т. е. близкую к той, которую интуиционизм считает единственно допустимой в математике. Если же в каком-то контексте понятие «конструктивность» будет иметь другое значение, то мы на это укажем особо.

Посмотрим внимательнее, как понимают конструктивный мыслительный процесс интуиционисты, поскольку их трактовка этого термина сильно повлияла на его понимание всеми последующими школами, противопоставляющими себя «классикам», независимо от их симпатий к Брауэру. Снова обратимся к разъяснениям Гейтинга. Главным исходным понятием интуиционистской математики является понятие бесконечно продолжающейся последовательности (БПП). Вот, что оно означает:

«Если мы просмотрим доказательства теорем арифметики действительных чисел..., то мы увидим, что они зависят только от возможности неограниченного продолжения последовательностей; мы нигде не используем того факта, что их продолжение производилось по известному правилу; значит можно рассматривать их продолжение, не требуя существования такого правила...

Чтобы получить понятие БПП, нам не нужно вводить новые идеи, в частности, понятие выбора; слово «выбор» используется здесь в качестве сокращенного обозначения порождения компоненты последовательности. Идея закона, управляющего образованием последовательности, здесь необязательна и может быть устранена процессом абстрагирования. По этой причине я прошу вас считать понятие БПП достаточно ясным» ([44], стр. 44).

Анализируя это программное утверждение, мы легко обнаружим наиболее слабое и уязвимое место интуиционизма, из-за которого это направление сыграло роль скорее разрушителя и катализатора, чем прочного фундамента новой математики. Исследования интуиционистов претендуют на то, чтобы вывести математику из психологии, но те средства, которыми решается эта задача, оказываются чрезвычайно скудными и примитивными. Брауэр и Гейтинг, насколько нам известно, никогда не делали никаких специальных психологических экспериментов и даже не использовали в своих работах современного им психологического и нейрофизиологического материала. Интуиционисты развивают по форме и замыслу глубоко психологический подход, но по существу полностью игнорируют данные научной психологии и прибегают в качестве метода к одному лишь самонаблюдению, да и то выполняют его без какой-либо специально разработанной методики, а сводят его к «размышлению о собственном мышлении». Нетрудно понять, что цель исследований и их методология вступают здесь в явное противоречие. С одной стороны, интуиционисты хотят проследить, какие фундаментальные черты сообщают математике объективные законы, которым подчинена наша психика, поскольку они приписывают этим законам свойство обязательности для всех людей (мышлений) и свойство принудительности, но, с другой стороны, пытаются выявить эти законы чисто умозрительным путем. Фактически, они в поисках механизма, управляющего психикой, ориентируются лишь на собственное ощущение. Поэтому можно было бы возразить интуиционистам так: считая основные положения математики отражением объективных законов человеческого мышления, вы исследуете только один аспект мышления, а именно — тот, который доступен самоанализу и в какой-то степени рефлексируется сознанием; но почему вы убеждены, что не существует других аспектов, ускользающих от самонаблюдения и даже от сознания?

Конечно, это только одна сторона критики интуиционизма, остающаяся даже при всем стремлении понять и освоить то положительное, что она выработала. Но кроме того критика может идти и по другой линии. Думается, что вывести математику целиком из законов мышления (пусть даже из только наиболее всеобщих и объективных) просто невозможно. Нельзя не согласиться с Пиаже, который заметил: «совершенно непонятно, каким образом нейрофизиология сможет когда-либо объяснить, почему 2 и 2 составляют 4, или почему законы де дукции с необходимостью налагаются на деятельность со нания» ([39], стр. 61).

Еще одно глубокое внутреннее противоречие инту ционизма состоит в следующем. Это течение, старающеес реконструировать фундаментальные процессы сознани (точнее, мышления), делающие возможным математическо творчество, ищет в деятельности нашего интеллекта лиш те стороны, которые имеют конструктивный характер (смысле, который был пояснен выше) и достаточно легк могут лечь в рамки точных определений. Поэтому можн сказать, что Брауэр, Вейль и Гейтинг, претендуя на пси хологизм, остаются во всех работах профессиональным математиками и их средства неадекватны предмету Как бы часто ни повторяли интуиционисты, что их кон цепция сугубо не формальна, они постоянно оперирую точными определениями, абстрактными понятиями, стро гими логическими построениями (и тем самым дают пово многим авторам для попыток формализации интуициони стской логики).

Л. Брауэр и Г. Вейль совершенно произвольно выб рали из «потока сознания» (а еще лучше сказать из «пото ка мышления», ибо в мышлении, как доказано экспери ментально, присутствуют и подсознательные элементы такие факторы, которые можно заметить в самом себ при внимательном самоанализе. Однако ниоткуда не сле дует, что психологический фундамент математики сводит ся только к этим факторам. Более того, почти наверняк можно утверждать, что многие важнейшие предпосылки математического творчества коренятся в тех свойства мышления, которые проходят вне самонаблюдения. Мы уже останавливались на значительной роли зрительны образов в возникновении основных положений теори множеств; печать других корковых анализаторов лежи и на других математических идеях. Совершенно непонят но, как можно учесть специфику этих анализаторов с по мощью умозрительных рассуждений — для этого необхо димы серьезные нейропсихологические исследования. Та кого рода исследования стали сейчас довольно многочис ленными, и в одной из последующих глав мы соотнесе их основные результаты с метаматематикой. Здесь же от метим, что интуиционисты не считались с нейропсихоло гией не потому, что не знали о ее существовании, а и принципиальных соображений. Возражение такому «интеллектуальному аскетизму», сознательно ограничивающему себя в методологии, выдвигал известный американский психолог Д. Дьюи:

«Новейшая объективная психология открывает кратчайший путь, если не с научной, то с методической точки зрения, к плодотворным концепциям мыслительной деятельности, а значит и к улучшению наших логических теорий — если мы признаем, что логика и мысль связаны между собою. Для наших современников взаимодействие философии и важнейших форм чувственного опыта облегчается тем, что они постоянно сталкиваются с методами и выводами психологии. Абстрактные науки, например, математика и физика, оставили глубокий след на традиционной философии. Со своим преувеличенным стремлением к формальной строгости они не раз пытались заслонить от философии экзистенциальные проблемы. Удаленность психологии от этих абстракций, ее близость тому, что явно гуманистично, позволяет надеяться на более благожелательное отношение к этим вопросам в настоящее время» ([45], стр. 25).

Требование выражать факты сознания в понятиях широкого охвата у интуиционистов выполнено не было. В результате вышло так, что их учение, которое может заинтересовать как математика, так и психолога, все же не стало ни математикой в строгом смысле слова, ни тем более психологией. Это фактически признал сам Гейтинг:

«Его (интуиционизма.— *В. Т.*) предмет — конструктивная математическая мысль — однозначно определяет его посылки и помещает его не внутрь классической математики, а рядом с ней. Последняя изучает совсем другой предмет, чем бы он ни являлся» ([44], стр. 13).

Таким образом, интуиционизм, как можно полагать, не оказался способным выполнить свой первоначальный план построения новой математики и в позднейшей стадии развития, по существу, отказался от этого плана, ограничившись более скромными задачами. Тем не менее, заслуги Брауэра и его последователей должны быть оценены очень высоко, ибо именно они и никто другой выступили с развернутой и аргументированной критикой логической обоснованности понятия актуально бесконечного множества произвольной природы и первыми облекли в более или менее ясную форму термин «конструктивная математическая процедура». Придать этому термину еще более точный смысл им, вероятно, мешало отсутствие некоторых математических понятий, о развитии которых будет сказано в следующей главе.

Выдвижение Брауэром своих возражений и своей позитивной платформы вызвало в свое время целую бурю — взрыв симпатий и взрыв негодования. В числе негодующих был и Гильберт, стойко веривший в предустановленную гармонию, а значит и в правомочность оперирования актуальной бесконечностью. Он говорил: «Отнять у математиков закон исключенного третьего — это то же, что забрать у астрономов телескоп или запретить боксерам пользование кулаками». Дальше он продолжал: «Я удивлен, что математики сомневаются в незыблемости вывода при помощи закона исключенного третьего. Я удивлен еще более тем, что сейчас объединилась, по-видимому, целая группа математиков, которые делают то же самое. Я более всего поражен тем фактом, что вообще в среде математиков может иметь невероятнейшее и эксцентричнейшее влияние сила гипноза одного темпераментного и остроумного человека» ([21], стр. 383).

Но, вопреки мнению Гильберта, процесс пересмотра оснований математики развернулся в двадцатом столетии, конечно, не вследствие гипнотического влияния Брауэра, а по гораздо более глубоким причинам.

В конце двадцатых — начале тридцатых годов нашего столетия начался период бурного расцвета математической логики и теории вывода. Анализ причин этого явления помогает глубже понять происхождение конструктивной математики

Общеизвестно, что логика в качестве систематического раздела знания возникла еще в древнем мире. Классическое ее изложение мы встречаем уже в сочинениях Аристотеля (384—322 до н. э.). Такое раннее становление логики должно нас удивлять не более, чем раннее становление астрономии. Разговорный язык, сложившийся несколько десятков тысяч лет назад, в период расцвета древних цивилизаций представлял собой реальность, не менее объективную в некотором смысле, чем звезды небосвода, поскольку правила построения фраз, являясь результатом коллективного творчества миллионов людей, не изобретаются никем индивидуально, и всякий вступающий жизнь субъект осваивает эти правила как нечто заданное извне. Так же как от познания созвездий и движения планет зависел успех ориентировки в пустыне или в море, от познания языковой реальности в развитых обществах, особенно в эллинских городах-государствах с их выборной системой занятия должностей, зависел социальный успех. Будучи экстрагированными из естественного языка, законы логики стали затем изучаться как самостоятельная сущность, с точки зрения выявления симметрии, обратимости и т. д. Итак, для выделения логики в самостоятельный предмет необходимы были два условия: 1) достаточная степень развитости той реальности, которая ее содержала; 2) достаточная значимость этой реальности. К середине прошлого века обоим этим условиям начала удовлетворять математика. После впечатляющих приложений математического анализа к разнообразным областях техники и естествознания резко возросло количество математических публикаций и количество математиков-профессионалов; язык формул и дедуктивных доказательств становился обиходным и привычным языком для тысяч людей. Что же касается его значимости, то она определялась все возрастающей ролью математики в наступающей эпохе естественнонаучного образа мышления. Наконец, настал момент, когда по отношению к новому развитому, широко распространенному и очень важному языку стало необходимым сделать то, что сделал Аристотель по отношению к естественному языку — выделить в чистом виде и проанализировать с точки зрения внутренних отношений правила составления фраз и текстов, то есть правила выведения одних формул из других и одних строгих утверждений из других. Так на повестку дня стала разработка теории математического вывода и математического доказательства, значительно отличающихся от общеязыкового вывода и общеязыкового доказательства.

Важное значение имели также внутриматематические причины. Как мы уже отмечали, на первых порах математический анализ был «наукой о природе»; в нем нерасторжимо были слиты естественнонаучные факты, выработанная в человеческом интеллекте в результате наблюдения за явлениями внешнего мира интуиция и элементы логики, проникшие как из естественного языка, так и из евклидовой геометрии. Поэтому на том этапе специальное изучение логических аспектов анализа не было особенно актуальным. Положение изменилось когда разразился «кризис интуиции», то есть когда обнаружились такие свойства материальных объектов, которые не могли быть объяснены или предсказаны простым «здравым смыслом» и потребовали создания сложных и многоступенчатых понятийных теорий. Теперь уже стало трудно сверять математизированную теорию «непосредственно с вещами» и требовался какой-то иной компас, позволяющий не сбиться с пути и вести исследование «правильным» способом. На роль такого компаса начал все более претендовать «строгий», то есть логический метод рассуждения. Ясно, что в результате этого потребность в изучении законов математической логики значительно возросла.

Нельзя не учитывать также общий философский фон рубежа прошлого и нынешнего веков. Примерно в это время закладывалась платформа неопозитивизма с его требованиями сосредоточить усилия на выработке «ясного языка». Нельзя, например, считать случайным, что К. Гёдель, внесший очень большой вклад в развитие формальной логики, был членом философского «Венского кружка», явившегося колыбелью современного неопозитивизма. Довольно модными становились заявления, будто древнейшие и глубочайшие проблемы философии, связанные с анализом соотношения между духовным и материальным, являются «псевдопроблемами», и хотя эти тенденции имели сугубо социальное происхождение, они прикрывались научной аргументацией и создавали психологическую атмосферу, в которой многие математики обращались к изучению скорее «формы», чем «содержания».

Такова была весьма противоречивая обстановка, при которой метаматематика — «рассуждение о математике» выступила как самостоятельная точная наука и все более становилась большим разделом расширившейся математики. Математическая наука достигла такого уровня, когда для нее стало возможным и необходимым собственными методами исследовать свои познавательные средства. Существенно отметить, что эти методы сделались исключительно эффективными. В середине XIX в. был сделан большой шаг вперед по пути осуществления мечты Лейбница о создании «алгебры рассуждения» — Дж.

Буль (1815—1864) заложил фундамент символической логики. Труд Буля, сначала почти незамеченный, к концу прошлого столетия приобрел широкую известность и явился образцом для многих замечательных работ в области метаматических исследований, которые привели в дальнейшем к резкому усилению интереса к математической логике и теории алгорифмов.

Резкому повышению интереса к теории математического вывода содействовал Д. Гильберт (1862—1943). Он разработал программу, которая сводилась к одному главному требованию: математизация метаматематики. Оно было вызвано теми же причинами, что и реформаторские предложения Брауэра. Начиная примерно с 1922 г. Гильберт, сделавший до этого крупнейшие вклады почти во все отрасли математики, переключил свое внимание в основном на основания математики. Такое направление его научных устремлений не было неожиданным. Мы знаем, что еще в 1899 г. им были написаны «Основания геометрии», так что вкус к исследованию формальных систем появился у Гильберта смолоду. В одной из своих знаменитых «проблем» (во второй) он ставит цель: доказать непротиворечивость арифметических аксиом; в другой (в шестой) указывает на необходимость математического изложения аксиом физики. Если учесть, что постановка этих проблем была осуществлена в 1900 г., то станет ясно, что строгая формализация математики (и других точных наук) являлась ведущим ориентиром для Гильберта всю жизнь, была его излюбленной мечтой, подобной мечте Лейбница об «Универсальной характеристике». Выполнение грандиозной задачи Гильберт откладывал, как можно полагать, из-за важных текущих исследований, но наконец настал момент, когда он счел необходимым приступить к самому главному. Мировой авторитет Гильберта и многосторонность его математической деятельности поставили его в положение «ответственного» за науку, которой он был предан безраздельно. Кризис теории множеств, вызванный парадоксами, и дискредитация математического платонизма в среде специалистов по основаниям были фактами, которыми Гильберт не мог пренебречь, но программа интуиционистов, о которых он говорил, что они хотят развалить математику, для него была неприемлема, поскольку объявляла недействительными многие результаты, которые не просто были дороги Гильберту, но развитию которых он немало способствовал своими трудами. Когда в результате выступления Брауэра положение обострилось, Гильберт решил оставить все другие дела и навести порядок во всем математическом здании теми же средствами, которыми он когда-то навел порядок в одной из его комнат — в геометрии. С начала двадцатых годов Гильберт неоднократно выступает устно и в печати с планом обоснования математики при сохранении всех ее главных достижений. Он часто говорит об этом плане в таких выражениях, что создается впечатление: его осуществление почти закончено и остались лишь кое-какие мелкие доделки, завершив которые, Гильберт опубликует очередную свою эпохальную работу. Такого рода обещания давались Гильбертом вплоть до 1930 г., когда стала известной теорема Гёделя (она была кратко изложена в конце 1930 г. и подробно в начале 1931 г.), которая установила невозможность реализации программы Гильберта.

В чем же конкретно состоял замысел Гильберта и какими средствами он хотел его добиться? Выступая 4 июня 1925 г. на съезде математиков, организованном в Мюнстере в память Вейерштрасса, Гильберт сказал:

«Благодаря гигантской совместной работе Фреге, Дедекинда и Кантора, бесконечное было возведено на трон и наслаждалось временем своего высшего триумфа. Бесконечное в своем дерзком полете достигло головокружительной высоты успеха.

Но реакция не заставила себя ждать; она разыгралась очень драматично. Произошло нечто, аналогичное тому, что случилось при развитии исчисления бесконечно малых. На радостях по поводу новых богатых результатов стали явным образом недостаточно критически относиться к законности умозаключений...

Надо согласиться, что состояние, в котором мы находимся сейчас в отношении парадоксов, на продолжительное время невыносимо. Подумайте: в математике — этом образце достоверности и истинности, — образование понятий и ход умозаключений, как их всякий изучает, преподает и применяет, приводит к нелепостям. Где же искать надежность и истинность, если даже само математическое мышление дает осечку?

Но существует вполне удовлетворительный путь, по которому можно избежать парадоксов, не изменяя при этом нашей науке. Те точки зрения, которые служат для открытия этого пути, и те положения, которые указывают нам направление, суть следующие:

1. Мы будем заботливо следить за плодотворными способами образования понятий и методами умозаключений везде, где является хотя бы малейшая надежда, будем ухаживать за ними, поддерживать их, делать их годными к использованию. Никто не может изгнать нас из рая, который создал нам Кантор.

2. Надо повсюду установить ту же надежность заключений, которая имеется в обыкновенной, низшей теории чисел, в которой никто не сомневается и где возникают противоречия и парадоксы только вследствие нашей невнимательности» ([21], стр. 349—350).

Далее Гильберт развивает взгляды на утверждения об актуально бесконечных множествах как на «идеальные высказывания». Он напоминает об огромной пользе, которую принесло математике понятие комплексного числа или понятие куммеровского «идеала», хотя ни первое, ни второе ничему реальному не соответствуют. Такое прагматическое отношение к искусственно построенным понятиям математики, польза которых состоит в унификации теории и придании ей стройности и красоты, нашло отклик как среди математиков, так и среди физиков. Сравним со взглядами Гильберта в этом пункте, например, взгляды Шредингера:

«Надо сказать, что картина природы, которую мы себе составляем на основе наших наблюдений, содержит значительно больше, чем непосредственно дают нам эти наблюдения» ([46]), стр. 18). Если учесть, что слова эти сказаны Шредингером в 1928 г., то вполне можно заподозрить, что он испытал влияние идей Гильберта об идеальных элементах.

Но если ненаблюдаемые элементы в физике представляют собой зачастую возможные (в принципе), или, как говорит Шредингер, «виртуальные» наблюдения (скажем, температура в центре звезды), а бесконечность всегда трактуется в ней как «очень большое», то в математике с идеальными элементами дело обстоит значительно сложнее. Реальными элементами в ней, согласно Гильберту, являются *конкретные знаки*, которые должны быть обозримы и четко различимы во всех частях. В качестве примера Гильберт привел знаки |, ||, |||, |||||.

В то же время, как считал Гильберт, в математике имеются элементы другого рода, которые нужно сохранять. В первую очередь к ним относится понятие актуальной бесконечности. Это понятие возникло в нашем сознании сложным путем, при его выработке используются дальние ассоциации, применяются сомнительные обобщения опыта, приобретенного при работе с конечными множествами, и т. д. Как же сделать его столь же надежным и обозримым сразу и во всех частях, какими являются реальные элементы математики? Путь один: сделать это понятие *формулой*, т. е. опять-таки знаком. В этом случае оно потеряет полумистическое значение, которое мы ему приписываем из «содержательных» соображений и превратится в нечто наглядное. Правда, при этом возникает другая опасность. Реальные элементы, хотя суть знаки, все же отражают какие-то фундаментальные стороны объективно существующего мира (например, натуральные числа отражают множественность вещей), поэтому при работе с ними мы не боимся впасть в противоречие — ведь это означало бы наличие противоречия в вещах, которого быть не может. Что же касается идеальных, вспомогательных элементов, то при действиях с ними мы уже не застрахованы от этого. Поэтому Гильберт прежде всего требует обращаться со знаками, представляющими идеальные элементы, с особой осторожностью. Он говорит:

«...Так как идеальные высказывания, именно формулы, сами по себе не имеют значения, поскольку они не выражают конечных утверждений, то логические операции над ними не могут производиться содержательно, как над конечными высказываниями. В таком случае логические операции и математические доказательства необходимо формализовать; это требует перевод логических соотношений на язык формул...

Как это может произойти? К счастью для нас, здесь оказывается та же предустановленная гармония, которую мы так часто встречаем в истории науки — которая пригодилась Эйнштейну, когда он для своей гравитационной теории нашел вполне разработанное общее исчисление инвариантов: в качестве такой успешно разрабатывавшейся предварительной теории мы находим а л г о р и т м л о г и к и. Правда, этот последний возник первоначально из совершенно других отправных точек зрения, и в соответствии с этим знаки логического исчисления первоначально были введены тоже только для сообщений; но будет последовательным, если мы теперь отвергнем значение логических знаков, как мы отвергли значение знаков математических, и объявим, что формулы логического исчисления сами по себе не имеют никакого значения и суть идеальные высказывания» ([21], стр. 358—359).

Эта установка и составляет главное содержание того, что получило название *программы формализации*, и в настоящее время ее можно считать во многом выполненной. Но это отнюдь не означает, что мечта Гильберта осуществилась. Современная формализация обеспечила только выполнение одной из целей Гильберта: возможность оперирования с утверждениями по некоторым четко определенным правилам (используют ли математики такую возможность — это уже другой вопрос; но *потенциально* они могут это делать во многих важных случаях, и мысль о потенциальной осуществимости дотошной формальной проверки умозаключений придает *некоторую* уверенность в надежности рассуждений). Однако основной задачей Гильберта, как мы знаем, было превращение метаматематики в строгую систему, относительно которой была бы доказана непротиворечивость. Такой замысел опирался на известное в то время конкретное доказательство такого типа. В 1921 г. Э. Пост установил непротиворечивость одного из простейших разделов математической логики — исчисления высказываний. Приведем идею этого доказательства, чтобы лучше понять, на какого рода технику возлагал надежды Гильберт.

Определим следующую систему L:

1. Знаками L являются $\urcorner$, $\supset$, (,), $A_1, A_2, \ldots$ Других знаков в L не существует.

2. Эти знаки можно писать подряд, располагая их *линейно*. При этом возникают *знакосочетания*. Нас интересуют не все знакосочетания, а лишь те из них, которые являются *формулами*. Даем определение формулы:

а) Любой из знаков $A_1, A_2, \ldots$ есть формула.

б) Если B и C — формулы, то $\urcorner(B)$ и $(B \supset C)$ тоже формулы. Другим способом формулы в L не возникают.

3. Нас будут интересовать главным образом не все формулы, а те из них, которые являются *теоремами*. Даем определение теоремы:

а) Если B, C, D — формулы, то

$$(B \supset (C \supset B));$$
$$((B \supset (C \supset D)) \supset ((B \supset C) \supset (B \supset D)));$$
$$((\neg C \supset \neg B) \supset ((\neg C \supset B) \supset C))$$

суть теоремы.

б) Если уже имеется некоторое количество теорем, то из них можно получать новые теоремы по правилу *модус поненс*, которое состоит в следующем: если B и $(B \supset C)$ суть теоремы, то C также есть теорема. Другим способом теоремы в L не возникают.

Итак, перед нами типичная «игра в символы». Прежде, чем обсудить вопрос, является ли такая игра серьезным фактором человеческого познания или же она может быть приравнена к развлечению типа шашек или домино, выясним, что означает непротиворечивость L и как ее можно доказать. Под этим свойством мы понимаем невозможность получить в данной системе, идя одним путем, теорему T, а идя каким-нибудь другим путем — теорему $\neg T$. Теперь докажем, что так получиться не может.

Используя пункт 3, можно показать, что если T и $\neg T$ — теоремы, а Φ — любая формула, то Φ также есть теорема. Это означает, что если в системе есть противоречие, то любая формула выводима, и множество формул совпадает со множеством теорем.

Теперь установим, что не любая формула в L является теоремой. Применим для этого алгебраический метод. Будем считать, что каждый знак A_1, A_2, . . . может принимать значение 0 или 1. Всякой формуле также припишем значение 0 или 1 по следующему правилу:

а) Если B имеет значение 1, то $\neg B$ имеет значение 0 и наоборот.

б) Если значение B есть 1, а значение C есть 0, то значение $(B \supset C)$ есть 0, иначе это значение есть 1.

Легко проверить, что теоремы, построенные по схемам пункта 3, независимо от значений входящих в них формул B, C, D, имеют всегда значение 1 (можно просто перебрать все варианты значений входящих формул). Далее, если B и $(B \supset C)$ имеют значения 1, то C обязательно также имеет значение 1 (иначе $(B \supset C)$ не могла бы иметь значения 1). Таким образом, мы приходим к заключению, что свойство иметь значение 1 обязательно для всех теорем, ибо оно присуще всем исходным теоремам и является *наследственным*, то есть сохраняется при применении правила модус поненс.

После этого совсем нетрудно доказать непротиворечивость L: для этого достаточно найти в этой системе формулу, имеющую значение 0. Такая формула не может быть теоремой, следовательно в системе не может быть противоречия (ибо иначе всякая формула была бы теоремой). Но формулой со значением 0 является любая формула из пункта 3, к которой вначале приписан знак $\neg$.

Теперь вернемся к проблеме: можно ли относиться к процессу выписывания все новых и новых теорем в формальной системе, используя ее «правила игры», как к важному занятию.

Сторонник формального метода, Гильберт не отрицал утверждения Вейля, что математика должна быть чем-то бо́льшим, чем простая игра в формулы. Не в меньшей степени, чем Вейль, он был склонен считать математику серьезнейшим и полезнейшим занятием, орудием познания мира. Ценность формальной системы, по мысли Гильберта, определяется тем, что ее в конечном счете можно превратить в *содержательную теорию*, осуществив *интерпретацию* (и в возможности такого превращения как раз и кроется «предустановленная гармония» в гильбертовском смысле).

Вот как, например, можно сделать содержательной систему L. Знаки $A_1, A_2, \ldots$ мы будем интерпретировать как *высказывания*, то есть такие языковые предложения, которые могут быть либо истинными, либо ложными. В первом случае будем приписывать высказыванию значение 1, во втором — значение 0. Знак $\neg$ будем интерпретировать как отрицание, знак $\supset$ как «следует» (импликация). Введем, далее, вместо $(\neg (B \supset \neg C)$ сокращенное обозначение $(B \& C)$, вместо $(\neg (\neg B \& \neg C))$ обозначение $(B \vee C)$, вместо $((B \supset C) \& (C \supset B))$ обозначение $(B \equiv C)$, интерпретируя новые знаки как «и» (конъюнкция), «или» (дизъюнкция) и «тогда и только тогда, когда» (эквивалентность), соответственно. Тогда, как нетрудно выяснить, все сложные высказывания, которые по правилам аристотелевой логики должны быть истинными, независимо от истинности или ложности входящих в них более простых высказываний (т. е. тавтологии), будут теоремами L и, наоборот, любая теорема этой системы будет интерпретироваться тождественно истинным высказыванием, тавтологией. Следовательно, «игра» в выписывание друг за другом теорем формальной системы L превращается в процесс добывания новых истин (например, об окружающем мире или о математических объектах).

В связи с этим встает вопрос: удобна ли система L для использования на практике для получения истинных высказываний. На этот вопрос приходится ответить отрицательно. Особенности человеческого мышления чрезвычайно плохо приспособлены к формальному выводу теорем. Это связано, видимо, с тем, что мы инстинктивно противимся запоминанию длинных знакосочетаний, «смысл» которых нам непонятен.

Поясним этот очень важный для нас пункт подробнее. Всем известно, что даже при запоминании простейших цифровых сочетаний, например телефонных номеров, мы прибегаем обычно к наполнению формальной структуры «содержанием», то есть стараемся вложить в комбинацию цифр какую-то математическую идею — скажем, трактовать эту комбинацию как последовательность нечетных чисел или соединение трех полных квадратов. Эти факты свидетельствуют о том, что наша психика гораздо лучше справляется с освоением конкретных *групп движений*, чем графем или фонем; для нее значительно проще запечатлеть *операцию*, чем статическую «картинку» (закономерность в номерах обычно есть не что иное, как возможность отыскать какую-то операцию, которая сохраняет номер). Исследования швейцарской школы психологов формирования математических понятий у ребенка проливают новый свет на приведенные факты. Человек не способен производить более или менее громоздкие выкладки с цифрами или другими знаками, если он не знает цели, к которой направлены преобразования, и не имеет руководящей идеи для выбора промежуточных звеньев.

Обратим внимание на то, что сказанное нами неконкретно. Неконкретность нашего утверждения состоит в том, что мы пока не уточняем, что такое «идея», надеясь здесь на интуитивное понимание этого слова. Но разные люди могут вкладывать в него разный смысл.

Весьма интересный материал для психологов творчества представляют собой статьи А. Пуанкаре, в которых он излагает результаты самонаблюдения. Вот что говорит он в одной из таких статей о роли «руководящей идеи» в построении математического вывода:

«...Моя память не то, чтобы плоха, но недостаточна. Почему же тогда она не подводит меня в сложных математических рассуждениях, в которых запуталось бы большинство шахматистов? Бесспорно, потому, что она руководствуется определенной нитью, проходящей через аргументацию. Математическая мысль не есть простая совокупность силлогизмов; эти силлогизмы расположены в ней в определенном порядке, и порядок, в котором элементы следуют друг за другом, гораздо важнее самих элементов. Коль скоро я чувствую этот порядок, так сказать, интуитивно настолько, что я могу уловить общую идею всей аргументации, я могу не бояться того, что один из элементов выпадает из моей памяти — каждый из них в этом случае естественным образом ляжет на свое место» ([47]), стр. 26).

Мы видим, что даже на таком высочайшем уровне интеллектуальной работы проявляются те же принципы, что при обыденном умственном акте, совершаемом самыми простыми людьми, скажем, при запоминании телефонных номеров,— мозг требует «сквозной» идеи и без нее отказывается удерживать в памяти даже сравнительно короткие формулы. Из-за этой особенности мозга «бессмысленная» работа, которую представляет собой вывод одной за другой теорем формальной системы (большинство из наугад выведенных теорем будет совершенно бесполезным в интерпретации), вызывает у всякого человека отвращение, и даже если по какой-нибудь необходимости она будет выполняться, почти наверняка результат окажется ошибочным, так как один из элементов может легко выпасть из памяти, а внимание при такого рода деятельности начнет очень быстро утомляться. Короче говоря, формализованный вывод как инструмент работы исследователя не обладает ни малейшей практической ценностью.

Неудивительно, что он никогда и не применяется логиками или математиками.

Но когда появились быстродействующие вычислительные машины, сразу естественным образом возникла мысль об их использовании для вывода теорем формальным способом. Появился даже специальный термин «машинный вывод» как название для будущего (казавшегося уже близким) направления использования ЭВМ. Компьютеры обладают прямо противоположными нам свойствами: они легче всего запоминают и обрабатывают знаковые сочетания, а не «идеи». Составить программу вывода теорем на основании приведенных выше пунктов для системы исчисления высказываний совсем несложно, а используя быстроту оперирования машины с графемами, можно надеяться получить от нее много теорем, которые после интерпретирования представят для исследователя интерес.

Однако и эти надежды пока не оправдались, и не видно, чтобы положение могло существенно измениться в ближайшее время. Во-первых, при автоматизированном выводе среди полученных теорем подавляющее большинство будет совсем неинтересных, причем чем дальше будет продвигаться процесс вывода, тем больший процент этих ненужных теорем будет возникать, и в конце концов «побочный продукт» почти полностью подавит полезное ядро. Во-вторых, чтобы отобрать среди тысяч «всяких» теорем нужные для науки, все равно понадобится человек. Но выполнять функции селекционера для логика будет значительно труднее, чем просто выводить теоремы самому, по-старинке — по тем же психологическим причинам, о которых мы говорили выше. В-третьих, при машинном выводе у нас нет, к сожалению, гарантии, что все короткие (т. е. могущие быть использованными в исследовании) теоремы получатся вначале. Точнее, для системы L это еще верно, так как можно строить формулы возрастающей длины и отбирать те из них, которые оказываются теоремами, но уже для исчисления, имеющего в своем алфавите предикатные буквы и кванторы, опознать в заданной формуле теорему невозможно без того, чтобы ее вывести, а вывод с помощью правила модус поненс всегда укорачивает длину теорем, использованных как посылки (по крайней мере одну из них), поэтому очень лаконичная теорема может получиться при машинном выводе где-то очень поздно. Как бы там ни было, но в доказательстве теорем машины пока еще никакой пользы математикам не оказали (не считая случаев, когда вычисление помогает проверить гипотезу).

