АЛГЕБРА

И НАЧАЛА АНАЛИЗ

ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА: задачи и решения

УДК 512
ББК 22.14
А 45

Авторы:
М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой, Ю.И. Ионин

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, проф. В.Д. Будаев (РГПУ им. А.И. Герцена); канд. физ.-мат. наук Б.Б. Лурье (ПОМИ РАН).

Алгебра и начала анализа: задачи и решения: Учеб. посо-
А 45 бие/М.И. Башмаков, Б.М. Беккер, В.М. Гольховой, Ю.И. Ионин.— М.: Высшая школа, 2004.— 296 с.: ил.

ISBN 5-06-004470-X

В пособии представлены задачи, охватывающие основной круг идей углубленного школьного курса алгебры и начал математического анализа. Наряду с задачами и традиционными упражнениями на непосредственное применение изученных в школьном курсе правил и теорем в него вошли и такие задачи, в которых требуется творчески осмыслить основные вопросы школьного курса, установить связи между различными темами, самостоятельно изучить новые понятия. Задачи объединены в циклы, в которых они связаны общей идеей и расположены в порядке возрастания трудности. Упражнения с использованием одного и того же приема, как правило, не дублируются. Некоторым задачам предшествует теоретический комментарий, поясняющий формулы, новые понятия, целые темы, не входящие в школьную программу (например, мультипликативные функции, формулы обращения, комбинаторные игры и графы.

Для студентов математических факультетов университетов, преподавателей и всех любителей математики.

УДК 512
ББК 22.14

ISBN 5-06-004470-X

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5

ЧАСТЬ 1. ЗАДАЧИ 7

Глава 1. Математический язык 7
- § 1. Логические задачи 7
- § 2. Множества 11
- § 3. Вещественные числа 16
- § 4. Отображения множеств 22

Глава 2. Рациональные функции 25
- § 1. Линейные функции 25
- § 2. Кусочно-линейные функции 26
- § 3. Дробно-линейные функции 30
- § 4. Параболы и окружности 31
- § 5. Исследование квадратной функции 34
- § 6. Среднее арифметическое и среднее геометрическое 38
- § 7. Рациональные уравнения и неравенства 41
- § 8. Иррациональные уравнения и неравенства 45
- § 9. Графики рациональных функций 47

Глава 3. Последовательности 50
- § 1. Математическая индукция 50
- § 2. Рекуррентные соотношения 55
- § 3. Суммирование 58

Глава 4. Целые числа 61
- § 1. Делимость 61
- § 2. Сравнения 72
- § 3. Уравнения в целых числах 76

Глава 5. Комбинаторика 78
- § 1. Комбинаторные игры 78
- § 2. Комбинаторные рассуждения 82
- § 3. Перебор вариантов 88

§ 4. Биномиальные коэффициенты 94
§ 5. Графы 98
Глава 6. Тригонометрические функции 104
§ 1. Определение тригонометрических функций 104
§ 2. Теоремы сложения 109
§ 3. Обратные тригонометрические функции 115
§ 4. Тригонометрические уравнения и неравенства 116
§ 5. Исследование тригонометрических функций 119
Глава 7. Показательные и логарифмические функции 122
§ 1. Логарифмы 122
§ 2. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства 123
Глава 8. Комплексные числа 127
§ 1. Действия над комплексными числами 127
§ 2. Комплексная плоскость 130
Глава 9. Функции и пределы 137
§ 1. Сравнение бесконечных множеств 137
§ 2. Числовые функции 140
§ 3. Предел последовательности 145
§ 4. Предел функции 150
§ 5. Свойства непрерывных функций 153
Глава 10. Производная и интеграл 156
§ 1. Вычисление производных 156
§ 2. Касательная 158
§ 3. Монотонность. Экстремумы 160
§ 4. Вычисление интегралов 167
§ 5. Натуральный логарифм 173
§ 6. Приложения интеграла 176
ЧАСТЬ 2. УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ 184
Глава 1 184
Глава 2 188
Глава 3 199
Глава 4 204
Глава 5 218
Глава 6 238
Глава 7 245
Глава 8 248
Глава 9 250
Глава 10 258
ЧАСТЬ 3. ОТВЕТЫ 272

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — задачник, охватывающий основные темы школьного курса алгебры и анализа. Среди собранных в нем задач есть традиционные упражнения на непосредственное применение изученных в школьном курсе правил и теорем, но много и таких, которые могут значительно расширить математический кругозор читателя — школьника, — это задачи, в которых нужно творчески осмыслить основные вопросы школьного курса, установить связи между различными темами, самостоятельно изучить новые понятия. Авторы стремились представить задачи таким образом, чтобы выделить основные идеи и методы, пронизывающие элементарную математику (в части, традиционно относящейся к алгебре и анализу). Этих идей на самом деле не так уж много, и активное их осознание поможет читателю не только ориентироваться в разнообразных школьных и конкурсных задачах, но и составить более цельное впечатление об изучаемых разделах математики. Некоторые важные темы из книги не входят в действующую школьную программу, и у читателя не предполагается наличия каких-либо предварительных знаний по этим темам.

Однако настоящая книга отнюдь не представляет собой простого собрания задач. Главное заключается в расположении материала: оно должно побуждать читателя к самостоятельной работе и прививать ему навыки математического мышления. Задачи объединены в циклы, которые начинаются с более простых вопросов и постепенно подводят к более общим и трудным. При этом, как правило, упражнения на один и тот же прием не дублируются — каждое содержит какой-то новый элемент, так что решать их в каждом цикле полезно подряд.

Задачи имеют двойную нумерацию (например, 2.38 означает 38-ю задачу 2-й главы; эта задача, в свою очередь, делится на пять пунктов 1–5). Многие такие задачи-циклы имеют маленькие подзаголовки, называющие тему этого цикла (например: 2.39 — *теорема Виета*, 2.40 — *расположение корней квадратной функции*). Перед текстом отдельных задач, а также в начале параграфов помещен небольшой теоретический вводный текст, где сообщаются необходимые сведения — формулы, определения новых понятий и т. п., так что задачником можно пользоваться независимо от того или иного учебного пособия.

Во второй части книги ко многим циклам задач даны краткие указания, которыми советуем постоянно пользоваться, особенно после попыток самостоятельно решить задачу и в тех случаях, когда возникли затруднения из-за каких-либо новых, непривычных понятий или постановок вопросов. Как обычно, наиболее трудные задачи обозначены звездочкой.

При отборе задач авторы использовали материалы, опубликованные в разные годы в журнале «Квант», задачи международных, всероссийских (всесоюзных) и петербургских (ленинградских) школьных олимпиад, студенческих соревнований, задачи конкурсных экзаменов ведущих петербургских и московских вузов. Многие задачи составлены специально для этой книги.

Книга предназначена прежде всего для самостоятельной работы и рассчитана на учеников старших классов школы, интересующихся математикой. Она может быть полезной студентам математических факультетов университетов и педагогических институтов, а также преподавателям средней школы, руководителям математических кружков и факультативов. Авторы надеются, что учителя, руководители кружков и факультативов оценят новую постановку вопросов в традиционных ситуациях. Многие циклы задач могут служить основой для внеклассной работы по математике.

Большая часть задач предлагаемой книги прошла проверку в Академической гимназии Санкт-Петербургского государственного университета (ФМШ при ЛГУ) и в Северо-Западной заочной математической школе при СПбГУ. Авторы приносят глубокую благодарность педагогам и математикам, работавшим в разное время в АГ и ЗМШ, опыт которых отражен в задачнике. Неоценимую роль в замысле и исполнении этой книги сыграло многолетнее общение и дружба с $\boxed{\text{Н. Б. Васильевым}}$, В. Л. Гутенмахером, А. А. Егоровым, Л. Д. Курляндчиком, А. Й. Плоткиным, Ж. М. Рабботом, С. В. Фоминым и многими другими. Авторы также выражают благодарность О. Ю. Подкопаевой за помощь в подготовке рукописи к печати.

ЧАСТЬ 1. ЗАДАЧИ

Глава 1
МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

§ 1. Логические задачи

1.1. *Вводные задачи.* Для решения следующих задач не требуется ни математической символики, ни формул.

1. Собралось несколько человек, из которых одни всегда говорят правду, а другие всегда лгут. Один из этих людей сказал про второго, что он лжец. Второй сказал то же самое про третьего, третий — про четвертого, и т. д., последний сказал то же самое про первого. Что вы можете сказать о числе людей в этой группе?

2. В некотором государстве все, кроме политиков, всегда говорят правду, а политики всегда лгут. Иностранный турист встречает трех жителей этого государства: блондина, брюнета и рыжего — и спрашивает блондина: «Вы политик?» Услышав ответ блондина, брюнет говорит: «Блондин сказал, что он не политик», на что рыжий заявил, что блондин политик. Сколько политиков среди этих трех жителей?

3. В том же государстве иностранный турист встречает трех других жителей и спрашивает: «Сколько среди вас политиков? Первый отвечает: «Мы все политики». Второй говорит: «Нет, только двое из нас политики». Третий добавляет: «Это тоже не так». Является ли третий политиком?

4. Трех мудрецов — слепого, одноглазого и зрячего — посадили в тюрьму. Тюремщик сказал мудрецам, что из имеющихся у него трех белых и двух красных колпаков он выберет три и наденет их им на головы так, что ни один из них не будет знать, какой именно колпак у него на голове. Надев колпаки на мудрецов, тюремщик пообещал, что выпустит на волю того, кто определит цвет своего колпака. Зрячий мудрец сказал, что он не может определить, какого цвета на нем

колпак. После этого одноглазый сказал то же самое. Тогда слепой сказал: «Я знаю, какого цвета на мне колпак». Какого цвета на нем колпак?

5. Шесть сослуживцев: Алексей, Борис, Виктор, Георгий, Дмитрий и Евгений – собрались у одного из них. Все шестеро расположились за круглым столом. Один из гостей был молчаливым, другой — болтливым, третий — толстым, четвертый — лысым, пятый ненавидел Георгия. Тот, кто ненавидел Георгия, сидел напротив Бориса. Молчаливый сидел напротив Виктора, который сидел между лысым и тем, кто ненавидел Георгия. Толстый сидел напротив Алексея, рядом с молчаливым и слева от того, кто ненавидел Георгия. Лысый сидел между Виктором и тем, кто сидел напротив того, кто ненавидел Георгия. Евгений, который был дружен со всеми остальными, сидел рядом с толстым и напротив хозяина дома. Как звали молчаливого, болтливого, толстого, лысого, хозяина дома и того, кто ненавидел Георгия?

Из одних утверждений можно получать другие, используя логические связки. Для часто встречающихся связок вводятся специальные обозначения. Так, $\neg$ используется для обозначения *не* и *нет*, $\vee$ обозначает *или*, символ $\wedge$ используется вместо *и*, $\Rightarrow$ вместо *если…, то*. Например, если буквой A обозначить утверждение *четырехугольник имеет две равные стороны*, а буквой B — утверждение *четырехугольник имеет два равных угла*, то $\neg A$ означает *четырехугольник не имеет равных сторон*, $A \vee B$ означает *четырехугольник имеет две равные стороны или два равных угла*, $A \wedge B$ означает *четырехугольник имеет две равные стороны и два равных угла*, и наконец, $A \Rightarrow B$ означает *если четыреугольник имеет две равные стороны, то в нем есть два равных угла*.

Об истинности или ложности утверждений, составленных из более простых утверждений с помощью логических связок, можно судить, если известно, истинны или ложны эти простые утверждения. Утверждение $\neg A$ считается истинным в том и только в том случае, если A ложно; $A \vee B$ ложно в том и только в том случае, если A ложно и B ложно; $A \wedge B$ истинно в том и только в том случае, если A истинно и B истинно; $A \Rightarrow B$ ложно в том и только в том случае, если A истинно и B ложно.

1.2. Разбейте утверждения на более простые, обозначьте их и запишите данные утверждения, используя логические связки:

1. Число 13^5+5 делится на 11 и на 19.

2. Если дробь $\dfrac{6789}{12345}$ несократима, то или ее числитель, или ее знаменатель не делится на 13.

3. Если сегодня не выходной день, то Коля идет в школу, если у него нет высокой температуры.

4. Если число x меньше числа y, то если эти числа одного знака, то $\dfrac{1}{x} > \dfrac{1}{y}$, а если они разных знаков, то $\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{y}$.

5. Если произведение целых чисел x и y делится на простое число p и не делится на p^2, то одно из чисел x, y делится на p, а другое на p не делится.

6. Если натуральные числа x и y таковы, что $x^y = y^x + 1$, то $x = 3$, а $y = 2$.

1.3. Через $A(x)$ обозначено утверждение *число x четно*. Прочтите следующие утверждения и выясните, какие из них верны при всех значениях x и y:

1. $(A(x) \wedge A(y)) \Rightarrow A(x+y)$.
2. $(A(x) \vee A(y)) \Rightarrow A(x+y)$.
3. $A(x+y) \Rightarrow (A(x) \vee A(y))$.
4. $A(xy) \Rightarrow (A(x) \vee A(y))$.
5. $(A(x) \vee A(y)) \Rightarrow (A(x) \wedge A(y))$.
6. $A(x+y) \Rightarrow (A(x) \Rightarrow A(y))$.
7. $(A(x+y) \Rightarrow A(x)) \Rightarrow A(y)$.
8. $(\neg A(x) \wedge A(y)) \Rightarrow \neg A(x+y)$.
9. $(A(x) \vee A(y)) \Rightarrow \neg A(xy+1)$.

1.4. Докажите истинность следующих утверждений:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$.
2. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.
3. $((A \Rightarrow B) \wedge A) \Rightarrow (A \wedge B)$.
4. $A \Rightarrow (B \Rightarrow (A \wedge B))$.
5. $(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B)$.
6. $A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.
7. $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$.

1.5. Определите, правильны ли следующие рассуждения:

1. Если Петя не видел Колю на улице, то либо Коля ходил в кино, либо Петя сказал правду. Если Коля не ходил в кино, то Петя не видел Колю на улице и Коля сказал правду. Если Коля сказал правду, то либо он ходил в кино, либо Петя солгал. Значит, Коля не ходил в кино.

2. Если $x > a$, то либо $x > b$, либо $x < c$. Если $x \leqslant b$, то $x < d$. Если $x < d$ и $x > a$, то $x \geqslant c$. Если $x < d$ и $x \leqslant b$, то $x > a$. Следовательно, $x > b$.

3. Если окно в комнату было закрыто, то дворецкий сказал правду. Известно, что либо дворецкий сказал правду, либо садовник солгал. Мы также знаем, что либо садовник сказал правду, либо окно было закрыто. Значит, садовник солгал.

1.6. *Кванторы.* Для символической записи многих утверждений приходится использовать не только логические связки, но и *кванторы*, т. е. символ $\forall$, который заменяет слова *для всех, для каждого, все, для любого* и т. п., и символ $\exists$, заменяющий слова *существует, найдется, некоторый* и т. п. Например, если утверждение $A(x)$ означает *Река x впадает в Каспийское море*, то $\forall x A(x)$ является краткой записью утверждения *Все реки впадают в Каспийское море*, в то время как утверждение $\exists x A(x)$ следует читать: *Некоторые реки впадают в Каспийское море*. Утверждение $\forall x A(x)$ считается истинным, если $A(x)$ истинно для всех возможных значений x, а утверждение $\exists x A(x)$ истинно, если $A(x)$ истинно хотя бы для одного значения x.

В следующих задачах запишите данные утверждения, используя логические связки, кванторы и обозначения, предложнные в скобках.

1. Все рыбы умеют плавать. ($A(x)$: *x — рыба*, $B(x)$: *x умеет плавать*.)

2. Не все птицы умеют летать. ($A(x)$: *x — птица*, $B(x)$: *x умеет летать*.)

3. Кто хочет, тот добьется. ($A(x)$: *x хочет*, $B(x)$: *x добьется*.)

4. Если кто-нибудь может прыгнуть в окно, то и Коля может. ($A(x)$: *x может прыгнуть в окно*.)

5. Либо каждый любит кого-нибудь и ни один не любит всех, либо некто любит всех и кто-то не любит никого. ($A(x,y)$: *x любит y*.)

1.7. Про каждую из следующих пар утверждений определите, является ли одно из них следствием другого:

1. $\forall x(A(x) \wedge B(x))$, $\quad \forall x(A(x)) \wedge \forall x(B(x))$.
2. $\exists x(A(x) \wedge B(x))$, $\quad \exists x(A(x)) \wedge \exists x(B(x))$.
3. $\forall x(A(x) \vee B(x))$, $\quad \forall x(A(x)) \vee \forall x(B(x))$.
4. $\exists x(A(x) \vee B(x))$, $\quad \exists x(A(x)) \vee \exists x(B(x))$.
5. $\forall x(A(x) \Rightarrow B(x))$, $\quad \forall x(A(x)) \Rightarrow \forall x(B(x))$.
6. $\exists x(A(x) \Rightarrow B(x))$, $\quad \exists x(A(x)) \Rightarrow \exists x(B(x))$.
7. $\neg \forall x A(x)$, $\quad \exists x \neg A(x)$.
8. $\neg \exists x A(x)$, $\quad \forall x \neg A(x)$.
9. $\forall x \exists y A(x,y)$, $\quad \exists y \forall x A(x,y)$.

1.8. Запишите отрицания следующих утверждений, не используя символа $\neg$:

1. $\forall x(x < 1)$.
2. $\forall x \exists y(x + y \geqslant x^2)$.
3. $\exists x(y^2 > x \Rightarrow x^2 > y)$.
4. $\forall y(y = 1 \Rightarrow x > y)$.

1.9. В каждой из следующих формул есть только одна переменная, вместо которой можно подставлять вещественные числа, получая при этом истинные или ложные утверждения. Найдите все значения этой переменной, при которых получаемое утверждение истинно.

1. $\forall y(y = 1 \Rightarrow x > y)$.
2. $\forall x(x < y \Rightarrow x^2 < 1)$.
3. $\forall x(x < y \Rightarrow x^2 > 1)$.
4. $\exists y(xy = 1 \Rightarrow y^2 = 1)$.
5. $\exists x(y > x \vee x \geqslant 1)$.
6. $\forall z \exists y(z^2 > x + y^2)$.
7. $\exists z \forall y(z^2 < x + y^2)$.

§ 2. Множества

Множество — это произвольная совокупность предметов. Предметы, из которых составлено множество, называют его *элементами*. Запись $x \in A$ означает, что x является элементом множества A. Запись $x \notin A$ означает, что x не является элементом множества A. Множества можно описывать по-разному. Иногда множество задают перечислением его элементов. Например, $A = \{2,3,5,7\}$ означает, что множество A состоит из чисел 2, 3, 5 и 7. Такую запись неудобно использовать, когда в множестве слишком много элементов. Часто, чтобы задать множество, указывают свойство, характеризующее его элементы. Так, формула $\left\{x\colon \dfrac{1}{x} < 2\right\}$ задает множество всех решений неравенства $\dfrac{1}{x} < 2$. Вообще формула $\{x\colon A(x)\}$ служит обозначением множества всех x, для которых верно утверждение $A(x)$. За некоторыми особенно часто встречающимися множествами закреплены стандартные обозначения. Так, $\mathbb{N}$ обозначает множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел, $\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел, $\mathbb{R}$ — множество всех вещественных чисел. Различные промежутки на числовой оси тоже имеют специальные обозначения. Например, $[3;5]$ — это множество всех точек числовой оси, расположенных между 3 и 5, включая 3 и 5; $[-2;7)$ — это множество всех точек числовой оси, расположенных между -2 и 7, включая -2 и не включая 7; $(4;+\infty)$ обозначает множество всех вещественных чисел, больших 4; $(-\infty;3]$ — это множество всех вещественных чисел, меньших или равных 3. Символом $\varnothing$ обозначается так называемое *пустое множество* — в нем нет ни одного элемента.

1.10. Установите, верны ли следующие утверждения:

1. $2 \in \{x\colon 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0\}$.
2. $-3 \in \left\{x\colon \dfrac{x^3-1}{x^2+2} < -2\right\}$.
3. $3 \in \left\{x\colon \exists n \in \mathbb{N}\; x = \dfrac{2n+1}{3n-2}\right\}$.
4. $\varnothing \in \varnothing$.
5. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.
6. $\{2\} \in \mathbb{N}$.

1.11. *Подмножества.* Если каждый элемент множества A принадлежит множеству B, то говорят, что A является *подмножеством* множества B и пишут $A \subseteq B$ или $B \supseteq A$.

Установите, верны ли следующие утверждения:

1. $\{-1,1,2\} \subseteq \{x\colon x^3 + x^2 - x - 1 = 0\}$.
2. $\{x\colon x^3 + x^2 - x - 1 = 0\} \subseteq \{-1,1,2\}$.
3. $\left\{x\colon \dfrac{2x-3}{2x^3-5x^2+x+3} = 1\right\} \supseteq \{x\colon 2x - 3 = 2x^3 - 5x^2 + x + 3\}$.
4. $\varnothing \subseteq \mathbb{N}$.
5. $\varnothing \subseteq \varnothing$.
6. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.

1.12. *Пересечение множеств.* Множество элементов, содержащихся как в A, так и в B, называется *пересечением* множеств A и B и обозначается $A \cap B$. Используя логическую символику, определение пересечения можно записать так:

$$A \cap B = \{x\colon x \in A \wedge x \in B\}.$$

В следующих задачах найдите пересечение множеств A и B.

1. $A = \{1,2,3,4\}, B = \{5,4,3,2\}$.
2. $A = [-1;10], B = (5;+\infty)$.
3. $A = (-3;2], B = \{x\colon x^2 > 10\}$.
4. A — множество всех четных чисел, B — множество всех чисел, кратных трем.
5. A — множество всех ромбов, B — множество всех прямоугольников.
6. $A = \{x\colon x^4 - 3x^2 + 2x + 4 = 0\}$, $B = \{x\colon 2x^4 + x^2 + 4x + 1 = 0\}$.

1.13. *Объединение множеств.* Множество элементов, содержащихся хотя бы в одном из множеств A, B, называется *объединением* множеств A и B и обозначается $A \cup B$. Используя логическую символику, определение объединения можно записать так:

$$A \cup B = \{x\colon x \in A \vee x \in B\}.$$

В следующих задачах найдите объединение множеств A и B.

1. $A = \{-1,0,1,4\}, B = \{3,2,1,0\}$.
2. A — множество всех целых чисел, не делящихся на 6, B — множество всех целых чисел, не делящихся на 9.
3. $A = (-4;5], B = (0;+\infty)$.

1.14. *Разность множеств.* Множество элементов, содержащихся в множестве A, но не содержащихся в множестве B, называется *разностью* множеств A и B и обозначается $A \setminus B$. Используя логическую символику, определение разности можно записать так:

$$A \setminus B = \{x\colon x \in A \wedge x \notin B\}.$$

В следующих задачах найдите разность множеств A и B.

1. $A = \left\{-1, \frac{1}{2}, 3\right\}, B = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}, 5\right\}$.

2. A — множество всех правильных треугольников, B — множество всех равнобедренных треугольников.

3. A — множество всех целых чисел, делящихся на 6, B — множество всех целых чисел, не делящихся на 4.

4. $A = \left\{x\colon \dfrac{x-1}{x^3+x+1} > 0\right\}, B = \{x\colon x^3+x+1 \leqslant 0\}$.

1.15. В следующих задачах $A = \{0,3,4,7,8\}$, $B = \{1,2,5,6,9\}$, $C = \{0,3,4,5,6,9\}$, $D = \{0,2,3,4,5,6,7,8,10\}$. Найдите множества:

1. $(A \setminus B) \setminus C$.
2. $A \setminus (B \setminus C)$.
3. $A \cap (B \cup C)$.
4. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$.
5. $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$.

1.16. Докажите следующие утверждения.

1. $A \setminus (A \cap B) = (A \cup B) \setminus B = A \setminus B$.
2. $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$.
3. Если $A \subseteq B \cup C$ и $A \cap B = \varnothing$, то $A \subseteq C$.
4. Если $A \subseteq B$, то $A \setminus C \subseteq B \setminus C$.
5. Если $C \subseteq A$ и $D \subseteq B$, то $D \setminus A \subseteq B \setminus C$.
6. Если $A \cup B \subseteq C \cup D$, $A \cap B = \varnothing$ и $C \subseteq A$, то $B \subseteq D$.
7. $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$.
8. $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.
9. $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cap D)$.

1.17. Приведите примеры множеств, показывающие, что следующие утверждения неверны.

1. Если $A \cup C \subseteq B \cup C$, то $A \subseteq B$.
2. Если $A \cap C \subseteq B \cap C$, то $A \subseteq B$.
3. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus (A \setminus C)$.
4. $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \setminus C$.

1.18. Множество $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ называется *симметрической разностью* A и B и обозначается $A \triangle B$. Докажите следующие утверждения.

1. $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. $A \triangle A = \varnothing$.
3. $A \triangle \varnothing = A$.

4. $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
5. $(A \triangle C) \triangle (B \triangle C) = A \triangle B$.
6. $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$.
7. $A \cup (B \triangle C) \supseteq (A \cup B) \triangle (A \cup C)$.
8. $(A \cup B) \triangle (A \cup C) \subseteq (A \triangle B) \triangle C$.

1.19. Для любого множества A обозначим через $\mathscr{P}(A)$ множество всех подмножеств множества A. Верны ли следующие утверждения?

1. $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
2. $\mathscr{P}(A \cup B) = \mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B)$.
3. $\mathscr{P}(A \setminus B) \neq \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$.
4. $\mathscr{P}(A \setminus B) \supseteq \mathscr{P}(A) \setminus \mathscr{P}(B)$.

1.20. *Операции Пирса и Шеффера.*

1. Докажите, что не существует справедливого для любых множеств A и B равенства, левая часть которого равна $A \setminus B$, а правая получена из A и B с помощью операций объединения и пересечения.

2. Докажите, что не существует справедливого для любых множеств A и B равенства, левая часть которого равна $A \cup B$, а правая получена из A и B с помощью операций разности и пересечения.

3. Операция Пирса каждым двум подмножествам A и B данного множества X ставит в соответствие множество $X \setminus (A \cup B)$. Докажите, что объединение, разность и пересечение любых двух подмножеств множества X можно получить из этих подмножеств, применяя только операцию Пирса (если понадобится, несколько раз).

4. Операция Шеффера каждым двум подмножествам A и B данного множества X ставит в соответствие множество $X \setminus (A \cap B)$. Докажите, что объединение, разность и пересечение любых двух подмножеств множества X можно получить из этих подмножеств, применяя только операцию Шеффера (если понадобится, несколько раз).

5. Операция $*$ каждым двум подмножествам данного множества X ставит в соответствие некоторое подмножество множества X. Докажите, что если объединение, разность и пересечение любых двух подмножеств множества X можно получить из этих подмножеств, применяя только операцию $*$, то операция $*$ является либо операцией Пирса, либо операцией Шеффера.

§ 3. Вещественные числа

1.21. *Десятичная запись рационального числа.* Построение десятичной записи произвольного вещественного числа легко сводится к построению десятичной записи чисел отрезка $[0;1]$. Пусть α — число из отрезка $[0;1]$. Разобьем этот отрезок на десять равных частей, пронумеруем их последовательно цифрами $0,1,2,\ldots,9$ и обозначим через c_1 номер отрезка, содержащего число α. Разобьем отрезок $\left[\frac{c_1}{10};\frac{c_1+1}{10}\right]$ (это и есть отрезок с номером c_1) на десять равных частей, пронумеруем их последовательно цифрами $0,1,2,\ldots,9$ и обозначим через c_2 номер отрезка, содержащего число α, и т. д. Бесконечная десятичная дробь $0,c_1c_2\ldots$ и является десятичной записью числа α.

1. Докажите, что рациональное число, которое можно представить в виде $\frac{m}{10^n}$ (m,n — целые), имеет две десятичные записи. Как эти записи связаны с десятичной записью числа m? Докажите, что рациональные числа, не представимые в виде $\frac{m}{10^n}$, имеют одну десятичную запись.

2. Докажите, что первая цифра десятичной записи несократимой дроби p/q, где q отлично от 2, 5, 10, равна целой части числа $\frac{10p}{q}$.

3. Правильная дробь p/q не представима в виде $\frac{m}{10^n}$, r — остаток от деления $10p$ на q. Докажите, что если $0,c_1c_2c_3\ldots$ — десятичная запись числа p/q, то $0,c_2c_3c_4\ldots$ — десятичная запись числа r/q.

4. Докажите, что десятичная запись рационального числа периодична. (Бесконечная десятичная дробь $0,c_1c_2c_3\ldots$ называется *периодической*, если найдутся такие номера k и l, $k<l$, что $c_k = c_l$, $c_{k+1}=c_{l+1}$ и т. д. Если $k>1$, такая дробь записывается в виде $0,c_1c_2\ldots c_{k-1}(c_k\ldots c_{l-1})$. Если $k=1$, дробь $0,(c_1\ldots c_{l-1})$ называется *чисто периодической*.)

5. Найдите десятичные записи чисел $\frac{7}{25}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{7}$, $\frac{7}{6}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{11}{15}$, $\frac{37}{30}$.

6. Натуральное число q не делится ни на 2, ни на 5. Докажите, что существует такое натуральное число n, что 10^n-1 делится на q.

7. p и q — натуральные числа, $p<q$, q не делится ни на 2, ни на 5. Докажите, что десятичная запись числа p/q — чисто периодическая.

Если n — наименьшее натуральное число, такое, что $10^n - 1$ делится на q, то период десятичной записи числа p/q состоит из n цифр.

8. Докажите, что любая бесконечная чисто периодическая десятичная дробь является записью некоторого рационального числа, представимого в виде дроби, знаменатель которой не делится ни на 2, ни на 5.

9. Докажите, что любая бесконечная периодическая десятичная дробь является десятичной записью какого-либо рационального числа.

1.22. Докажите, что между любыми двумя вещественными числами есть бесконечно много рациональных чисел и бесконечно много иррациональных чисел.

1.23. *Десятичная запись иррационального числа.* Докажите иррациональность следующих чисел:

1. $0,101001000100001\ldots$ 2. $0,123456789101112\ldots$
3. $0,149162536498110 0\ldots$ 4. $0,248163264128256\ldots$

5. Первые две цифры после запятой в десятичной записи некоторого числа — 1 и 2. Две следующие цифры получены из первых двух заменой 1 на 2 и 2 на 1. Следующие четыре получены из первых четырех заменой 1 на 2 и 2 на 1. По тому же правилу получены следующие восемь цифр, затем еще шестнадцать и т. д.

6. $0,d_1d_2d_3\ldots$, где

$$d_n = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ имеет вид } 4k+1,\\ 1, & \text{если } n \text{ имеет вид } 4k+3,\\ d_{\frac{n}{2}}, & \text{если } n \text{ четно.} \end{cases}$$

1.24. Зная достаточное число цифр в десятичных записях двух чисел, можно найти требуемое число цифр в десятичной записи их суммы, разности, произведения, частного. Выясните, сколько можно найти десятичных знаков чисел $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ по заданным десятичным знакам чисел α и β:

1. $\alpha = 2,30144\ldots$, $\beta = 0,23761\ldots$
2. $\alpha = 3,12375\ldots$, $\beta = 1,02784\ldots$

1.25. В некоторых случаях несколько первых цифр десятичной записи числа можно найти, оценив это число с достаточной степенью точности.

Найдите первые 20 цифр после запятой в десятичной записи чисел:

1. $\sqrt{1-(0,1)^{20}}$.
2. $(5-\sqrt{26})^{20}$.
3. $(5+\sqrt{26})^{20}$.
4. $(\sqrt{1001}-\sqrt{1000})^{12}$.

1.26. Выясните, какое из чисел больше:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$.
2. $\sqrt{3}+\sqrt{7}$ или $2\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{6}+2\sqrt{7}$ или $\sqrt{10}+\sqrt{21}$.
4. $\sqrt{11}$ или $5-\sqrt[3]{5}$.

1.27. Известно, что для натуральных чисел n и a число $\sqrt[n]{a}$ является либо целым, либо иррациональным. Докажите иррациональность чисел:

1. $\sqrt{2}+\sqrt{3}$.
2. $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$.
3. $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$.
4. $(2+\sqrt{3})^{100}$.
5. $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$.
6. $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

1.28. *Освобождение от иррациональности в знаменателе.* Среди вещественных чисел выделяются те, которые можно получить из рациональных чисел с помощью операций сложения, вычитания, умножения, деления и извлечения корня. Справедливо следующее утверждение: *всякое число, которое можно получить из рациональных чисел с помощью этих операций , можно получить из рациональных чисел и не используя операцию деления.* Предлагаем вам проверить это утверждение в нескольких частных случаях. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

1. $\dfrac{2}{\sqrt{2}}$.
2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.
3. $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}$.
4. $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$.
5. $\dfrac{7-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$.
6. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.
7. $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.
8. $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}}$.
9. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{7}}$.
10. $\dfrac{1}{1+\sqrt[3]{5}+\sqrt[3]{25}}$.

1.29. *Формула сложного радикала.* Эта формула позволяет в некоторых случаях проще записывать числа вида $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ и $\sqrt{a-\sqrt{b}}$.

1. Представьте числа $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, $\sqrt{7-2\sqrt{10}}$, $\sqrt{12-2\sqrt{35}}$ в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ или $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

2. Числа a и b — рациональные, $\sqrt{b}$ — иррациональное число. Докажите, что число $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ можно представить в виде $\sqrt{x}+\sqrt{y}$, где x и y — рациональные числа, в том и только в том случае, если число $\sqrt{a^2-b}$ — рациональное. Выясните, при каком условии число $\sqrt{a-\sqrt{b}}$ можно представить в виде $\sqrt{x}-\sqrt{y}$.

3. Представьте число

$$\sqrt[8]{\frac{2207+\sqrt{2205\cdot 2209}}{2}}$$

в виде $\dfrac{a+b\sqrt{c}}{d}$, где a, b, c, d — целые числа.

1.30. *Модуль вещественного числа.* Модуль вещественного числа определяется следующим образом: $|x| = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$, если $x < 0$. Следующие свойства модуля хорошо известны: $|x+y| \leqslant |x|+|y|$ и $|xy| = |x||y|$. Докажите следующие неравенства:

1. $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$.
2. $|z-x|-|z-y| \leqslant |x-y| \leqslant |z-x|+|z-y|$.
3. $|x-y|+|y-z|+|z-x| \leqslant 2(|a-x|+|a-y|+|a-z|)$.
4. $|x+y|+|y+z|+|z+x| \leqslant |x|+|y|+|z|+|x+y+z|$.

1.31. *Числовая ось.* Вещественные числа изображаются точками числовой оси. Расстояние между точками, изображающими числа α и β, равно $|\alpha-\beta|$. Пользуясь этим, решите следующие уравнения и неравенства:

1. $|x-1| = 2$.
2. $|x|+|x-3| = 5$.
3. $|x-1|+|x-5| = 3$.
4. $|x+1|+|x-2| = 3$.
5. $|x-5|-|x-1| = 2$.
6. $|x+3|-|x-2| = 5$.
7. $|x-1| = 2|x-4|$.
8. $|x-3| \leqslant 2$.
9. $|x+1| > 1$.
10. $2 \leqslant |x| < 3$.
11. $|x-2| \leqslant |x-4|$.
12. $|x-1|+|x+3| < 6$.

1.32. *Целая часть числа.* Целая часть числа x — это наибольшее целое число, не превосходящее x. Целая часть числа x обозначается $[x]$. Например, $[2,7] = 2$, $[-3] = -3$, $[-0,2] = -1$. Целая часть удовлетворяет следующим неравенствам: $x - 1 < [x] \leqslant x$. Докажите следующие утверждения.

1. Если n — целое число, то $[x+n] = [x] + n$.

2. Если x — нецелое число, то $[x] + [-x] = -1$.

3. $[x] + [x + \frac{1}{2}] = [2x]$.

4. $[x+y] = [x] + [y]$ или $[x+y] = [x] + [y] + 1$.

5. Если $[x+y] = [x] + [y]$ и $[-x-y] = [-x] + [-y]$, то x — целое или y — целое.

6. $[x-y] \leqslant [x] - [y] \leqslant [x-y] + 1$.

7. Если $x > 0$ и $y > 0$, то $[xy] \geqslant [x][y]$.

8. $[2x] + [2y] \geqslant [x] + [y] + [x+y]$.

9. Если n — натуральное число, то $\left[\frac{[nx]}{n}\right] = [x]$.

10*. Если n — натуральное число, то

$$\left[\frac{x}{n}\right] + \left[\frac{x+1}{n}\right] + \left[\frac{x+2}{n}\right] + \dots + \left[\frac{x+n-1}{n}\right] = [x].$$

11**. Если x и y — положительные иррациональные числа, такие, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, то для любого неотрицательного целого числа n можно найти такое целое число k, что либо $n = [kx]$, либо $n = [ky]$.

1.33. Решите следующие уравнения:

1. $[7x] = 5$.	2. $[x] + [2x] + [3x] = 0$.
3. $\left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x - \frac{1}{2}\right] = [2x]$.	4. $[x] + [2x - 1] = 5$.
5. $[2x + 1] = [3x]$.	6. $\left[\frac{1}{x}\right] = [x] + 1$.

1.34. *Перемещения на числовой оси.* Перемещение на числовой оси — это функция φ, заданная на всей числовой оси и сохраняющая расстояние между точками числовой оси, т. е. удовлетворяющая условию: для любых чисел α и β выполняется равенство $|\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)| = |\alpha - \beta|$.

1. Докажите, что перемещение на числовой оси есть либо параллельный перенос, т. е. задается формулой вида $\varphi(x) = x + a$, либо центральная симметрия, т. е. задается формулой вида $\varphi(x) = a - x$.

2*. Существует ли перемещение на числовой оси, преобразующее множество всех рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, в множество всех рациональных чисел, больших $\sqrt{2}$?

3**. Докажите, что можно разбить множество всех рациональных чисел, меньших $\sqrt{2}$, на такие части A_1 и A_2, а множество всех рациональных чисел, больших $\sqrt{2}$, на такие части B_1 и B_2, что A_1 переводится некоторым перемещением в B_1, а A_2 переводится некоторым (возможно, другим) перемещением в B_2.

1.35. *Наилучшие приближения.* Для данного иррационального числа не существует самого близкого к нему рационального числа. Говоря, что несократимая дробь p/q (p и q — натуральные числа) является *наилучшим приближением* положительного вещественного числа α, будем иметь в виду, что любая дробь, более близкая к числу α, чем p/q, имеет знаменатель больше q. В этой задаче укажем простой способ нахождения всех наилучших приближений данного вещественного числа.

Для каждого натурального n можно записать в порядке возрастания все несократимые дроби из отрезка $[0; 1]$ со знаменателями, не превосходящими n, начиная с $\frac{0}{1}$ и кончая $\frac{1}{1}$. Получаемая последовательность дробей называется *последовательностью Фарея порядка* n и обозначается F_n.

1. Докажите, что если a, b, c, d — положительные числа и $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

2*. Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ — последовательные члены последовательности F_{n-1} и $\frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \frac{1}{bd}$. Докажите, что если последовательность F_n содержит такую дробь $\frac{e}{f}$, что $\frac{a}{b} < \frac{e}{f} < \frac{c}{d}$, то $\frac{e}{f} = \frac{a+c}{b+d}$. (В этом случае дробь $\frac{e}{f}$ называется *медиантой* дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$.)

3. Докажите, что если $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{p}{q}$ — последовательные члены какой-нибудь последовательности Фарея, то $|bc - ad| = 1$ и $\frac{c}{d} = \frac{a+p}{b+q}$.

4. α — иррациональное число из отрезка $[0;1]$. Последовательность отрезков $[a_1;b_1]$, $[a_2;b_2], \ldots$ строим следующим образом: в качестве $[a_1;b_1]$ берем отрезок $[0,1]$; разбиваем этот отрезок на две части медиантой его концов, принимаем за $[a_2;b_2]$ ту из частей, которая содержит число α; разбиваем отрезок $[a_2;b_2]$ на две части медиантой его концов, принимаем за $[a_3;b_3]$ ту часть, которая содержит α, и т. д. Докажите, что ближайший к α конец каждого из отрезков построенной последовательности является наилучшим приближением к α. Докажите, что так получим все наилучшие приближения числа α.

5. Найдите все наилучшие приближения числа π со знаменателями меньше 50. .

§ 4. Отображения множеств

Понятие отображения, как и понятие множества, относится к наиболее фундаментальным понятиям математики. Говорят, что задано *отображение множества X в множество Y*, если каждому элементу множества X поставлен в соответствие однозначно определенный элемент множества Y. Если отображение X в Y обозначено буквой f, то пишут $f\colon X \longrightarrow Y$. Множество X называют *областью определения* отображения f. Вместо слова «отображение» часто употребляют слово *функция*. Если $a \in X$, то элемент множества Y, соответствующий при отображении f элементу a, называют *образом элемента a при отображении f* (или же *значением функции f в точке a*) и обозначают $f(a)$. Если $A \subseteq X$, то множество образов всех элементов множества A называют *образом множества A при отображении f* и обозначают $f(A)$. Множество $f(X)$ называют также *множеством значений функции f*.

1.36. Функции $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $g\colon [0;2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $h\colon \mathbb{N} \longrightarrow (0,+\infty)$ заданы следующим образом: $f(x) = [x]$; $g(x) = x$, если $x \leqslant 1$, $g(x) = 2$, если $x > 1$; $h(x)$ — число цифр в десятичной записи числа x. Найдите:

1. $f(-3,7)$.
2. $f((-2,1;3])$.

3. $g(\{\frac{1}{2};1;\frac{3}{2}\})$.

4. $g([1;2))$.

5. $h(2000)$.

6. $h(\mathbb{N}\cap[25;25000])$.

1.37. Если f — отображение множества X в множество Y и $B\subseteq X$, то множество $\{x\in X: f(x)\in B\}$ называется *прообразом множества B при отображении f* и обозначается $f^{-1}(B)$. Если множество B состоит из одного элемента b, то будем писать $f^{-1}(b)$ вместо $f^{-1}(\{b\})$.

Для функций f, g, и h, определенных в задаче 1.36, найдите следующие множества:

1. $f^{-1}(3)$.

2. $f^{-1}\left(\left\{-1,\frac{1}{2},2\right\}\right)$.

3. $f^{-1}([-3;-1])$.

4. $g^{-1}(\mathbb{R})$.

5. $g^{-1}((1;4])$.

6. $g^{-1}\left(\left[\frac{1}{2},+\infty\right)\right)$.

7. $h^{-1}\left(\left(-4,\frac{2}{3}\right)\right)$.

8. $h^{-1}([0,2))$.

1.38. *График числовой функции.* Пусть $X\subseteq\mathbb{R}$. Графиком функции $f\colon X\longrightarrow\mathbb{R}$ называется множество всех точек (x,y) координатной плоскости, удовлетворяющих условиям $x\in X$ и $y=f(x)$. Выясните, существуют ли функции, графики которых — множества точек координатной плоскости, задаваемые условиями:

1. $xy=0$.

2. $xy=1$.

3. $x^2+y^2=1$.

4. $x^2+x=0$.

5. $y^3+y=0$.

6. $x^2+y^2\leqslant 2y-1$.

1.39. Постройте графики каких-либо функций, удовлетворяющих условиям.

1. Область определения функции — промежуток $[0;1]$, множество значений — промежуток $(-\infty,+\infty)$.

2. Область определения функции — промежуток $(0;+\infty)$, множество значений — промежуток $[0;1]$.

3. Область определения функции — промежуток $[0;1]$, множество значений — промежуток $(0;1)$.

4. Область определения функции — промежуток $(0;1)$, множество значений — промежуток $[0;1]$.

1.40. Постройте графики каких-либо функций, определенных на множестве всех вещественных чисел и удовлетворяющих условиям.

1. Множество $f^{-1}(a)$ состоит из одного числа, если $a \neq 0$, $f^{-1}(0) = \varnothing$.

2. Множество $f^{-1}(a)$ состоит из одного числа, если $a \neq 0$, и из двух чисел, если $a = 0$.

3. Для любого числа a множество $f^{-1}(a)$ состоит из двух чисел.

Глава 2

РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Линейные функции

Линейная функция задается на всей числовой оси формулой вида $f(x) = kx + b$, где k и b — вещественные числа. График линейной функции — прямая. Число k называется *угловым коэффициентом* прямой и равно тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс. Любая прямая, не перпендикулярная оси абсцисс, является графиком некоторой линейной функции. Прямые, перпендикулярные оси абсцисс, задаются уравнениями вида $x = a$.

2.1. Для того чтобы задать прямую, достаточно указать на ней две различные точки или же одну точку и направление.

Найдите уравнения прямых, удовлетворяющих следующим условиям.

1. Прямая проходит через точки $(2;0)$ и $(-1;3)$.
2. Прямая проходит через точки $(2;1)$ и $(2;7)$.
3. Прямая проходит через начало координат и параллельна прямой $y = 2x - 1$.
4. Прямая проходит через точку $(-1;2)$ и параллельна прямой $3x - 5y = 2$.
5. Прямая равноудалена от точек $(1;1)$ и $(3;3)$ и перпендикулярна прямой, проходящей через эти точки.

2.2. Функция f задана формулой $f(x) = 5 - 3x$. Найдите следующие множества:

1. $f([-1;3))$.
2. $f((-\infty;2])$.
3. $f^{-1}([0;2])$.
4. $f^{-1}((-1;+\infty))$.

2.3. Функция f задана формулой $f(x) = ax + 1$. Для каждого из следующих утверждений найдите все значения a, при которых оно справедливо:

1. $f([1;3]) = [3;7]$.
2. $f([0;+\infty)) = (-\infty;1]$.
3. $f^{-1}((2;5)) = (-4;-1)$.
4. $f((-\infty;5)) \subseteq [0;2]$.
5. $f([1;2]) \subseteq [-1;3]$.
6. $f([-1;1]) \supseteq (1-a;2-a)$.

2.4. Выясните, при каких значениях a справедливы следующие утверждения:

1. $(2a+1)x > -1$ при всех x из промежутка $(-2;\infty)$.

2. $\forall x \in [-3;2) \quad (x^2 \leq x \vee ax < 2)$.

3. $\forall x \in [-1;1] \quad \left((2a-3)x < 5 \vee x^2 > \dfrac{1}{4}\right)$.

2.5. Всякое уравнение, неравенство, система уравнений или неравенств задает на координатной плоскости фигуру, состоящую из всех точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, неравенству, системе.

Изобразите фигуру, задаваемую следующими условиями:

1. $xy = 0$.
2. $\dfrac{x}{y} = 0$.
3. $\dfrac{x+1}{y-2} = 2$.
4. $x^2 - y^2 = 0$.
5. $x^2 - 5x + 6 = 0$.
6. $x^2 - y^2 = x + y$.
7. $x > 1$.
8. $y < 2$.
9. $x > y$.
10. $xy \leq 0$.
11. $y > 2x - 1$.
12. $y \leq 1 - x$.
13. $y^2 > y$.
14. $x^2 < y^2$.
15. $\begin{cases} 2x - y < 1, \\ x - 2y \geq 3. \end{cases}$
16. $\begin{cases} x + 2y > 1, \\ 2x + 4y \leq 3. \end{cases}$

§ 2. Кусочно-линейные функции

Функция, определенная на всей числовой оси, называется *кусочно-линейной*, если числовую ось можно разбить на промежутки ненулевой длины, внутри каждого из которых эта функция линейна.

Простыми примерами кусочно-линейных функций являются функции $f(x) = |x|$, $f(x) = [x]$ (см. гл. 1), $f(x) = \{x\}$, где $\{x\} = x - [x]$, и $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (знак x), где

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

2.6. Постройте графики функций :

1. $y = \operatorname{sgn} x$.
2. $y = [x]$.
3. $y = \{x\}$.
4. $y = \operatorname{sgn}[x]$.
5. $y = \{x\} + \operatorname{sgn} x$.
6. $y = x + [x]$.
7. $y = x + \{x\}$.
8. $y = \left\{\dfrac{2x-3}{5}\right\}$.

2.7. Постройте графики функций:

1. $y = |x|$.
2. $y = |2x-3|$.
3. $y = |x+1| + 2$.
4. $y = |x-1| + |x+2| - 3x + 1$.
5. $y = |x-3| + |2x+5| - 8$.
6. $y = |||x| - 1| - 1|$.

2.8. Для функции $f(x) = \{x\}$ найдите следующие множества:

1. $f\left(\left(\dfrac{1}{4}; \dfrac{2}{3}\right]\right)$.
2. $f\left(\left[\dfrac{-1}{8}; \dfrac{1}{3}\right]\right)$.
3. $f((0; \sqrt{10}))$.
4. $f^{-1}(\{-0,6; 0,4; 1,3\})$.
5. $f^{-1}\left(\left[0; \dfrac{1}{2}\right)\right)$.
6. $f^{-1}\left(\left[\dfrac{1}{3}; 2\right]\right)$.

2.9. Постройте график функции

$$f(x) = |x| + |x-1| - |2x-4| + |2x-7| - 4$$

и найдите следующие множества:

1. $f(\mathbb{R})$.
2. $f([0;1])$.
3. $f((0; 3,5])$.
4. $f((-\infty; 0))$.
5. $f((-1; 3))$.
6. $f^{-1}(2)$.
7. $f^{-1}(0)$.
8. $f^{-1}([0;1))$.
9. $f^{-1}([0;2])$.
10. $f^{-1}((0; +\infty))$.

2.10. Решите уравнения:

1. $|2x-4|=3x-1$.
2. $|2x+1|=|x-1|+2$.
3. $|2x-3|-|x+1|=5x-10$.
4. $|2x-2|+|x|=3x-2$.

2.11. Решите неравенства:

1. $|x-1|\geq 2x-1$.
2. $2|x-3|<|x|+2$.
3. $|4-x|+2|x+1|>|x|+2x+2$.

2.12. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $\operatorname{sgn} x=\operatorname{sgn} y$.
2. $|x|=|y|$.
3. $[x]=[y]$.
4. $\operatorname{sgn} x=[y]$.
5. $|x|=\operatorname{sign} y$.
6. $|x|=[y]$.
7. $y<\{x\}$.
8. $\{x\}\leq\{y\}$.

2.13. Уравнение $ax+by+c=0$, в котором хотя бы один из коэффициентов a, b отличен от нуля, задает на координатной плоскости прямую. Эта прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, причем координаты точек одной из них удовлетворяют неравенству $ax+by+c\geq 0$, а координаты точек другой — неравенству $ax+by+$ $+c\leq 0$.

Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $|x|+|y|=1$.
2. $|x+1|+|x-1|=|y+1|+|y-1|$.
3. $|x-y|-|2x+y|=|x-1|$.
4. $|x|-|y|\geq 2$.
5. $|x+y+1|+|x-2y|\leq 4$.

2.14. ***Графическое решение уравнений и неравенств, содержащих параметр.***

1. Для каждого значения a решите уравнение

$$|x-a+1|+|x-2a|=x.$$

2. Для каждого значения a решите неравенство

$$|3x-a|+|2x+a|\leq 5.$$

3. Найдите все значения a, при которых наибольшее значение функции $y=2|x+a+1|-|2x-a|$ меньше 2.

2.15. *Наименьшее значение кусочно-линейной функции.* Графики многих кусочно-линейных функций – ломаные. Такая функция может принимать наименьшее и наибольшее значения только в абсциссах вершин ломаной. Это соображение полезно при решении следующих задач.

1. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $f(x) = 2|x-1| + |x+3| - 2|x-a|$ больше 1.

2. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — вещественные числа, $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Выясните, при каких значениях x функция

$$f(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + \ldots + |x-a_n|$$

принимает наименьшее значение.

2.16. *Нахождение формулы по графику.*

1. Постройте графики функций $f(x) = |x| + x$, $g(x) = |2x+1| + 2x$, $h(x) = |x-1| - x$.

2. Функцию, график которой изображен на рис. 1, задайте формулой вида

$$F(x) = \pm f_1(x) \pm f_2(x) \pm \ldots \pm f_n(x) + g(x),$$

где g — линейная функция, а каждая из функций $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — модуль линейной функции.

Докажите, что формулой такого вида можно задать любую функцию, графиком которой является ломаная.

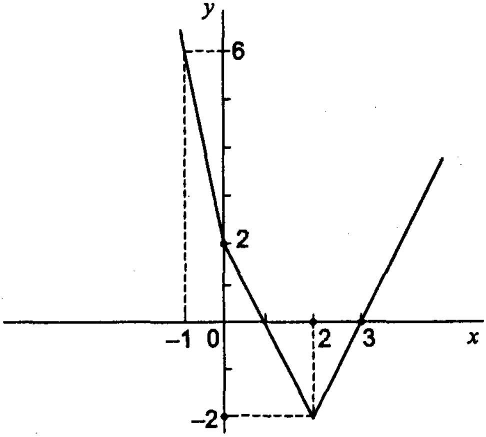

Рис. 1

§ 3. Дробно-линейные функции

Простейшим примером дробно-линейной функции является обратно пропорциональная зависимость $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$. График этой зависимости — линия, называемая *гиперболой*. Вообще гиперболой будем называть любую линию на плоскости, которая в какой-либо системе координат является графиком обратно пропорциональной зависимости.

2.17. Постройте графики функций:

1. $y = 2 - \frac{1}{x}$.
2. $y = \frac{x+1}{2x}$.
3. $y = \frac{2}{x-1}$.
4. $y = 1 + \frac{2}{3x-1}$.
5. $y = \frac{2x+1}{x-2}$.
6. $y = \frac{1-x}{3x+2}$.
7. $f(x) = \frac{3|x|-x}{|x+1|+x}$.
8. $f(x) = \left|\frac{|x|-1}{|x|-2}\right|$.

2.18. Дробно-линейная функция f задана формулой $f(x) = \frac{2x+3}{x+1}$. Найдите следующие множества:

1. $f([0;2])$.
2. $f((-\infty;-3))$.
3. $f([-2;-1))$.
4. $f^{-1}(2)$.
5. $f^{-1}(1)$.
6. $f^{-1}([0;+\infty))$.

2.19. Дробно-линейная функция задается формулой вида $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$. Докажите, что если $c \neq 0$ и $ad - bc \neq 0$, то график дробно-линейной функции — гипербола. Выясните вид графика в остальных случаях.

2.20. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $xy = y + 1$.
2. $xy + x = 2y + 1$.
3. $|xy| = x - y$.
4. $xy = |x| + |y|$.
5. $xy > 1$.
6. $xy < 1$.
7. $x^2y + xy^2 \leq 2xy$.
8. $\frac{y+1}{xy+1} > -1$.

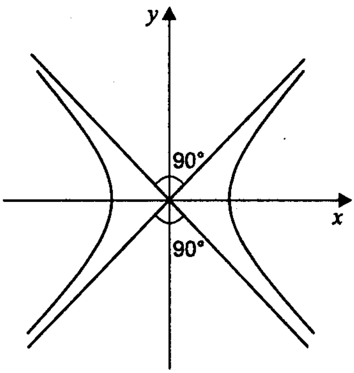

Рис. 2

2.21. Вершины A и C прямоугольника $ABCD$ лежат на гиперболе $xy = 1$, а стороны прямоугольника параллельны координатным осям. Докажите, что прямая BD проходит через начало координат.

2.22. *Гипербола как геометрическое место точек.*

1. Докажите, что гипербола $xy = 1$ есть геометрическое место точек координатной плоскости, разность расстояний которых до точек $(\sqrt{2}; \sqrt{2}), (-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ равна $2\sqrt{2}$.

2. Докажите, что гиперболы $xy = 1$ и $xy = k$ подобны. Чему равен коэффициент подобия?

3. Докажите, что для гиперболы $xy = k$ можно указать такие точки F_1 и F_2 (*фокусы гиперболы*) и такое число a, что эта гипербола есть геометрическое место точек плоскости, разность расстояний которых до точек F_1 и F_2 равна a.

В геометрии гиперболой называют любую линию, являющуюся геометрическим местом точек, разность расстояний которых до двух данных точек постоянна. Этому определению удовлетворяют не только графики обратно пропорциональных зависимостей, но и другие линии, например кривая, задаваемая уравнением $x^2 - 2y^2 = 1$ (рис. 2).

§ 4. Параболы и окружности

Квадратная функция задается формулой вида $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c — вещественные числа, $a \neq 0$. Любая линия на плоскости, которая в некоторой системе координат является графиком квадратной функции, называется *параболой*.

2.23. Из следующих задач вытекает подобие любых двух парабол.

1. Докажите, что параболу $y = ax^2 + bx + c$ можно получить параллельным переносом параболы $y = ax^2$.

2. Докажите, что параболы $y = x^2$ и $y = ax^2$ подобны. Чему равен коэффициент подобия?

2.24. *Построение парабол.*

1. Докажите, что парабола $y = ax^2 + bx + c$ симметрична относительно прямой $x = -\dfrac{b}{2a}$.

2. Постройте параболы $y = x^2 + 2$, $y = -2x^2 - 3$, $y = 4x^2 + 4x + 1$, $y = -3x^2 - 6x + 2$.

2.25. Прямая однозначно определяется точкой и направлением. Покажем, что парабола однозначно определяется тремя точками и направлением оси симметрии.

1. Найдите квадратную функцию, график которой проходит через точки $(1;2)$, $(-1;3)$, $(0;0)$.

2. Точки A, B, C координатной плоскости имеют попарно различные абсциссы и не лежат на одной прямой. Докажите, что существует единственная квадратная функция, график которой проходит через эти точки.

3. На плоскости даны точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, и прямая l, не параллельная прямым AB, AC, BC. Докажите, что существует единственная парабола, проходящая через точки A, B, C, ось симметрии которой параллельна прямой l.

2.26. *Парабола как геометрическое место точек.*

1. Докажите, что парабола $y = x^2$ есть геометрическое место точек координатной плоскости, равноудаленных от точки $\left(0; \dfrac{1}{4}\right)$ и прямой $y = -\dfrac{1}{4}$.

2. Докажите, что любая парабола есть геометрическое место точек плоскости, равноудаленных от некоторой точки F (*фокуса* параболы) и некоторой прямой d (*директрисы* параболы).

3. В геометрии параболой называют геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки и некоторой прямой, не проходящей через эту точку. Докажите, что такое геометрическое место точек в некоторой системе координат является графиком квадратной функции.

2.27. Найдите область значений каждой из следующих функций:

1. $y = x^2 - x$, где $x \geq 1$.
2. $y = x^2 - x$, где $x \in [-1; 1]$.
3. $y = x^4 + 4x^2 - 5$.
4. $y = (x^2 - x - 3)^2 - 2(x^2 - x) + 1$.
5. $y = \{x\} - 2\{x\}^2$.
6. $y = \{3x^2 - x - 1\}^2 - 2\{3x^2 - x - 1\} + 4$.

2.28. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $x^2 = 2y + 1$.
2. $x = y^2$.
3. $y^2 + x = y$.
4. $y > x^2$.
5. $y \leq 1 - x - x^2$.
6. $x < y + y^2$.
7. $x^4 = y^2$.
8. $\dfrac{x^2 + x + y}{x - y} = 1$.

2.29. Найдите все вещественные числа, каждое из которых является корнем какого-либо уравнения вида $x^2 + px + q = 0$, где $|p| \leq 1, |q| \leq 1$.

2.30. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями:

1. $y = |x^2 - x|$.
2. $|y| = x^2 - x$.
3. $|y| = |x^2 - x|$.
4. $y^2 = |x + y|$.
5. $x^2 = |y - x^2|$.
6. $|x| + |y| = |y^2 + x|$.

2.31. *Уравнение окружности.* Окружность радиуса R с центром в точке $(a; b)$ задается уравнением $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

1. Докажите, что каждое из уравнений $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4$, $x^2 + y^2 + 4y = 5$, $x^2 - 3x + y^2 + 2y = 0$ задает окружность. Найдите центры и радиусы этих окружностей.

2. Докажите, что уравнение $x^2 + ax + y^2 + by = c$ задает окружность в том и только в том случае, если $c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} > 0$.

2.32. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими неравенствами:

1. $x^2 + y^2 \leq 4$.
2. $4x^2 + 4y^2 \geq 4x + 2$.
3. $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2x, \\ y \geq x^2. \end{cases}$

2.33. *Графическое решение систем неравенств, содержащих параметр.* Для каждого значения a решите системы неравенств:

1. $\begin{cases} x - a > -1, \\ x^2 - 3x < a - 1. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x^2 + a^2 < 1 \\ x^2 - a^2 > 0. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x^2 + x \leq a, \\ 2x - x^2 \geq a - 1. \end{cases}$
4. $\begin{cases} x - x^2 > a, \\ x - a \leq 1, \\ x + a + 1 \geq 0. \end{cases}$

2.34. *Параболы со взаимно перпендикулярными осями симметрии.*

1. Докажите, что точки пересечения парабол $y = x^2 + x - 40$ и $x = y^2 + y - 41$ лежат на одной окружности.

2. Докажите, что точки пересечения двух конгруэнтных парабол со взаимно перпендикулярными осями лежат на одной окружности.

§ 5. Исследование квадратной функции

2.35. *Квадратное уравнение.* Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где $a \neq 0$, называется *квадратным уравнением*. Число $D = b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* этого уравнения. При $D \geq 0$ вещественные корни уравнения вычисляются по формулам $x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}$ (при $D = 0$ эти корни совпадают); при $D < 0$ уравнение вещественных корней не имеет.

1. При каких значениях a уравнение $(a+1)x^2-(2a-3)x+a=0$ не имеет вещественных корней?

2. При каких значениях a парабола $y=2x^2-x-a$ и прямая $y=$ $=3x-1$ имеют общую точку?

3. При каких значениях a параболы $y=x^2-ax-3$ и $y=2x^2-a$ имеют две общие точки?

2.36. Для функций $f(x)=x^2-3x$ и $g(x)=-2x^2-x+1$ найдите следующие множества:

1. $f((1;3))$.
2. $g([0;1])$.
3. $f^{-1}(-2)$.
4. $f^{-1}((-4;4))$.
5. $g^{-1}(2)$.
6. $g^{-1}((0;1])$.
7. $g^{-1}([1;+\infty))$.
8. $g^{-1}([0;5])$.

2.37. Постройте графики функций:

1. $y=|x^2-2x-3|$.
2. $y=2x^2+|x|+3$.
3. $y=|x^2-1|+x$.
4. $y=|x^2-x-2|-2|x+1|+2$.
5. $y=[2x^2+x-1]$.
6. $y=[3-x^2]$.
7. $y=\operatorname{sign}(3x^2-x-2)$.
8. $y=\{x^2-x\}$.

2.38. Число корней квадратной функции $f(x)=ax^2+bx+c$ можно определять не только с помощью дискриминанта. Докажите следующие утверждения:

1. Если для некоторых чисел α и β произведение $f(\alpha)f(\beta)$ отрицательно, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

2. Если для некоторого числа α произведение $af(\alpha)$ отрицательно, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

3. Если $a(a+b+c)<0$, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

4. Если $c(a-b+c)<0$, то квадратная функция имеет два вещественных корня.

5. Числа a,b,c — вещественные. Докажите, что уравнение $(x-$ $-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$ имеет вещественный корень.

2.39. *Теорема Виета.* Числа x_1, x_2 являются корнями уравнения $x^2+px+q=0$ в том и только в том случае, если $x_1+x_2=-p, x_1x_2=q$.

1. Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $3x^2-5x-7=0$. Вычислите $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$, $x_1^2+x_2^2$, $x_1^3+x_2^3$.

2. Прямая, проходящая через точку C, лежащую на оси ординат, пересекает параболу $y=x^2$ в точках A и B. Докажите, что произведение абсцисс точек A и B не зависит от углового коэффициента прямой.

3. Прямые l_1 и l_2 пересекают параболу $y=x^2$ в точках A_1, B_1 и A_2, B_2 соответственно. Докажите, что если l_1 и l_2 параллельны, то сумма абсцисс точек A_1 и B_1 равна сумме абсцисс точек A_2 и B_2.

4. Найдите квадратное уравнение с целыми коэффициентами, корнем которого является число $2-\sqrt{3}$.

2.40. *Расположение корней квадратной функции.* Предположим, что квадратная функция $y=ax^2+bx+c$ имеет два вещественных корня x_1 и x_2 ($x_1<x_2$). При $a>0$ эта функция принимает отрицательные значения в промежутке $(x_1;x_2)$ и принимает положительные значения вне промежутка $[x_1;x_2]$; при $a<0$ функция принимает положительные значения в промежутке $(x_1;x_2)$ и принимает отрицательные значения вне промежутка $[x_1;x_2]$. Для того чтобы для произвольного числа α выяснить, принадлежит ли оно промежутку $(x_1;x_2)$, достаточно знать знак коэффициеита a и знак числа $a\alpha^2+b\alpha+c$.

1. При каких значениях a уравнение $ax^2-(a^2+3)x+2=0$ имеет два вещественных корня разных знаков?

2. При каких значениях a уравнение $ax^2-(3a-3)x+4a-4=0$ имеет два вещественных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1?

3. При каких значениях a каждое число из промежутка $[1;2]$ удовлетворяет неравенству $x^2+(a-2)x-a\le 0$?

4. При каких значениях a неравенство $2x^2+ax-5>0$ имеет хотя бы одно решение, удовлетворяющее условию $|x|<1$?

5. При каких значениях a и b неравенство

$$\frac{bx^2+(b+4)x+2a-5b}{x^2+ax-2}\ge 0$$

не имеет решений?

2.41. *Расположение корней квадратной функции* (продолжение). Если известно, что число α не находится в промежутке между корнями квадратной функции, то, чтобы выяснить, по какую сторону от этого промежутка оно расположено, достаточно сравнить α с каким-нибудь числом, которое заведомо расположено между корнями, например с числом $-b/2a$.

1. При каких значениях a оба корня уравнения $x^2+ax-1=0$ меньше 3?

2. При каких значениях a хотя бы одно число, большее 1, удовлетворяет неравенству $x^2-ax+2a \leq 0$?

3. При каких значениях a каждое число из промежутка $[-1;1]$ является решением неравенства $ax^2+2(a+1)x+a-4 \leq 0$?

2.42. Задачу нахождения области значений функции $y=f(x)$ можно переформулировать так: найти все значения a, при которых уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы один вещественный корень. Найдите область значений функции:

1. $y=x+\dfrac{1}{x}$.
2. $y=x-\dfrac{1}{x}$.
3. $y=\dfrac{x^2-10x+7}{2x^2-1}$.
4. $y=\dfrac{3x}{4x^2-x+1}$.

2.43. *Наибольшее и наименьшее значения квадратной функции на отрезке.* Если $a>0$, то наибольшее значение функции $y=ax^2+bx+c$ на отрезке $[\alpha;\beta]$ достигается либо при $x=\alpha$, либо при $x=\beta$; наименьшее значение функции $y=ax^2+bx+c$ на этом отрезке достигается либо при $x=\alpha$, либо при $x=\beta$, либо при $x=-\dfrac{b}{2a}$ (если $-\dfrac{b}{2a}\in[\alpha;\beta]$). Нетрудно сформулировать аналогичные условия для $a<0$.

1. Для функции $f(x)=x^2+ax+b$ выясните, при каких значениях a и b выполняется равенство $f([0;1])=[1;3]$.

2. Постройте график функции, ставящей в соответствие каждому числу x наименьшее значение функции $f(t)=t^2-2t$ на промежутке $[x-1;x]$.

3. Вещественные числа x, y, a таковы, что $x+y=a-1$, $xy=a^2-7a+14$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

2.44. Каждая из следующих задач может быть сведена к нахождению наибольшего значения некоторой квадратной функции на промежутке.

1. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник с периметром P?

2. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в круг радиусом R?

3. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, две вершины которого лежат на основании данного треугольника, а две другие — на его боковых сторонах, если площадь треугольника равна S?

4. Какую наибольшую площадь может иметь равнобедренный треугольник, вписанный в круг радиусом R?

5. На отрезках AC и BC диаметра AB данной окружности как на диаметрах построены окружности. При каком положении точки C окружность, касающаяся этих трех окружностей, имеет наибольший радиус?

2.45. Квадратная функция задана формулой $f(x) = x^2 - 2$. Докажите, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет восемь вещественных корней.

2.46. Вещественные числа a, b, c таковы, что для любого числа x из промежутка $[-1;1]$ справедливо неравенство $|ax^2 + bx + c| \leq 1$. Докажите, что для любого числа x из промежутка $[-1;1]$ справедливо неравенство $|cx^2 + bx + a| \leq 2$.

2.47. Среди всех квадратных функций со старшим коэффициентом 1 найдите ту, для которой на промежутке $[-1;1]$ наибольшее по модулю значение минимально.

2.48. Докажите, что среди значений функции $y = x^2 + px + q$ в любых трех различных точках, координаты которых выражены целыми числами, хотя бы одно по модулю не меньше $\frac{1}{2}$.

§ 6. Среднее арифметическое и среднее геометрическое

Средним арифметическим чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, *средним геометрическим* неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется число $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$. Содержание этого параграфа составляет замечательное неравенство, связывающее среднее арифметическое и среднее геометрическое, и следствия из него.

2.49. Квадратная функция $y = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ строго убывает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и строго возрастает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$, а при $a < 0$ строго возрастает на промежутке $\left(-\infty; -\dfrac{b}{2a}\right]$ и строго убывает на промежутке $\left[-\dfrac{b}{2a}; +\infty\right)$.

1. Найдите промежутки монотонности функции $y = x(a - x)$.

2. Докажите, что произведение двух чисел с заданной суммой тем больше, чем ближе эти числа друг к другу на числовой оси.

3. Сумма n положительных чисел равна a. Докажите, что произведение этих чисел максимально, если каждое из них равно $\dfrac{a}{n}$.

4. Докажите, что среднее геометрическое n неотрицательных чисел не превосходит среднего арифметического этих чисел. В каких случаях среднее арифметическое равно среднему геометрическому?

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Докажите неравенства

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^n \geq a_1 a_2 \cdots a_n,$$

$$a_1^n + a_2^n + \ldots + a_n^n \geq n a_1 a_2 \cdots a_n,$$

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \geq \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \ldots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

2.50. Неравенства, которые предлагается доказать в этой задаче, можно вывести из неравенства для среднего арифметического и среднего геометрического, сформулированного в предыдущей задаче.

1. Если x — положительное число, то $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$.

2. Пусть a, b — положительные числа. Найдите наименьшее значение функции $y = ax + \dfrac{b}{x}$ на промежутке $(0; +\infty)$.

3. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$.

4. Если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}.$$

5. $a^8+b^8+c^8 \geq a^2b^2c^2(ab+bc+ca)$.

6. $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2 \geq a_1a_2+a_2a_3+\ldots+a_{n-1}a_n+a_na_1$.

7. $\dfrac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n} \geq \left(\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2$.

8. Если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

9. Если a, b, c — неотрицательные числа, то

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \leq abc.$$

10. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, произведение которых равно 1, то

$$(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_n) \geq 2^n.$$

11. Если a_1, a_2, b_1, b_2 — неотрицательные числа, то

$$\sqrt{(a_1+b_1)(a_2+b_2)} \geq \sqrt{a_1a_2}+\sqrt{b_1b_2}.$$

12. Если $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ — неотрицательные числа, то

$$\sqrt[3]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)} \geq \sqrt[3]{a_1a_2a_3}+\sqrt[3]{b_1b_2b_3}.$$

13. Если a, b, c — положительные числа и $a+b+c=1$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9.$$

14. Если a, b, c — положительные числа и $a+b+c=1$, то

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 64.$$

15. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, произведение которых равно 1, то

$$a_1+a_2+\ldots+a_n \geq n.$$

16. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то $(a_1+a_2+\ldots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\ldots+\dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.

17*. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа ($n \geq 2$), S — их сумма, то $\dfrac{a_1}{S-a_1} + \dfrac{a_2}{S-a_2} + \ldots + \dfrac{a_n}{S-a_n} \geq \dfrac{n}{n-1}$.

18. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \ldots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$.

19**. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа, то $\dfrac{a_1}{a_2+a_3} + \dfrac{a_2}{a_3+a_4} + \ldots + \dfrac{a_n}{a_1+a_2} > \dfrac{n}{4}$.

20. $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ (n — натуральное число, $n \geq 2$).

21*. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — натуральные числа, то

$$\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n} \leq$$

$$\leq a_1^{a_1} a_2^{a_2} \cdots a_n^{a_n} \leq \left(\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}\right)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

22*. Если m, n — натуральные числа, α — вещественное число, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, то

$$\begin{cases} \sqrt[n]{(1+\alpha)^m} < 1 + \dfrac{m}{n}\alpha & \text{при } m < n, \\ \sqrt[n]{(1+\alpha)^m} > 1 + \dfrac{m}{n}\alpha & \text{при } m > n. \end{cases}$$

§ 7. Рациональные уравнения и неравенства

2.51. Решите уравнения:

1. $\dfrac{3}{5x+2} - \dfrac{6}{x-2} = \dfrac{4}{3-x}$.

2. $\dfrac{3-x}{x+3} + \dfrac{15-x}{x^2+3x} = 0$.

3. $\dfrac{1}{2x^2-x-3} + \dfrac{1}{3x^2+x-2} = \dfrac{1}{6x^2+7x+1}$.

4. $\dfrac{3-2x}{2x^2+7x-4} + \dfrac{3x+1}{2x^2-7x+3} = \dfrac{x+11}{x^2+x-12}$.

2.52. Решите уравнения:

1. $3x^4 - x^2 - 2 = 0$.

2. $2x^6 - 11x^3 - 40 = 0$.

3. $3(2x^2 + x - 2)^2 = 8x^2 + 4x - 9$.

4. $\left(\dfrac{x^2 - x - 1}{3x - 5}\right)^2 - \dfrac{x^2 - x - 1}{3x - 5} = 2$.

5. $\dfrac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} + \dfrac{6x + 10}{2x^2 - 3x + 5} = 3$.

6. $\left(\dfrac{x^2 - 2x + 3}{x}\right)^2 - 5x = \dfrac{15}{x} - 16$.

7. $\dfrac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \dfrac{3x}{x^2 - 8x + 15}$.

8. $(2x - 1)(2x + 3)(3x - 2)(3x - 8) + 25 = 0$.

9*. $\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{(x + 1)^2} = 1$.

2.53. *Однородные уравнения*. Уравнение вида $au + bv = 0$ с неизвестными u и v называется однородным уравнением первой степени, $au^2 + buv + cv^2 = 0$ — однородным уравнением второй степени, $au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = 0$ — однородным уравнением третьей степени и т. д. Деля обе части однородного уравнения степени k на v^k, приходим к уравнению с одним неизвестным $y = u/v$. Разумеется, отдельно должен быть рассмотрен случай $v = 0$. Следующие уравнения сводятся к однородным, если удачно ввести новые переменные u и v.

