В.С. Малаховский

Числа знакомые и незнакомые

Учебное пособие

Янтарный сказ

УДК 511.213
ББК 22.131я72

Р е ц е н з е н т: Жарикова Л. А. — кандидат физико-математических наук, доцент Калининградского государственного технического университета.

Малаховский В. С.

М 18 Числа знакомые и незнакомые: Учебное пособие / В. С. Малаховский. – Калининград: ФГУИПП «Янтарный сказ», 2004. — 184 с.

ISBN 5-7406-0817-1: Б. ц. 3000 экз.

УДК 511.213
ББК 22.131я72

В книге рассмотрен широкий круг вопросов, относящихся к различным числовым множествам. Показана всеобъемлющая роль натуральных чисел и особенно простых чисел не только в математике, но и в повседневной жизни. Анализируется глубокая связь чисел с философией и религией. Даны приложения числовых множеств к диофантовым уравнениям, комбинаторике и теории вероятностей. Автор стремился к максимальной доступности изложения и ограничился лишь небольшим количеством формул.

Книга рассчитана на учащихся и преподавателей школ, студентов и преподавателей вузов и всех, кто интересуется математикой, а также философскими и религиозными проблемами этой удивительной науки.

In the book the wide circle of problems concerning to various numerical sets is considered. The universal role of natural numbers and especially of prime numbers not only in mathematics, but also in daily life is shown. The deep connection of numbers with philosophy and religion is analyzed. The applications of numerical sets to the Diophantine equations, combinatorial analysis and theory of probabilities are given. The author aspired to maximum availability of an account and was limited only to a small amount of the formulas.

The book is designed for the pupils and teachers of schools, students and teachers of higher institutions and everyone, who is interested in mathematics, and also in philosophical and religious problems of this surprising science.

ISBN 5-7406-0817-1

Судьба и доблесть

Выдающийся русский ученый академик Б. В. Раушенбах, размышляя о жизни в провинции, писал, что культурная жизнь может быть в ней серьезнее, чем в столице, где много всего отвлекающего. Для провинции, полагал академик, характерно стремление к чему-то более высокому, чем повседневность, и выражено это сильнее, чем в центре. Но трагедия провинции в том, что серьезной наукой заниматься невозможно, потому что необходима критическая масса людей науки, необходимо ежедневное общение исследователей, необходима аура высокой мысли.

Для Калининграда эти рассуждения более или менее справедливы при одном исключении. Это исключение — профессор Малаховский, ученый с мировой известностью, чьи лекции в Австрии и Германии, как раньше в Англии, привлекают внимание специалистов и становятся откровением для студентов.

Событием в математическом мире стала книга В. С. Малаховского **«Введение в математику»**, изданная в 1998 году издательством «Янтарный сказ».

Необычность книги открывается читателю с первой страницы, еще до предисловия. Автор демонстрирует свойства сорока квадратных трехчленов. Эти свойства вызывают ощущение чуда. Математики мысленно возвращаются к тем временам, когда убеждение в существовании платоновского мира математических объектов было почти всеобщим.

Впечатляющей особенностью этой книги В. С. Малаховского является ее точное соответствие названию. Автор действительно вводит человека, желающего понять, что такое математика, какова ее роль в формировании цивилизации, в чем состоит ее культурное значение, в удивительный мир, знакомство с которым меняет мышление, повышает уважение к человеческому разуму. А человека, уже получившего математическое образование, книга вводит в мир знакомый, но организованный таким образом, что яснее становятся связи и отношения между разделами математики, развивающимися независимо друг от друга.

Все, кто изучал книгу В. С. Малаховского «Введение в математику», кто слышал о ней, с большим интересом встретили следующий труд выдающегося ученого — **«Избранные главы истории**

математики», изданный «Янтарным сказом» в 2002 году. Данная книга привлекла большое внимание и студентов, поскольку в программу высших учебных заведений входит дисциплина «Современные концепции естествознания», и аспирантов всех специальностей, изучающих курс «Истории и философии науки». «Избранные главы истории математики» стали незаменимым пособием для учителей математики.

Любознательные нашли в книге В. С. Малаховского источник новых знаний, идей, представлений о движении математической мысли, об удивительных судьбах великих ученых.

В книге профессора В. С. Малаховского, пожалуй, впервые изложена история математики XX века, выявлены тенденции ее развития, подведены итоги деятельности крупнейших математических школ. Это весьма сложное дело, ведь сотни исследователей, чьи труды внесли огромный вклад в развитие математики, жили в XX веке и продолжают плодотворно работать в настоящее время.

Профессор Малаховский проявил немалую смелость, обратившись к истории математики XX столетия, в развитие которой он внес и свой личный вклад. При этом следует отметить еще одну трудность, с которой всегда сталкиваются создатели работ энциклопедического характера, а именно таковой является книга В. С. Малаховского. Эта трудность состоит в следующем: необходимо решить, как располагать материал — по алфавиту, по именам ученых или по разделам математики. На мой взгляд, автор выбрал оптимальный вариант. Он рассказывает о математиках России, Франции, Германии и т. д., тем самым формируя убеждение читателя в том, что здание науки создается трудом всего человечества, что наши соотечественники занимают весьма достойное место в мировой науке.

К исключительно интересным, существенно расширяющим кругозор читателя, относятся страницы, посвященные женщинам-математикам. К сожалению, многие, даже образованные люди, могут назвать лишь Софью Ковалевскую, когда речь заходит о роли женщин в развитии математики. В. С. Малаховский, рассказывая о женщинах-ученых, вносит в свое повествование такие детали и подробности, которые рисуют живой, прекрасный облик женщин, создавших научные теории и внесших большой вклад в математическое образование. Помимо научной ценности этот раздел книги имеет и большое воспитательное значение, предлагая девочкам-школьницам великолепные образцы для подражания, указывая на тех замечательных людей, «с которых надо делать жизнь».

Следует заметить, что особенностью работы В. С. Малаховского является умение внести в свое повествование оценочные, нравственные моменты, выделив личностные черты ученого, подчеркнув в характере героя своего рассказа наиболее важные, симпатичные стороны.

Совершенно неповторимой особенностью являются личные воспоминания профессора Малаховского о сотрудничестве, о встречах с корифеями науки, с людьми, чьи имена знакомы читателям по учебникам и монографиям. При этом автор подчеркивает такие детали, которые укрепляют читателя в убеждении, что «гений и злодейство не совместимы», что выдающиеся ученые — это люди с уважением относящиеся к другим, умеющие заботиться о молодых исследователях, а значит, о будущем науки.

Важно подчеркнуть, что книга профессора Малаховского не только дает возможность получить знания, расширить представления о развитии науки, о роли математики в прогрессе цивилизации и культуры, что полезно «и физикам и лирикам». В этой книге Владислав Степанович Малаховский без назидания и скучного морализаторства говорит о нравственных ценностях, об отваге исследователя, о патриотизме, заботе о будущем, т. е. о смысле человеческого бытия.

И читатели оценили тот факт, что данная книга имеет не только научное, познавательное, но и воспитательное значение.

Вышедшие в издательстве «Янтарный сказ» книги В. С. Малаховского «Введение в математику» и «Избранные главы истории математики» зажили своей жизнью: человек, прочитавший одну из них, стремился приобрести и изучить вторую. Молодые люди, завороженные рассказами о великих математиках, обращались к «Введению в математику» с желанием войти в удивительный мир, которому ученые посвящали свою жизнь. Так каждая из вышедших книг пробуждала интерес к другой. Многие читатели задавали вопрос о том, собирается ли Владислав Степанович Малаховский продолжить серию книг о математике. И вот к их радости написана третья книга — **«Числа знакомые и незнакомые».**

В какой-то мере читатель оказался подготовленным к ней, ведь некоторые сведения о числах он получил из «Введения в математику». О великих ученых, занимавшихся теорией чисел, В. С. Малаховский рассказал в «Избранных главах истории математики». И все же автор сумел поразить, изумить, взволновать читателя.

Эта работа В. С. Малаховского начинается с главы, название которой сразу привлекает внимание, — «Величие и красота мира чисел». Сначала автор предлагает экскурс в историю формирования понятия числа, и читатель осознает, какой грандиозный путь прошло человечество от фиксации предметов окружающего мира с помощью зарубок, от пальцевого счета к своему нынешнему представлению о числах.

Рассмотрение профессором Малаховским эволюции обозначений имеет большое значение не только для историков науки, но и для культурологов, философов, поскольку помогает раскрыть интереснейшие связи, которые привели не только к возникновению теории чисел, но и к формированию существенных особенностей научного мышления.

Параграф о делимости чисел запоминается как исключительно ясным изложением алгоритма делимости, так и сведениями о «дружественных числах», расширяющими кругозор читателя. Есть в этом параграфе и маленькая интрига: автор сообщает, что ближайшую к греческой дружественную пару обнаружил в 1867 году шестнадцатилетний итальянец Никколо Паганини. Читатель быстренько вспоминает, что в «Избранных главах истории математики» В. С. Малаховский упоминал, что в Средневековье музыка считалась математической дисциплиной. Тогда у читателя возникает мысль, что упомянутый шестнадцатилетний Никколо Паганини — это будущий великий скрипач и композитор, который отдыхал от репетиций, решая математические задачи. Любознательный читатель отправляется в библиотеку и... Ответ давать не будем, чтобы сохранить загадочность.

Следующий сюжет обращает нас к истории — к процессу появления систем счисления, и к современности — к компьютерам. Эта связь времен производит сильное впечатление. Так же и параграф о расширении понятия числа, т. е. рассматривается движение человеческой мысли от множества натуральных чисел к конструированию дробей и, наконец, к созданию кватернионов.

Только прочитав параграф о трансцендентных числах, проследив логику рассуждений, читатель осознает, что его незаметно провели от формулы к формуле, и он даже не осознал, что материал усложнился и вывел его на новый уровень понимания математики.

Не оставил без внимания профессор Малаховский и «золотое сечение», и числа Фибоначчи, связанные с ним. Этот раздел теории чисел теснейшим образом связан с эстетикой. «Золотое сечение» играет важнейшую роль в скульптуре и архитектуре. Даже в Кафедральном соборе, который восстанавливается в Калининграде трудами российских реставраторов под руководством И. А. Одинцова, присутствует «золотое сечение». Ряд Фибоначчи обладает замечательными закономерностями, которые проявляются в музыкальных произведениях иногда незаметно для композитора, а иногда музыкант сознательно обращается к ним. Выдающийся русский композитор Н. Я. Мясковский говорил, что когда ему не удается кульминация, он начинает считать такты, строить ряд Фибоначчи. Поэтому тем, кто интересуется историей и теорией эстетики, особенно полезно ознакомиться с этим разделом книги.

Естественно, что «золотое сечение», ряд Фибоначчи приводят к размышлениям о гармонии Вселенной, о которой рассуждали еще пифагорейцы. Автор приводит интереснейший материал, обращаясь и к музыке, и к физике, и к биологии. Читатель с напряженным вниманием следит за движением мысли автора, переходя от одной формулы к другой, от одного высказывания к следующему. Надо сказать, что профессор Малаховский умело вовлекает читателя в процесс творчества, в котором собственные представления о гармонии, об устройстве мироздания соединяются с математической картиной, уверенно создаваемой автором книги.

Огромный пласт культуры поднимает автор в параграфе, посвященном числовой мистике. Здесь собран материал, представляющий большой интерес и для психологов, и для культурологов, и конечно, для всех, кто любит математику. Автор заставляет задуматься о том, почему одни и те же числа оказывались столь важными в культурах, не связанных между собой, — пифагорейцы и майя, — но имели противоположный смысл. Например, число 10 у народа майя символизировало смерть и изображалось в виде черепа, а пифагорейцы почитали это число как одно из самых прекрасных, созидающих мир чисел. Они полагали, что вокруг Солнца вращаются 10 планет, заданных этим числом.

Анализируя числа Библии, В. С. Малаховский не просто расширяет кругозор читателя, но помогает ему глубже понять эту Книгу книг, как ее часто называют. А особенно любознательные читатели и любители классической музыки смогут лучше понять многие произведения И. С. Баха, который зашифровывал в своих творениях идеи Библии, обращение к Богу, исходя из этих самых библейских чисел.

Большую культурологическую ценность представляет собой и рассмотрение пословиц и поговорок, включающих числа. Вдумчивый читатель получает богатый материал для размышлений о культурных традициях разных народов, об особенностях мышления людей, сформировавшихся в разных культурах.

Пройдя вместе с автором путь от зарождения понятия числа к пониманию некоторых числовых закономерностей, к осознанию роли чисел в мировой культуре, в цивилизации, читатель готов попробовать свои силы и в решении задач Вацлава Серпиньского, одного из известных математиков XX столетия. Но и приступая к ним, читатель чувствует поддержку профессора Малаховского и имеет возможность сверить свои рассуждения с его изложением решения.

Вторая глава книги — «Числа знакомые и незнакомые» — посвящена простым числам. Я ее воспринимаю как уточнение мысли о красоте математического мира, ибо еще выдающийся английский математик Г. Харди обратил внимание на то, что на протяжении всей истории науки никто из ученых не сомневался в эстетической ценности доказательства Пифагором теоремы о том, что ряд простых чисел бесконечен. Действительно, простота и изящество пифагорова доказательства являются непреходящей эстетической ценностью, подобно совершенству Парфенона, творений Эсхила.

Автор завлекает читателя в загадочный мир простых чисел, обращаясь к классическим работам великих математиков, рассказывая историю раскрытия тайн множества простых чисел. При этом упоминаются имена Эратосфена, М. Мерсенна, П. Л. Чебышева и других математиков, и те читатели, которым уже довелось познакомиться с книгой «Избранные главы истории математики», могут соотнести уже полученные сведения с новым материалом, глубже проникнуть в историю науки, в историю цивилизации.

Можно сказать, что один только параграф «К истории раскрытия тайн множества P» является своего рода энциклопедией и воспроизводит не просто последовательность событий, но показывает развитие математической мысли, полную удивительных взлетов и вынужденных отступлений. Читатель узнает о решете Эратосфена, о совершенных числах и простых числах Мерсенна, о распределении простых чисел, о трудах Эйлера и Ферма, о проблеме Гольдбаха, о подходящих числах.

Богатство идей мы обнаруживаем и в параграфе, посвященном пространственной модели простых чисел. Автор вводит понятие пролонгируемых и непролонгируемых натуральных чисел, а затем строит деревья пролонгируемых натуральных чисел. Это позволяет по-новому взглянуть на те числа, о которых шла речь в связи с мистикой и пифагорейской философией, дает возможность установить между математическими представлениями ранее не замечаемые связи.

Стоит подчеркнуть особенность книги В. С. Малаховского. Какие бы сложные математические темы он ни рассматривал, они изложены ясно и понятно для любого внимательного читателя, но еще более замечательно то, что постоянно на первый план выходит внутренняя связь математики с развитием мышления, ее роль в становлении культуры. Вот и параграф о палиндромических простых числах не только возвращает нас к истокам формирования человеческого мышления, но и к тем временам, когда образованные и пытливые люди находили удовольствие в интеллектуальных занятиях, решении задач, «игре» с числами, когда не профессиональные математики, а например, известные юристы открывали важные закономерности.

Следуя за логикой изложения, читатель погружается в мир идей и образов и не всегда осознает, что перед ним открытия, сделанные именно автором данной книги. К ним относятся, например, пять удивительных совокупностей квадратных трехчленов, теоремы о частичной периодизации. В. С. Малаховский выдвигает гипотезы и указывает на задачи, ожидающие своего решения, приглашая тем самым к творчеству своих бывших и нынешних учеников, всех, кого заворожили простые числа.

Третья глава — «Пифагоровы треугольники» — начинается с рассказа о юности математики, об исследованиях Диофанта и незаметно осуществляется переход к результатам, полученным самим автором. А затем В. С. Малаховский снова возвращается к истокам цивилизации, рассматривает алтарь Махаведи в индийском храме, задается вопросом о том, как в Древнем мире без компьютеров получили столь удивительную трапецию, и дает современный, между прочим, им же полученный ответ на этот вопрос.

Весьма интересным, поучительным и, как всегда в работах В. С. Малаховского, новаторским является раздел, посвященный использованию числовых множеств в разных разделах математики. Здесь стоит выделить комбинаторику и теорию вероятностей, играющих существенную роль в современной науке, причем не только в естествознании, но и в гуманитарных исследованиях.

Вот это редкостное сочетание историчности и современности, удивительное умение выявить глубинные математические закономерности и показать значение математики в развитии культуры, в формировании самого человеческого мышления делает книгу профессора В. С. Малаховского заметным событием в науке.

Замечательный мыслитель эпохи Возрождения Никколо Макиавелли писал:

«Думаю, можно считать за правду, что судьба распоряжается половиной наших поступков, но управлять другой половиной, или около того, она предоставляет нам самим». Другой половиной, считал Н. Макиавелли, управляет доблесть.

В самом деле, мы не выбираем время и место нашего появления на свет, родителей и окружение. Но то, как складывается наша жизнь, зависит не только от этих объективных причин. Владислав Степанович Малаховский пришел в этот мир в сложный, бурный период. Пережил войну, оккупацию, потерял отца в результате репрессий, встретил чутких и умных преподавателей и справедливых товарищей. Это то, что Н. Макиавелли называл судьбой. Но была и доблесть, в понимании мыслителя эпохи Возрождения. Это стремление самого В. С. Малаховского мыслить и действовать, создавать новые разделы математики и формировать геометрическую школу в Калининграде.

Соединение таланта, воли, энергии, стремление к достижению цели проявились и в третьей книге В. С. Малаховского, завершившей своего рода трилогию, но не деятельность автора. И читатели будут с интересом и нетерпением ждать следующих работ ученого, чья доблесть продолжает направлять судьбу.

И. С. Кузнецова,
доктор философских наук, профессор.

Предисловие

«Король математиков» выдающийся немецкий ученый Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) совершил немало фундаментальных открытий в различных областях математики, но самым любимым его занятием было определение всех простых чисел в очередном «тысячном интервале». Он сумел составить таблицу всех простых чисел, меньших 3 000 000. Называя математику «царицей наук», Гаусс особо выделил арифметику — математическую теорию натуральных чисел — и охарактеризовал ее как «царицу математики». На протяжении всей истории человечества натуральные и особенно простые числа привлекали внимание многих математиков и философов, скрывая за кажущейся простотой и общедоступностью глубокие трудноразрешаемые проблемы. Не случайно Ян Стюарт в своей книге «Концепции современной математики» писал ([54], с. 44—45): «Поскольку теория чисел занимается целыми числами, можно подумать, что это очень простая наука. Дело обстоит как раз наоборот. Теория чисел — одна из самых трудных областей математики, изобилующая нерешенными проблемами».

Эти проблемы носят как математический, так и философский характер. А если учесть большой интерес к натуральным числам со стороны представителей различных религий, в том числе — христианской, то можно понять важность популяризации у широкого круга читателей этой области математики.

По теории чисел имеется много прекрасных книг, учебников, популярных брошюр. Предлагаемая читателю книга не ставит целью изложить основные понятия этой теории, дублируя обширный материал учебной литературы. Она знакомит его как с известными, так и малоизвестными, но занимательными свойствами удивительного мира натуральных и особенно простых чисел и определяемых ими некоторых важных математических понятий и семейств геометрических фигур.

Эта книга завершает трилогию автора, являясь своеобразным продолжением двух ранее опубликованных в издательстве «Янтарный сказ» книг: «Введение в математику» [30] и «Избранные главы истории математики» [32]. Используя полувековой опыт преподавания различных математических дисциплин в Томском (1953—

1968) и Калининградском (с 1968 года и по настоящее время) университетах, автор старался в этой трилогии охватить сравнительно широкий круг вопросов, чтобы читатель смог составить достаточно полное представление о математике, истории ее развития и о ее значении в обществе.

Выражаю искреннюю благодарность профессору И. С. Кузнецовой и рецензенту Л. А. Жариковой за ценные замечания и советы.

В. С. Малаховский

Preface

«The King of mathematicians» and the most eminent German scientist Karl Fridrich Gauss (1777—1855) has made many fundamental discoveries in various areas of mathematics, but his most favourite occupation was definition of all prime numbers in next «a thousand interval». He has managed to make the table of all prime numbers, smaller 3 000 000. Naming mathematics «by queen of sciences», Gauss especially has allocated arithmetics — mathematical theory of natural numbers — and has described it as «queen of mathematics». During all history of mankind natural numbers and especially prime numbers attracted attention of many mathematicians and philosophers, hiding for with apparent simplicity and general availability deep difficultly solved problems. Is no casual Jan Stewart in the book «Concepts of modern mathematics» wrote ([54], c. 44—45): «As the number theory is engaged in integers, it is possible to think, that it is a very simple science. The matter is just on the contrary. Number theory is one of the most difficult areas of mathematics abounding by unsolved problems».

These problems carry both mathematical, and philosophical character. And if to take into account the large interest to natural numbers on the part of the representatives of various religions, including — christian, it is possible to understand the importance of popularization at a wide circle of the readers of this area of mathematics.

On a number theory there are many perfect books, textbooks and popular brochures. The book, offered to the reader, does not put by the purpose to explain the basic concepts of this theory, doubling an extensive material of the educational literature. It acquaints him as with known, and poorly known, but entertaining properties of the surprising world of natural and especially of prime numbers and defined by them of some important mathematical concepts and sets of geometrical figures.

It is the book finishes the trilogy of the author, being by original prolongation two before the published books in publishing house «Jantarny skaz»: «The introduction in mathematics» [30] and «The selected chapters of a history of mathematics» [32]. Using semi-centennial experience of teaching of various mathematical disciplines in Tomsk (1953—1968) and Kaliningrad (since 1968 till the present time) universities, the author tried in this trilogy to envelop a rather wide circle of problems, that the reader could make complete enough representation about mathematics, history of its development and about its value in a society.

I express sincere gratitude to the professor I. S. Kuznetsova and to the reviewer L. A. Zharikova for valuable notes and advices.

V. S. Malakhovsky

Глава I.
Величие и красота мира чисел

§ 1. Кто создал натуральное число — человек или Бог?

История человечества убеждает нас в том, что число возникло в глубокой древности. Во многих древних рукописях натуральные числа и дроби упоминаются как уже хорошо известные понятия, используемые при строительстве храмов, жилищ, разделе земельных участков и т. п.

Например, в Ветхом Завете числа фигурируют в каждой книге Моисея, а четвертая книга прямо так и названа — Числа.

Историки убедительно доказывают, что понятию натурального числа предшествовал примитивный счет конкретных предметов обычно путем сопоставления с пальцами рук и ног человека или нескольких людей, если число предметов превышало 20. Не случайно у некоторых народов употреблялись такие названия, как «рука» для пяти, «весь человек» — для двадцати.

Первоначально числа были «именованными», т. е. одни числа использовались для счета людей, другие — для счета лодок, кокосовых орехов и т. д. Существовали народы, у которых было до десяти разных названий одних и тех же чисел, употребляемых для счета совокупностей различных предметов.

Неоспоримым фактом является связь первых девяти натуральных чисел с пальцами рук человека.

Например, у Герберта (940—1003), ставшего с 999 года Римским Папой Сильвестром II, термин «digiti» означал первые девять натуральных чисел (от лат. digitus — палец). В «Арифметике...» Л. Ф. Магницкого (1669—1739) числа 1, 2, 3, ..., 9 называются «перстами», т. е. пальцами. Даже в современном итальянском языке слово «le dita» означает и числа до десяти, и пальцы.

Пальцевый счет широко использовался не только в Древнем мире, в Средние века, но и сохранился в наши дни. Еще в XX веке, как указал польский математик Л. Ч. Карпинский (ум. в 1955 г.), на крупнейшей мировой хлебной бирже — Чикаго — предложения и запросы на любое количество пшеницы, равно как цены, объявлялись маклером на пальцах без единого словесного добавления ([19], с. 29).

Многие ученые считают, что триумф десятичной системы счисления, а также широкое распространение в ряде стран Средневековья двадцатеричной системы счисления (племя майя в Америке, баски, кельтские народы в Европе и др.) объясняются именно пальцевым счетом.

Однако имеется и другая точка зрения на возникновение натурального числа. Ее красноречиво выразил на Берлинском конгрессе естествоиспытателей в 1886 году выдающийся немецкий математик Леопольд Кронекер (1823—1891): «Натуральные числа создал любимый Бог, все другое — труд человека».

Давно существуют две принципиально противоположные точки зрения на происхождение человека — дарвинская, что человек возник в результате эволюционного развития от исчезнувшего вида обезьян, и религиозная, что человека, как и весь растительный и животный мир, как и Вселенную, создал Всевышний творец — Бог.

Если считать, что натуральные числа создал человек в результате длительного процесса развития цивилизации, то как объяснить тот факт, что, путешествуя в 1871—1886 годах в Юго-Восточной Азии (Новая Гвинея, Филиппины, Индонезия) и Австралии, наш соотечественник Николай Николаевич Миклухо-Маклай обнаружил крупные поселения аборигенов, которые не знали понятия натурального числа, но безошибочно пользовались пальцевым счетом. При обмене на поголовье до 20 овец счет на своих пальцах рук и ног осуществлял сам вождь, а в случае счета больше 20 — с привлечением и других туземцев. Как могло случиться, что их многовековое развитие так и не привело к усвоению ими абстрактного понятия натурального числа?

Хотя в трех-четырехлетнем возрасте я хорошо считал (мои родители были учителями математики в школе), но не могу вспомнить, как у меня осуществился переход от счета «по пальцам» к абстрактному числовому счету. Сейчас мы учим своих малышей считать по пальцам и палочкам, а в школе они уже оперируют натуральными числами. Как же осуществляется этот «революционный» скачок в их сознании?

Попытайтесь, уважаемые читатели, вспомнить свое детство и то, как вы сами пришли к этому удивительному абстрактному понятию.

Не хочу навязывать никому свое личное мнение на этот счет. Пусть каждый из вас примет ту точку зрения на возникновение натурального числа, которая вам предпочтительнее, и сам ответит на вопрос, поставленный в заголовке параграфа.

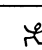
§ 2. Эволюция обозначений — от разнообразия к единству

В истории развития человечества существует поразительное разноязычие и различные обозначения натуральных чисел у разных народов. По библейскому преданию о Вавилонской башне (Бытие 11, 1—9), на всей земле был один язык и одно наречие. После Всемирного потопа племена сынов Ноевых, двинувшись с востока, нашли в земле Сеннаар равнину и, поселившись там, решили построить башню высотою до небес, чем разгневали Господа. «И сказал Господь: вот, один народ и один у всех язык; и вот что начали они делать... сойдем же и смешаем там язык их, чтобы один не понимал речи другого». И рассеял их Господь по всей земле, и остались недостроенная башня и развалины города Вавилона (от древнееврейского «балал» — смешивать).

О причинах возникновения у разных народов различных обозначений натуральных чисел таких ярких преданий нет. Естественно предположить, находясь на материалистической точке зрения, что каждый народ своим путем пришел к понятию натурального числа и создал свои символы для обозначения натуральных чисел.

Но если стоять на религиозной точке зрения и учитывать важную роль чисел в жизни народов, то разные обозначения чисел — усиление гнева Господня, покаравшего народ за строительство Вавилонской башни.

О том, как обозначались числа у разных народов, можно узнать, например в ([30], с. 22—23) и в ([32], с. 23, 26—27, 31, 37—38). Так, египтяне употребляли непозиционную систему счисления, в которой узловые числа 10^k ($k = 0, 1, 2, ..., 7$) изображались следующими индивидуальными символами:

1	10	100	1000	10 000	100 000	1 000 000	10 000 000
I	∩						

(2.1)

В Вавилоне употребляли только один символ — клин (вертикальный, горизонтальный и наклонный), причем числа записывались в шестидесятеричной системе счисления с выделением десяток, изображаемых горизонтальным клином (углом). Например, число

$$7332 = 2 \cdot 60^2 + 2 \cdot 60 + 12 \qquad (2.2)$$

записывалось так:

$$\triangledown\triangledown \quad \triangledown\triangledown \quad \lhd\triangledown\triangledown \qquad (2.3)$$

Следует отметить, что два наклонных клина для обозначения пропуска разряда были введены позднее, причем одним вертикальным клином обозначалось не только число 60^k ($k \geqslant 0$), но и число 60^{-k}.

Например, запись ∇⋞∇ могла означать 81, или 4860, или $1\frac{21}{60}$. Как правило, из контекста задачи можно было догадаться, какое число определяет эта запись.

В Древней Греции числа обозначались буквами. В ионической системе числа изображались буквами греческого алфавита с добавлением трех букв финикийского алфавита: ζ (вау) — 6, ϙ (коппа) — 90, ϡ (сампи) — 900. Цифры 1—9 (кроме 6) изображались греческими буквами от α до θ, десятки — 10—80 — от i до π, сотни — 100—800 — от ρ до ω. 10 000 изображалась буквой М (от греч. «мириада»), а тысячи выделялись штрихом слева у соответствующей буквы. Запись над буквой М означала умножение на 10 000 соответствующего числа. Например, число 381 574 записывалось так:

$$\overset{\lambda\eta}{M},\ ,\alpha\varphi o\delta. \tag{2.4}$$

В геродианической системе цифры от 1 до 4 изображались вертикальными черточками, 5 — буквой Г, 6 — П, 7—9 — символами ГII—ГIIII, 10 — Δ, 100 — Н, 1000 — Х, 10 000 — М, 50 — 𐅄, 500 — 𐅅, 5000 — 𐅆, 50 000 — 𐅇.

Посмотрите, дорогой читатель, как интересно: 10 — дельта (от слова «дека» — десять, а отсюда декада, декалитр и т. д.), 500 — большая буква «гамма» и к ней подвешено Н — сто, 5000 — к Г подвешена Х — тысяча и т. д. Такое вот изобретательное умножение!

В ионической системе, как отмечено выше, умножение характеризовалось записью соответствующего числа над буквой М (см. формулу (2.4)).

В Древнем Риме узловыми символами были: I — для 1, V — для 5, X — для 10, L — для 50, C — для 100, D — для 500, M — для 1000, причем в записи чисел использовался аддитивный принцип: слева от символа — вычитание, справа — сложение. Например, число 3643 записывалось так:

$$\mathrm{MMMDCXLIII} \tag{2.5}$$

При записи больших чисел тысячи выделялись буквой m, записанной как индекс справа. Так, число 519 273 изображалось так:

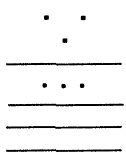
$$\mathrm{DXIX_m\ CCLXXIII} \tag{2.6}$$

Племя майя использовало для записи натуральных чисел три символа: точку — для единицы, горизонтальную черту — для пятерки, ⊖ — для нуля. При этом система счисления у этого племени была искаженная двадцатеричная: 20^2 заменялось в третьем разряде числом 360 — числом дней, как они считали, в году, причем во всех последующих разрядах присутствовал множитель 360. Числа записывались снизу вверх.

Например, число

$$297\,075 = 15 + 3 \cdot 20 + 5 \cdot 360 + 1 \cdot 7200 + 2 \cdot 144\,000 \qquad (2.7)$$

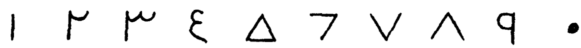
в исчислении майя записывалось так:



(2.8)

Арабская система счисления — десятичная позиционная, но индийские цифры мусульмане заменили своими:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0



(2.9)

До XVIII века в России была старославянская система счисления — непозиционная, буквенная (по греческому образцу): А (аз) — 1, В (веди) — 2, Г (глаголь) — 3, Д (добро) — 4 и т. д.

Например, число 323 записывалось так:

Т̃КГ («твердо», «како», «глаголь»). (2.10)

Начиная с эпохи Возрождения наметилась тенденция к единообразному обозначению чисел. За основу была принята удобная десятичная система счисления с индийской символикой записи цифр. В настоящее время привычная для нас запись натуральных чисел общепринята во многих странах, хотя в некоторых странах стремятся сохранить древнюю символику для записи хотя бы отдельных чисел. Например, на особо важных документах в Китае и Японии отдельные цифры записывают иероглифами. Своя символика записи цифр до сих пор сохраняется в арабском мире. На циферблатах часов (особенно настенных) часто пишут римские цифры.

Однако налицо стремление унифицировать запись натуральных чисел и пользоваться привычной для многих стран индийской символикой записи цифр.

Интересно, что и на языковом фронте наблюдается тенденция использования лишь нескольких языков для общения, хотя она встречает сильное противодействие, особенно у малых народностей, справедливо считающих, что сохранение своего языка — это важнейший фактор сохранения своего народа, своей культуры и национальности.

§ 3. Делимость чисел. Классификация

Одним из величайших достижений древнегреческой математики был алгоритм для нахождения общей меры двух отрезков, известный как алгоритм Евклида деления с остатком: для любых двух натуральных чисел a и b, взятых в определенном порядке, существует единственная пара неотрицательных целых чисел q и r таких, что

$$a = bq + r, \quad r < b. \tag{3.1}$$

Число a называется делимым, число b — делителем, число q — частным, а число r — остатком от деления a на b.

Практически деление a на b осуществляется по правилу, известному каждому школьнику. Например, для $a = 535$, $b = 13$ имеем:

$$\begin{array}{r|l} -\,535 & 13 \\ \underline{52} & \overline{41}\,. \\ -\,15 & \\ \underline{13} & \\ 2 & \end{array} \tag{3.2}$$

Здесь $q = 41$, $r = 2$.

Если $r = 0$, то говорят, что a делится на b без остатка. Числа b и q называются в этом случае делителями или множителями числа a:

$$a = bq. \tag{3.3}$$

Само число a всегда является своим делителем, так как $a = 1 \cdot a$. Такой делитель называется несобственным. Все остальные делители числа a (включая единицу) называются его собственными делителями.

Чтобы выяснить делится ли a на b без остатка или нет, во многих случаях не требуется осуществлять это деление. Удобнее воспользоваться соответствующими признаками делимости.

Произвольное натуральное число m в десятичной системе счисления имеет вид:

$$m = x_n \cdot 10^n + x_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + x_1 \cdot 10 + x_0 = \overline{x_n x_{n-1} \ldots x_1 x_0}. \tag{3.4}$$

Черта над цифрами в буквенной форме ставится для того, чтобы десятичную запись числа не спутать с произведением его цифр. Из тождеств

$$\begin{gathered} m = 10 \cdot (x_n \cdot 10^{n-1} + \ldots + x_2 \cdot 10 + x_1) + x_0, \\ m = 100 \cdot (x_n \cdot 10^{n-2} + \ldots + x_3 \cdot 10 + x_2) + x_1 \cdot 10 + x_0, \\ m = 1000 \cdot (x_n \cdot 10^{n-3} + \ldots + x_4 \cdot 10 + x_3) + x_2 \cdot 100 + x_1 \cdot 10 + x_0, \\ m = 9 \cdot (\underbrace{11 \ldots 1}_{n} x_n + \underbrace{11 \ldots 1}_{n-1} x_{n-1} + \ldots + x_1) + x_n + x_{n-1} + \ldots + x_1 + x_0 \end{gathered} \tag{3.5}$$

непосредственно вытекают признаки делимости на 2, 5, 4, 25, 8, 125, 3, 9. А именно, число m делится: на 2 или 5, если последняя цифра его делится на 2 или 5; 4 или 25, если число из двух последних цифр его делится на 4 или 25; 8 или 125, если число из трех последних цифр его делится на 8 или 125; 3 или 9, если сумма цифр этого числа делится на 3 или 9.

Так как трехзначное число можно представить в виде:

$$100x_2 + 10x_1 + x_0 = 8\cdot(10x_2 + x_1) + 2\cdot\left((10x_2 + x_1) + \frac{x_0}{2}\right), \tag{3.6}$$

то оно делится на 8 тогда и только тогда, когда на 4 делится число, получающееся прибавлением половины последней цифры к числу, образованному двумя первыми цифрами.

Например, 952 делится на 8, так как 95 + 1 = 96 делится на 4.

Так как $7\cdot 11\cdot 13 = 1001$; $999\,999 = 1001\cdot 999$;

$1\,000\,000\,001 = 1001\cdot 999\,001$ и т. д.;

$37\cdot 27 = 999$; $37\cdot 27\,027 = 999\,999$;

$37\cdot 27\,027\,027 = 999\,999\,999$ и т. д.,

то легко формулируются признаки делимости на 7, 11, 13 и 37.

Надо разбить данное натуральное число справа налево на грани по три цифры в каждой грани, причем крайняя левая грань может и не иметь трех цифр.

Если разность сумм граней данного числа, взятых через одну, делится на 7, или на 11, или на 13, то и это число делится соответственно на 7, или на 11, или на 13.

Если сумма всех граней данного числа делится на 37, то и это число делится на 37.

Рассмотрим, например, число 9 039 922 584:

1) $584 + 39 = 623$; $922 + 9 = 931$; $931 - 623 = 308 = 7\cdot 11\cdot 4$.

Число 308 делится на 7 и на 11, но не делится на 13. Значит, и данное число делится на 7 и на 11, но не делится на 13.

2) $584 + 922 + 39 + 9 = 1554 = 37\cdot 42$.

Следовательно, данное число делится на 37.

Для двух натуральных чисел a и b однозначно определяются два других натуральных числа — их наибольший общий делитель НОД (a, b) и их наименьшее общее кратное НОК (a, b).

Для нахождения НОД (a, b) большее из данных чисел делят на меньшее, меньшее — на первый остаток, первый остаток — на второй остаток и т. д. до получения деления без остатка. Тогда предыдущий остаток и есть НОД (a, b).

Наименьшее общее кратное чисел a и b определяется формулой:

$$\text{НОК}\,(a, b) = \frac{ab}{\text{НОД}\,(a, b)}. \tag{3.7}$$

Пусть, например, даны числа $a = 1085$, $b = 595$. Находим:

$$\begin{array}{r|l} 1085 & 595 \\ \hline 595 & 1 \\ \hline 490 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 595 & 490 \\ \hline 490 & 1 \\ \hline 105 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 490 & 105 \\ \hline 420 & 4 \\ \hline 70 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 105 & 70 \\ \hline 70 & 1 \\ \hline 35 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 70 & 35 \\ \hline 70 & 2 \\ \hline 0 & \end{array}.$$

Следовательно,

$$\text{НОД }(a, b) = 35, \ \text{НОК }(a, b) = \frac{1085 \cdot 595}{35} = 18\,445. \tag{3.8}$$

Обозначим символом $R_m(n)$ остаток от деления натурального числа n на натуральное число m (от англ. rest — остаток). Пусть

$$\begin{gathered} a = R_{19}(n); \ \ b = R_4(n); \ \ c = R_7(n); \ \ d = R_{30}(19a + 15), \\ e = R_7(2b + 4c + 6d + 6), \ \ p = 22 + d + e, \ \ p^* = 4 + d + e. \end{gathered} \tag{3.9}$$

К. Ф. Гаусс вывел следующую формулу определения даты Православной Пасхи по старому стилю:

$$\text{П} = \begin{cases} p \text{ марта, если } p \leqslant 31, \\ p - 31 \text{ апреля, если } p > 31. \end{cases} \tag{3.10}$$

По новому стилю эта дата определяется формулой:

$$\text{П}^* = \begin{cases} p^* \text{ апреля, если } p^* \leqslant 30, \\ p^* - 30 \text{ мая, если } p^* > 30. \end{cases} \tag{3.11}$$

Разложение натуральных чисел в произведение двух или нескольких сомножителей кладется в основу различных разбиений множества N натуральных чисел на попарно непересекающиеся подмножества и позволяет выделять подмножества множества N со специальными свойствами.

Еще в Древней Греции (особенно у пифагорейцев) натуральные числа разбивались на четные и нечетные, простые и составные, недостаточные, избыточные и совершенные, дружественные, гармонические, треугольные, квадратные, пятиугольные и т. д. Основой всего считалась единица.

Пифагореец Никомах из Герасы (I—II вв.) писал в «Арифметической теологии»: «Единица есть божество, разум, добро, гармония, счастье».

Натуральное число $n > 1$ называется составным или простым в зависимости от того, есть или нет у этого числа собственный делитель, отличный от единицы; недостаточным, избыточным, совершенным — если сумма всех его собственных делителей соответственно меньше, больше, равна n.

Все простые числа — недостаточные, так как $p > 1$. Другими недостаточными числами являются, например, числа вида

$$n = p_1 p_2, \tag{3.12}$$

кроме $6 = 2 \cdot 3$, где p_i ($i = 1, 2$) — попарно различные простые числа.

Избыточными числами, например, являются:

$$12,\ 24,\ 36,\ 48,\ 60,\ 120, \tag{3.13}$$

так как сумма их собственных делителей соответственно равна 16, 36, 55, 76, 108, 240.

Примеры совершенных чисел:

$$6,\ 28,\ 496,\ 8128,\ 33\,550\,336. \tag{3.14}$$

К настоящему времени найдено 38 совершенных чисел (см. §14), 12 из которых — без использования ЭВМ, а 26 — с помощью компьютера.

Фигурные числа изображаются на плоскости совокупностью точек так, чтобы возникали различные правильные многоугольники (см. [30], с. 39—40). Легко показать, что n-е треугольное число $a_n^{(3)}$ равно сумме n первых натуральных чисел, т. е. $\frac{1}{2}n(n+1)$, а n-е квадратное число $a_n^{(4)} = n^2$ совпадает с суммой n первых нечетных чисел.

Общая формула n-го m-угольного числа имеет вид:

$$a_n^{(m)} = \frac{1}{2}\, m(n^2 - n) - n^2 + 2n. \tag{3.15}$$

Два числа a и b называются дружественными, если сумма собственных делителей числа a равна числу b и, наоборот, сумма собственных делителей числа b равна числу a.

Древние греки знали единственную пару дружественных чисел (220, 284). Пифагору приписывают фразу: «Друг тот, кто есть другой я, вот как числа 220 и 284». Мадридский ученый аль-Маджрити (ум. в 1007 г.) приводит опробованный им лично рецепт, позволяющий добиться взаимности в любви: надо написать на чем-либо 220 и 284, меньшее дать съесть предмету страсти, а большее съесть самому.

К настоящему времени открыто более 600 пар дружественных чисел, причем большая часть таких пар была обнаружена с помощью ЭВМ.

Оказывается, что среди первых ста тысяч натуральных чисел их всего 13:

$$\begin{gathered}(220,\ 284);\ (1184,\ 1210);\ (2620,\ 2924);\ (5020,\ 5564);\\ (6232,\ 6368);\ (10\,744,\ 10\,856);\ (12\,285,\ 14\,595);\\ (17\,296,\ 18\,416);\ (63\,020,\ 76\,084);\ (66\,928,\ 66\,992);\\ (67\,095,\ 71\,145);\ (69\,615,\ 87\,633);\ (79\,750,\ 88\,730).\end{gathered} \tag{3.16}$$

Первую после греков дружественную пару (17 296, 18 416) открыл марокканский ученый аль-Банны (1256—1321) и переоткрыл ее в 1636 году Пьер Ферма (1601—1665). А вот ближайшую к греческой дружественную пару обнаружил в 1867 году шестнадцатилетний итальянец Никколо Паганини.

Исследование известных пар (m, n) дружественных чисел приводит к следующим предположениям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{m}{n} = 1$;

2) не существует дружественных пар разной четности;

3) все нечетные дружественные числа кратны трем;

4) сумма двух четных чисел дружественной пары кратна девяти.

§ 4. Двоичная система счисления — компьютерный соперник десятичной

Системы счисления, употребляемые для счета, делятся на два типа: позиционные, когда одна и та же цифра в зависимости от ее места в числе имеет разные значения, и непозиционные, когда каждая цифра имеет одно значение, вне зависимости от ее положения в числе.

Название позиционной системы определяется числом цифр в разряде, включая цифру ноль. К XVIII веку остались лишь некоторые пережитки употребления не общепринятой десятичной системы счисления. До сих пор мы пользуемся элементами вавилонской шестидесятеричной системы, деля час на 60 минут, минуту — на 60 секунд, секунду — на 60 терций, окружность — на 360°. В некоторых странах Западной Европы сохранились названия чисел, возникшие, по-видимому, как отголоски ранее употребляемых двенадцатеричной или двадцатеричной систем счисления. В английском и немецком языках, например, слова, обозначающие 11 и 12, лингвистически независимы от слов, обозначающих число 10 (eleven, elf — 11, twelve, zwölf — 12), а во французском языке многие названия чисел привязаны к слову vingt — 20: quatre-vingt — 80, quatre-vingt-dix — 90, quatre-vingt-dix-neuf — 99. Так же до 19 цифр (как и после 80) идет счет после шестидесяти: от soixante-et-un (61) до soixante-dix-neuf (79), что явно указывает на наличие в прошлом двадцатеричной системы счисления.

Еще ученые XVII века указывали на возможность простым способом перейти от десятичной системы счисления к системе счисления по любому другому натуральному основанию $m > 1$. Достаточно число n, записанное в десятичной системе, разделить на основание m другой системы, затем первое частное снова разделить на m, второе частное также разделить на m и т. д. до тех пор, пока в частном не окажется нуль. Запись числа n в новой системе счисления с основанием m — это записанные в обратном порядке остатки от деления.

Например, число 732 в семеричной системе счисления имеет вид:

$$732_{(7)} = 2064, \tag{4.1}$$

так как деление на 7 числа 732 и последующих частных дает соответственно остатки от деления: 4, 6, 0, 2:

$$732 = 2 \cdot 7^3 + 0 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7 + 4. \tag{4.2}$$

Формула (4.2) дает правило перехода от числа 2064 в семеричной системе счисления к числу 732 в десятичной.

Хотя правила арифметики в любой позиционной системе по основанию $m > 1$ и $m \neq 10$ те же самые, что и в десятичной, но таблицы сложения и умножения чисел первого разряда отличны от наших десятичных таблиц.

Например, для $m = 5$ они имеют вид:

+	1	2	3	4
1	2	3	4	10
2	3	4	10	11
3	4	10	11	12
4	10	11	12	13

сложение

×	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	11	13
3	3	11	14	22
4	4	13	22	31

умножение

(4.3)

С теоретической точки зрения двоичная система счисления выделяется тем, что ее основание 2 — наименьшее возможное. В этой системе только две цифры — 1 и 0. Математики на протяжении многих столетий рассматривали двоичную систему счисления как один из примеров позиционной системы с основанием, отличным от 10. Практически все расчеты велись в привычной десятичной системе счисления. Однако великий немецкий математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) за триста лет до появления ЭВМ предугадал особую роль двоичной системы и расценил ее очень высоко. «В своей бинарной арифметике, — отмечал Лаплас, — Лейбниц видел прообраз творения. Ему представлялось, что единица представляет божественное начало, а нуль — небытие, и что Высшее Существо создает все сущее из небытия точно таким же образом, как единица и нуль в его системе выражают все числа».

А разве не чудо, что любое известное совершенное число в двоичной системе записывается в виде:

$$2^{p-1}(2^p - 1)_{(2)} = \underbrace{11 \ldots 1}_{p}\ \underbrace{00 \ldots 0}_{p-1}. \tag{4.4}$$

Например:

$$6_{(2)} = 110, \quad 28_{(2)} = 11\,100, \; 496_{(2)} = 111\,110\,000. \qquad (4.5)$$

Для человека счет в двоичной системе, требующий выполнения очень большого количества операций для нахождения суммы и произведения больших чисел, затруднителен. А для компьютера, способного производить миллиарды операций в секунду, это не составляет труда, любые действия над числами в двоичной системе счисления он выполняет практически мгновенно.