Но, конечно, разрабатывая свою программу, Гильберт не имел в виду, чтобы какие-нибудь счетчики, получившие напечатанные на бумаге инструкции, выписывали одну за другой теоремы и так продвигали бы вперед математику. Тем более не мог он рассчитывать на помощь вычислительных машин, которых тогда не было. Деятельность Гильберта имела теоретический характер, она была направлена на обеспечение уверенности в надежности математики; после приобретения этой уверенности, полагал Гильберт, можно будет работать так же, как и прежде, но с гораздо большим энтузиазмом. Главное в его замысле было доказательное установление того факта, что использование таких «идеальных элементов», как актуально бесконечные множества не сделает теорию противоречивой, после чего можно будет спокойно остаться в канторовском раю. Иными словами, сокровища, накопленные полуинтуитивной математикой за тысячи лет ее развития и совершенствования, получат окончательный легальный статус и сомнения в их истинной ценности раз и навсегда отпадут. Таким образом, создатель математического формализма (как и его последователи) отнюдь не был «формалистом» в общеязыковом смысле этого слова: он совсем не требовал подробного обоснования каждого следующего утверждения в цепи умозаключений с тщательным выписыванием промежуточных формул. Современный приверженец формализма Н. Бурбаки описывает эту точку зрения с предельной ясностью:

«Проверка формализованного текста требует лишь в некотором роде механического внимания, так как единственные возможные источники ошибок — это длина или сложность текста. Вот почему математик большей частью доверяет собрату, сообщающему результат алгебраических вычислений, если только известно, что эти вычисления не слишком длинны и выполнены тщательно. Напротив, в неформализованном тексте всегда существует опасность ошибочных умозаключений, к которым может привести, например, злоупотребление интуицией или рассуждение по аналогии. Однако в действительности математик, желающий убедиться в полной правильности, или, как говорят, «строгости», доказательства или теории, отнюдь не прибегает к одной из тех полных формализаций, которыми мы сейчас располагаем, и даже большей частью не пользуется частичными и неполными формализациями, доставляемыми алгебраическим и другими подобными исчислениями. Обыкновенно он довольствуется тем, что приводит изложение к такому состоянию, когда его опыт и чутье математика говорят ему, что перевод на формализованный язык был бы теперь лишь упражнением (быть может, очень тягостным) в терпении» ([48], стр. 23—24).

Постоянные призывы Гильберта к развитию формального метода и его собственные работы в этой области (написанная им совместно с П. Бернайсом книга «Основания математики» имела влияние и определила направление многих исследований) привели к подъему теории математического доказательства. В 1930-х годах сформировалась *теория алгорифмов* (большинство авторов пишут «алгоритм», мы здесь придерживаемся того написания, которое принято математиками конструктивного направления). Конкретным стимулом для этого явилась возникшая ввиду попыток формализации математики необходимость доказывать некоторые «отрицательные» теоремы, то есть утверждения, которые говорят о том, что такое-то математическое построение невозможно. Была, например, поставлена проблема: найти единообразный способ, который по коэффициентам данного алгебраического уравнения с целыми коэффициентами позволял бы ответить на вопрос, имеет ли оно целые корни. Ясно, что при положительном решении этой проблемы никаких сложностей не возникло бы — кто-то опубликовал бы способ, и математики, проверив, убедились бы, что это как раз то, что требуется. Но попытки найти такой способ были тщетными, и с какого-то момента возникло подозрение, что его попросту не существует. Тогда проблема стала уже другой: доказать, что способа не существует. Но ясно, что для доказательства такой теоремы необходимо точно определить, что такое «способ» в математике. Из этой потребности и возникло точное понятие алгорифма. Сейчас эта проблема решена (Ю. В. Матиясевич, 1970) посредством доказательства теоремы: «не существует алгорифма, который по коэффициентам произвольного диофантова уравнения давал бы ответ на вопрос, имеются ли у него корни».

К настоящему моменту имеется очень много эквивалентных, точных определений понятия алгорифма (иногда математики в шутку говорят, что разновидностей алгорифмов стало больше, чем пород собак); достаточно доказать какую-нибудь теорему для одного из них, как она сразу же распространяется на все остальные. Первой формой алгорифмического аппарата были *рекурсивные функции*, введенные в математическую практику Т. Сколемом, Ж. Эрбраном, К. Гёделем, А. Черчем и С. Клини. Когда эти функции были достаточно изучены, возникло убеждение, что их класс исчерпывает понятие алгорифма, которое давно существовало в математической практике и понималось интуитивно.

Алгорифмом в интуитивном смысле является всякая инструкция, предписывающая выполнение последовательных операций над какими-то объектами, предусматривающая получение некоторого результата. В математике, согласно концепции формализма, объектами являются знаки (иногда их называют «буквами»), которые всегда принадлежат к определенному фиксированному алфавиту. Знакосочетания можно занумеровать в лексикографическом порядке, поэтому вместо произвольных знакосочетаний, над которыми работает алгорифм, можно, когда это удобно, рассматривать натуральные числа. В этом случае алгорифм представляет собой инструкцию, согласно которой, получив *исходное данное* — некоторое натуральное число — над ним нужно выполнять определенные действия, причем каждый шаг в их выполнении однозначно определяется инструкцией и *промежуточным результатом*, полученным на предыдущем шаге. Процесс будет продолжаться до тех пор, пока не будет получен окончательный результат, или просто *результат* (инструкция, конечно, содержит в себе информацию, достаточную для опознания результата). Пример такой инструкции: «получив число X, положить $Y = 0$, возвести Y в квадрат и посмотреть, получится ли X; если получится, считать Y результатом, если не получится, прибавить к Y единицу и повторить всю процедуру». Работа в соответствии с данным алгорифмом состоит в переборе подряд натуральных чисел, начиная с нуля, до тех пор, пока не встретится число, квадрат которого равен нашему исходному данному X. В математике принято специальное обозначение для таких весьма распространенных процедур перебора до выполнения некоторого условия: через $\mu_Y(f(X, Y) = 0)$ обозначается число Y, являющееся наименьшим числом, удовлетворяющим соотношению $f(X, Y) = 0$ (ясно, что это число зависит от X). В нашем случае, следовательно, можно записать:

$$A(X) = \mu_Y (Y^2 - X = 0).$$

Легко видеть, что $A(64) = 8$. А какой результат получится, если взять $X = 5$? Понятно, что никакого результата получиться теперь не может, и, выполняя инструкцию, мы будем *работать вечно*. В таком случае говорят, что алгорифм *неприменим* к исходному данному X.

Введем еще одно понятие — *область определения* алгорифма. Это — совокупность всех исходных данных, к которым алгорифм применим. В приведенном примере областью определения является множество всех точных квадратов. Если же мы возьмем другой пример: алгорифм, состоящий в прибавлении к X единицы и в получении суммы в качестве результата, то областью определения будет все множество натуральных чисел; при этом говорят, что алгорифм *всюду применим*. Наконец, можно указать *нигде не применимый* алгорифм — скажем,

$$\mu_Y (X + Y + 1 = 0).$$

Работу, выполняемую согласно алгорифму, можно запротоколировать. Вот как будет выглядеть протокол для нашего первого примера, если $X = 9$:

$Y = 0$; $Y^2 = 0$; $0 \neq 9$; $Y = 1$; $Y^2 = 1$; $1 \neq 9$; $Y = 2$; $Y^2 = 4$; $4 \neq 9$;
$Y = 3$; $Y^2 = 9$; $9 = 9$; $\underline{Y = 3}$ (результат здесь подчеркнут).

Ясно, что всегда можно установить, является ли запись такого рода протоколом работы некоторого алгорифма или же нет. Значит, если алгорифм оказался применимым к исходному данному X, то с помощью просмотра протокола, мы установим этот факт.

Теперь проведем некоторые рассуждения, которые будут иметь для нас очень большое принципиальное значение. Предполагая, что можно зафиксировать алфавит, в котором записываются протоколы, мы приходим к выводу, что все протоколы данного алгорифма можно перечислять один за другим так, что ни один протокол, кончающийся результатом, не будет пропущен, и рано или поздно встретится в перечислении. В самом деле, расположив в определенном порядке буквы данного алфавита, мы можем выписывать буквосочетания в лексикографическом порядке: сначала все одиночные буквы по установленному порядку, затем все двухбуквенные сочетания в том порядке, какой принят в словарях, и т. д. Среди этих сочетаний обязательно рано или поздно встретится любой протокол, кончающийся результатом, так как он представляет собой буквосочетание конечной длины, а обнаруживать, что данное сочетание является именно протоколом мы умеем. Значит, в принципе, используя такой метод, можно выявить любое число X, к которому данный алгорифм применим. Будем выявлять эти числа и выписывать их в строчку; мы получим тогда перечисление области определения алгорифма. Иначе, мы можем утверждать, что *область определения всякого алгорифма перечислима*. Заметим, что числа, к которым алгорифм применим, перечисляются нашим механизмом совсем не обязательно в порядке возрастания, возможно они выписываются с повторениями, причем даже с повторениями бесчисленное количество раз, но главное (и это как раз называется перечислимостью) в том, что *всякое число из данного множества обязательно когда-нибудь появится в списке*, формируемом с помощью охарактеризованного нами выше четко определенного правила.

Верно и обратное: всякое перечислимое множество есть область определения некоторого алгорифма. Таким образом, мы установили, что понятия «перечислимое множество» и «область определения алгорифма» являются синонимами.

Начнем после этих вводных пояснений двигаться к самому существенному для нас результату.

Множество (натуральных чисел) M назовем разрешимым, если существует алгорифм, выясняющий для любого натурального числа, принадлежит это число M или нет.

Ясно, что разрешимым множеством является, например, множество простых чисел, так как нам известен способ (алгорифм) установления, является ли данное число простым.

Поставим такой вопрос: будет ли всякое перечислимое множество разрешимым?

Прежде, чем проводить точное исследование, задумаемся, какого ответа можно ожидать на основании интуиции.

Перечислимое множество есть множество, элементы которого выдаются один за другим с помощью алгорифма, инструкции, программы. Представим, что эта программа нанесена на перфокарты и введена в ЭВМ. Печатающее устройство машины будет в этом случае выводить ряд чисел, разделенных пробелом или запятой, то есть элемент за элементом формировать наше множество. Вопрос, который мы поставили, может быть теперь сформулирован иначе: имея перед собой программу, можем ли мы узнать, напечатает ли машина, работающая по этой программе, некоторое конкретное число? Когда проблема ставится так, невольно возникает убеждение, что ответ должен быть положительным — ведь программа представляет собой конечный текст, содержащий конечную информацию: этот текст можно полностью изучить и всю информацию можно из него извлечь, поэтому никаких неопределенностей по поводу работы по данной программе быть, как будто бы, не должно. О том же самом можно сказать еще так: работа машины, выполняемая согласно данной фиксированной программе, полностью детерминирована, поэтому вряд ли можно считать принципиально неустановимым факт, напечатается ли машиной данное конкретное натуральное число.

Для математического исследования проблемы нам придется ввести еще одно (и последнее) понятие, относящееся к теории алгорифмов. Продолжая использовать такую частную форму алгорифмического аппарата, как машинные программы, мы придем к заключению, что множество алгорифмов разрешимо. Действительно, пусть языком программирования является, например, АЛГОЛ. Любое сочетание букв, входящих в алфавит этого языка, может быть опознано как программа или не программа, поскольку синтаксические правила написания алгольных текстов определены совершенно точно. Отсюда сразу следует, что все программы можно занумеровать: расположить в лексикографическом порядке все буквосочетания алфавита, а затем просматривать эти сочетания и, выбирая из них только те, которые оказываются программами, присваивать им номера 1, 2, 3, . . .

Но в таком случае возникает возможность создать *универсальный алгорифм* U, в который будут вводиться два числа: номер алгорифма N и число X, над которым должен работать алгорифм с номером N. U будет представлять собой инструкцию о том, как расшифровать номер N, превратить его в текст соответствующего алгорифма, соединенную с приказом применять полученный алгорифм к числу X. Если обозначить алгорифм, имеющий номер N, через A_N, то можно написать:

$$U(X, N) = A_N(X).$$

Сейчас все готово у нас для установления центрального факта теории алгорифмов, который, как мы полагаем, затрагивает также глубочайшие проблемы теории познания в целом. Он состоит в следующем: с у щ е с т в у е т п е р е ч и с л и м о е, н о н е р а з р е ш и м о е м н о ж е с т в о.

Рассмотрим «диагональный» алгорифм $U(X, X)$. Его работа заключается в следующем: берется алгорифм с номером 1 и применяется к числу 1, затем берется алгорифм с номером 2 и применяется к числу 2 и т. д. Множество, существование которого мы сейчас провозгласили, является областью определения алгорифма $U(X, X) + 1$, который мы для краткости обозначим $D(X)$.

Действительно, пусть область определения этого алгорифма была бы разрешимой. Тогда можно было бы устроить алгорифм $B(X)$, определяемый системой из двух равенств

$$B(X) = \begin{cases} D(X), & \text{если } D \text{ применим к } X \\ 0 \quad , & \text{если } D \text{ неприменим к } X. \end{cases}$$

Алгорифм B, как и всякий алгорифм, имеет некоторый номер; обозначим этот номер буквой M. Тогда $B(X) = U(X, M)$. Возьмем теперь число $B(M)$. $B(X)$ в с ю д у о п р е д е л е н, что видно непосредственно из его построения. Значит определен также $B(M)$, т. е. определен $U(M, M)$. Но в таком случае определен и $U(M, M)+1$, т. е. $D(M)$. Тогда, согласно построению B, $B(M) = D(M) = U(M, M) + 1$. Подставляя $X = M$ в равенство $B(X) = U(X, X)$, с другой стороны, получим $B(M) = U(M, M)$. Мы пришли к противоречию, которое и доказывает нашу теорему.

Поскольку первый пример перечислимого, но не разрешимого множества был найден А. Чёрчем (1936), мы будем для краткости называть доказанную сейчас теорему теоремой Чёрча. Нам не раз придется обращаться к этому замечательному результату и извлекать из него самые различные следствия. В теореме Чёрча содержится также в неявном виде знаменитый результат Гёделя (правда, полученный раньше совсем другим путем), а в ее доказательстве используется процесс, аналогичный тому, который привел Кантора к установлению несчетности континуума. Нас, однако, больше всего будет интересовать, как должна повлиять теорема Чёрча на осмысление философских проблем кибернетики.

При обсуждении вопроса о возможностях «машинного мышления» нередко указывают на следующее принципиальное различие, будто бы существующее между человеком и машиной: поведение машины строго детерминировано, тогда как человек обладает свойством, которое принято называть свободой воли. Нам представляется, что споры, продолжающие разгораться вокруг этого пункта уже более двадцати лет, можно объяснить отчасти тем, что не все спорящие знают теорему Чёрча, или тем, что одна из сторон не догадывается использовать эту теорему как решающий аргумент, делающий дальнейшую дискуссию беспредметной.

Нужно, по-видимому, сразу отбросить трактовку свободы воли как субъективного ощущения (а такая трактовка весьма распространена), как имеющейся у каждого из нас твердой убежденности «захочу — сделаю так, а не захочу — не сделаю», поскольку проблема должна ставиться не в психологическом, а в философском плане. Во-первых, всегда можно возразить, что это наше ощущение ошибочно и вопреки ему наши действия строго однозначно определяются объективными обстоятельствами, хотя мы и не знаем всех таких обстоятельств. Во-вторых, неопровержимым является контрвозражение, что, может быть, у очень сложной ЭВМ также возникает внутреннее ощущение «свободы воли»; единственный способ опровергнуть это предположение, как указал еще Тьюринг, состоял бы в том, чтобы «стать машиной и узнать, что она чувствует», а это невозможно.

Можно попытаться трактовать предопределенность иначе: поведение системы A считать предопределенным, если эта система, помещенная в условия C, будет вести себя всегда одинаковым образом, если только фиксировать ее начальное состояние. Но если проблему детерминизма ставить в такой форме, то ни одна из сторон не сможет доказать что-либо другой стороне ссылками на наблюдаемые факты. В самом деле, факты могут быть следующих четырех родов:

1. Две одинаковые ЭВМ, работающие по одной и тот же программе, дают одинаковые результаты.

2. Эти ЭВМ дают разные результаты.

3. Два идентичных близнеца, помещенных с детства в одинаковые условия, ведут себя всегда одинаково.

4. Эти близнецы ведут себя по-разному.

Последние два пункта иногда принимают другой вид: один и тот же человек, попадая дважды в одну и ту же ситуацию, ведет себя одинаково (различно). Однако это наблюдение не обладает особой научной ценностью, так как здесь эксперимент не является чистым: со временем характер человека меняется, у него накапливается опыт, изменяются установки и т. д. Поэтому мы ограничимся именно теми случаями, которые занумеровали. Пусть P утверждает, что имеется принципиальное различие между машиной и человеческим мозгом, а $Э$ защищает тезис об их эквивалентности. Факт 1 не заинтересует ни P, ни $Э$, так как они оба считают, что он должен иметь место. Факт 2 несколько неприятен для P, но он всегда сможет заявить, что в одной из машин произошел сбой, в сети понизилось напряжение, на ее работу повлияло хлопание форточки, перегрев какого-то блока, перемещение по залу оператора или что-нибудь другое, о чем мы не догадываемся. Всякий, кто фактически работал у пульта вычислительной машины, знает, насколько она бывает капризной и как трудно установить истинную причину «неправильного» ее поведения. Что касается $Э$, то для него этот факт тоже неприятен, если он считает и машину, и человека детерминированными системами, но в этом случае он присоединится к аргументации P. Если же он считает, что любая сложная система, будь то человек или ЭВМ, обладает свободой воли (обусловленной, например, квантовомеханическими законами), то факт 2 будет для него приятным, но не слишком серьезным, так как он не сможет отвести только что указанные возражения P. Самым сенсационным был бы, конечно, факт 3, если бы его удалось реализовать, несмотря на грандиозные технические трудности; он сильно укрепил бы позицию *Э* (считающего, что человек и ЭВМ детерминированы), но все же не был бы решающим аргументом, так как *Р* всегда мог бы сказать: подождем еще, и линии поведения разойдутся. Факт же 4 не принесет никакой пользы ни *Р*, ни *Э*, так как нам никогда не будет известно, полностью ли совпадают генетические программы двух конкретных идентичных близнецов.

Таким образом, с научной точки зрения проблему можно формулировать лишь следующим образом: существует ли принципиальное различие между машиной и человеком, заключающееся в том, что поведение машины, зная ее программу, можно всегда предсказать (в принципе), в то время как поведение человека по самой сути непредсказуемо? После такого уточнения достаточно вспомнить теорему Чёрча, как отрицательный ответ является с неизбежностью. Вообразим, что мы ввели в машину программу вывода чисел, принадлежащих области определения диагонального алгорифма. Мы знаем, что *рано или поздно* будет напечатано любое число, *принадлежащее этому множеству*, но мы принципиально, а не по техническим причинам, не в состоянии по *любому* данному числу эффективно узнать, будет оно напечатано или же не будет (появление числа, входящего в эту область, можно в принципе установить, имитируя работу машины по данной программе с помощью карандаша и бумаги или на другой машине). Таким образом, элемент неопределенности будет сохраняться в любой момент реализации программы. Поэтому «возражение леди Лавлейс», сводящееся к утверждению, будто «машина никогда не сможет ничем удивить человека» ([49], стр. 44), вряд ли можно считать убедительным.

Теперь вернемся к вопросу о возможности нумерации всех программ. Легко показать, что такое перечисление возможно, если фиксировать алгоритмический машинный язык (скажем, избрать АЛГОЛ). Но следует ли отсюда, что нумерации можно подвергнуть алгорифмы любого наперед заданного типа? Исторически логика развивалась так, что первым наиболее тщательно изученным типом алгорифмического аппарата были рекурсивные функции, которые, разумеется, могут быть занумерованы. Если мы примем положение, что любой алгорифм эквивалентен по своему действию некоторой рекурсивной функции, то проблема возможности нумерации будет решена положительно, а значит в рамках любого алгорифмического аппарата будет возникать перечислимое, но не разрешимое множество со всеми вытекающими отсюда следствиями. Указанное положение, разумеется, невозможно, доказать, поскольку здесь сравнивается четко определенный математический объект с понятием естественного языка, несколько расплывчатым. Большинством математиков это положение принимается как весьма вероятная гипотеза, которая получила название *тезис Чёрча*. Его можно сравнить с любой естественнонаучной гипотезой, скажем, с законом сохранения энергии, который не выводим математически и логически из более элементарных утверждений, а представляет собой постулат, на котором строятся выводы различных разделов физической науки — термодинамики, атомной физики и т. д. Заметим здесь, что между математическими и естественнонаучными постулатами имеется существенная разница; первые не обязаны подтверждаться опытом, так как понятия, в них фигурирующие, сами по себе «ничего не означают» (выражения Гильберта), а вторые обязаны, поскольку с самого начала имеют операциональную интерпретацию.

Тезис Чёрча, по существу, является предсказанием. На основании того факта, что все до сих пор известные алгорифмы, накопившиеся в математической науке за много столетий, могут быть представлены рекурсивными функциями, он утверждает, что такое представление всегда сможет быть осуществлено и в будущем. «Дайте мне четкую инструкцию о выполнении математических операций, сформулированную на любом языке, и я через некоторое время переведу ее на стандартный язык рекурсивных функций» — вот что утверждает человек, заявляющий, что он уверен в справедливости тезиса Чёрча. Опровержение тезиса Чёрча можно мыслить себе так: однажды появляется математик, предъявляющий некий текст, который все единодушно признают четкой инструкцией, или алгорифмом, но о котором удается доказать, что его содержание не может быть выражено аппаратом рекурсивных функций. Пока такой текст никем не предъявлен.

Уместно подробнее исследовать вопрос: на основании каких соображений некий текст может «единодушно» быть признан алгорифмом? Убежденность такого рода приходит к нам после того, как применив этот текст в качестве инструкции к нескольким исходным данным, исчерпывающим, по нашему мнению, все возможные типы, мы внезапно «схватываем» сущность разворачивающегося шаг за шагом процесса и как бы видим своим внутренним взором, что инструкция всегда окажется пригодной, и не может быть такой ситуации, чтобы на каком-то из промежуточных этапов получился результат, к которому инструкцию применить оказалось бы невозможным.

Приведем конкретный пример. Вот инструкция, сформулированная на естественном языке:

«Исходным данным может служить любая конечная последовательность нулей и единиц. Получив исходную последовательность, посмотри, не стоят ли у нее на конце две одинаковые цифры. Если да — кончай работу; если нет — составь новую последовательность по такому принципу: всякий нуль замени этой последовательностью, а всякую единицу — сопряженной (нули заменены единицами и наоборот). Снова посмотри, стоят ли на конце две одинаковые цифры. Если да — кончай работу, если нет — повтори замену по указанному принципу, и действуй так до тех пор, пока на конце появятся две одинаковые цифры».

Человек, получивший эту инструкцию, начнет пытаться применять ее к некоторым конкретным (взятым наугад) последовательностям. Взяв, например, в качестве исходной последовательности 0 1, он станет совершать работу, протокол которой выглядит так:

$$0\,1,\ 0 \neq 1,\ 0\,1\,1\,0,\ 1 \neq 0,\ 0\,1\,1\,0\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,1\,0,\ 1 \neq 0, \ldots$$

Вскоре человек, пользующийся данной инструкцией, с несомненностью убедится, что процесс ее применения к взятому исходному данному никогда не закончится (при необходимости он сможет доказать это совершенно строго). Он возьмет тогда другое исходное данное, скажем, 0 1 1, попробует применить к нему указание, содержащееся в приведенном выше тексте, и увидит, что результат получается сразу (за нуль шагов). Проэкспериментировав еще с двумя-тремя исходными последовательностями, он обретет полную уверенность, что перед ним *алгорифм*, т. е. что при применении инструкции к любым последовательностям ни на одном этапе не может возникнуть недоумение или двусмысленность.

Может показаться, что интуиция здесь не при чем и что нетрудно *доказать* алгорифмичность приведенной инструкции. Это неверно. Для однозначного и четкого выполнения инструкции, то есть для превращения нашего текста в алгорифм, необходимо, чтобы тот, кто пользуется инструкцией, умел всегда безошибочно отличать единицу от нуля, независимо от плохого освещения, усталости и т. д. и был способен следить за сколь угодно длинными последовательностями нулей и единиц, не сбиваясь и не путаясь. Если человек будет пользоваться только памятью, он очень быстро окажется в затруднении (попробуйте написать следующий промежуточный результат нашего примера и вы убедитесь в этом), поэтому ему придется разработать какую-то технику пометок, выписываний на отдельную бумажку цифр и т. д. Следовательно, когда мы говорим «да, перед нами алгорифм», мы подразумеваем, что такого рода технические трудности могут быть преодолены, что мы сможем разработать вспомогательную технику, а это доказать, конечно, нельзя.

Зато в данном случае инструкцию можно записать на некотором стандартном искусственном языке (АЛГОЛе), имеющем четкие синтаксические правила. Любую инструкцию, записанную на этот раз навсегда выбранном языке, будем называть *программой*. Вот как будет выглядеть наша программа:

«ДЛЯ» И = 1 «ШАГ» 1 «ДО» К «ВЫПОЛНИТЬ» В[И] = = А[И]; Х = К; М. «ЕСЛИ» В[Х — 1] = В[Х] «ТО» («СТОП») «ИНАЧЕ» («ДЛЯ» И = 1 «ШАГ» 1 «ДО» Х «ВЫПОЛНИТЬ» «ЕСЛИ» В[И] = 0 «ТО» («ДЛЯ» Л = 1 «ШАГ» 1 «ДО» Х «ВЫПОЛНИТЬ» С [И, Л] = ABS (В [Л] — 1) «ИНАЧЕ» (С [И, Л] = В [Л]); «ДЛЯ» И = 1 «ШАГ» 1 «ДО» Х «ВЫПОЛНИТЬ» «ДЛЯ» Л = 1 «ШАГ» 1 «ДО» Х «ВЫПОЛНИТЬ» В [(И — 1) $\times$ Х + Л] = = С [И, Л]; Х = Х $\uparrow$ 2: «НА» М) «ГДЕ».

В этот текст после слова «ГДЕ» нужно подставить исходные данные — количество знаков первоначальной последовательности, саму эту последовательность и еще некоторые числа, нужные по правилам синтаксиса. Теперь будем считать *по определению*, что инструкция, которая может быть записана на нашем стандартном языке, то есть превращена в программу, называется алгорифмом, и других алгорифмов не существует. Тезис Чёрча в таком случае есть утверждение, что такое определение разумно и не ведет к потере алгорифмов.

Дело, конечно, не в том, что выбранный нами стандартный язык лучше других языков, на которых может быть записана инструкция, а в том, что он зафиксирован и имеет четкие правила составления текстов, то есть относительно этого языка можно что-то доказывать и теория алгорифмов, таким образом, становится математической дисциплиной (а не ветвью психологии). Что же касается удобства, то никаких особых преимуществ данный стандартный язык не имеет. Более того, некоторые инструкции, переведенные с другого языка на язык программ, значительно усложняются, становятся более громоздкими и длинными. Понятно также, что при пользовании языком программ человеку часто придется напрягать внимание, делать пометки, выписывать промежуточные данные и т. д., то есть делать ту же вспомогательную работу, что и при выполнении инструкции, записанной на любом другом понятном человеку языке. Все это нас не смущает, ибо мы говорим всегда о *потенциальной* реализации инструкции, о принципиальной возможности ее выполнить, а вовсе не о фактической выполнимости. Следовательно, тезис Чёрча может быть истолкован еще как утверждение, что при работе со стандартными программами нам понадобятся в точности те же механизмы психики, что и при работе с любыми другими видами инструкций, которые мы интуитивно воспринимаем как абсолютно четкие, то есть как алгорифмы.

Достаточно придать тезису Чёрча такую форму, как становится очевидным, что на его опровержение очень мало шансов. Конечно, используя какой-нибудь текст в качестве руководства к математическим действиям, человек может употреблять такие свои качества, как сообразительность или свобода выбора (например, текст может быть таким: «получив исходное число, умножь его на любое нечетное число и произведение считай результатом»), но в этом случае разные люди будут поступать по-разному, поэтому с точки зрения языковой нормы было бы неправильно называть данный текст алгорифмом. Это название, согласно установившейся традиции, должно относиться лишь к таким инструкциям, которые в ы п о лняются всеми людьми одинаковым образом. Последняя фраза открывает путь к более глубокому и очень для нас важному пониманию вопроса. Выходит, что алгорифмом следует считать такую инструкцию, которая для своей реализации требует качеств, общих для всех людей, то есть которая апеллирует к инвариантным элементам психической деятельности, на которых как на базисе возводится вся сложнейшая надстройка интеллекта, уже не совпадающая у различных индивидуумов.

Плодотворные исследования в области теории алгорифмов 1930-х годов с точки зрения философского осмысления развития науки представляют исключительно интересное явление. Вопреки распространенному мнению, они не были непосредственно связаны с наступлением эпохи кибернетики. Первая электронная вычислительная машина ЭНИАК была сконструирована и построена в 1943—1946 гг., а понятие рекурсивной функции (первого стандартного алгорифмического аппарата) приобрело особое значение уже в работе Сколема 1923 г. и трактовалось, по существу, как алгорифм в статье Гёделя 1931 г. Не должно вводить нас в заблуждение и то, что один из основателей теории алгорифмов А. Тьюринг назвал свои конструкции «машинами» — эти абстрактные построения не имеют ничего общего с какими-либо реальными устройствами и используются только для доказательства теорем. Современная ЭВМ строится по принципам совсем несхожим с принципами действия «машин Тьюринга», и, хотя последние могут быть реализованы на вычислительных машинах, такая реализация не имеет практического значения и может рассматриваться лишь как курьез или учебно-методический прием.

Чем же объяснить, что за много лет до появления первой ЭВМ усилиями таких первоклассных математиков, как Сколем, Гёдель, Эрбран, Чёрч, Клини, Пост, Тьюринг, Робинсон и др., были тщательно изучены алгорифмические процессы и получены все основные результаты теории алгорифмов? Ведь из истории науки хорошо известно, что крупные ученые редко занимаются «неактуальными» проблемами, что они имеют особое чутье на «своевременность» той или иной научной темы.

Мы полагаем, что работы 30-х годов по теории алгорифмов, привлекшие целое созвездие крупнейших математических умов столетия, в значительной степени отражали дух эпохи, имели глубокие корни и несли в себе зародыши будущих перспективных исследований. Возможно, многие математики не согласятся с такой оценкой этого направления, которое покажется им стоящим несколько в стороне от главного русла математической науки — от функционального анализа, топологии, теории групп, алгебры и т. д. Однако в историко-философском анализе познания мы не обязаны принимать самооценки математиков за приговор, не подлежащий обжалованию. Такие вопросы решаются не голосованием, а тщательно подобранной аргументацией, использующей факты не только математического порядка, но и многие другие. В последующих главах этой книги мы как раз и постараемся убедить читателя, что исследования алгорифмических процедур, стимулированные кризисом теории множеств и содействовавшие выработке конструктивного мышления, были, возможно, как раз «основным руслом», хотя современники могли этого не видеть. Во всяком случае, место этих работ в математике двадцатого века, все еще стоящей на перепутье, является весьма почетным.

Еще раз подчеркнем, что теория алгорифмов в рассматриваемый период развивалась не как техническая дисциплина, рассчитанная на приложения к вычислительным машинам, а как исследование возможностей строгого мышления, то есть возможностей психических процессов, общих для всех людей, не зависящих от индивидуальных особенностей личности. Конечно, процессы такого рода довольно примитивны, поэтому они не попадали в поле зрения психологии, изучавшей работу сознания значительно более высокого уровня (сейчас психологи уже начали проявлять к алгорифмам большой интерес, поскольку их наука развивается не только вширь, но и вглубь). Но именно благодаря простоте и элементарности этих процессов их исследование могло иметь настолько отвлеченный математический характер, что заметить какое-либо отношение понятий теории алгорифмов к явлениям психической жизни человека было чрезвычайно трудно.

Вскрывая корни этой отрасли математики, мы снова возвращаемся к проблеме предустановленной гармонии. Дискредитация идеи о существовании такой гармонии явилась одной из причин (хотя и неявной) интенсивного развития теории алгорифмов.

Действительно, с одной стороны, как мы уже знаем, мощный импульс исследованию дедуктивных методов, т. е. алгорифмического вывода, дала гильбертовская программа формализации математики, но эта программа как раз и была одной из форм реакции на крушение предустановленной гармонии. Если бы гармония (в прежнем смысле этого слова) между истиной и человеческим умом существовала, то Гильберту не понадобилось бы лишать математику «содержания» и разрабатывать хитроумные меры для спасения «идеальных элементов»: в этом случае такие элементы являлись бы непосредственным отражением нашей интуицией свойств вещей. С другой стороны, все логико-алгорифмическое направление в математике развивалось в неразрывной связи с языковыми и семиотическими проблемами, поднятыми неопозитивизмом (достаточно вспомнить хотя бы то, что Гёдель был членом «Венского кружка» Морица Шлика или обратить внимание на то, какое огромное значение уделяет Чёрч семантическим проблемам в своей основной книге «Введение в математическую логику»).

Одним из основоположников неопозитивизма считается Л. Витгенштейн. В основной своей книге «Логико-математический трактат» он писал:

«Весь смысл книги можно приблизительно выразить в следующих словах: то, что вообще может быть сказано, может быть сказано ясно, а о чем невозможно говорить, о том следует молчать» ([50], стр. 29). Надо признать, что этот тезис действительно высказан очень ясно, как того и требует он сам. Верно, что остальная книга Витгенштейна является лишь подробной расшифровкой основополагающей идеи: ясные высказывания и только они могут быть предметом науки, в частности, философии.