1. $(x^2 - x + 3)^2 - 3(x^2 - x + 3)(2x^2 - x + 2) + 2(2x^2 - x + 2)^2 = 0$.

2. $(x - 2)^2(x + 1)^2 - (x - 2)(x^2 - 1) - 2(x - 1)^2 = 0$.

3. $\left(\dfrac{x + 1}{x - 2}\right)^2 + \dfrac{x + 1}{x - 4} = 12\left(\dfrac{x - 2}{x - 4}\right)^2$.

2.54. *Возвратные уравнения*. Каждое из следующих уравнений можно решить, вводя подходящую замену переменной вида $y = ax + b/x$. Решите уравнения:

1. $4x^4 + 3x^3 - 14x^2 + 3x + 4 = 0$.

2. $9x^4-6x^3-18x^2-2x+1=0$.
3. $18x^4-3x^3-25x^2+2x+8=0$.
4. $x^6-2x^5-x^4+3x^3+x^2-2x-1=0$.

2.55. *Теорема Безу.*

1. Докажите тождество

$$x^n-a^n=(x-a)(x^{n-1}+x^{n-2}a+\ldots+xa^{n-2}+a^{n-1}).$$

2. α — корень уравнения $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$. Докажите, что левую часть уравнения можно представить в виде $(x-\alpha)g(x)$, где $g(x)$ — многочлен степени $n-1$.

2.56. *Рациональные корни многочленов с целочисленными коэффициентами.*

1. Несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем уравнения $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0=0$. Докажите, что a_n делится на q, а a_0 делится на p. Докажите, что левую часть этого уравнения можно разложить на множители с целочисленными коэффициентами, один из которых равен $qx-p$.

Решите уравнения:
2. $x^3-5x+4=0$.
3. $x^3-x^2-x-2=0$.
4. $4x^3+3x-2=0$.
5. $6x^4-11x^3+9x^2-11x+3=0$.

2.57. Решите уравнения:
1. $8x^3+36x^2+54x+33=0$.
2. $(x^2-x-2)^4+(2x+1)^4=(x^2+x-1)^4$.
3*. $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x$.

2.58. Для каждого значения a решите следующие уравнения:
1. $x^2+x+a=0$.
2. $ax^2+(2a+1)x+a-1=0$.
3. $\frac{2a+1}{x}-\frac{a-1}{x-1}=2a$.
4*. $x^3-2ax^2+(a^2+1)x-2a+2=0$.

2.59. *Метод интервалов.* Многие функции, в частности линейные и квадратные, обладают следующим свойством: если нанести на числовую ось все корни такой функции, то ось разобьется на конечное число промежутков, внутри каждого из которых все значения функции — числа одного знака. Если функция $y = F(x)$ получена из таких функций с помощью операций умножения и деления, то, отмечая на числовой оси корни всех сомножителей и выясняя знак $F(x)$ в одном из промежутков, сможем последовательно находить знаки $F(x)$ в остальных промежутках, выясняя каждый раз, сколько сомножителей изменили знак при переходе в очередной промежуток из предыдущего. Решите неравенства:

1. $\dfrac{2x-1}{x+5} > 0.$
2. $\dfrac{x+2}{x^2-x-2} < -1.$
3. $(2x^2-x-1)(6-5x-x^2) > 0.$
4. $\dfrac{(3x^2+x-2)(x^2-x)}{(3x-2)(x+3)} \leq 0.$
5. $\dfrac{(4x^2-4x+1)(2-x-x^2)}{(x^2-4)(x+3)} \geq 0.$

2.60. При решении неравенств можно использовать те же замены переменных, что и при решении уравнений. Решите неравенства:

1. $x^4-5x^2+4 \geq 0.$
2. $\dfrac{x^2-1}{x^2+2x} - \dfrac{x^2+2x}{x^2-1} > \dfrac{3}{2}.$
3. $(x^2-x-3)^2-(x^2-x-3)(x-1) \geq 2(x-1)^2.$
4. $x^4-3x^3-2x^2+6x+4 \geq 0.$

2.61. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x^2-3y^2=24, \\ 2x=3y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{10}{x+2}+\dfrac{9}{y-1}=5, \\ \dfrac{1}{x-1}=\dfrac{2}{y}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+y=7, \\ x+y^2=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x+xy=3, \\ xy^2+xy^3=12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} (x^2-y^2)x=6y, \\ \dfrac{x+y}{x^2-xy}=\dfrac{3y}{2}. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=0, \\ x^2+xy=2x+y. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3, \\ 2x^2-xy-y^2=5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2+y^2=2, \\ 2x^4+xy^3+x^2y^2-x^3y=3. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2+y^2=34, \\ x+y+xy=23. \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2+y^2=13, \\ x^3+y^3=19. \end{cases}$

11. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$

12. $\begin{cases} x(x+y+z)=7, \\ y(x+y+z)=14, \\ z(x+y+z)=28. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x(y+z)=27, \\ y(z+x)=32, \\ z(x+y)=35. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^3=yz, \\ y^3=zx, \\ z^3=xy. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x^5+y^5=1. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^8+\dfrac{1}{y^8}=y^8+\dfrac{1}{x^8}, \\ x^2+xy+2y^2=16. \end{cases}$

17*. $\begin{cases} x^4+y^4=2, \\ x^2y^2+1=2y^2. \end{cases}$

18. $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2+1}=z, \\ \dfrac{y}{z^2+1}=x, \\ \dfrac{z}{x^2+1}=y. \end{cases}$

19*. $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

§ 8. Иррациональные уравнения и неравенства

2.62. *Возведение в квадрат.* Решите следующие уравнения:

1. $\sqrt{x^2+x-3}=3.$
2. $\sqrt{x^2-5}=\sqrt{x+1}.$
3. $\sqrt{x+2}=x.$
4. $\sqrt{6-x-x^2}=x+1.$

5. $\sqrt{49-4x\sqrt{x^2-5}}=4x-7$.

6. $\sqrt{x+2}-\sqrt{2x-3}=1$.

7. $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1}=\sqrt{3x-8}$.

8*. $\sqrt{x^2-1}+\sqrt{x^2+x-2}=\sqrt[4]{x^2-2x+1}$.

2.63. *Замена переменной*. Решите уравнения:

1. $\sqrt{2-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1}=1$.

2. $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3-\sqrt{x-2}}=1$.

3. $x^3\sqrt[6]{x^5}-5x^2\sqrt[12]{x}=6\sqrt[3]{x}$.

4. $\dfrac{x+2}{2\sqrt{x+1}-3}=\dfrac{\sqrt{x+1}+1}{3}+4$.

5*. $(x^2-2x)^3+x\sqrt{x(x-2)^3}=2$.

6. $4x^2+5x\sqrt{x+5}=44(x+5)$.

7*. $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$.

2.64. *Уравнения с кубическими радикалами.*

1. Докажите тождество

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).$$

2. Докажите, что $a^3+b^3+c^3=3abc$ в том и только в том случае, если $a+b+c=0$ или $a=b=c$.

Решите уравнения:

3. $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$.

4. $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x-3}=1$.

5. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$.

2.65. Каждое из следующих уравнений можно решить, подобрав корень и доказав, что других корней нет:

1. $\sqrt{x+2}+3\sqrt{x-1}+\sqrt{3x-2}+\sqrt{5x-1}=10$.

2. $\sqrt{2x-1}+\sqrt[3]{x}=\sqrt[4]{17-x}$.

3. $\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^5-7}=8$.

4. $\sqrt[3]{x^2+x+1}+\sqrt{2x+1}=2$.

5. $2\sqrt{6-x-x^2}+x=2\sqrt{x^2+25}-3$.

2.66. Решите неравенства:

1. $\sqrt{x^2+5x+5} > 1$.

2. $\sqrt{x^2-x-1} < 1$.

3. $\sqrt{3x^2-5x-3} > \sqrt{2x+3}$.

4. $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2x-2$.

5. $\sqrt{8-x}+\sqrt{x-3} > 3$.

6. $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6$.

7. $x\sqrt{3x^2+5x-6} < x^2+2x$.

8*. $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$.

2.67. Для каждого значения a найдите множество решений неравенств:

1. $x+4a > 5\sqrt{ax}$.

2. $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}} > \sqrt{2}$.

3. $2\sqrt{x+a} > x+1$.

4. $\sqrt{2ax+1} \geq x+a$.

§ 9. Графики рациональных функций

Рациональная функция задается формулой вида $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$, где $g(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \ldots + a_m$, $h(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$, $b_0 \neq 0$. Функции g и h называются *многочленами*.

2.68. По следующим неравенствам можно судить о поведении многочлена при больших значениях $|x|$ и при значениях x, близких к корням многочлена.

Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — вещественные числа, $a_0 > 0$.

1. Докажите, что если $a > a_0$, то существует такое положительное число C, что $|f(x)| < a|x|^n$ при $|x| > C$.

2. Докажите, что если $0 < a < a_0$, то существует такое положительное число C, что $|f(x)| > a|x|^n$ при $|x| > C$.

3. Докажите, что если $a_n \neq 0$, то существует такое положительное число c, что $|f(x)| > \dfrac{a_n}{2}$ при $|x| < c$.

4. Докажите, что если $f(x_0) \neq 0$, то существует такое положительное число c, что $|f(x)| > \frac{f(x_0)}{2}$ при $|x - x_0| < c$.

2.69. Используя предыдущую задачу, докажите, что если f — рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя, то для любого положительного числа ε существует такое положительное число C, что $|f(x)| < \varepsilon$ при $|x| > C$.

2.70. *Графики многочленов.* Комбинируя утверждение предыдущей задачи с методом интервалов (см. задачу 2.59), можно набросать эскиз графика многочлена, разложенного на линейные множители. Постройте следующие графики:

1. $y = x(x-1)(x+2)$.
2. $y = 2(x+1)(x-3)^3$.
3. $y = -3x(x^2-3x+2)(x-2)$.
4. $y = 3x^3 - 7x^2 - 22x + 48$.

2.71. *Вертикальные асимптоты.* Пусть $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ – рациональная функция. Если $h(x_0) = 0$ и $g(x_0) \neq 0$, то график $y = f(x)$ вблизи точки $x = x_0$ близок к прямой $x = x_0$. Эта прямая называется *вертикальной асимптотой* графика функции $y = f(x)$. Найдите вертикальные асимптоты графиков следующих функций:

1. $y = \dfrac{3x-2}{2x+1}$.
2. $y = \dfrac{x^2+3x+6}{2x^3+x^2-x}$.
3. $y = \dfrac{x+2}{x^2+x-6}$.
4. $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x+1} + \dots + \dfrac{1}{x+10}$.

2.72. *Горизонтальные и наклонные асимптоты.* Всякую рациональную функцию f можно представить в виде суммы $f(x) = q(x) + r(x)$, где $q(x)$ — многочлен, а $r(x)$ — рациональная функция, у которой степень числителя меньше степени знаменателя. Если $q(x) = ax + b$ — линейная функция, то ее график называют *асимптотой* графика функции f. Если $a = 0$, асимптоту называют *горизонтальной*, если $a \neq 0$ — *наклонной*. Если график функции f имеет горизонтальную или наклонную асимптоту, то он близок к этой асимптоте при больших значениях $|x|$.

Найдите горизонтальные и наклонные асимптоты графиков следующих функций. Определите положение этих графиков относительно асимптот при больших значениях $|x|$.

1. $y=\dfrac{1-2x}{x+4}$.

2. $y=\dfrac{x}{(x-2)(2x+3)}$.

3. $y=\dfrac{2x^2-x-3}{x-2}$.

4. $y=\dfrac{x^3-1}{x^2+x}$.

2.73. Постройте эскизы графиков функций:

1. $y=\dfrac{1}{x^2-3x}$.

2. $y=\dfrac{x}{x^2-2x-3}$.

3. $y=\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-4x+3}$.

4. $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2+2x+1}$.

5. $y=\dfrac{3x^3}{9-x^2}$.

6. $y=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{x^2+2x}{x+1}$.

7. $y=\dfrac{x^3+x^2-2x}{5x-3-2x^2}$.

8. $y=\dfrac{|x^2-2x|}{2|x|-7}$.

9. $y=\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x-2}$.

10. $y=\dfrac{x^4-4x^3-x^2+16x-12}{x+1}$.

Глава 3
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

§ 1. Математическая индукция

3.1. В приведенных последовательностях найдите члены a_{25} и a_{40}:

1. $a_n = n + \dfrac{(-1)^n}{n}$. 2. $a_n = \left\{\dfrac{n}{5}\right\}$.

3. $a_n = [\sqrt{n}]$. 4. $a_n = \operatorname{sgn}(n-1)(n-3)\cdots(n-99)$.

5. a_n — число простых чисел, не превосходящих n.

6. Последовательность a_n такова, что $a_1 = 3$ и $a_n = a_{n-1} + 3$ при $n \geq 2$.

7. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 2$, $a_n = a_{n-1}$ при четных n и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при нечетных $n \geq 3$.

8. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ и $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ при $n \geq 3$.

3.2. Предложите формулу общего члена для каждой из последовательностей, если известно несколько первых членов.

1. 4; 8; 12; 16; 20; … . 2. 2; 5; 8; 11; 14; … .

3. 3; 12; 48; 192; … . 4. -1; 1; -1; 1; … .

5. 1; -2; 3; -4; … . 6. $0; 1; 0; \frac{1}{2}; 0; \frac{1}{3}; 0; \frac{1}{4}; \ldots$.

7. 1; 1; 2; 2; 3; 3; 4; 4; … . 8. $\frac{1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{3}{10}; \frac{4}{17}; \frac{5}{26}; \frac{6}{37}; \ldots$.

9. 1; 7; 31; 127; 511; … . 10. 2; 10; 26; 82; 242; … .

3.3. *Метод математической индукции* применяют в тех случаях, когда требуется доказать, что некоторое утверждение справедливо для любого натурального числа n. В таких случаях достаточно проверить справедливость этого утверждения при $n = 1$ (*база индукции*) и доказать, что для любого натурального числа k из справедливости утверждения при $n = k$ вытекает его справедливость при $n = k + 1$ (*индукционный переход*).

1. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = -1$ и $a_{n+1} = a_n + n$ при всех n. Докажите, что $a_n = \dfrac{(n-2)(n+1)}{2}$ при всех n.

2. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = a_n + 2n + 4$ при всех n. Докажите, что $a_n = n^2 + 3n - 2$ при всех n.

3. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = -2$ и $a_{n+1} = 3a_n + 10$ при всех n. Докажите, что $a_n = 3^n - 5$ при всех n.

4. Последовательность (a_n) такова, что $a_4 = 27$ и $a_{n+1} = 2a_n + 3n - 4$ при всех n. Докажите, что $a_n = 2^n + 3n - 1$ при всех n.

3.4. *Доказательство тождеств по индукции.* Предположим, что заданы числовые последовательности (a_n) и (b_n). Метод математической индукции показывает, что для того, чтобы доказать справедливость равенства $a_n = b_n$ при всех n, достаточно проверить, что $a_1 = b_1$ и при любом k справедливо равенство $a_{k+1} - a_k = b_{k+1} - b_k$. Докажите тождества:

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

4. $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

5. $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$.

3.5. *Доказательство неравенств по индукции.* Пусть (a_n), (b_n) — числовые последовательности. Если для некоторого натурального числа s справедливо неравенство $a_s \geq b_s$ и для всех $k \geq s$ справедливо неравенство $a_{k+1} - a_k > b_{k+1} - b_k$, то при всех $n > s$ справедливо неравенство $a_n > b_n$.

Докажите неравенства:

1. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{3}{5} \qquad (n \geq 3)$.

2. $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<1-\frac{1}{n} \qquad (n \geq 2)$.

3. $2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$.

4. $1+\frac{n}{2} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n} \leq 1+n$.

3.6. *Доказательство неравенств по индукции* (продолжение). Пусть (a_n), (b_n) — последовательности положительных чисел. Если для некоторого натурального числа s справедливо неравенство $a_s \geq b_s$ и для всех $k \geq s$ справедливо неравенство $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k}$, то при всех $n > s$ справедливо неравенство $a_n > b_n$. Докажите неравенства:

1. $n! \geq 2^n \qquad (n \geq 4)$.

2. $2^n > 2n \qquad (n \geq 3)$.

3. $2^n > n^2+2 \qquad (n \geq 5)$.

4. $3^n > n^3$ $(n \neq 3)$.

5. $n^n > (n+1)^{n-1} \qquad (n \geq 2)$.

6. $\frac{(2n)!}{(n!)^2} > \frac{4^n}{n+1} \qquad (n \geq 2)$.

7. $\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right) < \frac{2}{n^2}$.

3.7. В некоторых задачах при индукционном переходе удобно выводить справедливость доказываемого утверждения для $n = k + 2$ из его справедливости для $n = k$ и $n = k+1$. В этом случае необходимо проверить это утверждение для $n = 1$ и $n = 2$. Докажите следующие утверждения.

1. Последовательность a_n такова, что $a_1 = -1$, $a_2 = 5$ и $a_{n+2} = -a_{n+1} + 2a_n$ при всех n. Докажите, что $a_n = 1 + (-2)^n$ при всех n.

2. Последовательность a_n такова, что $a_1 = a_2 = -2$ и $2(a_{n+2}+1) = a_{n+1} + a_n$ при всех n. Докажите, что $a_n = n^2 - 3n$ при всех n.

3. Последовательность a_n такова, что $a_1 = 3$, $a_2 = 6$, $a_3 = 11$ и $a_{n+3} = -a_{n+2} + 2a_{n+1} + 8a_n - 8n + 3$ при всех n. Докажите, что $a_n = 2^n + n$ при всех n.

3.8. *Числа Фибоначчи.* Последовательность чисел Фибоначчи (a_n) задается следующим образом: $a_1 = a_2 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ при $n \geq 3$. Докажите, что для любого натурального числа n справедливы утверждения:

1. $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = a_{n+2} - 1$.
2. $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1} = a_{2n}$.
3. $a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$.
4. $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots + a_{2n-1} - a_{2n} = 1 - a_{2n-1}$.
5. $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$.
6. $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \ldots + a_{2n-1} a_{2n} = a_{2n}^2$.
7. a_{5n} делится на 5.

3.9. Иногда с помощью метода математической индукции легче доказать более сильное утверждение, чем то, которое предложено в задаче. Так, например, неравенство 2 задачи 3.5 доказывается легче, чем более слабое неравенство $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1$. Вот примеры такого рода:

1*. Докажите неравенство $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{2n-1}{n} < \frac{1}{\sqrt{3n}}$.

2*. (a_n) — последовательность чисел Фибоначчи. Докажите, что для любого натурального n справедливо равенство $(a_{n-1} + a_{n+1})a_n = a_{2n}$.

3*. Докажите, что из цифр 1 и 2 можно составить 2^{n+1} чисел, каждое из которых 2^n-значно и каждые два из которых различаются не менее чем в 2^{n-1} разрядах.

3.10. *Аксиома индукции.* Метод математической индукции основан на следующей аксиоме: если множество X, состоящее из натуральных чисел, таково, что а) $1 \in X$ и б) если $k \in X$, то $k + 1 \in X$, то множество X содержит все натуральные числа.

Докажите следующие утверждения, каждое из которых требует применения метода математической индукции в той или иной форме.

1. Если множество X, состоящее из натуральных чисел, таково, что а) $1 \in X$ и б) если $k \in X$, то $2k \in X$ и $2k + 1 \in X$, то множество X содержит все натуральные числа.

2. Если множество X, состоящее из натуральных чисел, таково, что а) $1 \in X$, б) если $k \in X$, то $2k \in X$, и в) если $k \in X$ и $k > 1$, то $k-1 \in X$, то множество X содержит все натуральные числа.

3. Если множество X, состоящее из натуральных чисел, таково, что а) X содержит все простые числа и б) если $a \in X$ и $b \in X$, то $ab \in X$, то множество X содержит все натуральные числа.

4. Если множество X, состоящее из пар натуральных чисел, таково, что а) $(1,1) \in X$ и б) если $(k,l) \in X$, то $(k+1,l) \in X$ и $(k,l+1) \in X$, то множество X содержит все пары натуральных чисел.

3.11. В квадратной таблице $n \times n$ клеток отмечено $n-1$ клеток. Докажите, что перестановками строк между собой и столбцов между собой можно добиться того, чтобы все отмеченные клетки оказались ниже диагонали таблицы.

3.12. *Прямые на плоскости.*

1. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что области, на которые эти прямые разбивают плоскость, можно окрасить в два цвета так, чтобы соседние области были окрашены в разные цвета.

2. Докажите, что эти прямые разбивают плоскость не более чем на $\dfrac{n(n+1)}{2}+1$ частей, где n — число прямых.

3.13. *Точки на окружности.* На окружности отмечено несколько точек, причем известно, что любые две точки лежат на дуге $120°$. Докажите, что все эти точки лежат на дуге $120°$.

3.14. Неотрицательные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ таковы, что $a_k \leq$ $\leq a_{k+1} \leq 2a_k$ при $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Докажите, что в сумме $s = \pm a_1 \pm$ $\pm a_2 \pm \ldots \pm a_n$ можно выбрать знаки так, что выполняется неравенство $0 \leq s \leq a_1$.

3.15. Пусть $N = 2^m 3^n$. Докажнте, что из любых $2N-1$ натуральных чисел можно выбрать N чисел, сумма которых делится на N.

3.16. *Два мудреца.* Каждый из двух мудрецов задумал натуральное число. Мудрецам сообщили значение модуля разности задуманных ими чисел. Каждый мудрец пытается узнать число, задуманное его партнером. Мудрецы по очереди сообщают друг другу, удалось ли им это сделать. Докажите, что через некоторое время каждый мудрец узнает число, задуманное его партнером.

3.17. *Шахматная доска.* Из шахматной доски $2^n \times 2^n$ клеток вырезали одну клетку. Докажите, что оставшуюся часть доски можно замостить уголками, состоящими из трех клеток.

3.18. *Ханойская башня.* Ханойская башня состоит из n колец различных размеров, надетых на стержень в порядке убывания размеров. Требуется переложить эти кольца на другой стержень, используя при этом третий стержень. За один ход можно перекладывать только одно кольцо и запрещается класть большее кольцо на меньшее. За какое наименьшее число ходов это можно сделать?

§ 2. Рекуррентные соотношения

3.19. *Прогрессии.* Последовательность (a_n) называется *арифметической прогрессией*, если существует такое число d (называемое *разностью прогрессии*), что при всех n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n + d$. Последовательность (a_n) называется *геометрической прогрессией*, если существует такое число q (называемое *знаменателем прогрессии*), что при всех n выполняется равенство $a_{n+1} = a_n q$.

Общий член арифметической прогрессии задается формулой $a_n = a_1 + (n-1)d$, общий член геометрической прогрессии — формулой $a_n = a_1 q^{n-1}$. Сумма первых n членов арифметической прогрессии находится по формуле $S_n = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$, сумма первых n членов арифметической прогрессии со знаменателем $q \neq 1$ находится по формуле $S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$.

1. Найдите сумму всех четырехзначных чисел, делящихся на 30.

2. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся ни на 2, ни на 3.

3. Найдите сумму первых 15 членов арифметической прогрессии, если ее восьмой член равен 11.

4. Последовательность (a_n) — арифметическая прогрессия. Докажите, что существует линейная функция f и квадратная функция g, такие, что для любого натурального n выполняются равенства $f(n) = a_n$ и $g(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

5. Последовательности (a_n), (b_n) — арифметические прогрессии, α — вещественное число. Докажите, что последовательности $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ и (αa_n) — арифметические прогрессии.

6. $y = f(x)$ — квадратная функция, $f(0) = 0$. Докажите, что существует такая арифметическая прогрессия (a_n), что $f(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ для любого натурального n.

7. Докажите, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией в том и только в том случае, если при $n \geq 2$ справедливо равенство $2a_n = a_{n-1} + a_{n+1}$.

8. Докажите, что последовательность (a_n) является геометрической прогрессией в том и только в том случае, если при $n \geq 2$ справедливо равенство $a_n^2 = a_{n-1}a_{n+1}$.

9. Последовательность (a_n) — геометрическая прогрессия. Последовательность (S_n) задана формулой $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Докажите, что для любого натурального k последовательность $S_k, S_{2k} - S_k, S_{3k} - S_{2k}, \ldots$, является геометрической прогрессией.

10. Последовательности (a_n), (b_n) — геометрические прогрессии, α — вещественное число. Докажите, что последовательности (a_nb_n), $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ (если $b_n \neq 0$ при всех n), (αa_n) являются геометрическими прогрессиями.

11. Последовательность (a_n) задается рекуррентным соотношением $a_n = qa_{n-1} + d$. Докажите, что при $q \neq 1$ можно указать такое число c, что последовательность $b_n = a_n + c$ является геометрической прогрессией.

3.20. *Покрытие натурального ряда арифметическими прогрессиями.* Будем говорить, что несколько арифметических прогрессий покрывают ряд, если каждое натуральное число является членом хотя бы одной из этих прогрессий. Натуральный ряд легко покрыть несколькими арифметическими прогрессиями, например, прогрессиями $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 1$, $c_n = 4n - 3$. В этой задаче выясним, можно ли покрыть натуральный ряд конечным числом арифметических прогрессий с различными разностями, не равными 1.

1. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть двумя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1.

2. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть тремя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1.

3*. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть четырьмя арифметическими прогрессиями с различными целыми разностями, не равными 1.

4*. Укажите пять арифметических прогрессий с различными целыми разностями, не равными 1, покрывающих натуральный ряд.

5. Докажите, что натуральный ряд нельзя покрыть конечным числом геометрических прогрессий.

3.21. *Решение рекуррентных соотношений.* Решить рекуррентное соотношение — значит найти формулу общего члена для последовательности, заданной этим соотношением. Найдите формулы общего члена для последовательностей, заданных следующими условиями:

1. $a_1 = 1, \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}} \qquad (n \geq 2).$

2. $a_1 = 1, \qquad a_n = \sqrt{2a_{n-1}^2 + 1} \qquad (n \geq 2).$

3. $a_1 = a_2 = 1, \qquad a_n = \dfrac{a_{n-1} - a_{n-2}}{2a_{n-1} - 1} \qquad (n \geq 3).$

3.22. *Решение рекуррентных соотношений* (продолжение). В этой задаче рассмотрим общий метод решения рекуррентных соотношений вида $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma$.

1. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, уравнение $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Докажите, что можно найти такие числа c_1, c_2, что для всех n справедливо равенство $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n$. Докажите, что коэффициенты c_1, c_2 однозначно определяются членами a_1, a_2.

2. Найдите формулу общего члена последовательности (a_n), заданной условиями $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-1}$ $(n \geq 3)$.

3. Найдите формулу общего члена последовательности Фибоначчи (см. задачу 3.8).

4. Последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2}$, дискриминант уравнения $x^2 - \alpha x - \beta = 0$ равен нулю. Докажите, что можно найти такие числа c_1, c_2, что для всех n справедливо равенство $a_n = (c_1 + c_2 n)\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)^n$.

5. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 4$, $a_n = 4(a_{n-1} - a_{n-2})$ $(n \geq 3)$.

6. Докажите, что если последовательность (a_n) удовлетворяет соотношению $a_n = \alpha a_{n-1} + \beta a_{n-2} + \gamma$, то последовательность $b_n = a_n - a_{n-1}$ удовлетворяет соотношению $b_n = \alpha b_{n-1} + \beta b_{n-2}$.

7. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + 1$ $(n \geq 2)$.

8. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = a_2 = 2$, $a_n = a_{n-1}a_{n-2}^2$ $(n \geq 3)$.

9. Найдите формулу общего члена последовательности, заданной условиями $a_1 = 1/2$, $a_2 = 1/3$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-2}}{3a_{n-2} - 2a_{n-1}}$ $(n \geq 3)$.

§ 3. Суммирование

Для последовательности (a_k) символом $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ при $m < n$ обозначается сумма всех членов последовательности с номерами $m, m+1, \ldots, n$; при $m = n$ полагают $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = a_m$.

Запишем с помощью знака $\sum$ несколько известных вам формул:

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} \quad (q \neq 1),$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

(см. задачу 3.4).

3.23. *Свойства знака* $\sum$. Докажите следующие свойства знака $\sum$:

1. $\sum\limits_{k=m}^{n} (-a_k) = -\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$.
2. $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$.
3. $\sum\limits_{k=m}^{n} (\alpha a_k) = \alpha \sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ (α — вещественное число).

4. $\sum\limits_{k=m}^{n} a_{k+l} = \sum\limits_{k=m+l}^{n+l} a_k$ (l — натуральное число).

5. $\sum\limits_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1$.

3.24. Найдите суммы:

1. $\sum\limits_{k=m}^{n} 1$.
2. $\sum\limits_{k=2}^{n} (2^k + 3)$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{10} \frac{2^k - 1}{2^{k-1}}$.
4. $\sum\limits_{k=m}^{n} (2^k + k)$.
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(2k-1)$.
6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$.

3.25. n-й частичной суммой последовательности (a_k) называется число $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Найдите n-е частичные суммы следующих последовательностей:

1. $a_k = (-1)^k$.
2. $a_k = (-1)^k k^2$.
3. $a_k = \sum\limits_{i=1}^{k} i$.

3.26. Найдите суммы:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.
2. $\sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)}$.
5. $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k-1}{k!}$.
6. $\sum\limits_{k=1}^{n} kk!$.

3.27. *Преобразование Абеля.* Пусть $(a_n), (b_n)$ — числовые последовательности. Последовательности (B_n), (S_n) заданы формулами $B_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$. Докажите, что при любых натуральных

n $(n \geq 2)$ справедливо равенство $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1}(a_k - a_{k+1})B_k + a_nB_n$. Найдите суммы:

1. $\sum\limits_{k=1}^{n} kq^{k-1}$.
2. $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2q^{k-1}$.
3. $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{(k-1)2^k}{k(k+1)}$.
4. $\sum\limits_{k=1}^{n} (k^2+1)k!$.

3.28. *Знак* $\prod$. Символом $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$ обозначается произведение $a_m a_{m+1} \cdots a_n$.

1. Докажите равенство $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{a_{n+1}}{a_1}$.

Найдите произведения:

2. $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k}\right)$.
3. $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 - \dfrac{1}{k^2}\right)$.
4. $\prod\limits_{k=3}^{n} \left(1 - \dfrac{2}{k(k-1)}\right)$.
5. $\prod\limits_{k=2}^{n} \left(\dfrac{k^3-1}{k^3+1}\right)$.
6*. $\prod\limits_{k=1}^{n} (1 + 3^{2^k})$.

Глава 4

ЦЕЛЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Делимость

Говорят, что целое число a *делится* на целое число b, если существует такое целое c, что $a = bc$. Например, 72 делится на 8, так как $72 = 8 \cdot 9$, 15 делится на -3, так как $15 = (-3) \cdot (-5)$, 0 делится на любое целое число a (включая 0), так как $0 = a \cdot 0$.

4.1. *Свойства делимости.* Пусть a, b, c и d — целые числа. Докажите следующие утверждения.

1. Если в равенстве $a + b = c$ два числа делятся на d, то и третье число делится на d.

2. Если a делится на b, то ac делится на bc.

3. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c.

4. Если a делится на b и b делится на a, то $a = b$ или $a = -b$.

4.2. a, b и c — целые числа. Докажите следующие утверждения.

1. Сумма $2a + 1$ последовательных целых чисел делится на $2a + 1$.

2. Всякое натуральное число, не являющееся степенью числа 2, можно представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

3. Если ab делится на c и $a + b$ делится на c, то $a^2 + b^2$ делится на c.

4. Если a^2 делится на $a + b$, то b^2 делится на $a + b$.

5. Если $11a + 7b$ делится на 13, то $a + 3b$ делится на 13.

6. Если $a + b + c$ и $a^2 + b^2 + c^2$ делятся на целое число m, то и $a^4 + b^4 + c^4$ делится на m.

7. Если a^3 делится на bc, b^3 делится на ac и c^3 делится на ab, то $(a + b + c)^7$ делится на abc.

8. Если a^3 делится на b, b^3 делится на c и c^3 делится на a, то $(a+$ $+b+c)^{13}$ делится на abc.

4.3. *Разложение суммы и разности степеней на множители.* Следующие две формулы часто используются при решении задач на делимость:

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n)$

(n — натуральное число),

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \ldots - ab^{n-1} + b^n)$

(n — нечетное натуральное число).

Докажите следующие утверждения:

1. $3^{11} + 5^{11}$ делится на 8.
2. $2^{22} + 3^{11}$ делится на 7.
3. Если a^n делится на $a-b$, то b^n делится на $a-b$.
4. Если a^n делится на $a+b$, то b^n делится на $a+b$.
5. Если $m > n$, то $a^{2^m} - 1$ делится на $a^{2^n} + 1$.

4.4. *Целые значения рациональных функций.*

1. Найдите все целые n, при которых $\dfrac{12}{3n+5}$ — целое число.

2. Найдите все целые n, при которых $\dfrac{5n+2}{2n+3}$ — целое число.

3. Найдите все целые n, при которых $3n^2 + 2n + 2$ делится на $4n+3$.

4. Найдите все целые n, при которых n^3 делится на n^2+n+2.

5. m и n — целые числа. Докажите, что если m^2+mn+1 делится на n^2+mn+1, то $m=n$.

6. Докажите, что если рациональная функция f не является многочленом, то существует только конечное множество целых значений n, при которых $f(n)$ — целое число.

4.5. *Дополнительные делители.* Если b — делитель a, то и $\dfrac{a}{b}$ — делитель a. Это очевидное соображение полезно при решении следующих задач.

1. Пусть n — четное число, не делящееся на 4. Докажите, что у числа n столько же четных делителей, сколько нечетных.

2. Докажите, что натуральное число n является квадратом целого числа в том и только в том случае, если n имеет нечетное число натуральных делителей.

3. Докажите, что число натуральных делителей числа n не превосходит $2\sqrt{n}$.

4. Докажите, что среднее арифметическое всех натуральных делителей числа n не меньше $\sqrt{n}$.

5. Докажите, что если натуральное число n равно квадрату произведения всех его положительных делителей , то n — либо куб простого числа, либо произведение двух различных простых чисел.

4.6. *Деление с остатком.* Если a и b — целые числа, $b \neq 0$, то существует единственная пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$ и $0 \leq r < |b|$. Число r называется *остатком от деления a на b.*

1. Найдите остатки от деления $6n+5$ на 3, n и $2n+1$ (n — натуральное число).

2. Найдите наибольшее четырехзначное число, делящееся на 31.

3. Найдите наименьшее пятизначное число, которое при делении на 130 дает остаток 17.

4. Остаток от деления нечетного числа на 7 равен 2. Найдите остаток от деления этого числа на 14.

5. Число 100 разделили на некоторое натуральное число меньше 50 и получили в остатке 6. На какое число делили 100?

6. Может ли число делиться на 8, а при делении на 12 давать в остатке 10?

4.7. *Позиционные системы счисления.* Если число N представлено в виде $N = a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \ldots + a_{n-1}b + a_n$, где $b, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа, $b > 1$ и $0 \leq a_i \leq b-1$ для $i = 1, 2, \ldots, n$, то говорят, что N *п*редставлено в системе счисления с основанием b и пишут $N = (a_1a_2\ldots a_n)_b$. Числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называют *b-ичными цифрами* числа N.

1. Представьте $(2345)_6$ в десятичной системе счисления.

2. Представьте $(123456789)_{10}$ в системе счисления с основанием 6 и в системе счисления с основанием 36.

4.8. *Наибольший общий делитель.* В задачах НОД(a,b) обозначает наибольший общий делитель целых чисел a и b.

1. Докажите, что множество всех общих делителей целых чисел a и b совпадает с множеством всех общих делителей чисел $a-b$ и b. В частности, НОД$(a,b) =$ НОД$(a-b,b)$.

2. Докажите, что наибольший общий делитель целых чисел a и b можно представить в виде $ma+nb$, где m и n — целые числа.

3. a и b — целые числа. Докажите, что множество всех чисел вида $ma+nb$, где m и n — целые числа, совпадает с множеством всех кратных наибольшего общего делителя чисел a и b.

4. Пусть наибольший общий делитель целых чисел a и b представлен в виде $ma+nb$, где m и n — целые числа. Чему равен НОД(m,n)?

5. Пусть (a_n) — последовательность чисел Фибоначчи, т. е. $a_1 = a_2 = 1$ и $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ для $n \geq 3$. Докажите, что НОД$(a_m, a_n) = a_d$, где $d =$ НОД(m,n).

4.9. Какие значения может принимать наибольший общий делитель следующих чисел:

1. $n+3$ и n.
2. $3n+1$ и $7n-4$.
3. n^2 и $2n-5$.
4. n^2+2n и $3n-1$.
5. $n!+1$ и $(n+1)!+1$.
6. n^2+2n+2 и n^2-n-1.
7. $33\ldots3$ (30 троек) и $22\ldots2$ (20 двоек).

4.10. *Взаимно простые числа.* Целые числа a и b называются *взаимно простыми*, если их наибольший общий делитель равен 1.

1. Докажите, что если сумма нечетных чисел a и b является степенью числа 2, то a и b взаимно простые.

2. a и b — взаимно простые числа. Какие значения может принимать НОД$(5a+b, 7a+3b)$?

3. a и b — взаимно простые числа. Какие значения может принимать НОД$(a+b, a^2+b^2)$?

4. Докажите, что целые числа a и b взаимно простые в том и только в том случае, если существуют такие целые числа m и n, что $ma+nb=1$.

Используя задачу 4, докажите следующие утверждения.

5. Если a и c взаимно простые и b и c взаимно простые, то ab и c взаимно простые.

6. Если ab делится на c и b и c взаимно простые, то a делится на c.

7. Если a делится на b, a делится на c и числа b и c взаимно простые, то a делится на bc.

4.11. *Число целых точек в треугольнике.* Пусть a и b — целые числа и пусть f — функция, определенная на $[a,b]$ и принимающая только положительные значения. Тогда фигура, задаваемая неравенствами $a \leq b, 0 < y \leq f(x)$, содержит N точек с целыми координатами, где

$$N = \sum_{i=a}^{b} [f(i)].$$

Докажите следующие утверждения.

1. Если m и n — взаимно простые положительные целые числа, то

$$\sum_{i=1}^{m-1} \left[\frac{in}{m}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{2}.$$

2. Если m и n – нечетные взаимно простые положительные числа, то

$$\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{in}{m}\right] + \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{im}{n}\right] = \frac{(m-1)(n-1)}{4}.$$

4.12. *Простые и составные числа.* Натуральные числа, отличные от единицы, подразделяют на *простые* и *составные*. *Простым* называется такое натуральное число, натуральными делителями которого являются лишь само число и единица. Остальные натуральные числа называются *составными*. Число 1 не относится ни к простым, ни к составным.

1. Докажите, что всякое простое число больше 3 имеет либо вид $6n+1$, либо вид $6n-1$.

2. Докажите, что если p — простое число, то остаток от деления p на 30 либо 1, либо простое число.

3. Докажите, что разность квадратов любых двух простых чисел больше 3 делится на 24.

4. Докажите, что число $2^{10}+5^{12}$ — составное.

5. Найдите все простые числа вида n^4+n^2+1, где n — натуральное число.

6. Найдите все простые числа вида m^4+4n^4, где m и n — натуральные числа.

7. Докажите, что если число 2^n-1 простое, то n — простое.

8. Докажите, что если число 2^n+1 простое, то n — степень числа 2.

9. Найдите все натуральные числа n, такие, что $(n-1)!$ не делится на n.

10. Найдите все натуральные числа n, такие, что $(n-1)!$ не делится на n^2.

11. Найдите все такие простые числа p, что число $2p^2+1$ — простое.

12. Докажите, что если числа p и $2p+1$ простые и $p>3$, то число $4p+1$ — составное.

13. Докажите, что если числа p и $8p^2+1$ простые, то число $3p^2+$ $+2p+1$ — простое.

14. Найдите все такие простые числа p, что числа $2p^2-3$ и $2p^2+3$ — простые.

15. Найдите все такие простые числа p, что $p^{p+1}+2$ — простое.

16. Докажите, что если

$$\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{n-1}{n-1}\right],$$

то n – простое.

4.13. Пусть $p_1=2, p_2=3, p_3=5, \ldots$ — последовательность всех простых чисел, расположенных в порядке возрастания. Докажите следующие утверждения.

1. Любой простой делитель числа $p_1p_2\cdots p_n+1$ больше p_n. Выведите отсюда, что существует бесконечно много простых чисел.

2. Существует бесконечно много простых чисел вида $3n-1$.

3. $p_n>2n$ при $n\geq 5$.

4. При $n>2$ между натуральными числами n и $n!$ есть простое число.

5. Для любого n можно найти n последовательных натуральных чисел, являющихся составными.

6. Произведение всех простых чисел, не превосходящих n ($n\geq 3$), больше n.

Основная теорема арифметики. Всякое составное число можно разложить на простые множители. Основная теорема арифметики утверждает, что любые два разложения натурального числа на простые множители одинаковы, если не обращать внимания на порядок следования сомножителей. Разложение натурального числа на простые множители часто записывают в виде $p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_n^{k_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые делители этого числа, а $k_1, k_2, \ldots,$ k_n — положительные целые числа. Такое разложение натурального числа называют каноническим.

4.14. Найдите разложения следующих чисел на простые множители:

1. $10^6 - 1$.
2. 11111111.
3. $2^{24} - 1$.
4. $2^{15} + 1$.

4.15. 1. Выведите утверждения задач 4.10.5, 4.10.6 и 4.10.7 из основной теоремы арифметики.

2. Числа a и b — взаимно простые. Докажите, что $\text{НОД}(ab,c) = \text{НОД}(a,c)\text{НОД}(b,c)$ для любого целого числа c.

3. Докажите, что если a и b — такие целые числа, что a^n делится на b^n, то a делится на b.

4. Числа x,y,m,n — такие натуральные числа, что $x^m = y^n$ и $\text{НОД}(m,n) = 1$. Докажите, что существует такое натуральное число t, что $x = t^n$ и $y = t^m$.

5. Докажите, что если a и b — такие натуральные числа, что ab является n-й степенью натурального числа и $\text{НОД}(a,b) = 1$, то каждое из чисел a и b является n-й степенью натурального числа.

6. Докажите, что если a и b — такие натуральные числа, что $a^b = b^a$ и $a < b$, то $a = 2$ и $b = 4$.

4.16. 1. Найдите все натуральные числа a и b, такие, что $\text{НОД}(a,b) = 10$ и $\text{НОК}(a,b) = 100$.

2. Найдите все натуральные числа a и b, такие, что $a + b = 322$ и $\text{НОК}(a,b) = 2695$.

3. Найдите все простые числа p,q и r, такие, что произведение $pqr = 5(p+q+r)$.

4. p и q – простые числа, такие, что $q^3 - 1$ делится на p и $p - 1$ делится на q. Докажите, что $p = q^2 + q + 1$.

4.17. *Каноническое разложение рациональных чисел.* Любое рациональное число $x \neq 0$ можно единственным (с точностью до порядка сомножителей) образом представить в виде $\pm p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа, а $k_1, k_2, \ldots, k_n$ — отличные от нуля целые числа. Если простое число p входит в разложение числа x с показателем k, то k называется p-показателем числа x и обозначается $e_p(x)$. Если простое число p не входит в разложение числа x, то полагают $e_p(x) = 0$. Например, $e_3(-108) = 3$, $e_2\left(\dfrac{3}{20}\right) = -2$, $e_5(17/4) = 0$.

Пусть x и y — отличные от нуля рациональные числа, p — простое число. Докажите следующие свойства функции e_p:

1. $e_p(xy) = e_p(x) + e_p(y)$.

2. $e_p\left(\frac{x}{y}\right) = e_p(x) - e_p(y)$.

3. $e_p(\text{НОД}(x,y)) = \min\{e_p(x), e_p(y)\}$.

4. Если $x \pm y \neq 0$, то $e_p(x \pm y) \geq \min\{e_p(x), e_p(y)\}$.

5. Если $e_p(x) \neq e_p(y)$, то $e_p(x \pm y) = \min\{e_p(x), e_p(y)\}$.

6. Если $e_2(x) = e_2(y)$ и $x \pm y \neq 0$, то $e_2(x \pm y) > e_2(x)$.

4.18. 1. Каждый член строго возрастающей последовательности (a_n) положительных чисел делит следующий член. Докажите, что числа вида

$$\frac{1}{a_1} \pm \frac{1}{a_2} \pm \ldots \pm \frac{1}{a_n}$$

не являются целыми.

2. m и n — натуральные числа, $m < n$. Докажите, что числа вида

$$\frac{1}{m} \pm \frac{1}{m+1} \pm \ldots \pm \frac{1}{n}$$

не являются целыми.

4.19. *Разложение $n!$ на простые множители.*

1. p — простое число. Докажите, что если $p^s \leq n < p^{s+1}$, то

$$e_p(n!) = \sum_{i=1}^{s} \left[\frac{n}{p^i}\right].$$

2. Сколькими нулями оканчивается десятичная запись числа 1000!?

3. Докажите, что десятичная запись числа $n!$ не может оканчиваться ровно 998 нулями.

4. n — натуральное число, p — простое число. Докажите, что $e_p(n!) < \frac{n}{p-1}$.

5. Докажите, что произведение n последовательных целых чисел делится на $n!$.

6. Докажите, что $(2n)!$ делится на $n!(n+1)!$.

4.21. *Мультипликативные функции.* Функция f, заданная на множестве всех натуральных чисел, называется *мультипликативной*, если $f(mn) = f(m)f(n)$ для любых взаимно простых m и n. Из этого определения сразу же следует, что если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа, то

$$f(n) = f(p_1^{k_1}) f(p_2^{k_2}) \cdots f(p_s^{k_s}).$$

1. Пусть $\tau(n)$ — число положительных делителей натурального числа n. Докажите, что τ — мультипликативная функция. Найдите $\tau(n)$, если известно каноническое разложение числа n.

2. Пусть $\sigma(n)$ — сумма положительных делителей натурального числа n. Докажите, что σ — мультипликативная функция. Найдите $\sigma(n)$, если известно каноническое разложение числа n.

3. Пусть $\nu(n)$ — число простых делителей натурального числа n. Докажите, что функция $f(n) = 2^{\nu(n)}$ мультипликативна.

4. *Функция Мёбиуса* $\mu(n)$ определяется равенством $\mu(n) = (-1)^{\nu(n)}$, если n не делится на квадрат простого числа. Если n делится на квадрат какого-нибудь простого числа, то полагают $\mu(n) = 0$. Докажите, что функция Мёбиуса мультипликативна.

4.22. Пользуясь формулами для $\tau(n)$ и $\sigma(n)$, решите следующие задачи.

1. Найдите наименьшее целое положительное n, такое, что $\tau(n) = 12$.

2. Найдите наименьшее целое положительное n, такое, что $\sigma(n) = 84$.

3. Найдите все целые положительные n, такие, что $\tau(n) = 6$.

4. Найдите все целые положительные n, такие, что $\sigma(n) = 20$.

5. Найдите все целые положительные n, такие, что $\sigma(n) = 80$.

4.23. *Совершенные числа.* Натуральное число n называется *совершенным*, если $\sigma(n) = 2n$.

1. Пусть $2^m - 1$ — простое число. Докажите, что $2^{m-1}(2^m - 1)$ — совершенное число.

2*. Докажите, что любое четное совершенное число можно представить в виде $2^{m-1}(2^m - 1)$, где $2^m - 1$ — простое число.

3. Найдите все натуральные числа вида $n = 3 \cdot 2^k \cdot p$, где p — простое число, такие, что $\sigma(n) = 3n$.

4. Докажите, что если n — четное положительное число и $\sigma(\sigma(n)) = 2n$, то $n = 2^m$, где $2^{m+1} - 1$ — простое число.

4.24. *Формула обращения.* Если f и g — функции, заданные на множестве натуральных чисел, то их *сверткой* называется функция $f * g$, задаваемая на множестве натуральных чисел формулой

$$(f * g)(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right),$$

где правая часть есть сумма всех произведений вида $f(d)g\left(\frac{n}{d}\right)$, где d — положительный делитель n. Докажите следующие свойства свертки:

1. $f * g = g * f$.

2. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

3. $f * e = f$, где $e(1) = 1$ и $e(n) = 0$ для $n > 1$.

4. $\mu * 1 = e$, где μ — функция Мёбиуса, а 1 обозначает функцию, принимающую значение 1 для всех натуральных n.

5. Если $f * 1 = g$, то $f = g * \mu$. Утверждение этой задачи можно переформулировать следующим образом: если $\sum_{d|n} f(d) = g(n)$ для всех n, то $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$. Последнее равенство называют *формулой обращения Мёбиуса.*

6. Если функции f и g мультипликативны, то $f * g$ тоже мультипликативна.

7. Если функция f мультипликативна, то функция $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$ тоже мультипликативна.

4.25. *Функция Эйлера.* Для любого натурального числа n пусть $\varphi(n)$ — число чисел, взаимно простых с n, в последовательности $1, 2, 3, \ldots, n$. Функция φ называется функцией Эйлера.

1. Вычислите $\varphi(6)$, $\varphi(10)$, $\varphi(37)$, $\varphi(81)$.

2. Докажите, что сумма всех целых чисел a, таких, что $1 \le a \le n$ и a и n взаимно простые, равна $\frac{1}{2} n \varphi(n)$.

3. Докажите, что если p — простое число, то $\varphi(p^n) = p^n - p^{n-1}$.

4. Дроби $\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}$ приведены к несократимому виду. Докажите, что среди получившихся дробей есть ровно $\varphi(d)$ со знаменателем d.

5. Докажите, что

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

6. Докажите, что

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d)\frac{n}{d} = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_s}\right),$$

где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все простые делители числа n.

7. Найдите все натуральные числа n, такие, что $\varphi(n) = 2$, $\varphi(n) = 3$, $\varphi(n) = \frac{n}{2}$, $\varphi(n) = 24$, $\varphi(3n) = 3\varphi(n)$, $\varphi(n)$ делится на 4, $\varphi(2n) > \varphi(n)$.

4.26. Мультипликативная функция однозначно определяется значениями на степенях простых чисел. Выведите формулы для следующих сумм:

1. $\sum_{d|n} \mu(d)\tau(d)$.
2. $\sum_{d|n} \mu(d)\sigma(d)$.
3. $\sum_{d|n} \mu(d)(\sigma(d))^2$.
4. $\sum_{d|n} \mu(d)\varphi(d)$.

§ 2. Сравнения

4.27. Два целых числа, разность которых кратна данному натуральному числу m, называются *сравнимыми по модулю m*. Утверждение *a сравнимо с b по модулю m* записывают в виде $a \equiv b \pmod{m}$. Докажите следующие свойства сравнений:

1. $a \equiv b \pmod{m}$ в том и только в том случае, если a и b дают одинаковые остатки при делении на m.

2. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и a и m взаимно простые, то b и m взаимно простые.

3. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.

4. Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.

5. Если $ac \equiv bc \pmod{m}$ и c и m взаимно простые, то $a \equiv b \pmod{m}$.

6. $ac \equiv bc \pmod{mc}$ в том и только в том случае, если $a \equiv b \pmod{m}$.

4.28. Примените свойства сравнений при доказательстве следующих утверждений:

1. Если $n^{n+1} + (n+1)^n$ делится на 3, то $n \equiv 1 \pmod{6}$.

2. Если натуральные числа $a \neq 1$ и n таковы, что $a^n - 1$ делится на $(a-1)^2$, то n делится на $a - 1$.

3. Если $a^s \equiv a^t \equiv 1 \pmod{m}$, то $a^d \equiv 1 \pmod{m}$, где d — наибольший общий делитель s и t.

4.29. *Признаки делимости.*

1. Докажите, что если $N = (a_1a_2 \ldots a_n)_{10}$, то $N \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n \pmod{9}$ и $N \equiv a_n - a_{n-1} + \ldots + (-1)^n a_1 \pmod{11}$. Выведите аналогичные признаки делимости в системе счисления с основанием b.

2. Все двузначные числа выписали подряд в некотором порядке. Найдите остатки от деления получившегося 180-значного числа на 9 и 11.

3. Докажите, что число, записываемое в десятичной системе 600 единицами и 300 нулями, не является квадратом.

4. Пусть $M = (a_1a_2 \ldots a_n)_{10}$ и $N = (a_na_{n-1} \ldots a_1)_{10}$. Докажите, что если M делится на 99, то и N делится на 99.

5*. Натуральное число a таково, что для любого $M = (a_1 \ldots a_n)_{10}$, делящегося на a, число $N = (a_na_{n-1} \ldots a_1)_{10}$ тоже делится на a. Докажите, что 99 делится на a.

4.30. *Квадраты и кубы.* 1. Какие остатки могут давать квадраты целых чисел при делении на 3, на 4, на 5, на 8, на 9?

2. Докажите, что если целые числа a, b и c таковы, что $a^2 + b^2 = c^2$, то хотя бы одно из чисел a, b четно, хотя бы одно из чисел a, b делится на 3 и хотя бы одно из чисел a, b, c делится на 5.

3. Какие остатки могут давать кубы целых чисел при делении на 7, на 9?

4. Докажите, что если $a \equiv 7 \pmod{8}$, то a нельзя представить в виде суммы трех квадратов целых чисел.

5. Докажите, что 28-значное число, десятичная запись которого образована одной единицей, двумя двойками, тремя тройками, ..., семью семерками, не является ни квадратом, ни кубом целого числа.

6. Найдите все натуральные числа меньше 10, представимые в виде суммы трех кубов целых чисел.

4.31. Найдите все натуральные числа n, удовлетворяющие следующим условиям:

1. $n \cdot 12^n + 1$ делится на 13.
2. $(n-1)^{n+1} + (n+1)^{n-1}$ делится на $2n$.

4.32. a и b — целые числа, m и n — натуральные числа, p — простое число. Докажите следующие утверждения:

1. Если $a \equiv b \pmod{p^n}$, то $a^p \equiv b^p \pmod{p^{n+1}}$.
2. Если $a^p - b^p$ делится на p и $a \neq b$, то $\dfrac{a^p - b^p}{a-b}$ делится на p.
3. Если $a^p - b^p$ делится на n и $a \neq b$, то $\dfrac{a^p - b^p}{a-b}$ делится на n.

4.33. *Китайская теорема об остатках.* Докажите следующие утверждения:

1. Если a — целое число, взаимно простое с m, то существует такое целое число b, что $ab \equiv 1 \pmod{m}$.

2. Если m и n — взаимно простые числа, то существует такое целое число x, что $x \equiv 1 \pmod{m}$ и $x \equiv 0 \pmod{n}$.

3. Если m и n — взаимно простые числа, то для любых целых чисел a и b существует такое целое число x, что $x \equiv a \pmod{m}$ и $x \equiv b \pmod{n}$ и что любые два значения x, удовлетворяющие этим условиям, сравнимы по модулю mn.

4.34. *Приведенная система вычетов.* Говорят, что целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_s$ образуют приведенную систему вычетов по модулю m, если для любого целого числа x, взаимно простого с m, есть единственное число a_i, такое, что $x \equiv a_i \pmod{m}$. Докажите следующие утверждения:

1. Число чисел в любой приведенной системе вычетов по модулю m равно $\varphi(m)$, где φ — функция Эйлера, определенная в задаче 4.25.

2. Если $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю m и a — целое число, взаимно простое с m, то $aa_1, aa_2, \ldots, aa_s$ — приведенная систе а вычетов по модулю m.

3. Если a и m взаимно простые числа, то $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod{m}$ (*теорема Эйлера*).

4. Если p — простое число, то $a^p \equiv a \pmod{p}$ для любого целого числа a (*малая теорема Ферма*).

4.35. *Приведенная система вычетов* (продолжение).

1. Если $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю $m \geq 3$, то $a_1 + a_2 + \ldots + a_s \equiv 0 \pmod{m}$.

2. Если p — простое число, то $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ (*теорема Вильсона*).

3. Если p — простое число и $p \equiv 1 \pmod{4}$, то найдется такое целое число n, что $n^2 + 1$ делится на p.

4. Если n — целое число и p — нечетный простой делитель числа $n^2 + 1$, то $p \equiv 1 \pmod{4}$.

5. Если $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю $m \geq 3$, то $a_1 a_2 \cdots a_s \equiv \pm 1 \pmod{m}$.

6. Если $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю $m \geq 3$ и существует $x \not\equiv \pm 1 \pmod{m}$, такое, что $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$, то $a_1 a_2 \cdots a_s \equiv 1 \pmod{m}$.

7. Если $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю $m \geq 3$, то $a_1 a_2 \cdots a_s \equiv -1 \pmod{m}$ для $m = 4$ и всех m вида p^k и $2p^k$, где p — нечетное простое число, и $a_1 a_2 \cdots a_s \equiv 1 \pmod{m}$ для остальных m.

4.36. Малая теорема Ферма и теорема Эйлера могут быть полезны при решении следующих задач:

1. Найдите остатки от деления 2^{2000} на 13, 25 и 50.

2. Докажите, что если a, b и c — целые числа и $a + b + c$ делится на 30, то $a^5 + b^5 + c^5$ делится на 30.

3. Докажите, что если a, b и c — целые числа и p — простое число, то $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod{p}$.

4. p и q — различные простые числа. Докажите, что $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.

5. Докажите, что при всех $n > 1$ число $2^n - 1$ не делится на n.

4.37. *Числа Кармайкла.* Составное число n называется числом Кармайкла, если $a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ для любого целого a, взаимно простого с n.

1. Докажите, что 561 — число Кармайкла.

2. Пусть $n = p_1 p_2 \cdots p_s$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа. Докажите, что если $n - 1$ делится на каждое из чисел $p_1 - 1, p_2 - 1, \ldots, p_s - 1$, то n – число Кармайкла.

4.38. *Сравнения для рациональных чисел.* Пусть p — простое число. Дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ со знаменателями, не делящимися на p, называются *сравнимыми по модулю* p, если числитель их разности (представленной в виде несократимой дроби) делится на p. Такие сравнения обладают многими свойствами сравнений для целых чисел и могут быть полезны при решении следующих задач.

1. Докажите, что сравнения для рациональных чисел обладают свойствами 3 и 4 из задачи 4.27.

2. p — нечетное простое число. Докажите, что если $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+ +\ldots+\frac{1}{p-1}=\frac{a}{b}$, где a и b — целые числа, то a делится на p.

3. p — простое число, $p \geq 5$. Докажите, что если $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+ +\ldots+\frac{1}{(p-1)^2}=\frac{a}{b}$, где a и b — целые числа, то a делится на p.

4. p — простое число, $p \geq 5$. Докажите, что если $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+ +\frac{1}{p-1}=\frac{a}{b}$, где a и b — целые числа, то a делится на p^2.

§ 3. Уравнения в целых числах

4.39. Найдите целочисленные решения следующих уравнений:

1. $x^2-y^2=20$.	2. $x^2-xy-6y^2=6$.
3. $x^2-1=3^y$.	4. $xy+2x+3y=-1$.
5. $(x^2+xy^2+1)y=x$.	6. $(3x-1)(y^2+x+2)=x^2+1$.
7. $\frac{5}{x}+\frac{7}{y}=1$.	8. $\frac{5x-2y}{3x+y}=x^2-2$.

4.40. *Линейные диафантовы уравнения.* Пусть a,b,c — целые числа, $a \neq 0$. Докажите следующие утверждения.

1. Уравнение $ax+by=c$ имеет целочисленное решение в том и только в том случае, если НОД(a,b) делит c.

2. Если (x_0,y_0) — целочисленное решение уравнения $ax+by= =c$, где a и b — взаимно простые числа, то любое целочисленное решение этого уравнения имеет вид $x=x_0+bt$, $y=y_0-at$, где t — целое число.

3. Две целочисленные арифметические прогрессии имеют общий член в том и только в том случае, если наибольший общий делитель их разностей делит разность их первых членов.

4.41. В некоторых случаях удается доказать, что уравнение не имеет решений в целых числах, заменив знак равенства знаком сравнения по удачно выбранному модулю. Докажите, что следующие уравнения не имеют решений в целых числах:

1. $x^2-3y^2=2$. 2. $x^2+y^2+4z=3$.
3. $x^3+y^3=7z+3$. 4. $x^5+y^5+z^5=x+y+z+1$.

4.42. Иногда неравенства помогают решать уравнения в целых числах.

1. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^3+x^2+5x+6=y^3$.

2. Найдите все тройки натуральных чисел (x,y,z), такие, что $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$.

3. При каких целых x и y числа x^2+y и y^2+x оба являются квадратами?

4. Найдите все целочисленные решения уравнения $x^4+x^3+x^2+x=y^2+y$.

4.43. *Пифагоровы тройки.* Натуральные числа a, b и c образуют Пифагорову тройку, если $a^2+b^2=c^2$. Пифагорова тройка (a,b,c) называется *примитивной*, если НОД$(a,b,c)=1$. Пусть (a,b,c) — примитивная Пифагорова тройка.

1. Докажите, что одно из чисел a и b четно, а другое нечетно.

2. Докажите, что если a четно, то $\frac{c-b}{2}$ и $\frac{c+b}{2}$ являются квадратами целых чисел.

3. Докажите, что если a четно, то существуют такие натуральные числа m и n, что $a=2mn$, $b=m^2-n^2$, $c=m^2+n^2$.

4.44. *Решение уравнений в рациональных числах.* Каждое из следующих уравнений можно решить в рациональных числах, найдя одно из его решений (x_0,y_0) и сделав замену переменной по формуле $y=t(x-x_0)+y_0$:

1. $x^2+y^2=1$. 2. $2x^2+y^2=x+y+1$.
3. $y^3=x^2-y^2$. 4. $x^4+y^4=x^3+y^3$.

Глава 5

КОМБИНАТОРИКА

§ 1. Комбинаторные игры

Во всех задачах этого параграфа двое игроков играют в игру, ходы в которой делаются по очереди.

5.1. *Использование симметрии.* В следующих задачах требуется определить, кто выигрывает при правильной игре, начинающий или его противник

1. Два игрока кладут по очереди пятаки на круглый стол. Пятаки не должны накладываться друг на друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход.

2. Дан правильный стоугольник. За один ход игрок проводит в нем диагональ, не пересекающую ранее проведенных диагоналей. Проигрывает тот, кто не сможет сделать очередной ход.

3. Имеется две кучки камней. В одной m камней, в другой — n. За один ход разрешается брать любое число камней, но из одной кучки. Игрок, взявший последний камень, побеждает. Решите ту же задачу, но при условии, что игрок, взявший последний камень, проигрывает.

4. Прямоугольник $1 \times n$ разбит на единичные квадраты. За один ход разрешается вычеркнуть один квадрат или два соседних квадрата (квадрат нельзя вычеркивать дважды). Игрок, вычеркнувший последний квадрат, побеждает.

5.2. Иногда удается найти выигрышную стратегию в игре, рассмотрев несколько более коротких игр с теми же правилами.

1. На доске написано натуральное число. За один ход разрешается уменьшить его на 1, 2 или 3, но так, чтобы полученное число

оказалось положительным. Игрок, который не может сделать очередной ход, проигрывает. При каких значениях первоначального числа у начинающего есть выигрышная стратегия? Как изменится результат, если разрешается уменьшать число на 2, 3 или 5?

2. В одной кучке m камней, в другой — n. За один ход игрок должен убрать одну кучку, а другую разбить на две меньшие кучки. Игрок, который не может сделать очередной ход, проигрывает. При каких m и n у начинающего есть выигрышная стратегия?

3. В одной кучке 10 камней, а в другой — n камней. За один ход разрешается брать любое число камней из одной кучки либо одинаковое число камней из обеих кучек. Игрок, взявший последний камень, побеждает. При каких значениях n у второго игрока есть выигрышная стратегия? Решите ту же задачу, если в первой кучке 30 камней.

4. В одной кучке три камня, во второй — четыре, в третьей — пять и в четвертой — шесть. За один ход разрешается либо взять один камень из кучки, в которой по крайней мере три камня, либо забрать целиком кучку, в которой два или три камня. Игрок, взявший последний камень, побеждает. Кто выигрывает при правильной игре?

5. Написан многочлен $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \ldots + *x^2 + *x + 1$. Каждым ходом игрок заменяет числом одну из звездочек. Первый игрок побеждает, если многочлен, получающийся после девяти ходов, не имеет вещественных корней. Второй игрок побеждает, если этот многочлен имеет хотя бы один вещественный корень. Каков будет результат, если оба игрока играют наилучшим образом?

5.3. *Универсальная стратегия.* В любой игре есть *начальная* позиция. После каждого хода образуется новая позиция. Позиция, в которой нет ходов, называется *заключительной*. Игру будем называть *нормальной*, если правила ее таковы, что:

а) невозможна бесконечная последовательность ходов;

б) набор ходов, возможных в любой конкретной позиции, не зависит от того, чья очередь хода и каким образом игра пришла к данной позиции;

в) игрок, сделавший последний ход, выигрывает.

Из этих условий вытекает, что никакая последовательность ходов не приведет к позиции, встречавшейся ранее.

1. Докажите, что существует единственная функция r, определенная на множестве всех позиций данной нормальной игры, такая, что (а) $r(F) = 0$ для любой заключительной позиции F, (б) $r(P) > r(Q)$, если есть ход из позиции P в позицию Q, и (в) из любой незаключительной позиции P есть ход в такую позицию Q, что $r(Q) = r(P) - 1$. Число $r(P)$ называется *рангом* позиции P.

2. Найдите ранги позиций в играх задачи 5.2, пп. 1—3.

3. Докажите, что существует единственная функция v, определенная на множестве всех позиций данной нормальной игры, такая, что (а) $v(F) = 0$ для любой заключительной позиции F и (б) для любой незаключительной позиции P число $v(P)$ — это наименьшее неотрицательное целое число, не встречающееся среди чисел $v(Q)$, где Q — позиция, в которую можно попасть из позиции P за один ход. Число $v(P)$ называется *значением* позиции P.

4. Найдите значения позиций в играх задачи 5.2, п. 1.

5. Пусть P — позиция в нормальной игре. Докажите, что если $v(P) \neq 0$, то у игрока, делающего ход в позиции P, есть выигрышная стратегия, а если $v(P) = 0$, то выигрышная стратегия есть у его соперника.

5.4. *Сложение игр и игра «Ним».* Предположим у нас есть две игры A и B. Образуем из них новую игру со следующими правилами: перед каждым ходом игрок выбирает игру, в которой можно сделать ход, и делает ход в этой игре. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Описанная игра называется *суммой игр* A и B. Аналогичным образом определяется сумма любого числа игр.

1. Игра «Ним» играется по следующим правилам. Имеется n кучек камней. За один ход разрешается брать любое число камней из одной кучки. Игрок, который не может сделать ход, проигрывает. Представьте «Ним» в виде суммы n игр, в каждой из которых вы можете найти выигрывающую стратегию.

2. Пусть A и B — нормальные игры (см. задачу 5.3). Позиция в сумме игр A и B — это пара (P, Q), где P — позиция в игре A, а Q — позиция в игре B. Представим значения позиций P и Q в двоичной системе счисления: $v(P) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2 + \ldots$, $v(Q) = b_0 + b_1 \cdot 2 + b_2 \cdot 2^2 + \ldots$, где $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ равны 0 или 1. Докажите, что $v(P, Q) = c_0 + c_1 \cdot 2 + c_2 \cdot 2^2 + \ldots$, где $c_i = 0$, если $a_i = b_i$, и $c_i = 1$, если $a_i \neq b_i$.

3. Кто победит в игре «Ним» при следующих числах камней в кучках: а) 20 и 15; б) 27, 22 и 13; в) 15, 13, 13 и 12?

4. Примените «универсальную» стратегию (см. задачу 5.3) к п. 4 задачи 5.2.

5. Имеется три кучки по 50 камней в каждой. За один ход разрешается взять 1 или 2 камня из первой кучки или 1, 2 или 3 камня из второй кучки, или 1, 2, 3 или 4 камня из третьей кучки. Игрок, взявший последний камень, побеждает. Кто победит при правильной игре?

5.5. В следующих задачах можно доказать существование определенной стратегии, не находя этой стратегии.

1. На доске написаны натуральные числа от 1 до n. Каждым ходом игрок стирает какое-нибудь число и все делители этого числа, которые не были стерты ранее. Игрок, сделавший последний ход, выигрывает. Докажите, что игрок, делающий первый ход, имеет выигрывающую стратегию.

2. В одной кучке m камней, а в другой — n камней, $m \geq 2n$. За один ход игрок берет из одной кучки любое не равное 0 число камней, кратное числу камней в другой кучке. Игрок, взявший последний камень в одной из кучек, побеждает. Докажите, что игрок, делающий первый ход, имеет выигрывающую стратегию.

3. Двое играют в «крестики-нолики» на произвольной доске. Игрок, делающий первый ход, ставит крестики. Он побеждает, поставив 10 крестиков в ряд по горизонтали, вертикали или диагонали. Второй игрок ставит нолики и побеждает, поставив 10 ноликов в ряд по горизонтали, вертикали или диагонали. Если все поля заняты и ни один игрок не добился своей цели, игра считается закончившейся вничью. Докажите, что первый игрок имеет стратегию, обеспечивающую ему по крайней мере ничью.

5.6. В следующих задачах каждый игрок имеет определенную цель, и требуется определить, каким будет результат игры, если оба игрока играют наилучшим образом.

1*. Двое игроков образуют два n-значных числа A и B следующим образом: один игрок называет своим ходом любую из цифр $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, а второй решает, в какой разряд какого из чисел поместить эту цифру. После $2n$ ходов каждого из игроков игра заканчивается и вычисляется разность $A - B$. Цель первого игрока —

сделать эту разность как можно большей, а цель второго игрока — сделать ее как можно меньшей. Каково будет значение этой разности, если оба игрока играют наилучшим образом?

2*. На доске выписаны в ряд натуральные числа от 1 до $2n$ (n — натуральное число). Своим ходом игрок ставит знак $+$ или $-$ перед числом, перед которым знак еще не поставлен. Первый игрок стремится к тому, чтобы полученная после расстановки всех $2n$ знаков сумма была как можно меньше по модулю, в то время как второй игрок стремится сделать эту сумму как можно большей по модулю. Каков будет результат, если оба игрока играют наилучшим образом?

§ 2. Комбинаторные рассуждения

5.7. *Сравнение конечных множеств.*

1. В множестве X — n элементов. Докажите, что для любого целого числа k $(0 \le k \le n)$ число k-элементных подмножеств множества X равно числу $(n-k)$- элементных подмножеств множества X.

2. X — конечное множество, a — элемент множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих элемент a или не содержащих элемент a?

3. X — конечное множество, A — подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не пересекающихся с множеством A?

4. X — конечное множество, A — подмножество множества X. Каких подмножеств множества X больше, содержащих множество A или не содержащих множество A?

5. На окружности отмечено несколько точек, A — одна из них. Каких многоугольников с вершинами в этих точках больше, содержащих точку A или не содержащих точку A?

6. Докажите, что в любом непустом конечном множестве подмножеств с четным числом элементов столько же, сколько подмножеств с нечетным числом элементов.

5.8. *Разбиение числа на слагаемые.* Докажите, что для любых натуральных чисел n и k справедливы следующие утверждения:

1. Число целочисленных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$, удовлетворяющих условию $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, \ldots, x_k \ge 0$, равно числу целочисленных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k = n+k$, удовлетворяющих условию $x_1 > 0, x_2 > 0, \ldots, x_k > 0$.

2. Число целочисленных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k = n$, удовлетворяющих условию $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$, равно числу целочисленных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_k = n+\frac{k(k-1)}{2}$, удовлетворяющих условию $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k$.

3*. Число целочисленных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$, удовлетворяющих условию $0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_k$, равно числу целочисленных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_n = n$, удовлетворяющих условию $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n = k$.

5.9. *Формула включения и исключения.*

1. В множестве A — пять элементов, в множестве B — семь элементов, в множестве $A \cap B$ — три элемента. Сколько элементов в множестве $A \cup B$?

2. S_1 — сумма чисел элементов конечных множеств A, B, C; S_2 — сумма чисел элементов множеств $A \cap B, A \cap C, B \cap C$; S_3 — число элементов множества $A \cap B \cap C$. Сколько элементов в множестве $A \cup B \cup C$?

3. S_1 — сумма чисел элементов конечных множеств A, B, C, D; S_2 — сумма чисел элементов множеств $A \cap B, A \cap C, A \cap D, B \cap C, B \cap D, C \cap D$; S_3 — сумма чисел элементов множеств $A \cap B \cap C, A \cap B \cap D, A \cap C \cap D, B \cap C \cap D$; S_4 — число элементов множества $A \cap B \cap C \cap D$. Сколько элементов в множестве $A \cup B \cup C \cup D$?

4*. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — конечные множества, S_1 — сумма чисел элементов этих множеств; S_n — число элементов множества $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$, и если натуральное число k таково, что $2 \leq k \leq n-1$, то S_k — сумма чисел элементов всех множеств, являющихся пересечениями каких-либо k из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Сколько элементов в множестве $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$?

5. Сколько есть четырехзначных чисел, не делящихся ни на 3, ни на 5, ни на 7?

6*. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все различные простые делители натурального числа n ($n \geq 2$), $\varphi(n)$ — число натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с n. Докажите, что

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_s}\right).$$

5.10. *Две задачи о конечных множествах.* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — подмножества конечного множества X. Докажите следующие утверждения:

1*. Если пересечение любых двух из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непусто и n меньше половины числа всех подмножеств множества X, то найдется подмножество множества X, отличное от множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и имеющее с каждым из этих множеств непустое пересечение.

2*. Если пересечение любых трех из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непусто и n равно половине числа всех подмножеств множества X, то пересечение всех множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$ непусто.

5.11. *Принцип ящиков.* При любом распределении $n+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее двух предметов. В более общей форме *принцип ящиков* состоит в следующем: ***при любом распределении $nk+1$ или более предметов по n ящикам в каком-нибудь ящике окажется не менее чем $k+1$ предмет.***

1. Докажите, что среди любых одиннадцати натуральных чисел есть два числа, разность которых делится на 10.

2. Докажите, что среди любых $n+2$ натуральных чисел есть два числа, сумма либо разность которых делится на $2n$.

3. Докажите, что среди любых $n+1$ натуральных чисел, меньших $2n$, есть два числа, отношение которых — степень числа 2.

4. Докажите, что среди любых $n+1$ различных натуральных чисел, меньших $2n$, есть три числа, одно из которых равно сумме двух других.

5*. Докажите, что среди любых n натуральных чисел, не делящихся на n, есть несколько чисел, сумма которых делится на n.