Таким образом, уже со второй половины XX века двоичная система счисления стала главным звеном в конструировании все более мощных ЭВМ, а общепринятая десятичная система счисления осталась для простых расчетов, которые человек выполняет сам, без использования калькуляторов и ЭВМ.

§ 5. Как расширялось понятие числа

Необходимость расширения множества N натуральных чисел возникла у человека на очень ранней стадии развития. Сначала пользовались аликвотными дробями, числитель которых — единица. Другие числа представлялись суммой конечного числа попарно различных аликвотных дробей.

В папирусе Райнда, составленном писцом Ахмесом в 1650 году до нашей эры, дана таблица разложения дробей

$$\frac{2}{2n+1} \; (n = 2, 3, 4, \ldots, 49) \qquad (5.1)$$

на сумму аликвотных. Например,

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}; \; \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}; \; \frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776}. \qquad (5.2)$$

Аликвотными дробями пользовались шумеры, греки, арабы. Даже в учебнике Леонардо Пизанского (Фибоначчи) (1180—1240) «Книга абака» многие вычисления осуществлялись при помощи аликвотных дробей.

Вавилоняне широко пользовались шестидесятеричными дробями

$$\frac{1}{60}, \frac{1}{60^2}, \frac{1}{60^3}, \frac{1}{60^4}, \ldots \qquad (5.3)$$

Развитием идеи обыкновенной дроби общего вида мы обязаны Индии. Уже в IV веке до нашей эры в Сульвасутре встречаются дроби $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{7}$ и др., а Брахмагупта (ок. 598—660) уже четко сформулировал почти в наших терминах правила действий над дробями.

Однако изложение обыкновенных дробей в учебниках арифметики европейских школ произошло только в XVIII веке. Дроби усваивались учениками с огромными трудностями. Например, в предисловии к 16 изданию «Арифметики» Уингейта (Англия) сказано, что в этом издании «изложение арифметики целых чисел, необходимой для денежных расчетов, для торговли и других приложений, дается раньше, чем открывается доступ к крутым и трудным путям дробей, при одном виде которых некоторые учащиеся приходят в такое уныние, что останавливаются и восклицают: ради бога, не дальше» ([20], с. 245). Даже в знаменитой Итонской школе для аристократов, существующей с 1446 года, арифметика стала обязательным предметом преподавания только в 1851 году.

Десятичные дроби (дроби со знаменателем 10^n ($n \in N$)) были открыты арабами. Аль-Каши (ум. в 1436 г.) в своем знаменитом трактате «Ключ арифметики» изложил теорию десятичных дробей. Но в Европе они стали распространяться только после выхода в свет в 1585 году работы нидерландского математика и инженера Симона Стевина (1548—1620) «Десятина», в которой он изложил десятичную систему мер и десятичные дроби.

Важным событием для математики явилось введение нуля (Индия, Китай, племя майя).

Множество

$$N_0 = N \cup \{0\} \tag{5.4}$$

во многих европейских странах, отступая от традиции, называют сейчас «множеством натуральных чисел». Однако в большинстве стран, включая Россию, натуральным числом называют целое положительное число.

Одним из самых важных расширений числового множества было открытие китайскими учеными во II веке до нашей эры отрицательных чисел, которые вместе с натуральными числами и нулем образовали множество целых чисел, обозначаемое в настоящее время символом Z (от нем. die Zahl — число).

Позднее математики стали рассматривать и отрицательные дроби, изображаемые на числовой оси точками, симметричными соответствующим положительным дробям относительно начала.

Множество $\{\frac{m}{n}\}$, где $n \in N$, $m \in Z$, стало называться «множеством рациональных чисел» (от лат. ratio — отношение) и обозначаться символом Q (от лат. quotient — частное).

Хотя со времен Пифагора (VI в. до н. э.) было установлено существование несоизмеримых отрезков, но только в XVII веке множество таких чисел, которые нельзя выразить отношением двух целых чисел, прочно вошло в европейскую математику как множество иррациональных чисел (от лат. irrational — безрассудный, не определяемый отношением).

Множество всех рациональных и иррациональных чисел — чисел, выражающихся бесконечными непериодическими десятичными дробями ([30], с. 63—64), образует новое множество, называемое множеством действительных чисел и обозначаемое буквой R (от фр. reél — действительный, реальный).

Строгая теория действительных чисел была построена математиками лишь в XIX веке (Больцано, Вейерштрасс, Кантор, Дедекинд и др.).

Расширение понятия натурального числа изобразим следующей схемой:

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R. \tag{5.5}$$

Дальнейшее расширение множества чисел с сохранением всех свойств, присущих множеству действительных чисел, было осуществлено в XVI веке введением новых элементов, называемых «мнимыми числами» ([30], с. 67—71).

В книге «Алгебра» итальянского математика Раффаэле Бомбелли (1530—1572), опубликованной в год смерти ученого, впервые появились «мнимые числа» и были изложены правила арифметических действий над ними. Однако для многих крупных ученых XVII века, включая И. Ньютона (1643—1727) и Г. Лейбница (1646—1716), алгебраическая и геометрическая сущность комплексных чисел

$$z = x + iy \quad (x, y \in R), \tag{5.6}$$

где $i^2 = -1$, оказалась загадочной и мистической. А. Муавр (1667—1754) вывел для комплексных чисел формулу возведения в натуральную степень и формулу извлечения корня с натуральным показателем ([30], с. 69—70):

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin\varphi), \tag{5.7}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \tag{5.8}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ — модуль комплексного числа z, φ — аргумент числа $z(\cos\varphi = \frac{x}{r},\ \sin\varphi = \frac{y}{r})$ и $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$.

Символ $i = \sqrt{-1}$ введен в 1777 году Л. Эйлером (1707—1783), термин «комплексное число» ввел в 1803 году Л. Карно (1753—1823). Полное геометрическое истолкование комплексных чисел и действий над ними дал в 1799 году датский математик К. Вессель (1745—1818). Однако наиболее эффективное применение комплексных чисел в математике осуществили Л. Эйлер и К. Ф. Гаусс (1777—1855).

В XIX и особенно в XX веках комплексные числа нашли широкое применение не только в различных областях математики, но и в механике, аэро- и гидродинамике, электростатике, картографии, электротехнике и других областях естествознания.

Множество комплексных чисел обозначается буквой C (от лат. complex).

С математической точки зрения основные этапы расширения числового множества можно объяснить требованием разрешимости уравнений:

$$x + a = b \quad (a,\ b \in N), \tag{5.9}$$

$$ax = b \quad (a,\ b \in Z,\ a \neq 0), \tag{5.10}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \ (a,\ b,\ c \in R,\ a \neq 0) \tag{5.11}$$

при любых значениях коэффициентов соответствующих числовых множеств.

Для разрешимости уравнения (5.9) при любых натуральных a и b необходимо введение нуля и отрицательных чисел. Приходим к множеству N_0 и множеству Z целых чисел.

Для разрешимости уравнения (5.10) при любых целых b и $a \neq 0$ необходимо введение дробей, не являющихся целыми числами. Приходим к множеству Q рациональных чисел.

Наконец, для разрешимости квадратного уравнения (5.11) при любых действительных b, c и $a \neq 0$ необходимо введение комплексных чисел $Z = x + iy$ (x, $y \in R$, $i^2 = -1$). Приходим к множеству C.

С точки зрения основных алгебраических структур (см. [30], с. 80—93) множество Z целых чисел образует кольцо целостности — коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, — а множества Q, R и C рациональных, действительных и комплексных чисел являются полями.

Поле C алгебраически замкнуто, т. е. любой многочлен степени $n > 1$ с действительными или комплексными коэффициентами имеет в этом поле (с учетом кратности) n корней. Поля Q и R — алгебраически не замкнуты. Действительно, например, многочлен $f_1 = x^2 - 2$ с рациональными коэффициентами не имеет рациональных корней, а многочлен $f_2 = x^2 + 1$ не имеет действительных корней.

Дальнейшее расширение числового множества с сохранением всех основных законов арифметических операций (коммутативности, ассоциативности, дистрибутивности умножения относительно сложения) оказалось невозможным.

Отказ от закона коммутативности для операции умножения позволяет ввести тело T_0 кватернионов

$$q = a + bi + cj + dk \quad (a,\ b,\ c,\ d \in R) \tag{5.12}$$

с тремя мнимыми единицами i, j, k:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,\ ij = -ji = k,\ jk = -kj = i,\ ki = -ik = j \tag{5.13}$$

(см. [30], с. 76—78). Такое расширение числового множества осуществил Уильям Гамильтон (1805—1865).

Отказ в операции умножения от двух законов — коммутативности и ассоциативности — позволяет ввести алгебру Ω октав или чисел Кэли:

$$\omega = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK \tag{5.14}$$

с семью мнимыми единицами ([30], с. 78—79).

Здесь a, b, c, d, A, B, C, D — действительные числа. Такую алгебру построил английский математик Артур Кэли (1821—1895). Сложение в ней осуществляется покомпонентно, а умножение производится по правилу умножения многочлена на многочлен с сохранением порядка следования сомножителей. При этом мнимые единицы i, j, k умножаются друг на друга по правилу умножения кватернионов, т. е. по формулам (5.13). Квадраты мнимых единиц E, I, J, K также равны -1:

$$E^2 = I^2 = J^2 = K^2 = -1. \tag{5.15}$$

Умножение любой мнимой единицы, отличной от E, на E дает взятую со знаком «+» или «—» такого же вида мнимую единицу с изменением большой буквы на малую, и наоборот, причем, если левый множитель — большая (малая) мнимая единица, то берется знак «+» (знак «—»), а для множителей справа — наоборот.

Умножение мнимых единиц I, J, K друг на друга также осуществляется по правилу умножения кватернионов, но с изменением знака на противоположный и с заменой в произведении большой буквы на соответствующую малую.

Наконец, умножение малых (больших) мнимых единиц на такие же большие (малые) дает $+E$ $(-E)$, а умножение малой (большой) мнимой единицы на другую большую (малую) мнимую единицу осуществляется также по правилу умножения кватернионов, но с изменением знака и записью результата умножения большой буквой.

Немецкий математик Адольф Гурвиц (1859—1919) доказал, что без потери операции деления нельзя образовать числовое множество с другим количеством мнимых единиц, кроме одной (комплексные числа), трех (кватернионы) и семи (октавы). Таким образом, общая схема расширения числовых множеств приводится к виду:

$$N \subset N_0 \subset Z \subset Q \subset R \subset C \subset T_0 \subset \Omega. \tag{5.16}$$

Действительные числа интерпретируются точками числовой прямой (одномерного арифметического пространства R), комплексные числа — точками плоскости (двумерного арифметического пространства R^2), кватернионы — точками четырехмерного арифметического пространства R^4, наконец, октавы — точками восьмимерного арифметического пространства R^8.

§ 6. Алгебраические и трансцендентные числа. Особая роль в математике трансцендентных чисел π и e

Множество R действительных чисел можно разбить на два непересекающихся класса так, что один класс включает в себя множество Q рациональных чисел, а другой является собственным подмножеством множества иррациональных чисел.

Число $a \in R$ называется *алгебраическим*, если существует хотя бы один многочлен с рациональными коэффициентами, корнем которого является число a. Если же не существует ни одного многочлена с рациональными коэффициентами с корнем a, то такое действительное число a называется *трансцендентным*. Аналогично подразделяются на алгебраические и трансцендентные комплексные числа, но мы ограничимся только действительными числами.

Обозначим через A множество всех действительных алгебраических чисел, а через T — множество всех действительных трансцендентных чисел. Имеем:

$$A \cup T = R;\ A \cap T = \varnothing;\ Q \subset A;\ Q \neq A. \tag{6.1}$$

Действительно, любое рациональное число $r \in Q$ является корнем многочлена $x - r$, значит, алгебраическим числом, т. е. $Q \subset A$. С другой стороны, например, иррациональное число $\sqrt[3]{5}$ — алгебраическое, так как оно является корнем многочлена $x^3 - 5$. Следовательно, $Q \neq A$.

Существование и явные построения трансцендентных чисел обосновал Жозеф Лиувилль (1809—1882).

Особую, пожалуй, даже исключительно важную роль в математике играют два действительных трансцендентных числа: «π» — отношение длины любой окружности к ее диаметру, и «e» — основание натуральных логарифмов:

$$\pi \approx 3{,}14159265358979323846264338327 9\ldots, \tag{6.2}$$

$$e \approx 2{,}718281828459045\ldots \tag{6.3}$$

Впервые трансцендентность числа e доказал в 1873 году Шарль Эрмит (1822—1901). Это число называют также неперовым числом по имени Джона Непера (1550—1617), давшего кинематическое определение натуральной логарифмической функции

$$y = \log_e x \stackrel{\text{def}}{=} \ln x. \qquad (6.4)$$

Число e является пределом числовой последовательности

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (6.5)$$

Имеем:

$$x_1 = 2,\ x_2 = \frac{9}{4} = 2{,}25,\ x_3 = \frac{64}{27} = 2,(370)$$
$$x_4 = \frac{625}{256} = 2{,}4414062,\ x_5 = \frac{7776}{3125} = 2{,}48832. \qquad (6.6)$$

Используя формулу бинома Ньютона ([30], с. 97—98), запишем формулу (6.5) в виде:

$$x_n = 2 + \frac{1-\frac{1}{n}}{2!} + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})}{3!} + \ldots + \frac{(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\ldots(1-\frac{n-1}{n})}{n!} <$$
$$< 2 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3, \qquad (6.7)$$

так как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{1}{2}$ и знаменателем $q = \frac{1}{2}$ равна единице ([30], с. 233). Из (6.7) следует, что $\forall\, n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} > x_n$. Значит, последовательность x_n является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. Следовательно, по теореме Вейерштрасса ([30], с. 236), она имеет предел — число e:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (6.8)$$

Так как любое действительное число $x \geqslant 1$ заключено между двумя последовательными натуральными числами:

$$n \leqslant x < n + 1, \qquad (6.9)$$

то

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n. \qquad (6.10)$$

Переходя к пределу и учитывая формулу (6.8), находим:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (6.11)$$

Этот предел в математике называется ***вторым замечательным пределом***. А первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (6.12)$$

непосредственно выводится из неравенств (см. рис. 1):

$$S_{\Delta OAB} < S_{\text{сект. } OAB} < S_{\Delta OAC}, \qquad (6.13)$$

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \qquad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right). \qquad (6.14)$$

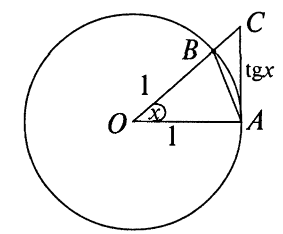


Рис. 1

Он используется для вычисления с любой точностью числа π.

Обозначим через $L = 2\pi R$ длину окружности, через P_n — периметр правильного n-угольника, вписанного в эту окружность. Имеем:

$$\lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} n \cdot 2R \sin\frac{\pi}{n} = 2\pi R \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = 2\pi R = L. \qquad (6.15)$$

Следовательно, чем больше число сторон правильного вписанного n-угольника, тем меньше отличается его периметр P_n от длины L описанной около него окружности и тем точнее определяется

$$\pi \approx \frac{P_n}{2R}. \qquad (6.16)$$

Например, аль-Каши (ум. в 1436 г.) вычислил длину стороны вписанного правильного

$$3 \cdot 2^{28} = 805\ 306\ 368 \text{ — угольника} \qquad (6.17)$$

и определил π с точностью до 16 знаков после запятой. Этот замечательный результат повторил лишь через полтора столетия голландский математик Адриен ван Роомен (1561—1615).

Трансцендентность числа π впервые доказал в 1882 году Фердинанд Линдеман (1852—1939).

Тем самым была доказана невозможность построения циркулем и линейкой квадрата, площадь которого равна площади данного круга, т. е. в отрицательном плане была решена знаменитая проблема «квадратуры круга».

На памятнике, установленном в Мюнхене на могиле ученого, нарисован круг и выступающий из него квадрат.

Удивительно, что число e появилось лишь в начале XVII века в труде Джона Непера «Описание удивительной таблицы логарифмов» (1614), а число π — в глубокой древности. Даже в Ветхом Завете уже упоминается отношение длины окружности к диаметру, принимаемое, как и в Древнем Вавилоне, за 3. «И сделал литое из меди море, — от края его до края его десять локтей, — совсем круглое, вышиною в пять локтей, и снурок в тридцать локтей обнимал его кругом» (3 Царств 3, 16).

Египтяне уже считали это отношение равным 3,16, а греки, начиная с Архимеда, — $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$.

Однако самым удивительным оказалось, что в Великой пирамиде в Гизе, боковая грань которой имеет при вершине угол 51°51'14,3", периметр основания равен $2\pi h$, где h — апофема, а π выражается с точностью до пяти знаков после запятой, т. е. $\pi \approx 3{,}14159$.

По мнению ученых, эта уникальная пирамида была построена много тысячелетий назад, раньше других известных египетских пирамид. Если учесть, что некоторые ее параметры достаточно точно характеризуют продолжительность сидерического года (см. [41]), то можно предположить, что математические знания были известны людям задолго до Вавилонского и Египетского периодов в истории человечества.

Числа π и e присутствуют во многих разделах математики.

Если провести на листе бумаги несколько параллельных отрезков с одинаковым расстоянием a между любыми двумя соседними и бросать случайным образом иглу длиной $l < a$, подсчитывая число бросков s и число случаев k, когда игла пересекает одну из параллелей, то при большом числе бросаний формула

$$\pi \approx \frac{2ls}{ak} \tag{6.18}$$

довольно точно определяет значение π.

Например, ученые-испытатели Вольф, Фокс и Лазарини подбрасывали иглу соответственно 5000 (1850 г.), 1120 (1895 г.) и 3408 (1901 г.) раз и по формуле (6.18) получили следующие значения для π:

3,141596 (Вольф), 3,1419 (Фокс), 3,1416 (Лазарини).

А разве не чудо — асимптотический закон распределения простых чисел (см. § 13, (13.5)), согласно которому при достаточно больших $x \in N$ число простых чисел, не бо́льших x, приблизительно равно $\frac{x}{\ln x}$?

Число e, как и π, фигурирует во многих формулах, например, в формуле Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{6.19}$$

в распределении Пуассона

$$P_{n,m}(A) \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}, \tag{6.20}$$

позволяющем достаточно точно определить вероятность наступления m раз события A при n испытаниях, если число испытаний достаточно велико, а вероятность $p = \frac{\lambda}{n}$ наступления события A при одном испытании достаточно мала (λ = const.), в специальных функциях и др.

Математиков интересовал вопрос: нет ли взаимосвязи между этими двумя замечательными трансцендентными числами? Выдающийся индийский математик Сриниваса Рамануджан (1887—1920) установил, что сумма двух числовых рядов

$$1+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}+\ldots; \qquad 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{2}{1+\cfrac{3}{1+\cfrac{4}{\cdots}}}}} \tag{6.21}$$

есть $\sqrt{\frac{1}{2}\pi e}$.

Интересно отметить, что среднее гармоническое $m_{\text{гар}}$, среднее геометрическое $m_{\text{г}}$ и среднее арифметическое m_a чисел π и e образуют с точностью до четырех знаков после запятой арифметическую прогрессию с разностью 0,0077. Действительно,

$$m_{\text{гар}}=\frac{2\pi e}{\pi+e}\approx 2{,}9146485, \tag{6.22}$$

$$m_{\text{г}}=\sqrt{\pi e}\approx 2{,}9222835, \tag{6.23}$$

$$m_a=\frac{1}{2}(\pi+e)\approx 2{,}9299385. \tag{6.24}$$

Числа π и e играют большую роль не только в математике и физике, но и отражают многие удивительные закономерности в различных природных явлениях.

Разве не парадоксально, что среднее значение отношения длины реки к расстоянию от ее истока до устья по прямой линии приближенно равно 3,14, причем чем больше рек вовлечено в этот эксперимент, тем это отношение точнее приближается к π (см. [49], с. 31).

Очень часто в природе происходят процессы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\frac{dy}{dx}=\pm ky\ (k>0) \tag{6.25}$$

показательного роста или показательного убывания (например, скорость размножения бактерий в пище, рост лейкоцитов при лейкемии, скорость распада радиоактивного вещества и т. п.).

Решения таких уравнений (см. [30], с. 379—382)

$$y=Ce^{\pm kx}\ (k=\text{const.}>0,\ C=\text{const.}) \tag{6.26}$$

выражаются с помощью степени числа «e».

§ 7. Золотое сечение и числа Фибоначчи

Среди задач, решаемых древнегреческими математиками, важную роль играли задачи на построение циркулем и линейкой. Особое значение придавалось задаче деления отрезка в среднем и крайнем отношении: на данном отрезке AB построить такую точку C, что

$$AC^2 = AB \cdot BC. \tag{7.1}$$

В XIX веке в Германии такое деление отрезка стали называть «золотым сечением», а некоторые математики приписывают появление этого термина Леонардо да Винчи (1452—1519).

Принимая отрезок AB за единичный, положим:

$$AC = x, \quad CB = 1 - x \quad (x > 0). \tag{7.2}$$

Уравнение (7.1) приводится к виду:

$$x^2 + x - 1 = 0. \tag{7.3}$$

Следовательно,

$$x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618. \tag{7.4}$$

Из формулы (7.4) следует, что для построения отрезка $x = AC$ надо построить прямоугольный треугольник ABD с катетами $AB = 1$ и $BD = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}$ (рис. 2).

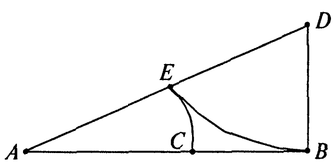


Рис. 2

Затем от гипотенузы AD отнять отрезок BD и отложить на AB от точки A оставшуюся ее часть, т. е. отрезок AE.

Отношение большего отрезка AC к меньшему CB, или, что то же (в силу (7.1)), всего отрезка AB к большему AC также называется *«золотым сечением»* и обозначается греческой буквой φ в честь знаменитого древнегреческого архитектора и скульптора Фидия (ум. ок. 432—431 до н. э.) — помощника Перикла, строившего многие здания Афин и скульптуры «по золотому сечению». Имеем:

$$\varphi = \frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618. \tag{7.5}$$

Друг Леонардо да Винчи Лука Пачоли (ок. 1445— ок. 1514) посвятил этому сечению свой трактат «О божественной пропорции». А выдающийся немецкий математик и астроном Иоганн Кеплер (1571—1630), открывший законы движения планет, писал: «Геометрия владеет двумя сокровищами: одно из них — это теорема Пифагора, а другое — деление отрезка в среднем и крайнем отношении.

Первое можно сравнить с мерой золота; второе же больше напоминает драгоценный камень».

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом A при вершине, равным 36° (рис. 3).

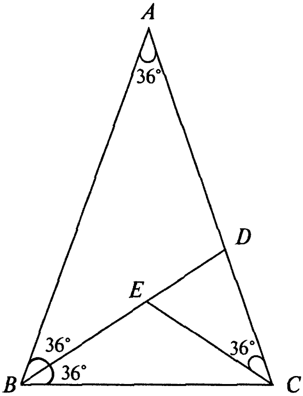


Рис. 3

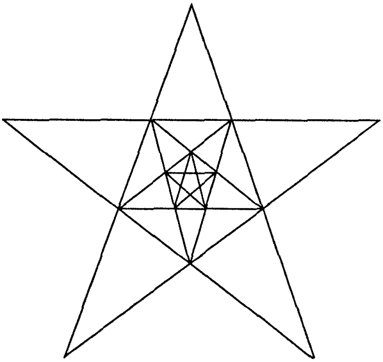


Рис. 4

Биссектриса BD угла B делит противоположную сторону на части, пропорциональные прилегающим сторонам, т. е.

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}, \quad AD^2 = AC \cdot CD, \tag{7.6}$$

так как

$$BD = AD = BC; \quad AB = AC. \tag{7.7}$$

Из формул (7.6), (7.7) следует:

$$\frac{AB}{BC} = \varphi, \frac{BC}{CD} = \varphi, \tag{7.8}$$

т. е. отношение боковой стороны равнобедренного треугольника ABC с углом при вершине 36° к основанию равно золотому сечению φ.

Такой треугольник называют «золотым». Равнобедренный треугольник BCD, в силу формулы (7.8), также является «золотым».

Проводя биссектрису угла C, равного 72°, получим «золотой треугольник» CDE и т. д.

Так как центральный угол, опирающийся на сторону вписанного в окружность правильного десятиугольника, равен 36°, то такая сторона — больший отрезок золотого сечения радиуса описанной окружности. Таким образом, циркулем и линейкой можно построить пятиконечную звезду (пентаграмму) — священный символ пифагорейцев, широко используемый и в наши дни.

Любая пятиконечная звезда порождает две бесконечные последовательности пятиконечных звезд, одна из которых образована неограниченно уменьшающимися звездами, стягивающимися к общему центру, а другая образована неограниченно увеличивающимися звездами, удаляющимися от данной звезды, но имеющими тот же самый общий центр (рис. 4).

Прямоугольник, отношение большей стороны которого к меньшей равно золотому сечению φ, называют «золотым».

Если от данного «золотого прямоугольника» отнять квадрат, построенный на меньшей стороне, то оставшаяся часть будет снова «золотым прямоугольником». Действительно, принимая большее основание за единичный отрезок и обозначая меньшее основание за x, получим, учитывая уравнение (7.3):

$$\varphi = \frac{1}{x}, \qquad \frac{x}{1-x} = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} = \varphi. \tag{7.9}$$

Продолжая процесс отнимания квадратов, построенных на меньших сторонах, получим бесконечную последовательность неограниченно уменьшающихся в размерах «золотых прямоугольников».

Аналогично, пристраивая к данному «золотому прямоугольнику» квадрат на его большей стороне, получим снова «золотой прямоугольник», так как

$$\frac{1+x}{1} = 1 + x = 1 + \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \varphi. \tag{7.10}$$

Таким образом, возникает другая бесконечная последовательность «золотых прямоугольников», неограниченно увеличивающихся размеров.

По мнению ряда ученых, золотое сечение используется не только архитекторами и художниками, но и играет важную роль в соотношениях различных частей живых организмов и растений, включая структуру человеческого тела. Например, в книге Теодора Кука «Кривые жизни», изданной в 1914 году в Лондоне, помещена копия картины Боттичелли «Рождение Венеры», а сбоку — масштабная линейка с отметками степеней φ от нулевой до седьмой включительно, иллюстрирующая, по мнению автора, значение золотого сечения в пропорциях человеческого тела.

Итальянский математик Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1180—1240) составил удивительный ряд чисел, первые два числа которого — единицы, а каждое последующее — сумма двух предыдущих:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ 89,\ 144,\ 233,\ \ldots \tag{7.11}$$

Он пришел к нему в связи с задачей о разведении кроликов, предположив, что кролики живут неограниченно долго и что каждый месяц, начиная с двухмесячного возраста, пара кроликов приносит приплод из двух крольчат.

Начав разведение кроликов с пары новорожденных крольчат, т. е. с 1, через месяц, при сделанных предположениях, остается снова одна пара, т. е. 1, а через два месяца их становится 2 пары, через три месяца — 3 пары, через четыре — 5 и т. д.

Обозначим через f_n — n^{-e} число Фибоначчи. Оно определяется формулой:

$$f_n = \frac{1}{2^n\sqrt{5}}\left((1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n\right). \tag{7.12}$$

Справедливы следующие свойства чисел Фибоначчи:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = \varphi.$$

$$f_n^2 - f_{n-1} f_n - f_{n-1}^2 = \pm 1, \tag{7.13}$$

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = f_{n+2} - 1, \tag{7.14}$$

$$f_1^2 + f_2^2 + \ldots + f_n^2 = f_n \cdot f_{n+1}, \tag{7.15}$$

$$f_1 + f_3 + \ldots + f_{2n-1} = f_{2n}, \tag{7.16}$$

$$f_2 + f_4 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1, \tag{7.17}$$

$$f_n^2 = (-1)^{n+1} + f_{n-1} f_{n+1}. \tag{7.18}$$

Эти свойства легко доказываются методом математической индукции с учетом основного тождества

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad (n > 1). \tag{7.19}$$

Интересно, что в природе многие процессы происходят по закону чисел Фибоначчи. Например, рост числа ветвей деревьев.

Числа Фибоначчи удивительным образом связаны с золотым сечением φ.

Рассмотрим последовательность натуральных степеней числа $\varphi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$\varphi,\ \varphi^2 = \varphi + 1,\quad \varphi^3 = 2\varphi + 1,\quad \varphi^4 = 3\varphi + 2,\quad \varphi^5 = 5\varphi + 3,$$
$$\varphi^6 = 8\varphi + 4,\ \ldots\ \varphi^n = f_n \cdot \varphi + n - 2\ (n > 2). \tag{7.20}$$

Из формул (7.20) следует, что коэффициенты при φ этого ряда — это числа Фибоначчи, а свободные члены, начиная с третьего, образуют натуральный ряд.

§ 8. Числовая гармония мира — фантазия или реальность?

Композитор М. А. Марутаев опубликовал несколько статей ([36] — [38] и др.), в которых высказал гипотезу числовой гармонии Вселенной, сущность которой автор выразил так:

«Гармония — это общий закон. Его нельзя объяснить никакими известными законами.

Здесь действует Его Величество Число, причем число в пифагорейском смысле — как выражение сущности». По мнению автора, числовая гармония во Вселенной определяется тремя взаимосвязанными законами: качественная симметрия, нарушенная симметрия, золотое сечение.

Из установленных им законов М. А. Марутаев получил некоторые основные числа и производные от них новые числовые ряды, устанавливающие, по его мнению, строгий порядок в мире и подтвержденные экспериментально во многих областях знания: музыкальные звукоряды, порядок расположения планет, гармония в генетике, расположение элементов в таблице Менделеева, соотношения масс в физике элементарных частиц и др.

1. Качественная симметрия

Положительный луч числовой прямой разбивается на бесконечное число интервалов D_k $(k \in Z \wedge k \neq 0)$, определяемых следующим образом:

$$D_k = (\sqrt{2}^{k-1}, \sqrt{2}^k), \text{ если } k > 0, \tag{8.1}$$

$$D_k = (\sqrt{2}^k, \sqrt{2}^{k+1}), \text{ если } k < 0. \tag{8.2}$$

Пусть $a \in D_1 = (1, \sqrt{2})$. Рассматривается отображение

$$\varphi_m : a \to a_m \in D_m \ (m \in Z \backslash 0), \tag{8.3}$$

определяемое следующим образом:

$$\varphi_1(a) = a, \quad \varphi_{2k}(a) = a^{-1} \cdot 2^k, \quad \varphi_{2k+1}(a) = a \cdot 2^k \ (k > 0), \tag{8.4}$$

$$\varphi_{-1}(a) = \frac{1}{a}, \quad \varphi_{2k}(a) = a \cdot 2^k, \quad \varphi_{2k-1}(a) = a^{-1} \cdot 2^k \ (k < 0). \tag{8.5}$$

Отображение $a_m = \varphi_m(a)$ автор записывает символом $a \perp a_m$. Например,

$$a \perp a_7 = a \cdot 2^3, \quad a \perp a_{-5} = a^{-1} \cdot 2^{-2}. \tag{8.6}$$

Таким образом, действительное число $a \in D_1$ порождает бесконечную числовую последовательность

$$\ldots\ a_{-3} = a^{-1}\cdot 2^{-1},\ \ a_{-2} = a\cdot 2^{-1},\ \ a_{-1} = a^{-1},\ \ a_1 = a,\ \ a_2 = a^{-1}\cdot 2,\ \ a_3 = a\cdot 2, \ldots \tag{8.7}$$

Преобразование $a_p \perp a_q\ (p,\ q \in Z\setminus 0)$ (8.8)

определяется путем вычисления сначала a из формулы $a \perp a_p$, а затем находят $a \perp a_q$.

Определим, например, $a_{-4} \perp a_7$:

$$1)\ a_{-4} = a\cdot 2^{-2} \to a = 4a_{-4};\ \ 2)\ a_7 = a\cdot 2^3 = 4a_{-4}\cdot 2^3 = a_{-4}\cdot 2^5. \tag{8.9}$$

Мультипликативную группу $\Phi = \{\varphi_m | m \in Z\setminus 0\}$ автор называет качественной симметрией. Любое действительное положительное число $\lambda \in R_+$ $(\lambda \neq \sqrt{2}^k)$ может быть преобразовано в число любого другого интервала $D_h (h \in Z\setminus 0)$.

Например, преобразуем число $\lambda = 5{,}84$ в число первого интервала (диапазона) D_1. Так как

$$\sqrt{2}^5 < 5{,}84 < \sqrt{2}^6 = 8, \tag{8.10}$$

то $5{,}84 = a_6 = a^{-1}\cdot 2^3 \to a = \dfrac{8}{a_6} \approx 1{,}37.$

Качественная симметрия позволяет связать некоторые особенно важные, по мнению автора, числа: 1,37; 0,417; 1,618 (золотое сечение); 0,865; π; e и др.

Рассмотрим, например, связь между числами π, e и числом 1,37. Имеем:

$$\begin{gathered} \frac{1}{2}(\pi + e) \approx 2{,}9299 = a_4 \to a_1 \approx 1{,}3652 \approx 1{,}37, \\ \sqrt{\pi e} \approx 2{,}9223 = b_4 \to b_1 \approx 1{,}3688 \approx 1{,}37, \\ \frac{2\pi e}{\pi + e} \approx 2{,}9147 = c_4 \to c_1 \approx 1{,}3724 \approx 1{,}37. \end{gathered} \tag{8.11}$$

Далее

$$\frac{1}{2}(\lg e + \ln 10) \approx 1{,}36835 \approx 1{,}37, \tag{8.12}$$

$$\frac{2\lg e\cdot \ln 10}{\lg e + \ln 10} = \frac{2}{\lg e + \ln 10} \approx 1{,}37. \tag{8.13}$$

Недостатком этих формул является приблизительность оценок, но это не умаляет интереса к загадочному числу

$$\beta = 2^{\frac{5}{11}} \approx 1{,}370350985\ldots \tag{8.14}$$

Анализируя музыку композитора Шостаковича, в частности, фугу № 1, ор. 87, до-мажор, автор гипотезы о числовой гармонии

Вселенной отмечает числовые характеристики общепринятых параметров макроплана этого музыкального произведения: экспозиция $A = 39$, разработка $B = 39$, реприза $A_1 = 28{,}5$ тактов. Вся фуга в целом $A + B + A_1 = 106{,}5$ такта.

Оказывается, что после преобразования в первый диапазон $D_1 = (1, \sqrt{2})$ каждого из следующих чисел

$$\frac{A}{A_1},\ \frac{B}{A_1},\ \frac{A+B}{A_1},\ \frac{A+B+A_1}{A},\ \frac{A+B+A_1}{B},\ \frac{A+B+A_1}{A+B} \qquad (8.15)$$

получается (с точностью до двух знаков после запятой) одно и то же число 1,37!

Дирак [22] относит проблему числа 137 к «трудностям первого класса». Пусть h — постоянная Планка, деленная на 2π, e — заряд электрона, c — скорость света. Тогда

$$\frac{hc}{e^2} \approx 1{,}37 \cdot 10^2 = 137. \qquad (8.16)$$

Н. П. Дубинин [23] отмечает, что при тригибридном скрещивании во втором поколении на каждые 64 растения будет возникать 27 окрашенных растений и 37 растений с белыми зернами. Имеем:

$$\frac{37}{27} \approx 1{,}3704 \approx 1{,}37 \approx \beta. \qquad (8.17)$$

Обозначим

$$a_{-2} = \frac{\beta}{\beta+1} \approx 0{,}578; \quad b_{-3} = \frac{1}{\beta+1} \approx 0{,}422. \qquad (8.18)$$

По формулам (8.5) находим:

$$a_{-1} \approx 0{,}865 \approx \frac{e}{\pi}\cdot \qquad (8.19)$$

Одним из самых фундаментальных и загадочных чисел гармонии, по мнению М. А. Марутаева, является число 0,417. В музыке число $m_{-3} = 0{,}41(6) \approx 0{,}417$ есть значение минорной терции. Структуру музыкальной формы большинства выдающихся произведений Баха, Моцарта, Бетховена, Чайковского, Прокофьева, Шостаковича и др. определяют следующие отношения натуральных чисел:

$$m_{-3} = \frac{5}{12},\ m_{-2} \approx \frac{3}{5},\ m_{-1} = \frac{5}{6},\ m_1 = \frac{6}{5},\ m_2 = \frac{5}{3},\ m_3 = \frac{12}{5}\cdot \qquad (8.20)$$

Р. Фейнман [56] обращает внимание на фундаментальную мировую константу — отношение гравитационного притяжения к электрическому отталкиванию двух электронов, — которая равна

$$\frac{1}{0{,}417 \cdot 10^{43}}. \qquad (8.21)$$

С точки зрения музыки разбиение положительной числовой оси на диапазоны $D_k (k \in Z,\ k \neq 0)$, составляющее основу качественной симметрии, — это разбиение на полуоктавы (октавы определяются степенями двойки: $2^n (n = 0, 1, 2, ..., 7)$).

М. А. Марутаев считает, что расположение планет в Солнечной системе соответствует музыкальному ряду: «Представьте себе клавиатуру рояля: она содержит семь октав. Если Солнце поместить в правом ее конце, то Плутон окажется в левом. Другие планеты «расселятся» по октавам, Земля и Марс расположатся в двух соседних полуоктавах, приближенно симметрично (относительно) друг друга».

2. Нарушенная симметрия

Многие процессы во Вселенной происходят, по мнению автора гипотезы, с отклонением от полной симметрии. Он сформулировал это предположение в виде второго закона гармонии, названного им «нарушенной симметрией».

Приведем примеры, данные автором гипотезы, в подтверждение этого закона.

№ 1. Пусть $r_1 = 19{,}1910$ а. е. — расстояние от Урана до Солнца (одна астрономическая единица (а. е.) — это расстояние от Земли до Солнца, равное приблизительно 149,6 млн. км), $r_2 = 20{,}465$ а. е. — расстояние от Урана до Плутона. Имеем:

$$\frac{r_1}{r_2} \approx 0{,}93775 \approx 0{,}94. \tag{8.22}$$

№ 2. Тройка (A, B, A_1) макроформы одного из самых совершенных по форме музыкальных произведений — 1-й части «Апассионаты» Бетховена — включает в себя $A + B + A_1 = 3147$ восьмых долей, причем экспозиция вместе с разработкой составляют $A + B = 1620$, а реприза $A_1 = 1527$ восьмых долей. Имеем:

$$\frac{A_1}{A + B} \approx 0{,}9426 \approx 0{,}94. \tag{8.23}$$

№ 3. В мирное время на Земле рождается в среднем на 100 девочек 106 мальчиков, следовательно,

$$\frac{100}{106} \approx 0{,}9434 \approx 0{,}94. \tag{8.24}$$

№ 4. Отношение масс двух фундаментальных частиц протона и k-мезона, преобразованных в числа диапазона $D_{-1} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, равно

$$\frac{0{,}4853}{0{,}5147} \approx 0{,}9429 \approx 0{,}94. \tag{8.25}$$

Основным числом нарушенной симметрии М. А. Марутаев называет число

$$\beta = 2^{\frac{5}{11}} \approx 1{,}370350985... \approx 1{,}37. \tag{8.26}$$

Это число отклоняется от $\sqrt{2}$ (основного числа, порождающего диапазоны D_k) на

$$\sqrt{2} - \beta \approx 1{,}4142135 - 1{,}37035098 \approx 0{,}0438626 \approx 0{,}04. \tag{8.27}$$

3. Связь золотого сечения с числом β

Пусть единичный отрезок AB разделен точкой C по золотому сечению, т. е.

$$AC = x_{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}6180, \tag{8.28}$$

$$CB = y_{-3} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \approx 0{,}382. \tag{8.29}$$

По формулам (8.4), (8.5) находим:

$$x_1 = 2x_{-2} \approx 1{,}236; \; y_2 = 4y_{-3} \approx 1{,}528. \tag{8.30}$$

Среднее геометрическое этих чисел равно

$$\sqrt{x_1 y_2} \approx \sqrt{1{,}236 \cdot 1{,}528} \approx 1{,}3743 \approx 1{,}37. \tag{8.31}$$

Так как

$$x_2 = \varphi \approx 1{,}618, \tag{8.32}$$

то последовательности, порожденные числами x_{-2} и φ, совпадают. Имеем:

$$\begin{matrix} ...0{,}2023; & 0{,}309; & 0{,}4045; & 0{,}618; & 0{,}809; \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \\ 1{,}236; & 1{,}618; & 2{,}472; & 3{,}236; & 4{,}944;... \\ +1 & +2 & +3 & +4 & +5 \end{matrix} \tag{8.33}$$

Справедливо тождество

$$x_2 - x_{-2} = 1. \tag{8.34}$$

М. А. Марутаев дает философское обоснование сформулированным им трем законам числовой гармонии Вселенной, ознакомиться с которым читатель может, прочитав его работу «О гармонии мира» (Вопросы философии. — № 6. — 1994. — С. 71—81).

Мы ограничились лишь кратким изложением математического аспекта выдвинутой композитором гипотезы. А ответ на вопрос, сформулированный в названии этого параграфа, предлагается дать Вам, уважаемый читатель.

Математическая гармония мира признавалась многими учеными и служителями церкви. В § 1 мы уже отмечали, какую важную роль отводили числам в древних церковных рукописях, прежде всего в Ветхом Завете.

Древнегреческие философы прямо подчеркивали связь Всевышнего творца с математикой. «Бог всегда является геометром», — говорил Платон. А выдающийся немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571—1630), открывший законы движения планет, издал в 1619 году книгу «Гармония мира», в которой стремился показать бесконечную мудрость Творца, создавшего, по мнению ученого, Вселенную по математическому плану: «Солнце, Луна и планеты, славьте его на своем неизъяснимом языке. Вы, небесные гармонии, постигшие его чудесные творения, воспойте хвалу ему! И ты, душа моя, восхвали Создателя! Им создано, и в нем существует все. То, что нам известно лучше всего, сотворено в нем и в нашей суетной науке. Хвала, честь и слава ему во веки веков» ([32], с. 91).

В середине XIX века епископ Кавказский и Черноморский Игнатий Брянчанинов подчеркивал, что «ни одна наука, кроме математики, не способна правильно и точно объяснить отношение «тварей к Творцу». «Положения о бесконечности адских мук заимствованы из известной математической теории о бесконечном». «Вселенная есть число, и все составные части ее суть числа. Непосвященный в таинства математики никак не совместит в себе понятия, что все числа, столько различные между собою, вместе совершенно равны одно с другим в отношении к бесконечному»... «Бесконечное, объемля собою все числа, вместе с этим пребывает превыше всякого числа по свойству совершенства, не имеющего ни в чем никакого недостатка и неспособного подвергнуться недостатку»... «В помощь математике приходят другие естественные науки, к которым она относится как душа к телу»...

«Мечтатели сделались безбожниками, а изучившие глубоко математику всегда признавали не только Бога, но и христианство».

Свои мысли епископ Игнатий Брянчанинов высказал в книге «Слово о смерти» (см. [5], с. 122—125).

Читатель может с ними не соглашаться, но поражает близость взглядов композитора и священника на роль чисел в окружающем нас мире.

§ 9. Магические квадраты

Во времена Средневековья и особенно в XVI и XVII веках процветало составление так называемых «магических квадратов» — квадратных таблиц из натуральных чисел от 1 до n^2, расположенных так, что сумма чисел в каждом столбце, строке и в каждой диагонали одинакова. Она называется «магической суммой».

Эти странные свойства магических квадратов считались волшебными. Поэтому магические квадраты служили талисманами, защищающими тех, кто их носит, от многих несчастий. Не случайно крупнейший художник эпохи Возрождения Альбрехт Дюрер (1471—1528) на своей знаменитой гравюре «Меланхолия», созданной в 1514 году, поместил магический квадрат 4×4, в нижней строке которого две средние цифры изображали год создания картины (рис. 5).

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Рис. 5

Магическая сума S_n магического квадрата $n \times n$ определяется формулой:

$$S_n = \frac{1}{2} n\,(n^2 + 1). \tag{9.1}$$

Действительно, из свойств такого квадрата следует, что сумма всех его цифр $\frac{1}{2}\, n^2(n^2 + 1)$ равна $n \cdot S_n$.

В частности,

$$S_3 = 15,\ S_4 = 34,\ S_5 = 65,\ S_6 = 111,\ S_{16} = 2056. \tag{9.2}$$

Построим, например, магический квадрат 3×3.

x_1	y_1	z_1
x_2	y_2	z_2
x_3	y_3	z_3

Рис. 6

8	3	4
1	5	9
6	7	2

Рис. 7

Складывая суммы чисел на двух диагоналях и на средних строке и столбце (рис. 6) находим:

$$4 \cdot 15 = 3y_2 + (x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) + (z_1 + z_2 + z_3). \tag{9.3}$$

Следовательно, $y_2 = 5$. Число 9 не может стоять в углу квадрата. Действительно, если бы, например, $x_1 = 9$, то $x_2 + x_3 = y_1 + z_1 = 6$. Но этого не может быть, так как из чисел 1, 2, 3, 4, меньших 6 и не равных 5, нельзя составить две суммы двух чисел, равные 6. Значит, 9 находится в середине строки или столбца. Тогда 7 не может находиться в углу, так как тогда оно находилось бы в одной строке либо с 9, либо с 1 (учитывая, что $y_2 = 5$). Следовательно, 7 — в середине строки или столбца. Но тогда, с точностью до замены строк столбцами и перестановки крайних строк или столбцов, получим единственный магический квадрат, например, изображенный на рис. 7.

Составлением магических квадратов различных порядков (часто с добавлением новых свойств) в XVI—XVIII веках занимались с таким же увлечением, как в XX веке и сейчас увлекаются составлением кроссвордов и их разгадыванием. Особенно страстным поклонником составления магических квадратов был выдающийся американский общественный деятель Бенджамин Франклин (1706—1790).

Он составил магический квадрат 16×16 (Приложение 1) со следующим замечательным свойством:

Если вырезать из бумаги квадрат 4×4 и уложить этот лист на большой квадрат 16×16 так, чтобы 16 квадратиков большого квадрата попали в эту прорезь, то сумма 16 чисел, появившихся в этой прорези, куда бы мы ее ни положили на большой квадрат, будет одна и та же, равная магической сумме 2056. Но в отличие от стандартного магического квадрата в этом магическом квадрате лишь сумма чисел двух диагоналей дает удвоенную магическую сумму:

$$1928 + 2184 = 4112 = 2 \cdot 2056. \qquad (9.4)$$

§ 10. Числовая мистика

Изучение древнейших дошедших до нас памятников халдейской, египетской, индусской, китайской и греческой культур свидетельствует, что числа обожествлялись, им приписывались таинственные свойства. Считалось, что числа влияют на нашу жизнь и на окружающий мир. «Вещи суть копии чисел, числа — начала вещей», — таким кредо руководствовались пифагорейцы и их последователи.

Главным божеством пифагорейцев была четверица (тетрактис) — множество

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4\} \qquad (10.1)$$

первых четырех натуральных чисел, сумма которых — 10.

Встав до восхода Солнца, пифагорейцы шли на берег моря и совершали утреннюю молитву:

«Благослови нас, о божественное число, породившее богов и людей! О святая, святая Тетрактис!

В тебе источник и корни вечно цветущей природы! Ибо это божественное число начинается чистой и глубокой единицей и достигает священной четверки; затем оно порождает праматерь всего сущего, ту, что все объединяет, ту, что первой родилась, что никогда не отклоняется в сторону, ту, что никогда не утомляется, священную десятку, ключ ко всем вещам».

