А. И. БОРОДИН

число и мистика

Цена 17 коп.

А. И. БОРОДИН

ЧИСЛО И МИСТИКА

Издательство «Донбас»
Донецк — 1972

517.1+51 (09)+25
Б83

Бородин А. И.
Б83 Число и мистика. Изд. 2-е, перераб. и доп. Донецк, «Донбас», 1972.

143 с. с ил. Библиогр.: с. 138—142 (72 назв).

Почему до 1945 года во Львове не было ни одного дома под номером 13? Почему в Лондоне в 1930 году была подписана петиция о снятии номеров 13 со всех домов? На эти и другие вопросы читатель найдет ответ в этой книге. Автор увлекательно рассказывает о происхождении чисел и счета, развенчивает понятие о мистических числах, вроде числа 13, и доказывает, что числа 3, 7, 10, 40, 60 и другие — это не «знаки, данные богом людям», а интереснейшие и важнейшие этапы овладения человеком трудного искусства счета и постижения чисел, то есть этапы того пути, что привел к величайшему завоеванию человечества — счетно-решающим устройствам, которые явились еще одним триумфом материализма в науке. Книга рассчитана на массового читателя.

517.1+51 (09)+25

1—2—4
27—Б3—2—71

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ.
ПЕРЕРАБОТАННОЕ И ДОПОЛНЕННОЕ

Предисловие

История математики вообще и история развития понятия о числе в частности дает нам много примеров открытой и тайной борьбы между наукой и мистикой, между материализмом и идеализмом. Повивальными бабками различных суеверий, среди них и числовых, чаще всего являлись проповедники различных религий. Религиозное мировоззрение неизбежно опирается на веру в чудеса.

Данные археологии утверждают, что религия, как одна из форм человеческого сознания, возникла приблизительно 100 тысяч лет назад. Ф. Энгельс писал: «...всякая религия является не чем иным, как фантастическим отражением в головах людей тех внешних сил, которые господствуют над нами в их ежедневной жизни,—отражением, в котором земные силы принимают форму неземных» [1].

Все религии в один голос внушают верующим, что они должны ограничивать свое любопытство только доступным для них, границы которого устанавливает религия.

«Не годится человеку вкушать от древа познания добра и зла», — внушает Библия. Митрополит Филарет, один из столпов православного церковного учения, заявил откровенно: «Верующий должен не только признать,

---

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг, М., 1957, стр. 321.

согласно библейскому сказанию, что кит проглотил человека; если бы в священном писании было сказано, что человек проглотил кита, то и в это надо было верить всем религиозным людям».

Папа Павел II в XV веке сказал: «Религия должна уничтожить науку, ибо она враг религии».

«О том, что выше тебя, не рассуждай, в то, что не по силам тебе, не удивляйся, о том, что скрыто для тебя, не спрашивай», — учит Талмуд, священная книга евреев.

Мусульманские ученые под давлением ислама[1] часто заканчивают свои научные трактаты словами: «Аллах знает больше».

«Представители науки и религии всегда понимали, что наука и религия — заклятые враги» (А. Герцен).

Тогда же, когда наука, несмотря на яростное сопротивление религии, открывала новые законы и двигалась вперед, служители религий старались использовать ее достижения в своих целях.

Так, папа Пий XII (умер в 1958 году) заявлял, что истинными учеными являются люди, которые будто бы «показывают на языке чисел, формул и эксперимента бесконечную гармонию всемогущества бога». В первых спутниках, посланных в космическое прост-

---

[1] *Ислам* (арабск.—покорность) или мусульманство — религия, возникшая в начале VII века. В настоящее время ислам распространен в странах Ближнего и Среднего Востока, в Северной Африке, Юго-Восточной Азии и странах Дальнего Востока.

ранство советскими учеными, он видел факт «творчества ученых, превышающих силу человеческого разума».

Христианская церковь жестоко преследовала «языческие науки», такие как математика и естественные науки вообще. Для подтверждения сказанного приведем некоторые примеры из истории естествознания.

Так, по наущению архиепископа Кирилла монахи зверски замучили знаменитую греческую женщину — философа, математика и астронома Гипатию, или Ипатию (370—415). Чтобы замести кровавые следы гнусного злодеяния, представители христианской церкви позднее придумали версию, что Гипатия умерла от руки язычников, что церковь в ее смерти совершенно не повинна. Для большей убедительности Гипатию объявили «святой» и называли «святой великомученицей Екатериной». Через несколько столетий церковники «открыли» мощи святой великомученицы Екатерины и на этом успокоились. Так церковь путем грязных махинаций свалила вину с больной головы на здоровую. Но память народа долговечна, и ее не обманешь. Судьба Гипатии послужила английскому писателю Чарльзу Кингсли (1819—1875) темой для исторического романа «Ипатия».

Французский математик Франсуа Виет (1540—1603) нашел ключ к шифру, который применяли испанцы во время войны с Францией, и указал средство, как следить за всеми его изменениями. Узнав об этом, испанская инквизиция объявила Виета богоотступником и заочно приговорила его к сожжению на костре.

Есть предположения, что Виет умер насильственной смертью.

В XVI и XVII веках Франция переживала острую религиозную борьбу между католиками и протестантами (гугенотами). 24 августа 1572 года (Варфоломеевская ночь) произошла резня протестантов, устроенная королем-католиком Карлом IX и его фанатичною матерью. Считают, что было убито около 20 тысяч. В эту же ночь от рук своих философских противников погиб видный математик того времени Петр Рамус. Ужасы этой резни изображены в повести П. Мериме «Хроника времен Карла IX». В 1598 году король Генрих IV (дважды выступавший как протестант, а при получении короны вернувшийся в католичество) издал так называемый «Нантский эдикт», разрешавший протестантам сохранить свою религию. В 1685 году король Людовик XIV отменил «Нантский эдикт», и много десятков тысяч семей протестантов были вынуждены оставить Францию, в их числе и крупный математик А. Муавр (1667—1754), переселившийся в Англию, где сделался близким другом Исаака Ньютона. Голландский математик Х. Гюйгенс (1629—1695), работавший в то время во Франции, вышел из состава Парижской академии наук и впоследствии отказался печатать свои труды в Париже.

Итальянский мыслитель материалист Джордано Бруно (1548—1600) за пропаганду учения Коперника, критику схоластики и борьбу против католицизма был сожжен на костре.

Великий итальянский физик, механик, астроном и математик Галилео Галилей (1564—1642) за развитие учения Коперника о движении земли был подвергнут четырем унизительным допросам и в течение девяти лет состоял «узником инквизиции». Его заставили отказаться от «ереси Коперника» и запретили разговоры с кем-либо о движении Земли и печатание каких-либо трудов.

Только за 18 лет один Торквемада (1420—1498) — главный инквизитор Испании — сжег живыми 10 220 человек. От его преступлений пострадало более 114 тысяч семейств. По его указанию был сожжен на костре испанский математик Вальмес.

Паоло Вальмес у своих знакомых встречался с Торквемадой. Когда речь зашла о решении уравнения четвертой степени, Торквемада заявил, что такие уравнения не могут быть решены, так как их решение волей господней изъято из человеческого разума. Вальмес на это заметил, что уравнение четвертой степени им решено, и весьма простым способом. Торквемада не возражал, но в ту же ночь Вальмеса заточили в тюрьму инквизиции за «борьбу с божественной волей». Через три недели его сожгли на костре. Он не успел никому сообщить о своем открытии. Такое решение было опубликовано лишь в 1545 году, оно принадлежало итальянскому математику Л. Феррари (1522—1565).

Из истории классовой борьбы известно, что служители религиозных культов всегда оправдывали и поддерживали господствующие классы. Между представителями мистицизма [1] и атеизма [2], как и между реакционными и прогрессивными классами, всегда происходила борьба. Особенно острой эта борьба становилась тогда, когда на смену одному господствующему классу приходил другой.

И в настоящее время мистика, астрология [3] и другие «оккультные науки» [4] остаются оружием самых реакционных сил капиталистического общества.

В 1959 году в Англии возникло «Товарищество защиты колдовства (чародейства, волшебства)», а в конце 1961 года в Риме состоялся общенациональный съезд астрологов, которых только в Италии насчитывается свыше 10 тысяч человек. В 1962 году в ФРГ работала всемирная конференция астрологов, спиритов и других, на которую собралось свыше 1400 представителей «таинственных наук». В США специальные учебные заведения готовят дипломированных астрологов, спиритов и других шарлатанов. Поэтому не удивительно, что в США работает свыше 5 тысяч профессионалов-астрологов и еще 100 тысяч сочетают профессию астролога с другими профессия-

---

[1] *Мистицизм* — мировоззрение, основой которого есть вера в возможность непосредственного общения человека со сверхъестественными силами.

[2] *Атеизм* — буквально — противобожие, безбожие.

[3] *Астрология* — ложное учение, опираясь на которое, пытаются предсказать исход предпринимаемых действий, а также будущее людей и целых народов по расположению небесных светил.

[4] *Оккультизм* — мистическое учение о существовании в природе таинственных сил, духов, сверхсуществ.

ми. Миллионы обманутых американцев платят этой армии мошенников 100 миллионов долларов ежегодно. Во Франции 34 тысячи «предсказателей судьбы», из которых 25 тысяч работают в Париже. В этой стране на 38 тысяч врачей приходится 50 тысяч знахарей. Чтобы отвлечь внимание трудящихся от суровой действительности капиталистического мира, отравить сознание мистикой, капиталисты финансируют большое количество журналов, газет и других изданий, выливающих со своих страниц мутные потоки мистико-религиозной отравы. В США выходит свыше 50 ежемесячных и 2 ежегодных астрологических журнала, во Франции — 9, в ФРГ — 7. Существуют целые издательства, которые специализируются на издании мистической литературы, и фирмы, распространяющие ее среди населения своих государств и за границей.

Одним из путей проникновения в математику идеализма и всякого рода поповщины является зарождение понятия о натуральном числе.

Понятие натурального числа и всего натурального ряда чисел возникло из материального опыта, а не есть «продукт человеческого духа», «врожденное понятие». Числа не являются только «знаками, данными богом». В предлагаемой работе мы хотели проследить историю развития понятия о дробных, отрицательных, иррациональных и комплексных числах, а также о системах счисления. Здесь делается попытка вскрыть корни числовых суеверий и числовой мистики, а также магических квадратов.

ИСТОРИЯ РАЗВИТИЯ ПОНЯТИЯ О НАТУРАЛЬНОМ ЧИСЛЕ

«Вам поклоняюсь, вас желаю,
числа!
Свободные, бесплотные,
как тени,
Вы радугой связующей
повисли
К раздумиям с вершины
вдохновенья».

Валерий Брюсов

Как и для чего изучают историю развития понятия о числе

Число является одним из основных понятий математики. Понятие числа развивалось в тесной связи с изучением величин. Первоначальное понятие величины являлось непосредственным обобщением более конкретных понятий: длины, площади, объема, веса. Эта связь сохранилась и в настоящее время. Характеризуя науки своего времени, Ф. Энгельс сказал: «Математика — это наука о величинах; она исходит из понятия величины» [1]. Хотя не для всех разделов современной математики понятие числа является основным, но даже и в них приходится рассматривать различные величины и пользоваться числами. Поэтому и в настоящее время изучение величин является одной из важнейших задач математики.

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы, М., 1969, стр. 223.

Возникновение понятия о натуральном числе[1], как о результате счета отдельных предметов, есть вопрос общей истории культуры. По непосредственным источникам мы не можем проследить его развитие.

Один из древнейших письменных математических памятников, дошедших до нас, — папирус Ринда[2], переписанный египетским писцом Ахмесом примерно около 2220—1800 лет до нашей эры, свидетельствует, что и в это отдаленное время египтяне были знакомы с действиями не только над целыми числами, но и над дробями. Сравнительно недавние исследования позволяют судить о довольно высоком уровне арифметической культуры вавилонян за 2—3 тысячи лет до нашей эры. Первые люди на Земле появились около миллиона лет назад, но только за 4—5 тысяч лет

---

[1] Термин «натуральное число» впервые употребил римский государственный деятель, философ, автор трудов по математике Боэций (480—524), но еще греческий математик Никомах из Геразы (I—II вв. н. э.) говорит о натуральном, то есть естественном ряде чисел. В современном смысле понятие «натуральное число» и последовательное употребление этого термина находят применение у знаменитого французского математика, философа и просветителя Даламбера (1717—1783) в изданной Дидро (1713—1784) в сотрудничестве с Даламбером и другими писателями Франции «Энциклопедии» (1751—1780). С того времени термин «натуральное число» вошел постепенно во всеобщее употребление.

[2] Он называется так по имени его владельца английского египтолога Г. Ринда (или Райнда), который купил этот текст в Луксоре и потом передал его Британскому музею; он был изучен и издан на немецком языке в 1877 году А. Эйзенлором (этот папирус называют также папирусом Ахмеса).

есть самые древние письменные памятники их математических знаний. Ясно одно, что натуральное число является одним из древнейших понятий, и все культурные народы, обладавшие письменностью, уже имели понятие о нем и той или иной нумерации, а также были знакомы с простейшими арифметическими действиями. За неимением непосредственных свидетельств того, как эти понятия возникли и развивались, мы должны обратиться к свидетельствам косвенным.

Такими косвенными свидетельствами, по которым можно судить о возникновении счета и о начальных стадиях образования арифметических понятий, являются следующие:

1. Данные этнологии, относящиеся к отсталым в культурном отношении народам. В некоторых местах земного шара — в Африке, центральной части Америки, Австралии, на некоторых островах — сохранились племена, стоящие на очень низкой ступени развития; они сейчас примерно такие, какими были наши предки пять или десять тысяч лет тому назад. Изучение таких племен, их языка, искусства позволяет прояснить много темных мест нашей собственной древнейшей истории и помогает узнать, как считали наши давние предки.

2. Данные, которые можно извлечь из разных исторических памятников. В нашем культурном наследии сохранились работы древних авторов различных художественных изделий, наскальных рисунков, из которых мы частично можем узнать, как считали в глубокую старину. Много сведений дают раскопки и

надписи на руинах старых зданий. Так, например, анализируя уникальную коллекцию художественных изделий из палеолитической стоянки Мальта на притоке Ангары реке Белой, собранных в ходе многолетних раскопок профессором М. М. Герасимовым, можно сделать вывод, что по крайней мере в позднем палеолите должны были существовать уже сравнительно развитая система счета и понятия о таких числах, как 5, 7, 10 (см. [8], стр. 332—339) [1].

3. Данные, которые можно извлечь из изучения, с одной стороны, народных преданий, сказок, пословиц и поговорок, с другой — языка культурных народов. В языке сохранилось много следов человеческой культуры, в том числе старых способов счета, следов тех времен, когда люди писать еще не умели.

4. Данные, которые можно почерпнуть, наблюдая за детьми, когда они учатся говорить и считать. Каждый ребенок как бы повторяет путь развития всего человечества. Конечно, это «повторение» проходит очень быстро: тот путь развития, на который человеку нужны были тысячи веков, ребенок проходит за годы и даже за месяцы. Но все же, изучая развитие детей, можно получить некоторое представление о том, как люди овладевали счетом.

Сопоставляя сведения, полученные из этих четырех источников, мы можем приблизительно восстановить картину того, как считали наши далекие предки, как они рассматри-

---

[1] Здесь и далее цифра в квадратных скобках обозначает порядковый номер источника в указателе литературы, помещенном в конце книги.

вали величины при помощи чисел. Последнее же облегчает истолкование сведений об их жизни и деятельности, полученные из других источников.

Этот вопрос чрезвычайно важен. Даже та неполная картина, которую удается воссоздать, имеет большое значение, в частности, для разоблачения существующих идеалистических теорий, согласно которым понятие числа и даже всего натурального ряда чисел является у человека врожденным.

В начале XVIII века реакционный английский философ-идеалист епископ Джордж Беркли (1684—1753) пытался доказать, что числа — только знаки, данные богом людям, чтобы они лучше распоряжались вещами. Это ему потребовалось для изгнания материализма из математики, которую он пытался превратить в оплот поповщины и реакции. Во второй половине XVIII века немецкий философ Иммануил Кант (1724—1804) поддержал епископа Беркли. Ради подтверждения своей философской системы он отрицал материалистическое толкование понятия числа, утверждал, что в человеческом сознании оно существует до всякого опыта. Такая идеалистическая трактовка понятия числа встретила поддержку среди части математиков, в частности великого немецкого математика Гаусса (1777—1855), рассматривавшего понятие числа только как продукт человеческого духа.

Известно изречение немецкого математика Л. Кронекера (1823—1891): «Целые числа создал господь, все остальное — дело рук человеческих».

Изучение начальных этапов развития понятия натурального числа и простейших арифметических операций полностью опровергает идеалистическую теорию о их чисто духовном происхождении.

Казалось бы, что проще счета? Говорить подряд раз, два, три, четыре, пять и так далее может у нас всякий. Счет вошел в наш быт прочно, мы с ним так сжились, что не можем себе представить взрослого человека, не умеющего считать. И все же было время, когда люди считать не умели. Наши отдаленные предки, населявшие землю сотни и тысячи веков тому назад, не знавшие огня, не знали и счета.

Число и множество. Начальная стадия развития счета

Постепенно, наблюдая окружающую природу, восход и заход солнца, смену дня и ночи, число врагов, размер добычи, первобытный человек накапливал у себя определенные представления. Сначала это были, наверное, частные представления./ Путешественники указывают, что и сейчас есть народы, в языке которых отсутствуют общие представления, например, у них нет таких нарицательных имен, как «дерево», «рыба», «птица», «зверь», но только видовые названия, соответствующие отдельным породам. Например: «дуб», «камыш», «щука», «утка», «лев», «тигр».

Представления общего характера выработались только тогда, когда человек начал подмечать общие признаки, свойственные группе одинаковых предметов. Тогда и возникли представления «один» и «много». Только с течением времени после внимательного наблюдения присоединилось представление «мало».

Так как понятия «равно», «больше», «меньше» не требуют предварительного наличия у человека понятия числа и дают ему возможность устанавливать количественные соотношения между группами объектов, то они должны были возникнуть на той стадии развития человека, когда у него еще не было понятия о числе. Таким образом, в математике вначале было не число, а множество. И после того, когда у человека уже сложилось понятие о натуральном числе, он вновь возвращается к материальной первооснове — конкретному множеству, из которого возникло абстрактное понятие числа.

Мы сейчас с трудом можем представить себе народ, у которого нет особых названий для чисел больше трех, народ, для которого все прочие числа выражаются словами: «много», «куча», «горсть», «охапка», а между тем многие свидетельства путешественников и этнологов указывают, что такие народы существуют или существовали в недалеком прошлом. Так, известно, что лесные ведды [1] никогда не говорили «три дерева» или «два быка», а говорили только «деревья», «быки», то есть этому народу было доступно лишь самое примитивное представление о множественности.

---

[1] *Ведды* — народность, живущая во внутренней части острова Цейлон.

О том, что для всего человечества было время, когда понятие о числе не представлялось достаточно отчетливо, свидетельствуют также предания народов, указывающие на тех благодателей, которые научили их числу. У греков, например, такими изобретателями числа называют то Паламеда, то Прометея.

Устами бессмертного титана Прометея, открывшего людям начала всех ремесел и наук и осужденного за это Зевсом[1] на вечные муки, великий древнегреческий драматург Эсхил (525—456 до н. э.) в трагедии «Прикованный Прометей» говорит:

> «Послушайте, что смертным сделал я. .
> Число им изобрел
> И буквы научил соединять..»

В старинных сказаниях упоминаются великие пророки, которым боги открыли или которые сами отняли у богов огонь и число. Таких пророков, разумеется, никогда не было. Людей научили считать не боги, они научились этому сами, постепенно, в течение сотен веков, передавая свой опыт и свои знания из поколения в поколение, развивая и совершенствуя искусство счета.

«Понятие числа и фигуры,—говорит Ф. Энгельс, — взято не откуда-нибудь, а только из действительного мира. Десять пальцев, на которых люди учились считать (производить первую арифметическую операцию), представ-

---

[1] *Зевс* — в греческой мифологии верховный бог, почитавшийся как отец и царь богов и людей, бог неба, грома, молнии, дождя.

ляют собой все, что угодно, только не продукт свободного творчества разума»[1].

Конечно, человек ценил числа прежде всего за их практическую пользу.

Понятию о числе отвлеченном всегда предшествовало и сначала с ним тесно сливалось понятие о числе каких-нибудь отдельных предметов, большею частью органов человека и животных. Например, глаза, уши, руки и ноги отдельного человека, ноги и крылья птицы служили как бы наглядным пособием для выработки представления о числе «два». Всякий отдельный предмет вызывал представление о числе «один»: Луна, Солнце, сам первобытный счетчик Я.

Поэтому вместо «один» говорили: «луна», «солнце», «я». Вместо «два» говорили: «глаза» (это как бы значило «столько, сколько у меня глаз»), «уши», «крылья» и тому подобное.

Существование во многих языках (в том числе и в старославянском) единственного, двойственного и множественного чисел указывает, по-видимому, на ту степень развития человечества, при которой явно различались понятия об одном и о двух предметах, но, начиная с трех, такое различие прекращалось и появлялось только одно понятие о множестве, из которого еще не дифференцировались другие числительные (см. [10], стр. 5—6).

Развиваясь умственно, человечество, по всей вероятности, долго переживало стадию счета: один, два, много. Так, в понятии наших

---

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. М., 1967, стр. 33.

далеких предков «много» было звезд на небе, «много» коней в табуне и пальцев на руке. Недаром древние египтяне для выражения множественного числа какого-либо предмета или понятия, под соответствующим иероглифом ставили три черточки. И сейчас еще на нашей планете есть народы, для которых три означает «много». Таковы, например, индейцы-ботокуды Бразилии или жители острова Менгон в Океании. Бушмены[1] различают один, два и много.

Известны народы, в языке которых имеются только два числительных: один и два. У многих племен Австралии и Полинезии в самое недавнее время этим дело и ограничивалось. При помощи сочетания названных числительных эти племена образуют числа 3= =два—один, 4=два—два, 5=два—два—один, 6=два—два—два. Так, например, у западных племен Торресова пролива единственными числительными являются 1—урапун и 2—окоза. Далее они считают: 3=окоза—урапун, 4= =окоза—окоза, 5=окоза—окоза—урапун, 6= =окоза—окоза—окоза. Племя мариинд-аним, живущее на юге Западного Ириана, знает лишь числительные сакод—один и ина — два. У них 3=ина—сакод, 4=ина—ина. У племен, обитающих в бухте Купера, 1—гуна и 2—бар-

---

[1] *Бушмены,* то есть «люди кустов, зарослей» (по-голландски) — группа племен, живущих в Южной Африке. Основное их занятие—охота и собирательство. Их численность неуклонно уменьшается, так как они буквально уничтожались голландскими, английскими и германскими колонизаторами. Поэтому основная часть их вынуждена жить в бесплодной пустыне Калахари.