6*. Докажите, что в последовательности, состоящей из 2^n натуральных чисел, произведение которых имеет не более чем n различных простых делителей, либо один из членов, либо произведение двух членов является квадратом натурального числа.

7*. Сумма натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$ равна 48. Докажите, что из этих чисел можно выбрать число или несколько последовательных, сумма которых равна 12. При каких значениях k, кроме 12, из любых натуральных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{30}$, сумма которых равна 48, можно выбрать одно или несколько последовательных, сумма которых равна k?

8*. Докажите, что любая последовательность, состоящая из $mn+1$ вещественных чисел, содержит возрастающую подпоследовательность из $m+1$ чисел или убывающую подпоследовательность из $n+1$ чисел.

9*. Дана прямоугольная таблица, в каждой клетке которой написано вещественное число, причем в каждой строке таблицы числа расположены в порядке возрастания. Докажите, что если расположить числа в каждом столбце таблицы в порядке возрастания, то в строках полученной таблицы числа по-прежнему будут располагаться в порядке возрастания.

5.12. *«Непрерывный» принцип ящиков.* Если фигуры $F_1, F_2, \ldots, F_n$ с площадями $S_1, S_2, \ldots, S_n$ содержатся в фигуре F с площадью S и $S_1+S_2+\ldots+S_n > kS$, то некоторые $k+1$ из фигур $F_1, F_2, \ldots, F_n$ имеют общую точку.

1. В квадрате со стороной 1 отмечено 64 точки. Докажите, что некоторые три из них можно покрыть одним кругом радиуса 1/8.

2. В круге радиуса 16 отмечено 650 точек. Докажите, что некоторые десять из них можно покрыть кольцом, внутренний радиус которого равен 2, а внешний радиус равен 3.

3**. В квадрате со стороной 1 расположена фигура, расстояние между любыми двумя точками которой не равно 0,001. Докажите, что площадь этой фигуры меньше 0,34. Докажите, что площадь этой фигуры меньше 0,29.

5.13. *Инвариант.* В каждой из предлагаемых задач задан некоторый объект и описаны преобразования, которые разрешено производить над этим объектом. Требуется доказать, что в результате таких преобразований объект нельзя привести к некоторому определенному виду. Это можно сделать, подобрав такую характеристику объекта, которая не меняется при указанных преобразованиях. Такую характеристику называют *инвариантом преобразования.*

1. Каждое из чисел от 1 до 1 000 000 заменили суммой его цифр. С полученным набором чисел проделали то же самое и т. д. до тех пор, пока не получился набор, состоящий из миллиона однозначных чисел. Каких чисел в получившемся наборе больше: единиц или двоек?

2. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стереть любых два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус — в противном случае. Докажите, что последний

оставшийся на доске знак не зависит от порядка, в котором производились стирания.

3. На доске написано 25 букв А, 30 букв Б, 35 букв В. Разрешается стереть две разные буквы и написать третью. Такая операция проводится до тех пор, пока это возможно. Можно ли определить, какие две буквы были стерты последними?

4*. В каждой клетке таблицы 8×8 написано целое число. Разрешается выбирать в таблице любой квадрат размерами 3×3 или 4×4 и увеличивать на 1 каждое из чисел, стоящих в клетках выбранного квадрата. Всякую ли таблицу можно с помощью таких операций преобразовать в таблицу, в которой все числа делятся на 3?

5. Круг разбит на десять секторов, в каждом из которых стоит по фишке. Одним ходом разрешается любые две фишки передвинуть в соседние секторы. Докажите, что не удастся собрать все фишки в одном секторе.

6*. На пересечении первой строки и второго столбца таблицы 4×4 стоит минус, а в остальных клетках этой таблицы стоят плюсы. Разрешается изменять знак на противоположный одновременно во всех клетках, расположенных в одной строке, в одном столбце или вдоль прямой, параллельной какой-нибудь из диагоналей таблицы (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что сколько бы раз ни производили такие операции, в таблице останется хотя бы один минус.

7*. Числа $1, 2, \ldots, n$ расположены в некотором порядке. Разрешается менять местами любых два рядом стоящих числа. Докажите, что если проделать нечетное число таких операций, то полученное расположение чисел $1, 2, \ldots, n$ будет отлично от первоначального.

8. Докажите, что утверждение п. 7 останется справедливым, если разрешить менять местами любых два числа в перестановке.

9*. В различных пунктах кольцевого автодрома в одно и то же время и в одном и том же направлении стартовали 25 автолюбителей. По правилам гонки автолюбители могут обгонять друг друга, но при этом запрещен двойной обгон. Автолюбители финишировали одновременно в тех же пунктах, что и стартовали. Докажите, что во время гонки было четное число обгонов.

10*. Числа $1, 2, \ldots, n$ записаны по порядку. Разрешается выбрать любых четыре числа и поменять местами самое левое из них с самым правым, а второе слева — со вторым справа. Докажите, что если

$n(n-1)/2$ — четное число, то с помощью описанных операций можно прийти к расположению $n, n-1, \ldots, 3, 2, 1$; если же $n(n-1)/2$ — нечетное число, то к такому расположению прийти нельзя.

5.14. В этих задачах, как и в предыдущих, задан некоторый объект и описаны преобразования, которые разрешено над ним производить. При этом либо требуется доказать, что как бы ни производили эти преобразования, через конечное число шагов обязательно получится объект вполне определенного вида, либо доказать, что можем прийти к объекту требуемого вида, специальным образом выбрав последовательность, в которой эти преобразования производятся. Инструментом доказательства служит такая числовая характеристика объекта, которая монотонно изменяется при заданной последовательности преобразований и может принимать лишь конечное число различных значений.

1. Непустые конечные множества $A_1, A_2, A_3, \ldots$ состоят из целых чисел, причем при $n \geq 2$ каждый элемент множества A_n является средним арифметическим двух или более элементов множества A_{n-1}. Докажите, что в этой последовательности конечное число множеств.

2. В строчке подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом a первой строчки записывается натуральное число, указывающее, сколько раз a встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом b второй строчки записывается натуральное число, указывающее, сколько раз b встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой — пятая и т. д. Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

3. В каждой клетке таблицы написано натуральное число. За один ход разрешается удвоить все числа какой-нибудь строки или же вычесть единицу из всех чисел какого-нибудь столбца. Докажите, что за несколько ходов можно получить таблицу, в которой все числа равны 0.

4*. Задано несколько красных и синих точек, некоторые из них соединены между собой. Точка называется особой, если более половины из соединенных с ней точек имеют цвет, отличный от ее цвета. За один шаг выбирается произвольная особая точка и перекрашивается в другой цвет. Докажите, что через конечное число шагов не останется ни одной особой точки.

5*. На плоскости заданы n красных и n синих точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая красная точка соединена отрезком с одной из синих точек, причем разные красные точки соединены с разными синими. Если отрезки AC и BD пересекаются, причем точки A и B — красные, а C и D — синие, то разрешается заменить эти отрезки отрезками AD и BC. Докажите, что через конечное число шагов никакие два отрезка не будут иметь общих точек.

6*. В каждой клетке прямоугольной таблицы написано вещественное число. За один ход разрешается заменить на противоположные все числа некоторой строки или некоторого столбца. Докажите, что за несколько шагов можно добиться того, чтобы сумма чисел в каждой строке и сумма чисел в каждом столбце стали неотрицательными.

7*. n точек на плоскости таковы, что круг радиуса 1 с центром в любой из этих точек содержит не менее чем $(n+2)/2$ данных точек. Докажите, что эти точки можно обозначить через $A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что каждое из расстояний $|A_1A_2|, |A_2A_3|, \ldots, |A_nA_1|$ не больше 1.

§ 3. Перебор вариантов

5.15. *Правило произведения.* Предположим, что нужно подсчитать число предметов, удовлетворяющих некоторым условиям. Допустим, что построение такого произвольного предмета разбили на n последовательных шагов, причем на первом шаге есть выбор из a_1 возможностей; независимо от результата первого шага есть a_2 различных возможностей на втором шаге; независимо от результатов первых двух шагов есть a_3 способов осуществления третьего шага и т. д.; наконец, независимо от решений, принятых на предыдущих шагах, есть a_n возможностей осуществления последнего шага. Тогда общее число пересчитываемых предметов равно произведению $a_1a_2\cdots a_n$.

1. В русском алфавите 20 согласных и 10 гласных букв. Сколько можно составить различных слогов из двух букв, первая из которых согласная, а вторая гласная?

2. Из города А в город Б ведут пять дорог, а из города Б в город В — семь дорог. Сколько есть различных маршрутов поездки из города А в город В через город Б?

3. Сколько существует различных двузначных чисел, в десятичной записи которых не встречается ни одна из цифр 0, 2, 5?

4. Сколько существует различных двузначных чисел, в десятичной записи которых не встречается ни одна из цифр 1, 3, 7?

5. В меню столовой имеется 7 первых, 9 вторых и 4 третьих блюда. Сколькими способами можно выбрать обед из трех блюд (первое, второе и третье)?

6. Номер автомашины состоит из трех букв русского алфавита (содержащего 33 буквы) и четырех цифр . Сколько можно составить различных номеров автомашин?

7. У рояля 88 клавиш. Сколькими способами можно извлечь последовательно 6 звуков?

8. Сколько различных натуральных делителей имеет число $n = 2^7 3^{10} 7^{15} 11^9$?

9. На координатной плоскости рисуются всевозможные несамопересекающиеся ломаные, все вершины которых имеют целые координаты, а звенья параллельны координатным осям; L_n — число таких ломаных, выходящих из начала координат и имеющих длину n. Докажите, что $4 \cdot 2^{n-1} \leq L_n \leq 4 \cdot 3^{n-1}$.

10. Сколько существует пятизначных чисел, оканчивающихся двумя семерками?

11. Сколько существует шестизначных чисел, начинающихся с двух одинаковых цифр?

12. Сколько существует четырехзначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр?

13. Сколько существует пятизначных чисел, в каждом из которых соседние цифры различны?

14. Сколько существует пятизначных чисел, не делящихся на 4, в записи которых не используются цифры 0, 4, 6, 8?

15. Сколько существует шестизначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр, а вторая и четвертая цифры нечетны?

16. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых две цифры 1 и по одной цифре 2, 3, 4, 5?

17. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых четыре цифры 5 и по одной цифре 0, 7, 8?

5.16. *Число подмножеств.*

1. Сколько существует подмножеств в множестве из m элементов?

2. Сколькими способами в множестве из m элементов можно выбрать два непересекающихся подмножества?

3. Сколько существует натуральных чисел, в десятичной записи которых каждая цифра равна 0 или 1, причем число единиц равно m, и никакие два нуля не стоят рядом?

5.17. *Число перестановок.* Расположение элементов множества в некотором порядке называют *перестановкой* этого множества. Число перестановок множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

1. Сколькими способами можно выписать в колонку фамилии 30 учеников?

2. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 одинаковых ладей так, чтобы никакие две из них не били друг друга?

3. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 3 занимает третье место, а цифра 5 — пятое?

4. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 1 следует непосредственно за цифрой 0?

5. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 0 занимает одно из первых трех мест, а цифра 1 — одно из последних четырех мест?

6. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 0 занимает одно из первых пяти мест, а цифра 1 — одно из первых трех мест?

7. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых между цифрами 0 и 1 стоят ровно три цифры?

8. На полке нужно расставить три пятитомных собрания сочинений так, чтобы все тома каждого из собраний сочинений стояли подряд, хотя и необязательно в порядке следования номеров томов. Сколькими способами это можно сделать?

9. Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы за каждой партой мальчик сидел слева, а девочка — справа?

10. Сколькими способами можно рассадить за пятнадцатью партами 15 мальчиков и 15 девочек так, чтобы каждый мальчик сидел за одной партой с девочкой?

11. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 0 расположена левее цифры 1?

12. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 1 расположена между цифрами 0 и 2?

13. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 0 расположена левее цифр 1, 2, 3, а цифра 1 — левее цифры 2?

5.18. В некоторых случаях для того, чтобы найти число элементов конечного множества, обладающих требуемым свойством, удобно найти сначала число элементов, не обладающих данным свойством, и затем вычесть это число из числа элементов множества.

1. Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых есть хотя бы одна четная цифра?

2. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых хотя бы одна из первых трех цифр делится на 3?

3. Сколько существует пятизначных чисел, в десятичной записи которых есть одинаковые цифры?

5.19. В некоторых случаях при подсчете числа предметов, обладающих требуемыми свойствами, не удается непосредственно применить правило произведения (см. задачу 5.15), однако удается разбить множество пересчитываемых предметов на несколько частей таким образом, что для подсчета числа элементов в каждой из этих частей уже можно применить правило произведения. После этого остается сложить получившиеся числа.

1. Сколько существует натуральных чисел, меньших 10^5, в десятичной записи которых соседние цифры различны?

2. Алфавит состоит из 10 букв. «Словом» называется любая последовательность букв этого алфавита, в которой никакая буква не встречается три раза подряд. Сколько существует слов, состоящих не более чем из четырех букв?

3. Сколько существует четных пятизначных чисел, в каждом из которых нет одинаковых цифр?

4. Сколько существует шестизначных чисел, делящихся на 25, в каждом из которых соседние цифры различны?

5. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифра 0 занимает одно из первых шести мест, а цифра 1 — одно из шести последних мест?

6. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых цифры 0 и 1 стоят рядом, а цифры 1 и 2 не стоят рядом?

7. Сколько существует перестановок цифр $0, 1, 2, \ldots, 9$, в которых между цифрами 0 и 1 стоят ровно 3 цифры, а между цифрами 1 и 2 — ровно две цифры?

5.20. *Число «счастливых» билетов.*

1. n — натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x + y = n$?

2. n — натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет система уравнений $x + y = z + t = n$?

3. Каждая из 10 000 карточек пронумерована последовательностью из четырех цифр (от 0000 до 9999). Сколько существует карточек с номерами, у которых сумма первых двух цифр равна сумме двух последних цифр?

4. n — натуральное число. Сколько решений в неотрицательных целых числах имеет уравнение $x + y + z = n$?

5. Каждая из миллиона карточек пронумерована последовательностью из шести цифр (от 000 000 до 999 999). Сколько существует краточек с номерами, у которых сумма первых трех цифр равна сумме трех последних цифр?

5.21. *Разбиение на группы.* В каждой из предлагаемых задач имеется правило, в соответствии с которым некоторые перестановки данного конечного множества отождествляются. При этом все перестановки данного множества разбиваются на группы таким образом, что перестановки из одной группы считаются одинаковыми, а перестановки из разных групп — разными. Если при этом во всех группах одно и то же число элементов, то, для того чтобы найти число разных перестановок, следует число всех перестановок данного множества разделить на число перестановок, попавших в одну группу.

В некоторых случаях правило отождествления перестановок задается явно, в других случаях его приходится разумным образом вводить, решая задачу.

1. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если при этом: а) для каждого человека важно не место, которое он занимает за столом, а лишь то, кто является его соседом справа и кто является его соседом слева; б) для каждого человека важно лишь то, кто является его соседями (и не важно, кто из этих

соседей сидит справа, а кто — слева); в) для каждого человека важно лишь то, кто сидит напротив него.

2. $ABCD$ — квадрат. Каждый из отрезков $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$, $[AC]$ требуется окрасить в один из данных пяти цветов, причем все цвета должны быть использованы. Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением. Сколько существует различных раскрасок?

3*. Сколько различных фигур можно построить из данного правильного n-угольника и n кругов попарно различных радиусов, если каждая сторона n-угольника должна касаться в своей середине одного и только одного из данных кругов? Две фигуры считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением.

4*. Для банкета на 100 человек приготовлено три восьмиместных, четыре десятиместных и два восемнадцатиместных круглых стола. Два варианта расположения людей за этими столами считаются одинаковыми, если у каждого человека в обоих вариантах один и тот же сосед слева и один и тот же сосед справа. Сколько существует различных вариантов расположения ста человек за этими столами?

5. Сколько существует пятизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается два раза, а цифры 2, 3 и 4 — по одному разу?

6. Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы слова «косогор»?

7. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых цифры 1 и 2 встречаются по два раза, а цифры 3 и 4 — по одному разу?

8. Сколько существует семизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается трижды, а цифра 5 — дважды?

9. Сколько разных последовательностей букв можно получить, переставляя буквы слова *колокольчик*?

10*. m различных шаров распределяют по n различным ящикам таким образом, чтобы в каждом ящике оказался хотя бы один шар. Докажите, что число таких распределений делится на $n!$.

11. Сколько различных последовательностей длины n можно получить из k единиц и $(n-k)$ нулей?

12. Сколько различных последовательностей длины n можно получить из k_1 букв a_1, k_2 букв $a_2, \ldots, k_s$ букв $a_s (k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$?

§ 4. Биномиальные коэффициенты

5.22. Число k-элементных подмножеств n-элементного множества обозначается C_n^k и при $0 \le k \le n$ вычисляется по формуле $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (см. п. 11 задачи 5.2).

1. Вычислите: $C_7^2, C_{20}^0, C_{40}^1, C_{35}^{35}, C_8^4, C_{15}^{13}$.

2. Решите уравнения: $C_n^2 = 28, C_n^{n-3} = 20, C_{30}^n = 435$.

Выясните, сколько существует подмножеств X множества $\{0;1;2;\ldots;9\}$, удовлетворяющих условиям:

3. Множество X состоит из трех элементов.

4. Множество X состоит из пяти элементов и $1 \in X$.

5. Множество X состоит из шести элементов и $2 \notin X$.

6. Множество X состоит из семи элементов, $0 \in X, 1 \in X$ и $2 \notin X$.

7. Множество X состоит из двух четных и трех нечетных чисел.

8. В множестве X не менее семи элементов.

5.23. На окружности последовательно отмечены точки $A_1, A_2, \ldots, A_{12}$. Вычислите:

1. Число хорд с концами в отмеченных точках.

2. Число треугольников с вершинами в отмеченных точках.

3. Число выпуклых четыреугольников с вершинами в отмеченных точках.

4. Число треугольников с вершинами в отмеченных точках, не имеющих общих точек с прямой (A_2A_8).

5. Число выпуклых четыреугольников с вершинами в отмеченных точках, имеющих общие точки с прямой (A_1A_5).

5.24. l, m — параллельные прямые, $l \ne m$. На прямой l отмечено 8 точек, а на прямой m — 11 точек. Вычислите:

1. Число треугольников с вершинами в отмеченных точках.

2. Число выпуклых четырехугольников с вершинами в отмеченных точках (три вершины четырехугольника не должны лежать на одной прямой).

3. Число несамопересекающихся шестнадцатизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках, звенья которых не лежат на прямых l и m.

4. Число несамопересекающихся десятизвенных ломаных с вершинами в отмеченных точках, звенья которых не лежат на прямых l и m.

5.25. *Шары в ящиках.*

1. Имеется шесть различных ящиков, четыре неразличимых белых шара и три неразличимых черных шара. Сколькими способами можно разложить все шары по ящикам так, чтобы в каждом был хотя бы один шар?

2*. Имеется десять различных ящиков, шесть неразличимых белых шаров и шесть неразличимых черных шаров. Сколькими способами можно разложить все шары по ящикам так, чтобы в каждом ящике оказался хотя бы один шар?

5.26. *Разбиение числа на слагаемые.*

1. Докажите, что число различных последовательностей из m нулей и n единиц равно C_{m+n}^{m}.

2*. Докажите, что число различных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ в неотрицательных целых числах равно C_{m+n-1}^{m-1}.

3. Докажите, что число различных решений уравнения $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = n$ в натуральных числах равно C_{n-1}^{m-1}.

4. Сколькими способами можно разложить 15 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы оказалось не более двух пустых ящиков?

5. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 5 различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не менее двух шаров?

6. Сколькими способами можно разложить 20 одинаковых шаров по 6 различным ящикам так, чтобы в каждом ящике оказалось не более 5 шаров?

5.27. *Формула включения и исключения* (продолжение задачи 5.9).

1*. Докажите, что число таких перестановок $(a_1; a_2; \ldots; a_n)$ чисел $(1; 2; \ldots; n)$, которые удовлетворяют условию $a_k \neq k$ при всех k, равно $n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

2*. Сколькими способами можно раскрасить клетки шахматной доски 8×8 в восемь цветов так, чтобы клетки, имеющие общую сторону, были окрашены в разные цвета и чтобы в каждом горизонтальном ряду встречались все восемь цветов?

3*. m различных шаров распределяют по n различным ящикам таким образом, чтобы в каждом ящике оказался хотя бы один шар.

Докажите, что при $m \geq n$ число таких распределений равно

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n-k)^m C_n^k.$$

4. Докажите тождество

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(n-k)^n}{k!(n-k)!}=1.$$

5.28. *Треугольник Паскаля.* Числовым треугольником будем называть таблину, в верхней строке которой написано одно число, а в каждой следующей строке — на одно число больше, чем в предыдущей. Строки такой таблицы будем нумеровать последовательными целыми числами, начиная с 0, так что n-я строка будет состоять из $n+1$ чисел. Числа в каждой строке также будем нумеровать, начиная с 0, и обозначать T_n^k, где n — номер строки, k — номер числа в строке. Числовой треугольник, удовлетворяющий условиям $T_n^0 = T_n^n = 1$, $T_n^k = T_{n-1}^{k-1} + T_{n-1}^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$, называется *треугольником Паскаля.*

1. Найдите сумму членов n-й строки треугольника Паскаля.

2. Найдите сумму членов n-й строки треугольника Паскаля, стоящих на четных местах.

3. Найдите сумму членов n-й строки треугольника Паскаля, стоящих на нечетных местах.

4*. Докажите, что в n-й строке треугольника Паскаля нет четных чисел в том и только в том случае, если $n+1$ — целая степень числа 2.

5*. Натуральные числа n и k таковы, что $n < 2^k$. Докажите, что в строке треугольника Паскаля с номером $n+2^k$ нечетных чисел вдвое больше, чем в строке с номером n.

6. Докажите, что число нечетных чисел в любой строке треугольника Паскаля есть целая степень числа 2.

5.29. *Треугольник Паскаля* (продолжение).

1. Докажите, что $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$ $(1 \leq k \leq n-1)$.

2. Докажите, что $T_n^k = C_n^k$ $(0 \leq k \leq n)$.

Упростите:

3. $\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_n^k$ $(m < n)$. 4. $\sum\limits_{k=l}^{m}(-1)^k C_n^k$ $(m < n)$.

5. $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{n}$.

6. $\sum_{k=0}^{m} C_{n+k}^{p}\ (n > p)$.

5.30. *Полиномиальная теорема.*

1. Докажите, что полином $(a_1 + a_2 + \ldots + a_s)^n$ равен сумме всевозможных одночленов вида

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}a_1^{k_1}a_2^{k_2}\ldots a_s^{k_s},$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_s$ – неотрицательные целые числа, сумма которых равна n. Найдите разложения следующих полиномов:

2. $(2x - y)^4$.
3. $\left(\frac{a}{2} + 2b\right)^5$.
4. $(x^2 + x + 1)^2$.
5. $(x - a + 1)^2$.
6. $(a - b - c)^3$.
7. $(1 - x + xy)^4$.

Найдите коэффициент при x^k в разложении полиномов:

8. $(x+2)^{10}, k = 3$.
9. $(1 - 2x)^7, k = 4$.
10. $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{x}\right)^8, k = -5$.
11. $\left(3\sqrt[3]{x^2} - x\sqrt{x}\right)^9, k = 11$.
12. $\left(x^2 - x + 1\right)^8, k = 7$.
13. $\left(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}\right)^6, k = 2$.

5.31. Числа C_n^k являются коэффициентами формулы бинома:

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k.$$

Докажите тождества:

1. $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$.
5. $\sum_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}$.
2. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k = 0$.
6. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} kC_n^k = 0$.
3. $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^k C_n^k = 1$.
7. $\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k2^{k-1} C_n^k = n$.
4. $\sum_{k=0}^{n} 9^k C_n^k = 10^n$.
8. $\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$.

9. $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k C_n^k}{k+1}=\frac{1}{n+1}$.

10. $\sum\limits_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^n C_{2n-1}^k 2^k}{k+1}=0$.

11. $\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}C_n^k}{k}=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

12. $\sum\limits_{k=0}^{n}(C_n^k)^2=C_{2n}^n$.

13. $\sum\limits_{k=0}^{p}(-1)^k(C_{2n}^k)^2=(-1)^n C_{2n}^n$.

14. $\sum\limits_{k=0}^{2n-1}(-1)^k(C_{2n-1}^k)^2=0$.

15. $\sum\limits_{k=0}^{p}C_m^k C_n^{p-k}=C_{m+n}^p$.

§ 5. Графы

Граф состоит из объектов двух типов: *вершин* и *ребер*. Вершины обычно изображают точками, а ребра — отрезками или дугами произвольной формы. Каждое ребро соединяет две вершины или вершину саму с собой (в последнем случае ребро называют *петлей*). Если граф не имеет петель и каждые две вершины соединены не более чем одним ребром, то граф называют *простым*. Две вершины, соединенные ребром, называются *смежными*, а два ребра, выходящие из одной вершины, называются *соседними*. Число ребер, выходящих из данной вершины, называется *степенью* этой вершины (петлю при этом следует считать дважды).

Пусть $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — вершины графа. *Путем из a_0 в a_n* называется последовательность различных ребер $e_1, e_2, \ldots, e_n$, таких, что e_1 соединяет a_0 и a_1, e_2 соединяет a_1 и a_2, …, e_n соединяет a_{n-1} и a_n. Число n называется *длиной* этого пути. Если a_0 совпадает с a_n, то путь называется *контуром*. Путь (контур) называется *эйлеровым*, если он содержит все ребра графа. Граф называется *связным*, если для любых двух вершин a и b есть путь, ведущий из a в b. Длина кратчайшего пути из a в b называется *расстоянием между a и b*. *Диаметром* связного графа называется наибольшее расстояние между его вершинами. Множество вершин несвязного графа можно разбить на *компоненты связности*, т. е. на такие попарно непересекающиеся непустые подмножества, что для любых вершин a и b путь из a в b существует в том и только в том случае, если a и b принадлежат одной и той же компоненте.

Последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различных вершин графа называется *циклом*, если a_1 и a_2 соединены ребром, a_2 и a_3 соединены ребром, ..., a_{n-1} и a_n соединены ребром, a_n и a_1 соединены ребром. Цикл, содержащий все вершины графа, называется *гамильтоновым*.

5.32. *Степени вершин графа.*

1. Докажите, что в любом простом графе есть две вершины одинаковой степени.

2. Докажите, что для любого n существует простой граф с n вершинами, в котором нет трех вершин одной и той же степени.

3. Докажите, что при $n \geq 2$ в графе с $2n$ вершинами, в котором степень каждой вершины не меньше n, есть цикл из четырех вершин.

4. Докажите, что сумма степеней всех вершин произвольного графа равна удвоенному числу ребер этого графа.

5. Докажите, что в любом графе число вершин нечетной степени четно.

6. Можно ли нарисовать на плоскости 25 отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с семью другими?

7. Даны неотрицательные целые числа $d_1, d_2, \ldots, d_n$ с четной суммой. Докажите, что существует граф с n вершинами, степени которых равны $d_1, d_2, \ldots, d_n$. Всегда ли существует простой граф с такими степенями вершин?

8. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ — степени вершин простого графа с n вершинами. Докажите, что для каждого k, $0 < k < n$, выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}.$$

5.33. *Строго регулярные графы.* Строго регулярным графом с параметрами (n, d, a, b) называется простой граф с n вершинами, обладающий следующими свойствами: каждая вершина имеет степень d, для любых двух смежных вершин есть ровно a вершин, смежных с каждой из них, и для любых двух несмежных вершин есть ровно b вершин, смежных с каждой из них.

1. Докажите, что для строго регулярного графа с параметрами (n, d, a, b) выполняется равенство $d(d-a-1) = b(n-d-1)$.

2. Вершинами графа являются все двухэлементные подмножества данного конечного множества. Две различные вершины соединяются ребром в том и только в том случае, если они соответствуют пересекающимся подмножествам. Докажите, что этот граф строго регулярен.

3. Постройте пример строго регулярного графа с параметрами $(10,3,0,2)$.

5.34. *Деревья.* Связный граф, не имеющий циклов, называется *деревом.*

1. Докажите, что связный граф с n вершинами имеет по крайней ней мере $n-1$ ребер.

2. Докажите, что связный граф с n вершинами является деревом в том и только в том случае, если он имеет ровно $n-1$ ребер.

3. Какое наименьшее число ребер может иметь связный граф диаметра d с n вершинами?

4. Сумма натуральных чисел $d_1,d_2,\ldots,d_n$ равна $2n-2$. Докажите, что существует дерево с n вершинами, степени которых равны $d_1,d_2,\ldots,d_n$.

5.35. *Связные графы.* Докажите следующие утверждения.

1. Если в простом графе с $2n-1$ вершинами степень каждой вершины не меньше n, то этот граф связный.

2. В любом связном графе можно удалить какую-нибудь вершину и все выходящие из нее ребра так, чтобы оставшийся граф был связным.

3. Если в простом графе с n вершинами число ребер больше, чем $\dfrac{(n-1)(n-2)}{2}$, то этот граф связный.

4. Если в связном графе диаметра d степень любой вершины не превосходит k, то число вершин не превосходит $1+k\dfrac{(k-1)^d-1}{k-2}$.

5.36. *Эйлеровы пути.*

1. Докажите, что граф, имеющий эйлеров путь, имеет не более двух вершин нечетной степени, а граф, имеющий эйлеров контур, не имеет вершин нечетной степени.

2. Докажите, что если степени всех вершин графа четны, то для любого ребра найдется контур, содержащий это ребро.

3. Докажите, что если степени всех вершин связного графа четны, то контур наибольшей длины в этом графе является эйлеровым.

4. Докажите, что если связный граф имеет ровно две вершины нечетной степени, то этот граф имеет эйлеров путь.

5. Дан кусок проволоки длиной 120 см. Докажите, что, не разрезая проволоки, из нее нельзя изготовить каркас куба с ребром 10 см. На какое наименьшее число частей следует разрезать проволоку, чтобы из нее можно было изготовить каркас такого куба?

6. Докажите, что если в связном графе число вершин нечетной степени равно $2n$, то в нем можно найти n путей, таких, что каждое ребро графа принадлежит ровно одному из этих путей.

7. Докажите, что в связном графе с n ребрами можно найти последовательность ребер $e_1, e_2, \ldots, e_{2n}$, содержащую каждое ребро графа дважды, и последовательность вершин $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, такую, что e_1 соединяет a_1 и a_2, e_2 соединяет a_2 и a_3, ..., e_{2n-1} соединяет a_{2n-1} и a_{2n}, e_{2n} соединяет a_{2n} и a_1.

5.37. *Раскраска полного графа.* Если каждые две вершины простого графа соединены ребром, то такой граф называется *полным*. В следующих задачах каждое ребро полного графа окрашено в один из двух цветов или более. Если три вершины соединены попарно ребрами одного цвета, будем говорить, что они образуют одноцветный треугольник. Докажите следующие утверждения.

1. Если ребра полного графа с шестью вершинами раскрашены в два цвета, то найдется одноцветный треугольник.

2. Если ребра полного графа с семнадцатью вершинами раскрашены в три цвета, то найдется одноцветный треугольник.

3. Если ребра полного графа раскрашены в n цветов и число вершин больше, чем $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!}$, то найдется одноцветный треугольник.

4. Если ребра полного графа с n вершинами раскрашены в два цвета, красный и синий, то число одноцветных треугольников равно

$$C_n^3 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i(n-1-r_i),$$

где r_i — число красных ребер, выходящих из i-й вершины.

5. Если ребра полного графа с восемью вершинами раскрашены в два цвета, то найдется не менее восьми одноцветных треугольников.

6. Если ребра полного графа с n вершинами раскрашены в два цвета, то можно найти такие две вершины, что среди остальных вершин имеется не более чем $\frac{n-1}{2}$ вершин, соединенных с выбранными вершинами ребрами разного цвета.

5.38. *Гамильтоновы циклы.*

1*. Несколько человек сидят за круглым столом. Каждые два из них — либо друзья, либо враги. Известно, что если A и B — враги, то A имеет среди сидящих за столом больше друзей, чем B врагов. Докажите, что этих людей можно пересадить так, что никто не окажется рядом со своим врагом.

2*. Докажите, что если в простом графе с $n \geq 3$ вершинами сумма степеней любых двух несмежных вершин не меньше n, то в нем есть гамильтонов цикл.

5.39. *Две задачи про турниры.* В турнире по круговой системе каждая команда встречается с остальными командами по одному разу.

1. При каких $n \geq 3$ в любом турнире n команд по круговой системе (без ничьих) найдутся две команды A и B, такие, что любая другая команда C либо выиграла у A и B, либо проиграла A и B?

2. Докажите, что по окончании турнира по круговой системе можно расположить команды в таком порядке, что никакая команда не проиграла следующей за ней.

5.40. *Графы без треугольников.*

1. Докажите, что если в простом графе среди любых трех вершин есть две, не соединенные ребром, то число ребер графа не превосходит $\left[\frac{n^2}{4}\right]$, где n — число вершин графа.

2. Докажите, что для любого натурального n можно построить простой граф с n вершинами и $\left[\frac{n^2}{4}\right]$ ребрами, среди любых трех вершин которого есть две, не соединенные ребром.

3*. Пусть n и s — натуральные числа, $s \geq 3$, $n = q(s-1)+r$, где q и r — целые числа, $1 \leq r \leq s-1$. Пусть $e = C_n^2 - rC_{q+1}^2 - (s-1-r)C_q^2$. Докажите, что если в простом графе с n вершинами среди любых s вершин есть две, не соединенные ребром, то число ребер графа не превосходит e. Приведите пример графа с n вершинами и e ребрами, среди любых s вершин которого есть две, не соединенные ребром.

5.41. *Объездные пути.* В некотором городе для любых трех перекрестков A, B и C есть путь, ведущий из A в B и не проходящий через C. Докажите, что с любого перекрестка на любой другой ведут по крайней мере два непересекающихся пути (в городе более двух перекрестков).

5.42. *Можно ли уменьшить число врагов?* В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага.

5.43. *Распространение сплетен.* В поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость рано или поздно становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-нибудь новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

5.44. **Какой маршрут дешевле?* В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлено два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

Глава 6

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Определение тригонометрических функций

Окружность с центром в начале координат и радиусом, равным единице, будем называть *числовой окружностью*. Длина числовой окружности равна 2π. Представим себе точку, равномерно движущуюся по числовой окружности со скоростью, равной по величине 1. Предположим, что в момент времени $t = 0$ эта точка имеет координаты $(1;0)$ и направление движения выбрано так, что в момент времени $t = \pi/2$ движущаяся точка имеет координаты $(0;1)$. (Если оси координат расположены, как на рис. 3, то точка вращается против часовой стрелки.)

Этими условиями однозначно определяется положение точки в любой момент времени t. Обозначим это положение через $P(t)$. Абсцисса точки $P(t)$ называется *косинусом* числа t ($\cos t$), а ордината — *синусом* числа t ($\sin t$). Если $\cos t \neq 0$, то *тангенс* числа t ($\operatorname{tg} t$) — это

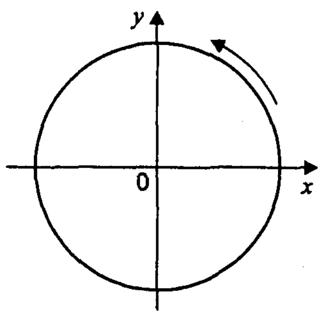

Рис. 3

отношение $\sin t/\cos t$, а если $\sin t \neq 0$, то *котангенс* числа t ($\mathrm{ctg}\, t$) — это отношение $\cos t/\sin t$.

6.1. Найдите координаты точек $P(\pi), P(3\pi/2), P(-\pi/2), P(-\pi)$, $P(\pi/6)$,$P(\pi/4)$, $p(\pi/3)$, $P(-3\pi/4)$, $P(7\pi/6)$, $P(10\pi/3)$.

6.2. Изобразите на числовой окружности дугу, описываемую движущейся точкой в течение промежутков времени:

1. $[0;\pi/2]$.
2. $(-\pi/4;\pi]$.
3. $[-\pi/2;3\pi/2)$.
4. $[1;+\infty)$.
5. $(2;9)$.

6.3. Отметьте на числовой окружности положения, которые занимает движущаяся точка в моменты времени:

1. $t=\pi k/2$, где k — целое число.
2. $t=\pi/4+\pi k$, где k — целое число.
3. $t=\pi k/6$, где k — целое число.
4. $t=-\pi/2+\pi k/4$, где k — целое число.

6.4. Дано вещественное число t_0 и на числовой окружности отмечены точка $A=P(t_0)$, точка B, симметричная A относительно оси ординат, точка C, симметричная A относительно начала координат, и точка D, симметричная A относительно оси абсцисс. Найдите все значения t, для которых справедливы утверждения:

1. $P(t)=A$.
2. $P(t)=C$.
3. $P(t)=D$.
4. $P(t)=B$.

5. Точка $P(t)$ лежит на прямой AC.
6. Точка $P(t)$ лежит на дуге AB.
7. Точка $P(t)$ лежит на дуге CAB.

6.5. На числовой окружности отмечены точка $A(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$ и точка $B(-1;0)$. Найдите все значения t, для которых точка $P(2t)$ лежит на дуге AB.

6.6. Используя иррациональность числа π, докажите, что на любой дуге числовой окружности есть бесконечно много точек вида $P(n)$, где n — целое число.

6.7. Для каждого из следующих чисел выясните, положительно оно, отрицательно или равно нулю:

1. $\sin\frac{\pi}{7}$.
2. $\cos\frac{5\pi}{11}$.
3. $\operatorname{tg}\frac{23\pi}{9}$.
4. $\cos\frac{11\pi}{2}$.
5. $\sin\sqrt{\pi}$.
6. $\operatorname{ctg}\frac{13}{7}$.
7. $\sin 3,14$.
8. $\operatorname{tg}\frac{7}{3}$.
9. $\cos 12$.
10. $\cos(\sin 2)$.
11. $\operatorname{tg}(\cos 1)$.
12. $\operatorname{ctg}(\sin 3)$.

6.8. Какое из чисел больше:

1. $\sin 1$ или $\cos 10$?
2. $\sin 1$ или $\operatorname{tg} 2$?
3. $\sin 3$ или $\operatorname{tg} 3$?
4. $\sin 1 + \cos 1$ или 1?

6.9. Расположите в порядке возрастания числа:

1. $\sin 1$, $\cos 2$, $\sin 3$, $\cos 4$, $\sin 5$, $\cos 6$, $\sin 7$, $\cos 8$.

2*. $\operatorname{tg} 1$, $\operatorname{ctg} 2$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 4$, $\operatorname{tg} 5$, $\operatorname{ctg} 6$, $\operatorname{tg} 7$, $\operatorname{ctg} 8$.

6.10. Для решения следующих уравнений и неравенств не нужны формулы тригонометрии — достаточно знать лишь определение синуса и косинуса.

1. $\sin t = 0$.
2. $\sin t = 1$.
3. $\cos t = -1$.
4. $\sin t = \cos t$.
5. $|\sin t| = |\cos t|$.
6. $\sin t = 1/2$.
7. $\cos t = -\sqrt{2}/2$.
8. $\sin t + \cos t = 1$.
9. $\sin t = \sqrt{2} + \cos t$.
10. $\sin t \leq 0$.
11. $\cos t > 0$.
12. $\cos t > \frac{1}{2}$.
13. $\sin t < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
14. $\sin t > \cos t$.
15. $\sin t - \cos t \geq 1$.
16. $\frac{1}{\sin t} < 2$.
17. $\frac{\sin t + \cos t}{\sin t - \cos t} \geq 1$.

6.11. В этой задаче, как и в предыдущей, можно обойтись без формул тригонометрии. Докажите утверждения:

1. $\sin 10^\circ > \frac{1}{6}$.

2. $\sin 6^\circ > \frac{1}{10}$.

3. Если натуральное число $n \geq 2$ и вещественное число α таковы, что $0 < n\alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\sin n\alpha < n \sin\alpha$.

6.12. Сумма векторов, идущих из центра правильного многоугольника в его вершины, равна нулевому вектору. Эту геометрическую теорему можно использовать при доказательстве следующих равенств:

1. $\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{(2n-2)\pi}{n} = -1$ (n — натуральное число).

2. $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} = -1/2$.

3. $\cos 36^\circ - \cos 72^\circ = 1/2$.

4. $\cos 20^\circ = \cos 40^\circ + \cos 80^\circ$.

6.13. Непосредственно из определения тригонометрических функций вытекают тождества: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$, $1 + \operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$, $1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}$, $\operatorname{tg} t \operatorname{ctg} t = 1$. Эти тождества позволяют выражать значения одних тригонометрических функций через другие.

1. Найдите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -1/6$, $\sin\alpha < \cos\alpha$.

2. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -8/15$, $\sin\alpha > \cos\alpha$.

3. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$, $\alpha \in (0;\pi)$.

4. Найдите $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = 5/13$, $\alpha \in \left[\frac{\pi}{4};\pi\right]$.

5. Найдите $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 3$.

6. Найдите $\sin\alpha\cos\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 6/5$.

7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = 1/2$.

8. Найдите $\frac{\sin\alpha + 2\cos\alpha}{\cos\alpha - 3\sin\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha = 2/5$.

9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = \sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha \in [5;6]$.

10. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$, если $3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha = 5 - 8\sin\alpha\cos\alpha$, $\alpha \in (0;1)$.

6.14. Из простейших соотношений между тригонометрическими функциями (см. задачу 6.13) можно вывести немало любопытных тождеств. Некоторые из них вы получите, упростив следующие выражения:

1. $\sin^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.
2. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$.
3. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$.
4. $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.
5. $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$.
6. $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.
7. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.
8. $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}+\operatorname{ctg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\sin\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha\right)$.
9. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}$.
10. $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.
11. $\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$.
12. $\sin^2\alpha(2+\operatorname{ctg}\alpha)(2\operatorname{ctg}\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha$.

6.15. Докажите тождества:

1. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$.
2. $\cos\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)(\sin\alpha+\cos\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.
3. $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\operatorname{tg}^2\alpha$.
4. $(\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha)(\cos\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$.
5. $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha}$.
6. $\sin\alpha+\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}$.
7. $3\sin^4\alpha-2\sin^6\alpha=1-3\cos^4\alpha+2\cos^6\alpha$.

6.16. Упростите следующие выражения:

1. $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad (\alpha\in[0;\pi])$.

2. $\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\quad (\alpha\in[\pi;2\pi])$.

3. $\sqrt{\sin^4\alpha-2\sin^2\alpha+1}$.

4. $\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}$ $\quad \left(\alpha\in\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)\right)$.

5. $\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}$ $\quad \left(\alpha\in\left[\frac{3\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]\right)$.

6. $\sqrt{\mathrm{tg}^2\,\alpha+\mathrm{ctg}^2\,\alpha-2}$ $\quad \left(\alpha\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)\right)$.

7. $\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$ $\quad (\alpha\in(\pi/2;\pi))$.

6.17. *Формулы приведения.* Так называют формулы, основанные на симметрии числовой окружности относительно осей координат и прямых $y=x$, $y=-x$ и сводящие вычисление тригонометрических функций аргумента вида $\frac{\pi n}{2}\pm\alpha$, где n — целое число, к тригонометрическим функциям аргумента α.

1. Вычислите: $\sin 135^\circ$, $\mathrm{tg}\,150^\circ$, $\cos 1110^\circ$, $\sin\frac{7\pi}{3}$, $\cos\frac{13\pi}{6}$, $\mathrm{tg}\,\frac{11\pi}{4}$.

2. Упростите:

$$\left(\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\left(\cos(2\pi-\alpha)-\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\right)^2.$$

3. Упростите:

$$\frac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{tg}(\pi-\alpha)-\mathrm{ctg}\,\alpha}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)\sin(2\pi-\alpha)(\sin^2(\pi+\alpha)-\cos^2(\pi-\alpha))}.$$

§ 2. Теоремы сложения

Теоремами сложения называют формулы:

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Из теорем сложения вытекает большое число тригонометрических формул, из которых отметим следующие:

1) *формулы двойного аргумента*:

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$
$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$\cos 2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\sin 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$$

2) *формулы половинного аргумента*:

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2};$$

3) *формулы преобразования произведения в сумму*:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$
$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta));$$

4) *формулы преобразования суммы в произведение*:

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

6.18. Упростите:

1. $\sin 13^\circ \cos 17^\circ + \sin 17^\circ \cos 13^\circ$.

2. $\cos 76^\circ \cos 16^\circ + \sin 76^\circ \sin 16^\circ$.

3. $\cos 8^\circ \cos 37^\circ - \cos 82^\circ \cos 53^\circ$.

4. $\sin 64^\circ \sin 34^\circ - \sin 56^\circ \cos 116^\circ$.

5. $\dfrac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1-\operatorname{ctg} 65^\circ \operatorname{ctg} 70^\circ}$.

6. $\dfrac{\operatorname{tg} 72^\circ - \operatorname{ctg} 48^\circ}{1+\operatorname{tg} 42^\circ \operatorname{ctg} 18^\circ}$.

7. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

8. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{12}}$.

9. $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{8}}$.

10. $\dfrac{\sin 25^\circ \sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.

11. $(\cos^2 10^\circ - \cos^2 80^\circ)^2 + \cos^2 70^\circ$.

12. $\sin 20^\circ + 2\sin^2 35^\circ$.

13. $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

14. $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

15. $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$.

16. $\cos\dfrac{\pi}{5}$.

6.19. Теоремы сложения и их следствия значительно расширяют возможности вычисления значений тригонометрических функций.

1. Найдите $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\alpha\in\left(\dfrac{\pi}{4};2\pi\right)$.

2. Найдите $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$.

3. Найдите $\cos\alpha$, если $\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{2}{3}$.

4. Найдите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=3$.

5. Найдите $\sin\alpha$, если $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$, $\alpha\in\left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$.

6. Найдите $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$, если $\sin\alpha=3/5$, $\sin\beta=12/13$, $\sin\gamma=7/25$, $\alpha,\beta,\gamma\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

7. Найдите $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, если $\cos(\alpha+\beta)=1/3$, $\cos(\alpha-\beta)=1/5$.

8. Найдите $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha+\sin\beta=1$, $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$.

9. Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, если $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=2$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=4$, $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\beta$.

6.20. Упростите выражения:

1. $\sin 3\alpha\cos 2\alpha-\cos 3\alpha\sin 2\alpha$.

2. $\cos 5\alpha\cos 3\alpha+\sin 5\alpha\sin 3\alpha$.

3. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{\cos(\alpha+\beta)+2\sin\alpha\sin\beta}$.

4. $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

5. $\sin^3\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\cos^3\alpha$.

6. $\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-\cos 2\alpha\cos 2\beta$.

6.21. Докажите тождества:

1. $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$.

2. $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$.

3. $\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}2\alpha+4\operatorname{tg}4\alpha+\ldots+2^n\operatorname{tg}2^n\alpha=\operatorname{ctg}\alpha-2^{n+1}\operatorname{ctg}2^{n+1}\alpha$.

4. $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

5. $\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{4}+\alpha)=\dfrac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}$.

6. $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$.

7. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

8. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}=\operatorname{tg}^4\alpha$.

9. $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{3}+\alpha)\operatorname{tg}(\dfrac{\pi}{3}-\alpha)=\operatorname{tg}3\alpha$.

10 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}$.

11. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin n\alpha=\dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}\alpha\sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

12. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos n\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}\alpha\sin\dfrac{n}{2}\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$.

13*. $\dfrac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\dfrac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\ldots+\dfrac{1}{\cos(n-1)\alpha\cos n\alpha}=$
$=\dfrac{\operatorname{tg}n\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha}$.

6.22. Содержание этой задачи составляют условные тождества, т. е. утверждения, устанавливающие, что одно соотношение является следствием другого.

1. Если $3\sin\alpha=\sin(2\beta+\alpha)$, $\cos(\alpha+\beta)\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, то $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\beta$.

2. Если $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$, $\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma$, $\cos\alpha + \cos\beta \neq 0$, то $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2} = \operatorname{tg}^2\gamma/2$.

3. Если $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{1+\cos^2\alpha}{1+\sin^2\alpha}$, то $\sin(3\alpha+\beta) = 7\sin(\alpha-\beta)$.

4. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma = 1 + 4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$.

5. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$.

6. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, то $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

7. Если $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\cos\gamma\neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

8. Если $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$, $\cos\gamma\neq 0$, то $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha = 1$.

6.23. Условные тригонометрические тождества иногда удобно формулировать как свойства углов треугольника.

1. Докажите, что треугольник ABC является остроугольным в том и только в том случае, если $0 < \operatorname{ctg}A\operatorname{ctg}B < 1$.

2. Углы треугольника ABC таковы, что $\sin 3A + \sin 3B + \sin 3C = 0$. Докажите, что один из углов треугольника ABC равен по величине $60°$.

3. Углы треугольника ABC таковы, что

$$\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}.$$

Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный.

4. Углы треугольника ABC таковы, что $\sin A = 4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

5*. Углы треугольника ABC таковы, что $\cos A + \cos B\cos C = \dfrac{3}{2}$. Докажите, что треугольник ABC — равносторонний.

§ 3. Обратные тригонометрические функции

Если числа a и b таковы, что $a = \sin b$ и $b \in [-\pi/2; \pi/2]$, то число b называется *арксинусом* числа a ($b = \arcsin a$); если числа a и b таковы, что $a = \cos b$ и $b \in [0; \pi]$, то число b называется *арккосинусом* числа a ($b = \arccos a$); если числа a и b таковы, что $a = \operatorname{tg} b$ и $b \in (-\pi/2; \pi/2)$, то число b называется *арктангенсом* числа a ($b = \operatorname{arctg} a$); если числа a и b таковы, что $a = \operatorname{ctg} b$ и $b \in (0; \pi)$, то число b называется *арккотангенсом* числа a ($b = \operatorname{arcctg} a$). Этими условиями однозначно определены обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ на промежутке $[-1, 1]$ и $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ на всей числовой оси. Отметим несколько простых соотношений для обратных тригонометрических функций:

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x,$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x,$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x,$$

$$\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

6.24. Найдите значения следующих выражений:

1. 3. $\arcsin\frac{2}{3} - \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$.
2. $\arccos\frac{1}{7} + \arccos\left(-\frac{1}{7}\right)$.
3. $\arcsin\frac{}{3} - \arccos\left(-\frac{}{3}\right)$.
4. $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$.
5. $\operatorname{arctg}(1 + \sqrt{2}) - \operatorname{arctg}(1 - \sqrt{2})$.

6.25. Постройте графики функций:

1. $y = \arcsin x + \arccos x$.
2. $y = \sin(\arcsin x)$.
3. $y = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$.
4. $y = \cos\left(\arccos\frac{1}{x}\right)$.
5. $y = \sin(\arccos x)$.
6. $y = \arcsin(\sin x)$.
7. $y = \arcsin(\cos x)$.
8. $y = \arccos(\cos\sqrt{16 - x^2})$.

6.26. Докажите, что для любого значения x из промежутка $[-1, 1]$ справедливы неравенства:

1. $\arcsin x \cdot \arccos x \le \frac{\pi^2}{16}$.
2. $\operatorname{arctg}(\arcsin x) < \operatorname{arcctg}(\arccos x)$.

§ 4. Тригонометрические уравнения и неравенства

Если $|a| \le 1$, то все решения уравнения $\sin x = a$ задаются формулами $x = \arcsin a + 2\pi k$, $x = \pi - \arcsin a + 2\pi k$, где k — произвольное целое число. При $a = 1$ лучше пользоваться формулой $x = \pi/2 + 2\pi k$, при $a = -1$ — формулой $x = -\pi/2 + 2\pi k$, при $a = 0$ — формулой $x = \pi k$.

Если $|a| \le 1$, то все решения уравнения $\cos x = a$ задаются формулами $x = \arccos a + 2\pi k$, $x = -\arccos a + 2\pi k$, где k — произвольное целое число. При $a = 1$, $a = -1$, $a = 0$ лучше использовать формулы $x = 2\pi k$, $x = \pi + 2\pi k$, $x = \pi/2 + \pi k$ соответственно. Если $|a| > 1$, то уравнения $\sin x = a$, $\cos x = a$ корней не имеют.

Для любого значения a все решения уравнений $\operatorname{tg} x = a$, $\operatorname{ctg} x = a$ задаются формулами $x = \operatorname{arctg} a + \pi k$, $x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$ (k — произвольное целое число) соответственно.

6.27. *Замена переменной.* Решите уравнения:

1. $3\sin^2 x - 2\sin x = 1$.
2. $2\sin^2 x + 5\cos x - 4 = 0$.
3. $2\cos 2x = 8\cos x - 1$.
4. $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4$.
5. $6\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x + 6 = 0$.
6. $2\sin x + 3\cos x = 0$.
7. $\cos^2 x - 3\sin x\cos x + 2\sin^2 x = 0$.
8. $2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + 7\cos^2 x = 6$.
9. $(\sin x + \cos x)^3 = 4\sin x$.
10. $2\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right) = \cos x$.
11. $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 3 + 2\sin 2x$.
12. $\sin x + \cos x = \sin 2x$.
13. $\sin x\cos x = 6(\sin x - \cos x - 1)$.

14. $\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\cos x}=1.$

15. $\sin^4 x+\cos^4 x=\dfrac{1}{2}.$

16. $\sin^8 x+\cos^8 x=\dfrac{17}{16}\cos^2 2x.$

6.28. Докажите, что при $a>0$ верна формула

$$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{b}{a}\right).$$

Решите уравнения:

1. $\sin x+\cos x=-1.$
2. $\sqrt{3}\sin x-\cos x=\sqrt{2}.$
3. $3\sin x+4\cos x=\dfrac{5}{2}.$

6.29. *Разложение на множители.* Решите уравнения:

1. $\sin 7x=\sin 15x.$
2. $\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{6}\right)=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$
3. $\operatorname{tg}3x=\operatorname{tg}5x.$
4. $\cos 3x=\sin 10x.$
5. $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x=0.$
6. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=\dfrac{3}{2}.$
7. $\sin^2 3x+\sin^2 4x+\sin^2 6x+\sin^2 7x=2.$
8. $\sin 2x\cos 4x=\sin 7x\cos 9x.$
9. $\cos 2x\cos 8x+\cos x\cos 3x+\cos 2x\cos 10x=0.$
10. $\cos^3 x\cos 2x-\sin^3 x\sin 2x=\cos x-\dfrac{1}{4}\sin x.$
11. $\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}7x=1.$
12. $\cos 2x=\cos x+\sin x.$
13. $\cos 5x+\cos 7x=\sin 2x.$
14. $5\sin x+12\cos x+13\sin 3x=0.$

15. $24\sin 3x + 15\cos 5x = 20\sin 5x + 7\cos 3x.$

16. $\sin 2x(\sqrt{3} + \cos x) = \sin x(4 + 2\sin^2 x).$

17. $2\operatorname{tg} 3x - 3\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg}^2 2x \operatorname{tg} 3x.$

6.30. Уравнения, предлагаемые в этой задаче, можно решить, сравнив области значений левой и правой частей:

1. $3\sin^7 x + 4\cos^{10} x = 7.$

2. $\sin^5 x + \cos^{11} x = \dfrac{\pi}{3}.$

3. $\sin x + \cos 4x + 2\sin 5x = 4.$

4. $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4 + \cos^2 3x.$

5. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = \sqrt{2}(\sin x + \cos x).$

6. $\cos^2 x - \cos^4 x = \sin^2 x \sin^2 3x - 1.$

7. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 3x = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x - \dfrac{1}{2}.$

6.31. Решите уравнения:

1. $\operatorname{tg}\dfrac{2\pi x}{1 + x + x^2} = \sqrt{3}.$

2. $\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x).$

3*. $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{tg} x) = \operatorname{ctg}(\pi\operatorname{ctg} x).$

6.32. *Системы тригонометрических уравнений.* Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y\cos x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sin^2 x = \cos x\cos y, \\ \cos^2 x = \sin x\sin y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sin^2 x = \sin y, \\ \cos^4 x = \cos y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sin^3 x + \cos^3 y + 1, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \sin^4 x + \sin^4 y. \end{cases}$

6.33. *Тригонометрические неравенства.* Решите неравенства:

1. $\cos 2x \geq \sin x$.

2. $\sin 5x > 16 \sin^5 x$.

3. $3 \sin 2x \leq 1 + 2 \operatorname{tg} x$.

4. $\cos 2x > \cos x - \sin x$.

5. $\dfrac{\cos x(1 - 2\sin x)}{\cos x - \sin x} \leq 0$.

6. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 4x + \cos^2 5x \geq 2$.

6.34. *Тригонометрические подстановки.* В некоторых случаях решения уравнений, не содержащих тригонометрических функций, можно получить, используя тригонометрические функции.

1. Решите уравнение $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$.

2. Решите уравнение $x^3 - 3x - \sqrt{3} = 0$.

3. Докажите, что если $4p^3 + 27q^2 < 0$, то уравнение $x^3 + px + q = 0$ имеет три корня, и выразите их через значения тригонометрических функций.

4. Найдите такие рациональные функции f и g, что все решения уравнения $x^2 + y^2 = 1$ в рациональных числах будут иметь вид $x = f(\operatorname{tg}\alpha), y = g(\operatorname{tg}\alpha)$ (тем самым получим другое решение задачи 4.44, п. 1).

5. Пусть $f(x) = x^2 - 2$. Решите уравнение $\underbrace{f(f(\ldots f(x)\ldots))}_{n \text{ раз}} = 0$.

§ 5. Исследование тригонометрических функций

Число T называется *периодом* числовой функции f, если для любого числа x из области определения этой функции числа $x + T$ и $x - T$ также принадлежат области определения и $f(x+T) = f(x)$.

Функция, имеющая период, отличный от нуля, называется *периодической*.

Периоды функций $y = \sin x$, $y = \cos x$ задаются формулами $T = 2\pi k$, где k — произвольное целое число, а периоды функций $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ задаются формулами $T = \pi k$, где k — произвольное целое число.

6.35. Найдите области значений функций:

1. $y = 1 + 2\sin 5x$.
2. $y = \sin x + \cos x$.
3. $y = 3\sin x - 4\cos x - 1$.
4. $y = \sin^2 x + \sin 2x$.
5. $y = \cos x + \cos 2x$.
6. $y = \operatorname{tg} x(1 - \operatorname{tg} x)$.

6.36. Какие из следующих функций периодичны?

1. $y = \sin\sqrt{|x|}$.
2. $y = |\sin(x + \pi/3)|$.
3. $y = \sin|x|$.
4. $y = \cos|x|$.
5. $y = \sin(\sin x)$.
6*. $y = \cos x \cos(x\sqrt{2})$.

6.37. Найдите все периоды функций:

1. $y = \sin 3x$.
2. $y = \operatorname{tg}(4x + \pi/6)$.
3. $y = \sin^2 x$.
4. $y = \cos 2x + \sin 3x$.
5. $y = \cos(\sin(\cos x))$.

6.38. Кривая, которая в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением вида $y = A\sin\omega x$, где A, ω — вещественные числа, отличные от нуля, называется *синусоидой*, число $|A|$ называется *амплитудой* этой синусоиды, $|\omega|$ — *частотой*. Докажите, что $T = 2\pi/\omega$ — период функции $y = A\sin\omega x$. Докажите, что графики следующих функций — синусоиды, и постройте их.

1. $y = \cos x$.
2. $y = 2\sin(\pi/6 - 3x)$.
3. $y = \cos x + \sin x$.
4. $y = \sin^2 x$.
5. $y = 3\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x + \sin^2 x$.

6.39. Постройте графики функций:

1. $y = \dfrac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.
2. $y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}\sin x$.
3. $y = \sin x|\cos x|$.

6.40. Изобразите на координатной плоскости фигуры, задаваемые следующими уравнениями и неравенствами:

1. $\sin(x+y)=0$.
2. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y$.
3. $y=|y-\sin x|$.
4. $\sin x \le \cos y$.

5*. $x^2+1 \le 2x\sin(x+y)$.

6.41. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа ($n \ge 2$). Докажите, что

$$|\sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \cdots \sin\alpha_n + \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 \cdots \cos\alpha_n| \le 1.$$

6.42. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — вещественные числа, $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots$ $\ldots < \alpha_n < \pi/2$ ($n \ge 2$). Докажите, что

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \ldots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

Глава 7

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ И ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Логарифмы

Если a, b — положительные числа, $a \neq 1$, то существует единственное число x, такое, что $a^x = b$. Это число обозначается $\log_a b$.

7.1. *Свойства логарифмов.* Из определения логарифма и свойств степеней вытекают следующие тождества:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \qquad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y,$$

$$\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x, \qquad \log_{a^\alpha} x = \frac{1}{\alpha} \log_a x,$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \ \left(\text{в частности, } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}\right).$$

Вычислите:

1. $\log_2 2\sqrt{2}$.
2. $\log_{\sqrt[3]{2}} 4$.
3. $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}} \sqrt[4]{125}$.
4. $\log_{\frac{1}{\sqrt[3]{2}}} (\log_{\sqrt[4]{5}} 625)$.
5. $2^{\log_4 25}$.
6. $9^{\log_3 7}$.
7. $\sqrt{3}^{4+\log_{\frac{1}{9}} 625}$.
8. $\log_{\frac{1}{6}} 6 + \log_{\frac{1}{6}} 3$.
9. $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$.
10. $\dfrac{\log_{\sqrt[3]{5}} 27}{\log_{25} \sqrt{3}}$.
11. $\log_4 5 \log_5 6 \log_6 6 \log_7 8$.
12. $\log_3 49 \log_{\sqrt{7}} 5 \log_{25} 27$.
13. $\dfrac{\log_2 18}{\log_{36} 2} - \dfrac{\log_2 9}{\log_{72} 2}$.
14. $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$,

15* $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2}+3\sqrt{3}) \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + \log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6}+5)$.

7.2. Число $\log_a b$, где a и b — натуральные числа, можно получить с помощью арифметических действий из чисел вида $\log_p q$, где p и q — простые числа.

1. Найдите $\log_8 9$, если $\log_{18} 12 = a$.
2. Найдите $\log_{250} 120$, если $\log_9 20 = a$ и $\lg 2 = b$.

7.3. Если $a > 1$, то функция $y = \log_a x$ строго возрастает; если $0 < a < 1$, то функция $y = \log_a x$ строго убывает.

Выясните, какое из чисел больше:

1. $\log_2 \dfrac{1}{7}$ или $\log_2 \dfrac{1}{9}$.
2. $\log_{\frac{1}{3}} 5$ или $\log_{\frac{1}{3}} 7$.
3. $\log_{\frac{1}{3}} 5$ или $\log_{\frac{1}{5}} 3$.
4. $\log_6 2$ или $\log_5 2$.
5. $\log_{\frac{1}{7}} 3$ или $\log_{\frac{1}{8}} 3$.
6. $\log_3 2$ или $\frac{2}{3}$.
7. $\log_9 80$ или $\log_7 50$.
8. $\log_{12} 5$ или $\log_{18} 7$.
9. $\log_6 5 + \log_5 6$ или 2.
10. $\log_{100} 99$ или $\log_{101} 100$.
11. $\log_3^2 5 - \log_3 5$ или 1.
12. $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8$ или 4,4.

§ 2. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

7.4. *Логарифмирование показательных уравнений.* Переход от равенства $b = c$ к равенству $\log_a b = \log_a c$ $(a, b, c > 0,\ a \neq 1)$ называют *логарифмированием*. Решите уравнения:

1. $25^x = 5^{3-x}$.
2. $2^x \cdot 3^{x+1} = 81$.
3. $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$.
4. $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x+1} = 250$.
5. $3^x \cdot 7^{2-x^2} = 21$.
6. $(x^2+1)^{2x-3} = 1$.

7.5. *Замена переменной в показательных уравнениях.* Решите уравнения:

1. $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$.
2. $4^{x+3} + 2^{2x+2} = 51$.
3. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x = 3$.

4. $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$.

5. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$.

6. $2^{3x+1} + 1 = 4^x + 2^{x+1}$.

7. $(3 - 2\sqrt{2})^x + (3 + 2\sqrt{2})^x = 34$.

8. $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$.

9. $18 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 36 \cdot 4^{x+1} - 3^{2x+3}$.

10. $2^{2x+1} - 5 \cdot 6^x + 3 \cdot 9^x = 0$.

11. $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

12. $7^{3x+1} + 2^{3x+2} = 16 \cdot 28^x - 5 \cdot 98^x$.

7.6. *Потенцирование логарифмических уравнений.* Переход от равенства $b = c$ к равенству $a^b = a^c$ ($a > 0$, $a \neq 1$) называется *потенцированием*. Решите уравнения:

1. $\log_2 x = 3$.

2. $\lg(3x - 1) = 0$.

3. $\log_{\frac{1}{3}}(2x - 3) = -2$.

4. $\log_x 3 = 2$.

5. $\log_{6-x} x = 2$.

6. $\log_7 \log_3 \log_2 \log_2 x = 0$.

7. $\log_2(2x - 3) + \log_2(x + 6) = 3$.

8. $\log_3(2x + 1) - \log_3(x - 1) = 1$.

9. $1 + 2\lg 2 = \dfrac{1}{2}\lg(x + 30) + \lg\sqrt{x - 30}$.

10. $\log_3(\lg(2x + 14) + \lg(x + 12)) = 1$.

11. $\log_2(2^x - 3) = 2 - x$.

12. $\lg(6 \cdot 5^x - 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25$.

7.7. *Замена переменной в логарифмических уравнениях.* Решите уравнения:

1. $\lg^2 x - 2\lg x - 3 = 0$.

2. $\log_2^3 2x = 2\log_2^2 x - 9$.

3. $\log_2^2(3x^2) = 8 + \log_x 81$.

4. $\log_2(2^x+3)\log_2(2^{x+2}+12) = 8$.

5. $x^{2\log_2 x} = 3x$.

6. $2\cdot 4^{\lg x} + 5\cdot 25^{\lg x} = 7x$.

7.8. *Переход к одному основанию.* Решите уравнения:

1. $\log_2 x - 2\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} 2x = \dfrac{20}{3}$.

2. $\log_2 x\log_3 x + \log_2 x\log_5 x + \log_3 x\log_5 x = \log_2 x\log_3 x\log_5 x$.

3. $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$.

4. $2^{\log_9 x} = \dfrac{4}{3}x$.

7.9. Каждое из следующих уравнений можно решить, подобрав корень и доказав, что других корней нет. Решите уравнения:

1. $3^x + 4^x = 7$.
2. $3^x + 4^x = 7^x$.
3. $(3-2\sqrt{2})^x + (3+\sqrt{2})^x = 6^x$.
4. $x^x = 27\ (x > 0)$.
5. $x^{2^x} = 16\ (x > 0)$.
6. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-4} = 992$.
7. $\log_2 x = 3 - x$.
8. $x\log_3 x = 18$.
9. $x\log_2(x+1) = \log_{\frac{1}{3}} x + 7$.

7.10. *Показательные и логарифмические неравенства.* Решите неравенства:

1. $2^x > \dfrac{1}{2}$.
2. $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3-x} < 9$.
3. $3^{x-2} > \dfrac{2}{5^{2x-1}}$.
4. $\dfrac{1}{3^x+5} \le \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$.
5. $\log_2(x-1) > 1$.
6. $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) > -1$.
7. $\log_3 x + \log_3(x-2) \ge 1$.
8. $\log_{\frac{1}{3}}\log_2\dfrac{3x}{x^2-1} < 0$.
9. $2^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x+3}{x-2}} > \dfrac{1}{4}$.
10. $\log_{3-x} x \le 1$.
11. $(x^2-x+1)^{x-2} > 1$.

7.11. Решите системы уравнений:

1. $\begin{cases} 5^{\log_{\frac{1}{5}} x} & = y-2, \\ 4^x & = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-y}. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^{4-3y-y^2} & = 1, \\ (x+y)^2 & = 9x. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2(y-1) & = 1, \\ \log_8 x \cdot \log_{\sqrt{2}}(y-1) & = -\dfrac{4}{3}. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \log_6 x & = y+4, \\ x^{y+1} & = \dfrac{1}{36}. \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} & = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y & = 1. \end{cases}$

Глава 8

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

§ 1. Действия над комплексными числами

Множество вещественных чисел можно расширить до большего ножества, в котором по-прежнему выполиимы четыре арифмети-еских действия, подчиняющиеся обычным законам, а кроме того, азрешимы все квадратные уравнения. Элементы этого множества азывают *комплексными числами*. Обозначив через i один из корней равнения $x^2 = -1$, каждое комплексное число можно единственным бразом записать в виде $a + bi$, где a и b — вещественные числа. Чи-ло a называется *вещественной частью*, а число b — *мнимой ча-тью* комплексного числа $a + bi$. Комплексные числа складываются перемножаются по следующим правилам:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Иножество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$.

8.1. Вычислите (т. е. представьте в виде $a + bi$, где a **и** b — ве-цественные числа):

1. $(3-2i)+(5+3i)$.
2. $(1+2i)-(3-i)$.
3. $3(2-i)$.
4. $i(i-1)$.
5. $(1+3i)(-7+2i)$.
6. $(2-i)^2$.
7. $(1+2i)^3$.
8. i^4.
9. i^{31}.
10. $(1+i)^{20}$.

8.2. Комплексные числа $z = a + bi$ и $w = c + di$ равны тогда и только тогда, когда $a = c$ и $b = d$. Найдите вещественные решения уравнений:

1. $(1+i)x + (2+i)y = 5 + 3i$.
2. $2x + (1+i)(x+y) = 7 + i$.

8.3. *Комплексно сопряженным* с числом $z = a + bi$ называется число $\overline{z} = a - bi$. Докажите следующие свойства операции комплексного сопряжения:

1. $z + \overline{z}$ и $z\overline{z}$ — вещественные числа.
2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ и $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

8.4. Операцию комплексного сопряжения можно использовать при делении комплексных чисел: если z и $w \neq 0$ – комплексные числа, то $\dfrac{z}{w} = \dfrac{z\overline{w}}{w\overline{w}}$. Вычислите:

1. $\dfrac{1}{1-i}$.
2. $\dfrac{5}{1+2i}$.
3. $\dfrac{2i-3}{1+i}$.
4. $\dfrac{2+3i}{i}$.
5. i^{-5}.
6. $(1+i)^{-10}$.

8.5. Функция φ определена на множестве всех комплексных чисел и принимает комплексные значения. Докажите, что если для любых комплексных чисел z и w выполнены равенства $\varphi(z+w) = \varphi(z) + \varphi(w)$, $\varphi(zw) = \varphi(z)\varphi(w)$ и $\varphi(a) = a$ для любого вещественного a, то либо $\varphi(z) = z$ при всех z, либо $\varphi(z) = \overline{z}$ при всех z.

8.6. Число z является вещественным в том и только в том случае, если $z = \overline{z}$. Докажите, что следующие числа вещественны:

1. $\dfrac{1}{i}(z - \overline{z})$.
2. $\dfrac{z^2 + \overline{z}}{z^2 - \overline{z}} - \dfrac{z + \overline{z}^2}{z - \overline{z}^2}$.
3. $\dfrac{z-1}{i(z+1)}$, если $z\overline{z} = 1$.

8.7. Квадратные корни из комплексного числа $z = a + bi$ можно найти, решив уравнение $(x + yi)^2 = a + bi$. Найдите квадратные корни из следующих комплексных чисел:

1. $z = -4$.
2. $z = i$.
3. $z = 3 + 4i$.
4. $z = 5 - 12i$.

8.8. Формула для корней квадратного уравнения в комплексных числах та же самая, что и в вещественных числах. Найдите все комплексные решения следующих уравнений:

1. $x^2 = -1$.
2. $x^2 = -4$.
3. $x^2 + x + 1 = 0$.
4. $x^2 - 2x + 5 = 0$.
5. $5x^2 + 6x + 2 = 0$.
6. $x^2 + ix + 2 = 0$.
7. $x^2 + (i-1)x + 2 - 2i = 0$.
8. $2ix^2 + (5i-1)x + 4i - 2 = 0$.
9. $x^4 - 1 = 0$.
10. $x^3 = 1$.
11. $x^4 = -1$.
12. $x^4 + 4 = 0$.
13. $x^5 = 1$.
14. $x^6 = 1$.
15. $x^4 + x^2 + 4x + 4 = 0$.
16. $x^4 + 2x^3 + x^2 + 4 = 0$.

8.9. *Основная теорема алгебры.* Каждый многочлен с комплексными коэффициентами (отличный от постоянной) имеет хотя бы один комплексный корень. Из этого утверждения, называемого *основной теоремой алгебры*, следует, что любой многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ с комплексными коэффициентами можно разложить на линейные множители: $f(x) = a_0(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.

Разложите на линейные множители следующие многочлены:

1. $x^2 + 1$.
2. $x^2 - 2x + 5$.
3. $x^3 + 1$.
4. $x^3 + x - 2$.
5. $x^4 + 1$.
6. $x^4 + x^2 + 1$.
7. $x^5 + 1$.
8. $x^n - 1$.

8.10. *Многочлены с вещественными коэффициентами.*

1. Докажите, что если α — комплексный корень многочлена с вещественными коэффициентами, то $\overline{\alpha}$ – тоже корень этого многочлена.

2. Докажите, что каждый многочлен с вещественными коэффициентами (отличный от постоянной) можно разложить на множители первой и второй степени.

3. Разложите следующие многочлены на множители первой и второй степени: x^6+27, $4x^4+1$, $x^{2n}-1$, $x^{2n+1}+1$.

8.11. *Теорема Виета.* Раскладывая многочлен на линейные множители $x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем следующие соотношения между корнями и коэффициентами многочлена:

$$\begin{aligned}
&x_1+x_2+\ldots+x_n=-a_1,\\
&x_1x_2+x_1x_3+\ldots+x_{n-1}x_n=a_2,\\
&x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-a_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n a_n.
\end{aligned}$$

Пусть a, b, c — корни многочлена x^3+2x^2-x-5. Вычислите:

1. $a+b+c$.
2. $ab+ac+bc$.
3. abc.
4. $a^2+b^2+c^2$.
5. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.
6. $a^3+b^3+c^3$.

Выведите формулу, выражающую $\operatorname{tg}5\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, и затем вычислите:

7. $\operatorname{tg}10^\circ-\operatorname{tg}26^\circ+\operatorname{tg}46^\circ-\operatorname{tg}62^\circ+\operatorname{tg}82^\circ$.

8. $\operatorname{tg}^2 10^\circ+\operatorname{tg}^2 26^\circ+\operatorname{tg}^2 46^\circ+\operatorname{tg}^2 62^\circ+\operatorname{tg}^2 82^\circ$.

