УРОКИ АЛГЕБРЫ

Издательство ФИЗМАТЛИТ свою новую серию «Библиотека физико-математической литературы для школьников и учителей» начало с переиздания коллекции классических учебников А. П. Киселёва по математике для средней школы. Уже вышли в свет «Арифметика» и «Геометрия». Теперь читателю предлагается «Алгебра».

Истории российских школьных учебников по математике в 2003 г. исполняется три века, если считать с появившейся в 1703 г. «Арифметики» Л. Ф. Магницкого. Авторами этих учебников были и известные учёные (среди них — Л. Эйлер, Н. И. Лобачевский, В. Я. Буняковский, М. В. Остроградский), и люди, имена которых помнят разве что специалисты-историки; одни учебники быстро исчезали, другие просуществовали годы. Но А. П. Киселёв занимает среди российских просветителей совершенно особое, можно сказать — уникальное место, ибо его учебники, по которым почти век учились многие миллионы россиян, обозначили собой целый период отечественного математического образования. Переиздание этих книг приурочено к двум знаменательным событиям: 300-летию первой российской «Арифметики» и 150-летию со дня рождения А. П. Киселёва.

Не станем подробно рассказывать здесь о почти 90-летнем жизненном пути Андрея Петровича Киселёва (1852–1940) — его биография освещена в литературе достаточно полно (упомянем лишь одно мемориальное издание: Авдеев Ф. С., Авдеева Т. К. «Андрей Петрович Киселёв. Жизнь. Научное творчество. Педагогическая деятельность». Орёл: Изд. Орловской гостелерадиокомпании, 2002). Но нельзя не отметить, что в его судьбе много неординарного. Уроженец Орловской губернии (г. Мценск) — старинного русского края, блестящий студент Петербургского университета (эпохи П. Л. Чебышёва, Д. И. Менделеева, А. Н. Коркина, Е. И. Золотарёва и др.), окончивший обучение досрочно со степенью кандидата, А. П. Киселёв выбрал не научную, а педагогическую стезю, полностью посвятив себя просвещению юношества, созданию школьных учебников.

Во всех ситуациях ему сопутствовали успех и уважение — но не по капризу случая, а в награду за удивительное трудолюбие, упорство и пытливость. Триумф его учебников — следствие редкостного симбиоза в одном лице незаурядного педагогического таланта, богатого опыта учительствования, высокой научной и методической компетентности. История его жизни — пример того, как во времена исторических переустройств человек мог и получить признание (в 1933 г. А. П. Киселёв был награжден орденом Трудового Красного Знамени), и навсегда расстаться с близкими (его дочь, ученица И. Е. Репина, после революции эмигрировала в Югославию). И есть что-то символическое в том, что великого Учителя А. П. Киселёва похоронили рядом с могилой великого Учёного Д. И. Менделеева.

Учебники А. П. Киселёва по арифметике, алгебре и геометрии долгие годы пользовались — и вполне заслуженно — самой высокой репутацией. Дальнейшее совершенствование преподавания математики в школе и взвешенная оценка нынешних пособий невозможны без личного знакомства с учебниками, считавшимися в свое время эталонными. «Чаще и внимательнее перечитывайте классиков» — эта глубокая мудрость касается не только бессмертных шедевров художественной литературы. С полным правом распространяется она и на книги «мэтров» педагогики и методики преподавания, ибо профессиональное искусство обучающего и оригинальность преподнесения материала подчас важнее академических познаний учителя и следования инструктивным письмам.

Поэтому новое издание «Алгебры» А. П. Киселёва, несомненно, будет полезно и ищущему педагогу, и продвинутому ученику.

Появившаяся впервые в 1888 г. под названием «Элементарная алгебра», книга многократно автором совершенствовалась и регулярно переиздавалась. В 1938 г. «Алгебра» А. П. Киселёва — после переработки, выполненной известным педагогом и методистом А. Н. Барсуковым — была официально утверждена как стабильный и единственный учебник по алгебре (в двух частях — соответственно для 6–8 и 8–10 классов) советской средней школы (использовавшийся вместе со «Сборником задач по алгебре» Н. А. Шапошникова и Н. К. Вальцова).

Учебник просуществовал (без всяких изменений) в качестве общепринятого до середины 50-х годов прошлого века, когда школьная программа по математике претерпела изменения. Начали появляться другие учебники по алгебре, включавшие также разделы, посвященные элементарным функциям, началам анализа, тригонометрии (впрочем, они в школе не прижились и уже забыты). «Алгебра» А. П. Киселёва больше не печаталась и стала библиографической редкостью, многие педагоги новых поколений и студенты — будущие учителя математики — никогда не держали её в руках.

Сегодня актуальным является изучение и осмысление методического наследия А. П. Киселёва. Парадоксально, что ни сами его учебники (и когда они были стабильными, и когда вынуждены были уйти), ни многолетний педагогический эксперимент по их использованию не подвергались всестороннему и капитальному научно-методическому исследованию. (Конечно, хватало различных разработок и рекомендаций, комментариев и пояснений, но речь идет не о поверхностных официозных писаниях-однодневках.) А ведь это богатейший материал (особенно при сравнении с книгами других авторов) для обстоятельного анализа глубинных причин и направлений эволюции содержания и методов школьного математического образования, выработки конструктивных рекомендаций по развитию теории учебника математики. К сожалению, можно вспомнить, пожалуй, только одну давнюю диссертацию Ф. М. Шустеф, посвящённую исследованию российских учебников по алгебре (работа была выполнена под руководством члена-корреспондента Академии педагогических наук РСФСР И. В. Арнольда, отца нашего выдающегося математика академика РАН В. И. Арнольда).

Для современного, прежде всего — начинающего, учителя будет интересно познакомиться с содержанием программы курса алгебры советской средней школы, с принятой тогда манерой преподнесения материала, его изложения и оформления в учебнике. (Заметим, что не все главы учебника А. П. Киселёва действительно изучались — например, диофантовы уравнения и непрерывные дроби.) Очень важно, чтобы нынешние учителя составили собственное мнение по тем вопросам, которые были предметом ожесточённых дискуссий при пересмотрах во второй половине XX века содержания школьного курса математики (впрочем, и в наше время можно услышать отзвук этих споров): должны ли учащиеся массовой общеобразовательной школы овладевать формальными основами теории комплексных чисел? обязательно ли им знать формулу бинома Ньютона? следует ли познакомить их с фундаментальными понятиями производной и интеграла? (Чтобы не возникло недоразумений, подчеркнём: речь идет о массовой общеобразовательной школе, а не о профильных физико-математических классах.)

Практикующие учителя принимают обычно весьма вялое участие в обсуждении путей «модернизации преподавания математики в школе». И очень жаль! Каждый учитель, если он хочет стать гроссмейстером своего дела, должен творчески обдумывать такие важные проблемы, как наполнение школьного курса математики, методика изложения конкретного материала, сочетание эвристики, доступности и строгости, а сегодня — ещё и использование компьютерных и мультимедийных обучающих продуктов.

Есть и иные проблемы, для обдумывания «на перспективу». Что должна представлять собой арифметика и как её увязывать с алгеброй? Как «вписать» в школьную программу элементы анализа, теории вероятностей, теории множеств, теории игр и других «нетрадиционных» для школы разделов математической науки, без знания которых, однако, немыслим человек XXI века? А все ли «традиционные» факты, изучаемые (чаще, впрочем, зазубриваемые) школьниками, действительно так уж бесценны для их образованности? Разве в окружающем нас мире кривых и поверхностей нет ничего, кроме скучных прямых и плоскостей, однообразных окружностей и шаров? Чем наполнить и как преподавать «гуманитарную математику», чтобы реально обеспечить дифференцированное обучение, ориентируясь на индивидуальность учащихся, а не на желания профессионалов-математиков? Действительно ли школьная математика даёт единственную и лучшую возможность воспитания логического мышления?

Творческий подход к содержанию и формам обучения математике важен особенно, ибо формализм в её преподавании просто губителен. В истории нашей школы было достаточно примеров, когда далёкие от подлинной науки чиновники и «методисты» диктовали, что и как надо делать. Люди старшего поколения хорошо помнят бывшее одно время незыблемым требование всегда и обязательно «приводить к виду, удобному для логарифмирования», ответ в задачах «по геометрии с применением тригонометрии» или долгий «научный» спор о том, какое место в школьной программе должны занимать и как должны вводиться $\operatorname{Arcsin} x$, $\operatorname{Arccos} x$ и прочие «аркфункции с большой буквы».

Общепризнано, что уровень математической подготовки значительной части наших школьников находится на достаточно высоком уровне. Но хорошо известен и тот факт, что большое число учащихся испытывает серьёзные трудности и даже неприязнь при освоении школьного курса математики. Н. И. Лобачевский писал: «Если учение математики, свойственное уму человеческому, остаётся для многих безуспешно, то это по справедливости должно приписать недостаткам в искусстве и способе преподавания». Хотелось бы надеяться, что ознакомление современного учительского корпуса с классическими школьными учебниками А. П. Киселёва поможет избавиться от этих недостатков.

Н. Розов, профессор,
декан факультета
педагогического образования МГУ

Глава 1

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ПОНЯТИЯ

I. Алгебраическое знакоположение

1. Употребление букв. *а) Для выражения общих свойств чисел.* Пусть мы желаем кратко выразить в письменной форме, что произведение двух чисел не изменится, если мы поменяем местами множимое и множитель. Тогда, обозначив одно число буквой a, другое буквой b, мы можем написать равенство: $a \times b = b \times a$, или, короче: $ab = ba$, условившись раз навсегда, что если между двумя буквами, написанными рядом, не стоит никакого знака, то это значит, что между ними подразумевается знак умножения. Буквенные обозначения употребляют, если желают выразить, что некоторое свойство принадлежит не каким-нибудь отдельным числам, а всяким числам.

Для обозначения чисел употребляются обыкновенно буквы латинского (или французского) алфавита.

б) *Для сокращённого выражения правила, посредством которого можно решить задачи*, сходные по условиям, но различающиеся только величиной данных чисел.

Положим, например, мы решаем задачу:

найти 3% числа 520.

Тогда рассуждаем так:

1% какого-нибудь числа составляет $\frac{1}{100}$ этого числа; следовательно:

$$1\% \text{ числа } 520 \text{ составляет } \frac{520}{100} = 5{,}2;$$

$$3\% \text{ числа } 520 \text{ составляют } \frac{520}{100} \times 3 = 15{,}6.$$

Решив несколько подобного рода задач, мы замечаем, что для нахождения процентов какого-нибудь числа достаточно разделить это число на 100 и результат умножить на число процентов. Решим задачу в таком общем виде:

найти $p\%$ числа a.

Задачу решим так:

$$1\% \text{ числа } a \text{ составляет } \frac{a}{100},$$
$$p\% \text{ числа } a \text{ составляют } \frac{a}{100} \times p.$$

Обозначив искомое число буквой x, мы можем написать равенство:

$$x = \frac{a}{100} \times p,$$

из которого прямо видно, как можно находить проценты от любого данного числа.

Возьмём ещё пример. В арифметике правило умножения дробей мы выражаем словами так: чтобы умножить дробь на дробь, надо перемножить отдельно их числители и знаменатели и первое произведение разделить на второе. Применяя буквенные обозначения, мы можем это правило выразить очень коротко. Именно, обозначив для первой дроби числитель через a, знаменатель через b, а для второй дроби соответственно через c и d, мы можем написать:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Нетрудно видеть, что эта запись даёт общее правило умножения для всяких дробей, так как под буквами мы можем подразумевать любые числа.

Точно так же для правила деления дроби на дробь будем иметь запись:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Всякое равенство или неравенство, выражающее посредством букв и знаков действий какое-нибудь соотношение между числами, называется формулой.

Приведём для примера некоторые формулы.

Если основание и высоту прямоугольника измерим одной и той же линейной единицей и для основания получим число b, а для высоты число h, то площадь s этого прямоугольника, выраженная в соответствующих квадратных единицах, определится формулой $s = bh$. Пр тех же обозначениях для площади треугольника получим формулу:

$$s = \frac{1}{2}\,bh.$$

Из физики известно, что для определения удельного веса какого-либо вещества надо вес данного количества этого вещества разделить на его объём. Обозначая вес тела (в граммах) через p, объём его (в кубических сантиметрах) через v и удельный вес через d, мы можем приведённое правило для определения удельного веса кратко выразить формулой:

$$d = \frac{p}{v}.$$

2. Алгебраическое выражение. Если несколько чисел, обозначенных буквами (или буквами и цифрами), соединены между собой посредством знаков, указывающих, какие действия и в каком порядке надо произвести над числами, то такое обозначение называется *алгебраическим выражением*.

Таковы, например, выражения: $\frac{a}{100} \times p$; ab; $2x + 1$.

Для краткости мы часто будем вместо «алгебраическое выражение» говорить просто «выражение».

Вычислить значение какого-нибудь выражения для данных численных значений букв — значит подставить в него на место букв эти численные значения и произвести все указанные в выражении действия: число, получившееся после этого, называется *численной величиной* алгебраического выражения для данных численных значений букв. Так, численная величина выражения $\frac{a}{100} \times p$ при $p = 3$ и $a = 520$ равна:

$$\frac{520}{100} \times 3 = 5{,}2 \times 3 = 15{,}6.$$

3. Действия, рассматриваемые в алгебре, следующие: *сложение*, *вычитание*, *умножение*, *деление*, *возведение в степень и извлечение корня*. Что такое первые четыре действия, известно из арифметики. Пятое действие — возведение в степень — представляет собой частный случай умножения, когда перемножаются несколько одинаковых сомножителей. Произведение таких сомножителей называется *степенью*, а число их — *показателем степени*. Возводимое в степень число называется *основанием степени*. Если какое-нибудь число берётся сомножителем 2 раза, то произведение называется *второй степенью*; если какое-нибудь число берётся сомножителем 3 раза, то произведение называется *третьей степенью* этого числа и т. д. Так, вторая степень числа 5 есть произведение 5×5, т. е. 25; третья степень числа $\frac{1}{2}$ есть произведение $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$, т. е. $\frac{1}{8}$. *Первой степенью* числа называют само это число.

Вторая степень называется иначе *квадратом*, а третья степень — *кубом*. Такие названия даны потому, что произведение $a \times a$ выражает (в квадратных единицах) площадь квадрата со стороной в a линейных единиц, а произведение $a \times a \times a$ выражает (в кубических единицах) объём куба с ребром в a линейных единиц.

Об извлечении корня мы пока говорить не будем, так как это действие в начале алгебры не рассматривается.

4. Знаки, употребляемые в алгебре. Для обозначения первых четырёх действий в алгебре употребляются те же знаки, как и в арифметике, только знак умножения, как мы уже говорили, обыкновенно не пишется, если оба сомножителя или один из них обозначены буквами. Например, вместо $a \times b$ (или вместо $a \cdot b$) пишут просто ab и вместо $3 \times a$ (или $3 \cdot a$) пишут $3a$. В качестве знака деления употребляется, безразлично, или двоеточие «:», или горизонтальная черта; так, выражения $a : b$ и $\frac{a}{b}$ означают одно и то же, а именно, что число a делится на число b.

