ПРИЛОЖЕНИЕ
к журналу КВАНТ №1/1996

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

Выпуск 1

(*Планиметрия*)

Под редакцией А.А.Егорова

Москва 1996
Бюро «Квантум»

ББК 22.151.0
П691
УДК 514.112(075.4)

Приложение
к журналу «Квант»
№ 1/96

П691 **Практикум абитуриента:** Геометрия, Выпуск 1. Планиметрия/Под ред. А.А.Егорова. – М.: Бюро Квантум, 1996. – 128 с. (Прил. к журналу «Квант» №1/96)
ISBN 5-85843-017-1

Книга представляет собой сборник статей по планиметрии, опубликованных в разные годы в журнале «Квант» в разделе «Практикум абитуриента»

Для учащихся и преподавателей средних школ, лицеев и гимназий, для слушателей подготовительных отделений и курсов, а также для всех тех, кто самостоятельно готовится к конкурсным экзаменам.

ББК 22.151.0

ISBN 5-85843-017-1

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Опыт вступительных экзаменов и математических олимпиад (особенно в последние годы) показывает, что наиболее трудными для абитуриентов и «олимпиадников» оказываются задачи по геометрии. Тому есть много причин — от низкого качества учебников до плохого преподавания — их мы касаться не будем.

В журнале «Квант» в течение многих лет публиковались статьи, в какой-то мере восполняющие «пробелы в образовании» будущих абитуриентов и помогающие им освоить некоторые методы решения геометрических задач. Таких статей набралось довольно много, они снабжены большим количеством упражнений и, собранные вместе, могут послужить хорошим пособием для поступающих в вузы.

Предлагаем вам первый из сборников статей по геометрии, публиковавшихся в разные годы в журнале «Квант» под рубрикой «Практикум абитуриента». Надеемся, что он пригодится всем поступающим в вузы физико-математического и технического профиля.

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

С. Белый

На вступительных экзаменах по математике довольно часто предлагаются задачи, связанные с прямоугольными треугольниками. Что же нужно знать о прямоугольном треугольнике, кроме теоремы Пифагора, чтобы успешно решать такие задачи? Об этом и пойдет речь в настоящей статье.

Утверждение 1. *Центр окружности, описанной около прямоугольного треугольника, совпадает с серединой гипотенузы.*

Отсюда вытекает следующее соотношение:

$$m = R = \frac{c}{2},$$

где m — длина медианы, проведенной к гипотенузе, R — радиус описанной окружности, c — гипотенуза (см. рисунок 1 — он поможет вам доказать это утверждение).

Это соотношение часто используется при решении задач.

Задача 1. *В прямоугольном треугольнике ABC с катетами 3 и 4 вершина C прямого угла соединена с серединой D гипотенузы AB. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.*

В силу утверждения 1 точка D — центр описанной окружности, поэтому $DA = DC = DB$. Следовательно, треугольники ACD и BCD — равнобедренные (рис. 2). Центры окружностей,

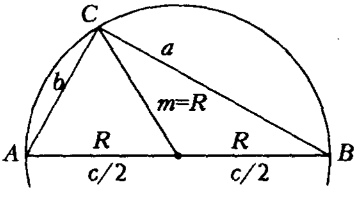


Рис. 1

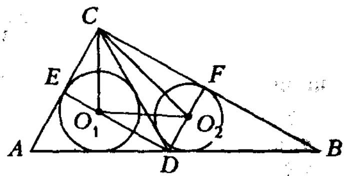


Рис. 2

вписанных в треугольники ACD и BCD, лежат на биссектрисах углов ADC и BDC. Но биссектрисы в равнобедренных треугольниках являются высотами, поэтому $ECFD$ — прямоугольник, а O_1DO_2 — прямоугольный треугольник. Следовательно, чтобы определить O_1O_2, достаточно найти O_1D и O_2D. Сделаем это с помощью свойства биссектрисы внутреннего угла треугольника: если $AC = 3$, $BC = 4$, то $AB = 5$ (по теореме Пифагора), $CE = 1{,}5$, $CD = 2{,}5$, $DE = 2$, $EO_1 : O_1D = CE : CD = 1{,}5 : 2{,}5$, откуда $EO_1 = 0{,}75$, $O_1D = 5/4$; аналогично $O_2D = 5/6$ и, наконец,

$$O_1O_2 = \sqrt{O_1D^2 + O_2D^2} = 5\sqrt{13}/12.$$

Задача 2. *Внутри прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) взята точка O так, что треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Найдите OC, если известно, что $OA^2 + OB^2 = a^2 (a > 0)$.*

По условию задачи треугольники OAB, OBC и OAC равновелики. Это сразу же наводит на мысль, что O — точка пересечения медиан треугольника ABC, так как обратное утверждение хорошо известно. Этот факт, действительно, нетрудно доказать (от

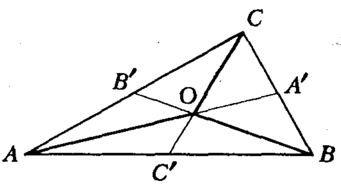


Рис.3

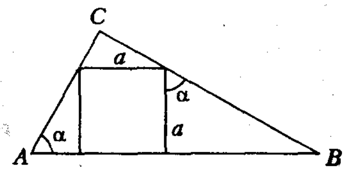


Рис.4

противного) для любого треугольника. Дальнейшие вычисления очевидны (рис. 3):

$$OA = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3}\sqrt{AC^2 + \frac{BC^2}{4}},\quad OB = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}\sqrt{BC^2 + \frac{AC^2}{4}},$$

$$OC = \frac{2}{3}CC' = \frac{2}{3}\cdot\frac{AB}{2} = \frac{AB}{3},$$

$$OA^2 + OB^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{5AB^2}{4} = 5OC^2,\quad OC = \frac{a}{\sqrt{5}}.$$

Задача 3. *В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат так, что две вершины его лежат на гипотенузе, а две другие — на катетах. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, относится к стороне квадрата как 13:6. Найдите углы треугольника ABC.*

Пусть $\angle A = \alpha$, сторону квадрата обозначим через a (рис. 4). Тогда $AB = a\mathrm{ctg}\alpha + a + \mathrm{tg}\alpha$, и

$$\frac{a\mathrm{ctg}\alpha + a + a\mathrm{tg}\alpha}{2a} = \frac{13}{6},$$

откуда $\mathrm{ctg}\alpha + \mathrm{tg}\alpha + 1 = 13/3$, $3\mathrm{tg}^2\alpha - 10\mathrm{tg}\alpha + 3 = 0$, $\alpha_1 = \mathrm{arctg}3$, $\alpha_2 = \mathrm{arctg}\,1/3$. Но углы α_1 и α_2 дополняют друг друга до прямого. Таким образом, углы треугольника ABC равны $\mathrm{arctg}3$, $\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{arctg}\frac{1}{3}$.

Утверждение 2. *Высота, проведенная из вершины прямого угла прямоугольного треугольника, делит его на два подобных прямоугольных треугольника, каждый из которых подобен данному.*

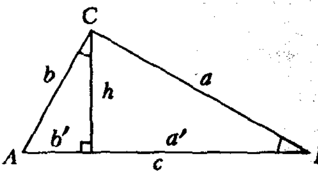


Рис.5

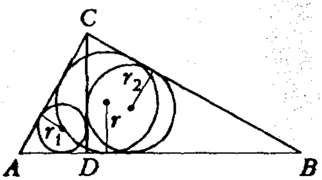


Рис.6

Из этого утверждения вытекают следующие соотношения (обозначения см. на рисунке 5):

$$h^2 = a'b',\ a^2 = a'c,\ b^2 = b'c,\ a^2 + b^2 = c^2,\ \frac{a^2}{b^2} = \frac{a'}{b'}.$$

Добавим к ним еще формулы для вычисления площади прямоугольного треугольника:

$$S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch = mh = Rh.$$

Задача 4. *В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, равны r_1 и r_2. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольнике ABC.*

Согласно утверждению 2 треугольники ADC, CDB и ACB подобны (рис. 6). А в подобных треугольниках радиусы вписанных окружностей (как, впрочем, и любые другие соответственные линейные элементы) относятся как соответственные стороны. Поэтому

$$\frac{AC}{r_1} = \frac{BC}{r_2} = \frac{AB}{r} = k.$$

Отсюда, используя теорему Пифагора, получим:

$$r_1^2k^2 + r_2^2k^2 = = r^2k^2,\ r^2 = r_1^2 + r_2^2,\ r = \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Замечание. Полученная формула $r^2 = r_1^2 + r_2^2$ носит общий характер: *для любых соответственных линейных элементов x, y, z треугольников ADC, CDB, ACB* (рис. 6) *справедлива зависимость* $x^2 + y^2 = z^2$.

Для доказательства этого утверждения достаточно вместо r_1, r_2, r подставить соответственно x, y, z.

Задача 5. *В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса CD прямого угла C. Известно, что $AD = m$, $BD = n$. Найдите высоту, опущенную из вершины угла C.*

Пусть x и y — длины проекций катетов на гипотенузу (рис. 7). Тогда $\frac{x}{y} = \frac{AC^2}{BC^2}$. Но

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD} = \frac{m}{n}$$

(по свойству биссектрисы). Получается **система**

$$\begin{cases} x + y = m + n, \\ \frac{x}{y} = \frac{m^2}{n^2}. \end{cases}$$

Найдя из **этой системы** x и y, по формуле $h = \sqrt{xy}$ **определим** высоту:

$$h = \frac{mn(m+n)}{m^2 + n^2}.$$

Утверждение 3 (обратное теореме Пифагора). *Если в треугольнике квадрат одной стороны равен сумме квадратов двух других сторон, то этот треугольник прямоугольный.*

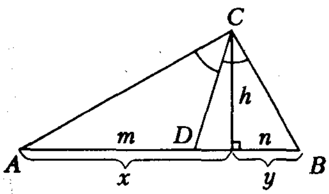


Рис.7

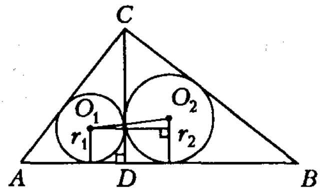


Рис.8

Это утверждение вытекает из теоремы косинусов, в ряде случаев оно бывает очень полезным.

Задача 6. *Пусть a, b — катеты прямоугольного треугольника ABC, c — гипотенуза, h — длина высоты, опущенной из* *вершины C. Докажите, что треугольник со сторонами h, $c + h$, $a + b$ является прямоугольным.*

Легко проверить, что $(a+b)^2 + h^2 = (c+h)^2$, так как это равносильно равенству $ab = ch$. Отсюда и следует утверждение задачи.

Хорошо известна формула $r = \frac{S}{p}$ (или $S = pr$), где S — площадь треугольника, p — полупериметр, r — радиус вписанной окружности. Для прямоугольного треугольника радиус вписанной окружности можно вычислять по более простой формуле:

$$r = \frac{a+b+c}{2}.$$

Отметим также формулу

$$2r + 2R = a + b$$

(последние две формулы эквивалентны). Попробуйте доказать эти формулы самостоятельно.

Задача 7. *В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$ проведена высота CD. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD.*

Пусть r_1 и r_2 — радиусы окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD соответственно (рис. 8). Тогда

$$O_1O_2 = \sqrt{(r_1 + r_2)^2 + (r_1 - r_2)^2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{r_1^2 + r_2^2}.$$

Но $\sqrt{r_1^2 + r_2^2} = r$, где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC (см. задачу 4), поэтому

$$O_1O_2 = \sqrt{2} \cdot r = \sqrt{2} \cdot \frac{BC + AC - AB}{2} = \sqrt{2}.$$

И, наконец, приведем еще одно утверждение, которое также бывает полезным для решения задач.

Утверждение 4. *В прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит пополам угол между высотой и медианой, проведенными из вершины того же угла.*

Доказательство этого утверждения ясно из рисунка 9.

Задача 8. *В прямоугольном треугольнике ABC длина высоты, опущенной на гипотенузу, равна a, биссектрисы прямого угла — b. Найдите площадь треугольника ABC.*

Проведем медиану CM (рис. 9) и положим $\angle DCL = \alpha$; **тогда**, согласно утверждению 4, и $\angle LCM = \alpha$. Далее,

$$\cos\alpha = \frac{a}{b},\ \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2a^2 - b^2}{b^2},$$

$$CM = \frac{a}{\cos 2\alpha} = \frac{ab^2}{2a^2 - b^2}.$$

Теперь можно найти площадь треугольника ABC:

$$S = CD \cdot AM = CD \cdot CM = \frac{a^2b^2}{2a^2 - b^2}.$$

Вы, наверное, уже обратили внимание, что все рассмотренные выше задачи решались алгебраическим методом. Это неудивительно, так как приведенные выше формулы представляют собой

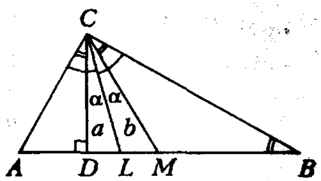


Рис.9

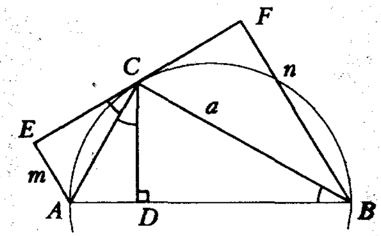


Рис.10

мощный арсенал для составления всевозможных уравнений. Однако не следует думать, что все задачи на прямоугольные треугольники решаются алгебраически — иногда полезно предварительно сделать некоторые дополнительные построения.

Задача 9. *Около прямоугольного треугольника ABC описана окружность. Расстояния от концов гипотенузы AB до прямой, касающейся окружности в точке C, соответственно равны m и n. Найдите катеты AC и BC.*

Проведем высоту CD (рис. 10) и заметим, что $\angle ACD = \angle ABC = \angle ACE$ (последние два угла измеряются половиной одной и той же дуги AC). Поэтому треугольники AEC и ADC равны (по гипотенузе и острому углу). Следовательно, $AD = AE = m$. Аналогично можно доказать, что $BD = BF = n$. Теперь $AC = \sqrt{AD \cdot AB} = \sqrt{m^2 + mn}$, $BC = \sqrt{BD \cdot AB} = \sqrt{n^2 + mn}$.

Упражнения

1. Из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC опущена высота BD. Докажите, что ее длина равна сумме радиусов окружностей, вписанных в треугольники ABC, ABD и BCD.

2. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна l, а длина высоты, опущенной из вершины прямого угла, равна h. Найдите площадь треугольника.

3. Периметр прямоугольного треугольника ABC ($\angle C = 90°$) равен 72, а разность длин медианы CK и высоты CM равна 7. Найдите площадь треугольника ABC.

4. В прямоугольный треугольник ABC вписан квадрат $CEKM$ так, что точка K лежит на гипотенузе AB, а E и M — на катетах. Сторона этого квадрата относится к радиусу круга, вписанного в треугольник ABC, как $(2 + \sqrt{2}):2$. Найдите углы треугольника.

5. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CL прямого угла. Из вершины A ($\angle A > 45°$) на CL, опущен перпендикуляр AD. Найдите площадь треугольника ABC, если $AD = a$, $CL = b$.

6. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом 30° проведена высота CD из вершины прямого угла C. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники ACD и BCD, если меньший катет треугольника ABC равен 1.

7. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $CA = 4$. На катете CB взята точка D так, что $CD = 1$. Окружность радиусом $\sqrt{5}/2$ проходит через точки C и D и касается в точке C окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите площадь треугольника ABC.

8. В равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($\angle B = 90°$) вписан прямоугольник $MNKB$ так, что две его стороны MB и KB лежат на катетах, а вершина N — на гипотенузе AC. В каком отношении точка N должна делить гипотенузу, чтобы площадь прямоугольника составляла 18% площади треугольника?

9. В прямоугольный треугольник вписана окружность радиусом r. Радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен R. Найдите длину гипотенузы.

10. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла C проведена высота CD. Периметр треугольника ADC равен a, а треугольника BDC — b. Найдите периметр треугольника ABC.

МЕТРИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

А.Болибрух, В.Уроев, М.Шабунин

Опыт проведения экзаменов в вузы показывает, что многие абитуриенты не обладают достаточными навыками в решении геометрических задач. Самые простые планиметрические задачи порой становятся камнем преткновения даже для тех абитуриентов, которые успешно справляются с вопросами по алгебре и тригонометрии. Причем это относится не только к задачам, для решения которых необходимо проявить определенную изобретательность, но и к задачам, решаемым с применением стандартных теорем и формул школьного курса, таких, как теорема косинусов, теорема синусов, формулы площади треугольника и др.

В настоящей статье рассматриваются задачи, в основном предлагавшиеся в разные годы на вступительных экзаменах в МФТИ. Из большого материала авторы отобрали задачи, при решении которых используются основные метрические соотношения между элементами треугольника.

Выпишем эти соотношения. Рассмотрим треугольник ABC и введем следующие обозначения: $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, r — радиус вписанной окружности, h_a — длина высоты, опущенной на сторону BC, S — площадь треугольника. Тогда

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ (теорема синусов)}, \qquad \text{(I)}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A \text{ (теорема косинусов)}, \qquad \text{(II)}$$

$$S = \frac{1}{2}h_a a, \qquad \text{(III)}$$

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\angle A, \qquad \text{(IV)}$$

$$S = \frac{1}{2}(a+b+c)r. \qquad \text{(V)}$$

Эти формулы абитуриент должен знать, уметь их доказывать, а также применять их при решении задач. Есть и другие формулы, знание которых уже не предусмотрено программой для поступающих, но которые часто бывают полезны при решении задач. Например, формула Герона

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad \text{(VI)}$$

где $p=(a+b+c)/2$ — полупериметр треугольника, или формула

$$S=\frac{abc}{4R}, \qquad \text{(VII)}$$

которая легко получается, если подставить значение $\sin\angle A$, найденное из теоремы синусов (I), в формулу (IV).

Начнем с задач на применение теоремы синусов.

Задача 1. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB=BC$) медиана AD и биссектриса CE перпендикулярны. Определите величину угла ADB.*

Решение. Пусть α — искомый угол, O — точка пересечения отрезков AD и CE (рис. 1). В ΔADC биссектриса CO является одновременно высотой, значит, ΔADC — равнобедренный и $\angle DAC=\angle ADC=\pi-\alpha$, $\angle A=\angle C=2\alpha-\pi$, $\angle BAD=\angle A-\angle DAC=$ $=3\alpha-2\pi$. В треугольнике ABD согласно условию $BD=\frac{1}{2}AB$. Применяя теорему синусов, получаем $\frac{AB}{\sin\alpha}=\frac{BD}{\sin(3\alpha-2\pi)}$, откуда $\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{2\sin 3\alpha}$, $2\sin 3\alpha=\sin\alpha$, $2\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)=\sin\alpha$, $\sin^2\alpha=5/8$. Но из условия задачи следует, что $\angle DCO=\alpha-\pi/2>$

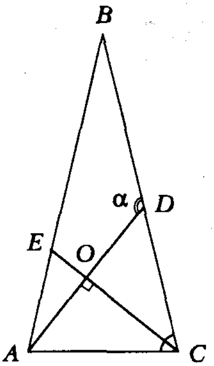


Рис. 1

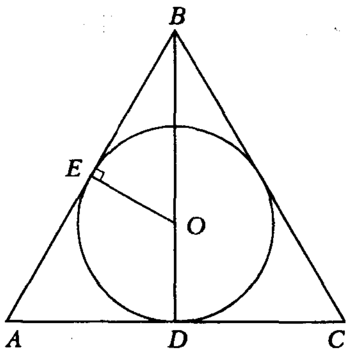


Рис. 2

> 0, с другой стороны, $\alpha < \pi$, т.е. $\pi/2 < \alpha < \pi$, **поэтому** $\sin\alpha = \sqrt{10}/4$, $\alpha = \pi - \arcsin\sqrt{10}/4$.

Ответ: $\pi - \arcsin\sqrt{10}/4$.

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике ABC длина высоты BD, опущенной на основание, равна h, а радиус вписанной окружности равен r. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.*

Решение. Пусть O — центр вписанной окружности, E — точка касания окружности с отрезком AB, $AC = b$ (рис. 2). По теореме синусов радиус R описанной окружности равен $\frac{b}{2\sin\angle B}$. Из ΔBOE находим $\sin\frac{\angle B}{2} = \frac{OE}{OB} = \frac{r}{h-r}$. С другой стороны, $\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} = \frac{AD}{BD} = \frac{b}{2h}$, отсюда

$$b = 2h\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2} \text{ и } R = \frac{h\operatorname{tg}\frac{\angle B}{2}}{\sin\angle B} = \frac{h}{2\cos^2\frac{\angle B}{2}} = \frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}.$$

Ответ: $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$.

Задача 3. *Углы при вершинах A и C треугольника ABC соответственно равны $\pi/4$ и $\pi/6$. Найдите угол между высотой BD и медианой BE этого треугольника.*

Решение. Обозначим $AB = c$, $AC = b$, $\angle DBE = \varphi$ (рис. 3). Тогда $AD = c\cos\angle A = c\sqrt{2}/2$, $DE = BD\operatorname{tg}\varphi = \left(c\sqrt{2}\operatorname{tg}\varphi\right)/2$. Следовательно, $b/2 = AE = AD + DE = c\sqrt{2}\,(1+\operatorname{tg}\varphi)/2$. По теореме синусов для ΔABC получаем $\frac{c}{\sin\angle C} = \frac{b}{\sin\angle B}$, где $\sin\angle B = \sin(\pi - \angle A - \angle C) = \sin(\angle A + \angle C) = \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{3}\right)$.

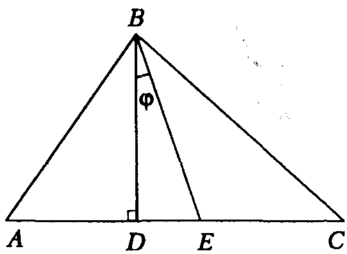


Рис.3

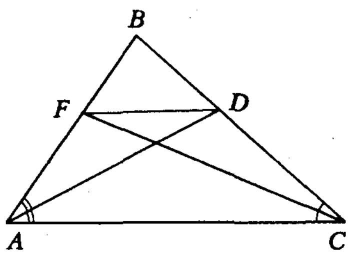


Рис.4

Отсюда находим

$$\frac{c}{1/2} = \frac{4c(1+\mathrm{tg}\,\varphi)}{1+\sqrt{3}},\ \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\sqrt{3}-1}{2}. \qquad (1)$$

Ответ: $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

При решении следующих задач используется теорема косинусов.

Задача 4. *Биссектрисы AD и CF треугольника ABC пересекают стороны BC и AB в точках D и F соответственно. Найдите длину отрезка FD, если $AC = 6$, $AF = 2$, $CD = 3$.*

Решение. Обозначим $BD = x$, $BF = y$ (рис. 4). Воспользуемся важным свойством биссектрисы: биссектриса делит сторону треугольника на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон. Таким образом, $AB/AC = x/3$, $BC/AC = y/2$ или $(2+y)/6 = x/3$, $(x+3)/6 = y/2$, откуда $x = 9/5$, $y = 8/5$, $AB = 18/5$, $BC = 24/5$. Для вычисления DF воспользуемся теоремой косинусов для ΔFBD:

$$DF^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\angle B, \qquad (2)$$

где $\cos\angle B$, в свою очередь, найдем из соотношения $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB\cdot BC\cos\angle B$. Подставляя найденные значения длин сторон ΔABC, получаем $36 = \frac{18^2}{25} + \frac{24^2}{25} - \frac{2\cdot 18\cdot 24}{25}\cos\angle B$, откуда $\cos\angle B = 0$, $\angle B = \pi/2$, $DF = \sqrt{145}/5$.

Ответ: $\sqrt{145}/5$.

Задача 5. В *треугольнике* ABC: $\angle B = \arccos\frac{7}{8}$, $AC = b$, *а высота, опущенная из вершины B, равна сумме двух других высот. Найдите площадь треугольника ABC.*

Решение. Пусть $AB = x$, $BC = y$ (рис. 5). Тогда по теореме косинусов

$$b^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\angle B = x^2 + y^2 - \frac{7}{4}xy. \qquad (3)$$

Далее, $h_b = \frac{2S}{b}$, $h_x = \frac{2S}{x}$, $h_y = \frac{2S}{y}$, где S — площадь ΔABC, а h_b, h_x, h_y — его высоты. Так как по условию задачи $h_b = h_x + h_y$, то $\frac{1}{b} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ или $x + y = \frac{xy}{b}$, откуда $x^2 + y^2 = \frac{(xy)^2}{b^2} - 2xy$. Отсюда и из уравнения (3) получаем уравнение относительно $z = xy$:

$$b^2 = \frac{z^2}{b^2} - 2z - \frac{7}{4}z,$$

откуда $z = xy = 4b^2$. Поэтому $S = \frac{xy\sin\angle B}{2} = \frac{\sqrt{15}}{4}b^2$.

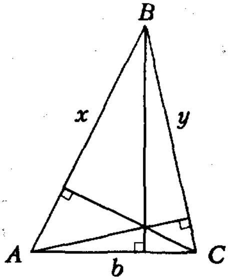


Рис.5

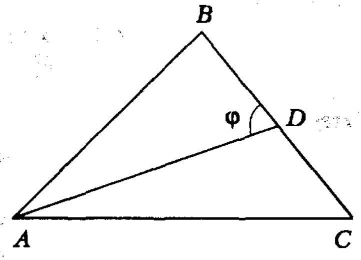


Рис.6

Ответ: $\frac{\sqrt{15}}{4}b^2$.

Замечание к теореме косинусов. С помощью теоремы косинусов легко получить формулу, выражающую длину медианы через длины сторон треугольника. Обозначим $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$, длину медианы AD через m_a, $\angle BDA = \varphi$ (рис. 6). По теореме косинусов для треугольников ABD и ADC получаем:

$$a^2/4 + m_a^2 - am_a\cos\varphi = c^2,\ a^2/4 + 2m_a^2 - am_a\cos(\pi - \varphi) = b^2.$$

Складывая эти уравнения и используя то, что $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$, находим $a^2/2 + 2m_a^2 = c^2 + b^2$, откуда

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\,. \qquad (4)$$

Задача 6. *В треугольнике ABC длины сторон связаны соотношением $BC^2 + AC^2 = 5AB^2$. Найдите угол между медианами AM и BN.*

Решение. Обозначим $AB = c$, $BC = a$, $AC = b$, $\angle NOM = \varphi$, $AM = m_a$, $BN = m_b$ (рис. 7). Поскольку в точке пересечения медианы делятся в отношении 2:1, считая от вершины, то, согласно формуле (4), получаем:

$$OM = \frac{m_a}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}\,,\ ON = \frac{m_b}{3} = \frac{1}{6}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}\,.$$

По теореме косинусов для ΔNOM с учетом того, что $MN = \frac{c}{2}$, находим $\frac{m_a^2}{9} - \frac{m_b^2}{9} - \frac{2m_am_b}{9}\cos\varphi = \frac{c^2}{4}$ или $2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 - 8m_am_b\cos\varphi = 9c^2$, откуда $8m_am_b\cos\varphi = a^2 + b^2 - 5c^2$. Значит, $\varphi = \pi/2$.

Ответ: $\pi/2$.

Рассмотрим несколько задач, в которых применяются различные формулы для вычисления площади S треугольника ABC.

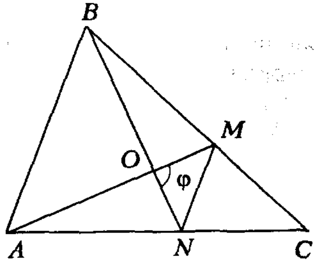


Рис.7

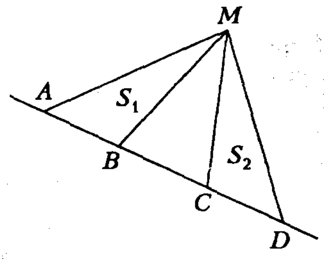


Рис.8

Используя формулу (III), легко доказать следующее утверждение: если отрезки AB и CD лежат на одной прямой, не проходящей через точку M, и S_1 и S_2 — площади треугольников MAB и MCD соответственно (рис. 8), то

$$S_1/S_2 = AB/CD. \tag{5}$$

Задача 7. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, а на стороне BC — точка N. Отрезки BM и AN пересекаются в точке O* (рис. 9). *Найдите площадь треугольника CMN, если площади треугольников AOM, AOB и BON соответственно S_1, S_2, S_3.*

Решение. Пусть $S_{\Delta MON} = Q_1$, $S_{\Delta CMN} = Q_2$. Из (5) следует, что $S_1/Q_1 = AO/ON = S_2/S_3$, откуда $Q_1 = S_1S_3/S_2$. Аналогично $Q_2/(Q_1 + S_3) = CN/NB = (Q_2 + Q_1 + S_1)/(S_2 + S_3)$, откуда $Q_2 = (Q_1^2 + Q_1S_1 + Q_1S_3 + S_1S_3)/(S_2 - Q_1)$. Подставляя в последнюю формулу найденное значение Q_1, получаем Q_2.

Ответ: $\dfrac{S_1S_3(S_2+S_1)(S_2+S_3)}{S_2(S_2^2 - S_1S_3)}$.

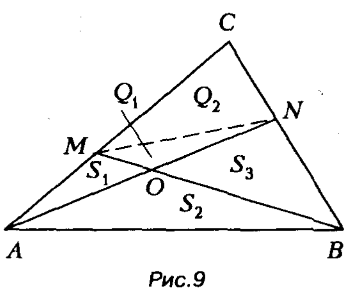


Рис.9

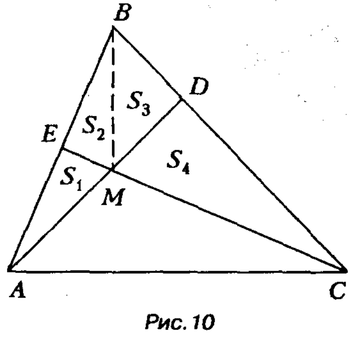


Рис.10

Задача 8. *В треугольнике ABC на стороне BC выбрана точка D так, что BD : CD = 1 : 2. В каком отношении медиана CE делит отрезок AD?*

Первый способ решения основан на сравнении площадей треугольников. Пусть M — точка пересечения AD и CE (рис. 10). Обозначим S_1, S_2, S_3, S_4 площади треугольников AEM, EMB, MBD, CMD соответственно. Используя формулу (5), получаем:

$$S_1 = S_2,\ S_4 = 2S_3,$$

$$S_{\Delta ABD} = 2S_1 + S_3 = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC},\quad S_{\Delta EBC} = 3S_3 + S_1 = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC}.$$

Отсюда $S_{\Delta ABC} = 3(2S_1 + S_3) = 2(3S_3 + S_1)$, или $3S_3 = 4S_1$. Теперь легко найдем искомое отношение: $AM = MD = S_{\Delta ABM} : S_{\Delta BMD} = 2S_1 : S_3 = 3 : 2$.

Второй способ. Проведем через точку E прямую EF, параллельную AD и пересекающую сторону BC в точке F (рис. 11). Тогда EF — средняя линия в треугольнике ABD и поэтому $EF = \frac{1}{2}AD$ и $BF = FD = \frac{1}{6}BC$. Из подобия треугольников CMD и CFE следует, что

$$\frac{MD}{EF} = \frac{CD}{CF} = \frac{\frac{2}{3}BC}{\frac{5}{6}BC} = \frac{4}{5}.$$

Отсюда $MD = \frac{4}{5}EF = \frac{2}{5}AD$, т.е. $AM : MD = \mathbf{3 : 2}$.

Ответ: 3:2.

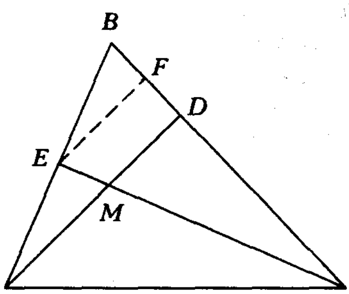


Рис. 11

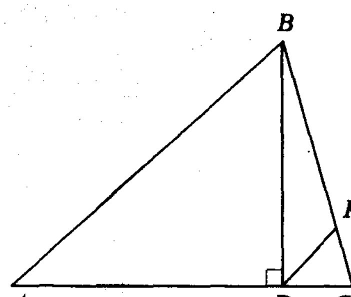


Рис. 12

Задача 9. *В треугольнике ABC через основание D высоты BD параллельно стороне AB проведена прямая, пересекающая BC в точке K. Найдите BK : KC, если* $S_{\Delta DBK} : S_{\Delta ABC} = 3 : 16$.

Решение. По теореме Фалеса $BK : KC = AD : DC$ (**рис. 12**). Обозначим $BK/KC = x$, по формуле (5) получаем:

$$S_{\Delta DBK}/S_{\Delta DBC} = BK/BC = x/(1+x),$$

$$S_{\Delta ABC}/S_{\Delta DBC} = AC/DC = x+1.$$

Следовательно, $S_{\Delta DBK}/S_{\Delta AOC} = x/(1+x)^2$. Решая уравнение $x/(1+x)^2 = 3/16$, находим $x_1 = 3$, $x_2 = 1/3$.

Ответ: 3 или $1/3$.

Задача 10. *Все стороны треугольника меньше* 1. *Докажите, что площадь треугольника меньше* $\sqrt{3}/4$.