9. $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}26^\circ\operatorname{tg}46^\circ\operatorname{tg}62^\circ\operatorname{tg}82^\circ$.

§ 2. Комплексная плоскость

Рассмотрим на плоскости декартову систему координат и сопоставим каждому комплексному числу $z=x+yi$ (x и y — вещественные числа) точку плоскости с координатами $(x;y)$. Такое сопоставление задает взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками плоскости. Комплексные числа и соответствующие им точки плоскости часто отождествляют (так же как отождествляют вещественные числа и точки числовой оси). При этом плоскость называют *комплексной плоскостью*.

8.12. Изобразите на комплексной плоскости следующие комплексные числа:

1. $z = 1$.
2. $z = i$.
3. $z = -2i$.
4. $z = 1 - i$.
5. $z = i - 2$.
6. $z = 3 - 5i$.

8.13. Если число z изображено точкой P, то *модулем* числа z называется расстояние от точки P до начала координат O. Если E — точка оси абсцисс, соответствующая числу 1, то *аргументом* числа z называется радианная мера угла EOP. Модуль числа z обозначается $|z|$, а аргумент — $\arg z$. Следует заметить, что при определении аргумента комплексного числа необходимо соблюдать некоторые предосторожности. Если $z = 0$ (и тогда точка P совпадает с точкой O), аргумент не определен. При $z \neq 0$ аргумент числа z определен не однозначно, а с точностью до кратного числа 2π. Запись $\arg z$ следует понимать как запись одного из возможных значений аргумента комплексного числа z. Найдите модуль и аргумент следующих комплексных чисел:

1. $z = 2$.
2. $z = -3$.
3. $z = -i$.
4. $z = 1 + i$.
5. $z = \sqrt{3} - i$.
6. $z = 1 - i\sqrt{3}$.
7. $z = i\sqrt{2}$.
8. $z = 2 - 3i$.

8.14. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, задаваемых условиями:

1. $|z| = 1$.
2. $|z| = 5$.
3. $|z| \leq 2$.
4. $|z| > 3$.
5. $1 \leq |z| \leq 2$.
6. $\arg z = 0$.
7. $\arg z = \dfrac{\pi}{4}$.
8. $\pi < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}$.

8.15. Полезно помнить, что модуль разности комплексных чисел равен расстоянию между их изображениями на комплексной плоскости. Изобразите на комплексной плоскости множество точек z, задаваемых условиями:

1. $|z - 1| = 1$.
2. $|z - 2 + i| = 2$.
3. $|2z - 3 + 2i| = 5$.
4. $|z + i - 3| \leq 2$.

5. $|z-i| = |z+1|$.

6. $|z-2i| \leq |z-1+i|$.

7. $|z-1| + |z+1| = 2$.

8. $|z+i| - |z-i| = 2$.

9. $|z-i| > |z+i|$ и $|z| \leq |z-1+i|$.

8.16. Равенства и неравенства для модулей комплексных чисел часто являются алгебраической формой записи геометрических утверждений. Докажите:

1. $|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.

2. $3(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2) = |z_1-z_2|^2 + |z_2-z_3|^2 + |z_3-z_1|^2$.

3. Если $|z_1| = |z_2| = \ldots = |z_n| = 1$ и $z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 0$, то $\sum\limits_{k=1}^{n} |z-z_k|^2 = n(|z|^2+1)$ для любого z.

4. $|z_3-z_1| - |z_3-z_2| \leq |z_1-z_2| \leq |z_3-z_1| + |z_3-z_2|$.

5. $|z_1-z_2| + |z_2-z_3| + |z_3-z_1| \leq 2(|z-z_1| + |z-z_2| + |z-z_3|)$.

6*. $|z_1+z_2| + |z_2+z_3| + |z_3+z_1| \leq |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_1+z_2+z_3|$.

8.17. Геометрическая интерпретация комплексных чисел может упростить решение следующих задач. В этих задачах $D(f)$ обозначает область определения функции f. Найдите множество значений следующих функций:

1. $f(z) = |z-2i+3|$, $D(f) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z-i| \leq 2\}$.

2. $f(z) = (2-i)|z|$, $D(f)$ — треугольник с вершинами $1+i$, $2-3i$, i.

3. $f(z) = z + |z|$, $D(f) = \mathbb{C}$.

4. $f(z) = |(3+4i)z^2 + i - 1|$, $D(f) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| \leq 1\}$.

5. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $D(f) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = 1\}$.

6. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $D(f) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$.

7. $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$, $D(f) = \{z \in \mathbb{C}\colon |z| > 1\}$.

8.18. *Тригонометрическая форма комплексных чисел.* Если комплексное число z записано в виде $z = x + yi$, то $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$, и если $z \neq 0$, то

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\alpha, \qquad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\alpha,$$

где α — одно из значений аргумента z. Если $r = |z|$, то $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Такая форма записи называется *тригонометрической формой комплексного числа* z. Запишите в тригонометрической форме числа из задачи 8.13.

8.19. *Формула Муавра.* Тригонометрическая форма записи комплексного числа удобна для умножения, деления и возведения в степень.

1. Докажите, что если $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, то $z_1z_2 = r_1r_2(\cos(\alpha_1+\alpha_2) + i\sin(\alpha_1+\alpha_2))$, т. е. при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются.

2. Докажите, что если $z_1 = r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, где $r_2 \neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\alpha_1-\alpha_2) + i\sin(\alpha_1-\alpha_2)).$$

3. Докажите *формулу Муавра*: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$ для любого целого числа n.

8.20. Используйте тригонометрическую форму и формулу Муавра для приведения следующих комплексных чисел к виду $a + bi$:

1. $\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\left(\cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}\right)$.

2. $\left(\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}\right)^{14}$.

3. $\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)^{-3}$.

4. $(1+i\sqrt{3})^3(1-i)^7$.

5. $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}$.

6. $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}}$.

7. $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^{24}$.

8.21. Пусть α — вещественное число, n — натуральное число. Докажите.

1. Если $\cos\alpha \neq 0$, $\sin\alpha \neq 0$, то

$$\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg}n\alpha}{1-i\operatorname{tg}n\alpha}.$$

2. $(1+\cos\alpha+i\sin\alpha)^n = 2^n\cos^n\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+i\sin\frac{n\alpha}{2}\right)$.

8.22. *Вывод тригонометрических формул.* Формула Муавра и биномиальная формула позволяют выводить интересные соотношения между тригонометрическими функциями.

1. Найдите представления $\cos 3\alpha$ и $\sin 3\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

2. Найдите представления $\cos 5\alpha$ и $\sin 5\alpha$ в виде многочленов от $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$.

3. Докажите, что для каждого целого неотрицательного числа n существуют многочлены f_n, g_n, h_n, k_n степени n с целыми коэффициентами, такие, что $\cos(2n+1)\alpha = \cos\alpha f_n(\cos^2\alpha)$, $\sin(2n+1)\alpha = \sin\alpha g_n(\sin^2\alpha)$, $\cos 2n\alpha = h_n(\cos^2\alpha)$, $\sin 2n\alpha = \sin\alpha\cos\alpha \times k_n(\sin^2\alpha)$ для любого вещественного α. Найдите старшие коэффициенты и свободные члены этих многочленов.

4. Докажите, что если $z+\frac{1}{z} = 2\cos\alpha$, то $z^n+\frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$ для любого целого n.

5. Докажите, что если $z-\frac{1}{z} = 2i\sin\alpha$, то $z^n+\frac{1}{z^n} = 2\cos n\alpha$ для любого четного n.

6. Докажите, что если $z-\frac{1}{z} = 2i\sin\alpha$, то $z^n-\frac{1}{z^n} = 2i\sin n\alpha$ для любого целого n.

7. Докажите, что

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1} C_n^k\cos(n-2k)\alpha + \frac{1}{2^n}C_n^{\frac{n}{2}}$$

для любого четного натурального числа n.

8. Докажите, что

$$\cos^n\alpha = \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} C_n^k\cos(n-2k)\alpha$$

для любого нечетного натурального числа n.

9. Докажите, что

$$\sin^n \alpha = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} (-1)^k C_n^k \cos(n-2k)\alpha + \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^n} C_n^{\frac{n}{2}}$$

для любого четного натурального числа n.

10. Докажите, что

$$\sin^n \alpha = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (-1)^k C_n^k \sin(n-2k)\alpha$$

для любого нечетного натурального числа n.

8.23. *Тождества с биномиальными коэффициентами.* Пусть n — натуральное число. Докажите:

1. $(1+i)^n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

2. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} C_n^{2k} = 2^{\frac{n}{2}} \cos\frac{n\pi}{4}$.

3. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^k C_n^{2k+1} = 2^{\frac{n}{2}} \sin\frac{n\pi}{4}$.

4. $\left(1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{2^n}{3^{\frac{n}{2}}} \left(\cos\frac{n\pi}{6} + \sin\frac{n\pi}{6}\right)$.

5. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{3^k} C_n^{2k} = \frac{2^n}{3^{\frac{n}{2}}} \cos\frac{n\pi}{6}$.

6. $\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{3^k} C_n^{2k+1} = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin\frac{n\pi}{6}$.

8.24. *Извлечение корня из комплексных чисел.* Комплексное число z называется корнем степени n из комплексного числа w (n — натуральное число), если $z^n = w$. Для нахождения корней удобно воспользоваться следующим свойством: комплексные числа $r_1(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1)$, $r_2(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2)$, где $r_1 > 0$ и $r_2 > 0$, равны тогда и только тогда, когда $r_1 = r_2$ и $\alpha_1 - \alpha_2 = 2k\pi$, где k — целое число.

1. Докажите, что существует ровно n различных корней степени n из любого комплексного числа, отличного от нуля.

2. Найдите все кубические корни из 8.

3. Найдите все кубические корни из $1+i$.

4. Найдите все корни четвертой степени из -1.

5. Найдите все корни четвертой степени из -4.

6. Найдите все корни пятой степени из $\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}$.

8.25. *Корни из единицы.* Корни n-й степени из числа 1 можно находить по формуле

$$z_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

1. Постройте на комплексной плоскости изображения корней n-й степени из единицы при $n = 3, 4, 5, 6$.

2. Докажите, что корни n-й степени из единицы на комплексной плоскости являются вершинами правильного n-угольника.

3. Пусть ε_1 и ε_2 — корни n-й степени из единицы. Докажите, что $\varepsilon_1\varepsilon_2$ и $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ также являются корнями n-й степени из единицы.

4. Пусть ω — фиксированный корень n-й степени из числа w, а ε — корень n-й степени из единицы. Докажите, что $\omega\varepsilon$ также является корнем n-й степени из w. Докажите, что каждый корень n-й степени из w может быть записан в виде $\omega\varepsilon$ при некотором ε, являющемся корнем n-й степени из единицы.

8.26. *Кубические корни из единицы.* Кубические корни из единицы удовлетворяют уравнению $z^3 = 1$. Один из них равен 1. Два других корня — сопряженные комплексные числа $\omega = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ и $\overline{\omega} = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Вычислите ω^5, ω^{-10}, ω^{36}.

2. Вычислите $\omega^{100} + \omega^{200} + \omega^{300}$.

3. Пусть a, b, c — вещественные числа, n — целое число. Докажите, что $(a + b\omega + c\omega^2)^n + (a + b\omega^2 + c\omega)^n$ — вещественное число.

4. Докажите тождество $x^3 + y^3 = (x+y)(x+y\omega)(x+y\omega^2)$.

5. Докажите тождество $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x+y\omega+ z\omega^2)(x+y\omega^2+z\omega)$.

Глава 9

ФУНКЦИИ И ПРЕДЕЛЫ

§ 1. Сравнение бесконечных множеств

9.1. *Равномощные множества.* Конечные множества можно сравнивать по числу элементов. Чтобы иметь возможность сравнивать бесконечные множества, заметим, что конечные множества X и Y имеют поровну элементов в том и только в том случае, если между элементами этих множеств можно установить *взаимно однозначное соответствие.*

Взаимно однозначное соответствие между элементами множеств X и Y — это такое множество пар (x,y), где $x \in X$, $y \in Y$, что каждый элемент множества X встречается в качестве первой компоненты ровно в одной из этих пар и каждый элемент множества Y встречается в качестве второй компоненты ровно в одной из этих пар. Назовем произвольные множества X и Y *равномощными*, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие.

Докажите равномощность следующих множеств X и Y:

1. X, Y — концентрические окружности.
2. X, Y — произвольные окружности.
3. X, Y — замкнутые отрезки ненулевой длины.
4*. X — прямая, Y — объединение двух параллельных прямых.
5*. X — прямая, Y — объединение двух пересекающихся прямых.
6*. $X = [a;b]$, $Y = [a;b)$ $(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$.
7*. $X = [a;b]$, $Y = (a;b)$ $(a,b \in \mathbb{R}, a < b)$.
8. X — открытый промежуток, Y — прямая.
9. X — замкнутый промежуток, Y — прямая.

9.2. *Счетные множества.* Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству всех натуральных чисел. Чтобы установить счетность бесконечного множества X, достаточно найти правило, приписывающее каждому элементу x множества X его «номер» — натуральное число — так, чтобы никакие два элемента множества X не получили один и тот же номер.

Докажите следующие утверждения.

1. $\{2n: n \in \mathbb{N}\}$ — счетное множество.

2. $\{n^2+3n-1: n \in \mathbb{N}\}$ — счетное множество.

3. $\mathbb{N} \cup \{0\}$ — счетное множество.

4. $\mathbb{N} \cup \{-4,-3,-2,-1,0\}$ — счетное множество.

5. $\mathbb{Z}$ — счетное множество.

6*. $\mathbb{Q}$ — счетное множество.

7. Если X — счетное множество, $A \subset X$, то A — либо конечное, либо счетное множество.

8. Если (X_n) — последовательность счетных множеств, то их объединенне — счетное множество.

9. Множество всех конечных подмножеств счетного множества — счетное множество.

10*. Если X — бесконечное, Y — счетное множество, то множества X и $X \cup Y$ равномощны.

11. Множество всех алгебраических чисел — счетное множество. (Комплексное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем какого-либо уравнения вида $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ – рациональные числа.)

12*. Любое бесконечное множество попарно непересекающихся кругов, лежащих в одной плоскости, — счетное множество.

13*. Любое бесконечное множество попарно непересекающихся «восьмерок», лежащих в одной плоскости, — счетное множество. («Восьмерка» — это объединение двух окружностей, касающихся внешним образом.)

14*. Любое бесконечное множество попарно непересекающихся «крестов», лежащих в одной плоскости, — счетное множество. («Крест» — это объединение двух отрезков, имеющих единственную общую внутреннюю точку.)

9.3. *Континуальные множества.* Множество называется *континуальным*, если оно равномощно множеству всех вещественных чисел.

1. Докажите, что отрезки, окружности, прямые — континуальные множества.

2. Докажите, что множество всех иррациональных чисел континуально.

3. Докажите, что множество всех трансцендентных чисел континуально. (Комплексное число называется *трансцендентным*, если оно не является алгебраическим, см. п. 11 предыдущей задачи.)

4. Поставим в соответствие каждой паре вещественных чисел (α,β) с десятичными записями $\alpha = 0,a_1a_2a_3\ldots$, $\beta = 0,b_1b_2b_3\ldots$ число $\gamma = 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\ldots$ (для чисел вида $\frac{m}{10^n}$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, из двух десятичных записей выбирается та, которая имеет в периоде 0). Используя это соответствие, докажите континуальность квадрата.

5. Докажите континуальность множества всех точек плоскости.

6*. Докажите, что если объединение двух множеств континуально, то хотя бы одно из них континуально.

7*. Докажите, что множество всех подмножеств счетного множества континуально.

8*. Докажите, что в счетном множестве существует континуальное множество подмножеств, любые два из которых имеют конечное пересечение.

9.4. *Счетное и континуальное множества не равномощны.*

1. Пусть (x_n) — последовательность вещественных чисел. Вещественное число a таково, что для любого натурального числа n n-я после запятой цифра десятичной записи числа a отлична от 9 и от n-й после запятой цифры десятичной записи числа x_n. Докажите, что a не равно ни одному из членов последовательности (x_n).

2. Докажите, что множества $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ не равномощны.

3. Пусть f — отображение множества X в множество всех подмножеств множества X и пусть $A = \{x \in X : x \notin f(x)\}$. Может ли существовать такой элемент $a \in X$, что $f(a) = A$?

4. Докажите, что никакое множество не равномощно множеству всех его подмножеств.

§ 2. Числовые функции

Числовая функция — это отображение $f\colon X \to \mathbb{R}$, где $X \subseteq \mathbb{R}$ (см. гл. 1, § 4).

Над числовыми функциями с общей областью определения можно выполнять операции сложения, вычитания, умножения и деления по следующим правилам: $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(f-g)(x) = f(x)-g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$, $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. (Разумеется, область определения частного $\dfrac{f}{g}$ состоит из тех чисел x из области определения f и g, для которых $g(x) \neq 0$.)

9.5. *Периодические функции* (см. гл. 6, § 5).

1. Докажите, что если x, y — периоды числовой функции f, то $x+y, x-y$ — периоды f.

2. Докажите, что либо в множестве периодов периодической функции f есть наименьшее положительное число k, и в этом случае множество периодов f есть $\{nk\colon n \in \mathbb{Z}\}$, либо в каждом промежутке ненулевой длины есть число, являющееся периодом f.

3. Приведите пример периодической функции, множество периодов которой есть множество всех рациональных чисел.

4. Пусть f, g — периодические функции, k — период f, l — период g, $k \neq 0$, $l \neq 0$. Докажите, что если $\dfrac{k}{l} \in \mathbb{Q}$, то $f+g$, $f-g$, fg — периодические функции.

5*. Пусть α, β — вещественные числа, $\alpha \neq 0$. Числовая функция f, определенная на множестве всех вещественных чисел, такова, что $f(x+\alpha) = f(x)+\beta$ для любого числа x. Докажите, что функцию f можно представить в виде суммы периодической функции и линейной функции.

6*. Пусть α, β — вещественные числа, $\alpha \neq 0$. Числовая функция f, определенная на множестве всех вещественных чисел, такова, что $f(x+\alpha) = \beta f(x)$ для любого числа x. Докажите, что функцию f можно представить в виде произведения периодической функции и показательной функции.

9.6. *Четные и нечетные функции.* Числовая функция f называется *четной*, если ее область определения симметрична относительно точки 0 и для любого числа x из области определения справедливо равенство $f(-x) = f(x)$. Числовая функция f называется *нечетной*, если ее область определения симметрична относительно точки 0 и для любого числа x из области определения справедливо равенство $f(-x) = -f(x)$.

Пусть f и g — числовые функции с общей областью определения. Докажите следующие утверждения:

1. Если n — четное целое число, то функция $f(x) = x^n$ — четная функция. Если n — нечетное целое число, то функция $f(x) = x^n$ — нечетная функция.

2. Функция $f(x) = \cos x$ — четная, функции $f(x) = \sin x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ — нечетные.

3. Если f и g — четные функции, то $f+g$, $f-g$, fg, $\frac{f}{g}$ — четные функции.

4. Если f и g — нечетные функции, то $f+g$ и $f-g$ — нечетные функции, fg и $\frac{f}{g}$ — четные функции.

5. Если f — четная функция, g — нечетная функция, то fg, $\frac{f}{g}$ — нечетные функции.

9.7. *Функции с симметричными графиками.* Докажите следующие утверждения:

1. Числовая функция f четна в том и только в том случае, если ее график симметричен относительно оси ординат.

2. Числовая функция f нечетна в том и только в том случае, если ее график симметричен относительно начала координат.

3. График функции f, определенной на всей числовой оси, симметричен относительно прямой $x = a$ в том и только в том случае, если $f(a+x) = f(a-x)$ при всех x.

4. График функции f, определенной на всей числовой оси, симметричен относительно точки $(a;b)$ в том и только в том случае, если $f(a+x) + f(a-x) = 2b$ при всех x.

5. Если график числовой функции f имеет две оси симметрии, перпендикулярные оси абсцисс, то f – периодическая функция.

6. Если график числовой функции f имеет ось симметрии, перпендикулярную оси абсцисс, и центр симметрии, то f — периодическая функция.

7. Если график числовой функции f имеет два центра симметрии, то функцию f можно представить в виде суммы периодической функции и линейной функции.

8. Если область определения функции f симметрична относительно точки 0, то f можно единственным образом представить в виде суммы четной функции и нечетной функции.

9*. Если функция f определена на всей числовой оси, то ее можно представить в виде суммы двух функций, определенных на всей числовой оси, график каждой из которых имеет центр симметрии.

10*. Докажите, что существует функция f, определенная на всей числовой оси, график которой имеет три попарно пересекающиеся оси симметрии.

9.8. *Обратная функция.* Пусть A — область определения, а B — множество значений числовой функции f. Функция f называется *обратимой*, если для любых различных чисел $a_1, a_2 \in A$ выполнено условие $f(a_1) \neq f(a_2)$. Если f – обратимая функция, то функция g, ставящая в соответствие каждому числу $b \in B$ такое число $a \in A$, что $f(a) = b$, называется *обратной* f. Графики функций f и g симметричны относительно прямой $y = x$. Примерами взаимно обратных функций могут служить функции $f(x) = 2^x$ и $g(x) = \log_2 x$, $f(x) = \sin x \left(x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]\right)$ и $g(x) = \arcsin x$. Для каждой из следующих функций найдите обратную:

1. $f(x) = 2x + 3$.
2. $f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.
3. $f(x) = x^2$ $(x \in [0; \infty])$.
4. $f(x) = x^2$ $(x \in (-\infty; 0])$.
5. $f(x) = x^2 + x + 1$ $(x \in (-\infty; -1])$.
6. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ $(x \in [0; \infty))$.
7. $f(x) = \begin{cases} x, & \text{если } x \in [0; 1), \\ 3 - x, & \text{если } x \in [0; 1). \end{cases}$

8. $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \in (-\infty; -1), \\ -x - 1, & \text{если } x \in [-1; \infty). \end{cases}$

9. $f(x) = 2^x + 2^{-x}$ $(x \in [0; \infty))$.

10. $f(x) = \log_2(x^2 - 1)$ $(x \in [2; \infty))$.

9.9. *Композиция функций.* Пусть f и g — числовые функции, причем область определения функции g содержит множество значений функции f. Композицией функций f и g называется функция $g \circ f$, задаваемая формулой $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

1. Найдите композиции $g \circ f$ и $f \circ g$, если $f(x) = x^2 + x$, $g(x) = 2x - 1$.

2. f и h — числовые функции с общей областью определения. Докажите, что если функция f обратима, то существует еднинственная функция g, определенная на множестве значений функции f, такая, что $g \circ f = h$.

3. Приведите пример такой определенной на всей числовой оси функции f, что $f(e^x) = x$ при всех x.

4. h — четная функция с периодом 2π, определенная на всей числовой оси. Докажите, что существует определенная на всей числовой оси функция g, такая, что $h(x) = g(\cos x)$ при всех x.

5. Существует ли определенная на всей числовой оси функция g, такая, что $g(\sin x) = \cos x$ при всех x?

9.10. *Промежутки монотонности.* Если в композиции $g \circ f$ функция g монотонна, то каждый промежуток монотонности функции f является промежутком монотонности функции $g \circ f$. Это соображение поможет найти промежутки монотонности и построить графики следующих функций:

1. $f(x) = \log_2(x^2 - 4x + 3)$.
2. $f(x) = \log_{1/3}(3 - x^2)$.
3. $f(x) = \lg \sin x$.
4. $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\operatorname{tg} x}$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.
6. $f(x) = \log_2 x$.
7. $f(x) = \dfrac{1}{2 - x - x^2}$.
8. $f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{1 + \sin x}$.

9.11. Числовая функция может вовсе не иметь промежутков монотонности. Такова, например, *функция Дирихле*: $f(x) = 1$, если x — рационально, и $f(x) = 0$, если x — иррационально.

1. Приведите пример обратимой функции, определенной на всей числовой оси и не имеющей промежутков монотонности.

2. Функция f, определенная на всей числовой оси, такова, что для любых различных рациональных чисел a и b числа $f(a)$ и $f(b)$ — различные целые. Докажите, что функция f не имеет промежутков монотонности.

9.12. *Функциональные уравнения.*

1. Найдите функцию f, если известно, что ее областью определения является множество $(-\infty;1)\cup(1;\infty)$ и при всех $x \neq -1$ выполняется равенство $f\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = x^2$.

2*. Найдите функцию f, если известно, что $f(0) = 1$ и при всех $x \neq 0$ выполняется равенство $(x+1)f(x) = 1 - f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3*. Найдите функцию f, определенную при всех $x \neq \pm\dfrac{1}{3}$ и удовлетворяющую равенству $f\left(\dfrac{x+1}{1-3x}\right) = x - f(x)$.

9.13. *Функциональное уравнение линейной функции.* Монотонная функция f определена на всей числовой оси, и для любых чисел x, y справедливо равенство $f(x+y) = f(x)+f(y)$. Докажите следующие утверждения:

1. Если $n \in \mathbb{N}$, то $f(nx) = nf(x)$ при всех x.
2. Если $m,n \in \mathbb{N}$, то $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = \dfrac{m}{n}f(1)$.
3. $f(0) = 0$.
4. $f(-x) = -f(x)$ при всех x.
5*. $f(x) = xf(1)$ при всех x.

9.14. Функция f определена на всей числовой оси и для любых чисел x, y выполняются равенства $f(x+y) = f(x)+f(y)$, $f(xy) = f(x)f(y)$. Докажите следующие утверждения:

1. Если $x \geq 0$, то $f(x) \geq 0$.
2. f — монотонна.
3. Либо $f(x) = 0$ для любого x, либо $f(x) = x$ для любого x.

9.15. *Функциональное уравнение показательной функции.* Строго монотонная функция f определена на всей числовой оси, и для любых чисел x, y справедливо равенство $f(x+y) = f(x)f(y)$. Докажите следующие утверждения:

1. Если $n \in \mathbb{N}$, то $f(nx) = (f(x))^n$ при всех x.

2. $f(x) > 0$ при всех x.

3. Если $m, n \in \mathbb{N}$, то $f\left(\frac{m}{n}\right) = \sqrt[n]{(f(1))^m}$.

4. $f(0) = 1$.

5. $f(-x) = \dfrac{1}{f(x)}$ при всех x.

6*. f — показательная функция.

9.16. *Функциональное уравнение логарифмической функции.* Строго монотонная функция f определена на множестве всех положительных чисел, и для любых $x, y > 0$ справедливо равенство $f(xy) = f(x) + f(y)$.

1. Докажите, что $f(1) = 0$.

2. Докажите, что $f(2^x) = xf(2)$ при всех x и $f(x) = f(2)\log_2 x$ при всех $x > 0$.

3. Докажите, что существует такое $a > 0$, $a \neq 1$, что $f(x) = \log_a x$ при всех $x > 0$.

§ 3. Предел последовательности

Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если для любого положительного числа ε найдется такой номер N, что для всех номеров n, начиная с N, выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. Иначе говоря, a — предел последовательности (x_n), если любой промежуток ненулевой длины, содержащий внутри себя точку a, содержит все члены последовательности (x_n), начиная с некоторого. Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся.* Сходящаяся последовательность (x_n) имеет единственный предел. Он обозначается $\lim_{n\to\infty} x_n$.

9.17. Для каждой из следующих последовательностей (x_n) найдите число a, являющееся ее пределом, и для положительного числа ε укажите какой-нибудь (обычно зависящий от ε) номер N, начиная с которого выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$:

1. $x_n = \dfrac{1}{n}$.

2. $x_n = \dfrac{2}{n^3}$.

3. $x_n = \dfrac{1}{3^n}$.

4. $x_n = \left(-\dfrac{2}{5}\right)^n$.

5. $x_n = \dfrac{\sin n}{n}$.

6. $x_n = \operatorname{arctg} n$.

7. $x_n = \dfrac{1}{2n^2+5n}$.

8. $x_n = \arcsin\dfrac{1}{n}$.

9. $\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{1}{4}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{1}{8}; \dfrac{1}{5}; \dfrac{1}{16}; \dfrac{1}{7}; \ldots$

10. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{4}{5}; \dfrac{5}{6}; \ldots$

11. $x_n = \operatorname{sgn}(n^2-5n-7)$.

12. $x_n = \left[\dfrac{7n+5}{n^2+1}\right]$.

9.18. Выясните, существуют ли последовательности (x_n), сходящиеся к нулю и удовлетворяющие следующим условиям:

1. $x_n < \dfrac{1}{n}$ при всех n.

2. $x_n > \dfrac{1}{n}$ при всех n.

3. $x_n > \dfrac{1}{10} - \dfrac{1}{n}$ при всех n.

4. $0 < x_n < x_{2n}$ при всех n.

9.19. Докажите, что приведенные последовательности не имеют пределов:

1. $1; -1; 1; -1; 1; -1; \ldots$

2. $1; \dfrac{1}{2}; 2; \dfrac{1}{3}; 3; \dfrac{1}{4}; \ldots$

3. $\dfrac{1}{2}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{1}{3}; \dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{4}; \dfrac{4}{5}; \ldots$

4. $x_n = 2^n + 1$.

5. $x_n = \operatorname{arctg}^n n$.

6. $x_n = \sin n$.

9.20. Докажите, что если последовательность (x_n) сходится к числу a и последовательность (y_n) получена перестановкой членов последовательности (x_n), то и последовательность (y_n) сходится к числу a.

9.21. Докажите, что если монотонная последовательность (x_n) не ограничена, то последовательность $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ сходится к нулю.

9.22. *Действия над сходящимися последовательностями.* Если (x_n), (y_n) — сходящиеся последовательности, то последовательности (x_n+y_n), (x_n-y_n), (x_ny_n) сходятся и

$$\lim_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n,$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Если все члены последовательности (y_n) отличны от нуля и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$, то последовательность $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{\lim_{n\to\infty} y_n}.$$

Если все члены последовательности (x_n) неотрицательны, то при любом натуральном k последовательность $(\sqrt[k]{x_n})$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} x_n}.$$

Вычислите пределы следующих последовательностей:

1. $x_n = 1 + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{2^n}$.
2. $x_n = \dfrac{n}{n+1}$.
3. $x_n = \dfrac{3n^2+n+7}{5-n-n^2}$.
4. $x_n = \dfrac{2n-1}{3n^2+n+2}$.
5. $x_n = \dfrac{2n^2+n+1}{n-2} + \dfrac{4n^2+3n-1}{1-2n}$.
6. $x_n = \dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n^2}$.
7. $x_n = \dfrac{3^{n-1}}{3^n-2}$.
8. $x_n = \dfrac{2^n+3^{n+1}+5^{n-1}}{3^n+5^{n+1}}$.
9. $x_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$.
10. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{3n^3+1}}{\sqrt{2n^2-1}}$.
11. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.
12. $x_n = n(\sqrt{n^2+1} - n)$.
13. $x_n = \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}$.
14. $x_n = \dfrac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{3n+4} - \sqrt{3n+1}}$.

9.23. Если последовательность (x_n) ограничена, а последовательность (y_n) сходится к нулю, то последовательность $(x_n y_n)$ сходится к нулю. Вычислите пределы следующих последовательностей:

1. $x_n = \dfrac{\{\pi n\}}{n}$.
2. $x_n = \dfrac{[\pi n]}{n}$.
3. $x_n = \dfrac{\sin^3 n}{n^2+n}$.
4. $x_n = \dfrac{2^{n-1} + \operatorname{arctg} n}{2^n}$.

9.24. *Сумма членов геометрической прогрессии.* Если (x_n) — геометрическая прогрессия со знаменателем q, таким, что $|q| < 1$, то последовательность $S_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$ сходится и

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{1-q}.$$

Число $\lim_{n\to\infty} S_n$ называется суммой членов последовательности x_n. Вычислите пределы следующих последовательностей:

1. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}$.

2. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{3^k}$.

3. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{2^{k+1}+1}{2^{2k}}$.

4. $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1+3+3^2+\ldots+3^k}{5^{k+2}}$.

5. $0{,}c_1c_2c_3\ldots$ — десятичная запись числа α. Докажите, что последовательность (x_n), заданная формулой $x_n = 0{,}c_1c_2\ldots c_n$, сходится к α.

6. Десятичная запись числа α — периодическая дробь $0{,}a_1a_2\ldots a_k(b_1b_2\ldots b_l)$. Выразите α через целые числа $a = a_1\cdot 10^{k-1} + a_2\cdot 10^{k-2} + \ldots + a_k$ и $b = b_1\cdot 10^{l-1} + b_2\cdot 10^{l-2} + \ldots + b_l$ (если дробь чисто периодическая, то $a = 0$).

9.25. *Принцип сжатой последовательности.* Если последовательности (x_n) и (z_n) сходятся к числу a, а последовательность (y_n) такова, что при всех n выполняются неравенства $x_n \le y_n \le z_n$, то последовательность (y_n) сходится к числу a. Докажите сходимость и найдите пределы последовательностей, удовлетворяющих следующим условиям:

1. Для любого n справедливы неравенства $\frac{n}{2n+1} < x_n < \frac{n+1}{2n}$.

2. $x_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \frac{1}{n^2+3} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2}$.

3. $x_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

4. $x_n = S_1 + S_2 + \ldots + S_n$, где S_k $(k = 1,2,\ldots,n)$ — площадь прямоугольника, основанием которого является отрезок $\left[\frac{k-1}{n}; \frac{k}{n}\right]$ оси

абсцисс, а высота равна одному из значений функции $f(x) = x^2$ на этом отрезке.

9.26. Последовательность положительных чисел (x_n) такова, что последовательность $\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)$ сходится к некоторому числу меньше 1. Докажите, что последовательность (x_n) сходится к нулю. Установите сходимость к нулю следующих последовательностей:

1. $x_n = \dfrac{n^p}{a^n}$ $(a > 1)$.
2. $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$.
3. $x_n = \dfrac{(2n)!}{a^{n!}}$ $(a > 1)$.
4. $x_n = \dfrac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdots (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdots (4n+2)}$.

9.27. *Подпоследовательности.* Если $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n).

1. (x_n) — последовательность, сходящаяся к числу a. Докажите, что всякая подпоследовательность (x_n) сходится к a.

2. Последовательность (x_n) такова, что подпоследовательности (x_{2n-1}) и (x_{2n}) сходятся к одному и тому же числу. Докажите, что последовательность (x_n) сходится к этому числу.

9.28. *Монотонные ограниченные последовательности.* Решите несколько задач, используя теорему: *если последовательность монотонна и ограничена, то она сходится.*

1. f — возрастающая функция. Последовательность (x_n) такова, что для любого натурального $n \geq 2$ выполняется равенство $x_n = f(x_{n-1})$. Докажите, что если $x_1 \leq x_2$, то (x_n) — возрастающая последовательность, а если $x_1 \geq x_2$, то (x_n) — убывающая последовательность. Докажите, что если f — ограниченная функция, то последовательность (x_n) сходится.

Установите сходимость и вычислите пределы последовательностей (x_n), удовлетворяющих условиям:

2. $x_n = \sqrt{x_{n-1} + 2}$ $(n \geq 2)$, $x_1 \geq -2$.

3. $x_n = -\sqrt{1 - x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$, $x_1 \leq 1$.

4. $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$ $(n \geq 2)$, $0 \leq x_1 \leq 1$.

5. $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$ $(n \geq 2,\ a > 0)$, $x_1 > 0$.

6. $x_n = \frac{1}{3}\left(2x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}^2}\right)$ $(n \geq 2,\ a > 0)$, $x_1 > 0$.

Выясните, при каких значениях x_1 сходятся последовательности (x_n), удовлетворяющие следующим условиям:

7*. $x_n = x_{n-1}^2 + 3x_{n-1} + 1$ $(n \geq 2)$.

8*. $x_n = x_{n-1}^3 + \frac{3}{4}x_{n-1}$ $(n \geq 2)$.

9.29. *Монотонные ограниченные последовательности* (продолжение).

1. f — убывающая функция. Последовательность (x_n) такова, что для любого натурального $n \geq 2$ выполняется равенство $x_n = f(x_{n-1})$. Докажите, что последовательности (x_{2n-1}) и (x_{2n}) монотонны, причем одна из них возрастает, а другая убывает. Докажите, что если число x_1 не расположено между числами x_2 и x_3, то последовательности (x_{2n-1}) и (x_{2n}) сходятся.

Определите, сходятся ли последовательности (x_n), удовлетворяющие следующим условиям, и найдите предел, если последовательность сходится.

2. $x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$, $x_1 = 1$.

3. $x_n = (1 - x_{n-1})^2$ $(n \geq 2)$, $x_1 = \frac{1}{2}$.

4. $x_n = \sqrt{1 - x_{n-1}}$ $(n \geq 2)$, $0 < x_1 \leq \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

5. $x_n = \frac{x_{n-1} + a}{x_{n-1} + 1}$ $(n \geq 2,\ a \geq 0)$, $x_1 \geq 0$.

§ 4. Предел функции

Число b называется *пределом функции f в точке a*, если для всякой последовательности (x_n), сходящейся к a, все члены которой принадлежат области определения функции f и отличны от a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b. В этом определении предполагается, что последовательности (x_n) с перечисленными свойствами существуют. Предел функции f в точке a обозначается $\lim_{x\to a} f(x)$.

9.30. Выясните, существует ли предел функции f в точке a:

1. $f(x) = x - 2,\ a = 1.$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x-2},\ a = 2.$
3. $f(x) = \sqrt{1+x},\ a = -\dfrac{1}{2}.$
4. $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ a = -3.$
5. $f(x) = \operatorname{sgn} x,\ a = 0.$
6. $f(x) = \begin{cases} -2x, & \text{если } x \le -1, \\ x+3, & \text{если } x > -1, \end{cases}\ a = -1.$
7. $f(x) = [x],\ a = \dfrac{3}{2}.$
8. $f(x) = \{x\},\ a = 4.$
9. $f(x) = \left\{\dfrac{1}{x}\right\},\ a = 0.$
10. $f(x) = x\left\{\dfrac{1}{x}\right\},\ a = 0.$
11. $f(x) = x^2\left[\dfrac{1}{x}\right],\ a = 0.$
12. $f(x) = \operatorname{tg} x,\ a = \dfrac{\pi}{2}.$
13. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x},\ a = 0.$
14. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x},\ a = 0.$

9.31. Если функции f и g с одной и той же областью определения имеют в точке a пределы, то функции $f+g$, $f-g$, fg имеют в точке a пределы и

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x),$$
$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x),$$
$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\,\lim_{x\to a} g(x).$$

Если, кроме того, функция g не обращается в нуль и $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Вычислите пределы:

1. $\lim_{x\to 2}(2x^2+3x-7).$
2. $\lim_{x\to -6}\dfrac{4-x}{x^2+2}.$
3. $\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{x^2-3x}.$
4. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}.$

5. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+3x-4}{2x^3-x^2-1}$.

6. $\lim_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{12}{x^3-8}\right)$.

7. $\lim_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2}$.

8. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x}-1}{x}$.

9. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{2x+3}}{x^2+x}$.

10. $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x+1}}$.

9.32. Приведите пример таких функций f и g, заданных на всей числовой оси, что функция f имеет в некоторой точке a предел, равный b, функция g имеет предел в точке b, функция $g\circ f$ имеет предел в точке a, но

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) \neq \lim_{x\to b} g(x).$$

9.33. *Определение непрерывной функции.* Функция f называется *непрерывной в точке a*, если она определена в этой точке и имеет в ней предел, равный $f(a)$. Выясните, в каких точках непрерывны следующие функции:

1. $f(x)=x$, если $|x|>1$, и $f(x)=x^2$, если $|x|\le 1$.

2. $f(x)=\operatorname{sgn} x$.

3. $f(x)=[x]$.

4. $f(x)=\{x\}$.

5. $f(x)=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

6. $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

7. $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

8. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$.

9. $f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin^n x$.

10. $f(x)=1$, если x рационально, и $f(x)=0$, если x иррационально.

11. $f(x)=x$, если x рационально, и $f(x)=-x$, если x иррационально.

12*. $f(x)=\frac{1}{n}$, если $x=\frac{m}{n}$ ($m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$, дробь $\frac{m}{n}$ несократима), и $f(x)=0$, если x иррационально.

13*. Область определения функции f — промежуток $[0;1)$; если $x=0,a_1a_2a_3\ldots$ — бесконечная десятичная дробь, то $f(x)=$ $=0,0a_10a_20a_3\ldots$ (Для чисел x вида $\frac{m}{10^n}$ из двух десятичных записей выбирается та, которая содержит 0 в периоде.)

9.34. При вычислении следующих пределов полезно воспользоваться равенством

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

а также непрерывностью синуса и косинуса в каждой точке числовой оси:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{x}$.
2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}$.
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$.
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 4x}$.
6. $\lim_{x\to\pi}\frac{1+\cos x}{\sin^2 x}$.
7. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+\sin 5x}{\sin x-\sin 3x}$.
8. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\operatorname{tg} x}{x^3}$.
9. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$.
10. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} x}$.

§ 5. Свойства непрерывных функций

9.35. *Сохранение знака.* Если функция f непрерывна в точке a и $f(a)>0$, то все значения этой функции в точках области определения, приидалежащих некоторому промежутку, содержащему внутри себя точку a, также положительны. Если $f(a)<0$, то имеет место аналогичное утверждение.

1. Уравнение $x^3+ax+1=0$ имеет три вещественных корня. Докажите, что существует такое положительное число ε, что для любого числа b из промежутка $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$ уравнение $x^3+bx+1=0$ имеет три вещественных корня.

2. Множество решений неравенства $\sqrt{2-x-x^2} < 2^x + 1$ — отрезок $[a;b]$. Найдите a и b.

3. Множество решений неравенства $\log_3(1-x^2) \le x + 0,3$ — промежуток $(a;b)$. Найдите a и b.

9.36. *Теорема о промежуточном значении.* Если функция f непрерывна в каждой точке отрезка $[a;b]$, то любое число, лежащее между $f(a)$ и $f(b)$, является значением функции f в некоторой точке отрезка $[a;b]$. Докажите, что следующие уравнения имеют корни:

1. $2^{x^2-x} = 3\sin x$.
2. $5x\lg(\operatorname{tg} x) = 5 - x$.
3. $\sqrt[3]{x^4+x^2+1} = \sqrt{x^5+x^2+x}$.
4. $\operatorname{arctg}^3 x = 2\operatorname{tg} x - 1$.

5. $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — вещественные числа, $a_0 \neq 0$, n — нечетное натуральное число.

9.37. *Теорема о промежуточном значении в геометрических задачах.*

1. Многоугольник M и прямая l лежат в одиой плоскости. Докажите, что существует прямая, параллельная l, которая разбивает M на два равновеликих многоугольника.

2. Многоугольник M и точка A лежат в одной плоскости. Докажите, что существует прямая, проходящая через точку A и разбивающая M на два равновеликих многоугольника.

3*. M — выпуклый многоугольник. Докажите, что существуют две взаимно перпендикулярные прямые, разбивающие M на четыре равновеликих многоугольника.

4*. Попарно различные лучи OA, OB, OC и многоугольник M лежат в одной плоскости. Докажите, что существует такой параллельный перенос T, что лучи OA, OB и OC разбивают $T(M)$ на три равновеликих многоугольника.

9.38. *Теорема о промежуточном значении* (продолжение). Решите еще несколько задач на свойства *непрерывных функций*, т. е. функций, непрерывных в каждой точке области определения.

1. f — непрерывная функция, заданнная на отрезке $[0;1]$, все значения которой содержатся в отрезке $[0;1]$. Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет корень.

2. Непрерывная функция f определена на всей числовой оси. Докажите, что если уравнение $f(x) = x$ не имеет корней, то уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

3*. Непрерывная функция f определена на отрезке $[a;b]$. Докажите, что если $f(a)=f(b)$ и $f(x)\geq f(a)$ для любого $x\in[a;b]$, то для любого положительного числа ε, меньшего $b-a$, график функции f имеет хорду длины ε, параллельную оси абсцисс.

4. Докажите, что непрерывная функция, определенная на промежутке, обратима в том и только в том случае, если она строго монотонна.

5. Непрерывная функция f определена на отрезке $[a;b]$. Докажите, что если функция f не является строго монотонной, то для любого положительного числа ε график функции f имеет хорду, параллельную оси абсцисс, длина которой меньше ε.

6. Непрерывная функция f определена на всей числовой оси. Докажите, что если для любого числа a уравнение $f(x)=a$ имеет не более двух корней, то f — строго монотонная функция.

9.39. *Периоды непрерывной функции.* Докажите, что если периодическая функция f непрерывна хотя бы в одной точке, то либо f — постоянная функция, либо среди положительных периодов функции f есть наименьший.

Глава 10
ПРОИЗВОДНАЯ И ИНТЕГРАЛ

§ 1. Вычисление производных

Пусть функция f определена в точке a. *Производная функции f в точке a* — это число

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Если этот предел существует, то говорят, что функция f *дифференцируема в точке a*. Говорят, что f — *дифференцируемая функция*, если f диффереицируема в каждой точке своей области определения.

Если функции u и v с общей областью определения дифференцируемы в некоторой точке a, то в этой точке дифференцируемы их сумма, разность, произведение, и, если $v(a)\neq 0$, частное. Производные суммы, разности, произведения и частного вычисляются по формулам $(u+v)'=u'+v'$, $(u-v)'=u'-v'$, $(au)'=au'$ (a — вещественное число), $(uv)'=u'v+uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$.

Таблица производных

$f(x)=a$ (постоянная функция)	$f'(x)=0$
$f(x)=x^a$	$f'(x)=ax^{a-1}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$

$f(x)=a$ (постоянная функция)	$f'(x)=0$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=\mathrm{tg}\,x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$f(x)=\mathrm{ctg}\,x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)=\arcsin x$	$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\arccos x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x)=\mathrm{arctg}\,x$	$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$
$f(x)=\mathrm{arcctg}\,x$	$f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$

Примечание. Область определения функции $f(x)=x^a$ при нецелом положительном a — промежуток $[0;+\infty)$, а при нецелом отрицательном a — промежуток $(0;+\infty)$. Если $0<a<1$, то эта функция не дифференцируема в точке $x=0$. Функции $f(x)=\arcsin x$ и $f(x)=\arccos x$ не дифференцируемы в точках $x=\pm 1$. За исключением этих случаев, функции в левом столбце таблицы дифференцируемы в каждой точке области определения.

10.1. Вычислите производные следующих функций:

1. $f(x)=3-2x$.
2. $f(x)=2x-x^2$.
3. $f(x)=\sqrt[3]{x}$.
4. $f(x)=\dfrac{5}{x^2}$.
5. $f(x)=x^2\sqrt[4]{x^5}$.
6. $f(x)=\cos x-\mathrm{tg}\,x$.
7. $f(x)=x^2\,\mathrm{ctg}\,x$.
8. $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$.

10.2. *Производная композиции.* Производная композиции $h(x)=g(f(x))$ вычисляется по формуле $h'(x)=g'(f(x))f'(x)$. Вычислите производные следующих функций:

1. $f(x) = \sin 2x$.

2. $f(x) = (x+1)^{50}$.

3. $f(x) = \sqrt{1-3x}$.

4. $f(x) = \sqrt[4]{(2x^3 - x^2)^3}$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

6. $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}^2 2x}$.

7. $f(x) = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$.

8. $f(x) = \dfrac{\sin(\cos x)}{\cos(\sin x)}$.

10.3. *Производная в точке.*

1. Вычислите $f'\left(\dfrac{3}{5}\right)$, если $f(x) = \sqrt{1+5x}$.

2. Вычислите $f'\sqrt{2}$, если $f(x) = x^3 \arcsin \dfrac{1}{x}$.

3. Вычислите $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(3)$, если $f(x) = x^3(x-2)^2(x-3)$.

4. Вычислите $f'(5)$, если $f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-10)$.

5. Вычислите $f'(0)$, если $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{2x}{1-x^2}$.

10.4. *Производная и приближенные вычисления.* Если функция f имеет в точке x_0 производную, то при малых Δx ее приращение $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ можно вычислять по приближенной формуле $\Delta f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$. Вычислите приближенно:

1. $2{,}01^3$.

2. $9{,}998^8$.

3. $\sqrt[4]{1{,}04}$.

4. $\dfrac{2}{1{,}002^3}$.

5. $\sin 31°$.

6. $\operatorname{tg}\dfrac{3{,}1416}{4}$.

7. $\operatorname{arctg} 1{,}01$.

8. $\sqrt[5]{\dfrac{1{,}98}{2{,}02}}$.

§ 2. Касательная

10.5. Если функция f имеет производную в точке x_0, то касательная к графику этой функции в точке с координатами $(x_0, f(x_0))$ имеет угловой коэффициент $f'(x_0)$ и задается уравнением $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

1. Какие углы образуют с осью абсцисс касательные к параболе $y = \dfrac{1}{4}(3 + 2x - x^2)$ в точках с абсциссами -1; 1; 3?

2. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x^3 - x + \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой 1.

3. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^5 + 3x + 2$ в точке с ординатой 2.

4. В каких точках касательная к параболе $y = x^2$ параллельна прямой $y = 4x - 5$; перпендикулярна прямой $2x - 6y + 5 = 0$; образует с прямой $3x - y - 1 = 0$ угол в 45°?

5. При каких p и q парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямой $y = 3x - 2$ в точке с абсциссой 0?

6. При каких a, b, c график функции $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ касается прямой $y = 4x + 4$ в точке с абсциссой -1 и пересекает эту прямую в точке с абсциссой 2?

10.6. *Касательные к параболе.*

1. Докажите, что касательная к графику квадратной функции имеет с ним только одну общую точку.

2. Докажите, что прямая, не параллельная оси ординат и имеющая с графиком квадратной функции только одну общую точку, является касательной к этому графику.

3. При каких p и q парабола $y = x^2 + px + q$ касается прямых $y = 5x + 1$ и $y = -x - 2$?

4. Найдите уравнения касательных к параболе $y = x^2$, проходящих через точку $(2; 3)$.

5. Докажите, что абсцисса точки пересечения двух касательных к графику квадратной функции равна полусумме абсцисс точек касания.

6. Докажите, что любая касательная к параболе $y = x^2$ образует равные по величине углы с двумя прямыми, одна из которых проходит через точку касания параллельно оси ординат, а другая проходит через точку касания и точку $\left(0; \frac{1}{4}\right)$ (фокус параболы, см. задачу 2.26).

7. Докажите, что любая касательная к параболе $y = x^2$ пересекает прямые $y = \frac{1}{4}$ и $y = -\frac{1}{4}$ в точках, равноудаленных от точки $\left(0; \frac{1}{4}\right)$.

8. Докажите, что две касательные к параболе $y = x^2$, проведенные из произвольной точки прямой $y = -\frac{1}{4}$ (директрисы параболы, см. задачу 2.26), взаимно перпендикулярны.

9. Докажите, что если две касательные к параболе $y = x^2$ взаимно перпендикулярны, то их точка пересечения лежит на прямой $y = -\frac{1}{4}$.

10. Через произвольную точку оси абсцисс проведены две прямые, одна из которых касается параболы $y = x^2$ (и не совпадает с осью абсцисс), а другая проходит через точку $(0; \frac{1}{4})$. Докажите, что эти прямые взаимно перпендикулярны.

11. Обобщите утверждения задач 6 — 10 на произвольную параболу.

10.7. *Касательные к гиперболе.*

1. Докажите, что касательная к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ имеет с ней только одну общую точку.

2. Докажите, что прямая, не параллельная осям координат и имеющая с гиперболой $y = \frac{1}{x}$ только одну общую точку, является касательной к этой гиперболе.

3. Докажите, что любая касательная к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ образует равные по величине углы с двумя прямыми, одна из которых проходит через точку касания и точку $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, а другая проходит через точку касания и точку $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ (фокусы гиперболы, см. задачу 2.22).

4. Докажите, что отрезок любой касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x}$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.

5. Докажите, что площадь треугольника, ограниченного осями координат и произвольной касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x}$, равна 2.

6. Докажите, что произведение расстояний от точек $(\sqrt{2}; \sqrt{2})$ и $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$ до произвольной касательной к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ равно 2.

§ 3. Монотонность. Экстремумы

Будем говорить, что функция f *возрастает* (*строго возрастает; убывает; строго убывает*) на промежутке, если для любых двух чисел x_1, x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 > x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \geq f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$, $f(x_1) \leq f(x_2)$, $f(x_1) < f(x_2)$). Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными*, строго возрастающие и строго убывающие функции — *строго монотонными*. Если f — дифференцируемая функция, то она возрастает (убывает) на промежутке в том и только в том случае, если во всех точках этого промежутка выполнено неравенство $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$). Эта монотонная функция строго монотонна в том и только в том случае, если нет такого промежутка ненулевой длины, все точки которого удовлетворяют уравнению $f'(x) = 0$. (В частности, это условие выполнено, если производная f' вовсе не имеет корней или имеет конечное число корней.)

10.8. Для каждой из следующих функций укажите промежутки строгой монотонности:

1. $f(x) = x^3 + x$.
2. $f(x) = 3x - x^3$.
3. $f(x) = (x-1)^5(2x+3)^4$.
4. $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.
5. $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.
6. $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} - \dfrac{1}{x^2}$.
7. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2-x-1}$.
8. $\sin^3 x + \cos^3 x$.
9. $f(x) = \operatorname{tg} x - 2x$.

10.9. Докажите, что для функции $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ найдутся такие числа α и β, что f строго возрастает на каждом из промежутков $(-\infty, \alpha]$, $[\beta, +\infty)$.

10.10. Зная промежутки монотонности функции, нетрудио найти ее наибольшее и наименьшее значения.

1. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ на промежутке $[-1; 2]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = x^3 - 6x^2 + 1$ на промежутке $[-1; 5]$.

3. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ на промежутке $[-2; 4]$.

4. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = 7 + 4x^3 - x^4$ на промежутке $[-1; 3]$.

5. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = [6x^5 - 15x^4 - 10x^3 + 1]$ на промежутке $[-1; 3]$.

6. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{2x^2 - 9x - 2}{x^2 - 5x - 6}$ на промежутке $[0;5]$.

7. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \dfrac{7x^2 - 8}{x^2 + 5x + 1}$ на промежутке $[-1;3]$.

8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sqrt{2x-4} + \sqrt{5-x}$.

9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x^2+9}$ на промежутке $[-2;4]$.

10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \cos 2x - x$ на промежутке $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

11. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \sin x \sin 2x$.

12. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - x^3, & \text{если } -1 \le x \le 3, \\ 8x - x^2, & \text{если } -3 < x \le 5. \end{cases}$$

13. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = |x^3 - 1| - |x^2 - 2x| - x$ на промежутке $[-1;3]$.

14. Найдите наименьший член последовательности $a_n = n^4 - 5n^3 - 3n^2$.

15. Найдите наименьший и наибольший члены последовательности $a_n = \dfrac{n-12}{2n^2 - n - 7}$.

16. Докажите, что если $-1 \le x \le 0$, то $|x^3 + 2x + 1| \le 2$.

17. Докажите, что если $-2 \le x \le 2$, то $3x^5 - 5x^3 - 30x < 40$.

18. Докажите, что если $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, то $\sin x > \dfrac{2x}{\pi}$.

10.11. Каждую из следующих задач можно свести к нахождению наименьшего или наибольшего значения некоторой функции. Все цилиндры и конусы, встречающиеся в этих задачах, — прямые круговые.

1. Какое наименьшее значение может принимать сумма расстояний от начала координат до точек пересечения координатных осей с прямой, имеющей положительный угловой коэффициент и проходящей через точку $(-1;2)$?

2. Какое наименьшее значение может принимать произведение расстояний от начала координат до точек пересечения координатных осей с прямой, имеющей отрицательный угловой коэффициент и проходящей через точку $(2;1)$?

3. Найдите точку параболы $y=x^2$, ближайшую к точке $(-1;2)$.

4*. Дифференцируемая функция f определена на открытом промежутке. Точка A не лежит на графике f, B — ближайшая к A точка графика f, l — касательная к графику f в точке B. Докажите, что прямая AB перпендикулярна l.

5. Какое наименьшее значение может принимать сумма квадратов расстояний от точки $(2;2)$ до двух точек параболы $y=x^2$, симметричных относительно оси ординат?

6. Какое наименьшее значение может принимать расстояние между такими двумя точками A и B параболы $y=x^2$, что прямая AB перпендикулярна касательной к параболе в точке A?

7. Какую высоту имеет прямоугольник наибольшей площади, вписанный в сегмент круга с радиусом, равным R, если высота сегмента равна H? (Основание прямоугольника лежит на основании сегмента.)

8. *Параболическим сегментом* называется фигура, ограниченная параболой и прямой, перпендикулярной ее оси. Расстояние от вершины параболы до этой прямой называется *высотой* сегмента, а длина отрезка прямой, высекаемого параболой, — *основанием* сегмента. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в параболический сегмент с основанием a и высотой H? (Одна из сторон прямоугольника лежит на основании сегмента.)

9. Какую наибольшую площадь может иметь прямоугольник, вписанный в круговой сектор с радиусом R и центральным углом α? (Две стороны прямоугольника параллельны оси симметрии сектора.)

10. Какую наибольшую площадь может иметь трапеция, три стороны которой равны a?

11. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь цилиндр, если его объем равен V?

12. Тело представляет собой цилиндр, завершенный сверху полушаром. Какую наименьшую площадь полной поверхности может иметь это тело, если его объем равен V?

13. Докажите, что объем шара, вписанного в конус, не превосходит половины объема этого конуса.

14. Какой сектор надо вырезать из данного круга, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости?

15. Определите радиус основания цилиндра, вписанного в шар с радиусом R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности. Чему равна площадь боковой поверхности этого цилиндра?

16. Определите высоту конуса, вписанного в шар с радиусом R и имеющего наибольшую площадь боковой поверхности.

17. Правильная четырехугольная призма и правильная четырехугольная пирамида расположены так, что одно из оснований призмы лежит в основании пирамиды, а вершины другого основания лежат на боковых ребрах пирамиды. Какой наименьший объем может иметь пирамида, если сторона основания призмы равна a, а боковое ребро призмы равно $2a$?

18. Дождевая капля, начальная масса которой равна m (г), а начальная скорость равна нулю, падает под действием силы тяжести, равномерно испаряясь так, что масса уменьшается пропорционально времени (коэффициент пропорциональности равен k (г/с)). Через сколько секунд после начала падения кинетическая энергия капли будет наибольшей?

19. Из пункта A, находящегося в лесу в 5 км от прямолинейной дороги, пешеходу нужно попасть в пункт B, расположенный на этой дороге в 13 км от пункта A. По дороге пешеход может двигаться с максимальной скоростью 5 км/ч, а по лесу — с максимальной скоростью 3 км/ч. За какое минимальное время пешеход сможет добраться из пункта A в пункт B?

10.12. *Доказательство неравенств.*

1. Функции f и g дифференцируемы на промежутке $[a;+\infty)$. Докажите, что если $f(a) \geq g(a)$ и при всех x, больших a, справедливо неравенство $f'(x) > g'(x)$, то при всех x, больших a, справедливо неравенство $f(x) > g(x)$.

Докажите неравенства:

2. Если $x > 0$, то

$$1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8} < \sqrt{1+x} < 1+\frac{x}{2}.$$

3. Если $x > 0$, то для любого натурального числа n

$$1+\frac{x}{n}-\frac{(n-1)x^2}{2n^2}<\sqrt[n]{1+x}<1+\frac{x}{n}.$$

4. Если $x > 0$, то $\cos x > 1-\frac{x^2}{2}$.

5. Если $x > 0$, то $\sin x > x-\frac{x^3}{6}$.

6. Если $x > 0$, то для любого натурального числа n

$$1+\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}<\cos x<1+\sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

и

$$\sum_{k=0}^{2n-1}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}<\sin x<\sum_{k=0}^{2n}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

7. Если $0 < x < \frac{\pi}{2}$, то $\operatorname{tg} x > x+\frac{x^3}{3}$.

8. Если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha\sin\beta < \beta\sin\alpha$.

9. Если $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha\operatorname{tg}\beta < \beta\operatorname{tg}\alpha$.

10.13. *Неравенство Бернулли.* Докажите неравенства:

1. Если $\alpha > 1, x > -1, x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$.
2. Если $0 < \alpha < 1, x > -1, x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha < 1+\alpha x$.
3. Если $\alpha < 0, x > -1, x \neq 0$, то $(1+x)^\alpha > 1+\alpha x$.
4. Если $x > 0$, то $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}$.
5. Если $x > 0$, то $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1} > \left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+2}$.

10.14. *Построение графиков.* Найдите промежутки монотонности и постройте графики следующих функций:

1. $f(x)=\frac{2}{3}x^3-x^2-4x+2$.
2. $f(x)=x^4-2x^2+1$.
3. $f(x)=x^4-4x^3+4x^2-1$.

4. $f(x)=3\sqrt[3]{x^2+x+6}-x^2-x$.

5. $f(x)=x^3-6x+6\operatorname{arctg}x$.

6. $f(x)=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

10.15. *Число корней уравнения.* Для того чтобы найти число корней уравнения $f(x)=0$, часто бывает достаточно представить себе график функции f.

Выясните, сколько вещественных корней имеют следующие уравнения:

1. $x^3-3x^2+6x-1=0$.

2. $x^3-x=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

3. $12x^4-12x^3-3x^2-5=0$.

4. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x-\dfrac{2}{3}}=1$.

5. $6\operatorname{arctg}x-x^3=\dfrac{3\pi}{2}-1$.

6. $3\sin x+2\cos^3 x=2,5,\ x\in[0;2\pi]$.

7. $\cos 2x+\operatorname{tg}3x=5,\ x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

8. $\sin\sqrt{1+x^2}=x^4+x^2+\dfrac{1}{2}$.

Для каждого вещественного числа a выясните, сколько вещественных корней имеют следующие уравнения:

9. $3x^4-14x^3-45x^2+a=0$.

10. $x^5-x^3-2x+a=0$.

11. $2x^4+2ax^3-a^2x^2+1=0$.

12. $\sin 2x+2\sin x=a,\ x\in[0;2\pi]$.

10.16. *Число вещественных корней кубического уравнения.* Кубическое уравнение $x^3+ax^2+bx+c=0$ сводится подстановкой $x=$ $=y-\dfrac{a}{3}$ к уравнению вида $y^3+py+q=0$. Пусть p, q — вещественные числа.

1. Докажите, что если $4p^3+27q^3>0$, то уравнение $x^3+px+q=0$ имеет один вещественный корень.

2. Докажите, что если $4p^3+27q^3=0$, а из коэффициентов p, q хотя бы один отличен от нуля, то уравнение $x^3+px+q=0$ имеет два вещественных корня.

3. Докажите, что если $4p^3+27q^3<0$, то уравнение $x^3+px+q=0$ имеет три вещественных корня.

10.17. Найдите все значения a, при которых разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)=x^3-ax$ на отрезке $[0;1]$ равна 2.

10.18. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции $f(x)=x^3+ax^2-1$ на отрезке $[0;1]$ равно наибольшему значению этой функции на отрезке $[1;3]$.

10.19. Найдите все значения a, при которых все значения функции $f(x)=\sin x(a-\cos 2x)$ содержатся в отрезке $[-1;1]$.

§ 4. Вычисление интегралов

Функция F называется *первообразной* функции f на отрезке $[a;b]$, если F дифференцируема на $[a;b]$ и $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a;b]$. Если F – одна из первообразных функции f на отрезке $[a;b]$, то любая другая первообразная этой функции имеет вид $G(x)=F(x)+C$, где C — вещественное число. Отметим, что любая непрерывная на отрезке функция имеет на этом отрезке первообразную (см. задачу 10.27).

В следующей таблице для каждой из функций, приведенных в левом столбце, в правом столбце помещена одна из ее первообразных.

Таблица первообразных

$f(x)=a$ (постоянная функция)	$F(x)=ax$
$f(x)=x^a$ $(a\neq-1)$	$F(x)=\dfrac{1}{a+1}x^{a+1}$
$f(x)=\sin x$	$F(x)=-\cos x$

$f(x)=\cos x$	$F(x)=\sin x$
$f(x)=\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$F(x)=-\operatorname{ctg} x$
$f(x)=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$F(x)=\operatorname{tg} x$
$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$	$F(x)=\operatorname{arctg} x$
$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$F(x)=\arcsin x$

Здесь не приводится определение *интегрируемой функции*, отмечается лишь, что непрерывные на отрезке функции интегрируемы. Если интегрируемая функция f имеет на отрезке с концами a и b первообразную F, то *интеграл от a до b функции* f равен $F(b)-$ $-F(a)$:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a).$$

Отметим несколько свойств интеграла:

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx \qquad (\alpha \text{ — вещественное число});$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx;$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

10.20. Вычислите интегралы:

1. $\int\limits_{-1}^{5} 5\,dx.$

2. $\int\limits_{1}^{4} (3-2x)\,dx.$

3. $\int\limits_{0}^{2} (2x^3 - x - 1)\,dx.$

4. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{3x^6}\,dx.$

5. $\int\limits_{2}^{8} \frac{dx}{\sqrt{x}}.$

6. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt[3]{x^5}\,dx.$

7. $\int\limits_{1}^{2} \frac{2x^3+3x-2}{x^5}\,dx.$

8. $\int\limits_{1}^{3} \frac{2x^2+\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$

9. $\int\limits_{0}^{1} \frac{x^3+x+1}{x^2+1}\,dx.$

10. $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\frac{x}{2}\,dx.$

11. $\int\limits_{0}^{\pi} (\sin x - 3\cos x - x)\,dx.$

12. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \operatorname{tg}^2 x\,dx.$

13. $\int\limits_{-1}^{1} (|2x-1| - |x|)^2\,dx.$

14. $\int\limits_{0}^{\pi} |\sin x - \cos x|\,dx.$

10.21. *Линейная замена переменной.* Линейная замена переменной в интеграле осуществляется по формуле

$$\int\limits_{a}^{b} f(\alpha x+\beta)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int\limits_{\alpha a+\beta}^{\alpha b+\beta} f(x)\,dx,$$

где f — интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, α, β — вещественные числа, $\alpha \neq 0$.

Вычислите интегралы:

1. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \sin 3x\,dx.$

2. $\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-x}\,dx.$

3. $\int\limits_0^1 (3x+1)^7\,dx.$

4. $\int\limits_0^{\pi/2} \sin 2x \cos 5x\,dx.$

5. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x\,dx.$

6. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2+2x+2}.$

7. $\int\limits_0^2 \frac{dx}{x^2+4}.$

8. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{2x^2+2x+1}.$

9. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}.$

10. $\int\limits_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$

11. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{2x-|x-2|}\,dx.$

12. $\int\limits_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx.$

10.22. Используя линейную замену переменной, докажите следующие утверждения.

1. Если f — нечетная интегрируемая на отрезке $[-a;a]$ функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

2. Если f — четная интегрируемая на отрезке $[-a;a]$ функция, то

$$\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

3. Если T — период функции f, определенной на всей числовой оси и интегрируемой на любом отрезке, то для любых чисел a и b

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a+T}^{b+T} f(x)\,dx \text{ и } \int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx \text{ не зависит от } a.$$

Если при этом график функции f симметричен относительно какой-нибудь точки оси абсцисс, то $\int\limits_{a}^{a+T} f(x)\,dx = 0.$

10.23. *Общая формула замены переменной.* Следующая формула обобщает формулу линейной замены переменной:

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

В этой формуле предполагается, что функция φ дифференцируема на $[a;b]$, ее производная φ' непрерывна на $[a;b]$, а функция f непрерывна на отрезке, содержащем множество значений функции φ.

Вычислите интегралы:

1. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\,dx.$

2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^7}{1+x^{16}}\,dx.$

3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}\,dx.$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx.$

5. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}\,dx.$

6*. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^4 x\,dx.$

10.24. *Теорема о среднем.* Если m — наименьшее, а M — наибольшее значения интегрируемой на отрезке $[a;b]$ функции f, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a).$$

Более точную оценку для $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ можно получить, разбив отрезок $[a;b]$ на несколько меньших отрезков и применив теорему о среднем к каждому из них.

Докажите неравенства:

1. $\displaystyle 9 < \int_8^{18} \frac{x+1}{x+2}\,dx < 9{,}5.$

2. $\displaystyle 0{,}6 < \int_{1/2}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx < 0{,}75.$

3. $\int\limits_0^{10} \frac{x}{x^3+16}\,dx < \frac{5}{6}.$

4. $3 < \int\limits_0^{3} \frac{x^2+5}{x^2+2}\,dx.$

5. $8 < \int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 10.$

6. $8,25 < \int\limits_{1,5}^{3,5} \frac{x^2}{x-1}\,dx < 9,25.$

7. $\frac{\pi}{2} < \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx < \pi.$

8. $\frac{7\pi}{12} < \int\limits_{\pi/4}^{5\pi/4} \frac{1}{1+\sin^2 x}\,dx < \frac{5\pi}{6}.$

10.25. Докажите, что если среди вещественных чисел a, b, c хотя бы одно отлично от нуля, то функция $f(x) = a\cos x + b\cos 2x + c\cos 3x$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

10.26. *Неравенство Коши—Шварца.* f и g — интегрируемые на отрезке $[a;b]$ функции. Докажите следующие утверждения:

1. Все значения функции h, определенной на всей числовой оси по формуле

$$h(t) = t^2\int\limits_a^b f^2(x)\,dx + 2t\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx + \int\limits_a^b g^2(x)\,dx,$$

неотрицательны.

2. $\left(\int\limits_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2 \le \int\limits_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int\limits_a^b g^2(x)\,dx.$

3. $\left(\int\limits_a^b f(x)\,dx\right)^2 \le (b-a)\int\limits_a^b f^2(x)\,dx.$

4. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx < \frac{\sqrt{5}}{2}.$

5. $\int\limits_0^1 \sqrt{1+x^4}\,dx < 1,1.$

10.27. *Интеграл с переменным верхним пределом.* Если функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$, то функция F, определенная на отрезке $[a;b]$ по формуле

$$F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt,$$

является первообразной функции f, т. е. $F'(x)=f(x)$ для всех $x\in[a;b]$.

1. $F(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t^2+1}\,dt$. Найдите $F'(0)$, $F'(\pi)$, $F'\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

2. $F(x)=\int\limits_x^{x+1} \frac{t}{1+\sin^2 t}\,dt$. Найдите $F'(0)$, $F'(\pi)$, $F'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3. $F(x)=\int\limits_0^{x^2+1} \sqrt[3]{1+t^4}\,dt$. Найдите функцию F'.

4. $F(x)=\int\limits_0^{x^4} \frac{1}{t^4+1}\,dt$. Найдите промежутки монотонности функции F.

5. $F(x)=\int\limits_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1+t^2}\,dt$. В каких точках функция F принимает свое наибольшее значение?

§ 5. Натуральный логарифм

10.28. *Определение натурального логарифма.* Натуральный логарифм положительного числа x задается формулой

$$\ln x=\int\limits_1^x \frac{1}{t}\,dt.$$

1. Докажите, что $f(x)=\ln x$ — дифференцируемая строго возрастающая функция.

2. Докажите, что функция $f(x)=\ln x$ удовлетворяет функциональному уравнению логарифмической функции $f(xy)=f(x)+f(y)$ при всех $x,y>0$ (см. задачу 9.16) и потому является логарифмической функцией по некоторому основанию e.

3. a, b — положительные числа, $a \le b$. Докажите, что

$$\int_a^b \frac{dt}{t} = \ln\frac{b}{a}.$$

4. a, b — положительные числа, $a \le b$. Докажите, что

$$\frac{1}{b}(b-a) \le \ln\frac{b}{a} \le \frac{1}{a}(b-a).$$

5. Докажите, что для любого натурального числа n выполняются неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

6. Докажите, что $2 < e < 4$.

7. Докажите, что $2{,}5 < e < 3$.

8. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ сходится (см. задачу 10.13) и

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

10.29. Производная функции $f(x) = \log_a x$ вычисляется по формуле $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln a}$; производная показательной функции $f(x) = a^x$ вычисляется по формуле $f'(x) = a^x \ln a$.

Вычислите производные следующих функций:

1. $f(x) = e^{3x}$.
2. $f(x) = \dfrac{x}{2^x}$.
3. $f(x) = x^2 \ln x$.
4. $f(x) = e^{x^2-2x}$.
5. $f(x) = \ln\ln x$.
6. $f(x) = \log_2 \sin x$.

10.30. Для того чтобы вычислить производную функции вида $f(x) = u(x)^{v(x)}$, удобно представить эту функцию в виде $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$; функцию вида $f(x) = \log_{v(x)} u(x)$ удобно представить в виде $f(x) = \dfrac{\ln u(x)}{\ln v(x)}$.

Вычислите производные следующих функций:

1. $f(x)=x^x$.
2. $f(x)=x^{\sin x}$.
3. $f(x)=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$.
4. $f(x)=\log_x 2$.
5. $f(x)=\log_{\cos x}\sin x$.
6. $f(x)=(\ln x)^{\log_x \ln x}$.

10.31. Постройте графики следующих функций:

1. $f(x)=e^x-x$.
2. $f(x)=x-\ln x$.
3. $f(x)=x^2e^{-x}$.
4. $f(x)=x\ln x$.

10.32. Для каждого значения a найдите число корней следующих уравнений:

1. $e^x=ax$.
2. $\log_a x=x$.
3. $\ln x=x^2-x+a$.

4*. $\log_a x=a^x$.

10.33. *Доказательство неравенств.* Докажите неравенства:

1. Если $x>0$, то $1+x<e^x<1+x+\dfrac{x^2}{2}$.
2. Если $x>0$, то $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}<e^x<\dfrac{x^{n+1}e^x}{(n+1)!}+\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{x^k}{k!}$.
3. $2{,}71<e<2{,}73$.
4. Если $x>0$, то $x-\dfrac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x$.
5. Если $x>0$, то $\sum\limits_{k=1}^{2n}\dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}<\ln(1+x)<\sum\limits_{k=1}^{2n-1}\dfrac{(-1)^{k+1}x^k}{k}$.
6. Если $a>b\geq e$, то $\dfrac{\ln a}{a}<\dfrac{\ln b}{b}$.
7. Если $a>b\geq 1$ и $c>0$, то $\log_a b<\log_{a+c}(b+c)$.
8. $\pi^e<e^\pi$.

10.34. *Доказательство неравенств по индукции.* Оценки для числа e (см. задачи 10.28 и 10.33) бывают полезны при доказательстве неравенств по индукции. Пусть n — натуральное число. Докажите следующие неравенства:

1. $(n!)^2>n^n$ $(n\geq 2)$.

2. $\dfrac{(2n)!}{(n!)^2} < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n$ $(n \geq 6)$.