Возведение в степень принято сокращённо выражать так: пишут число, которое берётся сомножителем (основание степени), а над ним, с правой стороны, ставят другое число (показатель степени), выражающее, сколько раз возводимое число должно быть повторено сомножителем. Так, 3^4 (читается: *три в четвёртой степени*) заменяет собой подробное обозначение:

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3.$$

Если при числе не стоит никакого показателя степени, то можно подразумевать при нём показателем единицу; например, a означает то же самое, что и a^1.

Равенство двух каких-либо выражений обозначается знаком «$=$», а неравенство знаком «$>$», который остриём угла должен быть обращён к меньшему числу. Например, если написано:

$$5 + 2 = 7, \quad 5 + 2 < 10, \quad 5 + 2 > 6,$$

то это значит: $5 + 2$ равно 7; $5 + 2$ меньше 10; $5 + 2$ больше 6.

5. Порядок действий. Относительно порядка, в котором надо производить действия, указанные в алгебраическом выражении, условились: *сначала производить действия высшего порядка, т. е. возведение к степень и извлечение корня, затем умножение и деление и, наконец, сложение и вычитание.*

Так, если написано выражение: $3a^2b - \frac{b^3}{c} + d$, то при вычислении его надо сначала произвести возведение в степень (число a возвести в квадрат и число b в куб), затем умножение и деление

(3 умножить на a^2 и полученный результат на b; b^3 разделить на c) и, наконец, вычитание и сложение (из $3a^2b$ вычесть $\frac{b^3}{c}$ и к результату прибавить d).

Когда приходится по условиям задачи отступать от этого порядка действий, то употребляются скобки. Скобки показывают, что действия над числами, заключёнными в скобки, надо произвести ранее других. Например, выражения:

$$5 + 7 \cdot 2 \text{ и } (5 + 7) \cdot 2$$

означают не одно и то же. В первом случае нужно 7 умножить на 2 и результат прибавить к 5 (получаем 19). Во втором случае надо сначала сложить 5 и 7 и результат умножить на 2 (получаем 24).

Точно так же, если написано:

$$(a + b)c - d,$$

то это значит, что сначала надо сложить a и b, затем полученное число умножить на c и из того, что получится, вычесть d.

Когда приходится заключать в скобки такое выражение, в котором есть свои скобки, то новым скобкам придают какую-нибудь другую форму. Например выражение:

$$a\{b - [c + (d - e)]\}$$

означает, что из d вычитается e, полученная разность складывается с c, полученная сумма вычитается из b и на эту разность умножается a.

Скобкам дают обыкновенно такие названия: круглые скобки ( ), квадратные, или ломаные, скобки [ ], фигурные скобки { }.

Когда в выражение входят несколько скобок, то обычно сначала производят действия над числами, заключёнными в круглые скобки, затем над числами в квадратных скобках и, наконец, в фигурных. Производя указанные в скобках действия, мы уничтожаем, или, как говорят, раскрываем скобки. Так, в выражении:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot (6 - 2) - 3 \cdot (5 - 2)]\}$$

сначала раскрываем круглые скобки:

$$5 \cdot \{24 - 2 \cdot [10 + 2 \cdot 4 - 3 \cdot 3]\}.$$

Затем раскрываем квадратные скобки: $5 \cdot \{24 - 2 \cdot 9\}$.

Наконец, раскрываем фигурные скобки: $5 \cdot 6 = 30$.

Упражнения.

1. Сторона квадрата равна a метрам; выразить его периметр, затем площадь.

2. Если ребро куба равно m сантиметрам, то как выразятся его поверхность, его объём?

3. У прямоугольника основание равно x метрам, а высота на d метров короче основания. Выразить его площадь.

4. Некоторое двузначное число содержит x десятков, y простых единиц. Сколько всех единиц в этом числе?

5. В трёхзначном числе имеется a сотен, b десятков и c простых единиц. Какой формулой можно выразить всё число единиц, содержащееся в этом числе?

6. Смешано 2 сорта чая: первого сорта взято a килограммов, второго b килограммов. Килограмм первого сорта стоит m рублей, второго сорта n рублей. Выразить цену одного килограмма смеси.

7. Указать посредством знаков, принятых в алгебре: 1) сумму квадратов чисел x и y; 2) квадрат суммы этих же чисел; 3) произведение квадратов этих чисел; 4) квадрат произведения их; 5) произведение суммы чисел a и b на их разность; 6) частное от деления суммы чисел m и n на их разность (последнее выразить двояким путём, т. е. посредством знака «:» и посредством черты).

8. Вычислить следующие выражения при $a = 20$, $b = 8$ и $c = 3$:

$$1)\ (a+b)c; \qquad 2)\ a+bc; \qquad 3)\ (a+b)a-b;$$
$$4)\ (a+b)(a-b); \quad 5)\ (a+b):c; \quad 6)\ \frac{a+b}{b-c}.$$

9. Написать выражение, которое получится, если в произведении $3ab$ вместо a подставить сумму $x+y$ и вместо b — разность $x-y$.

Исторические сведения

Алгебра происходит от слова «альджебр». Этим словом начиналось заглавие математического сочинения, написанного учёным Альхваризми (IX в.). Слово «Альхваризми» («из Хорезма») указывает на происхождение учёного из Хорезма (ныне Хива, Узбекистан). Сочинение Альхваризми под названием «Альджебр и альмукабала» излагает способы решения уравнений. Значение слова «алгебра» будет понятно после изучения главы об уравнениях.

Буквы для обозначения чисел ввёл впервые французский математик Виета в 1591 г. После него особенно широко пользовался буквенными обозначениями знаменитый французский философ и математик Рене Декарт (1596–1650).

Знаки, употребляемые в настоящее время в алгебре, введены различными математиками в разное время. Прежде для обозначения действий употребляли целое слово или даже фразу. Практическая потребность в более быстрых вычислениях приводила к попыткам сокращения отдельных наиболее употребительных слов, пока, наконец, эти слова или их сокращения не заменялись специальными знаками. Укажем время появления наиболее употребительных знаков.

Знаки сложения и вычитания «+» и «−» введены были немецким математиком Видманом в 1489 г. До него ещё они встречаются в рукописях великого итальянского художника Леонардо да Винчи.

Для обозначения равенства введён был (в 1557 г.) английским алгебраистом Рекордом знак «=», «ибо, — как писал он, — никакие два предмета не могут быть более равными, чем две параллельные линии одинаковой длины». Другой английский математик Херриот ввёл знаки «>» и «<» (в 1631 г.) и точку как знак умножения.

В 1694 г. знаменитым немецким математиком Лейбницем (1646–1716) впервые введён знак «:» для обозначения деления, которое раньше него обозначалось чертой.

Скобки ( ), [ ] и { } встречаются впервые в трудах фламандского математика Жирара (1629 г.).

Не все эти знаки сразу входили во всеобщее употребление. Некоторые математики продолжали ещё пользоваться частично старыми обозначениями. Алгебраическую символику в её настоящем виде можно считать окончательно установившейся лишь к концу XVIII столетия. Огромное влияние оказали в этом отношении сочинения великого английского учёного Исаака Ньютона (1642–1727).

II. Свойства первых четырёх арифметических действий

Напомним известные уже из арифметики главнейшие свойства действий сложения, вычитания, умножения и деления, так как этими свойствами придется часто пользоваться и в алгебре.

6. Сложение. а) *Сумма не изменяется от перестановки слагаемых* (переместительный закон сложения). Так:

$$3+8=8+3; \quad 5+2+4=2+5+4=4+2+5.$$

Вообще:

$$a+b=b+a; a+b+c+\ldots=b+a+c+\ldots=c+a+b+\ldots$$

Ряд точек показывает, что число слагаемых может быть и более трёх.

б) *Сумма нескольких слагаемых не изменится, если какие-нибудь из них заменить их суммой* (сочетательный закон сложения). Так:

$$3+5+7=3+(5+7)=3+12=15;$$
$$4+7+11+6+5=7+(4+5)+(11+6)=7+9+17=33.$$

Вообще:

$$a+b+c=a+(b+c)=b+(a+c) \text{ и т. п.}$$

Иногда этот закон выражают так: *слагаемые можно соединять в какие угодно группы.*

в) *Чтобы прибавить к какому-либо числу сумму нескольких чисел, можно прибавить отдельно каждое слагаемое одно за другим*. Так:

$$5 + (7 + 3) = (5 + 7) + 3 = 12 + 3 = 15.$$

Вообще:

$$a + (b + c + d + \ldots) = a + b + c + d + \ldots$$

7. Вычитание. а) *Чтобы вычесть из какого-нибудь числа сумму нескольких чисел, можно вычесть отдельно каждое слагаемое одно за другим*. Так:

$$20 - (5 + 8) = (20 - 5) - 8 = 15 - 8 = 7.$$

Вообще:

$$a - (b + c + d + \ldots) = a - b - c - d - \ldots$$

б) *Чтобы прибавить разность двух чисел, можно прибавить уменьшаемое и затем вычесть вычитаемое*. Так:

$$8 + (11 - 5) = 8 + 11 - 5 = 14.$$

Вообще:

$$a + (b - c) = a + b - c.$$

в) *Чтобы вычесть разность, можно сначала прибавить вычитаемое и затем вычесть уменьшаемое*. Так:

$$18 - (9 - 5) = 18 + 5 - 9 = 14.$$

Вообще:

$$a - (b - c) = a + c - b.$$

8. Умножение. а) *Произведение не изменится от перестановки сомножителей* (переместительный закон умножения). Так:

$$4 \cdot 5 = 5 \cdot 4; \quad 3 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot 3 \cdot 2.$$

Вообще:

$$ab = ba; \quad abc \ldots = bac \ldots = cba \ldots$$

б) *Произведение нескольких сомножителей не изменится, если какие-нибудь из них заменить их произведением* (сочетательный закон умножения). Так:

$$7 \cdot 3 \cdot 5 = 5 \cdot (3 \cdot 7) = 5 \cdot 21 = 105.$$

Вообще:

$$abc = a(bc) = b(ac) \text{ и т. п.}$$

в) *Чтобы умножить какое-либо число на произведение нескольких сомножителей, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д.* Так:

$$3 \cdot (5 \cdot 4) = (3 \cdot 5) \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60.$$

Вообще:

$$a(bcd\ldots) = \{[(ab)c]d\}\ldots$$

г) *Чтобы умножить произведение нескольких сомножителей на какое-либо число, можно умножить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения.* Так:

$$(3 \cdot 2 \cdot 5) \cdot 3 = (3 \cdot 3) \cdot 2 \cdot 5 = 3 \cdot (2 \cdot 3) \cdot 5 = 3 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 3).$$

Вообще:

$$(abc\ldots)m = (am)bc\ldots = a(bm)c\ldots \text{ и т. п.}$$

д) *Чтобы умножить сумму на какое-либо число, можно каждое слагаемое умножить на это число и полученные результаты сложить.* Так:

$$(5+3) \cdot 7 = 5 \cdot 7 + 3 \cdot 7.$$

Вообще:

$$(a+b+c+\ldots)m = am + bm + cm + \ldots$$

В силу переместительного закона умножения это же свойство можно выразить так: *чтобы умножить какое-либо число на сумму нескольких чисел, можно умножить это число на каждое слагаемое отдельно и полученные результаты сложить.* Так:

$$5 \cdot (4+6) = 5 \cdot 4 + 5 \cdot 6.$$

Вообще:

$$m(a+b+c+\ldots) = ma + mb + mc + \ldots$$

Это свойство называется *распределительным* законом умножения, так как умножение, производимое над суммой, *распределяется* на каждое слагаемое в отдельности.

е) Распределительный закон можно применять и к разности. Так:

$$(8-5) \cdot 4 = 8 \cdot 4 - 5 \cdot 4; \quad 7 \cdot (9-6) = 7 \cdot 9 - 7 \cdot 6.$$

Вообще:

$$(a-b)c = ac - bc; \quad a(b-c) = ab - ac,$$

т. е. *чтобы умножить разность на какое-либо число, можно умножить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй, чтобы умножить какое-либо число на разность, можно это число умножить отдельно на уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй.*

9. Деление. а) *Чтобы разделить сумму на какое-либо число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно и полученные результаты сложить*:

$$\frac{30+12+5}{3} = \frac{30}{3} + \frac{12}{3} + \frac{5}{3} = 10 + 4 + 1\frac{2}{3}.$$

Вообще:

$$\frac{a+b+c+\ldots}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} + \frac{c}{m} + \ldots$$

б) *Чтобы разделить разность на какое-либо число, можно разделить на это число отдельно уменьшаемое и вычитаемое и из первого результата вычесть второй*:

$$\frac{20-8}{5} = \frac{20}{5} - \frac{8}{5} = 4 - 1\frac{3}{5}.$$

Вообще:

$$\frac{a-b}{m} = \frac{a}{m} - \frac{b}{m}.$$

в) *Чтобы разделить произведение нескольких сомножителей на какое-либо число, можно разделить на это число один из сомножителей, оставив другие без изменения*:

$$(40 \cdot 12 \cdot 8) : 4 = 10 \cdot 12 \cdot 8 = 40 \cdot 3 \cdot 8 = 40 \cdot 12 \cdot 2.$$

Вообще:

$$(abc\ldots) : m = (a : m)bc\ldots = a(b : m)c\ldots \text{ и т. д.}$$

г) *Чтобы разделить какое-либо число на произведение нескольких сомножителей, можно разделить это число на первый сомножитель, полученный результат разделить на второй сомножитель и т. д.*:

$$120 : (2 \cdot 5 \cdot 3) = [(120 : 2) : 5] : 3 = (60 : 5) : 3 = 12 : 3 = 4.$$

Вообще:

$$a:(bcd\ldots)=[(a:b):c]:d\ldots \text{ и т. п.}$$

д) Укажем еще следующее свойство деления:

Если делимое и делитель умножим (*или разделим*) *на одно и то же число, то частное не изменится.*

Поясним это свойство на следующих двух примерах:

1) $8:3=\dfrac{8}{3}$,

умножим делимое и делитель, положим, на 5; тогда получим новое частное:

$$(8\cdot 5):(3\cdot 5)=\frac{8\cdot 5}{3\cdot 5},$$

которое по сокращении дроби на 5 даст прежнее частное $\dfrac{8}{3}$.

2) $\dfrac{3}{4}:\dfrac{5}{6}=\dfrac{3\cdot 6}{4\cdot 5}$.

Умножим делимое и делитель, положим, на $\dfrac{2}{7}$, тогда получим новое частное:

$$\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{7}\right):\left(\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{7}\right),$$

которое, согласно правилам умножения и деления дробей, равно:

$$\frac{3\cdot 2}{4\cdot 7}:\frac{5\cdot 2}{6\cdot 7}=\frac{3\cdot 2\cdot(6\cdot 7)}{4\cdot 7\cdot(5\cdot 2)}=\frac{3\cdot 2\cdot 6\cdot 7}{4\cdot 7\cdot 5\cdot 2},$$

что по сокращении на 2 и на 7 даёт прежнее частное $\dfrac{3\cdot 6}{4\cdot 5}$.

Вообще, какие бы числа a, b и m ни были, всегда $(am):(bm)=a:b$, что можно написать и так:

$$\frac{am}{bm}=\frac{a}{b}.$$

Если частное не изменяется от умножения делимого и делителя на одно и то же число, то оно не изменяется и от деления делимого и делителя на одно и то же число, так как деление на какое-нибудь число равносильно умножению на обратное число.