А завершали свой трудовой день они исповедью по составленному Пифагором предписанию:

«Сладкому сну усталые очи не дай смежить прежде, чем ты обсудишь дневные дела свои, так вопрошая: Что преступил я? Что натворил? Какого не выполнил долга? Первым начавши, припомни ты все по порядку, а после, коль дела дурны, — о них сокрушайся, добрым же рад будь. Тетрактис — вечной природы источник».

Отдельные числа в школе Пифагора были символами важных понятий в жизни человека. Нечетные числа, большие единицы, символизировали мужское начало, четные — женское. Число 5 означало супружество — соединение женского начала 2 и мужского начала 3, 6 было символом души, 7 — здоровья (мы и сейчас отдыхаем в воскресенье — на седьмой день!), 8 — любви и дружбы, 10 — вечности.

Числа 6, 8, 9, 12 Пифагор назвал гармоническими, так как они создавали гармонию звуков (см. [32], с. 43). Куб объявлялся гармоническим телом, так как у него 6 граней, 8 вершин и 12 ребер.

В Древнем Китае четверка первых четных чисел 2, 4, 6, 8 представляла чистые и небесные элементы мироздания, четверка первых нечетных чисел 1, 3, 5, 7 — нечистые и земные, а сумма этих четных и нечетных чисел, т. е. число 36, символизировала мир.

У пифагорейцев клятва числом 36 была самой высшей.

В результате отделения абстрактного понятия числа от его материальных носителей числа зажили в сознании людей самостоятельной жизнью. Они начали порождать мир, оправдывать его существование и подчинять своим порядкам. Так, из самой точной, но идеалистической науки — математики — возникла вера в сверхъестественную природу чисел — числовая мистика — и вера в возможность воздействия на человека с помощью определенных чисел — числовая магия.

У разных народов числовая мистика проявлялась по-разному. Майя возвели числа 1, 2, ..., 13 в ранг богов. Если десятка у пифагорейцев, как было отмечено выше, символизировала вечность и справедливость, то у майя число десять было богом смерти Кими, который изображался в виде скелета или черепа с черной лентой, проходящей через отверстия глаз. Число восемь символизировало юного бога маиса Вахан Йол Кавила, изображаемого в виде головы с растущим из уха початком кукурузы.

В истории человечества некоторые числа многократно встречаются при описании различных явлений. Рассмотрим, например, число 7. Оно часто упоминается в Ветхом Завете.

«И благословил Бог седьмой день и освятил его» (Бытие 2, 3). «И сказал Господь Ною... и всякого скота чистого возьми по семи, мужеского пола и женского» (Бытие 7, 2). В снах фараона (Бытие 41, 2—7) являлись семь тучных и семь худых коров, семь тучных и семь тощих колосьев. «Семь дней ешьте пресный хлеб..., ибо кто будет есть квасное с первого дня до седьмого дня, душа та будет истреблена из среды Израиля» (Исход 12, 15). «Никто не выходи от места своего в седьмой день» (Исход 16, 30). «И сделай к нему семь лампад» (Исход 37, 23). «Семь дней не отходите от дверей скинии собрания, пока не исполнятся дни посвящения вашего, ибо семь дней должно свершаться посвящение ваше» (Левит 8, 33). «Если женщина имеет истечение крови, текущей из тела ее, то она должна сидеть семь дней во время очищения своего» (Левит 15, 19). «Если переспит с нею муж, то нечистота ее будет на нем; он нечист будет семь дней» (Левит 15, 24). «Всякий, кто прикоснется на поле к убитому мечом, или к умершему, или к кости человеческой, или ко гробу, нечист будет семь дней» (Числа 19, 15). «И сказал Валаам Валану: построй мне здесь семь жертвенников и приготовь мне семь тельцов и семь овнов» (Числа 23, 1). «Семь седмиц отсчитай себе; начинай считать семь седмиц с того времени, когда появится серп на жатве, тогда совершай праздник седмиц Господу» (Второзаконие 16, 9).

Семь кос носил на голове библейский Самсон.

В Древней Греции было семь великих мудрецов, первым из которых во всех списках был Фалес Милетский (ок. 625 — ок. 547 до н. э.).

Семь чудес света — перечень наиболее удивительных творений скульптуры и зодчества.

Удивительно, что в VI веке до нашей эры Пифагор объявил семерку числом здоровья, а хронобиологи открыли в наши дни в человеческом организме семидневный биоритм, проявляющийся в перемене показателей кровяного давления и сердечных сокращений.

В истории человечества важную роль играет число 12. Небесная сфера была разделена вавилонянами знаками зодиака на 12 участков по 30°, продолжительность года — 12 месяцев, сутки, состоящие из 24 часов, условно делятся на день и ночь. В Ветхом Завете выделены 12 колен израилевых (по числу сыновей Иакова — сына Исаака).

У Христа было 12 апостолов, у мусульман-шиитов — 12 имамов (по числу сыновей дочери Мухаммеда Фатимы и его зятя Али). Дюжина до сих пор широко употребляется при счете у многих народов.

Число 13 у многих считается несчастливым числом. На Тайной вечере было 13 гостей (Христос и его 12 апостолов) и случилось несчастье — Христос был распят на следующий день. Очень мало в гостиницах США этажей и комнат с номером 13. Не случайно 13 называют «чертовой дюжиной» (т. е. лишним предметом). Однако в древнегреческой истории мы наблюдаем интересные данные о числе 13: Архимед написал 13 книг. «Начала» Евклида состоят из 13 книг (позднее комментаторы добавили к ним еще две книги). «Арифметика» Диофанта включает в себя 13 книг. Наконец, знаменитый «Альмагест» Клавдия Птолемея также состоит из 13 книг.

Не менее часто упоминается в Библии число 40.

«Через семь дней Я буду изливать дождь на землю сорок дней и сорок ночей и истреблю все существующее, что Я создал, с лица земли» (Бытие 7, 4). Сорок лет водил пророк Моисей израильтян по пустыне, пока не дошел до Земли обетованной. Моисей постился на горе Синай 40 дней и 40 ночей, Илия 40 дней и 40 ночей брел по пустыне к пещере, на которую указал ангел.

Библейские Илия, Саул и Давид правили по 40 лет (3 Царств 2—11; 11—12). 40 дней египтяне бальзамировали усопшего Иакова (Бытие 50, 3). Христос был испытуем 40 дней и 40 ночей (Матфей 2, 4—2).

Согласно православной традиции на сороковой день после смерти душа усопшего улетает на Суд Божий.

Первое совершенное число — шестерка — также часто упоминается в различных библейских и мифологических преданиях разных народов. В Откровении Иоанна Богослова сказано: «Здесь мудрость. Кто имеет ум, тот сочтет число зверя, ибо это число человеческое, число его шестьсот шестьдесят шесть» (Откровение 13, 18). В золоте, которое доставляли Соломону каждый год, было весу шестьсот шестьдесят шесть талантов (3 Царств 10, 14). Каждый из четырех зверей, окружавших престол, по видению Иоанна, имел «по шести крыл вокруг» (Откровение 4—8). Библейский Соломон имел престол с шестью ступенями, шестью львами с одной стороны и шестью — с другой (3 Царств 10—19, 20). Он повелевал духами при помощи своего перстня, на котором была вырезана «Звезда Давида» («Печать Соломона») — гексограмма (шестиконечная звезда, образованная двумя равносторонними треугольниками). Пифагор, как отмечалось выше, считал шестерку символом души.

Читателю, желающему продолжить знакомство с мистикой и магией чисел, можно, например, ознакомиться с книгой В. Фирсова «Тайная жизнь чисел» [57].

§ 11. Пословицы и поговорки, порожденные числами

Влияние чисел на жизнь людей во многом предопределялось распространением числовой мистики на повседневные будни человека. У разных народов стали возникать различные пословицы и поговорки, характеризующие мистические свойства некоторых чисел. Собиратели народных пословиц и поговорок оказали человечеству неоценимую услугу. Среди них особенно следует отметить И. М. Снегирева [50], В. И. Даля [17; 18], М. А. Рыбникову [46], А. И. Соболева [51], А. С. Спирина [52].

Значительное количество русских пословиц, а также пословиц народов мира связано с натуральными числами. Отметим некоторые из них.

Число 1. Одна пчела немного меду натаскает. Одной рукой и узла не завяжешь. Подчас и один стоит семерых. На одного исполнителя три повелителя. Один и дома горюет; а двое и в поле воюют. Молния разит одного, а многих других устрашает. Знай одно дело. Тот и господин, кто все может сделать один. Труден только первый шаг. Первый блин комом. Все начинается с единицы. Один палец согнешь, все согнутся. В одну дуду дудеть. Плясать под одну дудку. Одним факелом море не нагреть. Одним ударом дерева не свалить. Одна рука лишь машет, много рук делают дело. Первая ласточка. Беда никогда не приходит одна. И один в поле воин. Одному против многих не замышлять. От одной ошибки человек не умирает. Одинокий поел — и вся семья сыта. Один и у каши загинет. На один зуб. Одной каплей не напьешься. Один камень — не стена. Одна речь — еще не ученость. Одна буря — еще не сезон дождей. Далась дураку одна песня на веку. Один дурак весь свет переполошит. Из одного же теста. На одно солнце глядим, да не одно едим. Одно слово может разрушить весь мир. Один узнал — все узнали. Семь бед — один ответ. Делай дело за семерых, а слушайся одного. Одна слеза катилась, а другая воротилась. Один плясун не делает свадьбы. В один день по две радости не живешь. Один как медведь в берлоге. Одна как маков цвет. И в раю жить тошно одному. Одному и топиться скучно. Одна головня и в печке гаснет, а две и в поле горят. Один ум хорошо, а два лучше. В одну руку всего не заберешь.

Число 2. Закрой чужой грех, Бог два простит. Два века не изживешь, две молодости не перейдешь. Не рой другому яму, сам в нее попадешь. От горшка два вершка. Для глухого поп две обедни не служит. Двух смертей не бывать, а одной не миновать. За битого двух небитых дают, да и то не берут. Старый друг лучше новых двух. Доброе дело два века живет. Гляди в оба, да не разбей лоба. Когда двое ссорятся, оба виноваты. За одну вину дважды не наказывают. Обиженного обижать — два греха. У орла больше двух птенцов не бывает. Одна стрела — две цели. Одному началу не два конца. Никто не служит двум хозяевам. В два счета. В оба конца. На два фронта. В глазах двоится. Из вторых рук. Надвое. Обоюдоострый. Ждать до второго пришествия. Вторая молодость. Второе я. Цыганка надвое сказала.

Второе дыхание. Влез двумя ногами в одну туфлю. Гоняться за двумя зайцами, ни одного не поймать. Один шаг вперед, два шага назад. Счастливый случай не выпадет дважды. У палки два конца. Не стой в двух лодках — в воду упадешь. Сидеть на двух стульях. Вести двойную игру. Слуга двух господ. До двух раз прощают, а в третий бьют. Умного два раза не обманешь. Думай двояко, а делай одинако. Привычка — вторая натура. Ум хорошо, а два лучше. Счастье не приходит вдвоем, горе не бывает одно. Две стороны одной медали. Два сапога пара. У хорошей женщины одно счастье, а у плохой — два.

Число 3. Один сын не сын, два сына — полсына, три сына — сын. Гнуть в три погибели. Бог троицу любит. Без троицы и дом не строится. Земля стоит на трех китах. И после смерти остается три дня дел. У бездельника три больших дела: есть, спать, да умело ругаться. Помни три дела: молись, терпи, работай. Хороший пес охраняет три деревни. За три года и школьная собака научится стихами лаять. Хорошему нужно учиться три года, а дурному — и одного утра довольно. Про одни дрожжи не говорят трижды. По третьему разу всегда вырубишь огня. До трех раз прощают. Прошло три дня — увял вишневый цвет. Заблудиться в трех соснах. Собирать хворост три года, а сжечь в один час. Случившееся дважды может случиться и в третий раз. Одна гроза равна трем ударам. Напуганная собака три дня лает. Покорную овцу трижды доят. Нашего Мины не поймаешь в три дубины. Гонят в три шеи. Будь ты трижды проклят. Беда беду родит, а третья сама бежит. Беда одна не приходит, а жди до трех раз. Если умерли двое в один год, не миновать и третьему. Вещь третьей руки. Три дочери — разорение. Ложка та узка, берет три куска, а как ее развести — будет брать по шести. Старушка на мир три года злилась, а мир про то и не знал. За двоих попотеешь, за троих поешь. Первую жену жених сам выбирает, вторую Бог дает, а третью черт посылает. Счастье три раза постучит, но если дверь не откроешь — к другому уйдет. Три вещи переменчивы: женщина, счастье и ветер. Слушай в оба, зри в три. Сердечное слово три зимы греет. Монах на три дня. От горшка три вершка. Наговорить с три короба. В три погибели. Истина находится в трех шагах. За тридевять земель. В три ручья.

Число 4. Жить в четырех стенах. У нашего старосты четыре радости: лошади пропали, коров не найдут, два брата в солдатах, сестра в денщиках. Старый человек стоит четырех молодых. Ходить на четвереньках. Обложили со всех четырех сторон. Около четыре, а прямо шесть. Конь о четырех ногах, да и тот спотыкается. Разорвись надвое — скажут: а почему не начетверо. Лучше зараз кончить, чем четыре раза начинать. Пошел на все четыре стороны. Когда приходит удача, она приходит со всех четырех сторон. Дом о четырех углах. Четыре угла дома на построение, четыре времени года на свершение. Четыре стены на четыре стороны. Это вернее смерти, как дважды два четыре. Он, как кошка, на четыре ноги встает. Три раза прости, на четвертый похворости.

Число 5. Пятое колесо в телеге. От пяти упавших в море собак вода не помутнеет. Бог пять пальцев и то сотворил неодинаковыми. Вперед взглянешь один раз, оглянешься — пять раз. Дорогой — пять, а прямо — десять. Пятый угол. По пятое число. Увидеть змею с пятью ногами. Без пяти минут как. Как собаке пятая нога. Знать как свои пять пальцев. Пятая колонна. Хвалил его пятериком. На словах зарезал пятерых, порубил десятерых, а стемнело — боится во двор выйти. Пятая масть в картах. Глотаешь пятицветную бумагу, продвинешься в написании стихов. Пять цветов притупляют зрение. Пять звуков притупляют слух. Пять вкусовых ощущений притупляют вкус. С пятого на десятое. Одно дитя как семя цветка, а пятеро — как семена терновника. Пять братьев вместе жить собрались, глядь — уже разделились. Один дурак, а умных пятерых стоит. Торгу на три алтына, а долгу на пять.

Число 6. Избу крой, песни пой, а шесть досок носи. Беда и горе приходят через шесть дней, а счастье и радость — через сто дней. По шести дорогам в воскресенье. Кругом идешь — три версты, прямо идешь — шесть верст. После утопленника — шесть дней дожди. Три волосинки в шесть рядов уложены.

Число 7. Семеро одного не ждут. Семь бед — один ответ. Дверь открывают для семи вещей. За семью печатями. Постучи в семь дверей, чтобы одна открылась. У одной сказки семь начал. У сказки семь концов. Семерых одним ударом. Один дурак может семерых умных переспорить. Кота убить — семь лет ни в чем удачи не видеть. Увидеть сразу семь ржанок — верная примета беды. Семь свистунов. Семь раз проверь, прежде чем усомниться в человеке. Из семи печей хлеб едал. Хоть семь шкур с волка спусти, а он все волком останется. Кошка своих котят семь раз перепрячет. Не видались семь лет, а поговорить не о чем. Семь дел в одни руки не берут. У бабы семь пятниц на неделе. А ты, седьмой, у ворот постой. Макару поклон, а Макар на семь сторон. Семь дней хвалит, семь дней хулит. Семь раз отмерь, один — отрежь. Не взял добром, ан взял сам-семь. Семь дней вешаю, никак не помрет. И праведник семь раз в день грешит. Сердце мудреца имеет семь отверстий. Потеряешь любимого друга, семь лет вспоминается. Один раз солгал, семь дней будешь раскаиваться. Получить семь копеек — это умереть. Нужда семерых задавила, а радость одному досталась. Разбить зеркало — семь лет бедствовать, даже если нужды не знать. Девушку манят, семь городов сулят, а выманят — и пригорка нет. Служил семь лет, выслужил семь реп. Потерял пять, а нашел семь. У семи дворов один топор, да и тот без топорища. У одной овечки да семь пастухов. Семь сёл, один вол, да и тот гол, а десять урядников. Семь чудес света. Семь пядей во лбу. Семимильными шагами. За семь верст киселя хлебать. У семи нянек дитя без глазу.

Число 8. Восемь рук, восемь языков. Неприятных дел бывает восемь-девять, а людям рассказывают только о двух-трех. У дурного человека восемь ног и девять голов. Семь раз упадешь — восемь раз встанешь. Восьмой день, что первый. У наблюдающего со стороны восемь глаз. Шесть дней делай, на седьмой молись, на восьмой снова начинай. Семь раз вниз, восемь раз вверх! Подняться на восемь холмов. Восемь пустынь леденящего холода. Восьмое чудо света. Счастье искала, осьмеричку нашла. Семь дней нам подай, а восемь не просим. Не сосчитав, не говори восемь.

Число 9. Девятиэтажная башня начинает строиться из горстки земли, путешествие в тысячу ли начинается с одного шага. Девять лошадей к одному колу не привязывают. В девяти нет пути. Девятая волна добивает. Девятый вал. Каков в девять лет, таков и в девяносто. Уступив однажды, девять раз останешься в выигрыше. У счастливого девять удач, у несчастного — ни одной. У кошки девять жизней. Забросить на девятое небо.

Число 10. Лучше десять виновных простить, чем наказать одного безвинного. С пятого на десятое. Дело десятое. Десятая вина виновата. Одну ветку тронешь — десять закачаются. Ты ему слово, а он тебе — десять. Даже десять звезд не сравнятся с одной Луной. Отложишь на день, на все десять затянется. Одна птица в руках лучше, чем десять на дереве. Десять рассуждений не стоят одного опыта. Услышав одно, узнаешь десять.

Число 40. Без узла и в сорок сажен веревка порвется. Уж сорок лет как правды нет. Сорока лет, а сорому нет. Один светильник сорока людям светит. От пакости одного злодея может сорок кварталов сгореть. Сорок сороков. И один глаз, да зорок, не надобно сорок. Сорок лет — бабий век.

Число 100. Жить сто годов, нажить сто коров, меринов стаю, овец хлев, свиней подмостье, кошек шесток, собак подстолье. Лучше пусть умрут сто плохих, чем один хороший. Сто оврагов одним кончаются. Сотня мужчин может разбить лагерь, но чтобы создать дом, нужна женщина. Давать сто очков вперед. Деды наши жили просто, да лет по сто, а мы по пятьдесят, да и то на собачью стать. На все сто.

Число 1000. Одна женщина порою стоит тысячи мужчин. Тысяча иголок не заменит одного шила. Если одно слово не образумит, не образумит и тысяча слов. Одна кудря стоит рубля, а все и за тысячу не купить.

Другие числа. Абсолютный нуль. Ноль внимания. Ноль без палочки. Сводиться к нулю. Опять двадцать пять. Тридцать лет как видел коровий след, а все молоком отрыгивается. До тридцати лет греет жена, после тридцати — рюмка вина, а после — и печь не греет. Сорок одно с кисточкой. Сорок два с кисточкой. За бестию двести, а за каналью — ничего. Пойдем вместе, найдем и двести.

§ 12. Задачи Вацлава Серпиньского

Один из всемирно известных математиков первой половины XX века польский академик Вацлав Франциск Серпиньский (1882—1969), опубликовавший свыше 600 научных работ по теории множеств, топологии, теории функций действительной переменной, теории чисел и др., был прекрасным популяризатором науки. Его книга «Что мы знаем и чего не знаем о простых числах» [48] пользовалась большой популярностью как среди начинающих математиков, так и среди солидных ученых, специализирующихся в области теории чисел.

Другая его книга — «250 задач по элементарной теории чисел» [47] — поражает оригинальностью подбора задач, простотой и доходчивостью приводимых им решений.

В заключительном параграфе этой главы рассмотрены 20 задач В. Серпиньского в надежде на то, что заинтересованный читатель внимательно ознакомится с этой удивительной книгой ученого и проанализирует остальные 230 задач и их оригинальные решения.

№ 1

Найти все натуральные числа n, для которых число

$$n^2 + 1 \tag{12.1}$$

делится на $n + 1$.

Решение. Так как

$$n^2 + 1 = n(n + 1) - (n - 1), \tag{12.2}$$

то единственным таким числом является единица.

№ 2

Доказать, что для каждого натурального числа n число

$$3\cdot(1^5+2^5+\ldots+n^5) \qquad (12.3)$$

делится на число $1^3+2^3+\ldots+n^3$.

Доказательство. Методом математической индукции убеждаемся в справедливости тождества

$$1^5+2^5+\ldots+n^5=\frac{1}{12}n^2\cdot(n+1)^2(2n^2+2n-1). \qquad (12.4)$$

Так как

$$1^3+2^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2, \qquad (12.5)$$

то из формул (12.4), (12.5) непосредственно вытекает решение задачи.

№ 3

Доказать, что при любом натуральном n число

$$(n+1)^n-1 \qquad (12.6)$$

делится без остатка на n^2.

Доказательство. Используя формулу бинома Ньютона, находим

$$(n+1)^n-1=(n^2+1-1)+C_n^2\cdot n^2+\ldots+C_n^n\cdot n^n, \qquad (12.7)$$

откуда непосредственно следует делимость числа (12.6) на n^2.

№ 4

Привести пример таких четырех различных чисел a, b, c, d, для которых не существует ни одного натурального числа n такого, чтобы числа

$$a+n,\quad b+n,\quad c+n,\quad d+n \qquad (12.8)$$

были попарно взаимно простыми.

Доказательство. Такими числами, например, являются

$$a=1,\quad b=2,\quad c=3,\quad d=4. \qquad (12.9)$$

Действительно, при любом четном n числа $b+n$ и $d+n$ — четные, а значит, не взаимно простые. При любом нечетном n числа $a+n$ и $c+n$ — четные, а значит, также не взаимно простые.

№ 5

Доказать, что если a и b — различные целые числа, то существует бесконечно много таких натуральных чисел n, что числа $a+n$, $b+n$ являются натуральными взаимно простыми.

Доказательство. Так как a и b — различные целые числа, то одно из них строго меньше другого. Пусть, например,

$$a < b. \qquad (12.10)$$

Для достаточного больших $k \in N$ числа

$$n = (b - a)\,k + 1 - a, \quad (b - a)\,k + 1 = a + n \qquad (12.11)$$

будут натуральными. Пусть

$$d = \text{НОД}\,(a + n,\ b + n). \qquad (12.12)$$

Тогда

$$(b + n) - (a + n) = b - a \qquad (12.13)$$

также делится на d. Учитывая, что

$$a + n = (b - a)\,k + 1, \qquad (12.14)$$

убеждаемся, что $d = 1 = \text{НОД}\,(a + n, b + n)$. Ч. т. д.

№ 6

Доказать, что существует бесконечно много троек (x, y, z) натуральных чисел, для которых числа

$$x\,(x + 1), \quad y\,(y + 1), \quad z\,(z + 1) \qquad (12.15)$$

составляют арифметическую прогрессию.

Доказательство. Положим:

$$x = n, \quad y = 5n + 2, \quad z = 7n + 3 \ (n \in N). \qquad (12.16)$$

Тогда числа

$$\begin{aligned} x\,(x + 1) &= n^2 + n, \\ y\,(y + 1) &= 25n^2 + 25n + 6, \\ z\,(z + 1) &= 49n^2 + 49n + 12 \end{aligned} \qquad (12.17)$$

составляют арифметическую прогрессию с разностью

$$d = 24n^2 + 24n + 6. \qquad (12.18)$$

Ч. т. д.

№ 7

Найти все пифагоровы треугольники, стороны которых (натуральные числа) образуют арифметическую прогрессию.

Решение. Пусть стороны пифагорова треугольника

$$a - b, \quad a, \quad a + b \quad (a, b \in N \wedge a > b) \qquad (12.19)$$

образуют арифметическую прогрессию с разностью b.

Тогда

$$(a-b)^2+a^2=(a+b)^2. \qquad (12.20)$$

Следовательно,

$$a=4b. \qquad (12.21)$$

Таким образом, множество всех искомых пифагоровых треугольников определяется совокупностью упорядоченных троек натуральных чисел

$$(3b,\ 4b,\ 5b), \qquad (12.22)$$

где b — произвольное натуральное число.

№ 8

Доказать, что не существует четырех последовательных натуральных чисел, каждое из которых было бы степенью натурального числа с показателем $k > 1$ ($k \in N$).

Доказательство. Из четырех последовательных натуральных чисел

$$4m,\ 4m+1,\ 4m+2,\ 4m+3\ \ (m \in N) \qquad (12.23)$$

число $4m+2$ — четное и не делящееся на 4. А такое число не может быть степенью натурального числа с натуральным показателем, большим единицы, так как степень любого четного натурального числа с таким показателем кратна четырем. Ч. т. д.

№ 9

Найти все простые числа, являющиеся суммами и разностями двух простых чисел.

Решение. Одним из таких чисел является простое число 5, так как

$$5=2+3,\ \ 5=7-2. \qquad (12.24)$$

Других простых чисел с этими свойствами быть не может, так как сумма и разность любых нечетных чисел — четное число. Но единственным четным простым числом является двойка. Пусть

$$r=p-2=q+2 \quad (p,\ q,\ r \in P) \qquad (12.25)$$

(символом P мы обозначаем множество всех простых чисел).

Тогда

$$q=p-4. \qquad (12.26)$$

Получаем тройку последовательных простых чисел с разностью 2:

$$(p-4,\ \ p-2,\ \ p). \qquad (12.27)$$

Но единственной такой тройкой является

$$(3,\ 5,\ 7), \qquad (12.28)$$

т. е. $p=7$, $q=3$.

№ 10

Найти четыре решения уравнения

$$x^2 + 1 = y^2 + z^2 \tag{12.29}$$

в простых числах.

Решение. Такими решениями являются, например, следующие упорядоченные тройки простых чисел:

$$(13,\ 7,\ 11);\ \ (17,\ 11,\ 13);\ \ (23,\ 13,\ 19);\ \ (31,\ 11,\ 29). \tag{12.30}$$

№ 11

Найти все простые числа p, для которых все шесть чисел

$$p,\ \ p + 2,\ \ p + 6,\ \ p + 8,\ \ p + 12,\ \ p + 14 \tag{12.31}$$

— простые.

Решение. Для $p = 5$ получаем:

$$5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19. \tag{12.32}$$

Других простых чисел с таким свойством нет, так как для $p = 5k + 1 \in P$ ($k \in N$) — число $p + 14$ делится на 5, для $p = 5k + 2$ — число $p + 8$ делится на 5, для $p + 3$ — число $p + 12$ делится на 5, а для $p = 5k + 4$ — число $p + 6$ делится на 5.

№ 12

Найти все простые числа вида:

$$\frac{n\,(n + 1)}{2} - 1\ \ (n \in N). \tag{12.33}$$

Решение. Имеем:

$$\frac{2 \cdot 3}{2} - 1 = 2;\ \ \frac{3 \cdot 4}{2} - 1 = 5. \tag{12.34}$$

Из тождества

$$\frac{n\,(n + 1)}{2} - 1 = \frac{1}{2}(n - 1)\,(n + 2) \tag{12.35}$$

следует, что при $n > 3$ число (12.33) — составное, значит, $n = 2$ и $n = 3$ — единственные решения.

№ 13

Найти пять простых чисел, являющихся суммами четвертых степеней двух натуральных чисел.

Решение. Такими числами, например, являются:

$$2,\ 17,\ 97,\ 257,\ 641. \tag{12.36}$$

Действительно,

$$2 = 1^4 + 1^4;\ 17 = 2^4 + 1^4;\ 97 = 2^4 + 3^4;\ 257 = 4^4 + 1^4;\quad 641 = 2^4 + 5^4. \tag{12.37}$$

№ 14

Доказать, что для всех натуральных чисел n, больших единицы, число

$$\frac{1}{5}\left(4^{2n+1} + 1\right) \tag{12.38}$$

является составным.

Доказательство. Из тождества

$$4^{2n+1} + 1 = (2^{2n+1} - 2^{n+1} + 1)\,(2^{2n+1} + 2^{n+1} + 1) \tag{12.39}$$

и неравенства (при $n > 1$)

$$2^{n+1}(2^n - 1) + 1 \geqslant 2^3 \cdot 3 + 1 = 25 \tag{12.40}$$

следует, что по крайней мере один из сомножителей правой части равенства (12.39) делится на 5 и при делении на 5 (в случае $n > 1$) даже меньший из двух сомножителей дает число, большее единицы. Значит, число (12.38) при любом $n > 1$ является произведением двух натуральных чисел, больших единицы. Ч. т. д.

№ 15

Найти все простые числа p такие, что сумма всех натуральных делителей числа p^4 является квадратом натурального числа.

Решение. Рассмотрим сумму S всех делителей числа p^4:

$$S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4. \tag{12.41}$$

Если

$$S = n^2\,(n \in N), \tag{12.42}$$

то

$$(2p^2 + p)^2 < (2n)^2 < (2p^2 + p + 2)^2, \tag{12.43}$$

откуда следует, что

$$4n^2 = (2p^2 + p + 1)^2, \tag{12.44}$$

т. е.

$$4 \cdot (1 + p + p^2 + p^3 + p^4) = 4p^4 + 4p^3 + 5p^2 + 2p + 1. \tag{12.45}$$

Следовательно,

$$p^2 - 2p - 3 = 0, \tag{12.46}$$

т. е. единственное простое число

$$p = 3 \tag{12.47}$$

удовлетворяет условию задачи.

№ 16

Доказать, что уравнение

$$3x^2 - 7y^2 + 1 = 0 \tag{12.48}$$

имеет бесчисленное множество решений в натуральных числах.

Доказательство. Числа $x = 3$, $y = 2$ являются решениями уравнения (12.48). Из тождества

$$3 \cdot (55a + 84b)^2 - 7(36a + 55b)^2 = 3a^2 - 7b^2 \tag{12.49}$$

следует, что если имеется решение (a, b), то имеется и решение (a_1, b_1), где

$$a_1 = 55a + 84b;\ b_1 = 36a + 55b. \tag{12.50}$$

Начав с решения (3, 2) и повторяя процесс по формуле (12.50), получим сколь угодно много решений уравнения (12.48) в натуральных числах.

№ 17

Найти все решения уравнения

$$3^x - 2^y = 1 \tag{12.51}$$

в натуральных числах.

Решение. Очевидно, что

$$x = 1,\ y = 1;\ x = 2,\ y = 3 \tag{12.52}$$

являются решениями уравнения (12.51). Других решений нет, так как при нечетном $x = 2k + 1$ ($k \in N$) из $3^2 \equiv 1 \pmod 4$ следует, что

$$3^{2k+1} \equiv 3 \pmod 4. \tag{12.53}$$

Значит,

$$2^y = 3^x - 1 \equiv 2 \pmod 4, \tag{12.54}$$

т. е.

$$y = 1,\ x = 1. \tag{12.55}$$

Если же $x = 2k$ — четное, то

$$2^y = 3^{2k} - 1 = (3^k - 1)(3^k + 1) \to 3^k - 1 = 2,\ 3^k + 1 = 4. \tag{12.56}$$

Следовательно,

$$x = 2,\ y = 3. \tag{12.57}$$

№ 18

Доказать, что для любого натурального числа n и для любого пифагорова треугольника (a, b, c) существует пифагоров треугольник, подобный данному, каждая сторона которого выражается степенью натурального числа с показателем большим или равным n.

Доказательство. Умножим почленно равенство

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{12.58}$$

на число

$$a^{2(4n^2-1)}\ b^{4n(2n+1)(n-1)}\ c^{4n^2(2n-1)}. \tag{12.59}$$

Получим пифагоров треугольник, подобный данному:

$$\begin{gathered}\left(\left(a^{2n}b^{(2n+1)(n-1)}\ c^{n(2n-1)}\right)^{2n}\right)^2 + \left(\left(a^{2n+1}b^{2n^2-1}c^{2n^2}\right)^{2n-1}\right)^2 = \\ = \left(\left(a^{2n-1}b^{2n(n-1)}c^{2n^2-2n+1}\right)^{2n+1}\right)^2.\end{gathered} \tag{12.60}$$

№ 19

Найти все натуральные числа $n > 1$, для которых

$$(n-1)! + 1 = n^2. \tag{12.61}$$

Решение. Среди натуральных чисел $n \leqslant 5$ только число 5 удовлетворяет равенству (12.61).

Если $n \geqslant 6$, то $n^2 > 6n - 4$. Следовательно,

$$(n-1)! + 1 > 2(n-1)\,(n-2) = 2(n^2 - 3n + 4) > n^2, \tag{12.62}$$

т. е. других натуральных чисел, кроме $n = 5$, удовлетворяющих равенству (12.61) не существует.

№ 20

Доказать, что существует бесконечно много натуральных чисел, которые разлагаются в сумму четырех квадратов (кубов) различных натуральных чисел по крайней мере двумя различными способами.

Доказательство. Для любого натурального числа $t > 8$ справедливы тождества:

$$\begin{gathered}n_t = (t-8)^2 + (t-1)^2 + (t+1)^2 + (t+8)^2 = \\ = (t-7)^2 + (t-4)^2 + (t+4)^2 + (t+7)^2,\end{gathered} \tag{12.63}$$

$$\begin{gathered}m_t = (t-8)^3 + (t-1)^3 + (t+1)^3 + (t+8)^3 = \\ = (t-7)^3 + (t-4)^3 + (t+4)^3 + (t+7)^3.\end{gathered} \tag{12.64}$$

Глава II.
Простые числа

§ 13. Математический маяк

На протяжении всей истории математики простые числа — натуральные числа, большие единицы и делящиеся без остатка только на себя и единицу, — привлекали особое внимание выдающихся математиков.

Поражая своей таинственностью и загадочностью, они были своеобразным «математическим маяком», к которому устремлялись многие математические светила.

«Король математиков» Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) называл математику «царицей наук», а арифметику (математическую теорию натуральных чисел) — «царицей математики». Любимым его занятием было определение всех простых чисел в очередном «тысячном интервале», называемым им «хилиадой». Именно Гаусс впервые обнаружил, что среди натуральных чисел n, больших 2 637 900 и меньших 2 638 000, нет ни одного простого числа. Он сумел составить таблицу всех простых чисел, меньших трех миллионов.

Хобби знаменитого математика Иоганна Бернулли (1667—1748) было разложение на простые множители натуральных чисел, все цифры которых — единицы.

Такие числа называются *репьюнитами* (от англ. repeat unit — повторение единицы). Начав с числа $111 = 3 \cdot 37$, он завершил репьюнитом с 31 единицей. Допущенные ученым ошибки в разложении некоторых репьюнитов нисколько не умаляют его заслуг по вычислению простых множителей этих гигантских натуральных чисел.

Заметим, что к настоящему времени установлено, что среди натуральных чисел $n < 10^{1032}$ имеются только пять простых репьюнитов с числом единиц

$$2, \quad 19, \quad 23, \quad 317, \quad 1031. \tag{13.1}$$

Многие ученые пытались найти ответ на вопрос «Сколько имеется простых чисел, не превосходящих данного натурального числа n?». Это количество простых чисел обозначается символом $\pi(n)$.

Л. Эйлер (1707—1783) доказал, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} = 0, \tag{13.2}$$

т. е. установил, что хотя простых чисел бесконечно много, но их значительно меньше, чем всех натуральных чисел.

Адриен Лежандр (1752—1833) дал приближенную формулу:

$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln n - 1{,}08366}. \tag{13.3}$$

К. Ф. Гаусс дал другую приближенную формулу

$$\pi(n) \approx Li(n) = \int_2^n \frac{dt}{\ln t} \tag{13.4}$$

Для больших n обе формулы дают хорошие приближения. Однако лишь Пафнутию Львовичу Чебышеву (1821—1894), Жаку Адамару (1865—1963) и Шарлю Валле Пуссену (1866—1962) удалось решить знаменитую проблему асимптотического распределения простых чисел:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\ln n}} = 1. \tag{13.5}$$

А сколько усилий было затрачено на поиск критериев простоты! Найдено несколько критериев, которыми, к сожалению, пользоваться нельзя из-за громоздкости вычислений. Например, критерий Вильсона — Варинга: натуральное число $n > 1$ тогда и только тогда является простым, когда число $(n - 1)! + 1$ без остатка делится на n. Или критерий Вале-Винса: нечетное число $n > 3$ тогда и только тогда является простым, когда ни одно из чисел

$$2^2,\ 3^2,\ \ldots,\ \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \tag{13.6}$$

при делении на n не дает в остатке ни ноль, ни единицу.

Уже для двузначных натуральных чисел эти критерии затруднительно проверить даже с помощью калькулятора.

Теория простых чисел и сейчас оставляет нерешенными много проблем. Именно простые числа признаются учеными самыми «капризными и строптивыми» из всех объектов, какие только изучают математики.

Современные компьютеры открыли доступ к простым числам-гигантам. Например, математики Хайратвала, Вольтмен и Куровски доказали в 1999 году, что число

$$2^{6\,972\,593} - 1 \tag{13.7}$$

с 2 098 960 цифрами — простое. Но даже самые современные компьютеры до сих пор не нашли шестого простого числа Ферма

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{13.8}$$

кроме известных пяти:

$$F_0 = 3,\ F_1 = 5,\ F_2 = 17,\ F_3 = 257,\ F_4 = 65\,537. \tag{13.9}$$

До сих пор не найдено окончательное решение проблемы Гольдбаха — Эйлера о представлении любого нечетного натурального числа $n \geqslant 6$ в виде суммы трех, а четного $n \geqslant 4$ — суммы двух простых чисел.

Таинственное, полное загадок множество P простых чисел никому не раскрывает всех своих секретов и манит к себе как далекий маяк и искушенных в науке математиков и начинающих любителей, мечтающих сказать этому множеству волшебное сказочное слово «Сезам, откройся».

§ 14. К истории раскрытия тайн множества P

Интерес к изучению простых чисел существовал с глубокой древности (Вавилон, Египет, Китай, Индия, Греция). История открытия закономерностей в структуре множества P простых чисел богата и разнообразна. Отметим лишь некоторые выдающиеся результаты.

1. Бесконечность множества простых чисел

Евклид (IV—III вв. до н. э.) доказал, что множество P бесконечно. Действительно, если бы оно было конечным, т. е.

$$P = \{p_1, p_2, \ldots, p_k\}, \tag{14.1}$$

то число $p_1 p_2 \ldots p_k + 1$ не делилось бы ни на одно простое число, так как, по определению, $p_i > 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

2. Решето Эратосфена

Эратосфен Киренский (ок. 276—194 гг. до н. э.) предложил для нахождения всех простых чисел, не больших заданного натурального числа $n > 1$, метод вычеркивания из ряда натуральных чисел $x \leqslant n$ единицы и всех кратных последовательным простым числам $p \leqslant \sqrt{n}$, кроме самих простых чисел. Этот метод получил название «решета Эратосфена» (см. [30], с. 33—34).

3. Совершенные числа и простые числа Мерсенна

Совершенным натуральным числом называется составное число m, сумма собственных делителей которого (т. е. всех делителей кроме самого числа m) равна m.

В Древней Греции были известны четыре совершенных числа

$$6, \quad 28, \quad 496, \quad 8128. \tag{14.2}$$

Евклид доказал ([30], с. 35), что если числа p и $M_p = 2^p - 1$ — простые, то число

$$m_p = 2^{p-1}M_p \tag{14.3}$$

— совершенное. Число M_p было названо позднее именем французского монаха Марена Мерсенна (1588—1648) — одного из основателей Парижской Академии наук, друга Декарта и Ферма. Л. Эйлер (1707—1783) доказал в 1750 году, что любое четное совершенное число имеет вид (14.3), а нечетных совершенных чисел до сих пор не найдено ни одного.

Именно взаимосвязью простых чисел Мерсенна и совершенных чисел объясняется особый интерес к отысканию новых простых чисел Мерсенна, сохранившийся до сих пор.

Еще пифагорейцы считали первое совершенное число 6 символом души. Второе совершенное число 28 соответствовало числу членов многих ученых обществ (начиная с неопифагорейской академии наук). Даже в XII веке церковь учила: для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа и тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство.

К 2000 году было открыто 38 простых чисел Мерсенна (а значит, и совершенных чисел), причем 12 из них были открыты без использования ЭВМ.

Назовем имена шести открывателей совершенных чисел после греческого периода.

m_{13} — Региус (1456); m_{17} и m_{19} — Катальди (1588);
m_{31} — Эйлер (1750); m_{61} — Первушин (1883);
m_{89} и m_{107} — Пауэрс (1911, 1914);
m_{127} — Люка (Lukas) (1876).

Диву даешься, как русский священник Пермской губернии Иван Михеевич Первушин смог в 1883 году доказать, что число

$$M_{61} = 2^{61} - 1 = 2\,305\,843\,009\,213\,693\,951, \tag{14.4}$$

состоящее из 19 цифр — простое. Следовательно, число

$$m_{61} = 2^{60}\,M_{61} \tag{14.5}$$

— совершенное.

Еще большее восхищение вызывает француз Люка, доказавший в 1876 году простоту числа

$$M_{127} = 170\,141\,183\,460\,469\,231\,731\,687\,303\,715\,884\,105\,727, \tag{14.6}$$

состоящего из 39 цифр!

Начиная с 1952 года к поиску новых простых чисел Мерсенна подключили ЭВМ. Робинсон доказал в 1952 году простоту пяти чисел Мерсенна:

M_{521} (157 цифр), M_{607} (183 цифры), M_{1279} (386 цифр),
M_{2203} (664 цифры), M_{2281} (687 цифр).

Восемнадцатое простое число Мерсенна M_{3217} (969 цифр) нашел в 1957 году Ризель, девятнадцатое и двадцатое — Гурвиц в 1961 году: M_{4253} (1281 цифра), M_{4423} (1332 цифры). Следующие три простых числа Мерсенна нашел в 1963 году Гиллельс:

M_{9689} (2917 цифр), M_{9941} (2993 цифры), $M_{11\,213}$ (3376 цифр).

Дальнейшие открытия чисел M_p ($p \in P$):

Такерман (1971 г.) — $M_{19\,937}$ (6002 цифры), Нолл, Никель (1978 г.) — $M_{21\,701}$ (6533 цифры), Нолл (1979 г.) — $M_{23\,209}$ (6987 цифр), Нельсон, Словински (1979 г.) — $M_{44\,497}$ (13 395 цифр), Словински (1982 г.) — $M_{86\,243}$ (25 962 цифры),Колкуитг, Уэлси (1988 г.) — $M_{110\,503}$ (33 265 цифр), Словински (1983 г.) — $M_{132\,049}$ (39 751 цифра), Словински (1985 г.) — $M_{216\,091}$ (65 050 цифр), Словински, Гейдж (1992 г.) — $M_{756\,839}$ (227 832 цифры), Словински, Гейдж (1994 г.) — $M_{859\,433}$ (258 716 цифр), Словински, Гейдж (1996 г.) — $M_{1\,257\,787}$ (378 632 цифры), Арменгауд, Вольтмен (1994 г.) — $M_{1\,398\,269}$ (420 921 цифра), Спенс, Вольтмен (1997 г.) — $M_{2\,976\,221}$ (895 932 цифры).

Наконец, последние два простых числа Мерсенна — 37-е и 38-е — были обнаружены в 1998—1999 годах Кларксоном, Вольтменом, Куровски — $M_{3\,021\,377}$ (909 526 цифр) и Хайратвалой, Вольтменом, Куровски — $M_{6\,972\,593}$ (2 098 960 цифр).

Говорят, что один американский миллионер учредил премию в 100 000 $ тому, кто первым найдет следующее простое число Мерсенна, а значит, и 39-е совершенное число m_{39}.

С математической точки зрения совершенные числа по-своему уникальны. Все они — треугольные ([30], с. 39). Сумма величин, обратных всем делителям совершенного числа, включая само число, равна двум. Остаток от деления на 9 любого совершенного числа, кроме 6, равен единице. В двоичной системе счисления совершенное число $m_p = 2^{p-1}M_p$ начинается p единицами, после которых следует $p - 1$ нулей. Например,

$$m_5 = 496 = 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 \to (m_5)_{(2)} = 111\ 110\ 000. \qquad (14.7)$$

Поиски новых совершенных чисел представляют трудности даже при использовании современных компьютеров. Ведь 37-е простое число Мерсенна имело 909 526 цифр, а 38-е — 2 098 960 цифр.

Сколько же цифр будет у 39-го простого числа Мерсенна?

4. *Функция $\pi(x)$ распределения простых чисел*

Функцией $\pi(x)$ называется функция, заданная на множестве натуральных чисел и ставящая в соответствие каждому $x \in N$ число $\pi(x)$ простых чисел, не бóльших натурального числа x. Например,

$$\pi(10) = 4,\quad \pi(100) = 25,\quad \pi(1000) = 168,\quad \pi(10^4) = 1229,$$
$$\pi(10^5) = 9592,\quad \pi(10^6) = 78\,498,\quad \pi(10^7) = 664\,579, \qquad (14.8)$$
$$\pi(10^8) = 5\,761\,455,\quad \pi(10^9) = 50\,847\,534,\quad \pi(10^{10}) = 455\,052\,512.$$

Пятнадцатилетний будущий математический гений К. Ф. Гаусс, изучая таблицы простых чисел, содержащихся в подаренной ему за год до этого таблице логарифмов, обнаружил, что при больших натуральных x число $\pi(x)$ приближается к величине $\frac{x}{\ln x}$.

В конце XVIII века никто не предполагал, что через два столетия человек с помощью компьютеров сможет вычислять $\pi(x)$ для $x = 10^{10}$. Но, располагая таблицей (14.8), легко можно заметить, что, начиная с 10^4, наблюдается эта удивительная закономерность распределения простых чисел. Действительно,

$$\frac{10^4}{\pi(10^4)} \approx 8{,}1;\quad \frac{10^5}{\pi(10^5)} \approx 10{,}4;\quad \frac{10^6}{\pi(10^6)} \approx 12{,}7;\quad \frac{10^7}{\pi(10^7)} \approx 15{,}0;$$
$$\frac{10^8}{\pi(10^8)} \approx 17{,}4;\quad \frac{10^9}{\pi(10^9)} \approx 19{,}7;\quad \frac{10^{10}}{\pi(10^{10})} \approx 22{,}0. \qquad (14.9)$$

Из (14.9) следует, что разность двух рядом расположенных дробей приближенно равна $2{,}3 \approx \ln 10$.

Но это и означает, что при $x > 10^4$

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}. \qquad (14.10)$$

Знаменитый асимптотический закон распределения простых чисел

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\dfrac{x}{\ln x}} = 1, \qquad (14.11)$$

как было отмечено в § 1, явился триумфом многих выдающихся математиков: Лежандра, Гаусса, Чебышева, Адамара, Валле-Пуссена, Сельберга и др.