Что же такое «ясное высказывание»? Витгенштейн не определяет этого понятия отдельно, но из всего духа его сочинения следует, что под этим нужно иметь в виду *высказывание, понимаемое всеми людьми одинаково, независимо от индивидуальных особенностей ума, ассоциаций, определяемых событиями личной биографии*, и т. д. Такая трактовка термина «ясное высказывание» подтверждается негативными примерами, приводимыми Витгенштейном в «Трактате».

«Большинство предложений и вопросов, высказанных по поводу философских проблем, не ложны, а бессмысленны. Поэтому мы вообще не можем отвечать на такого рода вопросы, мы можем только установить их бессмысленность...

(Они относятся к такого рода вопросам, как: является ли добро более или менее тождественным, чем красота?)» (там же, стр. 44).

Пример «не ясного высказывания», приведенный здесь Витгенштейном, относится к числу самых типичных проблем, страстно дебатировавшихся в середине XIX в., в период увлечения гегельянством (Герцен писал, что из-за расхождения по подобным вопросам лучшие друзья на всю жизнь становились врагами). Чем же это объяснить? Дело, конечно, не в том, что люди были наивны. Нужно понять, что в рамках гипотезы о существовании предустановленной гармонии (а эта гипотеза естественнейшим образом вытекает из концепции Гегеля, поскольку мир у него есть познающая самую себя через нас абсолютная идея) такие проблемы, как «тождественность добра» являются серьезными и важными. При отвержении такой гипотезы они автоматически становятся странными, карикатурными и вызывающими ироническое отношение, как неопровержимые и недоказуемые псевдопроблемы. Без признания какой-либо достаточно явно выраженной формы предустановленной гармонии нельзя серьезно говорить о «добре» как понятии, отражающем некий реальный элемент мироздания, возможность постижения которого непосредственно заложена в нас от природы. В этом случае термин «добро» и другие аналогичные слова превращаются в неопределенные, толкуемые каждым по-своему понятия.

Таким образом, логико-арифметические исследования тридцатых годов, вместе с закладывающимся примерно в тот же период семиотическим подходом к явлениям культуры можно отнести к серьезным знамениям времени, отражавшим глубокую, хотя и не всегда заметную с первого взгляда, перестройку теории познания, отражавшим кризис одних идей и закладку других. Утрата веры в предустановленную гармонию, свойственной человечеству на протяжении многих столетий, постепенн› вела к дискредитации всех видов платонизма, а также грубо-материалистических концепций прямого отражения, подвергнутых критике еще В. И. Лениным. Все это воспринималось многими мыслящими людьми с тревогой, поскольку они ощущали угрозу разрушения платформы, на которой могла базироваться коллективная согласованная деятельность людей и эффективная коммуникация между ними. Ведь раньше считалось, что человеческие умы сами собой, так сказать, волею судьбы приспосабливаются к чему-то извечному (вроде «добра», «бога» и т. д.) и таким образом автоматически синхронизуются между собой. Теперь стало выясняться, что до понимания этого «чего-то» с полной ясностью нам еще очень далеко и что провидение вовсе не позаботилось о том, чтобы непосредственно открыть нам вечные истины. Что же тогда может служить средством согласования наших умов друг с другом?

Нелепо было бы полагать, что ответ на этот вопрос, имеющий громадное философское, гносеологическое и эпистемологическое значение, может быть найден в течение сравнительно небольшого времени в ясной и глубоко обоснованной формулировке. Даже сегодня мы должны признать, что такой ответ пока еще — дело будущего, и в настоящее время мы можем лишь высказывать свое мнение о перспективности или неперспективности тех или иных философских школ, пытающихся его найти. Неопозитивисты предлагают взять в качестве коммуникативного базиса только такие утверждения языка, которые кажутся всем людям достаточно ясными, и мы вправе критиковать это течение за обеднение философской проблематики и за противоречие собственным установкам, ибо не совсем ясно, что нужно понимать под «ясным высказыванием». Слишком ревностное служение идеям неопозитивизма может легко привести к отрицанию объективной реальности. Экзистенциализм пропагандирует как базис человеческой связи невыразимое эмоциональное ощущение, частично передаваемое разве средствами «эзопова» метафорического языка, включающего в себя недомолвки, жесты, условные обычаи и т. п., и мы вправе отвергать такой базис как в высшей степени ненадежный. Современные религиозные философы начинают утверждать, будто бог не так просто открывает себя людям, как думали раньше (хотя он по-прежнему существует), и мы вправе иронизировать над их непоследовательностью и неубедительностью. Мы также вправе утверждать, подкрепляя это утверждение научными фактами и логикой, что коммуникационной платформой должно быть *познание материи*, развивающееся сложным и опосредствованным образом через создание и совершенствование понятийных теорий, отражающих все полнее и глубже объективную реальность и потому приобретающих все большую степень необходимости, и вправе полемизировать с теми, кто стремится уклониться с этого трудного пути истинного познания, и обвинять их в упрощенчестве или в эскейпизме. Но у нас нет оснований упрекать в чем-либо математиков, которые в поисках ответа на вопрос о базисе, общем для всех людей и могущем обеспечить точки соприкосновения их мировосприятия, разработали перед второй мировой войной (ставшей как бы страшным историческим напоминанием о трагических последствиях развития коренным образом отличных мировосприятий) подробную теорию алгорифмических процессов, каковые, по существу, явились идеализацией некоторых проявлений человеческого сознания, абстрактными моделями определенных механизмов нашего интеллекта. Мы не имеем в этом случае повода для упрека, поскольку эти ученые *никогда не утверждали, что вся работа психики сводится к исследованным ими алгорифмам*. Они ограничили свои цели конкретными задачами и, в отличие, например, от философов-неопозитивистов, не делали никаких далеко идущих обобщений, понимая, что материала для таких генерализаций пока недостаточно. В результате такого реалистического и целенаправленного подхода им удалось выяснить многие интереснейшие факты, которые впоследствии были использованы в кибернетике, психологии, медицине, социологии, искусствоведении и других областях. В частности, эти факты породили новое направление математики — конструктивное направление,— к рассмотрению которого мы, наконец, готовы приступить.

Глава 4

СПЕЦИФИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КОНСТРУКТИВНОГО ПОДХОДА В МАТЕМАТИКЕ

Рассмотренные нами в предыдущих главах общефилософские тенденции и конкретно-научные результаты в той или иной мере явились предпосылками для возникновения конструктивной математической школы. Генезис научных направлений принято пояснять схемой или рисунком, но в данном случае всякая схема представляла бы собой чрезмерное упрощение. Конструктивизм существенно переосмыслил многие из идей, стимулировавших его появление; кроме того, он выработал ряд собственных тезисов, не имевшихся в предшествующих течениях. Тем не менее, историческая преемственность конструктивизма прослеживается достаточно ясно и в общих чертах может быть описана следующим образом.

Конструктивисты критически относятся к понятию актуально-бесконечных множеств и в этом продолжают традицию, восходящую к Кронекеру, а, говоря в более широком плане,— даже к Гауссу и далее к элейским мыслителям. Но их отрицание универсальности закона исключенного третьего в математике воспринято непосредственно от брауэровского интуиционизма. Они сочувственно относятся к требованию Гильберта ограничиваться финитными доказательствами в метаматематике и рассматривать в качестве исходного материала математической деятельности слова фиксированного алфавита. Что же касается роли теории алгорифмов в становлении конструктивизма, то А. А. Марков пишет об этом:

«Оформление и развитие конструктивного направления имело место на основе осуществленного в 30-х годах нашего века уточнения понятия алгорифма, освободившего это понятие от расплывчатости и субъективизма...

Термин «алгорифм» давно применялся в математике. Под этим термином понималось точное предписание, определяющее вычислительный процесс, ведущий от способных варьировать исходных данных к искомому результату. Необходимо, однако, подчеркнуть, что никакого точного определения понятия алгорифма до 30-х годов сформулировано не было. Это являлось главным препятствием к разработке конструктивной математики» ([42], стр. 9—10).

Подобно тому, как в «классической» математике центральным является понятие множества, в конструктивной математике центральным является понятие алгорифма. Использование этого понятия позволило конструктивистам не ограничиться отрицанием некоторых «классических» методов, но и разработать позитивную программу действий значительно более четкую, чем программа интуиционизма, апеллирующая к довольно таинственным «свободно становящимся последовательностям». Естественно, что, придавая такое важное значение понятию алгорифма, конструктивисты не ограничились простым его заимствованием из предшествующих работ, но внесли собственный вклад в его уточнение и экспликацию, придав ему новую форму, при которой особенности человеческой психики, необходимые для реализации алгорифмического процесса, стали максимально очевидными. Такую концепцию алгорифма предложил А. А. Марков в конце 1940-х годов; подробное описание нового алгорифмического аппарата было опубликовано в 1951 и 1954 гг.

Исходными данными для марковских алгорифмов, которые их автор назвал «нормальными алгорифмами», могут служить слова (то есть произвольные линейные сочетания букв) в некотором *алфавите*. *Схема алгорифма* имеет вид списка *подстановок*:

$$
\begin{array}{c}
P_1 \to (\cdot)\, Q_1 \\
P_2 \to (\cdot)\, Q_2 \\
\cdots\cdots \\
P_k \to (\cdot)\, Q_k,
\end{array}
$$

где P_i, Q_i — некоторые слова (может быть, не содержащие ни одной буквы). Знак $(\cdot)$ указывает на то, что точка может стоять или не стоять после стрелки. Если слово не содержит букв, его принято обозначать через Λ и называть *пустым словом*. Наличие пустого слова играет важную роль в механизме действия нормальных алгорифмов.

Подстановка $P_i \to (\cdot)Q_i$ называется *применимой* к слову R, если в этом слове целиком содержится слово P_i. В этом случае вместо него подставляется слово Q_i, получившееся новое слово будет результатом применения данной подстановки к слову R. Если P_i входит в R несколько раз, то заменяется первое, то есть самое левое вхождение. Например, *результатом применения* к слову АРАРАТ подстановки АРА $\to$ КА будет слово КАРАТ.

Реализация алгорифма, то есть выполнение действий над исходным словом, регулируется следующими правилами:

1. Просматриваем подстановки сверху вниз, пока не встретим ту, которая применима к исходному слову. Применяем ее и, если после стрелки нет точки, результат применения считаем новым исходным словом и повторяем все с самого начала.

2. Если после стрелки применяемой подстановки стоит точка, прекращаем работу.

3. Если, просмотрев все подстановки, не встретим применимой к данному слову, прекращаем работу.

4. *Результатом* считаем слово, полученное к моменту прекращения работы.

К подробному анализу особенностей этого алгорифмического аппарата мы обратимся несколько позже, а сейчас перейдем к следующему, чрезвычайно важному для рассматриваемой школы понятию.

Конструктивным объектом называется объект одного из двух типов:

1) Фактически построенное и предъявленное нашим органам чувств конечное слово.

2) Слово, которое должно быть получено как результат работы предъявленного (заданного алфавитом и схемой) алгорифма над объектом первого типа, если только заведомо известно, что алгорифм когда-нибудь закончит свою работу. Иметь при этом какую-либо оценку времени работы (т. е. числа применений подстановок) не обязательно.

Поскольку сторонники учения Брауэра считают конструктивными лишь объекты первого типа, можно сказать, что мир конструктивиста богаче мира интуициониста и стоит ближе к миру классической математики (который, по мнению обоих чересчур богат и содержит химеры). Именно в этом смысле Гейтинг писал о главе советских конструктивистов Маркове, что тот занимает «промежуточную позицию» ([51], стр. 228).

Выражение «X существует» понимается так: «X является конструктивным объектом». Пронизывающую всю классическую математику веру в «существование» математических объектов в каком-то ином смысле, конструктивисты считают, по-видимому, разновидностью платонизма. Во всяком случае, когда «классики» говорят, что существует бесконечное множество (континуум) непрерывных функций, не заданных никакой конечной аналитической формулой (наиболее открыто эта точка зрения изложена в «Восьми лекциях по математическому анализу» А. Я. Хинчина), представители конструктивной школы недоуменно пожимают плечами и спрашивают: «Где эти функции «существуют» — на платоновских небесах?» Они указывают также, что «классики» не любят разъяснять свое понимание термина «существование математического объекта», считая это, вероятно, признаком нечеткости понимания.

Обратим внимание на то, что конструктивное истолкование существования исключает возможность превращения химеры в реальность на какой-то стадии развития математики. Существование истолковывается так, что оно не зависит от времени. Если объект предъявлен как законченное конечное слово или задан парой (слово, алгорифм), причем точно известно, что алгорифм применим к слову, значит объект существует. Если нам не удается пока построить этой пары или установить применимость алгорифма, это не значит, что объекта не существует и он является химерой. Это утверждение справедливо лишь тогда, когда мы доказали невозможность построения объекта (например, неприменимость соответствующего алгорифма), а в этом случае он обречен находиться в небытии вечно.

В определении конструктивного объекта имеется фраза «заведомо известно, что алгорифм закончит свою работу». Существенной чертой конструктивного направления является специфическое понимание этой фразы. Что может заставить нас поверить в применимость алгорифма? По мнению конструктивистов, любое рассуждение того типа, которым всегда пользовались в математической практике, в частности, доказательство, использующее правило исключенного третьего. Вот как разъясняет свою точку зрения на этот вопрос А. А. Марков:

«Для того, чтобы удостовериться в применимости алгорифма A к слову P, мы не считаем обязательным, чтобы процесс применения A к P был выполнен перед нашими глазами от начала до конца. Как же можно удостовериться в этом?

...Я считаю возможным применять здесь рассуждение «от противного», т. е. утверждать, что алгорифм $\mathfrak{A}$ применим к слову P, если предположение о неограниченной продолжаемости процесса применения $\mathfrak{A}$ к P опровергнуто приведением к нелепости. Мне известно, что интуиционисты отвергают этот способ рассуждения, так как не считают его «интуитивно ясным»...

Я настаиваю на том, что никакого выхода за рамки конструктивного направления при этом не происходит: абстракция актуальной бесконечности не привлекается, существование продолжает совпадать с потенциальной осуществимостью построения. Если мы утверждаем на основании указанной невозможности неограниченной продолжаемости детерминированного процесса, что этот процесс закончится, то при этом дается совершенно определенный способ построения: продолжать процесс до его завершения. То обстоятельство, что при этом число шагов может не быть «заранее» ограниченным, ничего здесь по существу не меняет...

Нетрудно видеть, что рассмотренный способ доказательства применимости алгорифма дает возможность обосновать следующий способ рассуждения:

Пусть для свойства R имеется алгорифм, выясняющий для всякого натурального числа N, обладает ли N свойством R. Если опровергнуто предположение о том, что ни одно число не обладает свойством R, то имеется натуральное число со свойством R. Найти это натуральное число можно тогда путем перебора натуральных чисел, начиная с нуля, причем для каждого рассматриваемого натурального числа N мы выясняем, пользуясь алгорифмом, наличие которого предполагается, обладает ли N свойством R. В силу этого мы называем этот способ рассуждения методом конструктивного подбора» ([42], стр. 11). Если условиться обозначать применимость алгорифма A к слову X таким образом:

$$!A(X),$$

то, согласно концепции конструктивистов,

$$\neg(\neg(!A(X))) \supset !A(X).$$

Это — Ленинградский принцип, или принцип Маркова. Без него не могли бы быть получены некоторые существенные результаты конструктивной школы.

Итак, конструктивная математика характеризуется следующими главными чертами:

1) Существование математического объекта трактуется как его *алгорифмическое построение*.

2) В соответствии с этим отбрасываются классические доказательства существования косвенными методами и видоизменяются правила отрицания, используется особая «конструктивная» логика (см., напр., [42]).

3) Допускается абстракция потенциальной осуществимости сколь угодно длинного алгорифмического процесса, то есть признается абстракция потенциальной бесконечности. В то же время категорически отвергается абстракция актуальной бесконечности (нельзя говорить о множестве, содержащем бесконечное число элементов, как о существующем объекте).

4) Используется Ленинградский принцип.

Прежде чем анализировать гносеологические аспекты рассматриваемого направления, его связь с некоторыми современными философскими тенденциями и естественнонаучными фактами и обсуждать перспективы его развития, нам следует посмотреть, чем отличаются результаты конструктивной математики от аналогичных результатов классической математики. Мы возьмем одну, но, пожалуй, самую главную область — анализ — и ограничимся теми вопросами, которые не требуют для своего освещения громоздкого математического аппарата (значительно более полный обзор конструктивных результатов читатель может найти в сборнике [53]).

Основным понятием анализа является понятие действительного числа. Естественно, что специфика конструктивного анализа в первую очередь проявляется в определении конструктивного действительного числа (КДЧ).

Натуральными числами в конструктивной математике называются линейно расположенные «палочки», т. е. объекты вида

$$|,\ ||,\ |||,\ ||||,\ |||||,\ \ldots$$

(иначе их можно назвать словами однобуквенного алфавита). Отметим принципиальное отличие между пониманием натурального числа конструктивистами и «классиками».

Для последних оно определяется операциями — вне сложения, вычитания и деления с их законами представители классической математики не признают натуральных чисел, утверждая, что «натуральный ряд» — это объект, удовлетворяющий аксиомам Пеано. Такой подход можно назвать *экстенсиональным*, то есть ставящим «содержание» выше «формы» («классику» совершенно безразлично, как обозначать натуральные числа, для него существуют сразу все натуральные числа, хотя большинство из них никогда и никем не будут записаны ни в какой системе обозначений). Точка же зрения конструктивиста может быть охарактеризована как *интенсиональная*; он считает себя истинным реалистом, не способным подняться до такой высокой степени абстрагирования, как понимание действительного числа вне какого-либо материального (или, в крайнем случае, мысленного, осуществленного по типу материального) его изображения. Естественно, что при этом указание операций при самом определении натурального числа оказывается излишним, и операции вводятся уже на более поздней стадии через алгорифмы. Заметим, что, на наш взгляд, преимущество конструктивного определения состоит, в частности, в том, что согласно ему натуральные числа могут использоваться для *нумерации* неких объектов (для их упорядочения) без того, чтобы обретать более сильные свойства участников «арифметической игры». Несомненно, что в историческом процессе развития цивилизации натуральные числа использовались для нумерации гораздо раньше, чем для счета, поэтому конструктивное определение выглядит много естественнее общепринятого.

Взяв алфавит {—,/, |}, можно определить теперь и рациональные числа (также до установления операций над ними!) как слова следующего вида:

$$||/||| \qquad \text{(две третьих)}$$

$$-|||/||||| \quad \text{(минус три пятых)}$$

и т. д.

Арифметические действия над рациональными числами также определяются через соответствующие (предъявленные) алгорифмы.

В обычном анализе, как мы знаем, действительные числа вводятся по-разному: как бесконечные десятичные дроби (Вейерштрасс), как множества эквивалентных фундаментальных последовательностей (Кантор), как сечения (Дедекинд). Все три способа задания равносильны, и в каждом из них главной целью является преодоление того, что мы назвали АГ-конфликтом, т. е. придание множеству действительных чисел свойства «полноты», «отсутствия дыр» и т. п.

Ясно, что дедекиндовский метод мало соответствует конструктивному мышлению, так как определяет действительные числа в терминах актуально-бесконечных множеств (правда, его можно видоизменить так, что множества, определяющие сечения, будут лишь потенциально-бесконечными множествами рациональных чисел, но специфика конструктивного подхода в этом случае не проявится достаточно полно). Вейерштрассовский и канторовский методы гораздо лучше отражают вычислительную практику, приводящую нас к необходимости разработки понятия иррационального числа: в первом методе оно получается как воображаемый неограниченный процесс получения все новых десятичных знаков, а во втором — как аналогичный процесс (получение последовательных рациональных значений) более общего типа. Именно канторовский метод, подвергнутый, разумеется, переосмыслению, и выбран за основу в конструктивной математике.

По Кантору, всякая последовательность рациональных чисел, для которой выполнен критерий Коши, определяет некоторое действительное число. В классическом анализе такая последовательность есть элемент некоторого актуально-бесконечного множества, и о фактическом ее задании в теории ничего не говорится. Далее, разные последовательности Коши могут определять одно и то же действительное число, поэтому само понятие действительного числа равнозначно понятию актуально бесконечного множества эквивалентных последовательностей Коши, причем вопрос о фактическом установлении эквивалентности или неэквивалентности двух последовательностей в классическом анализе никого не интересует. Ни первое, ни второе обстоятельство не может быть принято конструктивистом, однако нетрудно сообразить, как нужно модифицировать канторовское определение действительного числа, чтобы оно стало для него приемлемым. Вспомним: критерий Коши состоит в том, что для любого положительного ε существует номер N, за которым любые два члена последовательности отличаются между собою меньше, чем на ε, т. е.

$$\forall\varepsilon\exists N\,(p, q > N \supset |a_p - a_q| < \varepsilon).$$

В соответствии с духом конструктивной математики нужно, чтобы последовательность задавалась алгорифмически, а существование числа N, зависящего от ε, должно трактоваться как потенциальная возможность его построения, то есть как существование алгорифма, по данному ε строящего N. Для упрощения теории можно ограничиться случаем, когда ε задается в виде 2^{-K} (K — натуральное число). Тогда КДЧ будет определяться парой алгорифмов A и B, применимых к любому натуральному числу, причем

1) $A(N) = r_N$ (r_N — рациональное число);

2) $\forall K\,(p, q > B(K) \supset |A(p) - A(q)| < 2^{-K})$.

Будем называть пару алгорифмов (A, B), определяющих КДЧ (т. е. обладающих указанными свойствами), дуплексом. Тогда можно сказать, что КДЧ есть дуплекс. Ясно, что это — конструктивный объект первого типа — объект конечный и предъявленный нам непосредственно. Если условиться изображать алгорифмы в каком-то фиксированном алфавите, то дуплекс, то есть КДЧ, будет представлять собой некоторое слово.

Как уже сказано, не всякая пара алгорифмов есть КДЧ. Можно показать (см., напр., [53]), что множество КДЧ неразрешимо. При помощи подходящей модификации канторовского диагонального процесса можно также доказать следующее утверждение: для всякой алгорифмической последовательности КДЧ можно подобрать КДЧ, отличное от всех членов этой последовательности. Отсюда следует, что множество КДЧ неперечислимо.

Здесь мы сталкиваемся с исключительно интересной ситуацией. Знаменитая диагональная процедура Кантора, как мы подробно прослеживали выше, привела, по существу, к возведению здания теории множеств, к разработке понятия кардинального числа, теории континуума и через это — к логическому объединению в нечто цельное всех основных разделов современной математики. Не возникни у Кантора идея «диагонали», может быть, вся математическая наука выглядела бы (по крайней мере, в своих абстрактных аспектах) иначе. И вот, с той же самой диагональной процедурой сталкивается конструктивист, и мы видим, что его реакция оказывается совсем не такой, как реакция «классика». Он не отрицает, что занумеровать действительные числа невозможно, но вовсе не считает, будто отсюда следует существование мощности, превосходящей мощность счетного множества. Такая позиция конструктивиста объясняется не только его принципиальным непринятием никакой бесконечности, кроме потенциальной, но и тем, что он не видит в диагональном эффекте ничего экстравагантного, из ряда вон выходящего, поразительного, требующего перестройки всех концепций числа (а именно так воспринял свое доказательство несчетности континуума Кантор, который воскликнул «Вижу, но не верю!»). Для математика, усвоившего конструктивный образ мышления, невозможность перечислить действительные числа есть вполне заурядный факт невозможности существования некоторого алгорифма и в нем он не усматривает ничего большего. Мало ли каких алгорифмов не существует: нельзя построить, например, алгорифм, разрешающий область определения алгорифма D (мы это уже видели), но отсюда вовсе не следует, что можно высказывать какие-то соображения о мощности этой области. Кантор мыслил множество действительных чисел как актуально существующее, видел его внутренним взором все сразу, целиком; кроме того, он так же целиком, как завершенное, воспринимал все множество систем нумерации, поэтому появление действительного числа вне любой системы нумерации явилось для него свидетельством исключительного богатства элементами множества действительных чисел, его неисчерпаемости счетной нумерацией. Конструктивист признает лишь процесс порождения действительных чисел и для него совсем не удивительно, что их пересчет невозможен даже в потенции: это означает всего только неалгорифмичность пересчета, а, говоря несколько упрощенно, означает то, что КДЧ расположены как-то нерегулярно, и, перебирая с помощью фиксированной процедуры одни КДЧ, мы непременно пропустим другие (хотя при другом перечислении они могут попасть в число нумеруемых).

Что же касается мощности, то конструктивист скажет так: множество КДЧ есть часть перечислимого множества, но оно неперечислимо. Это высказывание должно показаться ужасным ортодоксальному «классику», который твердо знает, что подмножество имеет мощность, не превосходящую мощности целого множества, и воспринимает термин «неперечислимо» как «несчетно». В приведенном утверждении конструктивиста он слышит фразу «данное подмножество счетного множества несчетно», а она бросает вызов всем его установкам.

Но, пожалуй, истинный конструктивист не будет склонен говорить о «множестве КДЧ». Несмотря на то, что понятие множества является для представителей конструктивной школы вспомогательным и второстепенным, и в связи с этим они не обсуждают и не шлифуют это понятие особенно тщательно, все же слово «множество» довольно часто употребляется ими (хотя бы из-за сильно укоренившейся научной традиции), а математики — не такие люди, чтобы пользоваться словами, никогда не вдумываясь в их смысл. Но стоит конструктивисту вдуматься в смысл термина «множество», им употребляемого, как он обнаруживает, что это есть сокращенный оборот речи, имеющий смысл в таком контексте: «элемент, принадлежащий множеству М», что надо понимать как «объект, обладающий свойством, характерным для множества М». Вне этого контекста неперечислимое множество, пожалуй, не имеет для конструктивиста реального содержания. Во всяком случае, когда одного математика конструктивной школы спросили «существует ли неперечислимое множество?», он, подумав, ответил: «наверное нет, ибо в каком смысле оно может существовать?» Чтобы множество стало объектом, а не оборотом речи, оно должно формироваться конструктивным способом и, следовательно, с этой точки зрения множество отождествляется с порождающим его алгорифмом.

Значит, строго говоря, «множество КДЧ» не есть конструктивный объект: оно представляет собой как бы «среду становления», внутри которой могут вполне конструктивно, то есть с помощью алгорифмов, строиться перечислимые последовательности КДЧ, никакая из которых не охватывает всех КДЧ. Но это не значит, что высказывания, использующие термин «множество КДЧ», должны быть изгнаны из конструктивной математики: в каждом конкретном случае этот термин может быть расшифрован так, что его смысл станет вполне ясным даже тому, кто тщательно избегает опасности впадания в платонизм. Например, фраза «множество КДЧ неперечислимо» есть утверждение об отсутствии алгорифма с такими-то свойствами, вполне понятное для конструктивиста.

Подчеркнем еще раз, что все эти уточнения, вероятно, не слишком актуальны для конструктивной школы, ибо одним из фундаментальнейших ее принципов является убеждение, что деятельность математика надежна и законна лишь в том случае, когда он работает с конечным числом обозримых объектов, а если и применяет необходимое во всякой абстрактной науке воображение, то не дает заходить ему слишком далеко.

Математики, знающие о конструктивном направлении лишь понаслышке, часто представляют себе это направление как стремящееся «механизировать» процесс получения научных результатов, заменить живое творчество применением однотипных строгих рецептов вывода. Нет ничего более далекого от истины, чем такая трактовка конструктивизма. Дело не только в том, что развитие конструктивной математики требует в точности тех же «эвристических» средств мышления, которые испокон веков применяются в точных науках (вдохновения, догадки, аналогий, полета фантазии, смелости предположений и т. д.), но и в том, что по своему существу эта наука не поддается «программированному развитию», поскольку основные ее объекты алгорифмически неперечислимы, и, размышляя о них, исследователь постоянно имеет дело со «средой становления», извлекать из которой конструктивные объекты приходится самыми различными вспомогательными приемами, требующими полного напряжения самых разнообразных качеств человеческого ума. Иными словами, для исследования алгорифмов и объектов, ими порождаемых, требуется отнюдь не алгорифмическое мышление.

Проследим, с какого рода информацией имеет дело воображаемый математик конструктивной школы, работающий в области анализа. Мы уже знаем, что основные его объекты — КДЧ — неперечислимы. Имея перед собой два алгорифма, математик не всегда может опознать в них КДЧ. Значит, либо само происхождение дуплекса должно быть таково, что свойства, присущие КДЧ, гарантируются, либо для идентификации его как действительного числа математик использует догадку.

Пусть, например, дана пара алгорифмов (A, B), где

$$A(N) = \sum_{k=0}^{N} (1/K!); \qquad B(N) = N+1.$$

Этапы рассуждения	*Комментарий*
Пусть для определенности $p \geqslant q$. Тогда $$\lvert A(p) - A(q)\rvert = A(p) - A(q) = \begin{cases} 0, \text{ если } p = q; \\ \frac{1}{(q+1)!} + \ldots + \frac{1}{p!}, \\ \text{если } p > q. \end{cases}$$	Начало рассуждения естественно: проверяется условие 2 КДЧ
Рассмотрим сначала второй случай. $$\lvert A(p) - A(q)\rvert = \frac{1}{(q+1)!} \times \left[1 + \frac{1}{q+2} + \ldots + \frac{1}{(q+2)(q+3)\ldots p}\right] < \frac{1}{(q+1)!}\cdot 2 \leqslant \frac{1}{2^q}\cdot 2 = 2^{-(q-1)}.$$	Здесь используется знание сумм геометрической прогрессии и очевидный для математика факт, что и $$\underbrace{(q+2)\cdot(q+3)\ \ldots}_{r \text{ сомножителей}} \geqslant 2^r$$
Если же $p = q$, то $\lvert A(p) - A(q)\rvert = 0$ и тоже $$\lvert A(p) - A(q)\rvert < 2^{-(q-1)}.$$	Используется знание того, что $(r+1)! \geqslant 2^r$
Теперь ясно, что перед нами КДЧ, ибо из доказанного утверждения следует: $$p, q > k + 1 \supset \lvert A(p) - A(q)\rvert < 2^{-k}, \text{ т. е.}$$ вытекает, что $$\forall k\,(p, q > k + 1 \supset \lvert A(p) - A(q)\rvert < 2^{-k}).$$	

Пользуясь своими знаниями в области математики и проявив определенную степень сообразительности, конструктивист поймет, что перед ним КДЧ. Попробуем воспроизвести вероятный путь его рассуждений.

Итак, человек мобилизовал ряд своих математических знаний и установил, что перед ним конструктивное действительное число. Можно описать этот процесс в терминах более кибернетических. В мозгу человека в результате нескольких проб и ошибок соединились в определенной последовательности уже находящиеся там (в результате изучения созданной поколениями ученых математики) сведения и образовали доказательство того, что он имеет дело с КДЧ.

Если бы этого доказать не удалось, математик попытался бы доказать, что перед ним *не* КДЧ. Снова ему пришлось бы наудачу или пользуясь всем своим предыдущим опытом доказательств соединять различные сведения из области математики и надеяться получить ту последовательность утверждений, которая признается в математике за доказательство (вывод). Если бы и здесь он потерпел неудачу, работать с данной парой алгорифмов как с КДЧ было бы нельзя, так как в математике все результаты должны быть абсолютно достоверными.

Доказательство того, что данная пара алгорифмов есть КДЧ (или *не* КДЧ), таким образом, зависит от комбинаторных способностей математика, то есть от быстроты соединения подходящих сведений и умения запоминать промежуточные результаты, а также от его познаний. А зависит ли оно от состояния математической науки на данный момент? Приходится признать, что оно зависит и от этого. Рассмотрим, например, пару алгорифмов (A, B), где

$$A(N) = \begin{cases} 2^{-N}, & \text{если все четверки с номером} \leqslant N \text{ не удовлетворяют соотношению Ферма;} \\ N, & \text{если имеется четверка с номером} \leqslant N\text{, удовлетворяющая соотношению Ферма.} \end{cases}$$

$$B(N) = N + 1.$$

Решение вопроса, имеем ли мы в данном случае КДЧ, эквивалентно решению проблемы Ферма. Таким образом, алгорифм, который позволил бы разрешить свойство «быть КДЧ», дал бы нам решение проблемы Ферма. Этот пример показывает, насколько маловероятно существование указанного алгорифма.

Пусть теперь дана пара алгорифмов и дополнительное утверждение о том, что это — КДЧ. Не будем обсуждать, в какой форме это утверждение нам представлено — это может быть доказательство того, что дано КДЧ или просто «заявление оракула», которому мы абсолютно доверяем, но важно только одно: с этой парой мы можем начать действовать как с КДЧ. Можно ли из этой входной информации определить, равно ли данное конструктивное действительное число нулю? На этот вопрос мы должны ответить так же, как и на предыдущий:

1) Иногда можно — если удастся, пользуясь какими-то эвристическими методами, построить алгорифм T и доказать, что

$$\forall K\,(N \geqslant T(K) \supset |A(N)| < 2^{-K}).$$

2) Иногда состояние математики не позволяет дать отчет сейчас, но в принципе такой ответ достижим; это показывает приведенный выше дуплекс, связанный с теоремой Ферма, в которой в нижней строчке определяющего алгорифм A равенства вместо N нужно написать N_0 — номер первой четверки, удовлетворяющей соотношению Ферма (в этом случае надо будет переделать и алгорифм B, но это несущественно).