10. Применение свойств действий. Указанными свойствами действий можно часто пользоваться для преобразования алгебраических выражений; например:

а) $a+b+a+2+b+a+8$. Пользуясь сочетательным свойством сложения, сгруппируем слагаемые так:

$$(a + a + a) + (b + b) + (2 + 8).$$

Эту сумму короче можно написать так:

$$(a \cdot 3) + (b \cdot 2) + 10,$$

что, пользуясь переместительным свойством умножения, можно переписать так:

$$3a + 2b + 10.$$

б) $a + (b + a)$. Чтобы к числу a прибавить сумму $(b + a)$, можно к a прибавить b и затем ещё a; получим $a + b + a$. Сгруппируем слагаемые так:

$$(a + a) + b.$$

Эту сумму можно написать короче так:

$$a \cdot 2 + b, \quad \text{или} \quad 2a + b.$$

в) $a \cdot (3x^2a)$. Чтобы умножить число a на произведение $3x^2a$, можно a умножить на 3, полученный результат умножить на x^2 и т. д. Получим $a3x^2a$. Это произведение можно написать: $3a^2x^2$, поставив буквы в алфавитном порядке, а числовой множитель впереди.

г) $\left(\frac{1}{5}\,ax\right) \cdot 10$. Чтобы умножить произведение на 10, можно умножить на 10 один какой-нибудь сомножитель. Умножим $\frac{1}{5}$ на 10; тогда получим $2ax$.

д) $(a + x + 1) \cdot 3$. Согласно распределительному свойству умножения получим:

$$(a \cdot 3) + (x \cdot 3) + (1 \cdot 3),$$

что можно написать так:

$$3a + 3x + 3.$$

е) $\frac{9ab}{3}$. Чтобы разделить произведение $9ab$ на 3, можно разделить на 3 один сомножитель 9; разделив, получим $3ab$.

Упражнения.

Упростить следующие выражения, объяснив, какими свойствами действий приходится пользоваться в каждом примере:

10. $a + b + a + b + a$; $x + 10 + (12 - x) + 3$.

11. $5 + a(b - 5) + a$; $x + (a + x)$.

12. $m + (n - m)$; $5aabxabxx$.

13. $(3xy) \cdot (2z)$; $\left(\frac{2}{3}\,ax\right) \cdot 3$.

14. $(x+3) \cdot 5$; $7(x+y+z)$.

15. $(2a+8b-4c) : 4$; $(10a^2b) : 2$.

16. $(72x-18y) : 9$; $(20a^2x^3) : (5ax^2)$.

17. $\frac{a}{4} : \frac{b}{4}$; $\frac{15ax}{7} : \frac{5a}{7}$.

Глава 2

ОТНОСИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

I. Понятие о величинах, которые можно понимать в двух противоположных смыслах

11. Задачи. 1. Термометр в полночь показывал 2°, а в полдень 5°. На сколько градусов и как изменилась температура от полуночи до полудня?

В этой задаче условия выражены недостаточно полно: надо ещё указать, 2° тепла или 2° холода показывал термометр в полночь; подобные же указания должны быть сделаны и относительно температуры в полдень. Если, например, и в полночь и в полдень термометр указывал тепло, то температура за этот промежуток времени повысилась от 2° до 5°, значит, повысилась на 3°; если же в полночь термометр указывал 2° холода (ниже 0°), а в полдень 5° тепла (выше 0°), то температура повысилась на $2+5$, т. е. на 7°, и т. п.

В этой задаче речь идёт о величине, которую можно отсчитывать в двух противоположных направлениях: число градусов температуры можно отсчитывать вверх от нулевой черты термометра и вниз от нее. Принято температуру выше 0° (тепло) считать положительной и обозначать числом градусов со знаком «+», а температуру ниже 0° (холод) считать отрицательной и обозначать числом градусов со знаком «−» (не будет недоразумения, если первое число брать совсем без знака).

Выразим теперь нашу задачу примерно так: термометр в полночь показывал -2°, а в полдень $+5^\circ$. На сколько градусов и как изменилась температура от полуночи до полудня? В таком виде задача получает вполне определённый ответ: температура повысилась на $2+5$, т. е. на 7°.

2. Когда скорый поезд Октябрьской железной дороги (соединяющей Москву с Санкт-Петербургом) находился на расстоянии 100 км от станции Бологое (эта станция лежит приблизительно посредине между Москвой и Санкт-Петербургом), тогда почтовый поезд этой дороги был на расстоянии 50 км от Бологого.

На каком расстоянии находились тогда эти два поезда друг от друга?

В таком виде эта задача представляется не вполне определённой: в ней не сказано, находились ли поезда по одну сторону от Бологого, например, в сторону по направлению к Санкт-Петербургу, или же они были по разные стороны от Бологого. Если первое, то расстояние между поездами было, очевидно, 100 − 50, т. е. 50 км, а если второе, то это расстояние было 100 + 50, т. е. 150 км. Значит, для того чтобы эта задача была определённой, недостаточно задать величину расстояния поездов от Бологого, но ещё нужно указать, в каком направлении эти расстояния надо считать от Бологого.

Мы имеем здесь опять пример величины, в которой, кроме её размера, можно рассматривать ещё *направление*. Одно и то же расстояние (например, 100 км) от поезда до Бологого может быть взято в одном направлении (например, к Москве) и в другом, противоположном первому (к Санкт-Петербургу). Обыкновенные арифметические числа показывают только величину расстояния и ничего не говорят нам о направлении, в котором это расстояние взято.

В данном случае пришлось бы к числу, указывающему расстояние, присоединять указание направления, например, 100 км к Москве, 50 км к Санкт-Петербургу и т. п. Только тогда задача становится вполне определённой.

Указания направлений можно выполнить так:

Назовём какое-нибудь одно из двух направлений Октябрьской дороги (например, направление от Санкт-Петербурга к Москве) *положительным*, а противоположное направление (от Москвы к Санкт-Петербургу) *отрицательным*; сообразно этому расстояния, считаемые в положительном направлении, будем называть *положительными расстояниями*, а расстояния, считаемые в отрицательном направлении, будем считать *отрицательными*. Первые будем выражать числами со знаком «+» (плюс) или вовсе без знака, а вторые числами со знаком «−» (минус).

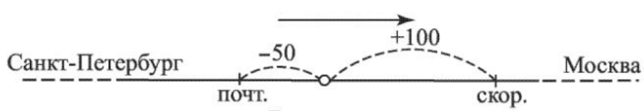

Рис. 1

Так, если поезд находится в месте, отстоящем на 100 км от Бологого по направлению к Москве, то мы будем говорить, что его расстояние от Бологого равно $+100$ км (или просто 100 км); если же поезд находится, положим, на 50 км от Бологого по направлению к Санкт-Петербургу, то мы скажем, что его расстояние от Бологого равно -50 км. Здесь знаки «+» и «−», конечно, не обозначают дейсгвий сложения и вычитания, а только служат условно для обозначения направлений.

Выразим теперь нашу задачу так: когда скорый поезд Октябрьской железной дороги находился от Бологого на расстоянии $+100$ км (или просто 100 км), тогда почтовый поезд этой дороги был от Бологого на расстоянии -50 км. Как велико было тогда расстояние между этими поездами? Теперь задача выражена вполне точно и ответ на неё получается определённый (см. рис. 1, на котором стрелка указывает положительное направление дороги); поезда находились на расстоянии $100 + 50$, т. е. 150 км.

12. Другие величины, которые можно понимать в двух противоположных смыслах. Кроме величин, указанных в предыдущих задачах, многие другие также могут быть рассматриваемы в двух противоположных смыслах. Таковы, например:

доход	в	противоположном	смысле	будет	расход
выигрыш	"	"	"	"	проигрыш
прибыль	"	"	"	"	убыток
имущество	"	"	"	"	долг и т. п.

Если доход, выигрыш, прибыль, имущество и т. п. условимся считать величинами положительными и выражать их числами со знаком «+» (или без знака), то расход, проигрыш, убыток, долг и т. п. принято считать величинами того же рода, но отрицательными и выражать их числами со знаком «−»; тогда можно говорить, что расход есть отрицательный доход, проигрыш есть отрицательный выигрыш и т. п. При таком соглашении понятны будут, например, такие словесные выражения: жилищное товарищество получило дохода с квартир: в январе $+200$ руб., в феврале $+150$ руб., в марте -50 руб. (значит, в марте получился убыток 50 руб.); или такие: у старшего брата имущества было на 500 руб., у среднего на 300 руб., а у младшего на -500 руб. (значит, у младшего брата был долг в 500 руб.).

Наряду с указанными величинами существует много других, в которых нельзя указать «направления»; например, нельзя понимать в двух противоположных смыслах такие величины, как объем, площадь и другие.

13. Относительные числа. Числа, изучаемые в арифметике, служат для выражения таких величин, направление которых не рассматривается (например, когда хотят знать только размер какого-нибудь расстояния, а не направление, по которому оно отсчитывается). Числа же, рассматриваемые в алгебре, служат для выражения размера величин и их направления. Для этого величину, понимаемую в каком-нибудь одном смысле, выражают числом с предшествующим ему знаком «+», а ту же величину, понимаемую в противоположном смысле, выражают числом с предшествующим ему знаком «−».

Число со знаком плюс (+) (который, впрочем, принято опускать) называется *положительным*; число со знаком минус (−) называется *отрицательным*. Так, $+10$, $+\frac{1}{2}$, $+0{,}3$ — положительные числа, а -8, $-\frac{5}{7}$, $-3{,}25$ — отрицательные числа. К числам присоединяют ещё 0 (нуль), не относя его ни к положительным, ни к отрицательным. Выражения $+0$, -0 и просто 0 считаются равносильными.

Числа положительные, отрицательные и нуль называются вообще *относительными числами*.

Абсолютной величиной положительного числа называется само это число. Абсолютной величиной отрицательного числа называется противоположное ему положительное число. Абсолютная величина нуля есть нуль. Абсолютная величина числа a обозначается: $|a|$. Например: $|+7| = +7$; $|+1| = +1$; $|-1| = +1$; $|-5| = +5$; $|0| = 0$.

Два относительных числа считаются *равными*, если у них одинаковы абсолютные величины и знаки.

14. Изображение числа на числовой оси. Отрезком прямой (рис. 2) называется часть какой-нибудь прямой линии, ограниченная с обеих сторон, например, с одной стороны точкой A, а с другой — точкой B. В каждом отрезке можно различать: во-первых, длину его, во-вторых, направление, которое для данного отрезка может быть двоякое. Например, во взятом нами отрезке можно различать направление или от точки A к точке B, или, наоборот, от B к A. Если мы рассматриваем взятый отрезок в направлении

Рис. 2

от A к B, то точку A мы будем называть началом отрезка, а точку B — его концом.

С помощью таких отрезков мы наглядно можем изображать относительные числа следующим образом. Возьмём какую-нибудь прямую (например, горизонтальную) и условимся, какое из двух направлений этой прямой считать положительным (рис. 3). Примем, например, направление слева направо (указанное стрелкой) за положительное, тогда противоположное

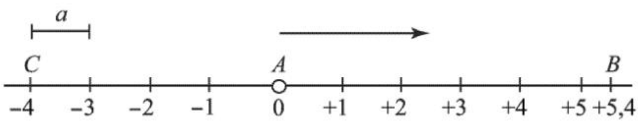

Рис. 3

направление — справа налево — мы будем считать отрицательным. Далее, примем какой-нибудь отрезок a (изображённый на чертеже) за единицу длины. Пусть теперь дано какое-нибудь положительное число, например, $+5{,}4$. Возьмём на нашей прямой произвольную точку A и примем её за начало отрезков; затем из этой точки отложим вправо 5,4 единиц длины, равных a. Тогда получим отрезок AB, длина которого равна 5,4 единиц и направление положительное. Конец B этого отрезка изобразит нам наглядно число $+5{,}4$. Возьмём теперь отрицательное число, например, -4. Чтобы изобразить его наглядно, отложим от той же точки A влево 4 единицы длины. Тогда получим отрезок AC, длина которого равна 4 единицам, а направление отрицательное; конец C этого отрезка изобразит число -4.

Можно представить себе, что все относительные числа изображены подобным образом, как концы направленных отрезков, отложенных на одной и той же прямой от одной и той же её точки A, принятой за н а ч а л о отрезков. Тогда на той части прямой, которая расположена направо от A, изобразятся точками положительные числа, а на части прямой, расположенной влево от A, изобразятся отрицательные числа. Число нуль изображается на этой прямой точкой A. Такая прямая часто называется *числовой прямой*, или *числовой осью*.

Так как направление отрезков, концы которых изображают числа со знаком «+», противоположно направлению отрезков, изображающих числа со знаком «−», то и самые эти знаки принято называть *противоположными* знаками. Всякие два числа, как $+3$ и -3, $+\frac{1}{2}$ и $-\frac{1}{2}$ и т. п., у которых знаки противоположны, а абсолютные величины одинаковы, называются *противоположными числами*.

Рассмотрим теперь, как производятся различные действия над *относительными числами*.

II. Сложение относительных чисел

15. Задача. Кооперативное товарищество получило прибыли в январе a рублей и в феврале b рублей. Сколько прибыли получило товарищество за два месяца?

Напишем формулу для решения этой задачи. Очевидно, что прибыль за два месяца равна сумме прибылей, полученных за каждый месяц в отдельности. Обозначив искомую сумму через x, получим формулу:

$$x = a + b.$$

Но кооператив может получить за один из этих месяцев или даже за оба не прибыль, а убыток. Чтобы можно было и в таких случаях применять нашу формулу, мы должны будем подразумевать под буквами a и b относительные числа, т. е. положительные или отрицательные, смотря по тому, были ли получены за данный месяц прибыль или убыток. Таким образом, мы должны уметь складывать относительные числа.

16. Сложение двух чисел. Разберём сначала два частных случая сложения относительных чисел.

а) *Сумма двух противоположных чисел равна нулю.* Так:

$$(+5) + (-5) = 0; \quad (-3) + (+3) = 0; \quad (+4{,}7) + (-4{,}7) = 0.$$

Вообще:

$$(+a) + (-a) = 0.$$

В самом деле, если, например, кооператив получил за один месяц прибыль, а за другой столько же убытка, то в результате он не имеет ни прибыли, ни убытка.

Точно так же, если поезд прошел от станции в каком-либо направлении 5 км, а затем в обратном направлении тоже 5 км, то в результате он оказался на той же станции и совсем не удалился от неё.

б) *Прибавить к какому-нибудь числу нуль или прибавить к нулю какое-нибудь число — значит оставить это число без изменения.* Так:

$$(+75) + 0 = +75; \qquad (-75) + 0 = -75;$$
$$0 + (+3{,}5) = +3{,}5; \qquad 0 + (-3{,}5) = -3{,}5.$$

Вообще:

$$(+a) + 0 = +a; \quad (-a) + 0 = -a.$$

В самом деле, если, например, кооператив получил в первый месяц 75 руб. прибыли или убытка, а в другой не получил ни прибыли, ни убытка, то в результате у него остались та прибыль или тот убыток, которые он получил в первый месяц.

Вернёмся теперь к задаче предыдущего параграфа. Мы написали общую формулу для её решения, именно: $x = a + b$.

Рассмотрим различные случаи, которые могут встретиться при замене букв a и b данными числами.