3. $\left(\dfrac{n}{2}\right)^n > n!$ $(n \geq 6)$.

4. $\left(\dfrac{n}{e}\right)^n < n!$.

5. $1 \cdot 4 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (3n-1) > n^n$ $(n \geq 3)$.

6*. $(n!)! \geq ((n-1)!)^{n!}$.

10.35. *Иррациональность e.*

1. Натуральные числа p, q, n таковы, что

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{3}{(n+1)!}.$$

Докажите, что $n \leq q$.

2. Докажите, что e — иррациональное число.

§ 6. Приложения интеграла

10.36. *Нахождение функции по ее производной.* Для того чтобы задача нахождения функции по ее производной имела единственное решение, следует наложить на эту функцию дополнительные ограничения. Чаще всего задают значение искомой функции в некоторой точке (если область определения функции распадается на несколько промежутков, то следует задать по одному из ее значений в каждом из промежутков).

Найдите функции, удовлетворяющие условиям:

1. $f'(x) = x^2$, $f(2) = 1$.

2. $f'(x) = e^{-x}$, $f(0) = -2$.

3. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$, $f(e^2) = 1$, $f(-e^2) = 2$.

4. $f'(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$, $f(-2) = 1$, $f(0) = 1$, $f(2) = 1$.

10.37. *Вычисление площадей.* Если функция f интегрируема на отрезке $[a;b]$ и все ее значения на этом отрезке неотрицательны, то площадь *подграфика* этой функции, т. е. множества точек $(x;y)$ координатной плоскости, задаваемого условиями $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$, равна $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a;b]$ и во всех точках этого отрезка выполнено неравенство $f(x) \geq g(x)$, то площадь фигуры, задаваемой условиями $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$, равна $\int\limits_a^b (f(x) - g(x))\,dx$.

Найдите площади фигур, задаваемых следующими условиями:

1. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 2, \\ 0 \leq y \leq x^2 + 1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq \dfrac{1}{1+x^2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi, \\ 0 \leq y \leq \sin x. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x \geq 0, \\ \arcsin x \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

5. $0 \leq y \leq 1 - x^2$.

6. $x^2 - x - 5 \leq y \leq x - 2$.

7. $\begin{cases} y \geq x^2, \\ x \geq y^2. \end{cases}$

8. $\begin{cases} y \geq \dfrac{1}{x^2}, \\ 0 < x \leq y \leq 2. \end{cases}$

9. $x^2 - \pi x \leq y \leq \sin x$.

10. $|x-1| \leq y \leq 1 + 2x - x^2$.

11. Докажите, что площадь параболического сегмента (см. задачу 10.11) с основанием a и высотой h равна $\frac{2}{3}ah$.

12. Парабола $y = x^2 - x - 2$ касается сторон некоторого угла в точках с абсциссами -1 и 3. Найдите площадь фигуры, состоящей из всех точек внутри или на границе этого угла, координаты которых удовлетворяют условию $y \leq x^2 - x - 2$.

13. Парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается сторон угла. Докажите, что прямая, проходящая через вершину угла и перпендикулярная оси абсцисс, разбивает на две равновеликие части фигуру, состоящую из всех точек внутри или на границе этого угла, координаты которых удовлетворяют условию $y \leq ax^2 + bx + c$.

10.38. *Максмимум и минимум площади.*

1*. Через точку, лежащую на параболе $y = x^2$, проведена прямая $y = ax + b$, перпендикулярная касательной к параболе в этой точке.

Какую наименьшую площадь может иметь фигура, задаваемая условием $x^2 \le y \le ax+b$?

2. При каком положительном a площадь фигуры, задаваемой условием

$$\begin{cases} a \le x \le 2a, \\ 0 \le y \le \dfrac{6}{x^2}+x, \end{cases}$$

принимает наибольшее возможное значение?

3*. Точка A с координатами $(x_0;y_0)$ такова, что $y_0 > x_0^2$. Для каждого вещественного числа a через $S(a)$ обозначим площадь фигуры, задаваемой условием $x^2 \le y \le a(x-x_0)+y_0$. Докажите, что если $S(a_0)$ — наименьшее значение функции S, то прямая $y = a_0(x-x_0)+$ $+y_0$ пересекает параболу $y=x^2$ в точках, симметричных относительно точки A.

10.39. Представление об интеграле от неотрицательной функции как площади подграфика этой функции иногда бывает полезным при нахождении интегралов и первообразных и доказательстве свойств первообразных.

1. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

2. Найдите первообразную функции $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

3. Вычислите $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,dx$.

4. Найдите первообразную функции $f(x) = \arcsin x$.

5. Вычислите $\displaystyle\int_1^e \ln x\,dx$.

6. Найдите первообразную функции $f(x) = \ln x$.

7. a, b — положительные числа, $a \le b$. Докажите, что

$$\ln\frac{b}{a} \le \frac{b-a}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

8. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ выполнены неравенства

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < \ln n < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

9. Докажите, что для любого натурального $n \geq 3$ выполнено неравенство

$$\ln n < \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{n+1}{2n}.$$

10*. Взаимно обратные возрастающие функции f и g определены на $[0; +\infty)$. Докажите, что если $f(0) = 0$, то при всех положительных a и b выполнено неравенство

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(x)\,dx \geq ab.$$

11. a, b, p, q — положительные числа, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Докажите, что $\dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} \geq ab$.

12. Докажите неравенства

$$9 < \int_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx + \int_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx < 9{,}0001.$$

13. a, b — положительные числа. Докажите, что $e^a + (b+1)\ln(b+1) \geq (a+1)(b+1)$.

10.40. *Объем тела вращения.* Объем тела, полученного вращением вокруг оси абсцисс подграфика неотрицательной интегрируемой на отрезке $[a; b]$ функции f, равен

$$\pi \int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Вычислите объемы следующих тел.

1. Тело получено вращением вокруг оси абсцисс фигуры, задаваемой условием $0 \leq y \leq 1 - x^2$.

2. Тело получено вращением вокруг оси ординат фигуры, задаваемой условием $0 \leq y \leq 1 - x^2$.

3. Тело получено вращением вокруг прямой $y = 10$ фигуры, задаваемой условием $0 \le y \le 6 - x - x^2$.

4. Тело получено вращением вокруг оси абсцисс фигуры, задаваемой условием

$$\begin{cases} 0 \le x \le \pi, \\ 0 \le y \le \sin x. \end{cases}$$

5. Тело (тор) получено вращением круга с радиусом r вокруг оси, лежащей в плоскости круга и отстоящей от его центра на расстояние R $(R > r)$.

10.41. *Объем как интеграл от площади сечения.* Пусть $[a;b]$ — проекция некоторого тела на ось абсцисс. Для произвольной точки x из отрезка $[a;b]$ обозначим через $S(x)$ площадь сечения этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку x. Тогда если функция S интегрируема на отрезке $[a;b]$, то объем данного тела равен $\int_a^b S(x)dx$.

1. Найдите объем тела, являющегося объединением всех квадратов, удовлетворяющих следующим условиям: плоскость квадрата перпендикулярна оси ординат, две противоположные вершины квадрата лежат на параболе $y = x^2$, центр квадрата принадлежит отрезку $[0;1]$ оси ординат.

2. Найдите объем тела, являющегося объединением всех кругов, удовлетворяющих следующим условиям: плоскость круга перпендикулярна оси абсцисс, граница круга пересекает ось абсцисс, центр круга лежит на окружности $x^2 + y^2 = 1$.

3. Дан круг с радиусом R, прямая l, лежащая в плоскости круга, и положительное число h. Найдите объем тела, являющегося объединением всех параболических сегментов (см. задачу 10.11), удовлетворяющих следующим условиям: плоскость сегмента перпендикулярна плоскости круга, высота сегмента равна h, основание сегмента — хорда данного круга, параллельная прямой l.

4. l_1 и l_2 — взаимно перпендикулярные пересекающиеся прямые, R — положительное число. Найдите объем тела, состоящего из всех точек пространства, отстоящих от каждой из прямых l_1, l_2 на расстояние не больше R.

5. Радиус основания прямого кругового цилиндра равен R, высота цилиндра равна h $(h \ge R)$. Плоскость, проходящая через две диаме-

трально противоположные точки одного из оснований цилиндра и образующая с плоскостью основания угол 45°, разбивает цилиндр на две части. Найдите объем каждой из этих частей.

6. Найдите объем общей части двух одинаковых наклонных круговых цилиндров с радиусом основания R и высотой h, верхние основания которых совпадают, а нижние — касаются.

10.42. *Физические приложения интеграла.*

1. Точка движется по оси абсцисс таким образом, что скорость ее в произвольный момент времени t задается формулой $v(t) = \cos(t + \frac{\pi}{4})$. Найдите положение точки в момент $t = \frac{\pi}{2}$, если в момент $t = \frac{\pi}{4}$ она имела абсциссу -1.

2. Квадратная пластина со стороной l погружена в воду таким образом, что плоскость пластины перпендикулярна поверхности воды, а верхнее основание находится на поверхности. Найдите силу давления воды на одну из боковых поверхностей пластины (атмосферное давление не учитывать).

3. Найдите силу гравитационного взаимодействия между расположенными на одной прямой материальной точкой массы m и однородным стержнем длины l и массы M. Расстояние от точки до ближайшего конца стержня равно c.

4. Найдите количество теплоты, выделяемого переменным синусоидальным током $I(t) = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$ в течение одного периода времени в проводнике с сопротивлением R.

5. Найдите кинетическую энергию однородного стержня длины l и массы m, вращающегося в горизонтальной плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг вертикальной оси, проходящей через один из концов стержня.

6. Найдите кинетическую энергию однородного диска радиуса R и массы M, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр диска и перпендикулярной его плоскости.

7. Из цистерны, имеющей форму прямого кругового конуса с радиусом основания R и высотой H, требуется выкачать воду с помощью насоса, расположенного в вершине конуса (цистерна стоит на основании). Найдите наименьшую работу по выкачиванию воды из полной цистерны.

8. Размеры пирамиды Хеопса приблизительно таковы: высота — 140 м, ребро основания (квадрата) — 200 м. Плотность камня, из ко-

торого она сделана, приближенно $2{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3. Найдите работу по преодолению силы тяжести, совершенную при постройке пирамиды Хеопса.

10.43. *Уравнения показательного роста.* Так называют дифференциальные уравнения вида $y' = ky$, где k — вещественное число, не равное нулю. Решением такого уравнения называют любую дифференцируемую на всей числовой оси функцию f, такую, что $f'(x) = kf(x)$ при всех x. Все решения уравнения $y' = ky$ задаются формулой $f(x) = Ce^{kx}$, где C — вещественное число.

Найдите решения уравнений показательного роста, удовлетворяющие условиям:

1. $y' = 2y$, $y = 1$ при $x = 2$.
2. $y' + 3y = 0$, $y = e$ при $x = -1$.
3. $y' - 5y = 0$, $y = 0$ при $x = \pi$.

10.44. *Уравнения показательного роста* (продолжение). Процессы, описанные в следующих задачах, подчиняются уравнениям показательного роста.

1. Период полураспада урана U^{235} равен $4{,}5 \cdot 10^9$ лет. Через сколько лет останется 99,99% исходного количества U^{235}?

2. В начальный момент времени в питательной среде имелось N_0 бактерий, а через 1 секунду — N_1 бактерий. Известно, что скорость размножения бактерий при достаточном запасе пищи пропорциональна их количеству. Через какое время количество бактерий достигло $10N_0$?

3. Население некоторой страны к концу 1990 года составляло 20,3 миллиона, а к концу 1998 года — 22,3 миллиона. Предполагая, что скорость роста численности населения пропорциональна численности населения, определите, сколь велика будет численность населения этой страны к концу 2010 года.

4. Найдите дифференцируемую функцию, определенную на всей числовой оси, если известно, что ее график проходит через точку $(2;3)$, а касательная к графику в любой точке A пересекает ось абсцисс в такой точке B, так что разность абсцисс точек B и A равна 1.

5. Точка движется в координатной плоскости так, что если $(x;y)$ — ее координаты в произвольный момент времени, то в тот же момент $(x;-y)$ — координаты ее вектора скорости. В момент $t = 0$ точка

имела координаты $(1;2)$. Может ли она в какой-нибудь момент времени иметь координаты $(3;1)$?

10.45. В этой серии задач, как и в предыдущей, требуется найти функции, удовлетворяющие нескольким условиям, одно из которых приводит к *дифференциальному уравнению*, т. е. уравнению относительно неизвестной функции, включающему ее производную.

1. Найдите дифференцируемую на промежутке $[0;+\infty)$ функцию f, если известно, что ее график не пересекает ось абсцисс и проходит через точку $(1;3)$, а касательная к графику в любой точке A пересекает оси координат в таких точках B и C, что $|AB| = |AC|$.

2. Найдите неотрицательную непрерывную на промежутке $[0;+\infty)$ функцию f, если известно, что для любого неотрицательного числа x площадь подграфика функции f на отрезке $[0;x]$ вдвое меньше площади треугольника с вершинами $(0;0)$, $(x;0)$, $(x;f(x))$.

3. Найдите дифференцируемую на промежутке $(-\infty;0)$ функцию f, если известно, что ее график не пересекает ось абсцисс и проходит через точку $(-1;1)$, а угловой коэффициент касательной к графику в любой точке равен квадрату ординаты точки касания.

4. Найдите дифференцируемую на промежутке $[1;+\infty)$ функцию f, если известно, что ее график не пересекает ось абсцисс и проходит через точку $(1;1)$, а касательная к графику в любой точке A пересекает ось абсцисс в такой точке B, что разность абсцисс точек B и A равна отношению абсциссы точки A к ординате этой точки.

5. Материальная точка массой в 1 г движется прямолинейно под действием силы, прямо пропорциональной времени, отсчитываемому от момента $t = 0$, и обратно пропорциональной скорости движения точки. В момент времени $t = 10$ с скорость равнялась $0,5$ м/с, а сила — $4 \cdot 10^{-5}$ Н. Какова будет скорость точки через одну минуту после начала движения?

6. Пуля входит в доску толщиной 10 см со скоростью 200 м/с, а вылетает из доски, пробив ее, со скоростью 80 м/с. Считая, что сила сопротивления доски пропорциональна квадрату скорости движения, найдите время движения пули через доску.

ЧАСТЬ 2. УКАЗАНИЯ И РЕШЕНИЯ

Глава 1

1.1. 1. Пусть в группе n человек. Если первый человек — правдивый, то второй — лжец, тогда третий — правдивый, четвертый — лжец и так далее, n-й — лжец, откуда следует, что n — четно. Если же первый человек — лжец, то второй — правдивый, третий — лжец, четвертый — правдивый и так далее, n-й — правдивый, откуда n — четно.

2. Обратите внимание на следующие два соображения. На вопрос «Вы политик?» всегда следует отрицательный ответ. Если один из жителей говорит о другом, что тот политик, из этих двоих жителей ровно один — политик.

1.3. Верные утверждения: 1, 4, 7, 8, 9.

1.4. Составьте таблицы истинности.

1.9. 1. Если $y = 1$, то импликация истинна при $x > 1$, если $y \neq 1$, то импликация истинна при любом значении x.

2. При любом значении y найдется x, такой, что $x < y$, но $x^2 \geq 1$.

3. Надо найти такой промежуток $(-\infty; y)$, что любое число x из этого промежутка удовлетворяло бы неравенству $x^2 > 1$.

4. При $y = \pm 1$ импликация истинна независимо от значения x.

5. Поскольку $\exists x (x \geq 1)$, то утверждение истинно независимо от значения y.

6. Рассмотрите $y = 0$.

7. Если $x \leq 0$, то для $y = 0$ нужного значения z не существует.

1.10. 1. Подставьте 2 вместо x.

2. Подставьте -3 вместо x.

3. $n = 1$.

1.11. 1. Проверьте $x = 2$.

2. Корни уравнения — ± 1.

3. Правому множеству принадлежит число $\frac{3}{2}$, а левому — не принадлежит.

1.12. 6. Обозначим первое уравнение $p(x) = 0$, второе — $q(x) = 0$. Если x_0 — корень первого и корень второго уравнений, то x_0 — корень уравнения $2q(x) - p(x) = 0$. Решая получающееся уравнение $7x^2 - 7 = 0$, выясняем, что множество общих корней первого и второго уравнений является подмножеством множества $\{-1, 1\}$. Проверкой убеждаемся, что -1 — единственный общий корень данных уравнений.

1.17. 1. Непересекающиеся множества A и B являются подмножествами множества C.

1.21. 4. Воспользуйтесь тем, что существует лишь конечное число различных остатков от деления на данное натуральное число.

6. Докажите, что среди чисел $10, 10^2, 10^3, \ldots, 10^q$ два дают одинаковый остаток при делении на q, и рассмотрите их разность.

8. Докажите сначала утверждение задачи для дробей вида $0,(00\ldots01)$.

1.22. Пусть $0 < \alpha < \beta < 1$, $\alpha = 0,c_1c_2\ldots$ и пусть c_k — первая цифра числа α, меньшая соответствующей цифры числа β. Тогда рациональное число $r = 0,c_1c_2\ldots c_{k-1}(c_k+1)00\ldots$ находится между α и β. Если s — рациональное число между $\frac{\alpha}{\sqrt{2}}$ и $\frac{\beta}{\sqrt{2}}$, то $s\sqrt{2}$ — прррациональное число между α и β.

1.23. В каждой из задач 1 — 4 покажите, что данная десятичная дробь содержит сколь угодно длинные отрезки, состоящие только из нулей.

6. Покажем, что последовательность d_n не является периодической. Предположим противное. Пусть p — длина периода, т. е. такое натуральное число, что d_n и d_{n+p} совпадают для всех достаточно больших n. Представим p в виде $p = 2^s q$, где q нечетно. Выберем натуральное t так, что $t \geq s+2$ и d_n, где $n = 2^t(q+2)$, находится в периодической части. Так как n можно получить из $q+2$ умножением на степень двойки, то d_n и d_{q+2} совпадают. С другой стороны, d_n и d_{n+p} совпадают. Имеем $n+p = 2^t(q+2)+2^s q = 2^s(2^{t-s}(q+2)+q)$.

Поэтому $d_n = d_{n+p} = d_m$, где $m = 2^{t-s}(q+2)+q$. Так как $t-s \geq 2$, то число $2^{t-s}(q+2)$ кратио 4 и потому $d_m = d_q$. Таким образом, имеем следующую цепочку неравенств: $d_{q+2} = d_n = d_{n+p} = d_m = d_q$. Вместе с тем q и $q+2$ являются последовательными нечетными числами и потому $d_{q+2} \neq d_q$. Противоречие.

1.24. 1. Так как $2,30114 \leq \alpha \leq 2,30115$ и $0,23761 \leq \beta \leq 0,23762$, то $2,53875 \leq \alpha+\beta \leq 2,53877$. Следовательно, $\alpha+\beta = 2,5387\ldots$

1.25. 1. Если $0 < x < 1$, то $x < \sqrt{x} < 1$.

2. $\sqrt{26}-5 = \dfrac{1}{\sqrt{26}+5}$.

3. $(5+\sqrt{26})^{20} + (5-\sqrt{26})^{20}$ — целое число.

1.26. 1. $\sqrt{2}+\sqrt{3} \geq \sqrt{11} \Leftrightarrow 2+2\sqrt{6}+3 \geq 11 \Leftrightarrow 2\sqrt{6} \geq 6 \Leftrightarrow 6 \geq 9$. Следовательно, $\sqrt{2}+\sqrt{3} < 11$.

1.27. 1. Пусть $a = \sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогда $a^2 = 5+2\sqrt{6}$, $\sqrt{6} = \dfrac{a^2-5}{2}$. Если a — рациональное число, то $\sqrt{6}$ — рациональное число.

1.28. 2. $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6. $\dfrac{2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{(2\sqrt{3}+\sqrt{6})(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5}-\sqrt{3})(\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{6+\sqrt{2}+2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}$.

1.29. 1. Можно считать, что $x \geq y$. Тогда $\sqrt{7-2\sqrt{10}} = \sqrt{x} - \sqrt{y} \Leftrightarrow 7-2\sqrt{10} = x+y-2\sqrt{xy}$. Так как $\sqrt{10}$ — иррациональное число, то последнее равенство возможно лишь при $x+y=7$, $xy=10$, откуда $x=5$, $y=2$.

3. Пусть $x = \dfrac{2207+\sqrt{2209\cdot 2205}}{2} = \dfrac{2207+47\cdot 21\sqrt{5}}{2}$. Тогда $4x = 4414+2\cdot 47\cdot 21\sqrt{5} = (47+21\sqrt{5})^2$, откуда $2\sqrt{x} = 47+21\sqrt{5}$, $4\sqrt{x} = 94+2\cdot 21\sqrt{5} = (7+3\sqrt{5})^2$, $2\sqrt[4]{x} = 7+3\sqrt{5}$, $4\sqrt[4]{x} = 14+2\cdot 3\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})^2$, $2\sqrt[8]{x} = 14+2\cdot 3\sqrt{5} = (3+\sqrt{5})^2$, $\sqrt[8]{x} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1.32. 8. Запишем x и y в виде суммы целой и дробной частей: $x = n+\alpha$, $y = m+\beta$, где $0 \leq \alpha,\beta < 1$. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha \geq \beta$. Рассмотрим четыре случая: $\alpha,\beta < \dfrac{1}{2}$;

$\alpha \geq \frac{1}{2}, \beta < \frac{1}{2}, \alpha + \beta < 1$; $\alpha \geq \frac{1}{2}, \beta < \frac{1}{2}, \alpha + \beta \geq 1$; $\alpha, \beta \geq \frac{1}{2}$. Тогда в первом случае доказываемое неравенство превращается в равенство $2n + 2m = 2n + 2m$, во втором — в строгое неравенство $2n + 2m + 1 > 2n + 2m$, в третьем — в равенство $2n + 2m + 1 = 2n + 2m + 1$, в четвертом — в строгое неравенство $2n + 2m + 2 > 2n + 2m + 1$.

10. Поделим x на n с остатком. Пусть $x = qn + y$, где $0 \leq y < n$. Тогда исходное равенство равносильно равенству

$$\left[\frac{y}{n}\right] + \left[\frac{y+1}{n}\right] + \left[\frac{y+2}{n}\right] + \ldots + \left[\frac{y+n-1}{n}\right] = [y].$$

Проверьте, что если $k \leq y < k + 1$, то и левая и правая части последнего равенства равны k.

11. Предположим, что утверждение задачи неверно. Это означает, что для некоторого неотрицательного целого числа n нашлись бы такие целые числа k и l, что выполнялись бы неравенства $kx < n < n + 1 < (k+1)x$, $ly < n < n + 1 < (l+1)y$ (правые неравенства пишем строгими потому, что равенства невозможны из-за иррациональности x и y). Из этих неравенств следует, что $\frac{k}{n} < \frac{1}{x}$, $\frac{l}{n} < \frac{1}{y}$, откуда $\frac{k}{n} + \frac{l}{n} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ или $k + l < n$. Аналогично, $\frac{k+1}{n+1} > \frac{1}{x}$, $\frac{l+1}{n+1} > \frac{1}{y}$, откуда $\frac{k+1}{n+1} + \frac{l+1}{n+1} > \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$ или $k + l + 2 > n + 1$. Получается $k + l < n < k + l + 1$, что невозможно для целых чисел.

Примечание. Имеет место более сильный факт: для любого натурального числа n указанное в условии k единственно. Действительно, из предположения $n = [k_1 x] = [k_2 y]$ следует, что должны быть выполнены неравенства $n < k_1 x < n + 1$ и $n < k_2 y < n + 1$, т. е. $\frac{k_1}{n+1} < \frac{1}{x} < \frac{k_1}{n}$ и $\frac{k_2}{n+1} < \frac{1}{y} < \frac{k_2}{n}$. Сложив эти неравенства и использовав соотношение $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$, получим $\frac{k_1 + k_2}{n+1} < 1 < \frac{k_1 + k_2}{n}$, откуда $n < k_1 + k_2 < n + 1$, чего быть не может.

1.33. 5. Представьте x в виде суммы целой и дробной частей: $x = n + \alpha$ и рассмотрите четыре случая: $\alpha \in \left[0; \frac{1}{3}\right)$, $\alpha \in \left[\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right)$, $\alpha \in \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right)$, $\alpha \in \left[\frac{2}{3}; 1\right)$.

1.34. 1. Пусть $\varphi(0) = a$. Тогда $\varphi(1) = a + 1$ или $\varphi(1) = a - 1$. Докажите, что в первом случае $\varphi(x) = a + x$ при всех x, а во втором случае $\varphi(x) = a - x$ при всех x. Воспользуйтесь тем, что $|\varphi(x) - a| = |x|$ и $|\varphi(x) - \varphi(1)| = |x - 1|$.

2. Такое перемещение должно задаваться формулой вида $\varphi(x) = a - x$, где a — рациональное число. Тогда $\varphi(\sqrt{2}) = a - \sqrt{2} \neq \sqrt{2}$. Пусть r — рациональное число между $a - \sqrt{2}$ и $\sqrt{2}$. Покажите, что как предположение $\varphi(r) > \sqrt{2}$, так и предположение $\varphi(r) > \sqrt{2}$ приводят к противоречию.

3. Возьмите в качестве A_1 множество всех рациональных чисел из промежутков $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$, $[-3 - \sqrt{2}; -3 + \sqrt{2}]$, $[-6 - \sqrt{2}; -6 + \sqrt{2}]$, …, а в качестве B_1 — множество всех рациональных чисел из промежутков $[3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}]$, $[6 - \sqrt{2}; 6 + \sqrt{2}]$, $[9 - \sqrt{2}; 9 + \sqrt{2}]$, …

1.35. 2. $\frac{1}{bd} = \frac{c}{d} - \frac{a}{b} = \left(\frac{c}{d} - \frac{e}{f}\right) + \left(\frac{e}{f} - \frac{a}{b}\right) \geq \frac{1}{df} + \frac{1}{bf} = \frac{b+d}{bdf}$, откуда $b + d \leq f$. Так как дробь $\frac{e}{f}$ не входит в последовательность F_{n-1}, то $b + d = f$ и потому $\frac{c}{d} - \frac{e}{b+d} = \frac{1}{df}$. Отсюда легко получить, что $e = a + c$.

Глава 2

2.2. Постройте график фуикции f. Чтобы найти множество $f(A)$, изобразите множество A на оси абсцисс, восставьте перпендикуляр в каждой точке множества A и спроектируйте точки пересечения этих перпендикуляров с графиком на ось ординат. Чтобы найти множество $f^{-1}(B)$, изобразите множество B на оси ординат, восставьте перпендикуляр в каждой точке множества B и спроектируйте точки пересечения этих перпендикуляров с графиком на ось абсцисс.

2.3. При любом значении a график функции f проходит через точку с координатами $(0;1)$. При $a > 0$ функция f строго возрастает и наибольшего значения достигает на правом конце промежутка; при $a < 0$ функция f строго убывает и наибольшего значения достигает на левом конце промежутка.

2.4. 1. Рассмотрите случаи $a = -\frac{1}{2}$, $a > -\frac{1}{2}$, $a < -\frac{1}{2}$.

2. Неравенство $x^2 \leq x$ справедливо для всех x из промежутка $[0,1]$, так что остается исследовать неравенство $ax < 2$ для $x \in [-3,0) \cup (1,2)$. Рассмотрите случаи $a = 0$, $a > 0$, $a < 0$.

3. Неравенство $x^2 > \frac{1}{4}$ справедливо для $x \in \left[-1,-\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2},1\right]$, так что остается исследовать неравенство $(2a-3)x < 5$ для $x \in \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$. Рассмотрите случаи $2a-3=0$, $2a-3>0$, $2a-3<0$.

2.6. — 2.11. Разбивайте числовую ось на промежутки, на каждом из которых все участвующие в задаче кусочно-линейные функции линейны, и исследуйте задачу на каждом из этих промежутков.

2.12. 5. Если $y < 0$, то $|x| = -1$, что невозможно; если $y = 0$, то $x = 0$; если $y > 0$, то $|x| = 1$, откуда $x = \pm 1$.

2.13. 5. Прямые $x+y+1=0$ и $x-2y=0$ разбивают плоскость на четыре области (рис. 4). Так как в области I выполнены неравенства $y \geq -x-1$ и $y \geq \frac{1}{2}x$, то неравенство принимает вид $x+y+1+2y-$ $-x \leq 4 \Leftrightarrow y \leq 1$, так что в искомую фигуру входят те точки области I,

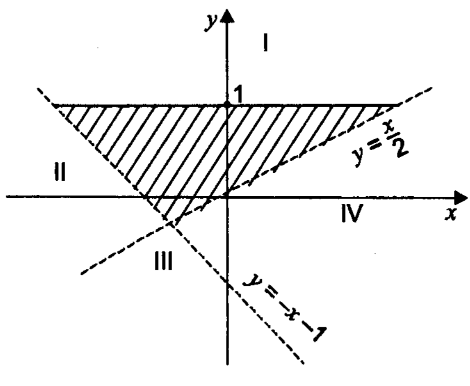

Рис. 4

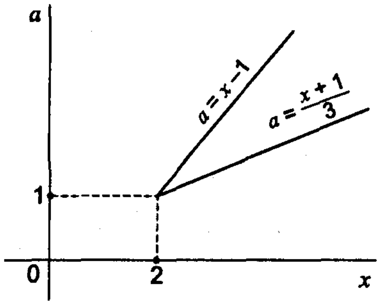

Рис. 5

которые лежат на прямой $y = 1$ или ниже нее. Аналогично рассматриваются области II, III, IV.

2.14. 1. Откладывая на оси абсцисс значения x, а на оси ординат — значения a, найдем на координатной плоскости фигуру, задаваемую уравнением (рис. 5).

Решения уравнения при заданном значении a — это абсциссы тех точек полученной фигуры, ордината которых равна a. Видим, что при $a < 1$ уравнение не имеет решений, при $a = 1$ у него один корень $x = 2$, а при $a > 1$ уравнение имеет два корня, которые находятся из уравнений $a = x - 1$ и $a = \dfrac{x+1}{3}$; $x = a + 1$ и $x = 3a - 1$.

3. Задачу можно переформулировать так: при каких значениях a неравенство $2|x + a - 1| - |2x - a| < 2$ выполняется при всех x. Изобразив фигуру, задаваемую этим неравенством, нетрудно выяснить, при каких значениях a прямая, перпендикулярная оси ординат и проходящая через точку с ординатой a, целиком помещается в полученной фигуре.

2.17. 6. $\dfrac{1-x}{3x+2} = \dfrac{\frac{5}{3} - \left(x + \frac{2}{3}\right)}{3\left(x + \frac{2}{3}\right)} = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{5}{9\left(x + \frac{2}{3}\right)}$, и поэтому график функции $y = \dfrac{1-x}{3x+2}$ получается параллельным переносом гиперболы $y = \dfrac{5}{9x}$ на вектор с координатами $\left(-\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

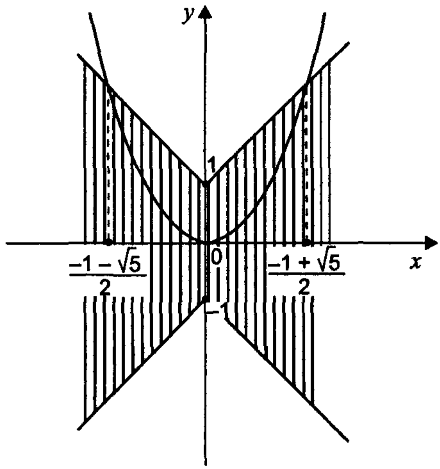

Рис. 6

2.25. 2. Произведем параллельный перенос координатных осей так, чтобы точка C стала началом координат. Тогда если $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — координаты точек A и B, то коэффициенты a и b искомой квадратной функции $y = ax^2 + bx$ задаются системой уравнений $Ax_1^2 + bx_1 = y_1$, $ax_2^2 + bx_2 = y_2$.

2.27. 4. Положив $t = x^2 - x$ и учтя, что область значений этой квадратной функции — промежуток $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right)$, придем к задаче нахождения области значений квадратной функции $y = t - 3^2 - 2t + 1$ при $t \geq -\frac{1}{4}$.

2.29. Корни уравнения $x^2 + px + q = 0$ — это абсциссы точек пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = -px - q$. На рис. 6 изображена фигура, образованная всеми прямыми $y = -px - q$, где $-1 \leq p \leq 1$, $-1 \leq q \leq 1$.

2.30. См. решение 2.13.

2.31. 2. $x^2 + ax + y^2 + by = c \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = c + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}$.

2.33. 3. См. решение 2.14. Построим на плоскости $(x; a)$ параболы $a = x^2 + x$ и $a = -x^2 + 2x + 1$ (рис. 7).

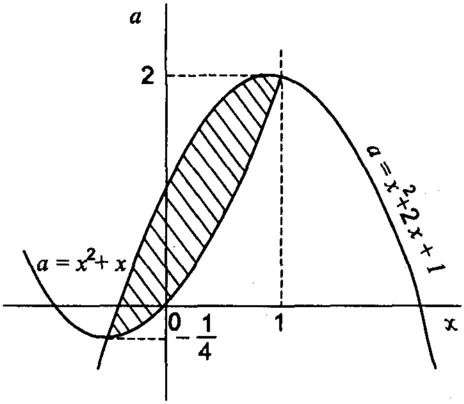

Рис. 7

Данной системе удовлетворяют координаты точек заштрихованной части плоскости. Теперь легко убедиться, что при $a < -\frac{1}{4}$ и при $a > 2$ система не имеет решений. Если $-\frac{1}{4} \le a \le 2$, то решения системы образуют отрезок $[x_1; x_2]$, где x_1 — меньший корень уравнения $x^2 + x - a = 0$, а x_2 — больший корень уравнения $x^2 - 2x + (a-1) = 0$, т. е. $x_1 = \frac{-1-\sqrt{1+4a}}{2}$, $x_2 = 1 + \sqrt{2-a}$.

2.34. 1. Сложите уравнения парабол.

2.38. 3. $a + b + c = f(1)$.

4. $a - b + c = f(-1)$.

5. Выясните знак левой части при $x = a$, $x = b$, $x = c$.

2.39. 2. Абсциссы точек A и B — это корни уравнения вида $x^2 = kx + b$, где b — ордината точки C.

2.40. Если в каждой из задач 1 — 3 обозначить через $f(x)$ левую часть уравнения или неравенства, то условия на параметр запишутся следующим образом: 1. $af(0) < 0$. 2. $af(1) < 0$. 3. $f(1) \le 0$ и $f(2) \le 0$.

2.41. См. решение 2.40. Если $f(x)$ — левая часть, а D — ее дискриминант, то условия на a здесь записываются так:

1. $D > 0$, $f(3) > 0$, $3 > -\frac{a}{2}$.

3. $a > 0$, $f(-1) \le 0$, $f(1) \le 0$; или $a = 0$; или $a < 0$, $D \le 0$; или $a < 0$, $D > 0$, $f(-1) \le 0$, $-1 \ge -\dfrac{a+1}{a}$; или $a < 0$, $D > 0$, $f(1) \le 0$, $1 \le -\dfrac{a+1}{a}$.

2.42. 3. $\dfrac{x^2 - 10x + 7}{2x^2 - 1} = a \Leftrightarrow \begin{cases} (2a-1)x^2 + 10x - (a+7) = 0, \\ 2x^2 - 1 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2a-1)x^2 + 10x - (a-7) = 0$. Последнее уравнение имеет вещественные корни, если $2a - 1 = 0$ или $25 + (2a-1)(a+7) \ge 0$.

2.43. 3. Обратите внимание на то, что система уравнений $x + y = a - 1$, $xy = a^2 - 7a + 14$ имеет вещественные решения не при всех значениях a.

2.45. Докажите сначала следующее утверждение: если $-2 \le a < b \le 2$, то отрезок $[-2; 2]$ содержит два отрезка, на каждом из которых функция $f(x) = x^2 - 2$ принимает по одному разу все значения от a до b. Выведите отсюда последовательно, что отрезок $[-2; 2]$ разбивается на два отрезка, на каждом из которых функция $f(x)$ принимает все значения от -2 до 2, на четыре отрезка, на каждом из которых функция $f(f(x))$ принимает все значения от -2 до 2, и, наконец, на восемь отрезков, на каждом из которых функция $f(f(f(x)))$ принимает все значения -2 до 2.

2.46. Используя тождество $ax^2 + bx + c = x^2\left(c\dfrac{1}{x^2} + b\dfrac{1}{x} + a\right)$, покажите, что утверждение задачи сводится к доказательству неравенства $|ax^2 + bx + c| \le 2x^2$ при $|x| \ge 1$. Предположив для определенности, что $a \ge 0$, и сравнив параболы $y = ax^2 + bx + c$ и $y = 2x^2 - 1$ при $|x| \le 1$, покажите, что вне этого отрезка $ax^2 + bx + c \le 2x^2 - 1$.

2.47. Дуга, высекаемая на параболе $y = x^2 - \dfrac{1}{2}$ полосой $|x| \le 1$, лежит в полосе $|y| \le \dfrac{1}{2}$. Воспользуйтесь тем, что любая другая парабола $y = x^2 + px + q$ пересекает параболу $y = x^2 - \dfrac{1}{2}$ не более чем в одной точке.

2.48. Покажите, что значения фуикции $y = x^2 + px + q$ в двух соседних целых точках, лежащих по одну сторону от прямой $x = -\dfrac{p}{2}$, различаются не менее чем на 1.

2.49. 3. Если среди данных n чисел с суммой a не все равны между собой, то среди них есть число, меньшее, чем $\frac{a}{n}$, и число, большее, чем $\frac{a}{n}$. Сблизьте эти числа таким образом, чтобы одно из них стало равным $\frac{a}{n}$.

2.50. 3. Сложите неравенства $a^2+b^2 \geq 2ab$, $b^2=c^2 \geq 2bc$, c^2+ $+a^2 \geq 2ac$.

4. Воспользуйтесь предыдущим неравенством.

5. Несколько раз примените неравенство из п. 3.

7. Раскройте скобки и воспользуйтесь неравенством $2a_ia_j \leq a_i{}^2+$ $+a_j{}^2$.

9. Примените неравенство из п. 8 к числам $x=a+b-c$, $y=b+$ $+c-a$, $z=c+a-b$.

11. Возведите обе части неравенства в квадрат.

12. Возведите обе части неравенства в куб.

13. Перемножьте неравенства $a+b-c \geq 3\sqrt[3]{abc}$ и $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq$ $\geq \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$.

14. Раскройте скобки и воспользуйтесь неравенством из п. 13.

17. Приведите неравенство к виду $\frac{1}{S-a_1}+\frac{1}{S-a_2}+\ldots+\frac{1}{S-a_n} \geq$ $\geq \frac{n^2}{n-1}$ и примените неравенство из п. 16 к числам $S-a_1, S-a_2, \ldots,$ $S-a_n$.

19. Для удобства положим $a_{n+1}=a_1$. Можно считать, что a_1 — наибольшее из данных чисел. Пусть a_{i_1} — большее из чисел a_2, a_3; a_{i_2} — большее из чисел a_{i_1+1}, a_{i_1+2}; a_{i_3} — большее из чисел a_{i_2}, a_{i_2+1}, и т. д. Некоторое a_{i_s} окажется равным a_1. Тогда

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_3+a_4}+\ldots+\frac{a_n}{a_1+a_2} \geq \frac{a_1}{2a_{i_1}}+\frac{a_{i_1}}{2a_{i_2}}+\frac{a_{i_2}}{2a_{i_3}}+\ldots\frac{a_{i_{s-1}}}{2a_1},$$

причем в правой сумме по крайней мере $\frac{n}{2}$ слагаемых. Из неравенства, доказанного в п. 18, следует, что эта сумма не менее $\frac{n}{4}$.

20. Примените неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического к числам $1, 2, \ldots, n$.

21. Примените неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического сначала к числам

$$\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{a_1\text{ чисел}},\underbrace{a_2,\ldots,a_2}_{a_2\text{ чисел}},\ldots,\underbrace{a_n,\ldots,a_n}_{a_n\text{ чисел}},$$

а затем к обратным числам.

22. При $m < n$ примените неравенство для среднего арифметического и среднего геометрического к числам

$$\underbrace{1+\alpha,1+\alpha,\ldots,1+\alpha}_{m\text{ чисел}},\ \underbrace{1,1,\ldots,1}_{n-m\text{ чисел}},$$

а при $m > n$ возведите обе части доказываемого неравенства в степень $\frac{n}{m}$ и воспользуйтесь предыдущим неравенством. Неравенства из п. 22 являются частными случаями неравенства Бернулли (см. задачу 10.13).

2.51. В уравнениях из п. 3, 4 воспользуйтесь разложением квадратной функции на множители: $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 — корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

2.52. Все эти уравнения решаются, если сделать удачную замену переменной. Укажем возможные замены:

1. $y = x^2$.
2. $y = x^3$.
3. $y = 2x^2+x-2$.
4. $y = \dfrac{x^2-x-1}{3x-5}$.
5. $y = \dfrac{2x^2-3x+5}{3x+5}$.
6. $y = x+\dfrac{3}{x}$.
7. $y = x+\dfrac{15}{x}$ (разделите на x числитель и знаменатель каждой из дробей).
8. $y = 6x^2-7x$ (перемножьте первую скобку с третьей, а вторую — с четвертой).

9. Приведите уравнение к виду $x^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=1$, вычтите из обеих частей $2x\frac{x}{x+1}$ и положите $y=\frac{x^2}{x+1}$.

2.53. 2. Уравнение однородно относительно $u=(x-2)(x+1)$ и $v=x-1$.

2.54. 3. Разделим обе части уравнения на x^2 ($x=0$ не является корнем уравнения): $2(9x^2+\frac{4}{x^2})-(3x-\frac{2}{x})-25=0$. Положим $y=3x-\frac{2}{x}$. Тогда $y^2=9x^2+\frac{4}{x^2}-12$, откуда $9x^2+\frac{4}{x^2}=y^2+12$, и уравнение сводится к квадратному относительно y.

2.55. 2. Вычтите из левой части уравнения выражение $\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\ldots+a_1\alpha+a_0$ и разложите разность на множители, воспользовавшись тождеством из п. 1.

2.56. 4. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ является корнем данного уравнения, то p — делитель числа -2, q — делитель числа 4, откуда следует, что все возможные значения $\frac{p}{q}$ — это ±1, ±2, $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{1}{4}$. Подстановкой убеждаемся, что $x=\frac{1}{2}$ — корень уравнения. Зная, что $2x-1$ является делителем левой части уравнения, преобразуем ее к виду $4x^3-2x^2+2x^2-x+4x-2=(2x-1)(2x^2+x+2)$.

2.57. 1. Левая часть уравнения представляется в виде $(2x+3)^3+6$.

2. Положив $u=x^2-x-2$, $v=2x+1$, исследуйте уравнение $u^4+v^4=(u+v)^4$.

3. Если $f(x)=x^2+2x-5$, то уравнение можно записать в виде $f(f(x))=x$. Корнями этого уравнения являются оба корня x_1, x_2 уравнения $f(x)=x$. В силу теоремы Безу (см. задачу 2.55) многочлен $f(f(x))-x$ имеет делителями $x-x_1$ и $x-x_2$, а следовательно, и $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+x-5$. Зная это, раскроем скобки и, приведя уравнение к виду $x^4+4x^3-4x^2-17x+10=0$, разложим левую часть на множители: $(x^4+x^3-5x^2)+(3x^3+3x^2-15x)-(2x^2+2x-10)=0\Leftrightarrow(x^2+x-5)(x^2+3x-2)=0$.

2.58. 4. Рассмотрите это уравнение как квадратное относительно a.

2.61. В системах 1 — 3 одно из уравнений позволяет выразить одно неизвестное через другое. В системах 6 — 8 либо есть однородное уравнение (см. задачу 2.53.), либо можно получить однородное уравнение из уравнений системы. Так, в системе 7 можно получить однородное уравнение, умножив первое уравнение на 5, второе — на -3 и сложив получившиеся уравнения. Системы 9 — 11 решаются с помощью замены переменной $u = x + y$, $v = xy$.

12. Сложите уравнения.

13. Система линейна относительно xy, xz, yz.

14. Перемножьте уравнения (при такой операции могут появиться лишние решения, и потому требуется проверка).

15. Из первого уравнения следует, что $x^5 \leq x^2$, $y^5 \leq y^2$.

16. Выведите из первого уравнения, что $|x| = |y|$.

17. Докажите, что $x^2 = y^2 = 1$.

18. Покажите, что $x = y = z$.

19. Из $x+y+z = 3$ следует, что $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 3$.

2.62. Решая иррациональные уравнения, следует иметь в виду, что возведение обеих частей уравнения в квадрат часто приводит к появлению лишних корней. Если обе части уравнения $f(x) = g(x)$ неотрицательны, то оно равносильно уравнению $f^2(x) = g^2(x)$. Часто встречаются уравнения $f(x) = g(x)$, в которых одна из частей, скажем, $f(x)$, неотрицательна, в то время как о знаке другой часто ничего определенного сказать нельзя. Такое уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} f^2(x) = g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Кроме того, при возведении в квадрат обычно исчезает знак радикала, и потому к получающемуся уравнению (или системе) следует добавить условие неотрицательности выражения, стоящего под знаком радикала, хотя часто это условие вытекает из других ограничений. Покажем, как некоторые из данных уравнений сводятся к системе уравнений и неравенств первой и второй степени.

2. $\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = x + 1, \\ x^2 - 5 \geq 0, \\ x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 5 = x + 1, \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$

3. $\sqrt{x+2}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=x^2, \\ x \geq 0, \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$

8. Решая это уравнение, следует иметь в виду, что равенство $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ верно лишь при неотрицательных a и b. Если же $a<0$ и $b<0$, то $\sqrt{ab}=\sqrt{-a}\sqrt{-b}$.

2.63. 2. Положите $y=\sqrt{x-2}$. Тогда $x=y^2+2$.

3. Положите $y=\sqrt[12]{x}$.

4. Положите $y=\sqrt{x+1}$.

5. Равенство $a\sqrt{b}=\sqrt{a^2b}$ верно лишь при $a \geq 0$. Если $a<0$, то $a\sqrt{b}=-\sqrt{a^2b}$.

6. Это уравнение однородно относительно $u=x$, $v=\sqrt{x+5}$ (см. задачу 2.53).

7. Воспользуйтесь равенством $x^2+2=(x+1)+(x^2-x+1)$.

2.64. 2. См. задачу 2.50, п. 3.

5. Так как равенство $\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{x+1}$ не выполняется ни при каком x, то в силу п. 2 данное уравнение равносильно уравнению

$$(x-1)+(x+1)+3\sqrt[3]{x-1}\sqrt[3]{x+1}x\sqrt[3]{2}=2x^3.$$

2.65. В уравнениях 1 — 4 левая часть строго возрастает, а правая постоянна или убывает (в уравнении 2). В уравнении 5 покажите, что левая часть меньше 7 — наименьшего значения правой части.

2.66. Если обе части неравенства $f(x) \leq g(x)$ неотрицательны, то оно равносильно неравенству $f^2(x) \leq g^2(x)$. Если левая часть $f(x)$ неотрицательна, то неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} f^2(x) \leq g^2(x), \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Если правая часть неравенства $f(x) \leq g(x)$ неотрицательна, а левая может менять знак, то те значения x, при которых $f(x)<0$, удовлетворяют неравенству и его можно заменить следующим условием:

$$\left[\begin{array}{l} f^2(x) \leq g^2(x), \\ f(x)<0. \end{array}\right.$$

Знак [, соединяющий неравенства, означает, что множества их решений следует объединить (в то время как знак { требует искать общие решения уравнений или неравенств). Так же как при решении иррациональных уравнений, не забывайте о неотрицательности подкоренных выражений.

4. Неравенство $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2x-2$ равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} 2x-2<0, \\ 3x^2-2x-1 \geq 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} 2x-2 \geq 0, \\ 3x^2-2x-1 \geq (2x-2)^2 \end{cases}.$$

Объединяя промежутки $\left(-\infty; -\dfrac{1}{3}\right]$ — множество решений первой системы и $[1;5]$ — множество решений второй системы, получим ответ.

Возможен и другой подход к решению иррациональных неравенств. Продемонстрируем его на примере неравенства из п. 6. Решим уравнение $x\sqrt{10-x^2} = x^2-6$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2(10-x^2) = (x^2-6)^2, \\ x(x^2-6) \geq 0, \end{cases}$$

решая которую, находим два корня: $x = -\sqrt{2}$, $x = 3$. Эти точки разбивают отрезок $[-\sqrt{10};\sqrt{10}]$ — область определения данного неравенства — на промежутки $[-\sqrt{10};-\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};3)$, $(3;\sqrt{10}]$, на каждом из которых разность $x\sqrt{10-x^2}-(x^2-6)$ сохраняет знак (в точках $-\sqrt{2}$ и 3 эта разность равна нулю). Подставляя в неравенство по одной точке из каждого промежутка (например, $x = -\sqrt{10}$, $x = 0$ и $x = \sqrt{10}$), убеждаемся в том, что все точки промежутка $(-\sqrt{2};3)$ удовлетворяют неравенству $x\sqrt{10-x^2} > x^2-6$, в то время как точки двух других промежутков удовлетворяют неравенству $x\sqrt{10-x^2} < x^2-6$.

8. При $x > 0$ выполнено неравенство $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$, а при $x < 0$ — неравенство $\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$.

Глава 3

3.4. 5. Если a_n — левая часть, а b_n — правая часть доказываемого тождества, то $a_1 = 1-\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$, $b_1 = \dfrac{1}{2}$, $a_{k+1}-a_k = \dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}$,
$b_{k+1}-b_k = \dfrac{1}{2k+1}+\dfrac{1}{2k+2}-\dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}$.

3.5. 1. Если a_n — левая часть, а b_n — правая часть доказываемого неравенства, то $a_3 = \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} > \frac{3}{5}$, $a_{k+1} - a_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} > 0$, в то время как $b_{k+1} - b_k = 0$.

3.6. 5. Пусть a_n — левая часть, а b_n — правая часть доказываемого неравенства. Тогда $a_2 = 4$, $b_2 = 3$ и $a_2 > b_2$. $\frac{a_{k+1}}{a_k} > \frac{b_{k+1}}{b_k} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{(k+1)^{k+1}}{k^k} > \frac{(k+2)^k}{(k+1)^{k-1}} \Leftrightarrow (k^2+2k+1)^k > (k^2+2k)^k$.

3.8. 2. При $n = 1$ получаем верное равенство $a_1 = a_2$. Пусть $a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1} = a_{2k}$. Тогда $a_{2k+2} = a_{2k+1} + a_{2k} = a_1 + a_3 + \ldots + a_{2k-1} + a_{2k+1}$, что и требовалось доказать.

7. Если $n = 1$, то $a_{5n} = a_5 = 5$. Пусть a_{5k} делится на 5. Тогда $a_{5k+5} = a_{5k+4} + a_{5k+3} = a_{5k+3} + 2a_{5k+2} + a_{5k+1} = a_{5k+2} + 4a_{5k+1} + 2a_{5k} = 5a_{5k+1} + 3a_{5k}$ делится на 5.

3.9. 1. Замените правую часть неравенства на $\frac{1}{\sqrt{3n+1}}$.

2. Докажите одновременно с предложенным равенством равенство $a_{n-1}^2 + a_n^2 = a_{2n-1}$.

3.12. 2. Докажем, что n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку (о таких прямых говорят «прямые общего положения»), разбивают плоскость на $\frac{n(n+1)}{n} + 1$ частей. Обозначим число частей a_n. Легко подсчитать, что $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, $a_3 = 7$ (рис. 8). Пусть k прямых делят плоскость на a_k частей. Проведем $(k+1)$-ю прямую. Она пересечет, по условию, каждую из k прямых, и все k точек пересечения будут различны. Эти k точек разобьют нашу прямую на $k+1$ отрезков. Каждый из этих отрезков делит одну из имевшихся a_k частей на две: таким образом, число частей увеличивается на $k+1$, т. е. $a_{k+1} = a_k + (k+1) = 1 + \frac{k(k+1}{2} + (k+1) = 1 + \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.

3.15. Обозначим через P_N следующее утверждение: из любых $2N-1$ целых чисел можно выбрать N чисел, сумма которых делится на N (другими словами, можно выбрать N чисел, среднее арифметическое которых — целое число). Нам понадобятся следующие три

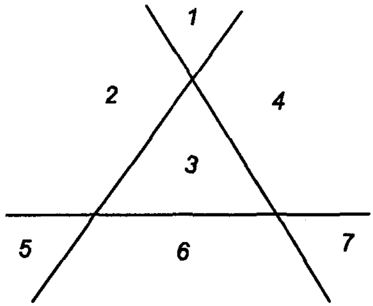

Рис. 8

факта: 1) верно утверждение P_2, 2) верно утверждение P_3, 3) если верны утверждения P_k и P_l, то верно и утверждение P_{kl}. Первый факт очевиден: из любых трех чисел можно выбрать два одинаковой четности. Для доказательства второго факта (из любых пяти чисел можно выбрать три, сумма которых делится на 3) рассмотрим остатки от деления этих пяти чисел на 3. Возможны два варианта: либо встретится три одинаковых остатка, и тогда числа, давшие эти остатки, в сумме делятся на 3, либо встретится три разных остатка: 0, 1, 2, и тогда соответствующие им числа в сумме делятся на 3. Докажем третий факт. Пусть дано $2kl-1$ чисел. Выберем из них, согласно P_l, группу из l чисел с целым средним арифметическим, из оставшихся $2kl-l-1$ — еще одну такую группу, из оставшихся $2kl-2l-1$ — еще одну и т. д. $2k-1$ раз, после чего останется $2kl-(2k-1)l-1=l-1$ число, так что $2k-1$ раз действительно могли использовать P_l. Рассмотрим (целые) средние арифметические числа в $2k-1$ выбранных группах. Из них, согласно P_k, можно выбрать k чисел, сумма которых делится на k. Тогда сумма kl исходных чисел, входящих в соответствующие k групп, очевидно, делится на kl. Факт 3) доказан. Поскольку $N=2^m3^n$, то из P_2 и P_3 за $n+m-1$ шагов мы можем вывести P_N.

3.16. Докажите сначала, что мудрец, задумавший большее число, не сможет решить поставленную перед ним задачу раньше, чем его партнер. После этого докажем индукцией по n следующее утверждение: если n, $n+d$ — задуманные числа (d — известная мудрецам разность), то не позднее чем после n отрицательных ответов своего партнера мудрец, задумавший число n, поймет, что его партнер задумал число $n+d$. Если $n=1$, то мудрец, задумавший это число, сразу же поймет, что его партнер задумал $d+1$. Предположим, что утверждение справедливо для всех $n \le k$, и докажем его для $n=k+1$. Мудрец, задумавший число $k+1$, знает, что его партнер задумал $(k+1)-d$ или $(k+1)+d$. Но если бы тот задумал число $(k+1)-d$, то в силу индукционного предположения не позднее чем через $k+1-d$ отрицательных ответов первого мудреца он угадал бы его число. Поскольку этого не произошло, то первому мудрецу становится ясно, что у его партнера не может быть задумано число $k+1-d$ и, следовательно, задумано число $k+1+d$.

3.19. 1. $a_1 = 1020$ — первое из этих чисел, $a_n = 9990$ — последнее, $n = \dfrac{a_n - a_1}{30} + 1$, $S = \dfrac{a_1 + a_n}{2} n$.

2. Если число не делится ни на 2, ни на 3, то оно имеет вид $1+6d$ или $5+6d$.

3. $a_8 = \dfrac{a_1 + a_{15}}{2}$.

4. $f(x) = dx + (a_1 - d)$, $g(x) = \dfrac{d}{2}x^2 + (a_1 - \dfrac{d}{2})x$, где d — разность прогрессии.

6. Если $f(x) = ax^2 + bx$, то положите $d = 2a$, $a_1 = a + b$.

9. Примените утверждение п. 8.

11. $a_n + c = q(a_{n-1} + c) \Leftrightarrow qa_{n-1} + d + c = qa_{n-1} + qc$. Это равенство выполняется, если положить $c = \dfrac{d}{q-1}$.

3.20. 2. Предположим, что прогрессии (a_n), (b_n), (c_n) с различными целыми, не равными единице разностями d, e, f покрывают натуральный ряд. Можно считать, что $a_1 = 1$, $b_1 = 2$. Если $a_2 = 3$, то $d = 2$ и потому $c_1 = 4$, $a_3 = 5$, $b_2 = 6$, $e = 4$, $a_4 = 7$. Число 8 не может теперь попасть ни в одну из прогрессий. Если $a_2 \ne 3$, то $c_1 = 3$. Если $a_2 = 4$, то $d = 3$, $c_2 = 5$, $f = 2$, $b_2 = 6$, $e = 4$, $a_4 = 7$. Число 8 опять не попадает ни в одну из прогрессий. Если, наконец, $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 3$, $b_2 = 4$, то $e = 2$, $a_2 = 5$, $d = 4$, $b_3 = 6$ и уже число 7 не попадает ни в одну из прогрессий.

4. $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 3$, $c_n = 3n$, $d_n = 6n + 1$, $e_n = 12n - 1$. Проверьте, что в эти последовательности попадают все натуральные числа от 1 до 24. Это не единственный пример.

3.21. 1. Положите $b_n = \dfrac{1}{a_n}$.

2. Положите $b_n = a_n^2$.

3. Путем догадок найдите формулу общего члена и докажите ее по индукции.

3.22. 1. Пусть числа c_1 и c_2 таковы, что $a_1 = c_1x_1 + c_2x_2$, $a_2 = c_1x_1^2 + c_2x_2^2$. Докажите по индукции, что $a_n = c_1x_1^n + c_2x_2^n$.

8. Положите $b_n = \log_2 a_n$.

9. Положите $b_n = \dfrac{1}{a_n}$.

3.24. 3. $\sum\limits_{k=1}^{10} \dfrac{2^k-1}{2^{k-1}} = \sum\limits_{k=1}^{10} 2 - \sum\limits_{k-1}^{10} \dfrac{1}{2^{k-1}} = 20 - (2 - \dfrac{1}{2^9}) = 18 + \dfrac{1}{2^9}$.

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \sum\limits_{k=1}^{n} k^3 + 3\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 + 2\sum\limits_{k=1}^{n} k$.

3.25. 3. $a_k = \dfrac{k(k+1)}{2}$.

3.26. 4. $\dfrac{4k+1}{k(k+1)(4k^2-1)} = \dfrac{(2k+1)+2k}{k(k+1)(2k+1)(2k-1)} =$

$$= \frac{1}{k(k+1)(2k-1)} + \frac{2}{(k+1)(4k^2-1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)(2k-1)} +$$

$$+ \frac{(2k+1)-(2k-1)}{(k+1)(2k+1)(2k-1)} = \frac{1}{k(2k-1)} - \frac{1}{(k+1)(2k+1)} +$$

$$+ \frac{1}{(k+1)(2k-1)} - \frac{1}{(k-1)(2k+1)} = \frac{1}{k(2k-1)} - \frac{1}{(k+1)(2k+1)}.$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{4k=1}{k(k+1)(4k^2-1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-2)} -$$

$$- \sum_{k=1} n \frac{1}{(k+1)(2k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(2k-1)} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(2k-1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{(n+1)(2n+1)} = \frac{n(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}.$$

6. $\sum\limits_{k=1}^{n} kk! = \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)k! - \sum\limits_{k=1}^{n} k!$.

Глава 4

4.1. 3. Так как по условию a делится на b, то $a = bm$, где m — целое число. Так как b делится на c, то $b = cn$, где n — целое число. Следовательно, $a = (cn)m = c(nm)$ и, значит, a делится на c.

4.2. 3. Так как $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, то $a^2 - b^2$ делится на $a + b$. По условию a^2 делится на $a+b$. Значит (см. 4.1.1), b^2 делится на $a+b$.

5. $11a+7b+2\cdot 13b = 11a+33b = 11(a+3b)$.

4.4. 2. Если при некотором значении n число $\dfrac{5n+2}{2n+3}$ является целым, то при том же значении n число $\dfrac{10n+4}{2n+3}$ также является целым. Так как $\dfrac{10n+4}{2n+3} = \dfrac{(10n+15)-11}{2n+3} = 5 - \dfrac{11}{2n+3}$, то число $\dfrac{10n+4}{2n+3}$ является целым, если 11 делится на $2n+3$. Имеем следующие возможности: $2n+3=1$, $2n+3=-1$, $2n+3=11$, $2n+3=-11$, откуда находим, что $n \in \{-1;-2;4;-7\}$. Проверкой убеждаемся, что найденные значения n являются решением задачи.

4.5. 4. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух положительных чисел d и $\dfrac{n}{d}$.

4.6. 4. Пусть n — данное нечетное число. Тогда по условию $n = 7p+2$, откуда следует, что p — нечетное число. Запишем его в виде $p = 2q+1$ и подставим в предыдущую формулу: $n = 7(2q+1)+2 = 14q+9$. Теперь ясно, что остаток от деления n на 14 равен 9.

7. Целое число при делении на 3 может давать остаток 0, 1 или 2, и его можно представить соответственно в виде $3k$, $3k+1$ или $3k+2$. Далее, $(3k)^2 = 9k^2 = 3(3k^2)$, $(3k+1)^2 = 9k^2+6k+1 = 3(3k^2+2k)+1$, $(3k+2)^2 = 9k^2+12k+4 = 3(3k^2+4k+1)+1$, откуда видно, какими могут быть остатки при делении на 3. При делении на 5 следует учесть, что возможны пять различных остатков: $0,1,2,3,4$, и аналогично провести исследование.

4.8. 1. Пусть c — общий делитель чисел a и b. Тогда $a-b$ делится на c и, значит, c — общий делитель чисел $a-b$ и b. Обратно, пусть c — общий делитель чисел $a-b$ и b. Тогда число $(a-b)+b = a$ делится на c и, значит, c — общий делитель чисел a и b.

5. Примените к числам m и n алгоритм Евклида и воспользуйтесь формулой $a_{k+l} = a_{k-1}a_l + a_k a_{l+1}$.

4.9. 2. Воспользуемся несколько раз результатом задачи 4.8.1: $(3n+1, 7n-4) = (3n+1, 4n-5) = (3n+1, n-6) = (2n+7, n-6) = (n+13, n-6) = (19, n-6)$. Таким образом, наибольший общий делитель может принимать не более двух значений: 1 и 19. Нетрудно проверить, что оба варианта реализуются, например, при $n = 1$ и $n = 6$.

4.10. 4. Если числа a и b взаимно простые, т. е. НОД$(a, b) = 1$, то существование m и n вытекает из задачи 4.7.2. Обратно, пусть $ma + nb = 1$ при некоторых целых m и n. Если d — наибольший общий делитель чисел a и b, то $1 = ma + nb$ делится на d, откуда $d = 1$.

5. По задаче 4, найдутся такие m_1 и n_1, что $am_1 + bn_1 = 1$, и такие m_2 и n_2, что $bm_2 + cn_2 = 1$. Перемножая эти равенства, получаем $abm_1m_2 + c(am_1n_2 + bm_2n_1 + cn_1n_2) = 1$, откуда, опять на основании задачи 4, ab и c взаимно простые.

6. По задаче 4, найдутся такие целые числа m и n, что $bm + cn = 1$. Умножая обе части этого равенства на a, получаем $abm + acn = a$. Так как ab делится на c по условию, то и a как сумма abm и acn делится на c.

7. По задаче 4, найдутся такие целые числа m и n, что $bm + cn = 1$. Умножая обе части этого равенства на a, получаем $abm + acn = a$. Так как a делится на c, то abm делится на bc. Так как a делится на b, то acn делится на bc. Значит, $a = abm + acn$ делится на bc.

4.11. 1. Рассмотрим на координатной плоскости XOY прямоугольник, ограниченный координатными осями и прямыми $x = m$ и $y = n$. Внутри этого прямоугольника содержится $(m-1)(n-1)$ точек с целочисленными координатами: $\{(a;b) | 1 \le a \le (m-1), 1 \le b \le (n-1)\}$. Диагональ этого прямоугольника лежит на прямой $y = \frac{n}{m}x$ и делит его на два центрально симметричных треугольника. Из взаимной простоты m и n следует, что ни одна из точек с целочисленными координатами не лежит на диагонали. Утверждение задачи состоит в том, что внутри треугольника, расположенного под диагональю, содержится половина всех точек, что теперь очевидно.

2. Утверждение этой задачи состоит в следующем. Если прямоугольник из предыдущей задачи разделить средними линиями на четыре меньших, то левый нижний прямоугольник содержит четверть

всех описанных в предыдущей задаче точек с целочисленными координатами.

4.12. 2. Числа, меньшие 30 и взаимно простые с 30, — это 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

3. Надо доказать, что $p^2 - q^2$ делится на 3 и на 8. Для доказательства делимости на 3 заметим, что p^2 и q^2 дают при делении на 3 остатки 1 (см. задачу 4.6.7). Для доказательства делимости на 8 запишем $p = 2m+1$, $q = 2n+1$. Тогда $p^2 - q^2 = (2m+1)^2 - (2n+1)^2 = (2m-2n)(2m+2n+2) = 4(m-n)(m+n+1)$. Осталось заметить, что выражения в скобках имеют разную четность, и тем самым одна из скобок делится на 2. Отметим, что мы воспользовались не простотой чисел p и q, а только их нечетностью.

4. $2^{10} + 5^{12} = 2^{10} + 2 2^5 5^6 + 5^{12} - 2^6 5^6 = (2^5 + 5^6)^2 - (2^3 5^3)^2$. Разность квадратов раскладывается на два множителя, каждый из которых больше 1.

5. $n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$. Осталось найти значения n, при которых выражение в первой скобке равно 1.

6. $m^4 + 4n^4 = m^4 + 4m^2n^2 + 4n^4 - 4m^2n^2 = (m^2 + 2n^2)^2 - (2mn)^2$.

7. Если бы n было составным, скажем, $n = pq$, где $p > 1$, $q > 1$, то число $2^n - 1 = (2^p)^q - 1$ раскладывалось бы на множители больше единицы (см. задачу 4.3).

8. Если бы у n был нечетный делитель, скажем, $n = pq$, где q — нечетное число, то число $2^n + 1 = (2^p)^q + 1$ раскладывалось бы на множители больше единицы (см. задачу 4.3).

9. Для любого составного числа $n = ab$, кроме 4, существуют не равные между собой кратные a и b, не превосходящие $n - 1$.

10. Если n не является ни простым числом, ни удвоенным простым числом, ни квадратом простого числа и не равно ни 8, ни 16, то n можно представить в виде $n = ab$, где a и b — различные множители не меньше 3. Пусть $b > a$, $a \geq 3$. Тогда числа a, b, $2a$, $2b$, $3a$ меньше $n - 1$ и при этом a, b, $2b$ заведомо различны, а из чисел $2a$, $3a$ хотя бы одно отлично от чисел a, b, $2b$. Таким образом, делителями $(n-1)!$ являются числа a, b, $2b$, $2a$ или a, b, $2b$, $3a$; в любом случае $(n-1)!$ делится на $a^2b^2 = n^2$. Далее, если $n = p^2$, p — простое, большее 4, то $n - 1 > 4p$ и $(n-1)!$ содержит множители p, $2p$, $3p$, $4p$ и, следовательно, делится на $p^4 = n^2$. Случаи $n = 2p$, $n = 8$, $n = 9$, $n = 16$ легко проверяются.

11. Рассмотрите остатки при делении на 3.

12. Исследуйте, какие остатки может давать p при делении на 3.

13. Проверьте, при каких простых p число $8p^2+1$ может быть простым.

16. Заметим, что $\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{n}\right]=2+\left[\frac{n-1}{1}\right]$. Воспользуйтесь тем, что $\left[\frac{n}{k}\right]=\left[\frac{n-1}{k}\right]$, если n не делится на k, и $\left[\frac{n}{k}\right]>\left[\frac{n-1}{k}\right]$, если n делится на k.

4.13. 2. Заметим, что произведение двух чисел вида $3n+1$ есть опять число такого вида, откуда следует, что если число вида $3n-1$ не простое, то у него есть делитель вида $3n-1$. (У него не могут быть только делители вида $3n+1$). Предположим теперь, что простых чисел вида $3n-1$ "— конечное число. Обозначим их $p_1, p_2, \ldots, p_k$ и рассмотрим число $N=3p_1p_2\ldots p_k-1$. Число N имеет вид $3n-1$ и отлично от $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Оно либо простое, либо имеет делитель вида $3n-1$, отличный от $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Это противоречит предположению о конечности числа простых вида $3n-1$.

3. Можно доказать неравенство по индукции, воспользовавшись очевидным фактом $p_{n+1}-p_n \geq 2$ (см. задачу 3.5).

4. Рассмотрим число $n!-1$. Оно либо простое, либо имеет делитель больше n.

5. Рассмотрите n последовательных чисел $(n+1)!+2, (n+1)!+ +3, \ldots, (n+1)!+n, (n+1)!+(n+1)$.

6. Утверждение очевидно для всех n, не имеющих вида $n= =p_1p_2\ldots p_k$, где $p_1, p_2, \ldots$ — подряд идущие простые ($p_1=2, p_2=3, p_3=5, \ldots$). В этом случае рассмотрите число $n-1$.

4.15. 5. Степень любого простого числа p, входящего в каноническое разложение числа ab, кратна n. Так как a и b взаимно простые, то p входит в каноническое разложение либо a, либо b.

4.16. 3. Если $pqr=5(p+q+r)$, то по крайней мере одно из простых чисел p, q, r равно 5. Пусть $r=5$. Тогда $pq=p+q+5$, $(p-1)(q-1)=6$. Так как $p-1\neq 3$ и $q-1\neq 3$, то $p-1$ и $q-1$ равны 1 и 6, т. е. p и q равны 2 и 7.

4. Так как $p-1$ делится на q, то $q<p$ и $q-1$ не делится на p. Так как $q^3-1=(q-1)(q^2+q+1)$, то q^2+q+1 делится на p. Пусть $q^2+q+1=np$. Тогда $p-1=\dfrac{q^2+q+1-n}{n}$, так что $q^2+q+1-n$ делится на $p-1$ и потому на q. Следовательно, $n-1$ делится на q. Если $n>1$, то $n-1\geq q$, $n\geq q+1$, $q^2+q+1\geq(q+1)p$. Так как $p-1\geq q$, то $p\geq q+1$, и получаем $q^2+q+1\geq(q+1)^2=q^2+2q+1$, что невозможно. Следовательно, $n=1$ и $p=q^2+q+1$.

4.17. 5. Пусть $e_p(x)=k$, $e_p(y)=l$, $k>l$. Тогда $x=p^k\dfrac{a}{b}$, $y=p^l\dfrac{c}{d}$, не делящиеся на p. Следовательно,

$$x\pm y=p^l\frac{p^{k-l}ad\pm bc}{bd},\ \text{откуда } e_p(x\pm y)=l.$$

6. Пусть $e_2(x)=e_2(y)=k$. Тогда $x=2^k\cdot\dfrac{a}{b}$, $y=2^k\dfrac{c}{d}$, где a, b, c, d — нечетные числа. Следовательно,

$$x\pm y=2^k\frac{2^kad\pm bc}{bd}.$$

Поскольку $ad\pm bc$ четно, а bd нечетно, то либо $x\pm y=0$, либо $e_2(x\pm y)>k$.

4.18. 1. Пусть p — такое простое число, что $e_p(a_n)>e_p(a_{n-1})$. Докажите, что $e_p(\dfrac{1}{a_1}\pm\dfrac{1}{a_2}\pm\cdots\pm\dfrac{1}{a_n})<0$.

2. Пусть s — наибольшее из чисел $e_2(m),e_2(m+1),\ldots,e_2(n)$. Предположим, что существуют целые числа a и b, такие, что $m\leq a<b\leq n$ и $e_2(a)=e_2(b)=s$. Тогда $a=2^sc$, $b=2^sd$, где c и d — нечетные числа. Так как $b<a$, то $d\geq c+2$. Тогда $m\leq 2^s(c+1)\leq n$ и $e_2(2^s(c+1))\geq s+1$ — противоречие. Следовательно, есть только одно целое число a, такое, что $m\leq a\leq n$ и $e_2(a)=s$. Но тогда $e_2\left(\dfrac{1}{m}\pm\dfrac{1}{m+1}\pm\cdots\pm\dfrac{1}{n}\right)=-s<0$.

4.19. 1. Если m и n — натуральные числа, то $\left[\dfrac{m}{n}\right]$ — это число чисел, кратных m, в последовательности $1,2,\ldots,n$.

3. Подберите такое n, что $e_5(n!)\leq 999$ и $e_5((n-1)!)\geq 997$. Учтите, что n должно делиться на 25.

4. Воспользуйтесь тем, что $[a] \le a$.

5. Воспользуйтесь тем, что $e_p((m+1)(m+2)\cdots(m+n)) = e_p((m+n)!) - e_p(m!)$ и $[a+b] \ge [a]+[b]$.

6. Примените задачу 1.32.8.

8. Достаточно показать, что для любого простого p выполняется неравенство $e_p((mn)!) \ge ne_p(m!) + e_p(n!)$. Если m не делится на p, то при любом натуральном числе i разделим m и n на p^i с остатком: $m = ap^i + r, n = bp^i + s$, где a, b, r, s — целые числа, $0 \le r < p^i, 0 \le s < p^i$. Тогда $mn = anp^i + brp^i + rs$, так что $\left[\frac{mn}{p^i}\right] \ge an + br \ge an + b$, в то время как $n\left[\frac{m}{p^i}\right] + \left[\frac{n}{p^i}\right] = an + b$. Предположим, что m делится на p. Пусть $m = ap^i$, где a не делится на p. Тогда $mn = anp^i$, так что

$$e_p(m!) = ap^{i-1} + ap^{i-2} + \ldots + ap + a + e_p(a!),$$

$$e_p((mn)!) = anp^{i-1} + anp^{i-2} + \ldots + anp + an + e_p((an)!).$$

Следовательно,

$$e_p((mn)!) - e_p((m!)^n n!) = e_p((mn)!) - ne_p(m!) - e_p(n!) =$$

$$= e_p((an)!) - ne_p(a!) - e_p(n!) = e_p((an)!) - e_p((a!)^n n!) \ge 0,$$

так как a не делится на p и потому $(an)!$ делится на $(a!)^n n!$.

4.20. 1. Покажите, что если $m \ge n$, то НОД$(a^m - 1, a^n - 1) =$ НОД$(a^{m-n} - 1, a^n - 1)$.

2. Воспользуйтесь тем, что $a^n - 1$ и $a^n + 1$ взаимно простые и потому НОД$(a^m - 1, a^{2n} - 1) =$ НОД$(a^m - 1, a^n - 1)\cdot$ НОД $(a^m - 1, a^n + 1)$.