Решение. Заметим, что хотя бы один из углов треугольника не превосходит 60°, в противном случае их сумма была бы больше 180°. Пусть, например, угол C между сторонами AC и BC треугольника меньше 60°. Вычисляя площадь треугольника по формуле (IV), получаем оценку: $S = \frac{1}{2}ab\sin\angle C < \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Задача 11. *На стороне AC треугольника ABC взята точка N, а на стороне BC — точка M так, что $CN : NA = 5$. Площади многоугольников NMC и $ANBM$ относятся как* $5 : 6$. *Найдите $CM : MB$.*

Решение. Пусть $CM/BC = k$ (рис. 13). По формуле (IV) получаем:

$$S_{\Delta NMC} = \frac{1}{2}NC\cdot CM\sin\angle C = \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}AC\cdot kBC\sin\angle C = \frac{5}{6}kS_{\Delta ABC},$$

откуда $S_{ABMN} = S_{\Delta ABC} - S_{\Delta NMC} = \left(1-\frac{5}{6}k\right)S_{\Delta ABC}$. Согласно условию $\dfrac{\left(1-\frac{5}{6}k\right)}{\frac{5}{6}k} = \dfrac{6}{5}$, следовательно, $k = 6/11$ и $CM : MB = 6 : 5$.

Ответ: 6:5.

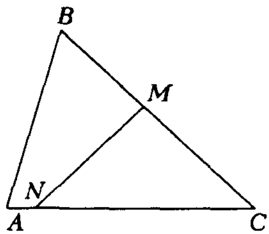


Рис. 13

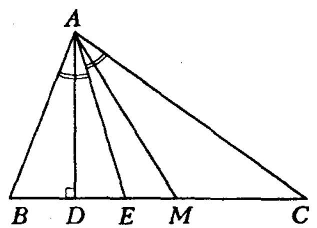


Рис. 14

Задача 12. *В треугольнике ABC проведены медиана AM, биссектриса AE и высота AD. Площадь треугольника AEM равна $1/14$ площади треугольника ABC, а площадь треугольника ADM равна $7/50$ площади треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.*

Решение. Обозначим $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ (рис. 14). Из формулы (5) вытекает, что $EM = a/14$, $DM = 7a/50$. Отсюда $BD = BM - MD = 9a/25$, $CD = 16a/25$, $BE = BM - EM = 3a/7$, $CE = 4a/7$. По свойству биссектрисы треугольника получаем

$$BE/EC = c/b,\ c/b = 3/4. \tag{6}$$

Из треугольников BAD и ACD находим длину катета AD:

$$AD^2 = c^2 - (9/25)^2 a^2 = b^2 - (16/25)^2 a^2. \tag{7}$$

Решая систему уравнений (6) — (7), получаем: $b = 4/5a$, $c = 3/5a$, следовательно, $b^2 + c^2 = a^2$. Отсюда легко выразить искомые углы.

Ответ: $\angle A = 90°$, $\angle B = \arcsin(4/5)$, $\angle C = \arcsin(3/5)$.

Задача 13. *Пусть l_c — длина биссектрисы угла C треугольника ABC* (рис. 15). *Докажите, что тогда*

$$l_c = 2ab\cos\frac{\angle C}{2}\Big/(a+b). \tag{8}$$

Решение. Для доказательства формулы (8) достаточно выразить площади S_1, S_2, S треугольников ACD, CDB, ABC по формуле (IV):

$$S_1 = \frac{bl_c}{2}\sin\frac{\angle C}{2},\ S_2 = \frac{al_c}{2}\sin\frac{\angle C}{2},\ S = \frac{ab}{2}\sin\angle C, \text{ —}$$

— и воспользоваться равенством $S_1 + S_2 = S$.

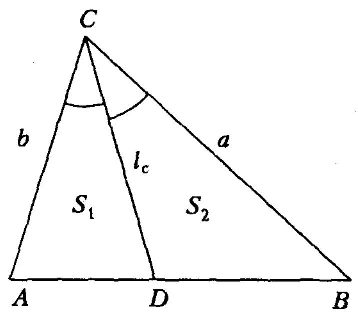


Рис. 15

Упражнения

1. В равнобедренном треугольнике ABC точки D и E делят боковые стороны в отношении $BD:DA = BE:EC = 3$. Найдите углы треугольника, если $AE \perp CD$.

2. Прямая, проходящая через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и центр вписанной в него окружности, пересекает сторону BC в точке D. Найдите отношение AD/AB, если $\angle B = \alpha$.

3. Через вершину A равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) и центр описанной около него окружности проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D. Найдите AD и радиус описанной окружности, если $AB = c$, $\angle ABC = \alpha$.

4. В треугольнике ABC угол A вдвое больше угла C, $AB = c$, $AC = b$. Найдите BC.

5. В треугольнике ABC перпендикуляр, проходящий через середину стороны AB, пересекает продолжение стороны BC в точке M. Перпендикуляр, проходящий через середину стороны BC, пересекает сторону AC в точке N. Известно, что $AN/NC = 1/2$, $MC/MB = 1/5$. Найдите углы треугольника ABC.

6. На сторонах AB и AC треугольника ABC выбраны точки D и E соответственно, так что $BD = DE = EC$. Найдите площадь треугольника ADE, если $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = \sqrt{7}$.

7. Точка L лежит на стороне AC треугольника ABC. Отрезок BL пересекает медиану CM в точке O. Известно, что площадь треугольника BMO равна 3, а площадь четырехугольника $AMOL$ равна 4. Найдите площадь треугольника ABC.

8. На сторонах AB и BC треугольника выбраны точки M и N. Отрезки CM и AN пересекаются в точке O. Докажите, что площади треугольников AOM и CON равны тогда и только тогда, когда прямые MN и AB параллельны.

9. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC расположены соответственно точки M и N так, что $AM:BM = 3:2$, $CN:BN = 5:2$. Прямая MN пересекает высоту BD треугольника в точке O. Найдите отношение DO/BO.

10. В прямоугольном треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла C. Известно, что $AD = 3$, $BD = 1$. Найдите высоту, опущенную из вершины угла C.

11. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису, если $AB:AC = 3:2$?

... Много задач вместе иногда решить легче, чем всего лишь одну из них, если это большое число задач хорошо согласовано, а одна задача сама по себе изолирована.

Д.Пойа. «Математика и правдоподобные рассуждения»

МЕДИАНЫ И СРЕДНИЕ ЛИНИИ

Э. Готман

В этой статье собраны задачи о свойствах медиан треугольника и средних линий четырехугольника. Для их решения нужно придумать вспомогательное построение, применить параллельный перенос и центральную симметрию. При доказательстве используется небольшое число теорем, чаще других — теорема о средней линии треугольника. Задачи расположены в такой последовательности, что достаточно подобрать ключ к решению первых из них, чтобы суметь решить и последующие.

Некоторые из задач даны с решениями или краткими указаниями. Прежде чем читать решение той или иной задачи, попытайтесь решить ее самостоятельно. В случае затруднений посмотрите на рисунок. Выясните, какую роль играют вспомогательные линии, для чего они нужны. Прочтите указание к решению. Сравните различные возможные способы решения одной и той же задачи. Приступая к решению последующих задач, найдите их сходство с решенными задачами и постарайтесь его использовать.

МЕДИАНЫ ТРЕУГОЛЬНИКА

Задача 1. *В треугольнике ABC проведена медиана CM. Докажите, что*

а) если $CM > \frac{1}{2}AB$, *то* $\angle C < 90°$; *б) если* $CM = \frac{1}{2}AB$, *то* $\angle C = 90°$; *в) если* $CM < \frac{1}{2}AB$, *то* $\angle C > 90°$.

Обозначим $\angle ACM = \alpha$, $\angle BCM = \beta$ (рис. 1).

а) $CM > AM$ и $CM > BM$. Рассмотрим треугольники ACM и BCM. Так как в треугольнике против большей стороны лежит и больший угол, то $\angle A > \alpha$, $\angle B > \beta$. Сложив эти равенства почленно, получим $\angle A + \angle B > \angle C$. Отсюда следует, что $\angle A +$

$+ \angle B + \angle C > \angle C + \angle C = 2\angle C$ и, поскольку $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, $\angle C < 90°$.

Для случаев б) и в) доказательство аналогично.

Итак, мы видим, что для решения задачи не потребовалось никаких дополнительных построений.

Хорошо известно, что медиана, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является биссектрисой угла при вершине. Рассмотрим свойство медианы разностороннего треугольника.

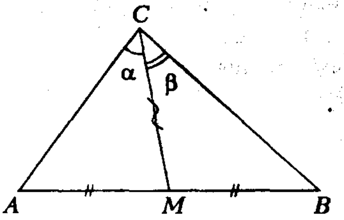


Рис. 1

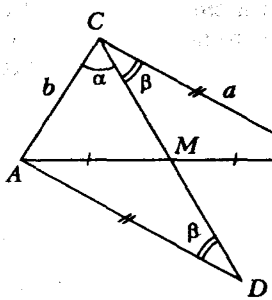


Рис. 2

Задача 2. *Медиана CM треугольника ABC образует со сторонами AC и BC соответственно углы* α *и* β. *Какой из этих углов больше, если* $AC < BC$?

Обозначим $BC = a$, $AC = b$, тогда по условию $a > b$.

Остановимся на двух способах решения этой задачи.

Первый способ. Построим точку D, симметричную точке C относительно середины M стороны AB, и соединим точку D с вершиной A (рис. 2). Построенный треугольник ADM симметричен треугольнику BCM относительно точки M, следовательно, $AD = BC = a$ и $\angle ADM = \angle BCM = \beta$. Мы получили треугольник ACD, который содержит интересующие нас углы α и β, причем противолежащие им стороны AD и AC равны соответственно a и b. Согласно условию $a > b$, поэтому $\alpha > \beta$.

Второй способ. Соединим середину E стороны AC с точкой M (рисунок сделайте самостоятельно), образуется треугольник CEM со сторонами $EM = a/2$ и $CE = b/2$. Углы треугольника CEM, противолежащие этим сторонам, равны соответственно α и β. Это легко доказать, используя свойство средней линии треугольника.

Задача 3. Докажите, что длина медианы CM треугольника ABC меньше полусуммы длин сторон AC и BC.

Заметим, что почти все приведенные задачи можно решить с помощью дополнительного построения, которое состоит в проведении средней линии треугольника.

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

Задача 13. *Докажите, что прямые, проведенные через вершины выпуклого четырехугольника параллельно его диагоналям, ограничивают параллелограмм, площадь которого вдвое больше площади четырехугольника.*

Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник (рис. 6). Для решения задачи достаточно заметить, что диагонали AC и BD четырехугольника разбивают описанный параллелограмм $EFKL$ на четыре параллелограмма, а диагональ каждого параллелограмма делит его на два равных треугольника.

Задача 14. Используя результат задачи 13, докажите, что площадь любого выпуклого четырехугольника равна половине произведения длин его диагоналей на синус угла между ними.

Заметим, что любой треугольник делится медианой на два равновеликих треугольника. Обладает ли аналогичным свойством средняя линия четырехугольника?

Задача 15. Докажите, что выпуклый четырехугольник $ABCD$ делится средней линией MN, соединяющей середины сторон AB и CD, на два равновеликих четырехугольника тогда и только тогда, когда стороны AB и CD параллельны.

Задача 16. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки M и N являются серединами его сторон AB и CD. Докажите, что площадь четырехугольника $AMCN$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

Задача 17. Средние линии четырехугольника разбивают его на четыре четырехугольника. Докажите, что сумма площадей одной пары несоседних четырехугольников равна сумме площадей другой пары.

Задача 18. *Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника вдвое больше площади четырехугольника, вершинами которого служат середины сторон данного.*

Приведем два решения этой задачи.

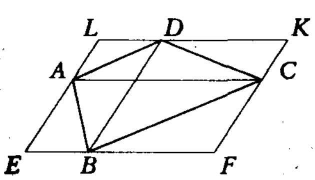


Рис.6

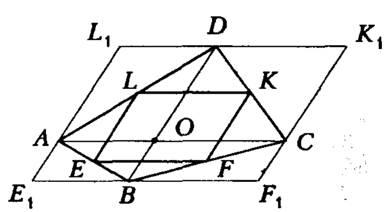


Рис.7

Первое решение. Пусть E, F, K, L — середины сторон данного четырехугольника $ABCD$ (рис. 7). Средняя линия EF треугольника ABC отсекает от него треугольник BEF, площадь которого составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC: $S_{\Delta BEF} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC}$. Аналогично, $S_{\Delta DLK} = \frac{1}{4}S_{\Delta ACD}$. Сложив эти равенства почленно, получим

$$S_{\Delta BEF} + S_{\Delta DLK} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Точно так же докажем, что

$$S_{\Delta AEL} + S_{\Delta CKF} = \frac{1}{4}S_{ABCD}.$$

Таким образом, сумма площадей треугольников, отсекаемых от четырехугольника $ABCD$ сторонами параллелограмма $EFKL$, равна $\frac{1}{2}S_{ABCD}$. Следовательно, $S_{EFKL} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Второе решение. Опишем около четырехугольника $ABCD$ параллелограмм $E_1F_1K_1L_1$ так, чтобы его стороны были параллельны диагоналям четырехугольника $ABCD$ (рис. 7). Пусть диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Тогда $\overrightarrow{OE_1} = 2\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OF_1} = 2\overrightarrow{OF}$ и т.д. Следовательно, параллелограммы $E_1F_1K_1L_1$ и $EFKL$ гомотетичны, коэффициент гомотетии равен 2. Поэтому площадь параллелограмма $E_1F_1K_1L_1$ в 4 раза больше площади параллелограмма $EFKL$. Далее воспользуйтесь задачей 13.

Задача 19. Докажите, что если диагонали выпуклого четырехугольника равны, то площадь этого четырехугольника равна произведению длин его средних линий.

Задача 20. Докажите, что площадь выпуклого четырехугольника равна произведению длин его средних линий на синус угла между ними.

Теперь предлагаем вам решить несколько задач на вычисление площадей.

Задача 21. Из вершины C треугольника ABC проведена медиана CM. Найдите площадь треугольника ABC, если $AC = 13$, $BC = 11$, $CM = 10$.

Задача 22. Отрезок, соединяющий середины оснований трапеции, равен 5, а длины диагоналей трапеции равны 10 и 12. Вычислите площадь трапеции.

Задача 23. Найдите площадь выпуклого четырехугольника, если длина диагонали равна d, длина средней линии равна m и угол между ними равен φ.

В заключение приведем более сложную задачу.

Задача 24. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Точки M и N являются серединами сторон AB и CD. Прямые AN и DM пересекаются в точке P, прямые BN и CM — в точке Q. Известно, что $AP = PN$. Докажите, что площадь четырехугольника $MQNP$ равна одной четверти площади четырехугольника $ABCD$.

МЕТОД ПЛОЩАДЕЙ

И. Новиков

Искусство решать геометрические задачи чем-то напоминает трюки иллюзионистов – иногда, даже зная решение задачи, трудно понять, как можно было до него додуматься. Почти каждая сколько-нибудь трудная геометрическая задача требует индивидуального подхода. А хотелось бы иметь общий метод решения, который к тому же позволял бы «прикинуть» решение до конца, не проводя выкладок явно.

К сожалению, такого универсального метода нет. Но существуют приемы, применимые ко многим задачам. Один из них мы и рассмотрим.

Начнем с совсем простой задачи, которую мы решим двумя способами.

Задача 1. *Найдите биссектрису CD прямого угла C в прямоугольном треугольнике ACB с катетами $AC = 2$ и $BC = 3$* (рис. 1).

Первое решение. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{13}$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AC}{BC}.$$

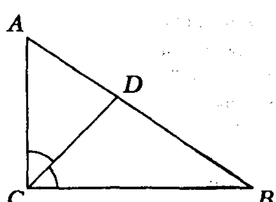


Рис. 1

Из равенства $AD + DB = \sqrt{13}$ получаем $AD = \frac{2}{5}\sqrt{13}$. Далее, легко найти косинус угла A:

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{\sqrt{13}}.$$

Остается применить теорему косинусов для определения стороны CD треугольника ACD:

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos A = \frac{72}{25}, \quad CD = \frac{6}{5}\sqrt{2}.$$

Второе решение. Подсчитаем площадь треугольника ACB разными способами. С одной стороны, $S_{\Delta ACB}=\frac{1}{2}AC\cdot BC=3$. С другой стороны,

$$S_{\Delta ACB} = S_{\Delta ACD} + S_{\Delta DCB} = \frac{1}{2}AC\cdot CD\sin 45^\circ+$$
$$+\frac{1}{2}BC\cdot CD\sin 45^\circ=\frac{5\sqrt{2}}{4}CD.$$

Приравнивая правые части двух полученных выражений для $S_{\Delta ACB}$, получаем $CD=\frac{6}{5}\sqrt{2}$.

Второе решение явно короче и проще. К тому же оно легко приводит к цели и в более общей ситуации. Чтобы убедиться в этом, выясните самостоятельно, как изменяются оба эти решения, если поставлена

Задача 2. *Найдите биссектрису CD угла C треугольника ACB, если $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \alpha$.* (**Ответ:** $CD = \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\alpha}{2}$.)

Однако главное достоинство второго решения — в его идейной «прозрачности». В первом решении строится некоторая «цепочка» элементов треугольника: каждый элемент этой цепочки вычисляется по данным задачи и другим, уже найденным элементам. Последним элементом цепочки служит искомая величина (в данном случае — биссектриса CD). При этом не сразу видно, какие именно элементы понадобятся при определении искомой величины, т.е. какие элементы необходимо предварительно вычислить.

Во втором решении для величины, которую надо найти, мы получаем уравнение, выписывая выражения для площади треугольника через известные и искомые элементы треугольника. Этот прием — сравнение различных выражений для площади треугольника — оказывается очень плодотворным. Почему именно для площади? Дело в том, что площадь треугольника довольно просто выражается через разнообразные комбинации элементов этого треугольника.

Прежде чем приводить следующие примеры, вспомним важнейшие из этих выражений. Сначала договоримся об обозначениях. В треугольнике ABC

a, b, c — стороны, противолежащие углам A, B и C соответственно;

h_a, h_b, h_c — высоты,

m_a, m_b, m_c — медианы, проведенные к сторонам a, b и c соответственно;

r — радиус вписанной окружности;

R — радиус описанной окружности;

p — полупериметр;

S — площадь треугольника ABC.

Формулы, которыми мы будем пользоваться, в этих обозначениях записываются так:

$$S = \frac{ah_a}{2}, \qquad (1)$$

$$S = \frac{ab\sin C}{2}, \qquad (2)$$

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A}, \qquad (3)$$

$$S = \frac{abc}{4R}, \qquad (4)$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \qquad (5)$$

$$S = pr. \qquad (6)$$

Все эти соотношения известны из школьного курса, поэтому мы не будем их подробно доказывать, а ограничимся лишь несколькими замечаниями.

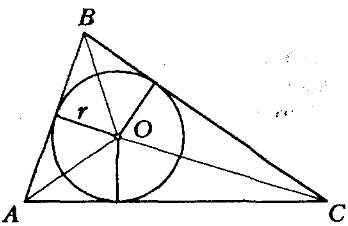


Рис.2

Чтобы вывести формулы (3) и (4) из (2), можно воспользоваться теоремой синусов:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

Формулу (5) (формулу Герона) иногда удобнее использовать в преобразованном виде:

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4}.$$

Формула (6) легко получается из очевидного (рис. 2) равенства

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AOB} + S_{\Delta BOC} + S_{\Delta COA}.$$

Рассмотрим теперь еще несколько задач. В каждой из них применение метода площадей приводит к короткому и прозрачному решению.

Задача 3. *Внутри правильного треугольника со стороной a взята произвольная точка M. Найдите сумму расстояний от этой точки до сторон треугольника.*

Решение. Надо найти сумму длин перпендикуляров MP, MQ и MR (рис. 3), опущенных из точки M на стороны AB, BC и CA соответственно. Если соединить точку M с вершинами треугольника, то ясно, что

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta AMB} + S_{\Delta BMC} + S_{\Delta CMA}.$$

Используя формулу для площади правильного треугольника

$S_{\Delta ABC}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ и замечая, что (по формуле (1))

$$S_{\Delta AMB}=\frac{1}{2}a\cdot MP,\ S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}a\cdot MQ,\ S_{\Delta CMA}=\frac{1}{2}a\cdot MR,$$

немедленно получаем ответ:

$$MP+MQ+MR=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 4. *Прямая AD делит треугольник ABC на два. Докажите, что радиус r окружности, вписанной в треугольник ABC, меньше суммы радиусов r_1 и r_2 окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD соответственно.*

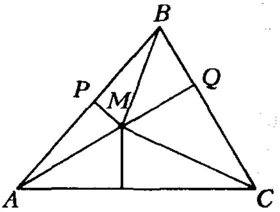


Рис.3

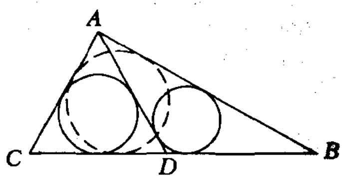


Рис.4

Решение. В равенстве $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ABD}+S_{\Delta ACD}$ (рис. 4) представим все члены с помощью формулы (6): $rp_{\Delta ABC}=r_1p_{\Delta ABD}+$ $+r_2p_{\Delta ACD}$.

Так как $p_{\Delta ABD}<p_{\Delta ABC}$ и $p_{\Delta ACD}<p_{\Delta ABC}$ (докажите), то $rp_{\Delta ABC}<$ $<r_1p_{\Delta ABC}+r_2p_{\Delta ABC}=(r_1+r_2)p_{\Delta ABC}$, а потому

$$r<r_1+r_2.$$

Задача 5. *В треугольнике ABC отношение стороны BC к стороне AC равно 3, а $\angle ACB=\alpha$. Из вершины C проведены два луча, делящие угол ACB на три равные части. Найдите отношение длин отрезков этих лучей, заключенных внутри треугольника ABC.*

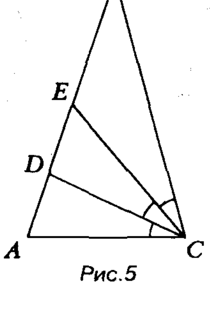


Рис.5

Решение. Пусть CD и CE – лучи, о которых идет речь в условии задачи (рис. 5). Очевидно, $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta ACD}+S_{\Delta DCB}=$ $=S_{\Delta ACE}+S_{\Delta ECB}$.

Воспользуемся формулой (2), учитывая, что $\angle ACD = \angle DCA = \angle ECB = \frac{\alpha}{3}$:

$$\frac{AC\cdot DC\sin\frac{\alpha}{3}}{2}+\frac{DC\cdot BC\sin\frac{2\alpha}{3}}{2}=\frac{AC\cdot EC\sin\frac{2\alpha}{3}}{2}+\frac{EC\cdot BC\sin\frac{\alpha}{3}}{2}.$$

Отсюда немедленно получаем

$$\frac{DC}{BC}=\frac{AC\sin\frac{2\alpha}{3}+BC\sin\frac{\alpha}{3}}{AC\sin\frac{\alpha}{3}+BC\sin\frac{2\alpha}{3}}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{3}+3}{6\cos\frac{\alpha}{3}+1}.$$

Вот пример более трудной задачи. Хотя в ней надо просто «решить треугольник», т.е. определить его стороны по трем известным элементам, получить решение привычным путем — с помощью теорем синусов и косинусов.

Задача 6. *Найдите стороны треугольника ABC, если* $h_a = 6$, $r = 2$, $R = 5$.

Решение. Воспользуемся формулами (4), (5) и (6) и запишем следующую систему уравнений относительно неизвестных сторон a, b, c треугольника ABC и его площади S:

$$\begin{cases} S = 3a, \\ S = \dfrac{abc}{20}, \\ S = \dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)}\cdot\sqrt{(a+c-b)(a+b-c)}, \\ S = a+b+c. \end{cases}$$

Приравнивая правые части первого и последнего уравнений, получаем, что $b+c=2a$. Приравнивая правые части первого и второго уравнений, получаем, что $bc=60$. Наконец, приравнивая правые части первого и третьего уравнений, получаем (после возведения в квадрат), что

$$144a^2=(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c).$$

Преобразуем правую часть этого равенства, учитывая полученные выше соотношения $b+c=2a$ и $bc=60$:

$$(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)=$$
$$=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b-c)^2\right)=\left((b+c)^2-a^2\right)\left(a^2-(b+c)^2+4bc\right)=$$
$$=\left(4a^2-a^2\right)\left(a^2-4a^2+240\right)=3a^2\left(240-3a^2\right).$$

Следовательно, для определения a получаем уравнение

$$144a^2 = 3a^2(240 - 3a^2),$$

откуда $a = 8$. Из системы уравнений $b + c = 16$, $bc = 60$ теперь легко найти две пары значений b и c (*два* ответа):

$$a = 8,\ b = 6,\ c = 10 \text{ или } a = 8,\ b = 10,\ c = 6,$$

которые геометрически определяют *один* треугольник (с точностью до обозначения сторон b и c).

На этом примере особенно хорошо видна основная особенность метода площадей — из геометрической задачи он «делает» алгебраическую, сводя все к решению некоторой системы уравнений.

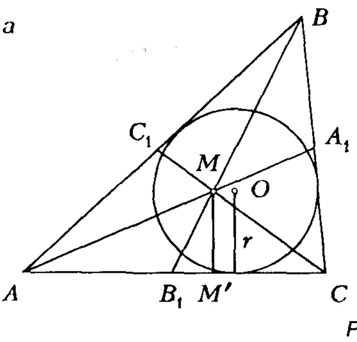
Задача 7. *Докажите, что если длины сторон треугольника образуют арифметическую прогрессию, то центр окружности, вписанной в этот треугольник, и точка пересечения его медиан лежат на прямой, параллельной средней по длине стороне треугольника.*

Решение. Пусть стороны треугольника ABC обозначены так, что $a \le b \le c$. Тогда по условию задачи $a + c = 2b$. Пусть O — центр вписанной окружности, а M — точка пересечения медиан AA_1, BB_1 и CC_1 (рис. 6,*а*).

Сначала выведем одно полезное свойство точки M пересечения медиан треугольника ABC. На рисунке 6,*б* треугольник ABC разбит медианами на 6 меньших треугольников. Площадь каждого из них равна 1/6 площади всего треугольника ABC. Доказать это очень просто: используя формулу (1), запишем равенства

$$S_{\Delta BB_1C} = \frac{1}{2}S_{\Delta ABC},\quad B_1M = \frac{1}{3}BB_1,\quad S_{\Delta MCB_1} = \frac{1}{3}S_{\Delta BB_1C} = \frac{1}{6}S_{\Delta ABC}.$$

Аналогично находятся площади остальных треугольников.



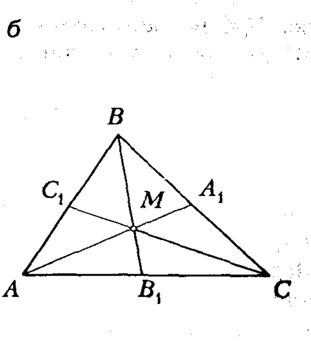


Рис.6

Теперь найдем длину перпендикуляра MM', опущенного из точки M на сторону AC:

$$\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AMC}=\frac{1}{2}MM'\cdot AC=\frac{1}{2}MM'\cdot b,$$

$$\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}rp=\frac{1}{3}r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)=\frac{1}{3}r\left(\frac{2b+b}{2}\right)=\frac{1}{2}rb,$$

откуда $MM'=r$, т.е. $MO \parallel AC$.

Метод площадей часто оказывается удобным и на отдельных этапах решения стереометрических задач.

Задача 8. *В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны с. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определите радиус описанного шара.*

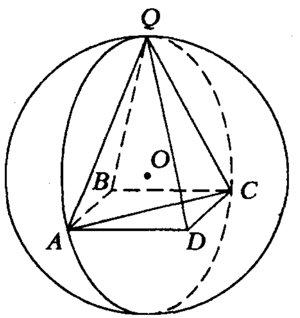


Рис.7

Решение (рис. 7). Так как вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, то

$$\angle DQC=\frac{\alpha}{2},\ \angle AQD=\frac{\beta}{2}.$$

Поэтому $DC=2c\sin\frac{\alpha}{4}$, $AD=2c\sin\frac{\beta}{4}$.

Рассмотрим сечение шара плоскостью AQC. Так как центр шара лежит в этой плоскости (докажите!), то радиус шара равен радиусу R окружности, описанной около треугольника AQC. Но $AQ=QC=c$, а $AC=2c\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\beta}{4}}$ (как диагональ прямоугольника $ABCD$). Поэтому для определения радиуса R достаточно воспользоваться выражениями для площади треугольника AQC по формулам (4) и (5).

В результате очевидных преобразований получаем ответ:

$$R=\frac{c}{\sqrt{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)}}.$$

Метод площадей удобно применять также в задачах, в которых требуется найти разного рода оценки для геометрических величин.

Задача 9. *В каких пределах может изменяться отношение радиуса окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, к высоте, опущенной на гипотенузу?*

Решение. Если c — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC, то можно записать (см. формулы (1) и (6)):

$$\frac{ch_c}{2} = pr, \text{ откуда } \frac{r}{h_c} = \frac{c}{2p}.$$

Таким образом, необходимо оценить отношение

$$\frac{c}{2p} = \frac{c}{a+b+c} = \frac{1}{\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+1} = \frac{1}{\sin A + \sin B + 1}.$$

Так как $A+B=90°$, то

$$\sin A + \sin B + 1 = \sin A + \cos A + 1 = \sqrt{2}\cos(45°-A) + 2.$$

Острый угол A прямоугольного треугольника может принимать любое значение между 0 и 90°. Поэтому угол $45° - A$ меняется в пределах от $-45°$ до $+45°$ и, как легко получить из свойств косинуса, при этом

$$2 < \sqrt{2}\cos(45°-A) + 1 \le 1 + \sqrt{2}.$$

Следовательно, в любом прямоугольном треугольнике всегда выполнены неравенства

$$\sqrt{2} - 1 \le \frac{r}{h_c} < \frac{1}{2}.$$

Как мы убедились, метод площадей действительно приводит к простым решениям многих задач. Конечно, он не заменяет все остальные методы, но представляет собой подход, о котором не следует забывать, приступая к решению той или иной задачи.

Упражнения

1. Найдите медиану m_a треугольника, зная его стороны a, b, c.

2. Докажите, что в произвольном треугольнике $\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$.

3. В остроугольном треугольнике ABC дано: $AB = c$, проведенная из вершины B медиана $BD = m$. Угол BDA острый и равен β. Вычислите площадь треугольника ABC.

4. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник. Докажите, что радиус окружности, касающейся гипотенузы и продолжений катетов, равен сумме гипотенузы и радиуса окружности, вписанной в треугольник.

5. Известно, что в треугольнике ABC: $S_{\Delta ABC}=16$, $m_a=6$, $m_b=4$. Докажите, что медианы m_a и m_b перпендикулярны.

6. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри неравностороннего треугольника, до сторон этого треугольника заключена между наименьшей и наибольшей из высот треугольника.

7. Основанием $ABCD$ прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра) служит ромб со стороной a и острым углом φ, а высота призмы равна h. Найдите расстояние от вершины B_1 до диагонали A_1D боковой грани ADD_1A_1.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ОТРЕЗКИ И УГЛЫ

И. Габович

При решении геометрических задач часто бывает полезно помимо величин, данных в условии, ввести вспомогательные величины (длины отрезков, величины углов и т.п.) и выразить через них искомую величину. При этом в одних случаях вспомогательные величины в ходе решения «исчезают» (например, сокращаются), в других — определяются через данные.

Задача 1. *Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найдите отношение площадей треугольников PQM и PQN, если* $\angle A = \frac{\pi}{4}$, $\angle B = \frac{\pi}{3}$ (рис.1).

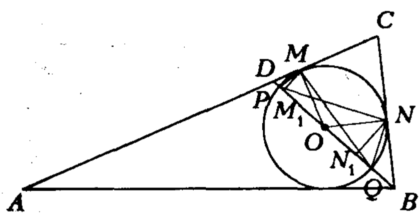


Рис. 1

Решение. Проведем в треугольниках PQM и PQN высоты $MM_1 \perp PQ$ и $NN_1 \perp PQ$. Поскольку треугольники PQM и PQN имеют общее основание,

$$\frac{S_{\Delta PQM}}{S_{\Delta PQN}} = \frac{MM_1}{NN_1}.$$

Пусть O — центр вписанной окружности и $OM = ON = x$. Поскольку $\angle BON = \frac{\pi}{3}$, а ΔONN_1 — прямоугольный, $NN_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Так как $\angle C = \frac{5}{12}\pi$, из четырехугольника $NOMC$

получаем $\angle MON = \frac{7\pi}{12}$. Поэтому $\angle MOM_1 = \frac{\pi}{12}$. Из ΔMOM_1 получаем $MM_1 = x\sin\frac{\pi}{12} = x\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = x\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$.