кула; 3=баркула—гуна, 4=баркула—баркула Аналогично обстоит дело у племени реки Муррей: 1 — эноа, 2—петчевал, 3=петчевал — эноа, 4=петчевал — петчевал.

Этот способ счета (а, как свидетельствуют факты, через него прошли и другие народы) положил начало древнейшей из всех систем счисления — двоичной. Следы ее мы неоднократно находим в египетском способе умножения и деления, в системе египетских дробей, в том, что во многих языках, например в старославянском, наряду с единственным и множественным числами есть и двойственное число. Мы и теперь многие имена существительные, когда их два, три или четыре, склоняем не по правилам склонения множественного числа. *Один шаг, два шага,* но *много шагов.* Что это за форма — «шага»? Это не единственное и не множественное, а именно двойственное число. И когда постепенно стало выделяться еще множество, состоящее из трех предметов (элементов), то новое число воспринималось как что-то выходящее из пределов обычного, привычного. Отсюда, наверное, и берет начало суеверие, выражающееся в боязни числа «три» (три свечи, три гостя и так далее). Но постепенно осваивалось и новое число «три».

Есть данные, указывающие на то, что человечество достаточно долго стояло на той ступени развития числовых представлений, когда число «три» являлось крайним пределом чисел, имевших название, служило символом множества, громадности. Так, например, в некоторых языках существовало и тройственное число как пережиток троичной системы. Не лишено значения указание лингвистики на то, что по грамматическому строю первые три числительных во многих языках резко отличаются от всех прочих. Они не означают каких-либо иных предметов, кроме чисел, чего не наблюдается у последующих числительных. Отсюда можно сделать вывод, что первые три числительных вырабатывались в весьма далекие доисторические времена и, по-видимому, создавались еще до эпохи расселения людей. Заметим, что для *одного* есть даже свое множественное число — *одни*. Никакое другое числительное не обладает такими свойствами.

С числом «три» связано несколько названий сказок и мифов: «Три истины» (сказка народов суахили, Восточная Африка), «Три сокровища» (японская), «Три брата» (осетинская, немецкая, чукотская), «Три источника» (турецкая), «Три яйца принцессы Нага» (бирманская) и другие.

Известно, например, что древние пили три раза в честь трех граций и при этом трижды отплевывались для отвращения колдовства. Многие пословицы и поговорки пересыпаны этим же числом: «за тридевять земель», «бог троицу любит», «в трех соснах», «в три ручья», «в три кнута», «в три шеи», «с три короба» и так далее.

Но не следует думать, что племена, у которых существовали числительные только в пределах первых трех чисел, не умели сосчитать большие совокупности. Человек научился в известном смысле считать задолго до того, как появились названия чисел. Один из наблюдателей пишет об абипонах[1], у которых существовали лишь первые три числительных[2], что, отправляясь на охоту, они, сидя уже в седле, осматривались вокруг и, если не хватало хотя бы одной из многочисленных собак, которых брали с собой, то они принимались звать ее. Наблюдателя особенно удивило, каким образом, не умея считать, абипоны способны были сейчас же определить, что в своре не хватает одной собаки (см. [29], стр. 12).

По свидетельству Гальтона[3], даммары[4] на практике не употребляют числительных свыше трех. Когда им хочется выразить четыре, они принимаются за пальцы, которые представляют для них столь же трудный инструмент счисления, как нониус для английского школьника. Они крайне затрудняются, перешедши за пять, так как не остается свободной руки, чтобы отбирать пальцы, и, так сказать, обеспечивать за ними роль требуемых единиц. Тем не менее, они редко теряют быков. Способ, которым они открывают пропажу какого-либо из них, заключается не в

---

[1] *Абипоны* — группа индейских племен Южной Америки, вымершая в XIX веке в результате притеснений испанских колонизаторов.

[2] 1 — инитра, 2 — иньока; число 3 они выражали как иньока—инитра, число 4 — как пальцы страуса, 5 — пальцы руки, 10 — пальцы обеих рук, 20 — пальцы рук и ног.

[3] Гальтон Френсис (1822—1911) — английский антрополог, основатель буржуазной науки — евгеники. Работал также в области географии, метеорологии и психологии.

[4] *Даммары* — жители Юго-Западной Африки.

уменьшении числа голов в стаде, а в зрительном восприятии отсутствия некоторой знакомой фигуры.

Как ребенок, не научившийся считать, не ответит числом на вопрос, сколько у него кукол, но подробно опишет все свои куклы, так и эскимосы, по словам путешественника Парри[1], не могут правильно сосчитать своих детей, если их больше трех. Однако они сразу замечали отсутствие кого-нибудь из них так же, как могли перечислить их, отмечая отличительные особенности каждого. А что же с животными, которых у него гораздо больше? Не общее число своих собак держит в памяти эскимос, а отдельные представления о белой собаке с черными крапинками, о собаке, родившейся в голодную зиму и тому подобное (см. [10], стр. 4—5).

Дело в том, что на этой стадии численность воспринимается не сама по себе, а как одно из свойств совокупности предметов, характеризующих эту совокупность, наряду с другими свойствами: цветом, формой, размером.

Естественно, что перед человеком в его практике возникла задача количественного сравнения совокупностей предметов. Нам теперь кажется, что для такого сравнения надо считать предметы в одной и другой совокупности и сравнить полученные числа. Напрашивается вопрос: обязательно ли должно возникнуть сначала понятие числа, чтобы появилась возможность устанавливать количе-

---

[1] Парри, Уильям Эдуард (1790—1855) — английский исследователь Арктики.

ственные соотношения между совокупностями предметов? На этот вопрос приходится ответить отрицательно. В недалеком прошлом человек из лесов Центральной Африки умел считать в крайне ограниченных пределах, но несмотря на это он обменивал большое количество слоновых клыков на пачки табака, не боясь быть обманутым заморскими купцами. Он просто сопоставлял количество клыков и количество пачек табака, укладывая каждый клык с пачкой и, таким образом, убеждался в равночисленности обмениваемых предметов. Когда у даммаров совершается торг, то за каждую овцу нужно платить особо. Так, например, если меновая цена овцы — две пачки табака, то любой даммара придет в большое затруднение, если взять у него две овцы и дать ему четыре пачки табака...

Эти и другие примеры показывают, что во время обмена, при сравнении обмениваемых предметов (элементов), первоначально не считали их количества, а чувственно-наглядно устанавливали взаимно-однозначное соответствие предметов (например, овец и пар пачек табака). Эта операция играла очень большую роль в арифметике. Разумеется, само понятие взаимно-однозначного соответствия при этом не осознавалось. Потребовалось длительное развитие математики и всей абстрагирующей способности человека, чтобы понятие взаимно-однозначного соответствия элементов конечных равномощных множеств, — исторически одно из первых,—в наше время было положено в логическую основу определения количественного натурального числа.

Таким же образом, как и число «три», постепенно выделялось число «четыре», которое первое время служило и для обозначения множества вообще. Так, в египетских иероглифах множество предметов изображалось тремя и четырьмя чертами; у китайцев выражение «четыре моря» обозначает «все моря»; у украинцев «на все четыре ветра» — «во все стороны».

Любопытно, что у маленьких детей часто наблюдается следующее явление: полуторагодовалый ребенок отличает один от двух и два от множества. В три года он различает 1, 2 и 4, но не знает 3. Это странное на первый взгляд явление объясняется очень просто. Группа 2 и 4 встречается на каждом шагу (2— глаза, уши, крылья и ноги птицы, 4— ноги животного), а группа три встречается очень редко и только в искусственном сочетании; отсюда отсутствие представления три.

Примерно то же происходило и с выделением чисел «пять» и «шесть».

И сейчас еще есть народы, умеющие считать по существу только до шести. Индейское племя бакаирис живет в джунглях Бразилии в глубинах лесов Амазонки. Люди этого племени оперируют двумя цифрами: токале — один, ахаге — два. Чтобы получить три, они складывают ахаге и токале. Пять выглядит так: ахаге — ахаге — токале. Число «шесть» произносится как ахаге—ахаге—ахаге. На этом счет кончается. Все, что свыше шести, будет — «много» [1]. На таком же уровне раз-

---

[1] «Наука и религия», 1965, № 11.

вития они находились и в 80-х годах XIX века. Известный путешественник и этнограф К. Штейнен исследовал в этот период племя бакаирис (или бакаири). Он неоднократно заставлял их сосчитать 10 зерен. При этом «они медленно, но правильно досчитывали до шести. При отсчете седьмого и восьмого бакаири становились напряженными, менее веселыми, начинали зевать и жаловаться на головную боль, а затем увиливали от ответов или убегали совсем».

О числах выше шести островитяне Торресова пролива говорят «много-много», «множество». Француз дает самую сильную клятву словами «крепко, как семь», у греков — семь чудес света[1], семь мудрецов, в средние века — семь свободных искусств[2]. У реки Нила семь рукавов (на самом деле их гораздо больше).

Счастливый чувствует себя на седьмом небе (считает себя бесконечно счастливым), боги жили на седьмом небе, в волшебных сказках самых разных народов встречаются семимильные сапоги и змеи (драконы) о семи головах. С числом «семь» связаны также на-

---

[1] К ним относились: пирамиды в Египте; висячие сады Семирамиды в Вавилоне; храм Артемиды в Эфесе; статуя Зевса в Олимпии работы Фидия; Галикарнасский мавзолей; колоссальная статуя бога солнца Гелиоса на острове Родос («Колосс Родосский»); Александрийский маяк.

[2] Это учебные предметы (науки) в средневековой средней школе, которые включали два цикла: тривиум (лат.—трехпутие)—грамматику, риторику, диалектику и квадривиум (лат.—четырехпутие) — арифметику, геометрию, астрономию и музыку.

звания сказок: «Семь звездочек» (сказка народа маори, Новая Зеландия), «Семь соперников» (эфиопская), «Семь волчков» (тораджийская[1], остров Сулавеси), «Семь козьих голов» (албанская), «Как семеро братьев искали своего отца» (сказка народа бауле, Берег Слоновой Кости) и другие.

Следы того, что число «семь» служило одновременно для обозначения неопределенной множественности и у наших предков, сохранились в русском языке в виде пословиц и поговорок, например: «Семеро одного не ждут», «Семь раз отмерь, один раз отрежь», «У семи нянек дитя без глаза», «За семь верст киселя хлебать», «Один с сошкой, семеро с ложкой», «Семь шкур дерут». Про непонятное говорим, что это книга «За семью печатями». Знахарки в русских сказках дают больной «7 пакетиков с лечебной травой, которую надо настоять на 7 водах и в течение 7 дней принимать ежедневно по 7 ложек». Во всех этих пословицах слово «семь» употребляется не в смысле шесть+один, а в смысле много. И нет ничего удивительного, что, согласно легендам, все большие города древности, в том числе столица древнего мира — Рим и столица древней Руси — Киев построены на семи холмах.

Таким образом, на этой стадии натуральный ряд является конечным и состоит из нескольких, подчас даже из двух членов.

Очевидно, такой «счет» был достаточен на той стадии развития человечества, когда, гру-

---

[1] *Тораджи* — индонезийская народность.

бо говоря, нечего было считать, когда еще хозяйство племени стояло на очень низком уровне, а межплеменные связи не были налажены.

Когда, применяя лук со стрелами и другие орудия, охотники стали добывать больше дичи, нежели им надо, чтобы прокормить племя, когда стали налаживаться межплеменные связи, в основе которых был обмен материальными ценностями, тогда, безусловно, числовая ориентация людей становится более развитой.

Таким образом, с развитием общества возникает необходимость считать и запоминать уже сравнительно большие количества, поэтому прежний способ счета при помощи повторения низших числительных становится непригодным. Высшим числам дают особые названия, возникают высшие числительные. Этот процесс образования новых числительных продолжался до определенной границы и затем останавливался; крайним числом уже было не 2, 3, 4, 5, 6 или 7, а 8, 9, 10 и так далее. Количества, лежащие за границей крайнего числа, воспринимались как неопределенное «много»; в случае надобности счет таких количеств велся при помощи повторения новых и новых низших числительных. У некоторых народов этот процесс происходил два, а то и три раза.

Так медленно и постепенно увеличивается натуральный ряд чисел. Конечно, по мере дальнейшего продвижения вперед в натуральном ряду расширение числового запаса шло все более быстрыми темпами. Это расширение было теснейшим образом связано с ростом материальной культуры человеческого общества (рост и умножение хозяйственной деятельности, развитие торговли).

Как уже отмечалось, первобытный человек индивидуализировал предметы, давал название, например, каждой голове скота, то есть вводились как бы особые счетные слова, которые сохранились в различных языках, в том числе и в русском: «шесть душ детей», «пять штук яблок», «четыре куска сахара» и тому подобное.

Первоначальный конкретный характер числовой множественности подтверждают и данные детской психологии. Поэтому споры о том, воспринималось ли число сначала как порядковое (например, «четвертый») или как количественное (например, «четыре»), схоластичны. Известно, что первые элементы мышления можно с одинаковым правом считать как суждениями, так и понятиями. Первоначальные элементы языка были одинаково и существительными, и прилагательными, и глаголами. Подобно этому первичные числовые представления были столь же порядковые, как и количественные (см. [29], стр. 15—17).

Итак, на первой стадии своего развития число представляет собой отдельные числа-свойства конкретных совокупностей предметов с едва намечающимися порядковыми соотношениями.

В настоящее время уже не известны народы, счет которых остановился бы на этой первой стадии, соответствующей в основном первой и второй ступеням дикости. Счет числами-свойствами сохранился у некоторых племен только в качестве пережитка.

Пальцевый счет

Если название числительного «два», как мы уже отмечали, связано у разных народов с различными органами человека и животных, то выработка дальнейших названий для чисел находится, как признают филологи, в связи со счетом по пальцам. По мере того как счет становился потребностью, должны были также появиться и первые инструменты, которые облегчали бы его. Без сомнения, такими первыми инструментами, как бы наглядными пособиями, были пальцы — сначала одной, потом двух рук и далее также пальцы ног. так как эти наглядные пособия ближе всего к самому человеку. Имена числительные во многих языках указывают, что у первобытного человека пальцы являются преимущественным орудием счета, то есть постоянным неизменным рядом значков, с которыми при пересчитывании сравнивается всякий другой новый ряд пересчитываемых предметов. Кисть руки—пясть (кулак по-древнеславянски) — является синонимом и фактической основой числительного «пять» у многих народов. Так, например, малайское «лима» означает одновременно и «рука», и «пять».

Обычно при счете на пальцах каждый палец составляет единицу, причем счет начинается с мизинца левой руки при помощи пальцев правой руки, затем переходит на правую руку, где он начинается с большого пальца; после рук некоторые народы переходили к счету пальцев на ногах.

Для обозначения числа «пять» индейцы (племена самука и муиска) говорят «рука кончена»; вместо того, чтобы сказать «шесть», говорят «один с другой руки». «Два на другой руке» у индейцев обозначает «семь» и так далее. Когда индеец, считая, переберет все пальцы на руках, то есть сосчитает 10, то он говорит «обе руки кончены» или «нога» (очевидно, словом «нога» индеец хочет показать, что он переходит к счету при помощи пальцев ноги).

У зулусов[1] шесть равнозначаще большому пальцу руки. Так, если зулусу надо выразить число 6, он говорит «татизитупа», что означает «взять большой палец руки»; вместо числа 7 он поднимает указательный палец правой руки. У эскимосов берегов Гудзонова залива названия числительных для 8, 9 и 10 совпадает с названием среднего, четвертого (безымянного) и малого (мизинца) пальцев; то же самое замечаем у гуарани Южной Америки и у малайцев. Таманаки с Ориноко (Южная Америка) вместо «один» говорят «палец» и обязательно при этом протягивают палец; вместо «два»—«два пальца» и так далее до пяти. «Пять» у них зовется «рука», «шесть»—«палец на другой руке», «десять»—«две руки», «одиннадцать»—«палец на ноге»,

[1] *Зулусы* — народность Африки численностью более 2 миллионов человек, проживающая теперь главным образом в провинции Наталь Южно-Африканской Республики.

«пятнадцать» — «нога и две руки», «шестнадцать»—«палец на другой ноге»; «двадцать»— «человек»; «двадцать один» равнозначаще с фразой — «один с руки другого человека», сотни заменяются у них пятью «человеками», а выше сотни им едва ли приходится считать. У некоторых народов Южной Америки счет чисел и теперь производится с помощью двух, трех человек, при этом пальцы одного соответствуют единицам, пальцы другого — десяткам, пальцы третьего — сотням.

По сообщению знаменитого русского ученого-путешественника Н. И. Миклухо-Маклая (1846—1888) туземцы Новой Гвинеи считают следующим образом: «Излюбленный способ счета состоит в том, что папуас загибает один за другим пальцы руки, причем издает определенный звук, например, «бе ,бе, бе ...». Досчитав до пяти, он говорит «ибон-бе» (рука). Затем он загибает пальцы другой руки, снова повторяет «бе, бе...», пока не доходит до «ибон-али» (две руки). Затем он идет дальше, приговаривая «бе, бе...», пока не доходит до «самба-бе» и «самба-али» (одна нога, две ноги). Если нужно считать дальше, папуас пользуется пальцами рук и ног кого-нибудь другого» (см. [43], стр. 280).

Таким образом, пальцы для человека, который едва умеет считать, являются неоценимым арифметическим пособием. Это можно проследить во всех странах земного шара и у всех людей. Особенно их любят отсталые в культурном отношении народы и малые дети.

Счет предметов с помощью пальцев рук и ног — это не что иное как сопоставление пар «предмет — палец», то есть установление равночисленности множества некоторых предметов с множеством соответствующего количества пальцев.

Итак, на двурукой и двуногой человеческой машине, которую можно назвать босоногой машиной, человек мог отсчитывать довольно большие числа и, кроме того, производить некоторые арифметические действия.

С пальцевым счетом (называемым также инструментальным или ручным счетом) было связано и деление на «персты» и «суставы». Пальцевый счет способствовал расширению натурального ряда чисел. Он сыграл в развитии счета столь же важную роль, как открытие огня в общем развитии первобытного человека. Потребовалось десятки тысяч лет для того, чтобы человек от первичных количественных понятий поднялся к счету на пальцах (см. [29], стр. 17).

Оказывается, до сих пор жизнь некоторых народов совместима с почти первобытной примитивностью математических сведений. В статье О. Игнатьева, помещенной в газете «Комсомольская правда» от 6 января 1963 года «В гостях у индейцев Иоллапити», сообщаются интересные сведения о счете индейцев Центральной Бразилии. По свидетельству автора, у них «до сих пор нет слов, обозначающих цифры больше двух, но пять называется словом «рука» — уирику. Для счета дней они применяют также понятие «луна» — семь дней.

Когда же количество предметов было больше количества пальцев рук и ног, то некоторые народы стали прибегать к другим частям своего тела (запястье, локоть, плечо, сустав). Это явление и сейчас можно наблюдать у некоторых отсталых народов. Так, например, короадосы Бразилии считают тройками, по числу суставов на каждом пальце левой руки (без большого пальца), то есть до 12, затем каждый палец правой руки (включая большой) означает 12, благодаря чему счет продолжается до 60 (см. [29], стр. 20).

У островитян Торресова пролива на человеческом теле изображаются числа до 33. Если пересчитываемая совокупность имеет более 33 членов, то они прибегают к пучку палочек. Именно то обстоятельство, что при исчерпывании всех частей тела, каждая из которых индивидуализирована, люди прибегают к пучку палочек (причем все палочки пучка примерно одинаковы), дает нам ключ к пониманию первоначального назначения такой живой школы. Ясно, что сначала она нужна не для индивидуализации чисел, а лишь для установления равночисленности двух совокупностей, или, иначе говоря, для установления взаимно однозначного соответствия между предметами обоих этих совокупностей.

Пережитки такого способа счета сохранились у многих племен, стоящих на более высокой стадии развития. Так, некоторые из них для этой цели пользовались веревками с узелками[1], другие — четками или бирками (деревянные палочки с зарубками), употреб-

[1] Узелок на платке «для памяти» унаследован нами, по-видимому, от этого времени.

лялись также камешки, зерна маиса и тому подобное (см. [3], стр. 19—20).

В России бирки употреблялись для учета сбора налога. Бирка разрезалась на две продольные части, одна из которых оставалась у крестьянина, другая — у сборщика налога. По зарубкам на обеих частях и велся счет уплаты налога, который проверяли складыванием частей бирки.

Можно сказать, что упоминаемые зарубки, узлы, множество палочек, камешков были первыми символами натуральных чисел. Как увидим, дальнейшее развитие общества идет рядом с беспрерывным усовершенствованием этих символов. Однако число на этой стадии не воспринималось как то общее, что имеют между собой все равночисленные совокупности. Тогда просто удовлетворялись констатированием равночисленности.

С дальнейшим развитием общества все больший круг совокупностей попадает в число сосчитываемых. Простое установление равночисленности и ручной счет уже не могут удовлетворять новых потребителей коллектива, хотя ручной способ счета в качестве пережитка сохранялся еще долгое время.

Еще в 1529 году в Базеле вышла написанная задолго до этого книга Беды Достопочтенного (672—735), в которой излагаются способы счета на пальцах, причем, счет этот распространялся на все числа вплоть до миллиона. Приемы пальцевого счета излагались в учебниках XVI века, например у английского математика Р. Рекорда (1510—1588). Ручной счет был необходим в торговых местах, где сталкивались люди разных национальностей. Сравнительно до недавнего времени счетом на пальцах пользовались китайские и монгольские купцы. В «Истории арифметики» польский математик Л. Карпинский (1878 — 1956) сообщает следующий любопытный факт: на крупнейшей мировой хлебной бирже в Чикаго предложения и запросы любого количества пшеницы, равно как и цены, объявляются маклером на пальцах без единого слова.

Фраза «по рукам», выражающая в разговоре согласие на предложение, является воспоминанием о некогда употреблявшемся ручном счете.

Числа-совокупности

Чтобы улучшить методы счета, рационализировать их, некоторые народы стали несколько раз повторять подсчет пальцев одной или двух рук, или двух рук и ног. Легче также считать зарубки, если их объединить в одинаковые группы, например по 5, по 10, по 20. То же самое относится к подсчету узлов, палочек, камешков. Все эти способы счета называют групповым счетом (методом группирования). Именно в этом направлении пошла основная линия развития, приведшая к созданию ряда натуральных чисел; она при дальнейшем развитии привела к созданию пятиричной, десятиричной, двадцатиричной и других систем счисления.