3. Покажите, что при $m \ge n$ НОД$(a^m - 1, a^n + 1) =$ НОД$(a^{m-n} + 1, a^n - 1)$, и выведите аналогичное соотношение при $m < n$. Затем примените п. 2.

4. Если $e_2(n) = 0$, т. е. n нечетно, то $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1)$ и $a^n + 1 = (a+1)(a^{n-1} - a^{n-2} + \ldots + 1)$ с нечетными вторыми сомножителями, так что $e_2(a^n - 1) = e_2(a-1)$ и $e_2(a^n + 1) = e_2(a + 1)$. Пусть $e_2(n) \ge 1$, т. е. n четно. Так как $a^n - 1 = (a^{n/2} - 1)(a^{n/2} + 1)$ делится на 4, то $a^n + 1$ не делится на 4, т. е. $e_2(a^n + 1) = 1$. Пусть $n = 2^u s$, где $u = e_2(n)$, s нечетно. Тогда

$$a^n - 1 = (a^s - 1)(a^s + 1)(a^{2s} + 1)\cdots(a^{2^{u-1}s} + 1),$$

так что $e_2(a^n-1)=e_2(a^s-1)+e_2(a^s+1)+u-1=e_2(a-1)+e_2(a+ +1)+e_2(n)-1$.

5. См. решение в п. 4.

6. a^n-1 и a^n+1 — последовательные четные числа, так что ровно одно из них делится на 4.

7. См. указание к п. 3.

Случай 1: a^n-1 делится на 4. Тогда $2(a^n-1)$ и $\dfrac{a^n+1}{2}$ взаимно простые, так что

$$\text{НОД}(a^m-1,a^{2n}-1)=$$
$$=\text{НОД}(a^m-1,2(a^n-1))\cdot\text{НОД}\left(a^m-1,\frac{a^n+1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\text{НОД}(a^m-1,2(a^n-1))\cdot\text{НОД}(a^m-1,a^n+1).$$

Если $e_2(m)\le e_2(n)$, то из п.4 вытекает, что $e_2(a^m-1)\le e_2(a^n-1)$. Поэтому $\text{НОД}(a^m-1,2(a^n-1))=\text{НОД}(a^m-1,a^n-1)=a^d-1$. Так как, кроме того, в этом случае $\text{НОД}(m,2n)=d$, мы получаем, что $a^d- -1=\frac{1}{2}(a^d-1)\cdot\text{НОД}(a^m-1,a^n+1)$ и $\text{НОД}(a^m-1,a^n+1)=2$. Если $e_2(m)>e_2(n)$, то из п.4 вытекает, что $e_2(a^m-1)>e_2(a^n-1)$, так что $\text{НОД}(a^m-1,a^{2n}-1)=2\text{НОД}(a^m-1,a^n-1)=2(a^d-1)$. Кроме того, $\text{НОД}(m,2n)=2d$, так что $a^{2d}-1=(a^d-1)\cdot\text{НОД}(a^m-1,a^n+1)$, и получаем $\text{НОД}(a^m-1,a^n+1)=a^d+1$.

Случай 2: a^n+1 делится на 4. Тогда n нечетно и $\frac{1}{2}(a^n-1)$ и $2(a^n+1)$ взаимно простые, так что

$$\text{НОД}(a^m-1,a^{2n}-1)=\frac{1}{2}\text{НОД}(a^m-1,a^n-1)\cdot\text{НОД}(a^m-1,2(a^n+1)).$$

Если $e_2(m)\le e_2(n)$, т. е. m тоже нечетно, то из п.4 вытекает, что $e_2(a^m-1)=e_2(a-1)$ и $e_2(a^n+1)=e_2(a+1)$, так что $a+1$ делится на 4 и потому $a-1$ не делится на 4. Следовательно, $e_2(a^m-1)< < e_2(a^n+1)$ и $\text{НОД}(a^m-1,2(a^n+1))=\text{НОД}(a^m-1,a^n+1)$. Так как, кроме того, $\text{НОД}(m,2n)=d$, то, как и ранее, получаем $\text{НОД}(a^m-1,a^n+1)=2$. Если $e_2(m)>e_2(n)$, т. е. $e_2(m)\ge 1$, то $e_2(a^m- -1)>e_2(a^n+1)$ и потому $\text{НОД}(a^m-1,\ 2(a^n+1))=2\text{НОД}(a^m- -1,a^n+1)$ и $\text{НОД}(m,2n)=2d$. Отсюда следует, что $\text{НОД}(a^m-1, a^n+1)=a^d+1$.

4.21. 1. Если m и n взаимно простые, то каждый положительный делитель mn однозначно представляется в виде xy, где x — положительный делитель m, а y — положительный делитель n.

4.22. 1. Пусть $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$, где $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — различные простые числа и $p_1 < p_2 < \ldots < p_s$. Тогда $\tau(n) = 12$ равносильно $(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_s+1) = 12$. Если $s = 1$, то $k_1 + 1 = 12$, $n = p_1^{11}$, так что $2^{11} = 2048$ — наименьшее значение n. Если $s = 2$, то надо проверить $k_1+1 = 6$, $k_2+1 = 2$ и $k_1+1 = 4$, $k_2+1 = 3$. Соответствующие наименьшие значения n — $2^5\cdot 3 = 96$ и $2^3\cdot 3^2 = 72$. Если $s = 3$, то $k_1+1 = 3$, $k_2+1 = 2$, $k_3+1 = 2$, так что $n = 2^2\cdot 3\cdot 5 = 60$.

2. Если p — простой делитель n, то число вида $1 + p + p^2 + \ldots + p^k$ должно быть делителем 84, так что p должно быть делителем числа вида $d - 1$, где d — делитель 84.

4.23. 1. $1, 2, \ldots, 2^{m-1}$, $2(2^m - 1), \cdots$, $2^{m-1}(2^m-1)$ — все положительные делители числа $2^{m-1}(2^m-1)$.

2. Пусть $n = 2^s m$, где m нечетно и $s \geq 1$. Пусть $\sigma(n) = 2n$. Тогда $\sigma(2^s)\sigma(m) = 2n$, $(2^{s+1}-1)\sigma(m) = 2^{s+1}m$, $(2^{s+1}-1)(\sigma(m) - m) = m$. Следовательно, $2^{s+1}-1$ — делитель m. Так как $\sigma(m) - m = \dfrac{m}{2^{s+1}-1}$, то $\sigma(m) = m + \dfrac{m}{2^{s+1}-1}$. Так как $\sigma(m)$ — сумма всех положительных делителей m, то m не имеет никаких положительных делителей, кроме m и $\dfrac{m}{2^{s+1}-1}$. В частности, один из этих делителей должен быть равен 1. Если $m = 1$, то $2^{s+1} - 1 = 1$, $s = 0$, $n = 1$, $\sigma(n) \neq 2n$. Следовательно, $\dfrac{m}{2^{s+1}-1} = 1$, $m = 2^{s+1}-1$, $n = 2^s(2^{s+1}-1)$ и m не имеет положительных делителей, кроме 1 и m.

3. Разберите случаи $p = 2, p = 3$. Если $p > 3$, то $\sigma(n) = 3n$ приводит к уравнению $(p+1)(p^{2k+1}-1) = 9p\cdot 2^{k-2}$. Покажите, что $p + 1 = 2^{k-2}q$, где q — делитель $9p$.

4. Пусть $n = 2^s m$, где m нечетно и $s \geq 1$. Тогда $\sigma(n) = (2^{s+1} - 1)\sigma(m)$.

Случай 1: $\sigma(m) \neq 1$ и $\sigma(m) \neq 2^{s+1}-1$. Тогда $\sigma(\sigma(n)) \geq 1 + (2^{s+1} - 1) + \sigma(m) + \sigma(n) = 2^m + \sigma(m) + (2^{s+1}-1)\sigma(m) = 2^{s+1}(\sigma(m) + 1) > 2^{s+1}m = 2n$.

Случай 2: $\sigma(m) = 2^{s+1} - 1$. Так как $\sigma(m) \geq m + 1$, то $m \leq 2^{s+1} - 2$ и $n = 2^s m \leq 2^{s+1}(2^s - 1)$. С другой стороны, $\sigma(n) = (2^{s+1}-1)\sigma(m)$, так что $\sigma(\sigma(n)) \geq 1 + (2^{s+1}-1) + (2^{s+1}-1)^2 = 2^{s+1} + 2^{2s+2} - 2^{s+2} + 1 > 2^{2s+2} - 2^{s+1} > 2n$.

Следовательно, $\sigma(m) = 1$. Тогда $n = 2^s$, $\sigma(n) = 2^{s+1} - 1$. Если $2^{s+1} - 1$ — составное число, то $\sigma(2^{s+1} - 1) > 1 + (2^{s+1} - 1)$, т.е. $\sigma(\sigma(n)) > 2n$. Следовательно, $2^{s+1} - 1$ — простое число.

4.24. 2. Определение свертки можно записать так:

$$(f * g)(n) = \sum_{xy=n} f(x)g(y),$$

где суммирование производится по всем упорядоченным парам (x, y) положительных чисел, таких, что $xy = n$. Покажите, что

$$((f * g) * h)(n) = (f * (g * h))(n) = \sum_{xyz=n} f(x)g(y)h(z).$$

4. Достаточно проверить, что $(\mu * 1)(p^n) = e(p^n)$, где p — простое число.

5. Примените пп. 1 — 4.

6. $F = f * 1$.

4.25. 2. Если a и n взаимно простые, то $n - a$ и n взаимно простые.

4. Каждая несократимая дробь $\frac{a}{d}$, где d — делитель n и $1 \leq a \leq d$, равна одной и только одной дроби со знаменателем n. Поэтому число таких дробей равно числу возможных числителей, т. е. $\varphi(d)$.

5. Следует из п. 4.

7. Если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_s^{k_s}$, то $\varphi(n) = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \cdots p_s^{k_s-1}(p_1 - 1) \times$ $\times (p_2 - 1) \cdots (p_s - 1)$.

4.28. 2. Так как $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1)$, то $a^{n-1} +$ $+ a^{n-2} + \ldots + 1 \equiv 0 \pmod{a - 1}$. С другой стороны, так как $a \equiv 1$ $\pmod{a - 1}$, то $a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1 \equiv n \pmod{a - 1}$, так что $n \equiv 0$ $\pmod{a - 1}$.

4.29. 5. Пусть a — k-значное число. Рассмотрим все $(k + 2)$-значные числа, начинающиеся с 1. Так как имеется 10^{k+1} таких чисел и $a < 10^{k+1}$, то по крайней мере одно из этих чисел делится на a. Но тогда найдется число, делящееся на a, которое оканчивается цифрой 1. Следовательно, a не делится ни на 2, ни на 5. Рассмотрим теперь все $(k + 4)$-значные числа, начинающиеся с 500. Так как имеется 10^{k+1} таких чисел, то по крайней мере одно из них делится на a. Пусть $N_1 = (500a_1a_2 \ldots a_{k+1})_{10}$ делится на a. Тогда $N_2 = (a_{k+1} \ldots a_2a_1005)_{10}$ делится на a. Следовательно, число $N_3 =$ $= N_1 + N_2 \cdot 10^{k+3}$ делится на a. Так как $N_3 = (a_{k+1} \ldots a_101000a_1 \ldots$ $\ldots a_{k+1})_{10}$, то $N_4 = (a_{k+1} \ldots a_100010a_1 \ldots a_{k+1})_{10}$ делится на a. Так как

$N_3 - N_4 = 99 \cdot 10^{k+2}$ и a не делится ни на 2, ни на 5, то 99 делится на a.

4.30. 5. Найдите остаток от деления этого числа на 9.

4.32. 3. Сначала докажем утверждение для $n = p^k$ (p — простое число) индукцией по k. При $k = 1$ — это утверждение из п.2. Пусть $k \geq 2$ и пусть $\dfrac{a^{p^{k-1}} - b^{p^{k-1}}}{a-b}$ делится на p^{k-1} для любых различных целых a и b, таких, что $a^{p^{k-1}} - b^{p^{k-1}}$ делится на $a - b$. Предположим, что $a \neq b$ и $a^{p^k} - b^{p^k}$ делится на $a - b$. Положим $c = a^p$, $d = b^p$ и применим к c и d индукционное предположение (случай $c = d$, означающий, что $p = 2$ и $b = -a$, очевиден). Имеем

$$\frac{a^{p^k} - b^{p^k}}{a-b} = \frac{c^{p^{k-1}} - d^{p^{k-1}}}{c-d} \cdot \frac{a^p - b^p}{a-b}.$$

Остается применить индукционное предположение и п. 2.

4.33. 1. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю m. Тогда $aa_1, aa_2, \ldots, aa_s$ — приведенная система вычетов по модулю m. Так как 1 и m взаимно простые, то существует i, такое, что $aa_i \equiv 1 \pmod m$.

4.34. 3. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю m, $s = \varphi(m)$. Пусть a взаимно просто с m. Тогда $aa_1, aa_2, \ldots$ $\ldots, aa_s$ — приведенная система вычетов по модулю m и $(aa_1)(aa_2)\cdots$ $\cdots(aa_s) \equiv a_1 a_2 \cdots a_s \pmod m$. Отсюда $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \pmod m$.

4.35. 1. Для каждого a_i число $-a_i$ взаимно простое с m и потому существует единственное j, такое, что $a_j \equiv -a_i \pmod m$. Если $j = i$, то $2a_i \equiv 0 \pmod m$, что невозможно при $m \geq 3$. Отсюда следует, что $a_1 + a_2 + \cdots + a_s \equiv 0 \pmod m$.

3. Так как $-1 \equiv (p-1)! \pmod p$ и

$$(1(p-1)) \cdot (2(p-2)) \cdot \left(\frac{p-1}{2} \cdot \frac{p+1}{2}\right) \equiv$$

$$\equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} 1^2 \cdot 2^2 \cdots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \pmod p,$$

то $-1 \equiv n^2 \pmod p$, где $n = \left(\dfrac{p-1}{2}\right)!$. Поэтому $n^2 + 1$ делится на p.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — приведенная система вычетов по модулю m. Можно считать, что $1 \le a_1 < a_2 < \ldots < a_s \le m-1$. Для каждого a_i можно найти a_j, такое, что $a_i a_j \equiv 1 \pmod{m}$ (см. п.2). Если $a_i^2 \not\equiv 1 \pmod{m}$, то $a_i \ne a_j$. Следовательно, произведение всех таких a_i сравнимо с 1 по модулю m. Пусть $1 = b_1 < b_2 < \ldots < b_t = m-1$ — все решения сравнения $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$, лежащие между 0 и m. Тогда $b_{t+1-i} = m - b_i$, откуда $b_i b_{t+1-i} \equiv -1 \pmod{m}$. Так как $m \ge 3$, то $b_i \ne b_{t+1-i}$. Поэтому $b_1 b_2 \cdots b_m \equiv (-1)^{t/2} \pmod{m}$.

4.36. 5. Докажем утверждение индукцией по n. Случай $n = 2$ очевиден. Пусть $k \ge 3$ и предположим, что утверждение справедливо для всех $n \le k-1$. Предположим, что $2^k - 1$ делится на k. Тогда k нечетно и по теореме Эйлера $2^{\varphi(k)} - 1$ делится на k. Но тогда $2^d - 1$ делится на k, где d — наибольший общий делитель k и $\varphi(k)$ (см. задачу 4.28, п.3). Применяя к d индукционное предположение (докажите, что $d < n$), получаем противоречие.

4.38. 2. Для каждого $i, 1 \le i \le p-1$, существует $k, 1 \le k \le p-1$, такое, что $\frac{1}{i} \equiv k \pmod{p}$. Откуда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 1 + 2 + \ldots + p - 1 \pmod{p}.$$

Так как $1 + 2 + \ldots + p - 1 = \frac{p(p-1)}{2}$ и $\frac{p(p-1)}{2} \equiv 0 \pmod{p}$, то

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

3. Аналогично п. 1 имеем

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2} \equiv 1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 \pmod{p}.$$

Так как

$$1^2 + 2^2 + \ldots + (p-1)^2 = \frac{(p-1)p(2p-1)}{6}$$

и

$$\frac{(p-1)p(2p-1)}{6} \equiv 0 \pmod{p}$$

в силу условия $p \geq 5$, то

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}.$$

4. Имеем

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p-1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{p-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{p-2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{(p-1)/2}+\frac{1}{(p-1)/2}\right)=$$

$$=p\left(\frac{1}{1\cdot(p-1)}+\frac{1}{2\cdot(p-2)}+\ldots+\frac{1}{(p-1)/2\cdot(p-1)/2}\right).$$

Так как

$$p\left(\frac{1}{1\cdot(p-1)}+\frac{1}{2\cdot(p-2)}+\ldots+\frac{1}{(p-1)/2(p-1)/2}\right)\equiv$$

$$\equiv-\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{((p-1)/2)^2}\right)$$

и $\dfrac{1}{k^2} \equiv \dfrac{1}{(p-k)^2} \pmod{p}$ для любого k, $1 \leq k \leq (k-1)$, то

$$2\left(\frac{1}{1\cdot(p-1)}+\frac{1}{2\cdot(p-2)}+\ldots+\frac{1}{(p-1)/2(p-1)/2}\right)\equiv$$

$$\equiv 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{(p-1)^2} \equiv 0 \pmod{p}$$

в силу п. 2. Откуда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

4.39. 1. Числа $x-y$ и $x+y$ должны быть делителями числа 20.

2. Разложите $x^2-xy-6y^2$ на множители.

3. Числа $x-1$ и $x+1$ должны быть делителями степени числа 3. Так как их разность равна 2, то одно из них обязано равняться 1 или -1. Нетрудно убедиться в том, что возможен лишь случай $x-1=1$, откуда $x=2$ и $y=1$.

4. Представьте уравнение в виде $(x+3)(y+2)=5$.

5. Воспользуйтесь тем, что если (x,y) — решение уравнения, то x^2+xy^2+1 делится на x.

6. Если (x,y) — решение уравнения, то x^2+1 делится на $3x+1$, а значит, и $9x^2+9$ делится на $3x+1$. Так как $9x^2+9=(9x^2-1)+10$, то 10 делится на $3x+1$. Перебирая всевозможные делители числа 10, находим все решения исходного уравнения.

7. Представьте уравнение в виде $xy-7x-5y=0$ и разложите левую часть на множители.

4.40. 1. См. задачу 4.8.3.

2. Имеем $ax_0+by_0=c$. Пусть (x,y) — произвольное решение исходного уравнения. Тогда $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$. Так как a и b взаимно простые, то существует целое t, такое, что $x-x_0=bt$. Отсюда из равенства $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$ находим $y-y_0=at$. Значит, $x=x_0+bt$, $y=y_0-at$ при некотором целом t. Непосредственной подстановкой в исходное уравнение убеждаемся, что $x=x_0+bt$, $y=$ $=y_0-at$ является решением этого уравнения при любом целом t.

3. Пусть d_1,d_2 — разности арифметических прогрессий $(a_n),(b_n)$ соответственно. Пусть $d=$НОД(d_1,d_2). Прогрессии $(a_n),(b_n)$ имеют общий член в том и только в том случае, если $a_1+d_1k=b_1+d_2l$ при некоторых целых k и l, т. е. в том и только в том случае, если уравнение $d_1k-d_1l=b_1-a_1$ имеет решение в целых k и l. Теперь воспользуемся п.1.

4.41. 1. Перейдите к сравнению по модулю 3.

2. Перейдите к сравнению по модулю 4.

3. Перейдите к сравнению по модулю 7.

4. Перейдите к сравнению по модулю 5.

4.42. 1. При любом x справедливо $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x+$ $+1<x^3+x^2+5x+6$. Далее $x^3+x^2+5x+6<(x+1)^3=x^3+3x^2+$ $+3x+1$ при всех x, для которых $2x^2-2x-5>0$, т. е. для всех x, отличных от -1, 0, 1, 2. Подставляя $x=-1, x=0, x=1, x=2$ в исходное уравнение, находим решение $x=-1, y=1$. Если x отлично от $-1,0,1,2$, то $(x-1)^3<y^3<(x+1)^3$, откуда $y^3=x^3$, т.е. $y=x$. Если $y=x$, то $x^2+5x+6=0$. Отсюда $x=-2$ или $x=-3$. Таким образом, окончательно получаем $x=-1$, $y=1$; $x=-2$, $y=-2$; $x=-3$, $y=-3$.

2. Пусть x,y,z — решение исходного уравнения и $x \geq y \geq z$. Тогда $x \geq 3, y \geq 3, z \geq 2$. Отсюда $\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \leq \frac{1}{3}+\frac{1}{2} \leq \frac{5}{6}$ и, значит, $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{6}$, т. е. $x \leq 6$. Рассматривая значения $x=3, x=4, x=5, x=6$ с учетом неравенства $x \geq y \geq z$, находим решения $x=3, y=3, z=3$; $x=4, y=4, z=2$; $x=6, y=3, z=2$. Остальные решения можно получить, переставляя произвольным образом в каждом из указанных решений значения переменных x,y,z.

3. Если $y=0$, то $x=0$. Пусть $y \neq 0$ и, значит, $x \neq 0$. Если $|x| \leq |y|$, то $(|y|-1)^2 < y^2-|y| \leq y^2+x$ и $y^2+x \leq y^2+|y| = |y|^2+|y| < (|y|+1)^2$. Отсюда $y^2+x=y^2$ и $x=0$, противоречие. Аналогично рассматривается случай $|x|>|y|$.

4. Перепишем уравнение в виде

$$4x^4+4x^3+4x^2+4x+1=4y^2+4y+1,$$

т. е.

$$(2x^2+x)^2+(3x^2+4x+1)=(2y+1)^2.$$

Так как $3x^2+4x+1>0$ при всех целых x, отличных от -1, то $(2x^2+x)^2+(3x^2+4x+1)>(2y+1)^2$. С другой стороны, $2x^2+x \geq 0$ при всех целых x и $(2x^2+x+1)^2=4x^4+4x^3+5x^2+2x+1>4x^4+4x^3+4x^2+4x+1$ при всех x, для которых $x^2-2x>0$, в частности при всех целых, отличных от 0,1,2. Таким образом, для $x \neq -1, x \neq 0$, $x \neq 1, x \neq 2$ имеем $(2x^2+x)^2<(2y+1)^2<(2x^2+x+1)^2$, что невозможно.

4.43. 2. Пусть $a=2a$ при некотором целом a_1. Тогда $4a_1^2=(c-b)(c+b)$, т. е. $a_1^2=\frac{c-b}{2}\cdot\frac{c+b}{2}$, где b и c нечетны. Так как $\frac{c-b}{2}$ и $\frac{c+b}{2}$ взаимно простые, то $\frac{c-b}{2}=n^2, \frac{c+b}{2}=m^2$ при некоторых натуральных m и n.

3. В силу п. 2 получаем $c=m^2+n^2$, $b=m^2-n^2$. Из равенства $a^2+b^2=c^2$ находим $a^2=c^2-b^2=(m^2+n^2)^2-(m^2-n^2)^2=4m^2n^2$. Таким образом, произвольное решение исходного уравнения имеет вид $a=2mn, b=m^2-n^2, c=m^2+n^2$.

4.44. 1. Рассмотрим решение $x_0=0$, $y_0=-1$ данного уравнения. Пусть (x,y) — произвольное решение этого уравнения в рациональных числах. Тогда $y=tx-1$, такое что $x \neq 0$ при некотором рациональном t и $x^2+(tx-1)^2=1$. Из последнего уравнения получаем

$x = \dfrac{2t}{1+t^2}$ при некотором рациональном t. Отсюда $y = \dfrac{2t^2}{1+t^2} - 1 = \dfrac{t^2-1}{1+t^2}$. При $x = 0$ имеем $y = 1$ или $y = -1$. Заметим, что решение $x = 0$, $y = -1$ получается из формул $x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2-1}{1+t^2}$ при $t = 0$. Итак, все решения исходного уравнения имеют вид $x = 0, y = 1$; $x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $y = \dfrac{t^2-1}{1+t^2}$ при некотором рациональном t.

2. Используйте замену $y = t(x-1)$.

3. Используйте замену $y = tx$.

4. Используйте замену $y = tx$.

Глава 5

5.1. 1. Начинающий первым ходом кладет пятак в центр стола.

4. Если n нечетно, первый игрок сначала вычеркивает центральный квадрат; если n четно, первый игрок сначала вычеркивает два центральных квадрата. После такого хода первого игрока остаются два одинаковых прямоугольника, и любой ход состоит в вычеркивании одного или двух квадратов в одном из этих прямоугольников. Последующая стратегия первого игрока такова: какой бы ход ни сделал второй игрок в одном из прямоугольников, первый игрок делает такой же ход в другом прямоугольнике.

5.2. 3. Рассмотрите игру с s камнями в одной кучке и t в другой, $s \geq t$. Пусть $x_0 = 0$ и пусть x_n при $n \geq 1$ — наименьшее натуральное число, удовлетворяющее условиям $x_n > x_{n-1}$ и $x_n \notin \{x_i + i\colon 0 \leq i \leq n-1\}$. Докажите, что у второго игрока есть выигрышная стратегия в том и только в том случае, если существует такое n, что $s = x_n + n$, $t = x_n$.

5. Стратегия второго игрока такова. На каждом из первых трех ходов, если первый игрок заменяет числом одну из звездочек при четной степени x, второй игрок заменяет произвольно выбранным числом одну из звездочек при нечетной степени x, и наоборот, если первый игрок выбирает коэффициент при нечетной степени x, то второй выбирает коэффициент при четной степени x. В результате перед последним ходом второго игрока данный многочлен (обозначим

его f) имеет вид $f(x) = g(x) + ax^m + bx^n$, где все коэффициенты многочлена g уже определены, n нечетно и $m \neq n$. Второй игрок выбирает значение a так, чтобы $2^n f(1) + f(-2) = 0$. Для этого нужно, чтобы $2^n g(1) + g(-2) + (2^n + (-2)^m)a = 0$, так что a не зависит от b. Какое бы значение b ни выбрал первый игрок своим последним ходом, из равенства $2^n f(1) + f(-2) = 0$ следует, что либо $f(1) = f(-2) = 0$, либо одно из чисел $f(1)$, $f(-2)$ положительно, а другое отрицательно, и тогда многочлен f имеет вещественный корень между -2 и 1.

5.3. 1. Пусть X_0 — множество всех заключительных позиций, X_1 — множество всех таких позиций P, что $P \notin X_0$ и есть ход из позиции P в какую-нибудь позицию $Q \in X_0$; X_2 — множество всех таких позиций P, что $P \notin X_0 \cup X_1$ и есть ход из позиции P в какую-нибудь позицию $Q \in X_1$; вообще, для любого натурального n пусть X_n — множество всех таких позиций P, что $P \notin X_0 \cup X_1 \cup \ldots \cup X_{n-1}$ и есть ход из позиции P в какую-нибудь позицию $Q \in X_{n-1}$. Докажем, что каждая позиция принадлежнт одному и только одному из множеств X_n. Если $P \in X_n$, то по определению $P \notin X_m$ при $m < n$, так что ни одна позиция не принадлежит X_m и X_n при $m \neq n$. Предположим, что существует позиция P_0, не принадлежащая ни одному X_n. Тогда P_0 не является заключительной позицией, т. е. существует ход из P_0 в некоторую позицию P_1. Если $P_1 \in X_n$, то по определению $P_0 \in X_{n+1}$, так что P_1 "— тоже позиция, не принадлежащая ни одному X_n. Применив то же рассуждение к P_1, найдем ход из P_1 в позицию P_2, которая не принадлежит ни одному X_n. Продолжая это рассуждение, получаем бесконечную последовательность ходов, что противоречит определению нормальной игры. Таким образом, каждая позиция принадлежит единственному множеству X_n, и полагаем $r(P) = n$ в том и только в том случае, если $P \in X_n$.

3. Определите $v(P)$ индукцией по рангу позиции P.

5.5. 1. Предположим, что у второго игрока есть выигрышная стратегия. Поскольку при любом ходе первого игрока будет стерто число 1, выигрышная стратегия второго игрока не может начинаться со стирания всех делителей числа 1. Поэтому первый игрок может применить следующую стратегию: он сначала стирает только число 1, а затем применяет выигрышную стратегию второго игрока. Таким образом, если второй игрок имеет выигрышную стратегию, то и первый игрок имеет выигрышную стратегию, что невозможно.

Следовательно, второй игрок не имеет выигрышной стратегии, и, значит, такую стратегию имеет первый игрок.

2. Если $m = 2n$, то первый игрок забирает все камни из первой кучки и выигрывает. Пусть $m > 2n$. Предположим, что у второго игрока есть выигрышная стратегия. Если бы первый игрок взял n камней из первой кучки, то поскольку $m - n > n$, второй игрок не может брать камни из второй кучки и потому его выигрышная стратегия требует взять kn камней из первой кучки, где k — некоторое натуральное число, $kn \leq m - n$. Но тогда и первый игрок имеет выигрышную стратегию, первый ход которой — взять $(k+1)n$ камней из первой кучки. Рассуждение заканчивается так же, как и в решении предыдущей задачи.

5.6. В обеих задачах результат игры выражается некоторым числом N. Для того чтобы доказать,что N — результат игры, укажите стратегию каждого из игроков, приводящую к результату, который с точки зрения этого игрока не ниже чем N.

1. Пусть $N = \dfrac{32 \cdot 10^{n-1} + 4}{9}$. Тогда (при $n \geq 2$) первая цифра N равна 3, последняя цифра равна 6 и все остальные цифры равны 5. *Стратегия первого игрока.* Первый игрок называет цифру 5 до тех пор, пока второй игрок не помещает ее в старший разряд одного из чисел. Если второй игрок помещает 5 в старший разряд числа A (а старший разряд B еще не занят), то после этого до конца игры первый игрок называет цифру 1 — в этом случае по окончании игры $A - B \geq 511\ldots111 - 155\ldots555 = N$. Если второй игрок помещает 5 в старший разряд числа B (а старший разряд A еще не занят), то после этого до конца игры первый игрок называет цифру 9 — в этом случае по окончании игры $A - B \geq 955\ldots555 - 599\ldots999 = N$. *Стратегия второго игрока.* Если первый игрок называет 1, 2, 3 или 4, то второй игрок выбирает разряд для этой цифры в следующей очередности: сначала старший разряд числа A, потом любой другой разряд A, потом любой разряд числа B, кроме старшего, и в последнюю очередь — старший разряд числа B. Если первый игрок называет 6, 7, 8 или 9, то второй игрок выбирает разряд для этой цифры в такой очередности: сначала старший разряд числа B, потом любой другой разряд B, потом любой разряд числа A, кроме старшего, и в последнюю очередь — старший разряд числа A. Если первый игрок называет цифру

5, то второй игрок выбирает разряд для этой цифры в следующей очередности: сначала любой разряд числа A, кроме старшего, потом старший разряд числа B, потом любой разряд числа B, кроме старшего, и в последнюю очередь — старший разряд числа A. Если первый игрок хоть раз назовет одпу из цифр 1, 2, 3, 4 и одну из цифр 5, 6, 7, 8, 9, по окончании игры $A - B \leq 0$. Если первый игрок ни разу не назовет цифру 5, 6, 7, 8, 9, то $A - B \leq 444\ldots444 - 111\ldots111 = 333\ldots333 < N$. Аналогично, если первый игрок ни разу не назовет цифру 1, 2, 3, 4, 5, то $A - B \leq 999\ldots999 - 666\ldots666 < N$. Если первый игрок ни разу не назовет цифру 1, 2, 3, 4 и хоть раз назовет цифру 5, то $A - B \leq 955\ldots555 - 599\ldots999 = N$.

2. Для $k = 1,2,\ldots,n$ пусть a_k и b_k — числа, получившие знак на k-м ходе первого и второго игрока соответственно, и пусть α_k, β_k — эти знаки (так что $\alpha_k, \beta_k = \pm 1$). Пусть $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_k a_k$, $T_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \beta_k b_k$. Положим $T_0 = 0$. *Стратегия первого игрока.* Для $k = 1,2,\ldots,n$ число a_k — наибольшее из оставшихся чисел и $\alpha_k = 1$ при $T_k < 0$, $\alpha_k = -1$ при $T_k \geq 0$. Тогда $a_k \leq 2n - k + 1$ и $b_k \leq a_k - 1$. Докажем, что при этой стратегии $|T_n| \leq 3n$. Предположим, что $T_n \geq 0$ (случай $T_n < 0$ рассматривается аналогично). Можно найти наименьшее натуральное число m, такое что $S_k \geq 0$ для всех $k \leq m+1$ и $T_k \geq 0$ для всех $k \geq m$. Заметим, что тогда $\alpha_k = -1$ при всех $k \geq m+1$. Если $T_{m-1} \leq 0$, то $T_n \leq T_{m-1} + a_m + b_m - (a_{m+1} - b_{m+1}) - \ldots - (a_n - b_n) \leq (2n - m + 1) + (2n - m) - (n - m) = 3n - m + 1 \leq 3n$. Если $T_{m-1} > 0$, то $S_{m-1} < 0$ и $\alpha_m = -1$. Поэтому $T_n \leq S_{m-1} + b_{m-1} - (a_m - b_m) - \ldots - (a_n - b_n) < (2n - m + 1) - (n - m + 1) < 3n$. *Стратегия второго игрока.* Второй игрок разбивает все числа на пары $\{1,2\}$, $\{3,4\}$,...,$\{2n-3, 2n-2\}$, $\{2n-1, 2n\}$. Если первый игрок выбирает знак перед каким-нибудь числом не из последней пары, то второй игрок выбирает противоположный знак перед другим числом той же пары. Если первый игрок выбирает знак перед числом из последней пары, то второй игрок выбирает тот же знак перед другим числом этой пары. После того как все знаки выбраны, сумма двух последних чисел равна $\pm(4n-1)$, а сумма чисел в каждой из остальных пар равна ± 1, так что $|T_n| \geq (4n-1) - (n-1) = 3n$.

5.7. Для того чтобы доказать, что в двух множествах поровну элементов, достаточно установить между элементами этих множеств взаимно однозначное соответствие. Если удается установить взаимно однозначное соответствие между конечным множеством X и частью множества Y (отличной от Y), то в множестве X меньше элементов, чем в множестве Y.

1. Поставьте в соответствие каждому k-элементному подмножеству A множества X множество $X \setminus A$, состоящее из $n-k$ элементов.

2. Добавляя элемент a к каждому подмножеству множества X, не содержащему a, получаем все подмножества, содержащие a.

4. Вычитая множество A из каждого подмножества множества X, содержащего A, получаем не все подмножества множества X, не содержащие A.

6. Если в данном множестве нечетное число элементов, утверждение очевидно. Если же в нем четное число элементов, то зафиксируйте один из них и рассмотрите подмножества с четным и с нечетным числом элементов, содержащие и не содержащие зафиксированный элемент.

5.8. Задача решается теми же приемами, что и предыдущая.

1. Каждому решению $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ первого уравнения поставьте в соответствие решение $(x_1+1, x_2+1, \ldots, x_k+1)$ второго уравнения.

3. Каждому решению $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ первого уравнения поставьте в соответствие решение $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ второго уравнения, где y_i — число чисел x_j, удовлетворяющих неравенству $x_j \geq n-i+1$.

5.9. 4. Покажите, что число элементов N множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ вычисляется по формуле $N = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + \ldots + (-1)^{n+1} S_n$ (это и есть формула включения и исключения). Если элемент x множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ принадлежит k множествам из последовательности $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и не принадлежит остальным $n-k$ множествам, то он подсчитан со знаком «+» в правой части формулы включения и исключения столько раз, сколько в множестве из k элементов содержится подмножеств с нечетным числом элементов, а со знаком «−» — столько раз, сколько в множестве из k элементов содержится непустых подмножеств с четным числом элементов. Остается воспользоваться задачей 5.7.6.

5.10. 1. Пусть подмножество B множества X таково, что ни B, ни $X \setminus B$ не равны ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Покажите, что одно из этих множеств — искомое.

2. Покажите, что для любых i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ множество $X \setminus (A_i \cap A_j)$ не равно ни одному из множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, и выведите отсюда, что множество $A_i \cap A_j$ равно одному из множеств A_1, $A_2, \ldots, A_n$. Это верно и для множества $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$.

5.11. 1. Распределите числа по ящикам $0, 1, 2, \ldots, 9$ в соответствии с последней цифрой.

2. Поместите число a в ящик с номером k (где $0 \leq k \leq n$), если $a + k$ или $a - k$ делится на $2n$.

3. Представьте каждое число a в виде $2^k a_1$, где a_1 нечетно, и поместите его в ящик с номером a_1.

4. Вместе с данными числами $a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+1}$ рассмотрите числа $a_{n+1} - a_1, a_{n+1} - a_2, \ldots, a_{n+1} - a_n$.

5. Если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа, то распределите числа a_1, $a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ по ящикам $0, 1, 2, \ldots, n-1$ в соответствии с остатком от деления на n.

6. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_s$ — все различные простые делители произведения данных чисел $(s \leq n)$. Поставьте в соответствие каждому из данных чисел последовательность из нулей и единиц, i-й член которой равен 1, если в разложение данного числа на простые множители число p_i входит в нечетной степени, и 0 — в противном случае. Воспользуйтесь тем, что число таких последовательностей равно 2^s.

7. Вот пример, показывающий, что $k = 16, k = 17, k = 18$ не удовлетворяют условию задачи: $x_i = 1$, если $i \neq 16$, $x_{16} = 19$. Значения k от 31 до 47 исключаются следующим примером: $x_i = 1$, если $i \neq$ $= 1$ и $i \neq k - 17$, $x_1 = 49 - k$, $x_{k-17} = k - 29$. Если $k \leq 12$, то пусть $p_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_i$, $q_i = p_i + k$. Тогда $p_1 < p_2 < \ldots < p_{30} = 48$, $q_1 < q_2 < \ldots < q_{30} = 48 + k$. Получили 60 натуральных чисел, наибольшее из которых $q_{30} \leq 60$. Если ни одно из этих чисел не равно k, то имеется равенство вида $p_i = q_j$, откуда $p_i - p_j = k$. Пусть $19 \leq k \leq 24$ и пусть l — число чисел p_i, принадлежащих отрезку $[1; k-1]$. Тогда в отрезке $[k+1; 2k-1]$ окажется l чисел q_j, и, если предположить, что равенство $p_i = q_j$ ни для каких i, j не выполняется, то в этом отрезке не более чем $k - 1 - l$ чисел p_i. Следовательно, в отрезке $[2k; 48]$ должно быть по крайней мере $31 - k$ чисел p_i, что невозможно, так как $48 - 2k + 1 < 31 - k$.

8. С каждым членом последовательности свяжем пару чисел $(x;y)$, где x — длина самой длинной возрастающей подпоследовательности, начинающейся с данного члена, а y — длина самой длинной убывающей подпоследовательности, начинающейся с данного члена. Предположив, что все значения x не больше m, а все значения y не больше n, покажите, что некоторым двум членам последовательности соответствует одна и та же пара $(x;y)$. Покажите, что это невозможно.

9. Пусть a, b — два числа из одной строки новой таблицы. Пусть a левее b. Рассмотрев числа, меньшие a, и числа, большие или равные b и лежащие в одном столбце с b, покажите, что некоторые два из этих чисел находились в одной строке первоначальной таблицы.

5.12. 1. Если круг радиуса r содержит точку A, то центр этого круга содержится в круге радиуса r с центром в точке A. Поэтому достаточно показать, что из 64 кругов радиуса $1/8$ с центрами в отмеченных точках некоторые три имеют общую точку. Все эти круги содержатся в фигуре, состоящей из точек, удаленных не более чем на $1/8$ от данного квадрата (рис. 9). Сравните площадь этой фигуры и π — сумму площадей кругов.

3. Пусть F — данная фигура, F_1 и F_2 — фигуры, полученные из фигуры F параллельными переносами на $0{,}001$ в направлениях, угол между которыми равен $60°$. Покажите, что фигуры F и F_1, F и F_2, F_1 и F_2 не имеют общих точек и содержатся в квадрате со стороной $1{,}001$. Получите отсюда первую оценку площади фигуры F. Пусть фигуры F_3 и F_4 получены из фигуры F параллельными переносами на $0{,}001\sqrt{3}$ в направлениях, угол между которыми равен по величине углу при вершине равнобедренного треугольника с боковой стороной $0{,}001\sqrt{3}$ и основанием $0{,}001$. Так как фигуры F_3 и F_4 не пере-

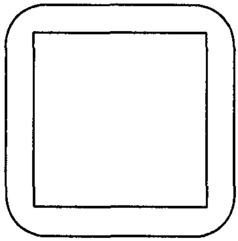

Рис. 9

секаются, то пересечение одной из них с F имеет площадь не больше половины площади F. Пусть это фигура F_3 и пусть фигуры F_5 и F_6 получены из F параллельными переносами на $0{,}001$ в направлениях, образующих угол 30° с направлением переноса, переводящего F в F_3. Покажите, что общая площадь, занимаемая фигурами F, F_3, F_5, F_6, не менее чем $\frac{7}{2}S$, где S — площадь фигуры, и получите отсюда вторую оценку площади фигуры F.

5.13. 1. Инвариантом указанных преобразований является остаток от деления числа на 9. Так как 1 000 000 дает при делении на 9 в остатке 1, то в полученном наборе число единиц на 1 больше числа двоек.

2. Инвариантом является произведение знаков (нужно заменить плюсы на 1, а минусы — на -1).

3. Проверьте, что общее число букв А и В после каждого хода остается четным.

4. Инвариантом является остаток от деления на 2 суммы всех чисел таблицы, кроме чисел, расположенных в третьей и шестой строках. Если в исходной таблице такая сумма не делится на 2, то и в любой получающейся из нее таблице есть числа, не делящиеся на 2.

5. Пронумеруйте секторы последовательно числами $1, 2, \ldots, 10$ и присвойте каждой фишке номер сектора, в котором она расположена. Покажите, что сумма этих номеров все время остается нечетиой.

6. Инвариантом является произведение восьми знаков, расположенных в клетках на рис. 10.

7. Пусть числа $1, 2, \ldots, n$ записаны в строку в некотором порядке. Будем говорить, что числа k и l образуют беспорядок, если большее из них расположено левее меньшего. Покажите, что при перестановке соседних чисел число беспорядков меняет четность.

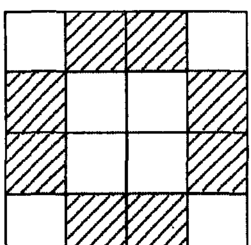

Рис. 10

8. Покажите, что перестановку любых двух чисел можно заменить нечетным числом перестановок соседних чисел.

9. Пронумеруйте автомобили числами $1, 2, \ldots, 25$. Чтобы описать взаимное положение автомобилей после каждого обгона, будем записывать их номера в порядке следования автомобилей, начиная всегда с автомобиля номер 1. Покажите, что при любом обгоне изменится четность числа беспорядков в последовательности номеров.

10. Проверьте, что число беспорядков в перестановке $n, n-1, \ldots, \ldots, 3, 2, 1$ равно $\frac{n(n-1)}{2}$. Покажите, что при указаиных преобразованиях четность числа беспорядков меняется. Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — четное число, то разбейте данные n чисел на пары соседних чисел (оставляя при нечетном n среднее число без пары), а затем образуйте четверки из первой и последней пары, второй и предпоследней и т. д.

5.14. 1. Покажите, что при переходе от каждого множества к следующему уменьшается разность между наибольшим и наименьшим элементом множества.

2. Покажите, что в каждом столбце получившейся таблицы все числа, начиная со второго, образуют возрастающую ограниченную последовательность натуральных чисел.

3. Если в первом столбце есть числа, равные 1, то удвоим строки, содержащие эти числа, а затем вычтем 1 из всех чисел первого столбца. Покажите, что сумма чисел первого столбца будет при этом уменьшаться до тех пор, пока не придем к столбцу, состоящему только из единиц. Из этого столбца получаем столбец из нулей, а затем переходим ко второму столбцу и т. д.

4. Покажите, что число пар соединенных точек разного цвета уменьшается.

5. Покажите, что уменьшается сумма длин отрезков.

6. Будем менять знаки только в строках и столбцах с отрицательной суммой. При этом сумма всех чисел таблицы будет увеличиваться.

7. Пронумеруем точки в произвольном порядке. Предположим, что нашлись соседние точки, расстояние между которыми больше 1. Пусть, например, $|A_1A-2| > 1$. Покажите, что найдется такое k, что

$|A_1A_k| \le 1$ и $|A_kA_{k+1}| \le 1$. Поменяйте номерами точки A_2 и A_k, A_3 и A_{k+1} и т. д. Покажите, что число пар соседних точек, расстояние между которыми больше 1, при этом преобразовании уменьшается.

5.15. 1. Построение любого слога разбиваем на два шага: выбор согласной, выбор гласной.

3, 4. Построение произвольного двузначного числа разбиваем на два шага: выбор первой цифры, выбор второй цифры.

8. Построение произвольного делителя числа n, имеющего вид $2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \cdot 11^d$, где a, b, c, d — целые числа, $0 \le a \le 7$, $0 \le b \le 10$, $0 \le c \le 15$, $0 \le d \le 9$, разбиваем на четыре шага: выбор a, выбор b, выбор c, выбор d.

14. Построение числа разбивается на четыре шага: выбор первой цифры, второй, третьей, четвертой.

15. Построение числа разбивается на шесть шагов: выбор второй цифры, четвертой, первой, третьей, пятой, шестой.

16. Построение числа разбивается на четыре шага: выбор места для двойки, тройки, четверки, пятерки.

5.16. 1. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — элементы данного множества. Разбейте построение произвольного подмножества на m шагов, решая на i-м шаге, включать ли элемент x_i в это подмножество.

3. Выбрать такое число означает выбрать место для нулей.

5.17. 4. Построение такой перестановки разбивается на два шага: выбор места для нуля (после чего положение единицы определено однозначно), выбор перестановки чисел 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

6. Построение такой перестановки разбивается на три шага: выбор места для единицы, выбор места для нуля, выбор перестановки остальных цифр.

8. Построение произвольной расстановки разбивается на четыре шага: выбор перестановки первого, второго, третьего собрания сочинений, выбор перестановки тройки собраний сочинений.

10. На первом шаге 15 мальчиков рассаживаются по одному за каждой партой с левой стороны, на втором шаге рассаживаются 15 девочек, на третьем шаге выбирается множество парт, на которых мальчик и девочка меняются местами.

11. Таких перестановок столько же, сколько и тех, в которых нуль расположен правее единицы.

13. Цифры 0, 1, 2, 3 могут иметь 4! разных расположений друг относительно друга. Все эти расположения одинаково часто встречаются в перестановках цифр 0, 1, 2, …, 9. Нас устраивают три из этих расположений: 0123, 0132, 1312.

5.18. 1. Найдите количество пятизначных чисел, в записи которых все цифры нечетны.

2. Найдите количество перестановок, в которых ни одна из первых трех цифр не равна 0, 3, 6, 9.

3. Найдите количество пятизначных чисел, в записи которых нет одинаковых цифр.

5.19. 1. Разбейте множество всех таких чисел на множества пяти-, четырех-, трех-, дву- и однозначных чисел.

3. Разбейте все такие числа на две части в зависимости от того, равна ли нулю последняя цифра. Выбирайте сначала последнюю цифру, затем первую, вторую, третью, четвертую.

4. Выберем две последние цифры (25, 50 или 75), а затем разобьем все шестизначные числа на пять частей, задаваемых условиями (a_i — i-я цифра числа): среди цифр a_1, a_3, a_5 нет равных; $a_3 = a_5$, но $a_1 \neq a_5$; $a_1 = a_5$, но $a_3 \neq a_5$; $a_1 = a_3$, но $a_3 \neq a_5$; $a_1 = a_3 = a_5$. Выбираем первую цифру, затем третью, вторую, четвертую.

5. Разбейте все перестановки на две части в зависимости от того, занимает ли нуль одно из первых четырех мест или одно из двух следующих.

6. Разбейте все перестановки на две части в зависимости от того, располагается единица на крае или не располагается.

7. Разбейте все перестановки на две части в зависимости от того, занимает ли нуль одно из двух средних мест или нет.

5.20. 3. Покажите, что число карточек, у которых сумма первых двух цифр и сумма двух последних цифр равны n, равно числу карточек, у которых эти суммы равны $18 - n$.

4. $\sum\limits_{k=0}^{n}(n-k+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}.$

5. Следует вычислить $\sum_{k=0}^{27} a_k^2$, где a_k — число карточек, у которых сумма первых трех цифр равна сумме трех последних цифр и равна k. Покажите, что $a_k = a_{27-k}$, так что достаточно вычислить a_k при $k \leq 13$. Если $k \leq 9$, то $a_k = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$ (см. п. 4). При $10 \leq k \leq 13$ нужно из $\frac{(k+1)(k+2)}{2}$ вычесть утроенное число тех решений уравнения $x+y+z=k$, в которых $x \geq 10$.

5.21. 1. Разобьем все 12! перестановок 12 человек на группы, помещая две перестановки в одну группу в том и только в том случае, если в этих перестановках у любого человека одни и те же соседи. Чтобы задать произвольную перестановку из некоторой группы, нужно выбрать место для какого-нибудь человека, после чего положение остальных людей определяется однозначно. Таким образом, каждая группа состоит из 12 перестановок и число групп равно $12!/12 = 11!$.

5. Если бы у нас было две разные единицы, то получили бы 5! разных чисел. Соединив в одну группу два числа, получающиеся одно из другого перестановкой двух единиц, получим, что количество разных пятизначных чисел равно $5!/2$.

10. Отождествите распределения, получающиеся одно из другого некоторой перестановкой ящиков.

5.25. 1. На первом шаге следует выбрать ящик, в котором окажется два шара, а затем разбить все распределения шаров по ящикам на три части в зависимости от цвета двух шаров, попавших в один ящик.

2. Разбейте все распределения на шесть групп, определяемых условиями: есть ящик с тремя шарами одного цвета; есть ящик с тремя шарами, среди которых два одного цвета и один другого; есть два ящика с четырьмя шарами одного цвета, распределенными поровну между ними; есть два ящика с двумя шарами, среди которых три шара — одного цвета и один — другого; есть два ящика с двумя шарами, в одном — два белых шара, в другом — два черных; есть два ящика, в каждом из которых один белый и один черный шар. В каждом случае решение разбивается на три шага: выбор ящиков,

содержащих более одного шара, распределение шаров по этим ящикам, распределение шаров по остальным ящикам.

5.26. 2. Поставьте в соответствие каждому решению $(x_1; x_2; \ldots ; x_m)$ последовательность из нулей и единиц, построенную следующим образом: сначала x_1 единиц, затем 0, x_2 единиц, 0, ..., x_{m-1} единиц, 0, x_m единиц.

3. См. задачу 5.8.1.

5. Введите в уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 20$ новые переменные по формулам $y_i = x_i - 1$.

6. Введите в уравнение $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 20$ новые переменные по формулам $y_i = 6 - x_i$.

5.27. 1. Пусть A_k — множество всех перестановок $(a_1; a_2; \ldots ; a_n)$ чисел 1, 2, ..., n, удовлетворяющих условию $a_k = k$. Докажите, что пересечение i множеств A_k состонт из $(n-i)!$ перестановок, а число таких пересечений равно C_n^i. Искомое число равно $n! - N$, где N — число элементов множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

2. Разбейте построение произвольной раскраски на восемь шагов: раскраска первой, второй, ..., восьмой горизонтали. На первом шаге есть 8! возможностей, а число возможностей на каждом из следующих шагов задается формулой предыдущей задачи при $n = 8$.

3. Число всевозможных распределений m различных шаров по n различным ящикам равно n^m. Обозначим через A_k множество таких распределений, при которых k-й ящик остается пустым. Число элементов в пересечении i множеств A_k равно $(n-i)^m$, а число таких пересечений равно C_n^i. Искомое число равно $n^m - N$, где N — число элементов множества $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

4. Примените предыдущую задачу к случаю $m = n$.

5.28. 1. Обозначив искомую сумму через S_n, докажите, что $S_n = 2S_{n-1}$.

2, 3. Докажите, что эта сумма равна сумме всех членов $(n-1)$-й строки.

4, 5. В этих задачах удобно представить себе треугольник Паскаля как геометрическую фигуру, заменив числа T_n^k точками и расположив эти точки в соответствии с рис. 11, так что точки, соответствующие членам T_{n-1}^{k-1}, T_{n-1}^k, T_n^k, образуют правильный треугольник со

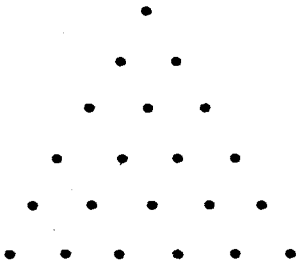

Рис. 11

стороной 1. Около каждой точки поставим число 0 или 1 в зависимости от того, четен или нечетен соответствующий член треугольника Паскаля. Пусть A — вершина треугольника Паскаля, а B и C — крайние точки строки, в которой все числа, кроме двух крайних, равны 0. Пусть D и E — крайние точки строки, номер которой вдвое больше номера строки BC, F — средняя точка этой строки (рис. 12). Покажите, что в треугольниках BDF и CEF нули и единицы расположены точно так же, как в треугольнике ABC.

5.29. 5. Воспользуйтесь тождествами $C^n_{n+k} = C^{n+1}_{n+k+1} - C^{n+1}_{n+k}$.

6. $\sum\limits_{k=0}^{m} C^p_{n+k} = \sum\limits_{k=0}^{m+n-p} C^p_{p+k} - \sum\limits_{k=0}^{n-1-p} C^p_{p+k}$.

5.30. 1. См. задачу 5.21.12.

13. Общий член разложения имеет вид $\dfrac{6!}{l!m!n!}x^{l/2}x^{m/3}x^{n/4}$, где l, m, n — неотрицательные целые числа, $l+m+n=6$. Если $\dfrac{l}{2}+\dfrac{m}{3}+$

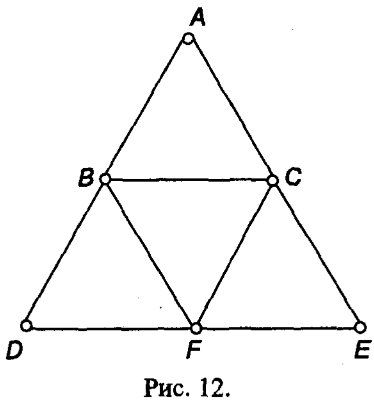

Рис. 12.

$+\frac{n}{4}=2$, то $n=2l$, $m=3(2-l)$. Следовательно, $l=0, m=6, n=0$ или $l=1, m=3, n=2$ или $l=2, m=0, n=4$. Суммпруя соответствующие значения $\frac{6!}{l!m!n!}$, получаем искомый коэффициент.

5.31. 1–4. Положите в формуле бинома $x=1, x=-1, x=-2, x=$ $=9$.

5–7. Дифференцируя формулу бинома, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} kC_n^k x^{k-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

8–10. Интегрируя формулу бинома, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k}{k+1} x^{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.$$

11. Примените индукцию по n и воспользуйтесь тождеством 9.

15. Приравняйте коэффициенты при x^p в левой и правой частях равенства $(1+x)^m(1+x)^n=(1+x)^{m+n}$.

5.32. 1. Примените «принцип ящиков» (см. задачу 5.11).

2. Индукция по n. Для $n=1$ и $n=2$ утверждение верно. Пусть $k\geq 2$. Предположим, что существует простой граф Γ с k вершинами, среди которых нет трех вершин одной и той же степени.

Случай 1: Γ *имеет вершину степени* $k-1$. Тогда Γ не имеет вершин степени 0. Добавив к Γ новую вершину, не соединенную ни с одной из имеющихся вершин, получим требуемый граф с $k+1$ вершиной. *Случай* 2: Γ *не имеет вершин степени* $k-1$. Добавим к Γ новую вершину и соединим ее со всеми вершинами графа Γ. Степени всех прежних вершин Γ увеличились на 1, так что среди них нет трех вершин одной и той же степени и нет вершин степени k. Степень новой вершины равна k, так что получили граф с $k+1$ вершиной, не имеющий трех вершин одной и той же степени.

3. Рассмотрите две несмежные вершины.

5. Следует из п. 4.

6. Рассмотрите граф, у которого вершинами являются данные отрезки и две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие отрезки пересекаются.

7. Пусть $d_1+d_2+\ldots+d_n=2s$. Примените индукцию по s.

8. Для произвольного множества из k вершин определите максимальное число ребер, соединяющих вершины этого множества с вершинами вне этого множества.

5.33. 1. Зафиксируйте вершину a и подсчитайте двумя способами число пар (b,c), где b — вершина, смежная с a, а c — вершина, смежная с b и не смежная с a.

5.34. 2. Если связный граф содержит цикл, то можно удалить ребро, соединяющее две вершины этого цикла, не нарушая связности.

3. Рассмотрите две несмежные вершины.

4. Покажите, что одно из чисел $d_1, d_2, \ldots, d_n$ равно 1, и примените индукцию по n.

5.35. 1. Если граф несвязен, то рассмотрите его наименьшую компоненту связности.

2. Рассмотрите две вершины, расстояние между которыми равно диаметру графа.

3. Применив п. 4 задачи 5.32, докажите, что в данном графе есть вершина степени по крайней мере $n-2$.

4. Зафиксируйте вершину a и докажите индукцией по m, что при $m = 1, 2, \ldots, d$ имеется не более чем $k(k-1)^{m-1}$ вершин на расстоянии m от a.

5.36. 1. Если эйлеров нуть из вершины a в вершину b проходит n раз через вершину c ($c \neq a$ и $c \neq b$), то степень c равна $2n$.

2. Докажите, что самый длинный путь, содержащий данное ребро, является контуром.

3. Удалив все ребра, принадлежащие контуру максимальной длины, снова получим граф с четными степенями всех вершин. Если этот граф содержит хотя бы одно ребро, примените п. 2.

4. Если две вершины нечетной степени соединены ребром, удалите это ребро; в противном случае соедините эти вершины ребром. После этого примените п. 3.

6. См. указание к п. 4.

7. Удвойте каждое ребро данного графа и рассмотрите эйлеров контур в получившемся графе.

5.37. 1. Рассмотрите концы пяти ребер, выходящих из одной вершины.

2. Найдите шесть ребер одного цвета, выходящих из одной вершины, и примените п. 1.

3. Примените индукцию по n.

4. Найдите число неодноцветных треугольников.

5. Докажите, что $r_i(7-r_i) \le 12$ в обозначениях п. 4.

6. Пусть натуральное число s таково, что для каждой пары вершин (a,b) среди остальных вершин имеется по крайней мере s вершин, соединенных с a и b ребрами разного цвета, и выведите отсюда, что $s \le \frac{n-1}{2}$.

5.38. 1. Пусть A и B — враги, сидящие рядом, и пусть B сидит после A по часовой стрелке. Докажите, что можно найти друга A, следом за которым по часовой стрелке сидит друг B, и пересадить людей за столом так, чтобы число пар соседей — врагов уменьшилось.

2. Пусть вершины графа представляют n человек, сидящих за круглым столом. Назовем двух человек друзьями, если соответствующие вершины графа соединены ребром, и врагами в противном случае. Проверьте, что выполнены условия п. 1.

5.39. 1. Докажите индукцией по n, что при нечетном n можно организовать турнир из n команд, в котором все команды одержали поровну побед. Докажите, что при четном n можно организовать турнир из n команд, в котором все команды, кроме одной, одержали поровну побед, а одна команда выиграла у всех остальных.

2. Индукция по числу команд, участвующих в турнире. Утверждение задачи очевидно для двух команд. Пусть $k \ge 2$ и нусть утверждение задачи справедливо для любого турнира из k команд. Рассмотрим турнир, в котором участвует $k+1$ команд. Выберем k из них и расположим их (применяя индукционное предположение) так, что ни одна команда не проиграла следующей за ней. Пусть $A_1, A_2, \ldots, A_k$ — такое расположение и пусть B – $(k+1)$-я команда. Если B не проиграла A_1, то расположим $k+1$ команд так: $B, A_1, A_2, \ldots, A_k$. Если B проиграла A_k, то расположим команды так: $A_1, A_2, \ldots, A_k, B$. Предположим, что B проиграла A_1 и не проиграла A_k. В этом случае можно найти такое i $(1 \le i \le k-1)$, что B проиграла A_i и не проиграла A_{i+1}. Тогда поместим команду B между A_i и A_{i+1}.

5.40. 1. Если вершины a и b данного графа соединены ребром, то оставшиеся $n-2$ вершины разбиваются на два непересекающихся множества: вершины, соединенные с a, и вершины, соединенные с b. Это соображение позволяет оценить число ребер графа.

2. См. решение п. 3.

3. Индукция по q. Если $q = 0$, то $r = n$, $e = C_n^2$. Поскольку любой простой граф с n вершинами имеет не более чем C_n^2 ребер, утверждение задачи выполнено. Предположим, что утверждение задачи выполняется для $q = k$, и докажем его для $q = k+1$. Пусть Γ — граф с $n = (k+1)(s-1)+r$ вершинами и пусть среди любых s вершин этого графа есть две несмежные.

Случай 1: *в графе* Γ *есть* $s-1$ *вершин* $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, *каждые две из которых соединены ребром.* Пусть $b_1, b_2, \ldots, b_m$ — остальные вершины Γ, $m = n-s+1$. Рассмотрим граф Γ', состоящий из вершин $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и всех ребер графа Γ, соединяющих эти вершины между собой. Так как $m = (k+1)(s-1)+r-s+1 = k(s-1)+r$, можем применить к графу Γ' индукционное предположение, в соответствии с которым Γ' имеет не более чем $e' = C_m^2 - rC_{k+1}^2 - (s-1-r)C_k^2$ ребер. Если бы какая-нибудь вершина b_i была соединена со всеми вершинами $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, имели бы s попарно соединенных вершин. Поэтому общее число ребер между вершинами $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и вершинами $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$ не превосходит $m(s-2)$. Кроме того, число ребер, соединяющих между собой вершины $a_1, a_2, \ldots, a_{s-1}$, не превосходит C_{s-1}^2. Следовательно, число ребер графа Γ не превосходит $e' + m(s-2) + C_{s-1}^2$. Таким образом, остается проверить справедливость тождества $C_m^2 - rC_{k+1}^2 - (s-1-r)C_k^2 + m(s-2) + C_{s-1}^2 = C_n^2 - rC_{k+2}^2 - (s-r-1)C_{k+1}^2$, где $m = k(s-1)+r$, $n = (k+1)(s-1)+r$. Мы оставляем эту проверку читателю.

Случай 2: *среди любых* $s-1$ *вершин графа* Γ *есть две несмежные вершины.* Соединяя ребром какие-нибудь две несмежные вершины графа Γ, снова получаем граф с n вершинами, среди любых s вершин которого есть несмежные. Если этот граф удовлетворяет условию случая 1, то доказательство завершено; если нет, то добавим еще одно ребро. Поскольку Γ имеет только конечное число пар вершин, не соединенных ребром, в конце концов придем к графу, удовлетворяющему условию случая 1 и имеющему больше ребер, чем Γ.

Чтобы построить требуемый пример, рассмотрим $s-1$ множеств $V_1, V_2, \ldots, V_{s-1}$, никакие два из которых не имеют общих точек. Предположим, что множества $V_1, \ldots, V_r$ имеют по $q+1$ элементов, а множества $V_{r+1}, \ldots, V_s$ — по q элементов. Пусть элементы множеств $V_1, \ldots, V_{s-1}$ являются вершинами графа Γ, так что Γ имеет $(q+1)r + (s-1-r)q = q(s-1)+r = n$ вершин. Соединим две вершины ребром в том и только в том случае, если они не принадлежат одному и тому же множеству V_i. Тогда среди любых s вершин графа Γ найдутся две, принадлежащие одному и тому же множеству V_i и, стало быть, не соединеиные ребром.

5.41. Примените индукцию по расстоянию между двумя данными перекрестками.

5.42. Разбейте парламент на две палаты произвольным образом и докажите, что если парламентарий имеет в своей палате двух врагов, то, пересадив его в другую палату, уменьшим суммарное число пар врагов, попавших в одну и ту же палату.

5.43. Докажите индукцией по n, что если первоначально сплетню сообщили r жителям, то через n дней ее будут знать $(n+1)r+n$ жителей (или все жители, если в поселке менее чем $(n+1)r+n$ жителей.

Задачу можно переформулировать (и обобщить) следующим образом: доказать, что в связном графе с $(n+1)r+n$ вершинами (n и r — натуральные числа) можно выбрать n так, что любая вершина графа находится на расстоянии, не превосходящем r, от какой-нибудь выбранной вершины. Из любого связного графа можно получить дерево, удалив, если нужно, одно или несколько ребер и сохранив все вершины. Поскольку при этом расстояния между вершинами не уменьшаются, достаточно доказать утверждение задачи для деревьев. Докажем его индукцией по n. При $n=1$ имеется дерево Γ с $2r+1$ вершиной. Пусть a и b — вершины Γ, находящиеся на максимальном расстоянии одна от другой, и пусть $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_m$ — (единственная) последовательность различных вершин, такая, что $c_0 = a$, $c_m = b$ и c_{i-1}, c_i соединены ребром для $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда $m \leq 2r$. Пусть c_j — «средняя» вершина в этой последовательности (т. е. $j = [m/2]$). Тогда расстояния от c_j до a и до b не превосходят r. Нетрудно видеть, что расстояние от любой вершины дерева Γ до c_j не превосходит r. Действительно, если нуть из произвольной вершины x в c_k проходит через c_{j-1}, то он не проходит через c_{j+1}, и наоборот. Поэтому если расстояние от x до c_j больше r, то расстояние от x до a или до b больше m.

Предположим, что утверждение справедливо для деревьев, имеющих не более чем $kr+k-1$ вершин, и докажем его для дерева Г с $(k+1)r+k$ вершинами, $k \geq 2$. Пусть a, b и $c_0, c_1, \ldots, c_m$ имеют тот же смысл, что и в предыдущем абзаце (только теперь $m \leq (k+1)r+$ $+k-1$). Удалим из дерева Г все вершины, единственный путь из которых в вершину c_r проходит через вершину c_{r-1}, и все ребра, выходящие из этих вершин. Так как m — диаметр Г, то расстояние от любой из удаленных вершин до c_r не превосходит r. Поскольку вершины $c_0, c_1, \ldots, c_r$ среди удаленных, получим новое дерево Г′ с не более чем $kr+k-1$ вершинами. По индукционному предположению в этом дереве есть такие $k-1$ вершин, что любая вершина графа Г′ находится от одной из них на расстоянии, не превосходящем r. Добавив к этим вершинам c_r, получим требуемый набор вершин для графа Г.

5.44. Пусть s — самая высокая из стоимостей проезда между двумя городами. Предположим, что в первом маршруте есть один или несколько участков, стоимость проезда по которым равна s. Пусть последовательность городов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ такова, что проезд между A_0 и A_1, A_1 и A_2, $\ldots$, A_{n-1} и A_n стоит s, а проезд по участкам первого маршрута, предшествующим A_0 и следующим за A_n (если такие есть), стоит меньше s. Таким образом, первый путешественник, покупая билеты в городах A_0, A_1, $\ldots$, A_n, n раз уплатит s, а один раз — меньше, чем s. Из способа построения первого маршрута следует, что стоимость проезда между любыми городами A_i, A_j, где $0 \leq i < j \leq n$, равна s. Поэтому второй путешественник, попадая в города $A_0, A_1, \ldots, A_n$, каждый раз, кроме последнего, будет иметь возможность купить билет стоимостью s и, следовательно, купит такой билет, так что из $n+1$ билетов, купленных им в этих городах, по крайней мере n будут иметь стоимость s. Это рассуждение показывает, что у второго путешественника окажется на всем маршруте не меньше билетов стоимости s, чем у первого путешественника. Пусть t — следующая после s стоимость проезда между двумя городами, которая встречается в стране. Установим на участках, стоимость проезда по которым равнялась s, новую стоимость t. Если a_1 и b_1 — старая и новая стоимости проезда по первому маршруту, а a_2 и b_2 — старая и новая стоимости проезда по второму маршруту, то $a_1 - b_1 \leq a_2 - b_2$. Продолжив рассуждение подобным образом, придем к ситуации, в которой все стоимости проезда между городами станут равными. Если при этом проезд по первому маршруту будет стоить a_k, а по второму маршруту — b_k, то $a_1 - a_k \leq b_1 - b_k$ и, так как, очевидно, $a_k = b_k$, то $a_1 \leq b_1$.

Глава 6

6.6. Покажите сначала, что на числовой окружности бесконечно много точек вида $P(n)$, где n — целое число. Чтобы доказать, что на произвольной дуге AB есть точка такого вида (отсюда легко следует утверждение задачи), выберем дугу $A'B'$ той же длины, что и AB, содержащую, по крайней мере, две точки $P(n_1)$ и $P(n_2)$, где n_1 и n_2 — целые числа. Поворот с центром в начале координат, переводящий одну из этих точек в другую, переводит каждую точку вида $P(n)$, где n — целое число, в другую точку такого же вида. Повторив такой поворот достаточное число раз, найдем точку требуемого вида на дуге AB.

6.7. 8. Так как $\pi/2 < 7/3 < \pi$, то $\operatorname{tg} 7/3 < 0$.

10. Так как $-1 \leq \sin 2 \leq 1$, то $-\pi/2 < \sin 2 < \pi/2$, откуда следует, что $\cos(\sin 2) > 0$.

6.9. 2. Отметим на числовой окружности точки $P(1), P(2), \ldots$ $\ldots, P(8)$ (рис. 13). Чтобы изобразить $\operatorname{tg} t$, проведем прямую $x = 1$, называемую *линией тангенсов*; $\operatorname{tg} t$ равен ординате точки пересечения линии тангенсов с прямой $OP(t)$. Аналогично, $\operatorname{ctg} t$ равен абсциссе точки пересечения прямой $OP(t)$ с прямой $y = 1$ — *линией котангенсов* (рис. 14).

Чтобы сравнить, к примеру, $\operatorname{ctg} 4$ и $\operatorname{tg} 7$, нужно сравнить длины дуг $P(\pi)P(4)$ и $P(7)P(\pi/2)$. Первая дуга имеет длину $4 - \pi$, вторая имеет длину $\frac{\pi}{2} + 2\pi - 7$. Неравенство $4 - \pi > \frac{5\pi}{2} - 7$ следует из неравенства $\pi < \frac{22}{7} = 3{,}142\ldots$ Следовательно, точка пересечения прямой $OP(4)$ с линией котангенсов ближе к оси ординат, чем точка пересечения прямой $OP(7)$ с линией тангенсов к оси абсцисс. Так как $\operatorname{ctg} 4 > 0$ и $\operatorname{tg} 7 > 0$, то $\operatorname{ctg} 4 < \operatorname{tg} 7$.

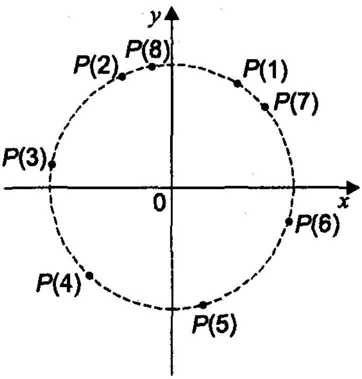

Рис. 13

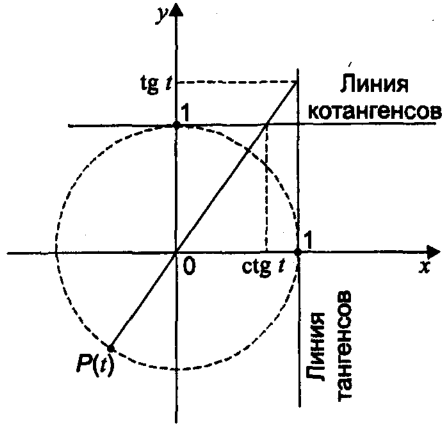

Рис. 14

6.10. 8. Точка $P(t)$, сумма координат которой равна 1, лежит на пересечении числовой окружности с прямой $y+x=1$ (рис. 15). Таких точек две: $P(0)$ и $P(\frac{\pi}{2})$, так что решениями уравнения являются числа вида $2\pi k$ и $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где k — целое число.

17. Неравенству $\frac{y+x}{y-x} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y-x} \geq 0$ удовлетворяют точки из области, заштрихованной на рис. 16.

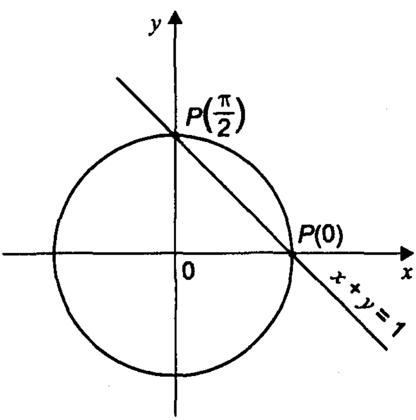

Рис. 15

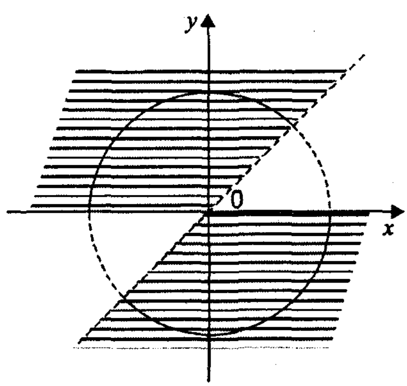

Рис. 16

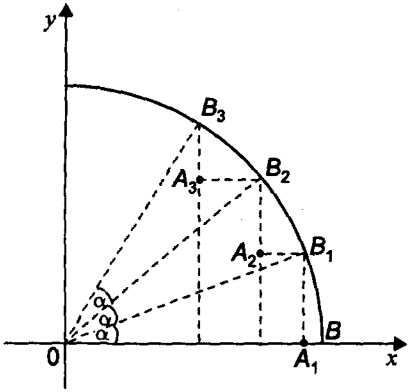

Рис. 17

6.11. 1. Воспользовавшись равенством отрезков BB_1, B_1B_2, B_2B_3 (рис. 17), докажите, что $|A_1B_1| > |A_2B_2| > |A_3B_3|$.

6.12. 3. Замените $\cos 36°$ на $-\cos 144°$.

4. Используйте равенства $\cos 20° = -\cos 160°$, $\cos 120° = -1/2$.

6.13. 2. Так как $\operatorname{ctg}\alpha < 0$ и $\sin\alpha > \cos\alpha$, то точка $P(\alpha)$ лежит во второй четверти.

4. Так как $\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} > \dfrac{5}{13}$, то $\alpha \in [\dfrac{\pi}{4}; \pi]$.