Данная Лежандром для $\pi(x)$ приближенная формула (13.3) до сих пор поражает всех своей точностью при x от 1000 до 100 000. Полагая

$$L(x) = \frac{x}{\ln x - 1{,}08366}, \qquad (14.12)$$

находим:

$$L(1000) - \pi(1000) \approx 3{,}7;\quad L(10^4) - \pi(10^4) \approx 1{,}5;$$
$$L(10^5) - \pi(10^5) = -3{,}6. \qquad (14.13)$$

Однако, при $x > 10^6$ более точное приближение дает интегральный логарифм

$$Li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\,. \tag{14.14}$$

Очень точное приближение для $50 < x < 10^{10}$ дает функция $f(x)$ Лохера — Эрнста ([48], с. 29):

$$f(x) = \frac{x}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{x}}, \tag{14.15}$$

для которой также справедлив асимптотический закон распределения:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{f(x)} = 1. \tag{14.16}$$

Имеем:

$$\frac{\pi(10^3)}{f(10^3)} \approx 1{,}005; \ \frac{\pi(10^9)}{f(10^9)} \approx 1{,}007; \ \frac{\pi(10^{10})}{f(10^{10})} \approx 1{,}005. \tag{14.17}$$

5. Открытия, ассоциированные с рядами

Л. Эйлер рассмотрел функцию, обозначенную впоследствии символом $\zeta(s)$ и названную дзета-функцией Римана (так как Риман обобщил ее и на комплексные значения s):

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \ldots, \tag{14.18}$$

где $s > 1$, что обеспечивает, как известно, сходимость ряда. Эйлер доказал, что

$$\zeta(s) = \prod_{p\in P} \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}} \quad (s > 1), \tag{14.19}$$

где символом Π обозначено произведение.

Эйлер установил также, что ряд

$$\sum_{p\in P} \frac{1}{p} \tag{14.20}$$

расходится, но очень медленно.

Гаусс (1796), Мертенс (1874) получили формулу ([4], с. 67)

$$\sum_{p<x} \frac{1}{p} = \ln\ln x + C_1 + \varepsilon(x), \tag{14.21}$$

где $C_1 \approx 0{,}261497$, $\lim\limits_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

Из этой формулы следует, что при $x = 10^9$ это выражение менее 3,3, а при $x = 10^{18}$ оно не превосходит четырех.

Доказано, что ряд, составленный из обратных величин всех простых чисел-близнецов:

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{29}+\frac{1}{31}+\dots \qquad (14.22)$$

сходится, хотя предполагают, что самих таких пар близнецов — бесконечное множество.

6. Простые числа Ферма

Л. Эйлер опроверг утверждение Ферма о том, что все числа (13.8) — простые, разложив на множители число

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417. \qquad (14.23)$$

Как уже отмечалось в § 13, до сих пор не удалось найти шестого простого числа Ферма.

Большой интерес к этим числам вызван тем, что их использовал К. Ф. Гаусс при решении знаменитой задачи о делении циркулем и линейкой окружности на m равных частей. Гаусс доказал, что правильный m-угольник с нечетным числом сторон может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число m является простым числом Ферма или произведением двух или более попарно различных простых чисел Ферма. Из теоремы Гаусса, например, следует, что циркулем и линейкой можно построить правильные 3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, 771-угольники, но нельзя построить правильные 7, 9, 11, 13, 19, 21, 23, 25, 27, 29-угольники.

К. Ф. Гаусс сделал много замечательных открытий в математике, но теореме о правильных многоугольниках он придавал особое значение. Гаусс завещал выгравировать правильный 17-угольник, вписанный в круг, на своем надгробном памятнике, что и было исполнено.

7. Проблема Гольдбаха — Эйлера

7 июня 1742 года Христиан Гольдбах (1690—1764) в письме к Леонарду Эйлеру высказал гипотезу: всякое натуральное число, большее или равное шести, может быть представлено в виде суммы трех простых чисел. В ответном письме 30 июня 1742 года Эйлер ему написал: «Что всякое четное число есть сумма двух простых чисел, я считаю верной теоремой, хотя и не могу ее доказать».

Задача о выяснении истинности или ложности этих утверждений получила название «проблемы Гольдбаха» или «проблемы Гольдбаха — Эйлера».

В течение долгого времени не удавалось приблизиться к ее решению. В 1922—1923 гг. Г. Харди (1877—1947) и Дж. Литлвуд (1885—1977) доказали (предположив истинность до сих пор не подтвержденных некоторых теорем L-рядов Дирихле), что всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех простых чисел.

Строгое доказательство этой теоремы найдено И. М. Виноградовым в 1937 году с использованием полученной им асимптотической формулы для количества представления нечетного числа суммой трех простых чисел. Другое доказательство этой теоремы дал в 1945 году Ю. В. Линник.

Задача о разбиении четного числа на сумму двух простых чисел не решена полностью до сих пор.

Эстерман и Ван-дер Корпут доказали, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{B(x)}{x} = 0, \tag{14.24}$$

где $B(x)$ — количество таких четных чисел, которые нельзя представить в виде суммы двух простых чисел.

Рихтер установил, что каждое натуральное число большее 6 представимо в виде суммы неравных простых чисел.

8. Подходящие числа (Numeri idonei)

Л. Эйлер нашел 65 чисел $d \geqslant 1$ таких, что квадратичная форма

$$x^2 + dy^2 \ (x, y, d \in N) \tag{14.25}$$

однозначно представляет лишь простые числа. Эти числа он назвал «*подходящими числами*» (лат. Numeri idonei). Таблица подходящих чисел дана, например, в [55]:

$$\begin{gathered} 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ 16,\ 18,\ 21,\ 22, \\ 24,\ 25,\ 28,\ 30,\ 33,\ 37,\ 40,\ 42,\ 45,\ 48,\ 57,\ 58,\ 60,\ 70,\ 72, \\ 78,\ 85,\ 88,\ 93,\ 102,\ 105,\ 112,\ 120,\ 130,\ 133,\ 165,\ 168, \\ 177,\ 190,\ 210,\ 232,\ 240,\ 253,\ 273,\ 280,\ 312,\ 330,\ 342, \\ 357,\ 385,\ 408,\ 462,\ 520,\ 760,\ 840,\ 1320,\ 1385,\ 1848. \end{gathered} \tag{14.26}$$

К. Ф. Гаусс обосновал их существование. Сейчас доказано, что подходящих чисел — конечное количество. Однако неизвестно, является ли число 1848 наибольшим.

$d = 1$ характеризует нечетные простые числа вида $4m + 1$. Например,

$$4^2 + 5^2 = 41,\ \ 5^2 + 6^2 = 61,\ \ 7^2 + 2^2 = 53,\ \ 8^2 + 5^2 = 89; \tag{14.27}$$

$d = 2$ характеризует простые числа вида $8m + 1$ или $8m + 3$. Например,

$$\begin{gathered} 3^2 + 2\cdot 2^2 = 17,\ 3^2 + 2\cdot 5^2 = 59,\ 5^2 + 2\cdot 3^2 = 43, \\ 9^2 + 2\cdot 5^2 = 131; \end{gathered} \tag{14.28}$$

$d = 3$ характеризует простые числа вида $6m + 1$. Например,

$$8^2 + 3\cdot 1^2 = 67,\ 7^2 + 3\cdot 2^2 = 61,\ 10^2 + 3\cdot 3^2 = 127; \tag{14.29}$$

$d = 7$ характеризует простые числа вида $14m + 1$, или $14m + 9$, или $14m + 11$. Например,

$$1^2 + 7 \cdot 2^2 = 29,\ 3^2 + 7 \cdot 2^2 = 37,\ 5^2 + 7 \cdot 2^2 = 53. \qquad (14.30)$$

Для $d = 1848$ разложение

$$197^2 + 1848 \cdot 100^2 = 18\,518\,809 \qquad (14.31)$$

— единственное. Следовательно, число 18 518 809 — простое.

Если же для натурального числа n имеется хотя бы два различных разложения в виде (14.25), то оно — составное (критерий Эйлера). Например, числа 1 000 009, 13 717 421 — составные, так как

$$1\,000\,009 = 1000^2 + 3^2 = 972^2 + 235^2,$$
$$13\,717\,421 = 761^2 + 7 \cdot 1370^2 = 439^2 + 7 \cdot 1390^2. \qquad (14.32)$$

9. Простые числа в арифметических прогрессиях

Лежен Дирихле (1805—1859) доказал, что на множестве N натуральных чисел линейная функция

$$f(x) = mx + p\,(p \in P,\ m \in N) \qquad (14.33)$$

принимает бесчисленное множество простых значений.

Существует бесчисленное множество арифметических прогрессий, порожденных тремя различными простыми числами. Например,

$$6x + 5,\ 6x + 7,\ 8x + 3,\ 18x + 5,\ 24x + 5. \qquad (14.34)$$

Высказана гипотеза ([48], с. 34) о существовании бесчисленного множества таких прогрессий с любым нечетным простым числом в качестве первого члена. Например, с первым членом 3 такими прогрессиями являются

$$4x + 3,\ 8x + 3,\ 10x + 3,\ 14x + 3,\ 20x + 3,\ 28x + 3,\ 34x + 3. \qquad (14.35)$$

Существует единственная арифметическая прогрессия, составленная из трех простых чисел и с разностью 2, и единственная такая прогрессия с разностью 4 (так как из трех последовательных нечетных чисел одно всегда делится на 3 (см. [48], с. 34—35):

$$2x + 3, \quad 4x + 3. \qquad (14.36)$$

Не может быть арифметических прогрессий, составленных из трех простых чисел с нечетной разностью.

Есть только одна арифметическая прогрессия с разностью 6, образованная из пяти простых чисел:

$$6x + 5 \quad (x = 0, 1, 2, 3, 4). \qquad (14.37)$$

Прогрессии

$$6x + 251, \quad 6x + 1741 \tag{14.38}$$

образованы из четырех последовательных простых чисел ($x = 0, 1, 2, 3$):

$$251,\ 257,\ 263,\ 269;\ 1741,\ 1747,\ 1753,\ 1759. \tag{14.39}$$

Другой интересной проблемой, связанной с линейной функцией (14.33), является отыскание пар чисел $m \in N$, $p \in P$ таких, что для $0 \leqslant x \leqslant n \in N$ линейная функция имеет наибольшее число простых значений.

Например, функция (14.37) для $0 \leqslant x \leqslant 50$ имеет 32 простых значения. При каких m и p линейная функция (14.33) для $n = 50$ имеет больше 32 простых значений?

Высказана гипотеза [68], что для любого простого числа p существует натуральное число m такое, что числа

$$f(0), f(1), \ldots, f(p - 1) \tag{14.40}$$

— простые. Например,

$$\begin{gathered} p = 3,\ m = 2;\ f(0) = 3, f(1) = 5, f(2) = 7; \\ p = 5,\ m = 6;\ f(0) = 5, f(1) = 11, f(2) = 17, f(3) = 23, f(4) = 29; \\ p = 7,\ m = 150, f(0) = 7, f(1) = 157, f(2) = 307, \\ f(3) = 457, f(4) = 607, f(5) = 757, f(6) = 907. \end{gathered} \tag{14.41}$$

В 1986 году Г. Лё обнаружил, что для $p = 11$ минимальное m равно 9 918 821 194 590. В. А. Голубев обнаружил, что прогрессия

$$30\,030x + 23\,143 \tag{14.42}$$

дает 12 различных простых чисел при $x = 0, 1, 2, \ldots, 11$.

Причард нашел в 1985 году (см. [68]) арифметическую прогрессию, дающую 19 различных простых чисел.

10. Простые числа в квадратичных и кубичных полиномах

Леонард Эйлер указал несколько квадратных трехчленов, дающих при $x = 0, 1, \ldots, n \in N$ только простые числа. Например, для многочленов Эйлера

$$2x^2 + 29, \quad x^2 + x + 41, \quad x^2 - 79x + 1601 \tag{14.43}$$

значения n соответственно равны 28, 39, 79.

Доказана следующая теорема (Рабинович, Лемер, Секерес, Айуб, Чоула (см. [67], [68]):

Пусть

$$f_p(x) = x^2 + x + p \qquad (p \in P) \tag{14.44}$$

— квадратичная функция.

Ее значения

$$f_p(0),\ f_p(1),\ f_p(2),\ \ldots,\ f_p(p-2) \tag{14.45}$$

тогда и только тогда являются простыми числами, когда простое число p является одним из чисел множества

$$\{2,\ 3,\ 5,\ 11,\ 17,\ 41\}. \tag{14.46}$$

Для квадратичных функций

$$\varphi_p(x) = 2x^2 + p\ (p \in P), \tag{14.47}$$

$$\psi_p(x) = 2x^2 + p + \frac{p+1}{2}\ (p \in P \wedge p = 4k + 3) \tag{14.48}$$

доказано (Фробениус, Хенди), что числа

$$\varphi_p(0),\ \varphi_p(1),\ \ldots,\ \varphi_p(p-1);\ \psi_p(0),\ \psi_p(1),\ldots,\ \psi_p(p-1) \tag{14.49}$$

тогда и только тогда являются простыми, когда соответственно

$$p \in \{3,\ 5,\ 11,\ 29\};\ \ p \in \{3,\ 7,\ 19\}. \tag{14.50}$$

Для квадратного трехчлена

$$f(x) = ax^2 + bx + p\ (p \in P,\ a \in N,\ b \in Z) \tag{14.51}$$

выбором специальных значений a, b, p можно добиться достаточно большого числа простых значений при $x = 0, 1, \ldots, n \in N$. Например, при $a = 1$, $b = -79$, $p = 1601$, т. е. для многочлена Эйлера (14.43), числа $f(0)$, $f(1)$, ..., $f(79)$ — простые, причем среди них только 40 попарно различных.

Квадратные трехчлены Р. Руби ([67]), [68])

$$\begin{gathered} 36x^2 - 810x + 2753, \\ 103x^2 - 3945x + 34\,381 \end{gathered} \tag{14.52}$$

дают соответственно 45 и 43 простых числа (если рассматривать модули числовых значений).

Квадратный трехчлен Фунга

$$27x^2 - 1701x + 10\,181 \tag{14.53}$$

дает 43 простых числа [69].

Представляет интерес рассмотрение кубических многочленов, значения которых при $x = n,\ n+1,\ \ldots,\ n+m$ ($n \in Z$, $m \in N$) — простые числа. Например:

$$\begin{array}{ll} 300x^3 + 11\ (x = \overline{0,\ 9}); & x^3 - 7x + 373\ (x = \overline{-7,\ 6}); \\ 1800x^3 + 79\ (x = \overline{0,\ 7}); & x^3 - 13x + 29\ (x = \overline{-4,\ 7}); \\ x^3 - x + 7\ (x = \overline{-1,\ 5}); & x^3 - 19x + 211\ (x = \overline{-6,\ 9}); \end{array} \tag{14.54}$$

$x^3 - x + 37$ $(x = \overline{-1, 5})$; $x^3 - 37x + 163$ $(x = \overline{-2, 6})$;
$x^3 - 7x + 23$ $(x = \overline{-3, 8})$; $x^3 - 43x + 149$ $(x = \overline{-7, 10})$;
$x^3 - 7x + 103$ $(x = \overline{-5, 7})$; $x^3 - 73x + 251$ $(x = \overline{0, 8})$;
$x^3 - 7x + 353$ $(x = \overline{-7, 5})$; $x^3 - x + 23$ $(x = \overline{-1, 4})$.

Здесь символом $x = \overline{a, b}$ обозначено: $x = a,\ a + 1,\ a + 2 ...,\ b$.

Среди многочленов более высоких степеней следует отметить многочлен Ченг Юнгруна [69]:

$$x^6 + 1061, \tag{14.55}$$

дающий простые значения при $x = 3906, 3907, ..., 3996$.

Большой интерес вызывает отыскание многочленов второй и третьей степени, дающих при

$$0 \leqslant x \leqslant n \in N \tag{14.56}$$

максимальное число простых чисел.

Например, для $n = 1000$ многочлен

$$2x^2 - 199 \tag{14.57}$$

и многочлен Эйлера

$$x^2 + x + 41 \tag{14.58}$$

дают соответственно 598 и 581 простых значений, а для $n = 500$ многочлен третьей степени

$$2x^3 - 489x^2 + 39\,847x - 1\,084\,553 \tag{14.59}$$

позволяет получить 267 простых значений [69].

Использование компьютеров приводит к открытию новых рекордсменов.

Оказывается, что для $n = 11\,000$ многочлен Эйлера (14.58) дает 4506 простых значений, а квадратный трехчлен

$$x^2 + x + 72\,491 \tag{14.60}$$

дает еще больше, а именно 4923 простых значения.

11. Некоторые приближенные оценки подмножеств простых чисел и пробелов

С использованием ЭВМ удалось в последние десятилетия получить ряд важных оценок для простых чисел (см. [4], с. 51—52):

1) Количество простых чисел p в интервале $[x,\ x + a]$ длины a приблизительно равно

$$\frac{a}{\ln x}; \tag{14.61}$$

2) Число простых чисел-близнецов в этом интервале приблизительно равно

$$\frac{1{,}32a}{(\ln x)^2}. \qquad (14.62)$$

При больших значениях x и a эти оценки удивительно точны. Например, для $x = 10^{14}$, $a = 150\,000$ имеем:

1) $\frac{150\,000}{14 \ln 10} \approx 4653$, а фактически 4643.

2) $\frac{1{,}32 \cdot 150\,000}{196 \ln^2 10} \approx 190{,}53$, а фактически 186.

Р. Грэдол и М. Пенк осуществили проверку формулы (14.62) для 132 947 случайно выбранных значений x при

$$10^{49} < x < 10^{54}. \qquad (14.63)$$

Оказалось, что при ожидаемых 245 ± 25 парах простых близнецов фактически было найдено в этом интервале 249 пар.

3) Длина $g(x)$ наибольшего из интервалов между 1 и x, не содержащих простых чисел (от англ. gap — пробел):

$$g(x) \approx (\ln x)^2. \qquad (14.64)$$

В заключение этого краткого исторического обзора отметим еще несколько интересных результатов, характеризующих множество P простых чисел:

1) Формула Римана для $\pi(x)$:

$$\pi(x) = Li(x) - \sum_{p} Li(x_p), \qquad (14.65)$$

где суммирование производится по корням дзета-функции $\zeta(s)$, определенной формулой (14.18) для комплекснозначных $s \in C$.

2) Погрешность приближения $\pi(x)$ интегральным логарифмом $Li\,(x) = \int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}$ не превосходит $C_0 \sqrt{x} \ln x$, где C_0 — некоторая постоянная.

3) Пусть $P_{б,\,n}$ — число всех меньших простых близнецов, не превосходящих n. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{б,\,n}}{\pi\,(n)} = 0. \qquad (14.66)$$

4) Существует бесконечное множество простых чисел p таких, что $p + 2$ представляет собой произведение не более трех простых сомножителей [48].

5) Разность $d_n = p_{n+1} - p_n$ не ограничена и нет места, с которого бы d_n монотонно возрастала или убывала.

§ 15. Пространственная модель натуральных чисел

1. Натуральные числа пролонгируемые и непролонгируемые

Разобьем множество N натуральных чисел на два непересекающихся класса: класс N_1 пролонгируемых чисел и класс N_2 непролонгируемых чисел.

Натуральное число $n \in N$ называется *пролонгируемым*, если среди четырех чисел

$$10n + 1,\ 10n + 3,\ 10n + 7,\ 10n + 9 \qquad (15.1)$$

есть хотя бы одно простое, и *непролонгируемым*, если все числа (15.1) — составные.

Для $n < 100$ существует только семь непролонгируемых натуральных чисел:

$$20,\ 32,\ 51,\ 53,\ 62,\ 84,\ 89. \qquad (15.2)$$

Из них только два числа 53 и 89 — простые.

Для $n \leqslant 1000$ имеется 218 непролонгируемых чисел, из которых 33 — простые.

Пролонгируемое натуральное число $n \in N_1$ называется *сильно пролонгируемым*, если каждое из чисел (15.1) является простым.

Для $n < 10^4$ существует всего 37 сильно пролонгируемых натуральных чисел:

$$\begin{gathered}1,\ 10,\ 19,\ 82,\ 148,\ 187,\ 208,\ 325,\ 346,\ 565,\ 943,\ 1300,\\ 1564,\ 1573,\ 1606,\ 1804,\ 1891,\ 1942,\ 2101,\ 2227,\\ 2530,\ 3172,\ 3484,\ 4378,\ 5134,\ 5533,\ 6298,\ 6721,\\ 6949,\ 7222,\ 7726,\ 7969,\ 8104,\ 8272,\ 8881,\ 9784,\ 9913.\end{gathered} \qquad (15.3)$$

Обозначим через N_{11} множество всех сильно пролонгируемых натуральных чисел. Каждое сильно пролонгируемое натуральное число $n \in N_{11}$ порождает, по определению, четверку простых чисел-близнецов (15.1) (см. [34], с. 24). Поэтому нельзя сейчас утверждать бесконечно или конечно множество N_{11}.

Непролонгируемое натуральное число $n \in N_2$ называется *дважды непролонгируемым*, если каждое из чисел (15.1) непролонгируемо, т. е. если все четыре числа (15.1) и 16 чисел

$10\cdot(10n + 1) + 1$	$10\cdot(10n + 3) + 1$	$10\cdot(10n + 7) + 1$	$10\cdot(10n + 9) + 1$
$10\cdot(10n + 1) + 3$	$10\cdot(10n + 3) + 3$	$10\cdot(10n + 7) + 3$	$10\cdot(10n + 9) + 3$
$10\cdot(10n + 1) + 7$	$10\cdot(10n + 3) + 7$	$10\cdot(10n + 7) + 7$	$10\cdot(10n + 9) + 7$
$10\cdot(10n + 1) + 9$	$10\cdot(10n + 3) + 9$	$10\cdot(10n + 7) + 9$	$10\cdot(10n + 9) + 9$

(15.4)

— составные.

Обозначим символом N_{22} множество всех дважды непролонгируемых натуральных чисел.

Для $n \leqslant 30\,000$ существует всего 474 дважды непролонгируемых натуральных числа, из них только 52 простых. Для $n \leqslant 1000$ имеется всего шесть дважды непролонгируемых чисел:

$$167,\ 176,\ 403,\ 513,\ 761,\ 935. \tag{15.5}$$

Непролонгируемое натуральное число $n \in N_{22}$ называется *трижды непролонгируемым*, если каждое из чисел (15.1), (15.4) непролонгируемо.

Среди первого миллиона натуральных чисел существует только четыре трижды непролонгируемых:

$$487\,856,\ 694\,103,\ 771\,084,\ 836\,254. \tag{15.6}$$

Аналогично определяются k-раз непролонгируемые натуральные числа, где $k > 3$ ($k \in N$). При $k \geqslant 4$ такие числа имеют не менее шести цифр. Их поиск даже современные компьютеры осуществляют длительное время. Неизвестно, бесконечно или конечно множество $\underbrace{N_{22..2}}_{k\text{ раз}}$ всех k-раз непролонгируемых натуральных чисел.

А может быть, при некотором k_0 и последующих $k_0 + 1$, $k_0 + 2$,... оно является пустым?

Каждое k-раз непролонгируемое натуральное число n определяет упорядоченную совокупность

$$\frac{4}{3}\cdot(4^k - 1) \tag{15.7}$$

составных чисел с последней цифрой из множества

$$H_1 = \{1,\ 3,\ 7,\ 9\}. \tag{15.8}$$

Для $k = 3$ получаем 84 таких составных числа: это числа (15.1), (15.4) и числа, получающиеся приписыванием справа к каждому из чисел (15.4) по одной цифре из множества H_1.

2. *Непрерывные подмножества простых чисел*

Подмножество

$$\{p_1,\ p_2,\ ,\ p_k\}\ (p_i \in P,\ i = \overline{1,\ k}) \tag{15.9}$$

простых чисел называется *непрерывным индекса* k, если каждое последующее простое число p_{i+1} этого подмножества ($i = \overline{1,\ k - 1}$) получено пролонгированием предшествующего числа p_i, а простое число p_k непролонгируемо. Индекс непролонгируемого простого числа p, по определению, равен единице.

Первым членом непрерывного подмножества (15.9) может быть любое простое число $p_1 \in P$, причем с одним и тем же первым числом (первыми двумя, тремя и т. д. числами) могут быть несколько непрерывных подмножеств простых чисел. Например, с первым членом $p_1 = 127$ существуют три непрерывные подмножества простых чисел:

$$\{127,\ 1277\},\ \{127,\ 1279,\ 12\,799,\ 127\,997\},\\ \{127,\ 1279,\ 12\,791,\ 127\,913,\ 1\,279\,133,\ 12\,791\,333\} \tag{15.10}$$

соответственно индекса 2, 4 и 6.

С первым членом $p_1 < 1{,}5 \cdot 10^6$ максимальный индекс 12 имеет единственное непрерывное подмножество простых чисел:

$$\{1\,457\,011,\ 14\,570\,117,\ 145\,701\,173,\ 1\,457\,011\,739,\\ 14\,570\,117\,399,\ 145\,701\,173\,999,\ 1\,457\,011\,739\,993,\\ 14\,570\,117\,399\,939,\ 145\,701\,173\,999\,399,\ 1\,457\,011\,739\,993\,993,\\ 14\,570\,117\,399\,939\,939,\ 145\,701\,173\,999\,399\,393\}. \tag{15.11}$$

Индекс 11 для $p_1 < 10^7$ имеют только пять непрерывных подмножеств простых чисел, первыми членами которых являются простые числа 409, 68 041, 1 890 373 (для двух подмножеств) и 8 402 963 (см. [35] , с. 23).

3. Деревья пролонгируемых натуральных чисел

Каждое пролонгируемое натуральное число n порождает «дерево» простых чисел, ветвями которого являются непрерывные подмножества простых чисел.

Например, деревья чисел 12, 14, 15 имеют вид

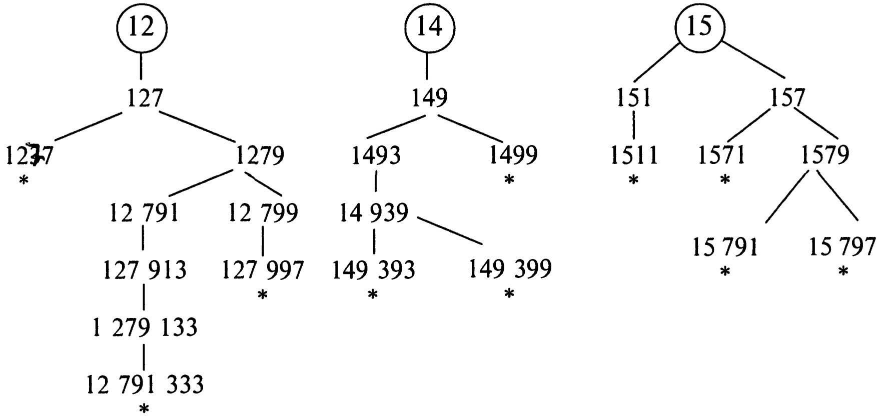


Рис. 8

Здесь символом $*$ обозначен конец соответствующего непрерывного подмножества простых чисел, т. е. отмечено непролонгируемое простое число. Простая компьютерная программа (Приложение 2, программа 5) позволяет по заданному числу строить его дерево. При этом компьютер строит дерево натурального числа, располагая числа одного разряда на одном уровне с сохранением симметрии рисунка. Имея компьютерный рисунок дерева натурального пролонгируемого числа n, читатель без труда на отдельном листе бумаги расставит ветви из непрерывных подмножеств простых чисел, порожденных числом n.

Деревья всех пролонгируемых натуральных чисел $n \leqslant 100$ в компьютерной форме даны в приложении № 3. Анализируя структуру этих деревьев, замечаем, что дерево единицы, считавшейся в Древней Греции божеством, имеет максимальное число ветвей — 24 ветви. Затем следует 10 (21 ветвь), 19 (15 ветвей), 82 (13 ветвей), 6 (12 ветвей), 40 (11 ветвей), 7 и 60 (по 9 ветвей), 3, 49 и 100 (по 8 ветвей).

Как мы отмечали в § 10, в утренней молитве пифагорейцев говорилось, что их главное божественное число Тетрактис «начинается чистой и глубокой единицей» и «порождает праматерь всего сущего, ту, что все объединяет, ту, что первой родилась, что никогда не отклоняется в сторону, ту, что никогда не утомляется, священную десятку, ключ ко всем вещам».

19 характеризует метоновский цикл Луны (12 обычных лет и 7 — високосных), 6 у пифагорейцев было символом души человека, а 40 часто, как было сказано выше, упоминается в религиях многих народов. Православные, например, на сороковой день отмечают «отлет души» усопшего.

Единственную ветвь среди первых ста натуральных чисел имеют числа:

$$\begin{gathered} 11,\ 29,\ 30,\ 39,\ 41,\ 45,\ 55,\ 58,\ 66,\ 68,\ 71,\ 72,\ 74,\ 77, \\ 79,\ 80,\ 83,\ 86,\ 90,\ 92, \end{gathered} \tag{15.12}$$

причем лишь у двух из них индекс ветви больше четырех: 29 (индекс 7) и 71 (индекс 5).

Интересно отметить, что индекс единственной ветви всех простых чисел совокупности (15.12) — простое число.

4. *Пространственные координаты натуральных чисел*

Каждое пролонгируемое натуральное число n определяет тройку натуральных чисел — индекс i_n, степень разветвленности b_n и суммарный индекс s_n:

$$n \to (i_n,\ b_n,\ s_n). \tag{15.13}$$

Индексом числа $n \in N_1$ называется максимальный индекс i_n ветвей дерева этого числа. Индекс i_n непролонгируемого составного (простого) числа $n \in N_2$, по определению, есть нуль (единица). Обозначение i_n от англ. «index».

Степенью разветвленности пролонгируемого натурального числа $n \in N_1$ называется число b_n различных ветвей дерева этого числа (от англ. branch — ветвь). Для непролонгируемого натурального числа $n \in N_2$ степень разветвленности, по определению, равна нулю. Действительно, у такого числа (как составного, так и простого) дерево не имеет ветвей.

Суммарным индексом пролонгируемого натурального числа $n \in N_1$ называется число s_n всех простых чисел, содержащихся в дереве этого числа (включая само число n, если оно — простое). Суммарный индекс непролонгируемого составного (простого) числа $n \in N_2$, по определению, равен нулю (единице). Обозначение s_n от англ. «sum» — сумма.

Тройку неотрицательных целых чисел (i_n, b_n, s_n) назовем координатами натурального числа n.

Например, рассмотренные выше (рис. 8) натуральные числа 12, 14, 15 имеют координаты:

$$12\ (6,\ 3,\ 9);\ 14\ (4,\ 3,\ 6);\ 15\ (3,\ 4,\ 7). \qquad (15.14)$$

5. Пространственная модель множества натуральных чисел

Обозначим оси декартовой системы координат в трехмерном пространстве через Oi_n, Ob_n, Os_n (рис. 9)

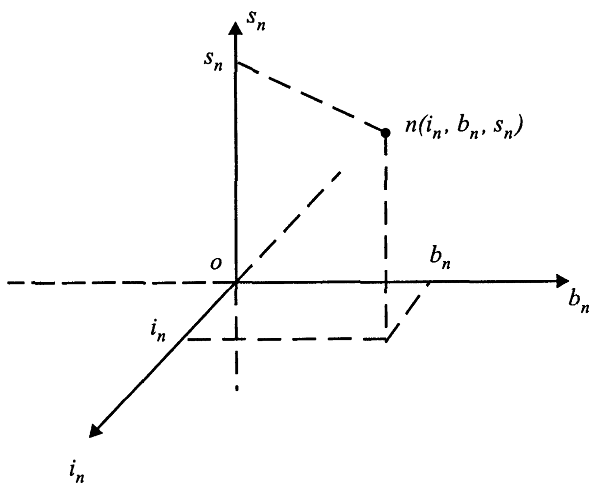


Рис. 9

Каждому натуральному числу n соответствует в пространстве единственная точка, определяемая координатами этого числа. Эта точка расположена в первом октанте или на его гранях. Одна и та же точка (i_n, b_n, s_n) является образом бесконечного множества натуральных чисел.

Точкой любого непролонгируемого составного числа является начало координат (0, 0, 0), а непролонгируемого простого числа — точка (1, 0, 1).

Обозначим через $\sigma(n)$ число всех попарно различных точек всех натуральных чисел, не бо́льших n. Используя компьютер, находим:

$$\begin{gathered}\sigma(1000) = 154;\ \sigma(10\,000) = 267;\ \sigma(50\,000) = 339;\\ \sigma(100\,000) = 369;\ \sigma(150\,000) = 386;\ \sigma(200\,000) = 399;\\ \sigma(250\,000) = 408;\ \sigma(300\,000) = 414.\end{gathered} \tag{15.15}$$

Следовательно, отношение $\frac{\sigma(n)}{n}$ достаточно быстро убывает с возрастанием n. Ограничиваясь для $\frac{\sigma(n)}{n}$ точностью до четырех знаков после запятой, находим:

n	1000	10 000	50 000	100 000	150 000	200 000	250 000	300 000
$\frac{\sigma(n)}{n}$	0,154	0,0267	0,0068	0,0037	0,0026	0,0020	0,0016	0,0014

Рис. 10

Анализируя эту таблицу, можно сформулировать следующую гипотезу:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sigma(n)}{n} = 0. \tag{15.16}$$

Изображая с помощью компьютера образы первых 300 000 натуральных чисел в координатном пространстве (Приложение № 4), убеждаемся, что эти точки концентрируются в окрестности начала вдоль некоторой кривой, расположенной в первом октанте и соединяющей начало координат с образом единицы (9, 24, 63).

Эта точка удалена от начала координат на максимальное расстояние

$$\rho(1) = \sqrt{4626} \approx 68{,}0147. \tag{15.17}$$

Образы только 45 чисел из первых 300 000 расположены вне сферы радиуса $\rho_0 = 25$ с центром в начале координат. Они находятся в 38 различных точках, 20 из которых — образы чисел

$$\begin{gathered}1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 10,\ 19,\ 40,\ 54,\ 60,\ 82,\ 100,\ 103,\\ 213,\ 238,\ 369,\ 409,\ 451,\ 607.\end{gathered} \tag{15.18}$$

Можно высказать предположение, что множество попарно различных образов всех натуральных чисел $n \in N$ конечно, причем их число меньше объема прямого кругового конуса высоты $H = \rho(1)$ и радиуса основания $\rho(1)$, т. е.

$$m < \frac{1}{3}\pi\,(\rho(1))^3 = 1542\sqrt{4626}\,\pi \approx 329\,487. \tag{15.19}$$

Учитывая, что даже $\sigma(300\,000) = 414$, можно предположить, что число m значительно меньше указанной границы.

§ 16. Палиндромические простые числа

На заре возникновения письменности у многих народов существовали два способа прочтения слов или чисел: более привычный для нас «слева направо» и необычный для большинства современных стран «справа налево». Для чисел это означало, что цифры, характеризующие более высокие разряды помещались соответственно слева или справа от цифр, характеризующих меньший разряд.

В египетских папирусах можно встретить как первый, так и второй способ записи чисел. Например, число 223 можно было записывать так:

 или  (16.1)

Здесь мы видим, что для числа 100 существовали соответственно две различные формы записи.

В дальнейшем мы не будем менять для современных цифр 1, 2, 3,..., 9 способ записи при чтении слева направо и справа налево. Так что, например, число 725 при чтении справа налево будет означать «пятьсот двадцать семь».

Назовем простое число p простым палиндромическим числом, если число, получающееся из него при чтении справа налево, также является простым.

Как известно ([34], с. 34), числа, не изменяющиеся от направления прочтения «слева направо» или «справа налево», называются палиндромами. Следовательно, каждый простой палиндром является простым палиндромическим числом. Среди первых ста миллионов натуральных чисел существует всего 781 простой палиндром (Приложение № 5).

В этом множестве простых палиндромов единственным простым палиндромом с четным числом цифр является число 11, так как кроме 11 не существует ни одного простого палиндрома с четным числом цифр.

Действительно, произвольный палиндром с числом цифр $2n + 2$ ($n \in N$) запишется в виде:

$$m = b_n b_{n-1} \dots b_1 b_0 b_0 b_1 \dots b_n = b_n \cdot (10^{2n+1} + 1) + 10 b_{n-1} \cdot \\ \cdot (10^{2n-1} + 1) + \dots + 10^{n-1} b_1 \cdot (10^3 + 1) + 10^n b_0 (10 + 1). \quad (16.2)$$

Каждое из чисел $10^{2n+1-k} + 1$ ($k = 0, 2, 4, \dots, 2n$) образовано двумя единицами, окаймляющими четное число нулей. Значит, оно кратно 11. Следовательно, произвольный палиндром с четным числом цифр, большим двух, является составным числом.

Среди простых палиндромов особый интерес представляют числа, составленные только из единиц, — простые репьюниты. Как было отмечено в § 13, до сих пор известны только пять простых репьюнитов, число единиц в которых

$$2,\ 19,\ 23,\ 317,\ 1031. \quad (16.3)$$

Из (16.3) следует, что число единиц в простом репьюните — простое число. И это не случайно, так как любой репьюнит с составным числом единиц является составным числом.

Первой и последней цифрой любого палиндромического простого числа является число из множества H_1 (15.8), т. е. 1, 3, 7 или 9. Заметим, что все двузначные простые числа, составленные из этих цифр, кроме простого числа 19, являются палиндромическими:

$$11 \leftrightarrow 11,\ 13 \leftrightarrow 31,\ 17 \leftrightarrow 71,\ 37 \leftrightarrow 73,\ 79 \leftrightarrow 97. \quad (16.4)$$

Из 63 трехзначных простых чисел, окаймляемых цифрами из множества H_1, 43 являются палиндромическими. Например из 14 простых чисел, расположенных в интервале $700 < p < 800$, 12 являются палиндромическими. Из 14 простых чисел, имеющихся в каждом из интервалов (900, 1000) и (1200, 1300), только 4 простых числа из каждого интервала не палиндромические.

§ 17. Структура некоторых подмножеств простых чисел

1. Простые числа, определяемые натуральными числами $3n$ и $3n + 2$ ($n \in N$)

Рассмотрим произвольное натуральное число m, кратное трем:

$$m = 3n \ (n \in N). \quad (17.1)$$

Среди чисел

$$10m + k = 30n + k \quad (k = 1, 3, 7, 9) \quad (17.2)$$

лишь числа $10m + 1$ и $10m + 7$ могут быть простыми, так как числа $10m + 3 = 3 \cdot (10n + 1)$ и $10m + 9 = 3 \cdot (10n + 3)$ кратны трем.

Следовательно, приписыванием справа одной цифры к натуральному числу m, кратному трем, мы только тогда сможем получить простое число, когда эта приписываемая цифра есть 1 или 7. Известные простые числа, меньшие 300, наглядно иллюстрируют это правило:

$$31,\ 37,\ 61,\ 67,\ 97,\ 127,\ 151,\ 157,\ 181,\ 211,\ 241,\ 271,\ 277. \qquad (17.3)$$

Аналогично, для числа

$$m_1 = 3n_1 + 2\ (n_1 \in N), \qquad (17.4)$$

т. е. для числа, которое при делении на 3 дает остаток 2, число следующего разряда

$$10m_1 + k_1 = 30n_1 + 20 + k_1\ (k_1 \in H_1) \qquad (17.5)$$

может быть простым только при $k_1 = 3$ или $k_1 = 9$.

Для простых чисел, меньших 300, например, получаем:

$$23,\ 29,\ 53,\ 59,\ 83,\ 89,\ 113,\ 149,\ 173,\ 179,\ 233,\ 239,\ 263,\ 269,\ 293. \qquad (17.6)$$

2. *Удивительные закономерности*

Отметим любопытные закономерности в структуре некоторых подмножеств простых чисел

31	59	2111	277	37	
331	599	4111	727	73	
3331	59999	8111	2777	337	
33331	599999	10111	7727	373	(17.7)
333331	59999999	16111	72227	733	
3333331	5999999999	28111	722222227	3373	
33333331				3733	
				7333	
				333337	
				7333337	

7772777	2221	19	109	499	991
7774777	3331	199	1009	4999	99991
7778777	4441	1999	10009	49999	9999991
77716777	6661	199999			

23	73	47777	97777	881	131	17
233	733	77477	77977	883	13331	71
2333	7333	77747	77797	887	1333331	1777
23333	733333					7177
						7717

1117	449	88801	30103	313
5557	44449	88807	30203	3331333
8887	444449	88811	30403	373
		88813	30703	3337333
		88817	30803	
		88819		

277	97	907	13	557	11113
577	937	9007	31	5557	11131
677	9337	90007	113	555557	11311
877	93337		131		311111
977			311		131111
					113111

Интересную особенность обнаруживают пятизначные простые числа, начинающиеся с трех пятерок, шестерок, семерок и восьмерок. Число, образованное двумя последними цифрами этих чисел, — простое или единица:

55501	66601	77711	88801	
55511	66617	77713	88807	
55529	66629	77719	88811	
55541	66643	77723	88813	
55547	66653	77731	88817	
55579	66683	77743	88819	(17.8)
55589	66697	77747	88843	
		77761	88853	
		77773	88867	
		77783	88873	
		77789	88883	
			88897	

3. Некоторые приемы определения простых чисел

Разобьем девять ненулевых цифр на два подмножества

$$H_1 = \{1, 3, 7, 9\}, \qquad H_2 = \{2, 4, 5, 6, 8\}. \qquad (17.9)$$

Последняя цифра любого простого числа $p > 5$ является элементом множества H_1.

Множества H_1 и H_2 позволяют простыми способами составлять простые числа.

Только простые числа получаются, если:

1) Поставить перед каждой цифрой множества H_1 числа 1, 10, 19, а цифру 7 перед или за каждой из остальных цифр этого множества:

$$11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 191,\ 193,\ 197,\ 199,\ 71,\ 73,\ 79,\ 17,\ 37,\ 97. \qquad (17.10)$$

2) Поставить 3 после каждой цифры множества H_2, кроме 6:

$$23,\ 43,\ 53,\ 83. \qquad (17.11)$$

3) Взять трехзначное число 137 из трех первых цифр множества H_1:

а) из любых двух цифр этого числа, взятых в прямом или обратном порядке, составить двухзначное число:

$$13,\ 17,\ 37,\ 73,\ 71,\ 31; \qquad (17.12)$$

б) вставить 2 перед этим числом или между любыми его двумя цифрами, а 3 вставить слева или справа:

$$2137,\ 1237,\ 1327,\ 3137,\ 1373; \qquad (17.13)$$

в) вставить слева, или справа, или между любыми его двумя цифрами число 99:

$$99\,137,\ 13\,799,\ 19\,937,\ 13\,997; \qquad (17.14)$$

г) записать четыре раза дважды взятое число 137 и вставить между ними любую цифру из множества H_1 или перед первыми тремя записями вставить цифры 1, 3, 6:

$$1\,371\,137,\ 1\,373\,137,\ 1\,377\,137,\ 1\,379\,137,\ 1\,137\,137,\ 3\,137\,137,\ 6\,137\,137; \qquad (17.15)$$

д) переставить в этом числе две первые цифры, т. е. взять число 317 и поставить перед ним дважды взятую каждую цифру множества H_1:

$$11\,317,\ 33\,317,\ 77\,317,\ 99\,317; \qquad (17.16)$$

е) переставить в числе 137 единицу на последнее место, т. е. взять число 371 и вставить слева, или справа, или между любыми его цифрами число 99 или вставить 2 или 3 перед числом:

$$99\,371,\ 37\,199,\ 39\,971,\ 37\,991,\ 2371,\ 3371; \qquad (17.17)$$

ж) к числам 1973, 9173, 3719, получающимся перестановкой единицы в прямой или обратной записи трехзначного числа из остальных цифр множества H_1, впереди вставить дважды взятую каждую цифру числа 137:

$$111\,973;\ 331\,973;\ 771\,973;\ 119\,173;\ 339\,173;\ 779\,173;\ 113\,719;\ 333\,719;\ 773\,719. \qquad (17.18)$$

4) Между цифрами из первых четырех двузначных простых чисел вставить 0 или 9:

$$101,\ 103,\ 107,\ 109,\ 191,\ 193,\ 197,\ 199. \qquad (17.19)$$

5) К единице приписать справа любые две цифры из остальных цифр множества H_1 (в прямом и обратном порядке)

$$137,\ 139,\ 179,\ 197,\ 193,\ 173. \qquad (17.20)$$

6) К дважды взятой двойке приписать справа любую из трех последних цифр множества H_1, а к трижды взятой двойке приписать единицу или поставить двойку перед любой дважды взятой цифрой из первых трех цифр множества H_1:

$$223,\ 227,\ 229,\ 2221,\ 211,\ 233,\ 277. \qquad (17.21)$$

7) К последовательным натуральным числам от 11 до 16 включительно приписать справа по одной из трех последних цифр множества H_1 сначала в прямом порядке следования, потом — в обратном:

$$113,\ 127,\ 139,\ 149,\ 157,\ 163. \qquad (17.22)$$

8) К 2 приписать справа любое не кратное 5 утроенное нечетное число от 9 до 27 включительно:

$$227,\ 233,\ 239,\ 251,\ 257,\ 263,\ 269,\ 181. \qquad (17.23)$$

9) Вставить перед четырехзначным числом 1379 (составленным из всех цифр множества H_1 в порядке их следования) цифры 2, 3, 6 (делители числа 6, кроме 1) или 2 между первыми двумя цифрами:

$$21\,379,\ 31\,379,\ 61\,379,\ 12\,379. \qquad (17.24)$$

10) Заменить в H_1 единицу цифрами множества H_2 с нечетными порядковыми номерами или цифру 9 — с четными и приписать к ним справа по одной из оставшихся цифр множества H_1, расположенных на нечетных местах:

$$23,\ 29,\ 53,\ 59,\ 83,\ 89,\ 41,\ 47,\ 61,\ 67. \qquad (17.25)$$

11) Одно из первых двух чисел Фибоначчи, т. е. единицу, окаймить тройкой или девяткой, а четвертое, пятое и шестое — единицей:

$$313,\ 919,\ 131,\ 151,\ 181. \qquad (17.26)$$

12) Между цифрами двузначных простых чисел 13 и 17 вставить шестерку или одну, две, три девятки, а между цифрами простого числа 97 вставить также шестерку или один, два, четыре нуля:

$$\begin{gathered}163,\ 167,\ 193,\ 197,\ 1993,\ 1997,\ 19\,993,\ 19\,997,\\ 967,\ 907,\ 9007,\ 900\,007.\end{gathered} \qquad (17.27)$$

Особенно удобно пользоваться этими приемами нахождения простых чисел, когда нет под рукой их таблицы.

4. Циклические простые числа

Рассмотрим подмножество P^* всех простых чисел, составленных только из цифр множества H_1, т. е. из 1, 3, 7, 9.

Среди простых чисел, меньших 1000, их только 42:

$$\begin{gathered}3,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 31,\ 37,\ 71,\ 73,\ 79,\ 97,\ 113,\\ 131,\ 137,\ 139,\ 173,\ 179,\ 191,\ 193,\ 197,\ 199,\ 311,\\ 313,\ 317,\ 331,\ 337,\ 373,\ 379,\ 397,\ 719,\ 733,\ 739,\\ 773,\ 797,\ 911,\ 919,\ 937,\ 971,\ 977,\ 991,\ 997.\end{gathered} \tag{17.28}$$

Назовем простое число $p \in P^*$ с числом цифр $n \geqslant 2$ циклическим простым числом или простым квазипалиндромом ([35], с. 14—15), если при любых последовательных циклических подстановках его цифр, т. е. при любых последовательных перестановках первой цифры на последнее место, получаются только простые числа.

Рассмотрим, например, простое число 197. Так как числа 971 и 719 — также простые, а следующая циклическая подстановка приводит к исходному числу 197, то данное число — простой квазипалиндром (как и числа 971 и 719).

Назовем два квазипалиндрома родственными, если один можно получить из другого последовательными циклическими подстановками цифр.