При счете числами-совокупностями по существу еще нет отвлеченных чисел. Так, например, жители Миралуги (остров в Торресовом проливе) говорят: 5 — набигет, 10 — набигет—набигет, 15 — набикоку, 20 — набикоку—набигет. «Гет» означает «рука», «коку» — «нога». При этом наблюдатель добавляет: «Не следует думать, что «набигет» является именем числительным 5, оно выражает только, что дело идет о стольких же предметах, сколько на руке пальцев» (см. [3], стр. 22). У туземцев Флориды «на-куа» обозначает 10 яиц, «на-банара» — 10 корзин с продовольствием, но отдельно слово «на», которое соответствовало бы числу 10, не употребляется. На одном из диалектов индейцев западной Канады слово «тха» означает три вещи: «тхане» — 3 яйца, «тхат» — 3 раза, «тхатоэн» — в трех местах. Но слова, которое бы означало отвлеченное число 3, там нет. Число было тесно связано с множеством конкретных предметов: две коровы, четыре овцы, пять стрел. Неименованных чисел еще не было. Постепенно устойчивые числа-совокупности начинают рассматриваться как новые единицы, которыми и ведется счет. Таким образом, мы видим, что умение считать не связано с наличием специальных наименований для числительных, а тем более специальных обозначений для цифр. Образование числительных — это уже довольно высокая стадия развития счета. Только со временем, когда способы счета становились более совершенными, должно было постепенно сформироваться понятие натурального числа. Стали появляться слова для обозначения численности определенной совокупности предметов. Возможно, что главную роль в этом процессе сыграли равночисленные множества предметов, то есть такие, элементы которых можно сопоставить парами. Например, 5 овец и 5 коней; каждой овце ставим в соответствие одного коня. Уже в этом взгляде на некоторую совокупность предметов как на новую единицу счета заключается возможность создания системы счисления. Дальнейшим усовершенствованием способов счета есть метод многократного группирования. Если, например, сначала группировали по 10 палочек, делая из них связку, которая являлась как бы единицей высшего разряда, то впоследствии стали группировать по 10 таких связок, приходя к большей единице счета. Некоторые племена и до сих пор еще применяют при счете метод группирования. Однако числа-совокупности явились прообразами так называемых *узловых чисел*[1].

Зародыши такого счета имелись и на более ранних ступенях развития. В качестве пережитка такого счета упомянем счет дюжинами, вплоть до наших дней, сохраняющийся в Европе для некоторых групп вещей (рубашки, стулья, посуда, карандаши, резинки и тому подобное). При этом дюжина образовывала единицу счета, дюжина дюжин составляла гросс, а дюжина гроссов—массу. Здесь имеем следы трехразового группирования по 12. 1 дюжина (12 штук), 1 гросс (12 дю-

---

[1] Числа, имеющие индивидуальные, не разложимые на составные числительные наименования (один, два, ...десять, сорок, тысяча и т. д.) называются *узловыми*. Числа, наименования которых получаются комбинированием наименований узловых чисел, называются *алгорифмическими*.

жин), 1 масса (12 гроссов). Другие примеры: фут (12 дюймов), 1 шиллинг (12 пенсов). Подобная двенадцатиричная система встречается и ныне у некоторых племен в Судане.

Мы можем найти объяснение тому, почему число 13 считалось и до сих пор считается суеверными людьми приносящим несчастье, если допустить, что число 12 являлось в известное время символом множества (синонимом полноты, замыкало известную группу чисел), то следующее за ним число являлось лишним, ненужным, бесполезным и даже вредным и потому нечестивым, несчастливым. Так, например, у христианской церкви — 12 апостолов, число 13 называют «чертова дюжина»; 12 созвездий Зодиака, в циферблате число 12 выражает как бы бесконечность времени... В Париже существовали конторы для доставки четырнадцатого, если собравшихся на обеде оказывалась «чертова дюжина». Однако в Тулузе существует общество, состоящее из 13 врачей, собирающихся на совещания 13 числа каждого месяца в гостинице, где отводится им комната под № 13. Это продолжается с 1854 года.

Суеверные американские женщины и сейчас никогда не позволят, чтобы за столом сидело 13 гостей. Если такое случается, то в Нью-Йорке, например, набирают определенный номер и вызывают в качестве гостя некоего Фреда Хореса, элегантного сорокалетнего мужчину, который за вознаграждение от 5 до 20 долларов помогает изменить роковое число. Цена зависит от того, как Фред должен одеваться и вести себя. Если необходимо явиться с орденами, цена увеличивается на 10 процентов. В некоторых американских высотных домах нет этажа № 13 и в гостиницах нет тринадцатого номера, так как население избегает их. В названных этажах и номерах обычно помещаются конторы.

Интересную особенность в отношении суеверий, связанных с числом 13, можно отметить у славян.

Ни в Византии, ни на Западе не встречаются храмы с тринадцатью куполами. А в древней Руси это допускалось. Первый Софийский собор в Новгороде, построенный в 939 году, был дубовый, с тринадцатью куполами. Такой же храм вскоре появился в Полоцке. Киевская София, уже каменная, также тринадцатиглавая. Таким образом, распространенное у многих народов и существующее до сих пор упомянутое суеверие отсутствовало у славян (см. [18], стр. 23).

Долгое время предельным числом у многих народов, в том числе у славян, было число «сорок».

В тюркских легендах [1] синонимом неопределенного множества является сорок или сорок сороков.

В русском счете число 40, а позже «сорок сороков» служило для обозначения неопределенного большого множества, было как бы предельным числом. На такую роль этого

[1] *Тюркские языки* — группа близко родственных языков, они распространены от Восточной Европы и Кавказа до Средней и Центральной Азии и Сибири.

числа указывает как его индивидуальное название, так и сохранившееся в качестве пережитка употребление его для обозначения большого количества предметов — сорок сороков церквей, сорок сороков черных соболей. На ту же роль числа 40 указывает ряд связанных с ним религиозных обычаев, народных поверий и пословиц: «Сорок недель хоть кого на чистую воду выведут» — говорится в старинной русской пословице. Сороковой медведь считается последним в жизни охотника: «Сорок медведей он взял на рогатину, на сорок первом сплошал» (Н. А. Некрасов). В более позднее время, когда число 40 перестало уже быть предельным, оно играло большую роль в русской метрологии в качестве основания системы мер: пуд содержал 40 фунтов, бочка-сороковка — 40 ведер и так далее. Число «сорок» стало своеобразной единицей счета, например, говорили: «Пять сороков соболей» (см. [4], стр. 12).

Сорок играло роль предельного числа и у многих народов Ближнего Востока. Это нашло отражение, например, в знаменитом армянском эпосе «Давид Сасунский»:

«Спустился в яму Мсра-Мелик
Вот сорок буйволовых шкур взвалили на него
Огромных сорок жерновов взвалили на него...»

Кончается этот эпос напоминанием всех его героев:

«Великих праотцов наших — сорок раз помянем добром,
Санасара и брата его Багдасара помянем добром,
Мгера старшего сорок раз помянем добром».

Известна арабская сказка «Али-баба и сорок разбойников» и другие.

Киргизский народный эпос воспевает героя Манаса с 40 товарищами, напоминая русские былины о сорока богатырях. Не так давно записан национальный каракалпакский эпос «Сорок девушек».

Подобное явление наблюдается и во Франции, где французская академия или «Академия сорока бессмертных» состоит из сорока лучших французских писателей. Когда кто-нибудь выбывает из состава академии, на его место избирается другой, чтобы число членов постоянно составляло сорок.

Повесть Б. А. Лавренева и сделанный по ней фильм «Сорок первый» напоминает то же народное поверье о числе «сорок».

Полная охота у русских вельмож состояла из сорока псарей, сорока егерей, сорока гусаров, из сорока борзых, сорока гончих собак — все из сорока.

Название насекомого «сороконожка» означает не то, что у него сорок ножек, а то, что у него их много — это «многоножка». У других народов это же насекомое называется «тысяченожка» (в зоологии — «мириадоножка», подобно тому, как всевидящая богиня египтян Исида называлась «Мириадоименная» или «Мириадоглазая»). Мириада — греческое название 1000 — здесь означает очень большое или бесконечно большое число (оно долгое время было у греков самым большим числом).

В свете описанных событий становится понятным, почему одно и то же насекомое —

многоножка — у одних народов называется сороконожкой, у других — стоножкой, а у третьих — тысяченожкой и почему скопление Плеяды немцы называли Семизвездием, а русские — Стожарами.

Огромный интерес вызывает число 60, которое часто фигурирует в вавилонских [1], персидских и греческих преданиях, являясь в них всегда синонимом большого числа: 60 — число вавилонских богов, 60 локтей — вышина золотого идола, установленного в храме Навуходоносора [2]. Позднее с тем же значением несчетного множества являются некоторые кратные 60: 300, 360. Ксеркс [3] дал Геллеспонту 300 ударов, Кир [4] раздробил реку Гиндес, в которой утонула одна из его любимых лошадей, на 360 ручьев. В одной персидской песне воспевается 360 полезных употреблений пальмы (см. [4], стр. 9).

Древнегреческий историк Геродот (V в.

---

[1] Несколько расплывчатым термином «вавилонская математика» обозначают математическую культуру, создавшуюся в течение многих веков на территории Двуречья и Месопотамии (расположенной по среднему и нижнему течению реки Евфрата и Тигра). В создании вавилонской культуры принимали участие многочисленные национальные группы (народы), сменявшие друг друга. Это название происходит от Вавилона — крупнейшего города древней Месопотамии, столицы Вавилонского царства в XIX—VI вв. до н. э. Само название «Вавилон» происходит от аккадских слов «Бабилу» — «врата бога».

[2] *Навуходоносор* — вавилонский царь (604—562/561 до н. э.).

[3] *Ксеркс* — древнеперсидский царь (486—465 до н. э.).

[4] *Кир* — древнеперсидский царь (558—529 до н. э.).

до н. э.) следующим образом описывает распоряжение древнеперсидского царя Дария[1], данное им ионийцам после переправы через реку Истр во время предпринятого им похода на скифов (VI в. до н. э.): «После этого царь завязал на ремне шестьдесят узлов, позвал на совещание всех ионийских тиранов и сказал им: «Прежде высказанное решение относительно моста, ионийцы, я отменяю; теперь возьмите этот ремень и поступите так: начиная как раз с того времени, когда я пойду на скифов, развязывайте на ремне каждый день по одному узлу; если бы за этот промежуток времени я не явился бы назад и миновало бы число дней, обозначенное узлами, плывите обратно на родину; а до той поры оберегайте мост, приложите всякое старание к защите его и сохранению в целости» (цитировано по [3], стр. 21).

Числа, встречающиеся в вавилонских преданиях, представляют культурно-исторический интерес в двояком отношении. Вавилон является родиной гаданий, основанных на числах, родиной различных числовых суеверий, которые имели обширное влияние на Китай, на идеи Пифагорейской школы, в которой «все есть число». Это мистическое значение, придававшееся числам, может служить также указанием на новость и трудность понятия даже о натуральном числе на известной ступени человеческого развития.

С другой стороны, число 60, встречающее-

[1] *Дарий I Гистасп* — древнеперсидский царь (522—486 до н. э).

ся в легендах вавилонского происхождения[1], впоследствии в Вавилоне же при развитии научных знаний явилось основанием шестидесятиричной системы счисления, следы которой сохранились у нас в делении времени и углов. Здесь мы также имеем метод многократного группирования: 1 час делится на 60 минут, 1 минута — на 60 секунд; полный круг делится на 360 градусов, каждый градус — на 60 минут, каждая минута — на 60 секунд.

Таким образом, в разное время и у разных народов предельными числами были 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 40, 60, 100, 1000, 10 000. Многие из них попали в категорию «мистических», но мы уже видели, что ничего таинственного и загадочного в них нет.

Абстрактные числа

С усложнением социально-экономических условий жизни человека все больше развивались и его способности к абстрактному мышлению. Вместе с тем постепенно терялся первоначальный конкретный характер числи-

[1] Бывшие жители Вавилона, шумеры, пользовались денежной единицей — мина (около $^1/_2$ килограмма серебра), а позже аккадийцы — шекель — денежной единицей, в 60 раз меньшей от мины. После того, как аккадийцы покорили шумеров — из слияния этих народов возникло единое вавилонское государство, в котором пользовались и миною и шекелем, сохраняя при этом соотношение: 1 мина = 60 шекелей. Позже была введена еще одна единица — 1 талант = 60 мин, так окончательно установилась такая шкала единиц: 1 талант = = 60 мин = 3600 шекелей. Эта шкала существенно повлияла на шестидесятиричную систему счисления вавилонян.

тельных. Слово, означавшее одновременно и конкретный предмет, и числительное, сохранило теперь лишь второе значение. В то же время существовавшая при первобытном хозяйстве крайняя разноголосица в наименованиях числительных понемногу сглаживалась.

Так образовывалось, хотя и весьма медленно, в пределах какого-либо племени или объединения племен некоторое упорядоченное единство числительных, связанных между собой, благодаря наличию в этой системе высшей единицы.

Прошло много тысячелетий, прежде чем человек усвоил, что два фазана, две руки, два человека можно назвать одним словом «два». В конце концов в результате очень долгого развития человек пришел к пониманию того, что каждое отдельное число — «два», «пять» и так далее — есть свойство совокупностей предметов, общее для всех совокупностей, предметы которых можно сопоставить по одному, и различное у таких совокупностей, для которых такое сопоставление невозможно.

Языки племен отставших в своем развитии, показывают, что при своем зарождении понятие числа, явившееся затем основой арифметики, имело конкретный характер.

Переход от конкретного числа к абстрактному представлял большие трудности для человека, труден и сейчас он вначале обучения, что хорошо известно учителю. Красочно представлена эта трудность писателем Т. З. Семушкиным. Он занимательно рассказывает о трудном положении учителя на уроках арифметики в чукотской школе.

«Урока арифметики ребята ждали с огромным интересом и занимались с удовольствием.

В начале занятий были большие осложнения с решением простых задач. Учителю трудно было толково и понятно объяснить условие задачи, а главное — все задачи были вымышлены, и дети считали их «лживыми».

Услышав условие задачи, школьники непременно спрашивали:

— Когда и где это было?

И когда выяснялось, что этого факта в действительности не было, они говорили:

— Эта задача, которую ты нам даешь, — лживая задача, и решать мы ее не будем.

Они потребовали, чтобы в основе задачи лежал факт, и обязательно правдоподобный.

— Охотник Уквылькот, — читает учитель условие задачи, — в первый день убил пять тюленей. На другой день он убил еще пять. Сколько всего за два дня убил Уквылькот тюленей?

— Это какой Уквылькот? Яндагайский, что ли? — немедленно раздаются голоса со всех сторон.

— Ну хотя бы Яндагайский.

Дети начинают смеяться. Потом выясняется, что Яндагайский Уквылькот очень ленивый охотник и что больше двух тюленей он никогда в жизни не убивал. И что это такие тюлени, которые сами лезли ему под ружье.

— Как же мы будем решать такую лживую задачу?

В первые дни совершенно невозможно было преодолеть конкретное мышление чукотских детей. Отвлеченное мышление раздражало их» [1].

Такую же трудность испытывает любой учитель при переходе от конкретного мышления к абстрактному.

Под влиянием обмена один из рядов чисел начал вытеснять все другие. Это был тот числовой ряд, который служил для счета денег (ими на первых порах являлись раковины или скот). Так, в конечном итоге, возникли универсальные числа, то есть такие, с помощью которых можно было считать любые предметы (см. [3], стр. 23—24).

С развитием счета возникают первые понятия об операциях в арифметике. Сам счет есть одна из простейших и важнейших операций в арифметике. Не вдаваясь в подробности, отметим, что алгорифмические числа являются результатом некоторых операций над узловыми числами. Основной операцией при этом является сложение, однако наряду с ним наличествуют вычитание и умножение. Так, например, в русском счете числительные 20, 30,... 80 образуются путем сложения, а 90 — при помощи вычитания. Не говорят «девятьдесят», а «девяносто», то есть «девять (девятый десяток) до ста».

Из сказанного можно сделать следующие выводы. Вначале сосчитывание является конкретным, механическим, визуальным с непременным откладыванием или перекладыванием

[1] Т. Семушкин. Чукотка, М., Советский писатель, 1954, стр. 125—127.

сосчитываемых предметов. Затем приходит более высокая ступень развития счета: при помощи пальцев рук и ног, а также других частей тела, палочек, ракушек, зарубок, при помощи веревок с узелками и тому подобное. Для этой ступени характерно дальнейшее развитие процесса абстрагирования, ибо здесь уже счет отвлечен от сосчитываемых предметов, и для ведения счетных операций используются другие предметы, которые играют подсобную роль.

Это опять-таки исключительно важный этап в развитии мышления, позволивший человеку осуществить моделирование мыслительного процесса, что явилось зародышем всей математической символики, а затем плодотворным методом всего естествознания[1].

Следы этого периода развития человеческого мышления можно найти также в истории языка. Например, отвлеченное слово «калькуляция» (счет, расчет) происходит от латинского слова «calulus» (камешек), ибо древние римляне пользовались камешками как реальной единицей счета.

Далее, как уже отмечалось, появляется так называемая групповая система счета или счета числами-совокупностями, которые впоследствии явились прообразами узловых чисел.

---

[1] С созданием быстродействующих электронных вычислительных машин, контролирующих и управляющих автоматов эта идея, в зародыше имевшаяся в счете на пальцах, составляет одну из основных идей кибернетической техники, знаменующей собой величайшую рационализацию умственного труда, подлинную техническую революцию.

На всем этом протяжении натуральный ряд является конечным: вначале он состоит подчас только из двух членов, затем постепенно удлиняется. При этом слова «много», «неисчислимо» либо становились названиями соответствующих чисел, бывших когда-то последними (например, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 12, 40, 60 и другие), либо отодвигались все дальше и дальше, обозначая числа равные и превышающие сто, тысячу или десять тысяч, в зависимости от успехов в развитии счета. В этом отношении весьма показателен пример полинезийцев. У жителей острова Менгон, у островитян Фиджи и у коренных обитателей Новой Зеландии — маори, которые говорят на родственных языках, но стоят на различных ступенях культуры, одно и то же слово означает «три», «десять» и «десять тысяч». Старославянское слово «тьма», когда-то означавшее «множество», со временем стало означать «тысячу», а потом и «десять тысяч».

Бесконечность натурального ряда чисел

Когда ребенок впервые знакомится с натуральными числами и начинает считать, он еще не понимает, что этих чисел бесконечно много. На начальной стадии развития математических понятий дети очень часто спрашивают, какое число является наибольшим? Мы видели, что примерно то же самое имело место при развитии счета наших далеких предков. Натуральный ряд чисел не мыслится бесконечным долгое время, хотя у различных народов были наименования для очень больших чисел.

В более позднюю эпоху, когда числовой

запас был достаточно велик, можно отметить отдельные страны и отдельных ученых, которые продвигали ряд уже далеко за пределы практических потребностей и подводили к понятию о бесконечности натурального ряда. Здесь, в первую очередь, следует указать на древнюю Индию. За три столетия до нашей эры индийцы уже свободно оперировали числами любой величины.

Историю появления больших чисел и понятия бесконечности часто связывают с религиозным культом. Особенно важную роль играют большие числа и первые представления о бесконечности в религиях Китая и Индии. У этих народов они символизируют могущество. Так, например, согласно древнеиндийским преданиям, Будда[1] еще в юном возрасте отличался искусством счета; он считал до тех чисел, которыми можно сосчитать, начиная от зерен на поле и до количества песчинок Ганга и всего песка миллиона рек таких, как Ганг... и, наконец, называл число, при помощи которого боги вычисляют свое прошедшее и будущее.

В одном индийском произведении количество атомов, содержащихся в некоторой определенной длине, равной длине лука, увеличенной в 3200 раз, выражалось числом 108 470 495 616 000.

Но только в работе Архимеда (III в. до н. э.) «Псаммит или исчисление песка в пространстве, равном шару неподвижных звезд»

---

[1] *Будда* (Буддистав) — основатель индусской религии.

дан прием построения и словесного обозначения сколь угодно больших чисел.

Желая сказать, что счет можно продолжить бесконечно далеко, Архимед поставил себе задачу — вычислить примерно число песчинок в шаре (равном по объему Вселенной), диаметр которого он принимает за 15 миллиардов километров. Далее он предполагает, что в крупинке, диаметр которой приблизительно равен 0,05 мм, заключается не более 10 тысяч песчинок. Производя соответствующие вычисления, Архимед находит, что во всей Вселенной может вместиться не более чем 10^{63} песчинок. Чтобы выразить такое число и показать возможность беспредельного расширения ряда натуральных чисел, Архимед поступает следующим образом: все числа от 1 до 10^8 (числа, для которых в языке существовало словесное выражение) он объединяет названием «первых чисел», само число 10^8 получает название единицы «вторых чисел» и дальше идет счет вторыми числами до $10^{2 \cdot 8}$, которое получает название единицы «третьих чисел» и так далее до $10^{10^8 \cdot 8}$. Для последнего числа уже нет места среди построенных чисел, оно открывает «второй период» и получает название единицы «первых чисел второго периода», аналогично число $10^{(10^8+1)8}$ получает название единицы «вторых чисел второго периода». Этот процесс Архимед доводит до единицы «мириадо-мириадного (10^8) периода», то есть до $10^{8 \cdot 10^8 \cdot 10^8} = 10^{8 \cdot 10^{2 \cdot 8}}$, и здесь останавливается, но указывает на возможность дальнейшего неограничения построения чисел этим способом. Вводя для обозначения каждого последующего класса чисел термин «октада», он указывает, что существует сколь угодно много октад (подробнее см.[I] или [13,I], стр. 188—191).

Другой великий древнегреческий математик Аполлоний Пергский (III-II в. до н. э.) взамен октад Архимеда вводит «тетрады», то есть взамен 10^8 берет за базу 10^4 и этим достигает, конечно, упрощения словесного и письменного выражения, но и этот прием не вошел в вычислительную практику.

Примерно в тот же период древнегреческий математике Евклид (III в. до н. э.) доказал существование бесконечного множества простых чисел, а его современник Эратосфен указал прием выделения простых чисел из ряда натуральных, который носит название — «решето Эратосфена». Следует отметить, что установление факта существования бесконечного числа натуральных чисел является, как правило, первым контактом с бесконечностью.

Таким образом, понятие числа лишь постепенно освобождалось от своей предметной, конкретной формы, выступая в мышлении человека вначале в виде словесного наименования натурального ряда чисел, а впоследствии в виде абстрактных математических знаков, превращаясь в то «чистейшее количественное определение», которое совершенно безразлично к природе характеризуемых ими предметов[1].

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1969, стр. 224.

Из вышеизложенного вытекает основной вывод о возникновении понятия натурального числа из материального опыта, разоблачающий всевозможные идеалистические теории «о врожденности понятия числа», о том, что «числа — только знаки, данные богом людям», о том, что «числа — продукт человеческого духа», которые потребовались идеализму для изгнания материализма из математики.

С развитием понятия натурального числа как результата счета предметов в обиход включаются действия над числами, а именно действия сложения, вычитания, умножения и деления возникают как действия над самими совокупностями. Лишь в многовековом опыте сложилось представление об отвлеченном характере этих действий, о независимости количественного результата действия от природы предметов, составляющих совокупности, о том, что, например, два предмета и три предмета составляют пять предметов независимо от их природы. Тогда стали разрабатываться правила действий, изучаться их свойства, создаваться методы для решения задач, начинается развитие науки о числах — арифметики. В первую очередь арифметика развивается как система знаний, имеющая непосредственно прикладную направленность. Затем начинается детализация натурального числа, выделяются классы четных и нечетных чисел, простых и составных.