5. $\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha = 3 \Rightarrow \operatorname{tg}^2\alpha - 2 + \operatorname{ctg}^2\alpha = 9$.

7. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$.

8. Разделите числитель и знаменатель дроби на $\cos\alpha$.

6.18. 4. $\sin 64°\sin 34° - \sin 56°\cos 116° = \sin 64°\cos 56° + \sin 56°\cos 64° = \sin 120° = \sqrt{3}/2$.

15. Преобразуйте произведение в сумму.

16. См. п. 3 задачи 6.12.

6.19. 5. Положите $\beta = \dfrac{\pi}{3} + \alpha$ и найдите $\sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{3}\right)$, зная $\sin\beta$.

8. $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = 2 + 2\cos(\alpha - \beta)$.

6.20. 6. $\cos^2(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha-\beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta =$

$= \dfrac{1}{2}\big(1 + \cos(2\alpha + 2\beta) + 1 + \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)\big) = 1.$

6.21. 3. Используйте тождество п. 2.

9. $$\frac{\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}{\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}=\frac{\sin\alpha\cos\left(2\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\left(2\alpha-\frac{1}{2}\right)}=$$
$$=\frac{\frac{1}{2}(\sin3\alpha-\sin\alpha)+\frac{1}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}(\cos3\alpha+\cos\alpha)-\frac{1}{2}\cos\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha.$$

11, 12. Умножьте обе части тождества на $2\sin\frac{\alpha}{2}$ и преобразуйте произведения в суммы.

13. Воспользуйтесь формулой $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$.

6.22. 1. Воспользуйтесь равенствами $2\beta+\alpha=(\alpha+\beta)+\beta$, $\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$.

3. Покажите, что доказываемое равенство равносильно равенству $\operatorname{tg}\beta=\frac{7\sin\alpha-\sin3\alpha}{\cos3\alpha+7\cos\alpha}$, и выведите последнее равенство из условия задачи.

4–8. Выразите γ через α и β и перейдите к безусловному тождеству относительно α, β.

6.23. 5. $\cos A+\cos B+\cos C-\frac{3}{2}=\cos A+\cos B-\cos(A+B)-\frac{3}{2}=-2\cos^2\frac{A+B}{2}+2\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}-\frac{1}{2}$. Рассмотрите последнее выражение как значение квадратной функции $y=-2x^2+2\cos\frac{A-B}{2}x-\frac{1}{2}$ в точке $x=\cos\frac{A+B}{2}$.

6.26. 1. Воспользуйтесь равенством $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

6.27. Уравнения 6, 7 — однородные относительно $u=\sin x$, $v=\cos x$ (см. задачу 2.53), уравнения 8, 9 станут однородными, если умножить правую часть на $\sin^2x+\cos^2x$, уравнение 10 решается заменой $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, уравнения 12 — 14 — заменой $y=\sin x+\cos x$ или $y=\sin x-\cos x$ (в обоих случаях $\sin x\cos x$ легко выражается через y^2).

6.28. Пусть $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{b}{a}$. Тогда

$$a\sin x + b\cos x = a(\sin x + \operatorname{tg}\alpha\cos x) = \frac{a}{\cos\alpha}\sin(x+\alpha).$$

Так как $\cos\alpha > 0$ и $\alpha > 0$, то

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}.$$

6.29. 3. Уравнение приводится к виду $\dfrac{\sin 2x}{\cos 3x\cos 5x} = 0$. Чтобы выяснить, какие корни уравнения $\sin 2x = 0$ удовлетворяют условию $\cos 3x\cos 5x \neq 0$, заметим, что из $\cos x = 0$ следует $\cos 3x = 0$ (и $\cos 5x = 0$), а из $\sin x = 0$ следует $|\cos 3x| = |\cos 5x| = 1$.

4. Замените $\sin 10x$ на $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 10x\right)$.

6. Воспользуйтесь формулой $2\cos^2\alpha = 1+\cos 2\alpha$.

8–10. Преобразуйте произведения в суммы.

11. Уравнение приводится к виду $\dfrac{\cos 9x}{\cos 2x\cos 7x} = 0$. Найдите все решения на промежутке $[0;\pi)$ и выясните, какие из этих решений удовлетворяют условию $\cos 2x\cos 7x \neq 0$.

14–15. Воспользуйтесь формулой из задачи 6.28.

6.30. 4. Так как $|\cos 2x - \cos 4x| \leq 2$, то $(\cos 2x - \cos 4x)^2 \leq 4$, в то время как $4+\cos^2 3x \geq 4$. Поэтому равенство $(\cos 2x - \cos 4x)^2 = 4+\cos^2 3x$ возможно в том и только в том случае, если $\cos 2x = 1$, $\cos 4x = -1$, $\cos 3x = 0$ или $\cos 2x = -1$, $\cos 4x = 1$, $\cos 3x = 0$.

7. Приведите уравнение к виду $\left(\operatorname{tg}x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\operatorname{tg}3x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$.

6.31. 2.

$$\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x) \iff \sin(\pi\cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \pi\sin x\right) \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &\pi\cos x = \frac{\pi}{2} - \pi\sin x + 2\pi k,\\ &\pi\cos x = \frac{\pi}{2} + \pi\sin x + 2\pi k \end{aligned}\right. \quad (k \text{ — целое число}) \iff$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x+\cos x = 2k+\dfrac{1}{2}, \\ \sin x-\cos x = -(2k+\dfrac{1}{2}) \end{array}\right. \quad (k \text{ — целое число}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{4k+1}{2\sqrt{2}}, \\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{4k+1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right. \quad (k \text{ — целое число}).$$

Остается заметить, что каждое из этих уравнений разрешимо лишь при $k=0$.

3.

$$\operatorname{tg} x(\pi \operatorname{ctg} x) = \operatorname{ctg}(\pi \operatorname{tg} x) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = k+\dfrac{1}{2} \quad (k \text{ — целое число}), \\ \operatorname{ctg} x \quad \text{не является целым числом}, \\ 2\operatorname{tg} x \quad \text{не является нечетным числом}. \end{cases}$$

Уравнение $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x = k+\dfrac{1}{2}$ сводится к квадратному уравнению с целыми коэффициентами относительно $t=\operatorname{tg} x$: $2t^2-(2k+1)t+2=0$. Условие неотрицательности дискриминанта этого уравнения исключает значения k, равные -2, -1, 0, 1. Так как все запрещенные значения $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ — рациональные числа, то выясним, какие рациональные корни может иметь полученное квадратное уравнение. В силу утверждения задачи 2.56 это могут быть числа 1, -1, 2, -2, $1/2$, $-1/2$. Подставив каждое из них в уравнение, обнаружим, что запрещенные корни могут появиться лишь при $k=-3$ и при $k=2$, и поэтому для данных значений k уравнение следует решать отдельно.

6.32. 1.

$$\begin{cases} \sin x\cos y = \dfrac{1}{2}, \\ \sin y\cos x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+y = \dfrac{\pi}{2}+2\pi k, \\ x-y = \pi l \end{cases} \quad (k, l \text{ — целые числа}) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k + \dfrac{\pi l}{2}, \\ y = \dfrac{\pi}{4} + \pi k - \dfrac{\pi l}{2} \end{cases} \quad (k, l \text{ — целые числа}).$$

4. Воспользуйтесь тем, что $\sin^2 x \geq \sin^4 x$, $\sin^2 y \geq \sin^4 y$.

6.33. 4. Запишите неравенство в виде $\cos^2 t - \sin^2 t > \cos t - \sin t$ и, положив $x = \cos t$, $y = \sin t$, найдите пересечение числовой окружности с фигурой, задаваемой неравенством $x^2 - y^2 > x - y$.

5. Решите неравенство на промежутке $[0; 2\pi)$ и воспользуйтесь периодичностью.

6.34. 1. Сделайте замену переменной $x = \cos\alpha$ и воспользуйтесь формулой $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$.

2. Сделайте замену переменной $x = 2\cos\alpha$ и разделите обе части уравнения на 2.

3. Сразу отметим, что из условия задачи следует, что $p < 0$. Если $q = 0$, то корни уравнения — это $0, \pm\sqrt{-p}$. Рассмотрим случай $q \neq 0$. Сделаем замену переменной $x = r\cos\alpha$, $r > 0$: $r^3\cos^3\alpha + pr\cos\alpha =$ $= -q$. Подберем r так, чтобы можно было воспользоваться формулой тройного аргумента: $\begin{cases} r^3 = 4k, \\ pr = -3k. \end{cases}$ Отсюда $\dfrac{r^2}{p} = -\dfrac{4}{3}$, $r = \sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$, $k = -\dfrac{pr}{3} = -\dfrac{p}{3}\sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$, и наше уравнение запишется так: $k(4\cos^3\alpha -$ $- 3\cos\alpha) = -q$ или $\cos 3\alpha = -\dfrac{q}{k} = \dfrac{3q}{p}\sqrt{-\dfrac{3}{4p}}$. Модуль правой части меньше 1 (выведите это из условия задачи), поэтому уравнение имеет решение. Выведите из условия задачи также, что x, такой, что $|x| > \sqrt{-\dfrac{4p}{3}}$, не может быть корнем уравнения $x^3 + px + q = 0$.

5. Сделайте замену переменной $x = 2\cos\alpha$. Из формулы $2\cos 2\alpha = (2\cos\alpha)^2 - 2$ выведите формулу $2\cos 2^{n+1}\alpha =$ $= (2\cos 2^n\alpha)^2 - 2$ и воспользуйтесь ею.

6.35. 2, 3. Воспользуйтесь формулой из задачи 6.28.

6.37. Функции 1—3 получены из синуса, тангенса, косинуса линейной заменой переменной. Для нахождения периодов функций 4, 5 можно воспользоваться следующим соображением: если a — одно из значений периодической функции $y = f(x)$, то каждый ее период является разностью некоторых двух корней уравнения $f(x) = a$.

6.38. 5. Представьте y в виде $a\sin 2x + b\cos 2x$ и воспользуйтесь формулой из задачи 6.28.

6.40. 5. Перепишите неравенство в виде

$$(x - \sin(x+y))^2 + \cos^2(x+y) \le 0.$$

6.41. Докажите более сильное неравенство

$$|\sin\alpha_1|\cdot|\sin\alpha_2| + |\cos\alpha_1|\cdot|\cos\alpha_2| \le 1.$$

6.42. См. задачу 1.35.1.

Глава 7

7.1. 2. $\log_{\sqrt[3]{2}} 4 = \log_{2^{\frac{1}{3}}} 2^2 = 6.$

13. Перейдите во всех логарифмах к основанию 2 и сведите $\log_2 18$, $\log_2 36$, $\log_2 72$ к $\log_2 9$.

14. $3^{\log_5 7} = 3^{\frac{\log_3 7}{\log_3 5}} = 7^{\frac{1}{\log_3 5}} = 7^{\log_5 3}$.

15. Воспользуйтесь равенствами $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3}-\sqrt{2}$, $(\sqrt{2}+$ $+\sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6}+5$, $(\sqrt{6}+1)^2 = 2\sqrt{6}+7$.

7.2. 1. Оба логарифма сводятся к $\log_2 3$.

2. Все три логарифма выражаются через $\log_2 3$ и $\log_2 5$.

7.3. 7. $\log_9 80 < 2$, $\log_7 50 > 2$.

8. Сравните $3\log_{12} 5$ и $3\log_{18} 7$.

9. См. неравенство 1 задачи 2.50.

10. $\sqrt{\log_{100} 99 \cdot \log_{100} 101} < \frac{1}{2}(\log_{100} 99 + \log_{100} 101) < 1$.

11. Сравните $\log_3 5$ с корнями уравнения $x^2 - x = 1$.

12. Воспользуйтесь задачей 7.1.11.

7.4. 5. $3^x \cdot 7^{2-x^2} = 21 \Leftrightarrow ax + 2 - x^2 = 1 + a$, где $a = \log_7 3$. Дискриминант квадратного уравнения $x^2 - ax + (a-1) = 0$ равен $(a-2)^2$.

7.5. 7. Полагая $y = (3-2\sqrt{2})^x$, приходим к уравнению $y + \dfrac{1}{y} = 34$, корнями которого являются числа $17-12\sqrt{2}$ и $17+12\sqrt{2}$. Остается заметить, что $(3-2\sqrt{2})^2 = 17-12\sqrt{2}$, $(3-2\sqrt{2})^{-2} = 17+12\sqrt{2}$.

8–12. Каждое из этих уравнений станет однородным (см. задачу 2.53), если в качестве u, v взять некоторые показательные функции.

7.6. 5. $$\log_{6-x} x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = (6-x)^2, \\ x > 0, \\ 6-x > 0, \\ 6-x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

7.7. Во всех уравнениях следует сделать замену переменной.

1. $y = \lg x$.

2. $y = \log_2 x$.

3. $y = \log_x 3$.

4. $y = \log_2 2^x + 3$.

5. $y = \log_3 x$ (предварительно прологарифмируйте уравнение по основанию 3).

6. $u = 2^{\lg x}$, $v = 5^{\lg x}$ — уравнение становится однородным (см. задачу 2.53).

7.8. Во всех уравнениях следует привести логарифмы к одному основанию.

7.9. 1. Левая часть уравнения строго возрастает, а правая — постоянна.

2. Разделите обе части уравнения на 7^x.

4. Прологарифмируйте уравнение по основанию 3 и рассмотрите его при $x > 1$ и при $0 < x \leq 1$.

6. $2^{x^2+x-2} - 2^{x^2-1} = 2^{x^2-1}(2^{x+2}-1)$. Эта функция строго возрастает при $x \geq 0$, отрицательна при $x < -2$ и ограничена сверху числом, меньшим 992, при $-2 \leq x < 0$.

9. Левая часть уравнения строго возрастает, а правая — строго убывает.

7.10. При решении показательных и логарифмических неравенств используются те же приемы, что и при решении уравнений. Следует лишь иметь в виду, что при логарифмировании или потенцировании неравенств по основанию, меньшему 1, знак неравенства меняется на противоположный.

2. $(\sqrt{13})^{3-x} < 9 \Leftrightarrow 3 - x > -2$.

5. $\log_2 x - 1 > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 2$.

6. $\log_{\frac{1}{3}}(1-2x) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x < 3, \\ 1-2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x < \frac{1}{2}$.

9. $2^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x+3}{x-2}} > \frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{3}}\frac{2x+3}{x-2} > -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2x+3}{x-2} < 9, \\ \dfrac{2x+3}{x-2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (3; +\infty)$.

Если потенцирование или логарифмирование проводится по переменному основанию, следует разбить решение на два случая, в одном из которых основание больше 1, а в другом — меньше 1.

10. Неравенство $\log_{3-x} x \le -1$ равносильно совокупности двух систем:
$\begin{cases} 0 < x < 2, \\ \log_{3-x} x \le -1 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2 < x < 3, \\ \log_{3-x} x \le -1 \end{cases}$. Обозначим эти системы (1) и (2) соответственно. Далее,

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x \le \dfrac{1}{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 2, \\ x^2 - 3x + 1 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \le \frac{3-\sqrt{5}}{2};$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x \ge \dfrac{1}{3-x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3, \\ x^2 - 3x + 1 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < x \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$ Осталось объединить решения систем (1) и (2).

7.11. 1. Из первого уравнения $\frac{1}{x} = y - 2$. Прологарифмируйте второе уравнение.

2. Прологарифмируйте первое уравнение.

3. Введите новые переменные $z = \log_2 x$, $t = \log_2 y - 1$.

4. Введите новые переменные $z = \log_6 x$, $t = y$.

5. Докажите, что $x^{\log_8 y} = y^{\log_8 x}$.

Глава 8

8.6. 2. Обозначим данное число через ω. Тогда $\overline{\omega} = \dfrac{\overline{z}^2 + z}{\overline{z}^2 - z} - \dfrac{\overline{z} + z^2}{\overline{z} - z^2} = \omega$.

3. Если $\omega = \dfrac{z-1}{i(z+1)}$, то $\overline{\omega} = \dfrac{\overline{z}-1}{-i(\overline{z}+1)} = \dfrac{\frac{1}{z}-1}{-i\left(\frac{1}{z}+1\right)} = \dfrac{1-z}{-i(1+z)} = \omega$.

8.7. 3. $(x+yi)^2 = 3+4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$ Решив систему, получим ответ.

8.8. 12. $x^4+4=0 \Leftrightarrow x^4+4x^2+4-4x^2=0 \Leftrightarrow (x^2+2)^2-(2x)^2=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x^2+2x+2)(x^2-2x+2)=0$.

13. $x^5 = 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1)=0$. См. задачу 2.54.

15. $x^4+x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow x^4+(x+2)^2=0 \Leftrightarrow (x^2+(x+2)i)(x^2-(x+2)i)=0$.

16. $x^4+2x^3+x^2+4=0 \Leftrightarrow x^2(x+1)^2+4=0 \Leftrightarrow (x(x+1)+2i)(x(x+1)-2i)=0$.

8.11. 7–9. Заметим, что $\operatorname{tg}(5\cdot 10^\circ) = \operatorname{tg}(5\cdot(-26^\circ)) = \operatorname{tg}(5\cdot 46^\circ) = \operatorname{tg}(5\cdot(-62^\circ)) = \operatorname{tg}(5\cdot 82^\circ) = \operatorname{tg}50^\circ$. Выразим $\operatorname{tg}5\alpha$ через $\operatorname{tg}\alpha$, для удобства обозначив $tg\alpha$ через x: $\operatorname{tg}5\alpha = \dfrac{x^5-10x^3+5x}{5x^4-10x^2+1}$. Теперь ясно, что числа $\operatorname{tg}10^\circ$, $\operatorname{tg}(-26^\circ)$, $\operatorname{tg}46^\circ$, $\operatorname{tg}(-62^\circ)$, $\operatorname{tg}82^\circ$ являются корнями уравнения пятой степени.

8.16. 1. Это тождество утверждает, что сумма квадратов длин диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов длин его сторон. Вот комплексное доказательство тождества: $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2 = (z_1+z_2)(\overline{z}_1+\overline{z}_2)+(z_1-z_2)(\overline{z}_1-\overline{z}_2) = 2(z_1\overline{z}_1+z_2\overline{z}_2) = 2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

3. $\sum\limits_{k=1}^{n}|z-z_k|^2 = \sum\limits_{k=1}^{n}(z-z_k)(\overline{z}-\overline{z}_k) = nz\overline{z} + \sum\limits_{k=1}^{n} z_k\overline{z}_k - \overline{z}\sum\limits_{k=1}^{n} z_k - z\sum\limits_{k=1}^{n}\overline{z} = n|z|^2+n = n(|z|^2+1)$.

4. Эти неравенства утверждают, что в треугольнике с вершинами z_1, z_2, z_3 сторона z_1z_2 меньше суммы и больше разности двух других сторон.

5. Сложите неравенства $|z-z_1|+|z-z_2| \geq |z_1-z_2|$, $|z-z_2|+|z-z_3| \geq |z_2-z_3|$, $|z-z_3|+|z-z_1| \geq |z_3-z_1|$.

6. Положим $z_4=(z_1+z_2+z_3)$. Тогда $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, и неравенство можно переписать так: $|z_1+z_2|+|z_2+z_3|+|z_3+z_1| \leq |z_1|+|z_2|+|z_3|+|z_4|$, причем в этом неравенстве, несмотря на его кажущуюся несимметричность, числа z_1, z_2, z_3, z_4 можно произвольным образом переставлять (например, заменяя $|z_1+z_2|$ на $|z_3+z_4|$, а $|z_3+z_1|$ на $|z_2+z_4|$, в левой части получаем $|z_2+z_3|+|z_3+z_4|+|z_4+z_2|$). Так как $z_1+z_2+z_3+z_4=0$, то можно выбрать на комплексной плоскости такие точки W_1, W_2, W_3, W_4, что $W_2-W_1=z_1$, $W_3-W_2=z_2$, $W_4-W_3=z_3$, $W_1-W_4=z_4$. Покажем, что можно выбрать порядок следования чисел z_1, z_2, z_3, z_4 так, чтобы ломаная $W_1W_2W_3W_4$ оказалась самопересекающейся. Если, например, точка W_4 лежит в треугольнике $W_1W_2W_3$, то числа z_1, z_2, z_3, z_4 следует расположить так: z_2, z_3, z_1, z_4. Если же точки W_1, W_2, W_3, W_4 образуют выпуклый четырехугольник, то, меняя местами числа z_1 и $_2$, приходим либо к самопересекающейся ломаной, либо к ломаной, одна из вершин которой лежит в треугольнике, образованном тремя другими вершинами. Итак, пусть отрезки W_1W_2 и W_3W_4 имеют общую точку W. Тогда $|W_2-W_4|+|W_1-W_3| \leq |W_2-W_1|+|W_3-W_4|$, т. е. $|z_2+z_3|+|z_1+z_2| \leq |z_1|+|z_3|$. Остается сложить это неравенство с неравенством $|z_3+z_1| \leq |z_2|+|z_4|$, следующим из равенства $z_3+z_1|=|z_2+z_4|$ и неравенства треугольника.

8.17. 1. Нас интересуют расстояния от точки $2i-3$ до точек круга с центром в точке i и раднусом 2. Наименее и наиболее удаленные от $2i-3$ точки круга — это концы диаметра, лежащего на прямой, проходящей через $2i-3$ и i.

8.19. 1. $z_1z_2=r_1r_2((\cos\alpha_1\cos\alpha_2+\sin\alpha_1\sin\alpha_2)+(\cos\alpha_1\sin\alpha_2+\cos\alpha_2\sin\alpha_1)i)$.

8.20. 5. $$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{20}=2^{10}\left(\frac{\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}}\right)^{20}=2^{10}\left(\cos\frac{\pi}{12}-i\sin\frac{\pi}{12}\right)^{20}.$$

8.22. 1. $\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^3 = \cos^3\alpha + 3i\cos^2\alpha\sin\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha - i\sin^3\alpha$. Приравняем вещественные и мнимые части: $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^3\alpha$, $\sin 3\alpha = 3\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha$. Осталось воспользоваться формулой $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

8.24. 3. Пусть $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Тогда $r^3 = |\omega| = \sqrt{2}$, $3\alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, откуда $r = \sqrt[6]{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$. Полагая $k = 0, 1, 2$ и вычисляя косинус и синус $\pi/12$, $3\pi/4$ и $17\pi/12$, получаем три различных кубических корня из $1 + i$.

8.26. 1. $\omega^5 = \omega^3 \cdot \omega^2 = \omega^2 = \overline{\omega}$.

3. Числа $(a + b\omega + c\omega^2)^n$ и $(a + b\omega^2 + c\omega)^n$ — комплексно сопряженные.

Глава 9

9.1. 4. Считая все три прямые числовыми осями, разобьем их на промежутки вида $[k; k+1)$, где k — целое число. Установим взаимно однозначное соответствие между промежутками $[2k; 2k+1)$ прямой X и промежутками $[k; k+1)$ одной из двух параллельных прямых, а также между промежуткамн $[2k-1; 2k)$ прямой X и промежутками $[k; k+1)$ второй из параллельных прямых.

5. Считая все три прямые осями с общим началом, разбейте их на промежутки $(k; k+1]$, где k — целое неотрицательное число, и $[k; k+1)$, где k — целое отрицательное число.

6. Можно считать, что $a = 0$, $b = 1$. Разбейте отрезок $[0; 1]$ на промежутки $\left[0; \frac{1}{2}\right)$, $\left[\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right)$, $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right)$, … и точку 1, а промежуток $[0; 1)$ — на промежутки $\left(0; \frac{1}{2}\right]$, $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{4}\right]$, … и точку 0.

8. См. рис. 18.

9.2. 6. Представим каждое рациональное число в виде несократимой дроби и обозначим через A_n множество всех дробей $\frac{p}{q}$, у которых $|p| + |q| = n$. Тогда $A_1, A_2, A_3, \ldots$ — конечные множества, объединение которых равно $\mathbb{Q}$. Нумеруя последовательно элементы этих множеств, получаем нумерацию $\mathbb{Q}$.

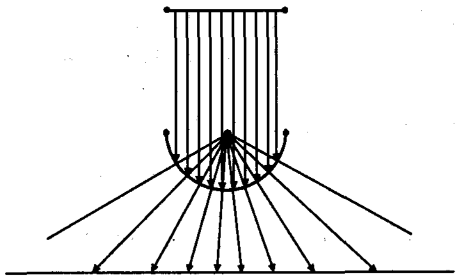

Рис. 18

10. Пусть $X \cap Y = \varnothing$, $Y = \{y_n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Пусть $Z = \{z_n\colon n \in \mathbb{N}\}$ — счетное подмножество множества X. Установим взаимно однозначное соответствие между $X \cup Y$ и X следующим образом: $y_n \mapsto z_{2n}$, $z_n \mapsto z_{2n-1}$ и $x \mapsto x$, если $x \in X \setminus Z$. Сведите случай $X \cap Y \neq \varnothing$ к разобранному.

11. Покажите, что множество таких уравнений счетно, и воспользуйтесь тем, что каждое уравнение имеет конечное число корней.

12. Поставьте в соответствие каждому кругу какую-нибудь содержащуюся в нем рациональную точку, т. е. точку с рациональными координатами.

13. Поставьте в соответствие каждой «восьмерке» пару рациональных точек.

9.3. 5. Воспользуйтесь п. 4 задачи 9.3 и п. 9 задачи 9.1.

6. В силу п. 4 можно считать, что объединение данных множеств — квадрат $ABCD$. Воспользуйтесь тем, что либо одио из данных множеств содержит пересечение квадрата $ABCD$ с некоторой прямой, параллельной прямой AB, либо проекция другого множества на сторону AD совпадает с этой стороной.

9.5. 3. Функция Дирихле, задаваемая условием $f(x) = 1$, если x — рациональное число, и $f(x) = 0$, если x — иррациональное число.

5. Покажите, что коэффициенты a и b можно подобрать так, что число α будет периодом функции $g(x) = f(x) - ax - b$.

9.7. 6. Пусть $x = a$ — ось симметрии графика функции f. Выберем число c так, чтобы центр симметрии графика функции $g(x) = f(x) + c$ оказался на оси абсцисс в некоторой точке b. Тогда для любого числа t справедливы равенства $g(t) = g(2a - t)$, $g(2a - t) = -g(t +$

$+2b-2a)$, откуда $g(t+4b-4a)=g(t)$, т. е. $4b-4a$ — период функции g и, следовательно, функции f. Покажите, что при $a=b$ функция f постоянна.

7. См. задачу 9.5.5.

8. Пусть g — четная функция, h — нечетная функция. Тогда

$$f=g+h \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=g(x)+h(x), \\ f(-x)=g(x)-h(x) \end{cases}$$

при всех x, откуда $g(x)=\dfrac{f(x)+f(-x)}{2}$, $h(x)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{2}$.

9. Искомые функции g и h будем подбирать так, чтобы график g был симметричен относительно начала координат, а график h — относительно точки $(1;0)$. Заметим, что, задав в точке x одно из значений $g(x)$, $h(x)$, однозначно определяем другое. Зададим функцию g на отрезке $[0;1]$ так, чтобы выполнялись равенства $g(0)=0$, $g(1)=$ $=f(1)$, так что $h(1)=0$. Этим однозначно определили функцию g на отрезке $[-1;0]$ и, следовательно, функции g и h на отрезке $[-1;1]$. Но тогда h и g однозначно определены на $[-3;-1]$, h и g однозначно определены на $[3;5]$ и т.д.

9.8. Чтобы найти обратную функцию g, решите уравнение $f(a)=b$ относительно a.

1. $2a+3=b \Leftrightarrow a=\dfrac{b-3}{2}$. Следовательно, $g(x)=\dfrac{x-3}{2}$.

4. $a^2=b(a\in(-\infty;0]) \Leftrightarrow a=-\sqrt{b}$, так что $g(x)=-\sqrt{x}$.

9.9. 2. Если функция φ обратна f, то $g(f(x))=h(x) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow g(f(\varphi(x)))=h(\varphi(x)) \Leftrightarrow g(x)=h(\varphi(x))$.

3. $f(x)=\ln x$, если $x>0$. При $x\leq 0$ функцию f можно определить произвольно.

4. Если $|x|\leq 1$, то $g(x)=h(\arccos x)$. При $|x|>1$ функцию g можно определить произвольно.

5. Если g — такая функция, то $g(\sin(\pi-x))=\cos(\pi-x)$ при всех x.

9.11. 1. $f(x)=x$, если x — рациональное число, и $f(x)=-x$, если x — иррациональное число.

2. Между двумя рациональными числами бесконечно много рациональных чисел, в то время как между двумя целыми числами — конечное число целых чисел.

9.12. 1. Подставьте в данное равенство значение x, найденное из уравнения $\frac{x}{x+1} = t$.

2. Замените в данном равенстве x на $\frac{1}{x}$.

3. Получите еще два равенства, заменив x на $\frac{x+1}{1-3x}$ и на $\frac{x-1}{3x+1}$.

9.13. 5. Если $f(1) = 0$, то $f(x) = 0$ при всех x в силу пп. 2 — 4 и монотонности. Пусть $f(1) \neq 0$, и для какого-нибудь x числа $f(x)$ и $xf(1)$ различны. Пусть рациональное число r заключено между числами $\frac{f(x)}{f(1)}$ и x. Тогда число $f(r) = rf(1)$ заключено между числами $f(x)$ и $xf(1)$. Покажите, что каждое из предположений $r < x$, $r > x$ приводит к противоречию с монотонностью функции f.

9.14. 1. Если $x \geq 0$, то $f(x) = f(\sqrt{x}\sqrt{x}) = (f(\sqrt{x}))^2 \geq 0$.
3. См. задачу 9.13.

9.15. 6. Примените к функции $g(x) = \ln f(x)$ задачу 9.13.

9.16. 3. Докажите существование такого a, что $f(a) = 1$.

9.17. 4. $\left|(-\frac{2}{5})^n\right| < \varepsilon \Leftrightarrow n > \log_{2/5} \varepsilon$. Поэтому можно взять $N = [\log_{2/5} \varepsilon] + 1$ (при $\varepsilon < 1$). Если $\varepsilon \geq 1$, то $N = 1$.

6. $\left|\operatorname{arctg} n - \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} n < \varepsilon \Leftrightarrow \operatorname{arctg} n > \frac{\pi}{2} - \varepsilon$. При $\varepsilon < \pi$ последнее неравенство следует из неравенства $n > \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$. Если $\varepsilon > \pi$, то неравенство выполнено при всех n.

11. $N = 7$.

9.22. 3. $x_n = \dfrac{3 + \frac{1}{n} + \frac{7}{n^2}}{\frac{5}{n^2} - \frac{1}{n} - 1}$.

10. $x_n = \dfrac{\sqrt[3]{3 + \frac{1}{n^3}}}{\sqrt{2 - \frac{1}{n^2}}}$.

11. $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

13. $x_n = (\sqrt{n^2+1}-n)-(\sqrt[3]{n^3+1}-n)$.

9.23. 2. $x_n = \pi - \dfrac{\{\pi n\}}{n}$. 4. $x_n = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\operatorname{arctg} n}{2^n}$.

9.24. 4. $\dfrac{1+3+3^2+\ldots+3^k}{5^{k+2}} = \dfrac{1}{10}\left(\left(\dfrac{3}{5}\right)^{k+1}-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{k+1}\right)$.

9.25. 2. $\dfrac{2n+1}{(n+1)^2} < x_n < \dfrac{2n+1}{n^2+1}$.

9.26. 1. $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(n+1)^p}{an^p} = \dfrac{1}{a}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^p$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{a} < 1$.

9.28. 2. Если $x_1 > 2$, то $x_1 > x_2$ и последовательность (x_n) убывает и ограничена числами 0 и x_1. Если $x_1 \le 2$, то $x_1 \le x_2$ и последовательность (x_n) возрастает и ограничена числами x_1 и 2. Пусть $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Тогда $a = \sqrt{a+2}$ и $a \ge 0$, откуда $a = 2$.

5. Функция $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{a}{x}\right)$ убывает на промежутке $(0;\sqrt{a}]$ и возрастает на промежутке $[\sqrt{a};+\infty)$. Кроме того, на промежутке $(0;\sqrt{a}]$ выполняется неравенство $f(x) \ge x$, а на промежутке $[\sqrt{a};+\infty)$ — неравенство $f(x) \le x$. Поэтому независимо от x_1 $x_2 \ge \sqrt{a}$ и $x_3 \le x_2$, так что, начиная со второго члена, последовательность (x_n) убывает.

7. Так как $x^2+3x+1 \ge x$ при всех x, то последовательность (x_n) возрастает. Остается выяснить, при каких значениях x_1 эта последовательность ограничена. Если $a = \lim_{n\to\infty} x_n$, то $a = a^2+3a+1$, откуда $a = -1$. Поэтому если последовательность (x_n) ограничена, то при всех n выполняется неравенство $x_n \le -1$. Неравенство x^2+3x+ $+1 \le -1$ выполняется при $x \in [-2;-1]$. Поэтому если $x_1 \in [-2;-1]$, то $x_n \in [-2;-1]$ при всех n, и последовательность (x_n) сходится. Если же $x_1 > -1$ или $x_1 < -2$ (тогда $x_2 > -1$), то последовательность (x_n) расходится.

9.30. 3. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\dfrac{1}{2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+x_n} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+x} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Пусть $x_n = \frac{1}{n}$, $y_n = -\frac{1}{n}$. В этом случае $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = -1$.

12. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pi/2$, то последовательность $(\operatorname{tg} n)$ не ограничена и, следовательно, расходится.

9.31. 4. $\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1} = \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(2x+1)} = \dfrac{x+2}{2x+1}$.

7. $\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x-2} = \dfrac{3x-6}{(x-2)(\sqrt{3x-2}+2)} = \dfrac{3}{\sqrt{3x-2}+2}$.

9.32. $f(x) = 0$ при всех x; $g(x) = 1$, если $x = 0$, и $g(x) = 0$, если $x \neq 0$.

9.33. 8. $f(x) = 0$, если $|x| > 1$; $f(x) = 1$, если $|x| < 1$; $f(1) = 1/2$; в точке $x = -1$ функция не определена.

9. $f(x) = 0$, если $|\sin x| < 1$; $f(x) = 1$, если $\sin x = 1$; в точках $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ функция не определена.

12. Пусть a — иррациональное число, $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Пусть $\varepsilon > 0$. Так как есть лишь конечное число рациональных чисел, модуль знаменателя которых меньше $\frac{1}{\varepsilon}$, и так как никакое рациональное число не встречается в последовательности (x_n) бесконечно много раз, то, начиная с некоторого номера N, выполняется неравенство $|f(x_n)| < \varepsilon$, т. е. $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0$, $\lim_{n\to\infty} f(x) = 0$.

13. Пусть $a = 0,a_1a_2\ldots a_s$ — конечная десятичная дробь, получающаяся из $a - \frac{1}{10^s}$ приписыванием справа n девяток. Покажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(a)$.

9.34. 4. $\dfrac{1-\cos x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2$.

5. $\dfrac{\cos x}{\sin 4x} = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}{\frac{\pi}{2}-x} \dfrac{4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(4\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)}\left(-\dfrac{1}{4}\right)$.

9.35. 2. Область определения функции $f(x) = 2^x + 1 - \sqrt{2-x-x^2}$ отрезок $[-2;1]$. Предположим, что $a > -2$. Так как $f(a) > 0$, то в силу непрерывности f при некотором $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $f(a-\varepsilon) > 0$, что противоречит условию. Следовательно, $a = -2$. Аналогично доказывается, что $b = 1$.

9.36. 1. Пусть $f(x) = 2^{x^2-x} - 3\sin x$. Покажите, что $f(0) > 0$, $f(1) < 0$.

5. Пусть $a_0 > 0$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$. Тогда $f(x) = x^n\left(a_0 + \frac{a_1}{x} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{x^{n-1}} + \frac{a_n}{x^n}\right)$. Если $|x| > 1$, то $\left|\frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_n}{x^n}\right| < \frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{|x|}$. Поэтому если $x > \frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{a_0}$, то $f(x) > 0$, а если $x < \frac{|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|}{a_0}$, то $f(x) < 0$. Случай $a_0 < 0$ сводится к разобранному случаю.

9.37. 1. Выберем систему координат так, чтобы прямая l была параллельна оси ординат, и для каждого числа x обозначим через $f(x)$ площадь фигуры, состоящей из всех точек многоугольника M, абсцисса которых не меньше x. Чтобы доказать, что функция f непрерывна, рассмотрим квадрат со сторонами, параллельными осям координат, содержащий многоугольник M. Если p — сторона этого квадрата, то для любых чисел a и x справедливо неравенство $|f(x) - f(a)| \le p|x-a|$, откуда легко следует, что $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$. Если S — площадь многоугольника M, то существуют такие числа α и β, что $f(\alpha) = S$, $f(\beta) = 0$. Но тогда для некоторого числа γ выполняется равенство $f(\gamma) = \frac{1}{2}S$.

2. Примем точку A за начало координат. Для каждого числа α обозначим через P_α точку с координатами $(\cos\alpha; \sin\alpha)$, а через $f(\alpha)$ — площадь фигуры, состоящей из всех точек многоугольника M, лежащих на лучах AP_β, где $\beta \in [\alpha; \alpha+\pi]$. Функция f непрерывна, и для любого α сумма $f(\alpha) + f(\alpha+\pi)$ равна S — площади многоугольника M. Поэтому если $f(\alpha) < \frac{1}{2}S$, то $f(\alpha+\pi) > \frac{1}{2}S$, а если $f(\alpha) > \frac{1}{2}S$, то $f(\alpha+\pi) < \frac{1}{2}S$, и в любом случае существует число γ, для которого $f(\gamma) = \frac{1}{2}S$.

3. Выберем произвольную систему координат и для каждого числа α проведем прямую $l_\alpha \| (OP_\alpha)$, разбивающую многоугольник M

на две равновеликие фигуры, и прямую $m_\alpha \| (OP_{\alpha+\frac{\pi}{2}})$, разбивающую M на две равновеликие фигуры. Пусть A — точка пересечения l_α и m_α. Обозначим через $f(\alpha)$ площадь фигуры, состоящей из всех точек многоугольника M, лежащих на лучах с вершиной в точке A, одинаково направленных с лучами OP_β, где $\beta \in \left[\alpha; \alpha+\frac{\pi}{2}\right]$. Из определения прямых l_α и m_α следует, что $f(\alpha)+f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}S$, где S — площадь многоугольника M, $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+f(\alpha+\pi)=\frac{1}{2}S$, $f(\alpha+\pi)+$ $+f\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}S$, откуда $f(\alpha)=f(\alpha+\pi)$, $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=f\left(\alpha+\right.$ $\left.+\frac{3\pi}{2}\right)$. Число $\frac{1}{4}S$ лежит между $f(\alpha)$ и $f\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, и потому найдется такое γ, что $f(\gamma)=\frac{1}{4}S$. Прямые l_γ, m_γ — искомые.

9.38. 1. Если $f(x)>x$ при всех x, то $f(1)>1$, а если $f(x)<x$ при всех x, то $f(0)<0$.

2. Если $f(x)>x$ при всех x, то $f(f(x))>f(x)>x$, а если $f(x)<x$ при всех x, то $f(f(x))<f(x)<x$.

3. Пусть $\varepsilon \in (0; b-a)$ и функция g определена на отрезке $[a; b-$ $-\varepsilon]$ формулой $g(x)=f(x+\varepsilon)-f(x)$. Так как $g(a)\geq 0$, $g(b-\varepsilon)\leq 0$, то существует число γ, для которого $g(\gamma)=0$.

4. Если обратимая функция f не является строго монотонной, то найдутся такие числа $a<b<c$ из области определения f, что либо $f(b)<f(a)$ и $f(b)<f(c)$, либо $f(b)>f(a)$ и $f(b)>f(c)$. Пусть, например, $f(a)<f(c)<f(b)$ и $d\in(f(c);f(b))$. Тогда существуют $\alpha\in(a;b)$ и $\beta\in(b;c)$, такие, что $f(\alpha)=f(\beta)=d$, что противоречит обратимости f.

5. Воспользуйтесь пп. 3 и 4.

9.39. Если среди положительных периодов функции f нет наименьшего, то функция имеет бесконечно много положительных периодов меньше 1. Так как разность периодов и число, кратное периоду функции f, также являются ее периодами (см. задачу 9.5), то для любого числа α можно найти последовательность периодов функции f, сходящуюся к α. Пусть a — точка непрерывности функции f, b — произвольное вещественное число. Пусть (T_n) —

последовательность периодов функции f, сходящаяся к $a-b$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(T_n+b)=a$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}f(T_n+b)=f(a)$, т. е. функция f постоянна.

Глава 10

10.4. 1. Положим $f(x)=x^3$, $x_0=2$, $\Delta x=0,01$. Тогда $f'(x_0)=12$. Следовательно, $2,01^3=f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x=8,12$.

2. $f(x)=x^8$, $x_0=10$, $\Delta x=-0,002$.

3. $f(x)=\sqrt[4]{x}$, $x_0=1$, $\Delta x=0,04$.

4. $f(x)=2x^3$, $x_0=1$, $\Delta x=0,02$.

5. $f(x)=\sin x$, $x_0=\pi/6$, $\Delta x=\pi/180$.

10.5. 4. Угловые коэффициенты параллельных прямых равны между собой. Произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1. Если α, β — углы наклона двух прямых к оси абсцисс, γ — угол между этими прямыми, $\gamma\neq\pi/2$, то $\operatorname{tg}\gamma=|\operatorname{tg}(\alpha-\beta)|$.

6. Если $y=f(x)$ — данная функция, то $f(-1)=0$, $f'(-1)=4$, $f(2)=10$.

10.6. 3, 4. Воспользуйтесь пп. 1, 2.

6, 8, 9, 10. См. указание к задаче 10.5.4.

11. См. задачу 2.23.

10.8. 6. $f'(x)=\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{2}{(x+1)^3}=\dfrac{2(3x^2+3x+1)}{x^3(x+1)^3}$. Уравнение $f'(x)=0$ корней не имеет. Выясняя знак f' на каждом из промежутков $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;+\infty)$, находим промежутки возрастания $(-\infty;-1)$ и $(0;+\infty)$ и промежуток убывания $(-1;0)$.

10.9. Если дискриминант квадратного уравнения $f'(x)=0$ положителен, то α и β — корни этого уравнения. В противном случае α и β выбираются произвольно.

10.10. 1. $f'(x)=3x^2-12x$. $f'=0$ при $x=0$, $x=4$. На промежутке $[-1;0]$ f возрастает, на промежутке $[0;2]$ убывает. Поэтому наименьшим является значение этой функции при $x=-1$ или при $x=2$. Остается сравнить эти два значения.

5. Найдите сначала наибольшее значение функции $f(x)=6x^5-15x^4-10x^3+1$ на промежутке $[-1;3]$.

14. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4 - 5x^3 - 3x^2$ на промежутке $[1; +\infty)$. Эта функция убывает на промежутке $\left[1; \frac{15+\sqrt{321}}{8}\right)$ и возрастает на промежутке $\left(\frac{15+\sqrt{321}}{8}; +\infty\right)$, и потому ее наименьшее значение в натуральных точках достигается в одной из точек, ближайших к $\frac{15+\sqrt{321}}{8}$, т. е. при $n = 4$ или $n = 5$. Сравните эти значения.

16. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $f(x) = x^3 + 2x + 1$ при $-1 \leq x \leq 0$ и проверьте, что первое не меньше -2, а второе не больше 2.

10.11. 1. Пусть A — точка с координатами $(-1; 2)$. Проведем через точку A произвольную прямую с положительным угловым коэффициентом и обозначим через M точку пересечения этой прямой с осью абсцисс, а через N — точку пересечения этой прямой с осью ординат (рис. 19). Задача состоит в нахождении минимума $|OM| + |ON|$. Пусть t — угловой коэффициент прямой MN. Переменная t может принимать любое положительное значение, и, задавая значение t, однозначно определяем положение точек M и N и, следовательно, величину $f(t) = |OM| + |ON|$. Так как t — тангенс угла наклона прямой MN к оси абсцисс, то $|ON| = 2 + t$, $|OM| = \frac{2+t}{t}$, $f(t) = \frac{2+t}{t} + 2 + t = t + \frac{2}{t} + 3$. Так как $f'(t) = 1 - \frac{2}{t^2}$, то $f'(t) < 0$ при $0 < t < \sqrt{2}$, $f'(t) > 0$ при $t > \sqrt{2}$. Следовательно, $f(\sqrt{2}) = 3 + 2\sqrt{2}$ — наименьшее значение суммы $|OM| + |ON|$.

4. Пусть $(x_0; y_0)$ — координаты точки A, t — абсцисса произвольной точки M графика функции f, t_0 — абсцисса точки B. Тогда если $\varphi(t) = |AM|^2 = (t - x_0)^2 + (f(t) - y_0)^2$, то $\varphi'(t_0) = 0$. Так как $\varphi'(t) = 2(t - x_0) + 2(f(t) - y_0)f'(t)$, то приходим к равенству $f'(t) = -\frac{t_0 - x_0}{f(t_0) - y_0}$. Заметим теперь, что $\frac{f(t_0) - y_0}{t_0 - x_0}$ — это угловой коэффициент прямой AB, и воспользуемся тем, что произведение угловых коэффициентов взаимно перпендикулярных прямых равно -1.

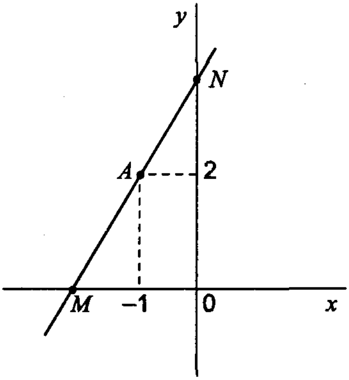

Рис. 19

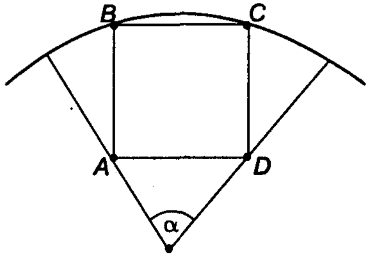

Рис. 20

6. Пусть t — абсцисса точки A. Можно считать, что $t>0$. Так как угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2$ в точке A равен $2t$, то угловой коэффициент прямой AB равен $-\frac{1}{2t}$. Уравнение прямой AB имеет вид $y=-\frac{1}{2t}(x-t)+t^2$. Найдем теперь абсциссу u точки B из уравнения $-\frac{1}{2t}(u-t)+t^2=u^2$, а затем найдем наименьшее значение функции $f(t)=(t-u)^2+(t^2-u^2)^2$ при $t>0$.

9. Пусть $ABCD$ — произвольный прямоугольник, вписанный в данный сектор (рис. 20). Обозначим через x длину стороны AB, параллельной оси симметрии сектора. Переменная x может принимать любое значение из промежутка $(0;R)$, и, задав это значение, однозначно определяем прямоугольник $ABCD$ и его площадь $f(x)$. Выразите длину стороны BC через R, α, x, найдите функцию $f(x)$ и исследуйте ее на промежутке $(0;R)$.

10.12. 2. Так как при $x=0$ все три функции принимают одно и то же значение, то достаточно доказать, что при $x>0$ справедливо неравенство $\frac{1}{2}-\frac{x}{4}<\frac{1}{2\sqrt{1+x}}<\frac{1}{2}$. Неравенство $\frac{1}{2\sqrt{1+x}}<\frac{1}{2}$ очевидно. Для доказательства второго неравенства заметим, что при $x=0$ оно превращается в равенство, а при $x>0$ справедливо неравенство $-\frac{1}{4}<-\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}}$.

8. Докажем, что при $\alpha<x<\pi/2$ справедливо неравенство $\alpha\sin x<x\sin\alpha$. Так как при $x=\alpha$ оно превращается в равенство,

то достаточно доказать, что при $\alpha < x < \pi/2$ справедливо неравенство $\alpha \cos x < \sin \alpha$, которое является следствием неравенств $\alpha < \operatorname{tg} \alpha$ и $\cos x < \cos \alpha$.

10.13. 4. Примените неравенство из п. 2 к $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x+1}}$.

5. Примените неравенство из п. 2 к $\left(1+\dfrac{1}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{x+2}}$.

10.14. 1. $f'(x) = 2x^2 - 2x - 4 = 2(x+1)(x-2)$. Следовательно, f возрастает на промежутках $(-\infty; -1]$ и $[2; +\infty)$ и убывает на промежутке $[-1; 2]$.

10.15. 3. Если $f(x) = 12x^4 - 12x^3 - 3x^2 - 5$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет корни $x = 0$ и $x = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{8}$. Так как при $x = 0$, очевидно, $f < 0$, на промежутке $\left[\dfrac{3-\sqrt{17}}{8}; 0\right]$ f возрастает, а на промежутке $\left[0; \dfrac{3+\sqrt{17}}{8}\right]$ f убывает, то уравнение не имеет корней на этих промежутках. Так как при $x = 1000$ и $x = -1000$, очевидно, $f > 0$, то уравнение имеет по одному корню на промежутках $\left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{17}}{8}\right]$ и $\left[\dfrac{3+\sqrt{17}}{8}; +\infty\right)$.

11. Если $f(x) = 2x^4 + 2ax^3 - a^2x^2 + 1$, то $f'(x) = 8x^3 + 6ax^2 - 2a^2x = 8x(x+a)(x-a/4)$. Значения f при $x = -a$, $x = 0$, $x = a/4$ равны соответственно $1 - a^4$, 1, $1 - \dfrac{3a^4}{128}$. Поэтому число корней зависит от знака a и от знака чисел $1 - a^4$, $1 - \dfrac{3a^4}{128}$.

10.17. $f'(x) = 3x^2 - a$. Если $a \le 0$, то $f' \ge 0$ при всех x, так что наименьшее значение f на отрезке $[0; 1]$ равно 0, а наибольшее значение равно $1 - a$ и $1 - a = 2$ при $a = -1$. Пусть $a > 0$. Тогда f убывает на отрезке $\left[0; \sqrt{\dfrac{a}{3}}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\sqrt{\dfrac{a}{3}}; +\infty\right)$. Если $\sqrt{\dfrac{a}{3}} \ge 1$, т. е. $a \ge 3$, то f принимает на отрезке $[0; 1]$ свое наибольшее значение при $x = 0$, а наименьшее — при $x = 1$. Решая уравнение $0 - (1 - a) = 2$, находим $a = 3$. Если $\sqrt{\frac{a}{3}} < 1$, т. е. $a < 3$, то наименьшее значение f на отрезке $[0;1]$ равно $\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)^3 - a\sqrt{\frac{a}{3}} = -\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}$, а наибольшим значением являяется большее из чисел 0, $1 - a$, т. е. 0 при $1 \le a \le 3$ и $1 - a$ при $0 < a < 1$. Остается решить уравнение $1 - a + \frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} = 2$ на промежутке $(0;1)$. Последнее уравнение корней не имеет, так как $1 - a < 1$ и $\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}} < 1$ при $0 < a < 1$.

10.18. $f'(x) = 3x^2 + 2ax = x(3x + 2a)$. Если $a \ge 0$, то $-\frac{2a}{3} \le 0$, и на отрезках $[0;1]$, $[1;3]$ функция f строго возрастает, так что эти значения a не удовлетворяют условию задачи. Если $a < 0$, то рассмотрите случаи $0 < -\frac{2a}{3} < 1$, $-\frac{2a}{3} \ge 1$.

10.19. Положив $t = \sin x$, решите ту же задачу для функции $f(t) = t(2t^2 + a - 1)$, определенной на отрезке $[-1;1]$.

10.20. 7. Представьте подынтегральную функцию в виде $2x^{-2} + 3x^{-4} - 2x^{-5}$.

9. $\dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

10. $\cos^2 \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos x$.

12. $\operatorname{tg}^x = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 1$.

13. $$\int_{-1}^{1}(|2x - 1| - |x|)^2\,dx = \int_{-1}^{0}(1 - x)^2\,dx + \int_{0}^{1/2}(1 - 3x)^2\,dx + \int_{1/2}^{1}(x - 1)^2\,dx.$$

10.21. 4. Преобразуйте произведение $\sin 3x \cos 5x$ в сумму.

5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)\cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos x + \cos 3x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x$.

6. $x^2+2x+2=(x+1)^2+1$.

7. $x^2+4=4\left(\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+1\right)$.

9. $\sqrt{2-x^2}=\sqrt{2}\sqrt{1-\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)^2}$.

12. $\sqrt{1+\sin x}=\left|\sin\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right|$.

10.22. 1. $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{-a}^{0} f(-x)\,dx +$

$\displaystyle+\int_{0}^{a} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$

3. $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx + \int_{b+T}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{b}^{b+T} f(x)\,dx.$

10.23. 1. Если положить $t=\varphi(x)=x^3+1$, то $\varphi'(x)=3x^2$, так что данный интеграл равен $\displaystyle\frac{1}{3}\int_{1}^{2}\sqrt{t}\,dt$.

2. $t=x^8,\ f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

3. $t=x\sqrt{x},\ f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

4. $t=\cos x,\ f(t)=\dfrac{1}{t^3}$.

5. $t=\operatorname{arctg} x,\ f(t)=t^2$.

6. $\operatorname{tg}^4 x=\operatorname{tg}^2 x\left(-1+\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=1-\dfrac{1}{\cos^2 x}+\operatorname{tg}^2 x\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

10.24. 6. Найдите наименьшее и наибольшее значения подынтегральной функции на каждом из отрезков $[1{,}5;2]$, $[2;3]$, $[3;3{,}5]$ и представьте данный интеграл в виде

$$\int_{1,5}^{2}\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{2}^{3}\frac{x^2}{x-1}\,dx+\int_{3}^{3,5}\frac{x^2}{x-1}\,dx.$$

10.25. Проинтегрируйте данную функцию на отрезке $[0;2\pi]$.

10.26. 1. $h(t)=\int\limits_a^b (tf(x)+g(x))^2\,dx \geq 0$ как интеграл от неотрицательной функции.

2. Рассмотрите дискриминант квадратного уравнения $h(t)=0$.
3. Положите в п.2 $g(x)=1$.
4. Положите в п.3 $f(x)=\sqrt{1+x^3}$.
5. Положите в п.3 $f(x)=\sqrt{1+x^4}$.

10.27. 2. $F(x)=\int\limits_0^{x+1}\frac{t}{1+\sin^2 t}dt-\int\limits_0^x \frac{t}{1+\sin^2 t}dt$. Если $\varphi(t)=$ $=\frac{t}{1+\sin^2 t}$, то $F'(x)=\varphi(x+1)-\varphi(x)$.

3. Если $\varphi(t)=\sqrt[3]{1+t^4}$, то $F'(x)=2x\varphi(x^2+1)$.

10.28. 1. Воспользуйтесь задачей 10.27.

2. $\int\limits_1^{xy}\frac{1}{t}dt=\int\limits_1^{x}\frac{1}{t}dt+\int\limits_x^{xy}\frac{1}{t}dt$. Последний интеграл после замены переменной $t=xz$ равен $\int\limits_1^{y}\frac{1}{z}dz$.

4. См. рис. 21.

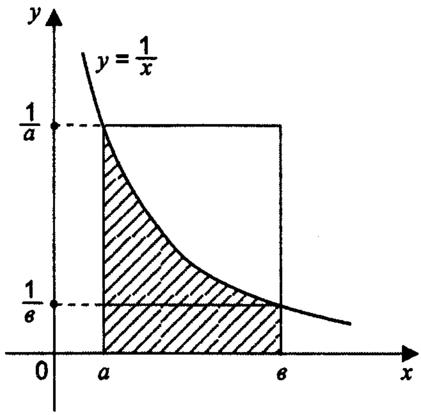

Рис. 21

5. Примените предыдущие неравенства к $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{n}$.

6, 7. Используйте неравенства п. 5.

8. Последовательность возрастает (см. задачу 10.13.4) и ограничена сверху (см. п. 6). $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Примените п. 4 к $b = n+1$, $a = n$ и задачу 9.25.

10.29. См. задачу 10.2.

10.30. 2. $f(x) = e^{\sin x \ln x}$, $f'(x) = e^{\sin x \ln x}(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$.

10.32. См. задачу 10.15.

4. Покажите, что при $a > 1$ из неравенства $\log_a x > x$ следует неравенство $a^x < x$, а из неравенства $\log_a x < x$ следует неравенство $a^x > x$, и потому данное уравнение равносильно уравнению $\log_a x = x$. Пусть $0 < a < 1$, $f(x) = \log_a x - a^x$. Тогда $f'(x) = \frac{a^{-x} - x\ln^2 a}{xa^{-x}\ln a}$, так что знак функции $f'(x)$ совпадает со знаком функции $g(x) = a^{-x} - x\ln^2 a$. Покажите, что $g'(x) = 0$ при $x = x_0 = -\log_a(\ln\frac{1}{a})$, и выведите отсюда, что при $a \geq 1/e$ уравнение $\log_a x = a^x$ имеет один корень. Покажите, что неравенство $g(x_0) \geq 0$ равносильно неравенству $a \geq \frac{1}{e^e}$. Если $a < \frac{1}{e^e}$, то уравнение $f'(x) = 0$ имеет два корня α и β $(\alpha < \beta)$. Тогда $f(x)$ убывает при $x \in (0; \alpha]$, возрастает при $x \in [\alpha; \beta]$ и убывает при $[\beta; +\infty)$. Так как при достаточно малых x выполняется неравенство $f(x) > 0$, а при достаточно больших x — неравенство $f(x) < 0$, то из неравенств $f(\alpha) < 0$, $f(\beta) > 0$ будет следовать, что уравнение $f(x) = 0$ имеет три корня. Чтобы установить эти неравенства, проверьте, что если x_1 — корень уравнения $\log_a x = x$, то $f(x_1) = 0$, а $g(x_1) > 0$, так что $x \in (\alpha; \beta)$.

10.33. 1, 2, 4, 5. См. задачу 10.12.

3. Положите $x = 1$ в неравенстве п. 2 и подберите такое n, для которого $\frac{3}{(n+1)!} < 0{,}02$.

6. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

7. Исследуйте функцию $f(x) = \log_{a+x}(b+x)$.

8. Исследуйте функцию $f(x) = e\ln x - x$.

10.34. 3. См. задачи 3.6. и 10.28.6.

4. См. задачи 3.6. и 10.28.5.

6. Замените в п. 4 n на $n!$.

10.35. 1. Умножьте неравенства на $n!$.

10.36. 1. Функция, удовлетворяющая уравнению $f'(x) = x^2$, имеет вид $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + C$. Найдите C из условия $f(2) = 1$.

3. Искомая функция задается равенством $f(x) = \ln x + C_1$ при $x > 0$ и равенством $f(x) = \ln(-x) + C_2$ при $x < 0$. Найдите C_1 и C_2 из условий $f(e^2) = 1$, $f(-e^2) = 2$.

10.37. 5. Искомая площадь равна $\int\limits_0^{\pi/2} \sin y\,dy$.

8. Искомая площадь равна $\int\limits_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \left(2 - \frac{1}{x^2}\right) dx + \frac{1}{2}$. Ее можно также представить в виде $\int\limits_1^2 (y - \frac{1}{y^2})\,dy$.

10. Искомая площадь равна $2\int\limits_1^2 ((1+2x-x^2) - (x-1))\,dx$.

12. Найдите уравнения касательных.

13. Достаточно провести доказательство для параболы $y = x^2$ (см. задачу 2.23).

10.38. 1. См. рис. 22. Пусть t — абсцисса точки параболы, $t > 0$. Прямая, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к параболе, задается уравнением $y = -\frac{x}{2t} + t^2 + \frac{1}{2}$ (см. решение задачи 10.11.6). Абсциссы точек пересечения этой прямой с параболой $y = x^2$ — это корни уравнения $x^2 + \frac{x}{2t} - (t^2 + \frac{1}{2}) = 0$. Так как одна из этих абсцисс равна t, то другую можно найти из теоремы Виета: она

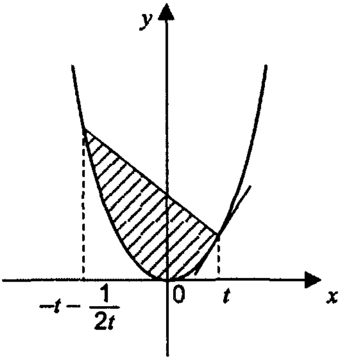

Рис. 22

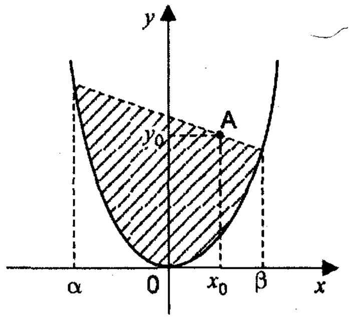

Рис. 23

равна $-t-\frac{1}{2t}$. Таким образом, требуется найти наименьшее значение функции $S(t)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}((\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2)\,dx$, где $\alpha=-t-\frac{1}{2t}$, $\beta=t$. Вычислим интеграл: $S(t)=\frac{(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)}{2}-\alpha\beta(\beta-\alpha)-\frac{\beta^3-\alpha^3}{3}=$ $=\frac{(\beta-\alpha)^3}{6}=\frac{1}{6}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^3$. Следовательно, $S'(t)=\frac{1}{2}\left(2t+\frac{1}{2t}\right)^2\left(2-\right.$ $\left.-\frac{1}{2t^2}\right)$. Так как $t>0$, то $S'(t)=0$ при $t=1/2$. Легко видеть, что $S(1/2)$ — искомое наименьшее значение площади.

3. См. рис. 23. Пусть α, β $(\alpha<\beta)$ — корни квадратного уравнения $x^2=a(x-x_0)+y_0$, D — дискриминант этого уравнения. Тогда $\alpha+\beta=a$, $\alpha\beta=ax_0-y_0$, $D=a^2-4ax_0+4y_0$, $\beta-\alpha=\sqrt{D}$. $S(a)=$ $=\int\limits_{\alpha}^{\beta}(ax-\alpha\beta-x^2)dx$. Вычислив интеграл, получим $S(a)=\frac{1}{6}D\sqrt{D}$. Площадь $S(a)$ принимает наименьшее значение в той же точке, что и функция $f(a)=D^3=(a^2-4ax_0+4y_0)^3$. Так как $f'(a)=3D^2(2a-4x_0)$ и $D>0$, то $f'(a)=0$ при $a_0=2x_0$, откуда следует, что при $a=a_0$ справедливо равенство $x_0=\frac{\alpha+\beta}{2}$, равносильное утверждению задачи.

10.39. 2. Если $F(x)$ — первообразная функции $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, то $F(t)$ (при $t>0$) — площадь фигуры, заштрихованная на рис. 24.

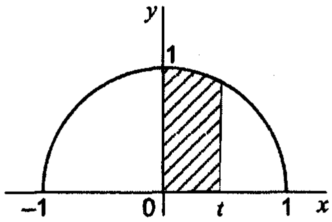

Рис. 24

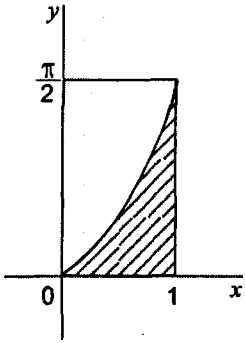

Рис. 25

3. $\int\limits_0^1 \arcsin x\,dx = \dfrac{\pi}{2} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y\,dy$ (рис. 25).

10. См. рис. 26.

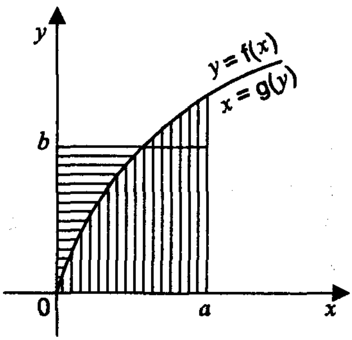

Рис. 26

11. Примените предыдущее неравенство к функции $f(x) = x^{p-1}$.

12. Рассмотрим график функции $f(x) = \sqrt[4]{x^4+1}$, который делит квадрат 3×3 на две части с площадями S_1 и S_2 (рис. 27). При этом имеем $\int\limits_0^3 \sqrt[4]{x^4+1}\,dx = S_1 + S_3$, и, учитывая, что функция $g(x) = \sqrt[4]{x^4-1}$ обратна к функции $f(x)$, получаем, что $\int\limits_1^3 \sqrt[4]{x^4-1}\,dx = S_2$. Поэтому сумма интегралов равна $S_1 + S_2 + S_3$, и поскольку S_3

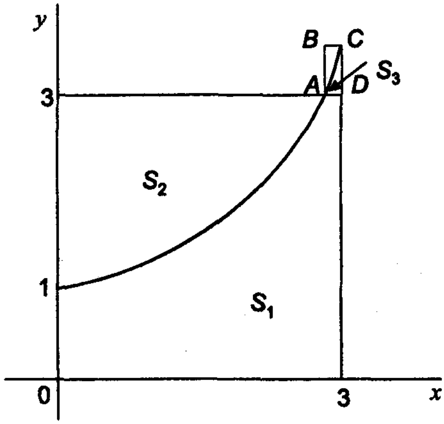

Рис. 27

меньше, чем площадь прямоугольника $ABCD$, которая не превосходит $0{,}0001$, то требуемые неравенства доказаны.

13. Примените п. 10 к функциям $f(x) = e^x - 1$, заданной на промежутке $[0; a]$, и $g(x) = \ln(x+1)$, заданной на промежутке $[0; b]$.

10.40. 1. $V = \pi \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^2\,dx$. 2. $V = \pi \int\limits_{0}^{1} (1-y)\,dy$.

3. Сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси абсцисс и проходящей через точку x на этой оси $(-3 \le x \le 2)$, — кольцо с внешним радиусом 10 и внутренним радиусом $10 - (6 - x - x^2)$, так что $V = \pi(500 - \int\limits_{-3}^{2} (4 + x + x^2)^2\,dx)$.

4. $V = \pi \int\limits_{0}^{\pi} \sin^2 x\,dx$.

5. $V = \pi \int\limits_{-r}^{r} ((R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2)\,dx$.

10.41. 1. Сечение данного тела в точке y оси ординат плоскостью, перпендикулярной оси ординат, — квадрат с диагональю $2\sqrt{y}$, $V =$
$= \int\limits_{0}^{1} 2y\,dy$.

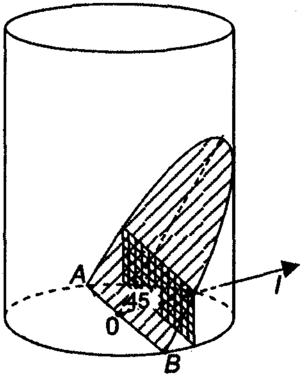

Рис. 28

2. Сечение данного тела в точке x оси абсцисс, перпендикулярное оси абсцисс, — два одинаковых круга радиуса $\sqrt{1-x^2}$, $V = \int_{-1}^{1} 2\pi(1-x^2)\,dx$.

4. Примите точку пересечения прямых l_1 и l_2 за начальную точку оси l, перпендикулярной этим прямым. Сечение данного тела плоскостью, перпендикулярной оси l и проходящей через точку x этой оси, — квадрат, сторона которого равна хорде круга радиуса R, отстоящей на расстояние $|x|$ от центра круга.

5. Примите центр нижнего основания цилиндра за начальную точку оси l, лежащей в плоскости нижнего основания и перпендикулярной диаметру AB (рис. 28). Сечение заштрихованного на рисунке тела плоскостью, перпендикулярной этой оси, — прямоугольник. Если его нижнее основание находится на расстоянии x от диаметра AB, то площадь прямоугольника $S(x) = 2x\sqrt{R^2-x^2}$. $V = \int_0^R 2x\sqrt{R^2-x^2}\,dx = \int_0^{R^2} \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}R^3$ (здесь $t = R^2 - x^2$, см. задачу 10.23).

6. См. рис. 29. Общую точку нижних оснований примите за начальную точку оси, направленной по общей касательной нижних оснований. Тогда $S(x)$ — площадь равнобедренного треугольника, полученного при пересечении двух одинаковых параллелограммов (рис. 30), общее основание которых имеет длину $2\sqrt{R^2-x^2}$, высота равна h, тангенс острого угла равен h/R.

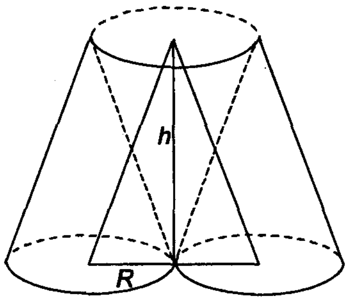

Рис. 29

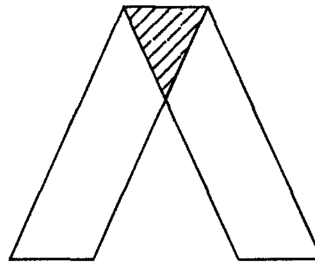

Рис. 30

10.42. 1. Абсцисса точки в момент t_0 равна $-1+\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{t_0} v(t)\,dt$.

В задачах 2 — 9 искомая величина выражается интегралом от некоторой функции, первообразную которой нужно найти. Покажем, как это делается на примере задачи 3. Пусть точка с массой m — начальная точка некоторой оси, стержень лежит на этой оси и концы его имеют координаты c и $c+l$. Для произвольного $x \in [c; c+l]$ обозначим через $F(x)$ силу гравитационного взаимодействия между точечной массой m и отрезком $[c;x]$ стержня. Тогда $F(x+h)-F(x)$ — сила гравитационного взаимодействия между массой m и отрезком $[x;x+h]$. Так как масса этого отрезка равна Ml/h и любая его точка отстоит от массы m на расстояние, заключенное между x и $x+h$, то имеют место неравенства $F_1 \le F(x+h)-F(x) \le F_2$, где F_1 — сила взаимодействия точечных масс m и Ml/h, расстояние между которыми равно $x+h$, а F_2 — сила взаимодействия тех же масс, расположенных на расстоянии x, так что $F_1=\gamma\frac{mMh}{l(x+h)^2}$, $F_2=\gamma\frac{mMh}{lx^2}$ (коэффициент γ зависит от выбора системы единиц). Деля все члены получающихся неравенств на h и переходя к пределу при $h \to 0$, имеем $F'(x)=\frac{\gamma mM}{lx^2}$, откуда искомая сила равна $\int\limits_{c}^{c+l}\frac{\gamma mM}{cx^2}\,dx$.

10.43. 1. $f(x)=Ce^{2x}$. Найдите C из условия $f(2)=1$.

10.44. 2. Пусть $f(x)$ — число бактерий через x секунд. Тогда $f'(x)=kx$, $f(x)=Ce^{kx}$. Коэффициенты C и k определяются из условий $f(0)=N_0$, $f(1)=N_1$. Остается решить уравнение $Ce^{kx}=10N_0$.

ЧАСТЬ 3. ОТВЕТЫ

Глава 1

1.1.1. Четное. **2.** Один. **3.** Да. **4.** Белый. **5.** Молчаливый — Евгений, болтливый — Борис, толстый — Георгий, лысый — Алексей, хозяин дома — Виктор, ненавидел Георгия — Дмитрий.

1.8. 1. $\exists x(x \geq 1)$. **2.** $\exists x \forall y(x+y < x^2)$. **3.** $\forall x(y^2 > x \wedge x^2 \leq y)$. **4.** $\exists y(y = 1 \wedge x \leq y)$.

1.9. 1. $x > 1$. **2.** $\varnothing$. **3.** $y \leq -1$. **4.** x — любое число. **5.** y — любое число. **6.** $x < 0$. **7.** $x > 0$.

1.10. Верны утверждения пп. 2, 3, 5, 6.

1.11. Верны утверждения пп. 2, 4, 6.

1.12. 1. $\{2,3,4\}$. **2.** $(5;10]$. **3.** $\varnothing$. **4.** Множество всех чисел, кратных шести. **5.** Множество всех квадратов. **6.** $\{-1\}$.

1.13. 1. $\{-1,0,1,2,3,4\}$. **2.** Множество всех чисел, не делящихся на 18. **3.** $(-4;+\infty)$.

1.14. 1. $\{3\}$. **2.** $\varnothing$. **3.** $\{12n+6 : n \in \mathbb{N}\}$. **4.** $(1;+\infty)$.

1.15. 1. $\{7,8\}$. **2.** $\{0,3,4,7,8\}$. **3.** $\{0,3,4\}$. **4.** $\{0,3,4\}$. **5.** $\{1,2,7,8,9\}$.

1.19. Верны утверждения 1 и 3.

1.21. 5. $0{,}28$; $0{,}(3)$; $0{,}(142857)$; $1{,}1(6)$; $0{,}7(3)$; $1{,}2(3)$.

1.24. 1. $\alpha+\beta = 2{,}5387\ldots$; $\alpha-\beta = 2{,}0635\ldots$; $\alpha\beta = 0{,}5467\ldots$; $\dfrac{\alpha}{\beta} = 9{,}684\ldots$. **2.** $\alpha+\beta = 4{,}151\ldots$; $\alpha-\beta = 2{,}0959\ldots$; $\alpha\beta = 3{,}2107\ldots$; $\dfrac{\alpha}{\beta} = 3{,}0391\ldots$

1.25. 1. 20 девяток. **2.** 20 нулей. **3.** 20 девяток. **4.** 20 нулей.

1.26. 1. $\sqrt{11}$. **2.** $2\sqrt{5}$. **3.** $\sqrt{10}+\sqrt{11}$. **4.** $\sqrt{11}$.

1.28. 1. $\sqrt{2}$. **2.** $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **3.** $2-\sqrt{3}$. **4.** $3+\sqrt{6}$. **5.** $\dfrac{13-5\sqrt{5}}{2}$. **6.** $\dfrac{6+3\sqrt{2}+2\sqrt{15}+\sqrt{30}}{2}$. **7.** $\dfrac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$. **8.** $\dfrac{1+2\sqrt{2}-3\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{8}}{7}$. **9.** $\dfrac{1-\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{49}}{8}$. **10.** $\dfrac{\sqrt[3]{5}-1}{4}$.

1.29. **1.** $2+\sqrt{5}$; $\sqrt{5}-\sqrt{2}$; $\sqrt{7}-\sqrt{5}$. **3.** $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

1.31. **1.** $\{-1,3\}$. **2.** $\{-1,4\}$. **3.** $\varnothing$. **4.** $[-1;2]$. **5.** $\{2\}$. **6.** $[2;+\infty)$. **7.** $\{3,7\}$. **8.** $[1;5]$. **9.** $(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$. **10.** $(-3;-2]\cup[2;3)$. **11.** $(-\infty;3]$. **12.** $(-4;2)$.