Задача 2. *Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найдите отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды этой плоскостью.*

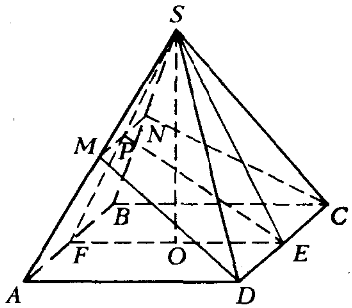


Рис.2

Решение. Легко видеть, что четырехугольник $CDMN$ (рис.2), получающийся в сечении, является трапецией. Через высоту SO и апофему SE проведем плоскость. Эта плоскость перпендикулярна боковым граням SAB и SCD (почему?). Поэтому $\angle FSO$=30°. Так как SF = =SE и $\angle FSE$ = 60°, треугольник FSE – правильный. Пусть AB= = AD = EF = x. Тогда $MN = \frac{x}{2}$, $EP = \frac{x\sqrt{3}}{2}$. Найдем объем четырехугольной пирамиды $SCDMN$. Отрезок SP – высота этой пирамиды (почему?), а трапеция $CDMN$ – ее основание. Поэтому $V_{SCDMN} = \frac{1}{3}SP \cdot S_{CDMN}$. Так как $SP = \frac{x}{2}$ и S_{CDMN} = $=\frac{\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{3x^2\sqrt{3}}{8}$, получаем $V_{SDMN} = \frac{x^3\sqrt{3}}{16}$. Легко видеть, что $V_{SABCD} = \frac{1}{3}SO\cdot x^2 = \frac{x^3\sqrt{3}}{6}$.

Теперь ясно, что

$$\frac{V_{SCDMN}}{V_{ABCDMN}} = \frac{V_{SCDMN}}{V_{SABCD} - V_{SCDMN}} = \frac{3}{5}.$$

Иногда введение вспомогательного отрезка оказывается полезным при решении задач, в которых требуется найти некоторый угол.

Задача 3. *В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определите угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости* *основания, зная, что отношение объема пирамиды к объему шара равно* $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

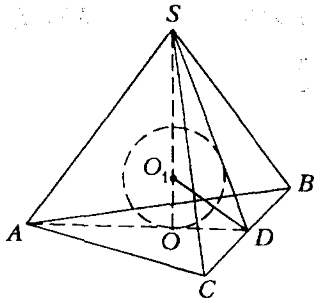


Рис.3

Решение. Если шар вписан в правильную пирамиду, то его центр лежит на высоте пирамиды, шар касается основания в его центре, а боковых граней — в точках, принадлежащих апофемам пирамиды. Пусть $\angle SDO = \varphi$ (рис.3), $BC = x$. Так как $OD = \frac{x\sqrt{3}}{6}$, $SO = \frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi$.

Поэтому $V_{SABC} = \frac{1}{3}SO \cdot S_{ABC} = \frac{x^3}{24}\operatorname{tg}\varphi$. Поскольку O_1D — биссектриса угла SDO, $\angle O_1DO = \frac{\varphi}{2}$. Поэтому $O_1O = \frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и объем шара равен $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$. Из условия получаем уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}} = 9.$$

Заменив $\operatorname{tg}\varphi$ его выражением через $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, получаем

$$9\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2} - 9\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2} + 2 = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ или $\varphi_1 = \frac{\pi}{3}$ и $\varphi_2 = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. (Подумайте, почему условию этой задачи соответствуют два возможных значения φ.)

Введение вспомогательного элемента (отрезка или угла) часто бывает полезно в случаях, когда данные в условии задачи отрезки и углы лежат в разных плоскостях. При этом желательно, чтобы вводимые и данные элементы входили в один треугольник.

Задача 4. *Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен* α, *а высота* — h. *Определите объем пирамиды.*

Решение. Пусть $SD = x$ (рис.4). Проведем апофему SE. Из ΔSDE находим $DE = x\sin\frac{\alpha}{2}$. $CD = 2x\sin\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $V = \frac{4}{3}x^2h\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Теперь выразим x^2 через h и α. Для этого рассмотрим треугольник SOD. Имеем $SD^2 = SO^2 + OD^2$, но $OD = CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $x^2 = h^2 + 2x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда $x^2 = \frac{h^2}{\cos\alpha}$. Следовательно,

$$V = \frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.$$

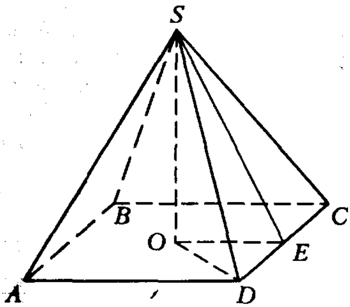


Рис.4

Приведем решение этой задачи, использующее введение вспомогательного угла. Пусть $\angle SDO = \varphi$. Из ΔSDO получаем $DO = h\operatorname{ctg}\varphi$, $CD = h\sqrt{2}\operatorname{ctg}\varphi$. Таким образом, $V = \frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi$. Осталось выразить $\operatorname{ctg}^2\varphi$ через функции угла α. Для этого введем вспомогательный отрезок SD. Пусть $SD = x$. Тогда

$$DE = x\sin\frac{\alpha}{2},\ OD = x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2},\ \cos\varphi = \frac{OD}{SD} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому

$$\operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha},$$

что приводит к полученному ранее ответу.

В данном случае второе решение задачи оказалось несколько длиннее первого.

Введение вспомогательного отрезка часто помогает при решении задач, в условии которых даны угол и какой-нибудь нелинейный элемент (например, объем) и требуется найти другой нелинейный элемент (поверхность, площадь сечения, объем исходной или как-нибудь связанной с ней фигуры).

Задача 5. *В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определите площадь полной поверхности конуса.*

Решение. Если конус вписан в шар, то центр шара лежит на высоте конуса либо

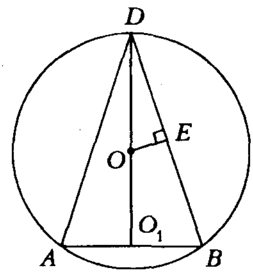


Рис.5

на ее продолжении за плоскость основания. Осевым сечением рассматриваемой комбинации фигур является равнобедренный треугольник, вписанный в окружность большого круга.

Если $\alpha \geq 45°$, то центр шара O лежит на высоте конуса (рис.5). Пусть $DB = x$; тогда из ΔDBO_1 находим $O_1B = x\cos\alpha$.

$$S_п = \pi O_1B(DB + O_1B) = \pi x\cos\alpha(x + x\cos\alpha) = 2\pi x^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, $\angle DOE = \angle DBO_1 = \alpha$ и $DE = \frac{x}{2}$. Из ΔDOE получаем $DO = \dfrac{x}{2\sin\alpha}$ и $S = 4\pi\dfrac{x^2}{4\sin^2\alpha} = \dfrac{\pi x^2}{\sin^2\alpha}$, откуда $\pi x^2 = S\sin^2\alpha$. Таким образом,

$$S_п = 2S\sin^2\alpha\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2} = S\sin\alpha\sin 2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Легко видеть, что проведенные рассуждения остаются **в силе и** при $\alpha < 45°$.

Упражнения

1. В ΔABC дано: $\angle A = \frac{\pi}{3}$, $\angle B = \frac{\pi}{4}$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N и P. Найдите отношение площадей треугольников ABC и MNP.

2. Найдите отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему вписанного в нее шара, зная, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, равны.

3. Вершина правильной треугольной пирамиды является центром сферы, которая касается плоскости основания пирамиды. Отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Определите угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основанич.

4. В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найдите косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

5. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, зная плоский угол α при вершине и расстояние a от боковой грани до противоположной ей вершины основания.

6. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

7. Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который прилежит к данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β. Найдите объем пирамиды.

8. В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определите площадь полной поверхности конуса.

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА

И.Кушнир

Решение большой группы задач по геометрии облегчается введением дополнительных элементов, непосредственно не указанных в условии задачи. Эти элементы могут быть длинами, площадями, объемами, углами. С их помощью составляется уравнение, где неизвестным будет искомый элемент или элемент, с помощью которого легко найдется искомый. Иногда с помощью этого элемента составляется не уравнение, а соотношение, требуемое условием задачи.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЛИНЕЙНЫЙ ЭЛЕМЕНТ

В планиметрических задачах линейный элемент или отношение линейных элементов удобно ввести, если рассматриваемые фигуры подобны. Тогда с помощью пропорций или вспомогательных геометрических построений составляется уравнение, в котором введенный элемент как член уравнения сокращается, а найти искомый не представляет большого труда.

Задача 1. *Через некоторую точку, взятую внутри треугольника, проведены три прямые, соответственно параллельные сторонам треугольника. Эти прямые разделяют треугольник на шесть частей, из которых три — треугольники с площадями S_1, S_2, S_3. Найдите площадь данного треугольника.*

Приступая к решению, замечаем подобие треугольников с площадями S_1, S_2, S_3 (рис.1) и треугольника ABC с площадью S. Кроме того, сумма длин сторон DQ, QE и FK маленьких треугольников равна длине стороны BC треугольника ABC. Использовав эти стороны как вспомогательные элементы, получаем уравнения

$$\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S}}=\frac{DQ}{BC},\ \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S}}=\frac{QE}{BC},\ \frac{\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{FK}{BC}.$$

Сложим их:

$$\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}}{\sqrt{S}}=\frac{DQ+QE+FK}{BC}=1.$$

Итак, $S=\left(\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\sqrt{S_3}\right)^2$.

Вспомогательный отрезок рекомендуется вводить, если в условии задачи не даны линейные элементы и требуется найти зависимость между углами.

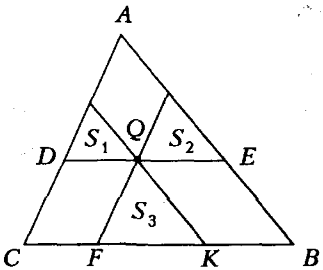


Рис. 1

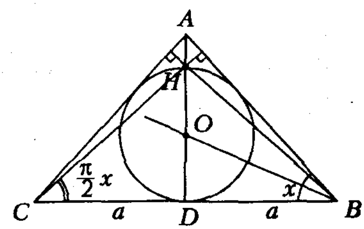


Рис. 2

Задача 2. *Найдите косинус угла при основании равнобедренного треугольника, зная, что точка пересечения его высот лежит на вписанной в треугольник окружности.*

По условию ортоцентр H треугольника ABC $(AB=AC)$ должен находиться внутри треугольника, поэтому $\angle A<90°$ (рис.2). Введем вспомогательный элемент a — длину отрезка BD, обозначим $\angle ABC$ через x, центр вписанной окружности — через O. Тогда

$$\angle HCD=\frac{\pi}{2}-x,\ HD=a\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=a\,\mathrm{ctg}\,x=2OD,\ OD=a\,\mathrm{tg}\frac{x}{2},$$

откуда

$$\mathrm{ctg}\,x=2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2},\ \mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{5},\ \cos x=\frac{2}{3}.$$

Особенно большое значение имеет введение вспомогательного элемента для нахождения отношений различных геометрических величин.

Задача 3. *Большее основание правильной усеченной четырехугольной пирамиды образует с боковой гранью угол α, а с плоскостью, проходящей через противолежащие стороны верхнего и нижнего оснований, — угол β. Найдите отношение площадей оснований.*

Введем вспомогательный элемент a — длину стороны большего основания пирамиды (рис.3). Площадь этого основания будет a^2. Длину стороны верхнего основания можно выразить через a, α и β. Рассмотрим равнобедренную трапецию EE_1F_1F, получающуюся в сечении пирамиды плоскостью, перпендикулярной основаниям и проходящей через середины сторон AB и CD. Введем еще вспомогательные отрезки $E_1H = h$, $E_1F_1 = x$. Тогда

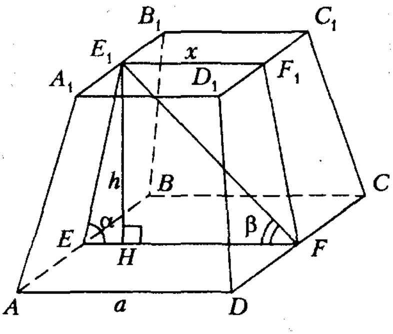


Рис.3

$$HF = \frac{1}{2}(a+x), \ EH = \frac{1}{2}(a-x),$$

$$h = HF\,\mathrm{tg}\beta = \frac{1}{2}(a+x)\mathrm{tg}\beta = EH\,\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}(a-x)\mathrm{tg}\alpha.$$

Получаем уравнение $(a+x)\mathrm{tg}\beta = (a-x)\mathrm{tg}\alpha$, откуда

$$x = \frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}, \ \frac{s}{S} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{\sin^2(\alpha-\beta)}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — ПЛОЩАДЬ ИЛИ ОБЪЕМ

Введение площади и объема в качестве вспомогательного элемента аналогично введению линейного элемента. Сравнивая площади и объемы отдельных частей фигуры, можно получить или уравнение относительно неизвестных задачи, или необходимое соотношение. Лучше находить те площади и объемы, сумма (разность) которых дает площадь заданной фигуры, а также отношение площадей тех фигур, у которых линейные элементы — либо искомые, либо являются компонентами необходимого соотношения.

Задача 4. *Через центр правильного треугольника проведена прямая, параллельная основанию. На этой прямой внутри треугольника взята произвольная точка M. Докажите, что расстояние от точки M до основания треугольника есть среднее арифметическое расстояний от точки M до боковых сторон треугольника.*

Пусть h_1, h_2, h_3 — расстояния от точки M до сторон треугольника BC, AB, AC соответственно (рис.4). Ясно, что $S_{\Delta AMB}$ +

$+S_{\Delta CMB} + S_{\Delta AMC} = S_{\Delta ABC}$, или $ah_1 + ah_2 + ah_3 = ah$, где a — сторона треугольника ABC, h — его высота. Итак, $h = h_1 + h_2 + h_3$, но $h_1 = \frac{h}{3}$, поэтому $h_2 + h_3 = h - h_1 = \frac{2}{3}h = 2h_1$, $h_1 = \frac{h_2 + h_3}{2}$.

Задача 5. *Дан четырехугольник $ABCD$, описанный около круга. Докажите, что квадраты расстояний от центра окружности до противоположных вершин относятся как произведения сторон, сходящихся в этих вершинах.*

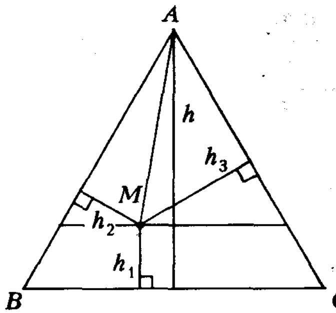


Рис.4

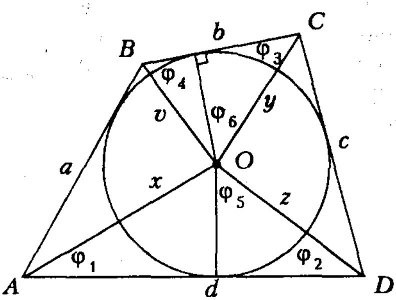


Рис.5

Обозначения приведены на рисунке 5. Требуется доказать, что

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{ad}{bc}.$$

Высоты треугольников AOD и BOC равны, поэтому

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{d}{b}. \qquad (1)$$

С другой стороны,

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{\Delta BOC}} = \frac{xv\sin\varphi_5}{yz\sin\varphi_6}. \qquad (2)$$

Докажем, что $\sin\varphi_5 = \sin\varphi_6$. Для этого заметим, что $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = \pi$ (это половина суммы всех углов четырехугольника), $\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_5 = \pi$, $\varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_6 = \pi$. Отсюда следует, что $\varphi_5 + \varphi_6 = \pi$, $\sin\varphi_5 = \sin\varphi_6$, и из формулы (2) получаем

$$\frac{S_{\Delta AOD}}{S_{BOC}} = \frac{xv}{yz}. \qquad (2')$$

Из соотношений (1) и (2′) имеем $\frac{xv}{yz} = \frac{d}{b}$, аналогично $\frac{xz}{yv} = \frac{a}{c}$.

Перемножив последние два равенства, получим $\frac{x^2}{y^2}=\frac{ad}{bc}$, а разделив первое из них на второе, получим $\frac{v^2}{z^2}=\frac{cd}{ab}$.

Разберем задачу, где вспомогательным элементом будет объем.

Задача 6. *В треугольной пирамиде боковые ребра взаимно перпендикулярны и равны a, b, c. Высота пирамиды, опущенная из вершины на основание, равна h. Докажите, что*

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{h^2}.$$

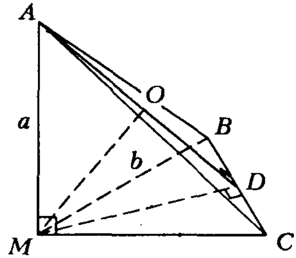


Рис.6

Вычислим объем пирамиды двумя способами: считая ее основанием в первом случае треугольник ABC (рис.6), а во втором — грань AMC. Пусть $MA = a$, $MB = b$, $MC = c$, $MO = h$, $AD \perp BC$. Тогда $AC = \sqrt{a^2+c^2}$, $BC = \sqrt{b^2+c^2}$, $AB = \sqrt{a^2+b^2}$. Далее, $MD \perp BC$ (почему?), из ΔBMC имеем $BD \cdot BC = BM^2$, откуда

$$BD=\frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}}.$$

Но

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 = \frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2},$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AD = \frac{1}{2}\sqrt{b^2+c^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{b^2+c^2}} =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2},$$

$$V_{MABC} = \frac{1}{6}h\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}. \qquad (3)$$

Если основание — треугольник AMC, то

$$V_{MABC} = \frac{1}{6}abc. \qquad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), получаем: $\frac{1}{6}h\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2} = \frac{1}{6}abc$, откуда $(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)h^2 = a^2b^2c^2$. Разделив обе части последнего равенства на $a^2b^2c^2h^2$, получаем требуемое равенство.

Задача 7. *Докажите, что объем пирамиды, описанной около шара, вычисляется по формуле $V=\frac{1}{3}S\cdot r$, где r — радиус шара, вписанного в пирамиду, S — полная поверхность пирамиды.*

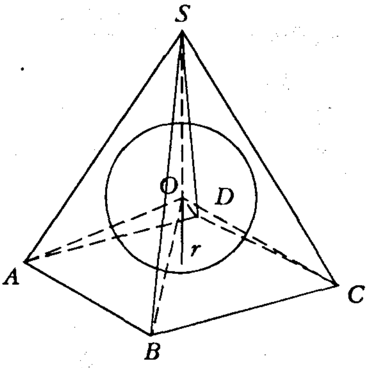


Рис.7

Разобьем исходную пирамиду на части, каждая из которых является пирамидой с вершиной в точке O (в центре шара), основаниями этих пирамид будут грани исходной пирамиды (рис.7). Объем исходной пирамиды V равен сумме объемов этих пирамид V_1, V_2, ..., V_k. Но $V_i = \frac{1}{3} S_i \cdot r$, так как высотой пирамиды V_i является радиус r шара, проведенный в точку касания шара и грани. Отсюда $V = V_1 + V_2 + \ldots + V_k = \frac{1}{3}(S_1 + S_2 + \ldots + S_k)r = \frac{1}{3}Sr$. Заметим, что утверждение задачи верно и для произвольного многогранника, в который можно вписать шар.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЭЛЕМЕНТ — УГОЛ

Если искомые или заданные элементы удобно выразить с помощью тригонометрических функций, то вводится вспомогательный угол. Затем с помощью теоремы синусов или косинусов решением треугольника находятся компоненты для записи некоторого условия в виде уравнения.

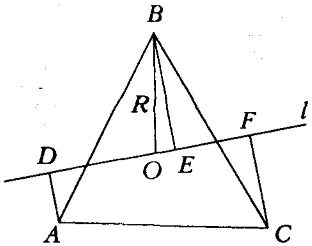


Рис.8

Задача 8. *Через центр правильного треугольника в плоскости этого треугольника проведена произвольная прямая. Докажите, что сумма квадратов расстояний от вершин треугольника до этой прямой не зависит от выбора прямой.*

Пусть точка O — центр треугольника ABC (рис.8). Точки D, E, F — соответственно проекции вершин A, B, C на прямую l, R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC. Введем вспомогательный угол φ, обозначив им $\angle BOE$. Тогда

$$\angle AOD = \angle AOB - \angle BOD = \varphi - \frac{\pi}{3},\ \angle COE = \frac{2\pi}{3} - \varphi,\ BE = \sin\varphi,$$

$$AD = R\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right),\ CF = R\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \varphi\right) = R\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right),$$

$$AD^2 + BE^2 + CF^2 = R^2\left(\sin^2\varphi + \sin^2\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right)\right) = \frac{3}{2}R^2$$

(проверьте самостоятельно, что сумма квадратов синусов в последней формуле равна $\frac{3}{2}$).

Задача 9. *В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит квадрат со стороной a. Через диагональ AC нижнего основания $ABCD$ проведена плоскость, пересекающая верхнее основание $A_1B_1C_1D_1$. В трехгранные углы B и D_1 вписаны шары, касающиеся этой плоскости и имеющие радиусы $r = \frac{a}{5}$, $R = \frac{a}{4}$. Найдите высоту параллелепипеда.*

Диагональное сечение DBB_1D_1 параллелепипеда (рис.9) пройдет через центры шаров O и O_1. Пусть L и L_1 — точки касания шаров и оснований параллелепипеда, N и N_1 — точки касания шаров с данной плоскостью (мы пока не знаем, расположены ли они вне параллелепипеда или внутри него, но нам это и не понадобится), OF и O_1E_1 — биссектрисы углов NOL и $N_1O_1L_1$ (точка F — середина BD), EE_1 — высота параллелепипеда, $OL = ON = r$, $O_1L_1 = O_1N_1 = R$. Положим $\angle BFE_1 = 2\alpha$, $L_1E_1 = x$, $E_1B_1 = y$, $FE = z$. Тогда $h = z\,\mathrm{tg}\,2\alpha$, $z = FB - BE = \frac{a\sqrt{2}}{2} - y$, $y = a\sqrt{2} - x - D_1L_1 = a\sqrt{2} - x - R\sqrt{2}$ и $z = x + R\sqrt{2} - \frac{a\sqrt{2}}{2} = x - \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Из подобия треугольников $O_1D_1E_1$ и OLF следует, что $\frac{x}{R} = \frac{FL}{r}$, $FL = FB - LB = \frac{a\sqrt{2}}{2} - r\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{10}$; $x = \frac{3}{8}a\sqrt{2}$, $z = \frac{a\sqrt{2}}{8}$. Из треугольника OLF находим $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{r}{FL} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, откуда $h = \frac{3}{14}a$.

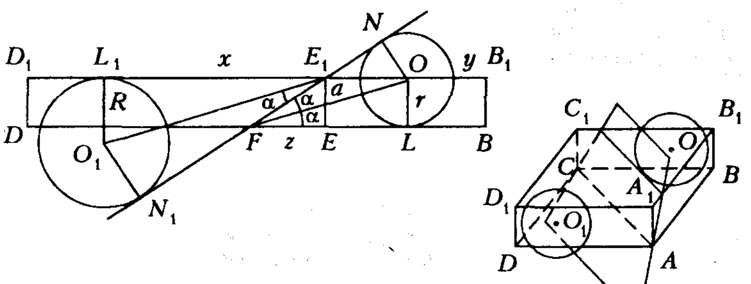


Рис.9

Задача 10. *Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно b, угол между боковыми гранями равен φ. Найдите сторону основания.*

Опустим из точек B и C перпендикуляры на боковое ребро AS (рис.10). Легко убедиться, что основанием обоих этих перпендикуляров является одна точка D (докажите!), а потому $\angle BDC = \varphi$.

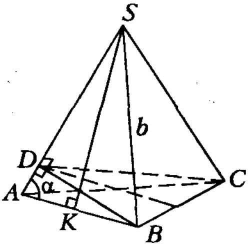


Рис.10

Введем вспомогательный угол $\angle BAS = \alpha$ и проведем апофему SK пирамиды. Ясно, что $AB = 2AK = 2b\cos\alpha$. Следовательно, для решения задачи достаточно вычислить $\cos\alpha$. Так как $\alpha < 90°$, то из треугольника BAD имеем $\alpha = \arcsin\dfrac{BD}{AB}$.

В свою очередь, длина отрезка BD определяется из треугольника BLD (DL — высота треугольника BDC): $BD = \dfrac{BL}{\sin\frac{\varphi}{2}} = \dfrac{AB}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$. Таким образом, $\alpha = \arcsin\dfrac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}$, откуда

$$AB = b\sqrt{4 - \frac{1}{\sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Упражнения

1. В треугольник ABC вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке D и стороны BC в точке E. Найдите углы треугольника, если $\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{1}{2}, \dfrac{BE}{CE} = \dfrac{1}{3}$.

2. В правильном тетраэдре $ABCD$ отрезок MN соединяет середину ребра AC с центром грани BDC, а точка E лежит на середине ребра AB. Найдите угол между отрезками MN и DE.

3. В трапеции, основания которой равны a и b, через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого боковыми сторонами трапеции.

4. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE:EC = a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD:DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найдите отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

5. В шар вписана пирамида, боковые ребра которой равны c. Основание ее — прямоугольник, стороны которого стягивают дуги α и β радиан в сечениях шара плоскостями боковых граней. Определите радиус шара.

6. На окружности радиусом R даны две точки A и B, расстояние между которыми равно l. Какое наибольшее значение может принимать сумма $AC^2 + BC^2$, если точка C также лежит на этой окружности?

7. Двугранный угол при боковом ребре правильной четырехугольной пирамиды равен α, радиус вписанного шара равен R. Найдите полную поверхность пирамиды.

ОТНОШЕНИЯ ОТРЕЗКОВ, ПЛОЩАДЕЙ И ОБЪЕМОВ

Г. Дорофеев

Программа школьного курса геометрии построена, как известно, так, что учащиеся десятых и одиннадцатых классов решают в основном задачи по стереометрии, а планиметрические задачи появляются в их практике лишь в связи с применением тригонометрии. Это, конечно, совершенно естественно, однако на вступительных экзаменах такое положение вещей сказывается далеко не лучшим образом: поступающие, неплохо справляясь с задачами, поддающимися прямому (иногда весьма громоздкому) тригонометрическому расчету, становятся в тупик перед сравнительно простыми задачами, для решения которых требуется лишь активное владение стандартными и, в общем, хорошо им известными теоремами планиметрии.

Отсюда вытекает очевидный вывод: при подготовке к вступительным экзаменам особое внимание следует уделить активизации геометрических знаний, полученных еще в 7 – 9-х классах, следует решать больше задач, требующих «чисто геометрических» идей.

Подчеркнем сразу же, что здесь не идет речи о каком-то противопоставлении чисто геометрических и тригонометрических методов решения задач. Напротив, наиболее успешным может быть именно их разумное сочетание, и тогда на экзаменах не будет встречаться стремление с помощью головоломных вычислений решить простую геометрическую задачу или, наоборот, рассматривать многочисленные подобные треугольники в задачах, где введение тригонометрических функций является естественным и оправданным путем к решению. Научиться разумно сочетать эти методы – главная задача при подготовке к вступительным экзаменам.

В этой статье мы рассмотрим задачи, связанные с делением отрезков, площадей и объемов в некотором отношении. Мы убедимся, что задачи подобного рода совсем не сложны и, во всяком случае, их объективная сложность не соответствует тем затруднениям, которые они обычно вызывают у поступающих.

Начнем с совсем простой задачи, которую, однако, решили в свое время совсем немногие поступающие.

Задача 1. *Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении* 3:1, *считая от вершины. В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?*

Не составляет труда заметить, что треугольники BAE и BEC (рис.1) имеют общую вершину, и их основания лежат на одной прямой, так что искомое отношение их площадей равно отношению длин отрезков AE и EC, и таким образом, требуется узнать, в каком отношении прямая BE делит сторону BC.

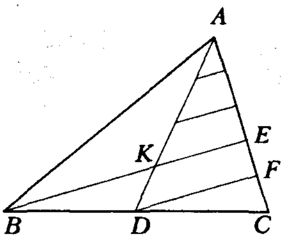


Рис. 1

Представляется совершенно очевидным, что прямой вычислительный путь (ввести, например, вспомогательные элементы — длины сторон или величины углов) связан с большими трудностями и вряд ли приведет к успеху. В то же время естественно отыскивается чисто геометрическая идея решения. В самом деле, нам нужно узнать, в каком отношении делится одна сторона угла DAC, а известно, что его вторая сторона разделена на 4 равных отрезка. И теперь уже не может не прийти на память теорема о делении сторон угла параллельными прямыми, и уж, конечно, совершенно естественно провести через точки деления медианы прямые, параллельные BK. Тогда на стороне AC возникают четыре равных отрезка. Что же касается пятого отрезка FC, то ведь еще надо воспользоваться тем, что AD — медиана, так что DF — средняя линия треугольника BCE, и следовательно, $FC = EF$.

Таким образом, сторона AC разделена на 5 равных отрезков, и искомое отношение равно 3:2.

Если дополнительно обдумать предложенное решение, то станет ясно, что таким же способом можно решить и более общую задачу: вместо отношения 3:1 можно рассмотреть произвольное деление отрезка AD, и более того, в решении существенно не то, что AD — медиана, а лишь то, что точка D делит BC в известном отношении.

Решите самостоятельно эту более общую задачу.

Задача 2. *На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC взяты точки K и L так, что* $AK{:}KB = 2$,

$AL:LC = 1/2$. В каком отношении прямая KL делит высоту AD?

Идея решения этой задачи — та же, что и предыдущей, а само решение очевидно из рисунка 2: искомое отношение равно $2x:(x+y)$, а по условию $\frac{2x}{x+2y} = \frac{1}{2}$, откуда $3x = 2y$, и следовательно,

$$\frac{2x}{x+y} = \frac{2}{1+\frac{y}{x}} = \frac{4}{5}.$$

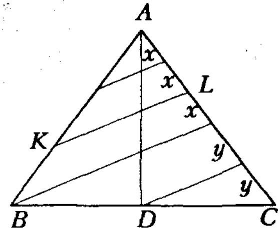


Рис.2

И снова оказывается, что фактически мы решали более общую задачу: равенство сторон треугольника ABC понадобилось нам лишь для того, чтобы считать высоту AD медианой, так что аналогичным способом можно решать задачу для произвольного треугольника, в котором известно, в каком отношении делят его стороны точки D, K и L.

Очень часто в задачах, предлагаемых поступающим, возникает необходимость вычислить площадь отсекаемой части многоугольника или объем отсекаемой части многогранника, если каким-то образом заданы точки деления сторон или ребер. В этих задачах чрезвычайно полезны следующие утверждения:

(1) *Если в треугольнике ABC $AK = \alpha AB$, $AL = \beta AC$, то*

$$S_{\Delta AKL} = \alpha\beta S_{\Delta ABC}.$$

(2) *Если в треугольной пирамиде $SABC$ $SK = \alpha SA$, $SL = \beta SB$, $SM = \gamma SC$, то $V_{SKLM} = \alpha\beta\gamma V_{SABC}$.*

Утверждение (1) наиболее просто доказывается применением формулы площади треугольника $S = \frac{1}{2}bc\sin A$, а утверждение (2) — методом «последовательного отсечения»: от пирамиды $SABC$ надо перейти к пирамиде $SABM$, затем к $SALM$ и $SKLM$. Эта идея приводит к простому решению следующей задачи.

Задачи 3. *В треугольнике ABC проведены биссектрисы AD и CF углов BAC и ACB. Найдите отношение площадей треугольников ABC и AFD, если $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.*

Треугольник AFD (рис.3) может быть получен из ABC следующим образом: сначала отсекается треугольник ADB, а от него — треугольник AFD. Для подсчета искомого отношения воспользуемся теоремой о том, что биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположные стороны на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Имеем

$$\frac{BD}{DC}=\frac{BA}{AC}=\frac{3}{4},\ \frac{BF}{FA}=\frac{BC}{CA}=\frac{5}{7},$$

откуда (с помощью производных пропорций)

$$\frac{BD}{BC}=\frac{3}{7},\ \frac{BF}{BA}=\frac{5}{12}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta AFD}=\frac{7}{12}\cdot S_{\Delta ABD}=\frac{7}{12}\cdot\frac{3}{7}\cdot S_{\Delta ABC}=\frac{1}{4}S_{\Delta ABC},$$

так что искомое отношение равно 4.

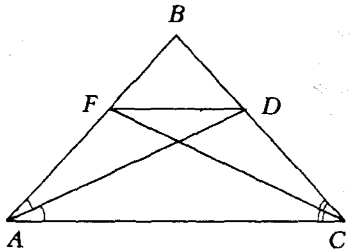


Рис.3

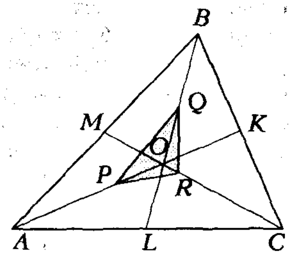


Рис.4

Задача 4. *Дан треугольник ABC площадью 1. На его медианах AK, BL и CM взяты соответственно точки P, Q и R так, что $AP=PK$, $BQ=\frac{1}{2}QL$, $CR=\frac{5}{4}RM$. Найдите площадь треугольника PQR.*

Пусть O – точка пересечения медиан (рис.4); искомую площадь подсчитаем как сумму площадей трех маленьких треугольников с вершиной O. Треугольник OPQ получается из треугольника OAB отсечением на его сторонах отрезков OP и OQ; при этом $AP=\frac{1}{2}AK$, $AO=\frac{3}{2}AK$, так что $OP=\frac{1}{6}AK=$ $=\frac{1}{4}AO$. Аналогично, $OQ=\frac{1}{2}OB$, поэтому

$$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{8}S_{\Delta OAB}.$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что $S_{\Delta AOB}=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}$, так что

$$S_{\Delta OPQ}=\frac{1}{24}.$$

Подсчитав аналогично площади треугольников OPR и OQR, получаем, что $S_{\Delta PQR}=\frac{1}{12}$.