Изучение свойств натуральных чисел продолжается до настоящего времени и составляет раздел математики, носящий название теории чисел.

Натуральные числа кроме основной функции — характеристики количества предметов, несут еще другую функцию — характеристику порядка предметов, расположенных в ряде. Возникающее в связи с этим понятие *порядкового числа* (первый, второй) тесно переплетаются с понятием *количественного числа* (один, два). В частности, расположение в ряд считаемых предметов и последующий их пересчет с применением порядковых чисел является наиболее употребляемым с незапамятных времен способом счета предметов (так, если последний из перечисляемых предметов окажется седьмым, то это означает, что имеется семь предметов).

Вопрос об обосновании натурального числа долгое время в науке не ставился. Понятие натурального числа столь привычно и просто, что не возникало потребности в его определении в терминах каких-либо более простых понятий. Лишь в середине XIX века под влиянием развития аксиоматического метода в математике, с одной стороны, и критического пересмотра основ математического анализа — с другой, назрела необходимость обоснования понятия количественного натурального числа. Отчетливое определение понятия натурального числа на основе понятия множества совокупности предметов было дано в 70-х годах XIX века в работах немецкого математика Г. Кантора (1845—1918).

Другое обоснование понятия натурального числа базируется на анализе отношения порядка следования, которое, как оказывается, может быть аксиоматизировано. Построенная на этом принципе система аксиом была сформулирована итальянским математиком Дж. Пеано (1858—1932).

КРАТКАЯ ИСТОРИЯ СИСТЕМ СЧИСЛЕНИЯ (НУМЕРАЦИЙ)

Язык символов

Введение символов для чисел имеет огромное значение. Каждому ясно, насколько легче написать символ, выражающий число «пять», чем слова «класс множеств, эквивалетных совокупности пальцев на руке». Мы настолько привыкли к нашим числовым символам (цифрам), что, говоря о числе «семь», представляем себе именно 7, а не множество из семи предметов. Большое число, например 3427, мы воспринимаем, прежде всего, как символ этого числа, а не пытаемся представить множество из 3427 предметов. Вообще достаточно большие числа не могут быть получены непосредственным абстрагированием окружающего мира: пожалуй, ни один человек не видел миллиарда и даже миллиона каких-либо предметов, однако в воображении мы можем счет вести как угодно далеко.

Не зная какого-либо иностранного языка, мы не сможем прочесть и понять смысл книги, написанной на нем, но если в этой же книге встречаются числа, мы их прочтем и поймем. Язык цифр является международным.

Но всегда ли так было? Во все ли времена и у всех ли народов?

Уже на сравнительно ранних ступенях развития первобытной культуры наряду со звуковой речью человек пользовался не только сопровождающими ее жестами, выражающими прежде всего его эмоции. Существовал и своеобразный язык символов. Знаками на песке или отметками на стволах и ветвях деревьев охотник, преследующий дичь, показывал своим сородичам направление и тому подобное. Привычка к такому языку символов довольно рано вызвала к жизни различные способы числовой записи. Без нее уже нельзя было обойтись.

С развитием хозяйства, возможностью и необходимостью делать записи, а также с развитием обмена приходилось не только считать, но и запоминать сосчитанные количества. Первоначально пальцы были единственными заменителями подсчитываемых предметов. Потом такими заменителями были зарубки на палке или кости, связка прутьев, куча камешков или раковин.

В 1937 году в Чехословакии, в раскопках, относящихся к древнекаменному веку, была найдена лучевая кость молодого волка длиной в 18 сантиметров, на которой высечено 55 глубоких зарубок — параллельных черточек. Первые 25 из них сгруппированы по 5, после чего ряд заканчивается зарубкой в два раза длиннее остальных. Затем опять-таки длинной зарубкой начинается второй ряд из 30 зарубок. Этот древнейший математический документ — числовая запись пещерного человека — является прообразом бирок, счетных палочек, до сих пор применяемых охотничьими племенами на крайнем севере Сибири и Америки.

На современном этапе развития общества человеку приходится иметь дело с числами на каждом шагу. Нужно уметь правильно назвать и записать любое число, как бы велико оно ни было. Если бы каждое число называлось особым именем и обозначалось в письме особым знаком, то запомнить все эти слова и знаки было бы невозможно. Для лучшего запоминания всех знаков на разных этапах развития человеческого общества у разных народов существовали свои специальные системы обозначения. Совокупность названий и знаков, позволяющая записать любое число и дать ему наименование, называется *системой счисления* или *нумерацией.*

Целью всякой нумерации является изображение любого натурального числа с помощью небольшой группы индивидуальных знаков (цифр). Этого можно было бы достичь при помощи одного единственного знака 1 — (единицы). Каждое натуральное число тогда записывалось бы путем повторения символа единицы столько раз, сколько в этом числе содержится единиц. Сложение свелось бы к простому приписыванию единиц, а вычитание — к их вычеркиванию. Лежащая в основании такой системы идея весьма проста, однако крайне неудобна. Для записи больших чисел она практически неприменима, и ею пользовались только народы, счет которых не превышал одного-двух десятков.

Известно, что дети с особой охотой рисуют дома, людей, животных, то есть все, что прямо перед глазами, и лишь впоследствии берутся за условные рисунки—планы, чертежи и тому подобное. Точно так и народы древности, в письме которых букв еще не было, каждую вещь или действие изображали картинкой (*пиктографическое* письмо). Постепенно эти картинки упрощались, появились особые фигуры, обозначающие различные свойства веществ. Так возникли знаки письменности, называемые *иероглифами*. При такой записи каждому значку (фигуре) соответствует целое слово.

В Китае и Японии, например, и теперь, наряду с современной записью числа, употребляются иероглифы.

Непозиционные системы счисления

Одной из самых древних систем нумерации была египетская иероглифическая нумерация, которая зародилась более 5000 лет тому назад[1]. В этой нумерации существовали особые знаки для чисел: единица — образ мерной палки, десять — иероглиф, обозначающий путы для стреножения коров или «вал», сто — мерительная веревка, служившая для обмера полей и делившаяся на сто локтей, тысяча — цветок лотоса, десять тысяч — указательный палец, сто тысяч — головастик, миллион — удивленный человек, десять милли-

---

[1] Древнейшие числовые записи (по этой системе), дошедшие до нас, относятся к 3300 г. до н. э.

онов — солнце. Повторяя эти знаки, ставя их один возле другого, египтяне выражали все остальные числа, при этом одинаковые знаки объединялись в группы, содержащие не более четырех знаков.

Эта система десятичная, непозиционная, без знака «нуль». Здесь каждый числовой знак обозначает лишь одно число. Так, например, знак для десяти означает десять единиц, где бы он ни стоял. В этой системе встречается только принцип сложения.

Позже, с развитием египетской культуры, иероглифическое письмо сменилось *иератическим* (письмо жрецов), которое представляло собой скорописное сокращение иероглифов, а затем *демотическим* (алфавит).

Все дошедшие до нас египетские математические документы написаны иератическим письмом. Иератическая система счисления существовала наряду с иероглифической в древнем Египте примерно за 2000 лет до н. э. Она по типу приближается к алфавитной.

Из всех старинных нумераций римская является, пожалуй, единственной, сохранившейся до сих пор и довольно широко применяемой. Римские цифры и сейчас употребляются для обозначения столетий, нумерации глав в книгах и так далее.

Римская письменная нумерация, предшествовавшая появлению нашей позиционной системы счисления, родственна по своей структуре устной нумерации современных европейских народов. Вероятно, от римлян пошло обыкновение писать сумму денег в разных векселях, расписках, документах не только цифрами, но и словами, так как все эти черточки при цифрах можно легко стереть, пополнить и продолжить. Узловыми числами в римской нумерации являются: I — (один), V — (пять), X — (десять), L — (пятьдесят), C — (сто), Д — (пятьсот), M — (тысяча); нуля там нет. Система является десятичной, непозиционной, с сильными следами пятиричной. По мнению исследователей, цифры I, V, X — «палец», «рука», «две руки» (две пятерки, сложенные основаниями). Все алгоритмические числа получаются в результате сложения и вычитания узловых. Если меньшая цифра стоит справа от большей, то она прибавляется к ней (причем, может повторяться не более трех раз), если слева, то вычитается (здесь повторение меньшей цифры не допускается). Например, 1943-MCMXLIII. В римской системе нет символа для изображения нуля, но можно свободно записать число, содержащее нуль, например, 1809=MДCCCIX.

Крупнейшим недостатком римской нумерации является то, что она совершенно неприспособлена для производства арифметических действий в письменном виде.

Много общего с римской системой счисления имеет так называемая аттическая система (название происходит от области Греции Аттики со столицей Афины); эта система еще называется геродиановыми знаками (по имени грамматика Геродиана (II—III вв.), по трудам которого главным образом известны эти знаки. Древнейшая запись по этой системе относится к VI в. до н. э. Основными числами в этой нумерации являются: I — один, 5 — пенте, 10 — дека, 100 — гекатон, 1000 — хилиас, 10 000 — мириада. Числа 50, 500, 5000 изображались соответственно комбинациями этих знаков, а остальные — их повторением.

Все эти названия продолжают жить в современных терминах: пентаграмма, пентагон [1], декаметр, гектометр, километр, мириада.

В отличие от римской, здесь изображения для чисел 1, 10, 100, 1000 могут повторяться не три, а четыре раза, но зато запрещается писать меньшую цифру слева от большей.

Эта система счисления продержалась в Аттике до I в. н. э., хотя в других местах Греции она была задолго до этого вытеснена более удобной ионийской (алфавитной) нумерацией.

Наиболее совершенной разновидностью непозиционных систем счисления явились алфавитные обозначения чисел. Примерами алфавитных систем может служить ионийская, или древнегреческая (пришедшая на смену аттической); славянская, или древнерусская (кириллица и глаголица); еврейская, сирийская, арабская, а также грузинская и армянская системы счисления.

В греческой (ионийской) нумерации [2] числа изображались буквами алфавита, как у евреев и родственных им финикиян, от которых греки, по-видимому, и переняли этот способ.

---

[1] *Пентагон*—пятиугольник. По пятиугольному зданию военного министерства США само министерство в газетных статьях обычно называется Пентагоном.

[2] Древнейшая надпись, сделанная по алфавитной системе, относится к середине V в. н. э. (Галикарнасс в Малой Азии).

Славянское алфавитное обозначение чисел возникло в X веке. Введение такого обозначения приписывалось составителям славянского алфавита братьям Константину (в монашестве Кирилл, умер в 869 году) и Мефодию (умер в 855 году).[1] Создание славянской азбуки имело большое значение для развития культуры Руси и оказало огромное влияние на развитие математики в Киевском государстве. Система обозначения чисел была построена по образцу греческой, бывшей в ходу у византийцев, причем, числовые значения получали лишь те буквы, которые соответствовали буквам греческого алфавита. Этих особенностей не было во втором славянском способе обозначения чисел глаголице (одна из славянских азбук, происхождение которой окончательно не выяснено до сих пор). О более ранних обозначениях чисел славянами ничего достоверного не известно.

Следы алфавитной нумерации сохранились до настоящего времени, они выражаются в нумерации буквами пунктов докладов, резолюций и так далее. Однако буквы служат только для обозначения порядковых чисел; количественные числа мы никогда не обозначаем буквами и тем более никогда не оперируем с числами, записанными в алфавитной системе.

---

[1] Это был так называемый церковно-славянский алфавит, или кириллица; эта азбука создана для славянских народов Балканского полуострова на базе греческого алфавита. На Русь она занесена вместе с церковно-славянскими книгами.

Позиционные системы счисления

Первой известной нам позиционной системой счисления является шестидесятиричная система древних вавилонян, возникшая примерно за 2000 лет до н. э. Она сыграла большую роль в математике и астрономии, ее следы сохранились до сих пор в делении углов и времени. Вавилоняне записывали все числа от 1 до 59 по десятичной системе (но не позиционной) с помощью построения двух «клинов». Число 60 снова изображалось символом, как и единица, но в увеличенном виде и с немного большим промежутком, отделяющим его от других клиньев [1]. Целые числа больше 59 записывались по позиционной шестидесятиричной системе. Клинья, составляющие запись какого-либо числа, могут вплотную примыкать друг к другу. Повторение знаков единицы и десятка более трех раз порождает компактные комбинации.

Чтобы избежать неверного чтения, между разрядами оставляется заметный промежуток (пробел). Знак нуля, как таковой, в вавилонской системе счисления отсутствовал.

Вопрос о происхождении этой первой полупозиционной системы до сих пор не выяснен

[1] Вавилоняне для письма употребляли что-то вроде грифелей с расщепленными концами и писали (вдавливали) на пластинках из мягкой глины, а затем обжигали свои рукописи. Получалось так называемое клинообразное письмо. Эти прочные кирпичные «документы» частично уцелели до нашего времени, их находят на раскопках в Месопотамии. Поэтому изучить вавилонскую историю вообще и математику в частности удалось сравнительно хорошо

и много лет занимает внимание многих ученых.

Появление позиционной системы обозначения чисел было одной из основных вех в истории культуры. Оно не могло быть случайным. Подтверждением этому является равномерное и самостоятельное возникновение позиционной системы по крайней мере у трех различных народов: у вавилонян более чем за 2000 лет до нашей эры, в начале нашей эры у индейского племени майя, бывших обитателей полуострова Юкатан в Центральной Америке, и в V—IX вв. н. э. в Индии.

Родоначальницей нашей современной нумерации была, по-видимому, последняя индийская система. К сожалению, нам очень мало известно о том, как и когда в Индии появилось обозначение чисел по позиционной системе, оттуда она распространялась в другие страны. Некоторые народы переняли у индийцев только позиционный принцип, сохранив свое старое начертание цифр (например, Китай), другие заимствовали у индийцев и их цифры (например, Монголия, страны Ближнего и Среднего Востока).

В этой нумерации все числа от единицы до девяти обозначаются индивидуальными символами (цифрами) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. К ним присоединяется знак 0 для нуля. Любое натуральное число может быть однозначно изображено при помощи только этих десяти знаков (цифр) по принципу поместного или позиционного значения. Например, $724\,032 = 2+3\cdot10+0\cdot10^2+4\cdot10^3+2\cdot10^4+7\cdot10^5$; здесь дважды встречается цифра 2 в различных местах (позициях) записи числа — в одном месте оно означает число 2, в другом число 20 000.

Такой счет десятками был у многих народов. Он получил особенно широкое распространение потому, что люди располагали естественной «счетной машиной», а именно — десятью пальцами на руках. Как говорит выдающийся русский математик Н. Н. Лузин (1883—1950), «преимущества десятичной системы не математические, а зоологические. Если бы у нас на руках было не десять пальцев, а восемь, то человечество пользовалось бы восьмиричной системой».

Несмотря на кажущуюся простоту нашей системы счисления, она явилась продуктом длительного исторического развития и в ее создании принимали участие целые народы. Можно сказать даже, что создание такой системы является делом всего человечества. Знаменитый французский математик и физик Лаплас (1749—1827) писал: «Мысль выражать все числа девятью знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой...»

Запись в позиционной десятичной системе с употреблением нуля появилась в Индии, вероятно, около 500 года нашей эры. В надписях 683 и 686 годов, сделанных в Камбодже и Индонезии, явно употреблялся знак нуля в виде точки, а также маленького кружка. В самой Индии в разных ее областях написание цифр было очень различным.

Наиболее ранние рукописи на арабском языке, содержащие индийскую позиционную запись чисел, относятся к 874—878 годам.

Арабско-индийские цифры, как их иногда называют, впоследствии распространились по всему мусульманскому Востоку, а также в мавританские государства, расположенные на территории современной Испании.

Хотя первые записи арабско-индийскими цифрами встречаются в испанских рукописях еще в X веке, однако эта система начинает укрепляться в Европе только начиная с XII века. В этом отношении имел колоссальное значение перевод арифметического труда замечательного узбекского ученого аль-Хорезми (IX век), в котором был изложен способ позиционного счисления. Сам этот способ получил название алгорифма (от искаженного аль-Хорезми).

Новая нумерация в Европе встретила ожесточенное сопротивление как со стороны официальной схоластической науки того времени, так и со стороны отдельных правительств. Так, например, в 1299 году во Флоренции купцам было запрещено пользоваться новыми цифрами, в бухгалтерии приказано было либо пользоваться римскими цифрами, либо писать числа словами. В официальных бумагах вплоть до XVIII века разрешалось употреблять только римские цифры.

Убежденным сторонником новой нумерации в Европе выступил знаменитый средневековый итальянский математик Леонардо Пизанский (около 1170—после 1228), известный также под именем Фибоначчи (сын Боначчи). Тем не менее в Германии, Франции и Англии новые цифры до конца XV века почти не употреблялись.

В печатных сочинениях на славянско-русском языке новые цифры появились впервые при нумерации страниц в двух книгах духовного содержания, изданных в Венгрии в 1621 году. В знаменитой «Арифметике» Магницкого, изданной в 1703 году, обозначения страниц были славянские, но вычисления в тексте производились исключительно на индийских числах.

Наиболее ранние русские монеты с индийскими цифрами относятся к 1654 году. При Петре Первом индийские цифры на монетах полностью вытесняют славянские, которые в последний раз появились на медных монетах 1718 года.

В послепетровские времена славянские цифры быстро исчезли из обихода.

На основании ранее сказанного, можно, естественно, предположить, что до того, как человек пришел к счету десятками, он пользовался при счете пальцами одной руки. Это привело к созданию пятиричного счисления, которым пользовались, вероятно, все народы на определенных ступенях развития.

Следы пятиричной системы имеются в римской письменной нумерации и в языках некоторых культурных народов, в частности в скандинавских языках. Они встречаются в знаменитых эпических поэмах «Илиада» и «Одиссея» легендарного древнегреческого поэта Гомера.

Следы двадцатиричной непозиционной системы сохранились во французском, английском и голландском языках. Например, во французском 80 произносится как «четыре-двадцать», 300 — как «пятнадцать-двадцать».

Своеобразным свидетельством того, что не во все эпохи нумерации совпадали с современной, служит также наша речь. В русском языке в названии числительных вовсе не заметно однообразия, которое имеет место в их записи (десять, сорок, сто, тысяча, миллион).

Из сказанного можно сделать следующие выводы: современная письменная система счисления является строго позиционной, а устная — нет; письменная является строго десятичной, а устная сохраняет следы существования пятиричной и иных систем; в письменной системе счисления существует только десять узловых чисел 0, 1, 2... 9, в устном счете имеются и другие узловые числа, каждое из которых служит основанием своей местной системы счисления.

Можно заметить, что наша устная речь отражает более раннюю стадию счета, чем нумерация. Десятичная позиционная система полностью удовлетворяет всем требованиям, которые можно предъявить к удобной системе нумерации. Она одинаково удобна для представления и весьма больших, и весьма малых чисел, которыми приходится пользоваться в наш век исследований сверхгалактики, с одной стороны, и внутриатомного микромира — с другой. Над числами, записанными по этой системе, сравнительно удобно производить арифметические операции. Этим требованиям в сколько-нибудь полной мере не удовлетворяла ни одна из предшествующих систем нумерации. Поэтому-то при поступательном движении человечества все они должны были уступить место десятичной позиционной системе вопреки многовековой традиции и иным препятствиям.

Некоторые из систем счисления, основание которых отлично от 10, употреблялись или предлагались в разное время.

Двенадцатиричная существовала некогда у разных народов [1]. Особенно широко применяли число 12 в своей системе дробей римляне.

Позиционная двенадцатиричная система счисления в некотором отношении лучше десятичной. Число 12 имеет четыре делителя (2, 3, 4, 6), тогда как 10 — только два (2, 5); это представляет несомненные удобства для теоретической арифметики. При этой системе было бы больше «круглых чисел» (т. к. особенно употребительные доли $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_6$ от 12 были бы просто целыми числами), что позволило бы установить больше сокращенных приемов выполнения действий. Поэтому многие предлагали ввести двенадцатиричную систему счисления вместо десятичной. В Америке существует организация «Американское

[1] О пережитках счета дюжинами мы говорили выше. В 1937 году в Судане обнаружены племена, у которых двенадцатиричная система счисления разработана в законченном виде.

двенадцатиричное общество» для разработки и пропаганды двенадцатиричной системы, особенно оживившее свою деятельность в последнее время. Но привычка считать десятками настолько велика, а обязательный переход к новой системе счисления вызвал бы ломку всех привычек и огромные материальные расходы, что такую реформу вряд ли целесообразно проводить.

Небезынтересно отметить, что английский писатель Джонатан Свифт (1667—1745) в описании Лилипутии исходит из предпосылки, что рост лилипутов в 12 раз меньше роста Гулливера, а потому мера поверхности у них примерно в 150 раз (12×12), объема — приблизительно в 1700 раз (12×12×12) меньше наших. Отсюда много забавных эпизодов и недоразумений [1].

Двоичная система счисления, как самая простая, существовала, по-видимому, вначале у всех народов; ей предшествовал счет парами (по два). Об этом свидетельствуют системы мер и названия их долей в языках многих народов, в том числе и русского, а также долго существовавший взгляд на удвоение как на особые арифметические действия (например, в древнем Египте). Двоичная система существовала в Китае. Изобретение ее приписывается императору Фо Ги, жизнь которого относится к четвертому тысячелетию до нашей эры.

---

[1] Джонатан Свифт. Путешествия Лемюэля Гулливера. М., изд. художественной литературы, 1955, стр. 53.

Для записи чисел в двоичной системе используются только две цифры: 0,1; так число 2 является уже единицей второго разряда и записывается в виде 10_2, число 3 в виде 11_2, десять в виде 1010_2 и так далее. Для устной и письменной нумерации она неудобна, так как запись чисел в ней слишком длинна (например, $777_{10}=1100001001_2$), но она имеет и существенные, принципиальные преимущества, на что впервые обратил внимание Лейбниц. Он отметил особую простоту операций в этой системе счисления (таблицы сложения и умножения сводятся к $1+1=10$, $1\times1=1$, при делении не нужны догадки и пробы), но не рекомендовал эту систему взамен десятичной для практического счета.

Лейбниц, однако, не предвидел, что двоичная система получит широкое применение в вычислительной математике, именно будет положена в основу устройства электронных счетных машин.

Из вышесказанного можно сделать следующие выводы:

1. История систем счисления показывает, что понятие натурального числа возникло в результате практической деятельности человека и опровергает идеалистическое учение об априорном характере понятия натурального числа, о его мнимой прирожденности человеческому сознанию.

2. История нашей нумерации показывает, что развитие систем счисления шло от разнообразия и разнородности к единству и однородности. Чем ниже был хозяйственный и культурный уровень общества, тем разнооб-

разней были употребляемые в нем системы счисления.

Первой всеобщей формой нумерации явились системы счисления типа иероглифической. Фазу иероглифической нумерации, соответствующей еще очень примитивному счету, в более или менее развитой форме прошли, по-видимому, все народы. Хотя принцип ее построения в различных странах был один и тот же, но в выборе узловых чисел, каждое из которых служило основанием особой системы, а также в начертании их наблюдался полный разнобой.