1.33. **1.** $\left[\dfrac{5}{7};\dfrac{6}{7}\right)$. **2.** $\left[0;\dfrac{1}{3}\right)$. **3.** $\left[n+\dfrac{1}{2};n+1\right)$. **4.** $[2;2{,}25)$. **5.** $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{2}\right)\cup\left[\dfrac{2}{3};\dfrac{4}{3}\right)\cup\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{3}\right)$. **6.** $\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

1.35. **5.** $3;\dfrac{13}{4};\dfrac{16}{5};\dfrac{19}{6};\dfrac{22}{7}$.

1.36. **1.** $\{-4\}$. **2.** $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$. **3.** $\left\{\dfrac{1}{2},1,2\right\}$. **4.** $\{1,2\}$. **5.** $\{4\}$. **6.** $\{2,3,4,5\}$.

1.37. **1.** $[3;4)$. **2.** $[-1;0)\cup[2;3)$. **3.** $[-3;0)$. **4.** $[0;2]$. **5.** $(1;2]$. **6.** $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$. **7.** $\varnothing$. **8.** $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

Глава 2

2.1. **1.** $y=-x+2$. **2.** $x=2$. **3.** $y=2x$. **4.** $y=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{13}{15}$. **5.** $y=-x+4$.

2.2. **1.** $(-4;8]$. **2.** $[-1;+\infty)$. **3.** $\left[1;\dfrac{5}{3}\right]$. **4.** $(-\infty;2)$.

2.3. **1.** 2. **2.** $(-\infty;0)$. **3.** -1. **4.** 0. **5.** $[-1;1]$. **6.** $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

2.4. **1.** $\left[-\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{4}\right]$. **2.** $\left(-\dfrac{2}{3};1\right)$. **3.** $\left(-\dfrac{7}{2};\dfrac{13}{2}\right)$.

2.8. **1.** $\left(\dfrac{1}{4};\dfrac{2}{3}\right]$. **2.** $\left[0;\dfrac{1}{3}\right]\cup\left[\dfrac{7}{8};1\right)$. **3.** $[0;1)$. **4.** $\{n+0{,}4\mid n\in\mathbb{Z}\}$. **5.** $\left\{\left[n;n+\dfrac{1}{2}\right)\Big| n\in\mathbb{Z}\right\}$. **6.** $\left\{\left[n+\dfrac{1}{3};n+1\right)\Big| n\in\mathbb{Z}\right\}$.

2.9. **1.** $[-1;+\infty)$. **2.** $\{0\}$. **3.** $[-1;2]$. **4.** $(0;+\infty)$. **5.** $[0;2]$. **6.** $\{-1,2,5\}$.

7. $[0;1]\cup\{3,4\}$. **8.** $\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{5}{2};3\right]\cup\left[4;\frac{9}{2}\right)$. **9.** $[-1;3]\cup[4;5]$.

10. $(-\infty;0)\cup(1;3)\cup(4;+\infty)$.

2.10. 1. $\{1\}$. **2.** $\left\{-4;\frac{2}{3}\right\}$. **3.** $\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **4.** $[1;+\infty)$.

2.11. 1. $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right]$. **2.** $\left(\frac{4}{3};8\right)$. **3.** $(-\infty;2)$.

2.14. 1. Если $a<1$, то решений нет; если $a=1$, то $x=2$; если $a>1$, то $x=3a-1, x=a+1$.

2. Если $a<-3$ или $a>3$, то решений нет; если $a=-3$, то $x=-1$; если $a\in(-3;-2)$, то $x\in[-1;2a+5]$; если $a\in[-2;2]$, то $x\in[-1;1]$; если $a\in(2;3)$, то $x\in[2a-5;1]$; если $a=3$, то $x=1$.

3. $\left(-\frac{4}{3};0\right)$.

2.15. 1. $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **2.** Если $n=2k-1$, то $x=a_k$, если $x=2k$, то $x\in[a_k,a_k+1]$.

2.18. 1. $\left[\frac{7}{3};3\right]$. **2.** $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **3.** $(-\infty;1]$. **4.** $\varnothing$. **5.** $\{-2\}$.

6. $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup(-1;+\infty)$.

2.25. 1. $y=\frac{5}{2}x^2-\frac{1}{2}x$.

2.27. 1. $[0;+\infty)$. **2.** $\left[-\frac{1}{4};2\right]$. **3.** $[-5;+\infty)$. **4.** $[-6;+\infty)$. **5.** $\left(-1;\frac{1}{8}\right]$.

6. $(3;4]$.

2.29. 1. $\left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

2.33. 1. Если $a\le-\frac{5}{4}$ или $a\ge5$, то решений нет;

если $a\in\left(-\frac{5}{4};1\right]$, то $x\in\left(\frac{3-\sqrt{5+4a}}{2};\frac{3+\sqrt{5+4a}}{2}\right)$;

если $a\in(1;5)$, то $x\in\left(a-1;\frac{3+\sqrt{5+4a}}{2}\right)$.

2. Если $a \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $a \ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то решений нет;
если $a \in \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2};0\right)$, то $x \in (-\sqrt{1-a^2};a) \cup (-a;\sqrt{1-a^2})$;
если $a \in \left[0;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, то $x \in (-\sqrt{1-a^2};-a) \cup (a;\sqrt{1-a^2})$.

3. Если $a < -\dfrac{1}{4}$ или $a > 2$, то решений нет;
если $a = -\dfrac{1}{4}$, то $x = -\dfrac{1}{2}$; если $a = 2$, то $x = 1$;
если $a \in \left(-\dfrac{1}{4};2\right)$, то $x \in \left[1-\sqrt{2-a};\dfrac{-1+\sqrt{1+4a}}{2}\right]$.

4. Если $a < -1$ или $a \ge \dfrac{1}{4}$, то решений нет; если $a = -1$, то $x = 0$;
если $a \in (-1;\sqrt{2}-2)$, то $x \in [-a-1;a+1]$;
если $a \in [\sqrt{2}-2;0)$, то $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2};a+1\right]$;
если $a \in \left[0;\dfrac{1}{4}\right)$, то $x \in \left(\dfrac{1-\sqrt{1-4a}}{2};\dfrac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$.

2.35. 1. $\left(\dfrac{9}{16}\right)$. **2.** $\{-1\}$. **3.** $(-\infty;-6) \cup (2;+\infty)$.

2.36. 1. $\left[-\dfrac{9}{4};0\right)$. **2.** $[-2;1]$. **3.** $\{1,2\}$. **4.** $(-1;4)$. **5.** $\varnothing$.
6. $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right] \cup \left[0;\dfrac{1}{2}\right)$. **7.** $\left[-\dfrac{1}{2};0\right]$. **8.** $\left[-1;\dfrac{1}{2}\right]$.

2.39. 1. $-\dfrac{5}{7}; \dfrac{67}{9}; \dfrac{440}{27}$. **4.** $x^2-4x+1=0$.

2.40. 1. $(-\infty;0)$. **2.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **3.** $(-\infty;0]$. **4.** $(-\infty;-3) \cup (3;+\infty)$.
5. $a=-2$; $b=-\dfrac{4}{3}$.

2.41. 1. $\left(-\dfrac{8}{3};+\infty\right)$. **2.** $(-\infty;-1] \cup [8;+\infty)$. **3.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right]$.

2.42. 1. $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$. **2.** $(-\infty;+\infty)$. **3.** $\left(-\infty;-\dfrac{9}{2}\right] \cup [-2;+\infty)$.

4. $\left[-\frac{3}{5};1\right]$.

2.43. 1. $a=1, b=1$; $a=-3, b=3$. **3.** $a=5$.

2.44. 1. $\frac{P^2}{4}$. **2.** $2R^2$. **3.** $\frac{S}{2}$. **4.** $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$. **5.** С — центр окружности.

2.47. $y=x^2-\frac{1}{2}$.

2.51. 1. $\left\{-1,\frac{38}{7}\right\}$. **2.** $\{5\}$. **3.** $\left\{\frac{3-5\sqrt{3}}{12},\frac{3+5\sqrt{3}}{12}\right\}$. **4.** $\{-2\}$.

2.52. 1. $\{-1,1\}$. **2.** $\left\{-\sqrt[3]{\frac{5}{2}},2\right\}$. **3.** $\left\{\frac{-3\pm\sqrt{177}}{12},-\frac{3}{2},1\right\}$.

4. $\left\{-1\pm\sqrt{7},\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$. **5.** $\left\{-\frac{1}{2},0,3,5\right\}$. **6.** $\left\{1,3,\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}\right\}$.

7. $\{7\pm\sqrt{34}\}$. **8.** $\left\{\frac{1}{6},1,\frac{7\pm\sqrt{601}}{12}\right\}$. **9.** $\left\{\frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}\right\}$.

2.53. 1. $\{\pm1\}$. **2.** $\{0,\pm\sqrt{3},3\}$. **3.** $\left\{\frac{4}{5},3\right\}$.

2.54. 1. $\left\{1,\frac{-11\pm\sqrt{57}}{8}\right\}$. **2.** $\left\{-1,-\frac{1}{3},\frac{3\pm\sqrt{6}}{3}\right\}$.

3. $\left\{-\frac{2}{3},1,\frac{-1\pm\sqrt{97}}{12}\right\}$. **4.** $\left\{\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$.

2.56. 2. $\left\{1,\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$. **3.** $\{2\}$. **4.** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. **5.** $\left\{\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right\}$.

2.57. 1. $\left\{\frac{-3-\sqrt[3]{6}}{2}\right\}$. **2.** $\left\{-1,-\frac{1}{2},2\right\}$.

3. $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{21}}{2},\frac{-3\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$.

2.58. 1. Если $a>\frac{1}{4}$, то решений нет; если $a=\frac{1}{4}$, то $x=-\frac{1}{2}$; если $a<\frac{1}{4}$, то $x=\frac{-1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$.

2. Если $a<-\frac{1}{8}$, то решений нет; если $a=-\frac{1}{8}$, то $x=3$; если $a=0$, то $x = 1$, если $a \in \left(-\frac{1}{8};0\right) \cup (0;+\infty)$, то $x = \frac{-2a-1\pm\sqrt{8a+1}}{2a}$.

3. Если $a < \frac{2-4\sqrt{2}}{2}$ или $a > \frac{2+4\sqrt{2}}{2}$, то решений нет; если $a = \frac{2-4\sqrt{2}}{2}$, то $x = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$; если $a = \frac{2+4\sqrt{2}}{2}$, то $x = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$; если $a = 0$, то $x = \frac{1}{2}$; если $a \in \left(\frac{2-4\sqrt{2}}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{2+4\sqrt{2}}{2}\right)$, то $x = \frac{3a+2\pm\sqrt{-7a^2+4a+4}}{4a}$.

4. Если $a \in (-1-\sqrt{2};-1+\sqrt{2})$, то $x = a-1$; если $a \le -1-\sqrt{2}$ или $a \ge -1+\sqrt{2}$, то $x = a-1$, $x = \frac{1+a\pm\sqrt{a^2+2a-7}}{2}$.

2.59. 1. $(-\infty;-5) \cup \left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **2.** $(-1;0) \cup (0;2)$. **3.** $\left(-6;-\frac{1}{2}\right)$.

4. $(-\infty;-1] \cup \left[0;\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3};1\right]$. **5.** $(-\infty;-3) \cup [1;2) \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

2.60. 1. $(-\infty;-2] \cup [-1;1] \cup [2;+\infty)$.

2. $(-2-\sqrt{3};-2) \cup \left(\frac{-1-\sqrt{7}}{3};-1\right) \cup (-2+\sqrt{3};0) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{7}}{3};1\right)$.

3. $(-\infty;-2] \cup \left[\frac{3-\sqrt{13}}{2};2\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right]$.

4. $9-\infty;-1] \cup [1-\sqrt{3};2] \cup [1+\sqrt{3}]$.

2.61. 1. $\{(6;4),(-6;-4)\}$. **2.** $\left\{(3;4),\left(-\frac{3}{5};-\frac{16}{5}\right)\right\}$.

3. $\left\{(3;-2),(-2;3),\left(\frac{-1+\sqrt{29}}{2};\frac{-1+\sqrt{29}}{2}\right),\right.$ $\left.\left(\frac{-1-\sqrt{29}}{2};\frac{-1-\sqrt{29}}{2}\right)\right\}$.

4. $\{(1;2),(-3;-2)\}$. **5.** $\{(2;1),(-2;-1)\}$.

6. $\left\{(0;0),\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right),\left(\frac{5}{3};\frac{5}{6}\right)\right\}$.

7. $\left\{(2;1),(-2;-1),\left(\frac{4\sqrt{7}}{7};-\frac{\sqrt{7}}{7}\right),\left(-\frac{4\sqrt{7}}{7};\frac{\sqrt{7}}{7}\right)\right\}$.

8. $\{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\}$. 9. $\{(3;5),(5;3)\}$.

10. $\{(-2;3),(3;-2)\}$.

11. $\left\{(6;6),\left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2};\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right),\left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2};\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

12. $\{(1;2;4),(-1;-2;-4)\}$. 13. $\{(3;4;5),(-3;-4;-5)\}$.

14. $\{(1;1;1),(1;-1;-1),(-1;1;-1),(-1;-1;1),(0;0;0)\}$.

15. $\{(1;0),(0;1)\}$.

16. $\{(2;2),(-2;-2),(-2\sqrt{2};2\sqrt{2}),(2\sqrt{2};-2\sqrt{2})\}$.

17. $\{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\}$. 18. $\{(0;0;0)\}$. 19. $\{(1;1;1)\}$.

2.62. 1. $\{-4,3\}$. 2. $\{3\}$. 3. $\{2\}$. 4. $\{1\}$. 5. $\{3\}$. 6. $\{2\}$. 7. $\left\{\frac{7}{2}\right\}$. 8. $\{-2,1\}$.

2.63. 1. $\left\{\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\right\}$. 2. $\{6\}$. 3. $\left\{0,\sqrt[7]{1296}\right\}$. 4. $\{3,440\}$. 5. $\{1-\sqrt{1+\sqrt[3]{4}},1+\sqrt{2}\}$. 6. $\{-4,11\}$. 7. $\left\{\frac{5\pm\sqrt{37}}{2}\right\}$.

2.64. 3. $\{\pm\sqrt{5}\}$. 4. Решений нет. 5. $\left\{0,\pm1,\pm\sqrt{1+\frac{3\sqrt{3}}{2}}\right\}$.

2.65. 1. $\{2\}$. 2. $\{1\}$. 3. $\{2\}$. 4. $\{0\}$. 5. Решений нет.

2.66. 1. $(-\infty;-4)\cup(-1;+\infty)$. 2. $\left(-1;\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2};2\right)$. 3. $\left[-\frac{3}{2};-\frac{2}{3}\right)\cup(3;+\infty)$. 4. $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;5]$. 5. $(4;7)$. 6. $(-\sqrt{2};3)$. 7. $\left(-\infty;\frac{-5-\sqrt{97}}{6}\right]\cup\left[\frac{-5+\sqrt{97}}{6};2\right)$. 8. $[-3;9]$.

2.67. 1. Если $a<0$, то решений нет; если $a=0$, то x — любое положительное число; если $a>0$, то $x\in[0;a)\cup(16a;+\infty)$.

2. Если $a\le\frac{1}{2}$, то решений нет; если $a\in\left(\frac{1}{2};1\right]$, то $x\in[0;2a-1)$; если $a\in(1;+\infty)$, то $x\in[0;a^2]$.

3. Если $a\in(-\infty;0]$, то решений нет; если $a\in(0;1)$, то $x\in(1-2\sqrt{a};1+2\sqrt{a})$; если $a\in[1;+\infty)$, то $x\in[-a;1+2\sqrt{a})$.

4. Если $a\in\left(-\infty;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, то $x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2a}\right]$; если $a\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};0\right]$,

то $x \in (-\infty; \sqrt{1-a^2}]$; если $a \in \left(0; \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$, то $x \in \left[-\dfrac{1}{2a}; \sqrt{1-a^2}\right]$; если $a \in \left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}; 1\right)$, то $x \in [-\sqrt{1-a^2}; \sqrt{1-a^2}]$; если $a = 1$, то $x = 0$; если $a \in (1; +\infty)$, то решений нет.

2.71. **1.** $x = -\dfrac{1}{2}$. **2.** $x = -1$; $x = 0$; $x = \dfrac{1}{2}$. **3.** $x = 3$. **4.** $x = -10$; $x = -9; \ldots, x = -1$; $x = 0$.

2.72. **1.** Горизонтальная асимптота $y = -2$. **2.** Горизонтальная асимптота $y = 0$. **3.** Наклонная асимптота $y = 2x + 3$. **4.** Наклонная асимптота $y = x - 1$.

Глава 3

3.1. **1.** $\dfrac{624}{25}$; $\dfrac{1601}{40}$. **2.** 0; 0. **3.** 5; 6. **4.** 0; 0. **5.** 9; 12. **6.** 75; 120. **7.** 2^{13}; 2^{20}. **8.** 0; 0.

3.2. **1.** $a_n = 4n, n \geq 1$. **2.** $a_n = 3n - 1, n \geq 1$. **3.** $a_n = 3 \cdot 4^{n-1}, n \geq 1$. **4.** $(-1)^n, n \geq 1$. **5.** $a_n = (-1)^{n+1} n, n \geq 1$. **6.** $a_n = \dfrac{1 + (-1)^n}{n}, n \geq 1$. **7.** $a_n = [\dfrac{n+1}{2}], n \geq 1$. **8.** $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}, n \geq 1$. **9.** $a_n = 2^{2n-1} - 1, n \geq 1$. **10.** $a_n = 3^n + (-1)^n, n \geq 1$.

3.18. $2^n - 1$.

3.19. **1.** 1 651 500. **2.** 164 700. **3.** 165.

3.20. **4.** $a_n = 2n$, $b_n = 4n - 3$, $c_n = 3n$, $d_n = 6n + 1$, $e_n = 12n - 1$.

3.21. **1.** $a_n = \dfrac{1}{n}$. **2.** $a_n = \sqrt{2^n - 1}$. **3.** $a_n = \dfrac{9}{2}\left\{\dfrac{n}{3}\right\}\left(1 - \left\{\dfrac{n}{3}\right\}\right)$.

3.22. **2.** $a_n = 2^{n-1} + 3^{n-1}$. **3.** $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$. **5.** $a_n = (n-1)2^{n-1}$. **7.** $a_n = 2^{n-1} + \dfrac{-1 + (-1)^n}{2} - 1 (n \geq 2)$. **8.** $a_n = 2^{\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}}$. **9.** $a_n = \dfrac{1}{1 + 2^{n-1}}$.

3.24. **1.** $n - m + 1$. **2.** $2^{n+1} + 3n - 7$. **3.** $18\dfrac{1}{512}$. **4.** $2^{n+1} - 2^m + \dfrac{1}{2}(n+m)(n-m+1)$. **5.** $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$. **6.** $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

3.25. **1.** $\dfrac{-1+(-1)^n}{2}$. **2.** $(-1)^n\cdot\dfrac{n(n+)}{2}$. **3.** $\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

3.26. **1.** $\dfrac{n}{n+1}$. **2.** $\dfrac{(n-1)(3n+2)}{4n(n+1)}$. **3.** $\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.
4. $\dfrac{n(2n+3)}{(n+1)(2n+1)}$. **5.** $\dfrac{n!-1}{n!}$. **6.** $(n+1)!-1$.

3.27. **1.** $\dfrac{nq^{n+1}-(n+1)q^n+1}{(q-1)^2}$, если $q\neq 1$; $\dfrac{n(n+1)}{2}$, если $q=1$.

2. $\dfrac{n^2q^{n+2}-(2n^2+2n-1)q^{n+1}+(n+1)^2q^n-q-1}{(q-1)^3}$, если $q\neq 1$; $\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, если $q=1$.

3. $\dfrac{(n^2+3n+1)2^{n+2}-(n+1)(n+2)2^{n+1}-3(n+1)}{4(n+1)}$.

3.28. **2.** $\dfrac{1}{n}$. **3.** $\dfrac{n+1}{2n}$. **4.** $\dfrac{n+1}{3(n-1)}$. **5.** $\dfrac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)}$. **6.** $\dfrac{3^{2^{n+1}}-1}{8}$.

Глава 4

4.4. **1.** $-3;-2;-1$. **2.** $-7;-2;-1;4$. **3.** $-2;-1;1;8$. **4.** $-2;0$.

4.6. **1.** 2; если $n=1$, то 0, если $n=2$, то 1, если $n=3$, то 2, если $n=4$, то 3, если $n=5$, то 0, если $n>5$, то 5; 2. **2.** 9982. **3.** 10 027. **4.** 9. **5.** 47. **6.** Нет.

4.7. **1.** 569. **2.** 20130035113, 21(18)3(31)9.

4.8. **4.** 1.

4.9. **1.** 1;3. **2.** 1;19. **3.** 1;5;25. **4.** 1;7. **5.** 1. **6.** 1. **7.** 11…1(10 единиц).

4.10. **2.** 1;2;4;8. **3.** 1;2.

4.12. **5.** 3. **6.** 5. **9.** 4 и все простые. **10.** $p, 2p$, где p — простое; 8; 9. **11.** 3. **14.** 2,5. **15.** 3.

4.14. **1.** $3^2\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37$. **2.** $11\cdot 73\cdot 101\cdot 137$. **3.** $3^2\cdot 5\cdot 7\cdot 13\cdot 17\cdot 241$. **4.** $3^2\cdot 11\cdot 331$.

4.16. **1.** $a=10$, $b=100$; $a=20$, $b=50$; $a=50$, $b=20$; $a=100$, $b=10$. **2.** $a=77$, $b=245$; $a=245$, $b=77$. **3.** 2, 5 и 7 (в любом порядке).

4.19. **2.** 249.

4.21. **1.** $\tau(n)=(k_1+1)(k_2+1)\cdots(k_s+1)$.

2. $\sigma(n) = \frac{p_1^{k_1+1}-1}{p_1-1}\cdot\frac{p_2^{k_2+1}-1}{p_2-1}\cdots\frac{p_s^{k_s+1}-1}{p_s-1}.$

4.22. 1. $n=60$. **2.** $n=44$. **3.** p^5, p^2q, где p,q — различные простые числа. **4.** $n=19$. **5.** $n=57$.

4.23. 3. $n=120$, $n=672$.

4.25. 1. 2, 4, 36, 54. **7.** 3,4,6; таких n нет; 2^m, где $m\geq 2$; 35,39,45, 52,56,70,72,78,84,90; $\{3^k\cdot m\colon k\geq 1, \text{НОД}(3,m)=1\}$; $\mathbb{N}\setminus\{1,2,4,p,2p\colon p$ — простое вида $4k+3\}$; n — четные, $n\geq 4$.

4.26. Пусть $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}\cdots p_s^{k_s}$, где $p_1,p_2,\cdots,p_s$ — различные простые числа, $k_1,k_2,\cdots,k_s$ — натуральные числа.

1. $(-1)^s$. **2.** $(-1)^s p_1p_2\cdots p_s$. **3.** $(-1)^s p_1p_2\cdots\cdots p_s(p_1+2)(p_2+2)\cdots(p_s+2)$. **4.** $(-1)^s(p_1-2)(p_2-2)\cdots(p_s-2)$.

4.29. 1. Если $N=(a_1a_2\cdots a_n)_b$, то $N\equiv(a_1+a_2+\cdots+a_n) \pmod{b-1}$, $N\equiv a_n-a_{n-1}+\cdots+(-1)^{n-1}a_1 \pmod{b+1}$. **2.** 0, 1.

4.30. 1. 0 или 1; 0 или 1; 0,1,4 или 7; 0,1,4 или 7. **3.** 0,1 или 6; 0,1 или 8. **6.** 1,2,3,6,7,8,9.

4.31. 1. $n=26k+1$, $n=26k+12$, где k — неотрицательное число. **2.** n — четно.

4.36. 1. 9; 1; 26.

4.39. 1. $x=6,y=4; x=6,y=-4; x=-6,y=4; x=-6,y=-4$. **2.** $x=4,y=1; x=-4,y=-1; x=3,y=-1; x=-3,y=1$. **3.** $x=2,y=1$; $x=-2,y=1$. **4.** $x=-2,y=3; x=2,y=-1; x=-4,y=-7; x=-8, y=-3$. **5.** $x=0,y=0; x=-1,y=0; x=-1,y=1; x=-1,y=-1$. **6.** $x=-3,y=0$. **7.** $x=6,y=42$; $x=10,y=14$; $x=12,y=12$; $x=40,y=8$; $x=4,y=-28$; $x=-2,y=2$; $x=-30,y=6$. **8.** $x=1, y=8; x=-1,y=-8; x=11,y=-32; x=-11,y=32$; $\{(0,y)\colon y\in\mathbb{Z}, y\neq 0\}$.

4.42. 1. $x=-2,y=-2; x=-3,y=-3; x=-1,y=1$.

2. $x=2,y=3,z=6; x=2,y=4,z=4; x=3,y=3,z=3$ и все тройки чисел, получающиеся из указанных произвольной перестановкой.

3. $x=0,y=0$.

4. $x=0,y=0$; $x=0,y=-1$, $x=-1,y=0$; $x=-1,y=-1$; $x=2,y=5$; $x=2,y=-6$.

4.44. 1. $x=\frac{2t}{1+t^2}$, $y=\frac{1-t^2}{1+t^2}$, где t — произвольное рациональное число.

2. $x = \dfrac{t^2+t-1}{t^2+2}$, $y = \dfrac{t^2-3t}{t^2+2}$, где t — произвольное рациональное число, $x = 1, y = 1$.

3. $x = \dfrac{1-t^2}{t^3}$, $y = \dfrac{1-t^2}{t^2}$, где t — произвольное рациональное число, не равное нулю; $x = 0, y = -1$.

4. $x = \dfrac{t^3+1}{t^4+1}$, $y = \dfrac{t^4+t}{t^4+1}$, где t — произвольное рациональное число; $x = 0, y = 1$.

Глава 5

5.1.1. Первый игрок. **2.** Первый игрок. **3.** В первой игре второй игрок выигрывает в том и только в том случае, если $m = n$; во второй игре второй игрок выигрывает в том и только в том случае, если $m = n \geq 2$ или $m + n = 1$. **4.** Первый игрок.

5.2.1. Если n — первоначальное число, то в первой игре остаток при делении n на 4 не равен 1, во второй игре остаток при делении n на 7 не равен 0 или 1. **2.** При четном mn. **3.** В первой игре $n = 6$, во второй игре $n = 49$. **4.** Первый игрок. **5.** Победит второй игрок.

5.3. 2. В п. 1 пусть P_n — позиция, в которой на доске написано число n; в первой игре $r(P_n) = [(n+1)/3]$, во второй игре $r(P_n) = [(n+2)/5]$. В пп. 2 и 3 пусть (x, y) обозначает позицию с x камнями в одной кучке, y камнями в другой кучке и $x \geq y$; в п. 2 $r(1,1) = 0$, $r(2,1) = 1$, $r(x,2) = 1$, $r(x,1) = 2$ при $x \geq 3$, $r(x,y) = 2$ при $y \geq 3$; в п. 3 $r(0,0) = 0$, $r(x,0) = r(x,x) = 1$ при $x \geq 1$, $r(x,y) = 2$ при $x > y \geq 1$.

4. В первой игре $v(P_n)$ — остаток при делении $n-1$ на 4, во второй игре $v(P_n) = [m/2]$, где m — остаток при делении $n-1$ на 7.

5.4. 1. k-я игра — это Ним с одной кучкой, число камней в которой равно числу камней в k-й кучке данной игры. **3.** а) Первый игрок; б) Второй игрок; в) Первый игрок. **5.** Второй игрок.

5.6. 1. $\dfrac{32 \cdot 10^{n-1}+4}{9}$. **2.** $\pm 3n$.

5.7. 2. Поровну. **3.** Поровну. **4.** Не содержащих множество A. **5.** Содержащих точку A.

5.9. 1. 9. **2.** $S_1 - S_2 + S_3$. **3.** $S_1 - S_2 + S_3 - S_4$. **4.** $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$. **5.** 4114.

5.11. 7. $1 \leq k \leq 15$, $19 \leq k \leq 30$, $k = 48$.

5.13. 1. Единиц. **3.** А и В. **4.** Нет.

5.15. 1. $20 \cdot 10 = 200$. **2.** $5 \cdot 7 = 35$. **3.** $7 \cdot 7 = 49$. **4.** $6 \cdot 7 = 42$. **5.** $7 \cdot 9 \cdot 4 = 252$. **6.** $33^3 \cdot 10^4$. **7.** 88^6. **8.** $8 \cdot 11 \cdot 16 \cdot 10 = 14\,080$. **10.** $9 \cdot 10^2 = 900$. **11.** $9 \cdot 10^4 = 90\,000$. **12.** $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$. **13.** $9^5 = 59\,049$. **14.** $5 \cdot 6^3 = 1080$. **15.** $5 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 29\,400$. **16.** $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. **17.** $6 \cdot 6 \cdot 5 = 180$.

5.16. 1. 2^m. **2.** $\dfrac{3^m - 1}{2}$. **3.** 2^m.

5.17. 1. $30!$. **2.** $8! = 40320$. **3.** $8! = 40320$. **4.** $9!$. **5.** $3 \cdot 4 \cdot 8!$. **6.** $3 \cdot 4 \cdot 8!$. **7.** $2 \cdot 6 \cdot 8!$. **8.** $(5!)^3 \cdot 3!$. **9.** $(15!)^2$. **10.** $(15!)^2 \cdot 2^{15}$. **11.** $10!/2$. **12.** $10!/3$. **13.** $3 \cdot 10!/4!$.

5.18. 1. $9 \cdot 10^4 - 5^5 = 86\,875$. **2.** $10! - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7! = 3\,024\,000$. **3.** $9 \cdot 10^4 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 62\,784$.

5.19. 1. $9^5 + 9^4 + 9^3 + 9^2 + 9 = 66\,429$. **2.** $(10^4 - 10 \cdot 2 \cdot 9 - 10) + (10^3 - 10) + 10^2 + 10 = 10\,910$. **3.** $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 13\,776$. **4.** $3(8^4 + 8 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 9 + 1 \cdot 9 \cdot 8^2 + 8 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 8 + 1 \cdot 1 \cdot 9^2) = 17\,715$. **5.** $4 \cdot 6 \cdot 8! + 2 \cdot 5 \cdot 8! = 1\,370\,880$. **6.** $2 \cdot 1 \cdot 8! + 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7! = 645\,120$. **7.** $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7! + 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7! = 100\,800$.

5.20. 1. $n+1$. **2.** $(n+1)^2$. **3.** 670. **4.** $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. **5.** $55\,252$.

5.21. 1. а) $\dfrac{12!}{12} = 11!$; б) $\dfrac{11!}{2}$; в) $\dfrac{12!}{6!2^6} = 10395$. **2.** $\dfrac{5!}{4} = 30$. **3.** $\dfrac{n! \cdot 2^n}{2n} = (n-1)! \cdot 2^{n-1}$. **4.** $\dfrac{100!}{8^3 \cdot 10^4 \cdot 18^2 \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!}$. **5.** $\dfrac{5!}{2} + 60$. **6.** $\dfrac{7!}{3!} = 840$. **7.** $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!}$. **8.** $\dfrac{7!}{3! \cdot 2!}$. **9.** $\dfrac{11!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 55\,440$. **11.** $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. **12.** $\dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$.

5.22. 1. 21; 1; 40; 1; 70; 105. **2.** $n = 8$; $n = 6$; $n = 2$;28. **3.** $C_{10}^3 = 120$. **4.** $C_9^4 = 126$. **5.** $C - 9^6 = 84$. **6.** $C_7^5 = 21$. **7.** $C_5^2 \cdot C_5^3 = 100$. **8.** $C_{10}^7 + C_{10}^8 + C_{10}^9 + C_{10}^{10} = 176$.

5.23. 1. $C_{12}^2 = 66$. **2.** $C_{12}^3 = 220$. **3.** $C_{12}^4 = 495$. **4.** $C_5^3 + C_5^3 = 20$. **5.** $C_{12}^4 - C_7^4 = 460$.

5.24. 1. $8 \cdot C_{11}^2 + 11 \cdot C_8^2 = 748$. **2.** $C_8^2 \cdot C_{11}^2 = 1540$. **3.** $C_{11}^2 = 55$. **4.** $C_8^6 \cdot C_{11}^5 + C_8^5 \cdot C_{11}^6 = 38\,808$.

5.25. 1. $6(C_5^2 + C_5^2 + 5) = 150$. **2.** $10 \cdot 2 \cdot C_9^3 + 10 \cdot 2 \cdot C_9^4 + C_{10}^2 \cdot 2 \cdot C_8^2 + C_{10}^2 \cdot 4 \cdot C_8^2 + C_{10}^2 \cdot 2 \cdot C_8^4 + C_{10}^2 \cdot 1 \cdot C_8^4 = 26250$.

5.26. 4. $C_{14}^4 + 5 \cdot C_{14}^3 + C_5^2 \cdot C_{14}^2 = 3731$. **5.** $C_{14}^4 = 1001$. **6.** $C_{15}^5 = 3003$.

5.27. **2.** $8! \cdot 14833^7$.

5.28. **1.** 2^n. **2.** 2^{n-1}. **3.** 2^{n-1}.

5.29. **3.** $(-1)^m C_{n-1}^m$. **4.** $(-1)^m C_{n-1}^m - (-1)^{l-1} C_{n-1}^{l-1}$. **5.** C_{n+m+1}^{n+1}. **6.** $C_{n+m+1}^{p+1} - C_n^{p+1}$.

5.30. **2.** $16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$. **3.** $\frac{1}{32}a^5 + \frac{5}{8}a^2b + 5a^3b^2 + 20a^2b^3 + 40ab^4 + 32b^5$. **4.** $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$. **5.** $x^2 + a^2 + 1 - 2ax + 2x - 2a$. **6.** $a^3 - b^3 - c^3 - 3a^b - 3a^c + 3ab^2 + 3ac^2 - 3b^c - 3bc^2 + 6abc$. **7.** $x^4y^4 + x^4 + 1 - 4x^4y^3 + 4x^3y^3 - 4x^4y - 4x^3 + 4xy - 4x - 12x^3y^2 + 12x^3y - 12x^2y + 6x^4y^2 + 6x^2y^2 + 6x^2$. **8.** $2^7C_{10}^3$. **9.** $16C_7^3 = 560$. **10.** 1792. **11.** 2268. **12.** -1016. **13.** 76.

5.32. **6.** Нельзя. **7.** Простой граф может не существовать.

5.33. **3.** Вершины графа — числа 0, 1, 2, …, 9; ребра соединяют n и $n+1$ при $n = 0,1,2,3$, n и $n+2$ при $n = 5,6,7$, n и $n+5$ при $n = 0,1,2,3,4$ и, кроме того, 4 и 0, 8 и 5, 9 и 6.

5.34. **3.** $n-1$.

5.36. **5.** На 4 части.

5.39. **1.** Таких n нет.

Глава 6

6.1. $(-1;0)$, $(0;-1)$, $(0;-1)$, $(-1;0)$, $(\sqrt{3}/2;1/2)$, $(\sqrt{2}/2;\sqrt{2}/2)$, $(1/2;\sqrt{3}/2)$, $(-\sqrt{2}/2;-\sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{3}/2;-1/2)$, $(-1/2;-\sqrt{/}2)$.

6.4. **1.** $\{t_0 + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **2.** $\{t_0 + \pi(1+2k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **3.** $\{-t_0 + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **4.** $\{-t_0 + \pi(1+2k)\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **5.** $\{t_0 + \pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **6.** $\{[t_0 + 2\pi k; -t_0 + \pi(1+2k)]\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **7.** $\{[t_0 + \pi(2k-1); -t_0 + \pi(2k+1)]\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

6.5. $\{[\pi/8 + \pi k; \pi/2 + \pi k]\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

6.7. Положительны числа — пп. 1, 2, 5, 7, 9, 10, 11, 12; отрицательны – пп. 3, 6, 8.

6.8. **1.** $\sin 1$. **2.** $\sin 1$. **3.** $\sin 1$. **4.** $\sin 1 + \cos 1$.

6.9. **1.** $\sin 5$, $\cos 4$, $\cos 2$, $\cos 8$, $\sin 3$, $\sin 7$, $\sin 1$, $\cos 6$. **2.** $\operatorname{ctg} 6$, $\operatorname{tg} 5$, $\operatorname{ctg} 2$, $\operatorname{ctg} 8$, $\operatorname{tg} 3$, $\operatorname{ctg} 4$, $\operatorname{tg} 7$, $\operatorname{tg} 1$.

6.10. **1.** $\{\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **2.** $\{\pi/2 + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **3.** $\{\pi + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **4.** $\{\pi/4 + \pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **5.** $\{\pi/4 + \pi k/2\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **6.** $\{(-1)^k\pi/6 + \pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **7.** $\{\pm 3\pi/4 + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$. **8.** $\{2\pi k, \pi/2 + 2\pi k\colon k \in \mathbb{Z}\}$.

9. $\{3\pi/4+2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **10.** $\{[-\pi+2\pi k;2\pi k]\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **11.** $\{(-\pi/2+$ $+2\pi k;\pi/2+2\pi k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **12.** $\{(-\pi/3+2\pi k;\pi/3+2\pi k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **13.** $\{(2\pi/3+2\pi k;7\pi/3+2\pi k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **14.** $\{(\pi/4+2\pi k;5\pi/4+$ $+2\pi k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **15.** $\{[\pi/2+2\pi k;\pi+2\pi k]\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **16.** $\{(-\pi+2\pi k;2\pi k)$, $(\pi/6+2\pi k;5\pi/6+2\pi k)\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **17.** $\{(\pi/4+\pi k;\pi k/2+\pi k]\colon k\in\mathbb{Z}\}$.

6.13. 1. $-\sqrt{35}/6$; $\sqrt{35}$, $1/\sqrt{35}$. **2.** $15/17$; $-8/17$; $-15/8$. **3.** $\sqrt{6}/3$; $\sqrt{3}/3$; $1/\sqrt{2}$. **4.** $-12/13$; $-5/12$; $-12/5$. **5.** 11. **6.** 0,22. **7.** $-8/3$. **8.** -12. **9.** -1. **10.** 1.

6.14. 1. 1. **2.** 2. **3.** $\sin^2\alpha$. **4.** 1. **5.** $\sin\alpha$. **6.** 1. **7.** 4. **8.** 1. **9.** -1. **10.** 1. **11.** -4. **12.** 2.

6.16. 1. $\sin\alpha$. **2.** $-\sin\alpha$. **3.** $\cos^2\alpha$. **4.** $-\dfrac{1}{\cos\alpha}$. **5.** $-\sin\alpha-\cos\alpha$. **6.** $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$. **7.** $-2\operatorname{tg}\alpha$.

6.17. 1. $\sqrt{2}/2$; $-\sqrt{3}/3$; $\sqrt{3}/2$; $\sqrt{3}/2$; -1. **2.** 4. **3.** $-\dfrac{2}{\sin^3\alpha}$.

6.18. 1. $1/2$. **2.** $1/2$. **3.** $\sqrt{2}/2$. **4.** $\sqrt{3}/2$. **5.** 1. **6.** $\sqrt{3}/3$. **7.** $1/2$. **8.** $\sqrt{3}/2$. **9.** $\sqrt{2}/4$. **10.** $1/2$. **11.** 1. **12.** 1. **13.** 1. **14.** $1/8$. **15.** $\sqrt{3}/8$. **16.** $\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

6.19. 1. $-\sqrt{2}/10$. **2.** $-1/3$. **3.** $-1/9$. **4.** $3/5$. **5.** $\dfrac{5+12\sqrt{3}}{26}$. **6.** $-33/65$. **7.** $-1/4$. **8.** $1/2$. **9.** $1-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

6.20. 1. $\sin\alpha$. **2.** $\cos 2\alpha$. **3.** $\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$. **4.** $\cos\alpha-\sin\alpha$. **5.** $-\dfrac{1}{4}\sin 4\alpha$. **6.** 1.

6.24. 1. $\pi/2$. **2.** π. **3.** $-\pi/2$. **4.** $\pi/2$. **5.** $\pi/2$.

6.27. 1. $\left\{\pi/2+2\pi k, (-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{1}{3}+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$. **2.** $\{\pm\pi/3+$ $+2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **3.** $\left\{\pm\arccos\dfrac{2-\sqrt{5}}{2}+2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$. **4.** $\{\pi/4+\pi k/2,$ $\pm\pi/6+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **5.** $\{\operatorname{arctg}2+\pi k, \operatorname{arctg}(-4\pm\sqrt{13})+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **6.** $\left\{-\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$. **7.** $\left\{\pi/4+\pi k, \operatorname{arctg}\dfrac{1}{2}+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$. **8.** $\left\{\pi/4+\pi k, -\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4}+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$. **9.** $\{\pi/4+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **10.** $\{\pi/2+$ $+2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **11.** $\{\pi/12+\pi k, 5\pi/12+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$. **12.** $\Big\{-\pi/4+$ $+(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{4}+\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\Big\}$. **13.** $\{\pi/2+2\pi k, \pi+2\pi k\colon k\in\mathbb{Z}\}$.

14. $\left\{\pi/4+(-1)^k \arcsin\dfrac{\sqrt{2}-2}{2}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **15.** $\{\pi/4+\pi k/2:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **16.** $\{\pi/8+\pi k/4:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

6.28. 1. $\{\pi(2k+1), -\pi/2+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

2. $\{5\pi/12+2\pi k, 11\pi/12+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3. $\{(-1)^k\pi/6-\arcsin 4/5+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

6.29. 1. $\{\pi k/4, \pi/22+\pi k/11:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **2.** $\{5\pi/24+\pi k, -\pi/48+\pi k/2:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **3.** $\{\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **4.** $\{\pi/26+2\pi k/13, \pi/14+2\pi k/7:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **5.** $\{\pi/2+\pi k, \pi/5+2\pi k/5:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **6.** $\{\pi/8+\pi k/4, \pm\pi/3+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **7.** $\{\pi/6+\pi k/3, \pi/20+\pi k/10:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **8.** $\{\pi k/5, \pi/22+\pi k/11:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **9.** $\{\pi/14+\pi k/7, \pm\pi/6+\pi k/2:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **10.** $\left\{\pi k, \dfrac{(-1)^k}{2}\arcsin\dfrac{1}{6}+\pi k/2:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **11.** $\{\pm\pi/18+\pi k, \pm\pi/6+\pi k, \pm 5\pi/18+\pi k, \pm 7\pi/18+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **12.** $\{-\pi/4+\pi k, 2\pi k, -\pi/2+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **13.** $\{\pi/2+\pi k, -\pi/10+2\pi k/5, \pi/14+2\pi k/7:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **14.** $\left\{\pi/2+\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{12}{13}+\pi k, -\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{12}{13}+\pi k/2:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **15.** $\left\{\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{44}{117}+\pi k, \dfrac{1}{8}\operatorname{arctg}\dfrac{4}{3}+\pi/8+\pi k/4:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$. **16.** $\{\pi k, \pm\pi/6+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **17.** $\{\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$.

6.30. 1. Решений нет. **2.** Решений нет. **3.** $\{\pi/2+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **4.** $\{\pi/2+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **5.** $\{\pi/4+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **6.** $\{-\pi/2+2\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **7.** Решений нет.

6.31. 1. $\left\{\dfrac{5\pm\sqrt{21}}{2}, -2\pm\sqrt{3}, \dfrac{-11\pm\sqrt{21}}{10}\right\}$. **2.** $\left\{-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi k, \dfrac{\pi}{4}+(-1)^{k+1}\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

3. $\left\{\pm\operatorname{arctg}2+\pi k, \operatorname{arctg}\dfrac{2l+1\pm\sqrt{4l^2+4l-15}}{4}+\pi k:\ k\in\mathbb{Z}, l=3,\pm4,\pm5,\ldots\right\}$.

6.32.1. $\{(\pi/4+\pi k+\pi l/2; \pi/4+\pi k-\pi l/2):\ k\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}\}$. **2.** $\{(\pi/4+\pi k/2+\pi l/2; \pi/4+\pi l/2-3\pi k/2):\ k\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}\}$. **3.** $\{(\pi/2+\pi k; \pi/2+2\pi l), (\pi k; 2\pi l):\ k\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}\}$. **4.** $\{(\pi k/2; \pi/2+2\pi l), (\pi k/2; \pi+2\pi l):\ k\in\mathbb{Z}, l\in\mathbb{Z}\}$.

6.33. 1. $\{[5\pi/6+2\pi k; 13\pi/6+2\pi k]:\ k\in\mathbb{Z}\}$. **2.** $\{(2\pi k; \pi/6+2\pi k), (5\pi/6+2\pi k; \pi+2\pi k), (7\pi/6+2\pi k; 11\pi/6+2\pi k):\ k\in\mathbb{Z}\}$.

3. $\{[-\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}+3}{4}+\pi k; \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{17}-3}{4}+\pi k], [\pi/4+\pi k; \pi/2+\pi k):$ $k \in \mathbb{Z}\}$. **4.** $\{(2\pi k; \pi/4 + 2\pi k), (\pi/2 + 2\pi k; 5\pi/4 + 2\pi k): k \in \mathbb{Z}\}$. **5.** $\{[\pi/6 + 2\pi k; \pi/4 + 2\pi k), [\pi/2 + 2\pi k; 5\pi/6 + 2\pi k], (5\pi/4 + 2\pi k;$ $3\pi/2+2\pi k]: k \in \mathbb{Z}\}$. **6.** $\{[-\pi/4+\pi k; -\pi/6+\pi k], [-\pi/12+\pi k; \pi/12+$ $+\pi k], [\pi/6+\pi k; \pi/4+\pi k], [5\pi/12+\pi k; 7\pi/12+\pi k: k \in \mathbb{Z}\}$.

6.34. **1.** $\left\{\cos\frac{\pi}{9}, \cos\frac{7\pi}{9}, \cos\frac{13\pi}{9}\right\}$.

2. $\left\{2\cos\frac{\pi}{18}, 2\cos\frac{13\pi}{18}, 2\cos\frac{25\pi}{18}\right\}$.

3. $\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{p}\sqrt{-\frac{3}{4p}}\right)\right)$;

$\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{p}\sqrt{-\frac{3}{4p}}\right)+\frac{2\pi}{3}\right)$;

$\sqrt{-\frac{4p}{3}}\cdot\cos\left(\frac{1}{3}\arccos\left(\frac{3q}{p}\sqrt{-\frac{3}{4p}}\right)+\frac{4\pi}{3}\right)$.

4. $f(t) = \frac{2t}{1+t^2}, g(t) = \frac{t^2-1}{1+t^2}$.

5. $\left\{2\cos\frac{\pi(1+2k)}{2^{n+1}}: k = 0, 1, \ldots, 2^n-1\right\}$.

6.35. **1.** $[-1;3]$. **2.** $[-\sqrt{2};\sqrt{2}]$. **3.** $[-6;4]$. **4.** $\left[\frac{1-\sqrt{5}}{2};\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$. **5.** $[-9/8;2]$. **6.** $[-1/4;+\infty)$.

6.36. Периодичны функции из пп. **2**, 4, 5.

6.37. **1.** $2\pi k/3$. **2.** $\pi k/4$. **3.** πk. **4.** $2\pi k$. **5.** πk $(k = \pm1, \pm2, \ldots)$.

Глава 7

7.1. **1.** $\frac{3}{2}$. **2.** 6. **3.** $-\frac{3}{2}$. **4.** -12. **5.** 5. **6.** 49. **7.** $\frac{9}{5}$. **8.** -1. **9.** $\frac{2}{3}$. **10.** 36. **11.** $\frac{3}{2}$. **12.** 6. **13.** 2. **14.** 0. **15.** -1.

7.2. **1.** $\frac{2(2a-1)}{3(2-a)}$. **2.** $\frac{4ab+2a+b+1}{2a(3-2b)}$.

7.3. **1.** $\log_2\frac{1}{7}$. **2.** $\log_{\frac{1}{3}} 5$. **3.** $\log_{\frac{1}{5}} 3$. **4.** $\log_5 2$. **5.** $\log_{18} 3$. **6.** $\frac{2}{3}$. **7.** $\log_7 50$.

8. $\log_{18}7$. **9.** $\log_6 5+\log_5 6$. **10.** $\log_{101}100$. **11.** 1. **12.** $\log_4 5+\log_5 6+$ $+\log_6 7+\log_7 8$.

7.4. 1. $\{1\}$. **2.** $\{3\log_6 3\}$. **3.** $\{2\}$. **4.** $\{1\}$. **5.** $\{\log_7 3-1,1\}$. **6.** $\left\{0,\dfrac{3}{2}\right\}$.

7.5. 1. $\{1\}$. **2.** $\{\log_4 3-1\}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $\{1\}$. **5.** $\{4-\log_3 5,4\}$. **6.** $\{-1,0\}$. **7.** $\{-2,2\}$. **8.** $\{1\}$. **9.** $\left\{\dfrac{\lg 126-\lg 29}{2(\lg 3-\lg 2)}\right\}$. **10.** $\{-1,0\}$. **11.** $\left\{\log_{\frac{2}{5}}5,0\right\}$. **12.** $\{-1,0\}$.

7.6. 1. $\{8\}$. **2.** $\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$. **3.** $\left\{\dfrac{7}{2}\right\}$. **4.** $\{\sqrt{3}\}$. **5.** $\{4\}$. **6.** $\{256\}$. **7.** $\{2\}$. **8.** $\{4\}$. **9.** $\{50\}$. **10.** $\{13\}$. **11.** $\{2\}$. **12.** $\{-\log_2 5\}$.

7.7. 1. $\left\{\dfrac{1}{10},1000\right\}$. **2.** $\left\{\dfrac{1}{4}\right\}$. **3.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right\}$. **4.** $\{0\}$. **5.** $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{3}},\sqrt{3}\right\}$. **6.** $\left\{\dfrac{1}{10},1\right\}$.

7.8. 1. $\{4\}$. **2.** $\{1,30\}$. **3.** $\left\{\dfrac{1}{9},1,3\right\}$. **4.** $\left\{\dfrac{1}{4},3\right\}$.

7.9. 1. $\{1\}$. **2.** $\{1\}$. **3.** $\{1\}$. **4.** $\{3\}$. **5.** $\{2\}$. **6.** $\{3\}$. **7.** $\{2\}$. **8.** $\{9\}$. **9.** $\{3\}$.

7.10. 1. $(-1;+\infty)$. **2.** $(-\infty;5)$. **3.** $(\log_{75}90;+\infty)$. **4.** $(-1;1]$. **5.** $(3;+\infty)$. **6.** $\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$. **7.** $[3;+\infty)$. **8.** $\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)\cup(1;2)$. **9.** $\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right)\cup(3;+\infty)$. **10.** $\left(0;\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. **11.** $(0;1)\cup(2;+\infty)$.

7.11. 1. $\{(1;3)\}$. **2.** $\left\{(1;-4),(1;2),(16;-4),\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2};1\right),\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2};1\right)\right\}$. **3.** $\left\{\left(\dfrac{1}{2};5\right),\left(4;\dfrac{3}{2}\right)\right\}$. **4.** $\{(6;-3),(36;-2)\}$. **5.** $\left\{\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right),(8;2)\right\}$.

Глава 8

8.1. 1. $8+i$. **2.** $-2+3i$. **3.** $6-3i$. **4.** $-1-i$. **5.** $-13-19i$. **6.** $3-4i$. **7.** $-11-2i$. **8.** 1. **9.** $-i$. **10.** -1024.

8.2. 1. $\{(1;2)\}$. **2.** $\{(3;-2)\}$.

8.4. 1. $\dfrac{1+i}{2}$. **2.** $1-2i$. **3.** $\dfrac{-1+5i}{2}$. **4.** $3-2i$. **5.** $-i$. **6.** $-32i$.

8.7. 1. $\{2i,-2i\}$. **2.** $\left\{\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$. **3.** $\{2+i,-2-i\}$. **4.** $\{3-2i,-3+2i\}$.

8.8. 1. $\{\pm i\}$. **2.** $\{\pm 2i\}$. **3.** $\left\{-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. **4.** $\{1\pm 2i\}$. **5.** $\left\{-\dfrac{3}{5}\pm\dfrac{1}{5}i\right\}$. **6.** $\{i,-2i\}$. **7.** $\{1+i,-2i\}$. **8.** $\left\{-1-i,-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2}i\right\}$. **9.** $\{\pm 1,\pm i\}$. **10.** $\left\{1,-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$. **11.** $\left\{\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$ (4 комбинации знаков). **12.** $\{\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{i}\}$ (4 комбинации знаков). **13.** $\left\{1,\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\pm \pm\dfrac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}i,-\dfrac{1}{4}(\sqrt{5}+1)\pm\pm\dfrac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}i\right\}$. **14.** $\left\{\pm 1,\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **15.** $\left\{\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{65}-1}{8}}+\left(\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{65}+1}}{4}\right)i\right\}$ (4 комбинации знаков). **16.** $\left\{-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{65}+1}{8}}\pm\dfrac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{65}-1}}{4}i\right\}$ (4 комбинации знаков).

8.9. 1. $(x+i)(x-i)$. **2.** $(x-1-2i)(x-1+2i)$.

3. $(x+1)\left(x+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$.

4. $(x-1)\left(x+\dfrac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{7}i}{2}\right)$.

5. $\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)\times$
$\times\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)$.

6. $\left(x+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(x-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\times$

$\times\left(x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$

7. $\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}-\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i\right)\left(x-\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i\right)\times$

$\times\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}-\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i\right)\left(x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}+\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i\right).$

8. $\prod_{k=0}^{n-1}\left(x-\cos\frac{2\pi k}{n}-i\sin\frac{2\pi k}{n}\right).$

8.10. 3. $(x^2+3)(x^2-3x+3)(x^2+3x+3).$

$\left(x^2+2\left(1+\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)x+1+2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{2}\right)\times$

$\times\left(x^2+2\left(1-\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}\right)x+1-2\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{2}\right).$

$(x-1)(x+1)\prod_{k=1}^{n-1}(x^2-2\cos\frac{\pi k}{n}x+1).$

$(x+1)\prod_{k=0}^{n-1}(x^2-2\cos\frac{\pi(2k+1)}{2n+1}x+1).$

8.11. 1. -2. **2.** -1. **3.** 5. **4.** 6. **5.** $-\frac{1}{5}$. **6.** 1.

7. $5\,\mathrm{tg}\,50°$. **8.** $25\,\mathrm{tg}^2\,50°+20$. **9.** $\mathrm{tg}\,50°$.

8.13. 1. $|z|=2, \arg z=0$. **2.** $|z|=3, \arg z=\pi$. **3.** $|z|=1, \arg z=-\pi/2$. **4.** $|z|=\sqrt{2}, \arg z=\pi/4$. **5.** $|z|=2, \arg z=-\pi/6$. **6.** $|z|=2, \arg z=-\pi/3$. **7.** $|z|=\sqrt{2}, \arg z=\pi/2$. **8.** $|z|=\sqrt{13}, \arg z=-\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$.

8.17. 1. $[\sqrt{10}-2;\sqrt{10}+2]$. **2.** $\{x(2-i)\colon x\in[\sqrt{5}/5;\sqrt{13}]\}$. **3.** $\{0, a+bi\colon a,b\in\mathbb{R}, a>0\}$. **4.** $[0;5+\sqrt{2}]$. **5.** $[-2;2]$. **6, 7.** Вся комплексная плоскость без отрезка $[-2;2]$ вещественной оси.

8.20. 1. $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$. **2.** 1. **3.** $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$. **4.** $64-64i$. **5.** $512+512\sqrt{3}i$. **6.** -1024. **7.** $2^{24}\cos^{24}\frac{\pi}{12}$.

8.24. 2. $2,\ -1+\sqrt{3}i,\ -1-\sqrt{3}$. **3.** $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}(-1+i),\ \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}((1-\sqrt{3})-(1+\sqrt{3})i),\ \frac{1}{2\sqrt[3]{2}}((1+\sqrt{3})+(\sqrt{3}-1)i)$. **4.** $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i),\ \frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$. **5.** $1+i,\ -1-i,\ 1-i,\ -1+i$.

6. $\left\{\frac{1}{\sqrt[10]{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}+\frac{2\pi k}{5}\right)\right) : k=0,1,2,3,4\right\}$.

8.26. 1. $\omega^2,\ \omega^2,\ 1$. **2.** 0.

Глава 9

9.8. 1. $g(x)=\frac{x-3}{2}$. **2.** $g(x)=\frac{2x+1}{x+2}$. **3.** $g(x)=\sqrt{x}$. **4.** $g(x)=-\sqrt{x}$. **5.** $g(x)=\frac{-1-\sqrt{4x-3}}{2}$, $x\in[1;+\infty)$. **6.** $g(x)=\frac{x+\sqrt{x^2+8x+4}}{2}$, $x\in\left[-\frac{1}{2};+\infty\right)$. **7.** $g(x)=x$, если $x\in[0;1)$; $g(x)=3-x$, если $x\in[1;2]$. **8.** $g(x)=-\sqrt{x+1}$, если $x\in(-\infty;0]$; $g(x)=-x-1$, если $x\in[0;+\infty)$. **9.** $g(x)=\log_2\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2}$, $x\in[2;+\infty)$. **10.** $g(x)=\sqrt{2^x+1}$, $x\in[\log_2 3;+\infty)$.

9.9. 1. $(g\circ f)(x)=2x^2+2x-1$, $(f\circ g)(x)=4x^2-2x$. **5.** Не существует.

9.12. 1. $f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)^2$. **2.** $f(x)=\frac{1}{x^2+x+1}$. **3.** $f(x)=\frac{9x^3+6x^2-x+2}{18x^2-2}$.

9.18. 1. Да. **2.** Да. **3.** Нет. **4.** Нет.

9.22. 1. 1. **2.** 1. **3.** -3. **4.** 0. **5.** $5/2$. **6.** $1/2$. **7.** $1/3$. **8.** $1/25$. **9.** 1. **10.** $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}$. **11.** 0. **12.** $1/2$. **13.** 0. **14.** $\sqrt{3}$.

9.23. **1.** 0. **2.** π. **3.** 0. **4.** 1/2.

9.24. **1.** 1. **2.** $-\frac{1}{4}$. **3.** 5/6. **4.** 0,085. **6.** $\alpha = \frac{1}{10^k}\left(a + \frac{b}{10^l - 1}\right)$.

9.25. **1.** 1/2. **2.** 0. **3.** 1. **4.** 1/3.

9.28. **2.** 2. **3.** $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. **4.** 0. **5.** $\sqrt{a}$. **6.** $\sqrt[3]{a}$. **7.** $x_1 \in [-2; -1]$. **8.** $x_1 \in [-1/2; 1/2]$.

9.29. **2.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **3.** Расходится. **4.** $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. **5.** $\sqrt{a}$.

9.30. Существует в пп. 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11, 14.

9.31. **1.** 7. **2.** 5/19. **3.** $-1/3$. **4.** 1. **5.** 3/2. **6.** 1/2. **7.** 3/4. **8.** 1/3. **9.** $-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. **10.** $3\sqrt{2}$.

9.33. **1.** $a \in R$. **2.** $a \neq 0$. **3.** $a \notin \mathbb{Z}$. **4.** $a \notin \mathbb{Z}$. **5.** $a \neq 0$, $1/a \notin \mathbb{Z}$. **6.** $a \neq 0$. **7.** $a \in \mathbb{R}$. **8.** $a \neq \pm 1$. **9.** $a \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. **10.** $a \in \varnothing$. **11.** $a = 0$. **12.** $a \notin \mathbb{Q}$. **13.** a не представимо в виде конечной десятичной дроби.

9.34. **1.** 7. **2.** 5/3. **3.** 1. **4.** 1/2. **5.** $-1/4$. **6.** 1/2. **7.** $-7/2$. **8.** $-1/2$. **9.** 0. **10.** 1.

9.35. **2.** $a = -2$, $b = 1$. **3.** $a = -1$, $b = 1$.

Глава 10

10.1. **1.** $f'(x) = -2$. **2.** $f'(x) = 2 - 2x$. **3.** $f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **4.** $f'(x) = -25/x^6$. **5.** $f'(x) = \frac{11}{4}x\sqrt[4]{x^3}$. **6.** $f'(x) = -\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}$. **7.** $f'(x) = \frac{x(\sin 2x - x)}{\sin^2 x}$. **8.** $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$.

10.2. **1.** $f'(x) = 2\cos 2x$. **2.** $f'(x) = 50(x+1)^{49}$. **3.** $f'(x) = -\frac{3}{2\sqrt{1-3x}}$. **4.** $f'(x) = \frac{3x(3x-1)}{2\sqrt[4]{2x^3 - x^2}}$. **5.** $f'(x) = \frac{3\sin x}{\cos^4 x}$. **6.** $f'(x) = \frac{4}{3\cos^2 2x\sqrt[3]{\operatorname{tg} 2x}}$.

7. $f'(x) = -\frac{6\cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)) \cdot \cos(\operatorname{tg}^3 x) \cdot \sin(\operatorname{tg}^3 x) \cdot \sin^2 x}{\cos^4 x}$.

8. $f'(x) = \frac{\sin(\cos x) \cdot \sin(\sin x) \cdot \cos x - \cos(\cos x) \cdot \cos(\sin x) \cdot \sin x}{\cos^2(\sin x)}$.

10.3. 1. $5/4$. **2.** $\dfrac{3\pi-4}{2}$. **3.** 0;0;27. **4.** -14400. **5.** 2.

10.4. 1. 8,12. **2.** 99840000. **3.** 1,01. **4.** 1,988. **5.** 0,515. **6.** 1. **7.** 0,79. **8.** 0,996.

10.5. 1. $\pi/4$; 0; $3\pi/4$. **2.** $y=7x-4$. **3.** $y=3x+2$. **4.** $(2;4)$; $(-3/2;9/4)$; $(-1;1)$, $(1/4;1/16)$. **5.** $p=3$, $q=-2$. **6.** $a=0$, $b=1$, $c=2$.

10.6. 3. $p=3$, $q=2$. **4.** $y=2x-1$; $y=6x-9$.

10.8. 1. $(-\infty;+\infty)$ — промежуток возрастания. **2.** $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$ — промежутки убывания, $[-1;1]$ — промежуток возрастания. **3.** $[-3/2;-7/18]$ — промежуток убывания, $(-\infty;-3/2]$, $[-7/18;+\infty)$ — промежутки возрастания. **4.** $[-1;0)$, $(0;1]$ — промежутки убывания, $(-\infty;-1]$, $[1;+\infty)$ — промежутки возрастания. **5.** $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$ — промежутки возрастания. **6.** $(-1;0)$ — промежуток убывания, $(-\infty;-1)$, $(0;+\infty)$ — промежутки возрастания. **7.** $(-\infty;+\infty)$ — промежуток возрастания. **8.** $[2\pi k;\pi/4+2\pi k]$, $[\pi/2+2\pi k;\pi+2\pi k]$, $[5\pi/4+2\pi k;3\pi/2+2\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$ — промежутки убывания, $[\pi/4+2\pi k;\pi/2+2\pi k]$, $[\pi+2\pi k;5\pi/4+2\pi k]$, $[3\pi/2+2\pi k;2\pi+2\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$ — промежутки возрастания. **9.** $[\pi/4+\pi k;\pi/2+\pi k)$, $(\pi/2+\pi k;3\pi/4+\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$ — промежутки убывания, $[-\pi/4+\pi k;\pi/4+\pi k]$ $(k\in\mathbb{Z})$ — промежутки возрастания.

10.10. 1. -15. **2.** 14. **3.** 325. **4.** 34. **5.** 4. **6.** 1. **7.** $55/13$. **8.** 3; $\sqrt{3}$. **9.** $\dfrac{\sqrt[3]{400}}{45}$; 0. **10.** $\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $-1-\dfrac{\pi}{2}$. **11.** $\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$; $-\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$. **12.** 16; -9. **13.** 20; -2. **14.** $a_4=-112$. **15.** $a_1=-\dfrac{11}{8}$; $a_{24}=\dfrac{12}{1135}$.

10.11. 1. $3+2\sqrt{2}$. **2.** 8. **3.** $\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2};\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)$. **5.** $23/2$. **6.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$. **7.** $\dfrac{3(H-R)+\sqrt{9R^2-2HR+H^2}}{4}$. **8.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{9}aH$. **9.** $R^2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{4}$. **10.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. **11.** $3\sqrt[3]{2\pi V^2}$. **12.** $\sqrt[3]{45\pi V^2}$. **14.** Сектор с центральным углом $\dfrac{2(\sqrt{3}-\sqrt{2})}{\sqrt{3}}\pi$. **15.** $\dfrac{R}{\sqrt{2}}$; $2\pi R^2$. **16.** $\dfrac{23-\sqrt{17}}{16}R$. **17.** $\dfrac{9}{2}a^3$. **18.** $\dfrac{2m}{3k}$ (c). **19.** 3ч 44мин.

10.15. 1. Один. **2.** Один. **3.** Два. **4.** Ни одного. **5.** Два. **6.** Два. **7.** Три. **8.** Два.

9. 4 корня, если $a\in\left(0;\dfrac{621}{16}\right)$; 3 корня, если $a\in\left\{0;\dfrac{621}{16}\right\}$; 2 корня, если $a \in (-\infty;0) \cup \left(\frac{621}{16};1000\right)$; 1 корень, если $a = 1000$; нет корней, если $a \in (1000;+\infty)$.

10. 3 корня, если $a \in (-2;2)$; 2 корня, если $a \in \{-2;2\}$; 1 корень, если $a \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$.

11. 4 корня, если $a \in \left(-\infty;-\frac{4}{\sqrt[4]{6}}\right) \cup \left(\frac{4}{\sqrt[4]{6}};+\infty\right)$; 3 корня, если $a \in \left\{-\frac{4}{\sqrt[4]{6}};\frac{4}{\sqrt[4]{6}}\right\}$; 2 корня, если $a \in \left(-\frac{4}{\sqrt[4]{6}};-1\right) \cup \left(1;\frac{4}{\sqrt[4]{6}}\right)$; 1 корень, если $a \in \{-1;1\}$; 0 корней, если $a \in (-1;1)$.

12. 3 корня, если $a = 0$; 2 корня, если $a \in \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2};0\right) \cup \left(0;\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$; 1 корень, если $a \in \left\{-\frac{3\sqrt{3}}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right\}$; 0 корней, если $a \in \left(-\infty;-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cup$ $\cup \left(\frac{3\sqrt{3}}{2};+\infty\right)$.

10.17. $a \in \{-1;3\}$.

10.18. $a \in (-\infty;-13/4]$.

10.19. $a \in \left[1 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}};0\right]$.

10.20. **1.** 30. **2.** −6. **3.** 4. **4.** $\frac{31}{480}$. **5.** $2\sqrt{2}$. **6.** 3/8. **7.** $\frac{45}{32}$. **8.** $\frac{113+2\sqrt{2}}{5}$. **9.** $\frac{\pi+2}{4}$. **10.** $\frac{\pi+2}{2}$. **11.** $\frac{4-\pi^2}{2}$. **12.** $\frac{4-\pi}{4}$. **13.** 5/2. **14.** $2\sqrt{2}$.

10.21. **1.** 1/3. **2.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **3.** $\frac{21845}{8}$. **4.** $-\frac{2}{21}$. **5.** 2/3. **6.** $\pi/4$. **7.** $\pi/8$. **8.** $\frac{\pi}{4} + \operatorname{arctg} 3$. **9.** $\pi/4$. **10.** $\pi/6$. **11.** $\frac{15\sqrt[3]{5} - 8\sqrt[3]{4} - 1}{4}$. **12.** 4.

10.23. **1.** $\frac{4\sqrt{2}-2}{9}$. **2.** $\pi/32$. **3.** $\pi/6$. **4.** 1/2. **5.** $\frac{\pi^3}{96}$. **6.** $\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$.

10.27. **1.** 0, 0, $-\frac{4}{\pi^2+4}$. **2.** $\frac{1}{1+\sin^2 1}$, $\frac{1-\pi\sin^2 1}{1+\sin^2 1}$, $\frac{4+\pi\sin^2 1}{4(1+\cos^2 1)}$. **3.** $2x\sqrt[3]{1+(x^2+1)^4}$. **4.** $(-\infty;0]$ — промежуток убывания; $[0;+\infty)$ — промежуток возрастания. **5.** $\left\{-\frac{\pi}{4} + 2\pi k \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$.

10.29. **1.** $f'(x) = 3e^{3x}$. **2.** $f'(x) = \dfrac{1 - x\ln 2}{2^x}$. **3.** $f'(x) = x(2\ln x + 1)$.
4. $f'(x) = 2(x-1)e^{x^2-2x}$. **5.** $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$. **6.** $f'(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}$.

10.30. **1.** $f'(x) = x^x(1 + \ln x)$. **2.** $f'(x) = x^{\sin x}\left(\cos x \ln x + \dfrac{\sin x}{x}\right)$.
3. $f'(x) = (\ln x)^{\frac{1}{x}} \cdot \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$. **4.** $f'(x) = -\dfrac{\ln 2}{x\ln^2 x}$.
5. $f'(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x \ln\cos x + \operatorname{tg} x \ln\sin x}{\ln^2\cos x}$.
6. $f'(x) = (\ln x)^{\log_x \ln x} \cdot \dfrac{\ln\ln x(2 - \ln\ln x)}{x\ln^2 x}$.

10.32. **1.** 2 корня, если $a \in (e; +\infty)$; 1 корень, если $a \in (-\infty; 0) \cup \{e\}$; 0 корней, если $a \in [0; e)$.

2. 2 корня, если $a \in \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$; 1 корень, если $a \in (0;1) \cup \left\{e^{\frac{1}{e}}\right\}$; 0 корней, если $a \in \left(e^{\frac{1}{e}}; +\infty\right)$.

3. 2 корня, если $a \in (-\infty; 0)$; 1 корень, если $a = 0$; 0 корней, если $a \in (0; +\infty)$.

4. 3 корня, если $a \in \left(0; \dfrac{1}{e^e}\right)$; 2 корня, если $a \in \left(1; e^{\frac{1}{e}}\right)$; 1 корень, если $a \left(\dfrac{1}{e^e}; 1\right) \cup \left\{e^{\frac{1}{e}}\right\}$; 0 корней, если $a \in \left(e^{\frac{1}{e}}; +\infty\right)$.

10.36. **1.** $f(x) = 1/3(x^3 - 5)$. **2.** $f(x) = -e^{-x} - 1$. **3.** $f(x) = \ln(-x)$, если $x \in (-\infty; 0)$; $f(x) = \ln x - 1$, если $x \in (0; +\infty)$. **4.** $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} + 1 - \dfrac{1}{2}\ln 3$, если $x \in (-\infty; -1)$; $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1-x}{x+1} + 1$, если $x \in (-1; 1)$; $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x-1}{x+1} + 1 + \dfrac{1}{2}\ln 3$, если $x \in (1; +\infty)$.

10.37. **1.** 6. **2.** $\pi/2$. **3.** 2. **4.** 1. **5.** 4/3. **6.** 32/3. **7.** 1/3. **8.** $\dfrac{7 - 4\sqrt{4}}{2}$.
9. $2 + \pi^3/6$. **10.** 7/3. **12.** 16/3.

10.38. **1.** 125/48. **2.** $a = 1$.

10.39. **1.** $\pi/4$. **2.** $y = \dfrac{1}{2}(\arcsin x + x\sqrt{1 - x^2}) + C$. **3.** $\dfrac{\pi - 2}{2}$.
4. $y = \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C$. **5.** 1. **6.** $y = x\ln x - x + C$.

10.40. **1.** $\dfrac{16}{15}\pi$. **2.** $\pi/2$. **3.** $\dfrac{375}{2}\pi$. **4.** $\pi^2/2$. **5.** $2\pi^2 R r^2$.

10.41. **1.** 1. **2.** $\frac{8}{3}\pi$. **3.** $\frac{2}{3}\pi hR^2$. **4.** $\frac{16}{3}R^3$. **5.** $\frac{2}{3}R^3; \pi R^2h - \frac{2}{3}R^3$. **6.** $\frac{8}{3}hR^2$.

10.42. **1.** $\frac{\sqrt{2}-4}{2}$. **2.** $\frac{1}{2}\rho gl^3$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. **3.** $\frac{\gamma mM}{c(c+l)}$, где γ — гравитационная постоянная. **4.** $\frac{\pi RI_0^2}{\omega}$. **5.** $\frac{m\omega^2l^2}{6}$. **6.** $\frac{1}{4}M\omega^2R^2$. **7.** $\frac{1}{4}\pi\rho gR^2H^2$, где ρ — плотность воды, g — ускорение свободного падения. **8.** $1{,}6\cdot 10^{12}$Дж.

10.43. **1.** $y = e^{2(x-2)}$. **2.** $y = e^{-3x-2}$. **3.** $y = 0$.

10.44. **1.** $6{,}5\cdot 10^5$ лет. **2.** $\log_{\frac{N_1}{N_0}} 10$ с. **3.** $25{,}8$ миллиона. **4.** $y = 3\cdot 2^{2-x}$. **5.** Нет.

10.45. **1.** $f(x) = \frac{3}{x}$. **2.** $f(x) = Cx^3$, $C > 0$. **3.** $f(x) = -\frac{1}{x}$. **4.** $f(x) = \frac{1}{\ln x + 1}$. **5.** $2{,}7$м/с. **6.** $\frac{3}{4000\ln\frac{5}{2}}$с.

Марк Иванович **Башмаков**, Борис Меерович **Беккер**,
Владимир Михайлович **Гольховой**, Юрий Иосифович **Ионин**

**АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА.
ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ**

Учебное пособие

Редактор *Т.В. Рысева.*
Художник *О.А. Левашова.*
Художественный редактор *А.Ю. Войткевич.*
Корректор *В.В. Кожуткина.*
Компьютерная верстка *А.В. Товстоног.*

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.
Изд. № Рент-86. Сдано в набор 02.09.03. Подп. в печать 23.03.04.
Формат 60 × 88 1/16. Бум. офсетная. Гарнитура «Таймс».
Печать офсетная. Объем 18,13 усл. печ. л. 18,63 усл. кр.-отт.
Тираж 4000 экз. Зак. № 3820.
ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4, Неглинная ул., 29/14.
Тел.: (095) 200-04-56
E-mail: info@v-shkola.ru http://www.v-shkola.ru

Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-59-39, факс: (095) 200-03-01.
E-mail: sales@v-shkola.ru

Отдел «Книга-почтой»: (095) 200-33-36.
E-mail: bookpost@v-shkola.ru

Набрано на персональных компьютерах издательства.

Отпечатано на ФГУП ордена "Знак Почета" Смоленская областная типография им. В.И. Смирнова.214000, г. Смоленск, пр-т им. Ю. Гагарина, 2.