Задача 5. *В прямой треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$, у которой $AC=6$, $AA_1=8$, через вершину A проведена плоскость, пересекающая ребра BB_1 и CC_1 соответственно в точках M и*

N. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если $BM = MB_1$, а AN — биссектриса угла CAC_1?

Легко видеть, что отношение объемов пирамид $ACBMN$ и $ACBB_1C_1$ равно отношению площадей их оснований, а для нахождения этого отношения следует найти, в каком отношении делит точка N ребро CC_1 (рис.5). Последнее отношение легко находится: по теореме Пифагора $AC_1 = 10$ и по теореме о биссектрисе $CN:NC_1 = 3:5$.

Теперь нетрудно подсчитать, что $S_{CBMN} : S_{CBB_1C_1} = 7:16$, и поэтому

$$V_{ACBMN} = \frac{7}{16} V_{ACBB_1C_1}.$$

С другой стороны, пирамида $ACBB_1C_1$ дополняется до всей призмы пирамидой $AA_1B_1C_1$, объем которой составляет 1/3 объема призмы, так что объем пирамиды $ACBB_1C_1$ равен 2/3 объема призмы. Следовательно, объем пирамиды $ACBMN$ составляет 7/24 объема призмы, и искомое отношение равно 7:17.

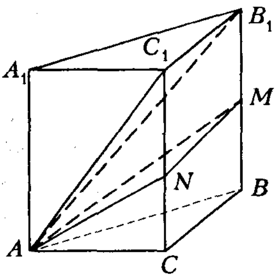


Рис.5

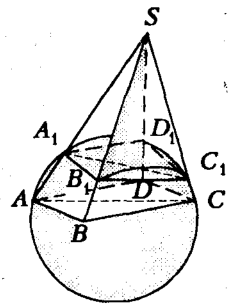


Рис.6

Задача 6. *Сфера проходит через точки A, B, C, D и пересекает отрезки SA, SB, SC и SD в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Известно, что $SD_1 = 9/4$, $DD_1 = 47/36$, отношение площадей треугольников SA_1B_1 и SAB равно 15:32, отношение объемов пирамид $SB_1C_1D_1$ и $SBCD$ равно 1701:4096, а отношение объемов пирамид $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ равно 105:256. Найдите отрезки SA_1, SB_1, SC_1.*

Легко понять, что в задаче речь идет о четырехугольной пирамиде $SABCD$, на ребрах которой взяты точки A_1, B_1, C_1, D_1 (рис.6). Для решения задачи запутанные данные об отношениях площадей и объемов сведем к отношениям соответствующих отрезков. Составив систему равенств

$$\frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB} = \frac{15}{32}, \quad \frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC}\cdot\frac{SD_1}{SD} = \frac{1701}{4096}, \quad \frac{SA_1}{SA}\cdot\frac{SB_1}{SB}\cdot\frac{SC_1}{SC} = \frac{105}{256}$$

и учитывая, что $SD_1:SD = 81:128$, находим

$$\frac{SA_1}{SA}=\frac{5}{8},\ \frac{SB_1}{SB}=\frac{3}{4},\ \frac{SC_1}{SC}=\frac{7}{8}.$$

С другой стороны, отрезки SA, SB, SC, SD являются секущими сферы, о которой идет речь в условии задачи, и поэтому все произведения этих секущих на их внешние части равны квадрату касательной к сфере, проведенной из точки S (здесь мы пользуемся очевидным, но не доказанным утверждением о касательной и секущей для сферы, аналогия его с соответствующим утверждением для окружности не является, разумеется, доказательством; докажите это утверждение самостоятельно). Таким образом, $SA_1\cdot SA = SB_1\cdot SB = SC_1\cdot SC = SD_1\cdot SD = \frac{9}{4}\cdot\frac{128}{36} = 8$.

Теперь не составляет труда найти требуемые отрезки:

$$SA_1=\sqrt{5},\ SB_1=\sqrt{6},\ SC_1=\sqrt{7}.$$

Упражнения

1. На сторонах выпуклого четырехугольника $ABCD$ площадью 1 взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на DA. При этом $AK:KB = 2:1$, $BL:LC = 1:3$, $CM:MD = 1:1$, $DN:NA = 1:5$. Найдите площадь шестиугольника $AKLCMN$.

2. В треугольнике ABC биссектрисы AD и BE пересекаются в точке O. Найдите отношение площади треугольника ABC к площади четырехугольника $ODCE$, зная, что $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

3. В треугольнике ABC угол A равен 45°, а угол C острый. Из середины стороны BC опущен перпендикуляр NM на сторону AC. Площади треугольников NMC и ABC относятся как 1:8. Найдите углы треугольника ABC.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка E делит пополам сторону CD, биссектриса угла ABC пересекает отрезок AE в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OBCE$, зная, что $AD = a$, $DE = b$, $\angle ABO = \alpha$.

5. Плоскость пересекает боковые ребра SA, SB, SC пирамиды $SABC$ в точках K, L, M соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем пирамиды, если $SK:KA = SL:LB = 2:1$, а медиана SN треугольника SBC делится этой плоскостью пополам?

6. Плоскость пересекает ребра A_1B_1, B_1C_1 и BC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ в точках M, N и P соответственно. В каком отношении делит эта плоскость объем призмы, если $B_1M : A_1B_1 = 1:2$, $B_1N : B_1C_1 = 2:3$, $BP:CB = 1:3$?

7. Сформулируйте утверждения 1 и 2 этой статьи для случая, когда точки K, L, M лежат не на самих сторонах (ребрах), а на их продолжениях.

8. Точки A, B, C, D, E, F лежат на сфере радиусом $\sqrt{2}$. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке S, находящейся на расстоянии 1 от центра сферы. Объемы пирамид $SABC$ и $SDEF$ относятся как 1:9, пирамид $SABF$ и $SDEC$ — как 4:9, пирамид $SAEC$ и $SDBF$ — как 9:4. Найдите отрезки SA, SB, SC.

9. Точки K, L, M делят стороны AB, BC и CA треугольника ABC соответственно в отношении $\alpha:\beta$, $\gamma:\delta$, $\rho:\sigma$ (считая каждый раз от вершины, упомянутой первой), причем $\alpha+\beta=\gamma+\delta=\rho+\sigma=1$. В каком отношении прямая KM делит отрезок AL? В каком отношении прямая BM делит CK?

НАШ ВЫБОР — ТЕОРЕМА СИНУСОВ!

Я. Суконник, П.Горнштейн

Во всяком треугольнике ABC стороны $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ и углы $\angle CAB = \angle A$, $\angle ABC = \angle B$, $\angle BCA = \angle C$ связаны следующими важными соотношениями.

Теорема косинусов. *Квадрат произвольной стороны равен квадрату другой стороны плюс квадрат третьей стороны минус удвоенное произведение этих сторон на косинус угла между ними, т.е.*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A,\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\angle B,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C.$$

Теорема синусов. *Произвольная сторона равна произведению диаметра описанной окружности на синус противолежащего угла, т.е.*

$$a = 2R\sin\angle A,\ b = 2R\sin\angle B,\ c = 2R\sin\angle C,$$

или, в более употребимой форме,

$$\frac{a}{\sin\angle A} = \frac{b}{\sin\angle B} = \frac{c}{\sin\angle C} = 2R.$$

Но если бы вам предложили пользоваться лишь одной из этих двух теорем, а вторую отбросить, какую бы вы оставили? Из теоремы синусов можно вывести теорему косинусов, а из теоремы косинусов — теорему синусов (правда, без коэффициента пропорциональности $2R$ — как в школьном учебнике). Но теорема синусов позволяет выражение, однородное относительно сторон a, b, c треугольника, заменить новым выражением, содержащим лишь тригонометрические функции. А поскольку эти функции в средней школе достаточно хорошо изучены, дальнейшее решение задачи не вызовет затруднений. Итак, наш выбор — теорема синусов!

Теперь перейдем к примерам.

Задача 1 (теорема Птолемея). *Докажите, что для всякого четырехугольника $ABCD$, вписанного в круг, справедливо соотношение $AB \cdot CD + BC \cdot DA = BD \cdot AC$.*

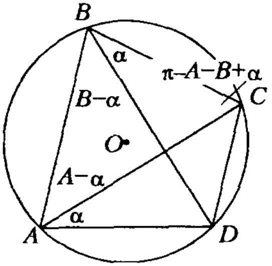


Рис. 1

Поскольку все эти шесть отрезков являются хордами одной и той же окружности, то, удачно выбрав опирающиеся на них вписанные углы, мы вправе ожидать от применения теоремы синусов простого рационального решения. Действительно, обозначив $\angle BAD = \angle A$, $\angle ABC = \angle B$, $\angle CAD = \alpha$ (рис. 1), получим

$$\angle BAC = \angle A - \alpha, \ \angle ABD = \angle B - \alpha,$$
$$\angle ACB = \pi - \angle A - \angle B + \alpha.$$

По теореме синусов

$$AB = 2R\sin(\angle A + \angle B - \alpha), \ BC = 2R\sin(\angle A - \alpha), CD = 2R\sin\alpha,$$
$$DA = 2R\sin(\angle B - \alpha), BD = 2R\sin\angle A, \ AC = 2R\sin\angle B,$$

следовательно,

$$AB \cdot CD + BC \cdot DA = 4R^2\sin(\angle A + \angle B - \alpha)\cdot\sin\alpha +$$
$$+\sin(\angle A - \alpha)\cdot\sin(\angle B - \alpha) = 2R^2\big|\cos(\angle A + \angle B - 2\alpha) -$$
$$-\cos(\angle A + \angle B) + \cos(\angle A - \angle B) - \cos(\angle A + \angle B - 2\alpha)\big| =$$
$$= 4R^2\sin\angle A\sin\angle B = (2R\sin\angle A)\cdot(2R\sin\angle B) = BD\cdot AC.$$

Наиболее естественным выглядит применение теоремы синусов в тех случаях, когда в задаче идет речь о сторонах, противолежащих углах и радиусе окружности, описанной около треугольника.

Задача 2. *Дан треугольник, основание которого равно a, а угол при вершине α. Построена окружность, проходящая через центр вписанного в этот треугольник круга и концы основания. Найдите ее радиус.*

Пусть O (рис. 2) — центр вписанного круга. Тогда

$$\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB = 180° - \frac{\angle B}{2} - \frac{\angle C}{2} = 90° + \frac{\alpha}{2}.$$

Поскольку треугольник BOC вписан в искомый круг, по теореме синусов найдем радиус этого круга:

$$R = \frac{BC}{2\sin\angle BOC} = \frac{a}{2\sin\left(90° + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

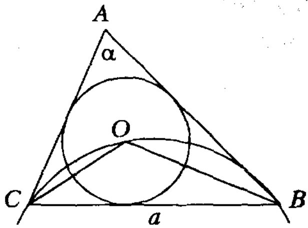


Рис.2

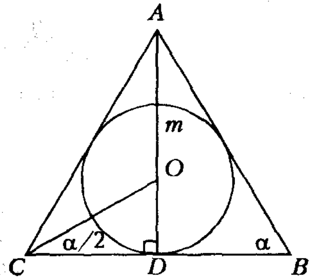


Рис.3

Задача 3. *В равнобедренном треугольнике угол при основании равен α. Высота, опущенная на основание, больше радиуса вписанного круга на m. Определите основание треугольника и радиус описанного круга.*

Пусть вновь O — центр вписанного круга (рис. 3). Тогда

$$AO = AD - OD = h_a - r = m,\ \angle AOC = 90°+\frac{\alpha}{2},\ \angle ACO = \frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому, применив теорему синусов дважды (для треугольников ABC и AOC), получим

$$BC = AC\cdot\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = AO\frac{\sin\angle AOC}{\sin\angle ACO}\frac{\sin\angle A}{\sin\angle B} = 2m\cos\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$R = \frac{AC}{2\sin\angle B} = \frac{AO\sin\angle AOC}{2\sin\angle ACO\cdot\sin\angle B} = \frac{m\sin\left(90°+\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\alpha} = \frac{m}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4. *Около круга описан четырехугольник $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке E. Радиусы окружностей, описанных около треугольников AEB, BEC и CED, соответственно равны R_1, R_2 и R_3. Найдите радиус R окружности, описанной около треугольника AED.*

Четырехугольник $ABCD$ (рис. 4) описан около круга, поэтому выполняется равенство $AB + CD = BC + AD$.

Кроме того,

$$\sin\angle AEB = \sin\angle BEC = $$
$$= \sin\angle CED = \sin\angle DEA.$$

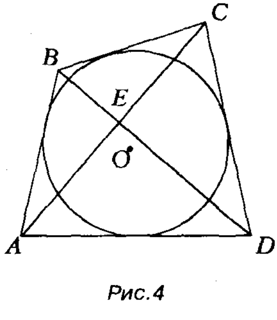


Рис.4

Поэтому

$$\frac{AB}{\sin\angle AEB}+\frac{CD}{\sin\angle CED}=\frac{BC}{\sin\angle BEC}+\frac{AD}{\sin\angle DEA}.$$

Теперь по теореме синусов получим $R_1 + R_3 = R_2 + R$, откуда

$$R = R_1 - R_2 + R_3.$$

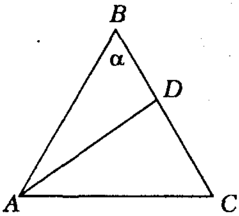


Рис.5

Иногда в задачах бывает необходимо перейти от данного известного отношения сторон или отрезков к соотношению между углами треугольника. И это удобнее всего делать с помощью теоремы синусов.

Задача 5. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) проведена медиана AD. Найдите угол BAD, если угол при вершине B равен α.*

Из треугольника ABD (рис. 5), в котором $AB = 2BD$, следует по теореме синусов

$$2=\frac{AB}{BD}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle BAD}=\frac{\sin(\alpha+\angle BAD)}{\sin\angle BAD}=\sin\alpha\cdot\operatorname{ctg}\angle BAD+\cos\alpha.$$

Отсюда

$$\angle BAD=\operatorname{arcctg}\frac{2-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Задача 6. *В данный правильный треугольник вписан второй правильный треугольник, причем отношение их площадей равно 3. Докажите, что стороны вписанного треугольника перпендикулярны соответствующим сторонам данного треугольника.*

Легко доказать (докажите!), что AF равно BD (рис. 6). Теперь из подобия треугольников ABC и DEF из теоремы синусов имеем

$$\sqrt{3}=\sqrt{\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta DEF}}}=\frac{AB}{DF}=\frac{AF+FB}{DF}=\frac{BD}{DF}+\frac{FB}{DF}=$$

$$=\frac{\sin\angle BFD}{\sin\angle DBF}+\frac{\sin\angle BDF}{\sin\angle DBF}=\frac{\sin(120^\circ-\angle BDF)+\sin\angle BDF}{\sin 60^\circ}=$$

$$=2\cos(60^\circ-\angle BDF),\ \cos(60^\circ-\angle BDF)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \angle BDF=90^\circ$$

(тогда $FD\perp BC$) или $\angle BDF=30^\circ$ (тогда $FD\perp AB$).

Задача 7. *В треугольнике ABC угол C — тупой; биссектриса BE угла B делит сторону AC на отрезки AE и EC с длинами 3 и 2. Известно, что точка K, лежащая на продолжении стороны BC за вершину C, является центром окружности, проходящей через точки C, E и точку пересечения биссектрисы угла B с*

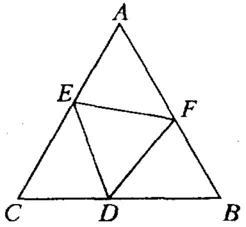


Рис.6

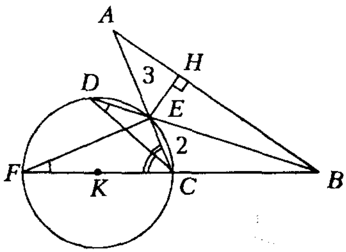


Рис.7

биссектрисой угла ACK. Определите расстояние от точки E до стороны AB.

Очевидно, что искомое расстояние EH (рис. 7) будет найдено, если станет известным $\sin\angle A$. Но сначала найдем зависимость между углами треугольника ABC. Пусть D – точка пересечения биссектрис углов B и ACK. Проведем хорду EF, тогда $\angle EDC = \angle EFC$, но

$$\angle EDC = \angle DCF - \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ACF - \frac{\angle B}{2} =$$

$$= \frac{(180^\circ - \angle C) - \angle B}{2} = \frac{\angle A}{2},$$

$$\angle EFC = 90^\circ - \angle ECF = 90^\circ - (180^\circ - \angle C) = \angle C - 90^\circ,$$

поэтому

$$\frac{\angle A}{2} = \angle C - 90^\circ,\ \angle C = 90^\circ + \frac{\angle A}{2}.$$

По теореме синусов и свойству биссектрисы из треугольника ABC имеем

$$\frac{2}{3} = \frac{EC}{AE} = \frac{BC}{AB} = \frac{\sin\angle A}{\sin\angle C} = \frac{\sin\angle A}{\sin\left(90 + \frac{\angle A}{2}\right)} = 2\sin\frac{\angle A}{2},$$

$$\sin\frac{\angle A}{2} = \frac{1}{3},\ \sin\angle A = \frac{4\sqrt{2}}{9},\ EH = AE\cdot\sin\angle A = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Бывают случаи, когда в задаче появляется произведение нескольких отношений отрезков. И здесь применение теоремы синусов приводит к простому решению.

Задача 8. *Дан треугольник ABC, причем AB = AC и* $\angle A = 80^\circ$. *Внутри треугольника ABC взята точка M такая, что* $\angle MBC = 30^\circ$, *а* $\angle MCB = 10^\circ$. *Найдите угол AMC.*

Обозначим искомый угол $\angle AMC$ через x (рис. 8). Очевидно, что $\angle ABM = 20^\circ$, $\angle ACM = 40^\circ$, $\angle CMB = 140^\circ$, и тогда $\angle AMB = 220^\circ - x$. Согласно условию и по теореме синусов из

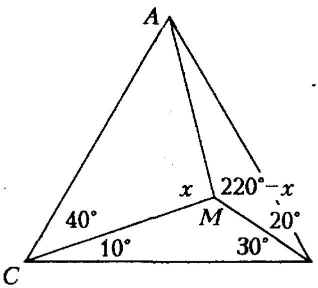


Рис.8

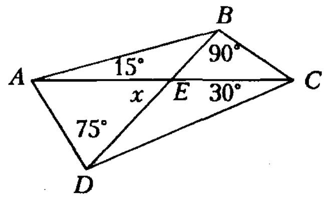


Рис.9

треугольников AMB и AMC имеем

$$1=\frac{AB}{AC}=\frac{AB}{AM}\cdot\frac{AM}{AC}=\frac{\sin(220^\circ-x)}{\sin 20^\circ}\cdot\frac{\sin 40^\circ}{\sin x}=$$

$$=\frac{2\sin(x-40^\circ)\cdot\cos 20^\circ}{\sin x}=\frac{\sin(x-20^\circ)+\sin(x-60^\circ)}{\sin x},$$

$$\sin x-\sin(x-60^\circ)=\sin(x-20^\circ),\ 2\sin 30^\circ\cdot\cos(x-30^\circ)=\sin(x-20^\circ),$$

$$\cos(x-30^\circ)=\cos(110^\circ-x),\ x=\angle AMC=70^\circ.$$

Задача 9. *В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ даны углы: $\angle BAC=15^\circ$, $\angle CBD=90^\circ$, $\angle DCA=30^\circ$, $\angle ADB=75^\circ$.* ***Найдите*** *угол между диагоналями.*

Обозначим $\angle AED$ через x (рис. 9). Тогда $\angle ABE=x-15^\circ$, $\angle BCE==90^\circ-x$, $\angle CDE=x-30^\circ$, $\angle DAE==105^\circ-x$, и из треугольников AEB, BEC, CED и DEA по теореме синусов имеем

$$\frac{AE}{BE}=\frac{\sin(x-15^\circ)}{\sin 15^\circ},$$

$$\frac{BE}{CE}=\frac{\sin(90^\circ-x)}{\sin 90^\circ},\ \frac{CE}{DE}=\frac{\sin(x-30^\circ)}{\sin 30^\circ},\ \frac{DE}{AE}=\frac{\sin(105^\circ-x)}{\sin 75^\circ}.$$

Перемножая почленно записанные равенства, после сокращения одинаковых сомножителей получим

$$\sin(x-15^\circ)\cdot\sin(90^\circ-x)\cdot\sin(x-30^\circ)\cdot\sin(105^\circ-x)=$$

$$=\sin 15^\circ\cdot\sin 90^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 75^\circ,$$

$$\left|2\sin(x-15^\circ)\cdot\sin(105^\circ-x)\right|\cdot\left|2\sin(x-30^\circ)\cdot\sin(90^\circ-x)\right|=$$

$$=2\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ,$$

$$\left|\cos(2x-120°)-\cos 90°\right|\cdot\left|\cos(2x-120°)-\cos 60°\right|=\frac{1}{2},$$

$$2\cos^2(2x-120°)-\cos(2x-120°)-1=0,$$

откуда искомый угол равен 60°.

Упражнения

1. В окружности с радиусом R проведены две хорды: AB и AC. На хорде AB или на ее продолжении за точку B взята точка M, расстояние от которой до прямой AC равно длине хорды AC. Аналогично на хорде AC или на ее продолжении за точку C взята точка N, расстояние от которой до прямой AB равно длине хорды AB. Найдите длину отрезка MN.

2. Докажите, что среди всех треугольников с данным основанием и данным углом при вершине наибольший периметр имеет равнобедренный треугольник.

3. В треугольнике ABC внешний угол при вершине A в три раза больше угла B, а стороны AB, BC, AC (в указанном порядке) образуют арифметическую прогрессию. Найдите углы треугольника ABC.

4. *В прямоугольном треугольнике даны острый угол α и расстояние a от* вершины другого острого угла до центра вписанного круга. Определите площадь треугольника.

5. Прямая проходит через вершину B равнобедренного треугольника ABC, пересекая его основание AC в точке D. Известно, что $\angle ABD=\frac{1}{3}\angle ABC$ и $AD:DC=3:4$. Острый или тупой угол ABC?

6. В круг вписан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AB=BC$ и $\angle ABC=\alpha$. Из вершины A проведена биссектриса угла BAC, пересекающая сторону BC в точке D, а окружность — в точке E. Вершина B соединена отрезком прямой с точкой E. Найдите отношение площадей треугольников ABE и BDE.

7. В ромбе $ABCD$ со стороной $(1+\sqrt{5})$ и острым углом $\angle BAD=60°$ расположена окружность, вписанная в треугольник ABD. Из точки C к окружности проведена касательная, пересекающая сторону AB в точке E. Найдите длину отрезка AE.

8. В круг вписан четырехугольник $ABCD$. Через точку E пересечения диагоналей проведен отрезок FH (F лежит на AB, H — на CD). Докажите, что

$$\frac{FE}{EH}=\sqrt{\frac{AF}{CH}\cdot\frac{BF}{DH}}.$$

ПРИМЕНЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИИ ПРИ РЕШЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

А. Мордкович

При решении геометрических задач довольно часто приходится обращаться за помощью к тригонометрии. Иногда это обращение обязательно — когда задан какой-либо угол и для вычисления линейных элементов используются тригонометрические функции угла, иногда это обращение желательно — когда мы сами вводим в рассмотрение вспомогательные углы, чтобы, используя затем тригонометрические функции, вычислить нужные нам линейные элементы или установить некоторое соотношение между линейными элементами. Если же говорить о формах применения тригонометрии при решении геометрических задач, то к числу основных следует отнести обычные тригонометрические преобразования, теорему косинусов и, в большей степени, теорему синусов, тригонометрические тождества и тригонометрические уравнения, использование обратных тригонометрических функций.

А теперь перейдем к рассмотрению задач.

Задача 1. *Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна а, двугранный угол при основании равен* α. *В пирамиду вписан шар, к шару проведена касательная плос-*

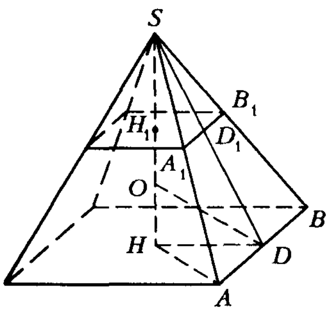


Рис.1

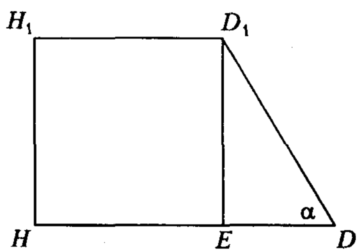


Рис.2

кость, параллельная основанию пирамиды. Определите боковую поверхность полученной усеченной пирамиды.

Решение. Нет необходимости изображать на рисунке вписанный шар. Вполне достаточно показать центр шара (рис. 1) — это точка O пересечения высоты пирамиды с биссектрисой линейного угла SDH — и учесть, что высота HH_1 усеченной пирамиды равна диаметру шара.

Имеем: $OH = r = HD \cdot \operatorname{tg}\angle ODH = \frac{a}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$,

$$HH_1 = 2r = a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ S_{бок} = 4 \cdot \frac{AB + A_1B_1}{2} \cdot DD_1 = 2(a + A_1B_1) \cdot DD_1.$$

Для дальнейших вычислений нам понадобится вспомогательный рисунок 2:

$$A_1B_1 = 2H_1D_1 = 2HE = 2(HD - DE) = 2\left(\frac{a}{2} - D_1E \cdot \operatorname{ctg}\alpha\right) =$$

$$= a - 2HH_1\operatorname{ctg}\alpha = a - 2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha,\ DD_1 = \frac{D_1E}{\sin\alpha} = \frac{HH_1}{\sin\alpha} = \frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha},$$

$$S_{бок} = 2\left(a + a - 2a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\alpha\right) \cdot \frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha} = \frac{4a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\alpha}.$$

Задача 2. *Определите радиус окружности, если вписанный в нее угол со сторонами a и b опирается на дугу α.*

Решение. Вписанный угол равен $\frac{\alpha}{2}$. Обозначим хорду, соединяющую концы вписанного угла, через x (рис. 3); тогда по теореме косинусов $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\alpha}{2}$. Далее, по теореме синусов $\frac{x}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2R$, откуда

$$R = \frac{x}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\frac{\alpha}{2}}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

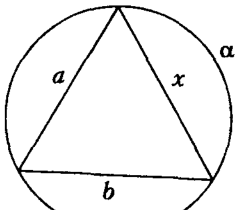


Рис.3

Задача 3. *Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β, γ. Найдите его двугранные углы.*

Решение. Пусть S — вершина трехгранного угла (рис. 4), SM — общая сторона плоских углов α и β. Найдем величину двугранного угла при ребре SM. Отложим отрезок $SC = 1$, через точку C проведем плоскость, перпендикулярную прямой SM, и обозначим через A и B точки пересечения этой плоскости с лучами SN и SP. Тогда $\angle ACB$ — линейный угол интересующего нас двугранного угла.

Пусть $\angle ACB = x$, тогда $AC = \operatorname{tg}\alpha$, $BC = \operatorname{tg}\beta$, $AS = \sec\alpha$, $BC = \sec\beta$. Из треугольника ABS по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AS^2 + BS^2 - 2AS \cdot BS \cdot \cos\gamma,$$

т.е.

$$AB^2 = \sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha \cdot \sec\beta \cdot \cos\gamma.$$

С другой стороны, из треугольника ABC по теореме косинусов имеем

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC\cos x,$$

т.е.

$$AB^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \cdot \cos x.$$

Таким образом,

$$\sec^2\alpha + \sec^2\beta - 2\sec\alpha\sec\beta\cos\gamma = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\cos x,$$

откуда

$$\cos x = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}.$$

Значит, двугранный угол, противолежащий плоскому углу γ, равен $\arccos\left(\frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}\right)$. Аналогично находятся остальные двугранные углы.

Если три плоских и три двугранных угла считать основными элементами трехгранного угла, то рассмотренная задача позволяет сделать вывод о том, что по любым трем основным элементам трехгранного угла можно найти остальные три.

Задача 4. *Через вершину угла α при основании равнобедренного треугольника проведена прямая, пересекающая противо-*

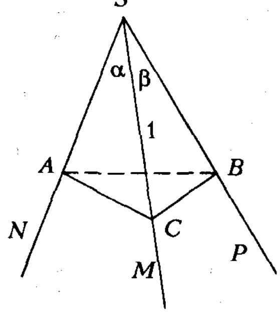


Рис.4

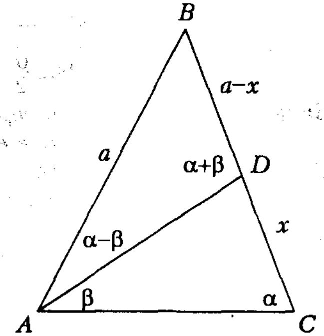


Рис.5

лежащую боковую сторону и составляющая с основанием угол β ($\beta < \alpha$). *В каком отношении эта прямая делит площадь треугольника?*

Решение. Пусть $AB = BC = a$, $DC = x$, $BD = a - x$ (рис. 5). Треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, поэтому их площади относятся как основания, т.е. как стороны BD и CD:

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a-x}{x} = \frac{a}{x} - 1.$$

Таким образом, для решения задачи нам достаточно найти отношение $\frac{a}{x}$. Применим к треугольнику ABD теорему синусов:

$$\frac{a-x}{\sin(\alpha-\beta)} = \frac{a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Отсюда

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

В итоге

$$\frac{S_{ABD}}{S_{ACD}} = \frac{a}{x} - 1 = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)} - 1 = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}.$$

Задача 5. *Все боковые грани правильной четырехугольной пирамиды наклонены к основанию под углом* α, *а апофема боковой грани равна* a. *Через одну из сторон основания проведено сечение, составляющее с плоскостью основания угол* β ($\beta < \alpha$). *Вычислите площадь сечения.*

Решение. Выясним прежде всего, что представляет собой сечение (рис. 6). Оно параллельно стороне AB, а боковая грань, проходящая через AB, пересекает сечение по прямой EF. Но если через прямую, параллельную некоторой плоскости, проведена плоскость, пересекающая первую плоскость, то линия пересечения параллельна данной прямой, а значит, и прямой CD. Итак, сечение — трапеция.

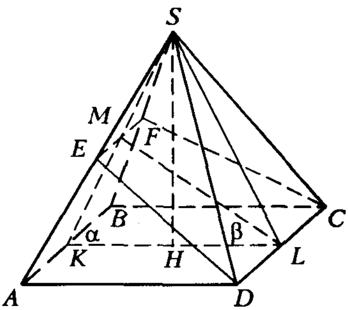


Рис.6

А теперь проведем вычисления. Имеем

$$KH = SK \cdot \cos\alpha = a\cos\alpha,$$

$$KL = CD = 2a\cos\alpha.$$

Применим к треугольнику MKL теорему синусов:

$$\frac{ML}{\sin\alpha} = \frac{KL}{\sin(180° - (\alpha+\beta))},$$

откуда

$$ML=\frac{KL\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a\sin 2a}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Применим к треугольнику MSL теорему синусов:

$$\frac{SL}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{MS}{\sin(\alpha-\beta)},MS=\frac{a\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Из подобия треугольников SEF и ABS получаем: $\frac{MS}{KS}=\frac{EF}{AB}$. Отсюда получаем

$$EF=\frac{AB\cdot MS}{KS}=\frac{2a\cos\alpha\cdot a\sin(\alpha-\beta)}{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}=\frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Теперь у нас есть все необходимое для вычисления площади сечения. Имеем

$$S=\frac{1}{2}(CD+EF)\cdot ML=\frac{1}{2}\left(2a\cos\alpha+\frac{2a\cos\alpha\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)\times$$

$$\times\frac{a\sin 2\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{a^2\sin^2 2\alpha\cdot\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.$$

Задача 6. *На одной из дуг AB окружности даны произвольная точка K и точка M — середина дуги. Эти точки соединены хордами с точками A и B. Докажите, что $AK\cdot KB=AM^2-KM^2$.*

Решение. Обозначим угол KBA через α, а угол KBM — через β (рис. 7). Применим к треугольнику AKB теорему синусов: $\frac{AK}{\sin\alpha}=2R$, $AK=2R\sin\alpha$. Аналогично из треугольника AMB находим $AM=2R\sin(\alpha+\beta)$, а из треугольника KBM — $KM=2R\sin\beta$.

Рассмотрим теперь треугольник KMB. Имеем $\angle KBM=\beta$, $\angle MKB=\angle MAB=\angle ABM=\alpha+\beta$, $\angle KMB=180^\circ-\beta-(\alpha+\beta)=180^\circ-(\alpha+2\beta)$, $KB=2R\sin(180^\circ-(\alpha+2\beta))=2R\sin(\alpha+2\beta)$. Нам нужно доказать, что $AK\cdot KB=AM^2-$

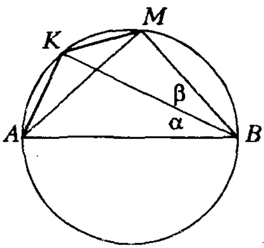


Рис.7

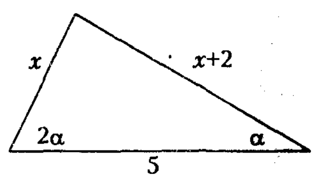


Рис.8

$-KM^2$, т.е. что

$$2R\sin\alpha\cdot 2R\sin(\alpha+2\beta)=4R^2\sin^2(\alpha+\beta)-4R^2\sin^2\beta,$$

или

$$\sin\alpha\cdot\sin(\alpha+2\beta)=\sin^2(\alpha+\beta)-\sin^2\beta.$$

Задача свелась к доказательству тригонометрического тождества. Доказывается оно несложно, и мы предоставляем это сделать читателю.