Алфавитная система нумерации позволила легко оперировать с небольшими числами. Однако то, что каждый народ применял при этом собственный алфавит, препятствовало созданию единой системы счисления.

Наконец, последнюю стадию развития нумерации составляет десятичная позиционная система счисления, первая единообразная система, принятая во всем мире. Единым здесь является не только построение, но и начертание цифр.

3. История нумерации служит дополнительной иллюстрацией борьбы нового, передового со старым, консервативным. Этому новому приходилось пробивать дорогу с большим трудом. Так, алфавитной системе пришлось преодолевать вековые традиции аттических государств, а десятичной позиционной системе противостояли реакционные силы европейского средневековья.

4. Создание современной позиционной системы счисления не было случайным, оно яви-

лось закономерным завершением неизбежного исторического процесса.

ДАЛЬНЕЙШЕЕ РАЗВИТИЕ ПОНЯТИЯ О ЧИСЛЕ

«Сложность цивилизации, как в зеркале, отражается в сложности используемых ею чисел».

Ф. Дж. Дейвис

Дроби

«Без знания дробей никто не может признаваться сведущим в арифметике».

Цицерон

По мере возникновения представлений о натуральных числах возникли представления и о долях единиц, вернее, о долях целого конкретного предмета. Так возникновение представления о числе 2 влекло за собой представление о половине, о половине половины и так далее. Появление натурального числа n влекло за собой представление о дроби вида $\frac{1}{n}$, которую теперь называют *аликвотной,* или *родовой,* или *основной.* «Первой дробью, с которой познакомилось человечество, как нетрудно видеть априори, была половина в ее строго конкретной форме, именно в виде половины какого-нибудь реального предмета» (см. [6, 2], стр. 114).

Для выяснения вопроса о происхождении дробей нужно обратиться не к счету, а к другому процессу, появившемуся с самых древних времен наряду со счетом, а именно к измерению. Исторически дроби возникли в процессе измерения. В основе всякого измерения всегда лежит некоторая величина (длина, объем, вес). Выбор той или иной единицы, служащей основанием системы мер, обусловливается конкретной исторической обстановкой.

Меры в своем развитии прошли примерно те же этапы, что и числа.

На первых стадиях развития человеческого общества измерения производились «на глаз». В дальнейшем появились некоторые натуральные меры: длина ступни, ширина ладони и тому подобное.

О существовании древнейших мер говорят названия мер длины, сохранившиеся и до нашего времени. Такими мерами являются: фут (длина ступни), дюйм[1] (ширина большого пальца руки при его основании), ярд[2], локоть (расстояние от конца пальцев до локтя), пальма (ширина ладони). К этой же категории мер относится маховая сажень (расстояние между средними пальцами разведенных рук), косая сажень (расстояние между большим пальцем левой ноги, широко отодвинутой от правой, и средним пальцем вы-

[1] *Дюйм* первоначально обозначал также длину сустава большого пальца, затем длину трех ячменных зерен.

[2] *Ярд* — основная мера длины в Англии, была установлена указом короля Генриха I (1101) и, по одному преданию, равнялась расстоянию от носа короля до среднего пальца вытянутой его руки, а по другому преданию, длине его меча. Длина ярда в настоящее время приблизительно равна 0,9144 метра.

тянутой вверх правой руки), бывшие долгое время в употреблении в России.

Из всех мер длины в быт русского народа прочнее всех вошел аршин[1]. Об этом свидетельствует большое количество поговорок и оборотов народной речи: «мерить на свой аршин», «словно аршин проглотил», «видать аршин под землю», «аршинный товар» (красный товар), «семь аршин говядины да три фунта лент» (о бессмыслице), «я тебя на аршин смеряю» (прибью палкой). Потребность более точного измерения привела к тому, что первоначальные единицы мер стали раздроблять на две, три части. В результате раздробления более мелкие единицы меры получили индивидуальные названия, и величины стали измеряться уже в этих единицах.

Так возникли первые конкретные дроби как определенные части некоторых определенных мер. Лишь много позднее названия конкретных дробей стали служить для обозначения таких же частей других величин, а затем и для отвлеченных дробей.

То обстоятельство, что дроби произошли не в результате деления, подтверждается также некоторыми известными из истории примерами деления целых чисел друг на друга. Так, в одной арабской рукописи XII века имеется задача: «разделить сто фунтов между одиннадцатью человеками поровну». Автор этого решения получает остаток, равный

[1] *Аршин* в России употреблялся с XVI века, первоначально он равнялся 27 английским дюймам. Следует отметить, что длина мер колебалась в зависимости от местности и условий применения.

1 фунту. Для его распределения он не прибегает к дроби, а предполагает променять этот фунт на яйца, которых, как устанавливает, окажется всего 91 штука. Распределив 88 яиц по 8 на каждого человека, автор предлагает оставшиеся три яйца отдать за труды тому, кто делил, или же променять их на соль к яйцам. Подобным же образом поступает представитель римской монастырской учености IX—X веков Одо Клюнийский. Деля 1001 фунт на 100, он раздробляет полученную в остатке единицу в унции, драхмы и так далее, пока число долей не станет больше ста. Так как и после этого деление нацело невозможно, он предлагает получившийся маленький остаток совсем отбросить и не брать в счет, указывая, что только один бог «без недостатков». Деление здесь не приводило, таким образом, к дробям, но осуществлялось путем введения более мелких именованных единиц, а незначительный остаток просто отбрасывался.

В упомянутом выше папирусе Ринда мы уже встречаемся с дробными вычислениями. В глазах египтян только основные дроби имели самостоятельное значение и определенный смысл; другие дроби осознавались ими через основные. Это говорит о том, что основные дроби отражают определенный этап развития человеческого общества вообще. Употребление основных дробей отражает тот факт, что в первобытном обществе деление любой охотничьей добычи строго поровну было непреложным законом. Из-за недостатка пищи неравное распределение могло бы привести к гибели части племени. У охотничьих племен не начинают новой туши оленя, пока не кончат с первой. Небезынтересно вспомнить известное описание Миклухо-Маклая, как он безуспешно пытался угостить вином стариков, а не все племя.

В позднейшие времена равное распределение различных материальных ценностей было нарушено, но дроби типа $\frac{1}{n}$ прочно вошли в обиход. Другие дроби казались чем-то необычным, «неправильным». Об этом свидетельствует введение у египтян и у некоторых других народов специальных значков для наиболее распространенных дробей $\frac{2}{3}$ и $\frac{3}{4}$, которые, несомненно, появились позже основных дробей.

Особый интерес вызывают наиболее распространенные вавилонские шестидесятиричные или так называемые *сексагезимальные дроби*. Они напоминают наши десятичные дроби, только вместо знаменателей 10, 10^2, 10^3, ...вавилоняне употребляли 60, 60^2, 60^3 ... Пользуясь шестидесятиричными дробями, вавилоняне должны были многие дроби изображать приближенно. В этом недостаток и в то же время преимущество этих дробей. Они стали постоянным орудием научных вычислений в руках греческих, а затем «арабских» и средневековых европейских ученых вплоть до XV века, пока не уступили место десятичным дробям. Но шестидесятиричными дробями пользовались в астрономии ученые всех народов вплоть до XVII века, называя их астрономическими дробями.

В Греции дроби получили широкое применение не позже V века до нашей эры. Они употреблялись не только в задачах вычислительной геометрии, коммерческой арифметике и алгебре, но и в теории музыки.

Не позже V века до нашей эры греки свободно владели арифметическими действиями с дробями, но за числа их не признавали. Поэтому в то время, как в трактате «Об измерении круга» Архимед употребляет дроби, Евклид в своих знаменитых «Началах» и Никомах из Геразы во «Введении в арифметику» [1] дробей не рассматривают. Только знаменитый Александрийский математик Диофант (вероятно, III век) говорит о дроби как о числе.

Римляне пользовались наглядными конкретными дробями, заменявшими отвлеченные доли подразделениями употребительных мер. Они остановили свое внимание на мере веса асс (в настоящее время аптекарский фунт), означавшем также и меру стоимости. Асс делится на 12 частей—унций. Из них составлялись все дроби со знаменателем 12, то есть $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}$; при этом каждая из таких дробей обозначалась особым знаком и имела особое название. Любую величину можно было выражать посредством унций. Например, вместо того

[1] Это самое раннее систематизированное руководство по арифметике, пользовавшееся широкой известностью.

чтобы сказать: «Я прочитал $\frac{5}{12}$ книги» говорили: « Прочитал 5 унций книги». С помощью унций римляне выражали и дроби. Так, об $\frac{1}{8}$ они говорили $1\frac{1}{2}$ унции. Три унции назывались четвертью, четыре унции—третью, шесть унций — половиной. Характерен следующий отрывок из произведения знаменитого римского поэта Горация (65—8 годы до н. э.) о беседе учителя с учеником в одной из римских школ той эпохи.

«Учитель: Пусть скажет сын Альбина, сколько останется, если от пяти унций отнять одну унцию?

Ученик: Одна треть.

Учитель: Правильно, ты сумеешь беречь свое имущество».

Римляне создали долями асса двенадцатиричную систему дробей, которая господствовала на практике с раннего средневековья до XII века. Вероятно, причиной этому послужило деление года на 12 месяцев, принятое у римлян со времен царя Нумы (конец VIII — начало VII века до н. э.).

Как видим, римские дроби вначале имели конкретный (весовой) характер, но с течением времени конкретность сгладилась, и римляне стали употреблять дроби в качестве абстрактных (отвлеченных).

Египет, Вавилон и Рим являлись независимыми центрами, создавшими своеобразные учения о дробях. Долгое время действия над дробями были труднейшими вопросами арифметики.

Уже в XV веке итальянский математик Лука Пачоли (1445—1514) в своем сочинении «Summa» выражает удивление по поводу умножения дробей: «Разве не содержится противоречие в том, что дроби, будучи умножены друг на друга, дают уменьшение; тогда как умножение должно означать увеличение, ведь сказано в Священном писании: плодитесь, множьтесь и наполняйте землю». Из этого затруднения он находит довольно удивительный выход: увеличение, по его мнению, означает удаление от 1, что можно применить не только к целым, но и к дробным числам; в этом смысле, по его мнению, $\frac{1}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}$ больше каждого из сомножителей (см. [33], стр. 265).

Хотя вычисления с дробями производились еще народами древнего Востока (Египет, Вавилон), но отчетливое представление о дробных числах, как об отвлеченных, равноправных с целыми, появилось лишь в XVI веке, в связи с развитием арифметики. Созревает идея рассмотрения дробей с любым натуральным знаменателем и представление о дробном числе как о частном при делении двух натуральных чисел, из которых делимое не делится на делитель.

Так, в XVIII веке утверждали, что дробь (или ломаное число), есть собрание равных частей единицы. Вместе с тем дробь трактовалась и как частное целых чисел, когда оно не может быть выражено целым числом.

Следует отметить, что отдел арифметики о дробях долгое время был одним из самых запутанных. Недаром у немцев сохранилась поговорка «попасть в дроби», что значит «стать в тупик». Тот, кто не знал дробей, не признавался сведущим в арифметике. Освоить дроби было тяжело. Даже самые образованные люди считали действия с дробями весьма трудными. Это происходило потому, что общих приемов действий с дробями и записи дробей не было, их складывали и умножали по различным «рецептам».

Таким образом, первым расширением понятия числа является присоединение к натуральным числам дробных.

Отрицательные числа

Различия между положительными и отрицательными количествами встречаются в Китае более 2000 лет тому назад.

Введение в науку отрицательных чисел было вызвано, в первую очередь, развитием алгебры как науки, дающей общие способы решения арифметических задач, независимо от их конкретного содержания и исходных числовых данных.

В V—VI веках отрицательные числа появляются и получают широкое распространение в Индии. Отрицательными числами индийские математики пользовались при решении уравнений.

Однако они не использовали их как равноправные элементы, считая их чем-то вроде «логических возможностей». Необходимо отметить, что введение отрицательных чисел в математику было связано также с развитием торговли. Во многих странах до введения знака «минус» (XV век) эти числа (долг) писали теми же цифрами, что и положительные, но другими чернилами. В XVI веке немецкий математик М. Штифель (1486 — 1567) определяет отрицательные числа, как «меньше, чем ничто», хотя и называет их «нелепыми числами». В европейской науке отрицательные числа окончательно вошли в употребление лишь в XVII веке. Созданная Декартом и Ферма аналитическая геометрия позволила рассматривать корни уравнения $f(x)=0$, как координаты точек пересечения кривой $y=f(x)$ с осью абцисс; это окончательно стерло принципиальное различие между положительными и отрицательными корнями уравнения, так как их истолкование оказалось, по существу, одинаковым.

XVI и XVII века были наполнены борьбой самых разнообразных мнений; появился ряд парадоксов и софизмов, которые многим математикам казались достаточным основанием для отрицания объективности понятия отрицательной величины. Приведем два из них:

Парадокс Валлиса[1]. Из неравенства

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ для натуральных чисел Валлис заключил, что

$$\ldots \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < \frac{1}{1} < \frac{1}{0} < \frac{1}{-1} < \frac{1}{-2} < \frac{1}{-3} < \ldots$$

[1] Валлис Джон (1616—1703) — знаменитый английский математик. Этот парадокс встречается в его «Трактате по алгебре» (1685).

откуда, например, $\frac{1}{0} < \frac{1}{-1}$, то есть $\infty < -1$. Таким образом, получается, что отрицательное число больше бесконечно большого числа.

Сам Валлис считал подобное рассуждение логически безупречным. Эту же точку зрения позднее высказал Эйлер, но большинство математиков не согласилось с ними.

Парадокс Арно[1]. Верна ли пропорция $1:(-1)=(-1):1$? Здесь и левое и правое отношения равны -1, но между тем первый предыдущий член больше, а второй меньше последующего.

На этот парадокс Арно обратил внимание Лейбниц (см. [44,I], стр. 89).

Отметим еще, что многие математики на протяжении XVII—XIX веков делали попытку доказать правила знаков при умножении отрицательных чисел. При этом некоторые из них трактовали понятие отрицательной величины как результат формального отрицания величины «абсолютной» и недоумевали, как после этого можно говорить о ее существовании. Повод всему этому, видно, дал, упомянутый нами в предисловии французский математик и философ XVI века Рамус, который пытался доказать правило знаков $(-)\times(-)=(+)$ ссылкой на то, что отрицание отрицания дает утверждение.

Иезуит Христофор Клавий (1537—1612), известный как математик, эксперт по делу Галилея и главный деятель календарной рефор-

---

[1] Арно Антуан (1612—1694) — французский математик, друг Паскаля.

мы при Папе Григории XIII (григорианский календарь — это наш современный календарь, введенный католической церковью в 1582 году), в своей «Алгебре» (1608) отказывается от попыток обоснования правила знаков при умножении отрицательных чисел. Он пишет: «...Невозможность обосновать эти правила надо приписать бессилию человеческого ума, который не в состоянии понять, почему необоснованные правила знаков при умножении подкрепляются примерами».

Мистик Карл Эккртсгаузен (1752—1803) в своей книге «Наука чисел, служащая продолжением ключа к таинствам природы», пишет: «...отрицательные числа суть порождения дьявола».

Отметим, что такие математики, как Ньютон, Эйлер, Клеро, Лаплас и другие, отстаивали объективность понятия отрицательной величины. Даламбер, Лазарь Карно были наиболее крупными их противниками. Все русские математики XVIII века, за исключением Войтяховского, считали понятие отрицательной величины объективным и активно участвовали в разработке вопросов обоснования арифметики положительных и отрицательных величин.

Числа целые, дробные (положительные и отрицательные) и нуль получили общее название рациональных чисел. Эта совокупность обладает свойством замкнутости [1] к четырем

[1] Множество называется *замкнутым* относительно некоторой операции (действия), если в результате этой операции над любыми элементами этого множества получается снова элемент из данного множества.

арифметическим действиям, плотности [1], и она упорядочена в отношении понятий «меньше» и «больше». Это дает возможность при помощи рациональных чисел осуществлять различные измерения (например, длины отрезка в выбранной единице масштаба) с любой степенью точности. Таким образом, совокупность рациональных чисел оказывается достаточной для удовлетворения большинства практических потребностей.

Теоретическое обоснование дробного и отрицательного чисел и действий над ними было осуществлено в XIX веке и не представило, в отличие от обоснования натуральных чисел, принципиальных затруднений.

Иррациональные числа

> *«Нет ничего удивительного в том, что открытие несоизмеримых чисел потрясло греческих математиков».*
>
> Р. Курант

Совокупность рациональных чисел не обладает свойством непрерывности, поэтому она недостаточна при изучении непрерывно изменяющихся величин. Оказалось необходимым новое расширение понятия числа, заключающееся в переходе от множества рациональных чисел к множеству действительных или вещественных чисел. Этот переход состоит в присоединении к рациональным так называе-

[1] Говорят, что данное множество обладает свойством *плотности*, если между любыми двумя различными его элементами находится, по крайней мере, один элемент этого же множества.

мых иррациональных чисел, которые выражаются через рациональные лишь приближенно.

Иррациональные числа появились позднее рациональных и долго не признавались за числа как таковые, они назывались то «несоизмеримыми», то «невыразимыми», то «противными разуму». Они исторически прошли основные этапы своего развития почти одновременно с отрицательными.

Еще в древней Греции, в так называемой пифагорейской школе, в геометрии было сделано открытие огромной принципиальной важности—существование несоизмеримых отрезков. Классическим примером несоизмеримости отрезков является сторона и диагональ квадрата. Открытие этого факта вызвало подлинный кризис основ греческой математики. Пифагорейцы, открывшие существование несоизмеримых отрезков, держали это открытие в тайне, так как оно противоречило их идеалистическому учению о гармонии чисел в окружающем мире. Нельзя, стало быть, признавать истинным их учение о целочисленной основе всего существующего, в том числе и геометрических величин.

Но после того, как открытие стало известным [1], пифагорейцы безуспешно пытались обратить его против атомистического учения знаменитого древнегреческого философа-материалиста Демокрита из Абдеры (около

---

[1] Существует легенда о Гиппасе Месопотамском (V в. до н. э.), бывшего членом пифагорейской школы и выдавшем тайну открытия несоизмеримости. Согласно легенде, его гибель во время кораблекрушения была наказанием за совершенное им осквернение святыни.

460—370 до н. э.). Это открытие явилось ударом по всей пифагорейской школе и способствовало ее распаду. Как видим, ломка сложившихся математических представлений сопровождалась борьбой философских убеждений, политической борьбой.

Вскоре было обнаружено, что несоизмеримость диагонали и стороны квадрата не является исключением, что существуют и другие величины, отношения которых нельзя представить отношением двух целых чисел. Феодор из Кирены (конец V века до н. э.) показал, что стороны квадратов, площади которых равны 3, 5, 6 ... 17, несоизмеримы со стороной единичного квадрата (см. [2], стр. 258). Теэтет (IV век до н. э.) показал, что $\sqrt{n}$ выражает длину, несоизмеримую с единицей, если n—неточный квадрат. Он также ввел иррациональность $\sqrt[3]{n}$.

Вместо того чтобы расширить понятие числа и дать ему значение такое же общее, как и величина, греки отделили изучение целых чисел от геометрии; устанавливается строгая граница между арифметикой и геометрией.

Открытия Пифагора и его учеников повлекли за собой ряд глубочайших исследований греческих геометров о несоизмеримых отрезках. Венцом этих исследований является X книга начал Евклида, посвященная несоизмеримым отрезкам, получающимся при построении с помощью циркуля и линейки, другими словами, Евклид построил чисто геометрически все иррациональности, к которым нас приводят решения квадратных уравнений. Знаменитая «задача об удвоении куба»[1] привела греков к иррациональностям высшего порядка; эту задачу решили также геометрически и, следовательно, путем построения доказали существование несоизмеримых отрезков высшего порядка.

Открытию несоизмеримых величин придавали важное значение еще в древности. Так, знаменитый древнегреческий философ Аристотель (384—322 до н. э.) указывал, что оно вызвало удивление, свойственное всякому подлинному научному открытию[2]. Об этом же свидетельствует и диалог древнегреческого философа-идеалиста Платона (429—348 до н. э.) в его «Законах». Афинянин, который ведет диалог, говорит, что долго не знал о существовании несоизмеримых отрезков, Платон ему отвечает: «Друг мой Клиний, я и сам был поражен, что лишь так недавно узнал то состояние, в котором мы находимся. Мне показалось, что это свойственно не человеку, но скорее каким-то свиньям. Я устыдился не только за себя, но и за всех эллинов (греков)» (см. [2], стр. 257).

Но некоторые математики-идеалисты усматривали в факте несоизмеримости «пропасть, через которую ни вычисления, ни логика не в состоянии перекинуть мост» (см. [29], стр. 94).

Факт существования несоизмеримых отрезков не явился тормозом для развития гео-

---

[1] Задача состоит в том, что требуется найти ребро куба, который по объему был бы вдвое больше заданного куба.

[2] Метафизика, М.-Л., 1934, стр. 22.

метрии. Греки разработали теорию отношений отрезков, учитывающую возможность их несоизмеримости; они умели сравнивать такие отношения по величине, фактически производить над ними арифметические действия (в чисто геометрической форме), словом, обращались с такими отношениями, как с числами.

Впервые алгебраические иррациональности получили признание как род чисел у индийских, а затем арабских ученых.

Индийцы и арабы рассматривали иррациональные числа, как числа нового вида. Показывая, например, как по двум данным сторонам прямоугольного треугольника найти третью, индийский математик Бхаскара (1114—1178) замечает: «Если катеты равны, то гипотенуза иррациональна», и находит ее приемом, нисколько не отличающимся от современного. Индийцы впервые перенесли принцип перманентности[1] действий над рациональными числами на действия с иррациональными числами. Развивая тригонометрию, как самостоятельную научную дисциплину, выдающийся азербайджанский ученый Насирэддин ат-Туси (1201—1274) трактует отношение несоизмеримых величин как числа. «...Каждое из этих отношений,—пишет он, — может быть названо числом, которое определяется единицей так же, как один из членов

[1] Принцип перманентности требует, чтобы при обобщении данного понятия оставались верными основные свойства этого понятия. В данном случае правила действий над рациональными числами были перенесены на новые иррациональные числа.

отношения определяется другим из этих членов». Еще раньше эту трактовку числа развивал знаменитый Омар Хайям (около 1040—1123).

В Западной Европе упоминание об иррациональных числах встречается в 1202 году у Леонардо Пизанского. Однако они вошли в европейскую математику только в XV—XVI веках, когда в Европе стали развиваться алгебра и тригонометрия.