3) Иногда опознать нуль невозможно по принципиальным соображениям.

Рассмотрим однопараметрическое семейство пар (Ax, B), где

$$A_X(N) = \begin{cases} 2^{-N}, & \text{если за } N \text{ шагов алгорифм } D, \text{ работая над } X, \text{ не дает результата;} \\ 2^{-N_0}, & \text{если } N_0 \text{ — число шагов работы } D \text{ над } X \text{ и } N_0 \leqslant N \end{cases}$$

$$B(N) = N + 1$$

(D — здесь диагональный алгорифм, полученный из универсального).

В (перечислимом) множестве КДЧ (A_0, B), (A_1, B), ... имеются как нулевые члены, так и ненулевые (первые получаются, когда D неприменим, вторые — когда применим). Но устроить разрешающую процедуру для свойства «быть нулем» в данном случае невозможно, иначе оказалась бы разрешимой область определения алгорифма.

Интересно уточнить специфику неопределенности в этом случае. Если дуплекс не равен нулю, то, вычисляя $Ax(1)$, $Ax(2)$ и т. д., мы рано или поздно узна́ем, что он не равен нулю, так как последовательность «остановится». Если же он равен нулю, то мы этого не узнаем никогда: сколько бы шагов мы ни сделали, из того факта, что D не кончил работу над X, мы не имеем права сделать вывода, что он неприменим (а может быть процесс остановится на следующем шаге!).

Эта специфика сохраняется и в более общей ситуации, представляющей для нас исключительный интерес.

Пусть имеется множество M пар алгорифмов и следующая дополнительная информация:

1) $a \in M \supset a$ — КДЧ (все элементы M суть КДЧ).

2) $a \in M \supset \forall\, b\ (b = a \supset b \in M)$ (вместе с каждым КДЧ M содержит все ему равные. Такое множество называется правильным. Требование правильности — очень сильное требование).

3) $0 \in M$

4) $\forall\, r > 0\ \exists\, b \neq 0\ (b \in M\ \ \&\ |\, b\, | < r$ (M содержит как угодно малые ненулевые КДЧ).

Тогда невозможна разрешающая процедура свойства быть равным нулю.

Прежде чем начать доказательство, сделаем полезное замечание. Фраза «имеется множество M» здесь снова не предполагает его алгорифмического задания (т. е. оно не обязательно является перечислимым), а представляет собой разобранный выше сокращенный оборот речи. Эту фразу вместе с остальным текстом утверждения нужно понимать так: если нам будут предъявлять КДЧ, о которых мы заведомо знаем то, что указано в пунктах 2, 3, 4 и если, кроме того, у нас имеется алгорифм П, такой, что

$$\forall N\, (\Pi\,(N) \in M \& \Pi\,(N) < 2^{-N})$$

(в этом заключается конструктивное понимание квантора существования в пункте 4), то мы принципиально не сможем создать способа, который гарантированно выделял бы нулевые КДЧ.

Докажем наше основное утверждение.

Рассмотрим однопараметрическое множество дуплексов $(A_k,\ B)$, где

$$A_K(N) = \begin{cases} 2^{-N}, & \text{если } D \text{ не заканчивает работу над } K \text{ за } N \text{ шагов;} \\ \Pi(N_0), & \text{если } D \text{ заканчивает работу над } K \text{ за } N_0 \leqslant N \text{ шагов.} \end{cases}$$

$$B(N) = N + 1.$$

Легко убедиться, что все эти дуплексы суть КДЧ (это обеспечивается неравенством $\Pi(N) < 2^{-N}$). Кроме того, любое из этих КДЧ принадлежит M. Действительно,

$$A_K,\ B) = \begin{cases} 0\ , & \text{если } D \text{ неприменим к } K; \\ \Pi(N_0), & \text{если } D \text{ применим к } K \text{ и заканчивает работу над } K \text{ за } N_0 \text{ шагов,} \end{cases}$$

поэтому принадлежность $(A_K,\ B)$ к M вытекает из пунктов 2 и 3.

Но в таком случае, располагая алгорифмом Γ различения нулей в M, мы смогли бы разрешить область определения D. В самом деле, поскольку $(A_K,\ B) \in M$, мы применили бы к нему алгорифм Γ и узнали бы, равен нулю или нет. Но тогда мы узнали бы, применим D к числу K или неприменим. Невозможность разрешения области определения D и дает требуемое доказательство.

Это строгое, но формальное доказательство можно дополнить (и пояснить) нестрогим, но проливающим свет на «содержательные» причины невозможности различения нулей в M рассуждением. Дать оценку КДЧ, изучая его алгорифмы A и B, можно единственным способом: с помощью B найти номер N, начиная с которого все последующие члены последовательности $\{A(i)\}$ попадут в достаточно малый интервал, а затем вычислить, скажем, $A(N)$. Так мы найдем «центр» и «полуширину размытости» КДЧ.

Если КДЧ не равно нулю, то, уменьшая размытость, мы рано или поздно обнаружим, что она стала меньше расстояния от центра до нуля и это даст нам гарантию, что КДЧ не равно нулю. Если во множестве M имеются нули, а ненулевые члены заведомо превосходят r, то нули опознать можно так: брать КДЧ, сужать его размытость и ждать, пока это взятое нами число «отцепится» от нуля или от r.

Но если ненулевые КДЧ могут быть как угодно малы, то, хотя их опознать можно, нули опознавать уже нельзя, ибо, не получая длительное время отцепления от нуля, мы никогда не будем уверены, что перед нами нуль, а не очень малое ненулевое КДЧ, которое пока еще не успело отцепиться от нуля (и, возможно, отцепится па следующем шаге!).

В вышеприведенном тексте пункт 4) можно было бы заменить фразой «можно построить последовательность КДЧ из M, сходящуюся к нулю». Заметим, что по самому своему построению КДЧ их последовательности удовлетворяют критерию Коши; это можно доказать точно так же, как мы делали это для «классически» введенных действительных чисел через классы эквивалентных фундаментальных последовательностей. Но тогда ясно, что ситуация допускает обобщение и что будет верным такое утверждение: «если дано правильное множество КДЧ, в котором можно построить последовательность КДЧ, сходящегося к числу a, то невозможна разрешающая процедура для свойства «быть равным a», т. е. вместе с опознаваемыми числами a в этом множестве будут содержаться неопознаваемые».

Как мы видим, конструктивный континуум — вещь тонкая, неуловимая и сложная.

Из основного утверждения, доказанного нами, следует ряд результатов конструктивного анализа, резко расходящихся с известными каждому студенту результатами обычного анализа. Многие привычные представления при переходе в мир конструктивизма оказываются нерелевантными, а понятия — лишенными смысла. Приведем несколько примеров, подтверждающих принципиальную несовместимость конструктивного и традиционного анализа.

1. Совершенно несхожим с классическим оказывается понятие функции. В конструктивном анализе под функцией действительного переменного (будем называть ее «конструктивной функцией» и обозначать сокращенно КФ) называется алгорифм, переводящий КДЧ в КДЧ, причем равные КДЧ переводящий в равные (это требование естественно и минимально: отказаться от него — значит вообще отойти от принятого в математике представления о том, что такое функция). Но тогда уже такая простая с точки зрения обычного анализа функция, как «СИГ-

НУМ», т. е. функция, определяемая равенством

$$\operatorname{Sg}(X)=\begin{cases}-1, & \text{если } X<0\\ 1, & \text{если } 0\leqslant X,\end{cases}$$

теряет всякий смысл в конструктивном анализе. В нем нет «сигнума», поскольку беспредметным является условие, его определяющее: как мы видели, опознать нули с полной уверенностью нельзя, поэтому во многих случаях условие будет давать осечку и вычислить значение $\operatorname{Sg}(X)$ окажется принципиально невозможным.

2. Монотонно возрастающая и ограниченная сверху последовательность КДЧ может не иметь предела. Этот результат (полученный в 1949 г. Э. Шпеккером) прямо противоречит положению классического анализа, на котором строится большое число теорем. Докажем наше утверждение предъявлением конкретного примера. Пусть определенный на всем множестве натуральных чисел алгорифм $R(N)$ перечисляет без повторений (повторения всегда можно устранить) область определения $D(N)$. Возьмем последовательность $\{a_N\}$, определяемую следующим образом:

$$a_N=\frac{1}{2^{R(0)}}+\frac{1}{2^{R(1)}}+\ldots+\frac{1}{2^{R(N)}}.$$

Очевидно, что она монотонно возрастает и ограничена сверху числом 2, которое получится, если $R(N)$ принимало бы даже все натуральные значения (на самом деле, конечно, некоторые из них пропускаются). Предположим теперь, что наша последовательность сходится. Тогда, как легко доказать, она имела бы внутренний регулятор сходимости, т. е. удовлетворяла бы критерию Коши. На языке конструктивной математки это значит, что для любого числа K можно было бы алгорифмически указать такой номер N, что для любых p и q, превосходящих N, выполнялось бы

$$|a_p-a_q|<2^{-K} \quad \text{или, если } p>q$$

$$\frac{1}{2^{R(q)}}+\ldots+\frac{1}{2^{R(p)}}<\frac{1}{2^K}.$$

Отсюда немедленно следует, что

$$\frac{1}{2^{R(q)}}<\frac{1}{2^K}, \text{ т. е.}$$

$$R(q)>K.$$

Вспомним теперь, что q есть любой номер, превосходящий N. Тогда, как мы знаем, по данному K с помощью конкретного алгорифма можно найти число N, за которым все значения R будут превосходить K. Но в таком случае мы могли бы устроить процедуру разрешения области определения D: получив некоторое натуральное число K, найти N, после которого элементы этой области (именно их перечисляет R) станут превосходить K, и просмотреть конечное число значений — $R(0)$, $R(1)$, . . ., $R(N)$, проверяя, нет ли среди них числа K (дальше проверять уже нет смысла, так как значение R станет заведомо превосходить K). Но разрешить область определения D невозможно.

3. Конструктивная функция действительно переменного не может иметь конструктивного разрыва ни в одной точке.

Наличие в некоторой точке a разрыва означало бы с точки зрения конструктивной математики, что существует такое число ε, что как мало ни было бы число δ, по нему алгорифмически можно указать такое КДЧ, отличающееся от a меньше, чем на δ, что значения функции f в этом КДЧ и в a отличались бы более, чем на ε. Но тогда было бы легко указать алгорифм, узнающий для любого КДЧ из области определения данной КФ, равно оно a или нет. А это, как вытекает из рассуждений стр. 174, невозможно.

Заметим, что отсутствие конструктивного разрыва не означает еще непрерывности, понимаемой в конструктивном смысле.

Действительно, конструктивная непрерывность означала бы, что по всякому ε *алгорифмически* можно построить δ такое, что из неравенства $|a - a_1| < \delta$ следовало бы неравенство $|f(a) - f(a_1)| < \varepsilon$. Никакой логической несообразности не было бы в ситуации, когда конструктивная функция не имеет разрыва (т. е. нет алгорифма, находящего как угодно близко к a точку, в которой значение f более, чем на ε, отличается от значения в a), но не является конструктивно-непрерывной (нет алгорифма, строящего по данному ε число δ). Требование непрерывности в конструктивной математике много сильнее требования отсутствия разрыва (и в этом — еще одно проявление существенного ее отличия от классической математики, в которой указанные два требования совпадают). Но оказывается, конструктивная функция удовлетворяет и более сильному из них, всегда являясь непрерывной. Этот весьма нетривиальный результат принадлежит советскому математику Г. С. Цейтину.

Итак, вместо привычных и достаточно простых свойств действительных чисел, их последовательностей и функций, на них определенных, изучаемых в классическом анализе, в конструктивном анализе возникает неперечислимое множество КДЧ: некая не совсем ясно ощутимая «среда становления»; числа, равенство которых друг другу не всегда можно установить; функции со сложными свойствами.

Теперь мы совершенно ясно видим, что никакого упрощения теории не получается. Наоборот, исследование конструктивных аналогов даже весьма элементарных теорем обычного анализа потребовало больших усилий и редкой изобретательности. Что же касается отделов анализа, касающихся наиболее абстрактных свойств банаховых, гильбертовых и топологических пространств, то тут зачастую не удается построить конструктивных аналогов по причинам больших технических трудностей. Короче говоря, конструктивный анализ как по требуемому для его осмысления умственному напряжению, так и по громоздкости применяемого аппарата, оказывается не более простым предметом, чем классический анализ, а, пожалуй, даже более сложным (во всяком случае, для тех, кто воспитан на обычной математике и не успел привыкнуть к специфическим способам рассуждения конструктивистов и к их логике).

Поэтому ясно, что конструктивная математика создается не ради упрощения, а ради чего-то другого, во имя которого иногда даже приходится жертвовать простотой.

Посмотрим, какая же цель оказывается достойной этой жертвы.

У конструктивистов все начинается с алгорифмов, причем из всех эквивалентных форм алгорифмического аппарата они выбирают форму марковских, или нормальных алгорифмов, считая ее наиболее удачной. Иными словами, экспликацию понятия алгорифма они полагают наиболее целесообразной делать через подробное описание и выяснение свойств нормальных алгорифмов.

Проследим фактически за действием одного конкретного алгорифма. Он может применяться к любым словам (буквосочетаниям) из трехбуквенного алфавита A, B, C. Расширенный алфавит, в котором работает алгорифм, содержит дополнительную букву 0, которая играет, так сказать, роль катализатора, не входя ни в исходное слово, ни в результат, а обеспечивая лишь промежуточные действия, а также букву |.

Вот схема нашего алгорифма

$$|A \to A||| \qquad (1)$$

$$|B \to B||| \qquad (2)$$

$$|C \to C||| \qquad (3)$$

$$|0 \to 0| \qquad (4)$$

$$0A \to |0 \qquad (5)$$

$$0B \to ||0 \qquad (6)$$

$$0C \to |||0 \qquad (7)$$

$$0 \to \cdot\Lambda \qquad (8)$$

$$\Lambda \to 0 \qquad (9)$$

Пусть исходным словом будет ВАС. Начнем применять к нему алгорифм. Просмотрев подстановки сверху вниз, мы обнаружим, что первые восемь из них неприменимы, а применима лишь последняя, так как в ее левой части стоит «пустое слово», а такое слово считается стоящим перед каждым исходным словом (фактически писать Λ в исходном слове не обязательно). Применение девятой подставки дает промежуточный результат

$$OBAC.$$

Снова начнем просматривать подстановки сверху вниз. Теперь сработает шестая подстановка, и мы получим слово

$$||OAC.$$

К этом слову будет применима четвертая подстановка, порождающая следующее слово

$$|0|AC,$$

которое с помощью первой подстановки превратится в слово

$$|0A|||C.$$

После этого три шага работы осуществит третья подстановка, так как первые две неприменимы, которая последовательно трансформирует слово так:

$$|0A||C|||$$

$$|0A|C||||||$$

$$|0AC|||||||||.$$

На этом действие третьей подстановки закончится, и вступит в действие снова четвертая подстановка, которая образует слово

$$0|AC|||||||||.$$

Далее мы просто выпишем последовательность промежуточных результатов, ограничившись краткими комментариями и для сокращения записи заменяя стоящие подряд единицы числом, равным их количеству. Перепишем в новых обозначениях слово, полученное на предыдущем шаге

$$0|AC9.$$

С этого момента процесс начнет развиваться так (в этом легко убедиться, обращаясь к схеме алгорифма):

$$\left.\begin{array}{l} 0A3C9 \\ 0A2C12 \\ 0A1C15 \end{array}\right\}$$ (*C* «пропускает через себя вправо» единицы, утраивая их количество)

$0AC18$

$10C18$

$01C18$

$0C21$

3021

$$\left.\begin{array}{l} 2\,0\,22 \\ 1\,0\,23 \\ 0\,24 \end{array}\right\}$$ (0 проходит сквозь единицы влево)

24 (срабатывает восьмая, заключительная подстановка)

Так слово BAC переработано нашим алгорифмом в 24 единицы, т. е. в натуральное число 24, изображенное в самой примитивной системе записи. Оказывается, это число получилось не случайно: оно представляет собой лексикографический номер исходного слова. В этом можно убедиться, выписывая все слова трехбуквенного алфавита подряд в том порядке, который принят в словарях, пропуская вперед слова, содержащие меньшее количество букв:

1. *A*	7. *BA*	13. *AAA*	19. *ACA*
2. *B*	8. *BB*	14. *AAB*	20. *ACB*
3. *C*	9. *BC*	15. *AAC*	21. *ACC*
4. *AA*	10. *CA*	16. *ABA*	22. *BAA*
5. *AB*	11. *CB*	17. *ABB*	23. *BAB*
6. *AC*	12. *CC*	18. *ABC*	24. *BAC*

и т. д.

Рассмотренный нами алгорифм выдает лексикографический номер любого слова трехбуквенного алфавита. Его можно модифицировать, сохраняя принцип написания его схемы, но изменяя число подстановок, чтобы получить алгорифм, выдающий лексикографический номер любого слова произвольного (но фиксированного) алфавита.

Нумерация слов произвольного алфавита имеет важное значение в построении теории алгорифмов; сейчас на частном примере мы убедились, что процесс такой нумерации, называемый обычно «гёделизацией» (или отысканием гёделевых номеров), является алгорифмичным. Возможность гёделизации предполагалась нами, когда мы получали основной факт теории алгорифмов — теорему о существовании перечислимого, но не разрешимого множества.

После того, как мы обрели некоторый опыт работы с марковским алгорифмом, поставим вопрос: какие же свойства человеческой психики нужны для выполнения действий в соответствии со схемами марковских алгорифмов?

Сразу очевидно, что необходимейшим свойством, без которого невозможно сделать ни одного шага, является способность уверенно опознавать буквы, точнее, умение опознать любую из букв произвольного, но фиксированного заранее алфавита. Это означает, что перед началом работы со схемой алгорифма мы должны ознакомиться с его алфавитом и убедиться, что начертание его букв кажется нам достаточно ясным и никакие две буквы мы не спутаем между собою. Запоминать все буквы алфавита нам, конечно, не обязательно; важно, чтобы при работе со схемой алгорифма и со словом мы не приняли одну букву за другую.

Из всей нашей практики, а сейчас и из интенсивно развивающейся теории опознавания образов (важной отрасли кибернетики и психологии) мы знаем, что человек обладает хорошей способностью различать простые графемы, в частности связные графемы (буквы). Конечно, иногда нас сбивают с толку непривычные знаки, а неопытные люди почти всегда путают между собой некоторые готические буквы, однако если подобрать алфавит достаточно разумно, акт уверенного опознавания каждой буквы его может быть гарантирован.

Однако здесь может возникнуть некоторое временное сомнение, касающееся алфавитов с большим числом букв.

Чем больше их содержит алфавит, тем сложнее становятся его буквы—они или начинают приобретать слишком изысканную структуру (как, например, китайские иероглифы), или делаются очень длинными (как различные математические знаки с системами индексов); в обоих случаях процесс опознавания будет затрудняться и в конце концов может вовсе прекратиться.

Сомнение такого рода быстро рассеивается, когда мы установим, что для реализации любого алгорифмического процесса вовсе не нужно обязательно иметь много букв. Действительно, представим себе, что работа алгорифма по каким-то не зависящим от нас причинам должна совершаться над словами слишком богатого алфавита, отдельные буквы которого мы можем перепутать. В этом случае можно, используя всего два знака (скажем, точку и тире, как в «азбуке Морзе»), зашифровать буквы этого алфавита. Это устраняет всякое беспокойство по поводу возможности опознания букв, так как в способности человека безошибочно распознавать две некоторые буквы сомневаться не приходится.

Но одной способности к узнаванию букв, конечно, не достаточно для реализации алгорифмического процесса по марковской схеме. Чтобы установить применимость или неприменимость какой-то подстановки, нужно отождествить между собою некоторые два буквосочетания, одно из которых находится в исходном слове, а другое составляет левую часть подстановки (т. е. стоит левее стрелки), или убедиться, что такое отождествление невозможно. В случае простых слов и простых схем алгорифмов это делается очень легко: мы быстро пробегаем глазами по исходному слову и подстановкам и замечаем, какая из подстановок первой оказывается применимой. Но дело в корне меняется, если допустить существование сколь угодно длинных исходных слов и схем алгорифмов. Достаточно вообразить слово, длиной в несколько миллионов букв и схему алгорифма, состоящую из нескольких миллионов подстановок, каждая из которых содержит в левой и правой частях тысячебуквенные слова, как станет очевидным, что реализовать работу алгорифма путем непосредственного усмотрения заменяемых буквосочетаний здесь будет уже невозможно. В то же время мы обязаны допустить существование сколь угодно длинных слов и сколь угодно громоздких алгорифмов, ибо любое ограничение в этом смысле сразу привело бы к разрушению всей теории (например, нельзя было бы говорить о теореме Гёделя как о доказанной, ибо при ее доказательстве используется предположение, что существуют и могут быть реализованы некоторые алгорифмы, для которых пишутся только сокращенные зашифровки и которые в стандартной форме записи много раз обмотались бы вокруг земного шара).

Человек, которому дали бы для реализации громоздкую схему алгорифма, все же нашел бы выход из положения: он, поразмыслив, сообразил бы, что запоминать заменяемое буквосочетание целиком вовсе не обязательно, и процесс проверки применимости подстановки и, в случае, если она оказалась применимой, процесс замены можно редуцировать к элементарным операциям. Проверяя первую подстановку, можно запомнить лишь первую букву ее левой части и затем читать исходное слово слева направо, до тех пор, пока эта запомненная буква не встретится в нем (если она так и не встретится, то это означает, что первая подстановка неприменима и нужно будет перейти ко второй подстановке). Увидя эту букву, следует вернуться к проверяемой подстановке, посмотреть, какая буква стоит в ней на следующей позиции, и затем пойти вновь к исходному слову, чтобы узнать, совпадает ли и вторая буква подстановки со второй буквой заподозренной части исходного слова. Повторяя действия, определяемые этой методикой, мы рано или поздно установим, что левая часть подстановки целиком совпадает с частью исходного слова (под «частью» может пониматься и все слово целиком), или же убедимся, что данная подстановка неприменима и перейдем к проверке следующей подстановки. В случае же если подстановка применима, мы сможем разработать сходную тактику, которая поможет осуществить замену побуквенно, и тогда, в принципе, станет несущественным, будет заменяться сочетание в две, десять или в тысячу букв.

Вся эта разбитая на элементарные операции деятельность потребует создания техники меток, которые можно будет стирать. Поясним это на простом примере. Пусть, скажем, мы не способны запоминать более одной буквы, но нам необходимо применить к слову

$$|0A||C|||$$

подстановку

$$|A \to A|||.$$

В этом случае процесс можно организовать так: первую букву левой части подстановки отметить вспомогательным значком

$$\overline{|}A \to A|||,$$

запомнив отмеченную букву. Далее, следует просматривать исходное слово до встречи запомненной буквы; встретив эту букву, ее нужно также отметить этим значком:

$$\overline{|}0A||C|||$$

(у нас эта буква встретилась сразу же).

Теперь внимание переключается снова на подстановку, а именно — на букву, следующую за отмеченной. Эта буква также отмечается и запоминается, причем прежнюю запомненную букву можно уже забыть

$$\overline{|}\overline{A} \to A|||.$$

Слово просматривается теперь, начиная не с самого начала, а с отмеченной буквы. Если бы следующая после отмеченной буква совпала с запомненной, она должна была бы быть также отмеченной, и т. д. Но поскольку у нас совпадения не произошло, нам следует пометить первую букву исходного слова новой меткой (стерев прежнюю метку), чтобы не повторять неудачной попытки:

$$\tilde{|}0A||C|||,$$

затем стереть все метки в подстановке:

$$|A \to A|||$$

и заново начать процесс применения подстановки к слову, не обращая уже внимания на букву, помеченную «тильдой».

В дальнейшем нам может понадобиться и такая операция, как переход к испытанию следующей подстановки. Тогда нам придется отмечать испытываемую подстановку, скажем, крестиком, чтобы не спутать ее с другими (если подстановок очень много, нельзя отыскать испытываемую без метки). В случае же применимости подстановки (т. е. если буквы в ее левой части оказались отмеченными до стрелки, и столько же букв в исходном слове получило аналогичные метки), нужно будет устроить побуквенную замену, что при наличии принятых нами меток можно будет сделать, например, так. Пусть к нашему исходному слову $|0A||C|||$ применяется отмеченная на данный моменты работ подстановка

$$|C \to C|||.$$

Применяя упомянутые метки над буквами, мы в какой-то момент будем иметь перед собой слово

$$|0A|\bar{|}\bar{C}|||$$

и подстановку

$$\bar{|}\bar{C} \to C|||.$$

Увидев, что метки дошли до стрелки, мы должны начать процесс замены. Для этого снова используем метку «тильда», поставив ее над первой буквой правой части подстановки:

$$\bar{|}\bar{C} \to \tilde{C}|||,$$

после чего запомним отмеченную тильдой букву (т. е. букву C) и начнем просматривать обрабатываемое слово слева направо, начиная с конца, пока не натолкнемся на отмеченную букву ($\bar{C}$). Сотрем ее, и напишем вместо нее запомненную букву, со стоящей над ней тильдой:

$$|0A|\bar{|}\tilde{C}|||.$$

После этого вернемся к меченой подстановке, отыщем в ней букву с тильдой (такая буква в правой части подстановки всегда будет только одна), сдвинем тильду на одну букву вправо и запомним эту, отмеченную теперь тильдой букву. Подстановка примет вид

$$\bar{|}\bar{C} \to \tilde{C}|||,$$

а запомненной буквой будет единица. После этого пойдем к обрабатываемому слову, найдем в нем букву с тильдой (она тоже будет в нем единственной), и снимем с нее тильду, а рядом с ней напишем запомненную букву с тильдой (для этого нам придется раздвинуть слово, но ясно, что раздвигание можно осуществить цепным побуквенным стиранием и вписыванием, причем не придется при этом запоминать более одной буквы). Получится слово

$$|0A|\bar{|}C\tilde{|}|||.$$

Повторяя проделанную сейчас процедуру, мы получим такие последовательные пары «слово — подстановка»:

1) $|0A|\bar{|}C\tilde{|}|||$ (сдвигаем тильду в подстановке, запоминаем букву с тильдой)
$\bar{|}\bar{C} \to C|\tilde{|}|$

2) $|0A\bar{|}|C|\tilde{|}|||$ (вклиниваем в слово букву с тильдой)
$\bar{|}\bar{C} \to C|\tilde{|}|$

3) $|0A|\bar{|}C|\tilde{|}|||$ (сдвигаем тильду в подстановке, запоминаем букву с тильдой)
$\bar{|}\bar{C} \to C||\tilde{|}$

4) $|0A|\bar{|}C||\tilde{|}|||$ (вклиниваем в слово букву с тильдой)
$\bar{|}\bar{C} \to C||\tilde{|}$

Пытаясь сдвинуть тильду далее в правой части подстановки, мы обнаружим, что сдвигать ее уже некуда (мы наткнемся на метку, стоящую перед следующей подстановкой, или на концевую метку схемы и это будет сигналом к изменению программы действий). Тогда мы в подстановке снимем тильду и все метки, а в слове снимем тильду, а все помеченные буквы сотрем (в нашем случае помеченной оказалась только одна буква). В результате получим слово

$$|0A|C|||||$$

и прежнюю подстановку

$$|C \rightarrow C|||.$$

С этого момента процесс возобновится, идя по только что описанной схеме, и через некоторое время слово станет таким:

$$|0AC||||||||.$$

К нему наша подстановка будет более неприменимой, и после установления этого факта нам придется отметить крестиком следующую подстановку и начать проверять ее применимость уже известным нам способом.

Для нас представляет большой принципиальный интерес вопрос о том, насколько разнообразным должен быть набор атомарных операций, необходимых для выполнения человеком всех действий, могущих предусматриваться схемами нормальных алгорифмов, то есть какова минимальная сложность психического механизма, способного реализовать работу любого нормального алгорифма. Мы уже видели, что необходимыми свойствами этого механизма является способность различения нескольких букв, а из последнего рассмотрения следует, что к необходимой нужно отнести и способность запоминания по крайней мере одной буквы на сколь угодно длительное время, так как процесс отыскания этой буквы или установления того факта, что ее нет будет тем более долгим, чем длиннее слова, а на длину слов нельзя накладывать никаких ограничений. Ничего не получится также без умения последовательно переходить от данной буквы к соседней, совершая этот переход иногда влево, а иногда — вправо. О стирании букв мы уже говорили — оно тоже является необходимой элементарной операцией в процедуре применения алгорифма к данному слову.

Более подробный анализ вопроса, чем тот, который уместен в данной книге, выявляет конкретный набор атомарных действий, достаточный для реализации работы любого нормального алгорифма. Мы приведем здесь лишь готовый результат, не доказывая, что наш набор достаточен — такое доказательство является слишком утомительным и громоздким, как почти все доказательства этого типа теории алгорифмов.

Будем называть тот психический механизм, который дает нам возможность реализовать какой угодно марковский алгорифм, A-устройством. Вопрос, который является принципиально важным для философа, психолога и специалиста по основаниям математики, можно тогда сформулировать так: какова структура минимально сложного A-устройства: каким оно должно быть?

Следует заметить, что разложение алгорифмического процесса на наиболее элементарные шаги описанного выше типа было достигнуто уже в машинах Тьюринга (см., напр., [59]). Рассматриваемое ниже устройство является, по существу, специализированной машиной Тьюринга.

Описываемое нами A-устройство работает над парой, состоящей из слова C и нормального алгорифма A, записанных линейно в виде

$$\triangle C \bigtriangledown P_1 \to Q_1(\cdot) \bigtriangledown P_2 \to Q_2(\cdot) \cdots \bigtriangledown P_k \to Q_k(\cdot) \triangle,$$

где P_i, Q_i — слова, стоящие, соответственно, в левой и правой частях подстановок, а знак $(\cdot)$ показывает, что точка может стоять или не стоять (обратим внимание на то, что в этом варианте точка ставится после правого слова подстановки). Если A оказывается применимым к C, то через конечное время устройство оставляет на бумаге слово-результат, т. е. $A(C)$.

A-устройство, которое мы опишем сокращенно с помощью таблицы, обладает следующими характеристиками:

1) имеет 132 внутренних состояния;

2) умеет опознавать любую из 12 различных букв;

3) способно переходить от обозреваемой буквы на одну позицию влево или вправо;

4) может написать и стереть любую из 12 упомянутых букв, причем при вписывании буквы предыдущая буква, стоявшая на этой позиции, автоматически стирается;

5) может прекращать работу (выключаться).

Действия устройства полностью детерминированы и определяются в каждый момент сочетанием двух факторов: внутренним состоянием и обозреваемой буквой. Можно представить, что текст написан на длинной ленте, разбитой на элементарные ячейки, и устройство в каждый данный момент обозревает только одну ячейку. Обозначив внутренние состояния через q с соответствующим индексом, а буквы фиксированного двенадцатибуквенного алфавита через s, тоже с индексом (число индексов для q должно быть равным 132, а для s — 12), мы сформулируем принцип детерминированности устройства так: если дана пара

$$(q_i, s_j),$$

то действие, которое должно выполнить устройство, определяется однозначно. Этим действием может быть движение направо или налево, стирание или печатание буквы; выполнив действие, устройство переходит в следующее внутреннее состояние, тоже однозначно определяемое парой (q_i, s_j). Это означает, что наше устройство целиком описывается некоторым набором четверок: в каждой четверке первый и второй элементы есть, соответственно, q_i и s_j, третий элемент есть название действия, которое должно выполнить устройство, если оно имеет внутреннее состояние q_i и видит символ s_j, а четвертый элемент показывает, в какое новое внутреннее состояние должно перейти устройство после выполнения действия. Очевидно, что максимальное число четверок в нашем случае составляет $132 \cdot 12 = 1584$ — по количеству пар, с которых начинаются четверки, так как всякая такая пара единственным образом определяет всю четверку. Устройство, заданное четверками такого типа, называется машиной Тьюринга; мы, следовательно, даем схему машины Тьюринга, способной реализовать всякий нормальный алгорифм.

Однако мы не будем перечислять все четверки, регулирующие работу нашего A-устройства, а дадим его «крупноблочное» описание с помощью таблицы команд (см. стр. 191—192), в которой использованы следующие условные обозначения.

1) «НАЛЕВО до P, A» будет означать «переходить на одну позицию влево, оставаясь в том же внутреннем состоянии до тех пор, пока в обозреваемой ячейке не появится буква P; тогда перейти во внутреннее состояние с номером A (другими словами, следует перейти к команде с номером A)».

2) «НАПРАВО до P, A» расшифровывается аналогичным образом.