Задача 7. *В треугольнике один угол вдвое больше другого, а стороны, противолежащие этим углам, отличаются друг от друга на* 2. *Найдите эти стороны, если известно, что третья сторона треугольника равна* 5.

Решение. Эту задачу можно решить средствами планиметрии, но мы, будучи верны взятой теме, разберем решение этой задачи с помощью тригонометрии (рекомендуем читателю попробовать найти планиметрическое решение). Обозначим через α один из углов треугольника, 2α — другой угол, а противолежащие стороны соответственно x и $x+2$ (рис. 8).

По теореме синусов $\frac{x}{\sin\alpha}=\frac{5}{\sin(180°-3\alpha)}=\frac{x+2}{\sin 2a}$; отсюда $x=$ $=\frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}$, $x+2=\frac{5\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$.

Теперь задача сводится к решению тригонометрического уравнения $\frac{5\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}-\frac{5\sin\alpha}{\sin 3\alpha}=2$. Применив формулу $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-$ $-4\sin^3\alpha$, получим $\frac{10\cos\alpha}{3-4\sin^2\alpha}-\frac{5}{3-4\sin^2\alpha}=2$ и далее $8\cos^2\alpha-$ $-10\cos\alpha+3=0$; $(\cos\alpha)_1=\frac{3}{4}$, $(\cos\alpha)_2=\frac{1}{2}$. Но по смыслу задачи $\alpha<60°$, следовательно, $\cos\alpha>\frac{1}{2}$. Поэтому из найденных значений подходит только $\cos\alpha=\frac{3}{4}$. Имеем далее $\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=$ $=\frac{\sqrt{7}}{4}$, $x=\frac{5}{3-4\sin^2\alpha}=4$, $x+2=6$.

Упражнения

1. В треугольнике ABC угол A равен α, сторона BC равна a. Найдите длину биссектрисы AD, если угол между AD и высотой AE равен β.

2. Основанием пирамиды служит равнобочная трапеция, у которой острый угол равен α, а площадь равна S. Все боковые грани наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

3. Образующая конуса равна l и составляет с высотой угол α. Через две образующие конуса, угол между которыми равен β, проведена плоскость. Найдите расстояние от этой плоскости до центра вписанного в конус шара.

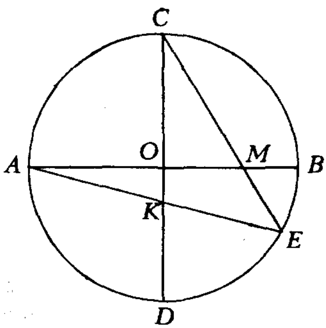


Рис.9

4. Высота треугольника, равная 6, делит угол треугольника в отношении 2:1, а сторону на отрезки, меньший из которых равен 3. Определите стороны треугольника.

5. В окружность вписан правильный треугольник ABC. На дуге BC взята произвольная точка M и соединена хордами с вершинами треугольника. Докажите, что $MA = MB + MC$.

6. Докажите, что сумма квадратов диагоналей трапеции равна удвоенному произведению ее оснований, сложенному с суммой квадратов боковых сторон.

7. Плоские углы трехгранного угла равны соответственно α, β, γ. Найдите угол между плоскостью, в которой лежит угол α, и противолежащим ребром трехгранного угла.

8. Дан треугольник ABC, на стороне AC взята точка E так, что $AE:EC = a$, на стороне AB взята точка D так, что $AD:DB = b$. Проведены отрезки CD и BE. Найдите отношение площади получившегося четырехугольника к площади данного треугольника.

9. В окружности проведены два взаимно перпендикулярных диаметра AB и CD. Хорда AE пересекает CD в точке K, так что $CK:KD = 2:1$. Хорда EC пересекает AB в точке M. Докажите, что $AM:MB = 3:1$ (рис. 9).

ЧИСЛОВЫЕ ДАННЫЕ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

С. Овчинников, И.Шарыгин

В большинстве стандартных школьных задач числовые данные вообще не играют никакой роли. Как правило, такие задачи можно решить в общем виде, используя «буквенные» обозначения, а затем подставить в полученный ответ данные числа. Однако часто использование «специфики» числовых данных позволяет получить более простое решение. В этой заметке мы на примерах покажем, как по-разному влияют числовые данные на решение задачи.

Задача 1. *Хорда AB стягивает дугу окружности, равную $120°$. Точка C лежит на этой дуге, а точка D лежит на хорде AB. При этом $AD = 2$, $BD = 1$, $DC = \sqrt{2}$. Найдите площадь треугольника ABC.*

Заметим, что $\angle ODC = 90°$. Действительно, продолжим отрезок CD до пересечения с окружностью (рис. 1). Так как $AD \cdot BD = CD \cdot DE$, то $DE = CD = \sqrt{2}$ и $OD \perp CE$. Из ΔAOF мы находим радиус окружности. Он равен $\sqrt{3}$, поэтому из треугольника OFD получаем, что $\angle FDO = 60°$. Отсюда

$$\angle CDA = 30°, \ \angle CDB = 150°.$$

Воспользовавшись формулой для определения площади треугольника по двум сторонам и углу между ними, получим, что $S_{\Delta ADC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $S_{\Delta CDB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Отсюда $S_{\Delta ABC} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$.

Анализируя приведенное решение, мы видим, что числовые данные в задаче подобраны «весьма удачно». Если мы попытаемся решить эту задачу в общем виде, т.е. возьмем в качестве исходных данных произвольные числа, то очень быстро убедимся, что решение оказывается непомерно громоздким. (Попытайтесь все-таки решить эту задачу в общем виде. Это будет полезным упражнением.) А вот типичная задача, в которой числовые данные не играют никакой роли. Они используются

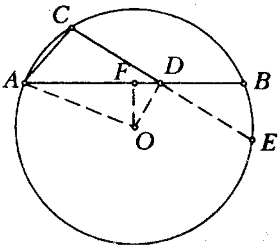


Рис.1

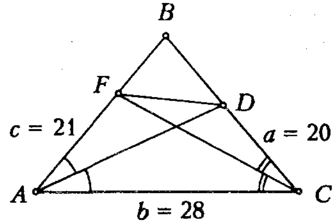


Рис.2

лишь на последнем этапе при подстановке в общий ответ и носят иллюстративный характер.

Задача 2. *В треугольнике ABC проведены биссектриса AD угла BAC и биссектриса CF угла ACB (точка D лежит на стороне BC, точка F — на стороне AB). Найдите отношение площадей треугольников ABC и AFD, если известно, что $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.*

Обозначим стороны треугольника AB, BC и CA соответственно через c, a и b (рис. 2). Используя свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, находим, что

$$AF = \frac{bc}{a+b}, \quad BD = \frac{ac}{b+c}.$$

Отсюда

$$\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{BD}{BC} = \frac{c}{b+c}, \quad \frac{S_{\Delta AFD}}{S_{\Delta ABD}} = \frac{AF}{AB} = \frac{c}{a+b}, \quad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AFD}} = \frac{(a+b)(b+c)}{bc}.$$

Подставляя вместо a, b и c их численные значения, находим $\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta AFD}} = 4$, а потому искомое отношение равно 4.

Следующая задача может быть решена в общем виде, но решение существенно упрощается, если вовремя воспользоваться численными значениями.

Задача 3. *Прямоугольные проекции треугольника ABC на две взаимно перпендикулярные плоскости являются правильными треугольниками со сторонами, равными 1. Найдите периметр треугольника ABC, если известно, что $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$.*

Обозначим плоскости, на которые спроектирован треугольник ABC, через P и Q (рис. 3). Очевидно, можно считать, что одна из вершин треугольника, например A, лежит на общем ребре R плоскостей P и Q. Так как проекции сторон AB и AC на плоскости P и Q равны, точки A, B и C лежат в биссекторной плоскости S

двугранного угла, образованного плоскостями P и Q. Проекции точек B и C на Q обозначим через D и E. Опустим из точки B перпендикуляр BF на ребро R, $\angle BFD = 45°$.

В дальнейших вычислениях можно было бы не фиксировать длину отрезка AB, а считать ее произвольной величиной a. В этом случае решение тоже можно довести до конца. Но данное конкретное значение $AB = \frac{\sqrt{5}}{2}$ позволяет существенно упростить решение.

Действительно, из треугольника ABD находим: $BD = \frac{1}{2}$ ($\angle ADB = 90°$, AB и AD даны). Так как $\angle BFD = 45°$, то $FD = BD = \frac{1}{2}$ и в треугольнике AFD имеем $\angle AFD = 90°$, $\angle FAD = 30°$. Отсюда получаем последовательно, что $AE \perp AF$, $\angle CAE = 45°$, $\angle CEA = 90°$, $AC = \sqrt{2}$. Из прямоугольной трапеции $CBDE$ имеем $(CE - BD)^2 + DE^2 = BC^2$. Отсюда $BC = \frac{\sqrt{5}}{2}$, и периметр треугольника ABC равен $\sqrt{5} + \sqrt{2}$.

Если в рассмотренной задаче числовые данные, существенно уменьшая объем вычислений, помогали нам, то иногда они, наоборот, создают вычислительные трудности и даже затеняют простой геометрический смысл задачи.

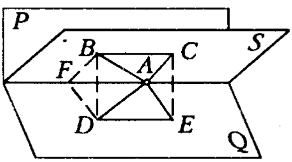


Рис.3

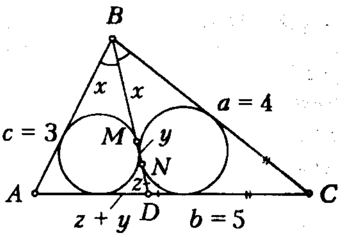


Рис.4

Задача 4. *В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$, $BC = 4$ и $AC = 5$ проведена биссектриса BD. В треугольники ABD и BCD вписаны окружности, которые касаются BD в точках M и N соответственно. Определите длину отрезка MN.*

Числовые данные этой задачи показывают, что треугольник прямоугольный. Это может привести к попытке решить задачу, используя метрические свойства прямоугольного треугольника.

На самом деле задача имеет простое геометрическое решение для произвольного треугольника ABC. Обозначим AB через c, BC через a и AC через b (рис. 4). По свойству биссектрисы

$AD = \frac{bc}{a+c}$, $CD = \frac{ab}{a+c}$. Введем неизвестные $x = BM$, $y = MN$ и $z = ND$. Так как касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны, то можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + \left(\frac{ab}{a+c} - z\right) = a, \\ x + \left(\frac{bc}{a+c} - z - y\right) = c. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим

$$2y + \frac{ab}{a+c} - \frac{bc}{a+c} = a - c,$$

откуда

$$y = \frac{1}{2}\frac{(a-c)(a+c-b)}{a+c}.$$

Подставляя вместо a, b и c их значения, находим, что $MN = \frac{1}{7}$.

Теперь мы рассмотрим задачи, в которых специально подобранные числовые данные резко упрощают решение задачи.

Задача 5. *В треугольнике ABC даны стороны $AB = 4$, $AC = \sqrt{17}$ и $BC = 5$. На стороне AB взята точка D такая, что $AD = 1$. Найдите расстояние между центрами окружностей, описанных около треугольников DBC и ADC.*

Если мы догадаемся, что CD является высотой, то решение находится очень быстро: центры окружностей, описанных около треугольников ADC и DBC, лежат на серединах сторон AC и BC, и искомое расстояние равно длине средней линии, параллельной AB, т.е. 2 (рис. 5). То, что CD является высотой, следует из равенства

$$BC^2 - AC^2 = BD^2 - DA^2 = 8.$$

Как же догадаться, что CD является высотой? Ведь из решения видно, что эта догадка является основным моментом в решении — все остальные рассуждения тривиальны. Мы не собираемся (да и не можем) объяснить, как надо догадываться, но на одно важное обстоятельство укажем. Речь идет о чертеже. Аккуратно и грамотно выполненный чертеж является очень хорошим помощником при решении задачи. Это относится к любой геометрической задаче, как с числовыми, так и с буквенными данными. Если данные — числовые, то на чертеже следует отразить заданные размеры фигуры. Например, если в разобранной задаче сделать чертеж с соблюдением заданных пропорций, то довольно легко увидеть, что CD — высота.

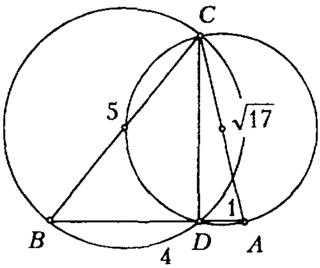


Рис.5

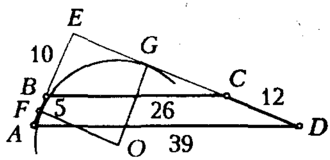


Рис.6

Задача 6. *В трапеции ABCD известны основания $AD = 39$, $BC = 26$ и боковые стороны $AB = 5$, $CD = 12$. Найдите радиус окружности, которая проходит через точки A и B и касается стороны CD или ее продолжения.*

Достроим трапецию до треугольника AED (рис. 6). Из подобия треугольников BEC и AED легко получаем $BE = 10$, $CE = 24$. Если чертеж выполнен аккуратно, то можно заметить, что $\angle AED = 90°$. Это легко доказать: $AE^2 + ED^2 = AD^2$. Пусть O — центр окружности, проходящей через A и B и касающейся ED в точке G. Опустим из O перпендикуляр OF на AB, тогда F — середина хорды AB. Очевидно, $OG = EF = 12{,}5$. Отсюда искомый радиус равен 12,5.

В следующих задачах числовые данные проявляются весьма своеобразно. При предварительном изучении такой задачи трудно предугадать, как именно повлияют эти данные на решение, но стоит начать решать задачу, и в некоторый момент станет ясно, что только при этих данных можно получить ответ. Как правило, в подобных задачах путь решения очевиден, хотя с самого начала не ясно, приведет ли он к ответу.

Задача 7. *На сторонах выпуклого четырехугольника ABCD, площадь которого равна 1, взяты точки: K на AB, L на BC, M на CD и N на AD. При этом* $\frac{AK}{KB} = 2$, $\frac{BL}{LC} = \frac{1}{3}$, $\frac{CM}{MD} = 1$, $\frac{DN}{NA} = \frac{1}{5}$. *Найдите площадь шестиугольника AKLCMN.*

Отношение площадей треугольников KBL и ABC равно $\frac{BK \cdot BL}{AB \cdot BC} = \frac{1}{12}$ (рис. 7). Отношение площадей треугольников MND и ADC равно $\frac{DN \cdot DM}{AD \cdot CD} = \frac{1}{12}$. Таким образом, сумма площадей треугольников KBL и MND равна $\frac{1}{12}$, откуда искомая площадь равна $\frac{11}{12}$.

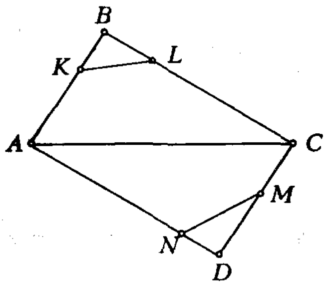


Рис.7

Ясно, что такая задача в общем виде вообще не имеет однозначного решения.

Задача 8. *Три пункта A, B и C соединены прямолинейными дорогами. К отрезку дороги AB примыкает квадратное поле со стороной, равной $\frac{1}{2}AB$. К отрезку дороги BC примыкает квадратное поле со стороной, равной BC, а к отрезку дороги CA примыкает прямоугольный участок леса длиной, равной CA, и шириной 4 км. Площадь леса на 20 км^2 больше суммы площадей квадратный полей. Найдите площадь леса.*

На первый взгляд данных слишком мало для решения задачи. Однако перейдем к вычислениям. Обозначим стороны треугольника AB, BC и CA через c, a, b соответственно. Тогда из условий задачи имеем: $4b = 20 + \frac{c^2}{4} + a^2$. Воспользуемся неравенством треугольника $b \le a + c$ и подставим в него b, выраженное через a и c:

$$\frac{1}{4}\left(20+\frac{c^2}{4}+a^2\right)\le a+c.$$

После простых преобразований этого неравенства получаем: $\left(\frac{c}{2}-4\right)^2 + (a-2)^2 \le 0$, откуда $c = 8$ (км), $a = 2$ (км) , а $b = a + c = 10$ (км). Площадь леса равна 40 км^2.

Избранный путь решения является единственно возможным в данной задаче. Но то, что он приводит к ответу, оказалось следствием специально подобранных данных. В результате этого подбора три точки A, B и C оказались лежащими на одной прямой и данных задачи хватило для получения ответа.

Упражнения

1. Прямоугольные проекции плоского четырехугольника на две взаимно перпендикулярные плоскости являются квадратами со сторонами 2. Одна из диагоналей четырехугольника равна $\sqrt{14}$. Найдите другую диагональ.

2. В остроугольном треугольнике ABC дано $AB = 15$, $BC = 10$ и угол BAC равен $\arccos\frac{7}{9}$. Вокруг треугольника ABC описана окружность и через точку D, лежащую на AC на расстоянии 9 от A, проведена хорда BE. Найдите площадь треугольника AEC.

3. Дан треугольник ABC со сторонами 5, 2 и $\sqrt{22}$, причем $AC = \sqrt{22}$. На AC взята точка D такая, что $BD = 3$. Найдите расстояние между точкой D и центром окружности, описанной вокруг треугольника ABC.

4. В правильную треугольную пирамиду $SABC$, все ребра которой равны a, вписана сфера. На ребре SA взята точка M так, что $AM = MS$, а на ребре BC взята точка N так, что $2CN = NB$. Прямая MN пересекает сферу в двух точках P и Q. Найдите длину отрезка PQ.

5. В треугольнике ABC со сторонами $AB = \sqrt{3}$, $BC = 4$, $AC = \sqrt{7}$ проведена медиана BD. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BDC, касаются BD в точках M и N соответственно. Определите длину отрезка MN.

6. Две окружности с радиусами r касаются друг друга. Кроме того, каждая из них касается извне третьей окружности с радиусом R в точках A и B соответственно. Определите r, если $AB = 12$, $R = 8$.

7. Правильный треугольник ABC со стороной, равной 3, вписан в окружность. Точка D лежит на окружности, причем длина хорды AD равна $\sqrt{3}$. Найдите длины хорд BD и CD.

8. Дан треугольник ABC, площадь которого равна единице. На медианах AK, BL и CN треугольника ABC взяты соответственно точки P, Q и R так, что $\dfrac{AP}{PK} = 1$, $\dfrac{BQ}{QL} = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{CR}{RN} = \dfrac{5}{4}$.

Найдите площадь треугольника PQR.

9. Объем бруска, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, равен $150 см^3$, площадь полной поверхности равна 280 $см^2$, периметр основания равен 40 см. Найдите размеры бруска.

10. В двугранный угол $60°$ вписан шар радиусом R. Найдите радиус шара, вписанного в тот же угол и касающегося данного шара, если известно, что прямая, соединяющая центры обоих шаров, образует с ребром двугранного угла угол $45°$.

11. Дан треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 3$ и $AC = 5$. На стороне AB взята точка D так, что $DB = 7/8$. Через точки C, D и B проведена окружность, пересекающая AC в точке E. Найдите длину отрезка BE.

УЧИТЕСЬ ДЕЛАТЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

С. Белый

Почти каждую геометрическую задачу можно решить несколькими способами. Всегда интересно попытаться найти наиболее простое, «красивое» решение — тем более, что такие решения высоко оцениваются экзаменаторами. В этом очень часто помогают дополнительные построения. В одних случаях эти построения напрашиваются сами собой, в других они не так очевидны и требуют от решающего большого опыта, изобретательности, геометрической интуиции.

Перейдем к рассмотрению конкретных задач.

Задача 1. *На катетах AC, BC прямоугольного треугольника вне его построены квадраты $ACDE$ и $BCKF$. Из точек E и F на продолжение гипотенузы опущены перпендикуляры EM и FN. Докажите, что $EM + FN = AB$.*

В прямоугольном треугольнике ACB проведем высоту CL (см. рис.1). Очевидно, что $\Delta ACL = \Delta EAM$, $\Delta BCL = \Delta FBN$. Поэтому $EM = AL$, $FN = LB$, $EM + FN = AL + LB = AB$.

Задача 2. *Найдите высоту равнобедренной трапеции, если ее диагонали взаимно перпендикулярны, а площадь трапеции равна S.*

Проведем через вершину C прямую, параллельную диагонали BD до пересечения с продолжением основания трапеции AD в

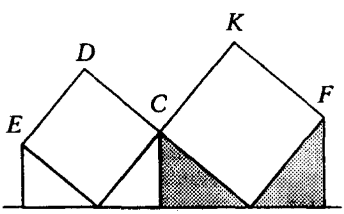


Рис.1

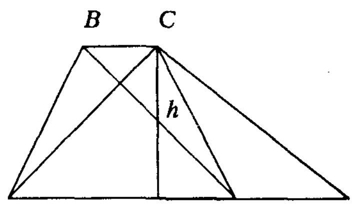


Рис.2

точке E (см. рис.2). Так как трапеция равнобедренная, а диагонали ее взаимно перпендикулярны, то треугольник ACE — равнобедренный и прямоугольный (докажите!). В треугольнике ACE проведем высоту CF, обозначим ее длину через h. Ясно, что $AF = CF$, но AF равно средней линии трапеции, поэтому $S = h^2$. Следовательно, $h = \sqrt{S}$.

Как видим, эта задача совсем простая, основной трудностью при ее решении было догадаться сделать подходящие дополнительные построения.

Задача 3. *На сторонах AB и BC треугольника ABC построены вне его квадраты $ABDE$ и $BCKF$. Докажите, что отрезок DF в два раза больше медианы BP треугольника.*

Достроим треугольник ABC до параллелограмма, а медиану BP продолжим до его диагонали (см. рис.3). Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle DBF = 180° - \alpha$. Но и $\angle BCQ = 180° - \alpha$, а стороны, заключающие эти углы, также равны между собой, поэтому $\Delta DBF = \Delta QCB$. Следовательно, $BQ = 2BP = DF$.

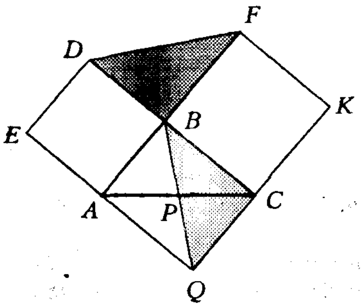


Рис.3

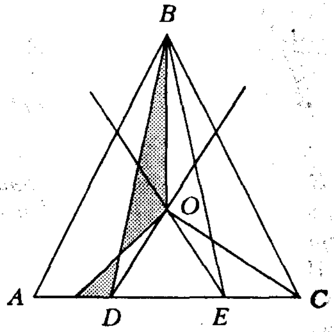


Рис.4

Задача 4. *Внутри треугольника найдите такую точку, что если ее соединить отрезками прямых с вершинами треугольника, то треугольник разделится на три части, площади которых относятся как $m{:}n{:}q$.*

Основание AC треугольника ABC разделим точками D и E на три части в данном отношении $m{:}n{:}q$ (рис.4). Через точку D проведем прямую, параллельную стороне AB, а через точку E — прямую, параллельную BC. Докажем, что точка O пересечения этих прямых — искомая. Для доказательства соединим вершину B с точками D и E. $S_{\Delta AOB} = S_{\Delta ABD}$, так как эти треугольники имеют общее основание AB и равные высоты. Аналогично $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta BEC}$, а следовательно и $S_{\Delta AOC} = S_{\Delta DBE}$. Но площади треугольников ABD, DBE, EBC относятся как $m:n:q$, так как все они имеют одинаковую высоту. Следовательно, $S_{\Delta AOB} : S_{\Delta AOC} : S_{\Delta BOC} = m:n:q$.

Задача 5. *Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена прямая l, пересекающая стороны AB и AC. Докажите, что сумма расстояний от прямой l до вершин B и C равна расстоянию от нее до вершины A.*

Пусть O — точка пересечения медиан треугольника, AD — медиана (рис.5). Опустим перпендикуляры BM, DL, CN, AK на прямую l. Легко видеть, что DL — средняя линия трапеции $BMNC$, $DL = \frac{BM + CN}{2}$, и $\Delta AKO \backsim \Delta DLO$, поэтому $\frac{DL}{AK} = \frac{DO}{OA} = \frac{1}{2}$ и $AK = 2DL = BM + CN$.

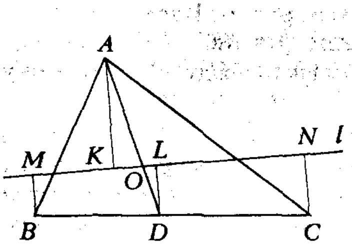


Рис.5

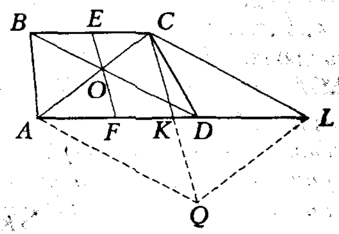


Рис.6

Задача 6. *В трапеции диагонали равны 3 и 5, а отрезок, соединяющий середины оснований, равен 2. Найдите площадь трапеции.*

Прежде всего заметим, что точки E и F — середины оснований BC и AD трапеции $ABCD$ (см. рис.6) — и точка O пересечения диагоналей лежат на одной прямой (докажите!). Через точку C проведем две прямые: одну параллельно диагонали BD до пересечения с продолжением основания AD в точке L, другую — параллельно EF. Поскольку OF — медиана треугольника AOD, то CK — медиана треугольника ACL. Теперь достроим треугольник ACL до параллелограмма, а медиану CK до его диагонали. $S_{ABCD} = S_{\Delta ACL} = S_{\Delta ACQ}$ (почему?). Остается заметить, что ΔACQ прямоугольный, $S_{\Delta ACQ} = 6$.

Задача 7. *Две равные окружности пересекаются в точке C. Через точку C проведены две прямые, пересекающие данные окружности в точках A, B и M, N соответственно. Прямая AB параллельна линии центров, а прямая MN образует угол α с линией центров. Длина AB равна a. Найдите длину отрезка MN.*

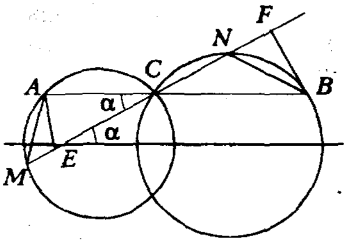


Рис.7

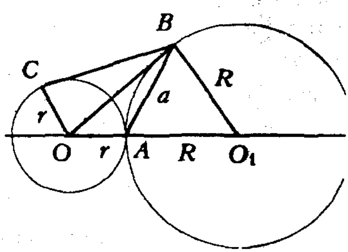


Рис.8

Из точек A и B опустим перпендикуляры AE и BF на прямую MN (см. рис.7). Пусть $\angle AMC = \beta$, тогда $\angle CNB = 180° - \beta$ (почему?), а $\angle FNB = \beta$. Из равенства треугольников AEC и BFC (по гипотенузе и углу) следует, что $AE = BF$. А так как $\angle AMC = \angle FNB$, то $\Delta AEM = \Delta BFN$ и $ME = NF$. Поэтому $MN = EF = EC + CF = \frac{a}{2}\cos\alpha + \frac{a}{2}\cos\alpha = a\cos\alpha$.

Задача 8. *Две окружности радиусов R и r ($R > r$) имеют внешнее касание в точке A. Через точку B, взятую на большей окружности, проведена прямая линия, касающаяся меньшей окружности в точке C. Найдите длину отрезка BC, если хорда AB равна a.*

Через центр O меньшей окружности и точку B проведем прямую (см. рис.8). Тогда $BC^2 = OB^2 - r^2$. По теореме косинусов

$$OB^2 = (R+r)^2 + R^2 - 2R(R+r)^2\cos\angle AO_1B,$$

откуда

$$\cos\angle AO_1B = \frac{2R^2 - a^2}{2R^2}.$$

Следовательно,

$$BC^2 = (R+r)^2 + R^2 - 2R(R+r)\frac{2R^2-a^2}{2R^2} - r^2 = a^2\left(\frac{R+r}{R}\right),$$

$$BC = a\sqrt{1+\frac{r}{R}}.$$

Задача 9. *Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке O. Найдите площадь четырехугольника $OMCD$.*

Через точку B проведем прямую параллельно AM до пересечения с продолжением стороны AD в точке E, а через точку A — прямую AF параллельно BD (см. рис.9), $S_{\Delta EBD} = \frac{3}{4}$ (почему?).

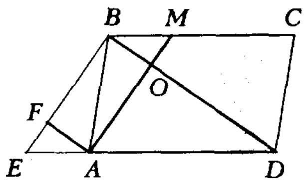


Рис.9

Теперь в силу подобия треугольников EFA и EBD мы можем записать: $\frac{S_{\Delta EFA}}{S_{\Delta EBD}} = \frac{EA^2}{ED^2}$.

Но $\frac{EA^2}{ED^2} = \frac{1}{9}$, отсюда находим $S_{\Delta EFA} = \frac{1}{12}$. Но $S_{\Delta EFA} = S_{\Delta BOM}$, и теперь мы можем найти площадь четырехугольника $OMCD$:

$$S_{OMCD} = S_{\Delta BDC} - S_{\Delta BOM} = \frac{15}{12}.$$

Сделаем некоторые выводы. Приступая к решению геометрической задачи, нужно иметь в виду, что обычно геометрическая задача может быть решена несколькими способами. Поэтому, если у вас появилась идея решения задачи, но вы видите, что путь к решению довольно длинный, то постарайтесь найти другой подход к решению. При этом следует помнить, что существенную помощь могут оказать дополнительные построения.

Упражнения

1. Найдите площадь треугольника, медианы которого равны 12, 15 и 21.

2. Основания равнобочной трапеции относятся как 3:2. На большем основании, как на диаметре, построена окружность, высекающая на меньшем основании отрезок, равный половине этого основания. В каком отношении окружность делит боковые стороны трапеции?

3. В прямоугольной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны, а основания относятся как $m:n$. Найдите отношение диагоналей трапеции.

4. В трапеции $ABCD$ длина большего основания AD равна a, $BC \perp CD$, $AB = BC$, $BD \perp AB$. Найдите стороны трапеции.

5. В равнобедренной трапеции с острым углом α при основании окружность, построенная на боковой стороне как на диаметре, касается другой боковой стороны, В каком отношении она делит большее основание трапеции?

6. В трапеции с основаниями a и b через точку пересечения диагоналей проведена прямая, параллельная основаниям. Найдите отрезок этой прямой, заключенный между боковыми сторонами трапеции.

7. В треугольнике ABC из вершины A проведена прямая, пересекающая сторону BC в точке D, находящейся между точками B и C, причем $CD:BC = \alpha$ (где $\alpha < \frac{1}{2}$). На стороне BC между точками B и D взята точка E и через нее проведена прямая, параллельная стороне AC и пересекающая сторону AB в точке F. Найдите отношение площадей трапеции $ACEF$ и треугольника ADC, если известно, что $CD = DE$.

8. В трапеции $ABCD$ точки K и M являются соответственно серединами оснований $AB = 5$ и $CD = 3$. Найдите площадь трапеции, если треугольник AMB — прямоугольный, а DK — высота трапеции.

НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕНИРОВКИ

Ю.Сидоров

Условия большинства геометрических задач вступительного экзамена формулируются достаточно просто: в некоторой фигуре задается несколько элементов или соотношений между элементами и требуется найти неизвестный элемент или неизвестное соотношение между ними.

Такие «стандартные» условия задач понятны каждому абитуриенту. Однако задачи и приемы их решений настолько разнообразны, что придумать какую-нибудь удобную классификацию, по которой можно было бы узнать рецепт решения каждой конкретной задачи, крайне трудно. Именно поэтому в учебниках и учебных пособиях почти нет описаний методов решения задач. Чтобы научиться решать геометрические задачи, нужно твердо знать и хорошо понимать основные теоремы геометрии и, главное, постоянно тренироваться, решая разнообразные задачи.

В последние годы многие школьники решают геометрические задачи только «алгебраическим способом», т.е. так: неизвестные элементы геометрической фигуры обозначаются через x, y, z, ..., и выписываются несколько соотношений между известными и неизвестными элементами. Затем решается полученная система алгебраических и (или) тригонометрических уравнений и находятся те элементы или соотношения между элементами, которые требуется найти по условиям задачи.

Такой формальный подход к решению геометрических задач является одним из самых простых и часто позволяет быстро получить ответ. Естественно, возникает желание решать таким способом все задачи. Однако абитуриент, который привык, не задумываясь, «переделывать» любую геометрическую задачу в алгебраическую, встречает непреодолимые трудности на приемных экзаменах, если оказывается, что его способ решения не приводит к желаемому результату.

Почти каждая задача может быть решена различными способами. Только большая и постоянная тренировка позволяет научиться находить самый рациональный способ решения. Удачный выбор неизвестных, удобный рисунок, дополнительные геометрические построения и аккуратное оформление решения помогают правильно понять задачу и найти самый простой способ ее решения. Рассмотрим конкретные примеры.