Понятие натурального числа может дать точную количественную характеристику любого конечного множества. Понятие дроби характеризует точно любую часть различных величин (длина, время, вес и тому подобное). Найти точные прообразы иррациональных чисел вне геометрических (несоизмеримых) величин математики XV—XVI веков не умели. Поэтому для них иррациональные числа вне геометрии были символами, лишенными точно очерченного содержания. Любая дробь может быть выражена совершенно точно отношением двух целых чисел. Напротив, иррациональное число не может быть выражено точно конечной комбинацией рациональных чисел, связанных четырьмя арифметическими действиями. Эти факты математики XV—XVI веков знали и почти всегда использовали в качестве аргумента «неполноценности» понятия иррационального числа.

Поскольку существование геометрических несоизмеримых величин не отрицалось, то числа нового вида назывались «глухими», «невыразимыми», «недействительными», «фиктивными». Термин «иррациональный» (в математическом смысле) впервые употребил в XIV веке английский математик Т. Брадвардин (около 1290—1349). Понятие числа с этим термином связывается впервые в 1544 году у немецкого математика М. Штифеля, но и он при доказательстве действий над иррациональными числами прибегает, как и Евклид, к отрезкам. У итальянского математика Д. Кардано (1501—1576) мы уже видим различие между числами целыми, дробными и иррациональными. Итальянец Бомбелли (около 1530—1572) и голландец А. Жирар (1595—1632) принимают их, но не считают числами.

Все приведенные воззрения объединяет та общая черта, что иррациональные числа не считались полноправными. Однако эти числа необходимо было рассматривать, изучать, так как, в частности, вычисляя иррациональные корни алгебраических уравнений и логарифмы чисел, определяя значение тригонометрических функций, приходилось искать их достаточные рациональные приближения и, по существу, оперировать с ними, как с числами. Арифметика таких величин, как правило, обосновывалась на геометрической базе (Бомбелли, Виета). Конечно, такой подход к арифметике иррациональных чисел даже для своего времени не был достаточно последовательным. В XV—XVI веках только передовые одиночки-математики, например Штифель и С. Стевин (1548—1620), выступили в защиту равноправности понятия иррационального числа с целыми и дробными числами. Стевин писал, что несоизмеримость не является при-знаком абсурдности несоизмеримых величин; так линия и поверхность — суть величины несоизмеримые, однако ни линия, ни поверхность не являются количествами абсурдными, хотя они и несоизмеримы. Свое рассуждение о природе чисел Стевин заканчивает так: «Нет чисел абсурдных, иррациональных, неправильных, невыразимых или глухих; среди чисел царит такое совершенство и согласие, что мы имеем основание размышлять ночь и день об их удивительной законченности». Несмотря на это, иррациональные числа вошли в употребление вместе с отрицательными числами только после появления «Геометрии» Декарта (1637).

Идеи Декарта (1596—1650) побудили обобщить понятие о числе и принять положение, что всякому отрезку соответствует действительное число, то есть между точками прямой и числами устанавливалось взаимно однозначное соотношение.

Во второй половине XVIII века, в связи с дальнейшим развитием механики и математики, объективность понятия иррационального числа получает более широкое признание. Тем не менее вплоть до второй половины XIX века не было выработано общего понимания об иррациональном числе, оно, по существу, утверждалось одним названием числа и не удовлетворяло всем логическим требованиям, предъявленным к понятию числа.

Во второй половине XIX века в трудах немецких математиков Дедекинда (1831 — 1916), Георга Кантора (1845—1918) и Вейерштрасса (1815—1897) было уточнено понятие действительного числа на основе глубокого анализа понятия непрерывности.

Все рациональные и иррациональные числа (как положительные, так и отрицательные) образуют совокупность так называемых действительных или вещественных чисел.

Комплексные числа

Заключительным этапом в развитии понятия чисел было введение комплексных чисел. Они явились следствием развития алгебры, а именно решения уравнений высших степеней, в частности квадратных. Так, например, простейшее квадратное уравнение $x^2+1=0$ уже не имеет решений в множестве действительных чисел.

Комплексные числа, то есть числа вида $a+вi$ (где $i=\sqrt{-1}$, а a и $в$—любые вещественные числа) встречаются уже в элементарной алгебре при извлечении корня четной степени из отрицательного числа и при решении квадратных уравнений, причем оперируют с ними, как с обычными суммами, принимая во внимание только, что $i^2=-1$.

Так как математики древности (Египта, Вавилона, Греции) не знали отрицательных чисел, то они при решении квадратных уравнений ограничивались лишь положительными корнями, которые находили точно или приближенно. Только китайские, а затем индийские математики, одними из первых признавшие как иррациональные, так и отрицательные числа, изучили и правила действия над ними. Они, очевидно, встретились с комплексными числами при решении квадратных уравнений. Однако, поскольку отрицательные числа не могут быть квадратами любых действительных чисел, индийцы заключили, что квадратные корни из отрицательных чисел не существуют. Так считали математики вплоть до эпохи Возрождения, когда новые задачи, возникшие в связи с развитием техники, естествознания и математики, заставили приступить к чисто эмпирическому изучению свойств комплексных чисел.

Первое упоминание о комплексных числах встречается в книге «Великое искусство или о правилах алгебры» (1545) итальянского математика Кардано. В этой книге впервые были опубликованы общие приемы решения уравнений 3-й и 4-й степеней, незадолго до этого найденные итальянскими математиками Ферро (1465—1526), Тартальей (1499—1557) и Феррари (1522—1565).

В формуле для решения кубического уравнения появились комплексные числа даже там, где ответ выражается вещественным числом. Комплексное число оказывалось здесь не результатом, а промежуточным числом в вычислениях.

Объяснить этот факт Кардано не мог, но зато он указал, что при некоторых условиях комплексные числа могут быть рассматриваемы как решения квадратных уравнений. Он исходит при этом из задачи: «разделить число 10 на две части, произведение которых равно 40». Эта задача легко сводится к уравнению $x^2-10x+40=0$. Определив его корни $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$, Кардано показывает, что эти корни действительно удовлетворяют условиям задачи: он здесь молчаливо предполагает, что для комплексных чисел $5+\sqrt{-15}$ и $5-\sqrt{-15}$ справедливы те же правила действия, что и для действительных, и считает, что $\sqrt{-15}\cdot\sqrt{-15}=-15$. Кардано называл комплексные числа «софистическими». В его время это считалось естественным. Отказаться от них уже не могли, так как они были полезны при решении алгебраических уравнений, а принять также нельзя, ибо их реальный смысл оставался неизвестен, а свойства парадоксальны.

В XVII веке комплексные числа нашли применение и в аналитической геометрии. В своей «Геометрии» Декарт решает задачу о нахождении координат точек пересечения окружности с параболой. Рассмотрев все возможные случаи их взаимного расположения, он заключает, что когда «окружность не пересекает и не касается параболы ни в одной точке, то это означает, что уравнение не имеет ни истинных, ни ложных (так Декарт называл отрицательные корни — А. Б.) корней и что все они воображаемые». И хотя в аналитической геометрии комплексные числа не имеют реального истолкования (точек с мнимыми координатами нет), но и здесь они полезны, так как указывают на вполне определенное расположение двух линий.

Таким образом, комплексные числа стали вводить в вычисления, молчаливо принимая, что они подчиняются обычным правилам действий.

В начале XVIII века комплексные числа начинают проникать в практику исследований в области математического анализа.

Несмотря на очевидную пользу, комплексные числа и действия над ними в деятельности математиков прививались с трудом. Эти числа называли абсурдными, невозможными. Название «мнимые числа» появилось в первой половине XVII века. Немалую роль при этом, конечно, сыграли и обнаруженные еще в XVI—XVII веках парадоксы, то есть нетождественность свойств комплексных и действительных чисел. Математики не могли примириться с тем, что комплексные числа нельзя сравнить по величине в обычном смысле слова, то есть нельзя их связывать знаками > (больше), < (меньше). Им казалось также нелепым, что $\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-a}=-a$, что арифметические операции над «воображаемыми» числами могут приводить к реальным результатам, как, например, сумма и произведение двух сопряженных комплексных чисел $a+bi$ и $a-bi$ являются числами действительными: $2a$ и a^2+b^2. Остановимся еще на одном парадоксе, который приписывается французскому математику Лазарю Карно (1753—1823). Этот парадокс состоит в следующем рассуждении. Возвышая в квадрат число i, предлагают его писать так:

$$i^2=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{(-1)\ (-1)}=\sqrt{1}=\pm 1.$$

Таким образом, получается что i^2 равно не только -1, но и $+1$. Приведенное рассуждение представляет злоупотребление равенством: $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$. Последнее доказывается в курсах элементарной алгебры в предположении, что числа a и b положительные, так же как и взятые значения корней из этих чисел. В данном случае ни -1 ни $\sqrt{-1}$ не являются положительными числами. Поэтому равенство $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, доказанное при этих условиях, применяется для других. Естественно, что результат получился неверный. В то время еще не было найдено реального истолкования комплексным числам и действиям над ними. Это были только понятия без прообразов, «выродок мира идей, почти двойственное существо, находящееся между бытием и небытием» (Лейбниц) (подробнее см. [44, 1], стр. 137—138).

Начало систематического использования и выяснения фундаментальной роли комплексных чисел в математическом анализе связано преимущественно с работами Эйлера (1707—1783) и Даламбера.

К концу XVIII века математики изучили все основные свойства комплексных чисел и сделали их одним из сильнейших инструментов алгебры, аналитической геометрии и математического анализа. Начинается более ясное понимание природы комплексных чисел.

В 1777 году Лагранж (1736—1813) в письме к итальянскому математику Лорнья (1735—1796) писал: «Одним из важнейших шагов, сделанных анализом за последние годы, я считаю то, что его не затрудняют более мнимые величины и что вычисления с ними производятся так же, как с действительными величинами».

Но, несмотря на это, до конца XVIII века и даже в период первой четверти XIX века многие крупнейшие математики отрицали объективность понятия комплексного числа из-за незнания реального истолкования арифметики комплексных чисел.

Второй этип развития понятия о комплексном числе начинается с момента геометрического истолкования их и действий над ними.

Первое по времени геометрическое истолкование комплексных чисел, как векторов на плоскости, было дано уроженцем Норвегии, датским математиком и землемером Гаспаром Весселем (1745—1818) в его сочинении «Об аналитическом представлении направлений» (1799). Но это сочинение, написанное на датском языке, в течение столетия оставалось неизвестным математикам, и его результаты открывались вновь. В частности, в 1806 году, независимо от Весселя, аналогичное геометрическое истолкование комплексных чисел было дано французским математиком Жаном Робертом Арганом (1768—1822), но оно также осталось незамеченным. И только в 30 годах XIX века, после работ Гаусса [1], комплексные числа систематически стали истолковываться в виде точек или векторов на плоскости, исчезло недоверие к ним. С этого времени комплексные числа начинают играть важнейшую роль в математике: появляется новая ветвь математического анализа — тео-

[1] Исследование Гаусса о биквадратных формах, где было вновь воспроизведено обоснование действий над комплексными числами, вышло в свет примерно спустя 30 лет после упомянутой работы Весселя.

рия функций комплексного переменного, которая имеет огромные приложения в таких практических дисциплинах, как аэро- и гидромеханика, теория упругости, электротехника и многих других.

В настоящее время комплексные числа не менее важны, чем вещественные. Если иметь в виду чисто математическую сторону дела, то следует сказать, что нет буквально ни одного раздела математики, где можно было бы обойтись без комплексных чисел. Многие факты математического анализа совершенно необъяснимые, если оперировать только вещественными числами, легко разъясняются с расширением числовой области путем введения комплексных чисел.

Геометрическое истолкование комплексных (в частности и любых действительных) чисел и действий над ними показали, что арифметика комплексных чисел так же истинна, как истинна арифметика положительных («абсолютных») действительных чисел.

Формальное обоснование понятия о комплексных числах и действиях над ними так же, как обоснование дробных и отрицательных чисел, уже не представляли принципиальных затруднений.

ЧИСЛОВАЯ МИСТИКА

Зарождение мистики натурального ряда чисел

Суть числовых суеверий и числовой мистики состоит и в том, что отдельным числам приписывается мистическое (сверхъестественное, таинственное) значение. Вдохновителями всех без исключения суеверий являются служители различных религий, так как в основе суеверий, как и религий, лежит та же вера в существование таинственных, недоступных для понимания людей, связей между вещами и явлениями.

Корни числовой мистики, числовых суеверий уходят в глубокую древность.

Одним из источников «мистических чисел» являются древние системы счета. Бывшие предельные числа наших предков 3, 4, 5, 7, 10, 12, 40, 60, 100, 1000, 10 000 и другие попали в категории «мистических чисел», но мы видели, что ничего в них таинственного и загадочного нет. Считалось, что некоторые из этих предельных чисел будто бы могли действовать на определенные явления природы, быть предвестниками хороших или плохих событий в жизни племени или отдельного человека.

Вред суеверий заключается в том, что они затрудняют правильную ориентировку человека в различных вопросах, отвлекают его внимание от существенного, подрывают в нем веру в свои силы.

Следует заметить, что мистика чисел — явление более позднее. Как уже отмечалось, в категорию «мистических чисел» попали многие предельные числа наших предков. Сюда же попали числа, в свое время выражавшие наиболее устойчивые совокупности, ставшие как бы «основанием» местной системы счисления, а также те числа, которые выражали тот или иной период (цикл) в природе, неподдававшийся в то время удовлетворительному объяснению. Так, по словам профессора математики Казанского университета А. В. Васильева (1853—1929), ассиро-вавилонские жрецы, не умевшие объяснить некоторые небесные явления, связанные с числом «семь», обожествили его, а далекие их потомки поверили, что на особое место семерку поставил бог, творивший мир 7 дней.

Когда люди научились уже неплохо считать и оперировать отвлеченными числами, они заметили, что в окружающем их мире многое зависит от числовых соотношений. По прошествии определенного количества дней в природе начинается новый цикл развития; высота звука, издаваемого струной, определяется длиной этой струны. Все это также натолкнуло людей на мысль о сверхъестественной божественной сущности чисел.

Сопоставление вещей, явлений, политических событий с числами перешло от вавилонян к грекам, от греков к народам Индии и арабам, а затем господствовало в средние века и сохранилось в отдельных местах до нашего времени.

Древнегреческий математик Пифагор (VI век до н. э.) считал, что число—сущность всех вещей и что Вселенная представляет собой гармоническую систему чисел и их отношений. Об этом пифагоровском положении Фридрих Энгельс писал: «Подобно тому, как число подчинено определенным законам, так подчинена им вселенная; этим впервые высказывается мысль о закономерности вселенной»[1]. Позднейшие пифагорейцы придавали этому положению Пифагора чисто мистический смысл. Выделяя одну грань в понимании материи — ее количественную сторону, пифагорейцы мистифицировали ее и превратили число в самостоятельную метафизическую сущность.

Числовая мистика пифагорейцев имела громадное влияние на великого греческого мыслителя Платона (429—348 до н. э.), который особенно в последних произведениях отождествлял свои идеи с числами пифагорейцев. Еще большее развитие числовая мистика получила в Александрии, где столкнулись три цивилизации: египетская, еврейская, развившаяся под большим влиянием Вавилона, и греческая. Здесь возникли различные философские школы, которые старались примирить разнообразные философские направления Греции не только между собою, но и с мировоззрением других, в частности восточных, цивилизаций. Представители одной из таких школ, получившей название неопифагорейской, старались подкрепить свое эклектическое[2] учение авторитетом Пифагора. В тесной связи с этой школой находились и два математика — Никомах Геразский (I—II века) и Теон Смирнский (II век).

Так, первому из них приписывается сочинение «Арифметическое Богословие», в котором подробно изучаются числа от единицы до

---

[1] Ф. Энгельс. Диалектика природы. М., 1969, стр. 160.

[2] *Эклектизм* — соединение разнородных взглядов, теорий, идейных направлений.

десяти с целью доказать их глубокое значение и божественную природу.

Особенную роль в развитии числовой мистики сыграла астрология. Эта лженаука возникла на основе религиозного поклонения небесным светилам народов древнего Востока. Особенно широкий размах она получила в древнем Двуречье, а позже в Ассирии и Вавилоне. Позже астрология распространилась в странах Европы и всего мира. Одновременно с магией и числовой мистикой астрология и в наши дни в капиталистических странах служит для одурачивания простых людей.

Приведем примеры мистических домыслов, относящихся к отдельным числам натурального ряда и исторические факты, которые до некоторой степени объясняют причину их возникновения.

Единица. Пифагорейцы учили, что 1 обозначает дух, из которого происходит весь видимый мир; единица есть разум, добро, гармония, счастье и в то же время материя, тьма, хаос; она соединяет в себе четное с нечетным и мужское с женским.

Профессор прикладной математики Казанского университета Г. Б. Никольский (1785—1844) писал про единицу: «В математике есть чудесный аналог священных истин, провозглашенных христианской верой. Например, как не может быть числа без единицы, так и вселенная без единого владыки существовать не может» (см. [20], стр. 19).

Почему единице пифагорейцы отдавали такое предпочтение в своих фантастических домыслах? Единица — наименьшее натуральное число, которое имеет некоторые характерные свойства, а именно:

а) единица не относится ни к простым, ни к составным числам;

б) каждое натуральное число имеет делителем единицу;

в) единица является единственным натуральным числом, имеющим только один делитель;

г) единица — единственное натуральное число, n-я степень которого равна тому же числу;

д) после умножения (или деления) какого-либо числа на 1 это число не меняется;

е) после деления какого-либо числа, не равного нулю, самого на себя в частности получается 1.

Понятно, что эти особенности не могут быть основанием для обожествления единицы пифагорейцами и напрасных попыток профессора Никольского доказать существование бога на основе существования единицы.

Два — есть начало неравенства, противоречия, оно есть мнение, ибо в мнении встречаются истина с ложью. Два происходит от единицы; два — символ материального атома.

Три. Принимая еще единицу, материальный атом становится тройкой, или движимой частицей. Это наименьшее простое нечетное число. Два и три — единственная пара простых чисел, которые в натуральном ряду стоят рядом. Три — едиственное число натурального ряда, которое равно сумме всех предыдущих натуральных чисел. Как мы видели, оно долго было наибольшим числом, для которого человек нашел отдельное название. Со временем вокруг него слагались различные поверья. Еще в древнем Вавилоне поклонялись трем главным божествам: Солнцу, Луне и Венере. В древнем Египте главными также были три бога: Гор, Озирис и Изида. Жрица Дельфийского храма Аполлона — Пифия — перед пророчеством постилась три дня. Пифагорейцы считали три первым настоящим числом, так как оно имеет начало, середину и конец. Три считалось также числом божественным, святым, символом совершенства в предметах и явлениях мира. Поэтому у римлян три главных бога: Юпитер (бог неба, света и дождя, громовержец; позднее верховное божество римского государства), Марс (божество полей и урожая, затем бог войны), Квирин (божество войны). В VI веке до нашей эры на Капитолии был воздвигнут храм Юпитера, превратившийся после пристройки к нему храмов Юноны (богиня Луны и охранительница женщин, позднее супруга Юпитера, царица неба и земли) и Минервы (покровительница ремесел, наук и искусств) в важнейший религиозный центр Древнего Рима. С распространением римского владычества культ капиталийской троицы (Юпитер, Юнона, Минерва) утвердился как в Италии, так и в провинциях. Юпитер очень рано был отождествлен с Зевсом; три богини судьбы [1], три богини красоты (грации, они изображались в

[1] *Судьба* — согласно идеалистическим и религиозным взглядам — слепая сила, стоящая над человеком и предопределяющая его жизненный путь

виде трех молодых красивых женщин). Богиня охоты Диана имела три лица. Даже верховные жрецы Рима делились на три категории: понтифики, фламины и весталки. В индийской религии бога Шиву также изображают с тремя лицами.

Мистификацию числа «три» широко использовала христианская религия, позаимствовала идею триликого бога у религии и мифов древнего мира. В ней бог выступает в трех лицах: бог-отец, бог-сын и бог-дух святой. Христа также изображали на иконах как существо, имеющее три лица. Уже у александрийца Филона мы находим учение о Троице (три божественные силы: доброта, могущество, слово (логос).

Числовая мистика определенным образом отразилась в художественной литературе. Так отзвук мистификации числа «три» мы видим в произведениях гениального итальянского поэта Данте Алигьери (1265—1321). Самое большое его произведение — «Божественная комедия» — состоит из трех главных частей: Ад, Чистилище, Рай. Каждая часть поэмы содержит 33 (11×3) песни, не считая первой; поэма написана в форме терцин [1]. В тексте поэмы число «три» также встречается часто.

Еще в начале путешествия поэта в подземное царство (Ад, песня 1-я) его преследуют три зверя — пантера, волчица и лев; позже (Ад, песня 2-я) он убеждает, что три блаженные женщины беспокоятся о его судьбе. Данте

[1] *Терцина* — вид трехстишия.

использовал распространенную в его эпоху религиозную символику, хотя и боролся с темными силами этой эпохи.

Приведем еще несколько пословиц и поговорок дореволюционного периода, связанных с числом «три (как с большим числом), в которых ярко отображена тяжелая жизнь простого народа; «Говорят три дня, да все о нищете»; «Ходила три дня, да выходила нищету»; «Наберу три копны несчастья, да еще и через верх»; «Много я имею: три риги хлеба; в одной ветер, в другой мак, а третья стоит просто так».

В сказке «Илья Муромец и Соловей-разбойник» три старика дают Илье трижды напиться воды, после чего он чувствует в себе огромную силу, хотя до этого тридцать лет болел и не слазил с печки.

Выдумки, связанные с мистификацией числа «три», очень распространенные в эпоху средних веков, оживают в мистических спекуляциях некоторых западных журналистов XIX века и даже в наши дни.

Девизом на гербе Бисмарка было латинское изречение «В тройственности — сила». Мистики «доказывали», что в жизни Бисмарка число «три» действительно сыграло особую роль. Он служил при трех императорах, участвовал в трех войнах, подписал три мирных договора, организовал союз трех государств и встречи трех императоров, боролся с тремя партиями, владел тремя имениями и имел троих детей. Так, подтасовывая факты, реакционеры прививали простым людям мистическое понимание чисел, которые якобы каким-то таинственным образом являются проявлением воли сверхъестественных сил.

Четыре. Мы уже отмечали, что оно долгое время было предельным в натуральном ряде чисел. У пифагорейцев число «три» было символом живого мира. Поэтому четыре (живой мир плюс единица) они считали символом всего известного и неизвестного. Выполняя четыре действия над натуральными числами в пределах первого десятка, последователи Пифагора истолковывали получаемые результаты как символы определенных идей, качеств, свойств, присущих предметам окружающего мира и людям.

Поскольку сумма первых четырех натуральных чисел равняется десяти ($1+2+3+4=10$), то четыре считали символом силы. А образовывая разные суммы из этих самых четырех чисел, можно получить все числа первого десятка ($1+4=5$, $2+4=6$, $3+4=7$, $1+3+4=8$, $2+3+4=9$, $1+2+3+4=10$). Поэтому число «четыре» они рассматривали как символ всего существующего. Число «четыре», как и любое квадратное (то есть число вида n^2, где n — натуральное), у пифагорейцев было символом равенства, справедливости.