Приведенные выше три квазипалиндрома — родственные. Среди первых десяти миллионов натуральных чисел существует всего 15 неродственных простых квазипалиндромов:

$$\begin{gathered}11,\ 13,\ 17,\ 37,\ 79,\ 113,\ 197,\ 199,\ 337,\ 1193,\\ 3779,\ 11\,939,\ 19\,937,\ 193\,939,\ 199\,933.\end{gathered} \tag{17.29}$$

Так как в интервале $(10^6, 10^7)$ нет ни одного простого квазипалиндрома, то можно предположить, что за исключением простых репьюнитов не существует простых квазипалиндромов, отличных от (17.29) и им родственных.

§ 18. Пять удивительных совокупностей квадратных трехчленов

Рассмотрим сорок квадратных трехчленов

$$\begin{gathered}x^2 - x + 41,\ x^2 - 3x + 43,\ x^2 - 5x + 47,\ x^2 - 7x + 53,\\ x^2 - 9x + 61,\ x^2 - 11x + 71,\ x^2 - 13x + 83,\ x^2 - 15x + 97, \quad (18.1)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x^2 - 65x + 1097,\ x^2 - 67x + 1163,\ x^2 - 69x + 1231,\ x^2 - 71x + 1301,\\ x^2 - 73x + 1373,\ x^2 - 75x + 1447,\ x^2 - 77x + 1523,\ x^2 - 79x + 1601,\end{gathered}$$

которые можно представить одной формулой:

$$f_a(x) = x^2 - ax + \frac{1}{4}(a^2 + 163)\,, \qquad (18.2)$$

где a — произвольное нечетное натуральное число, меньшее 81, т. е. $a = 1, 3, 5, \ldots, 77, 79$.

Последний из этих многочленов — это многочлен Эйлера, а первый отличается от многочлена Эйлера только знаком при x (см. (14.43)).

Эти сорок квадратных трехчленов обладают удивительными свойствами:

1. Для любого целого неотрицательного

$$x_0 \leqslant \frac{1}{2}(79 + a) \qquad (18.3)$$

число $f_a(x_0)$ — простое.

2. При любом нечетном a, меньшим 81, числа

$$f_a(0), f_a(1), f_a(2), \ldots, f_a\left(\frac{1}{2}(79 + a)\right) \qquad (18.4)$$

определяют одно и то же множество M_{79}, состоящее из следующих сорока различных простых чисел:

41	43	47	53	61	71	83	97	113	131	
151	173	197	223	251	281	313	347	383	421	(18.5)
461	503	547	593	641	691	743	797	853	911	
971	1033	1097	1163	1231	1301	1373	1447	1523	1601.	

Эти числа — свободные члены многочленов (18.2) соответственно при $a = 1, 3, \ldots, 79$.

Заметим, что простых значений в формуле (18.4) больше 40. Например, при $a = 79$ получаем 80 простых значений многочлена

$$x^2 - 79x + 1601 \quad (x = 0, 1, 2, \ldots, 79). \qquad (18.6)$$

Однако попарно различных простых чисел из них ровно 40 (как и у остальных 39 многочленов (18.2)) и все они определены одной формулой (18.5).

3. При любом нечетном $a < 81$ значения

$$f_a\left(\frac{1}{2}(79 + a) + 1\right) \quad (a = 1, 3, 5, \ldots, 79) \qquad (18.7)$$

всех сорока квадратных трехчленов совпадают и равны 41^2. Действительно, подставляя вместо x в формуле (18.2) число $\frac{1}{2}(79 + a) + 1$, получим:

$$\left(\frac{1}{2}(79 + a) + 1\right)^2 - a\cdot\left(\frac{1}{2}(79 + a) + 1\right) + \frac{1}{4}(a^2 + 163) =$$
$$= \frac{1}{4}(6241 + 158a + a^2) + 79 + a + 1 - \frac{1}{2}\cdot(79a + a^2) - a +$$
$$+ \frac{1}{4}a^2 + \frac{163}{4} = \frac{6404}{4} + 80 = 1681 = 41^2.$$

Невольно с этими поразительными свойствами сорока многочленов $f_a(x)$ ассоциируется важное религиозное значение числа 40, на сороковой день, например, православные отмечают отлет души усопшего.

Возникает вопрос, а есть ли еще совокупности квадратных трехчленов, обладающих аналогичными свойствами? Оказывается, что кроме рассмотренной совокупности, порожденной числом 79, имеется еще четыре совокупности квадратных трехчленов, порождаемые простыми числами 3, 7, 19, 31 и обладающие аналогичными свойствами.

Рассмотрим множество

$$\Lambda = \{3, 7, 19, 31, 79\}, \tag{18.8}$$

состоящее из пяти различных простых чисел.

Каждое из этих чисел $\lambda \in \Lambda$ определяет множество

$$M_\lambda = \left\{\frac{1}{2}(\lambda + 3) + k(k - 1) \mid k = 1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(\lambda + 1)\right\} \tag{18.9}$$

из $\frac{1}{2}(\lambda + 1)$ простых попарно различных чисел:

$$\begin{aligned} M_3 &= \{3, 5\};\ M_7 = \{5, 7, 11, 17\},\\ M_{19} &= \{11, 13, 17, 23, 31, 41, 43, 67, 83, 101\},\\ M_{31} &= \{17, 19, 23, 29, 37, 47, 59, 73, 89, 107,\\ &\quad 127, 149, 173, 199, 227, 257\}. \end{aligned} \tag{18.10}$$

M_{79} состоит из 40 чисел (18.5).

Пусть a_λ — произвольное нечетное натуральное число, меньшее $\lambda + 2$. Рассмотрим пять совокупностей квадратных трехчленов

$$f_{a_\lambda}(x) = x^2 - a_\lambda x + \frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5), \tag{18.11}$$

каждая из которых состоит из $\frac{1}{2}(\lambda + 1)$ многочленов, так как $a_\lambda = 1, 3, 5, \ldots, \lambda$.

Функция

$$F_\lambda(x) = x(x - 1) + \frac{1}{2}(\lambda + 3) \tag{18.12}$$

— строго монотонно возрастающая на промежутке $[1, \frac{1}{2}(\lambda + 1)]$, так как ее производная

$$F_\lambda'(x) = 2x - 1 \tag{18.13}$$

положительна на этом промежутке.

Значит, наименьшее простое число во множестве M_λ есть

$$F_\lambda(1) = \frac{1}{2}(\lambda + 3). \qquad (18.14)$$

Каждый из многочленов $f_{a_\lambda}(x)$ обладает следующими свойствами:

1) Для любого целого неотрицательного $x_0 \leqslant \frac{1}{2}(a_\lambda + \lambda)$ число $f_{a_\lambda}(x_0)$ — простое.

2) При любом a_λ числа

$$f_{a_\lambda}(0),\ f_{a_\lambda}(1),\ f_{a_\lambda}(2),\ \dots,\ f_{a_\lambda}\left(\frac{1}{2}(a_\lambda + \lambda)\right) \qquad (18.15)$$

представляют одно и то же множество M_λ простых чисел.

3) При любом a_λ значение функции $f_{a_\lambda}(x_0)$, где

$$x_0 = \frac{1}{2}(a_\lambda + \lambda) + 1, \qquad (18.16)$$

равно квадрату наименьшего числа из множества M_λ:

$$f_{a_\lambda}\left(\frac{1}{2}(a_\lambda + \lambda) + 1\right) = \left(\frac{\lambda + 3}{2}\right)^2. \qquad (18.17)$$

Для $\lambda = 3, 7, 19, 31, 79$ этим наименьшим числом соответственно является одно из чисел:

$$3,\ 5,\ 11,\ 17,\ 41. \qquad (18.18)$$

4) Числа M_λ состоят из свободных членов

$$\frac{1}{4}(a_\lambda^2 + 2\lambda + 5) \qquad (18.19)$$

всех $\frac{1}{2}(\lambda + 1)$ квадратных трехчленов $f_{a_\lambda}(x)$, т. е. в (18.19) надо положить $a_\lambda = 1, 3, \dots, \lambda$.

§ 19. Теоремы о частичной периодичности

Простые числа, являясь основными кирпичиками величественного здания «математика», «растут среди натуральных чисел как сорная трава, не подчиняясь, кажется, ничему, кроме случая» ([4], с. 44).

Основное внимание в теории простых чисел обращалось на установление критериев простоты, асимтотического закона распределения, решение знаменитой проблемы Гольдбаха — Эйлера о представлении любого натурального числа $n \geqslant 6$ в виде суммы трех (а для четного числа, большего или равного четырем, — двух) простых чисел, нахождение функций целочисленного аргумента, задающих простые числа и др.

Вопросам же периодичности в структуре множества P не уделялось должного внимания из-за твердого убеждения, что ее просто не существует.

Рассматривая любую таблицу простых чисел, мы видим, что известные каждому школьнику простые числа из первой сотни натуральных чисел встречаются в виде последних двух цифр на протяжении всей сколь угодно большой таблицы (даже таблицы простых чисел Дэррика Нормана Лемера, составленной им в 1914 году для всех $n < 10\,006\,721$ [66].

Возникает предположение о существовании периодичности таких встреч, а также периодичности появления простых чисел-близнецов с последними цифрами из первой сотни натуральных чисел.

Известно, что остаток от деления на 6 любого простого числа $p > 3$ равен 5 или 1 ([34], с. 14).

Наименьшим общим кратным чисел 100 и 6 является число 300. Следовательно, при любом натуральном n число $300n + m$, где m — произвольное натуральное число, меньшее 300, имеет тот же остаток от деления на 6, что и число m.

Единственными не простыми числами, меньшими 300 и не кратными 5, остаток от деления которых на 6 равен 1 или 5, являются числа следующих трех множеств:

$$A_0 = \{1, 49, 77, 91\};\ A_1 = \{119, 121, 133, 143, 161, 169, 187\};$$
$$A_2 = \{203, 209, 217, 221, 247, 253, 259, 287, 289, 299\}. \quad (19.1)$$

Множество

$$A = A_0 \cup A_1 \cup A_2 \quad (19.2)$$

состоит из единицы и произведений четырех последовательных простых чисел 7, 11, 13, 17 каждого на себя, а первых трех и на последующие простые числа до 41, 23 и 23 соответственно ([34], с. 8).

Обозначим через C_0 — множество простых чисел, больших 5, но меньших 100, через C_k $(k = 1, 2)$ — множество простых чисел, больших $100k$, но меньших $100\,(k + 1)$, через M_α — объединение множеств A_α и C_α $(\alpha = 0, 1, 2)$:

$$M_\alpha = A_\alpha \cup C_\alpha, \quad (19.3)$$

а через M — объединение множеств M_α:

$$M = M_0 \cup M_1 \cup M_2 \quad (19.4)$$

(см. [34], с. 9).

Теорема 19.1. Для любого натурального числа n и произвольного простого числа $p_{\alpha,n}$ $(\alpha = 0, 1, 2)$ такого, что

$$300n + 100\alpha < p_{\alpha,n} < 300n + 100\,(\alpha + 1) \quad (19.5)$$

последние две цифры числа $p_{\alpha,n}$ совпадают с последними двумя цифрами одного из чисел множества M_α.

Доказательство. Из неравенств (19.5) следует, что

$$\frac{100\alpha}{6} < \frac{p_{\alpha,n}}{6} < \frac{100(\alpha+1)}{6}. \tag{19.6}$$

Так как остаток от деления на 6 любого простого числа $p > 5$ равен 1 или 5, то последние две цифры числа $p_{\alpha,n}$ совпадают с двумя цифрами лишь такого числа m, которое удовлетворяет неравенствам

$$100\alpha < m < 100(\alpha+1) \tag{19.7}$$

и при делении на 6 дает остаток 1 или 5.

Таким числом является только одно из чисел множества M_α.

Следствие. Пусть M_α^* состоит из тех чисел множества M_α, которые на две единицы меньше своего последующего числа из M_α, а $(p_{\alpha,n}, p_{\alpha,n}+2)$ — пара простых чисел-близнецов. Тогда последние две цифры числа $p_{\alpha,n}$ совпадают с двумя цифрами одного из чисел множества M_α^*.

Обозначим через D_0 множество всех простых чисел, больших 7, но меньших 102, т. е.

$$D_0 = (C_0 \setminus 7) \cup \{101\}. \tag{19.8}$$

Теорема 19.2. Последние две цифры любого простого числа $\tilde{p}_{0,n}$ такого, что

$$2100n < \tilde{p}_{0,n} < 100 + 2100n \tag{19.9}$$

образуют двузначное число из D_0 или совпадают с двумя последними цифрами числа $101 \in D_0$.

Доказательство. Пусть

$$\tilde{p}_{0,n} = 2100n + q, \tag{19.10}$$

где

$$0 < q < 100. \tag{19.11}$$

По теореме 19.1 $q \in M_0 = C_0 \cup A_0$. Но число q не может быть ни одним из чисел множества $A_0 = \{1, 49, 77, 91\}$, кроме 1, так как

$$2100n = 7 \cdot 300n \tag{19.12}$$

и если бы q было кратным семи, то число $\tilde{p}_{0,n}$ не было бы простым. Значит, $q \in C_0 \vee q = 1$.

Например, для $n = 1, 10, 1000$ получаем следующие совокупности простых чисел $\tilde{p}_{0,n}$:

$$\begin{gathered}\{\tilde{p}_{0,1}\} = \{21\underline{11}, 21\underline{13}, 21\underline{29}, 21\underline{31}, 21\underline{37}, 21\underline{41}, 21\underline{43}, \\ 21\underline{53}, 21\underline{61}, 21\underline{79}\}, \\ \{\tilde{p}_{0,10}\} = \{21\,0\underline{01}, 21\,0\underline{11}, 21\,0\underline{13}, 21\,0\underline{17}, 21\,0\underline{19}, 21\,0\underline{23}, \\ 21\,0\underline{31}, 21\,0\underline{59}, 21\,0\underline{61}, 21\,0\underline{67}, 21\,0\underline{89}\},\end{gathered} \tag{19.13}$$

$$\{\tilde{p}_{0,\,100}\} = \{210\ 0\underline{01},\ 210\ 0\underline{11},\ 210\ 0\underline{31},\ 210\ 0\underline{37},\ 210\ 0\underline{53},\ 210\ 0\underline{71},\ 210\ 0\underline{97}\},$$
$$\{\tilde{p}_{0,\,1000}\} = \{2\ 100\ 0\underline{01},\ 2\ 100\ 0\underline{11},\ 2\ 100\ 0\underline{31},\ 2\ 100\ 0\underline{41},\ 2\ 100\ 0\underline{53},\ 2\ 100\ 0\underline{71},\ 2\ 100\ 0\underline{79},\ 2\ 100\ 0\underline{97}\}.$$

Теорема 19.3. Последние три цифры любого простого числа $\tilde{p}_{k,\,n}$ ($k = 1,\ 2$) такого, что

$$3\ 003\ 000n + 100 < \tilde{p}_{1,\,n} < 3\ 003\ 000n + 200, \qquad (19.14)$$
$$51\ 051\ 000n + 200 < \tilde{p}_{2,\,n}\ 51\ 051\ 000n + 300 \qquad (19.15)$$

образуют трехзначное число из множества C_k.

Доказательство. Пусть

$$\tilde{p}_{1,\,n} = 3\ 003\ 000n + q_1, \qquad (19.16)$$
$$\tilde{p}_{2,\,n} = 51\ 051\ 000n + q_2, \qquad (19.17)$$

где

$$100 < q_1 < 200, \qquad (19.18)$$
$$200 < q_2 < 300. \qquad (19.19)$$

По теореме 19.1 $q_k \in M_k = C_k \cup A_k$. Но число q_k не может быть ни одним из чисел множества A_k, так как

$$3\ 003\ 000n = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3000n,\ \ 51\ 051\ 000n = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 3000n \qquad (19.20)$$

и тогда число $\tilde{p}_{k,\,n}$ было бы составным. Следовательно, $q_k \in C_k$.

Например, для $n = 1,\ 2,\ 3$ имеем:

$$\{\tilde{p}_{1,\,1}\} = \{3\ 003\ \underline{113},\ 3\ 003\ \underline{131},\ 3\ 003\ \underline{149},\ 3\ 003\ \underline{157},\ 3\ 003\ \underline{167},\ 3\ 003\ \underline{173},\ 3\ 003\ \underline{181},\ 3\ 003\ \underline{191}\},$$
$$\{\tilde{p}_{1,\,2}\} = \{6\ 006\ \underline{127},\ 6\ 006\ \underline{137},\ 6\ 006\ \underline{149},\ 6\ 006\ \underline{163}\}, \qquad (19.21)$$
$$\{\tilde{p}_{1,\,3}\} = \{9\ 009\ \underline{103},\ 9\ 009\ \underline{107},\ 9\ 009\ \underline{157},\ 9\ 009\ \underline{163},\ 9\ 009\ \underline{179},\ 9\ 009\ \underline{191}\},$$

$$\{\tilde{p}_{2,\,1}\} = \{51\ 051\ \underline{241}\},$$
$$\{\tilde{p}_{2,\,2}\} = \{102\ 102\ \underline{229},\ 102\ 102\ \underline{239},\ 102\ 102\ \underline{241},\ 102\ 102\ \underline{269}\}, \qquad (19.22)$$
$$\{\tilde{p}_{2,\,3}\} = \{153\ 153\ \underline{227},\ 153\ 153\ \underline{233},\ 153\ 153\ \underline{241},\ 153\ 153\ \underline{283},\ 153\ 153\ \underline{293}\}.$$

Из теорем 19.2, 19.3 непосредственно следует, что при любом натуральном n число из двух (трех) последних цифр меньшего из простых чисел-близнецов

$$(\tilde{p}_{\alpha,\,n},\ \tilde{p}_{\alpha,\,n} + 2) \qquad (19.23)$$

является меньшим простым числом пары близнецов из C_α. Например,

$$(21\underline{11},\ 21\underline{13}),\ (21\underline{29},\ 21\underline{31}),\ (21\underline{41},\ 21\underline{43}),\ (102\ 102\ \underline{239},\ 102\ 102\ \underline{241}).$$

§ 20. Некоторые гипотезы и нерешенные задачи в теории простых чисел

Известный специалист в теории чисел польский математик Вацлав Серпиньский отметил несколько нерешенных проблем, касающихся простых чисел ([48], с. 43—45, 84—87).

1. Конечно или бесконечно множество простых чисел-близнецов и простых четверок-близнецов?

2. (*Гипотеза Гильбрайта*). Если выписать последовательные простые числа в строку, затем, в следующей строке — разности последовательных простых чисел, в третьей строке — абсолютные величины разностей последовательных чисел предыдущей строки и т. д., то в каждой строке, начиная со второй, первым числом будет единица.

Например,

2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31
1 2 2 4 2 4 2 4 6 2
1 0 2 2 2 2 2 2 4
1 2 0 0 0 0 0 2
1 2 0 0 0 0 2
1 2 0 0 0 2
1 2 0 0 2
1 2 0 2
1 2 2
1 0
1

Рис. 11

К 1961 году эта гипотеза была проверена для 63 418 первых строк.

3. (*Гипотеза Шинцеля*). Расположим первые n^2 натуральных чисел в n строк, записывая последовательные n чисел в каждой строке:

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \ldots\ldots & n \\
n+1 & n+2 & n+3 & \ldots\ldots & 2n \\
2n+1 & 2n+2 & 2n+3 & \ldots\ldots & 3n \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(n-1)n+1 & (n-1)n+2 & (n-1)n+3 & & n^2
\end{array} \tag{20.1}$$

Если $k < n$ взаимно просто с n, то k-й столбец в таблице содержит по крайней мере одно простое число.

А. Горжелевский проверил это для всех $n \leqslant 100$ (см. [48], с. 44).

4. (*Гипотеза Серпиньского*). Для $n > 1$ каждая строка таблицы (20.1) содержит по меньшей мере одно простое число.

Эта гипотеза проверена А. Шинцелем для $n \leqslant 4500$.

5. (*Серпиньский*). Если все натуральные числа выписывать последовательно в строки по n чисел в каждой строке с номером n:

$$\begin{array}{llllll} 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 & 21 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \tag{20.2}$$

то в каждой строке этой таблицы, начиная со второй, найдется по крайней мере одно простое число.

6. (*Серпиньский*). Для каждого натурального числа $n \geqslant 3$ существует бесконечно много магических квадратов, составленных только из простых чисел.

В отличие от стандартных магических квадратов, в которых содержатся все n^2 первых натуральных чисел, в магических квадратах из простых чисел имеются любые попарно различные числа, расположенные в n строках и n столбцах так, что выполняются все свойства обычных магических квадратов: сумма чисел каждой строки, каждого столбца и каждой диагонали одна и та же.

Например, для $n = 3$ и $n = 4$ магическими квадратами из простых чисел являются:

569	59	449
239	359	479
269	659	149

17	317	397	67
307	157	107	227
127	277	257	137
347	47	37	367

Рис. 12

Их магические суммы соответственно равны 1077 и 798.

7. (*Серпиньский*). Существует ли бесконечно много пар последовательных натуральных чисел, каждое из которых имеет только один простой делитель?

К 1961 году было известно только 26 таких пар, из которых наивысшей является пара

$$(2^{4423} - 1,\ 2^{4423}). \qquad (20.3)$$

8. (*Серпиньский*). Существует ли натуральное число m такое, что для $n \geqslant m$ хотя бы одно из двух последовательных натуральных чисел n и $n + 1$ имеет по крайней мере два различных простых делителя?

Доказано, что если такое число m существует, то существует только конечное число простых чисел Ферма

$$F_n = 2^{2^n} + 1 \qquad (20.4)$$

и только конечное число простых чисел Мерсенна

$$M_p = 2^p - 1 \ (p \in P,\ M_p \in P) \qquad (20.5)$$

9. (*Шинцель*). Если s — натуральное число, $f_i(x)$ $(i = \overline{1,\ s})$ — неприводимые многочлены с целыми коэффициентами (положительными при наивысших степенях x), удовлетворяющие условию: не существует натурального числа, большего единицы, которое являлось бы делителем произведения

$$f_1(x)\, f_2(x) \ldots f_s(x) \qquad (20.6)$$

для каждого целого значения x, — то существует бесконечное множество натуральных чисел x, для которых каждое из чисел $f_i(x)$ является простым.

Из гипотезы Шинцеля, утверждает Серпиньский ([48], с. 97), можно вывести еще много теорем о простых числах, которые до сих пор не доказаны.

10. Существует ли бесконечное множество целочисленных значений аргумента $x = x_0$, для которых заданный многочлен $f_n(x)$ степени $n > 1$ с целочисленными коэффициентами определяет только простые числа:

$$f_n(x_0) \in P. \qquad (20.7)$$

Даже для простейшего многочлена

$$x^2 + 1 \qquad (20.8)$$

эта проблема еще не решена.

Глава III.
Пифагоровы треугольники

§ 21. Божественный пифагоров треугольник

Во всех древних развитых цивилизациях (Вавилон, Египет, Китай, Индия, Греция) из поколения в поколение передавалась магическая сила прямоугольного треугольника с длинами сторон 3, 4, 5.

В Ветхом Завете сказано, что при построении скинии — основной иудейской святыни — использовались ковры, основной прямоугольник которых имел размер 3×4 локтя (Исход, 37, 10), а при возведении храма Соломона были изготовлены подставки для жертвенных чаш с боковыми гранями размером 3×4 локтя (1 кн. Царств, 7, 27) (См. [4], с. 37).

Один из самых почитаемых в Индии алтарей — алтарь Махаведи — имел форму равнобочной трапеции с основаниями 24, 30 и высотой 36.

Оказывается, что прямоугольный треугольник, вершинами которого являются точки пересечения перпендикуляра, опущенного из вершины верхнего основания этой трапеции на нижнее, с диагональю и нижним основанием, а также соответствующая вершина нижнего основания есть треугольник со сторонами 3, 4, 5.

Эта удивительная трапеция порождает простыми построениями циркулем и линейкой еще девять прямоугольных треугольников с натуральными длинами сторон:

$$\begin{gathered}(12,\ 5,\ 13);\ (8,\ 15,\ 17);\ (20,\ 21,\ 29);\ (36,\ 15,\ 39);\\ (12,\ 35,\ 37);\ (36,\ 27,\ 45);\ (20,\ 15,\ 25);\\ (16,\ 12,\ 20);\ (12,\ 9,\ 15).\end{gathered} \tag{21.1}$$

Тройка (3, 4, 5) натуральных чисел упоминалась в дошедшем до нас диалоге китайского императора Чжоу-Гуна (1100 г. до н. э.) с ученым Шан Гао.

Пифагор называл эту тройку «невестой», а Платон считал, что тройка (3, 4, 5) — это супружество: горизонтальный катет, длиной четыре, — это женское начало, вертикальный катет, длиной три, — это мужское начало, а гипотенуза, длиной пять, — их потомство ([4], с. 72—73).

В 14 году до нашей эры римский писатель, архитектор и инженер Витрувий восславил построение прямого угла с помощью тройки (3, 4, 5) как величайшее достижение всей математики той эпохи.

Такие построения осуществляли многие древние цивилизации при постройке зданий, храмов, восстановлении границ затопленных водой земельных участков и др.

Тройка (3, 4, 5) воспринималась как место соединения мира духовного и мира материального.

§ 22. Формула Диофанта

Прямоугольный треугольник с натуральными длинами всех трех его сторон называется пифагоровым, так как считается, что Пифагор (570—500 до н. э.) впервые доказал, что квадрат длины гипотенузы любого прямоугольного треугольника равен сумме квадратов длин его катетов. Тройка натуральных чисел (x, y, z), для которой

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{22.1}$$

называется пифагоровой. В дальнейшем условимся обозначать символом (x, y, z) (при выполнении условия (22.1) и $x, y, z \in N$) и пифагорову тройку чисел, и пифагоров треугольник с катетами длиной x, y и гипотенузой длиной z, причем тройки (x, y, z) и (y, x, z) отождествляются:

$$(x, y, z) \overset{def}{=} (y, x, z), \tag{22.2}$$

так как они определяют один и тот же пифагоров треугольник.

Если (x, y, z) — пифагорова тройка, то тройки

$$\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z), \tag{22.3}$$

где $\lambda \in N$ также является пифагоровой, так как

$$(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2) = \lambda^2 z^2 = (\lambda z)^2.$$

Если

$$\text{НОД}\ (x, y) = 1, \tag{22.4}$$

т. е. числа x, y, z не имеют общего множителя, отличного от единицы, то пифагорова тройка называется простейшей или несократимой.

Если же

$$\text{НОД}\ (x, y) = 2, \tag{22.5}$$

то такая пифагорова тройка называется квазипростейшей.

Диофант (III в. н. э.) широко использовал в своих книгах «Арифметика» формулу

$$\begin{gathered}(2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2), \\ \text{НОД}\ (m, n) = 1\end{gathered} \tag{22.6}$$

для множества всех простейших и квазипростейших пифагоровых троек, где m, n — взаимно простые натуральные числа и $m > n$.

Хотя эта формула была известна еще вавилонянам, но ее называют диофантовой формулой.

Если НОД $(m, n) = 1$ и числа m и n разной четности, то пифагорова тройка (22.6) — простейшая, если же m и n — нечетные натуральные числа, то тройка (22.6) — квазипростейшая.

Действительно, в этом случае она имеет общий наибольший множитель 2: если $m = 2h + 1$, $n = 2k + 1$ $(h > k)$, то

$$\begin{aligned} m^2 + n^2 &= 2\,(2(h^2 + k^2 + h + k) + 1), \\ m^2 - n^2 &= 4 \cdot (h^2 - k^2 + h - k), \\ 2mn &= 2 \cdot (4hk + 2h + 2k + 1). \end{aligned} \tag{22.7}$$

Следовательно,

$$\text{НОД}\ (x, y) = 2,$$

т. е. выполнено условие (22.5) квазипростейшей тройки.

Например, для $m = 7$, $n = 5$ квазипростейшая тройка

$$(70,\ 24,\ 74) = 2 \cdot (35,\ 12,\ 37). \tag{22.8}$$

Вывод формулы Диофанта (22.6) очень прост. Используя равенство (22.1), находим:

$$x^2 = (z + y)\,(z - y). \tag{22.9}$$

Положим

$$z + y = 2m^2, \quad z - y = 2n^2. \tag{22.10}$$

Так как $z + y > z - y$, то $m > n$.

Учитывая в уравнении (22.9) формулы (22.10), получим:

$$x^2 = 4m^2n^2 \to x = 2mn. \tag{22.11}$$

Складывая и вычитая почленно уравнения (22.10), находим:

$$z = m^2 + n^2,\ y = m^2 - n^2\ (m > n). \tag{22.12}$$

Из уравнений (22.1), (22.2) и (22.6) следует, что множество всех пифагоровых троек определяется формулой

$$\lambda\,(2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2), \tag{22.13}$$

где

$$\lambda,\ m,\ n \in N, \quad m > n, \quad \text{НОД}\ (m, n) = 1. \tag{22.14}$$

Теорема 22.1. Любой пифагоров треугольник обладает следующими свойствами:

1) один из его катетов кратен 4;

2) один из его катетов кратен 3;

3) одна из его сторон кратна 5.

Доказательство. Так как λ — любое натуральное число, то этот множитель можно отбросить и рассматривать пифагоровы треугольники, определяемые формулой Диофанта (22.6).

1) Если m и n разной четности, то катет $2mn$ кратен четырем, а если они оба одинаковой четности, то катет $m^2 - n^2 = (m + n)(m - n)$ кратен четырем.

2) Разделим m и n на 3:

$$m = 3h_1 + k_1, \quad n = 3h_2 + k_2 \ (k_1, k_2 = 0, 1, 2). \tag{22.15}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} mn &= 3(3h_1h_2 + h_1k_2 + h_2k_1) + k_1k_2, \\ m + n &= 3(h_1 + h_2) + k_1 + k_2, \\ m - n &= 3(h_1 - h_2) + k_1 - k_2. \end{aligned} \tag{22.16}$$

Если $k_1k_2 = 0$, то катет $2mn$ кратен трем; если $k_1k_2 \neq 0$, то, в силу равенств (22.15), либо $k_1 = k_2 = 1 \vee 2$, либо $k_1 + k_2 = 3\ (1 + 2 \vee 2 + 1)$, т. е. $m^2 - n^2$ кратно 3.

3) Разделим m и n на 5:

$$m = 5s_1 + t_1, \quad n = 5s_2 + t_2 \ (t_1, t_2 = 0, 1, 2, 3, 4). \tag{22.17}$$

Находим:

$$\begin{aligned} mn &= 5(5s_1s_2 + s_2t_1 + s_1t_2) + t_1t_2, \\ m + n &= 5(s_1 + s_2) + t_1 + t_2, \\ m - n &= 5(s_1 - s_2) + t_1 - t_2, \\ m^2 + n^2 &= 25(s_1^2 + s_2^2) + 10 \cdot (s_1t_1 + s_2t_2) + t_1^2 + t_2^2. \end{aligned} \tag{22.18}$$

Если $t_1t_2 = 0$, то катет $2mn$ кратен пяти.

Пусть $t_1t_2 \neq 0$. Тогда матрица значений t_1 и t_2 запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 21 & 22 & 23 & 24 \\ 31 & 32 & 33 & 34 \\ 41 & 42 & 43 & 44 \end{pmatrix} \tag{22.19}$$

По главной диагонали этой матрицы $t_1 - t_2 = 0$, а по побочной диагонали $t_1 + t_2 = 5$. Следовательно, для этих значений t_1 и t_2 катет $m^2 - n^2$ кратен пяти. Для всех остальных элементов матрицы (22.19) число $t^2_1 + t^2_2$ кратно 5, значит, и гипотенуза $m^2 + n^2$ кратна пяти. Ч. т. д.

Следствие. В любом пифагоровом треугольнике (x, y, z) произведение трех сторон кратно 60:

$$xyz = 60k \ (k \in N). \tag{22.20}$$

§ 23. Две базовые последовательности пифагоровых треугольников

Рассмотрим подмножества Π_1 и Π_2 пифагоровых треугольников соответственно с простым катетом $p \in P$ и простой гипотенузой $q \in P$.

Имеем:

$$m^2 - n^2 = (m + n)(m - n) = p. \tag{23.1}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} m + n = p, \\ m - n = 1, \end{cases} \tag{23.2}$$

т. е.

$$m = \frac{1}{2}(p + 1), \ n = \frac{1}{2}(p - 1), \tag{23.3}$$

где p — произвольное нечетное простое число.

Назовем пифагоров треугольник

$$\left(\frac{1}{2}(p^2 - 1), \ p, \ \frac{1}{2}(p^2 + 1)\right), \tag{23.4}$$

определяемый однозначно заданием простого числа $p > 2$, пифагоровым треугольником первого рода, а бесконечную последовательность таких прямоугольных треугольников

$$\begin{gathered} (4, 3, 5), (12, 5, 13), (24, 7, 25), \\ (60, 11, 61), (84, 13, 85), \ldots \end{gathered} \tag{23.5}$$

— первой базовой последовательностью пифагоровых треугольников.

Из формулы (23.4) следует, что при $p > 3$ четный катет пифагорова треугольника первого рода кратен 12.

Действительно, для $p = 5$ пифагоров треугольник (12, 5, 13) обладает этим свойством. Произвольное простое число $p > 5$ имеет вид:

$$p = 6k + 1 \vee p = 6k + 5 \ (k \in N). \tag{23.6}$$

Следовательно, число

$$\frac{1}{2}(p^2 - 1) = 6k(3k + 1) \vee 6k(3k + 5), \tag{23.7}$$

являющееся произведением шести на четное число, кратно 12.

Так как одна из сторон любого пифагорова треугольника кратна пяти (теорема 22.1), то при $p > 5$ произведение четного катета произвольного пифагорова треугольника первого рода на гипотенузу кратно 60, т. е.

$$\frac{1}{4}(p^4 - 1) = 60h \ (h \in N). \tag{23.8}$$

Из формулы (23.8) непосредственно вытекает

Теорема 23.1. Пусть p — произвольное простое число, большее 5. Тогда натуральное число

$$n = p^4 - 1 = 240k \ (k \in N), \tag{23.9}$$

т. е. кратно 240.

Заметим, что если простое число p оканчивается на 1 или 9, то натуральное число

$$m = p^2 - 1 \tag{23.10}$$

кратно 120.

Действительно, если

$$p = 10k + 1 \vee 10k + 9, \tag{23.11}$$

то

$$p^2 - 1 = 5 \cdot (20k^2 + 4k) \vee 5 \cdot (20k^2 + 36k + 16). \tag{23.12}$$

Так как, в силу формулы (23.7), $p^2 - 1$ кратно 24, а в силу формулы (23.12) оно кратно 5, то число $m = p^2 - 1$ кратно 120.

В связи с этим интересным свойством «половины» простых чисел (простые числа другой «половины» оканчиваются на 3 или 7, не считая простых чисел 2 и 5) вспомним мифологическое объяснение историка Филофана, почему после Всемирного потопа люди жили 120 лет. «Число 120 есть сумма 15 первых чисел, 15 есть число света, так как после новолуния через 15 дней появляется полная Луна. 120 есть пятнадцатое треугольное число. Оно имеет 15 делителей и все частные суть весьма важные числа, сумма их равняется 240, т. е. вдвое больше 120, что имеет отношение к двойной жизни — духовной и телесной».

А ведь для любого простого числа, большего пяти, справедлива формула (23.9), в которой фигурирует число 240!

Рассмотрим теперь подмножество $П_2$ пифагоровых треугольников, т. е. подмножество таких прямоугольных треугольников с натуральными длинами сторон, у которых длины гипотенуз — простые числа.

П. Ферма и Л. Эйлер доказали ([4], с. 81, [34], с. 46—47), что простое число q тогда и только тогда представимо в виде суммы квадратов двух различных натуральных чисел m и n, когда оно имеет вид:

$$q = 4k + 1 \ (k \in N). \tag{23.13}$$

Простые же числа вида $4k + 3$ не представимы суммой квадратов двух натуральных чисел.

Назовем пифагоров треугольник

$$(a, b, q) \quad (q \in P \wedge q = 4k + 1) \tag{23.14}$$

пифагоровым треугольником второго рода.

Подмножество Π_2 пифагоровых треугольников второго рода назовем второй базовой последовательностью пифагоровых треугольников или пифагоровых троек:

$$\begin{gathered}(4,\ 3,\ 5);\ (12,\ 5,\ 13);\ (8,\ 15,\ 17);\ (20,\ 21,\ 29);\\ (12,\ 35,\ 37);\ (40,\ 9,\ 41);\ (48,\ 45,\ 53);\ (60,\ 11,\ 61);\\ (48,\ 55,\ 73);\ (80,\ 39,\ 89);\ (72,\ 65,\ 97);\ (20,\ 99,\ 101);\\ (60,\ 91,\ 109);\ (112,\ 15,\ 113),\ldots\end{gathered} \tag{23.15}$$

Если число

$$q = \frac{1}{2}(p^2 + 1), \tag{23.16}$$

где $p \in P$, также является простым ($q \in P$), то пифагоров треугольник (23.4) является треугольником и первого и второго рода. Последовательность

$$\Pi_0 = \Pi_1 \cap \Pi_2 \tag{23.17}$$

таких пифагоровых треугольников назовем общей базовой последовательностью пифагоровых треугольников. Каждый прямоугольный треугольник такой последовательности имеет не только простой катет, но и простую гипотенузу:

$$\begin{gathered}(4,\ 3,\ 5);\ (12,\ 5,\ 13);\ (60,\ 11,\ 61);\ (180,\ 19,\ 181);\\ (420,\ 29,\ 421);\ (135\,720,\ 521,\ 135\,721);\ (161\,880,\ 569,\ 161\,881),\ldots\end{gathered} \tag{23.18}$$

Неизвестно, конечно или бесконечно множество Π_0 этих пифагоровых треугольников.

Из теоремы (22.1) следует, что четный катет каждого пифагорова треугольника семейства Π_0, начиная с третьего, кратен 60.

В силу формулы (22.20) площадь каждого пифагорова треугольника второго рода, начиная со второго, кратна 30 (так как при $q > 5$ НОД $(60, q) = 1$).

§ 24. Диофантовы семейства пифагоровых треугольников

В своей третьей книге «Арифметика» Диофант (III в н. э.) нашел впервые четыре пифагоровых треугольника с одинаковой гипотенузой 65 ([16], с. 112).

Рассмотрев первые два пифагоровых треугольника общей базовой последовательности Π_0

$$(4,\ 3,\ 5);\quad (12,\ 5,\ 13), \tag{24.1}$$

он умножил каждую сторону одного из них на гипотенузу другого, и наоборот. Получив два пифагоровых треугольника с гипотенузой 65

$$(52,\ 39,\ 65);\quad (60,\ 25,\ 65), \tag{24.2}$$

он разложил двумя способами число 65 на сумму двух квадратов:

$$65 = 8^2 + 1^2 = 7^2 + 4^2. \tag{24.3}$$

Положив

$$m_1 = 8,\ n_1 = 1 \text{ и } m_2 = 7,\ n_2 = 4, \tag{24.4}$$

по формуле (22.6) получим еще две пифагоровых тройки с гипотенузой 65:

$$(16,\ 63,\ 65);\quad (56,\ 33,\ 65). \tag{24.5}$$

Назовем семейство пифагоровых треугольников с одинаковой по длине гипотенузой диофантовым семейством.

Метод Диофанта легко распространяется на случай, когда одинаковая гипотенуза c_n пифагоровых треугольников является произведением n попарно различных простых чисел вида $4k + 1$ ($k \in N$):

$$c_n = p_1 p_2 \ldots\ p_n. \tag{24.6}$$

Теорема 24.1. Диофантово семейство H_n пифагоровых треугольников с одинаковой гипотенузой c_n состоит из

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1}\, C_n^k \tag{24.7}$$

пифагоровых треугольников.

Доказательство. Разобьем семейство H_n на подсемейства вида:

$$\begin{gathered}\{(a_1,\ b_1,\ c_n)\},\ \{p_i\,(a_2,\ b_2,\ p_1 \ldots p_{i-1}\, p_{i+1} \ldots p_n)\},\ \ldots \\ \{p_1 \ldots p_{i-1}\, p_{i+1} \ldots p_n\,(a_n,\ b_n,\ p_i)\}.\end{gathered} \tag{24.8}$$

В силу тождеств

$$\begin{aligned}(m_1^2 + n_1^2)\,(m_2^2 + n_2^2) &= (m_1 m_2 + n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 - m_2 n_1)^2, \\ (m_1^2 + n_1^2)\,(m_2^2 + n_2^2) &= (m_1 m_2 - n_1 n_2)^2 + (m_1 n_2 + m_2 n_1)^2\end{aligned} \tag{24.9}$$

произведение $p_i\, p_j$ ($i, j = 1, 2, \ldots, n$; $i \neq j$) определяет два пифагоровых треугольника. Следовательно, подмножества (24.8) состоят соответственно из

$$2^{n-1}\, C_n^n,\ 2^{n-2}\, C_n^{n-1},\ \ldots,\ 2\, C_n^2,\ 2^0 C_n^1 \tag{24.10}$$

пифагоровых треугольников с одинаковой гипотенузой c_n (24.6). Приходим к формуле (24.7). Ч. т. д.

В частности, семейство h_1 образовано одним пифагоровым треугольником с гипотенузой

$$p = 4k + 1\ (k \in N). \tag{24.11}$$

Семейство h_2 состоит из четырех пифагоровых треугольников с гипотенузой $c_2 = p_1 p_2$ ($p_1, p_2 \in P$, $p_1 \neq p_2$), где p_i ($i = 1, 2$) — простые числа вида $4k + 1$, семейство h_3 состоит из 13, h_4 — из 40, h_5 — из 121, h_6 — из 364, h_7 — из 1093, h_8 — из 3280 пифагоровых треугольников.

Для нахождения диофантовых семейств h_n ($n \leqslant 4$) можно воспользоваться калькулятором, а при $n > 4$ следует использовать специальную компьютерную программу (см. Приложение № 2, 11).

Рассмотрим, например, диофантово семейство пифагоровых треугольников (пифагоровых троек) с одинаковой гипотенузой

$$c_3 = 5 \cdot 13 \cdot 17 = 1105 \qquad (24.12)$$

$$\begin{gathered}
(884,\ 663,\ 1105);\ (1020,\ 425,\ 1105);\ (520,\ 975,\ 1105);\\
(700,\ 855,\ 1105);\ (1100,\ 105,\ 1105);\ (468,\ 1001,\ 1105);\\
(1092,\ 169,\ 1105);\ (272,\ 1071,\ 1105);\ (952,\ 561,\ 1105);\\
(264,\ 1073,\ 1105);\ (744,\ 817,\ 1105);\ (576,\ 943,\ 1105);\\
(1104,\ 47,\ 1105).
\end{gathered} \qquad (24.13)$$

Легко показать, что диофантово семейство пифагоровых треугольников с общей гипотенузой p^n, где p — простое число вида $4k + 1$ ($k \in N$), состоит из n треугольников. Например, диофантовы семейства пифагоровых треугольников с гипотенузами

$$5^2,\ 5^3,\ 5^4,\ 5^5 \qquad (24.14)$$

состоят соответственно из следующих пифагоровых троек:

$$\begin{gathered}
(24,\ 7,\ 25);\ (20,\ 15,\ 25);\\
(44,\ 117,\ 125);\ (100,\ 75,\ 125);\ (120,\ 35,\ 125);\\
(336,\ 527,\ 625);\ (600,\ 175,\ 625);\ (220,\ 585,\ 625);\\
(500,\ 375,\ 625);\ (1100,\ 2925,\ 3125);\ (3116,\ 237,\ 3125);\\
(2500,\ 1875,\ 3125);\ (1680,\ 2635,\ 3125);\ (3000,\ 875,\ 3125).
\end{gathered} \qquad (24.15)$$

Для отыскания всех пифагоровых треугольников с заданной гипотенузой $c \in N$ надо разложить натуральное число c на простые множители.

Если в разложении отсутствуют простые множители вида $4k + 1$, то пифагоровых треугольников с такой гипотенузой нет. Например, нет ни одного пифагорова треугольника с гипотенузой

$$c = 504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7. \qquad (27.16)$$

Если же в разложении числа c на простые множители содержится хотя бы одно простое число вида $4k + 1$ ($k \in N$), то представляем число c в виде:

$$c = \lambda\, p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}, \qquad (24.17)$$

где λ — произведение всех простых множителей вида $4k + 3$ и степени двойки, а p_i ($i = 1, 2, ..., n$) — попарно различные простые множители вида $4k + 1$. Используя тождества (24.9), находят все пифагоровы треугольники с гипотенузой

$$c^* = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}. \tag{24.18}$$

Умножив каждую из таких пифагоровых троек на множитель λ, получаем искомое диофантово семейство с гипотенузой c.

Например, диофантово семейство с гипотенузой

$$c = 23\,400 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13 \tag{24.19}$$

состоит из следующих семи пифагоровых троек

$$\begin{gathered}(18\,720,\ 14\,040,\ 23\,400);\ (21\,600,\ 9000,\ 23\,400);\\ (5760,\ 22\,680,\ 23\,400);\ (2592,\ 23\,256,\ 23\,400);\\ (20\,160,\ 11\,880,\ 23\,400);\ (14\,688,\ 18\,216,\ 23\,400);\\ (22\,464,\ 6552,\ 23\,400).\end{gathered} \tag{24.20}$$

Здесь

$$\lambda = 2^3 \cdot 3^2 = 72, \quad c^* = 5^2 \cdot 13 = 325. \tag{24.21}$$

Для нахождения диофантова семейства с гипотенузой $c^* = 325$ сначала умножим на 5 четыре пифагоровых треуглльника (24.2), (24.5) с гипотенузой 65. Получим:

$$\begin{gathered}(260,\ 195,\ 325);\ (300,\ 125,\ 325);\\ (80,\ 315,\ 325);\ (280,\ 165,\ 325).\end{gathered} \tag{24.22}$$

Далее, из разложения 325 на два множителя

$$325 = (4^2 + 3^2) \cdot (3^2 + 2^2) \tag{24.23}$$

находим (по формулам (24.9)) два разложения числа 325 на сумму двух квадратов:

$$325 = 18^2 + 1^2 = 17^2 + 6^2. \tag{24.24}$$

Получаем еще два пифагоровых треугольника с гипотенузой 325:

$$(36,\ 323,\ 325);\ (204,\ 253,\ 325). \tag{24.25}$$

Наконец, седьмой пифагоров треугольник с гипотенузой 325 получим умножением на 13 пифагоровой тройки (24, 7, 25) с гипотенузой 25:

$$(312,\ 91,\ 325). \tag{24.26}$$

Умножая на 72 каждую из пифагоровых троек (24.22), (24.25), (24.26), находим диофантово семейство (24.20).

§ 25. Семейства пифагоровых треугольников с заданным катетом, периметром или площадью

Используя формулу Диофанта (22.6) и метод математической индукции, легко убеждаемся в том, что каждое из семейств пифагоровых треугольников с катетом 2^{s+1} и $p^s(s \in N)$, где p — произвольное нечетное простое число, состоит из s треугольников, определяемых соответственно формулами:

$$(2^{s+1},\ 2^{2s-k} - 2^k,\ 2^{2s-k} + 2^k), \tag{25.1}$$

$$\left(\frac{1}{2}(p^{2s-k} - p^k),\ p^s,\ \frac{1}{2}(p^{2s-k} + p^k)\right), \tag{25.2}$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, s - 1$.