3) Расшифровку команд, в которых после номера стоит фигурная скобка, поясним на примере восьмой команды

$$8.\ \begin{cases} X,\ 9 \\ \rightarrow,\ 10, \end{cases}$$

которая в переводе на язык четверок запишется так:

$$\begin{array}{cccc} q_8 & 0 & 0 & q_9 \\ q_8 & 1 & 1 & q_9 \\ q_8 & \rightarrow & \rightarrow & q_{10}. \end{array}$$

4) Команда

7. ВПРАВО, 8

обозначает двенадцать четверок, первым элементом которых является q_7, четвертым — q_8, а вторым и третьим — одна и та же буква (перебираются все буквы).

5) Слово ПЕЧ P в команде означает «впечатать в обозреваемую ячейку букву P».

6) Слово <u>ЗАП</u> X в команде означает «запомнить X». Это — сложная команда, требующая более одного внутреннего состояния. Поясним это на примере команды

9. ПЕЧ $\bar{X}$, <u>ЗАП</u> X, 11,

которая расписывается в терминах четверок таким образом:

$$\begin{array}{cccc} q_9 & 0 & 0 & q_{11}^0 \\ q_9 & 1 & 1 & q_{11}^1 \end{array}$$

(остальные четверки можно не писать или дописать их с произвольными третьим и четвертым элементами).

Здесь, как мы видим, происходит раздвоение внутренних состояний, на знаке q появляется дополнительный индекс, принимающий два значения, соответствующих букве 0 и букве 1. Верхний индекс играет роль памяти. В рассматриваемом случае из состояния q_9 устройство выйдет в состояние q_{11}^0 или q_{11}^1, затем, соответственно, в q_{12}^0 или q_{12}^1, после этого либо в состояние q_{16} (в нем нет верхнего индекса — устройству здесь разрешается забыть букву), либо в состояния q_{13}^0 или q_{13}^1, откуда оно выйдет либо в состояния q_{15} или q_{28}, и тогда оно перестанет хранить букву в своей памяти, либо в состояния q_{14}^0 или q_{14}^1, ради которых буква и запоминалась.

В приведенной нами таблице A-устройства двойными являются команды 11, 12, 13, 14, 43, 44, 45, 51 и 52. Но команда 52 не просто раздвоена, она гораздо сложнее (представляет собой мультиплет). Согласно этой команде производится центральная операция всего алгорифмического процесса — впечатывание в исходное слово буквы, согласно применимой подстановке, с раздвижением слова. Именно раздвижение представляет наибольшую трудность и существенно увеличивает сложность устройства. Схема раздвижения такова. Впечатав взятую из правой части подстановки букву с тильдой, устройство запоминает предыдущую букву, стертую при печатании, переходит в первое промежуточное состояние, затем делает одно движение налево, переходит во второе промежуточное состояние, а дальше поступает так, как при первом стирании. Два, а не одно, промежуточных состояния нужны, чтобы устройство отсчитывало два такта: движение направо и печатание. Число букв, которые может понадобиться запомнить при смещении слова, равно восьми. Это буквы 0, $|$, $\bar{0}$, $\bar{|}$, $\tilde{0}$, $\tilde{|}$, Λ, Δ. Дойдя до концевой метки Δ, устройство прекращает раздвижение слова и идет на команду 46. Следовательно, нужны еще 16 состояний.

7) Команда, содержащая приказ «СТЕРЕТЬ», если она относится к внутренней букве, тоже не так проста, как может показаться на первый взгляд. Ведь необходимо после стирания сдвинуть слово, чтобы между его буквами не было пробела, дыры. Ясно, что сдвигание по затрате состояний эквивалентно раздвиганию. Стирание внутренней буквы производится в командах 57 и 69, остальные стирания концевые и сдвигания не требуют. Итого на процесс аккуратного стирания уйдет 32 дополнительных внутренних состояния.

Остальные команды ясны без комментариев. Укажем только, что ЗАП (без подчеркивания) означает запомненную букву.

Теперь понятно, откуда получилось достаточное для функционирования A-устройства число внутренних состояний 132. В таблице 75 команд: к этому числу нужно добавить 9 состояний, отводимых для запоминания буквы, 16 состояний, обеспечивающих раздвигание слова и 32 состояния, позволяющих его сдвигать. Итого получаем 132 внутренних состояния. Много это или мало для человеческого сознания? По-видимому, совсем немного.

Таблица команд *А*-устройства

1.	НАПРАВО до $\triangledown$		2
2.	ПЕЧ $+$		3
3.	НАЛЕВО до $\triangle$		4
4.	НАПРАВО до $+$		5
5.	НАПРАВО до $\rightarrow$		6
6.	НАЛЕВО до	$\overline{X}$	7
		$+$	7
7.	ВПРАВО		8
8.		X	9
		$\rightarrow$	10
9.	ПЕЧ $\overline{X}$, <u>ЗАП</u> X		11
10.	ВПРАВО		42
11.	НАЛЕВО до $+$,		12
12.	НАЛЕВО до	$\widetilde{X}$	13
		$\triangle$	13
		$\overline{X}$	16
13.	НАПРАВО до	ЗАП	14
		$\triangledown$	15
		$+$	28
14.	ПЕЧ $\overline{\text{ЗАП}}$		4
15.	НАПРАВО до $+$		28
16.	ВПРАВО		17
17.		ЗАП	14
		другое X	18
		$+$	28
		$\triangledown$	15
18.	ВЛЕВО		20
19.	ПЕЧ X ВМ $\overline{X}$		40
20.		$\overline{X}$	23
		ИНАЧЕ	21
21.	ВПРАВО		22
22.	ПЕЧ $\widetilde{X}$ ВМ X		24
23.	ПЕЧ X ВМ $\overline{X}$		18
24.	НАПРАВО до $\overline{X}$		25
25.	ПЕЧ X ВМ $\overline{X}$		26
26.	ВПРАВО		27
27.		$\overline{X}$	25
		ИНАЧЕ	3
28.	ВПРАВО		29
29.		$\overline{X}$	30
		ИНАЧЕ	31
30	ПЕЧ X ВМ $\overline{X}$		28
31.	НАПРАВО до	$\triangledown$	37
		$\triangle$	32
32.	НАЛЕВО до $\triangle$		33
33.	НАПРАВО до	$+$	34
		$\triangledown$	34
34.	ВЛЕВО		35
35.		$\overline{X}$	36
		$\triangle$	65
		ИНАЧЕ	34
36.	ПЕЧ X ВМ $\overline{X}$		34
37.	ПЕЧ $+$		38
38.	НАЛЕВО до $+$		39
39.	ПЕЧ $\triangledown$		40
40.	НАЛЕВО до	$\widetilde{X}$	41
		$\overline{X}$	19
		$\triangle$	4
41.	ПЕЧ X ВМ $\widetilde{X}$		40
42.	ПЕЧ $\widetilde{X}$ ВМ X, <u>ЗАП</u> $\widetilde{X}$		43
43.	НАЛЕВО до $+$		44
44.	НАЛЕВО до $\overline{X}$		45
45.	ПЕЧ ЗАП		46
46.	НАПРАВО до $\widetilde{X}$		47
47.	ПЕЧ X ВМ $\widetilde{X}$		48
48.	ВПРАВО		49
49.		X	50
		$\cdot$	64
		ИНАЧЕ	54
50.	ПЕЧ $\widetilde{X}$ ВМ X, <u>ЗАП</u> X		51
51.	НАЛЕВО до $\widetilde{X}$		52
52.	ПЕЧ X ЗАП ВМ $\widetilde{X}$		46
53.	ПЕЧ X ВМ $\widetilde{X}$		55
54.	НАЛЕВО до $\widetilde{X}$		53
55.	ВЛЕВО		56
56.		$\overline{X}$	57
		$\widetilde{X}$	53
		X	55
		$\triangle$	58
57.	СТЕРЕТЬ		55
58.	НАПРАВО до $+$		59
59.	ПЕЧ $\triangledown$		60
60.	ВПРАВО		61
61.		$\overline{X}$	62
		ИНАЧЕ	63
62.	ПЕЧ X ВМ $\overline{X}$		60
63.	НАЛЕВО до $\triangle$		1
64.	НАЛЕВО до $\triangle$		65
65.	СТЕРЕТЬ		66
66.	ВПРАВО		67
67.		X	66
		$\widetilde{X}$	68
		$\overline{X}$	69
		Λ	69
		$\triangledown$	70
		$+$	70

68. ПЕЧ X ВМ $\tilde{X}$, 66
69. СТЕРЕТЬ , 71
70. СТЕРЕТЬ , 71
71. ВПРАВО , 72
72. $\left\{\begin{array}{l} \Lambda \quad , 73 \\ \text{ИНАЧЕ} \quad , 74 \end{array}\right.$
73. СТЕРЕТЬ , 75
74. СТЕРЕТЬ , 71
75. СТОП

Не нужно, конечно, в данном случае понимать внутренние состояния в смысле эмоционального настроя, расположения чувств и т. д.

По существу, множество состояний означает у нас некий набор знаков, которые человек способен удерживать в сознании (мы употребляем слово «знак» в духе современной семиотики в самом широком смысле) и которые определяют его действия.

Что же касается сложности нашего A-устройства, то ее приблизительно можно оценить тем способом, который принят в теории машин Тьюринга: считать ее равной максимальному количеству четверок, т. е. 1584. В некотором роде, это количество «коммутаций», соединений. По аналогичной шкале сложность выключателя для люстры составляет несколько единиц. Итак, весьма приблизительно, можно сказать, что сложность психического механизма, обеспечивающего человеку возможность работать с любым алгорифмом Маркова, всего в несколько сотен раз превосходит сложность выключателя. Конечно, для такой богатой нейронами вещи, как человеческий мозг, это совсем небольшая сложность, хотя она, видимо, превосходит сложность многих электронных приборов (но не сложность ЭВМ, которая намного превосходит 1584 в этой системе измерения). Тем не менее, как мы увидим дальше, эта сравнительно невысокая сложность позволяет делать в некотором смысле абсолютно все.

Главное, конечно, не в том, что удается оценить верхнюю границу сложности рассмотренного механизма, а в характере этого механизма. Функционирование A-устройства состоит из действий, которые представляются нам исключительно надежными по своей природе; они сводятся к нескольким формам запоминания, опознаванию небольшого числа букв, различению левой и правой стороны и способности переходить от обозрения некоторой ячейки к обозрению соседней ячейки.

Именно надежность алгорифмических процессов являлась их притягательной стороной для группы ученых 1930-х годов, которые в соответствии с гильбертовской программой формализации и под воздействием причин более общего характера — философских, социальных и т. д. — проявили к этим процессам обостренный интерес и тщательно изучили многие их теоретические аспекты. Мы полагаем, что надежность алгорифмов является основной притягательной их особенностью и для математиков конструктивного направления, работающих в настоящее время, которые пошли еще дальше и отводят понятию алгорифма в математической науке более важное место, чем это были склонны делать Клини, Чёрч, Тьюринг и др.

Прежде всего нам следует пояснить, в каком смысле надо понимать здесь термин «надежность» и почему проблема надежности в математике продолжает оставаться актуальной.

Речь идет, конечно, о надежности рассуждения, поскольку математика есть не что иное, как рассуждение, сопровождаемое написанием и чтением некоторых специальных знаков. Надежность же рассуждения можно понимать в одном из двух следующих апектов.

Надежность как убедительность. Когда человек рассуждает о чем-то и его рассуждения становятся известными другим людям, то эти люди могут согласиться или не согласиться с ними (если, разумеется, рассуждения имеют пропозициональный характер, а не принадлежат к такому типу предложений как «я люблю джаз»). На первый взгляд, может показаться, что убедительность этого типа можно измерить, так сказать, в процентах, считая ее пропорциональной относительному количеству людей, согласившихся с рассуждением. В житейском смысле убедительность именно так и понимается. Но в науке этот критерий оказывается непригодным, в ней методы голосования и опросов с целью выявления общественного мнения не приносят особой пользы. В современной математике есть такие разделы, которыми занимаются во всем мире пять-шесть человек, и результаты, полученные в этих очень узких областях, имеют столь сложную и специальную форму, что никто, кроме упомянутых нескольких человек, не способен их как следует понять. Тем не менее, эти результаты считаются надежными всеми (или почти всеми) математиками, включая и тех, которые работают в весьма отдаленных областях и не могут не то, чтобы тщательно проследить за рассуждением, но даже понять проблематику. Нередко бывает и так, что работы, непонятные подавляющему большинству математиков, отмечаются премиями и медалями, и никто не подозревает в этом сговора нескольких смелых авантюристов, пускающих пыль в глаза научной общественности.

Математики относятся так доверчиво к далеким от их профессиональных интересов областям своей науки по той же причине, по которой широкие массы людей, далеких от науки, доверчиво относятся к науке в целом, хотя и не могут сами проверить ее утверждений. Простой человек по всему своему жизненному опыту знает, что наукой занимаются умные и способные люди, которые долго учатся, вбирают в себя мудрость поколений, а потом сами начинают развивать науку дальше, вкладывая в эту огромную сокровищницу знания свои скромные достижения; восприятие науки как куммулятивного общественного творчества, обладающего статусом серьезности, заставляет простого человека верить в потенциальную убедительность ее результатов, то есть принимать тезис о том, что всякий, кто получит образование и выучит определенный раздел науки, неизбежно лично убедится в правильности результатов, полученных в этом разделе.

Точно так же думает, скажем, специалист по высшей алгебре об эргодической теории. По всему своему опыту размышлений над математическими проблемами, по всей практике общения с математиками разных специальностей, по воспоминаниям о собственной учебе, по наблюдениям за студентами и школьниками он знает: если бы он или кто-нибудь другой из алгебраистов нашел время и силы и разобрался как следует в эргодической теории, он непременно принял бы ее результаты и согласился бы с ее рассуждениями. Не имеет никакого значения, что он в глубине души чувствует, что никогда не найдет ни времени, ни сил, чтобы разобраться в этой теории; уверенность в потенциальной ее убедительности не только вполне заменяет ему личную проверку, но иногда оказывается даже большей, чем уверенность в результатах более близкой ему области, где он как специалист может замечать отдельные слабые места.

Таким же отношением к термину «убедительность» руководствуется математик, когда он создает что-то новое, скажем доказывает теоремы. Он считает свою задачу выполненной, а результат достигнутым не в тот момент, когда его коллеги проверят рассуждение и выкладки, а значительно раньше — когда он сам все проверит и убедится, что никаких отклонений от тех правил рассуждения, которые считаются законными, нет. После такой самопроверки, он обретает полную уверенность в убедительности своего результата, поскольку он понимает специфичность математического творчества и знает, что оно решительно отличается от творчества артиста или писателя именно в пункте, касающемся убедительности. Выходя на сцену, артист всегда волнуется, так как никогда не может быть на сто процентов убежден в успехе; по этой причине с беспокойством ждет читательского суда автор художественного романа. В этих областях убедительность можно охарактеризовать процентом благоприятных мнений. Но в математике, как нам говорят со школьной скамьи, все обстоит по-другому. Мы много раз слышали и читали про замечательных ученых, сделавших поразительные математические открытия, которые не были оценены и даже не были поняты при жизни их авторов (самый яркий пример здесь, вероятно, Эварист Галуа; прекрасной иллюстрацией могут служить также некоторые работы Архимеда), но которые потом не только были узаконены, но и стали считаться основополагающими. По этим рассказам мы привыкаем к мысли, что правильное рассуждение рано или поздно становится убедительным, то есть привыкаем отождествлять математическую убедительность с потенциальной убедительностью и считать, что никакой другой формой убедительности математик и не должен руководствоваться в своей работе (иначе он будет угождать вкусам, идти в русле моды и не сделает глубоких открытий, которые чаще всего совершаются людьми с оригинальным и самостоятельным умом).

Раньше, когда общепринятой формой мышления был «математический платонизм», потенциальная убедительность понималась просто: как истинность. Истинной же считалась такая теория, которая соответствует чему-то определенному, извечному, существующему вне нас (будь то гегельянская абсолютная идея или материя с ее законами движения и развития). Это определение истины казалось в тот период естественным и ясным, слово «соответствует» не вызывало никаких вопросов и недоумений; оно стояло во фразе незаметно, неброско, воспринималось почти как служебная частица, как соединительный или вспомогательный член предложения, не несущий особой смысловой нагрузки. Никто не подозревал, какая бездна проблем кроется в этом слове — до тех пор, пока не рассыпалась в прах вера в предустановленную гармонию и пока человек не осознал, что ему нужно добывать знание не с помощью припоминания, как думал Платон, не сливаясь с богом, создавшим нас по своему образу и подобию, как в течение двух тысяч лет учила христианская религия, не извлекая до конца все, что можно, из априорно данных нам возможностей восприятия и осмысления, как считал Кант, не освобождая в себе абсолютную идею, как того требовал Гегель, а каким-то не совсем еще ясным, но наверняка трудным способом длительных последовательных приближений. Как только сложность, тернистость и многоступенчатость познания стала признанным фактом, сразу все акценты определения истинности изменились и оно перестало быть определением, поскольку сам собой возник коварный вопрос: что такое «соответствует»?

Соответствие в платонистском, теологическом и вульгарно-материалистическом (механическом) смыслах сейчас явно не согласуются с фактами. Философы усиленно изучают эту проблему в широкой постановке и можно было бы провести много аргументов в пользу мнения о перспективности диалектико-материалистического подхода к этой проблеме (некоторые из таких аргументов мы приводили выше, в главе 2). Однако естествоиспытатели, разумеется, не могут ждать, пока профессиональные философы дадут развернутое определение понятию «соответствует» в применении к каждому конкретному материалу той или иной науки. Например, в современной марксистской философской литературе имеется по крайней мере восемь различных определений понятия отражения (см. [54], стр. 21), и хотя каждое из них раскрывает какую-то из сторон сложнейшего явления отражения материи сознанием, не все они могут служить бесспорным ориентиром для исследователя, занимающегося частными проблемами конкретной науки. Естественно поэтому, что математики, глубоко чувствующие дух времени и сознательно преодолевшие в себе «стихийные» остатки господствовавшего еще недавно «математического платонизма», стремятся найти собственное решение указанной проблемы, чтобы строить доказательства в согласии с выработанным критерием потенциальной убедительности.

Упрощенно говоря, дело обстоит так. Математик занимается какой-то конкретной областью, скажем, анализом, и в результате размышлений приходит постепенно к выводу, что многие понятия и методы, используемые в этой дисциплине, спорны, недостаточно обоснованны. У него возникает желание переизложить результаты таким образом, чтобы этих слабых мест не было. Он выбирает только такие определения и такие приемы аргументации, с которыми, по его мнению, не согласиться уже не может никто. Но тут обнаруживается, что в рамках этих более строгих средств результаты получаются принципиально другими. Тут перед ученым возникает дилемма: отказаться от попыток придать теории более обоснованную форму и, не мудрствуя лукаво, работать в рамках общепринятых представлений о строгости и надежности, или же развивать свой нетрадиционный подход, может быть даже упуская из-за этого возможность добиться результатов в русле «математики большинства», которые продолжают высоко цениться научной общественностью.

Такую дилемму, коль скоро она перед ним возникает, каждый математик решает по-своему. Решение зависит в первую очередь от степени зародившихся в нем сомнений, а также от той научной инерции, которую он приобрел в рамках какого-то научного коллектива, от того, каких учителей ему довелось иметь в студенческие или аспирантские годы. Может случиться и так, что сомнения в принятых методах сильны, но они пришли слишком поздно, и поэтому математик уже не может порвать с принятой им формой изложения и с привычными формами аргументации и не рассчитывает на свои силы настолько, чтобы добиться многого на новом и неизведанном пути.

Таким образом, побуждения, заставляющие предпочесть классический или конструктивный вариант математики, не всегда связаны только с научными соображениями, а зачастую имеют под собой эмоциональную почву. Несмотря на такое, казалось бы случайное, происхождение, эти побуждения постепенно формируют целостный образ мышления индивидуума, помещая его в рамки определенной математической школы, а через совокупность индивидуумов определяя и русло самой школы. Так артефакт становится решающим фактором. «Механизм» воздействия таких вненаучных, но по-человечески глубоко понятных соображений на выбор пути исследования хорошо виден из документа, который мы сейчас приведем. Это — письмо одного математика своему юному ученику, которому он старался привить интерес к конструктивной математике и теории вычислимых функций. Это письмо явилось ответом на присланные учеником несколько доказательств из области классического анализа. По разрешению автора, просившего не называть никаких имен, мы даем несколько выдержек из этого письма.

«Теперь я особенно заинтересован в том, чтобы ты стал знаменитым математиком: твое письмо будет представлять интерес для биографов, и я смогу получить от этого немало удовольствия. Заинтересованность будет заставлять меня изобретать способы содействия твоему прославлению. Я тешу себя надеждой, что один такой способ уже осуществил: познакомил тебя с конструктивным образом мышления.

Это мышление, которое постоянно обращается к изучению алгорифмических процедур, стало, я думаю, твоей первой любовью. Это вовсе не значит, что она продлится всю жизнь. Возможно, ты вступишь в благополучный брак с классической математикой и обзаведешься многочисленными детьми — теоремами. Но воспоминание о первой юной любви никогда уже не исчезнет из твоей памяти, и кто знает, может быть в момент полного, казалось бы, довольства своей супругой и нажитым с ней благосостоянием блеснет это яркое воспоминание, и настроение вдруг испортится, засосет под ложечкой, и подумается: а не лучше было бы не прельщаться богатством и могуществом старой леди, а оставаться бедным, но... честным?

Я уверен, что такие угрызения совести обязательно будут преследовать тебя до гроба. И пусть преследуют. Пусть конструктивное мышление будет тем оводом, который не даст тебе зажиреть (правда, один специалист — энтомолог сказал мне, что овод не кусается и не имеет даже челюстей, но я все же пользуюсь стандартной интерпретацией слова «овод»). А может быть — и в этом как раз состоит моя надежда — это мышление поможет тебе создать великие идеи.

Что касается меня, то я пришел к конструктивистам совсем окольным путем. Занимаясь другой наукой, из-за которой я потерял так много времени для занятий математикой, я пришел к самостоятельному выводу о том, что классическая трактовка действительных чисел лишена всякого смысла. Кустарно, в одиночестве я стал размышлять над возможностями поправить дела в этой области. Естественно, что когда я узнал, что умные люди давно работают над этой же проблемой, мне захотелось познакомиться с ними и набраться от них ума. И я не разочаровался в этих людях.

Я думаю, что, независимо от конкретных перспектив конструктивного анализа на данный момент, конструктивисты сделали и продолжают делать большое по своей научной важности дело. Значение их работы обусловливается следующим обстоятельством. Кризис основ математики отнюдь не окончился, ОН ПРОДОЛЖАЕТСЯ! Никакие программные заявления современных формалистов не затушуют того факта, что наивная теория множеств нелепа (это показывают парадоксы), а аксиоматическая теория множеств чрезвычайно искусственна, и наша интуиция полностью молчит в вопросе об ее непротиворечивости. Она создана задним числом, чтобы оправдать анализ (я лично даже не уверен, можно ли построить весь существующий анализ только на аксиоматической теории множеств и формальной арифметике; кроме того, если из аксиоматической теории множеств вытекает теорема Хаусдорфа — а ты напишешь мне об этом,— то у меня к ней доверие будет столь же ничтожно, как и к «наивной» канторовской теории множеств), и тот факт, что в ней нет рефлексивного парадокса, не есть факт, которым следует так уж гордиться серьезному человеку.

Итак,— быть богатым теоремами и все же слегка кривить душой, успокаивая себя изгнанием рефлексивного парадокса и молчанием подавляющего большинства, не интересующегося проблемами философии и оснований математики, или же начинать все на голом месте, как Сергий Радонежский, работать, засучив рукава, не получая ни почестей, ни наград, но несокрушимо веря, что твоя работа важна и необходима для будущего? Вот альтернатива, стоящая перед тобой...»

Конечно, нельзя согласиться со всеми утверждениями этого эмоционального напутствия. Но в нем достаточно верно схвачены особенности конфликта, который возникает в душе ученого, начинающего сомневаться в истинности воспринятой им от своих учителей теории. Если сомнения достаточно сильны, а человек достаточно одарен способностями, то он все же свернет с проторенного пути и начнет прокладывать свой собственный — не потому, что его честолюбие будет нашептывать ему «стань Лобачевским», а потому, что он — настоящий математик, а математика интересует убедительность не в смысле опросов общественного мнения, а потенциальная. «Поиск вечной истины» в интерпретации математика означает «поиск таких рассуждений, которые всякий другой математик, который разберется в них достаточно глубоко, обязательно признает и примет».

Есть основания предполагать, что математики конструктивного направления воспринимают некоторые аспекты своей работы как апелляцию к потенциальным единомышленникам и твердо верят, что, вникнув в сущность конструктивных утверждений, их невозможно не счесть более убедительными, чем «классические» утверждения. И главным опорным пунктом этой веры служит ощущение, что единственной трактовкой термина «существование» в математике, которая на все времена останется абсолютно убедительной (потенциально), является конструктивная трактовка. Никогда, ни при каких обстоятельствах и ни в каких условиях, полагает конструктивист, математик, которому предъявили исходный обозримый объект и алгорифм, заведомо применимый к этому объекту, не сможет усомниться, что существует и объект, представляющий собой результат применения алгорифма, поскольку он может промоделировать процесс применения алгорифма к объекту с помощью заключенного в его сознании A-устройства и с полной детерминированностью и необходимостью породить образ этого объекта. Иными словами, существование в конструктивном смысле предполагается абсолютно надежным потому, что процесс мысленного построения, доказывающий теорему существования, является абсолютно убедительным для всех людей (в потенциальном смысле). В каждом человеке заложено A-устройство, работающее устойчиво и единообразно. Без этого минимального ядра со сложностью в тысячу с чем-то единиц невозможными были бы никакие четкие умственные операции и весь воспринимаемый нами мир приобрел бы призрачные сновиденческие черты и стал бы подобен миру Кэролла, описанному в «Алисе».

Можно спросить, почему конструктивисты не допускают существования объектов и другого рода, порождаемых более вольной фантазией. Ведь тут само собой напрашивается обвинение, что они обедняют математическое творчество (подобное обвинение когда-то Гильберт выдвигал против интуиционистов). Ответ конструктивиста на этот упрек, по-видимому, будет состоять в следующем: фантазия и полет воображения нужны в математике так же, как и во всех других видах интеллектуальной деятельности, но они в этой науке могут привлекаться лишь как вспомогательные средства в период изобретения методов, отыскания путей и т. д. Математика по своему характеру есть такая наука, в которой сообщаемые результаты должны быть очищены от всего субъективного. Математику можно трактовать как совокупность рассуждений, обладающих абсолютной потенциальной убедительностью. Значит, ее результаты должны быть прослеживаемы во всех деталях той частью психики, которая является общей для всех умов. Но такая общая часть, такой инвариант всех интеллектов есть A-устройство; остальные качества сознания (более сложные и тонкие) различны у разных людей.

Надежность как подобие наблюдаемым вещам. Этот аспект надежности также привлекается некоторыми представителями конструктивного направления в качестве важного аргумента. Особенно активно апеллирует к нему Н. А. Шанин, выразивший свое кредо в этом вопросе очень ясно, выпукло и полно.

«Прежде всего остановимся на некоторых сторонах процессов формирования математических понятий.

В процессах формирования математических понятий производятся мысленные акты различных типов. Отметим некоторые типы таких мысленных актов.

1. Мысленные акты «чистого» отвлечения. Эти мысленные акты состоят в том, что из всевозможных свойств, присущих всем объектам, включаемым в данный момент в поле зрения, мысленно выделяются некоторые свойства, а по отношению к существованию или несуществованию любых других свойств наше сознание становится совершенно безразличным.

Если с выделенными свойствами мы свяжем некоторый термин, не используемый для других целей, то получим некоторое общее понятие.

2) Мысленные акты идеализации. Эти акты состоят в порождении нашим воображением некоторых представлений или понятий, рассматриваемых нашим сознанием в качестве объектов изучения и наделяемых нашим вообра-

жением не только такими свойствами, которые выделены *посредством актов «чистого»* отвлечения при рассмотрении объектов, составляющих исходный материал для данных мысленных операций, но и такими воображаемыми свойствами, которые совершенно отсутствуют у исходных объектов или же отражают свойства исходных объектов в значительно искаженном виде.

3) Многоступенчатые наслоения разнообразных актов «чистого» отвлечения и актов идеализации. На каждом этапе мысленных процессов этого типа исходными объектами для актов «чистого» отвлечения и актов идеализации служат не только объекты, составляющие исходный материал для всей цепи производимых мысленных операций, но и те понятия и представления, которые сложились на предшествующих этапах.

Мысленные акты упомянутых выше типов представляют собой акты абстрагирования» ([42], стр. 284).

В отличие от интуиционистов, конструктивисты не ограничиваются психологической стороной дела; возможно она не является для них и главной. Серьезнейшее место в обосновании своих идей, касающихся происхождения математики, они отводят критерию практики. Н. А. Шанин пишет об этом следующее:

«Если в процессе изучения некоторой ситуации удается найти такие идеализации, которые позволяют с удовлетворяющей определенные запросы точностью решить некоторые задачи, то эти идеализации могут закрепиться и превратиться в традицию, к которой люди автоматически обращаются и в тех случаях, когда приходится рассматривать задачи новых типов или предъявлять бóльшие, чем раньше, запросы к постановкам и решениям задач первоначальных типов. Привлекательной стороной таких традиций является разработанность и привычность определенных аппаратов. Эта привлекательная сторона объясняет тот факт, что многие такие традиции длительное время не встречают конкуренции. Одной из таких традиционных идеализаций является абстракция актуальной бесконечности...

После того как представление или понятие, возникшее в результате акта идеализации, входит в ткань математической теории, математик обычно забывает о механизме происхождения данного представления или понятия и перестает замечать различия между свойствами первого типа и второго типа. Свойства обоих типов в равной мере становятся исходной базой для новых актов абстрагирования и для процессов логического вывода. В результате новых актов идеализации, производимых на этой базе, возникают новые представления или понятия, и в них еще труднее отделить свойства, которые можно рассматривать как удовлетворительные отражения свойств исходных объектов, лежащих в основе формирования всей цепи рассматриваемых представлений и понятий от тех свойств, которые являются лишь продуктами метода. Эта неопределенность все больше и больше разрастается при переходе к более высоким ступеням происходящих в математике процессов абстрагирования» (там же, стр. 285).

Мы вынуждены были привести столь пространную цитату, поскольку в ней ничего нельзя пропустить без существенной потери содержания; каждая фраза в этом отрывке важна для понимания основной идеи. Н. А. Шанин с исключительной наблюдательностью описывает знакомый всем математикам процесс построения абстракций, причем этот процесс прослеживается с самого начала — от построения математических моделей окружающих нас вещей и явлений. С большой точностью изложены здесь также побудительные мотивы построения многоступенчатых идеализаций, коренящиеся в инерционности мышления и в постоянном желании людей использовать уже имеющиеся у них представления для оценки новой ситуации.

После приведенного описания сути математического творчества Н. А. Шанин поднимает некоторые проблемы логического вывода, а затем пишет:

«Главное обстоятельство, побуждающее критически относиться к основам классической математики, состоит в том, что абстракция актуальной бесконечности и возникающие на ее основе представления и понятия являются далеко зашедшими идеализациями, то есть такими идеализациями, при которых связь между представлениями, понятиями и суждениями, с одной стороны, и реальными объектами, составляющими исходный материал для всей цепи рассматриваемых актов абстрагирования, с другой стороны, во многих случаях оказывается весьма косвенной, расплывчатой или даже вовсе не обнаруживается. Трудности возвращения от представлений, понятий и суждений, в формировании которых участвует абстракция актуальной бесконечности, к исходным реальным объектам и связям между ними во многих случаях оказываются весьма значительными» (там же, стр. 285—286).

Таким образом, Н. А. Шанин склонен считать главным достоинством конструктивной математики то, что, по его мнению, она более непосредственно отражает реальные вещи (возвращение к исходным для абстракций реальным предметам в ней происходит легче, чем в классической математике). Отсюда можно вывести предположение, что конструктивная математика должна оказаться более подходящим инструментом для физика или инженера, чем известный им на сегодняшний день обычный математический аппарат.

На самом же деле все обстоит противоположным образом. Прикладная ценность конструктивной математики пока чрезвычайно низка, и в этом смысле ее перспективы все еще представляются весьма проблематичными. Для теоретической кибернетики могут иметь утилитарное значение некоторые результаты, достигнутые в той части конструктивной математики, которая занимается проблемами сложности алгорифмов (примером задачи, характерной для этой области, является решенная нами выше задача о сложности A-устройства) — вот, пожалуй, и все, на что может рассчитывать конструктивная математика в ближайшее время в смысле «возвращения к исходным объектам.