1-й случай. *За каждый месяц получена прибыль.* Например, в первый месяц получено 200 руб., а во второй 150 руб. прибыли.

В этом случае $a = +200$; $b = +150$. Очевидно, что:

$$x = (+200) + (+150) = +350,$$

т. е. кооператив получил за два месяца 350 руб. прибыли.

2-й случай. *За каждый месяц получен убыток.* Например, в первый месяц получено 200 руб., а во второй 150 руб. убытка.

В этом случае $a = -200$, $b = -150$. Очевидно, что:

$$x = (-200) + (-150) = -350,$$

т. е. кооператив получил за два месяца 350 руб. убытка.

Из этих примеров можно сделать такой вывод:

Чтобы сложить два числа с одинаковыми знаками, надо сложить их абсолютные величины и поставить тот же знак.

3-й случай. *За один месяц получена прибыль, а за другой убыток, причем прибыли получено больше, чем убытка.* Например, за первый месяц получено 200 руб. прибыли, а за второй 150 руб. убытка.

В этом случае: $a = +200$; $b = -150$. Очевидно, что в итоге кооператив получил всего 50 руб. прибыли, т. е.

$$x = (+200) + (-150) = +50.$$

4-й случай. *За один месяц получена прибыль, а за другой убыток, причем прибыли получено меньше, чем убытка.* Например, за первый месяц получено 200 руб. убытка, а за второй 150 руб. прибыли.

В этом случае: $a = -200$; $b = +150$. Очевидно, что в итоге за два месяца кооператив получил 50 руб. убытка, т. е.

$$x = (-200) + (+150) = -50.$$

Из последних двух примеров можно сделать следующий вывод:

Чтобы сложить два числа с разными знаками, надо найти разность их абсолютных величин и поставить перед ней знак того числа, у которого абсолютная величина больше.

Отбросив знак «+» перед положительным числом, мы можем написанные выше равенства написать короче:

$$200 + (-150) = 50; \quad -200 + 150 = -50.$$

17. Другое выражение правил сложения. Два правила сложения, указанные нами, можно заменить двумя другими правилами, очень удобными для применения:

а) *Прибавить положительное число значит прибавить его абсолютную величину*. Так:

$$(+7) + (+3) = +10 \text{ и } (+7) + 3 = 7 + 3 = 10;$$
$$(-7) + (+3) = -4 \text{ и } (-7) + 3 = -7 + 3 = -4.$$

б) *Прибавить отрицательное число значит отнять его абсолютную величину*. Так:

$$(+7) + (-10) = -3 \text{ и } (+7) - 10 = 7 - 10 = -3;$$
$$(-7) + (-10) = -17 \text{ и } (-7) - 10 = -7 - 10 = -17.$$

Эти два правила можно сокращённо выразить такими формулами двойных знаков:

$$+(+a) = +a; \quad +(-a) = -a.$$

18. Сложение трёх и более чисел. Сначала находят сумму двух первых слагаемых, к ней прибавляют третье слагаемое и т. д. Пусть, например, требуется найти сумму:

$$(+8) + (-5) + (-4) + (+3),$$

которую можно короче написать так:

$$8 + (-5) + (-4) + 3.$$

Производим сложение в таком порядке:

$$8 + (-5) = 3; \quad 3 + (-4) = -1; \quad (-1) + 3 = 2.$$

Впрочем, нет надобности придерживаться такого порядка, так как (как мы вскоре увидим, § 25) слагаемые можно переставлять и соединять в какие угодно группы.

Упражнения.

18. $(+7) + (+3)$; $(-7) + (-3)$; $\left(+\frac{1}{2}\right) + \left(+2\frac{1}{2}\right)$.

19. $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-2\frac{1}{2}\right)$; $(+10)+(-2)$; $(+10)+(-12)$.
20. $(-5)+(+5)$; $(-5)+(+2)$; $4+(-3)$.
21. $(-4)+3$; $8+(-10)$; $(-8)+10$.
22. $(+8)+(-5)+(-3)+(+2)$.
23. $(-7)+(-3)+(-1)+(+11)$.

III. Вычитание относительных чисел

19. Задача. Прибыль фабрики за 2 месяца, январь и февраль, составила a рублей. Как велика была прибыль за один февраль, если известно, что за январь фабрика дала b рублей прибыли?

Прибыль за два месяца есть сумма прибылей, полученных отдельно за каждый месяц, причём прибыль может выражаться иногда числом положительным, иногда числом отрицательным (убыток).

Поэтому искомая прибыль за февраль должна быть таким положительным или отрицательным числом, которое, будучи сложено по правилам сложения относительных чисел с прибылью за январь, составит в сумме прибыль за оба месяца. Таким образом, в нашей задаче даны: сумма a и одно слагаемое b, требуется отыскать другое слагаемое.

Действие, посредством которого по данной сумме двух слагаемых и одному из этих слагаемых находится другое слагаемое, называется вычитанием, безразлично, будут ли даны числа арифметические или относительные; при этом данная сумма называется *уменьшаемым*, данное слагаемое — *вычитаемым*, а искомое число — *разностью*. Из этого следует, что правильность вычитания мы всегда можем проверять сложением: найдя искомую разность, сложим её с вычитаемым; если в сумме получим уменьшаемое, то вычитание сделано верно.

20. Нахождение разности как одного из двух слагаемых. Обозначив искомую разность в нашей задаче через x, мы можем написать:

$$x = a - b.$$

Найдём величину разности $a-b$ в следующих частных случаях:

а) Пусть $a = +1\,000$; $b = +400$. Это значит, что в январе фабрика дала прибыли 400 руб., а всего за два месяца было получено прибыли 1 000 руб.; очевидно, февраль дал тоже прибыль в 600 руб. Значит:

$$x = (+1\,000) - (+400) = +600,$$

или, проще:

$$x = 1000 - 400 = 600.$$

Проверим результат сложением:

$$(+600) + (+400) = +1\,000.$$

б) Пусть $a = +1\,000$ и $b = +1\,000$. Это значит, что за январь фабрика дала 1000 руб. прибыли и за два месяца прибыль осталась в том же размере. Очевидно, что в феврале фабрика не дала ни прибыли, ни убытка. Значит:

$$x = (+1\,000) - (+1\,000) = 0.$$

Проверим сложением:

$$(+1\,000) + 0 = +1\,000.$$

Вычитание сделано правильно. Таким же рассуждением найдём, что

$$(-1\,000) - (-1\,000) = 0.$$

в) $a = +1\,000$; $b = +1\,200$. Это значит, что в январе фабрика дала прибыли 1 200 руб., а за два месяца получилось прибыли всего 1 000 руб. Очевидно, что часть январской прибыли, именно 200 руб., пошла на покрытие февральского убытка. Отсюда:

$$x = (+1\,000) - (+1\,200) = -200,$$

или, проще:

$$x = 1\,000 - 1\,200 = -200.$$

Проверим сложением:

$$(-200) + (1\,200) = +1\,000.$$

г) $a = +1\,000$; $b = -200$. Это значит, что в январе фабрика дала убыток в 200 руб., а в итоге за два месяца получилась прибыль в 1 000 руб. Очевидно, эту прибыль дал февраль, который, кроме того, покрыл январский убыток в 200 руб., т. е. должен был дать прибыль в 1 200 руб. Отсюда:

$$x = (+1\,000) - (-200) = +1\,200, \text{ или } x = 1\,000 - (-200) = 1\,200.$$

Проверим сложением:

$$(+1\,200) + (-200) = +1\,000.$$

д) $a = -100$; $b = +800$. Это значит, что январь дал прибыль в 800 руб., тогда как в итоге за два месяца получился убыток в 100 руб. Очевидно, что февраль дал убыток, который уничтожил всю январскую прибыль 800 руб., и осталось ещё убытка 100 руб., т. е. весь февральский убыток равен 900 руб. Отсюда:

$$x = (-100) - (+800) = -900, \text{ или } x = -100 - 800 = -900.$$

Проверим сложением:

$$(-900) + (+800) = -100.$$

е) $a = -100$; $b = -150$, т. е. январь дал убытка 150 руб., а в итоге за два месяца получилось убытка всего 100 руб. Значит, часть январского убытка, именно 50 руб., была покрыта такой же февральской прибылью. Отсюда:

$$x = (-100) - (-150) = +50.$$

Проверим сложением:

$$50 + (-150) = -100.$$

21. Правило вычитания. Присматриваясь к приведённым в предыдущем параграфе примерам, мы можем заметить, что в каждом из рассмотренных нами случаев мы могли бы вычитание данного нам числа заменить прибавлением числа, ему противоположного.

В самом деле, возьмём, например, случай а):

$$(+1\,000) - (+400) = +600.$$

Вместо вычитания числа +400 прибавим число, ему противоположное:

$$(+1\,000) + (-400) = +600.$$

Получим тот же результат.

Возьмём случай г):

$$(+1\,000) - (-200) = +1\,200.$$

Заменим вычитание прибавлением противоположного числа:

$$(+1\,000) + (+200) = +1\,200.$$

Результат тот же.

Возьмём, наконец, случай д):

$$(-100) - (+800) = -900.$$

Но точно так же:

$$(-100) + (-800) = -900.$$

То же можно показать и относительно всех остальных случаев.

Таким образом, во всех случаях мы можем вычитание данного числа заменить прибавлением к уменьшаемому числа, противоположного вычитаемому. Другими словами, действие вычитания мы можем заменить действием сложения, производить которое мы уже умеем. Отсюда следует правило:

Чтобы вычесть какое-нибудь число, достаточно к уменьшаемому прибавить число, противоположное вычитаемому.

22. Формулы двойных знаков. Таким образом, согласно данному правилу, вычитание числа $+a$ можно заменить прибавлением противоположного числа $-a$, а вычитание числа $-a$ можно заменить прибавлением противоположного числа $+a$; это можно выразить такими формулами двойных знаков:

$$-(+a) = -a; \; -(-a) = +a.$$

23. Алгебраическая сумма и разность. Относительные числа дают возможность всякую разность представить в виде суммы и, наоборот, всякую сумму изобразить в виде разности. Например, разность $7 - 3$ может быть написана так: $(+7) + (-3)$, или проще: $7 + (-3)$; сумма $4 + 2$ может быть изображена так: $(+4) - (-2)$, или проще: $4 - (-2)$.

Подобно этому, всякое выражение, представляющее собой ряд последовательных сложений и вычитаний, может быть представлено в виде суммы. Например:

$$20 - 5 + 3 - 7 = 20 + (-5) + 3 + (-7).$$

Поэтому в алгебре все случаи сложения и вычитания относительных чисел можно объединить в одно действие, которое называют *алгебраическим сложением*.

Сумму, в которой слагаемые могут быть числами положительными, отрицательными и равными нулю, принято называть *алгебраической суммою*, в отличие её от арифметической суммы, в которой все слагаемые — числа обыкновенные (арифметические). Равным образом разность называется *алгебраической*, если в ней уменьшаемое и вычитаемое — числа относительные.

24. Сравнение относительных чисел по величине. Когда мы говорим, что 10 больше 7, это значит, что разность $10 - 7$ есть число положительное, тогда как разность $7 - 10$ есть число отрицательное. Условимся распространить это понятие о большем и меньшем на числа относительные, а именно: будем считать, что *относительное число a больше другого относительного числа b в том случае, если разность $a - b$ есть число положительное, и a меньше b тогда, когда разность $a - b$ есть число отрицательное*. При этом условии мы должны принимать, что:

1. *Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа*, например, $8 > 0$ и $8 > -10$, так как обе разности $8 - 0$ и $8 - (-10)$ — положительные числа.

2. *Всякое отрицательное число меньше нуля и меньше всякого положительного числа*, например, $-5 < 0$ и $-5 < +2$, так как разности $-5 - 0$ и $-5 - (+2)$ — отрицательные числа.

3. *Из двух отрицательных чисел то больше, у которого абсолютная величина меньше*, так, $-5 > -12$, так как разность $-5 - (-12)$ равна положительному числу $+7$.

Для ясного представления сравнительной величины относительных чисел всего лучше обратиться к наглядному изображению их на числовой оси. Выбрав произвольную единицу длины a (рис. 4), вообразим, что на неограниченной прямой вправо от какой-нибудь её точки A, принятой за начало, отложены отрезки,

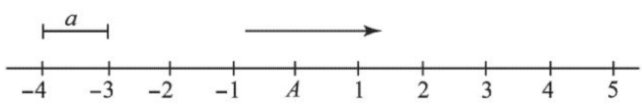

Рис. 4

изображающие положительные числа, а влево от той же точки отложены отрезки, изображающие отрицательные числа. Тогда, двигаясь по этой прямой слева направо (как указывает стрелка на рисунке), мы будем постоянно переходить от чисел меньших к бо́льшим, а двигаясь в обратном направлении, справа налево, будем постоянно переходить от чисел бо́льших к меньшим. Другими словами, из двух любых чисел то больше, которое помещается правее на числовой оси. На этой оси легко проверить справедливость только что высказанных трёх положений о сравнительной величине относительных чисел.

З а м е ч а н и е. Если желают выразить, что a есть число положительное, то пишут $a > 0$; если же надо показать, что a — отрицательное число, то пишут $a < 0$.

Упражнения.

24. Товар куплен за a рублей, а продан за b рублей. Сколько получено прибыли? Вычислить эту прибыль, если $a = 40$ и $b = 35$. Что означает здесь отрицательный ответ?

25. Некто ежемесячно получает дохода m рублей, а тратит n рублей. Сколько у него остаётся ежемесячно? Вычислить ответ при $m = 120$ и $n = 130$. Что означает отрицательный ответ?

В следующих примерах произвести указанные действия:

26. $12 - (-2)$; $5 - (-5)$; $(+8) - (-10)$; $(+1) - (-1)$.

27. $a - (-b)$; $(+m) - (-n)$; $(+2x) - (-3x)$.

28. $10 + (+2) - (-4) - (+2) + (-2)$.

29. Вычислить сумму $a + b + c + d$ при $a = 2$, $b = -3$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = -\frac{1}{4}$.

30. Вычислить разность $m - n$ при $m = -10$ и $n = -15$.

31. Представить выражение $10 - 2 - 3 + 7$ в виде суммы относительных чисел.

32. Представить сумму $10 + 8$ в виде разности относительных чисел.

IV. Главнейшие свойства сложения и вычитания относительных чисел

25. Примеры. Убедимся на примерах, что те свойства сложения и вычитания, которые мы указали для чисел арифметических (§ 6, 7), сохраняются также и для чисел относительных.

а) Переместительный закон: *сумма не изменяется от перемещения слагаемых*. Например:

$$(+20) + (-5) = +15 \text{ и } (-5) + (+20) = +15;$$
$$(-10) + (-2) + (+40) = +28;$$
$$(+40) + (-10) + (-2) = +28;$$
$$(-2) + (+40) + (-10) = +28 \text{ и т. п.}$$

б) Сочетательный закон: *сумма не изменится, если какие-нибудь слагаемые мы заменим их суммой*.

Так, при вычислении суммы

$$(-4) + (+3) + (-1) + (+5) = +3$$

мы можем какие-нибудь из слагаемых, например второе и третье, заменить их суммой, вычислив её предварительно: $(+3) + (-1) = +2$; тогда будем иметь: $(-4) + (+2) + (+5) = +3$, т. е. мы получим ту же сумму, что и прежде.