Пять и семь. Они сыграли большую роль в продолжении натурального ряда чисел. Долгое время оставались наибольшими числами, которые имели собственные названия. Пять — есть сумма первого четного числа 2 и первого нечетного числа 3, что соответствует различию между мужским и женским началом, и поэтому сумма этих чисел, равная 5, является символом брака.

Выше упоминались памятники народного творчества (сказки, пословицы и поговорки), указывающие на то, что число «семь» употреблялось не в смысле «шесть плюс один», а в смысле «много». Эти разговорные конструкции некоторых народов можно было бы продолжить, например: «Семь верст к небу — и все пешком»; «Сотворил бог — и сам семь дней после этого смеялся»; «Черт семь пар сапог истоптал, пока пару подобрал»; «Семь раз отреза́ли — длинная: семь раз лицевали — новая»; «Семь пятниц на неделю». Еще и в наше время некоторые люди в знак пожелания счастья молодоженам в подарок преподносят безделушку — семь слоников.

Недавние исследования показывают, что число «семь» было ведущим в построении орнаментов на бляхах, фигурках женщин и других предметах из палеолитической стоянки Мальта на реке Белой. Оно выделялось в тот период и на Кавказе, на Центрально-Русской равнине, на Дону, в центральной и западной Европе. Археологи, изучающие палеолитическое искусство, не сомневаются теперь в особом к нему отношении наших далеких предков. Некоторые считают, что число «семь» было связано с культом Луны. Есть предположение, что для людей в древнейшую эпоху был удобен счет времени по лунному календарю; при этом лунный месяц делился на две равные части, по 14 дней, соответствующие росту и убыванию Луны; следующим было деление каждой части на две семидневки — прообразы наших недель. Это открывает путь к важнейшей этнографической параллели: у северных народов именно женщины были хранительницами лунного календаря, вычисляя по нему сроки беременности, а отсюда и вытекает, что число «семь» в ранних религиозных представлениях связано со счетом времени и продолжением рода.

В Ленинградском музее антропологии и этнографии хранится старинный «вечный» календарь якутов, где на спирали расположено круглых ямок 365, в которые вставлялся деревянный шпенек при счете дней года, а к этой большой спирали примыкал маленький круг из 7 ямок — для счета недели.

Можно только поражаться тому, что группировки по семи элементов распространены всюду к северу и востоку от Байкала, где климатические условия сходны с условиями эпохи оледенения. Мифология, легенды, предания народов Сибири и Дальнего Востока насыщены «магическими семерками». Число «семь» используется здесь прежде всего для характеристики Вселенной в целом, космических процессов во времени и пространстве. Показатели шкалы времени — от 7 дней до 7 поколений. Шкала пространства гораздо разнообразней: 7 небес у ойротов и кентов, 7 миров у чукчей и тому подобное.

Итак, возраст семерки очень велик; счет семерками оказался необычайно живучим: «Однажды использованный, он не забывался, а передавался из поколения в поколение охотниками палеолита, затем пастухами, земледельцами и рыболовами неолита, сохранялся в религиях первых цивилизаций и в мировых религиях, живет и до сих пор в народных суевериях» (см. [8], стр. 331—343).

Число 7 было священным в древних цивилизациях Востока. В шумерских мифах о Гильгамеше[1] судьбы Вселенной вершат вначале 7 старших богов и богинь, самых могучих и мудрых; перед подземным царством 7 ворот, а в нем 7 судей распоряжаются судьбами умерших. Южный ветер 7 дней лежит неподвижно, заживляя свои раны и так далее. Священным было число 7 и в древних государствах Египта, Индии, Китая, Америки, также присутствуя в представлениях о космосе и отсчете времени, ибо оно действительно «космическое»: 7 суток длится одна фаза Луны; на ночном небе невооруженным глазом видно лишь 7 блуждающих светил: Солнце, Луна, Марс, Венера, Меркурий, Юпитер и Сатурн, 7 звезд в созвездии Большой Медведицы — символ Севера (см. [8], стр. 339—340). Каждому из семи почитаемых светил древние вавилоняне посвящали по одному дню. Отсюда и возникает разделение времени по семи дней. Об этом и доныне красочно напоминают названия дней недели в некоторых европейских языках; например, во французском языке: lindi (понедельник) — день Луны, mardi (вторник) — день Марса, mercredi (среда) — день Меркурия и так далее.

В «священных» книгах христианской религии число «семь» очень популярно. Авторы

---

[1] *Гильгамеш* — полулегендарный правитель шумерского города Урука (Южная Месопотамия) в начале XXX века до нашей эры.

этих книг принимают все те мистические наслоения, которые приписывались семерке в результате «исследований» астрологов Востока и пифагорейцев. Вот несколько примеров из наиболее запутанного раннего христианского произведения «Апокалипсис»[1], или «Откровения Иоанна», помещенного в конце Нового завета[2]. Вначале автор видит бога, который сидит на престоле и держит в руке книгу, запечатанную семью печатями. Когда с книги снимают печати, происходят различные чудеса. Когда снимают седьмую печать, появляется семь ангелов с трубами... Когда седьмой протрубит, выходят на сцену новые семь ангелов с семью чашами гнева господнего, который выливается на землю.

Сделано немало попыток объяснить «живучесть» семерки как какого-то «магического числа». Здесь и разного рода мистические толкования особого смысла в самом этом числе, идущие от пифагорейцев, астрологов и алхимиков. Например: «7 есть всемирное абсолютное число всех символов, ибо составлено из 3 и 4», оно «синоним полноты», «совершенства», «высшая степень восхождения к познанию и премудрости», оно выражает магическое могущество»; в то же время «оно появляется всюду, где была тайна: например, 7 — число дней творения, 7 дней в неделе, 7 музыкальных звуков, 7 смертных грехов, 7 цветов радуги» (цитировано по книге [8], стр. 343).

---

[1] *Апокалипсис* — по-гречески — откровение.

[2] *Новый завет* — часть Библии почитаемой только христианами.

В свете сказанного становится понятным, почему «магическую» семерку почитали также древние обитатели Америки, Африки, Арктики, Новой Зеландии и жители других частей света. Для этого они вовсе не обязаны были общаться с Вавилоном, а могли получить эту веру в наследство от своих палеолитических предков, так же как ее получили шумеры и индийцы, создавшие цивилизацию на фундаменте культур каменного века.

Восемь. Его пифагорейцы считали символом смерти. Этот вывод они сделали, изучая результаты, полученные от умножения натуральных чисел на число «восемь».

1×8=8	сумма цифр		8
2×8=16	»		1+6=7
3×8=24	»		2+4=6
4×8=32	»		3+2=5
5×8=40	»		4+0=4
6×8=48	»	4+8=12, но	1+1=2
7×8=56	»	5+6=11, но	1+2=3
8×8=64	»	6+4×10, но	1+0=1

Как видим, в первых пяти произведениях сумма результатов постепенно уменьшается. Но в шестом произведении (6×8=48) эта закономерность уже нарушается. Чтобы установить это свойство в остальных произведениях, пифагорейцы находят еще раз суммы цифр, которые уже являются суммами цифр первых произведений, и таким образом получают убывающий ряд натуральных чисел: 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Умножение числа 9 на 8 дает число 72, сумма цифр которого равна 9, а далее процесс уменьшения суммы цифр повторяется до произведения 18×8=144, сумма цифр которого снова равна 9, и опять процесс уменьшения суммы цифр повторяется. Установление этого интересного свойства числа 8 свидетельствует о наблюдательности ученых того времени. Ясно, что это свойство ничего общего с мистикой не имеет. Его легко можно объяснить, если в произведении число 8 записывать, как 9—1.

Девять. Оно играло большую роль в числовой мистике, особенно у народов, которые пользовались месячным календарем и считали, что промежуток времени между двумя одинаковыми фазами Луны равен 27 дням (на самом деле он равен 27, 321661). Следовательно, третья часть месяца равна 9 дням. А это давало повод приписать числу «девять» особое таинственное значение. Его считали числом мудрости, судьбы, символом знаний, образования, вообще священным числом.

Пифагорейцы считали число «девять» символом постоянства, мужества, стойкости. При этом они ссылались на некоторые свойства результатов действий над натуральными числами, в частности, на произведения чисел натурального ряда на число «девять». $1\times9=9$, $2\times9=18$, $3\times9=27$, $4\times9=36$, $5\times9=45$, $6\times9=54$, $7\times9=63$, $8\times9=72$, $9\times9=81$, $10\times9=90$.

Как видим, во всех случаях сумма цифр этих произведений равна 9. Это свойство суммы цифр сохраняется и дальше, если в некоторых случаях брать еще и суммы цифр сумм цифр произведений. Например, $11\times9=99$, сумма цифр $9+9=18$, а другая сумма цифр $1+8=9$; $12\times9=108$ сумма цифр $1+0+8=9$; $13\times9=117$, сумма цифр $1+1+7=9$; $14\times9=126$, сумма цифр $1+2+6=9$,...; $21\times9=189$, сумма цифр $1+8+9=18$, а другая сумма цифр $1+8=9$ и так далее.

Пифагорейцы определяли свойства числа 9 как множителя, но, как и в случае множителя 8, не нашли правильного объяснения и обратились к мистификации чисел 8 и 9. Вместе с тем объяснение здесь очень простое. Каждый ученик знает, что число, полученное от умножения на 9, делится на 9, но у числа, делящегося на 9, сумма цифр должна делиться на 9. Таким образом, нет ничего мистического в том, что произведения натуральных чисел на 9 имеют сумму цифр, равную девяти (или кратную девяти).

Аналогично можно объяснить и тот факт, что произведения натуральных чисел на 8 имеют суммы цифр, которые постепенно убывают.

В самом деле:

$$1\times8=1\times(9-1)=1\times9-1,$$
$$2\times8=2\times(9-1)=2\times9-2,$$
$$3\times8=3\times(9-1)=3\times9-3,$$
$$4\times8=4\times(9-1)=4\times9-4$$

и так далее.

Мы видим, что произведения, взятые в указанном виде, представляются как разность чисел, где сумма цифр уменьшаемого всегда может быть приведена к девяти и вычитаемые которых постепенно возрастают на единицу. Следовательно, сумма цифр этих разностей постепенно уменьшается на единицу.

Приведем несколько примеров, в которых нашли свое отображение представления людей различных эпох о числе «девять»: жюри на олимпийских играх в древней Греции состояло из девяти судей, существовало девять муз — покровительниц искусства и науки; Лернейская Гидра[1] в греческой мифологии имела девять голов; девять архонтов (высших руководящих деятелей) стояли у власти в греческих республиках; «История» Геродота состоит из девяти книг.

У древних германцев жертва из девяти животных считалась наибольшей; на торжествах подавалось девять блюд.

Не поборол предрассудков и Данте, который широко использовал число «девять» в поэме «Божественная комедия». В аду, как он пишет, грешники искупают свои грехи в девяти кругах, девять ступенек образуют чистилище, рай имеет девять сфер. Даже в собственной жизни он ищет таинственного ритма, связанного с числом «девять». Поэт встретил Беатриче на девятом году своей жизни. На девятом году после встречи он написал первый сонет, посвященный ей. Беатриче умерла на девятый день месяца, который по восточному календарю был девятым месяцем года. Это случилось в год, которым заканчивалось девятое десятилетие столетия.

В русских и украинских сказках и легендах действие часто происходит в «тридевятом царстве» за «тридевять земель». Название

---

[1] *Гидра Лернейская* — в греческой мифологии чудовищная змея с 9 головами, которая жила в Лернейском болоте в Аргориде. Она считалась непобедимой: на месте отрубленной головы у нее вырастало две новых. Одна из голов была бессмертна. Уничтожение этой гидры было одним из 12 подвигов Геракла.

картины И. К. Айвазовского «Девятый вал» также отражает народные поверья о силах природы, из которых девятая наиболее грозная.

Десять. Это число, как мы видели, уже в глубокой древности было новой единицей счета у многих народов, которые считали десятками. Поэтому его называли символом гармонии, полноты,

Пифагорейцы десять (тетраду) изображали «треугольным числом» (рис. 1) 1+2+3+4=10. Греческий писатель Лукиан (около 120—после 180) передает, что однажды Пифагор попросил кого-то считать: как только тот человек произнес 1, 2, 3, 4, Пифагор перебил его: «Видишь,— сказал он, — то что ты называешь четырьмя, есть не что иное как 10, совершенный треугольник и клятва наша».

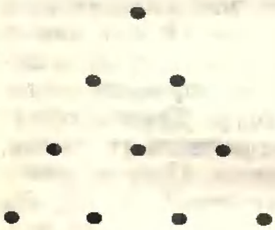

Рис. 1

Пифагорейцы клялись «тем, кто вложил в нашу душу тетраду — источник и корень вечной природы». Даже строение Вселенной они подчинили своим мистическим конструкциям. Около центрального огня, учили пифагорейцы, вращается 10 небесных тел, расположенных на десяти сферах. А чтобы достигнуть мистической десятки, пифагорейцы, кроме сферы неподвижных звезд, Сатурна, Юпитера, Марса, Венеры, Меркурия, Солнца, Луны и

Земли придумывают еще сферу антиземли. Это десятое тело — антиземля — одновременно с другими вращается около «центрального огня». Все эти тела расположены от «центрального огня» на расстояниях, которые находятся в гармоническом отношении между собою соответственно с музыкальными интервалами. А поэтому звуки, которые возникают при движении десяти небесных тел, образуют гармоническую музыку вращающихся сфер, музыку Вселенной.

Одиннадцать. Как теперь установлено, изменения активности Солнца влияют на здоровье людей. Эти изменения происходят периодически приблизительно через 11 лет. Вероятно, наши предки заметили эту периодичность и начали считать число 11 нехорошим числом.

Двенадцать. Долгое время было предельным числом у многих народов. Некоторые из них пользовались двенадцатиричной системой нумерации (счисления). Число «двенадцать» встречалось и еще встречается в практической деятельности человека. Так, до сих пор сохранилась двенадцатиричная система мер: год имеет 12 месяцев; сутки складываются из двух дюжин часов; час — из пяти дюжин минут; минута — из пяти дюжин секунд. Английская мера фут равна 12 дюймам.

В Вавилоне, Китае, Риме и других странах 12 считалось счастливым числом, символом достатка, полноты, совершенства. Этому способствовало и то, что оно имеет 4 собственных делителя: 2, 3, 4, 6. Поэтому диалог «Законы» Платон написал в двенадцати книгах. По христианскому вероучению Христос имел 12 учеников (апостолов); двенадцать сынов Якова (персонаж одной из библейских книг) дают начало 12 племенам евреев. В библии бог грозит наказать грешников до двенадцатого поколения (жестокость, которая не имеет себе равных).

Тринадцать. Мы уже довольно подробно говорили о суевериях, связанных с числом «тринадцать». Добавим к этому, что суеверные люди считали вполне естественным, что после такого «счастливого» числа, как «двенадцать», должно быть число противоположных качеств, и его стали избегать. Подтверждением этого послужило еще одно обстоятельство. У многих народов древности цифры обозначались буквами. 13 у древних евреев изображалось буквой М. Но с этой же буквы в древнееврейском языке начиналось слово «мем» — смерть. Подобное совпадение, по убеждению суеверного человека, не могло быть случайным. Поэтому у евреев возникло поверье, что если 13 человек собираются вместе, значит, это предвещает несчастье и даже смерть. В христианской религии страх перед числом 13 связывается с предательством тринадцатого апостола Иуды. Этого числа избегали еще и потому, что в отличие от 12 13 является простым, оно не имеет делителей кроме самого себя и единицы. А при низкой культуре вычислений это затрудняло людей. Можно привести примеры, которые опровергают суеверия, связанные с числом «тринадцать», как несчастливым.

Так, например, выдающийся советский

математик, член-корреспондент АН СССР Н. Г. Чеботарев (1894—1947) шутя утверждал, что в его жизни число 13 самое счастливое. Он первый получил результаты, которые приблизили математиков к решению знаменитой так называемой «тринадцатой» проблемы немецкого математика Д. Гильберта (1862—1943). 26 февраля (дважды по 13) 1927 года он успешно защитил докторскую диссертацию, в такую же дату женился.

В 1957 году студент III курса Московского университета, ныне профессор, лауреат Ленинской премии В. И. Арнольд решил «тринадцатую» проблему Гильберта. Опять число 13 оказалось счастливым не только для В. И. Арнольда, но и для всей советской математики, как свидетельство огромного успеха отечественной науки.

Вот примеры из области спорта. На IX чемпионате мира по футболу игрок сборной команды ФРГ Г. Мюллер неизменно выступал под тринадцатым номером. Это не помешало ему стать лучшим бомбардиром чемпионата. На чемпионате мира 1971 года болгарской спортсменке Марии Гиговой также достался тринадцатый номер, который оказался самым счастливым — она стала первой в истории художественной гимнастики женщиной, которой удалось дважды подряд завоевать звание абсолютной чемпионки мира.

Еще несколько примеров: 13 февраля 1873 года родился Ф. И. Шаляпин — гордость русского искусства, певец с мировым именем; 13 марта 1888 года родился А. С. Макаренко; 13 июля 1862 года родился Н. А. Рубакин —

известный ученый-библиограф, просветитель (свою уникальную библиотеку, свыше 80 000 томов, он завещал народу).

Коротко остановимся еще на числах 17, 36, 40 и некоторых других.

Семнадцать пифагорейцы считали презренным и избегали его. Свое отношение к этому числу они объясняли тем, что оно лежит между полным квадратом ($16=4^2$) и удвоенным квадратом ($18=2\cdot3^2$). К тому же 16 и 18 — единственные числа, для которых периметр прямоугольника равен его площади.

Тридцать шесть у пифагорейцев было наивысшей клятвой. При этом использовался ряд свойств этого числа. $36=1+2+3+4+5+6+$ $+7+8=(1+3+5+7)+(2+4+6+8)$. На основе этих соотношений пифагорейцы сделали вывод, что 36 есть символ мира, который образуется, учили они, из первых четырех четных и нечетных чисел. Поскольку 4 и 6, в свою очередь, играли значительную роль в числовой мистике, то найденные выше соотношения только усиливали интерес к числу 36 со стороны людей, которые искали «таинственный» смысл в каких-либо числовых соотношениях. Так как $36=1^3+2^3+3^3$, то есть сумма кубов трех первых чисел, а действительное пространство тоже трехмерное, этого было достаточно для образования новых легенд вокруг числа 36.

Сорок, как мы видели, долгое время играло роль предельного числа у многих народов, и с этим было связано ряд народных поверий, пословиц, преданий, сказок, религиозных обычаев и легенд. Примеров библейских легенд можно было бы назвать много. Так, мифический всемирный потоп продолжался как раз «сорок дней и сорок ночей»; мифические герои «святых книг» христианской религии — Моисей, Илья и Христос — постились по сорок дней; после воскресения Христа он еще сорок дней находился на земле до того как вознестись на небо.

Число 120 по книге Бытия было продолжительностью жизни людей после потопа. Оно есть сумма первых 15 чисел, 15-е треугольное число, равно сумме треугольного числа 15, квадратного числа 25, пятиугольного 35 и шестиугольного 45; оно имеет 15 делителей, сумма которых равна удвоенному числу 120, что должно иметь прямую связь с двойственностью жизни, жизнью духа и жизнью тела.

Однако числа, которые так часто встречаются в библейских легендах, не отражают никаких реальных соотношений. Они перешли туда из народных легенд дохристианских религий и «учений» различных мистических школ.

Интересно, что в последние годы открыты чрезвычайно важные связи между многими явлениями природы, характеризующиеся натуральными числами, в частности такими, каким мистика не придавала никакого значения. Жизнь на Земле связана с Солнцем, со сложными физическими процессами и ядерными реакциями, которые происходят в глубинах этого небесного тела.

Наукой доказано, что кроме изменений в деятельности организмов в течение суток существуют еще периоды — двухгодичные, шестигодичные и особенно периоды в *одиннадцать* лет, *двадцать два* года и *сто* лет.

Эпидемии гриппа, чумы, быстрое распространение таких болезней животных, как ящур и туляремия, подчинены ритму солнечного излучения.

С периодом в 11 лет то повышается, то понижается температура воды в мировом океане, так же как интенсивность его течений. Это обусловливает ритмичность развития водорослей, полипов, планктона, от чего зависит размножение промышленных рыб (сельди, трески и других), огромные косяки которых плывут на север от Норвегии и Исландии в соответствии с ритмом протекания ядерных реакций в недрах Солнца.

Саранча время от времени опустошает огромные площади на территории более чем 70 государств земного шара. Исследования советских ученых показали, что периоды ее массового размножения также зависят от интенсивности солнечного излучения. Как только солнечная активность уменьшается, через 3—5 лет саранча почти исчезает, но в следующий период активного излучения Солнца опять становится стихийным бедствием на территории многих стран.

В южных штатах США через каждые 21—22 года очень размножается вредное насекомое — совка. В период таких размножений она уничтожает до единого листка посевы хлопчатника на больших территориях.

Можно привести еще пример периодичного размножения другого вредителя — непарного шелкопряда. В 1957 и 1958 годах (на эти годы приходился максимум солнечной активности) гусеницы этого вредителя объедали листья деревьев на территории в сотни квадратных километров, а его бабочки летали даже в центре Москвы.

Сегодня наука еще не может ответить, почему именно через 2, 11, 22 и 100 лет резко меняется активность солнечного излучения, а также происходят описанные выше явления. Но это совсем не значит, что числа 2, 11, 22 и 100 имеют какое-то мистическое значение. Нет и никогда не будет предела познания человеком окружающего мира. Наоборот, темпы освоения «белых пятен» природы возрастают из года в год. Достаточно сказать, что со дня запуска первого советского искусственного спутника Земли (4 октября 1957 года) раскрыто больше тайн космоса, чем за всю историю существования человека. Поэтому напрасными были бы попытки приписать свойства несчастливого числа вместо скомпрометированной «чертовой дюжины» ее современным заместителям — 11 или 22. Сегодня наука открывает закономерности солнечной активности и ее значение в протекании многих процессов в живых организмах нашей планеты, а завтра она откроет и причины этих ритмов. Победная поступь науки не оставляет в этом никаких сомнений.

Мы видели, что многие народы, в том числе и древние евреи, среди которых зародилась Библия, первоначально записывали числа не особыми знаками-цифрами, а буквами алфавита.

В этом отношении большой интерес представляет расшифровка пресловутого апокалипсического *«звериного числа»* 666, данная еще Ф. Энгельсом. Ф. Энгельс взял два древнееврейских слова, означавших «император Нерон», и подсчитал сумму числовых значений, входящих в него букв. Она оказалась равной 666. О том, что это не было случайным совпадением, свидетельствует такой факт. Один из церковных писателей Ириней (II век) сообщает, что он знал такие варианты Апокалипсиса, в которых «звериное число» выражено в виде 616. Оказалось, что и этот вариант подходит. В некоторых еврейских рукописях того времени имя «Нерон» писалось на латинский манер, без последнего «н» (Nero). И вот, если в словах «император Нерон» отбросить второе «н» (50), то сумма букв-чисел составит уже не 666, а 616. В связи с числом 666 небезынтересно вспомнить героя романа Л. Н. Толстого «Война и мир» Пьера Безухова, замышлявшего убийство Наполеона: «Он чувствовал, что то положение, в котором он находится, не могло продолжаться долго, что наступает катастрофа, долженствующая изменить всю его жизнь, и с нетерпением отыскивал во всем признаки этой приближающейся катастрофы. Пьеру было открыто одним из братьев масонов следующее, выведенное из Апокалипсиса Иоанна Богослова, пророчество относительно Наполеона.