Нам кажется, что в выводах, которые делает Н. А. Шанин из своей в принципе правильной схемы математической абстрактизации, не учитывается неизбежность и необходимость непрямого, ступенчатого, опосредствованного интерпретационной системой, быть может, очень нетривиальной и неожиданной, соответствия между нашими теориями и объектами, для описания и объяснения которых эти теории могут быть привлечены. Мы полностью согласны с Л. Г. Антипенко, который, анализируя возможные методы изучения реальности, говорит:

«Здесь можно идти разными путями. Можно брать какие-то отдельные фрагменты реальности и сопоставлять их с субъектом, с его деятельностью, чтобы понять способы образования абстракций, роль идеализации и схематизации при мысленном воспроизведении, моделировании того или иного объекта исследования. Условно мы будем называть такой подход к проблеме реальности интенсивным. Однако можно встать и на другой путь исследования (назовем его экстенсивным), который ведет к построению общей структурной модели мироздания. Оговоримся сразу же, что речь идет не о каких-либо атрибутивных моделях «извечной субстанции», которые носят натурфилософский характер. Речь идет совершенно о другом — о моделировании мира в плане тех допущений, которые вынуждают нас делать наш язык. Разумеется, имеется в виду не обычный разговорный язык, а некоторый искусственный язык с более или менее твердо установленными синтаксисом и семантикой» ([37], стр. 31—32).

Первый путь, охарактеризованный Л. Г. Антипенко, представляет несомненный интерес для философии и психологии: он может (и должен) использоваться также теми представителями естественных наук, которые изучают историю возникновения логических оснований своей отрасли знания. Но, на наш взгляд, гораздо более плодотворным является второй путь. Поясним эту принципиально важную мысль более подробно.

Идя по первому пути, мы сразу же сталкиваемся с почти непреодолимой трудностью — нам исключительно сложно будет ответить на вопрос, что такое «фрагменты реальности». В философских и особенно психологических исследованиях описательного характера такая трудность будет еще мало заметна, но как только мы перейдем к конкретной исследовательской работе, требующей создания математической модели, она разрастется до таких масштабов, что вынудит нас отступить.

Действительно, если мы, например, захотим вскрыть логические основания физики элементарных частиц (подчеркиваем — не в историческом, а в чисто научном аспекте), то что нам считать здесь «фрагментом реальности»? Во времена Эпикура и даже во времена Ломоносова никакой опасности в этом вопросе не чувствовалось, и ответ являлся сам собой — реальностью, изучаемой данной наукой, служат маленькие (следует указание размера) твердые частицы, сталкивающиеся между собой, зацепляющиеся друг за друга и образующие все видимые и осязаемые нами тела. Последним из великих ученых, которые могли наслаждаться столь ясной картиной, был, видимо, Людвиг Больцман. В период веры в предустановленную гармонию никому, даже самым гениальным людям, не могло прийти в голову, что никакой «высшей инстанцией» не оказалось предусмотренным прямое и простое постижение нами «реальности», что мы видим в вещах одно, а их сущностью является другое, то есть, что в некотором смысле мы видим вещи не такими, какие они есть в действительности. Существа, столь плохо приспособленные к «усмотрению сущности», были бы достойны величайшего сожаления, если бы они постепенно не начали сознавать свое уязвимое место. Раз мы говорим о своей неспособности с одного взгляда видеть истинную реальность, значит наши дела не так уж плохи. Ведь откуда-то мы узнали, что сущностью, то есть тем, что достойно носить имя реальности, является не поверхностное, а скрытое гораздо глубже,— значит и дальше, идя по тому же пути, мы сможем корректировать и исправлять склонные постоянно вводить нас в заблуждение органы чувств, доставляющие нам, к сожалению, неадекватную информацию о вещах.

Этот ступенчатый путь познания, достаточно ясно охарактеризованный еще В. И. Лениным, теперь стал нормой научного исследования и свернуть с него вряд ли возможно. Но это как раз и есть второй путь, описанный Л. Г. Антипенко. Он позволяет осуществить последовательные приближения к объекту (фрагменту реальности). Исторически такое приближение происходило примерно по следующей схеме:

1) На первом этапе использовался наличный элементарный психический материал, включающий все знаковые системы, выработанные в процессе эволюции — визуальные образы расплывчатого характера, лексику и синтаксис естественного языка, возникшие в сознании в результате наблюдения за природой представления о закономерностях, частично также эмоции и т. д. Из этого материала формировалась «стихийная» картина вещей и их отношений, главной особенностью которой можно считать простоту и доступность интерпретации, необходимой для использования этой картины, то есть для осуществления успешного, «плавного» перехода от модели к определенному взаимодействию с окружающими вещами. Назовем этот этап *донаучным*. Семиотическими средствами второго порядка, служащими для организации указанного элементарного материала, на донаучном этапе являлись простейшие формы религии, обряды, ритуалы, культ предков, поклонение предметам и животным, мифы и т. д. Этот этап, весьма условно, можно считать продлившимся (в Европе) до 5 века до н. э.

2) На втором этапе, вследствие накопления несоответствий между созданной ранее и освященной общественной традицией картиной мира и фактами, точнее, вследствие учащения случаев неуспешности поведения, определяемого данной картиной, в последнюю были внесены существенные изменения. Для этого использовался главным образом материал естественного языка, к этому времени ставший уже достаточно богатым и разнообразным. Из этого материала сформировались отвлеченные понятия, гораздо более сложного порядка, чем антропоморфные понятия первобытных богов, и принципы, более утонченные и нетривиальные, чем указания на волю или желания богов, скопированные со знакомых каждому человеческих желаний и интересов. Интерпретаторы такой усложненной картины выделяются в особый класс людей и называются философами, мудрецами и т. д. Назовем этот этап *раннефилософским*. Семиотическими средствами «второго этапа» теперь становятся уже первые формы социальных институтов — зачатки организованного школьного дела, академии, лицеи, университеты. Этот этап пришел к своему завершению примерно в XVI в. нашей эры.

3) На следующем этапе, опять-таки вследствие накапливающегося расхождения между фактами и картиной мира, она подвергается новой серьезной перестройке. Семиотический материал элементарного уровня существенно обогащается разработкой и внедрением реализуемых в объективной форме языков с достаточно жесткими синтаксическими правилами, то есть алгебры, аналитической геометрии и научной логики, тексты которых могут быть предъявлены в виде знакосочетаний. Интерпретаторами теперь становятся прошедшие специальное обучение люди, называемые учеными; только они умеют читать сложные тексты новых семиотических систем, из которых формируются картины окружающего мира. Параллельно этому продолжают развиваться и совершенствоваться общественные установления. Этот этап можно назвать *естественнонаучным*. Он окончился где-то около середины XIX в.

4) На четвертом этапе, по тем же причинам, по которым происходило расширение и перекомпоновка семиотических средств, нужных для построения картины (модели) окружающей нас реальности, искусственные языки, особенно язык математики, развились настолько, что возникла

возможность заготовления моделей, реализованных в этих языках, без непосредственного побуждения их интерпретировать, то есть создания потенциальных моделей. Дело в том, что сам знаковый материал стал объективной реальностью, которая сделалась настолько сложной и объемной, что потребовала создания ее картины, легче овладеваемой нашим сознанием, чем она сама как фактически написанный текст громадной длины. Иначе говоря, появилась необходимость в создании «модели модели», о которой так хорошо говорит Н. А. Шанин. Специалисты, овладевшие сложными знаковыми системами этого этапа, разделили свои обязанности — одни продолжали заниматься проблемами интерпретирования формализованных (или почти формализованных) текстов в операционных терминах (прикладники, физики, представители технических наук и др.), в то время как другие сосредоточили свои силы на изучении знаковых систем как таковых (чистые математики). Так в ходе исторического развития возник *этап математизации науки.* Нет нужды описывать, как усложнилась на этом этапе общественная структура в тех своих звеньях, которые связаны с развитием различных форм познания и приложения научных достижений к технике и другим областям.

Теперь мы считаем необходимым обратить особое внимание на следующую мысль, которая заключает в себе одно из центральных положений настоящей книги: на каждом новом этапе познания в качестве «окружающего мира» выступало не что иное, как модель, созданная на предыдущем этапе. Термины «мир», «вещи», «окружающая реальность», «объективная действительность», фигурирующие в науке,— это те представления, те модели, хранящиеся в нашем сознании и в книгах, к которым мы так привыкли, что воспринимаем их как абсолютно естественные, как данные извне «такими, как они есть», то есть как сами вещи. Разумеется, мы говорим сейчас не о философском аспекте этих терминов, а об их употреблении в конкретной исследовательской работе, ведущейся в рамках частных наук.

Выше, в главе 2, мы указывали, как следует применять к разработке конкретно-научной методологии основное положение материализма о существовании материи вне нас и наших моделей (мы видели, что без принятия этого положения — сознательного или стихийного — конкретные науки были бы совершенно беспомощными). Но когда мы говорим не о материи как философской категории, которая, как указывал В. И. Ленин, не обладает никакими свойствами, кроме единственного «свойства» — существовать независимо от нашего сознания,— а о «вещах», наделенных огромным количеством индивидуальных особенностей,— это совсем другое дело. Чтобы избежать недоразумения и сделать нашу мысль, выраженную подчеркнутой сейчас фразой, еще более ясной, заметим, что в процессе совершенствования знаний, то есть в процессе развития науки, фигурируют не сами вещи как физические тела, а *понятия* вещей. Даже в тех отраслях науки, где непосредственные наблюдения и эксперименты являются неотъемлемой частью исследования, операционные взаимодействия с телами и предметами играют все же вспомогательную роль, облегчая нам достройку или перестройку научных понятий и формул (возможно, выраженных на естественном языке). Чем дольше специалист занимается какой-то теорией, тем в большей степени понятия, входящие в эту теорию, получают для него онтологический статус. Говоря «вещи», ученый убежден, что говорит о существующих вне нас материальных образованиях, а на самом деле он всегда при этом имеет в виду *понятия*, причем часто довольно сложные, надуманные и плохо соответствующие опыту оперативного взаимодействия с их материальными прообразами, но зато занявшие прочное место в его частной науке.

Современный физик, когда он говорит о «реально существующей частице», имеет в виду «волновой пакет» или уравнение Шредингера. На наш взгляд, трудно с достаточной уверенностью сказать, является ли такое абстрактное понятие «слишком далеко зашедшим» или путь от него к исходному объекту короток. Впрочем, такая постановка вопроса требует многочисленных уточнений. поскольку сразу неясно, чтó в этом случае означает термин «исходный объект». Наш вопрос был бы разумный, если бы какая-то инстанция, обладающая для нас абсолютным авторитетом, могла зафиксировать точное и вечное понятие, исчерпывающее содержание данного объекта. В этом случае мы, в принципе, могли бы сверять наши неполные и приблизительные представления об объекте с чем-то независимым (подчеркнем еще раз, что мы говорим не о материи, а о конкретном объекте научного познания). Но такой инстанции нет, и рассчитывать на нее не приходится. Поэтому путь развития науки состоит не в том, чтобы отыскивать кратчайшие пути от «фрагментов реальности» к теоретическим понятиям и обратно, а в том, чтобы, не ограничивая себя никакими предвзятыми представлениями об «объектах», строить произвольные знаковые и понятийные абстрактные модели, пусть самые странные, причудливые, «сумасшедшие» (эта причудливость всегда оказывается лишь непривычностью, и через некоторое время раздражавшая всех модель адаптируется общественным сознанием и становится «самим объектом»), которые при отыскании удачной интерпретационной системы хорошо соответствовали бы нашему деятельному опыту, то есть одобрялись бы обобщенным критерием практики. Требовать от науки, чтобы она вернулась к «прямому» описанию объектов»,— дело, не сулящее никакой пользы, и, помимо того, безнадежное, ибо наука (в частности, физика) прочно стала на путь свободного, ничем не сдерживаемого мысленного и математико-логического экспериментирования с моделями всех ступеней абстракции и «отучить» ее от этого вольного творчества никто уже не в силах.

Подчеркнем также еще одно обстоятельство. Четвертый этап приведенной нами схемы принципиально отличается от трех предыдущих, являясь в некотором смысле исключительным, особым. На каждом из этапов семиотические модели предыдущего этапа как раз и составляли содержание понятия «объект», но только при достижении четвертого этапа оказалось возможным осознать, что никакого иного смысла в термине «объект познания» не существует. Другими словами, познание мира, состоящее из постепенного совершенствования и развития знаковых систем, понятий, теорий и т. д.— т. е. всего материала, из которого формируются модели,— всегда был активным, но на первых трех этапах он рисовался познающему субъекту, как пассивный, как подстройка человеческого сознания под фиксированный «мир вещей». Только в конце XIX — начале XX века отдельные умы начали понимать, что «вещи», или «объекты», фигурирующие в нашем знании, никем, нигде и никак заранее не фиксированы, что мы конструируем их сами, проявляя присущую нам творческую активность, что «объект» это совсем не то же самое, что «материя». В. И. Ленин первым четко указал на принципиальное отличие конкретного предмета научного изучения, который всегда определяется набором свойств, и материей, не обладающей никакими свойствами, и в этом состоит его громадная заслуга. Конечно, В. И. Ленин не «изобрел» эту идею в том смысле, который мы обычно вкладываем в слово «изобретение», а лишь с полной ясностью высказал то, что уже «висело в воздухе», но заслуга его от этого не умаляется, а, наоборот, увеличивается.

Приведенные нами соображения не позволяют нам согласиться с трактовкой Н. А. Шаниным конструктивной математики как более перспективного инструмента исследования, чем классическая математика. Она имеет примерно нулевую прикладную ценность (отличие от нуля, может быть, достигается лишь за счет теории сложности) даже в потенциальном смысле, если под приложением понимать непосредственное приложение теории к окружающему миру, то есть установление с помощью однократной интерпретации соответствия между понятиями этой теории и наблюдаемыми явлениями. Такой способ исследования оказался малоэффективным и в настоящее время устарел. Инструментальная трактовка конструктивной математики Н. А. Шаниным, кроме того, расходится с определением этой науки, данным ее основателем, А. А. Марковым, который характеризует конструктивную математику как абстрактную науку о нашей способности осуществлять мысленные конструктивные процессы (см. [52], стр. 4, 11 и 23). Объектами, над которыми мы действуем, совершая конструктивные процессы, являются

«... полиномы с рациональными коэффициентами, матрицы, элементами которых являются такие полиномы, разного рода уравнения и системы уравнений, разнообразные таблицы и схемы.

Большое разнообразие конструктивных объектов и порождающих их конструктивных процессов может вызвать желание иметь общие определения и тех и других. Однако в таких общих определениях нет действительной надобности, так как каждая математическая теория имеет дело не с конструктивными объектами вообще, а с конструктивными объектами некоторого определенного вида, например со словами в некотором алфавите» (там же, стр. 5).

Эти разъяснения делают несомненным, что А. А. Марков понимает под объектом изучения конструктивной математики не какие-либо происходящие во внешнем мире процессы, а исключительно умственные построения, совершаемые над воображаемыми объектами. Правда, может показаться на первый взгляд, что эти объекты не являются воображаемыми, а представляют собой физически начертанные на бумаге слова (ведь А. А. Марков говорит именно о словах), а наши действия над ними есть нечто вроде действий ребенка, собирающего детали «конструктора», но и тут мы ошибемся. Во-первых, физически начертанные слова все различны (скажем, три слова А [10], написанные на одной бумажке, на другой бумажке и на классной доске, как внешние физические объекты не тождественны между собою, а для математика они все совпадают. Следовательно, математик-конструктивист говорит о слове А [10] не как о существующей вне нас реальности, а как об идеальном образе, как об абстракции, извлеченной из всех фактических написаний А [10], как осуществленных, так и возможных. Во-вторых, достаточно познакомиться с самым простейшим рассуждением конструктивной математики (вспомним хотя бы наше доказательство теоремы о существовании ограниченной монотонной последовательности, не имеющей предела), как станет ясно, что почти ни один процесс, фигурирующий в этой науке, не может быть проведен фактически, так как на это потребовалось бы годы, десятки лет, а иногда и триллионы лет. Буквы и слова, написанные на бумаге, являются для конструктивиста лишь вспомогательными средствами, пометками, позволяющими не сбиться с мысли, а также средствами передачи информации своим коллегам.

Конструктивная математика в одном из своих аспектов, а именно в непринятии актуальной бесконечности и в требовании принять в математике логику, отличную от «аристотелевской», есть прямая преемница интуиционистской математики. Но вспомним, что интуиционизм (как в брауэровском, так и в гейтинговском вариантах) очень слабо нацелен на какие-либо прямые приложения. Гейтинг, например, заявлял: «Для математической мысли характерно, что она не выражает истину о внешнем мире, а связана исключительно с умственными построениями» [44], стр. 17). Если учесть ту важную роль, которую Н. А. Шанин отводит результатам практического использования математических теорий, можно полагать, что конструктивная школа не будет склонна согласиться с подобным утверждением, и все же, если они станут отстаивать возможность получения полезной в практическом смысле истины о внешнем мире с помощью разработанной ими математики, то, несомненно, будут трактовать ее вмешательство в технику, естествознание или другие конкретные области исследования как косвенное. Конструктивная математика есть теоретическая, абстрактная наука, изучающая не непосредственно «реальные объекты», а инструментарий нашего сознания, который может быть направлен на изучение этих объектов, принимая форму содержательной теории.

Тем не менее, в словах Н. А. Шанина имеется нечто такое, что заставляет нас вернуться к ним еще раз. Если истолковать эти слова как утверждение, что участвующие в конструктивной математике рассуждения напоминают процессы работы вычислительных машин или других реальных устройств с детерминированным действием, то «возврат к объекту» будет означать прямое применение результатов конструктивной математики к теории различных автоматов. Интерпретация, конечно, получается при этом простой и естественной, и не требует промежуточных звеньев. Но и здесь диалектика науки такова, что, возможно, косвенные методы, использующие какие-либо далекие типы абстракций (вроде актуально бесконечных множеств), сослужат гораздо бо́льшую службу теоретической кибернетике, чем «честный» метод непосредственного интерпретирования конструктивной математики. Во всяком случае, специалисты по программированию относятся ко всем разновидностям «чистой» теории алгорифмов с большим скептицизмом. Они говорят, что в их работе возникают специфические проблемы разделения времени, наиболее полного использования объема ЭВМ, соединения различных машин в единый агрегат и десятки других, которые не имеют никакого отношения к проблемам, исследуемым конструктивистами, и последние бессильны им в чем-либо помочь. В такой позиции есть свой резон: конструктивисты в основном интересуются вопросами потенциальной осуществимости (исключая некоторые аспекты теории сложности), а тех, кто работает на конкретных вычислительных машинах, волнует осуществимость в заданных пределах времени. Короче, общего языка программисты и математики-конструктивисты пока не нашли, хотя чисто с внешней стороны объекты их внимания сходны.

Возвращаясь к поставленному нами вопросу об оправданности жертв, которые приносит конструктивная математика, отказываясь от использования теории актуально-бесконечных множеств, так сильно сокращающих многие выводы, то есть добровольно покидая «канторовский рай», мы можем констатировать, что приобретение не такое уж малое — вечная абсолютная истинность (как убедительность). Стоит ли это приобретение потери теоремы о существовании предела монотонной ограниченной последовательности — это должен решать для себя каждый математик, интересующийся основаниями своей науки и желающий принять их вполне осознанно, а не просто, следуя традиции. Но, так сказать, для истинного конструктивиста проблема жертвы даже не встает, ибо он не считает жертвой отказ от неправильного утверждения. В частности, для него не существует той коллизии, которую мы назвали АГ-конфликтом. Для последовательного конструктивиста кажется странным сожалеть о недоказуемости (средствами, которые он считает единственно допустимыми) теоремы Больцано — Вейерштрасса или другого аналогичного утверждения по той простой причине, что он не считает нужным навязывать числовому континууму какие-то свойства, подсказываемые (ошибочно) нашей зрительной интуицией или еще какими-нибудь специфическими механизмами нашей психики, не обладающими статусом обязательности для каждого человека.

Последовательный математик-конструктивист в своей научной деятельности, как правило, далек от мыслей о практических применениях. Если говорить несколько фигурально, он является не прагматиком, а скорее «рафинированным интеллектуалом». Он, конечно, признает прикладную пользу теоретико-множественных доказательств, но, пожалуй, примерно в том же смысле, в каком Гейтинг признает пользу спорта и развлечений. Но важно подчеркнуть, что он не отождествляет понятий полезности и истинности и считает математику такой наукой, которая по самому своему определению должна быть направлена не на поиски пользы, а на поиски истины. Возможно, в глубине души он хранит неколебимую уверенность, что если найдешь истину, то польза придет впоследствии сама.

Глава 5

ДИАЛЕКТИЧЕСКАЯ ПРИРОДА КОНСТРУКТИВНОГО МЕТОДА ПОЗНАНИЯ

Распространенный упрек, который бросают в адрес математиков-конструктивистов их коллеги — «классики», состоит в том, что первые будто бы игнорируют «эвристическое» творчество, необходимо присутствующее в каждом хорошем математическом открытии. Мы собираемся показать, что не может быть менее справедливого обвинения. Однако сначала попытаемся разобраться в значении таинственного прилагательного «эвристический».

Читая различную литературу, можно заметить, что разные авторы по-разному понимают это слово, но ни один из них не дает строгого определения. Возьмем для примера переводной сборник «Вычислительные машины и мышление», посвященный интересным проблемам применения вычислительных машин для решения «творческих» задач — игры в шахматы, распознавания образов, вывода теорем некоторого формального исчисления и т. д. Во вступительной статье, написанной А. В. Напалковым и Ю. В. Орфеевым, говорится:

«Другим важным положением являлось четкое определение понятия «эвристика». Строгое определение понятия «алгоритм», существовавшее в математике, предполагало, что открытие алгоритма означает нахождение метода точного решения задач определенного класса. При этом из поля зрения исследователей ускользнула большая категория явлений природы, связанных с решением задач в условиях, когда было невозможно заранее найти эффективные методы. В этих случаях невозможно гарантировать также оптимальность решения, однако можно предложить такую тактику поиска, которая оказывается значительно более эффективной, чем простой перебор. Было показано, что именно такие «эвристические тактики» наиболее характерны для работы мозга и именно они лежат в основе творческих способностей человека» (стр. 6).

Из этой фразы не совсем понятно, содержится ли именно в ней, по мнению авторов, «четкое определение» эвристики, или же она просто поясняет такое определение, даваемое далее в тексте самого сборника. Но если они считают приведенный текст определением, то согласиться с ними очень трудно. Что это за тактика поиска, которая не гарантирует оптимальности решения, но оказывается «значительно более эффективной», чем систематический перебор? А. В. Напалков и Ю. В. Орфеев не проливают света на этот вопрос. Остается надеяться, что «четкое определение» встретится на какой-нибудь из пятисот страниц книги, посвященной специально этой проблеме.

Действительно, во введении, написанном уже американскими редакторами сборника, имеется особая глава, озаглавленная «Что такое эвристическая программа»? В ней говорится:

«Эвристика (эвристическое правило, эвристический метод) — это основанные на опыте правило, стратегия, ловкий прием, упрощение или иное средство, существенно ограничивающее поиск решения сложных задач. Эвристика отнюдь не гарантирует оптимальность решений. В действительности она даже вообще не гарантирует достижения решения» (там же, стр. 29).

Другого объяснения слова «эвристика» во введении нет. Если редакторы русского перевода считают именно это место четким определением, то снова с ними невозможно согласиться. В случае, когда эвристика вообще не достигает решения, ее эффективность нужно считать равной нулю. Но тогда в этих случаях ее нельзя назвать «ловким приемом». Выходит, что мы должны судить о том, является ли некое правило «эвристикой» или «алгорифмом» лишь *после того*, как применили его к решению задачи и убедились, что оно обеспечивает «упрощение». Но в этом случае слово «эвристика» должно было бы рассматриваться не как научный термин (тем более, не как математическое понятие), а как обычное слово естественного языка, со всей присущей таким словам неопределенностью значения.

В обзорной статье, помещенной в конце сборника, автор которой — известный специалист по теоретической кибернетике М. Минский, снова появляется разъяснение по поводу эвристики, на этот раз в виде сноски, которую мы приводим целиком:

«Прилагательное «эвристический» в том смысле, как оно применяется в данной статье и очень широко используется в литературе, означает «помогающий повысить способность решать задачи». Как существительное это слово используется применительно к любому методу и способу, связанному с улучшением эффективности системы для решения задач. «Эвристическая программа», оцениваемая как хорошая, должна успешно работать в применении к различным задачам, и следует мириться с тем, что она при разрешении некоторых проблем терпит неудачу. Часто мы считаем целесообразным применение эвристического метода и тогда, когда он иногда приводит к неудачам, если он обеспечивает общее улучшение характеристик. Но несовершенные методы не обязательно являются эвристическими, а совершенные — не обязательно неэвристическими. Следовательно, слово «эвристический» не должно рассматриваться как нечто противоположное «надежному», что уже внесло некоторую путаницу в литературу по этому вопросу» (там же, стр. 404):

С тем, что в литературе по поводу эвристики имеется громадная путаница, мы вполне согласны. Что же касается претензий этого текста на то, чтобы являться определением, то они (если они имеются) совершенно необоснованны. Минский, конечно, чувствует это и поэтому дает, казалось бы, столь важную информацию не в основном тексте, а в виде сноски.

Возьмем более свежую работу — книгу «Искусственный интеллект» И. Нильсона, вышедшую в США в 1971 г., а в русском переводе — в 1973 г. В предисловии Нильсон пишет: «Последняя из названных дисциплин — эвристический поиск —составляет основной предмет данной книги.

Решение задач посредством эвристически направляемого метода проб и ошибок...— доминирующая тема в исследованиях по искусственному интеллекту» ([55], стр. 7—8).

Итак, вся книга Н. Нильсона посвящена эвристике. Но это слово в книге встречается довольно редко — настолько редко, что создается впечатление, будто автор сознательно избегает его употребления. И все же в сугубо математической монографии, каковой определенно является труд Н. Нильсона, просто обязано содержаться определение всякого термина, играющего важную роль в тексте. Находим это определение:

«Для многих задач можно сформулировать чисто эмпирические правила, позволяющие уменьшить объем перебора. Все такие правила, используемые для ускорения поиска, зависят от специфической информации о задаче... Будем называть информацию такого сорта эвристической информацией (помогающей найти решение) и называть использующие ее процедуры поиска эвристическими методами поиска» (там же, стр. 63—64).

Как выясняется из дальнейших страниц, эту информацию поставляет обычно человек, пользуясь для ее добывания всевозможными «ловкими приемами», и, вообще, любыми средствами, которые, по его мнению, окажутся полезными (у Нильсона неудачная попытка улучшить в среднем поиск также называется эвристической, но она обладает отрицательной «эвристической силой»).

Нет смысла приводить выдержки из других источников; как правило, в них понятие «эвристика» объясняется еще более туманно. Но если не придираться к точности формулировок, а стараться уловить дух тех методов, которые принято называть эвристическими, то после изучения литературы, посвященной этому вопросу, обнаружится, что они характеризуются двумя устойчивыми особенностями:

1) В их разработке существенно участвуют такие качества человека, как свобода выбора, интуиция, прошлый опыт.

2) Для каждой задачи нового типа нужно разрабатывать новые методы и никогда нет предварительной уверенности, что они окажутся оптимальными (даже в среднестатистическом смысле).

Но в таком случае все становится на свои места, если мы дадим следующее определение:

Эвристическим поиском (или эвристической стратегией) называется поиск (стратегия), в формировании которого участвуют такие механизмы сознания, работу которых человек, ими пользующийся, объяснить не может.

Мы предвидим возражение некоторых кибернетиков, что нецелесообразно вводить в определение эвристики слово «человек», ибо существуют «эвристические программы» для ЭВМ. Это возражение сразу же отводится указанием на то, что эвристической программой принято называть программу, созданную с помощью эвристического программирования, в котором обязательно принимает участие человек со своей интуицией, опытом и т. д. Поскольку все согласны, что «эвристическая процедура» есть нечто несовместимое с «алгорифмической процедурой», а всякая отлаженная и готовая ко вводу в ЭВМ программа есть алгорифм, то понимание термина «эвристическая программа», не учитывающее истории возникновения этой программы, в которой деятельную роль играл человек, является внутренне противоречивым. Если рассматривать программу изолированно от ее происхождения, как нечто изначально данное, то применять к ней прилагательное «эвристическая» бессмысленно. Конечно, машина, работающая по некоторым программам, будет делать достаточно сложные переборы и даже может использовать в своей работе «метод Монте-Карло», порождая псевдослучайные числа, но все эти ее действия будут строго детерминированы первоначальным текстом программы; последняя будет отличаться от «неэвристических» программ разве что своей большой сложностью (мы уже затрагивали эти вопросы в [56]).

Заметим, что, хотя приведенное определение является антропогенным, но человек фигурирует в нем лишь потому, что ни к какому другому объекту мы пока не можем его применить. В принципе оно пригодно для любого существа или устройства, к которому имеет смысл применять такие обороты речи, как «ведет поиск», «руководствуется стратегией» и «не может объяснить».

Ясно, что по мере развития психологической науки, по мере углубления познания человеком самого себя все большее число методов должно переходить из разряда эвристических в разряд алгорифмических — «разоблаченная» эвристика перестает быть эвристикой. Но могут ли, хотя бы в пределе, теоретически, исчезнуть все эвристические методы, то есть может ли человеческое сознание понять свою работу целиком и во всех деталях?

Тут нужно рассмотреть два случая. Первый — когда мышление человека недетерминированно, а следовательно и неалгорифмично — например, из-за действия квантовых эффектов на работу нейронов. Тогда, конечно, ответ будет отрицательным. Второй случай более интересен. Пусть человеческий мозг есть детерминированное устройство. В этом случае, по теореме Мак-Каллока — Питтса (см., напр., [57], стр. 25), его работа алгорифмична. Это значит, что мозг каждого человека представляет собой некую машину Тьюринга. «Понять свою работу» здесь означает «иметь внутри себя собственное описание». Но хранить в себе собственное описание машина Тьюринга не может даже в принципе, так как оно не поместится в ней. Вообразим (схематично), что машина реализована в виде набора четверок, сведенного в таблицу, вроде той таблицы, которая была приведена нами для A-устройства. В случае «понимания собственной работы» часть таблицы должна быть отведена для записей всей таблицы, а это явным образом неосуществимо.

Джон фон Нейман, который много думал над проблемами механизмов мышления, склонялся даже к более сильному утверждению, полагая, что описание сложного устройства должно быть значительно более громоздким, чем само устройство. Он говорил, что «в сложных системах формальной логики на порядок труднее рассказать, что́ объект может сделать, чем сделать сам объект» ([58], стр. 71). В применении к нашей проблеме это означает, что сложной системе (а человеческий мозг представляет собой самую сложную систему из всех, которые нам известны) гораздо легче функционировать по заложенным в ней алгорифмам, чем выявлять эти алгорифмы; легче, так сказать, предъявить себя как физическое устройство, чем давать описание каких-то своих частей на определенном языке. Нам думается, что в теории «эвристического программирования» и в психологических исследованиях механизмов сознания определение эвристики типа того, которое мы привели выше, могло бы оказать методологическую пользу, так как лишило бы этот термин мистического звучания и позволило бы дать ряд количественных оценок — например, найти предельную сложность устройства, описание которого еще может хранить в себе устройство с заданной сложностью.

Теперь вернемся к упреку конструктивистам, будто они выхолащивают из математики самое привлекательное — эвристические методы исследования.

Эвристическую деятельность, как мы ее определили выше, можно назвать работой по интуиции (конечно, некоторое различие между содержанием слов «эвристика» и «интуитивная деятельность» остается, но оно проявляется главным образом в случаях, которые нами здесь не рассматриваются). Математики-конструктивисты очень часто произносят слово «интуиция» и даже любят это емкое слово.

Дело не только в том, что они «произошли от интуиционистов», а и в том, что в их работе на предварительной стадии интуиция и в самом деле играет огромную роль.

Доказательства конструктивистов, как правило, бывают сложны, а главное — хитроумны, нетривиальны, часто непохожи на привычные для нас доказательства классической математики по своей структуре, идее. Иногда говорят в шутку: все доказательства конструктивной математики нужно начинать словами «Возьмем перечислимое, но не разрешимое множество...». Может быть, в этом и есть доля правды, но ведь проблема всегда состоит в том, что́ говорить после этих слов. Тем, кто собственными глазами захочет убедиться в исключительной оригинальности и изысканности некоторых доказательств конструктивной математики, мы можем посоветовать разобраться в теореме Г. С. Цейтина о непрерывности алгорифмических операторов (см., напр., [53], гл. 9). Даже после того, как громоздкое доказательство этой поразительной теоремы станет, наконец, понятным, почти наверное останется совершенно непонятным, как его авторы ухитрились его придумать. Мы полагаем, что они сами не смогли бы это объяснить; конечно в изобретении этого интеллектуального построения ведущую роль играла интуиция. Даже сравнительно несложная и несколько раз переформулированная во все более простом виде теорема Цейтина о непрерывности конструктивной функции оказывается слишком тонкой и своеобразной в своем доказательстве (поэтому после некоторых колебаний мы решили не включать это доказательство в настоящую книгу). С необходимостью участия интуиции в работе математика-конструктивиста мы уже подробно знакомились в шестой главе, где прослеживали за исследованием КДЧ, заданного дуплексом (парой алгорифмов).

То, что конструктивистам интуиция зачастую нужна больше, чем «классикам», не удивительно: поскольку требования, предъявляемые ими к строгости доказательства, более жестки, им приходится проявлять больше изобретательности.