в) *Чтобы к какому-нибудь числу прибавить сумму нескольких слагаемых, можно к этому числу прибавить каждое слагаемое одно за другим.*

Пусть, например, требуется к числу 40 прибавить сумму $20 + (-5) + (+7)$, что можно выразить так:

$$40 + [20 + (-5) + (+7)].$$

Мы можем сначала вычислить прибавляемую сумму:

$$20 + (-5) = 20 - 5 = 15; \quad 15 + (+7) = 15 + 7 = 22$$

и затем полученное число $+22$ прибавить к 40:

$$40 + (+22) = 62.$$

Но вместо этого мы можем к 40 прибавить сначала первое слагаемое 20, потом второе слагаемое -5 и, наконец, третье слагаемое $+7$:

$$40 + 20 = 60; \quad 60 + (-5) = 55; \quad 55 + (+7) = 62.$$

Окончательная сумма оказывается та же самая.

г) *Чтобы от какого-нибудь числа отнять сумму нескольких слагаемых, можно от этого числа отнять каждое слагаемое отдельно одно за другим.*

Пусть, например, нам нужно из 20 вычесть сумму $10 + (-4) + (-3)$, что можно выразить так:

$$20 - [10 + (-4) + (-3)].$$

Мы можем сначала вычислить вычитаемую сумму:

$$10 + (-4) = 10 - 4 = 6; \quad 6 + (-3) = 6 - 3 = 3,$$

затем полученное число отнять от 20:

$$20 - 3 = 17.$$

Но вместо этого мы можем отнять от 20 сначала первое слагаемое 10, потом второе слагаемое -4 и, наконец, третье слагаемое -3:

$$20 - 10 = 10; \quad 10 - (-4) = 10 + 4 = 14;$$
$$14 - (-3) = 14 + 3 = 17.$$

Мы получили то же самое число, что и прежде.

Так же можно показать справедливость и остальных свойств сложения и вычитания для относительных чисел.

V. Умножение относительных чисел

26. Задача. По Октябрьской железной дороге идёт поезд со средней скоростью v км/ч [1]. В полдень поезд находится на станции Бологое. Где будет находиться поезд через t часов?

Выведем формулу для решения этой задачи. Если в 1 час поезд проходит v километров, то в t часов он пройдёт в t раз большее расстояние. Значит, искомое расстояние x равно v, умноженному на t:

$$x = vt.$$

Если, например, $v = 40$ и $t = 3$, то поезд находится на расстоянии $40 \cdot 3 = 120$ км от станции Бологое.

Это решение не даёт ещё точного ответа на вопрос, поставленный в задаче. Мы не знаем, *в каком направлении* мы должны отсчитывать эти 120 км: к Москве или Санкт-Петербургу. Введение относительных чисел даёт нам возможность точно ответить на поставленный вопрос.

Условимся считать положительным направление от Санкт-Петербурга к Москве. Тогда все расстояния, которые мы будем отсчитывать от станции Бологое по направлению к Москве, будут положительными, а по направлению к Санкт-Петербургу — отрицательными. Соответственно, скорость, т. е. расстояние, проходимое поездом в 1 час, будет положительной, если поезд идёт к Москве, и отрицательной, если он идёт к Санкт-Петербургу.

Теперь мы можем дать более точный ответ на поставленный вопрос.

Если поезд шёл к Москве, значит, скорость его была $+40$ км/ч, и через 3 часа он будет на расстоянии $x = (+40) \times 3 = +120$ км от Бологого, т. е. продвинется на 120 км по направлению к Москве (рис. 5).

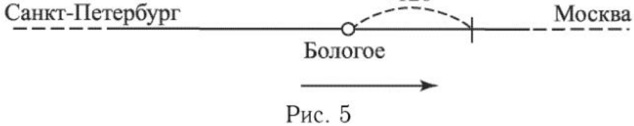

Рис. 5

Если поезд шёл к Санкт-Петербургу, то скорость его была -40 км/ч, и через 3 часа он будет находиться в $(-40) + (-40) +$

[1] Для простоты вычислений мы предполагаем, что поезд идёт всё время с одной и той же скоростью, и не принимаем во внимание остановок на станциях.

$+ (-40) = -120$ км от Бологого, т. е. в 120 км по направлению к Санкт-Петербургу (рис. 6). Из этого мы заключаем, что

$$x = (-40) \cdot 3 = -120.$$

Теперь наша формула $x = vt$ даёт нам точный ответ на вопрос, где будет находиться поезд, только v будет принимать положительные или отрицательные значения, смотря по направлению, в котором поезд движется.

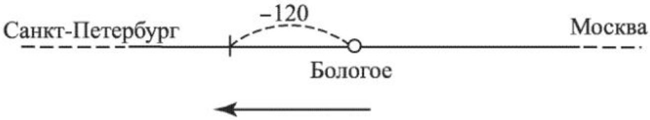

Рис. 6

Если, например, $v = +50$ и $t = +4$, то формула даёт:

$$x = (+50) \cdot (+4) = +200,$$

т. е. поезд будет находиться в 200 км от Бологого по направлению к Москве.

Если $v = -30$ и $t = +2$, то:

$$x = (-30) \cdot (+2) = -60,$$

т. е. поезд будет находиться в 60 км от Бологого по направлению к Санкт-Петербургу.

Как известно из арифметики, *умножение на целое число есть действие, посредством которого одно число (множимое) повторяется слагаемым столько раз, сколько единиц в другом числе (множителе). Умножение на дробь есть действие, посредством которого находится такая дробь множимого, какую множитель составляет от единицы.*

Из предыдущей задачи видно, что эти определения применимы и к умножению относительных чисел, когда множитель есть положительное число. Например, умножить -5 на $+3$ (или просто на 3) значит повторить -5 слагаемым 3 раза (получим -15); умножить 0 на 5 значит повторить 0 слагаемым 5 раз (получим 0); умножить -12 на $+\frac{3}{4}$ $\left(\text{или просто на } \frac{3}{4}\right)$ значит найти $\frac{3}{4}$ от -12 (получим -9).

27. Умножение на отрицательное число. Изменим предыдущую задачу так: сейчас, в полдень, поезд находится на станции Бологое; где он был 3 часа назад? Для решения задачи мы опять должны будем умножить скорость движения поезда на время движения. Обе задачи имеют сходные условия и одинаковый способ решения, но ответ будет различен, смотря по тому, идёт ли речь о трех часах до полудня или после полудня.

Если мы хотим, чтобы наша формула $x = vt$ давала нам сразу точный ответ во всех случаях, поступим следующим образом.

Будем считать время после полудня положительным, а до полудня отрицательным, и, соответственно этому, число t будет положительным или отрицательным, смотря по тому, о каком времени идёт речь. Таким образом, оба множителя, v и t, могут теперь принимать положительные и отрицательные значения.

Рассмотрим все случаи, которые возможны при решении нашей задачи, причём везде будем считать, что поезд в полдень находится в Бологом и идёт со скоростью 40 км/ч.

Случай 1-й. Поезд идёт к Москве; где он будет через 3 часа?

В этом случае скорость положительна: $v = +40$; время тоже положительно: $t = +3$. Этот случай был нами уже рассмотрен, и был получен ответ:

$$x = (+40) \cdot (+3) = +120.$$

Случай 2-й. Поезд идёт к Санкт-Петербургу; где он будет через 3 часа?

Здесь скорость отрицательна: $v = -40$; время положительно: $t = +3$. Этот случай мы также уже рассматривали. Решение даёт:

$$x = (-40) \cdot (+3) = -120.$$

Случай 3-й. Поезд идёт к Москве; где он был 3 часа назад?

В этом случае скорость положительна: $v = 40$, а время отрицательно: $t = -3$.

Очевидно, что 3 часа назад поезд находился между Санкт-Петербургом и станцией Бологое, в 120 км от последней (рис. 7).

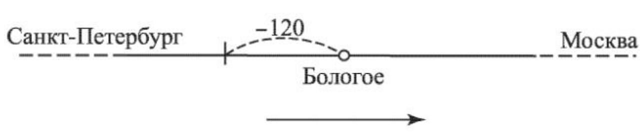

Рис. 7

Расстояние 120 км находится влево от Бологого, следовательно, оно отрицательно. Таким образом:

$$x = (+40) \cdot (-3) = -120.$$

С л у ч а й 4-й. Поезд идёт к Санкт-Петербургу; где он был 3 часа назад?

Здесь и скорость и время отрицательны: $v = -40$ и $t = -3$. Очевидно, что 3 часа назад поезд находился между Москвой и станцией Бологое, в 120 км от последней (рис. 8).

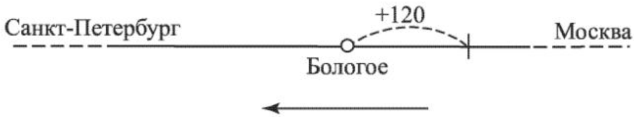

Рис. 8

Расстояние от Бологого к Москве положительно, следовательно:

$$x = (-40) \cdot (-3) = +120.$$

28. Правило умножения. Если бы в предыдущей задаче мы взяли вместо чисел 40 и 3 какие-либо другие (в том числе и дробные), то, очевидно, ход наших рассуждений от этого не изменился бы. Установим теперь общее правило для умножения относительных чисел.

Выпишем все случаи, которые встретились при умножении, и обобщим их для любых чисел:

$$\begin{array}{llll}
(+40) \cdot (+3) = +120 & \text{или} & \text{вообще:} & (+a) \cdot (+b) = +ab; \\
(-40) \cdot (+3) = -120 & \text{"} & \text{"} & (-a) \cdot (+b) = -ab; \\
(+40) \cdot (-3) = -120 & \text{"} & \text{"} & (+a) \cdot (-b) = -ab; \\
(-40) \cdot (-3) = +120 & \text{"} & \text{"} & (-a) \cdot (-b) = +ab.
\end{array}$$

Сопоставляя эти случаи друг с другом, мы замечаем, что:

1. Если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, то произведение положительно.

2. Если оба сомножителя имеют противоположные знаки, то произведение отрицательно.

3. Абсолютная величина произведения равна произведению абсолютных величин сомножителей.

Отсюда получаем следующее общее п р а в и л о:

Чтобы найти произведение двух относительных чисел, надо перемножить их абсолютные величины и произведение взять со знаком «+», если оба сомножителя имеют одинаковые знаки, и со знаком «−», если они имеют противоположные знаки.

Часть этого правила, касающаяся знаков, носит название *правила знаков*. Его обыкновенно выражают так: *при умножении двух чисел одинаковые знаки дают «+», а разные дают «−».*

Рассматривая приведённые примеры, можно установить ещё следующее правило, которым иногда в дальнейшем придётся пользоваться: *при умножении на положительное число знак множимого сохраняется* (т. е. произведение имеет тот же знак, что и множимое); *при умножении на отрицательное число знак множимого изменяется на противоположный*.

Заметим ещё, что произведение всегда равно нулю, если один из сомножителей равен нулю.

29. Произведение трёх и более чисел. Знак произведения. Пусть требуется вычислить произведение:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)\cdot(-5).$$

Для этого умножим первое число на второе, полученное произведение умножим на третье число, вновь полученное произведение умножим на четвёртое число и т. д.

$$(+2)\cdot(-1)=-2;\quad (-2)\cdot(+3)=-6;\quad (-6)\cdot(-10)=+60;$$
$$(+60)\cdot(-4)=-240;\quad (-240)\cdot(-5)=+1\,200.$$

Если перемножаются только одни положительные числа, то произведение положительно. Но когда все или некоторые сомножители отрицательные, то *произведение окажется положительным в том случае, если число отрицательных сомножителей чётное, и отрицательным в том случае, когда число таких сомножителей нечётное*. Так:

один отрицательный сомножитель: $(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)=-6;$

два отрицательных сомножителя: $(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)=+60;$

три отрицательных сомножителя:

$$(+2)\cdot(-1)\cdot(+3)\cdot(-10)\cdot(-4)=-240 \text{ и т. д.}$$

30. Степень отрицательного числа. Применим правило предыдущего параграфа к умножению одинаковых сомножителей, т. е. к возведению в степень.

Найдём квадрат какого-нибудь отрицательного числа:

$$(-3)^2=(-3)\cdot(-3)=+9;\qquad (-7)^2=(-7)\cdot(-7)=+49.$$

Вообще:

$$(-a)^2=(-a)\cdot(-a)=+a^2,$$

т. е. *квадрат отрицательного числа есть число положительное*.

Найдём теперь куб какого-нибудь отрицательного числа:

$$(-2)^3 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -8;$$
$$(-6)^3 = (-6)\cdot(-6)\cdot(-6) = -216.$$

Вообще:

$$(-a)^3 = (-a)\cdot(-a)\cdot(-a) = -a^3,$$

т. е. *куб отрицательного числа есть число отрицательное.*

Нетрудно заметить, что *при возведении отрицательного числа в любую чётную степень получается положительное число*, так как число отрицательных множителей в этом случае чётное (см. § 29). Так:

$$(-3)^4 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = +81;$$
$$(-2)^6 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = +64 \text{ и т. д.}$$

По той же причине *любая нечётная степень отрицательного числа даёт всегда число отрицательное*. Так:

$$(-3)^5 = (-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3)\cdot(-3) = -243;$$
$$(-2)^7 = (-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2) = -128 \text{ и т. д.}$$

Таким образом:

Чётная степень отрицательного числа есть число положительное, а нечётная степень — число отрицательное. В частности, заметим, что:

$$(-1)^2 = (-1)^4 = (-1)^6 = \ldots = +1,$$
$$(-1)^3 = (-1)^5 = (-1)^7 = \ldots = -1.$$

Упражнения.

33. $(-2)\cdot(-3)$; $(+7)\cdot(-2)$; $(-8)\cdot(-10)$.

34. $\left(-8\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+2\frac{3}{4}\right)$; $(+0{,}36)\cdot\left(-\frac{3}{8}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)$.

35. $(-1)^2$; $(-1)^3$; $(-1)^4$; $(-1)^5$.

36. Вычислить выражение $ax^2 + bx + c$ при $a = 3$, $b = -4$, $c = -5$ и $x = 4$.

37. Вычислить то же выражение при $a = -3$, $b = 4$, $c = 5$ и $x = 4$.

38. $4\cdot 0$; $5\frac{1}{2}\cdot 0$; $0{,}3\cdot 0$; $-8\frac{3}{4}\cdot 0$; $0\cdot x$.

39. $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(+3{,}5)\cdot(+2)\cdot\left(-\frac{7}{8}\right)$.

VI. Деление относительных чисел

31. Определение. *Деление относительных чисел* (*как и арифметических*) *есть действие, посредством которого по данному произведению двух сомножителей и одному из этих сомножителей отыскивается другой сомножитель.* Так, разделить $+10$ на -2 значит найти такое число x, чтобы произведение $(-2)\cdot x$ равнялось $+10$; такое число есть -5, так как произведение -5 на -2 равно $+10$.

Из этого определения следует, что правильность деления можно проверять умножением: если, умножив частное на делитель, мы получим делимое, то действие сделано верно.