Задача 1. *Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что* $AO = \sqrt{3}MO$, $NO = (\sqrt{3}-1)BO$. *Найдите углы треугольника ABC.*

Многие абитуриенты пытались решить эту задачу следующим образом. Пусть $AB = a$, $\angle BAC = x$, $\angle ABC = y$ (рис. 1). Найдем длину отрезка AN из треугольника ABN (по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника и по теореме синусов):

$$AN = AB\frac{NO}{BO} = a(\sqrt{3}-1) = \frac{a\sin\frac{y}{2}}{\sin\left(x+\frac{y}{2}\right)}.$$

Аналогично из треугольника ABM находим:

$$BM = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{a\sin\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}+y\right)}.$$

Таким образом, получена система уравнений

$$\begin{cases}\sin\left(\frac{x}{2}+y\right) = \sqrt{3}\sin\frac{x}{2},\\ (\sqrt{3}-1)\sin\left(x+\frac{y}{2}\right) = \sin\frac{y}{2}.\end{cases}$$

Большинство абитуриентов, которые решали задачу таким способом, не сумели найти решение этой довольно сложной системы. Но плохо не то, что они не решили полученную систему, а то, что они не пытались найти другой способ решения данной задачи. Эту задачу проще решить следующим способом (тоже алгебраическим).

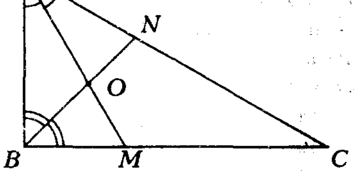


Рис. 1

Пусть $AB = x$, $BC = y$, $AC = z$. Из треугольников ABM и ABN по свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника получаем

$$\frac{BM}{AB}=\frac{MO}{AO}=\frac{1}{\sqrt{3}},\quad \frac{AN}{AB}=\frac{NO}{BO}=\sqrt{3}-1.$$

Отсюда $BM=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $AN=x\left(\sqrt{3}-1\right)$.

Из треугольника ABC имеем:

$$\frac{AN}{CN}=\frac{AB}{BC},\ \frac{BM}{CM}=\frac{AB}{AC},$$

т.е.

$$\begin{cases}\dfrac{x\left(\sqrt{3}-1\right)}{z-x\left(\sqrt{3}-1\right)}=\dfrac{x}{y},\\ \dfrac{x}{y\sqrt{3}-x}=\dfrac{x}{z}.\end{cases}$$

Из этой системы уравнений находим: $y=x\sqrt{3}$, $z=2x$. Отсюда следует, что $x^2+y^2=z^2$ и по теореме, обратной теореме Пифагора, $\angle ABC=\frac{\pi}{2}$.

Следовательно,

$$\angle BAC=\arcsin\frac{y}{z}=\frac{\pi}{3},\qquad \angle ACB=\frac{\pi}{6}.$$

Задача 2. *На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC расположена точка M, а на стороне AC — точка N такая, что $MN\|AB$. Известно, что $AB=AN=1$, $CM=\sqrt{3}$. Найдите длину отрезка MN.*

Естественно попытаться решить эту задачу следующим образом. Обозначим MN через x (рис. 2). Тогда $CN=\sqrt{3-x^2}$ и из подобия треугольников получаем уравнение

$$\frac{\sqrt{3-x^2}}{1+\sqrt{3-x^2}}=x,$$

которое легко преобразуется к виду

$$x^4-2x^3-x^2+6x-3=0.$$

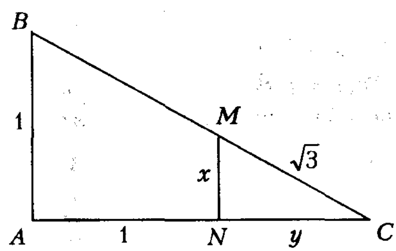


Рис.2

Найти решение этого уравнения трудно, и поэтому надо попытаться найти другой способ решения задачи. Например, задачу 2 можно решить следующим образом.

Обозначим MN через x, CN через y. Тогда легко получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ \dfrac{y+1}{y} = \dfrac{1}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим:

$$y - x = xy, \quad x^2 + y^2 - 2xy = x^2y^2.$$

Вычитая из этого уравнения первое уравнение системы, получаем:

$$(xy)^2 + 2xy - 3 = 0, \quad xy = -1 \pm 2.$$

Учитывая, что $x > 0$, $y > 0$, получаем систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ y - x = 1, \end{cases}$$

из которой находим ответ:

$$x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right).$$

Из рассмотренных примеров видно, как удачный выбор неизвестных величин помогает упросить решение геометрической задачи алгебраическим способом. Приведем примеры задач, для решения которых полезно сделать дополнительные геометрические построения.

Задача 3. *В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, диагонали взаимно перпендикулярны и $\frac{AD}{BC} = k$. Найдите отношение $\frac{BD}{AC}$.*

Решение. Через точку B проведем прямую, параллельную диагонали AC, до пересечения с прямой AD в точке M (рис. 3). Тогда по теореме о свойстве перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла треугольника BMD, имеем

$$BD = \sqrt{DM \cdot AD}, \quad BM = \sqrt{DM \cdot AM}.$$

Учитывая, что $AC = BM$, $AM = BC$, находим

$$\frac{BD}{AC} = \frac{BD}{BM} = \frac{\sqrt{DM \cdot AD}}{\sqrt{DM \cdot AM}} = \sqrt{\frac{AD}{BC}} = \sqrt{k}.$$

Задача 4. *На сторонах AC и BC треугольника ABC расположены соответственно точки N и M так, что $\frac{AN}{CN} = n$, $\frac{BM}{CM} = m$. Прямые AM и BN пересекаются в точке O. Найдите отношения $\frac{AO}{MO}$ и $\frac{BO}{NO}$.*

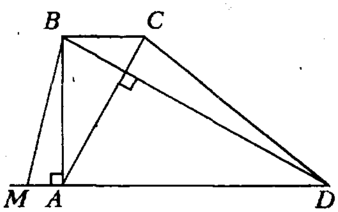


Рис.3

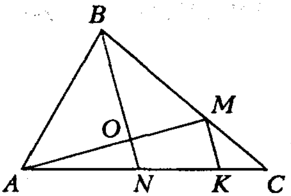


Рис.4

Решение. Проведем $MK \| BN$ (рис. 4). Из подобия треугольников BCN и CKM находим CK:

$$CK = CN\frac{CM}{BC} = CN\frac{CM}{CM+BM} = CN\frac{1}{1+m}.$$

Следовательно,

$$KN = CN - CK = CN\left(1 - \frac{1}{1+m}\right) = CN\frac{m}{1+m}.$$

Из подобия треугольников AON и AMK находим искомые отношения:

$$\frac{AO}{MO} = \frac{AN}{KN} = \frac{AN}{CN}\cdot\frac{1+m}{m} = \frac{n}{m}(1+m),$$

и аналогично

$$\frac{BO}{NO} = \frac{m}{n}(1+n).$$

Упражнения

1. Ребро правильного тетраэдра $ABCD$ равно a. Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A, B, центр грани ACD и середину ребра BC.

2. На основании AC равнобедренного треугольника ABC расположена точка D так, что $AD = a$, $CD = b$. Окружности, вписанные в треугольники ABD и BCD, касаются прямой BD в точках M и N соответственно. Найдите длину MN.

3. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояния от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны a и c соответственно. Найдите высоту треугольника ABC, проведенную из вершины B.

4. В остроугольном треугольнике две высоты равны соответственно 3 и $2\sqrt{2}$, а точка их пересечения делит третью высоту в отношении 5:1, считая от вершины треугольника. Найдите площадь треугольника.

5. В основании прямой треугольной призмы лежит прямоугольный треугольник, катеты которого равны a и b. Некоторая плоскость пересекает все боковые ребра призмы так, что в сечении получается правильный треугольник. Определите сторону этого треугольника.

6. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ высота равна диагонали основания $ABCD$. Через вершину A параллельно прямой BD проведена плоскость, касающаяся вписанного в пирамиду шара. Найдите отношение площади сечения к площади основания пирамиды.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

С.Романов, И.Шарыгин

Когда на экзамене вам предлагают задачу по планиметрии, зачастую не стоит тратить время на поиск геометрического решения, рациональнее решить ее алгебраически. Конечно, геометрическое решение, как правило, изящнее, в то время как алгебраическое содержит громоздкие выкладки, но на экзамене, в отличие от олимпиад, изящество решения практически не влияет на оценку. Поэтому основным «оружием» при решении геометрических задач на экзамене является алгебраический метод. О нем и пойдет речь в этой статье.

Сначала приведем два решения одной задачи.

Задача 1. *Докажите, что квадрат биссектрисы, проведенной через вершину произвольного треугольника, равен произведению боковых сторон без произведения отрезков основания.*

Нужно доказать, что $l^2 = ab - mn$ (рис. 1). Положим $\angle ADB = \alpha$. По теореме косинусов для треугольников ABD и BDC имеем:

$$a^2 = l^2 + m^2 - 2ml\cos\alpha, \quad (1)$$

$$b^2 = l^2 + n^2 + 2nl\cos\alpha. \quad (2)$$

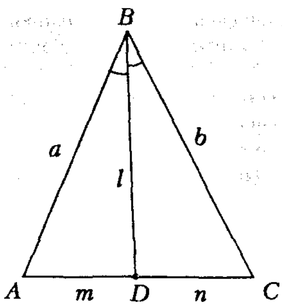


Рис. 1

Умножим (1) на n, а (2) на m и сложим полученные выражения. Учитывая, что $\frac{m}{n} = \frac{a}{b}$, мы легко преобразуем сумму к виду $l^2 = ab - mn$.

Это и есть алгебраический метод.

Прежде чем прочитать следующее решение, попытайтесь сами решить эту задачу геометрически.

Итак, чисто геометрическое решение. Опишем вокруг треугольника ABC окружность (рис. 2) и продолжим биссектрису до пересечения с этой окружностью в точке E. По известной теореме $mn = l \cdot DE$. Кроме того, из подобия треугольников BCE и ABD следует $\frac{a}{l} = \frac{l+DE}{b}$, откуда $ab = l^2 + l \cdot DE$. Заменяя $l \cdot DE$ на mn, получим требуемый результат.

Конечно, это решение короче и изящнее предыдущего, но, чтобы до него додуматься, вероятно, нужно довольно много времени.

Алгебраический метод основан на тех или иных стандартных приемах. Можно выделить две разновидности алгебраического метода:

а) «прямой счет»;

б) «составление уравнений».

Сущность «прямого счета» заключается в следующем. Величины, заданные в условии задачи, и те, которые нужно найти, мы связываем цепочкой промежуточных величин, каждая из которых последовательно определяется через предыдущие.

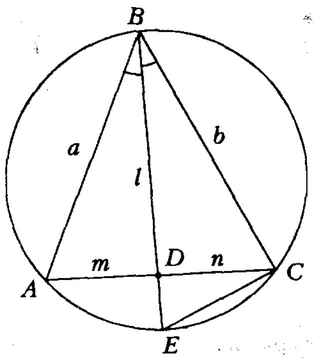


Рис.2

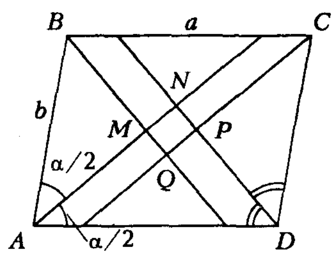


Рис.3

Задача 2. *В параллелограмме со сторонами a и b и углом α проведены биссектрисы четырех углов. Найдите площадь четырехугольника, ограниченного биссектрисами* (рис. 3).

Полезно прежде всего составить план решения задачи, другими словами, выписать цепочку элементов, которые можно последовательно вычислить, соединяющую то, что дано, и то, что нужно найти.

Прежде всего заметим, что $MNPQ$ — параллелограмм. Найдем последовательно $\angle ABC$, $\angle ABM$, $\angle AMB = \angle QMN$. Затем из ΔBCQ (по теореме синусов) найдем BQ, из ΔBMA — BM и AM, из ΔNAD — AN. После этого легко подсчитать MN и QM и искомую площадь $S = QM \cdot MN \cdot \sin\angle QMN$.

Итак, $\angle ABC = 180° - \alpha$, $\angle ABM = \frac{180°-\alpha}{2}$, $\angle AMB = 90° = \angle QMN$, т.е. $MNPQ$ — прямоугольник. $BQ = a\sin\frac{\alpha}{2}$, $BM = b\sin\frac{\alpha}{2}$, $MQ = BQ - BM = (a-b)\sin\frac{\alpha}{2}$ и т.д.

Ответ получается следующий:

$$S = \frac{1}{2}(a-b)^2 \sin\alpha.$$

Приведем теперь пример задачи на «составление уравнений».

Задача 3. *На плоскости дан прямой угол. Окружность с центром внутри угла касается одной стороны угла, пересекает другую сторону в точках A и B и пересекает биссектрису угла в точках C и D;* $AB = \sqrt{6}$, $CD = \sqrt{7}$. *Найдите радиус окружности.*

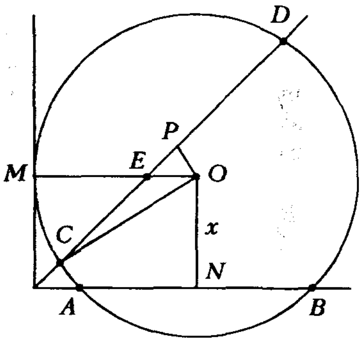


Рис. 4

Пусть O — центр окружности, R — ее радиус, M — точка касания (рис. 4). Расстояние от центра до AB обозначим через x. Сразу можно составить первое уравнение: $R^2 - x^2 = AN^2$.

Проведем $OP \perp CD$,

$$OP = \frac{OE}{\sqrt{2}} = \frac{R-x}{\sqrt{2}}.$$

Теперь можно составить и второе уравнение:

$$R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = CP^2.$$

Воспользуемся тем, что $AN = \frac{\sqrt{6}}{2}$, $CP = \frac{\sqrt{7}}{2}$, и составим систему

$$\begin{cases} R^2 - x^2 = \frac{6}{4}, \\ R^2 - \left(\frac{R-x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{7}{4}. \end{cases}$$

Решая ее, находим $R = \sqrt{2}$.

При решении задач на «составление уравнений» часто нет необходимости в том, чтобы число неизвестных и число уравнений совпадали. Важно, чтобы при составлении уравнений были использованы все соотношения, вытекающие из условия. Если это требование соблюдено, то необходимое неизвестное или комбинация неизвестных должны определяться составленной системой.

Подобная ситуация может встречаться и в задачах на «прямой счет».

Задача 4. *Окружности с радиусами R и r ($R > r$) касаются внутренним образом в точке A. Хорда CD большей окружности перпендикулярна диаметру AB меньшей окружности, E — точка пересечения CD с окружностью радиусом r, точки E и C лежат по одну сторону от AB. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника AEC.*

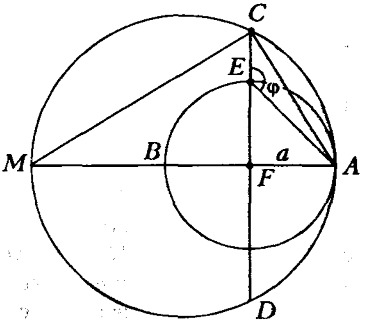


Рис.5

Обозначим $\angle CEA$ через φ и AF через a (рис. 5). Из треугольника CAM получим $AC = \sqrt{2aR}$, аналогично $AE = \sqrt{2ar}$. По теореме синусов из треугольника AEC получаем для искомого радиуса значение $\frac{AC}{2\sin\varphi}$. Значение $\sin\varphi$ легко найти из треугольника FEA.

Ответ: $\sqrt{Rr}$.

Нам пришлось ввести параметры a, φ, так как условием задачи геометрическая конфигурация не определена полностью. Но в ответ эти параметры не входят.

Задача 5. *В прямоугольном треугольнике ABC катет $AB = 3$, катет $AC = 6$. Центры окружностей с радиусами 1, 2 и 3 находятся соответственно в точках A, B и C. Найдите радиус окружности, касающейся каждой из трех данных окружностей внешним образом.*

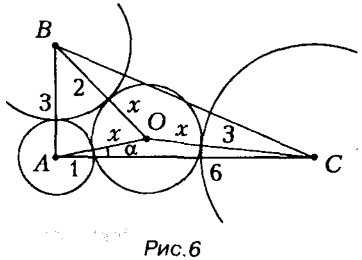


Рис.6

Пусть O — центр искомой окружности, x — ее радиус, $\angle ACO = \alpha$ (рис. 6). Запишем теорему косинусов для треугольников AOC и AOB. Получим систему уравнений

$$\begin{cases}(x+3)^2 = (x+1)^2 + 36 - 12(x+1)\cos\alpha,\\ (x+2)^2 = (x+1)^2 + 9 - 6(x+1)\sin\alpha.\end{cases}$$

Выразив из этих уравнений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ и используя соотношение $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, мы получим уравнение, содержащее лишь одно неизвестное x; решив это уравнение, получим **ответ:** $x = \dfrac{8\sqrt{11} - 19}{7}$.

Заметим, что использование теоремы косинусов для составления уравнений — *один из наиболее часто встречающихся приемов*. Вообще правильный выбор неизвестных играет весьма важную роль при решении геометрических задач. Здесь многое зависит от опыта и интуиции.

Задача 6. *Биссектрисы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O. Известно, что $AO = \sqrt{3}MO$, $NO = (\sqrt{3}-1)BO$. Найдите углы треугольника ABC.*

Введем следующие неизвестные (рис. 7): $BC = x$, $AC = y$, $AB = z$. $\dfrac{MC}{BM} = \dfrac{AC}{AB}$, поэтому $MB = \dfrac{zx}{y+z}$, аналогично $AN = \dfrac{yz}{x+z}$. Теперь, рассмотрев треугольники BMA и BAN с биссектрисами BO и AO, нетрудно получить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{x}{z+y} = \dfrac{1}{\sqrt{3}},\\ \dfrac{y}{x+z} = \sqrt{3} - 1.\end{cases}$$

Далее можно выразить все неизвестные через одно (например, через x) и по теореме косинусов найти углы треугольника — 30°, 60° и 90°. Попытайтесь решить эту задачу, взяв за неизвестные искомые углы, и вы убедитесь, что решение сильно усложняется.

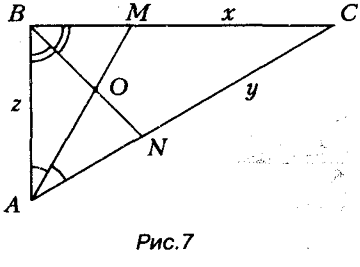


Рис.7

Необходимо отметить тот факт, что большинство задач, решаемых алгебраическим методом, могут иметь два варианта решения — как «прямой счет», так и «составление уравнений», эти способы не взаимоисключают друг друга.

Задача 7. *Внутри острого угла α взята точка A, удаленная от сторон угла на p и q. Найдите расстояние от точки A до вершины угла.*

Пусть M — точка пересечения AC и OB (рис. 8), легко заметить, что $\angle BAM = \alpha$. Теперь находим $MC = q + \frac{p}{\cos\alpha}$, $OC = MC \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{q\cos\alpha + p}{\sin\alpha}$.

Искомое расстояние AO находим из треугольника AOC:

$$AO = \frac{\sqrt{p^2 + 2pq\cos\alpha + q^2}}{\sin\alpha}.$$

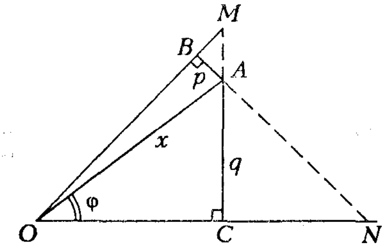


Рис.8

Это — «прямой счет». Между тем нетрудно решить задачу и «составлением уравнений», причем решения обоими путями, пожалуй, не уступают друг другу в рациональности. Итак, «составление уравнений».

Введем неизвестные $\angle AOC = \varphi$, $AO = x$. Рассмотрев треугольники AOB и AOC, составляем систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x\sin\varphi = q, \\ x\sin(\alpha - \varphi) = p. \end{cases}$$

Решите эту систему самостоятельно.

Если еще раз внимательно просмотреть примеры, приведенные в статье, легко заметить, что почти во всех примерах делались некоторые дополнительные построения, использовался ряд геометрических соображений. Итак, решая планиметрическую задачу алгебраическим методом, все же не следует забывать, что это именно планиметрическая задача, а не алгебраическая, т.е. нельзя проходить мимо геометрических соображений, так как они обычно упрощают решение. В противном случае вы можете превратить простейшую геометрическую задачу в более громоздкую алгебраическую, как это случилось, например, при решении следующей задачи с авторами одного пособия для поступающих.

Задача 8. *В равнобочной трапеции $ABCD$ основания $AD = 12$, $BC = 6$, высота трапеции равна 4. Диагональ AC делит угол BAD трапеции на углы BAC и CAD. Какой из этих углов больше?*

Решение этой задачи, предложенное в упомянутом пособии, заключалось в следующем. Пусть $\angle BAC = \alpha$ (рис. 9), $\angle CAD =$

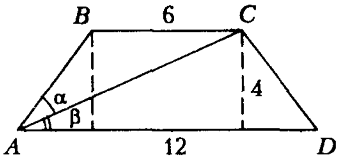


Рис.9

$= \beta$. Сначала можно вычислить $\operatorname{tg}\angle BAD = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, затем $\operatorname{tg}\beta$ и, наконец, применяя тригонометрические формулы, найти $\operatorname{tg}\alpha$. Сравнивая $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$, получим ответ на поставленный в задаче вопрос. Между тем значительно проще заметить, что $\angle BCA = \beta$ и $AB = 5$ (по теореме Пифагора). Из треугольника ABC имеем $\alpha > \beta$, так как в треугольнике против большей стороны лежит большой угол.

Упражнения

1. В равнобедренной трапеции основания равны a и b, а угол диагонали с основанием равен α. Найдите длину отрезка, соединяющего точку пересечения диагоналей с серединой боковой стороны трапеции.

2. В окружности радиусом R через точку M диаметра проведена хорда AB под углом φ к диаметру; при этом $BM : AM = p:q$. Через точку B проведена хорда BC, перпендикулярная к данному диаметру, и точка C соединена с точкой A. Найдите площадь треугольника ABC.

3. В трапеции $ABCD$ углы при большем основании a равны α и β, а высота трапеции h. Пусть O_1, O_2, O_3, O_4 — центры окружностей, описанных соответственно около треугольников ABC, BCD, CDA, DAB. Найдите площадь четырехугольника $O_1O_2O_3O_4$.

4. Окружности с радиусами R и r пересекаются. Проведем к ним общую касательную. Пусть точка A пересечения окружностей и точки касания B и C лежат по разные стороны от линии центров. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке M, а перпендикуляр, опущенный из вершины A на сторону BC, пересекает BC в точке N так, что $BN = NC$ и $AM = 2MD$. Найдите стороны и площадь четырехугольника $ABCD$, если его периметр равен $5+\sqrt{3}$, $\angle BAD = 90^\circ$, $\angle ABC = 60^\circ$.

6. Окружности с радиусами R и r касаются внутренним образом в точке A. Найдите сторону правильного треугольника ABC, вершины B и C которого лежат соответственно на окружностях с радиусами R и r.

7. Прямая l пересекает боковые стороны AB и BC равнобедренного треугольника ABC соответственно в точках M и N. Известно, что $\frac{AM}{BM} = m$, $\frac{CN}{BN} = n$. Найдите отношение, в котором прямая делит высоту треугольника, опущенную из вершины B.

8. В треугольнике ABC ($AB \neq AC$) медианы, проведенные из вершин B и C к сторонам AC и AB соответственно, обратно пропорциональны этим сторонам. Найдите стороны AC и AB треугольника, если $BC = a$, $\angle BAC = \alpha$.

9. Два одинаковых правильных треугольника ABC и CDE со стороной 1 расположены на плоскости так, что имеют только одну общую точку C, и $\angle BCD < \pi/3$. Точка K — середина AC, L — середина CE, M — середина BD. Площадь треугольника KLM равна $\sqrt{3}/5$. Найдите BD.

ПРИНАДЛЕЖНОСТЬ ТОЧЕК ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

С. Овчинников

При решении геометрических задач часто пользуются условием принадлежности точек прямой или плоскости. Применение векторов позволяет записать эти условия в простой и компактной форме. При этом в решении задачи зачастую отпадает необходимость в довольно хитроумных дополнительных построениях.

В этой заметке мы выведем условия принадлежности точек прямой и плоскости, и рассмотрим примеры их применения. Начнем с решения следующей задачи.

Задача 1. *Дан треугольник ABC. На сторонах AB и BC взяты точки M и N соответственно; $AB = 5AM$, $BC = 3BN$. Отрезки AN и CM пересекаются в точке O. Найдите отношение площадей треугольников AOC и ABC.*

Решение (рис. 1). Так как

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{S_{AMC}}{S_{ABC}} \cdot \frac{S_{AOC}}{S_{AMC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{OC}{MC} = \frac{1}{5}\frac{OC}{MC},$$

нам достаточно определить, в каком отношении точка O делит отрезок MC. Проведем ME, $E \in BC$, параллельно AN; тогда $\frac{EN}{BN} = \frac{AM}{AB} = \frac{1}{5}$. Но $BN = \frac{1}{3}BC$, откуда $EN = \frac{1}{15}BC$. Далее,

$$\frac{OC}{MC} = \frac{NC}{EC} = \frac{\frac{2}{3}BC}{\frac{2}{3}BC + \frac{1}{15}BC} = \frac{10}{11}.$$

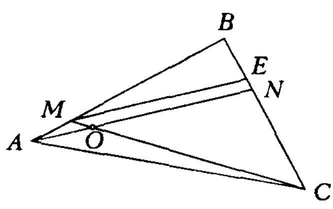


Рис. 1

Значит,

$$\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{10}{11} = \frac{2}{11}.$$

Заметим, что большинство абитуриентов не сумели додуматься до дополнительного построения $ME \parallel AN$ и поэтому не решили эту задачу.

Рассмотрим другое решение, основанное на следующей теореме.

Теорема 1. *При любом выборе точки O равенство*

$$\vec{OC} = \alpha\vec{OA} + (1-\alpha)\vec{OB} \qquad (1)$$

для некоторого числа α *является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B и C* $(A \neq B)$ *одной прямой. При этом* $\vec{BC} = \alpha\vec{BA}$.

Рисунок 2 иллюстрирует теорему 1. Заметим, что значение коэффициента α определяет положение точки на прямой AB. Если $0 \le \alpha \le 1$, то точка C находится между A и B; если $\alpha > 1$, то точка A находится между C и B и, наконец, если $\alpha < 0$, то точка B находится между A и C. Коэффициент α играет роль своеобразной координаты на прямой AB; началом координат служит точка B, а масштаб задается отрезком BA, так что точка A имеет координату единица.

Вернемся к задаче 1, обозначим $\vec{BA} = \vec{p}$ и $\vec{BC} = \vec{q}$. Тогда $\vec{BM} = \frac{4}{5}\vec{p}$ и $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{q}$. Так как точка O принадлежит прямым AN и CM, то

$$\vec{BO} = \alpha_1\vec{BM} + (1-\alpha_1)\vec{BC} = \alpha_2\vec{BA} + (1-\alpha_2)\vec{BN},$$

т.е.

$$\frac{4}{5}\alpha_1\vec{p} + (1-\alpha_1)\vec{q} = \alpha_2\vec{p} + \frac{1}{3}(1-\alpha_2)\vec{q},$$

откуда

$$\begin{cases} \frac{4}{5}\alpha_1 = \alpha_2, \\ 1-\alpha_1 = \frac{1}{3}(1-\alpha_2). \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим $\alpha_1 = \frac{10}{11}$, $\alpha_2 = \frac{8}{11}$. По теореме 1 $\vec{CO} = \alpha_1\vec{CM} = \frac{10}{11}\vec{CM}$, откуда $\frac{CO}{CM} = \frac{10}{11}$ и $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{10}{11} = \frac{2}{11}$.

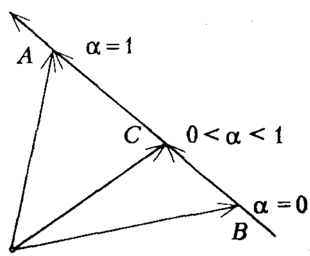


Рис.2

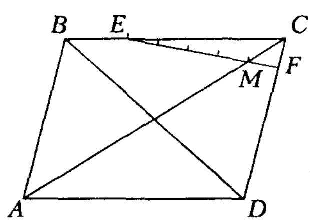


Рис.3

Задача 2. *В параллелограмме $ABCD$ со сторонами $AD = 5$ и $AB = 4$ проведен отрезок EF, соединяющий точку E стороны BC с точкой F стороны CD. Точки E и F выбраны так, что $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{2}$, $\frac{CF}{EF} = \frac{1}{5}$. Известно, что точка M пересечения диагонали AC с отрезком EF делит этот отрезок в отношении $\frac{MF}{ME} = \frac{1}{4}$. Найдите диагонали параллелограмма.*

Решение (рис. 3). Пусть $\vec{CB} = \vec{p}$, $\vec{CD} = \vec{q}$ и $\vec{CF} = x \cdot \vec{q}$. По условию

$$\vec{CM} = \frac{1}{5}\vec{CE} + \frac{4}{5}\vec{CF} = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3}\vec{p} + \frac{4}{5}x\vec{q} = \frac{2}{15}\vec{p} + \frac{4}{5}x\vec{q}.$$

Так как $\vec{CM}$ и $\vec{CA}$ коллинеарны, то $\vec{CM} = k\vec{CA}$. Но $\vec{CA} = \vec{p} + \vec{q}$, откуда

$$\frac{2}{15}\vec{p} + \frac{4}{5}x\vec{q} = k\vec{p} + k\vec{q}.$$

Приравнивая коэффициенты при $\vec{p}$ и $\vec{q}$, получаем $\frac{2}{15} = k$; $\frac{4}{5}x = k$, откуда $x = \frac{1}{6}$. Но $|\vec{CF}| = x|\vec{q}| = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$. Далее, по условию, $|\vec{EF}| = 5|\vec{CF}| = \frac{10}{3}$. Обозначив $\angle BCD$ через φ, из треугольника ECF по теореме косинусов находим $\cos\varphi = \frac{1}{10}$. Зная $\cos\varphi$, вычисляем по теореме косинусов диагонали $AC = \sqrt{45}$ и $BD = \sqrt{37}$.

Задача 3.* *Дан треугольник ABC и точка M на стороне BC. Докажите, что*

$$AM \cdot BC \leq AB \cdot MC + AC \cdot BM.$$

Решение (рис. 4). Имеем $\vec{AM} = \alpha\vec{AB} + (1-\alpha)\vec{AC}$. Так как $\alpha = \frac{MC}{BC}$, то $1 - \alpha = \frac{BM}{BC}$. Далее,

$$|\vec{AM}| = |\alpha\vec{AB} + (1-\alpha)\vec{AC}| \leq$$

$$\leq \alpha|\vec{AB}| + (1-\alpha)|\vec{AC}| =$$

$$= \frac{MC}{BC} \cdot AB + \frac{BM}{BC} \cdot AC,$$

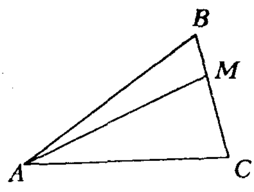


Рис.4

откуда и следует утверждение задачи.

Теорема 1 допускает следующее обобщение на случай пространства.

---

*Эта задача предложена И.Шарыгиным.

Теорема 2. *Пусть A, B и C — попарно различные точки, не лежащие на одной прямой. При любом выборе точки O равенство*

$$\vec{OD} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + (1-\alpha-\beta)\vec{OC}$$

является необходимым и достаточным условием принадлежности точек A, B, C и D одной плоскости.

Доказательство. 1) *Достаточность.* Пусть (2) выполнено. Находим $\vec{OD} - \vec{OC} = \alpha(\vec{OA} - \vec{OC}) + \beta(\vec{OB} - \vec{OC})$, откуда $\vec{CD} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$. Таким образом, векторы $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ и $\vec{CD}$ компланарны и, следовательно, точки A, B, C и D принадлежат одной плоскости.

2) *Необходимость.* Если A, B, C и D принадлежат одной плоскости, то векторы $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ и $\vec{CD}$ компланарны. Так как точки A, B и C попарно различны и не лежат на одной прямой, то векторы $\vec{CA}$ и $\vec{CB}$ неколлинеарны. Но тогда вектор $\vec{CD}$ единственным образом представляется в виде

$$\vec{CD} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB},$$

откуда для любой точки O

$$\vec{OD} - \vec{OC} = \alpha\left(\vec{OA} - \vec{OC}\right) + \beta\left(\vec{OB} - \vec{OC}\right),$$

или

$$\vec{OD} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + (1-\alpha-\beta)\vec{OC}.$$

Теорема 2 позволяет в решении некоторых задач обойтись без дополнительных построений, выполнение которых в пространстве обычно вызывает затруднения.

Задача 4. *Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB и SC правильной четырехугольной пирамиды SABCD с вершиной S отрезки*

$$SK = \frac{2}{3}SA, \quad SL = \frac{1}{2}SB, \quad SM = \frac{1}{3}SC$$

соответственно. Длина бокового ребра пирамиды равна a. Найдите длину отрезка SN, отсекаемого этой плоскостью на ребре SD.