Внимательный анализ показывает: интуиция конструктивного процесса наиболее общего типа, допускаемая этой школой, имеет не полумистическое происхождение, как «интуиция двуединства» Брауэра или «интуиция Бесконечно Продолжающейся Последовательности» Гейтинга, а имеет корни в объективной действительности. Возражая условному персонажу, названному в книге Гейтинга «ИНТ» (интуиционист), А. А. Марков пишет:

«Я не могут согласиться с тем, что математика с самого начала имеет дело с бесконечным. «Бесконечное» вводится в математику через абстракции. Применяются абстракция потенциальной осуществимости и абстракция актуальной бесконечности. Суть последней мне не ясна, а первая состоит в отвлечении от практических границ наших конструктивных возможностей, обусловленных ограниченностью имеющихся в нашем распоряжении пространства, времени и материалов. Умственные построения, о которых говорил сейчас господин ИНТ, потенциально осуществимы. В качестве прообразов они имеют практически осуществимые материальные построения» ([44], стр. 161).

Последняя фраза существенно облегчает понимание позиции конструктивистов. В тех местах, где они вынуждены выходить за рамки финитного алгорифмического процесса и где неизбежным оказывается использование абстрактных представлений более высокого порядка, чем абстракция «осуществимости еще одного шага», они разрешают себе прибегнуть к абстрактным представлениям, которые выработались в нашем сознании в результате актов построения, производимых с материальными телами окружающего мира, короче, к интуиции конструктивной деятельности, считая эту интуицию значительно более надежной, чем другие формы заложенных генетически и возникших вследствие личного опыта интуитивных представлений — например, зрительных, эстетических, осязательных и т. д. Несколько упрощая дело, можно сказать, что поставленная конструктивной математикой на первое (по надежности) место форма интуиции — это та, которая внедряется в нашу психику как итог опыта оперативного вмешательства в окружающий мир, имеющего активный, созидательный характер.

Примечательным обстоятельством является то, что эта позиция соответствует взглядам одного из крупных современных психологов — Ж. Пиаже, который выводит почти все виды приобретаемых нами абстрактных представлений из операций, причем под «операциями» понимаются именно активные и созидательные действия. Школа Пиаже аргументирует свою точку зрения не умозрительными соображениями, а данными тщательно разработанных экспериментов.

Для иллюстрации удивительного родства между концепцией интуиции, характерной для математиков-конструктивистов (хотя они не всегда могут сформулировать эту концепцию с полной четкостью), и идеями «швейцарской школы» психологии, мы приведем слова главы этой школы, Ж. Пиаже:

«С психологической точки зрения операции — это действия, которые перенесены внутрь, обратимы и скоординированы в системе, подчиняющейся законам, которые относятся к системе как к целому. Они представляют собой действия, которые, прежде чем они стали выполняться на символах, выполнялись на объектах. Они перенесены внутрь, так как выполняются в мысли, не утрачивая при этом своего естественного характера действия. Они обратимы, в противоположность простым действиям, которые необратимы. Так, операция соединения может быть немедленно переведена в операцию разъединения, тогда как действие письма слева направо не может быть переведено в действие письма справо налево без выработки нового, отличающегося от первого навыка. Наконец, поскольку эти операции не существуют изолированно, они связаны в форму структурированного целого. Так, построение класса предполагает классификационную систему, построение асимметричных транзитивных отношений — систему сериальных отношений и т. д. Аналогичным образом построение числовой системы предполагает понимание порядковой последовательности: $n + 1$» ([39], стр. 579).

Таким образом, распространенное среди математиков мнение, будто деятельность конструктивистов в каком-то смысле противоположна «творчеству», столь же ложно, сколь ложно мнение, бытующее в среде «гуманитариев», будто деятельность математика является менее «творческой», чем работа писателя или композитора.

Философы, а также естествоиспытатели, склонные к анализу оснований науки, неоднократно высказывали мысли о «творческой силе» времени. В математике до недавних пор полностью доминировал «статический» подход — объекты математики были как бы застывшими. Тот факт, что в ней имелись такие понятия, как производная, интерпретируемая в физике как скорость, ничего в принципе не меняло, поскольку производная определяется как предел, а определение предела дается на «ε-языке» статичным образом. Только недавно внутри теории алгорифмов стали возникать проблемы, существенно связанные с понятием «времени работы» — числа шагов алгорифмической процедуры. Например, специалистов интересует такой вопрос: какой должна быть минимальная сложность алгорифма, позволяющего установить, будет ли время работы другого алгорифма над словами заданной длины конечным или бесконечным ([60], стр. 4 и дальше). Однако время работы непосредственно не входит в понятие сложности, которая вычисляется как длина схемы алгорифма или произведение числа букв машины Тьюринга на число ее внутренних состояний.

Возможно, оказался бы перспективным план разработки такого исчисления сложностей, в котором время существенно входило бы в исходное определение сложности. Можно было бы приветствовать подход, при котором основное определение сложности W давалось бы через функцию трех переменных: лексикографического номера алгорифма A, лексикографического номера слова C и времени работы T (числа шагов), т. е. определение задавалось бы формулой вида

$$W = F(A, C, T).$$

Что касается сложности пары слово—алгорифм или самого по себе алгорифма (или слова), то они были бы «проекциями» W. Пусть, например, основное определение сложности выглядело бы так:

$$W = [f(A, C)]^T.$$

Тогда в случае, если в процессе работы алгорифма сложность уменьшается, мы имели бы, что сложность пары $f(A, C) < 1$. Сложность же самого алгорифма есть $f(A, 0)$ (пустое слово имеет нулевой лексикографический номер); она также в этом случае меньше единицы. Зато если $f(A, C) > 1$, то

$$\lim_{T\to\infty} W = \infty.$$

Мы имели бы здесь следующую ситуацию: простые алгорифмы, работая над простыми словами, не могут увеличивать сложности пары, а разве уменьшают ее. Если же пара достаточно сложна, то положение коренным образом меняется: в процессе переработки конфигурация все более усложняется.

Это и есть проявление философского тезиса о созидательном потенциале времени; в этом случае происходит спонтанное приращение информации и тем самым автоматически устраняется известный парадокс, заключающийся в утверждении (которое противоречит нашей интуиции), что формальный, в частности, логический вывод всегда является тавтологичным и не приносит нового знания.

Ясно, что критическая сложность $f(A, C) = 1$ расположена где-то вблизи порога, за которым появляется A-устройство, то есть по принятой в теории машин Тьюринга шкале составляет около тысячи единиц. С этого момента алгорифмы приобретают исследовательские способности и могут увеличивать информацию. Поэтому таблица, которую мы привели выше, достойна особенного внимания: она показывает нам примерный минимальный размер окна, через которое математикам открывается бесконечность.

Как видно, природа позаботилась, чтобы это окно не было слишком большим; оказывается малыми средствами с помощью времени можно достигнуть неограниченно больших результатов.

Но обратимся снова к человеку, то есть к единственной известной нам системе, которая умеет в результате взаимодействия с окружающим миром ставить проблемы, располагать их по степени важности, пользуясь всевозможными ценностными критериями и, таким образом, загружать работой различные A-устройства, находящиеся в мозгу или реализованные в виде ЭВМ. Эта система существенно нуждается в мощном, «неформальном» языке, способном отражать модальности, иерархические категории, понятия промежуточной и конечной цели и т. д., которым является естественный язык. Однако он, по выражению Гейтинга, обладает изначальной многозначностью. В то же время A-устройство, являющееся предельно надежным, но не умеющим само находить себе работу, пользуется языком с простым и точным синтаксисом. Поэтому встает очень важный вопрос о взаимодействии языков разного уровня. Интересно отметить, что несоответствие алгорифмических и более мощных языков является полным аналогом АГ-конфликта, о котором мы говорили в главе 3. Действительно, визуальные образы, которые навязывают нам наши представления о том, каким «должен быть» континуум действительных чисел, есть не что иное, как фрагменты весьма мощного языка, элементы знаковой системы колоссальной сложности (зрительный аппарат занимает пятую часть всего нашего мозга!), в то время как арифметические истины выражаются на гораздо более простом языке. В рамках конструктивной математики эта проблема сводится к организации плавного перехода от примитивнейшего языка пропозиционального исчисления (системы L) к достаточно богатому языку метаматематики, позволяющему сформулировать Ленинградский принцип и т. д. Решение проблемы у конструктивистов идет по линии, намеченной еще Бертраном Расселом, который в предисловии к «Логико-философскому трактату» Л. Витгенштейна писал:

«...Каждый язык имеет, как говорит м-р Витгенштейн, структуру, относительно которой в данном языке ничего не может быть сказано, но может быть другой язык, имеющий свою структуру, в котором говорится о структуре первого языка, и у этой иерархии языков нет конца. Витгенштейн ответил бы, конечно, что вся его теория (неизбежное наличие мистического элемента в мире: мистической является сама структура языка, ибо она невыразима в языке.— *В. Т.*) применима без всяких изменений к совокупности всех таких языков. Единственным возражением было бы отрицание того, что существует такая совокупность. Совокупности, относительно которых м-р Витгенштейн считает невозможным говорить логически, тем не менее мыслятся им как существующие и являются предметом его мистицизма. Совокупность же, вытекающая из нашей иерархии, будет не просто логически невыразимой, но фикцией, чистой аллегорией, и таким образом предполагаемая сфера мистического уничтожается» ([50], стр. 26).

Заключенную в этих словах мысль Рассела нужно признать исключительно плодотворной. Она, кстати, показывает, с какой осторожностью нужно относить Рассела к философам платонистского толка. В приведенном отрывке он выступает как раз антиплатонистом, считая бессмысленным говорить об актуально существующей бесконечности все более мощных языков, но сохраняя убеждение в возможности построения «еще одного» языка, который может объяснить в своих терминах структуру предыдущего языка. Невооруженным глазом видна связь этой мысли Рассела с рассмотренной выше проблемой эвристик. Эвристическими мы назвали такие методы решения задач некоторой системы, алгорифмы которых остаются неизвестными самой системе, т. е. не записываются на языке системы. Однако, может существовать другая система, которая будет способна «понять» эти алгорифмы, то есть записать их на своем, более богатом языке. В частности, деятельность отдельного человека, в принципе, может быть полностью объяснена в рамках языка психологической науки, которая представляет собой язык большого коллектива ученых, но это не будет, конечно, установлением детерминизма в поведении общества в целом, поскольку мощного языка, который описал бы всю совокупность языков человеческого общества, не существует. Но такой индетерминизм, в согласии с мыслью Рассела, есть не мистика, а этап в потенциально бесконечном процессе, который изгоняет неизвестность из все более и более расширяющейся области явлений. В частности, никакой мистики не остается в эвристической деятельности сколь угодно высокого ранга, в том числе, в художественном творчестве.

Теперь посмотрим, как предлагают совмещать языки разного уровня математики-конструктивисты, стараясь при этом оставаться в рамках своих исходных принципов. А. А. Марков говорит об этом следующее:

«Трактовка импликации как дедуктивной вынуждает нас строить для конструктивной математической логики специальные формальные языки. При этом недостаточно одного такого языка.

В самом деле, имея формальный язык, пригодный для выражения высказываний определенного вида, мы сможем оказаться в состоянии ввести, как описано выше, дедуктивные импликации с посылками и заключениями этого вида. Однако сами эти дедуктивные импликации уже не будут выражаться формулами этого языка. Мы же естественно пожелаем рассматривать эти дедуктивные импликации тоже как высказывания, которые можно комбинировать с помощью логических связок. В частности, мы можем пожелать рассматривать импликации, посылками и заключениями которых будут уже построенные дедуктивные импликации. Если мы и такие импликации пожелаем трактовать как дедуктивные, то нам, очевидно, понадобится новый формальный язык, способный выразить дедуктивные импликации, связывающие высказывания нашего прежнего языка» ([52], стр. 38).

Итак, для расширяющихся целей отражения действительности (мы употребляем здесь слово «действительность» в широком смысле, включая в нее и «языковую реальность») нужны все новые и новые языки. Это приводит А. А. Маркова к идее ступенчатого построения конструктивной математической логики:

«Нужные нам формальные языки строятся друг за другом путем последовательных расширений. Применение логической связки к формулам какого-либо из этих языков не всегда дает формулу этого же языка, но всегда — формулу языка следующей ступени. В основании «башни» языков лежит очень простой язык нулевой ступени — язык разрешимых высказываний о словах в различных алфавитах. Вершина башни строится с помощью разработанного Н. А. Шаниным алгорифма выявления конструктивной задачи, что связано еще с одним пониманием импликации.

Конечно, возникает вопрос, не слишком ли много этих пониманий и не будут ли они существенно расходиться друг с другом. На этот вопрос, к счастью, можно дать успокоительный ответ. Построение башни языков может быть осуществлено так, что все понимания импликации будут согласованы друг с другом. Иначе говоря, в тех случаях, когда какую-нибудь импликацию можно будет понимать в каких-нибудь двух из этих смыслов и она будет верной в одном из них, она будет верной и в другом. Это даст возможность объединить все эти понимания импликации» (там же, стр. 39).

Хотя данная книга посвящена конструктивным процессам в математике и поэтому главным объектом интереса в ней выступали те разделы и направления математической науки, в которой конструктивность является особо важным понятием, она была бы неполной, если бы мы не попытались хотя бы весьма бегло бросить взгляд и на философские аспекты того русла современной математики, которое вытекает из теории множеств и называется условно «классической математикой». Без такого обозрения мы не уясним в полной мере специфики конструктивного направления, особенности которого раскрываются лишь в сравнении. Кроме того, нам трудно будет судить о перспективах развития конструктивной математики, если мы не оценим ее места в математическом знании вообще.

Однако познакомиться с исходными тезисами «классиков» не так легко: они, как правило, редко выступают с изложением своего философского кредо и предпочитают не заниматься самооценками. При просьбе рассказать о своем мировоззрении представители классической математики часто отвечают, что они заняты конкретными проблемами и им не хватает времени для общих рассуждений. Но к такого рода рассуждениям относятся, например, такие проблемы, как понимание квантора существования и т. п., явно относящиеся не к «метафизике», а к самой математике. И хотя некоторые «классики», как очень верно подметил А. А. Марков, не любят объяснять свое понимание термина «существует», им иногда все же приходится это делать.

Одним из исключений в этом смысле является французский математик Н. Бурбаки (сейчас ни для кого уже не секрет, что под этим именем выступает коллектив, но, уступая его требованиям, мы будем считать его персонифицированным). Он является широко образованным и эрудированным специалистом и, конечно, прекрасно осведомлен о исторических парадоксах, возникших в «наивной» теории множеств, а его претензии на лидерство в современной математике, выразившиеся в создании фундаментальной серии «Начала математики», призванной, по мнению автора, дать каноническое изложение всей современной математической науки, обязывают его без всякого пренебрежения относиться к философским основаниям математики.

Действительно, может ли оставить вне рассмотрения вопросы, относящиеся к теории познания, автор, о котором говорят в таких тонах:

«Мы являемся свидетелями создания монументального труда: изложения всей современной математики в целом... Это изложение дано таким образом, что становятся ясно видными связи между различными ветвями математики.

Бурбаки достигает своей цели, пытаясь дать всякое понятие в максимально общей и абстрактной форме» ([61], стр. 7).

«Труд Бурбаки есть то, без чего математика XX века, к счастью или к сожалению, была бы не тем, что она есть» ([62], стр. 88).

Итак, Бурбаки — наилучшая кандидатура на роль выразителя мировоззрения классической математики. Познакомимся же с его высказываниями поближе.

Во введении к первой части своего труда Бурбаки пишет:

«...если прежде могли думать, что каждая отрасль математики зависит от специфических интуиций, дающих ей первичные понятия и истины, и потому для каждой отрасли необходим свой специфический формализованный язык, то сегодня мы знаем, что, логически говоря, возможно вывести почти всю современную математику из единого источника — Теории множеств» ([48], стр. 25).

Эта фраза при первом ее прочтении не может быть охарактеризована иначе, как загадочная. Оставим на минуту первую ее часть в покое и посмотрим на вторую. Если единый источник математики — теория множеств, то как же быть с арифметикой? Ответ на этот вопрос приходит, когда мы добираемся в той же первой части до страницы 197, где Бурбаки впервые дает определение натурального числа — уже после того, как введены кардинальные числа произвольных множеств.

Когда читаешь это определение, недоумение еще более усиливается. Через 50 с лишним лет после Г. Фреге Бурбаки гальванизирует его громоздкий вариант введения в математику натуральных чисел как множеств эквивалентных между собою множеств. Способ Бурбаки даже более сложен, он начинает с актуально-бесконечных множеств, затем вводит конечные множества вообще (такие, где часть неравномощна целому), а затем уже спускается с этих небес абстракции к конкретным числам.

Но, может быть, после разработки аксиоматической теории множеств, в которой устранены парадоксы расселовского типа, схема Фреге становится более привлекательной, чем она была в конце прошлого века?

Привлекательность такого пути определения натуральных чисел можно подозревать кроющейся либо в простоте и естественности, либо в строгости. Первое подозрение отпадает моментально, как только открываешь «Начала». Внимательно прочитать текст до 197-й страницы, понять его и запомнить содержащийся в нем материал может только хорошо натренированный математик-профессионал. Значит, остается предположение, что метод Бурбаки более строг и надежен, чем, скажем, построение арифметики на базе аксиом Пеано.

Но и это очень далеко от истины. Несмотря на то, что Бурбаки сам себя считает «формалистом», в изложении материала он не особенно следит за формальной строгостью. Например, уже на 67-й странице, то есть задолго до «официального» введения натуральных чисел, он пишет: «пусть q — наибольшее из целых чисел $m < p$ таких...». Мы уже не говорим о том, что с самого начала постоянно используются целые индексы для нумерации множеств и т. д.

Допустим, что все это — огрехи, которые можно устранить, и Бурбаки, в принципе, способен совершенно четко определить понятие целого числа, взяв за основу понятия и методы теории множеств. Возникает вопрос — в самом ли деле Бурбаки всегда пользуется аксиоматической системой Цермело — Френкеля, где нет рефлексивных парадоксов? Это весьма сомнительно. Очень трудно проделать тщательный анализ громадного труда Бурбаки и выписать все те его теоремы, которые существенно нуждаются не в аксиоматической, а в менее жесткой «наивной», или «интуитивной» теории множеств, но все математики, с которыми автору приходилось говорить на эту тему, убеждены, что Бурбаки выходит за рамки аксиоматической системы. Такого же мнения придерживается редактор русского перевода В. А. Успенский. В своем предисловии, говоря об аксиомах формальной теории множеств, он указывает, что они «все же не те, которые положены в основу теории Бурбаки» ([48], стр. 10].

Наконец, допустим, что все скептики ошибаются и трактат Бурбаки можно переизложить так, что ничего, кроме аксиом Цермело — Френкеля, не будет в нем использовано. Никакой выгоды в строгости не будет и в этом случае, поскольку аксиоматическая теория множеств, как доказал еще Гёдель, в отношении формальной надежности ничем не лучше арифметического исчисления: обе системы не полны и противоречивость ни одной из них недоказуема. В отношении же интуитивного одобрения нашим сознанием формальная арифметика много предпочтительнее аксиоматической теории множеств. Полученный в 1963 г. результат П. Коэна о возможности строить равноправные по логической надежности (или ненадежности) две различные теории континуума, сильно подорвал бы веру в логическую необходимость существующих теоретико-множественных аксиом, если бы она не пришла в упадок значительно раньше под влиянием многих причин, главной из которых является дискредитация платонистских взглядов в математике.

Наконец, то объяснение, что Бурбаки выбрал устаревший вроде бы путь к конструированию арифметики по соображениям строгости, отпадает ввиду того, что Бурбаки сам признает, что не стремится к полной строгости.

«В том же реалистическом духе мы рассматриваем здесь вопрос о непротиворечивости — один из вопросов, наиболее занимающих современных логиков и в той или иной мере встающих уже с самого начала при создании формализованных языков... Та или иная математическая теория называется противоречивой, если какая-либо теорема доказывается в ней вместе со своим отрицанием. Тогда из обычных правил умозаключения, лежащих в основе правил синтаксиса формализованных языков, можно вывести следствие, что любая теорема одновременно и истинна, и ложна в этой теории, теряющей тем самым всякий интерес. Если, таким образом, мы нечаянно придем к противоречию, то мы не можем оставить его существовать далее, не обесценивая теории, в которой оно возникло... Так как ныне различные математические теории привязываются в отношении логики к Теории множеств, то отсюда следует, что всякое противоречие, встреченное в одной из этих теорий, дало бы повод к противоречиию в самой Теории множеств... Однако за 40 лет с тех пор, как сформулировали с достаточной точностью аксиомы Теории множеств и стали извлекать из них следствия в самых разнообразных областях математики, еще ни разу не встретилось противоречие, и можно с основанием надеяться, что оно и не появится никогда.

Если бы дело и сложилось иначе, то, конечно, замеченное противоречие было бы внутренне присуще самим принципам, положенным в основание Теории множеств, а потому нужно было бы видоизменить эти принципы, стараясь по возможности не ставить под угрозу те части математики, которыми мы наиболее дорожим...

Итак, мы верим, что математике суждено выжить и что никогда не произойдет крушения этого величественного здания вследствие внезапного выявления противоречия...» ([48], стр. 28—30).

Из этого программного заявления мы можем установить следующее:

Во-первых, главная цель Бурбаки состоит не в том, чтобы сделать математику предельно строгой и надежной (к чему стремятся, например, конструктивисты), а в том, чтобы любой ценой сохранить те части математики, которыми он наиболее «дорожит».

Во-вторых, формализм Бурбаки при пристальном внимании оказывается чисто призрачным, а философская позиция в этом вопросе совершенно необоснованной. Из приведенного отрывка можно заключить, что следствия из теории множеств начали извлекать только 40 лет назад, когда были сформулированы аксиомы формальной теории множеств. Но это совсем не так. Прежде всего, значительные фрагменты анализа, которыми Бурбаки, несомненно, «дорожит», были созданы в рамках «наивной» теории множеств — хотя бы потому, что при их создании еще не было аксиоматики Цермело — Френкеля. Но даже, когда она появилась, никто из специалистов, создающих «различные математические теории», и не подумал воспользоваться ею, а многие даже ничего не знали о ее существовании и продолжали пользоваться интуитивной теорией множеств — той самой, в которой имеются парадоксы. Аксиоматикой множеств занимались логики — небольшой круг специалистов: аксиоматика Цермело — Френкеля или фон Неймана — Бернайса — Геделя представляет собой частные результаты в весьма специфической области, а не имеют такого «всематематического» значения, которое приписывает им Бурбаки, поскольку аксиоматическая теория множеств заведомо не адекватна «рабочей» теории множеств, которой пользуются математики, не занимающиеся логическими проблемами. Это прекрасно иллюстрируется упомянутым результатом Коэна. Ведь этим исследователем была решена проблема, поставленная Гильбертом под номером один («Первая проблема Гильберта»), причем мало кто ожидал именно такого решения. Если вся математика была извлечена из аксиоматической теории множеств, как это утверждает Бурбаки, то она должна была вся всколыхнуться; математики только и должны были бы говорить об этом, пересматривать свои теории и т. д. На самом же деле никакой революции не произошло, сенсационность ограничилась возбуждением в узком кругу логиков, а многие математики даже до сего дня так ничего и не знают о решении континуум-гипотезы.

Еще лучше, чем он сам, некоторые стороны позиции Бурбаки выявляют его поклонники. Американский автор Фанг, написавший о Бурбаки восторженную монографию, упрекает философов математики в том, что «они заняты исключительно логикой и теорией множеств. И это в то время, когда действующие математики давно — лет двадцать назад — ушли вперед от теории множеств» ([61], стр. 130). Это раздражение по поводу «докапывания до основ» хорошо показывает, что Бурбаки невыгодно, чтобы «философы математики» продолжали заниматься исследованием теоретико-множественного фундамента; ему хотелось бы, чтобы они переключили свое внимание на надстройку, которая сама по себе уже не вызовет подозрений, если принять все положения теории множеств истинными.

Фанг постоянно противопоставляет Бурбаки логикам и всем тем, кто интересуется основаниями, как «действующего математика», намекая на то, что, если в «Началах» не все гладко со строгостью, то это компенсируется практическими результатами. Такую «реалистическую» и «прагматическую» тенденцию своего труда подчеркивает и сам Бурбаки: недаром иллюстрация, открывающая во французском издании первый выпуск его трактата, представляет собой изображение Афродиты, помогающей Гефесту ковать железо (барельеф метопа храма Зевса в Олимпии). Но прагматизм труда Бурбаки, если придерживаться общепринятого значения этого слова, является таким же мифом, как и формализм трактата. Теоремы, выводимые в «Элементах», имеют настолько общий и абстрактный характер, что не имеют никаких непосредственных приложений: тщетны попытки читателя найти у Бурбаки примеры, знакомые частные случаи и т. д. — все изложение имеет вид совершенно отвлеченный и даже в тех местах, где прообразами абстракций являются повседневно встречаемые в математике объекты, узнать эти объекты почти невозможно.

В каком же смысле нужно истолковывать прагматизм Бурбаки, и в чем, вообще, состоит цель, часто толкающая его на заявления, не согласующиеся с истиной? Ответ на этот вопрос заключается в следующем. Бурбаки определяет математику как изучение структур. Это ключевая идея его позиции и с этой точки зрения все, что делает и говорит Бурбаки становится оправданным. Посмотрим, что же нужно понимать под структурой.

«Теперь можно объяснить, что надо понимать в общем случае под математической структурой. Общей чертой различных понятий, объединенных этим родовым названием, является то, что они применимы к множеству элементов, природа которых не определена. Чтобы определить структуру, задают одно или несколько отношений, в которых находятся его элементы...; затем постулируют, что данное отношение или данные отношения удовлетворяют некоторым условиям» ([63], стр. 10).

Целью же грандиозного предприятия Бурбаки, которой он надеется достигнуть с помощью разработки различных структур и отношений, является переформулировка всей математики по единым образцам, восстановление единства математической науки, поставленного под угрозу дифференциацией и разрастанием ее объема, короче говоря, наведение порядка в математике, как бы вышедшей из-под контроля и начавшей развиваться стихийным образом, причем (и в этом состоит элемент прагматизма) наведение порядка с сохранением накопленных математических результатов. Вот как говорит об этом сам Бурбаки:

«Структуры не остаются неизменными ни по числу, ни по их сущности: вполне возможно, что дальнейшее развитие математики приведет к увеличению числа фундаментальных структур, открыв плодотворность введения новых аксиом или новых сочетаний аксиом, можно заранее оценить значение этих открытий, если судить о них по тем, которые дали уже известные структуры. С другой стороны, последние ни в коем случае не являются чем-то законченным, и было бы весьма удивительно, если бы их жизненная сила была уже исчерпана.

Введя эти неизбежные поправки, можно лучше понять внутреннюю жизнь математики, понять то, что создает ее единство и вносит в нее разнообразие, понять этот большой город, чьи предместья не перестают разрастаться несколько хаотическом образом на окружающем его пространстве, в то время как центр периодически перестраивается, следуя каждый раз все более и более ясному плану и стремясь ко все более и более величественному расположению, в то время как старые кварталы с их лабиринтом переулков сносятся для того, чтобы проложить к окраине улицы все более прямые, все более широкие, все более удобные» (там же, стр. 15—16).

В таком же духе объясняет причины деятельности Бурбаки его исследователь:

«В математике совершается великая революция. Математика проходила в прошлом через несколько революций, но никогда не было революции столь огромного масштаба как сейчас, когда математическое знание удваивается каждые 10 лет. Теперь для математиков стало делом жизни и смерти произвести срочные реформы, чтобы не быть задавленными экспоненциальным ростом математической информации» ([61], стр. 14).

Теперь становится ясным, почему для Бурбаки играет такую фундаментальную роль теория множеств: структура есть множество с наложенными на него отношениями. Но еще важнее, что проясняется подоплека философской концепции Бурбаки, которую, возможно, он в полной мере не осознает сам и которую излагает несколько путаным образом. Ставя главной задачей придать математике характер взаимосвязанной и единой науки, определяя ее разные части как изучение разных структур, имеющих одну и ту же схему возникновения (базовое множество плюс система отношений), Бурбаки при классификации структур вынужден опираться на такие стороны мыслительной интуиции, которые используют в качестве семиотических элементов представления визуального происхождения, которые по самой своей сути не могут пока что быть адекватно выражены на логико-формальном языке. Конфликт между строгостью и выполнением взятого на себя обязательства у Бурбаки имеет ту же самую природу, что и АГ-конфликт, возникший еще 2500 лет назад. Говоря несколько по-другому, для унификации существующей математики без пожертвования какой-либо из ее развитых частей, Бурбаки нуждается в языке значительно более мощном, чем язык формальной логики — настолько более мощном, что этажи «башни», соединяющей этот язык с низшими языками, имеющими четкий синтаксис, остаются пока недостроенными. С помощью одних алгорифмов и формально-дедуктивных средств разобраться в громадном материале, грозящем «раздавить» математиков, оказывается невозможным, и часто приходится производить разбор и классификацию «на глазок». Любопытно отметить, что топологическое пространство определяется Бурбаки не локальным методом, а скорее интегральным и поэтому можно сказать, что здесь Бурбаки возвращается к первичной интуиции непрерывности, которую в XIX в. почти изгнали из математического анализа как «нестрогую».

Конечно, нельзя утверждать, что эти мотивы направляют деятельность всех «работающих математиков» — многие из них не разделяют ни стремления Бурбаки к выявлению отношений самого общего порядка, ни его тенденции трактовать математику как изучение структур. Но тот вариант «реализма», который характерен для Бурбаки, присущ, пожалуй, им всем.

Интересно в этой связи познакомиться с мнением одного из самых крупных наших математиков, математика как раз «продуктивного» типа, имеющего много конкретных результатов,— С. П. Новикова.

Он решительно не согласен с заявлением Бурбаки о том, что вся математика может быть выведена из теории множеств — хотя бы потому, что в этой теории не заложена аксиома Гейне — Бореля или другое эквивалентное утверждение (Новиков называет его «аксиомой непрерывности») — оно должно быть дополнительным постулатом, накладывающим на континуум некие свойства (добавим свойства, подсказываемые нашей визуальной интуицией).

Ценность математики С. П. Новиков считает заключенной в ее полезности; он предлагает четко отделять математику от логики. Что же касается опасности возникновения несообразностей в выводах математики, имеющих происхождение в логической непрочности оснований, то он не боится такой возможности, ибо всегда строит свои выводы на такой основе, где разница между «наивной» и аксиоматической теорией множеств не играет роли. Он никогда не использует мощностей множеств и т. д. Он любит те проблемы, которые допускают вычисления, и в этом смысле является прагматистом и даже конструктивистом, но совсем не в том значении, которое придает этому термину А. А. Марков. С. П. Новиков считает, что исследование глубин сознания — дело логика, а не математика. Кроме пользы, в математике важную роль играет вопрос удобства, трактуемого в духе Пуанкаре.

Смелый замысел Бурбаки, по мнению С. П. Новикова, не удался из-за того, что он хотел соединить несовместимое — логику и практическую математику.

С такой точкой зрения, бесспорно, будут согласны тысячи математиков, развивающих конкретные разделы этой науки и черпающие проблематику в задачах, которые возникают в практике. На решение этих задач и направлены все их усилия и вся их изобретательность; если в этом смысле оказывается эффективным какое-либо ухищрение, они, не колеблясь, применяют его, не смущая себя вопросом, является ли данный прием безукоризненным, с точки зрения логики и формализма. К такой «практической» математике вполне уместно отнести слова Э. Шредингера:

«По известному выражению Эмиля Золя, искусство — это природа, увиденная через призму темперамента. Относится ли сказанное здесь об искусстве и к естествознанию? Для гуманитарных наук это не вызывает сомнения. А как обстоит дело с естествознанием? О нем, особенно о так называемых «точных» науках, обычно принято думать иначе. Представляется идеальным, что все личное, субъективное нужно устранить, а целью является исключительно нахождение чистой объективной истины, которую каждый может проверить, совершенно независимо от своего темперамента. Часто даже слышится: нужно выключить не только отдельного человека, как субъект, а даже род человеческий, как субъект познания. Надо покончить с любым видом «антропоморфизма», так, чтобы хотя бы здесь человек не являлся мерой всех вещей, как того хотели софисты.

Это притязание на абсолютное, эта тоска по нему частично оправданы, но частично, как мне представляется, они идут слишком далеко» ([46], стр. 22—23].