Например, семейства пифагоровых треугольников с катетами

$$32 = 2^5,\ 81 = 3^4\ (s = 4) \tag{25.3}$$

образованы следующими пифагоровыми тройками:

$$(32,\ 255,\ 257);\ (32,\ 126,\ 130);\ (32,\ 60,\ 68);\ (32,\ 24,\ 40), \tag{25.4}$$

$$\begin{gathered}(3280,\ 81,\ 3281);\ (1092,\ 81,\ 1095);\\ (360,\ 81,\ 369);\ (108,\ 81,\ 135).\end{gathered} \tag{25.5}$$

Для нахождения семейства пифагоровых треугольников с катетом

$$a = p_1 p_2 \dots p_s, \tag{25.6}$$

где p_i $(i = 1, 2, \dots, s)$ — попарно различные нечетные простые числа, и

$$p_1 < p_2 < \dots < p_s, \tag{25.7}$$

последовательно используют формулы (22.6) и (23.4) и находят

$$h_s = \sum_{k=1}^{s} 2^{k-1} C_s^k \tag{25.8}$$

пифагоровых треугольников с катетом a.

Проведем рассуждения для $s = 2$, т. е. $a = p_1 p_2$.

По формуле (23.4) составляют пифагоровы тройки с катетами p_1 и p_2 $(p_2 > p_1)$:

$$\left(\frac{1}{2}(p_1^2 - 1),\ p_1,\ \frac{1}{2}(p_1^2 + 1)\right), \tag{25.9}$$

$$\left(\frac{1}{2}(p_2^2 - 1),\ p_2,\ \frac{1}{2}(p_2^2 + 1)\right). \tag{25.10}$$

Умножая почленно (25.9) на p_2, а (25.10) на p_1, находим два пифагоровых треугольника с катетом $a = p_1 p_2$:

$$\left(\frac{1}{2}p_2(p_1^2-1),\ p_1p_2,\ \frac{1}{2}p_2(p_1^2+1)\right), \tag{25.11}$$

$$\left(\frac{1}{2}p_1(p_2^2-1),\ p_1p_2,\ \frac{1}{2}p_1(p_2^2+1)\right). \tag{25.12}$$

Учитывая, что $p_2 > p_1$, положим

$$\begin{cases} m+n=p_2, \\ m-n=p_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} m+n=p_1p_2, \\ m-n=1. \end{cases} \tag{25.13}$$

По формуле Диофанта (22.6) находим еще два пифагоровых треугольника с катетом p_1p_2:

$$\left(\frac{1}{2}(p_2^2-p_1^2),\ p_1p_2,\ \frac{1}{2}(p_2^2+p_1^2)\right), \tag{25.14}$$

$$\left(\frac{1}{2}(p_1^2p_2^2-1),\ p_1p_2,\ \frac{1}{2}(p_1^2p_2^2+1)\right). \tag{25.15}$$

Продолжая процесс, можно найти $h_3 = 13$ пифагоровых треугольников с катетом $p_1p_2p_3$, $h_4 = 40$ — с катетом $p_1p_2p_3p_4$ и т. д.

Используя методы нахождения семейств пифагоровых треугольников с катетами 2^{s+1}, p_i^s, $p_1p_2 \ldots p_s$, где p_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — произвольные попарно различные нечетные простые числа, можно найти семейство пифагоровых треугольников с катетом

$$b = 2^{\alpha_0} p_1^{\alpha_1} \ldots p_s^{\alpha_s} \ (\alpha_0 \in N_0,\ \ \alpha_i \in N), \tag{25.16}$$

являющимся произвольным натуральным числом, большим двух.

Пусть, например,

$$b = 3^4 \cdot 5^2 = 2025. \tag{25.17}$$

1) По формулам (25.2) находим семейства пифагоровых треугольников с катетами 3^4 и 5^2 (см. (25.5) и (24.15)):

$$\begin{gathered}(3280,\ 81,\ 3281);\ (1092,\ 81,\ 1095);\\ (360,\ 81,\ 369);\ (108,\ 81,\ 135).\end{gathered} \tag{25.18}$$

$$(312,\ 25,\ 313);\ (60,\ 25,\ 65). \tag{25.19}$$

2) Умножая почленно каждую пифагорову тройку (25.18) на 25, а тройки (25.19) — на 81, получим первые шесть пифагоровых троек с катетом (25.17):

$$\begin{gathered}(82\,000,\ 2025,\ 82\,025);\ (27\,300,\ 2025,\ 27\,375);\\ (9000,\ 2025,\ 9225);\ (2700,\ 2025,\ 3375);\\ (25\,272,\ 2025,\ 25\,353);\ (4860,\ 2025,\ 5265).\end{gathered} \tag{25.20}$$

3) По формулам (25.14), (25.15) находим две пифагоровых тройки с катетом 15:

$$(8,\ 15,\ 17);\ (112,\ 15,\ 113). \tag{25.21}$$

4) Умножая их почленно на $135 = 3^3 \cdot 5$, находим еще две искомые пифагоровы тройки:

$$(1080,\ 2025,\ 2295);\ (15\,120,\ 2025,\ 15\,255). \tag{25.22}$$

Рассмотрим теперь задачу определения семейства пифагоровых треугольников с заданным периметром

$$2r = \lambda 2mn + \lambda(m^2 - n^2) + \lambda(m^2 + n^2) = 2\lambda m(m + n). \tag{25.23}$$

Следовательно,

$$r = \lambda m(m + n). \tag{25.24}$$

Разлагаем r в произведение трех множителей и выбираем больший из них за $m + n$ или λ так, чтобы разность между $m + n$ и оставшимся множителем m была меньше чем m. Если такого выбора множителей осуществить не удается, задача не имеет решения. Заметим, что периметр любого пифагорова треугольника — четное число.

Рассмотрим два примера:

№ 1. $2r = 462 \to r = 231$.

Имеем:

$$231 = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 1 \cdot 21 \cdot 11 = 1 \cdot 33 \cdot 7 = 1 \cdot 3 \cdot 77. \tag{25.25}$$

1) $m + n = 11$, $m = 7$, $\lambda = 3 \to n = 4$. Получаем пифагорову тройку:

$$3 \cdot (56,\ 33,\ 65) = (168,\ 99,\ 195); \tag{25.26}$$

2) $m + n = 21$, $m = 11$, $\lambda = 1 \to n = 10$. Получаем вторую пифагорову тройку:

$$(220,\ 21,\ 221); \tag{25.27}$$

3) $\lambda = 77$, $m + n = 3$, $m = 1 \to n = 2 > 1 = m$; $\lambda = 3$, $m + n = 77$, $\mathrm{m} = 1 \to n = 76$;

4) $\lambda = 33$, $m + n = 7$, $m = 1 \to n = 6 > 1 = m$; $\lambda = 7$, $m + n = 33$, $m = 1 \to n = 32$.

Эти последние четыре выбора множителей приводят к неравенствам $m < n$, поэтому отбрасываются. Следовательно, задача имеет два решения — (25.26), (25.27).

№ 2. $2r = 66 \to r = 33$.

Имеем:

$$33 = 1 \cdot 3 \cdot 11. \tag{25.28}$$

1) $m + n = 11$, $\lambda = 3$, $m = 1$;
2) $m + n = 3$, $\lambda = 11$, $m = 1$;
3) $m + n = 11$, $\lambda = 1$, $m = 3$.

Во всех трех случаях оказывается $m < n$. Следовательно, задача не имеет решений.

В заключение этого параграфа рассмотрим задачу нахождения семейства пифагоровых треугольников с заданной площадью

$$S = \lambda^2 mn(m + n)(m - n). \tag{25.29}$$

Разлагая S на множители, выбираем для λ, m, n такие значения, чтобы выполнялось равенство (25.29) и неравенство $m > n$. Если таких значений найти не удается, то пифагоровых треугольников с площадью S не существует.

Рассмотрим два примера:

№ 1. $S = 270$.

Имеем:

$270 = 3^2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$.

Положив $\lambda = 3$, $m = 3$, $n = 2$, получим:

$$m + n = 5, \quad m - n = 1, \tag{25.30}$$

т. е. формула (25.29) выполняется. Единственная пифагорова тройка с площадью 270 запишется в виде:

$$(36,\ 15,\ 39). \tag{25.31}$$

№ 2. $S = 90$.

Имеем:

$$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \neq \lambda^2 mn(m + n)(m - n), \tag{25.32}$$

т. е. ни при каких значениях m, $n < m$ и $\lambda = 1$ или $\lambda = 3$ правая часть формулы (25.32) не равна 90. Задача не имеет решений.

§ 26. Алтарь Махаведи и его аналоги

В начале этой главы говорилось об удивительных свойствах равнобочной трапеции с основаниями 24 и 30 и высотой 36, форму которой имеет один из самых почитаемых алтарей в храмах Индии — алтарь Махаведи [41].

Опустим перпендикуляры CP и BL из вершин верхнего основания на нижнее. Проведем срединный перпендикуляр EF, отрезки $CM \perp ED$, $FH \perp BD$, $FN = 2PQ$, $FK = PQ - PD$, $AT = 2PD$ (рис. 13).

Оказывается, что трапеция $ABCD$ порождает 10 пифагоровых треугольников:

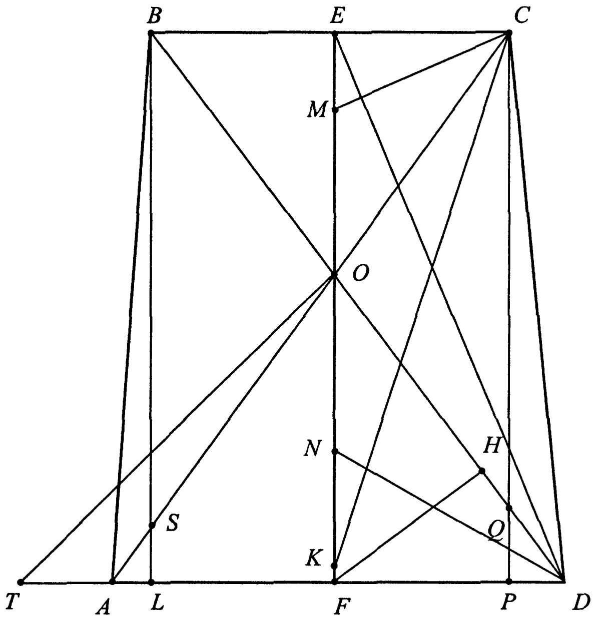


Рис. 13

$$\begin{array}{lll}
\Delta DPQ = (3,\ 4,\ 5); & \Delta FHD = (12,\ 9,\ 15) = 3\cdot(4,\ 3,\ 5); & \\
\Delta CEM = (12,\ 5,\ 13); & \Delta OFD = (20,\ 15,\ 25) = 5\cdot(4,\ 3,\ 5); & \\
\Delta NFD = (8,\ 15,\ 17); & \Delta BEO = (12,\ 16,\ 20) = 4\cdot(3,\ 4,\ 5); & (26.1)\\
\Delta OFT = (20,\ 21,\ 29); & \Delta EFD = (36,\ 15,\ 39) = 3\cdot(12,\ 5,\ 13); & \\
\Delta CEK = (12,\ 35,\ 37); & \Delta BLD = (36,\ 27,\ 45) = 9\cdot(4,\ 3,\ 5). &
\end{array}$$

Первые пять из этих треугольников (левый столбец) — это первые пять базовых пифагоровых треугольников второго рода. Четыре пифагоровых тройки правого столбца пропорциональны первой базовой тройке (3, 4, 5) или (4, 3, 5), а одна пифагорова тройка пропорциональна второй базовой тройке.

Возникает вопрос, как в Древнем мире смогли узнать размеры такой удивительной трапеции?

Имеются ли еще равнобочные трапеции, порождающие много пифагоровых треугольников?

Рассмотрим равнобочную трапецию $ABCD$ (рис. 14), обладающую следующими свойствами:

1) ΔQPD — простейший или квазипростейший пифагоров:

$$(2mn,\ m^2 - n^2,\ m^2 + n^2),\ \text{НОД}\ (m,\ n) = 1,\ m > n; \qquad (26.2)$$

2) $BC = 8PD$; (26.3)

3) ΔEFD — пифагоров.

Рассматривая различные подобные треугольники, находим:

$$BC = 8(m^2 - n^2),\ AD = 10(m^2 - n^2),\ OE = 8mn,$$
$$OF = 10mn,\ FE = 18mn; \qquad (26.4)$$

$$EF^2 + FD^2 = 324m^2n^2 + 25(m^2 - n^2)^2. \qquad (26.5)$$

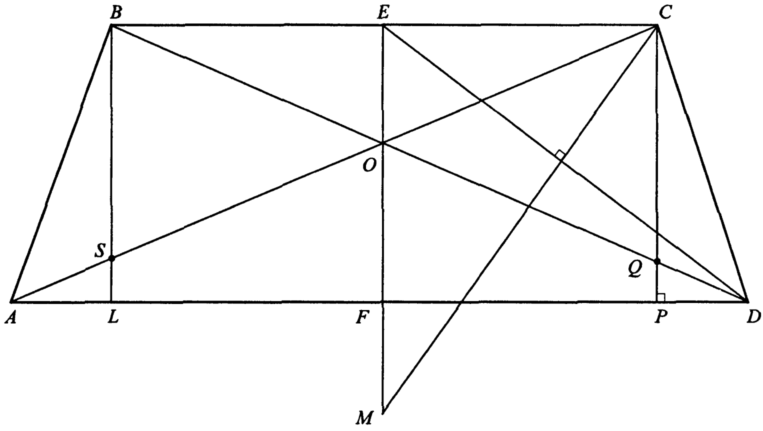


Рис. 14

Так как треугольник EFD — пифагоров, то

$$\sqrt{324m^2n^2 + 25(m^2 - n^2)^2} \in N. \qquad (26.6)$$

Используя компьютер, убеждаемся, что среди первой тысячи натуральных чисел m и n:

$$m \leqslant 1000,\ n \leqslant 1000\ (\text{НОД}\ (m,\ n) = 1), \qquad (26.7)$$

только четыре пары $[m,\ n]$ удовлетворяют условию (26.6):

$$[2,\ 1];\ [5,\ 1];\ [33,\ 7];\ [52,\ 25]. \qquad (26.8)$$

Первая пара [2, 1] дает трапецию алтаря Махаведи, остальные три — аналоги этого знаменитого алтаря. Из формул (26.4) следует, что аналоги алтаря Махаведи — это равнобочные трапеции со следующими основаниями и высотой:

1) $BC = 192$; $AD = 240$; $FE = 90$; (26.9)

2) $BC = 8320$; $AD = 10\,400$; $FE = 4158$; (26.10)

3) $BC = 16\,632$; $AD = 20\,790$; $FE = 23\,400$. (26.11)

Рассмотрим подробней первый случай. По формулам (26.4)

$$OE = 40,\ OF = 50. \tag{26.12}$$

Эта трапеция изображена на рис. 14. Она порождает шесть пифагоровых треугольников:

$$\begin{aligned} \Delta DPQ &= (24,\ 10,\ 26) = 2\cdot(12,\ 5,\ 13);\\ \Delta MEC &= (128,\ 96,\ 160) = 32\cdot(4,\ 3,\ 5);\\ \Delta DFE &= (120,\ 90,\ 150) = 30\cdot(4,\ 3,\ 5);\\ \Delta BEO &= (96,\ 40,\ 108) = 8\cdot(12,\ 5,\ 13);\\ \Delta DFO &= (120,\ 50,\ 130) = 10\cdot(12,\ 5,\ 13);\\ \Delta DLB &= (216,\ 90,\ 234) = 18\cdot(12,\ 5,\ 13). \end{aligned} \tag{26.13}$$

Два из них (ΔMEC и ΔDFE) подобны первому базовому треугольнику, остальные четыре подобны второму базовому треугольнику.

Заметим, что если ограничиться парами (m, 1), то условию (26.6) среди первого миллиона натуральных чисел m удовлетворяют только пары [2, 1] и [5, 1]. Среди четырех пар (26.8) только эти две пары порождают пифагоров треугольник MEC с условием перпендикулярности прямых MC и ED.

Трапеция, порождаемая парой [33, 7], определяет следующие пифагоровы треугольники:

$$\begin{aligned} \Delta DPQ &= (1040,\ 462,\ 1138) = 2\cdot(231,\ 520,\ 569);\\ \Delta DFE &= (5200,\ 4158,\ 6658) = 2\cdot(2600,\ 2079,\ 3329);\\ \Delta BEO &= (4160,\ 1848,\ 4552) = 8\cdot(520,\ 231,\ 569);\\ \Delta DFO &= (5200,\ 2310,\ 5690) = 10\cdot(520,\ 231,\ 569);\\ \Delta DLB &= (9360,\ 4158,\ 10\,242) = 18\cdot(520,\ 231,\ 569). \end{aligned} \tag{26.14}$$

Трапеция, порождаемая парой [52, 25], определяет следующие пифагоровы треугольники:

$$\begin{aligned} \Delta QPD &= (2600,\ 2079,\ 3329);\\ \Delta DFE &= (10\,395,\ 23\,400,\ 25\,605) = 45\cdot(231,\ 520,\ 569);\\ \Delta BEO &= (8316,\ 10\,400,\ 13\,316) = 4\cdot(2079,\ 2600,\ 3329);\\ \Delta DFO &= (10\,395,\ 13\,000,\ 16\,645) = 5\cdot(2079,\ 2600,\ 3329);\\ \Delta DLB &= (18\,711,\ 23\,400,\ 29\,961) = 9\cdot(2079,\ 2600,\ 3329). \end{aligned} \tag{26.15}$$

Таким образом, трапеция алтаря Махаведи является, по-видимому, единственной равнобочной трапецией, порождающей десять пифагоровых треугольников, из которых пять являются пятью первыми базовыми пифагоровыми треугольниками второго рода.

§ 27. Целочисленные равнобедренные треугольники

Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC (рис. 15) с натуральными длинами основания, высоты и боковой стороны:

$$a = BC,\ h = AD,\ b = AB = AC,$$

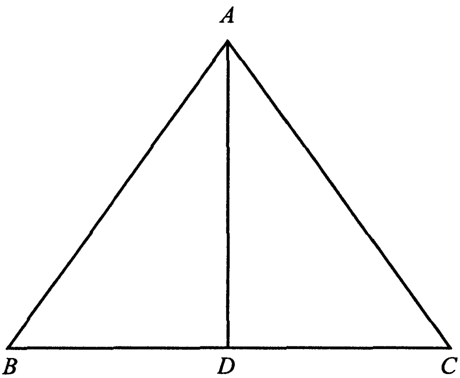


Рис. 15

где a, h, b — натуральные числа. Такой равнобедренный треугольник назовем целочисленным и обозначим упорядоченной тройкой натуральных чисел:

$$[a,\ h,\ b],\quad a,\ h,\ b \in N. \qquad (27.1)$$

Очевидно, что при любом $\lambda \in N$ треугольник

$$[\lambda a,\ \lambda h,\ \lambda b], \qquad (27.2)$$

подобный треугольнику (27.1), будет также целочисленным.

Так как

$$b^2 - h^2 = \frac{a^2}{4} \in N, \qquad (27.3)$$

то основание a любого целочисленного равнобедренного треугольника является четным числом.

Из диофантовых формул (22.6) для простейших и квазипростейших пифагоровых треугольников следует, что произвольный несократимый целочисленный равнобедренный треугольник $(a,\ h,\ b)$ определяется одной из двух троек натуральных чисел:

$$[4mn,\ \ m^2 - n^2,\ \ m^2 + n^2], \qquad (27.4)$$

$$[2(m^2 - n^2),\ \ 2mn,\ \ m^2 + n^2]. \qquad (27.5)$$

Пусть $p > 2$ — произвольное простое число. Из формулы (27.4) следует, что существует единственный целочисленный равнобедренный треугольник с высотой $h = p$:

$$[p^2 - 1,\ \ p,\ \ \frac{1}{2}(p^2 + 1)]. \qquad (27.6)$$

Бесконечную последовательность целочисленных равнобедренных треугольников с простыми высотами:

$$[8,\ 3,\ 5];\ [24,\ 5,\ 13];\ [48,\ 7,\ 20];\ [120,\ 11,\ 61];\ [168,\ 13,\ 85];\ \ldots \qquad (27.7)$$

назовем первой базовой последовательностью.

Основание $a = 2p$ ($p \in P \wedge p > 2$) определяет единственный целочисленный равнобедренный треугольник

$$[2p,\ \frac{1}{2}(p^2 - 1),\ \frac{1}{2}(p^2 + 1)]. \qquad (27.8)$$

Бесконечную последовательность таких целочисленных равнобедренных треугольников:

$$[6, 4, 5];\ [10, 12, 13];\ [14, 24, 25];\ [22, 60, 61];\ \ldots \qquad (27.9)$$

назовем второй базовой последовательностью.

Так как катеты BD и AD прямоугольного треугольника ABD (рис. 15) можно менять местами, то любое простое число

$$p = 4k + 1\ (k \in N) \qquad (27.10)$$

определяет два целочисленных равнобедренных треугольника с боковой стороной p:

$$[4mn,\ m^2 - n^2,\ p], \qquad (27.11)$$

$$[2(m^2 - n^2,\ 2mn,\ p], \qquad (27.12)$$

где

$$p = m^2 + n^2, \quad \text{НОД}\ (m, n) = 1. \qquad (27.13)$$

Возникает две бесконечные последовательности целочисленных равнобедренных треугольников:

$$[8, 3, 5];\ [24, 5, 13];\ [16, 15, 17];\ [40, 21, 29];\ [24, 35, 37];\ \ldots, \qquad (27.14)$$

$$[6, 4, 5];\ [10, 12, 13];\ [30, 8, 17];\ [42, 20, 29];\ [70, 12, 37];\ \ldots, \qquad (27.15)$$

которые назовем соответственно третьей и четвертой базовыми последовательностями.

Если среди простых множителей боковой стороны b нет ни одного вида $4k + 1$, то не существует целочисленных равнобедренных треугольников с такой боковой стороной.

Если в разложении

$$b = \lambda p_1 p_2 \ldots p_s \qquad (27.16)$$

каждый множитель $p_i \in P$ ($i = 1, 2, \ldots, s$) — вида $4k + 1$ ($k \in N$), а λ — произведение степени двойки и степеней простых чисел вида $4k + 3$ ($k \in N_0$), то множество всех целочисленных равнобедренных треугольников с боковой стороной (27.16) состоит из

$$2 \cdot \sum_{k=1}^{s} 2^{k-1}\, C_s^k \qquad (27.17)$$

треугольников.

Определим, например, все целочисленные равнобедренные треугольники с боковой стороной

$$b = 4095 = 3^2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 13. \qquad (27.18)$$

Здесь

$$\lambda = 63, \ p_1 = 5, \ p_2 = 13. \qquad (27.19)$$

Решая в § 24 задачу Диофанта, мы получили четыре пифагоровых треугольника с гипотенузой 65:

$$[52, 39, 65]; [60, 25, 65]; [16, 63, 65]; [56, 33, 65] \qquad (27.20)$$

(см. формулы (24.2), (24.5)).

Используя формулы (27.11), (27.12), (27.20), находим восемь целочисленных равнобедренных треугольников с боковой стороной 65:

$$\begin{gathered}[104, 39, 65]; [120, 25, 65]; [32, 63, 65]; [112, 33, 65]; \\ [78, 52, 65]; [50, 60, 65]; [126, 16, 65]; [66, 56, 65].\end{gathered} \qquad (27.21)$$

Умножая целочисленные тройки (27.21) почленно на 63, найдем восемь целочисленных равнобедренных треугольников с боковой стороной 4095:

$$\begin{array}{ll} [6552, 2457, 4095]; & [7560, 1575, 4095]; \\ [2016, 3969, 4095]; & [7056, 2079, 4095]; \\ [4914, 3276, 4095]; & [3150, 3780, 4095]; \\ [7938, 1008, 4095]; & [4158, 3528, 4095]. \end{array} \qquad (27.22)$$

Если высота h целочисленного равнобедренного треугольника представлена в виде:

$$h = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_1}, \qquad (27.23)$$

где p_i ($i = 1, 2, \dots, s$) — нечетные простые числа, то надо всевозможными способами разложить число h на два неравных множителя, больший взять за $m + n$, меньший — за $m - n$, найти числа m и n и воспользоваться формулами Диофанта (22.6) и (22.13) (в случае разложения h на три множителя). Пусть, например,

$$h = 45 = 3^2 \cdot 5. \qquad (27.24)$$

Имеем:

$$1)\ h = 1 \cdot 45;\ 2)\ h = 3 \cdot 15;\ 3)\ h = 9 \cdot 5;\ 4)\ h = 3 \cdot (3 \cdot 5). \qquad (27.25)$$

Находим:

1) $\begin{cases} m + n = 45 \\ m - n = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m = 23 \\ n = 22 \end{matrix};$

$$2)\ \begin{cases} m+n=15 \\ m-n=3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m=9 \\ n=6 \end{matrix};$$

$$3)\ \begin{cases} m+n=9 \\ m-n=5 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m=7 \\ n=2 \end{matrix}; \tag{27.26}$$

$$4)\ \lambda=3,\ \begin{cases} m+n=5 \\ m-n=3 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} m=4 \\ n=1 \end{matrix}.$$

Получаем четыре целочисленных равнобедренных треугольника с высотой $h = 45$:

$$[2024,\ 45,\ 1013];\ \ [216,\ 45,\ 117];$$
$$[56,\ 45,\ 53];\ \ 3\cdot[8,\ 15,\ 17] = [24,\ 45,\ 51]. \tag{27.27}$$

Глава IV. Числовые множества в некоторых разделах математики

§ 28. Цепные дроби

Пусть a_0 — целое неотрицательное число, а a_i ($i = 1, 2, 3, ...$) — натуральные числа:

$$a_0 \in N_0 = N \cup \{0\}, \quad a_i \in N. \tag{28.1}$$

Цепной или *непрерывной* дробью называется выражение вида

$$[a_0, a_1, a_2, ...] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + ...}}} \tag{28.2}$$

Всякое рациональное число представляется конечной цепной дробью путем выделения целой части и последовательного представления остатков с числителем, отличным от единицы, обращенными дробями (до получения дроби с числителем единица).

Рассмотрим, например, рациональное число $\frac{17}{5}$. Имеем:

$$\frac{17}{5} = 3\frac{2}{5} = 3 + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}} = [3; 2, 2]. \tag{28.3}$$

Иррациональные числа выражаются бесконечными цепными дробями. Например,

$$\pi = [3; 7, 15, 1, 292, 1, 1, 1, 2, 1, 3, 1, 14, 2, 1, 1, 22 ...]. \tag{28.4}$$

В этом случае возникает бесконечная последовательность рациональных чисел

$$\frac{p_0}{1} = a_0, \ \frac{p_1}{q_1} = a_0 + \frac{1}{1 + a_1}, \ \frac{p_2}{q_2} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}} \ \ ..., \tag{28.5}$$

неограниченно приближающихся к данному иррациональному числу. Такие рациональные числа называются подходящими дробями нулевого, первого, второго и т. д. порядков. Обозначим:

$$\delta_0 = a_0, \ \delta_k = \frac{p_k}{q_k} \ (k \in N). \tag{28.6}$$

Для цепной дроби (28.4) имеем:

$$\delta_0 = 3;\ \delta_1 = \frac{22}{7};\ \delta_2 = \frac{333}{106};\ \delta_3 = \frac{355}{113};\ \delta_4 = \frac{103\,993}{33\,102};\ \ldots \quad (28.7)$$

В десятичной записи первые пять подходящих дробей числа π имеют вид:

$$\begin{gathered}\delta_0 = 3;\quad \delta_1 = 3{,}1428571\ldots;\quad \delta_2 = 3{,}1415094\ldots;\\ \delta_3 = 3{,}1415929\ldots;\quad \delta_4 = 3{,}14159265301\ldots\end{gathered} \quad (28.8)$$

Сравнивая значение δ_4 со значением

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419 71\ldots, \quad (28.9)$$

видим, что подходящая дробь δ_4 дает приближение к π с точностью до девяти знаков после запятой.

Квадратичные иррациональности выражаются бесконечными периодическими цепными дробями. Например,

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ldots}};\qquad \sqrt{3} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \ldots}}}}, \quad (28.10)$$

т. е.

$$\sqrt{2} = [1;\ 2,\ 2,\ 2,\ldots];\quad \sqrt{3} = [1;\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 2,\ldots]. \quad (28.11)$$

Действительно,

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} \cdots = \\ &= 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1) + \ldots}}\end{aligned} \quad (28.12)$$

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= 1 + (\sqrt{3} - 1) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3} + 1} = 1 + \frac{2}{2 + (\sqrt{3} - 1)} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{3} + 1}} = \\ &= 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + (\sqrt{3} - 1) + \ldots}}\end{aligned} \quad (28.13)$$

Бесконечная цепная дробь есть предел ее подходящих дробей при неограниченном увеличении их порядка:

$$[a_0;\ a_1,\ a_2,\ \ldots a_n \ldots] = \lim_{k \to \infty} \delta_k = \lim_{k \to \infty} \frac{p_k}{q_k}. \quad (28.14)$$

Подходящие дроби удобно вычислять по следующей схеме ([30], с. 56):

		a_1	a_2	a_3	.....	a_n
1	a_0	$a_0a_1 + 1 = p_1$	$p_1a_2 + a_0 = p_2$	$p_2a_3 + p_1 = p_3$		$p_{n-1}a_n + p_{n-2} = p_n$
0	1	$1 \cdot a_1 + 0 = q_1$	$q_1a_2 + 1 = q_2$	$q_2a_3 + q_1 = q_3$		$q_{n-1}a_n + q_{n-2} = q_n$

Рис. 16

Рассмотрим, например, календарный год, приблизительно равный 365 суткам, 5 часам, 48 минутам и 46 секундам.

Это число приблизительно равно

$$365{,}2422 \text{ суткам.} \tag{28.15}$$

Запишем дробную часть числа цепной дробью:

$$\frac{2422}{10\,000} = [0;\ 4,\ 7,\ 1,\ 3,\ 4,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2]. \tag{28.16}$$

Вычисляя подходящие дроби по схеме, приведенной в рис. 16, находим подходящие дроби:

$$\delta_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{1}{4};\ \delta_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{7}{29};\ \delta_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{8}{33};\ \delta_4 = \frac{p_4}{q_4} = \frac{31}{128}. \tag{28.17}$$

Подходящая дробь $\delta_1 = \frac{1}{4}$ показывает, что, считая год равным 365 суткам, мы делаем ошибку на четверть суток.

Для устранения этого отставания Гай Юлий Цезарь (100—44 до н. э.) ввел в 45 году до н. э. новый «юлианский» календарь, в котором каждый год, кратный четырем, считался високосным, когда в феврале не 28, а 29 дней.

Для оценки новой ошибки рассмотрим разность

$$\delta_3 - \delta_1 = \frac{8}{33} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{132}. \tag{28.18}$$

Следовательно, через каждые 396 лет ошибочно прибавляются три дня. Для устранения этой ошибки Римский Папа Григорий XIII — в миру Уго Бонкомпаньи (1502—1585) — ввел 4 сентября 1582 года новый «григорианский» календарь, изменив на 10 суток отсчет времени (объявил следующим днем не пятое, а пятнадцатое сентября).

Он постановил считать високосными только те годы, кратные 100, которые кратны 400. Например, 2000 год был високосным, а 1700, 1800, 1900-е годы — невисокосными.

Сейчас григорианский календарь опережает юлианский на

$$10 + \frac{2003 - 1582}{132} \approx 13{,}1894 \qquad (28.19)$$

суток (в обыденной жизни мы считаем на 13 суток), а с 2044 года, когда расхождение достигнет 13,5 суток, будут, по-видимому, считать разницу в 14 суток.

Так как

$$\delta_4 - \delta_3 = \frac{31}{128} - \frac{8}{33} = -\frac{1}{4224}, \qquad (28.20)$$

то в григорианском календаре лишь через 4224 года ошибочно прибавятся одни сутки.

Цепные дроби были известны еще в Древнем мире. Например, Архимед знал, что число

$$\frac{1351}{780} \qquad (28.21)$$

— это 12-я подходящая дробь числа $\sqrt{3}$.

Однако в явном виде они появились в Европе лишь в конце XVI — начале XVII века (Бомбелли, Пачоли, Катальди, Валлис, Гюйгенс и др.). Термин «непрерывные дроби» ввел Джон Валлис (Уоллес) (1616—1703).

§ 29. Линейные диофантовы уравнения

Уравнение вида

$$ax + by + c = 0, \qquad (29.1)$$

где a, b, $c \in Z$, НОД $(a, b) = 1$, называется *линейным диофантовым уравнением*. Его решение — множество всех целочисленных пар (x, y), удовлетворяющих этому уравнению.

Условимся считать, что

$$a > 0,\ abc \neq 0 \qquad (29.2)$$

(в случае $a < 0$ умножим обе части уравнения (29.1) на -1).

Используя цепные дроби (см. [30], с. 59—60), находим

$$\begin{cases} x = bt + cq_{k-1}(-1)^k, \\ y = -\,at \mp cp_{k-1}(-1)^k \ (t \in Z), \end{cases} \qquad (29.3)$$

где p_{k-1}, q_{k-1} — числитель и знаменатель предпоследней подходящей дроби числа $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{p_k}{q_k}$, знак «—» берется при $a > 0$, $b > 0$, а знак «+», если $a > 0$, $b < 0$.

Рассмотрим, например, диофантовы уравнения:

$$43x + 30y - 5 = 0, \tag{29.4}$$

$$23x - 17y - 3 = 0. \tag{29.5}$$

Имеем:

$$\frac{43}{30} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{13}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\frac{13}{4}}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}} = [1; 2, 3, 4], \tag{29.6}$$

$$\frac{23}{17} = 1 + \frac{1}{\frac{17}{6}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{6}{5}} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = [1; 2, 1, 5]. \tag{29.7}$$

Таблица на рис. 16 для этих цепных дробей принимает соответственно вид:

		2	3	4
1	1	3	10	43
0	1	2	7	30

		2	1	5
1	1	3	4	23
0	1	2	3	17

(29.8)

Для уравнения (29.4) находим:

$$k = 3;\ p_2 = 10,\ q_2 = 7.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = 30t + 35, \\ y = -43t - 50 \end{cases} \quad (t \in Z). \tag{22.9}$$

Для уравнения (29.5)

$$k = 3;\ p_2 = 4,\ q_2 = 3.$$

Значит,

$$\begin{cases} x = -17t + 9, \\ y = -23t + 12 \end{cases} \quad (t \in Z). \tag{22.10}$$

Если не пользоваться цепными дробями, то диофантово уравнение (29.1) можно решить последовательным вынесением за скобки меньшего модуля коэффициентов при неизвестных и введением новых переменных. Процесс заканчивается, когда модуль одного из коэффициентов при новых переменных окажется равным единице.

Применим этот способ к решению тех же уравнений (29.4) и (29.5).

1) $43x + 30y - 5 = 30\cdot\underbrace{(x + y)}_{u} + 13x - 5 = 13\cdot\underbrace{(2u + x)}_{v} + 4u - 5 =$

$$= 4\,\underbrace{(3v + u)}_{t} + v - 5 = 4t + v - 5 = 0.$$

Находим:

$$v = -4t + 5;\quad u = t - 3v = 13t - 15;$$

$$x = v - 2u = -30t + 35;\quad y = u - x = 43t - 50,\ t \in Z. \qquad (29.11)$$

2) $$23x - 17y - 3 = 17\cdot\underbrace{(x - y)}_{u} + 6x - 3 =$$

$$= 6\cdot\underbrace{(2u + x)}_{v} + 5u - 3 = 5\cdot\underbrace{(v + u)}_{t} + v - 3 = 0.$$

Следовательно,

$$v = -5t + 3;\quad u = t - v = 6t - 3;$$

$$x = v - 2u = -17t + 9;\quad y = x - u = -23t + 12,\ t \in Z. \qquad (29.12)$$

Найденные решения совпадают соответственно с решениями (29.9) и (29.10), учитывая, что t — произвольное целое число и его можно заменить на $-t$.

§ 30. Квадратичные диофантовы уравнения

Рассмотрим общее уравнение второй степени с двумя неизвестными x и y:

$$F(x, y) \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0, \qquad (30.1)$$

где $a_{ij} \overset{\text{def}}{=} a_{ji}(i, j = 0, 1, 2)$. Знак «def» означает «по определению».

На координатной плоскости уравнение (30.1) определяет кривую второго порядка (действительный или мнимый эллипс, гиперболу, параболу), или пару действительных или мнимых прямых, или сдвоенную прямую.

Три числа (см. [30], с. 209—210):

$$I_1 = a_{11} + a_{22},\quad I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};\quad I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{20} \\ a_{01} & a_{02} & a_{00} \end{vmatrix} \qquad (30.2)$$

играют важную роль при исследовании кривой второго порядка (нераспавшейся и распавшейся).

Они называются *инвариантами кривой*, так как не изменяются при любом преобразовании системы декартовых координат на плоскости:

$$\begin{cases} x = \tilde{x}\cos\alpha - \tilde{y}\sin\alpha + c_1, \\ y = \tilde{x}\sin\alpha + \tilde{y}\cos\alpha + c_2. \end{cases} \qquad (30.3)$$

Уравнение (30.1) называется *квадратичным диофантовым уравнением*, если все его коэффициенты a_{ij} $(i, j = 0, 1, 2)$ — целые числа.

Решением квадратичного диофантова уравнения называется множество всех целочисленных упорядоченных пар (x_0, y_0), обращающих уравнение в тождество: $F(x_0, y_0) = 0$. С геометрической точки зрения — это множество всех целочисленных точек кривой второго порядка (нераспавшейся или распавшейся), определяемой этим уравнением.

Рассмотрим сначала случай

$$I_3 = 0, \qquad (30.4)$$

т. е. случай, когда кривая второго порядка (30.1) распадается на пару прямых (действительных различных, мнимых различных или совпадающих). Для нахождения линейных множителей, на произведение которых распадается функция $F(x, y)$ при $I_3 = 0$, надо разрешить уравнение (30.1) относительно переменной y или x, рассматривая это уравнение как квадратное. В случае $J_3 = 0$, $J_2 > 0$, т. е. мнимых линейных множителей (всегда комплексно сопряженных) их произведение дает сумму двух квадратов, равную нулю, т. е. приводит к системе двух линейных уравнений с двумя неизвестными, имеющей единственное решение (целочисленное или нецелочисленное).

В случае нецелочисленного решения этого уравнения диофантово уравнение (30.1) не имеет решений, а в случае целочисленного решения — имеет единственное решение.

Пусть $I_3 = 0$, $I_2 < 0$. В этом случае $F(x, y)$ распадается на два действительных линейных множителя, и решение уравнения (30.1) является объединением решений двух линейных диофантовых уравнений.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 + 2xy - 3y^2 + 4y - 1 = 0. \qquad (30.5)$$

Имеем:

$$\mathrm{I}_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad I_2 = -4 < 0.$$

Разрешаем уравнение (30.5) (как квадратное с неизвестным x) относительно x:

$$x = -y \pm \sqrt{y^2 + (3y^2 - 4y + 1)} = -y \pm (2y - 1).$$

Следовательно, уравнение (30.5) приводится к виду

$$(x - y + 1)\,(x + 3y - 1) = 0. \tag{30.6}$$

Его решением является множество целочисленных пар

$$(t,\ t + 1) \vee (1 - 3\tau,\ \tau)\ (t,\ \tau \in Z). \tag{30.7}$$

Если $I_3 = 0$, $I_2 > 0$, то $F(x, y)$ представимо в виде суммы двух квадратов, которую можно заменить другой суммой двух квадратов, дающей равносильную систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Например, решим уравнение

$$x^2 - 2xy + 5y^2 + 2x - 14y + 10 = 0. \tag{30.8}$$

Имеем:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -7 \\ 1 & -7 & 10 \end{vmatrix} = 0, \quad I_2 = 4 > 0.$$

Решаем уравнение (30.8) относительно x:

$$\begin{aligned} x &= y - 1 \pm \sqrt{(y^2 - 2y + 1) - (5y^2 - 14y + 10)} = \\ &= y - 1 \pm i\,(2y - 3). \end{aligned} \tag{30.9}$$

Система

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0, \\ 2y - 3 = 0 \end{cases} \tag{30.10}$$

имеет единственное нецелочисленное решение $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{3}{2}$. Значит, уравнение (30.8) не имеет решений в целых числах.

Если $I_3 = 0$, $I_2 = 0$, то уравнение (30.1) определяет пару параллельных прямых или сдвоенную прямую. Решением диофантова уравнения (30.1) в этом случае является объединение решений двух линейных уравнений или решение одного линейного уравнения.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8y + 3 = 0. \tag{30.11}$$

Имеем:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad I_2 = 0.$$

Разрешаем уравнение (30.11) относительно x:

$$x = 2y - 2 \pm \sqrt{4y^2 - 8y + 4 - (4y^2 - 8y + 3)} = 2y - 2 \pm 1. \tag{30.12}$$

Следовательно, уравнение (30.11) приводится к виду:

$$(x - 2y + 1)\,(x - 2y + 3) = 0. \tag{30.13}$$

Решением этого уравнения является множество целочисленных пар

$$(2t - 1,\ t) \vee (2\tau - 3,\ \tau)\ (t,\ \tau \in Z). \tag{30.14}$$

Рассмотрим теперь общий случай

$$I_3 \neq 0. \tag{30.15}$$

Из аналитической геомерии известно (см. [30], с. 209—210), что уравнение (30.1) при $I_3 \neq 0$ определяет невырожденную кривую второго порядка: мнимый эллипс, действительный эллипс, гиперболу, параболу.

Решением диофантова уравнения (30.1) является множество всех целочисленных точек на этой кривой

1. $I_3 \neq 0,\ \ I_2 > 0,\ \ I_3 I_1 > 0$ (мнимый эллипс). (30.16)

Уравнение (30.1) в этом случае не имеет ни одного действительного решения, а значит, и целочисленного.

2. $I_3 \neq 0,\ \ I_2 > 0,\ \ I_3 I_1 < 0$ (действительный эллипс). (30.17)

Представим уравнение (30.1) в виде:

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 + (a_2x + b_2y + c_2)^2 = m, \tag{30.18}$$

где $m \in N$. Полагая

$$\begin{aligned} \pm\tilde{x} &= a_1x + b_1y + c_1, & \pm\tilde{y} &= a_2x + b_2y + c_2, \\ \pm\tilde{x} &= a_2x + b_2y + c_2, & \pm\tilde{y} &= a_1x + b_1y + c_1, \end{aligned} \tag{30.19}$$

находим множество M целочисленных решений $(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0)$ уравнения

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = m. \tag{30.20}$$

Затем находим все целочисленные решения шестнадцати систем двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = \pm\tilde{x}, \\ a_2x + b_2y + c_2 = \pm\tilde{y}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = \pm\tilde{y}, \\ a_2x + b_2y + c_2 = \pm\tilde{x}, \end{cases} \tag{30.21}$$

где $(\tilde{x}_0,\ \tilde{y}_0) \in M,\ (\tilde{y}_0,\ \tilde{x}_0) \in M$.

Рассмотрим, например, уравнение

$$5x^2 - 2xy + y^2 - 13x - 13y - 228 = 0. \tag{30.22}$$

Умножив обе части уравнения (30.22) на 2, приведем его к виду:

$$(3x - y)^2 + (x + y - 13)^2 = 625. \tag{30.23}$$

Так как

$$625 = 24^2 + 7^2 = 20^2 + 15^2, \tag{30.24}$$

то получаем:

$$\begin{array}{ll} 3x - y = \pm 20; & x + y - 13 = \pm 15; \\ 3x - y = \pm 15; & x + y - 13 = \pm 20; \\ 3x - y = \pm 24; & x + y - 13 = \pm 7; \\ 3x - y = \pm 7; & x + y - 13 = \pm 24. \end{array} \tag{30.25}$$

Составляя из уравнений (30.25) 16 систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными и выделяя из решений только целочисленные, находим шесть целочисленных решений уравнения (30.22):

$$(11,\ 9);\ (-1,\ 21);\ (11,\ 26);\ (12,\ 16);\ (2,\ 26);\ (12,\ 21). \tag{30.26}$$

3. Если $I_3 \neq 0$, $I_2 < 0$, т. е. когда кривая (30.1) — гипербола, представляют левую часть уравнения (30.1) в виде:

$$(a_1x + b_1y + c_1)\,(a_2x + b_2y + c_2) \pm n = 0 \ (n \in N). \tag{30.27}$$

Разлагая натуральное число n на два множителя различными способами:

$$n = n_1n_2, \tag{30.28}$$

составляют для каждого разложения (30.27) системы линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = \pm n_1 \\ a_2x + b_2y + c_2 = \pm n_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = \pm n_2 \\ a_2x + b_2y + c_2 = \pm n_1 \end{cases}, \tag{30.29}$$

находят все целочисленные решения, которые являются решениями уравнения (30.1), причем знаки при n_i выбираются так, чтобы произведение линейных множителей было равно $\mp n$.

Для представления уравнения (30.1) в виде (30.27) (в случае $I_3 \neq 0$, $I_2 < 0$) удобно воспользоваться вспомогательной кривой второго порядка

$$\phi(x,\ y) \equiv F(x,\ y) - a_{00} + m = 0 \tag{30.30}$$

и, потребовав ее вырождение, найти m.

Затем записывают разложение $\phi(x,\ y)$ на линейные множители и исходное уравнение (30.1) заменяют уравнением (30.27).

Пусть, например, надо найти все целочисленные решения уравнения

$$2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 9 = 0. \tag{30.31}$$

Имеем:

$$I_3 = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -9 \end{vmatrix} = 43\tfrac{3}{4} \neq 0,\ I_2 = -6\tfrac{1}{4} < 0.$$

Приравнивая нулю инвариант $\tilde{I}_3$ кривой (30.30), находим m:

$$\tilde{I}_3 = \begin{vmatrix} 2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -2 & 2 \\ \frac{3}{2} & 2 & m \end{vmatrix} = 0 \to -\frac{25}{4}m - \frac{25}{2} = 0 \to m = -2. \qquad (30.32)$$

Разлагая квадратичную форму

$$\phi(x, y) \equiv 2x^2 - 3xy - 2y^2 + 3x + 4y - 2 \qquad (30.33)$$

на линейные множители (путем разрешения квадратного уравнения $\phi(x, y) = 0$ относительно x), приводим уравнение (30.31) к виду:

$$(2x + y - 1)(x - 2y + 2) = 7. \qquad (30.34)$$

Следовательно,

$$\begin{cases} 2x + y - 1 = \pm 1, \\ x - 2y + 2 = \pm 7, \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - 1 = \pm 7, \\ x - 2y + 2 = \pm 1. \end{cases} \qquad (30.35)$$

Решая 4 системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и оставляя только целочисленные решения, находим решения уравнения (30.31):

$$(3, 2);\ (-3, 0). \qquad (30.36)$$

4. Если $I_3 \neq 0$, $I_2 = 0$, т. е. когда кривая (30.1) — парабола, представляем уравнение (30.1) в виде:

$$(a_1x + b_1y + c_1)^2 = a_2x + b_2y + c_2 \quad (a_i, b_i, c_i \in Z) \qquad (31.37)$$

и находим целочисленные решения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = t, \\ a_2x + b_2y + c_2 = t^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = -\tau, \\ a_2x + b_2y + c_2 = \tau^2, \end{cases} \qquad (30.38)$$

где t, τ — произвольные целые числа.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 - 4xy + 4y^2 + x - 3y + 1 = 0. \qquad (30.39)$$

Запишем это уравнение в виде:

$$(x - 2y + 1)^2 = x - y. \qquad (30.40)$$

Положим

$$t = x - 2y + 1,\ \tau = 2y - x - 1\ (t, \tau \in Z). \qquad (30.41)$$

Решая системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = t, \\ x - y = t^2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + 1 = -\tau, \\ x - y = \tau^2, \end{cases} \tag{30.42}$$

находим бесчисленное множество целочисленных решений уравнения (30.39):

$$\begin{cases} x = 2t^2 - t + 1, \\ y = t^2 - t + 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2\,\tau^2 + \tau + 1, \\ y = \ \ \tau^2 + \tau + 1. \end{cases} \tag{30.43}$$

5. Если в уравнении (30.1) отсутствует квадрат одного из неизвестных, а коэффициент при произведении неизвестных по абсолютной величине равен единице, то целочисленные решения находят следующим образом:

а) Выражают неизвестное, содержащееся только в первой степени, через другое неизвестное в виде отношения квадратного трехчлена к линейному двучлену.