32. Вывод правила деления. Рассмотрим следующие примеры деления относительных чисел:

$$\begin{array}{llll} (+10):(+2)=+5, & \text{потому} & \text{что} & (+2)\cdot(+5)=+10;\\ (-10):(-2)=+5, & \text{"} & \text{"} & (-2)\cdot(+5)=-10;\\ (-10):(+2)=-5 & \text{"} & \text{"} & (+2)\cdot(-5)=-10;\\ (+10):(-2)=-5, & \text{"} & \text{"} & (-2)\cdot(-5)=+10. \end{array}$$

Из этих примеров выводим правило:

Чтобы разделить одно число (*делимое*) *на другое* (*делитель*), *надо разделить абсолютную величину делимого на абсолютную величину делителя и результат взять со знаком «+», когда оба данных числа имеют одинаковые знаки, и со знаком «−», когда они имеют разные знаки.*

Таким образом, правило знаков при делении остаётся то же самое, что и при умножении.

33. Случаи, когда делимое или делитель равны нулю.

а) Пусть требуется разделить 0 на какое-нибудь число, например, на $+10$. Это значит, что требуется найти такое число, которое надо умножить на $+10$, чтобы получить в произведении 0. Такое число есть 0, и только 0, так как $0\cdot(+10)=0$, а произведение какого-нибудь другого числа, не нуля, на $+10$ не может, очевидно, равняться 0. Подобным образом находим:

$$\begin{array}{llll} 0:(-2)=0, & \text{потому} & \text{что} & (-2)\cdot 0=0;\\ 0:\dfrac{3}{4}=0, & \text{"} & \text{"} & \dfrac{3}{4}\cdot 0=0 \quad \text{и т. п.} \end{array}$$

Значит, *если делимое равно нулю, а делитель не равен нулю, то частное должно быть нуль.*

б) Положим теперь, что делитель будет 0, а делимое — какое-нибудь другое число, например, $(+5):0$. Это значит, что требуется найти такое число, которое надо умножить на 0, чтобы получить $+5$. Но какое бы число мы ни умножили на 0, мы не получим никакого другого числа, кроме 0; значит, частное $(+5):0$ не может равняться никакому числу. Подобно этому невозможны деления:

$$(-5):0;\quad (+0{,}3):0;\quad (-7{,}26):0 \quad \text{и т. п.}$$

Вообще, *если делитель равен нулю, а делимое не равно нулю, то деление невозможно*.

в) Возьмём, наконец, такой случай, когда и делимое равно 0, и делитель равен 0:

$$0:0=?$$

В этом случае не имеет смысла говорить о частном, так как всякое число, умноженное на нуль, даёт в результате нуль.

Например,

$$5\cdot 0=0;\quad 7\cdot 0=0;\quad (-100)\cdot 0=0 \text{ и т. п.}$$

Выражению $\frac{0}{0}$ условились не приписывать никакого определённого численного значения.

Упражнения.

40. $(+20):(+4)$; $(+20):(-4)$; $(-20):(+4)$; $(-20):(-4)$.

41. $(+2a):(-2)$; $(-5x):x$; $(-7x^2):(-7)$.

42. $0:8$; $0:\frac{1}{2}$; $0:0{,}3$; $0:a$.

VII. Главные свойства умножения и деления

34. Примеры. Убедимся на примерах, что те свойства умножения и деления, которые мы указали для чисел арифметических (§ 8 и 9), сохраняются также и для чисел относительных.

а) ***Переместительный закон***: *произведение не изменяется при изменении порядка сомножителей.*

Возьмём сначала примеры умножения только двух чисел:

$$(+5)\cdot(+2)=+10 \quad \text{и} \quad (+2)\cdot(+5)=+10;$$
$$(-5)\cdot(+2)=-10 \quad \text{и} \quad (+2)\cdot(-5)=-10;$$
$$\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)=+\frac{9}{20} \text{ и } \left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=+\frac{9}{20} \text{ и т. п.}$$

Возьмём теперь произведение, состоящее более чем из двух сомножителей, например, такое: $(-2)\cdot(-5)\cdot(+3)$. Абсолютная величина этого произведения равна $2\cdot 5\cdot 3$, знак же окажется

«+» или «−», смотря по тому, чётно или нечётно число отрицательных сомножителей (в нашем примере знак будет «+»). Если мы переставим сомножители, например, так: $(+3)\cdot(-5)\times$ $\times(-2)$, то получим новое произведение, у которого абсолютная величина равна $3\cdot 5\cdot 2$, а знак будет «+» или «−», смотря по тому, чётно или нечётно число отрицательных сомножителей. Но $3\cdot 5\cdot 2 = 2\cdot 5\cdot 3$ (по переместительному закону умножения арифметических чисел) и число отрицательных сомножителей остаётся то же самое, что и прежде. Значит, у обоих произведений абсолютная величина будет одна и та же и знаки одинаковы. Поэтому:

$$(-2)\cdot(-5)\cdot(+3) = (+3)\cdot(-5)\cdot(-2).$$

б) ***Сочетательный закон***: *произведение нескольких сомножителей не изменится, если какие-либо из них заменим их произведением.*

Так, вместо того чтобы производить умножение

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2)$$

в том порядке, в каком написаны сомножители, т. е. так:

$$(-5)\cdot(+3) = -15, \qquad (-15)\cdot(-2) = +30,$$

мы можем взять любые два сомножителя, например, $+3$ и -2, заменить их произведением, т. е. числом -6, и потом умножить на это число третий сомножитель: $(-5)\cdot(-6) = +30$. Таким образом:

$$(-5)\cdot(+3)\cdot(-2) = (-5)\cdot[(+3)\cdot(-2)].$$

в) *Чтобы умножить какое-нибудь число на произведение нескольких сомножителей, можно умножить это число на первый сомножитель, полученное произведение умножить на второй сомножитель и т. д.* И точно так же: *чтобы разделить какое-нибудь число на произведение нескольких сомножителей, можно разделить это число на первый сомножитель, результат разделить на второй сомножитель и т. д.*

Так, чтобы умножить $+10$ на произведение $(-2)\cdot(+3)$, мы можем сначала вычислить это произведение (оно равно -6) и затем на него умножить $+10$ (получим -60); но можем умножить $+10$ сначала на -2 (получим -20) и затем полученное произведение умножить на $+3$ (получим -60). Таким образом:

$$(+10)\cdot[(-2)\cdot(+3)] = (+10)\cdot(-2)\cdot(+3).$$

Вообще: $a(bc) = (a\cdot b)\cdot c$.

Равным образом:

$$10 : [(-2) \cdot (+3)] = [10 : (-2)] : (+3),$$

так как

$$10 : [(-2) \cdot (+3)] = 10 : (-6) = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3}$$

и

$$[10 : (-2)] : (+3) = (-5) : (+3) = -\frac{5}{3}.$$

Вообще: $a : (bc) = (a : b) : c$.

Так же можно обнаружить справедливость и распределительного свойства.

г) Покажем ещё следующее свойство деления: *если делимое и делитель умножим* (*или разделим*) *на одно и то же число* (*кроме нуля*), *то частное не изменится.*

Как мы видели прежде (§ 9, д), равенство $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ верно для всяких арифметических чисел как целых, так и дробных. Теперь мы проверим, что это равенство остаётся верным и тогда, когда все или некоторые буквы a, b и m будут означать числа относительные.

Возьмём какой-нибудь пример деления, например, $5 : 0{,}8$, и умножим делимое и делитель, положим, на 3. От этого частное не изменится, так как все числа арифметические, и поэтому мы можем написать равенство:

$$\frac{5}{0{,}8} = \frac{5 \cdot 3}{0{,}8 \cdot 3} = \frac{15}{2{,}4}.$$

Пусть теперь в этом равенстве какое-нибудь число будет отрицательным; пусть, например, вместо 5 будет -5:

$$\frac{-5}{0{,}8} = \frac{-5 \cdot 3}{0{,}8 \cdot 3} = -\frac{15}{2{,}4}.$$

Равенство осталось верным, так как абсолютные величины обоих частных не изменились и оба частные — отрицательные числа.

Так же легко проверить, что равенство остаётся верным и тогда, когда второе число или третье сделаем отрицательным. Значит, какие бы положительные или отрицательные числа под буквами a, b и m мы ни разумели, равенство $\frac{a}{b} = \frac{am}{bm}$ остаётся всегда верным.

Частное не изменится также и от деления делимого и делителя на одно и то же число, так как деление равносильно умножению на обратное число.

Заметим, однако, что число, на которое мы умножаем (или делим) делимое и делитель, не должно быть нулём, так как в этом случае, согласно п. в) § 33, частное теряет смысл.

Упражнения.

43. Убедиться проверкой, что следующие равенства верны:

$$(-5)\cdot(+2)\cdot(-1) = (+2)\cdot(-1)\cdot(-5) = (+2)\cdot(-5)\cdot(-1);$$

$$10\cdot(-3)\cdot(-2)\cdot(+5) = 10\cdot[(-3)\cdot(-2)\cdot(+5)] = \\ = 10\cdot(-2)\cdot[(-3)\cdot(+5)];$$

$$[10+(-3)+(-2)]\cdot(-7) = 10\cdot(-7)+(-3)\cdot(-7)+(-2)\cdot(-7);$$

$$\left(\frac{3}{4}-0{,}2+\frac{7}{8}\right)\cdot 0{,}3 = \frac{3}{4}\cdot 0{,}3 - 0{,}2\cdot 0{,}3 + \frac{7}{8}\cdot 0{,}3.$$

44. Основываясь на сочетательном свойстве умножения, как всего удобнее, вычислить следующие произведения:

$$8\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 125; \qquad 2{,}5\cdot 6\cdot 10\cdot 5; \qquad \frac{3}{4}\cdot 8{,}2\cdot 4\cdot 10.$$

45. Проверить, что частное $3{,}5 : (-7)$ не изменится, если мы умножим делимое и делитель на 4. То же, если разделим на $-0{,}75$.

Глава 3

ЦЕЛЫЕ ОДНОЧЛЕННЫЕ И МНОГОЧЛЕННЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

I. Предварительные понятия

35. Одночлен и многочлен. Алгебраические выражения делятся на две группы, смотря по тому, какое алгебраическое действие в них выполняется последним.

Алгебраическое выражение, в котором последнее по порядку действие не есть сложение или вычитание, называется одночленом.

Значит, одночлен представляет собой или отдельное число, выраженное буквой или цифрами, например, $-a$, $+10$, или произведение, например, ab, $(a+b)c$, или частное, например, $\dfrac{a-b}{c}$, или степень, например, b^2, но *одночлен не должен представлять собой ни сумму, ни разность.*

Если при вычислении одночлена приходится производить действие деления, то одночлен называется *дробным*, если же нет, то *целым*. Так, одночлен $\dfrac{a-b}{c}$ есть дробный; $(x-y)\cdot ab$, $a(x+b)^2$ — целые одночлены. Так как в начале алгебры мы будем говорить только о целых одночленах, то для краткости мы будем их называть просто «одночленами».

Алгебраическое выражение, составленное из нескольких одночленов, соединённых между собой знаками «+» или «−», называется многочленом. Таково, например, выражение:

$$ab - a + b^2 - 10 + \frac{a-b}{c}.$$

Отдельные выражения, от соединения которых знаками «+» или «−» получился многочлен, называются его *членами*. Члены многочлена рассматриваются вместе с теми знаками, которые стоят перед ними, например, говорят: член $-a$, член $+b^2$ и т. п. Перед первым членом, если перед ним не поставлено никакого знака, надо подразумевать знак «+»; так, в нашем примере первый член есть ab, или $+ab$.

Выражение, состоящее из двух членов, называется *двучленом*, из трёх — *трёхчленом* и т. п. Если все члены многочлена целые, то и самый многочлен называется *целым*.

36. Коэффициент. Положим, дано произведение:

$$a3ab(-2),$$

в котором некоторые сомножители выражены цифрами, другие — буквами. Такие произведения можно преобразовать (пользуясь сочетательным свойством умножения), соединив в одну группу все сомножители, выраженные буквой a и т. д., получим:

$$3 \cdot (-2) \cdot (aa) \cdot b,$$

что можно написать короче: $-6a^2b$.

Выраженный цифрами сомножитель, поставленный впереди буквенных сомножителей, называется *коэффициентом* одночлена. Так, в одночлене $-6a^2b$ число -6 есть коэффициент.

Заметим, что если коэффициент есть целое положительное число, то он означает, сколько раз повторяется слагаемым то буквенное выражение, к которому он относится; так, $3ab$ означает то же самое, что $(ab) \cdot 3$, т. е. означает сумму $ab + ab + ab$. Если коэффициент есть целое отрицательное число, то он означает, сколько раз повторяется вычитаемым буквенное выражение, к которому он относится; так, $-3x$ означает $-x - x - x$. Если коэффициент есть дробь, то он выражает, какая дробь берётся от численной величины буквенного выражения. Так, $\frac{2}{3}ax$ означает то же, что и $ax \cdot \frac{2}{3}$, а умножить число ax на $\frac{2}{3}$ значит взять $\frac{2}{3}$ от этого числа.

37. Свойства многочлена. Всякий многочлен можно рассматривать как алгебраическую сумму его членов. Например, многочлен $2a - b + c$ есть сумма $2a + (-b) + (+c)$, так как выражение $+(-b)$ равносильно выражению $-b$ и выражение $+(+c)$ означает то же, что и $+c$. Вследствие этого все свойства суммы относительных чисел (§ 25) принадлежат также и многочлену. Напомним два из этих свойств:

а) ***Переместительный закон***: *численная величина многочлена не изменяется при перемещении его членов (с их знаками).*

б) ***Сочетательный закон***: *численная величина многочлена не изменяется, если какие-либо его члены мы заменяем их алгебраической суммой.*

Укажем ещё следующее свойство многочлена:

в) *Если перед каждым членом многочлена переменим знак на противоположный, то численная величина многочлена изменит также знак на противоположный, а абсолютная величина его не изменится.*

Например, численная величина многочлена $2a^2 - ab + b^2 - \frac{1}{2}a$ при $a = -4$ и $b = -3$ равна:

$$2 \cdot (-4)^2 - (-4) \cdot (-3) + (-3)^2 - \frac{1}{2} \cdot (-4) =$$
$$= 2 \cdot 16 - 12 + 9 + 2 = 32 - 12 + 9 + 2 = 31,$$

а численная величина многочлена $-2a^2 + ab - b^2 + \frac{1}{2}a$ при тех же значениях букв равна:

$$-2 \cdot (-4)^2 + (-4) \cdot (-3) - (-3)^2 + \frac{1}{2} \cdot (-4) =$$
$$= -2 \cdot 16 + 12 - 9 - 2 = -32 + 12 - 9 - 2 = -31.$$

Упражнения.

46. Упростить следующие произведения:
$ax10xaax$; $aa(-5) \cdot bxx(+2)$; $ab \cdot \frac{3}{4}axx\left(-\frac{1}{2}\right)$; $5mxy(-4)mxyy$.

47. Представить в виде сумм выражения: $2a$; $3ax$; $5a^2b$; $4(a+1)$.