Решение (рис. 5). Пусть $\vec{SA} = \vec{p}$, $\vec{SB} = \vec{q}$ и $\vec{SC} = \vec{r}$. Тогда $\vec{SD} = \vec{SB} + \vec{BD} = \vec{SB} + \vec{BA} + \vec{BC} = \vec{q} + (\vec{p} - \vec{q}) + (\vec{r} - \vec{q}) = \vec{p} - \vec{q} + \vec{r}$. Имеем

$$\vec{SN} = k\vec{SD} = k(\vec{p} - \vec{q} + \vec{r}).$$

Далее

$$\vec{SK} = \frac{2}{3}\vec{p},\ \vec{SL} = \frac{1}{2}\vec{q} \text{ и } \vec{SM} = \frac{1}{3}\vec{r}.$$

Так как точки K, L, M и N принадлежат одной плоскости, то по теореме 2

$$\vec{SN} = \alpha\vec{SK} + \beta\vec{SL} + (1-\alpha-\beta)\vec{SM} = \frac{2}{3}\alpha\vec{p} + \frac{1}{2}\beta\vec{q} + \frac{1}{3}(1-\alpha-\beta)\vec{r}.$$

Мы получили два разложения вектора $\vec{SN}$ по некомпланарным векторам $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{r}$. Приравнивая коэффициенты этих разложений, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} k = \frac{2}{3}\alpha, \\ -k = \frac{1}{2}\beta, \\ k = \frac{1}{3}(1-\alpha-\beta). \end{cases}$$

Из этой системы находим $k = \frac{2}{5}$, откуда

$$|\vec{SN}| = \frac{2}{3}a.$$

Мы, по существу, здесь не использовали условия правильности пирамиды $SABCD$. (Какое на самом деле использовалось свойство правильной пирамиды?) Предлагаем читателю самостоятельно решить эту задачу, не опираясь на теорему 2.

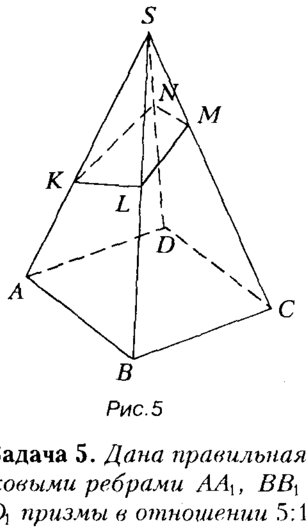


Рис.5

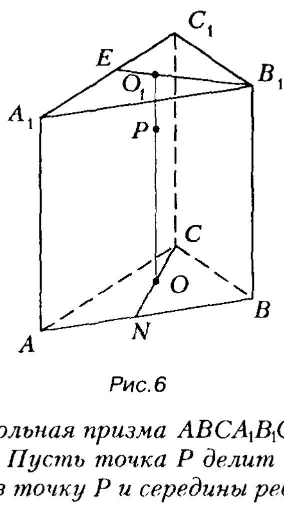


Рис.6

Задача 5. *Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5:1. Через точку P и середины ребер*

AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

Решение (рис. 6). Пусть N и E — середины ребер AB и A_1C_1. Обозначим $\vec{AB} = \vec{p}$, $\vec{AC} = \vec{q}$ и $\vec{AA_1} = \vec{r}$. Тогда

$$\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{p},\ \vec{AE} = \vec{r} + \frac{1}{2}\vec{q} \text{ и } \vec{AP} = \frac{1}{3}(\vec{p} + \vec{q}) + \frac{5}{6}\vec{r}.$$

Пусть X — произвольная точка секущей плоскости. Тогда

$$\vec{AX} = \alpha\vec{AP} + \beta\vec{AE} + (1-\alpha-\beta)\vec{AN} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2}\right)\vec{p} + \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2}\right)\vec{q} + \left(\frac{5}{6}\alpha + \beta\right)\vec{r}. \quad (3)$$

Для построения сечения выясним, в каких точках секущая плоскость пересекает ребра призмы.

1) Ребро AA_1. Пусть $X = L$ — точка пересечения секущей плоскости с ребром AA_1. Имеем $\vec{AL} = k\vec{r}$. Но в то же время справедливо разложение (3), откуда имеем

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{5}{6}\alpha + \beta = k. \end{cases}$$

Решая эту **систему,** находим $k = -\frac{1}{2}$. **Таким образом,**

$$AL = \frac{1}{2}AA_1.$$

2) Ребро AC. Пусть $X = F$ — точка пересечения ребра AC и секущей плоскости. Тогда $\vec{AP} = k\vec{q}$. Сравнивая с (3), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = k, \\ \frac{5}{6}\alpha + \beta = 0, \end{cases}$$

откуда

$$k = \frac{1}{6} \text{ и } AF = \frac{1}{6}AC.$$

3) Ребро BB_1. Положим $X = D$. Тогда $\vec{AD} = \vec{p} + k\vec{r}$. Сравнивая с (3), получаем систему

$$\begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2} = 1, \\ \frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} = 0, \\ \frac{5}{6}\alpha + \beta = k, \end{cases}$$

откуда $k = \frac{1}{2}$ и $BD = B_1D = \frac{1}{2}BB_1$. Рассматривая аналогично ребра C_1B_1 и A_1B_1, находим $B_1K = \frac{1}{4}C_1B_1$ и $B_1M = \frac{1}{2}A_1B_1$.

Итак, сечение полностью определено (рис. 7). Вычислим объем многогранника A_1EKB_1DNAF. Для этого надо из объема пирамиды LA_1EM вычесть объемы пирамид $LAFN$ и DB_1KM. Пусть V — объем призмы. Из предыдущих вычислений нам известны соотношения между высотами LA_1, DB_1, LA пирамид LA_1EM, $LAFN$, DB_1KM и высотой призмы, а также соотношения между площадями оснований. Это позволяет легко найти, что $V_{LA_1EM} = \frac{3}{8}V$, $V_{LAFN} = \frac{1}{72}V$ и $V_{MKB_1D} = \frac{1}{48}V$, откуда объем многогранника A_1EKB_1DNAF равен $\frac{3}{8}V - \frac{1}{72}V - \frac{1}{48}V = \frac{49}{144}V$. Итак, секущая плоскость делит объем призмы в отношении 49:95.

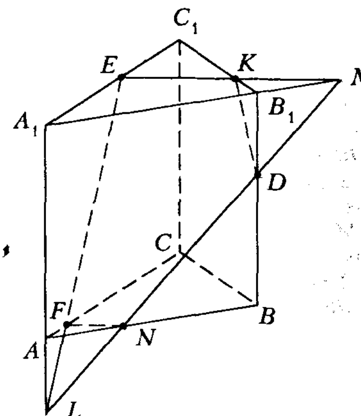


Рис.7

Заметим, во-первых, что в нашем решении нигде не использовалось условие, что призма правильная. Во-вторых, наш метод решения пригоден и в том случае, когда точки E и N не являются серединами ребер A_1C_1 и AB, тогда как решение с дополнительными построениями это обстоятельство существенно использует (прямая EP пересекает BB_1 в точке D потому, что $A_1F = EC_1$).

Внимательный читатель, наверное, заметил, сравнивая теоремы 1 и 2, что в теореме 1 коэффициенту α было дано простое геометрическое истолкование, тогда как геометрический смысл коэффициентов α и β в теореме 2 остается неясным. Мы восполним этот пробел в одном важном частном случае, оставляя обобщение читателю.

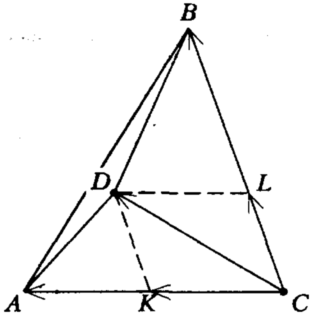


Рис.8

Теорема 3. *Если в условиях теоремы 2 точка D лежит в треугольнике ABC, то из равенства*

$$\vec{OD} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + (1-\alpha-\beta)\vec{OC}$$

следует

$$\begin{cases} \alpha = S_{BDC}:S_{ABC}, \\ \beta = S_{ADC}:S_{ABC}, \\ 1-\alpha-\beta = S_{ADB}:S_{ABC}. \end{cases}$$

Доказательство (рис. 8). Как следует из доказательства теоремы 2, $\vec{CD} = \alpha\vec{CA} + \beta\vec{CB}$. Положим $\vec{CK} = \alpha\vec{CA}$, $\vec{CL} = \beta\vec{CB}$. Из рисунка 8 видно, что $S_{ADC}:S_{ABC} = \beta$ и $S_{BDC}:S_{ABC} = \alpha$. Из этих равенств легко вытекает, что $S_{ADB}:S_{ABC} = 1 - \alpha - \beta$.

Упражнения

1. Точка K делит медиану AD треугольника ABC в отношении 3:1, считая от вершины. В каком отношении прямая BK делит площадь треугольника ABC?

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $PABCD$ с вершиной P. На ребрах PA и PC взяты точки K и M соответственно, причем $AK:KP = 1:3$, $CM = PM$. Найдите отношение, в котором делится ребро PB плоскостью, проведенной через точки D, K и M.

3. Плоскость проходит через вершину A основания треугольной пирамиды $SABC$, делит пополам медиану SK треугольника SAB, а медиану SL треугольника SAC пересекает в точке D такой, что $SD = \frac{1}{2}DL$. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

4. В параллелограмме $ABCD$ с диагоналями, равными $AC = 6$ и $BD = 24$, проведен отрезок EF, соединяющий точку E диагонали AC с точкой F стороны BC. Точки E и F выбраны таким образом, что $\frac{FC}{BF} = \frac{1}{2}$, $\frac{EA}{EF} = \frac{1}{3}$. Известно, что точка M пересечения диагонали BD с отрезком EF делит его в отношении $\frac{EM}{MF} = \frac{1}{2}$. Найдите стороны параллелограмма.

5. Дан треугольник ABC. На стороне AB взята точка D, а на стороне BC — точки E и F так, что $AD:DB = 3:2$, $BE:EC = 1:3$ и $BF:FC = 4:1$. В каком отношении прямая AE делит отрезок DF?

6. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит объем куба плоскость, проходящая через вершину A, середину ребра BC и центр грани DCC_1D_1?

7. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через середины ребер AB, AD и CS проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

8. Внутри треугольника ABC взята точка O. Прямые AO, BO и CO пересекают стороны BC, CA и AB соответственно в точках P, Q и R. Докажите, что

$$\frac{AR}{RB}\cdot\frac{BP}{PC}\cdot\frac{CQ}{QA}=1.$$

9. Точки P и Q делят стороны BC и CA треугольника ABC в данных отношениях:

$$\frac{BP}{PC}=a,\ \frac{CQ}{QA}=b.$$

Пусть O — точка пересечения прямых AP и BQ. Найдите отношение площади четырехугольника $OPCQ$ к площади треугольника ABC.

10. Пусть $OABC$ — треугольная пирамида с вершиной O, а M — точка внутри треугольника ABC. Докажите, что тогда

$$OM\cdot S_{ABC}\le OA\cdot S_{MBC}+OB\cdot S_{MAC}+OC\cdot S_{MAB}.$$

...Иль треугольник в поле полукружья,
Но не прямоугольный начертить.

Данте. «Божественная комедия». Рай.

ОБ УГЛАХ И ОКРУЖНОСТЯХ

В.Уроев, М.Шабунин

Треугольник, о котором пишет Данте, построить нельзя (рис. 1). Этот факт автор бессмертной поэмы приводит наряду с другими научными истинами, которые, видимо, считались общеизвестными в кругу образованных современников. Здесь уместно напомнить годы жизни великого Данте Алигьери — 1265—1321, а также заметить, что математикой Данте не занимался и вошел в историю как поэт и философ, создатель итальянского литературного языка.

В нашей статье пойдет речь как о треугольниках, вписанных «в поле полукружья», так и о других конфигурациях, для изучения которых необходима

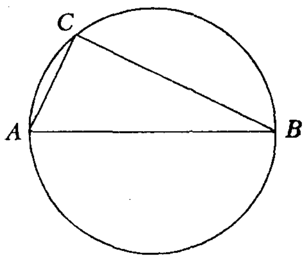


Рис.1

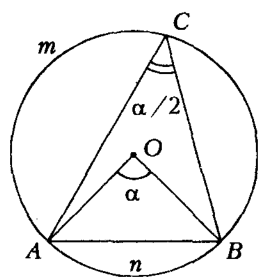


Рис.2

Теорема 1 (о вписанном угле). *Вписанный угол равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.*

Часто пользуются эквивалентной формулировкой теоремы 1: *Пусть* α *— центральный угол, опирающийся на дугу AnB данной окружности* (рис. 2). *Тогда из точек, принадлежащих дуге AmB, хорда AB видна под углом* $\alpha/2$.

Заметим, что в силу этой теоремы угол, опирающийся на диаметр — прямой, поэтому вписанный «в поле полукружья» треугольник обязательно прямоугольный. Этим удобно воспользоваться, например, в следующей задаче.

Задача 1. *На отрезке AB как на диаметре построена окружность C_1, BD — ее хорда. Окружность C_2 касается C_1 в точке A и отрезка BD в точке K. Докажите, что AK — биссектриса угла DAB* (рис. 3).

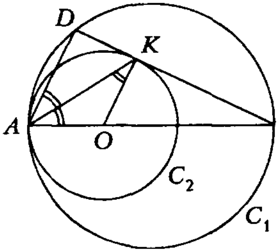


Рис.3

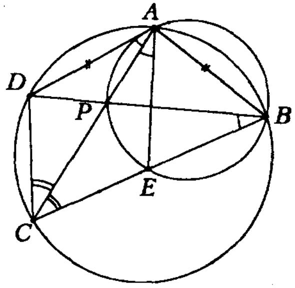


Рис.4

Решение. Центр O окружности C_2 лежит на диаметре AB окружности C_1. Радиус OK, проведенный в точку касания, перпендикулярен BD. Угол ADB прямой, так как опирается на диаметр, поэтому отрезки AD и OK параллельны, а углы DAK и AKO равны как накрест лежащие. В равнобедренном треугольнике AOK углы AKO и KAO равны, следовательно, AK делит угол DAB пополам.

Однако чаще приходится пользоваться простым следствием теоремы 1:

Углы, вписанные в окружность и опирающиеся на одну и ту же дугу или на равные дуги, равны.

Общий принцип подхода к решению задач, в которых участвуют окружности, такой: искать всевозможные вписанные углы, для чего проводить различные хорды. Чем больше найдем равных вписанных углов, тем яснее будет виден путь, ведущий к решению.

Задача 2. *В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, через вершины A, B и точку P пересечения диагоналей проведена окружность, пересекающая сторону BC в точке E. Докажите, что если $AB = AD$, то $CD = CE$* (рис. 4).

Решение. Проведем хорду AE и найдем равные вписанные углы. Такими углами в одной окружности будут DAC и DBC, а в другой — PAE и PBE. Следовательно, $\angle DAC = \angle CAE$. Кроме того, равны опирающиеся на равные дуги углы DCA и ACB.

Отсюда следует равенство треугольников DCA и ECA и, соответственно, их сторон DC и EC.

Упражнение 1. Докажите следующую теорему о хордах. Пусть хорды AB и CD данной окружности пересекаются в точке M. Тогда $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. (Это произведение, не зависящее от выбора хорды, называется степенью точки M относительно данной окружности.)

Часто оказывается полезной формула для величины угла с вершиной вне или внутри окружности.

Упражнение 2. а) Пусть угол с вершиной A, лежащей вне окружности, высекает на ней дуги BmC и DnE (рис. 5). Докажите, что в этом случае величина угла равна половине разности центральных углов, опирающихся на эти дуги, т.е. $\angle DAE = \frac{1}{2}(\angle DOE - \angle BOC)$.

б) Самостоятельно сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для угла с вершиной внутри окружности.

Теорема 1 доказывается в школьном курсе. Нам потребуется существенно более общая теорема.

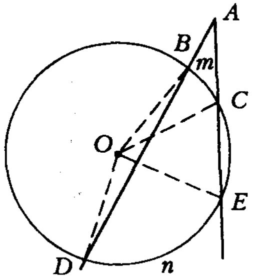


Рис.5

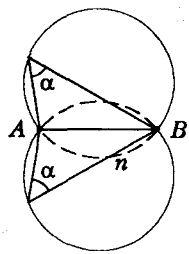


Рис.6

Теорема 2. *Геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под некоторым углом α, состоит из двух дуг окружностей, симметричных друг другу* (рис. 6).

Доказательство. То, что из любой точки, лежащей на одной из дуг, отрезок AB виден под углом α, вытекает из теоремы 1. Надо доказать *обратное* утверждение, т.е. что *любая* такая точка лежит на одной из дуг. Но это следует из упражнения 2. В самом деле, если точка C лежит вне фигуры, ограниченной дугами, то $\angle ACB < \alpha$, а если внутри, то $\angle ACB > \alpha$. Теорема доказана.

Теорема 2 часто используется в задачах на построение.

Упражнение 3. Постройте треугольник

а) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней высоте;

б) по углу, противолежащей стороне и проведенной к ней медиане.

Задача 3. *Точка C движется по дуге окружности S, стягиваемой хордой AB. Найдите траекторию движения точки P, являющейся центром вписанной в треугольник ABC окружности.*

Решение. Точка P лежит на пересечении биссектрис треугольника ABC (рис. 7). Следовательно, из треугольника ABP получим следующие соотношения:

$$\angle APB = 180° - \left(\frac{1}{2}\angle CAB + \frac{1}{2}\angle CBA\right) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle ACB) = 90° + \frac{1}{2}\angle ACB.$$

Величина угла ACB не меняется (по теореме 1), поэтому величина угла APB также постоянна. В таком случае, согласно теореме 2, точка P целиком пробегает дугу окружности, проходящей через точки A и P. Позже будет установлено, что центром этой окружности является точка Q — середина дуги AB.

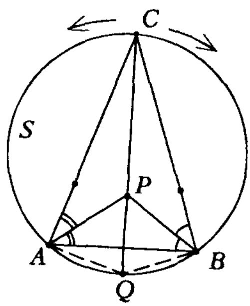


Рис.7

Теорема 2 позволяет выяснить, принадлежит ли какое-либо множество точек одной окружности.

Из теоремы 2, в частности, вытекает важное следствие:

Вершина прямоугольного треугольника лежит на окружности, построенной на его гипотенузе как на диаметре.

Упражнения

4. Диаметры AB и CD окружности радиусом R пересекаются под углом α. Из произвольной точки M окружности на эти диаметры опущены перпендикуляры MP и MQ. Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от выбора точки M, и найдите PQ.

5. Вершины A и B острых углов прямоугольного треугольника ABC скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым. Найдите траекторию движения вершины C прямого угла.

В следующих двух упражнениях следует воспользоваться тем, что основания высот BD и CE треугольника ABC лежат на окружности, построенной на стороне BC как на диаметре.

Упражнения

6. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BD и CE. Из вершин B и C на прямую ED опущены перпендикуляры BF и CG. Докажите, что $EF = DG$.

7. Докажите, что высоты треугольника ABC являются биссектрисами треугольника DEK, образованного основаниями высот треугольника ABC.

Задача 4. *На сторонах четырехугольника как на диаметрах построены четыре круга. Докажите, что они покрывают весь четырехугольник.*

Решение. Если бы внутри четырехугольника нашлась точка, не принадлежащая ни одному из четырех кругов, то каждая сторона была бы видна из этой точки под острым углом. А это невозможно, так как сумма всех четырех углов равна 360°.

Следствием теорем 1 и 2 является следующий признак вписанного четырехугольника:

Четырехугольник можно вписать в окружность тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

Задача 5. *Три окружности проходят через точку P и попарно пересекаются в точках A, B и C. Из произвольной точки M первой окружности через точки B и C проводятся прямые, пересекающиеся с другими окружностями в точках S и T* (рис. 8). *Докажите, что отрезок ST проходит через точку A.*

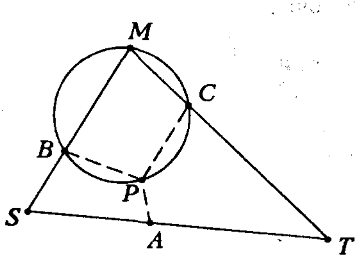


Рис.8

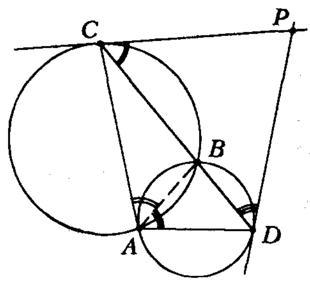


Рис.9

Решение. Из свойств вписанных четырехугольников $MBPC$, $BPAS$, $CPAT$ вытекают следующие соотношения:

$$\angle BPC = 180° - \angle M\,,\ \angle BPA = 180° - \angle S\,,\ \angle CPA = 180° - \angle T\,.$$

Суммируя полученные равенства, получаем

$$360° = \angle BPC + \angle BPA + \angle CPA = 180° \cdot 3 - (\angle M + \angle S + \angle T)\,,$$

откуда $\angle M + \angle S + \angle T = 180°$. Следовательно, четырехугольник $MSAT$ является треугольником, т.е. угол SAT — развернутый.

Для решения следующей задачи недостаточно знать, когда четырехугольник является вписанным. Нужна еще чрезвычайно полезная

Теорема 3. *Угол между хордой и касательной измеряется половиной заключенной между ними дуги.*

Упражнение 8. Докажите теорему 3.

Задача 6. *Две окружности пересекаются в точках A и B. Через точку B проводится прямая, пересекающая окружности в точках C и D, а затем через точки C и D проводятся касательные к этим окружностям* (рис. 9). *Докажите, что точки A, C, D и точка P пересечения касательных лежат на одной окружности.*

Решение. Проведем хорду AB и заметим, что, согласно теоремам 1 и 3, следующие углы попарно равны:

$$\angle BAD=\angle BDP,\ \angle CAB=\angle BCP,$$

откуда

$$\angle CAD=\angle BAD+\angle CAB=\angle BDP+\angle BCP = 180^\circ - \angle CPD.$$

Таким образом, выполняется критерий существования описанной окружности.

Упражнения

9. Прямые l_1 и l_2 касаются окружности в точках A и B. Точка M окружности удалена от прямых l_1 и l_2 на расстояния a и b соответственно. Докажите, что M находится на расстоянии $\sqrt{ab}$ от прямой AB.

10. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке D. Прямая касается одной из этих окружностей в точке A и пересекает другую в точках B и C. Докажите, что точка A равноудалена от прямых BD и CD.

11. Докажите теорему о касательной и секущей. Пусть прямая AP касается данной окружности в точке P, а прямая AB пересекает эту окружность в точках B и C. Тогда $AP^2 = AB\cdot AC$ (это произведение, не зависящее от выбора секущей, называется индексом точки относительно окружности; сравните с упражнением 1).

12. Докажите, что центр окружности, по которой вынуждена двигаться точка P в задаче 3, является серединой Q дуги AB (рис. 7).

Задача 7. *Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точках A и B, центр O окружности S_1 лежит на окружности S_2. Хорда AC окружности S_1 пересекает окружность S_2 в точке D* (рис. 10). *Докажите, что отрезки OD и BC перпендикулярны.*

Решение. Углы BAD и BOD равны как вписанные в окружность S_2, $\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$ как вписанный и центральный углы в окружности S_1. Следовательно, $\angle BOD=\angle BAD=\frac{1}{2}\angle BOC$, поэтому OD — биссектриса угла BOC. В равнобедренном треугольнике BOC биссектриса является высотой.

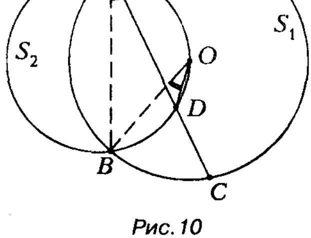


Рис. 10

ВЕКТОРЫ ПОМОГАЮТ НА ЭКЗАМЕНЕ

И. Габович

I основное соотношение. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $AD{:}DC = m{:}n$. Тогда*

$$\vec{BD} = \frac{n}{m+n}\vec{BA} + \frac{m}{m+n}\vec{BC}. \qquad (1)$$

Доказательство. Имеем (рис. 1)

$$\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA},$$

$$\vec{AD} = \frac{m}{m+n}\vec{AC} = \frac{m}{m+n}\vec{BC} - \frac{m}{m+n}\vec{BA},$$

$$\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BA} + \frac{m}{m+n}\vec{BC} - \frac{m}{m+n}\vec{BA} = \frac{n}{m+n}\vec{BA} + \frac{m}{m+n}\vec{BC}.$$

Задача 1. *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $KA{:}AL = 1{:}3$, на стороне LM взята точка B так,*

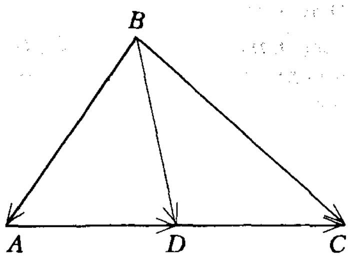


Рис. 1

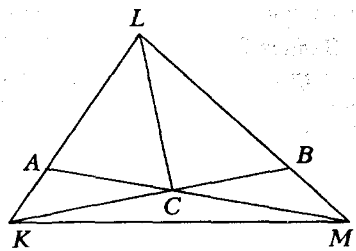


Рис. 2

что $LB{:}BM = 4{:}1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найдите площадь треугольника KLM.

Решение. Положим $S_{\Delta KLB} = S$. Тогда (рис. 2), очевидно, $S_{\Delta KLM} = \frac{4}{5}S$. Введем векторы $\vec{KL}$ и $\vec{KM}$. На основании (1) имеем

$$\vec{KB} = \frac{1}{5}\vec{KL} + \frac{4}{5}\vec{KM}.$$

Пусть $\vec{KC} = x\vec{KB}$, где $0 < x < 1$. Тогда

$$\vec{KC} = \frac{x}{5}\vec{KL} + \frac{4x}{5}\vec{KM}. \qquad (2)$$

Пусть $AC:CM = m:n$. Тогда из треугольника AKM по той же формуле (1) имеем

$$\vec{KC} = \frac{n}{m+n}\vec{KA} + \frac{m}{m+n}\vec{KM} = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{1}{4}\vec{KL} + \frac{m}{m+n}\vec{KM}. \qquad (3)$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам из (2) и (3) получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{n}{4(m+n)}, \\ \dfrac{4x}{5} = \dfrac{m}{m+n}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{4x}{5} = \dfrac{n}{m+n}, \\ \dfrac{4x}{5} = \dfrac{m}{m+n}. \end{cases}$$

Сложив по частям уравнения последней системы, получаем $\frac{8x}{5} = 1$ или $x = \frac{5}{8}$.

Так как треугольники KLB и KLC имеют общую высоту, то

$$S_{\Delta KLC} = \frac{5}{8}S_{\Delta KLB} = \frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}S = \frac{1}{2}S.$$

Но, по условию, $S_{\Delta KLC} = 2$, следовательно $S = S_{\Delta KLM} = 4$.

II основное соотношение. *Если точки M и N делят отрезки AB и CD соответственно в равных отношениях, т.е.*

$$AM:MB = CN:ND = m:n,$$

то выполняется равенство

$$\vec{MN} = \frac{n}{m+n}\vec{AC} + \frac{m}{m+n}\vec{BD}. \quad (4)$$

(Заметим, что отрезки AB и CD произвольны; например, они могут лежать на скрещивающихся прямых.)

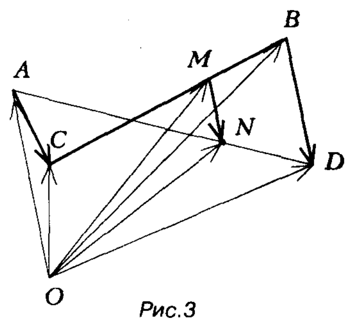


Рис.3

Доказательство. Пусть O — точка, не принадлежащая ни отрезку AB, ни отрезку CD (рис. 3). Соединим точку O с точками A, M, B, C, N и D.

Рассмотрим векторы $\vec{OA}$, $\vec{OM}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, $\vec{ON}$ и $\vec{OD}$.

Имеем по формуле (1)

$$\vec{OM} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB},$$

$$\vec{ON} = \frac{n}{m+n}\vec{OC} + \frac{m}{m+n}\vec{OD},$$

откуда

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{n}{m+n}\left(\vec{OC} - \vec{OA}\right) +$$

$$+\frac{m}{m+n}\left(\vec{OD} - \vec{OB}\right) = \frac{n}{m+n}\vec{AC} + \frac{n}{m+n}\vec{BD}.$$

Задача 2. *Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.*

1) *Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $AM:AD_1 = 2:3$. Найдите его длину.*

2) *Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.*

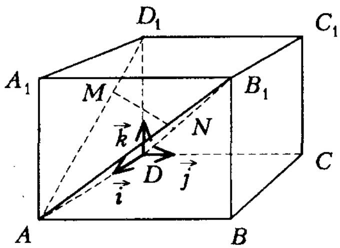


Рис.4

Решение (рис. 4). Рассмотрим плоскость, проходящую через M параллельно плоскостям граней ABB_1A_1, DCC_1D_1. Первая плоскость пересекает, очевидно, отрезок B_1D в точке N и делит отрезки AD_1 и B_1D, соединяющие вторую и третью плоскости в одинаковом отношении. (Докажите это самостоятельно.)

Значит, $B_1N:ND = AM:MD_1 = 2:1$. Применяя II основное соотношение (4), получим

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}\vec{D_1D} + \frac{1}{3}\vec{AB_1}.$$

Введем прямоугольный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, как показано на рисунке 4. Тогда

$$\vec{D_1D} = -a\vec{k},\ \vec{AB_1} = 2a\vec{j} + a\vec{k}.$$

Таким образом,

$$\vec{MN} = \frac{2}{3}\left(-a\vec{k}\right) + \frac{1}{3}\left(2a\vec{j} + a\vec{k}\right) = \frac{2}{3}a\vec{j} - \frac{1}{3}a\vec{k},$$

$$\vec{MN}^2 = \frac{4}{9}a^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{5a^2}{9},$$

откуда

$$MN = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Ответим теперь на второй вопрос задачи. **Пусть $D_1M{:}MA = p$.** Тогда

$$\vec{MN} = \frac{1}{p+1}\vec{D_1D} + \frac{p}{p+1}\vec{AB_1} =$$

$$= -\frac{a}{p+1}\vec{k} + \frac{2ap}{p+1}\vec{j} + \frac{ap}{p+1}\vec{k} = \frac{2ap}{p+1}\vec{j} + \frac{a(p-1)}{p+1}\vec{k},$$

$$\vec{MN}^2 = \frac{4a^2p^2}{(p+1)^2} + \frac{a^2(p-1)^2}{(p+1)^2} = \frac{a^2\left(5p^2-2p+1\right)}{(p+1)^2}.$$

Очевидно, MN будет иметь наименьшее значение **при том** значении p, при котором его достигает функция

$$y = \frac{5p^2-2p+1}{(p+1)^2}.$$

Читатель легко проверит (пользуясь производной), что это будет при $p = \dfrac{1}{3}$. Подставляя это значение в последнее выражение для $\vec{MN}^2$ и извлекая корень, находим искомое минимальное расстояние: $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

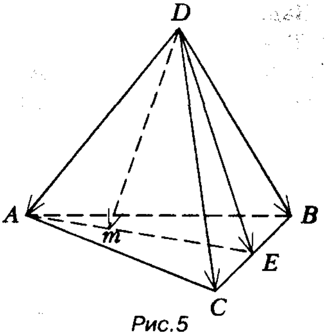


Рис.5

III основное соотношение. *Дан тетраэдр $ABCD$ и в плоскости его грани ABC точка M. Тогда для разложения*

$$\vec{DM} = \alpha\vec{DA} + \beta\vec{DB} + \gamma\vec{DC}$$

выполняется равенство

$$\alpha + \beta + \gamma = 1. \qquad (5)$$

Доказательство. Допустим, что точка M лежит внутри треугольника ABC (рис. 5). Проведем через точки A и M прямую, которая пересекает сторону BC в точке E. Пусть точка E делит сторону BC в отношении $m{:}n$, т.е. $BE{:}EC = m{:}n$. Тогда по формуле (1)

$$\vec{DE} = \frac{m}{m+n}\vec{DC} + \frac{n}{m+n}\vec{DB}.$$

Пусть, далее, точка M делит отрезок AE в отношении $p{:}q$, т.е.

$AM:ME = p:q$. Тогда

$$\vec{DM} = \frac{p}{p+q}\vec{DE} + \frac{q}{p+q}\vec{DA} = \frac{p}{p+q}\left(\frac{m}{m+n}\vec{DC} + \frac{n}{m+n}\vec{DB}\right) +$$

$$+\frac{q}{p+q}\vec{DA} = \frac{q}{p+q}\vec{DA} + \frac{p}{p+q}\cdot\frac{n}{m+n}\vec{DB} + \frac{p}{p+q}\cdot\frac{m}{m+n}\vec{DC}.$$

Итак, вектор $\vec{DM}$ разложен по векторам $\vec{DA}$, $\vec{DB}$ и $\vec{DC}$. Непосредственный подсчет суммы коэффициентов в этом разложении дает

$$\frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q}\cdot\frac{n}{m+n} + \frac{p}{p+q}\cdot\frac{m}{m+n} = \frac{q}{p+q} + \frac{p}{p+q} = 1,$$

что и требовалось. Остальные случаи (точка M лежит вне треугольника ABC или на одной из его сторон) аналогичны и мы их опускаем.