б) Осуществляя деление числителя на знаменатель, представляют уравнение в виде:

$$y = a_1x + b_1 + \frac{m_1}{x + c_1} \ \vee \ x = a_2y + b_2 + \frac{m_2}{y + c_2}\,. \tag{30.44}$$

в) Решают уравнения

$$\left[\begin{array}{l} x + c_1 = d_1 \\ x + c_1 = -d_1 \end{array} \right. \quad \vee \quad \left[\begin{array}{l} y + c_2 = d_2 \\ y + c_2 = -d_2, \end{array} \right. \tag{30.45}$$

где d_i ($i = 1, 2$) — любой делитель числа m_i.

Рассмотрим, например, уравнение

$$x^2 - xy + 3x - 2y - 5 = 0. \tag{30.46}$$

Находим:

$$y = \frac{x^2 + 3x - 5}{x + 2} = x + 1 - \frac{7}{x + 2}\,. \tag{30.47}$$

Из уравнения (30.47) и уравнений

$$|x + 2| = 1 \ \vee \ |x + 2| = 7 \tag{30.48}$$

находим четыре целочисленных решения уравнения (30.46):

$$(-1,\ -7);\ (-3,\ 5);\ (5,\ 5);\ (-9,\ -7). \tag{30.49}$$

6. Если в уравнении (30.1) отсутствуют первые степени координат x и y, то разлагают однородную квадратичную часть в произведение линейных однородных множителей и приводят уравнение (30.1) к виду:

$$(a_1x + b_1y)\ (a_2x + b_2y) = \pm m,\ (m \in N). \tag{30.50}$$

Затем находят целочисленные решения систем линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_1, \\ a_2x + b_2y = d_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y = -d_1, \\ a_2x + b_2y = -d_2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = d_2, \\ a_2x + b_2y = d_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1x + b_1y = -d_2, \\ a_2x + b_2y = -d_1; \end{cases} \tag{30.51}$$

где d_1, d_2 — любые делители числа m (в случае, если перед m стоит знак минус, делители d_1, d_2 берутся в уравнениях (30.51) с различными знаками).

Разложение на множители квадратного трехчлена

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 \tag{30.52}$$

легко найти, решая одно из вспомогательных квадратных уравнений

$$a_{11}\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{x}{y}\right) + a_{22} = 0 \ \vee$$
$$\vee \ a_{22}\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2a_{12}\left(\frac{y}{x}\right) + a_{11} = 0. \tag{30.53}$$

Рассмотрим, например, уравнение

$$3x^2 + 5xy - 2y^2 - 5 = 0. \tag{30.54}$$

а) Полагая $t = \frac{x}{y}$, решаем вспомогательное квадратное уравнение

$$3t^2 + 5t - 2 = 0; \tag{30.55}$$

$$t_1 = \frac{1}{3}, \ t_2 = -2. \tag{30.56}$$

Следовательно, уравнение (30.54) приводим к виду:

$$(3x - y)(x + 2y) = 5.$$

б) Находим два целочисленных решения систем

$$\begin{cases} 3x - y = 5, \\ x + 2y = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = -5, \\ x + 2y = -1, \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = 5, \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x - y = -1, \\ x + 2y = -5 \end{cases} \tag{30.57}$$

$$x = 1, y = 2; \quad x = -1, y = -2. \tag{30.58}$$

В случае иррациональных корней уравнений (30.53) задача не имеет решений.

Предлагаем читателю самостоятельно решить в целых числах следующие квадратичные уравнения с двумя неизвестными:

1. $2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 2y - 5 = 0$ (Отв. $(-2, -5)$; $(6, 7)$; $(6, 13)$; $(-2, 1)$);

2. $2x^2 - xy - y^2 - 13x - 5y + 6 = 0$ (Отв. $(t, 1-2t) \vee (\tau, \tau - 6))$ $(t, \tau \in Z)$;

3. $2x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0$ (Отв. $(-1, -1)$);

4. $x^2 + 4xy + 5y^2 + 6x + 10y + 10 = 0$ (Отв. $(-5, 1)$);

5. $7x^2 - xy - 4x + y - 1 = 0$ (Отв. $(0, 1)$; $(2, 19)$; $(3, 25)$; $(-1, -5)$);

6. $25x^2 - 70xy + 49y^2 + 7x - 10y + 1 = 0$ (Отв. $(7t^2 + 10t + 7, 5t^2 + 7t + 5) \vee (7\tau^2 - 10\tau + 7, 5\tau^2 - 7\tau + 5)$ $(t, \tau \in Z)$);

7. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + 4y - 5 = 0$ (Отв. $(-5, -2)$; $(7, 6)$; $(13, 6)$; $(1, -2)$);

8. $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + 4y = 0$ (Отв. $(t + 2, t) \vee (2\tau, \tau)$, $(t, \tau \in Z)$);

9. $3x^2 - 5xy - 2y^2 + 3x + y - 7 = 0$ (Отв. $(2, 1)$).

Среди квадратичных уравнений с тремя и большим числом неизвестных наибольшую популярность имело диофантово уравнение вида

$$x^n + y^n = z^n \ (x, y, z \in N, n \in N). \tag{30.59}$$

В третьей главе мы подробно рассмотрели семейства пифагоровых треугольников (случай $n = 2$). При $n > 2$ уравнение (30.59) не имеет решений в натуральных числах. Эту гипотезу — «самую глубокую в истории математики задачу-головоломку» ([49], с. 14, 69—75) — сформулировал на полях «Арифметики» Диофанта великий французский математик Пьер Ферма (1601—1665). Более трех столетий многие выдающиеся математики и сотни тысяч дилетантов-любителей пытались доказать это утверждение. Только в 1993 году великая теорема Ферма была доказана Эндрю Уайлсом (см. [49]).

§ 31. Комбинаторика

Комбинаторика — это раздел математики, изучающий количество комбинаций, которые можно составить из заданного конечного множества

$$M_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \tag{31.1}$$

попарно различных элементов произвольной природы.

Основным правилом комбинаторики является принимаемое без доказательства правило умножения:

если объект A может быть выбран из множества M_n h способами и при каждом выборе объекта A другой объект B может быть выбран k способами, то объект $\{A, B\}$, состоящий из двух объектов A и B, может быть выбран

$$h \cdot k \tag{31.2}$$

способами.

Конечные подмножества элементов множества M_n называются *соединениями.*

Если в совокупности соединений подмножества образованы только попарно различными элементами множества M_n, то такие соединения называются *соединениями без повторений.*

Если же в совокупности соединений входят подмножества не только с попарно различными элементами множества M_n, но и с одинаковыми, то такие соединения называются *соединениями с повторениями.*

Различают три основных типа соединений: размещения, перестановки, сочетания.

Размещением из n элементов по m элементов без повторений называется упорядоченное подмножество попарно различных m элементов множества M_n $(m \leqslant n)$.

Перестановкой из n элементов без повторений называется упорядоченное множество всех n элементов множества M_n, т. е. перестановка без повторений — это размещение без повторений из n по n элементов.

Сочетанием из n элементов по m элементов без повторений называется подмножество из m попарно различных элементов множества M_n без учета порядка их следования $(m \leqslant n)$.

Для размещения или сочетания с повторениями

$$(b_1,\ b_2,\ ..,\ b_m) \tag{31.3}$$

требуется лишь условие, что $b_i \in M_n$ $(i = \overline{1,\ m})$ и, следовательно, m может быть любым натуральным числом, не зависимым от числа n элементов множества M_n.

В перестановке с повторениями присутствуют все элементы множества M_n, причем указывается, сколько раз повторяется элемент $a_1, a_2 \ldots a_n$. Число элементов в такой перестановке может быть любым натуральным числом, большим или равным n.

Обозначим символами A_n^m, C_n^m, P_n число всех размещений, сочетаний без повторений из n элементов по m элементов и число всех перестановок без повторений из n элементов $(m \leqslant n)$.

Символами $\bar{A}_n^m$, $\bar{C}_n^m$, $P_{m_1,\ m_2,\ \ldots,\ m_n}$ обозначим число всех размещений, сочетаний, перестановок с повторениями (m, m_i — любые натуральные числа). Число m_i указывает, что элемент a_i повторяется в перестановке m_i раз, причем

$$m_1\, m_2 \ldots m_n \neq 0. \tag{31.4}$$

Произведение n первых натуральных чисел обозначается символом $n!$ и называется n-факториалом:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n. \tag{31.5}$$

Символы для обозначения числа всех соединений определенного типа берутся из начальных букв соответствующих французских слов: arrangement — размещение, combination — комбинация, сочетание, permutation — перестановка.

По определению,

$$0! = 1, \qquad C_n^0 = 1. \tag{31.6}$$

Справедливы следующие основные формулы комбинаторики:

$$A_n^m = n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}; \tag{31.7}$$

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}; \tag{31.8}$$

$$P_n = A_n^n = n!; \tag{31.9}$$

$$\bar{A}_n^m = n^m; \tag{31.10}$$

$$\bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}; \tag{31.11}$$

$$P_{m_1, m_2, \ldots, m_n} = \frac{(m_1 + m_2 + \ldots + m_n)!}{m_1! m_2! \ldots m_n!}. \tag{31.12}$$

Докажем методом математической индукции формулы (31.7) и (31.10).

1) Для $m = 1$ они справедливы, так как выбор по одному элементу из множества M_n

$$\{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_n\} \tag{31.13}$$

можно осуществить только n способами, а по формулам (31.7) и (31.10)

$$A_n^1 = n = (n-1+1); \quad \bar{A}_n^1 = n^1 = n. \tag{31.14}$$

2) Пусть эти формулы справедливы для произвольного фиксированного натурального числа k, т. е.

$$A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1); \quad \bar{A}_n^k = n^k. \tag{31.15}$$

По правилу умножения

$$A_n^{k+1} = A_n^k \cdot (n-k); \quad \bar{A}_n^{k+1} = \bar{A}_n^k \cdot n = n^{k+1}, \tag{31.16}$$

так как в случае подмножества с попарно различными элементами множества M_n после выбора k элементов из M_n в нем останется $n-k$ элементов, из которых по одному элементу можно выбрать $n-k$ способами. А в случае размещения с повторениями $(k+1)$-м элементом может быть любой из n элементов множества M_n. Учитывая что $n - k = n - (k + 1) + 1$, убеждаемся в справедливости формулы (31.7), а из (31.16) следует также справедливость формулы (31.10).

Так как $P_n = A_n^n$, то $P_n = n(n-1) \dots (n-n+1) = n!$, т. е. справедлива формула (31.9).

По правилу умножения

$$A_n^m = C_n^m \cdot m! \qquad (31.17)$$

Следовательно,

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n(n-1) \dots (n-m+1)}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!},$$

т. е. справедлива формула (31.8).

Формула (31.11) также легко доказывается методом математической индукции.

1) Для $m = 1$ она справедлива, так как $\overline{C}_n^1 = C^1{}_{n+1-1} = C_n^1 = n$, а выбор по одному элементу из множества M_n можно осуществить только n способами.

2) Пусть формула (31.11) верна для произвольного фиксированного $k \in N$, т. е.

$$\overline{C}_n^k = \frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}. \qquad (31.18)$$

Тогда, по правилу умножения,

$$\overline{C}_n^{k+1} = \overline{C}_n^k \cdot \frac{(n+k)}{k+1} = \frac{(n+k)!}{(k+1)!\ (n-1)!}, \qquad (31.19)$$

так как вставить один элемент, взятый из M_n, мы можем $n + k$ способами, добавив его к уже выбранным k элементам либо один из них, либо любой из M_n. А в знаменателе число $k + 1$ означает, что вставить этот дополнительный элемент, не изменяя сочетания, мы можем либо вначале, либо между первым и вторым и т. д., либо после последнего (т. е. $k + 1$ вариантов).

Учитывая, что $n + k = n + (k + 1) - 1$, убеждаемся, что формула (31.11) справедлива для $m = k + 1$, а значит, она справедлива и для любого натурального числа m.

Что касается формулы (31.12), то ее справедливость устанавливается следующими рассуждениями: если бы в перестановке все $m_1 + m_2 + \dots + m_n$ элементы были попарно различными, то таких перестановок было бы

$$(m_1 + m_2 + \dots + m_n)! \qquad (31.20)$$

Но, меняя между собой одинаковый элемент a_i любыми $m_i!$ способами, мы не изменяем самой перестановки.

Поэтому в знаменатель надо внести произведение факториалов:

$$m_1!\, m_2! \ldots m_n! \tag{31.21}$$

Из формулы (31.8) непосредственно вытекают следующие тождества:

$$C_n^m = C_n^{n-m} \text{ (правило симметрии);} \tag{31.22}$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1} \text{ (правило Паскаля).} \tag{31.23}$$

Действительно,

$$C_n^{n-m} = \frac{n!}{(n-m)!(n-(n-m))!} = \frac{n!}{(n-m)!\cdot m!} = C_n^m;$$

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!\,(n-m-1)!} = \frac{n!}{(n-m-1)!m!} \times$$
$$\times\left(\frac{1}{n-m} + \frac{1}{m+1}\right) = \frac{n!(n+1)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m!)} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Из тождеств (31.22), (31.23) непосредственно вытекает формула бинома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\, a^{n-k} b^k, \tag{31.24}$$

которую читатель без труда докажет методом математической индукции с использованием тождеств (31.22), (31.23).

Рассмотрим несколько задач, решение которых осуществляется с использованием формул (31.7) — (31.12).

№ 1

Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 7?

Решение. По формуле (31.10) (размещения с повторениями) находим:

$$\bar{A}_3^5 = 3^5 = 243. \tag{31.25}$$

№ 2

Сколько неподобных членов содержится в многочлене

$$(x+y+z)^{100}? \tag{31.26}$$

Решение. По формуле (31.11) (сочетания с повторениями) находим:

$$\bar{C}_3^{100} = C_{102}^{100} = C_{102}^{2} = \frac{102\cdot 101}{2} = 5151. \tag{31.27}$$

№ 3

Сколькими способами можно составить футбольную команду, если ее формируют из трех вратарей и 15 полевых игроков?

Решение. Так как полевых игроков в команде 10 и всего 1 вратарь, то по правилу умножения

$$3 \cdot C_{15}^{10} = 3 \cdot C_{15}^{5} = \frac{3 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9009. \qquad (31.28)$$

№ 4

Сколько слов, без учета их смысла, можно составить из букв слова «длинношеее»?

Решение. По формуле (31.12) (перестановки с повторениями) находим:

$$P_{1,3,1,1,2,1,1} = \frac{10!}{1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = \qquad (31.29)$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{6 \cdot 2} = 302\,400.$$

№ 5

Сколько четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 5?

Решение. Так как число не начинается с нуля, то из числа $\bar{A}_3^4$ надо вычесть число $\bar{A}_3^3$:

$$\bar{A}_3^4 - \bar{A}_3^3 = 3^4 - 3^3 = 54. \qquad (31.30)$$

№ 6

Сколько шестизначных телефонных номеров можно установить?

Решение. По формуле (31.10) (размещения с повторениями) находим:

$$\bar{A}_{10}^6 = 10^6 = 1\,000\,000. \qquad (31.31)$$

§ 32. Теория вероятностей

Теория вероятностей — это раздел математики, изучающий математические модели случайных явлений.

1. Характеристика события

Основным объектом теории вероятностей является множество Ω элементарных событий ω, которое может быть как конечным, так и бесконечным.

Событием называется подмножество множества элементарных событий, если это множество не более чем счетно.

Условимся обозначать элементарные события малыми латинскими буквами, а события — большими латинскими буквами.

Два события A и B называются *несовместимыми (совместимыми)*, если

$$A \cap B = \varnothing \quad (A \cap B \neq \varnothing). \tag{32.1}$$

Примером несовместимых событий является выпадение различного числа очков при бросании игральной кости. Обозначим через A_i ($i = 1, 2, ..., 6$) — событие, состоящее в выпадении i очков. Тогда, если $i \neq j$, то

$$A_i \cap A_j = \varnothing, \tag{32.2}$$

т. е. события A_i и A_j несовместимы.

Пусть A — событие, состоящее в выпадении четного числа очков при бросании игральной кости, а B — в выпадении числа очков, кратного трем. В этом примере события A и B совместимы, так как

$$A \cap B = A_6 \neq \varnothing . \tag{32.3}$$

Два события A и B называются *равновозможными*, если нет никаких оснований предполагать, что одно событие предпочтительнее другого.

В противном случае события A и B называются неравновозможными.

Примерами равновозможных событий являются: выпадение герба (событие A) или цифры (событие B) при бросании монеты, выпадение i-го числа очков при бросании игральной кости ($i = \overline{1, 6}$), вытаскивание из урны белого или красного шара, если в урне содержится одинаковое число красных и белых шаров.

Примером неравновозможных событий является вытаскивание из урны белого шара (событие A) и красного шара (событие B), если в урне было m белых шаров и $n \neq m$ — красных.

Два события A и B называются независимыми, если появление одного из них не влияет на появление другого. В противном случае события A и B называются зависимыми.

Например, выпадение герба или цифры при бросании монеты, выпадение одного, двух, ... шести очков при бросании игральной кости — это независимые события.

Рассмотрим пример двух зависимых событий: A — вытащить из колоды в 52 карты туза и B — тоже вытащить туза при условии, что первая вытащенная карта не возвращается назад в колоду. Действительно, если предположить, что в первой вытащенной карте был туз, тузов в колоде останется не четыре, а три, а карт не 52, а 51.

2. Способы определения вероятности события

Различают четыре основных способа определения вероятности появления события A: аксиоматический, классический, статистический и геометрический.

а) *Аксиоматический.*

Дадим аксиоматическое определение вероятности для дискретного множества элементарных событий.

Вероятностью называется функция P, определенная на множестве элементарных событий и удовлетворяющая следующим аксиомам:

Аксиома 1. Для любого элементарного события $\omega \in \Omega$.

$$0 \leqslant P(\omega) \leqslant 1. \tag{32.4}$$

Аксиома 2.

$$\sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) = 1. \tag{32.5}$$

Число $P(\omega)$ называется вероятностью элементарного события.

Вероятностью события $A \subset \Omega$ называется число

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega). \tag{32.6}$$

б) *Классический.*

Вероятностью события A называется дробь $\frac{m}{n}$ ($m \in N_0$, $n \in N$), знаменатель которой — число всех элементарных событий, а числитель — число элементарных событий, благоприятствующих событию A.

Вероятность события A обозначается символом $P(A)$ (от фр. probabilité — вероятность):

$$P(A) = \frac{m}{n} \cdot \tag{32.7}$$

Пусть, например, в урне имеется 9 шаров, из которых 5 белых и 4 красных. Событие A — вытащить белый шар, событие B — вытащить красный шар. Имеем:

$$P(A) = \frac{5}{9}\,;\; P(B) = \frac{4}{9} \cdot$$

Если пространство элементарных событий — бесконечное, то разбивают его на конечную совокупность подмножеств — событий.

Например, в случае бросания монеты выделяют два несовместимых события: A — выпадение герба, B — выпадение цифры:

$$A \cup B = \Omega\,,\; A \cap B = \varnothing.$$

Тогда $n = 2$, $m = 1$, следовательно,

$$P(A) = \frac{1}{2}\,,\; P(B) = \frac{1}{2} \cdot$$

А в случае бросания игральной кости разбивают пространство Ω на шесть несовместимых событий A_i ($i = 1, 2, ..., 6$):

$$\bigcup_{i=1}^{6} A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \varnothing \ (i \neq j). \tag{32.8}$$

Тогда $n = 6$, $m = 1$, следовательно,

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = P(A_4) = P(A_5) = P(A_6) = \frac{1}{6}. \tag{32.9}$$

в) *Статистический.*

Статистической частотой события A при n испытаниях называется дробь $\frac{m}{n}$, где m — число испытаний при которых событие A произошло.

Вероятностью события A называется предел его статистической частоты при неограниченном увеличении числа испытаний, т. е.

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}. \tag{32.10}$$

Французский естествоиспытатель Жорж Бюффон (1707—1788) подбросил монету 4040 раз. Герб выпал 2048 раз. Статистическая частота выпадения герба

$$\frac{m}{n} = \frac{2048}{4040} \approx 0{,}5069. \tag{32.11}$$

Английский математик Чарльз Пирсон (1857—1936) подбросил монету 24 000 раз. Герб выпал 12 012 раз.

Статистическая частота выпадения герба в этом случае

$$\frac{m}{n} = \frac{12\,012}{24\,000} = 0{,}5005. \tag{32.12}$$

Так как $P(A) = 0{,}5$, то приведенные примеры убедительно показывают, что с увеличением числа испытаний статистическая частота события A приближается к вероятности этого события.

в) *Геометрический.*

Пространство элементарных событий можно представить геометрически некоторой областью на плоскости, ограниченной замкнутой кривой (рис. 17) и имеющей площадь S_Ω.

Событие A изображается квадрируемой областью, лежащей внутри области Ω. Пусть S_A — площадь области A (рис. 17, 18).

Вероятностью события A называется отношение площадей S_A к S_Ω:

$$P(A) = \frac{S_A}{S_\Omega}. \tag{32.13}$$

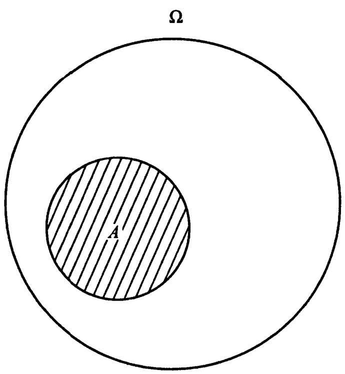


Рис. 17

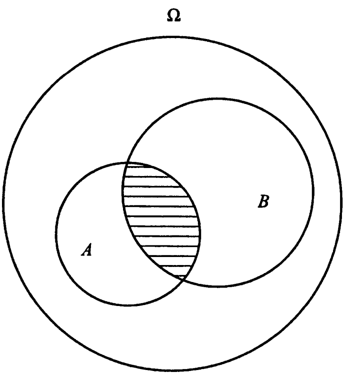


Рис. 18

Рассмотрим два события A и B (рис. 18). Имеем:

$$S_{A\cup B} = S_A + S_B - S_{A\cap B}. \qquad (32.14)$$

Следовательно,

$$P(A \cup B) = \frac{S_A + S_B - S_{A\cap B}}{S_\Omega} = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (32.15)$$

Формула (32.15) называется теоремой сложения. Она играет важную роль в теории вероятностей.

Замечание. Геометрическую вероятность можно вводить на линейных и пространственных областях, заменяя площади S_Ω, S_A соответственно длинами отрезков l_Ω, l_A и объемами тел V_Ω, V_A.

3. Основные формулы теории вероятностей

1) Формула сложения.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B). \qquad (32.16)$$

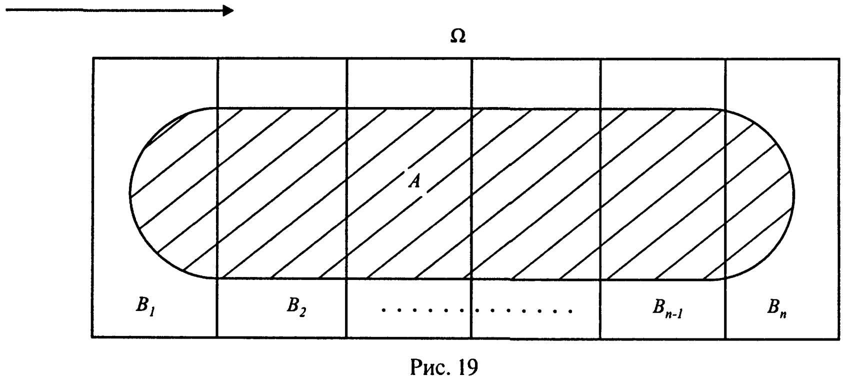


Рис. 19

2) Формула умножения.

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) = P(A/B), \tag{32.17}$$

где символами $P(A/B)$, $P(B/A)$ обозначена вероятность события A (соответственно B) при условии, что событие B (соответственно, событие A) уже наступило.

3) Формула полной вероятности.

Пусть

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i; \quad B_i \cap B_j = \varnothing, \tag{32.18}$$

если $i \neq j$.

Тогда по правилам умножения и сложения (двигаясь на рис. 19 слева направо) находим:

$$P(A) = P(B_1)P(A/B_1) + P(B_2)P(A/B_2) + \ldots + P(B_n)P(A/B_n). \tag{32.19}$$

Формула (32.19) называется формулой полной вероятности.

4) Формула Байеса (Бейеса).

$$P(B_i/A) = \frac{P(B_i)\ P(A/B_i)}{P(A)}\ . \tag{32.20}$$

Действительно, пользуясь формулой умножения для B_i и A, находим:

$$P(A) \cdot P(B_i/A) = P(B_i)P(A/B_i), \tag{32.21}$$

откуда непосредственно вытекает формула Байеса (32.20).

5) Формула Бернулли.

Пусть $P(A) = p$, $q = 1 - p$. Обозначим символом

$$P_{n,m}(A) \tag{32.22}$$

вероятность того, что при n испытаниях событие A произойдет ровно m раз. Справедлива следующая формула (установленная Иоганном Бернулли):

$$P_{n,m}(A) = C_n^m p^m q^{n-m}\ . \tag{32.23}$$

Она непосредственно вытекает из биномиального тождества:

$$1 = (p + q)^n = q^n + C_n^1 q^{n-1} p + \ldots + C_n^m q^{n-m} p^m + \ldots + p^n. \tag{32.24}$$

6) Формула Пуассона.

Если вероятность наступления события A очень мала, то при большом числе испытаний произведение

$$\lambda = np \quad (p = P(A)) \tag{32.25}$$

принимают за постоянную величину.

Формулой Пуассона называется формула

$$P_{n,\,m}(A) \approx \frac{\lambda^m}{m!}\, e^{-\lambda}, \tag{32.26}$$

дающая приблизительную оценку вероятности наступления события A m раз при большом числе n испытаний.

Эта формула получается из формулы Бернулли (32.23) предельным переходом с использованием второго замечательного предела

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{32.27}$$

Действительно,

$$\lim_{n\to\infty} C_n^m p^m q^{n-m} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!}\,\frac{\lambda^m}{n^m}\cdot$$

$$\cdot\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-m} = \frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{n}\right) =$$

$$= \frac{\lambda^m}{m!}\,e^{-\lambda}.$$

Следовательно, справедлива формула (32.26).

7) Локальная формула Лапласа.

Обозначим

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}, \tag{32.28}$$

где

$$x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}}, \quad p = P(A). \tag{32.29}$$

Тогда справедлива следующая формула

$$P_{n,\,m}(A) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x). \tag{32.30}$$

8) Интегральная формула Лапласа.

Обозначим

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz, \tag{32.31}$$

$$P_{n,[m_1,\,m_2]} \text{ —} \tag{32.32}$$

вероятность того, что при n независимых испытаниях (в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$) событие A наступит не менее m_1 раз и не более m_2 раз. Интегральной формулой Лапласа называется формула

$$P_{n,[m_1,\ m_2]}(A) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \tag{32.33}$$

где

$$x_i = \frac{m_i - np}{\sqrt{npq}} \quad (i = 1,\ 2). \tag{32.34}$$

Вывод локальной и интегральной формул Лапласа осуществляется в вузовских курсах теории вероятностей и мы его опускаем.

Значения функций $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ даются в учебниках и книгах по теории вероятностей.

4. Некоторые задачи теории вероятностей

Использование основных формул теории вероятностей, рассмотренных в предыдущем пункте, позволяет просто решать различные задачи этой теории.

Рассмотрим, например, следующие шестнадцать задач.

№ 1

В урне 4 белых и 7 красных шаров. Вынимают последовательно два шара без возвращения обратно в урну.

Какова вероятность того, что первый шар будет белым, а второй красным?

Решение. Обозначим через A (B) событие — «вынут белый (красный) шар». Имеем:

$$P(A) = \frac{4}{11}, \quad P(^B/_A) = \frac{7}{10}.$$

Тогда

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(^B/_A) = \frac{4}{11} \cdot \frac{7}{10} \approx \frac{28}{110} \approx 0{,}25. \tag{32.35}$$

№ 2

В урне два шара одинакового размера. Опускают в нее один белый шар того же размера. Какова вероятность того, что вынутый наружу после этого шар окажется белым при условии равновозможности предположения о первоначальном цвете шаров?

Решение. Пусть событие A — «вынут белый шар», событие B_1 — «в урне не было первоначально белых шаров», событие B_2 — «был один белый шар», событие B_3 — «было два белых шара».

По условию

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}. \tag{32.36}$$

Имеем:

$$P(A/_{B_1}) = \frac{1}{3}; \quad P(A/_{B_2}) = \frac{2}{3}; \quad P(A/_{B_3}) = 1. \qquad (32.37)$$

По формуле (32.19) (полной вероятности) находим:

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\cdot 1 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}. \qquad (32.38)$$

№ 3

Из колоды, содержащей 52 карты, вынимают последовательно три карты, не возвращая их в колоду.

Какова вероятность того, что среди вынутых трех карт окажется:

1) три туза;
2) ни одного туза;
3) по крайней мере один туз;
4) точно один туз?

Решение. Пусть A_i ($i = 1, 2, 3$) — событие «вынут туз», а $\bar{A}_i$ — «не вынут туз».

1) По формуле умножения находим:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)\cdot P(A_2/_{A_1})\cdot P(A_3/_{A_1 \cap A_2}) = \frac{4}{52}\cdot\frac{3}{51}\cdot\frac{2}{50} =$$

$$= \frac{1}{13\cdot 17\cdot 25} = \frac{1}{5525} \approx 0{,}0002; \qquad (32.39)$$

$$2)\ P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{46}{50} = \frac{4\cdot 47\cdot 23}{13\cdot 17\cdot 25} \approx \frac{4324}{5525} \approx \qquad (32.40)$$

$$\approx 0{,}7826;$$

$$3)\ 1 - P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = 1 - \frac{4324}{5525} = \frac{1201}{5525} \approx 0{,}2174; \qquad (32.41)$$

$$4)\ P(A_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap A_2 \cap \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap A_3) =$$

$$= \frac{4}{52}\cdot\frac{48}{51}\cdot\frac{47}{50} + \frac{48}{52}\cdot\frac{4}{51}\cdot\frac{47}{50} + \frac{48}{52}\cdot\frac{47}{51}\cdot\frac{4}{50} =$$

$$= \frac{3\cdot 48\cdot 47\cdot 4}{50\cdot 51\cdot 52} = \frac{24\cdot 47}{13\cdot 17\cdot 25} = \frac{1128}{5525} \approx 0{,}2042. \qquad (32.42)$$

№ 4

Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания им в мишень при одном выстреле.

Решение. Пусть A_i — попадание стрелком в мишень при i-м выстреле, а $\overline{A}_i$ — промах ($i = 1, 2, 3, 4$).

По условию,

$$0{,}9984 = 1 - P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = 1 - q^4. \qquad (32.43)$$

Следовательно,

$$q^4 = 0{,}0016, \quad q = 0{,}2, \quad p = 1 - 0{,}2 = 0{,}8. \qquad (32.44)$$

№ 5

Вероятность сбить вертолет из винтовки при одном выстреле равна 0,0004. Какова вероятность уничтожения вертолета противника при одновременном выстреле из 300 винтовок?

Решение. Пусть событие A — «сбить вертолет при одном выстреле», $\overline{A}$ — «не сбить вертолет при одном выстреле».

Имеем:

$$1 - (P(\overline{A}))^{300} = 1 - (0{,}9996)^{300} \approx 0{,}1124. \qquad (32.45)$$

№ 6

Урны с шарами находятся в четырех комнатах (в каждой — по одной). В эти комнаты ведут ходы лабиринта, причем известно, что в первую комнату ведут два хода, во вторую и третью — один ход с развилкой, в четвертую — один ход. Вошедший в лабиринт человек выбирает наудачу один из возможных путей (как при входе, так и на развилке), доходит до комнаты и вынимает один шар из урны.

1) Вычислить вероятность того, что вынутый шар окажется белым, если в первых трех комнатах вероятность вынуть из урны белый шар соответственно равна p_1, p_2, p_3, а в четвертой комнате в урне белых шаров нет, т. е. $p_4 = 0$.

2) Если вынутый шар окажется белым, то какова вероятность того, что он вынут из урны в третьей комнате?

Решение. Обозначим через A событие — «вынуть белый шар», и через B_i — «попасть в i-ю комнату» ($i = 1, 2, 3, 4$).

Имеем:

$$P(B_1) = \frac{1}{2}, \; P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}; \; P(B_4) = \frac{1}{4} \cdot \qquad (32.46)$$

1) По формуле (32.19) (полной вероятности) находим:

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot p_1 + \frac{1}{8} \cdot p_2 + \frac{1}{8} \cdot p_3 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{1}{8}(4p_1 + p_2 + p_3). \qquad (32.47)$$

2) По формуле (32.20) (Байеса) находим:

$$P(B_3/A) = \frac{P(B_3) \cdot P(A/B_3)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{8} \cdot p_3}{\frac{1}{8}(4p_1 + p_2 + p_3)} = \qquad (32.48)$$

$$= \frac{p_3}{4p_1 + p_2 + p_3} .$$

№ 7

Два автомата производят одинаковые детали, которые поступают на общий конвейер.

Производительность первого автомата вдвое больше производительности второго. Первый автомат производит 60% деталей отличного качества, второй — 84%. Наугад взятая с конвейера деталь оказалась отличного качества. Какова вероятность того, что эта деталь произведена первым автоматом?

Решение. Обозначим через A событие — «взята деталь отличного качества», а через B_i ($i = 1, 2$) — деталь произведена i-м автоматом.

По условию задачи:

$$P(B_1) = \frac{2}{3}; \quad P(B_2) = \frac{1}{3}; \quad P(A/B_1) = 0{,}6; \quad P(A/B_2) = 0{,}84. \qquad (32.49)$$

По формуле (32.19) (полной вероятности) находим:

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot 0{,}6 + \frac{1}{3} \cdot 0{,}84 = 0{,}68. \qquad (32.50)$$

Пользуясь формулой (32.20) (Байеса), получим:

$$P(B_1/A) = \frac{\frac{2}{3} \cdot 0{,}6}{0{,}68} = \frac{10}{17} \approx 0{,}5882. \qquad (32.51)$$

№ 8

Из урны, содержащей n шаров, из которых m белых, выкатился один шар неизвестного цвета.

Какова вероятность того, что вынутый после этого из урны шар окажется белым?

Решение. Обозначим через A событие — «вынут белый шар», через B_1 — «выкатился белый шар», через B_2 — «выкатился не белый шар».

По условию задачи:

$$P(B_1) = \frac{m}{n}, \quad P(B_2) = \frac{n-m}{n};$$
$$P(A/B_1) = \frac{m-1}{n-1}, \quad P(A/B_2) = \frac{m}{n-1} . \qquad (32.52)$$

По формуле (32.19) (полной вероятности) находим:

$$P(A)=\frac{m}{n}\cdot\frac{m-1}{n-1}+\frac{n-m}{n}\cdot\frac{m}{n-1}=\frac{m(n-1)}{n(n-1)}=\frac{m}{n}. \qquad (32.53)$$

Таким образом, на вероятность вынимания из урны белого шара не влияет предварительное исчезновение из урны одного шара.

№ 9

Какова вероятность того, что при 720 бросаниях игральной кости шестерка выпадет 100 раз?

Решение. Пусть событие A — «выпадение шестерки». Воспользуемся формулой (32.30) (локальной формулой Лапласа). Имеем:

$$P(A)=p=\frac{1}{6},\quad q=\frac{5}{6},\quad n=720,\quad m=100,$$

$$x=\frac{100-720\cdot\frac{1}{6}}{\sqrt{720\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}}=-\frac{20}{10}=-2;\quad \varphi(|x|)=\varphi(2)\approx$$

$$\approx 0{,}0540. \qquad (32.54)$$

Следовательно,

$$P_{720,\,100}(A)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\,\varphi(x)\approx\frac{1}{10}\cdot 0{,}0540=0{,}0054. \qquad (32.55)$$

№ 10

Какова вероятность того, что при 200-кратном бросании монеты герб выпадет не менее 95 и не более 105 раз?

Решение. Воспользуемся интегральной формулой Лапласа (32.33). Находим:

$$x_1=\frac{95-200\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{200\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}=-\frac{5}{\sqrt{50}};\quad x_2=\frac{105-200\cdot\frac{1}{2}}{\sqrt{200\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}}=\frac{5}{\sqrt{50}}. \qquad (32.56)$$

Следовательно,

$$P_{200,\,[95,105]}(A)=\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right)-\Phi\left(-\frac{5}{\sqrt{50}}\right)=2\,\Phi\left(\frac{5}{\sqrt{50}}\right)\approx$$

$$\approx 2\cdot\Phi(0{,}7071)\approx 2\cdot 0{,}2595\approx 0{,}519. \qquad (32.57)$$

№ 11

Завод направил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие повредится, равна 0,0002. Найти вероятность того, что на базу прибудет шесть негодных изделий.

Решение. Пусть событие A — «прибытие на базу негодного изделия». Воспользуемся формулой (32.26) (Пуассона).

По условию задачи

$$\lambda = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1, \quad m = 6. \tag{32.58}$$

Следовательно,

$$P_{5000,\,6}(A) = \frac{1^6 \cdot e^{-1}}{6!} = \frac{1}{720\,e} \approx 0{,}0005. \tag{32.59}$$

№ 12

Из 1000 человек приблизительно восемь левшей. Какова вероятность того, что среди сотни наугад выбранных человек не окажется ни одного левши?

Решение. Пусть событие A — «выбранный человек — левша».

Имеем:

$$P(A) = p = 0{,}008; \quad n = 100; \quad \lambda = 100 \cdot 0{,}008 = 0{,}8. \tag{32.60}$$

По формуле (32.26) (Пуассона) находим:

$$P_{100,\,0}(A) = \frac{0{,}8^0}{0!} \cdot e^{-0{,}8} \approx 0{,}4493. \tag{32.61}$$

№ 13

Вероятность получения проигрышного лотерейного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 500 купленных наугад билетов окажется не менее 48 и не более 55 безвыигрышных?

Решение. Пусть событие A — «приобретен безвыигрышный билет». Воспользуемся формулой (32.33) (интегральная формула Лапласа).

Имеем:

$$n = 500; \quad m_1 = 48; \quad m_2 = 55; \quad x_1 = \frac{48 - 500 \cdot 0{,}1}{\sqrt{500 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = -\frac{2}{\sqrt{45}} \approx$$

$$\approx -0{,}298;$$

$$x_2 = \frac{55 - 500{,}01}{\sqrt{500 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{5}{\sqrt{45}} \approx 0{,}745. \tag{32.62}$$

Учитывая, что функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ — нечетная, по формуле (32.33) находим:

$$P_{500,\,[48,\,55]}(A) \approx \Phi(0{,}745) + \Phi(0{,}298) \approx \approx 0{,}2734 + 0{,}1179 \approx 0{,}3913. \tag{32.63}$$

№ 14

Какова вероятность того, что среди 500 наугад выбранных человек двое родились 1-го января невисокосного года?

Решение. Пусть событие A — «человек родился 1-го января».

Имеем:

$$P(A) = p = \frac{1}{365}; \; n = 500; \; \lambda = \frac{500}{365} \approx 1{,}3699.$$

По формуле (32.26) (Пуассона) находим:

$$P_{500,\,2}(A) \approx \frac{1{,}3699^2}{2!} e^{-1{,}3699} \approx 0{,}2385. \tag{32.64}$$

№ 15

Имеется три партии деталей по 20 деталей в каждой. Число стандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 20, 15, 10.

Из наудачу выбранной партии наугад извлечена деталь, оказавшаяся стандартной. Деталь возвращают в партию и из этой же партии наугад извлекают деталь вторично. Она также оказывается стандартной.

Найти вероятность того, что детали были извлечены из третьей партии.

Решение. Пусть событие A — «оба раза извлечена стандартная деталь», B_i — «детали извлечены из i-й партии» ($i = 1, 2, 3$).

Так как детали вынимаются наугад, то

$$P(B_1) = P(B_2) = P(B_3) = \frac{1}{3}. \tag{32.65}$$

По условию задачи

$$P(A/_{B_1}) = 1, \; P(A/_{B_2}) = \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{20} = \frac{225}{400} = \frac{9}{16}; \tag{32.66}$$

$$P(A/_{B_3}) = \frac{10}{20} \cdot \frac{10}{20} = \frac{1}{4}.$$

Воспользуемся формулой (32.20) (Байеса):

$$P({}^{B_3}/_{A}) = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot\frac{9}{16}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}} = \frac{4}{29} \approx 0{,}1379. \qquad (32.67)$$

№ 16

Вероятность рождения мальчика — 0,515. Какова вероятность того, что из 1000 новорожденных не менее 480 и не более 540 мальчиков?

Решение. Пусть событие A — «родился мальчик». Воспользуемся формулой (32.33) (интегральная формула Лапласа). Имеем:

$$n = 1000;\ m_1 = 480;\ m_2 = 540;\ x_1 = \frac{480-1000\cdot 0{,}515}{\sqrt{1000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \approx$$

$$\approx -\frac{35}{15{,}8043} \approx -2{,}2146; \qquad (32.68)$$

$$x_2 = \frac{540-1000\cdot 0{,}515}{\sqrt{1000\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}} \approx \frac{25}{15{,}8043} \approx 1{,}5818.$$

Следовательно,

$$P_{1000,\,[480,\,540]}(A) = \Phi(1{,}5818) + \Phi(2{,}2146) \approx 0{,}4434 + 0{,}4863 \approx 0{,}9297.$$

Установление количественных закономерностей массового появления случайных событий осуществляется с использованием важного понятия в теории вероятностей — понятия случайной величины.

5. Случайные величины

Случайная величина ξ — это переменная, определяемая своими значениями и вероятностью появления каждого значения.

Поэтому для задания случайной величины надо не только определить область ее значений, но и указать вероятности их появления.

Законом распределения случайной величины ξ называется соответствие между возможными ее значениями и их вероятностями.

Случайная величина ξ называется *дискретной*, если область ее значений дискретна, т. е. является конечной или бесконечной числовой последовательностью.

Случайная величина ξ называется *непрерывной*, если область ее значений — конечный или бесконечный интервал на числовой оси.

Распределение дискретной случайности величины ξ задается таблицей, в которой каждому значению x_i этой величины ставится в соответствие вероятность появления такого значения:

ξ	x_1	x_2		x_i		x_{n-1}	x_n
p	p_1	p_2		p_i		p_{n-1}	p_n

(32.69)

Требуется, чтобы сумма всех вероятностей p_i равнялась единице (как для конечной, так и для бесконечной дискретной случайной величины):

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \quad \vee \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1. \qquad (32.70)$$

Наиболее широко используется биномиальное распределение дискретной случайной величины — распределение вероятностей по биномиальному закону (по формуле Бернулли (32.23))

$$x_k \to C_n^k p^k q^{n-k} \ (k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \qquad (32.71)$$

Пусть, например, монету подбрасывают пять раз. ξ — случайная величина, значение которой — возможное число выпадений герба при этих пяти подбрасываниях. Биномиальный закон распределения в этом примере принимает вид:

ξ	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

(32.72)

В следующем примере рассмотрим небиномиальное распределение случайной дискретной величины.

В денежной лотерее выпущен один миллион билетов. Разыгрывается один выигрыш в 100 тысяч рублей, 10 выигрышей — в 50 тысяч рублей, 100 — в тысячу рублей, 1000 — в 100 рублей, 10 000 — в 1 рубль.

Найти закон распределения случайной величины ξ — стоимости возможного выигрыша для владельца одного лотерейного билета.

Данное распределение случайной величины ξ задается следующей таблицей

ξ	100 000	50 000	1000	100	1	0
p	0,000001	0,00001	0,0001	0,001	0,01	0,988889

(32.73)

Распределение непрерывной случайной величины ξ, заданной на отрезке $[a, b]$, — это функция, ставящая в соответствие каждому значению $x \in [a, b]$ вероятность p появления этого значения:

$$p = p(x). \qquad (32.74)$$

График функции $p(x)$ — это график распределения непрерывной случайной величины ξ

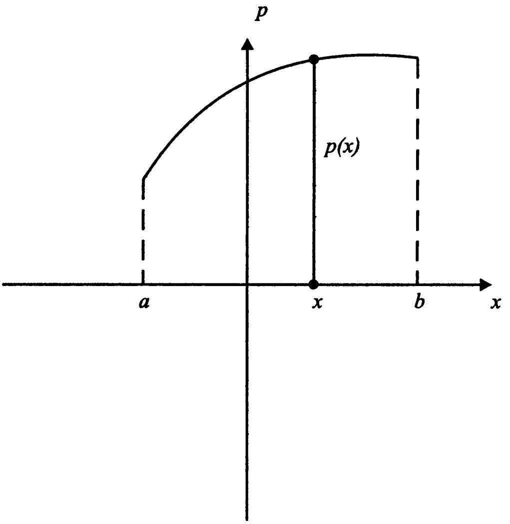


Рис. 20

6. Математическое ожидание случайной величины

Представим себе, что стрелок стреляет в быстро вращающуюся мишень площадью S, разбитую на n секторов с площадями S_i ($i = 1, 2, ..., n$). Не различая сектора, он стреляет наугад. При попадании в сектор с номером i стрелку выплачивается выигрыш x_i рублей. За право на один выстрел плата a рублей. Заплатив за право на n выстрелов, стрелок получил общий выигрыш в

$$x_1m_1 + x_2m_2 + ... + x_nm_n \tag{32.75}$$

рублей, где m_i — число попаданий в i-й сектор.

Арифметическое среднее выигрыша, соответствующее одному выстрелу, равно:

$$x_1\frac{m_1}{n} + x_2\frac{m_2}{n} + ... + \frac{m_n}{n}. \tag{32.76}$$

При увеличении n статистическая частота события «$\xi = x_i$» приближается к вероятности этого события

$$p_i = \frac{S_i}{S}, \tag{32.77}$$

т. е. вероятности попадания в i-й сектор, а сумма (32.76) приближается к величине

$$M(\xi) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n p_n, \tag{32.78}$$

называемой *математическим ожиданием* дискретной случайной величины ξ.

Таким образом, математическое ожидание — это предел среднего арифметического n чисел $x_i m_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ при неограниченном увеличении их числа n.

Если $a < M(\xi)$, то участвовать в стрельбе стоит, а если $a > M(\xi)$, то владельцу тира выгодно, а большинству стрелков, за исключением «везучих», — невыгодно.