В Апокалипсисе, главе тринадцатой, стихе восемнадцатом, сказано: «Зде мудрость есть; иже имать ум да сочтет число зверино: число бо человеческо и число его шестьсот шестьдесят шесть».

Из той же главы в стихе пятом: «И даны быша ему уста глаголяща велика и хульна; и дана бысть ему область творити месяц четыре десять два».

Французские буквы подобно еврейскому числовому изображению, по которому первыми десятью буквами обозначаются единицы, а прочими десятки, имеют следующие значения:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	m	n	o	p	q
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30	40	50	60	70

r	s	t	u	v	w	x	y	z
80	90	100	110	120	130	140	150	160

Написав на этой азбуке цифрами слова L'empereur Napoléon (император Наполеон), выходит, что сумма всех чисел равна 666-ти, и поэтому Наполеон есть тот зверь, о котором предсказано в Апокалипсисе. Кроме того, написав по той же азбуке слова quarante deux (сорок два), то есть предел, который был положен зверю глаголати велика и хульна, сумма этих чисел, изображающих quarante deux, опять-таки равна 666-ти, из чего выходит, что предел власти Наполеона наступит в 812 году, в котором французскому императору минуло сорок два года. Предсказание это очень поразило Пьера, и он часто задавал себе вопрос о том, что именно положит предел власти зверя, то есть Наполеона, и на основании тех же изображений слов цифрами и вычислениями старался найти ответ на занимавший его вопрос. Пьер написал в ответ на этот вопрос: L'empereur Alexandre? (император Александр?), La nation russe? (Русский народ?). Он счел буквы, но сумма цифр выходила гораздо больше или меньше 666-ти. Один раз, занимаясь вычислениями, он написал свое имя — Comte Pierre Besouhoff. Сумма цифр тоже далеко не вышла. Он, изменив орфографию, поставил z вместо s, прибавил de, прибавил article (член) le и все не получал желаемого результата. Тогда ему пришло в голову, что ежели бы ответ на искомый вопрос и заключался в его имени, то в ответе непременно была бы названа его национальность. Он написал Le russe Besuhof (русский Безухов) и, сочтя цифры, получил 671. Только 5 было лишних; пять означало «е», то самое «е», которое было откинуто в article перед словом L'empereur. Откинув точно так же, хотя и неправильно, «е», Пьер получил искомый ответ l'russe Besuhof, равный 666-ти. Открытие это взволновало его. Как, какою связью был он соединен с тем великим событием, которое было предсказано в Апокалипсисе, он не знал; но он ни на минуту не усомнился в этой связи. Его любовь к Ростовой, антихрист, нашествие Наполеона, комета, 666, L'empereur Napoléon и l'russe Besuhof — все это вместе должно было созреть, разразиться и вывести его из заколдованного, ничтожного мира московских привычек, в которых он чувствовал себя плененным, и привести его к великому подвигу и великому счастию» (см. Л. Н. Толстой. Война и мир, т. III—IV, М., Учпедгиз, 1957, стр. 83—84).

Страх перед «священным» и «неизреченным» именем бога приводил верующих к мысли заменить его другим словом и в выборе этого слова руководствовались тем, что сумма чисел, изображенных буквами, должна равняться сумме чисел, изображающих буквы таинственного имени.

В эпоху Возрождения в философских трудах Николая Кузанского (1401—1464), Джордано Бруно, в астрономических сочинениях Иогана Кеплера (1571—1630), в химических — Парацельса (1493—1541) мы находим отзвуки числовой мистики. Так, Николай Кузанский обожествляет единицу.

В XIX веке многие ученые писали о философских и религиозных свойствах чисел. Святыми провозглашались числа один, два, три и семь. Известный философ Конт (1798—1857) предлагал даже семь принять за основание системы счисления (нумерации). С другой стороны, у Гегеля и даже у левых гегельянцев мы встречаем тот же древний мотив мистического уважения к тому или другому числу.

Из приведенных примеров и пояснений вытекает, что числовая мистика (как, впрочем, и всякая иная) имеет вполне материалистическое объяснение.

Магические квадраты

Магическим квадратом порядка n называется квадратная таблица, содержащая n последовательных чисел (от 1 до n) натурального ряда, расположенных так, что суммы от сложения чисел каждой строки, каждого столбца и двух больших диагоналей равны между собой. Эта сумма называется магическим числом, она, как нетрудно показать, равна

$\frac{1}{2}n(n^2+1)$. Заметим здесь, что если в квадрате получается одно и то же число только от сложения чисел в строках и столбцах, то такой квадрат называют полумагическим.

Легко проверить непосредственно, что не существует магических квадратов для $n=2$. Для $n=3$ и $n=4$ магическими квадратами, например, будут квадраты, изображенные на рисунках 2 и 3. У них магические суммы, соответственно равны 15 и 34.

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Рис. 2

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 3

С незапамятных времен, научившись считать, наши далекие предки с изумлением заметили, что числа имеют различные загадочные свойства, которые они не могли объяснить. Оказалось, например, что, складывая различные числа, можно получить одно и то же число. Оказалось также, что, располагая числа правильными рядами, один под другим, в случае удачи можно складывать числа слева направо (в строках), сверху вниз (в столбцах), а также наискось (в диагоналях) и каждый раз получать одно и то же число. Затем придумали разделить числа линиями и получили квадрат, обладающий, по их мнению, магической силой. Такие квадраты стали изготовлять из различных материалов и продавать верующим. Зашитый в ладанку, он становился талисманом[1] или амулетом[2] (подробнее см. [17], стр. 5—6).

В Китае и Индии магические квадраты были известны еще до нашей эры[3], причем в Индии разработка математической теории построения магических квадратов достигла значительных успехов, в частности там знали общий метод построения магических квадратов при любом нечетном n.

Арабы (точнее, народы, писавшие на арабском языке) заимствовали у народов Индии сведения о магических квадратах. Через арабов магические квадраты становятся известными в Греции и Византии. Наконец, магические квадраты, да и вся магия чисел, в средние века проникают в Западную Европу.

Вот один из древнеиндийских памятников почти 2000-летней давности (рис. 4).

---

[1] *Талисман* — предмет, который, по суеверным представлениям, обладает способностью приносить его владельцу счастье, удачу.

[2] *Амулет* — предмет, которому суеверно приписывалась сверхъестественная способность отвращать от владельца болезнь и бедствия и защищать от враждебных чар.

[3] Самое раннее упоминание о магических квадратах встречается в Китайской книге, написанной за 4-5 тысяч лет до нашей эры.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 4

В Западной Европе этот квадрат (с магическим числом 34) был долго неизвестен. В начале XVI века о нем узнал знаменитый немецкий художник и гравер Альфред Дюрер (1471—1528). Он был им так очарован, что даже воспроизвел его, правда, в несколько измененном виде, в одной из своих гравюр («Меланхолия», 1514). Этот волшебный» квадрат обладает интересными дополнительными свойствами, например: сумма чисел, расположенных по его углам, равна «магическому числу» 34; суммы чисел в каждом из пяти маленьких квадратов (в 4 клетки), примыкающих к вершинам данного квадрата, и в таком же центральном квадрате также равны 34; в каждой его строке есть пара рядом стоящих чисел, сумма которых равна 15, и еще пара тоже рядом стоящих чисел, сумма которых равна 19.

С глубокой древности и до XVI века (а кое-где и до сих пор) сохранилось ложное учение о том, что люди разного темперамента находятся под влиянием различных планет. Жизнерадостным сангвиникам будто бы покровительствуют планеты Юпитер и Венера, мужественным холерикам — Марс, флегматикам — Луна, неуравновешенным меланхоликам — Сатурн. Каждой планете, Солнцу и

Луне астрологи приписывали магический квадрат определенного порядка: Сатурну — третьего, Юпитеру — четвертого, Марсу — пятого, Солнцу — шестого, Венере — седьмого, Маркурию — восьмого, Луне — девятого. Уже в 1533 году за десять лет до смерти Николая Коперника (1473—1543) немецкий гуманист Генрих Корнелий Агриппа из Неттенхейма в своем сочинении «О сокровенной философии» описал семь магических квадратов, имеющих в основании 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 клеток. Число квадратов было выбрано равным числу птоломеевых планетных сфер [1]. Агриппа назвал эти квадраты «планетными таблицами». Каждую из них он связал с одной из семи планет, как указано выше. Агриппа не дал никакого способа построения этих планетных таблиц, но советовал гравировать их на пластинках или дисках из различных металлов и носить на себе как амулеты. Вообще значительное распространение получили амулеты, на одной стороне которых был изображен бог, именем которого названа соответствующая планета, а на оборотной—магический квадрат этой планеты (см. [7], стр. 7—8).

Некоторые ученые того времени, такие как, например, упоминаемый выше Парацельс, ви-

[1] Согласно космогонии Птоломея в центре мира — Земля; вокруг нее небесные сферы, вложенные друг в друга. На каждой сфере по одной планете. На внутренней — Луна, далее Меркурий, Венера, Солнце, Марс, Юпитер и на внешней — Сатурн (Луна и Солнце относились к числу планет). За сферой Сатурна были еще две небесные сферы. На одной из них расположены неподвижные звезды.

дели в магических квадратах только мистический смысл. Другие же начинают их математически анализировать. Так, в сочинении немецкого математика Штифеля «Полная арифметика», вышедшем в 1544 году, указывается, что некоторые магические квадраты обладают чудесными и дополнительными свойствами, а именно, у них может быть выделена срединная часть, которая также является магическим квадратом, а если взять его срединную часть (отбросить окружающую его рамку шириной в одну клетку), то снова получим магический квадрат. В частности, он построил магический «7^2—квадрат», срединная часть которого есть магический «5^2—квадрат», заполненный натуральными числами от 13 до 37; если взять срединную часть этого квадрата, то получим магический «3^2—квадрат», заполненный натуральными числами от 21 до 29 (см. рис. 5).

40	1	2	3	42	41	46
38	31	13	14	32	35	12
39	30	26	21	28	20	11
43	33	27	25	23	17	7
6	16	22	29	24	34	44
5	15	37	36	18	19	45
4	49	48	47	8	9	10

Рис. 5

Это был первый случай анализа математической формы магических квадратов.

О магических квадратах писали такие крупные математики, как Баше де Мезириак (1581—1683), Блез Паскаль (1623—1662), Пьер Ферма (1601—1665), Френикль де Бесси (1602—1675), Антуан Арно (1662—1694). В частности, де Бесси дал общий метод построения магических квадратов и проделал огромную работу по составлению всех 880 вариантов магических квадратов четвертого порядка. В дальнейшем расчетами числа вариантов магических квадратов занимались многие ученые, в том числе член-корреспондент Петербургской академии наук В. П. Ермаков (1845—1922).

Начиная с Пьера Ферма, Френикля де Бесси и их современников, сочинения о магических квадратах теряют не только свой магический, но и развлекательный характер. Теория магических квадратов развивается одновременно с развитием общей теории чисел и становится ее ответвлением. Ими занимаются великий Леонард Эйлер (1701—1783), король математики Карл Гаусс (1777—1855) и многие другие крупные ученые XVIII, XIX и XX века. Их поиски позволили не только дополнить известные из теории чисел общие свойства некоторых квадратов, но и найти неизвестные до сих пор типы магических квадратов.

Чем же определяется интерес к магическим квадратам в наше время?

Вот как выражает свое мнение по этому вопросу современный французский математик

А. Обри во вступлении к фундаментальной книге Э. Казаласа «Магические квадраты» (Париж, 1933): «...ценность теории определяется не только возможностью ее практического использования, для какого она разработана, но также способностью воспитывать наш ум, доставлять ему питание, поддерживающее его жизнь, везде отыскивать новые истины и выяснять их значение без помощи извне. С этой точки зрения изучение магических квадратов, не требуя глубоких знаний, представляет собой превосходную умственную гимнастику, развивающую способность понимать идеи размещения, сочетания, симметрии, классификации, обобщения и так далее... Можно сказать, что эта умственная гимнастика включает тонкие теоретические построения, занимаясь которыми, упражняется ум.

С другой стороны, в необъятной области чисел арифметическая магия никогда не будет оазисом, посещаемым туристами, заботящимися только о том, чтобы не отклоняться от предписанного маршрута, и во всех случаях избегать длинных комментариев и каких-либо философских рассуждений на эту тему. Мы не будем их избегать, если это облегчит подход к вопросу и устранит длительные поиски решения. Это будет способствовать прогрессу теории, раскрытию ее древней тайны и выявлению ее старомодного изящества. Естественная красота, которую содержат магические квадраты, многократно встречающаяся и разнообразная, достаточная для того, чтобы привлечь и удержать любителей...» (Цитировано по книге [17], стр. 14).

В 1964 году вышла в свет брошюра лауреата Ленинской премии М. М. Постникова «Магические квадраты», являющаяся первой отечественной специальной книгой по этой теме.

В заключение заметим, что для непосредственного расчета вариантов численных квадратов для n=5 на вычислительной машине, выполняющей до 20 тысяч операций в секунду, потребовалось бы около двухсот тысяч миллиардов лет!.. И, наконец, отметим, что теория магических квадратов начинает находить применение при решении ряда конкретных задач экономики.

* * *

Таким образом, на основании вышеизложенного можно сделать следующие выводы. С самого начала развития счета наши далекие предки встречались с трудностью преодоления крайнего числа типа 3, 7, 10, 12 и так далее. Каждый раз до определенного времени этот барьер считался непреодолимым, таинственным, недоступным для понимания людей. Пользуясь этим, представители разных религий объявляли числа «знаками, данными богом». Так возникали числовые суеверия и числовая мистика, которые в разные периоды развития человечества принимали разные, а на высших этапах — весьма утонченные формы. Однако их сущность всегда была и остается прежней.

Вред всяких суеверий вообще, в том числе и числовых, заключается в том, что они затрудняют правильное понимание человеком различных вопросов, фактов и явлений окружающего мира, подрывают в нем веру в свои силы.

Победная поступь материализма в науке, в частности в математике, дает полную уверенность в том, что там все меньше остается места для идеализма, а следовательно, и для числовых суеверий и мистики.

ЛИТЕРАТУРА

1. Архимед. Сочинения. М., 1962.
2. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в Древней Греции. — В кн.: Историко-математические исследования, вып. 11, М., 1958, стр. 225—438.
3. Башмакова И. Г., Юшкевич А. П. Происхождение систем исчисления. — В кн.: Энциклопедия элементарной математики, т. 1, М-Л., 1951.
4. Беллюстин В. Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. М., 1940.
5. Берман Г. Н. Число и наука о нем. М.-Л., 1948.
6. Бобынин В. В. 1) Очерки истории донаучного периода развития арифметики. М., 1896; 2) Отзыв о сочинениях М. Н. Бубнова. Спб., 1911; 3) Математика древних египтян (по папирусу Ринда), М., 1888.
7. Бородін О. І. Історія розвитку поняття про число і системи числення, 2-е вид. К., 1968.
8. Будущее науки, вып. 4, М., 1971.
9. Вайман А. А. Шумеро-вавилонская математика, III—I тысячелетия до н. э. М., 1961.
10. Васильев А. В. Целое число. Пгр., 1922.
11. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. М., 1959.
12. Веселовский И. Н. Вавилонская математика. — В кн.: Труды института истории естествознания и техники, т. 5, М., 1955.

13. Выгодский М. Я. 1) Арифметика и алгебра в древнем мире, изд. 2-е. М., 1967; 2) Математика древних вавилонян, «Успехи математических наук», 1940, вып. 7, стр. 102—153.
14. Гейберг И. Л. Естествознание и математика в классической древности, ОНТИ, 1936.
15. Глейзер Г. И. История математики в школе. М., 1964.
16. Гнеденко Б. В. 1) Краткие беседы о зарождении и развитии математики, М. Л., 1946; 2) Первые шаги в развитии счета. — «Математика в школе», 1963, № 4.
17. Гуревич Е. Я. Тайна древнего талисмана. М., 1969.
18. Депман И. Я. 1) История арифметики. М., 1965; 2) Меры и метрическая система. М., 1954; 3) Вопросы истории математики в научно-атеистической работе. — «Математика в школе», 1960, № 2.
19. Доморяд А. П. Математические игры и развлечения, М., 1961.
20. Ермаков И. В. Атеистическое воспитание при обучении арифметике. М., 1964.
21. «Наука и жизнь», 1964, № 9.
22. «Наука и религия», 1960, № 5; 1961, № 9; 1962, № 8; 1965, № 4.
23. Карпова Л. М. Трактат Сабита ибн-Корры о составных отношениях. — В сб.: История и методология естественных наук, вып. 5, М., 1966, 126—130.
24. Кирик Новгородец. Наставление, как человеку познать счисление лет (перевод текста Кирика Новгородца). — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 6, М., 1953, стр. 174—191.
25. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. М.-Л., 1935.
26. Кобринский Н., Пекелис В. Быстрее мысли. М., 1963.
27. Колмогоров А. Н. Математика, БСЭ, 2-е изд., т. 26.
28. Колосов А. А. Книга для внеклассного чтения по математике в старших классах (VIII—X). М., 1963.

29. Кольман Э. История математики в древности. М., 1961.
30. Конфорович А. Г. Атеїстичне виховання при викладанні математики. К., 1966.
31. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. М., 1954.
32. Кофлер Е. Від числа до нескінченності. К., 1963.
33. Креер Л. И. Дробное число (Критика идеалистических толкований вопросов методологии, истории и методики дробей). Владикавказ, Известия 2-го Северо-Кавказского пединститута, 1932, стр. 247—272.
34. Кэджори Ф. История элементарной математики. Одесса, 1917.
35. Леффлер Е. Цифры и цифровые системы культурных народов. Одесса, 1913.
36. Литцман, Вальтер 1) Веселое и занимательное о числах и фигурах. М., 1963; 2) Великаны и карлики в мире чисел. М., 1959.
37. Малыгин К. А. Элементы историзма в преподавании математики в средней школе. М., 1963.
38. Макляк Н. М. Из истории пальцевого счета.— В кн.: Вопросы истории физико-математических наук. М., 1963.
39. Математика в девяти книгах. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 10. М., 1957.
40. Математика, ее содержание, методы и значение, т. I. М., 1956.
41. Матвиевская Г. П. К истории математики Средней Азии IX—XV вв. Ташкент, 1962.
42. Медовой М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 13. М., 1960, стр. 253—324.
43. Миклухо-Маклай Н. Путешествия, т. 1, М.-Л., 1940.
44. Молодший В. Н. 1) Основы учения о числе в XVIII в. М., 1953; 2) Основы учения о числе в XVIII и начале XIX века. М., 1963.
45. Нейгебаур О. Точные науки в древности. М., 1968.
46. Перельман Я. И. Живая математика, М., 1967.
47. Попов Г. Н. Культура точного знания в Перу. М., 1923.

48. Пясковський Б. В. Математика і релігія. К., 1964.
49. Раик А. И. Две лекции о египетской и вавилонской математике. — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 12. М., 1959.
50. Рыбников К. А. История математики, ч. 1, М., 1960, ч. II, 1963.
51. Слешников С. И. История календаря и его предстоящая реформа. Л., 1962.
52. Стеклов В. Математика и ее значение для человечества. Берлин, 1928.
53. Стройк Д. Краткий очерк истории математики, изд. 2-е. М., 1964.
54. Сушкевич А. К. Обозначение чисел у разных народов. — «Математика в школе», 1940, № 4, стр. 1—15.
55. Тропфке И. История элементарной математики в систематическом изложении. М., 1914.
56. Фадеев Д. К. Число, БСЭ. 2-е изд., т. 47.
57. Фаццари Г. Краткая история математики с древнейших времен, кончая средними веками. М., 1923.
58. Филиппов А. 1) Великий счет (очерк истории математики), Одесса. 1922; 2) О славянской нумерации. — «Математическое образование», 1913, № 2 и 3.
59. Фомин С. В. Системы счисления. М., 1946.
60. Цейтен Г. История математики в древности и в средние века. М.-Л., 1932.
61. Цинзерлинг Д. Математика у древних египтян.—«Математика в школе», 1939, № 2, стр. 5—20, № 3, стр. 3—15.
62. Шахнович М. Современная мистика в свете науки. М., 1965.
63. Швецов К. И. Славянская нумерация. — «Математика в школе», 1952, № 2, стр 8—12.
64. Шелепин Е. Об аликвотных дробях.— «Математика в школе», 1940, № 1, стр. 9—11.
65. Шереметьевский В. П. Очерки по истории математики. М., 1940.
66. Шубников А. В. О равноправии положительных и отрицательных чисел. — «Вопросы философии», 1966, № 6, стр. 55—58.

67. Юсупов И. Очерки по истории развития арифметики на Ближнем Востоке. Казань, 1933.
68. Юшкевич А. П. 1) История математики в средние века. М., 1961; 2) Математика народов Средней Азии в IX—XV вв. — В кн.: Историко-математические исследования. М.-Л., 1951, стр. 455—488; 3) О достижениях китайских математиков.—В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 8. М., 1955, стр. 539—572.
69. Юшкевич А. П. и Розенфельд Б. А. Примечания к трактату Джемшида Гиясэддина Каши «Ключ к арифметике». — В кн.: Историко-математические исследования. Вып. 7, М., 1954, стр. 380—439.
70. Яглом И. М. Комплексные числа, их применение в геометрии.—«Математическое просвещение», 1961, № 6, стр. 61—106.
71. Якубовський В. А. Позакласна робота з атеїстичного виховання учнів V—VIII класів. К., 1964.
72. Яновская С. А. К теории египетских дробей. Труды института истории естествознания, т. 1. М., 1947.

СОДЕРЖАНИЕ

Алексей Иванович Бородин

ЧИСЛО И МИСТИКА

Издание второе, переработанное и дополненное

Зав редакцией общественно-политической литературы А. А. Слынько Рецензент М. И. Терехов Редактор А. И. Лазоренко Художник Г. В. Жуков. Художественный редактор С. Ф. Вишняк Технический редактор А. А. Тимошевская. Корректор Т. П. Соленкова

БП 05232 Сдано в набор 22.8.72 г. Подписано к печати 21.XI.72 г. Формат 70Х90 1/32. Бумага типограф. № 1. Усл. печ. л. 5,26. Уч.-изд. л. 5,25. Тираж 25 000. Заказ № 209. Цена 17 коп.

БЗ № 27—71—2

Издательство «Донбас», г. Донецк, пр. Б. Хмельницкого, 32
Типография издательства «Радянська Донеччина», г. Донецк, ул. газеты «Социалистический Донбасс», 26.