48. Вычислить следующие одночлены:

$$7a^2bc \text{ при } a = 3,\ b = 2,\ c = \frac{5}{7};$$
$$0{,}8a(b+c) \text{ при } a = 1,\ b = \frac{5}{6},\ c = 0{,}25;$$
$$3(a+b)^2c \text{ при } a = 1,\ b = 1\frac{5}{6},\ c = 0{,}25;$$
$$-7x^2y^3 \text{ при } x = -2,\ y = 1;$$
$$0{,}52ax^2y \text{ при } a = 100,\ x = -3,\ y = -2.$$

49. Вычислить следующие многочлены:

$$2x^4 - x^3 + 5x^2 - 7x + 1 \text{ при } x = 1; \text{ при } x = 2;$$
$$ax^2 + bx + c \text{ при } a = 3,\ b = -2,\ c = -5,\ x = 1.$$

50. Убедиться проверкой, что при $x = 2$ два многочлена: $x^3 - 2x^2 + 3x - 5$ и $-x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ дают числа, одинаковые по абсолютной величине, но противоположные по знаку.

38. Приведение подобных членов. *Члены многочлена, которые отличаются друг от друга только коэффициентами или совсем не отличаются, называются подобными.*

Например в многочлене

$$\underline{4a} - \underline{\underline{3x}} + \underline{0{,}5a} + \underline{\underline{8x}} + 3ax - \underline{\underline{2x}}$$

первый член подобен третьему (они подчёркнуты одной чертой), второй член подобен четвертому и шестому (подчёркнуты двумя чертами), а пятый член не имеет подобных.

Если в многочлене встречаются подобные между собой члены, то их можно соединить в один член на основании сочетательного свойства сложения. Так, в приведённом сейчас примере мы можем соединить члены в такие группы:

$$(4a + 0{,}5a) + (-3x + 8x - 2x) + 3ax.$$

Но очевидно, что 4 каких-нибудь числа плюс 0,5 такого же числа составляют 4,5 этого же числа. Значит, $4a + 0{,}5a = 4{,}5a$. Равным образом $-3x + 8x = 5x$ и $5x - 2x = 3x$. Значит, многочлен можно изобразить так:

$$4{,}5a + 3x + 3ax.$$

Соединение всех подобных между собой членов многочлена в один член называется приведёнием подобных членов многочлена.

Замечание. Два подобных члена, коэффициенты которых отличаются только знаками, взаимно уничтожаются; таковы, например, члены:

$$2a \text{ и } -2a \text{ или } -\frac{1}{2}x^2 \text{ и } +\frac{1}{2}x^2.$$

Примеры.

1. $a + \underline{5mx} - \underline{2mx} + \underline{7mx} - \underline{8mx} = a + 2mx.$
2. $\underline{4ax} + b^2 - \underline{7ax} - \underline{3ax} + \underline{2ax} = -4ax + b^2 = b^2 - 4ax.$
3. $\underline{4a^2b^3} - \underline{\underline{3ab}} + \underline{0{,}5a^2b^3} + 3a^2c + \underline{\underline{8ab}} = 4{,}5a^2b^3 + 5ab + 3a^2c.$

Упражнения.

51. $a^3x^2 + 3a^2x^3 + \frac{1}{2}a^2x^3 + a^2x^3.$

52. $2x - 5xy - 8xy - 3{,}1xy - 0{,}2xy.$

53. $a + 8mxy^2 - 4\frac{1}{2}mxy^2.$

54. $a - 8mxy^2 + 4\frac{1}{2}mxy^2.$

55. $5a^3 - 7a^2b + 7ab^2 + a^2b - 2a^3 - 8ab^2 + a^3 - 12ab^2 + 3a^2b.$

56. $x^5 - 4ax^4 - 2ax^4 + 2a^2x^3 + 5ax^4 - 2a^2x^3 + ax^4 - 7a^2x^3.$

Исторические сведения

Отрицательные числа встречаются уже у греческого математика Диофанта (в IV веке нашей эры), но он называет их «недопустимыми» и не придаёт им значения при решении задач. Однако там, где приходится перемножать два числа, имеющие знак «−», он пользуется правилом, подобным нашему правилу. Он говорит: «отнимаемое число, будучи умножено на отнимаемое, даёт число прибавляемое». Так, он получает:

$$(7-3)\cdot(5-2) = 7\cdot5 - 7\cdot2 - 3\cdot5 + 3\cdot2 = 12.$$

Индусский математик Брамагупта (620 г.) даёт уже подробный перечень правил сложения и вычитания относительных чисел. Приведём некоторые из них.

«Сумма двух имуществ есть имущество», т. е., например, $(+2)+(+3)=5$.

«Сумма двух долгов есть долг», т. е. $(-2)+(-3)=-5$.

«Сумма имущества и долга равна их разности», т. е. $(+5)+(-7)=-2$.

«Долг, вычитаемый из нуля, становится имуществом, а имущество — долгом»: $0-(-3)=+3$; $0-(+3)=-3$ и т. п.

В Европе ещё в 1544 г. математик Штифель называет отрицательные числа «нелепыми». Жирар в своём сочинении уже пользуется отрицательными числами (в 1629 г.), но окончательно ввёл их в математику Декарт (1637 г.), который и объяснял смысл их как направленных величин. Раньше для обозначения действий сложения и вычитания употребляли полностью латинские слова plus и minus, которые затем были сокращены до одной буквы p и m с чертой наверху.

II. Алгебраическое сложение и вычитание

39. Сложение одночленов. Пусть требуется сложить несколько одночленов: $3a$; $-5b$; $+0{,}2a$; $-7b$ и c.

Их сумма выразится так:

$$3a + (-5b) + (+0{,}2a) + (-7b) + c.$$

Но выражения $+(-5b)$, $+(+0{,}2a)$, $+(-7b)$ равносильны выражениям: $-5b$, $+0{,}2a$ и $-7b$; поэтому сумму данных одночленов можно переписать проще так:

$$\underline{3a} - \underline{\underline{5b}} + \underline{0{,}2a} - \underline{\underline{7b}} + c,$$

что после приведения подобных членов даст:

$$3{,}2a - 12b + c.$$

Правило. *Чтобы сложить несколько одночленов, надо написать их один за другим с их знаками и сделать приведение подобных членов, если они есть.*

40. Сложение многочленов. Пусть к какому-нибудь алгебраическому выражению, которое мы обозначим одной буквой m, требуется прибавить многочлен $a - b + c$. Искомую сумму можно выразить так:

$$m + (a - b + c).$$

Чтобы преобразовать это выражение, примем во внимание, что многочлен $a - b + c$ представляет собой сумму $a + (-b) + c$; но, чтобы прибавить сумму, можно прибавить каждое слагаемое одно за другим. Поэтому:

$$m + (a - b + c) = m + a + (-b) + c.$$

Но прибавить $-b$ всё равно, что вычесть b; поэтому:

$$m + (a - b + c) = m + a - b + c.$$

Правило. *Чтобы к какому-нибудь алгебраическому выражению прибавить многочлен, надо приписать к этому выражению все члены многочлена один за другим с их знаками и сделать приведёние подобных членов, если они окажутся.*

Если перед первым членом нет знака, то подразумевается «+».

Пример. $3a^2 - 5ab + b^2 + (4ab - b^2 + 7a^2)$.

Алгебраическое выражение, которое мы обозначали раньше одной буквой m, дано в этом примере в виде многочлена $3a^2 - 5ab + b^2$. Применяя указанное правило, найдём:

$$3a^2 - 5ab + b^2 + (4ab - b^2 + 7a^2) =$$
$$= 3a^2 - 5ab + b^2 + 4ab - b^2 + 7a^2 = 10a^2 - ab.$$

Замечание. Если данные для сложения многочлены содержат подобные члены (как в нашем примере); то слагаемые можно писать одно под другим так, чтобы подобные члены стояли под подобными:

$$\begin{array}{rrr} 3a^2 & -\,5ab & +\,b^2 \\ +7a^2 & +\,4ab & -\,b^2 \\ \hline 10a^2 & -\,ab & \end{array}$$

Упражнения.

Сложить следующие многочлены, подписав их друг под другом (подобные члены под подобными):

57. $(2x - y - z) + (2y + z - x) + (2z - x - y)$.

58. $(3x^3 - 4x^2 + 2x - 1) + (2x^2 - 3x + 4) + (x^3 - 2 + 4x + 3x^2)$.

59. $(4a^3 - 5a^2b + 7ab^2 - 9b^3) + (-2a^3 + 4a^2b - ab^2 - 4b^3) + (8ab^2 - 10a^2b + 6a^3 + 10b^3)$.

41. Вычитание одночленов. Пусть требуется из одночлена $10ax$ вычесть одночлен $-3ax$. Искомая разность выразится так:

$$10ax - (-3ax).$$

Вычитание числа $-3ax$, согласно правилу этого действия, можно заменить прибавлением числа, противоположного числу $-3ax$. Такое число есть $+3ax$, поэтому:

$$10ax - (-3ax) = 10ax + (+3ax) = 10ax + 3ax = 13ax.$$

П р а в и л о. *Чтобы вычесть одночлен, надо приписать его к уменьшаемому с противоположным знаком и сделать приведёние подобных членов, если они окажутся.*

42. Вычитание многочленов. Пусть из какого-нибудь алгебраического выражения, которое мы обозначим одной буквой m, требуется вычесть многочлен $a - b + c$, что можно обозначить так:

$$m - (a - b + c).$$

Для этого, согласно правилу вычитания, достаточно прибавить к m число, противоположное числу $a - b + c$. Такое число есть $-a + b - c$; значит:

$$m - (a - b + c) = m + (-a + b - c).$$

Применяя теперь правило сложения многочленов, получим:

$$m - (a - b + c) = m - a + b - c.$$

П р а в и л о. *Чтобы из какого-нибудь алгебраического выражения вычесть многочлен, надо к этому выражению приписать все члены вычитаемого многочлена с противоположными знаками и сделать приведёние подобных членов, если они окажутся.*

З а м е ч а н и е. Если требуется вычесть из одного многочлена другой многочлен и в этих многочленах имеются п о д о б н ы е ч л е н ы, то вычитаемый многочлен можно писать под уменьшаемым, переменив знаки у вычитаемого многочлена на противоположные и так, чтобы подобные члены стояли под подобными. Например, вычитание

$$(7a^2 - 2ab + b^2) - (5a^2 + 4ab - 2b^2)$$

лучше всего расположить так:

$$\begin{array}{r} 7a^2-2ab+b^2\\ -5a^2-4ab+2b^2\\ \hline 2a^2-6ab+3b^2. \end{array}$$

Упражнения.

60. $(2p^2-4p+8)-(p^2-5p-7)$.

61. Вычесть $-2y^2+y+6$ из $4x^2+y^2+5$.

62. Вычесть $\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{5}$ из $\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x+1$.

63. Упростить выражение:

$$x=(2a^2-2b^2+c^2)-(a^2-2b^2-c^2)+(3a^2+4b^2-3c^2).$$

43. Раскрытие скобок, перед которыми стоит знак «+» или «−». Пусть в выражении

$$2a+(a-3b+c)-(2a-b+2c)$$

требуется раскрыть скобки. Это надо понимать так, что требуется над многочленами, стоящими внутри скобок, произвести те действия, которые указаны знаками, стоящими перед скобками. В нашем примере перед первыми скобками стоит знак «+», перед вторыми знак «−». Произведя сложение и вычитание по данным нами правилам, получим выражение без скобок:

$$2a+a-3b+c-2a+b-2c=a-2b-c.$$

Таким образом, *раскрывая скобки, перед которыми стоит знак «+», мы не должны изменять знаки внутри скобок, а раскрывая скобки, перед которыми стоит знак «−», мы должны перед каждым членом, стоящим внутри скобок, переменить знак на противоположный.*

Пусть ещё требуется раскрыть скобки в выражении:

$$10p-[3p+(5p-10)-4].$$

Всего удобнее раскрыть сначала круглые скобки, а потом квадратные:

$$10p-[3p+5p-10-4]=10p-3p-5p+10+4=2p+14.$$

44. Заключение в скобки части многочлена. Для преобразования многочлена иногда бывает полезно заключить в скобки совокупность некоторых его членов, причём перед скобками иногда желательно поставить знак «+», т. е. изобразить многочлен в виде суммы, а иногда знак «$-$», т. е. изобразить многочлен в виде разности. Пусть, например, в многочлене $a+b-c$ мы желаем заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак «$+$». Тогда пишем так:

$$a+b-c=a+(b-c),$$

т. е. внутри скобок оставляем у каждого члена тот же знак, какой он имел. Что такое преобразование верно, убедимся, если раскроем скобки по правилу сложения; тогда получим снова данный многочлен.

Пусть в том же многочлене требуется заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак «$-$». Тогда напишем так:

$$a+b-c=a-(-b+c)=a-(c-b),$$

т. е. внутри скобок перед каждым членом меняем знак на противоположный. Что такое преобразование верно, убедимся, если раскроем скобки по правилу вычитания; тогда получим снова данный многочлен.

Можно и весь многочлен заключить в скобки, поставив перед скобками знак «$+$» или знак «$-$». Например, многочлен $a+b-c$ можно написать так:

$$+(a+b-c) \text{ или } -(-a-b+c).$$

Упражнения.

Раскрыть скобки и упростить:

64. $x+[x-(x-y)]$; $m-\{n-[m+(m-n)]+m\}$.

65. $a+b-c-[a-(b-c)]-[a+(b-c)-(a-c)]$.

66. $(3x^2-4y^2)-(x^2-2xy-y^2)+[2x^2+2xy+(-4xy)+3y^2]$.

67. В многочлене $a-b-c+d$:

а) заключить в скобки три последних члена, поставив перед скобками знак «$-$»;

б) заключить в скобки два последних члена, поставив перед скобками знак «$+$»;

в) заключить в скобки два средних члена, поставив перед скобками знак «$-$».

III. Алгебраическое умножение

45. Умножение одночленов. а) Пусть надо умножить a^3 на a^2, что можно обозначить так: $a^3 \cdot a^2$, или подробнее: $(aaa)\times$ $\times(aa)$. Здесь произведение aaa умножается на другое произведение aa. Но, чтобы умножить какое-нибудь число на произведение, можно умножить это число на первый сомножитель, полученный результат умножить на второй сомножитель и т. д. Поэтому:

$$a^3 \cdot a^2 = (aaa) \cdot aa,$$

что может быть написано и без скобок, так как порядок действия остаётся и без скобок такой же, какой указан скобками:

$$a^3 \cdot a^2 = aaaaa = a^5.$$

Мы видим, что показатель степени произведения равен сумме показателей степеней сомножителей.

Возьмём ещё пример: x^3 умножим на x^4. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, получим:

$$x^3 \cdot x^4 = (xxx) \cdot (xxxx) = xxxxxxx = x^7.$$

Вообще, произведение a^m на a^n будет:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Значит, произведение степеней одного в того же числа равно такой степени этого числа, у которой показатель есть сумма показателей перемножаемых степеней. Это выражают короче так:

При умножении степеней одного и того же числа показатели степеней складываются.

Таким образом:

$$m^2m^3 = m^5; \quad x^3x = x^4; \quad y^2yy^3 = y^6.$$

б) Пусть дано умножить:

$$3ax^2 \cdot (-5abx).$$

Так как одночлен $-5abx$ есть произведение, то достаточно умножить множимое на первый сомножитель -5, результат умножить на второй сомножитель a и т. д. Значит:

$$3ax^2 \cdot (-5abx) = 3ax^2 \cdot (-5) \cdot abx.$$

В этом произведении, пользуясь сочетательным свойством умножения, сгруппируем сомножители в такие группы:

$$(+3) \cdot (-5) \cdot (aa) \cdot b(x^3x).$$

Произведя умножение в каждой группе, получим: $-15a^2bx^3$.