Для бесконечной дискретной случайной величины ξ математическое ожидание задается формулой:

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i. \tag{32.79}$$

Из формул (32.78), (32.79) непосредственно вытекают следующие свойства математического ожидания $M(\xi)$ дискретной случайной величины ξ:

$$M(C) = C; \text{ где } C = \text{const.}; \; M(C\,\xi) = C\,M(\xi); \tag{32.80}$$

$$M(\xi + \eta) = M(\xi) + M(\eta). \tag{32.81}$$

Для независимых случайных величин ξ и η

$$M(\xi\eta) = M(\xi) \cdot M(\eta). \tag{32.82}$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

№ 1

Найти математическое ожидание появления герба при пятикратном подбрасывании монеты.

Решение. Пользуясь таблицей (32.72) распределения выпадения герба, находим:

$$M(\xi) = 0 \cdot \frac{1}{32} + 1 \cdot \frac{5}{32} + 2 \cdot \frac{5}{16} + 3 \cdot \frac{5}{16} + 4 \cdot \frac{5}{32} + 5 \cdot \frac{1}{32} = \frac{5}{2} = 2\frac{1}{2}. \tag{32.83}$$

№ 2

Быстро вращающаяся круглая мишень разделена на пять секторов, площади которых составляют соответственно $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{16}$ площади круга — мишени. Стрелок, не различая секторов, делает пять выстрелов. Стоит ли ему участвовать в этой игре, если при попадании в первый сектор он выигрывает 10 рублей, при попадании во второй — проигрывает 20 рублей, при попадании в третий — выигрывает 30 рублей, при попадании в четвертый — проигрывает 40 рублей, при попадании в пятый — выигрывает 50 рублей, а стоимость одного выстрела — 5 рублей?

Решение. Составим таблицу распределения выигрышей:

ξ	10	−20	30	−40	50
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$

(32.84)

Находим математическое ожидание случайной величины ξ:

$$M(\xi) = 10 \cdot \frac{1}{2} - 20 \cdot \frac{1}{4} + 30 \cdot \frac{1}{8} - 40 \cdot \frac{1}{16} + 50 \cdot \frac{1}{16} = 4\frac{3}{8} \cdot$$

Так как $5 > 4\frac{3}{8}$, то играть не стоит.

№ 3

Найти математическое ожидание выпадения шестерки при трех бросаниях игральной кости.

Решение. Составляем биномиальное распределение выпадения шестерки ($p = \frac{1}{6}$, $q = \frac{5}{6}$):

ξ	0	1	2	3
p	$\frac{125}{216}$	$\frac{75}{216}$	$\frac{15}{216}$	$\frac{1}{216}$

(32.85)

Имеем:

$$M(\xi) = 0 \cdot \frac{125}{216} + 1 \cdot \frac{75}{216} + 2 \cdot \frac{15}{216} + 3 \cdot \frac{1}{216} = \frac{108}{216} = \frac{1}{2} \cdot \quad (32.86)$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины ξ, заданной на промежутке $[a, b]$, определяется с помощью интеграла аналогичной формулой:

$$M(\xi) = \int_a^b xp\,(x)\,dx. \quad (32.87)$$

Если непрерывная случайная величина определена на всей числовой оси, то, по определению,

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xp\,(x)\,dx. \quad (32.88)$$

Рассмотрим два примера ([29], с. 117—118).

№ 4

Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины

$$p(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad x \in [0,\ 2). \tag{32.89}$$

Решение. Используя формулу (32.87), получим:

$$M(\xi) = \int_0^2 x\left(1 - \frac{x}{2}\right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2 = \frac{2}{3}. \tag{32.90}$$

№ 5

Найти математическое ожидание непрерывной случайной величины, заданной на всей числовой оси по закону:

$$p\ (x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, \text{ если } x > \pi. \end{cases} \tag{32.91}$$

Решение. По формулам (32.87) и (32.88) находим:

$$M(\xi) = \int_{-\infty}^{0} x \cdot 0\ dx + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} x \sin x\ dx + \int_{\pi}^{\infty} x \cdot 0\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}(-x\cos x + \sin x)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}. \tag{32.92}$$

7. *Дисперсия случайной величины*

Отклонением случайной величины ξ или центрированной случайной величиной, порожденной ξ, называется разность между этой случайной величиной и ее математическим ожиданием:

$$\overset{\circ}{\xi} = \xi - M(\xi). \tag{32.93}$$

Составим, например, распределение отклонения $\overset{\circ}{\xi}$ выпадения герба при пятикратном подбрасывании монеты. Используя таблицу (32.72) и формулу (32.83), получим:

$\overset{\circ}{\xi}$	$-2\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$
p	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

(32.94)

Анализируя таблицу (32.94) замечаем, что минимальное отклонение $|\overset{\circ}{\xi}| = \frac{1}{2}$ — в центре таблицы, т. е. значения случайной величины ξ в центральной части таблицы близки к ее математическому ожиданию.

Дисперсией (рассеянием) случайной величины ξ называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(\xi) = M(\overset{o}{\xi}{}^2) = M(\xi - M(\xi))^2. \quad (32.95)$$

В подробной записи формула (32.95) в дискретном случае имеет вид:

$$D(\xi) = (x_1 - M(\xi))^2 \cdot p_1 + (x_2 - M(\xi))^2 p_2 + \ldots + $$
$$+ (x_n - M(\xi))^2 p_n. \quad (32.96)$$

Из формулы (32.96) непосредственно вытекают следующие основные свойства дисперсии:

$$D(C) = 0, \quad D(C\,\xi) = C^2 D(\xi), \quad (32.97)$$

$$D(\xi) = M(\xi^2) - (M(\xi))^2. \quad (32.98)$$

Для независимых случайных величин ξ и η

$$D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta).$$

Найдем дисперсию выпадения герба при пятикратном бросании монеты. Из формул (32.95), (32.96) следует:

$$D(\xi) = \frac{25}{4} \cdot \frac{1}{16} + \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{16} + \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{80}{64} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}. \quad (32.99)$$

Вычислим ту же дисперсию по формуле (32.98).

Из формул (32.72), (32.83) следует:

$$(M(\xi))^2 = \frac{25}{4}; \quad (M(\xi^2) = 1 \cdot \frac{5}{32} + 4 \cdot \frac{5}{16} + 9 \cdot \frac{5}{16} + 16 \cdot \frac{5}{32} +$$
$$+ 25 \cdot \frac{1}{32} = \frac{15}{2}.$$

По формуле (32.98) находим:

$$D(\xi) = \frac{15}{2} - \frac{25}{4} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}. \quad (32.100)$$

Сравнивая формулы (32.99) и (32.100), убеждаемся в совпадении значений $D(\xi)$.

Случайная дискретная величина ξ, распределенная по биномиальному закону, представляет собой число событий A при n независимых испытаниях, когда $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q = 1 - p$. Обозначим через ξ_i случайную величину — число событий A при i-м испытании. ξ_i может принять только два значения: 1 с вероятностью p (когда событие A произошло) и 0 с вероятностью $q = 1 - p$ (когда событие A не произошло). Имеем:

$$M(\xi_i^2) = 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot q = p; \quad (M(\xi_i))^2 = p^2. \quad (32.101)$$

Следовательно,

$$D(\xi_i) = p - p^2 = pq. \qquad (32.102)$$

Так как ξ_i — независимые случайные величины, то

$$D(\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n) = D(\xi_1) + D(\xi_2) + ... + D(\xi_n) =$$

$$= npq = D(\xi). \qquad (32.103)$$

Например, при пятикратном бросании монеты, учитывая, что $p = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, получим:

$$D(\xi) = 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}. \qquad (32.104)$$

Сравнивая формулы (32.104) и (32.99), убеждаемся в совпадении результатов.

Дисперсия непрерывной случайной величины определяется по формуле, аналогичной формуле (32.98), с использованием определенных интегралов:

$$D(\xi) = \int_a^b x^2 p(x)\,dx - \left(\int_a^b x p(x)\,dx\right)^2. \qquad (32.105)$$

Пусть, например, распределение непрерывной случайной величины ξ задается функцией:

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ x^3, \text{ если } 0 < x < 1, \\ 0, \text{ если } x > 1. \end{cases} \qquad (32.106)$$

Тогда

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\,dx - \left(\int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\,dx\right)^2 = \int_0^1 x^5 dx - \left(\int_0^1 x^4 dx\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{x^6}{6} - \left(\frac{x^5}{5}\right)^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{25} = \frac{19}{150}.$$

8. Среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ. Нормальное распределение

Средним квадратическим отклонением случайной величины ξ называется квадратный корень из дисперсии этой величины:

$$\sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \qquad (32.107)$$

Нормальным распределением непрерывной случайной величины ξ называется распределение, определяемое по закону:

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{32.108}$$

где $a = M(\xi)$.

Справедливы следующие утверждения ([29], с. 123):

1. Если случайная величина ξ распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего стандартного отклонения.

2. Если случайная величина ξ представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то ξ имеет распределение, близкое к нормальному. В этом случае

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right). \tag{32.109}$$

9. Функция распределения

Функцией распределения непрерывной случайной величины ξ называется вероятность того, что ξ примет значение меньшее, чем x.

Вероятность попадания случайной величины на заданный промежуток $[a, b]$ равна приращению функции распределения на этом промежутке, т. е.

$$P(a \leqslant \xi \leqslant b) = F(b) - F(a). \tag{32.110}$$

Например, если

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{7}x + \frac{1}{3}, \tag{32.111}$$

то

$$P(0 \leqslant x \leqslant 1) = F(1) - F(0) = \frac{17}{42} - \frac{1}{3} = \frac{1}{14}. \tag{32.112}$$

Плотностью распределения непрерывной случайной величины ξ называется производная ее функции распределения:

$$p(x) = F'(x), \tag{32.113}$$

например, если

$$p(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \leqslant 0, \\ \frac{1}{2}\sin x, \text{ если } 0 < x \leqslant \pi, \\ 0, \text{ если } x > \pi, \end{cases} \tag{32.114}$$

то

$$P\left(\frac{\pi}{4} < \xi < \frac{\pi}{2}\right) = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \\ = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = -\frac{1}{2}\cos x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}. \tag{32.115}$$

10. Некоторые специальные числовые характеристики распределения

Модой распределения $p(x)$ называется любая точка его максимума. Распределения с одной, двумя и большим числом мод называются соответственно унимодальными, бимодальными, мультимодальными.

Классическим примером унимодального распределения случайной величины ξ является ее нормальное распределение.

Квантилью порядка p $(0 < p < 1)$ называется такое число K_p, что

$$F(K_p) \leqslant p, \quad F(K_p + 0) \geqslant p, \tag{32.116}$$

где $F(x)$ — функция распределения случайной величины ξ, а символом «+0» обозначено предельное приближение справа к числу K_p.

Если $F(x)$ — строго монотонно возрастающая функция, то K_p — единственное решение уравнения

$$F(x) = p, \tag{32.117}$$

т. е. K_p в этом случае есть обратная функция к $F(x)$.

Медианой распределения называется квантиль $K_{\frac{1}{2}}$, т. е. такое число m, что

$$F(m) \leqslant \frac{1}{2}, \; F(m + 0) \geqslant \frac{1}{2}. \tag{32.118}$$

Любая случайная величина ξ имеет по крайней мере одну медиану, причем для строго монотонно возрастающей функции распределения $F(x)$ медиана единственна. В симметрическом случае она совпадает с математическим ожиданием случайной величины ξ.

Приложение № 1

Магический квадрат Бенджамина Франклина

200	217	232	249	8	25	40	57	72	89	104	121	136	153	168	185
58	39	26	7	250	231	218	199	186	167	154	135	122	103	90	71
198	219	230	251	6	27	38	59	70	91	102	123	134	155	166	187
60	37	28	5	252	229	220	197	188	165	156	133	124	101	92	69
201	216	233	248	9	24	41	56	73	88	105	120	137	152	169	184
55	42	23	10	247	234	215	202	183	170	151	138	119	106	87	74
203	214	235	246	11	22	43	54	75	86	107	118	139	150	171	182
53	44	21	12	245	236	213	204	181	172	149	140	117	108	85	76
205	212	237	244	13	20	45	52	77	84	109	116	141	148	173	180
51	46	19	14	243	238	211	206	179	174	147	142	115	110	83	78
207	210	239	242	15	18	47	50	79	82	111	114	143	146	175	178
49	48	17	16	241	240	209	208	177	176	145	144	113	112	81	80
196	221	228	253	4	29	36	61	68	93	100	125	132	157	164	189
62	35	30	3	254	227	222	195	190	163	158	131	126	99	94	67
194	223	226	255	2	31	34	63	66	95	98	127	130	159	162	191
64	33	32	1	256	225	224	193	192	161	160	129	128	97	96	65

П р и л о ж е н и е № 2

Компьютерные программы
Составлены Н. В. Малаховским

Компьютерные программы данного приложения были составлены с использованием пакета программ Maple V Release 4.00a.

1) Программа нахождения простых палиндромов и их числа от *m* до *n*

```
>p: = nextprime (m):j: = 0:while p < = n
>do c: = convert (p, base, 10):h: = nops (c) — 1:k: = 0:i: = 1:
>  do k: = k + 10^h*op(i,c):h: = h − 1:i: = i + 1:if h = −1 then break fi:
>  od:if k = p then j: = j + 1: print (p) fi:p: = nextprime (p):
>od:print (Number = j):
```

2) Программа нахождения простых чисел и их числа от *m* до *n* с палиндромическим свойством

```
>p: = nextprime (m):j: = 0:while p < = n
>do c: = convert (p, base, 10):h: = nops (c) — 1:k: = 0:i = 1:
>  do k: = k + 10^h*op(i,c):h: = h − 1:i: = i + 1:if h = −1 then break fi:
>  od:if isprime(k) then j: = j + 1: print (p) fi:p: = nextprime (p):
>od:print (Number = j):
```

3) Программа нахождения квазипалиндромов

```
>j: = 11:k: = 0:
>do d: = length (j):p: = j:
>   do for i while i < = 9
>       do if p−i*10^(d − 1) < 10^ (d − 1) then break fi
>        od:if type (i, {even, 5}) then break fi:
>          q: = (p − i*10^(d − 1))*10 + i; if isprime (q) then
>            p: = q else break fi:if p = j then print(p):k: = k + 1:break fi
>    od:j: = nextprime(j):if j > 100 then break fi
>od:print (Number = k);
```

4) Программа нахождения дерева данного натурального числа *n*

```
>m: = [n]:print (op(m)); while nops (m) > 0
>do m: = select (isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9
>  end, m)): print (op(m)):
>od:
```

5) Программа нахождения деревьев натуральных чисел от *m* до *n*

```
>i: = m:j: = [i]: print (op(j)):
>do j: = select (isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9
>  end, j)): if nops (j) = 0 then i: = i + 1:j: = [i]:fi:
>  if i < = n then print (op(j)) else break fi:
>od:
```

6) Программа нахождения координат данного натурального числа *n*

```
>m: = n:k: = [m]:
>if isprime (op(k)) = true then SI: = 1:In: = 1 else SI: = 0:In: = 0 fi:B: = 0:
>do k: = select (isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9 end,
k)):
> for i while i < = nops (k)
> do p: = [1,3,7,9]:t: = 0: for j while j < = nops (p)
> do if isprime (op(i,k)*10 + op(j,p)) then t: = 1 fi
> od:if t = 0 then B: = B + 1 fi
> od:if nops(k) < > 0 then In: = In + 1:SI: = SI + nops (k) else break fi
> od:print (N = m,Ind = In, Br = B,SInd = SI):
```

7) Программа нахождения координат натуральных чисел от *m* до *n*

```
>p: = m:k: = [p]:
>do if isprime (op(k)) = true then SI: = 1:In: = 1 else SI: = 0:In: = 0 fi:B: = 0:
>  do k: = select (isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9
end, k)):
>      for i while i < = nops (k)
>      do s: = [1,3,7,9]:t: = 0: for j while j < = nops (s)
>          do if isprime (op(i,k)*10 + op(j,s)) then t: = 1 fi
>          od:if t = 0 then B: = B + 1 fi
>      od:if nops(k) < > 0 then In: = In + 1:SI: = SI + nops (k) else break fi
>  od:print (N = p,Ind = In, Br = B,SInd = SI):p: = p + 1:k: = [p]:
>  if p > n then break fi
>od:
```

8) Программа пространственного изображения первых десяти тысяч натуральных чисел

```
>n: = 1:k: = [n]:
> do if isprime (op(k)) = true then SI: = 1:In: = 1 else SI: = 0:In: = 0 fi:B: = 0:
> do k: = select (isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9
end, k)):
> for i while i < = nops (k)
>do m: = [1,3,7,9]:t: = 0: for j while j < = nops (m)
>          do if isprime (op(i,k)*10 + op(j,m)) then t: = 1 fi
>          od:if t = 0 then B: = B + 1 fi
>      od:if nops(k) < > 0 then In: = In + 1:SI: = SI + nops (k) else break fi
>od:s[n]: = [In,B,SI]:n: = n  + 1:k: = [n]:if n > 10000 then break fi
>od:with (plots):pointplot3d ({seq(s[n],n = 1..n)}, axes = BOXED, color =
red):
```

9) Программа нахождения сильно пролонгируемых чисел и их числа от *m* до *n*

```
>i: = m:j: = [i]:l: = 0:
>do j: = select(isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9
>  end, j)):if  nops(j) = 4 then print(i):l: = l + 1 fi:i: = i + 1:j = [i]:
>  if i > n then break fi:
>od: print (Number = l):
```

10) Программа k-раз непролонгируемых чисел и их числа от m до n

```
>p: = m:h: = [p]:j: = 0:l: = 0:
> do i: = select(isprime, map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9
>  end, h)):q: = map (proc(x) 10*x + 1,10*x + 3,10*x + 7,10*x + 9 end, h)): if
>  nops(i) = 0 then j: = j + 1:h: =  q else j: = 0:p: = p + 1:h: = [p] fi:
>  if j = k then print (p):l: = l + 1 fi:if p > n then break fi:
>od: print (Number = l):
```

Примечание: в данных программах m и n — натуральные числа, удовлетворяющие неравенству $m < n$.

11) Программа нахождения диофантовых семейств пифагоровых треугольников с общей гипотенузой $c_n = p_1p_2 \dots p_n$

($p_i = 4k + 1$, $k \in N$).

```
>X: = [seq(4*m + 1, m = 1 ... 7)]:h: = 0:
>Y: = select(isprime, X):Z: = mul(i, i =Y):
>with(numtheory, sum2sqr):with (combinat, choose):
>S: = seq(op([m[i] = op(2, op(1,sum2sqr(op(i,Y)))), n[i] = op(1,op(1,sum2sqr(op(i,Y))))]),
>i = 1..nops(Y)):i: = nops(Y):N: = [[m[op(l,op(k,M))], n[op(l,op(k,M))]]]:
>for j while j < = i
>do seq([2*op(1,op(i,N))* op(2,op(i,N)), abs (op(1,op(i,N))^2-op(2,op (i,N)) ^2),
>op(1,op(i,N))^2 + op(2,op(i,N))^2], i = 1..nops(N)):s[j]: = subs (l = 1, ["]):
>M: = choose (i,j):
>for k while k < = nops (M)
>do subs (S,s[j]):print(op(" * Z/op (3, op(1, ")))):h: = h + nops("):
>od:unassign('k', 'M'):N: = [seq(op([[op(1,op(i,N))*m(op(l + j, op(k,M))] +
>op(2, op(i,N))*n[op(l + j, op(k,M))], abs(op(1,op(i,N))*n[op(l + j, op(k,M))] –
>op(2, op(i,N))*m[op(l + j, op(k,M))])], op(1,op(i,N))*n[op(l + j, op(k,M))] +
>op(2, op(i,N))*m[op(l + j, op(k,M))], abs (op(1,op(i,N))*m[op(l + j, op(k,M))] –
>op(2, op(i,N))*n[op(l + j, op(k,M))])]]), i = 1..nops(N))]:
>od:h;
```

Приложение № 3

Деревья пролонгируемых натуральных чисел n ⩽ 100

1
11, 13, 17, 19
113, 131, 137, 139, 173, 179, 191, 193, 197, 199
1319, 1373, 1399, 1733, 1913, 1931, 1933, 1973, 1979, 1993, 1997, 1999
13997, 13999, 17333, 19139, 19319, 19333, 19739, 19793, 19937, 19973, 19979, 19991, 19993, 19997
139991, 139999, 193337, 197933, 199373, 199379, 199739, 199799, 199931, 199933
1399913, 1399919, 1399999, 1979339, 1997999, 1999331, 1999339
13999133, 19793393, 19993319
197933933
1979339333, 1979339339

2
23, 29
233, 239, 293
2333, 2339, 2393, 2399, 2939
23333, 23339, 23399, 23993, 29399
233993, 239933, 293999
2339933, 2399333, 2939999
23399339, 29399999

3
31, 37
311, 313, 317, 373, 379
3119, 3137, 3733, 3739, 3793, 3797
31193, 31379, 37337, 37339, 37397
373379, 373393
3733799
37337999

4
41, 43, 47
419, 431, 433, 439, 479
4337, 4339, 4391, 4397, 4793, 4799
43391, 43397, 43399, 43913, 43973, 47933
47939
439133
4391339

5
53, 59
593, 599
5939
59393, 59399
593933, 593993
5939333
59393339

6
61, 67
613, 617, 619, 673, 677
6131, 6133, 6173, 6197, 6199, 6733, 6737, 6779
61331, 61333, 61339, 61979, 61991, 67339
613337, 619793, 673391, 673397, 673399
6133373, 6733919, 6733997

7

71, 73, 79

719, 733, 739, 797

7193, 7331, 7333, 7393

71933, 73331, 73939

719333, 739391, 739393, 739397, 739399

7393913, 7393931, 7393933

73939133

8

83, 89

839

9

97

971, 977

9719

10

101, 103, 107, 109

1013, 1019, 1031, 1033, 1039, 1091, 1093, 1097

10133, 10139, 10193, 10313, 10331, 10333, 10337, 10391, 10399, 10937, 10939, 10973, 10979

101333, 101399, 101939, 103319, 103333, 103913, 103919, 103991,

103993, 103997, 109379, 109391, 109397, 109793

1013993, 1019399, 1033337, 1033339, 1039139, 1039931, 1039979, 1097933

10333391, 10399793

103997939

1039979393, 1039979399

10399793993

103997939939

11

113

12

127

1277, 1279

12791, 12799

127913, 127997

1279133

12791333

13

131, 137, 139

1319, 1373, 1399

13997, 13999

139991, 139999

1399913, 1399919, 1399999

13999133

14

149

1493, 1499

14939

149393, 149399

15

151, 157

1511, 1571, 1579

15791, 15797

16

163, 167

1637

17

173, 179

1733

17333

18
181
1811
18119
181193, 181199
1811939, 1811993

19
191, 193, 197, 199
1913, 1931, 1933, 1973, 1979, 1993, 1997, 1999
19139, 19319, 19333, 19739, 19793, 19937, 19973, 19979, 19991, 19993, 19997
193337, 197933, 199373, 199379, 199739, 199799, 199931, 199933
1979339, 1997999, 1999331, 1999339
19793393, 19993319
197933933
1979339333, 1979339339

21
211
2111, 2113
21139

22
223, 227, 229
2237, 2239, 2273, 2293, 2297
22391, 22397, 22739, 22937, 22973
223919, 227393, 227399, 229373, 229739
2273993

23
233, 239
2333, 2339, 2393, 2399
23333, 23339, 23399, 23993
233993, 239933
2339933, 2399333
23399339

24
241
2411, 2417
24113, 24179
241793
2417939
24179399

25
251, 257
2579
25793, 25799
257993, 2579939

26
263, 269
2633, 2693, 2699
26339, 26993
263399, 269939
2699393

27
271, 277
2711, 2713, 2719, 2777
27191, 27197, 27773, 27779
271919, 277793
2719193
27191939

28
281, 283
2819, 2833, 2837

29
293
2939
29399
293999
2939999
29399999

30
307
3079

31
311, 313, 317
3119, 3137
31193, 31379

33
331, 337
3313, 3319, 3371, 3373
33191, 33199, 33713, 33739
331997, 331999, 337397
3319997
33199979
331999799

34
347, 349
3491, 3499
34913, 34919
349133, 349199
3491333

35
353, 359
3533, 3539, 3593
35339, 35393, 35933
353939
3539399
35393999

36
367
3671, 3673, 3677
36713, 36739, 36779
367139, 367391, 367397
3673919, 3673979

37
373, 379
3733, 3739, 3793, 3797
37337, 37339, 37397
373379, 373393
3733799
37337999

38
383, 389
3833
38333

39
397

40
401, 409
4013, 4019, 4091, 4093, 4099
40193, 40933, 40939, 40993
401939, 409333, 409337, 409391, 409397, 409933
4093339, 4093919, 4093979, 4099331, 4099339
40933397, 40939799, 40993313, 40993391, 40993397
409933913, 409933919, 409933973
4099339193
40993391939
409933919393
4099339193933

41
419

42
421
4211, 4217, 4219
42179, 42193, 42197
421973

43
431, 433, 439
4337, 4339, 4391, 4397
43391, 43397, 43399, 43913, 43973
439133
4391339

44
443, 449
4493
44939
449399

45
457

46
461, 463, 467
4637, 4639, 4673, 4679
46399
463993
4639931, 4639939
46399319
463993199

47
479
4793, 4799
47933, 47939

48
487
4871, 4877
48779
487793

49
491, 499
4919, 4993, 4999
49193, 49199, 49937, 49939, 49991, 49993
49999
499391, 499397
4993913
49939133

50
503, 509
5039, 5099
50993
509939

52
521, 523
5231, 5233, 5237
52313, 52379
523793
5237933

54
541, 547
5413, 5417, 5419, 5471, 5477, 5479
54133, 54139, 54193, 54713, 54773, 54779, 54799
541339, 541391, 547133, 547139, 547999
5413391, 5471339, 5471393
54713933

55
557
5573
55733
557339

56
563, 569
5639, 5693
56393
563933

57
571, 577
5711, 5717, 5779
57119, 57173, 57179, 57791, 57793
571199, 571799, 577919, 577931, 577937, 577939
5779199, 5779399
57793997

58
587
5879

59
593, 599
5939
59393, 59399
593933, 593993
5939333
59393339

60
601, 607
6011, 6073, 6079
60733, 60737, 60793
607331, 607337, 607339, 607931, 607933, 607939
6073373, 6073399, 6079313, 6079391
60733733, 60733993, 60733999, 60793133, 60793919
607339933, 607339991

61
613, 617, 619
6131,6133, 6173, 6197, 6199
61331, 61333, 61339, 61979, 61991
613337, 619793
6133373

63
631
6311, 6317
63113, 63179
631133, 631139

64
641, 643, 647
6473

65
653, 659
6599
65993

66
661
6619
66191

67
673, 677
6733, 6737, 6779
67339
673391, 673397, 673399
6733919, 6733997

68
683
6833

69
691
6911, 6917
69119
691193, 691199
6911939

70
701, 709
7013, 7019
70139, 70199
701399

71
719
7193
71933
719333

72
727

73
733, 739
7331, 7333, 7393
73331, 73939
739391, 739393, 739397, 739399
7393913, 7393931, 7393933
73939133

74
743
7433

75
751, 757
7517, 7573, 7577
75731, 75773
757319

76
761, 769
7691, 7699
76913, 76919, 76991
769919

77
773

78
787
7873, 7877, 7879
78737, 78779, 78791, 78797
787793, 787973
7877939, 7879733
78797339
787973393

79
797

80
809
8093
80933
809339

81
811
8111, 8117
81119, 81173
811193, 811199

82
821, 823, 827, 829
8219, 8231, 8233, 8237, 8273, 8291, 8293, 8297
82193, 82339, 82373, 82913, 82939
821939, 823399, 829399
8233993, 8233997, 8293993
82339979, 82939933, 82939939
829399397, 829399399
8293993973, 8293993991, 8293993993
82939939933
829399399331, 829399399333

83
839

85
853, 857, 859
8537, 8539, 8573, 8597, 8599
85733, 85991, 85999
857333, 859913, 859919
8599193

86
863

87
877
8779
87793, 87797
877937, 877939
8779391
87793913

88
881, 883, 887
8819, 8831, 8837, 8839
88379, 88397
883973, 883979
8839739, 8839799

90
907

91
911, 919
9199
91997
919979

92
929
9293

93
937
9371, 9377
93719

94
941, 947
9413, 9419, 9473, 9479
94793

95
953
9533, 9539
95339, 95393
953399

96
967
9677, 9679
96779, 96797, 96799
967979, 967999
9679793, 9679799
96797933

97
971, 977
9719

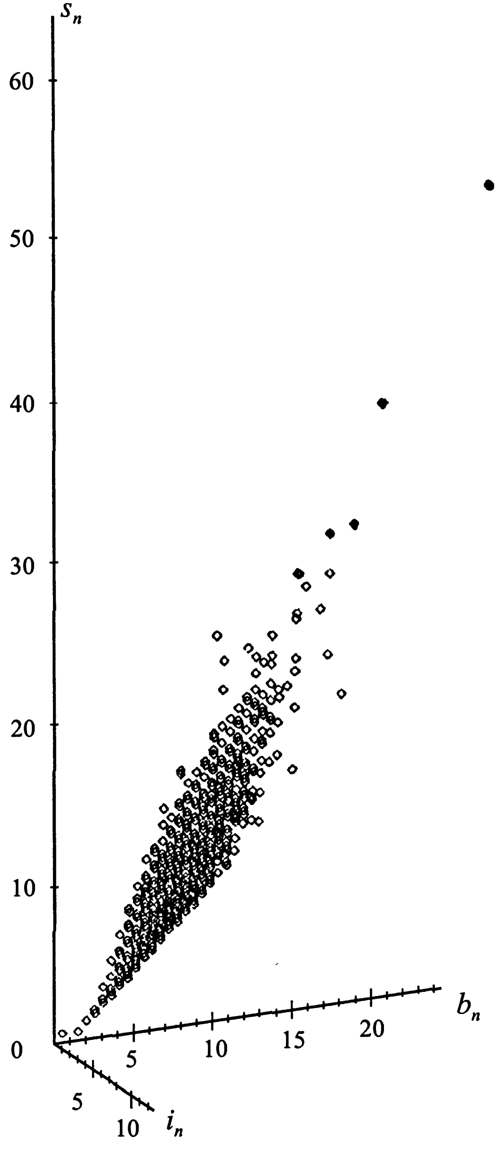
98
983
9833, 9839

99
991, 997
9973
99733
997333
9973331

100
1009
10091, 10093, 10099
100913, 100931, 100937, 100999
1009139, 1009319, 1009373, 1009991, 1009993, 1009997
10093739, 10099919, 10099933, 10099939, 10099979
100937399, 100999399
1009993993, 1009993997
10099939979
100999399799
1009993997993

Приложение № 4

Пространственная модель натуральных чисел



Приложение № 5

Таблица простых палиндромов $p < 10^8$

2	18181	75557	1082801	1276721	1513151
3	18481	76367	1085801	1278721	1520251
5	19391	76667	1092901	1280821	1532351
7	19891	77377	1093901	1281821	1535351
11	19991	77477	1114111	1286821	1542451
101	30103	77977	1117111	1287821	1548451
131	30203	78487	1120211	1300031	1550551
151	30403	78787	1123211	1303031	1551551
181	30703	78887	1126211	1311131	1556551
191	30803	79397	1129211	1317131	1557551
313	31013	79697	1134311	1327231	1565651
353	31513	79997	1145411	1328231	1572751
373	32323	90709	1150511	1333331	1579751
383	32423	91019	1153511	1335331	1580851
727	33533	93139	1160611	1338331	1583851
757	34543	93239	1163611	1343431	1589851
787	34843	93739	1175711	1360631	1594951
797	35053	94049	1177711	1362631	1597951
919	35153	94349	1178711	1363631	1598951
929	35353	94649	1180811	1371731	1600061
10301	35753	94849	1183811	1374731	1609061
10501	36263	94949	1186811	1390931	1611161
10601	36563	95959	1190911	1407041	1616161
11311	37273	96269	1193911	1409041	1628261
11411	37573	96469	1196911	1411141	1630361
12421	38083	96769	1201021	1412141	1633361
12721	38183	97379	1208021	1422241	1640461
12821	38783	97579	1212121	1437341	1643461
13331	39293	97879	1215121	1444441	1646461
13831	70207	98389	1218121	1447441	1654561
13931	70507	98689	1221221	1452541	1657561
14341	70607	1003001	1235321	1456541	1658561
14741	71317	1008001	1242421	1461641	1660661
15451	71917	1022201	1243421	1463641	1670761
15551	72227	1028201	1245421	1464641	1684861
16061	72727	1035301	1250521	1469641	1685861
16361	73037	1043401	1253521	1486841	1688861
16561	73237	1055501	1257521	1489841	1695961
16661	73637	1062601	1262621	1490941	1703071
17471	74047	1065601	1268621	1496941	1707071
17971	74747	1074701	1273721	1508051	1712171

1714171	1968691	3228223	3444443	3743473
1730371	1969691	3233323	3447443	3746473
1734371	1970791	3236323	3449443	3762673
1737371	1976791	3241423	3452543	3763673
1748471	1981891	3245423	3460643	3765673
1755571	1982891	3252523	3466643	3768673
1761671	1984891	3256523	3470743	3769673
1764671	1987891	3258523	3479743	3773773
1777771	1988891	3260623	3485843	3774773
1793971	1993991	3267623	3487843	3781873
1802081	1995991	3272723	3503053	3784873
1805081	1998991	3283823	3515153	3792973
1820281	3001003	3285823	3517153	3793973
1823281	3002003	3286823	3528253	3799973
1824281	3007003	3288823	3541453	3804083
1826281	3016103	3291923	3553553	3806083
1829281	3026203	3293923	3558553	3812183
1831381	3064603	3304033	3563653	3814183
1832381	3065603	3305033	3569653	3826283
1842481	3072703	3307033	3586853	3829283
1851581	3073703	3310133	3589853	3836383
1853581	3075703	3315133	3590953	3842483
1856581	3083803	3319133	3591953	3853583
1865681	3089803	3321233	3594953	3858583
1876781	3091903	3329233	3601063	3863683
1878781	3095903	3331333	3607063	3864683
1879781	3103013	3337333	3618163	3867683
1880881	3106013	3343433	3621263	3869683
1881881	3127213	3353533	3627263	3871783
1883881	3135313	3362633	3635363	3878783
1884881	3140413	3364633	3643463	3893983
1895981	3155513	3365633	3646463	3899983
1903091	3158513	3368633	3670763	3913193
1908091	3160613	3380833	3673763	3916193
1909091	3166613	3391933	3680863	3918193
1917191	3181813	3392933	3689863	3924293
1924291	3187813	3400043	3698963	3927293
1930391	3193913	3411143	3708073	3931393
1936391	3196913	3417143	3709073	3938393
1941491	3198913	3424243	3716173	3942493
1951591	3211123	3425243	3717173	3946493
1952591	3212123	3427243	3721273	3948493
1957591	3218123	3439343	3722273	3964693
1958591	3222223	3441443	3728273	3970793
1963691	3223223	3443443	3732373	3983893

7278727	7600067	7865687	9149419	9493949	9781879
7291927	7611167	7867687	9169619	9495949	9782879
7300037	7619167	7868687	9173719	9504059	9787879
7302037	7622267	7873787	9174719	9514159	9788879
7310137	7630367	7884887	9179719	9526259	9795979
7314137	7632367	7891987	9185819	9529259	9801089
7324237	7644467	7897987	9196919	9547459	9807089
7327237	7654567	7913197	9199919	9556559	9809089
7347437	7662667	7916197	9200029	9558559	9817189
7352537	7665667	7930397	9209029	9561659	9818189
7354537	7666667	7933397	9212129	9577759	9820289
7362637	7668667	7935397	9217129	9583859	9822289
7365637	7669667	7938397	9222229	9585859	9836389
7381837	7674767	7941497	9223229	9586859	9837389
7388837	7681867	7943497	9230329	9601069	9845489
7392937	7690967	7949497	9231329	9602069	9852589
7401047	7693967	7957597	9255529	9604069	9871789
7403047	7696967	7958597	9269629	9610169	9888889
7409047	7715177	7960697	9271729	9620269	9889889
7415147	7718177	7977797	9277729	9624269	9896989
7434347	7722277	7984897	9280829	9626269	9902099
7436347	7729277	7985897	9286829	9632369	9907099
7439347	7733377	7987897	9289829	9634369	9908099
7452547	7742477	7996997	9318139	9645469	9916199
7461647	7747477	9002009	9320239	9650569	9918199
7466647	7750577	9015109	9324239	9657569	9919199
7472747	7758577	9024209	9329239	9670769	9921299
7475747	7764677	9037309	9332339	9686869	9923299
7485847	7772777	9042409	9338339	9700079	9926299
7486847	7774777	9043409	9351539	9709079	9927299
7489847	7778777	9045409	9357539	9711179	9931399
7493947	7782877	9046409	9375739	9714179	9932399
7507057	7783877	9049409	9384839	9724279	9935399
7508057	7791977	9067609	9397939	9727279	9938399
7518157	7794977	9073709	9400049	9732379	9957599
7519157	7807087	9076709	9414149	9733379	9965699
7521257	7819187	9078709	9419149	9743479	9978799
7527257	7820287	9091909	9433349	9749479	9980899
7540457	7821287	9095909	9439349	9752579	9981899
7562657	7831387	9103019	9440449	9754579	9989899
7564657	7832387	9109019	9446449	9758579	
7576757	7838387	9110119	9451549	9762679	
7586857	7843487	9127219	9470749	9770779	
7592957	7850587	9128219	9477749	9776779	
7594957	7856587	9136319	9492949	9779779	

Литература

1. *Арнольд И. В.* Теоретическая арифметика. — М.: Учпедгиз, 1939.

2. *Башмакова И. Г.* Диофант и диофантовы уравнения. — М.: Наука, 1972. — 68 с.

3. *Берман Г. Н.* Счет и число. — М. — Л.: ОГИЗ Гостехиздат, 1947. — 40 с.

4. *Боро В., Цагир Д., Рольфс Ю., Крафт Х., Янцен Е.* Живые числа. — М.: Мир, 1985. — 128 с.

5. *Брянчанинов И.* Слово о смерти. — М.: Изд-во «P. S.», 1991. — 318 с.

6. *Бухштаб А. А.* Новые результаты в исследовании проблемы Гольдбаха — Эйлера и проблемы простых чисел-близнецов // ДАН. — 162. — № 4 (1965). — С. 735—738.

7. *Виленкин Н. Я. и др.* Алгебра/Н. Я. Виленкин, Р. С. Гутер, С. И. Шварцбург и др. — М.: Просвещение, 1972. — 302 с.

8. *Виноградов И. М.* Основы теории чисел. — М.: Наука, 1972. — 168 с.

9. *Воробьев Н. Н.* Признаки делимости. — М.: Наука, 1980. — 96 с.

10. *Воронин С. М.* Простые числа. — М.: Знание, 1978. — 64 с.

11. *Галочкин А. И., Нестеренко Ю. В., Шидловский А. Б.* Введение в теорию чисел. — М.: Изд.-во МГУ, 1995. — 160 с.

12. *Гарднер М.* Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971. — 510 с.

13. *Гарднер М.* Математические досуги. — М.: Мир, 1972. — 496 с.

14. *Гарднер М.* Математические новеллы. — М.: Мир, 1974. — 454 с.

15. *Гельфонд А. О.* Решение уравнений в целых числах. — М.: Наука, 1978. — 63 с.

16. *Даан-Дальмедико А., Плейфер Ж.* Пути и лабиринты: Очерки по истории математики. — М.: Мир, 1986. — 432 с.

17. *Даль В. И.* Избранные пословицы и поговорки русского народа. — М., 1957.

18. *Даль В. И.* Пословицы русского народа. — М., 1957.

19. *Депман И. Я.* История арифметики. — М.: Учебно-педагогическое издательство Минпроса РСФСР, 1959. — 424 с.

20. *Депман И. Я.* Рассказы о математике. — Л.: Детгиз, 1954. — 143 с.

21. *Депман И. Я.* Совершенные числа // Квант. — 1991. — № 5. — С. 13—22.

22. *Дирак П. А. М.* Эволюция взглядов физиков на картину природы // Вопросы философии. — № 12. — 1963. — С. 83—94.

23. *Дубинин Н. П.* Общая генетика. — М., 1970. — С. 87.

24. *Игнатьев Е. И.* Хрестоматия по математике // В царстве смекалки. — Ростов-на-Дону: Ростовское книжное изд-во, 1995. — 614 с.

25. *Кантор И. Л., Солодовников А. С.* Гиперкомплексные числа. — М.: Наука, 1973. — 144 с.

26. *Клейн Ф.* Элементарная математика с точки зрения высшей. — М. — Л.: ОНТИ ГИТТЛ, 1934. — 444 с.

27. *Кордемский Б. А.* Математическая смекалка. — М.: ГИТТЛ, 1954. — 568 с.

28. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? — М.: Изд-во МЦ НМО, 2001. — 565 с.

29. *Лютикас В. С.* Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. 9—11 кл. — М.: Просвещение, 1990. — 161 с.

30. *Малаховский В. С.* Введение в математику. — Калининград: Янтарный сказ, 1998. — 440 с.

31. *Малаховский В. С.* Диофантовы семейства пифагоровых треугольников. Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 32. — Калининград: Изд-во Калининград. ун.-та, 2001. — с. 69—73.

32. *Малаховский В. С.* Избранные главы истории математики. — Калининград: Янтарный сказ, 2002. — 304 с.

33. *Малаховский В. С.* Пространственная модель натуральных чисел, порожденная подмножествами простых чисел // Вестник Калининградского государственного университета. — Калининград: Изд-во Калининград. ун-та, 2000. — с. 106—112.

34. *Малаховский В. С.* Эти загадочные простые числа. Часть первая. — Калининград: Янтарный сказ, 1998. — 54 с.

35. *Малаховский В. С.* Эти загадочные простые числа. Часть вторая. — Калининград: Янтарный сказ, 1999. — 48 с.

36. *Марутаев М. А.* Гармония как закономерность природы // Золотое сечение. — М., 1990.

37. *Марутаев М. А.* О гармонии как закономерности // Принцип симметрии. — М., 1978.

38. *Марутаев М. А.* О гармонии мира // Вопросы философии. — № 6. — 1994. — С. 71—81.

39. Математика, ее содержание, методы и значение. Т. 1, 2, 3. — М.: Изд-во АНСИР, 1956. — 296 с., 395 с., 336 с.

40. Математический энциклопедический словарь. — М.: Советская энциклопедия, 1988. — 846 с.

41. *Меррел-Вольф.* Математика, философия и йога. — М.: «София», 1999. — 160 с.

42. *Нейгебауэр О.* Точные науки в древности. — М.: Наука, 1968. — 239 с.

43. *Нивен А.* Числа рациональные и иррациональные. — М.: Мир, 1966. — 200 с.

44 *Оре О.* Приглашение в теорию чисел. — М.: Наука, 1980. — 128 с.

45. *Пидоу Д.* Геометрия и искусство. — М.: Мир, 1979. — 334 с.

46. *Рыбникова М. А.* Русские пословицы и поговорки. — М., 1961.

47. *Серпиньский В.* 250 задач по элементарной теории чисел. — М.: Просвещение, 1968. — 260 с.

48. *Серпиньский В.* Что мы знаем и чего не знаем о простых числах. — М. — Л.: Гос. изд-во физико-матем. литературы, 1963. — 92 с.

49. *Сингх Саймон.* Великая теорема Ферма. — М.: Изд.-во Московского центра непрер. матем. образования, 2000. — 288 с.

50. *Снегирев И. М.* Русские в своих пословицах. — СПб, 1831 — 1834.

51. *Соболев А. И.* Народные пословицы и поговорки. — М., 1961.

52. *Спирин А. С.* Русские пословицы. — Ростов: Изд-во Ростовского ун-та, 1985. — 208 с.

53. *Стройк Д. Я.* Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1969. — 327 с.

54. *Стюарт Я.* Концепции современной математики. — Минск: Высшая школа, 1980. — 384 с.

55. *Трост Э.* Простые числа. — М.: Физматгиз, 1959. — 135 с.

56. *Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М.* Фейнмановские лекции по физике. Т. 1, вып. 1, 1965. — С. 137.

57. *Фирсов В.* Тайная жизнь чисел. Мир, который можно сосчитать. — М.: Центрополиграф, 2003. — 423 с.

58. *Хинчин А. Я.* Элементы теории чисел / Энциклопедия элементарной математики, кн. 1. — М.: Гостехиздат, 1951. — с. 253—353.

59. Хрестоматия по истории математики. Кн. 1, 2. — М.: Просвещение, 1976—1977. — 319 с., 224 с.

60. *Цейтен Г. Г.* История математики в древности и в средние века. — М. — Л.: ГТТИ, 1932. — 230 с.

61. *Чаньшев А. Н.* Философия древнего мира. — М.: Высшая школа, 1999. — 704 с.

62. *Штейнгауз Х. Д.* Математический калейдоскоп. — М. — Л.: ГИТТЛ, 1949. — 144 с.

63. Энциклопедия для детей, т. 11. Математика. — М.: Аванта +, 1998. — 688 с.

64. *Юшкевич А. П.* и др. История математики, т. 1, 2, 3 /И. Г. Башмакова, Э. И. Березкина, А. И. Володарский, Б. А. Розенфельд. — М.: Наука, 1970, 1970, 1972. — 352 с., 230 с., 496 с.

65. *Bunt Lucas N. M., Jones Phillip S., Bedient Jack D.* The historical roots of elementary mathematics. — New York: Dover publications inc., 1988. — 299 p.

66. *Lehmer D. N.* List of prine numbers from 1 to 10 006 721. — Washington: D. C. Carnegie institution of Washington publication, № 165, 1914.

67. *Ribenboim Paulo.* Euler's famous prime generating polinomial and class number of imaginary quadratic tields. — L'Enseignement Mathematique, t. 34 (1988), pp. 23—42.

68. *Ribenboim Paulo.* Gipt es primzahlerzeugende Funktionen? — München: Bayerischer Verlag, DdML. — 1994. — S. 81—92.

69. *Ribenboim Paulo.* The little book of big primes. — New York: Springer Verlag, 1988.

70. *Fritsch R.* Autbau des Zahlensystems und Elemente der Zahlentheorie. — München: Univ. München Vorlesungen Wintersemester 1994—1995. — 1994.

Оглавление

Table of Contents

Владислав Степанович Малаховский

Числа знакомые и незнакомые

Учебное пособие

Редактор *В. Е. Москаленко*
Художественный редактор *С. И. Соболев*
Технический редактор *В. Н. Тонковид*
Корректоры: *Ю. В. Конкина, Е. А. Самойлова, С. Н. Фадеева, Е. В. Таргонская*

Подписано к печати 12.02.2004.
Формат 60×90 1/16. Гарнитура Teims. Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 11,5. Уч.-изд. л. 12,7. Тираж 3000 экз. Заказ 7278.

Отдел продаж:
Калининград: тел./факс (0112) 27-91-57;
Тел.: 21-62-51, 21-25-56
E-mail:skas@ric. koenig. su
Интернет-магазин: www. yantskas. ru
Книга — почтой: (0112) 21-62-51
Санкт-Петербург (филиал): (812) 388-58-81
Москва (филиал): (095) 286-76-66

Отпечатано в типографии Федерального государственного издательско-полиграфического предприятия «Янтарный сказ», 236000, Калининград, ул. К. Маркса, 18.