Задачи, возникающие при познании природы, действительно, заставляют человека изыскивать самые различные средства, проявлять фантазию и изобретательность, выдвигать смелые и неожиданные идеи. Но при этом человек исследует все глубже самого себя и свои интеллектуальные возможности. Область познания, где на надежность исследовательских средств обращается особое внимание, есть область математических, или «точных» наук. В период веры в предустановленную гармонию, длившийся много столетий, под надежностью разумелось нечто чисто внешнее. Сейчас положение резко меняется. Сократовский тезис «познай самого себя» приобрел неожиданно актуальный и вполне конкретный научный смысл. Если раньше математик не заботился ни о чем, кроме отыскания «истины», которая мыслилась существующей где-то сама по себе, то теперь «возникает необходимость ответить на такие вопросы, как: что делает теорему интересной и полезной? Что делает ее «глубокой»? Что такое «очевидное доказательство»? Каково значение аналогии? Какую роль играют промежуточные конструкции, управляемые внутренней логикой, но основанные на физической интуиции,— как, например, непрерывность и ортогональность? Математики вынуждены более научно подходить к тому, что они делают, и это не только облегчит им установление контактов с психологами, но также позволит нам многое выяснить о процессе человеческого мышления. Вне всякого сомнения понятие алгорифма было исключительно плодотворным для биологической науки в тех ее частях, которые касаются превращения генетического кода в самоорганизующуюся систему... Можно возразить, что неизвестно, можно ли с этой точки зрения подходить к интеллектуальным операциям, но то обстоятельство, что математики теперь отваживаются на такие попытки, приведет к выработке новых ценных средств исследования для психологов» ([64], стр. XIII).

На многие из поставленных здесь вопросов дает возможность ответить современная нейропсихология. Исследования в этой области проливают новый свет на устройство нашего «воспринимающего» аппарата и позволяют высказать некоторые предположения относительно «думающего» аппарата, и таким образом вычленить из той синтетической деятельности, каковой является математика, элементы, привнесенные в нее деятельностью мозговых анализаторов. Следовательно, благодаря нейропсихологии, наполняется все более конкретным содержанием тезис об активности отражения человеческим сознанием объективного мира, другими словами, концепция двойной детерминированности психики, которой придерживаются в своих работах математики конструктивного направления.

Вернемся еще раз к проблеме зрительного восприятия. Уже давно было замечено, что наш глаз предпочитает одни формы другим и дополняет плохо различимые детали конфигураций не произвольным образом, а согласно некоторым законам. Исследованием «хороших» конфигураций, которые мы стараемся увидеть даже там, где их нет, занимались в свое время гештальтпсихологи. Они поставили в 20 — 30-х годах нашего столетия много интересных экспериментов на испытуемых. Подытоживая результаты, полученные психологами этой школы, Г. Хелсон писал:

«Конфигурация не есть сумма частей и их отношений. Конфигурациональное восприятие не есть восприятие частей в их отношениях, а конфигурациональная реакция не должна рассматриваться как реакция на части и отношения, как это ошибочно утверждается некоторыми авторами, разъясняющими гештальт-теорию...

Конфигурации обладают свойствами, выходящими за рамки свойств их частей и отношений. Так, если кто-то воспринимает квадрат..., он воспринимает, если не более, чем части и их отношения, то по крайней мере нечто отличное от них....

Свойства конфигураций не диктуются синтезом частей в обычном смысле этого слова» ([65], стр. 15).

К сожалению, гештальтисты на базе весьма интересных экспериментальных фактов возводили полумистическую теорию, не согласующуюся с данными науки и тем самым во многом дискредитировали собственные результаты. Но сравнительно недавно выяснились истинные причины открытых уже давно фактов. Одной из наиболее ценных работ в этой области следует считать исследование Д. Хьюбелем и Т. Визелем зрительной коры мозга кошки. Нам будет полезно познакомиться с кратким изложением этого уже ставшего классическим исследования (подробнее см. [66], стр. 169—184).

С помощью тончайшей микроэлектродной методики авторы исследовали рецепторные поля единичных клеток зрительного анализатора, расположенного в стриарной (затылочной) коре. Под рецепторным полем коркового нейрона понимается совокупность всех рецепторов сетчатки, которые посылают сигнал этому нейрону. Оказалось, что уже на самом первом корковом уровне ни один нейрон не обладает круглым рецепторным полем, как этого можно было ожидать. Были обнаружены клетки, рецепторные поля которых устроены таким образом, что эти клетки реагируют (посылают импульсы к следующим нейронным уровням коры) на щели или прямолинейные границы между более освещенным и менее освещенным участками и еще более сложно устроенные клетки, отвечающие на движение щели или движение границы. Друг от друга эти клетки отличались не только конфигурацией, на которую они реагируют, но и расположением этой конфигурации в поле зрения (одни импульсировали при предъявлении горизонтальных щелей, другие — вертикальных, третьи — наклоненных под определенным углом и т. д.).

Нужно, по-видимому, принять гипотезу о том, что зрительный корковый анализатор (как и корковый анализатор любой другой модальности, например, слуховой) еще не есть «сознание», что он представляет собой просто автоматический переработчик информации, действующий по заданной программе (возможно, с участием обратной связи). Действительно, при травмах, затрагивающих стриарную кору, человек никогда не испытывает помрачения сознания или каких-либо нарушений психики; он просто начинает хуже видеть (или вообще слепнет), как-будто бы у него разбились очки. Но если сознание возникает на гораздо более глубоком нейронном уровне и между ним и сетчаткой располагается множество промежуточных клеточных слоев со все усложняющимися рецепторными полями, то может ли мозг строить свою отражательную деятельность на основе мозаики палочек и колбочек сетчатки так же «фотографично», как это делает фотопленка или экран телевизора?

После нейрофизиологических исследований, к которым, в частности, относится работа Хьюбеля и Визеля, невозможно далее принимать господствовавшую когда-то точку зрения, будто имеется «поточечное» соответствие между световым узором, лежащим на сетчатке, и картиной, предъявляемой сознанию последними ступенями зрительной проводящей системы. Зрительный канал, состоящий из миллионов корковых нейронов и передающий визуальную информацию в центрэнцефалическую систему (т. е. в сознание), работает по принципу абсолютно несхожему с принципом действия телевидения: на каждом участке этого канала информация, собранная с нейронов предыдущего участка, укрупняется и обобщается.

Можно ожидать возражения, что Хьюбель и Визель изучали зрительную кору кошки, а не человека. Но любому биологу ясно, что схема организации пересылки зрительной информации от переферических рецепторов к центру является столь фундаментальной структурной характеристикой, что она должна быть одной и той же не только у всех млекопитающих, но и у всех хордовых. Кроме того, в пользу обобщающего зрительную информацию устройства визуального канала говорят и соображения, относящиеся к эволюции живых организмов. Для примитивных животных в смысле выживания существенно было иметь не точечную картину мира, а быстро получать сигналы о некоторых биологически значимых характеристиках области, попадающей в поле зрения: о движении предметов (неважно, каких), о наличии небольших черных пятен («жуков»), о появлении теней и т. д. Но скорость доставления таких сигналов будет максимальной, если выделение указанных характеристик производится автоматически по стандартной программе. Усложняясь и развиваясь, животные не могли кардинально перестроить принцип передачи зрительных образов в глубины мозга, и усовершенствование должно было идти по линии усложнения обобщений, выполняемых стриарной корой.

Веским подтверждением того, что восприятие в своем глубинном слое составляется из целостных конфигураций, служат результаты развернувшихся сейчас опытов по изучению стабилизированного изображения. Оказалось, что если с помощью специально разработанной оптической аппаратуры фиксировать изображение на сетчатке так, чтобы никакие движения глаза не могли его сместить (изображение в этом случае движется вместе с глазом), то оно через несколько секунд исчезает вследствие утомления нейронов. И вот, при исчезновении изображения выпадают сначала одни, потом другие элементы, причем эти выпадающие элементы всегда являются с геометрической или смысловой точки зрения целостными — это отрезки прямых, круги и т. д. Тот факт, что именно эти конфигурации исчезают или появляются по закону «все или ничего», наталкивает на мысль, что их представительство в сознании обеспечивается небольшими нейронными ансамблями или одиночными нейронами ([66], стр. 287—309]).

Недавно появилось еще одно доказательство обобщающей деятельности заложенного в нас от природы зрительного коркового анализатора. Произведенные Т. Бауэром остроумные по своей методике опыты по исследованию зрительного восприятия грудного ребенка показали, что человек с первых дней своей жизни, не имея еще никакого зрительного опыта, решительно предпочитает одни формы другим. Это означает, что отбирающее конфигурации устройство «вмонтировано» в зрительную кору заранее, а не создается в результате обучения (хотя, разумеется, обучение может привести к развитию заложенных от рождения особенностей).

В свете новых нейрофизиологических открытий становятся легко объяснимыми многие опыты гештальтистов. Ничего странного не представляет теперь так называемый «фи-феномен», заключающийся в том, что при определенном временно́м интервале между двумя вспыхивающими световыми изображениями человек видит неподвижный образ, но ощущает наличие движения этого образа. Дело просто в том, что при таких экспериментальных условиях возбуждаются корковые нейроны, передающие в центр сигнал о наличии «чистого движения» (т. е. не движения такого-то предмета, а самого факта движения). В обычной реальности такие нейроны возбуждаются лишь вместе с другими, ответственными за доставку информации о конфигурациях, поэтому почти всегда мы видим, что движется такая-то конфигурация. Но искусственными приемами можно разделить эти сигналы и оставить сигнал о движении одиноким, не сопровождаемым сигналом о конфигурации, которая движется.

Сущность процесса отражения объективного мира нашим сознанием в свете изложенных фактов можно сформулировать так. Введем понятие перцептивного пространства, элементами которого являются те феномены воспринимающего сознания, материальными коррелятами которых служат отдельные сигналы (подчиненные принципу «все или ничего») финальных уровней данного сенсорного канала. Обратим внимание на то, что это вовсе не то перцептивное пространство, о котором иногда говорят психологи в таком контексте, как «перцептивное пространство человека не евклидово, ибо луна у горизонта кажется больше, чем луна в зените». Глубинное перцептивное пространство, о котором мы здесь говорим, никак не может быть охарактеризовано с точки зрения евклидовости, поскольку вряд ли в нем существует какая бы то ни было метрика вообще. В воспринимающем сознании его элементам соответствуют «архетипические» образы, чувство движения и т. д. Рецептивным же пространством мы назовем обычное метрическое пространство, носителем которого является поверхность сетчатки (для простоты мы не рассматриваем цветового зрения и бинокулярного эффекта). Поскольку изображение на сетчатке возникает в результате простой фокусировки линзой хрусталика, мы можем в первом приближении считать рецептивное пространство «фотографическим» подобием реального физического пространства. Но вот между перцептивным и рецептивным пространствами имеется связь, которая описывается не подобием, а *законом взаимности*: то, что является *элементом* в рецептивном пространстве есть *сложный комплекс* перцептивного пространства и наоборот, *элемент* перцептивного пространства соответствует *комплексу* рецептивного пространства. Скажем, прямолинейный раздел света и тени, то есть две по-разному освещенные полуплоскости, есть не что иное, как множества точек (элементов) рецептивного пространства, но целостный образ, элемент перцептивного пространства. С другой стороны, точка — пятнышко пренебрежимо малых размеров — есть элемент в рецептивном пространстве, но, как мы сейчас поясним подробнее, составной феномен в перцептивном пространстве.

Можно спросить: почему же оказалось столь устойчивым представление о «поточечном» зрении?

Дело в том, что «крупноблочные» элементы перцептивного пространства настолько разнообразны и так хорошо подобраны, что их комбинации могут удовлетворительно воссоздать почти любой набор точек, вернее, пятнышек. И хотя это будет реконструкция, а не исходный объект, ее отличие от этого объекта, находящегося в рецептивном пространстве, оказывается незаметным и неощутимым. В любой момент глаз, привлеченный мелкой деталью, может перевести ее в центральную ямку и рассмотреть индивидуально. Правда, эта деталь будет не точкой, но мы привыкли считать маленькие пятна точками. Такая потенциальная возможность выделить любую деталь расплывчатой картины, состоящей в основном из стандартных конфигураций и небольшого центрального района, на котором в данный момент фокусируется внимание, создает в нас убеждение (имеющее психологическую подоплеку), что мы видим все или почти все точки, проектирующиеся на сетчатку. Постоянное движение глаза — как нистагмическое (малые скачки с высокой частотой), так и саккадическое (более амплитудные и более редкие скачки) — усиливает иллюзию поточечного сканирования картины окружающего мира. И только более глубокие исследования, идущие по линии нейрофизиологии, экспериментальной психологии и нейрокибернетики, показывают, что мозг создает образ действительности, идя не от точек к фигурам, а от фигур к точкам. Информация о наборе светящихся точек является результатом сложного наложения более элементарных (с точки зрения перцептивного пространства) сведений о конфигурациях и движениях.

Все это имеет самое непосредственное отношение к проблеме математического творчества. Выше мы уже говорили о значительной роли визуальных элементов для мышления математика. Теперь мы можем уточнить этот тезис с учетом новейшего нейропсихологического материала и конкретнее проанализировать влияние структурных и функциональных особенностей зрительной коры на рождение тех интуитивных соображений, которые лежат в основе теории множеств, делая ее постулаты «умопостигаемыми» и заставляя принимать их подавляющее большинство математиков (разумеется, кроме интуиционистов, конструктивистов и представителей других школ).

Мы сказали, что благодаря весьма эффективному устройству нашего зрительного аппарата в момент непосредственного созерцания взаимодействие элементарных единиц перцептивного пространства (конфигураций), композиция центрального и периферического зрения и некоторые чисто психологические характеристики зрительного восприятия при наличии непрерывного движения глаза создают условия, при которых «считывание» зрительной информации трудно отличить от поточечного сканирования. Однако наша мысль работает не в момент восприятия. Когда мы размышляем, прямое зрительное восприятие может лишь мешать нам, и мы обычно стараемся от него избавиться, иногда даже закрывая глаза. Мысль оперирует основными элементами перцептивного пространства и не может воссоздавать подробностей мозаики сетчатки, то есть, опираясь только на саму себя, конструировать с достаточной степенью детальности объекты рецептивного пространства. Поэтому именно при мышлении начинает играть огромную роль характер элементов перцептивного пространства. В зависимости от того, какими будут эти элементы, осуществится то или иное направление мысли и та или иная интеллектуальная интуиция. Здесь и проявляется влияние мозга как материального тела, подчиненного объективным законам функционирования, на метод мышления и способ рассуждения. Конечно, это не будет означать имманентной ограниченности мышления. Как мы уже говорили, познав законы своего функционирования, мысль может учитывать возможные искажения, вносимые этими законами в картину мира, и производить ее корректирование. Подчеркнем, что анализаторы, расположенные в стриарной коре и «укрупняющие» зрительную информацию перед предъявлением ее сознанию, при всей тонкости своего устройства и даже при условии наличия гипотетической обратной связи, являются лишь внешними по отношению к сознанию фильтрами, которые в принципе можно сравнить со сложно устроенными оптическими приборами.

Одним из наиболее важных для настоящего рассмотрения свойств мышления, определяемых особенностями структуры перцептивного пространства, является императив непрерывности. В математическом мышлении, как мы знаем, идея непрерывности имеет два источника — геометрический и кинематический,— и оба эти источника мы можем теперь выявить и проанализировать.

Когда мы представляем себе отрезок, он возникает перед нашим внутренним взором как достаточно элементарная конфигурация, не разложимая на точки и не состоящая из точек. Иначе и не может быть, так как именно прямые линии — щели и прямолинейные границы раздела полуплоскостей — первичны в перцептивном пространстве. Но чем же тогда является в перцептивном пространстве точка? Это — «очень маленький отрезок». Наша мысль, возвышаясь до сложного понятия точки, как бы моделирует последовательность вложенных друг в друга уменьшающихся отрезков, фиксируя в своем фокусе алгоритм этого уменьшения. Психологические эксперименты показали, что «чистое» движение в перцептивном пространстве может быть отделено от категории времени (возникает ощущение движения, без наличия в поле зрения движущихся предметов), поскольку его материальным коррелятом служит нейронная импульсация, принадлежащая, в принципе, к тому же классу мозговых явлений, что и импульсация, сигнализирующая сознанию о какой-либо конфигурации. Другими словами, алгоритм уменьшения (движения), или предельного перехода, предъявляется сознанию как законченный простой объект и не содержит в себе какого-то «трансцендентного прыжка» через пропасть бесконечности. Трудности, связанные с таким «прыжком», возникают на более поздней стадии — при логическом осмыслении материала, поставляемого интуицией. Но сказанное означает, что теорема Кантора о системе вложенных отрезков, лежащая в основе теории действительных чисел, принудительно возникает в нашем мышлении. Ясно, что система вложенных отрезков, согласно нашей глубинной интуиции (связанной с объективными особенностями устройства зрительного анализатора) непременно должна иметь общую точку — ту самую точку, которая в перцептивном пространстве *есть* наша система отрезков.

Обратим внимание на то, что в свете сказанного нет никакого смысла искать логическое обоснование теоремы Кантора, тем более — пытаться доказать дедуктивными рассуждениями непротиворечивость анализа бесконечно-малых. Идея непрерывности обязана тому, что в перцептивном пространстве отрезок является более простым объектом, чем точка. Такое устройство перцептивного пространства возникло в ходе эволюции, поскольку на примитивных стадиях развития организмам было важно различать крупные визуальные категории. Совершенствуясь, организационная схема перцептивного пространства замечательно приспособилась для отражения и освоения (а на стадии человека — и для познания) многих значительно более тонких сторон действительности. В частности, характеристики перцептивного пространства, обеспечивающие появление идеи непрерывности, оказались очень полезными для интериоризации сознанием важных особенностей таких сред, как вода или воздух.

И все же, никакой аппарат не может быть универсальным, и нет никаких причин для абсолютизации интуиции непрерывности. Как и любая другая форма интуиции, она оказывается неадекватной в той области, для которой она не приспособлена. Не следует «вкладывать» ту непрерывность, которая существует в нашем перцептивном пространстве и является результатом синтезирования ряда «укрупненных» сигналов, идущих в сознание от зрительной коры, в окружающей мир и требовать ее безукоризненного логического соединения с явлениями перцептивного пространства, отражающими другие стороны мира — скажем с арифметикой, которая, возможно, связана более со слуховым, чем со зрительным восприятием.

Таким же понятным явлением становится и принудительность для нас и второго истока идеи непрерывности. Поскольку в перцептивном пространстве «чистое движение» есть элемент (представленный одним нейроном глубинного уровня или небольшой группой взаимосвязанных нейронов), то в простейшем мысленном отрезке движения пятнышка от одного конца к другому относится сразу ко всему отрезку, а не состоит из сменяющих друг друга положений. Всякий, кто усомнится в этом, может быстро рассеять свои сомнения, произведя над собой простейший эксперимент, попробовав мысленно вообразить точку, медленно и равномерно движущуюся по краю стола. Это оказывается абсолютно невозможным. Но коль скоро движение, как элементарная идея, относится сразу ко всему отрезку, то наша интеллектуальная интуиция неизбежно продуцирует теорему Больцано—Коши о прохождении любого промежуточного значения. Так в нашем сознании рождается несколько другой аспект идеи непрерывности.

Имеется принципиальная возможность проведения экспериментов, которые могут пролить свет на участие тех или иных перцептивных элементов в деятельности математической мысли. Эту возможность предоставляет явление ретроактивного торможения, заключающееся в том, что если между запоминанием какой-то информации и ее воспроизведением имеется пауза, заполненная мыслительной деятельностью, то чем ближе эта деятельность по своему характеру к той, какая осуществлялась во время запоминания информации, тем результат воспроизведения окажется менее удачным. Иными словами, активность определенной модальности в паузе «стирает» из памяти следы, относящиеся к той же модальности.

Предварительные опыты, основанные на феномене ретроактивного торможения, были проделаны в Московском институте инженеров железнодорожного транспорта автором настоящей книги (в разработке методики и анализе результатов принимала участие Э. А. Орлова). 70 студентов были разделены на две группы. Обе группы должны были запомнить условия одной и той же задачи из математического анализа. Пауза между запоминанием и воспроизведением была заполнена цифровой деятельностью у студентов первой группы и визуальной деятельностью у студентов второй группы. В результате последующего опроса в первой группе из общего числа ошибок вспоминания половина пришлась на цифровые ошибки (в условиях задачи фигурировали числа — начало и конец интервала, на котором задавалась функция, значение корня и т. д.) и половина — на смысловые ошибки. Во второй группе только 26% ошибок оказались цифровыми и 74% — смысловыми. Это, видимо, свидетельство того, что в осмыслении задач по анализу важную роль играют визуальные элементы перцептивного пространства.

Необходимость, неизбежность и единственность той математики, которой мы располагаем в настоящее время, которые считались само собою разумеющимся и вытекавшим из «точного» соответствия математики объективно существующим «вещам», не только поставлены под сомнение, но уже, видимо, потеряли все шансы на восстановление к ним былого доверия. Все более математика представляется искусственным языком, сформировавшимся в историческом процессе под влиянием не только исследовательских устремлений, направленных на окружающий мир, но и особенностей нашей психики, соображений удобства и даже различных случайностей. Вот как писал об этом Джон фон Нейман в одной из своих последних статей:

«Следует отметить, что язык есть в значительной степени историческая случайность... Такие языки, как греческий или санскрит, представляют собой факты истории, а не абсолютную логическую необходимость; будет только разумным предположить, что логика и математика точно так же являются лишь историческими случайными формами выражения. Не исключено, что они могут существенным образом варьироваться, то есть выступать в непривычных для нас формах. В самом деле, природа центральной нервной системы и применяемых в ней систем определенно свидетельствует, что положение вещей именно таково...

Возможно, что когда мы говорим о математике, мы обсуждаем некоторый вторичный язык, надстроенный над первичным языком, фактически используемым в нашей нервной системе. Таким образом, внешняя форма нашей математики не является абсолютно существенной с точки зрения оценки того, что представляет собой логический и математический язык, действительно используемый в центральной нервной системе» ([67], стр. 59—60).

Ближайшая задача математиков, логиков, психологов, нейрофизиологов и философов состоит в том, чтобы наполнить эту удивительную по глубине и смелости догадку фон Неймана конкретным содержанием. Путь до ее разрешения еще далек. Однако уже сейчас вырисовывается все настойчивее подтверждаемое частными фактами предположение, что центральная нервная система использует одновременно несколько языков — каждый для своих целей. Этого фон Нейман, кажется, не предусмотрел. Но если принять гипотезу множественности структурных элементов психики, необходимо накладывающихся на наше восприятие и осмысление действительности, то не приобретает ли фраза Бурбаки о «специфических интуициях», дающих начало разным отраслям математики, вместо иронического смысла, какой вкладывал в нее автор, смысл пророческий? Не выяснится ли через какое-то время, что (говоря, разумеется, очень упрощенно) теоретико-множественная математика есть «математика зрения», конструктивная математика есть «математика двигательных операций» и т. д.? Нельзя отвергать принципиальную возможность такого выяснения только на том основании, что эта мысль резко противоречит укоренившемуся в нашем сознании представлению о том, будто математика есть точный слепок с внешних структур и не имеет никакого отношения к структурам сознания.

Вернемся, например, к зрению. Вряд ли кто-нибудь в настоящее время отважится отрицать, что психические структуры накладываются на визуальное восприятие, что вне этих структур вообще нельзя говорить о зрительном восприятии. Сложная работа огромной части мозга по селекции, кодированию и переорганизации сигналов, идущих от элементов сетчатки, является исходной для последующей (сознательной) работы мозга, осмысливающего мир, и таким образом, имманентно входит в качестве элемента во все наши концепции, включая математические и физические теории. Но в таком случае будет только естественным предположить, что сложнейший и тончайше развитый селекционный и кодировочный аппарат зрительного отдела мозга используется нашим мышлением не только в момент зрительного восприятия, но и в период размышления, в период чисто логической работы. Возможно, эта «ЭВМ» подключается к нашему рассудку так, что ее действие осознается нами не полностью и проявляется только в спонтанном возникновении расплывчатых зрительных образов, но логика использующего этот механизм мыслительного процесса оказывается визуальной логикой, хотя мы уверены, что это — языковая логика. Работа этого механизма и доставляет нам «сквозную идею», о которой писал Пуанкаре. Не лишено правдоподобия, что непреодолимость АГ-конфликта была как раз связана с тем, что мы не понимали различия и несовместимости психических структур, порождающих арифметику и геометрию с теорией множеств.

Но если идея «многоструктурности восприятия» и впредь будет получать все новые подтверждения от экспериментальной психологии, то как быть с «объективной действительностью»? Не придем ли мы в этом случае к выводу, что «материя исчезла»? Для философа, твердо стоящего на позиции материализма и творчески овладевшего диалектическим методом, такой вопрос не может даже возникнуть. Как пишет Тодор Павлов, «Марксизм-ленинизм не отрицает, что макротела и микротела, вселенная и нейтрино, пространство и время, общество и человек, организм и сознание и т. д. имеют свою структуру, он требует исследования структур и структурных закономерностей... Установление того факта, что бесструктурного бытия и бесструктурного сознания не существует, не может, естественно, повлечь за собой пересмотр коренных мировоззренческих выводов, сделанных диалектическим материализмом на основе философского обобщения всей истории познания и социальной практики» ([68], стр. 127].

В. И. Ленин говорил, что в момент естественнонаучных переворотов исчезает не *материя*, а тот *предел*, до которого мы ее знали до сих пор. Сейчас настало время, когда наука изучает (или пытается изучать) материю в самом общем понимании — неживую природу вместе со включенным в нее сознанием, представляющим в этом контексте высшую форму материи. Такой подход стимулируется, помимо всего прочего, возросшей активностью познающего и преобразующего мир человека и становится нормальным и закономерным подходом в эпоху научно-технической революции. Успешное продвижение вперед по этой линии познания уже, видимо, не обеспечивается традиционной математикой. В воздухе висит необходимость создания новой математики, лучше приспособленной к описанию ситуации природа — человек, а может быть и нескольких математик.

Возможно, в будущем произойдет следующее: метаматематика вступит в более тесную, чем ныне, связь с определенными разделами материалистической философии и психологии и так образуется область, которую можно назвать «*количественная гносеология*», предметом которой будет проблема согласования различных «языков» (каждый из которых опирается на свою специфическую структуру сознания), с помощью которых мы конструируем, верифицируем и переконструируем объекты нашего научного познания, все полнее и глубже проникая в тайны материи.

Это не будет означать, что математическое знание сольется с другими отраслями знания. Математика останется частной, а не философской наукой, однако такой наукой, средства которой останутся предельно надежными и полностью лишенными субъективизма. Это означает, что деятельность конструктивистов, постоянно проверяющих надежность этих средств и проявляющих беспокойство во всех случаях, когда, по их мнению, ею начинают пренебрегать, направлена в конечном счете на ту же цель, что и работа Бурбаки — на сохранение специфического лица математики, благодаря которому она может выступать в нашем сознании единой наукой, составляющей одно из главных украшений человеческой цивилизации.

ЛИТЕРАТУРА

1. История математики в трех томах, т. 2. М., 1970.
2. *Ньютон И.* Математические работы. М.—Л., 1937.
3. *Клейн Ф.* Вопросы элементарной и высшей математики. Одесса, 1912.
4. История математики в трех томах, т. 1, М., 1970.
5. *Тростников В. Н.* Некоторые особенности языка математики как средства отражения объективной реальности (канд. дисс.). М., 1971.
6. *Сабо А.* О превращении математики в дедуктивную науку и о начале ее обоснования. ИМИ, 1959, вып. XII.
7. *Bell E.* Men of Mathematics. N.-Y., 1961.
8. Problems of the Philosophy of Mathematics. Amsterdam, 1967.
9. *Тростников В. Н.* Человек и информация. М., 1970.
10. *Льоцци М.* История физики. М., 1970.
11. *Тростников В. Н.* Загадка Эйнштейна. М., 1971.
12. Философия науки. Естественнонаучные основы материализма Под ред. А. К. Тимирязева, ч. I, вып., М.—Пг., 1923.
13. *Ярошевский М. Г.* Психология в XX столетии. М., 1971.
14. *Джемс У.* Вселенная с плюралистической точки зрения. М., 1911.
15. *Шварц Л.* Анализ, т. I, М., 1972.
16. *Виленкин Н. Я.* Рассказы о множествах. М., 1969.
17. Бурбаки Н. Элементы математики, кн. 8. Очерки по истории математики. М., 1963.
18. *Вигнер Е.* Этюды о симметрии. М., 1971.
19. *Мендельсон Э.* Введение в математическую логику. М., 1971.
20. *Heijenoort J.* From Frege to Gödel. Cambrige (Mass.), 1967.
21. *Гильберт Д.* Основания геометрии. М., 1948.
22. *Адамар Ж.* Исследование психологии процесса изобретения в области математики. М., 1970.
23. *Славин А. В.* Наглядный образ в структуре познания. М., 1972.
24. Распознавание образов. Сборник статей (перевод с англ.). М., 1970.
25. *Лурия А. Р.* Маленькая книжка о большой памяти. М., 1968.
26. *Герц Г.* Принципы механики, изложенные в новой связи. М., 1959.
27. *Беер Т.* Мировоззрения Эрнста Маха. Спб, 1911.
28. *Schiller F. C. S.* Humanism. London, 1912.
29. *Джемс В.* Прагматизм. Новое название для некоторых старых методов мышления. СПб., 1910.

30. *Джемс У.* Психология. Пг., 1922.
31. *Бергсон А.* Собрание сочинений, т. I. СПб., 1914.
32. *Бергсон А.* Собрание сочинений, т. 5. СПб., 1914.
33. *Бунге М.* Интуиция и наука. М., 1967.
34. *Мах Э.* Анализ ощущений и отношение физического к психическому. М., 1908.
35. *Маркс К.* и *Энгельс Ф.* Из ранних произведений. М., 1956.
36. *Ленин В. И.* Полное собрание сочинений, т. 18.
37. *Антипенко Л. Г.* Проблема физической реальности. М., 1973.
38. *Ленин В. И.* Полное собрание сочинений, т. 29.
39. *Пиаже Ж.* Избранные психологические труды. М., 1969.
40. *Дубровский Д. И.* Психические явления и мозг. М., 1971.
41. Проблемы Гильберта. Под ред. П. С. Александрова. М., 1969.
42. Труды математического института им. В. А. Стеклова, 1962, 67.
43. *Beth E. W.* The Foundations of Mathematics. Amsterdam, 1965.
44. *Гейтинг А.* Интуиционизм. М., 1965.
45. Contemporary American Philosophy, vol. 2, N.-Y., 1962.
46. *Шредингер Э.* Новые пути в физике. М., 1971.
47. Математики о математике.— Сб. перев. статей. М., 1967.
48. *Бурбаки Н.* Начала математики. Теория множеств. М., 1965.
49. *Тьюринг А.* Может ли машина мыслить? М., 1960.
50. *Витгенштейн.* Логико-философский трактат. М., 1958.
51. Математическая логика и ее применение.— Сб. пер. с англ. М., 1965.
52. *Марков А. А.* О логике конструктивной математики. М., 1972.
53. *Кушнер Б. А.* Лекции по конструктивному математическому анализу. М., 1973.
54. *Василев С.* Теория отражения и художественное творчество. М., 1970.
55. *Нильсон Н.* Искусственный интеллект. Методы поиска решений. М., 1973.
56. *Бирюков Б. В., Тростников В. Н., Урсул А. Д.* Информация как научное и как метанаучное понятие. Послесловие к кн.: *Гришкин И. И.* Понятие информации. М., 1973.
57. *Арбиб М.* Мозг, машина и математика. М., 1968.
58. *Нейман Дж. фон.* Теория самовоспроизводящихся автоматов. М., 1971.
59. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М., 1972.
60. Исследования по теории алгоритмов и математической логике. Выч. центр АН СССР, М., 1973.
61. *Fang J.* Bourbaki. Towards a Philosophy of Modern Mathematics. Paideia, 1970.
62. Scientific American, № 196 (1957), 88.
63. Архитектура математики. М., 1972.
64. Artificial and Human Thinking. Amst.—Lond.—N.-Y., 1973
65. Helson H. The Fundamental propositions of Geschtaltpsychology. Psychological Revew, 1933, vol. 40, N 1, pp. 13—32.
66. Восприятие и действие. Под ред. А. В. Запорожца. М., 1967.
67. *Нейман Дж. фон.* Вычислительные машины и мозг. Кибернетический сборник, № 1, М., 1960.
68. *Павлов Т.* Марксистско-ленинская философия и системно-структурный анализ.—«Коммунист», 1969, № 15.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Виктор Николаевич Тростников

Конструктивные процессы в математике

Утверждено к печати
Научным советом по комплексной проблеме «Кибернетика»

Редактор издательства **И. С. Пучков**
Художник **Э. Л. Эрман**
Художественный редактор **Н. Н. Власик**
Технический редактор **А. М. Сатарова**

Сдано в набор 1/IV 1975 г. Подписано к печати 25/IX 1975 г.
Формат $84 \times 108^1/_{32}$. Бумага типографская № 2.
Усл.-печ. л. 13,44. Уч.-изд. л. 14,7. Тираж 4800.
Т-16309. Тип. зак. 1971 Цена 88 коп.

Издательство «Наука»
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., д. 21
2-я типография издательства «Наука»
121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10.

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
118	14 св.	вещество	существо
127	5 св.	метамотических	метаматематических
177	15 св.	родкой	редкой
254	1 сн.		69. *Франк Ф.* Философия науки. М., 1960.

В. Н. Тростников

В. Н. ТРОСТНИКОВ

КОНСТРУКТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ В МАТЕМАТИКЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
· НАУКА ·