Задача 3. *Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найдите длину этого отрезка.*

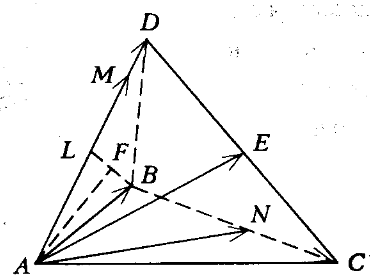


Рис.2

Решение. Введем векторы $\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AD} = \vec{d}$ (рис. 6). Заметим, что $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}| = a$ и углы между парами векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, $\vec{d}$ и $\vec{b}$ равны $\frac{\pi}{3}$. Так как E — середина ребра DC, то

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}). \qquad (6)$$

Аналогично,

$$\vec{AF} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{AL}),$$

но $\vec{AL} = \frac{1}{2}\vec{d}$, поэтому

$$\vec{AF} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d}. \qquad (7)$$

Далее,

$$\vec{EF} = \vec{AF} - \vec{AE} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{d} - \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{d}. \qquad (8)$$

Пусть

$$\vec{AM} = m\vec{d}, \ \vec{BN} = n\vec{BC}, \qquad (9)$$

где $0 < m < 1$ и $0 < n < 1$. Из последнего равенства сразу следует

$$BN : NC = n : (1 - n).$$

Тогда, на основании (1),

$$\vec{AN} = n\vec{c}(1 - n)\vec{b}. \qquad (10)$$

Далее, $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM}$, откуда

$$\vec{MN} = n\vec{c} + (1 - n)\vec{b} - m\vec{d}. \qquad (11)$$

Так как, по условию, отрезки EF и MN перпендикулярны, то $\vec{EF} \cdot \vec{MN} = 0$, или

$$\left(\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{4}\vec{d}\right)\left((1 - n)\vec{b} + n\vec{c} - m\vec{d}\right) = 0.$$

Учитывая сделанное выше замечание относительно модулей векторов $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ и углов между ними, раскроем скобки в левой части этого равенства. Получим

$$2m - 4n + 1 = 0. \qquad (12)$$

В силу III основного соотношения

$$\vec{AN} = \alpha\vec{AF} + \beta\vec{AE} + \gamma\vec{AM}, \qquad (13)$$

причем $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Подставим в (13) вместо $\vec{AF}$, $\vec{AE}$ и $\vec{AM}$ их выражения через $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$, т.е. (7), (6), (9):

$$\vec{AN} = \frac{\alpha}{2}\left(\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{d}\right) + \frac{\beta}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) + \gamma m\vec{d} = \frac{\alpha}{2}\vec{b} + \frac{\beta}{2}\vec{c} + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma m\right)\vec{d}.$$

В силу единственности разложения вектора по трем данным неколлениарным векторам ($\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$) отсюда и из (10) получаем систему

$$\frac{\alpha}{2}=1-n;\ \frac{\beta}{2}=n;\ \frac{\alpha}{4}+\frac{\beta}{2}+\gamma m=0,$$

решая которую получаем

$$\alpha=2-2n,\ \beta=2n,\ \gamma=-\frac{1+n}{2m}.$$

Пользуясь соотношением $\alpha+\beta+\gamma=1$, получим отсюда

$$2m-n-1=0.$$

Решая это уравнение совместно с (12), найдем $n=\frac{2}{3}$ и $m=\frac{5}{6}$.

Осталось подставить эти значения в выражение (10) для $\vec{MN}$; получим

$$\vec{MN}=\frac{2}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{d};$$

после несложного вычисления найдем $MN=\frac{a\sqrt{23}}{6}$.

IV основное соотношение. *Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC и O — произвольная точка пространства, то выполняется равенство:*

$$\vec{OM}=\frac{1}{3}\left(\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OC}\right).$$

Задача 4. *Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Докажите, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого треугольника равна $2a^2$.*

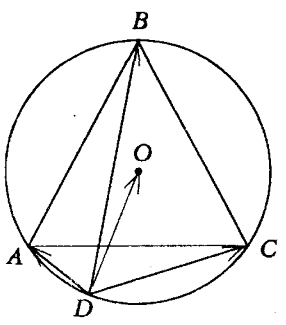


Рис.7

Решение. Пусть D — произвольная точка окружности (рис. 7). Положим $DA=x$; $DB=y$; $DC=z$.

Тогда по теореме косинусов имеем:

из ΔADB: $a^2 = x^2 + y^2 - xy$,

из ΔBDC: $a^2 = y^2 + z^2 - yz$,

из ΔADC: $a^2 = x^2 + z^2 + xz$.

Сложив по частям эти равенства, получаем

$$3a^2 = 2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - xy - yz + zx. \qquad (14)$$

В силу IV основного соотношения

$$\vec{DO} = \frac{1}{3}\left(\vec{DA} + \vec{DB} + \vec{DC}\right),$$

где O — центр окружности.

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получаем

$$|\vec{DO}|^2 = \frac{1}{9}\left(\vec{DA}^2 + \vec{DB}^2 + \vec{DC}^2 + 2\vec{DA}\cdot\vec{DB} + 2\vec{DB}\cdot\vec{DC} + 2\vec{DC}\cdot\vec{DA}\right).$$

Так как DO — радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, то $|\vec{DO}|^2 = DO^2 = \frac{1}{3}a^2$.

Поэтому

$$\frac{a^2}{3} = \frac{1}{9}\left(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx\right)$$

или

$$3a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx.$$

Сложив это равенство по частям с (14), получим

$$6a^2 = 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right),$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

Читатель может спросить: имеет ли он право пользоваться «основными соотношениями» при решении экзаменационных задач? Разумеется — да! Однако при этом для соотношений I — III *необходимо привести вывод используемого соотношения* в экзаменационной работе.

Чтобы привыкнуть к самостоятельному применению основных соотношений, рекомендуем решить нижеследующие упражнения. Из них 1 — 2 решаются с помощью I, 3 — 4 с помощью II, 5 — 6 с помощью III.

Упражнения

1. В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении $BD:CD = 2:1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

2. Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найдите площадь четырехугольника $QMCD$.

3. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $BM:BC_1 = 1:3$. Найдите его длину.

2) Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4. Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные плоскости SAD. Найдите наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

5. В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $4a$, длина бокового ребра равна a. Точки D и E — середины ребер A_1B_1 и BC соответственно. Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен к ней. Найдите длину этого отрезка.

6. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен к ней. Найдите длину этого отрезка.

ЗАМЕНИМ ФИГУРУ

М. Крайзман

Общеизвестно, что метод замены переменной широко применяется в алгебре. Не менее эффективно «замена» может быть применена в геометрии. Сущность этого приема решения геометрических задач состоит в следующем: фигура, о которой идет речь в условиях задачи, так заменяется фигурой с той же искомой величиной, чтобы найти эту величину было легче.

В первых двух задачах речь пойдет о простейшей замене — замене одного отрезка другим.

Задача 1. *Из точки C, взятой вне угла AOB, равного* 60°, *опущены перпендикуляры CD, CM и CN соответственно на стороны OA, OB и на биссектрису ON данного угла. Определите ON, если $CM = d_1$ и $CD = d_2$.*

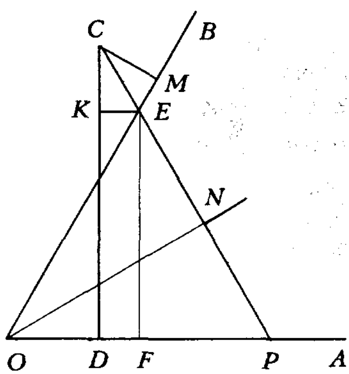


Рис. 1

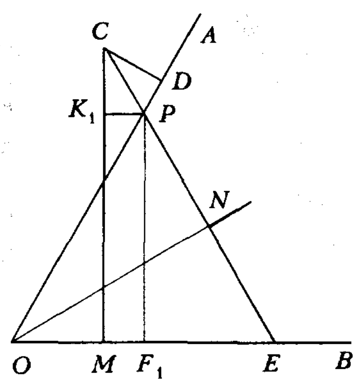


Рис. 2

Решение. Пусть E и P — точки пересечения CN с OB и OA (рис. 1). Образовавшийся треугольник OEP, очевидно, равносторонний. Анализ рисунка приводит к идее замены отрезка ON

равным отрезком EF, где $EF \perp OP$: длину отрезка EF легче увязать с данными длинами отрезков CD и CM.

Проведем $EK \perp CD$ (см. рис. 1); тогда

$$EF = KD = CD - CK = CD - CM = d_2 - d_1.$$

Мы предполагали здесь, что $d_2 > d_1$. Случай $d_1 > d_2$ показан на рисунке 2 и аналогичен случаю $d_2 > d_1$. Окончательный **ответ:** $ON = |d_1 - d_2|$.

Задача 2. *В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = BC$) из вершины A проведен перпендикуляр AD к стороне BC. В треугольники ABD и ACD вписаны полукруги так, что их диаметры лежат соответственно на отрезках BD и AD. Найдите отношение площадей этих полукругов, если величина угла B равна $\frac{\pi}{4}$.*

Решение. Если учесть, что $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2$, то искомая величина будет найдена, если удастся найти отношение радиусов полукругов; для этого заменим радиус O_1M (рис. 3) на равный ему отрезок, являющийся гипотенузой прямоугольного треугольника с известным острым углом. Из того, что $\angle B = \frac{\pi}{4}$, следует $AD = BD$, $MB = MO_1 = r_1$. Учитывая, что $AD = AM$ и $BA = BC$, получаем $MB = CD$ — отрезок MB можно заменить отрезком CD. В прямоугольном треугольнике O_2CD имеем $\angle O_2CD = \frac{1}{2}\angle ACD = \frac{3\pi}{16}$; следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = \mathrm{ctg}^2 \frac{3\pi}{16}$.

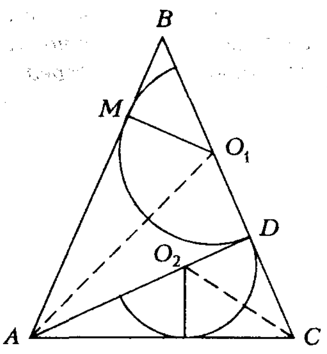


Рис.3

В следующих трех задачах мы будем заменять более сложную фигуру (треугольник, пирамиду).

Задача 3. *В данный треугольник впишите прямоугольник с диагональю наименьшей длины так, чтобы одна сторона треугольника (или ее продолжение) содержала две вершины, а две другие стороны — по одной вершине этого прямоугольника.*

Решение. Если бы в этой задаче шла речь не о произвольном треугольнике, а о прямоугольном, имеющем с данным прямоугольником общий прямой угол, то решение не вызвало бы никаких затруднений: искомым прямоугольником был бы тот, в котором диагональ перпендикулярна к гипотенузе треугольника (рис.4). Попробуем заменить данный треугольник прямоугольным треугольником с вписанным прямоугольником, равным искомому.

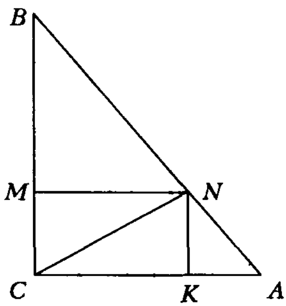


Рис.4

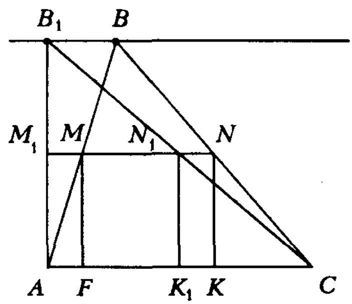


Рис.5

Пусть B_1AC — прямоугольный ($\angle A = 90°$) треугольник с тем же основанием AC, причем $B_1B \| AC$ (рис. 5). Тогда $M_1N_1 = MN$ (докажите самостоятельно). В треугольник B_1AC впишем прямоугольник $AM_1N_1K_1$ с наименьшей диагональю (рис.5). Прямая M_1N_1 пересечет стороны BA и BC сответственно в точках M и N. Проведем $MF \perp AC$ и $NK \perp AC$. Прямоугольник $FMNK$ — искомый.

Задача 4. *Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB, BHC и AHC, где H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC, равны между собой.*

Решение. Заменим один из этих треугольников (например, ΔBHC) равным ему треугольником и найдем радиус окружности, описанной вокруг замененного треугольника.

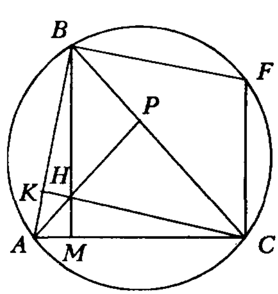


Рис.6

1 способ. Через вершину B проведем прямую, параллельную высоте CK, а через C — прямую, параллельную высоте BM; пусть F — точка пересечения этих прямых (рис.6).

Четырехугольник $BHCF$ — параллелограмм, поэтому $\Delta BFC = \Delta BHC$.

Рассмотрим четырехугольник $ABFC$:

$$\begin{pmatrix} FB \parallel CK \\ FC \parallel BM \end{pmatrix} \Rightarrow (\angle ABF = \angle ACF = 90°).$$

Следовательно, точки A, B, F и C лежат на одной окружности, поэтому $R_{\Delta ABC} = R_{\Delta BFC}$ ($R_{\Delta ABC}$ обозначает радиус окружности, описанной около ΔABC).

$$(\Delta BFC = \Delta BHC) \Rightarrow (R_{\Delta BFC} = R_{\Delta BHC}).$$

Далее,

$$\begin{pmatrix} R_{\Delta ABC} = R_{\Delta BFC} \\ R_{\Delta BFC} = R_{\Delta BHC} \end{pmatrix} \Rightarrow (R_{\Delta ABC} = R_{\Delta BHC}).$$

Аналогично доказывается, что $R_{\Delta AHB} = R_{\Delta AHC} = R_{\Delta ABC}$.

2 способ. Опишем около данного треугольника ABC окружность и продолжим его высоту AP до пересечения с проведенной окружностью в точке E (рис.7). Заметим, что $\angle CBM = \angle PAC$ (каждый из этих углов дополняет угол ACB до 90°) и $\angle PAC = \angle CBE$ (каждый из них измеряется половиной угловой величины дуги EC, на которую они опираются); следовательно, $\angle CBE = \angle CBH$. Аналогично доказываем, что $\angle BCE = \angle BCH$. Таким образом, $\Delta BEC = \Delta BHC$, следовательно, $R_{\Delta BEC} = R_{\Delta BHC}$.

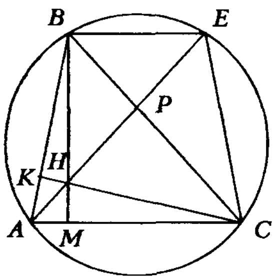


Рис.7

Точки A, B, C и E лежат на одной окружности, поэтому $R_{\Delta BEC} = R_{\Delta ABC}$. Окончательно получаем $R_{\Delta BHC} = R_{\Delta ABC}$.

Аналогично доказываем, что радиусы окружностей, описанных около треугольников AHB и AHC, равны радиусу окружности, описанной около треугольника ABC.

Задача 5. *Дан куб с основаниями $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Найдите объем тетраэдра AD_1EF, где E — середина ребра DC и F — середина ребра BB_1, если ребро куба равно* 1.

Решение. Проведем через точку D_1 прямую l параллельно AF (рис. 8).

$$\begin{pmatrix} l \parallel AF \\ AF \subset (AA_1B_1) \end{pmatrix} \Rightarrow (l \parallel (AA_1B_1)).$$

Так как $D_1 \in (DD_1C_1)$и $(DD_1C_1)\|(AA_1B_1)$, любая прямая (в частности, прямая l), проведенная через точку D_1 параллельно плоскости AA_1B_1, будет лежать в плоскости грани DD_1C_1C. Пусть l пересекает прямую DC в точке K. Из того, что, $D_1K\|AF$ и $AF \subset (AFE)$, получаем $D_1K\|(AFE)$, и потому пирамида D_1AFE равновелика пирамиде $KAFE$ (у них общее основание — ΔAFE, а вершины D_1 и K лежат на прямой, параллельной (AFE)). Заменим теперь пирамиду D_1AFE пирамидой $KAFE$.

Примем за основание пирамиды $KAFE$ треугольник AKE; тогда высотой пирамиды будет FB, поэтому

$$V_{FAKE} = \frac{1}{3} S_{\Delta AKE} \cdot FB.$$

Из подобия треугольников AFB и KD_1D следует $DK = 2$. Далее находим: $KE = 2\frac{1}{2}$, $S_{\Delta AKE} = \frac{1}{2} KE \cdot AD = \frac{5}{4}$. Окончательно получаем $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{24}$.

В следующих трех задачах мы будем заменять параллелепипед тетраэдром.

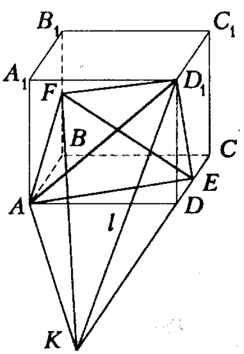


Рис.8

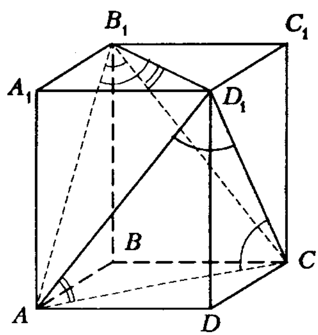


Рис.9

Задача 6. *Из одной из вершин прямоугольного параллелепипеда проведены диагонали всех граней, проходящих через эту вершину. Докажите, что сумма углов, попарно образованных этими диагоналями, равна* 180°.

Решение. Соединим между собой точки A, D_1 и C — концы диагоналей, проведенных из вершины B_1 (рис. 9). Заменим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ образовавшимся тетраэдром B_1AD_1C и докажем, что сумма плоских углов при вершине этого тетраэдра равна 180°.

Заметим, что $\Delta AB_1C = \Delta AD_1C$, $\Delta CB_1D_1 = \Delta CAD_1$ и $\Delta AB_1D_1 = \Delta ACD_1$; следовательно, $\angle AB_1C = \angle AD_1C$, $\angle CB_1D_1 = \angle CAD_1$ и $\angle AB_1D_1 = \angle ACD_1$. Учитывая, что $\angle AD_1C + \angle CAD_1 + \angle ACD_1 = 180°$ (сумма углов треугольника), получим $\angle AB_1D_1 + \angle AB_1C + \angle CB_1D_1 = 180°$.

Задача 7. *Докажите, что длина отрезка, соединяющего середины скрещивающихся ребер тетраэдра с прямым трехгранным углом при вершине, равна радиусу сферы, описанной около данного тетраэдра.*

Решение. Дополним тетраэдр $ABCD$ с прямыми плоскими углами при вершине A до прямоугольного параллелепипеда $ABKCDLMN$ (рис. 10). Сфера, описанная около данного параллелепипеда, будет также описанной около тетраэдра $ABCD$. Из треугольника AKD следует, что $PQ = \frac{1}{2}DK$. Так как диагональ DK параллелепипеда является диаметром описанной сферы, длина отрезка PQ равна радиусу этой сферы.

Задача 8. *Длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны* 1, 2 *и* 3. *Определите расстояние между скрещивающимися диагоналями смежных боковых граней этого параллелепипеда.*

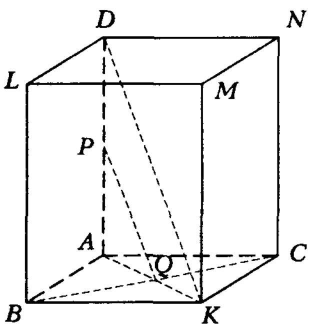


Рис. 10

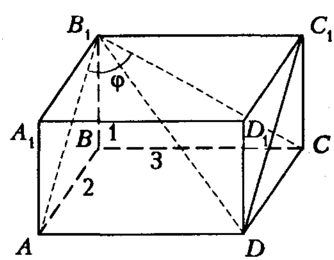


Рис. 11

Решение. Вместо параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ рассмотрим тетраэдр DB_1C_1C (рис. 11). Объем этого тетраэдра равен

$$V = \frac{1}{3}S_{\Delta B_1C_1C} \cdot DC = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3\right)\cdot 2 = 1. \qquad (1)$$

Найдем теперь его объем, воспользовавшись соотношением $V = \frac{1}{6}\cdot l_1 \cdot l_2 \cdot d \cdot \sin\varphi$*, где l_1 и l_2 — длины скрещивающихся ребер этого тетраэдра, d и φ — расстояние и угол между ними.

* Эту формулу тоже можно доказать методом замены!

Получим

$$V = \frac{1}{6} B_1C \cdot DC_1 \cdot d \cdot \sin \angle AB_1C = \frac{1}{6}\sqrt{50} \cdot d \cdot \sin\varphi .$$

В трехгранном угле $BACB_1$ косинус плоского угла φ, лежащего против ребра B_1B прямого двугранного угла, равен произведению косинусов плоских углов, ограничивающих этот прямой двугранный угол, т.е.

$$\cos \angle AB_1C = \angle \cos AB_1B \cdot \cos \angle BB_1C ;$$

из этого равенства получаем

$$\cos \angle AB_1C = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} ;$$

$$\sin \angle AB_1C = \sin\varphi = \frac{7}{\sqrt{50}} .$$

Следовательно,

$$V = \frac{1}{6}\sqrt{50} \cdot d \cdot \frac{7}{\sqrt{50}} = \frac{7}{6} d . \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует $1 = \frac{7}{6}d$. Отсюда $d = \frac{6}{7}$.

Приведем замену, при которой три боковых ребра заменяемого тетраэдра являются медианами боковых граней заменяющего тетраэдра.

Задача 9. *Длины ребер SA и BC тетраэдра $SABC$ равны a, ребер SB и AC — b, ребер SC и AB — c. Определите его объем.*

Решение. Пусть вершины A, B, C тетраэдра $SABC$ являются серединами ребер NK, MK и MN тетраэдра $SMNK$ (рис. 12). Тогда $KN = 2BC = 2a$, $MN = 2AB = 2c$, $KM = 2AC = 2b$. По условию задачи $AS = a$, $BS = b$, $CS = c$. Следовательно, в треугольнике KSN длина медианы AS равна половине длины стороны KN и, следовательно, ΔKSN — прямоугольный ($\angle KSN = 90°$). Аналогично доказываем, что $\angle NSM = \angle MSK = 90°$. Если тетраэдр $SMNK$ поставить на боковую грань, например, SKM, то ребро SN будет его высотой и, следовательно, $V_{SKNM} = \frac{1}{6} SK \cdot SN \cdot SM$.

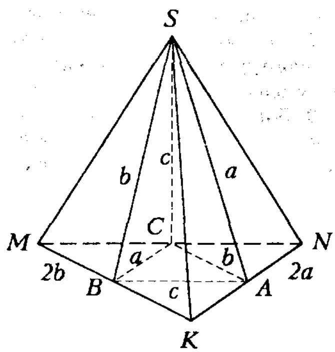


Рис. 12

Объем искомой пирамиды составляет $\frac{1}{4}$ часть объема пирамиды $SKNM$ (тетраэдры $SKAB$, $SANC$, $SMCB$ и $SABC$ равновелики), поэтому $V_{SABC} = \frac{1}{24} \cdot SK \cdot SN \cdot SM$. Положим $SM = x$, $SN = y$, $SK = z$; тогда

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4c^2, \\ x^2 + z^2 = 4b^2, \\ y^2 + z^2 = 4a^2. \end{cases} \quad (3)$$

Отсюда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\left(a^2 + b^2 + c^2\right). \quad (4)$$

Вычтя из уравнения (4) каждое из уравнений системы (3), получим

$$\begin{cases} z^2 = 2\left(a^2 + b^2 - c^2\right), \\ y^2 = 2\left(a^2 + c^2 - b^2\right), \\ x^2 = 2\left(b^2 + c^2 - a^2\right). \end{cases} \quad (5)$$

Отсюда

$$x^2y^2z^2 = 8\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right).$$

Искомый объем равен:

$$V = \frac{1}{12}\sqrt{2\left(a^2 + b^2 - c^2\right)\left(a^2 + c^2 - b^2\right)\left(b^2 + c^2 - a^2\right)}.$$

Упражнения

1. Для данного треугольника постройте прямоугольник с данной диагональю так, чтобы на прямой, содержащей одну сторону треугольника, лежали две вершины прямоугольника, а на двух других сторонах треугольника — по одной вершине этого прямоугольника.

2. Постройте квадрат так, чтобы на прямой, содержащей одну сторону данного треугольника, лежали две вершины квадрата, а две другие стороны треугольника содержали по одной вершине квадрата.

3. Большее основание правильной четырехугольной усеченной пирамиды образует с боковой гранью угол α, а с плоскостью, проходящей через противоположные стороны верхнего и нижнего оснований, угол β. Найдите отношение площадей оснований.

4. Длины оснований равнобедренной трапеции равны a и b ($a > b$), величина угла при большем основании равна α. Найдите длину радиуса окружности, описанной около трапеции.

5. Определите длину радиуса сферы, касающейся всех ребер правильного тетраэдра с боковым ребром a.

ОТВЕТЫ

Прямоугольный треугольник

2. $\frac{1}{2}h\left(\sqrt{h^2+l^2}-h\right)$. **3.** 144. **4.** 45°, 45°, 90°. **5.** $a^2b/(2a-b)$.

6. $\frac{1}{2}\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. **7.** 4. **8.** 9:1. **9.** $R - r$.

Метрические соотношения в треугольнике

1. $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$, $\frac{\pi}{2}-2\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$. **2.** $\sin\alpha\Big/\left(\sin\frac{3}{4}(\pi-\alpha)\right)$.

3. $AD = c\sin\alpha/\sin(3\alpha/2)$, $R = c/\left(2\cos(\alpha/2)\right)$. **4.** $\sqrt{c(b+c)}$.

5. $\angle A = \operatorname{arctg}2$, $\angle B = \operatorname{arctg}3$, $c = \pi/4$. **6.** $6\sqrt{3}/25$. **7.** 8,4. **9.** 2:1.

10. 1,2. **11.** 5:2.

Метод площадей

1. $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2+2c^2-a^2}$. **3.** $S = \frac{1}{2}m^2\sin 2\beta + m\sin\beta\sqrt{c^2-m^2\sin^2\beta}$.

7. $\dfrac{a\sqrt{h^2+a^2\sin\varphi}}{\sqrt{h^2+a^2}}$.

Вспомогательные отрезки и углы

1. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. **2.** $\dfrac{n}{4\pi}\cdot\dfrac{(1+2\cos\alpha)\sin\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$. **3.** $\operatorname{arcctg}\sqrt{2\sqrt{1+\dfrac{64\pi^2a^2}{27}}-2}$.

4. $\dfrac{7}{25}$. **5.** $\dfrac{a^3}{3}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}}{3\operatorname{ctg}^3\frac{\alpha}{2}-1}$. **6.** $\dfrac{a^3\sqrt{2}}{6}\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. **7.** $\dfrac{Q\sqrt{Q\sin 2\alpha}}{3\operatorname{ctg}\beta(1+\sin\alpha)}$.

8. $S\sin 2\alpha\sin\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Метод вспомогательного элемента

1. $\frac{\pi}{2}$, $\arccos\frac{4}{5}$, $\arcsin\frac{4}{5}$. **2.** $\arccos\frac{5\sqrt{3}}{18}$. **3.** $\frac{ab}{a+b}$.

4. $\frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$. **5.** $\frac{c}{\sqrt{2\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}\right)}}$. **6.** $4R^2+R\sqrt{4R^2-l^2}$.

7. $4R^2\frac{\left(1+\sqrt{-\cos\alpha}\right)^3}{(1+\cos\alpha)\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Отношения отрезков, площадей и объемов

1. 11/12. **2.** $\frac{(a+c)(b+c)(a+b+c)}{ab(a+b+2c)}$. **3.** $\angle C=45°$. **4.** $\frac{3a-b}{2(a+b)}ab\sin 2\alpha$.

5. 8:37. **6.** 7:29. **8.** 1, $\sqrt{2}/3$, $1/\sqrt{2}$. **9.** $(\alpha\gamma\rho+\delta\sigma\beta):\alpha\sigma$, $\sigma\beta:\rho$.

Наш выбор — теорема синусов!

1. $MN=2R$. **3.** $\angle B=\arccos\frac{3}{4}$, $\angle C=2\arccos\frac{3}{4}$,

$\angle A=\pi-3\arccos\frac{3}{4}$. **4.** $S=\frac{1}{2}a^2\cos\alpha\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. **5.** Угол ABC — тупой.

6. $\frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta BDE}}=\frac{\sin^2\left(45°+\frac{3\alpha}{4}\right)}{\sin^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)}$. **7.** $AE=2$.

Применение тригонометрии при решении геометрических задач

1. $AD=\frac{a\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\beta\right)}{\sin\alpha\cos\beta}$. **2.** $V=\frac{S\sqrt{S}}{6}\mathrm{tg}\beta\sqrt{\sin\alpha}$.

3. $\frac{l\,\mathrm{tg}\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}$. **4.** $3\sqrt{5}$, 10, 11.

7. $\arcsin\left(\mathrm{cosec}\,\alpha\sqrt{(\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma)(\cos\gamma-\cos(\alpha+\beta))}\right)$.

8. $\frac{ab(a+b+2)}{(a+1)(b+1)(a+b+1)}$.

Числовые данные в геометрических задачах

1. $\sqrt{10}$. **2.** $\frac{225\sqrt{2}}{8}$. **3.** $\frac{7}{6}\sqrt{\frac{22}{39}}$. **4.** $\frac{4a}{\sqrt{114}}$. **5.** $2-\frac{\sqrt{3}}{2}$. **6.** 24. **7.** $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$.

8. 1/12. **9.** $\left(10\left(1+\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{10}}\right)\right)\left(10\left(1-\sqrt{\frac{3+\sqrt{19}}{10}}\right)\right)\left(\frac{7+\sqrt{19}}{2}\right)$.

10. $\frac{2\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}+1}R$, $\frac{2\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}-1}R$. **11.** 5/2.

Учитесь делать дополнительные построения

1. $48\sqrt{6}$. **2.** 1:2, считая от меньшего основания. **3.** $\sqrt{\frac{m}{n}}$.

4. $AB=BC=\frac{a\left(\sqrt{5}-1\right)}{2}$, $CD=a\sqrt{\sqrt{5}-2}$. **5.** $\sin 2\alpha:1$. **6.** $\frac{2ab}{a+b}$.

7. $4(1-\alpha)$. **8.** 8.

Несколько задач для тренировки

1. $\frac{a}{2}$. **2.** $\frac{|a-b|}{2}$. **3.** $\sqrt{ac}$. **4.** 6. **5.** $\sqrt{\frac{2}{3}\left(a^2+b^2+\sqrt{a^4+b^4-a^2b^2}\right)}$. **6.** 1:3.

Алгебраический метод решения геометрических задач

1. $\frac{1}{4}\sqrt{(a-b)^2\operatorname{tg}^2\alpha+(a-b)^2}$. **2.** $\frac{2p(p+q)R^2\sin 2\varphi\cos^2\varphi}{p^2+q^2+2pq\cos 2\varphi}$.

3. $\frac{1}{4}h\sin^2(\beta-\alpha)\operatorname{cosec}^2\alpha\operatorname{cosec}^2\beta\left(a-\frac{1}{2}h\sin(\alpha+\beta)\operatorname{cosec}\alpha\operatorname{cosec}\beta\right)$.

4. $\sqrt{Rr}$. **5.** $AB=BC=2$, $CD=1$, $AD=\sqrt{3}$, $S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6. $\frac{Rr\sqrt{3}}{\sqrt{R^2-Rr+r^2}}$. **7.** $\frac{1}{2}(m+n)$. **8.** $a\sqrt{1+\sqrt{1-\frac{1}{4}\sec^2\alpha}}$,

$a\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{1}{4}\sec^2\alpha}}$. **9.** $\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$.

Принадлежность точек прямой и плоскости

1. 3:2. **2.** 3:4. **3.** 1:14. **4.** $\sqrt{186}$ и $2\sqrt{30}$. **5.** 3:11. **6.** 7:29. **7.** 1:1.

9. $\frac{b(1+2a+ab)}{(1+a)(1+b)(1+a+ab)}$.

Заменим фигуру

3. $\dfrac{Q}{q}=\dfrac{\sin^2(\alpha+\beta)}{\sin^2(\alpha-\beta)}$. **4.** $R=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos 2\alpha}}{2\sin 2\alpha}$.

5. $R=\dfrac{a\sqrt{2}}{4}$.

Приложение к журналу «Квант» № 1/96

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

ГЕОМЕТРИЯ

ВЫПУСК 1

(Планиметрия)

Редактор *А.Ю.Котова*
Литературный редактор *Л.В.Кардасевич*
Технический редактор *Е.В.Морозова*
Компьютерная группа
М.Н.Грицук, Е.А.Митченко, Е.В.Титова

ИБ № 14

Формат 84×108 1/32. Бум. офс. нейтр. Гарнитура кудряшевская.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,72.
Заказ 1735.

117296 Москва, Ленинский пр., 64а
«Квант»

Отпечатано на Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховском полиграфическом комбинате
Комитета Российской Федерации по печати
142300 г.Чехов Московской области
Тел. (272) 71-336, факс (272) 62-536