П р а в и л о. *Чтобы умножить одночлен на одночлен, надо перемножить их коэффициенты, сложить показатели одинаковых букв, а те буквы, которые входят только во множимое* *или только во множитель, перенести в произведение с их показателями.*

Примеры.

1. $0{,}7a^3x \cdot (3a^4x^2y^2) = 2{,}1a^7x^3y^2$.
2. $-3{,}5x^2y \cdot \left(\frac{3}{4}\,x^3\right) = -\frac{21}{8}\,x^5y$.

46. Квадрат и куб одночлена. Мы знаем, что возвести в квадрат или в куб какое-либо число значит взять его сомножителем два или три раза; например:

$$11^2 = 11 \cdot 11 = 121; \quad \left(-1\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-1\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-1\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{4};$$
$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64; \quad (-5)^3 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = -125.$$

Применим это определение к возведению в квадрат и куб целых одночленов.

1. Пусть требуется возвести a^4 в квадрат или в куб. Согласно определению:

$$(a^4)^2 = a^4 \cdot a^4; \quad (a^4)^3 = a^4 \cdot a^4 \cdot a^4.$$

Применяя правило умножения одночленов, получим:

$$(a^4)^2 = a^8; \quad (a^4)^3 = a^{12}.$$

Точно так же:

$$(a^3)^2 = a^6; \quad (a^3)^3 = a^9.$$

Вообще:

$$(a^m)^2 = a^m \cdot a^m = a^{2m}; \quad (a^m)^3 = a^m \cdot {}^m \cdot a^3 = a^{3m},$$

т. е. *чтобы возвести в квадрат или в куб степень, надо соответственно умножить на два или на три показатель степени.*

Так:

$$(4^2)^2 = 4^4 = 256; \quad (2^2)^3 = 2^6 = 64 \text{ и т. п.}$$

2. Пусть требуется возвести в квадрат или в куб произведение abc. Согласно определению:

$$(abc)^2 = (abc) \cdot (abc); \quad (abc)^3 = (abc) \cdot (abc) \cdot (abc).$$

Применяя свойства умножения, получим:

$$(abc)^2 = abcabc = (aa) \cdot (bb) \cdot (cc) = a^2b^2c^2;$$
$$(abc)^3 = abcabcabc = (aaa) \cdot (bbb) \cdot (ccc) = a^3b^3c^3,$$

т. е. *чтобы возвести произведение в квадрат или в куб, надо возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно и результаты перемножить.*

Так:

$$(2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900;$$
$$(2 \cdot 3)^3 = 2^3 \cdot 3^3 = 8 \cdot 27 = 216.$$

3. Пусть теперь требуется возвести в квадрат или в куб одночлен $-4a^3bc^4$. Применяя только что выведенные правила, будем иметь:

$$(-4a^3bc^4)^2 = (-4)^2 \cdot (a^3)^2 \cdot (b)^2 \cdot (c^4)^2 = 16a^6b^2c^8;$$
$$(-4a^3bc^4)^3 = (-4)^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b)^3 \cdot (c^4)^3 = -64a^9b^3c^{12}.$$

Правила. 1. *Чтобы возвести в квадрат целый одночлен, надо возвести в квадрат коэффициент одночлена, а показатели букв умножить на два.*

2. *Чтобы возвести в куб целый одночлен, надо возвести в куб коэффициент одночлена, а показатели букв умножить на три.*

47. Умножение многочлена на одночлен. Пусть дано умножить многочлен $a + b - c$ на какое-нибудь алгебраическое выражение, например, на одночлен, который мы обозначим одной буквой m:

$$(a + b - c) \cdot m.$$

Применяя распределительный закон умножения, мы получим:

$$(a + b - c) \cdot m = am + bm - cm.$$

Правило. *Чтобы умножить многочлен на одночлен, нужно умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.*

Так как произведение не изменяется от перестановки сомножителей, то это правило применимо также и к умножению одночлена на многочлен. Таким образом: $m(a + b - c) = ma + mb - mc$.

Примеры.

1. $(3x^2 - 2ax + 5a^2) \cdot (-4ax)$.

Здесь умножение членов многочлена на данный одночлен надо производить по правилу умножения одночленов, принимая во внимание также и правило знаков: одинаковые знаки при умножении дают «+», а разные знаки дают «−».

Умножаем отдельно каждый член многочлена на одночлен $-4ax$:

$$(3x^2)(-4ax) = -12ax^3;\ (-2ax)(-4ax) = +8a^2x^2;$$
$$(+5a^2)(-4ax) = -20a^3x.$$

Теперь, сложив полученные результаты, получаем, что

$$(3x^2 - 2ax + 5a^2) \cdot (-4ax) = -12ax^3 + 8a^2x^2 - 20a^3x.$$

2. $(a^2 - ab + b^2)(3a) = a^2(3a) - (ab)(3a) + b^2(3a) =$
$$= 3a^3 - 3a^2b + 3ab^2.$$

3. $\left(7x^2 + \dfrac{3}{4}\,ax - 0{,}3\right)(2{,}1a^2x) = (7x^2)(2{,}1a^2x) +$
$$+ \left(\frac{3}{4}\,ax\right)(2{,}1a^2x) - 0{,}3(2{,}1a^2x) = 14{,}7a^2x^3 + 1{,}575a^3x^2 - 0{,}63a^2x.$$

4. $2a\left(3a - 4ax + \dfrac{1}{2}\,x^2\right) = 6a^2 - 8a^2x + ax^2.$

48. Умножение многочлена на многочлен. Пусть дано умножить многочлен $a + b - c$ на многочлен $m - n$, что можно записать так:

$$(a + b - c)(m - n).$$

Рассматривая множитель $(m - n)$ как одно число (как одночлен), применим правило умножения многочлена на одночлен:

$$(a + b - c)(m - n) = a(m - n) + b(m - n) + c(m - n).$$

Каждый член полученного многочлена представляет собой произведение одночлена на многочлен. Применяя опять предыдущее правило, получим:

$$(am - an) + (bm - bn) - (cm - cn).$$

Раскрыв скобки по правилу сложения и вычитания, окончательно найдём:

$$(a + b - c)(m - n) = am - an + bm - bn - cm + cn.$$

П р а в и л о. *Чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член первого многочлена ва каждый член второго многочлена и полученные произведения сложить.*

Конечно, при умножении членов первого многочлена на члены второго многочлена нужно руководствоваться правилами знаков: одинаковые знаки дают «+», а разные знаки «−».

Например:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(a^3 - 3ab^2 + b^3).$$

Умножим сначала все члены множимого на первый член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)a^3 = a^5 - 5a^4b + a^3b^2 - 3a^3.$$

Затем умножим все члены множимого на второй член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(-3ab^2) = -3a^3b^2 + 15a^2b^3 - 3ab^4 + 9ab^2.$$

Далее умножим на третий член множителя:

$$(a^2 - 5ab + b^2 - 3)(+b^3) = a^2b^3 - 5ab^4 + b^5 - 3b^3.$$

Наконец, сложим все полученные произведения и сделаем приведёние подобных членов; окончательный результат будет:

$$a^5 - 5a^4b - 2a^3b^2 - 3a^3 + 16a^2b^3 - 8ab^4 + 9ab^2 + b^5 - 3b^3.$$

Примеры.

1. $(a - b)(m - n - p) = am - bm - an + bn - ap + bp.$
2. $(x^2 - y^2)(x + y) = x^3 - xy^2 + x^2y - y^3.$
3. $(3an + 2n^2 - 4a^2)(n^2 - 5an) = 3an^3 + 2n^4 - 4a^2n^2 -$
$- 15a^2n^2 - 10an^3 + 20a^3n = -7an^3 + 2n^4 - 19a^2n^2 + 20a^3n.$
4. $(2a^2 - 3)^2 = (2a^2 - 3)(2a^2 - 3) = (2a^2)^2 - 3(2a^2) -$
$-(2a^2)3 + 9 = 4a^4 - 6a^2 - 6a^2 + 9 = 4a^4 - 12a^2 + 9.$

Упражнения.

68. $(5a^2b^3)(3ab^4c)$; $\left(\frac{3}{4}\,ax^3\right)\left(\frac{5}{6}\,ax^3\right)$.

69. $(0{,}3abx)(2{,}7a^2bx^2)$; $(7a^2b^4c)(3ab^3c^2)\left(\frac{1}{21}\,a^2b\right)$.

70. $\left(\frac{3}{7}\,mx^2y^3\right)^2$; $(2a^3bx^2)^3$.

71. $(0{,}1x^my^3)^2$; $\left(\frac{1}{2}\,m^2ny^3\right)^3$.

72. $(3a^2 - 2b^3 + c)2ab$.

73. $(5a - 4a^2b + 3a^3b^2 - 7a^4b^3)5a^2b$.

74. $(a + b - c)(m - n)$; $(2a - b)(3a + b^2)$.

75. $\left(a + \frac{1}{2}\,b\right)(2a - b)$; $(x^2 + xy + y^2)(x - y)$.

76. $(x^2 - xy + y^2)(x + y)$.

77. $(2x + 3y)(3x - 2y)$; $(y - 1)(y^3 + y^2 + y + 1)$.

49. Расположенный многочлен. Расположить многочлен по степеням какой-нибудь буквы — значит написать его члены в такой последовательности, чтобы показатели этой буквы увеличивались или уменьшались от первого члена к последнему. Так, многочлен $1 + 2x + 3x^2 - x^3$ расположен по возрастающим степеням буквы x. Тот же многочлен будет расположен по убывающим степеням буквы x, если члены его напишем в обратном порядке: $-x^3 + 3x^2 + 2x + 1$.

Буква, по которой расположен многочлен, называется *главной* его буквой. Член, содержащий главную букву с наибольшим показателем, называется *высшим членом* многочлена; член, содержащий главную букву с наименьшим показателем или не содержащий её вовсе, называется *низшим членом* многочлена.

50. Умножение расположенных многочленов всего удобнее проводить так, как будет указано на следующем примере.

Умножить $3x - 5 + 7x^2 - x^3$ на $2 - 8x^2 + x$.

Расположив оба многочлена по убывающим степеням буквы x, пишут множитель под множимым и под ним проводят черту:

$$\begin{array}{r}
-x^3 + 7x^2 + 3x - 5 \\
-8x^2 + x + 2 \\
\hline
8x^5 - 56x^4 - 24x^3 + 40x^2 \phantom{{}+6x-10} \\
- x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 5x \phantom{{}-10} \\
- 2x^3 + 14x^2 + 6x - 10 \\
\hline
8x^5 - 57x^4 - 19x^3 + 57x^2 + x - 10.
\end{array}$$

Умножают все члены множимого на первый член множителя (на $-8x^2$) и полученное произведение пишут под чертой. Умножают затем все члены множимого на второй член множителя (на $+x$) и полученное второе произведение пишут под первым так, чтобы подобные члены находились под подобными. Так же поступают и далее. Под последним произведением проводят черту, под которой пишут полное произведение, складывая все отдельные произведения.

Можно оба многочлена расположить и по возрастающим степеням и затем производить умножение в том порядке, как было сейчас указано.

51. Высший и низший члены произведения. Из рассмотрения предыдущего примера следует:

Высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя.

Низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

Так как все остальные члены произведения будут иметь показатель при главной букве меньший, чем высший член, и в то же время больший, чем низший член, то высший и низший члены произведения не могут иметь подобных членов.

Остальные члены произведения могут получиться от соединения нескольких подобных членов в один. Может даже случиться, что в произведении, после приведёния подобных членов, все члены уничтожаются, кроме высшего и низшего, как это видно на следующем примере:

$$\begin{array}{l}
x^4 + ax^3 + a^2x^2 + a^3x + a^4 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad x - a \\
\hline
x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x \\
\quad - ax^4 - a^2x^3 - a^3x^2 - a^4x - a^5 \\
\hline
x^5 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - a^5 = x^5 - a^5.
\end{array}$$

52. Число членов произведения. Пусть во множимом будет 5 членов, а во множителе 3 члена. Умножив каждый член множимого на первый член множителя, мы получим 5 членов произведения; умножив затем каждый член множимого на второй член множителя, мы получим ещё 5 членов произведения и т. д., значит, всех членов в произведении окажется $5 \cdot 3$, т. е. 15. Вообще, *число членов произведения до приведёния в нем подобных членов равно произведению числа членов множимого на число членов множителя*.

Так как высший и низший члены произведения не могут иметь себе подобных членов, а все прочие члены могут уничтожаться, то *число членов произведения двух или нескольких многочленов после приведёния в нем подобных членов не может быть меньше двух*.

Упражнения.

78. Расположить следующие многочлены по убывающим степеням буквы x и сделать их умножение: $24x + 6x^2 + x^3 + 60$ и $12x - 6x^2 + 12 + x^3$.

79. $(x^5 - x^3 + x - 1)(x^4 + x^2 - 1)$.

80. $(x^5 - ax^4 + a^2x^3 - a^3x^2 + a^4x - a^5)(x + a)$.

53. Некоторые формулы умножения двучленов. Полезно запомнить следующие формулы умножения двучленов:

а) $\boldsymbol{(a + b)^2} = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = \boldsymbol{= a^2 + 2ab + b^2}$.

Например:

$$17^2 = (10+7)^2 = 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 7 + 7^2 = 100 + 140 + 49 = 289.$$

Таким образом, *квадрат суммы двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.*

б) $\boldsymbol{(a-b)^2} = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 =$
$$= \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}.$$

Например:

$$19^2 = (20-1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361.$$

Таким образом, *квадрат разности двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа.*

в) Так как разность двух чисел и вообще алгебраических выражений может быть представлена в виде алгебраической суммы, то оба предыдущих правила можно соединить в одно и выразить так:

Квадрат двучлена равен квадрату первого члена плюс удвоенное произведение первого члена на второй плюс квадрат второго члена.

Нужно только помнить, что каждый член возводимого в квадрат двучлена должен быть взят с его знаком.

Например:

$$(2ab - c^2)^2 = (2ab)^2 + 2(2ab)(-c^2) + (-c^2)^2 = 4a^2b^2 - 4abc^2 + c^4;$$
$$(-m + 3n^3)^2 = (-m)^2 + 2(-m)(3n^3) + (3n^3)^2 =$$
$$= m^2 - 6mn^3 + 9n^6.$$

г) $\boldsymbol{(a+b)(a-b)} = a^2 + ab - ab - b^2 = \boldsymbol{a^2 - b^2}.$

Например:

$$25 \cdot 15 = (20+5) \cdot (20-5) = 20^2 - 5^2 = 400 - 25 = 375.$$

Таким образом, *произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.*

54. Применение этих формул. При помощи указанных формул можно иногда производить умножение многочленов проще, чем обыкновенным путём.

Примеры.

1. $(4a^3-1)^2=(4a^3)^2-2(4a^3)\cdot 1+1^2=16a^6-8a^3+1$.
2. $(x+y)(y-x)=(y+x)(y-x)=y^2-x^2$.
3. $(x+y+1)(x-y+1)=[(x+1)+y][(x+1)-y]=$
$$=(x+1)^2-y^2=x^2+2x+1-y^2.$$
4. $(a-b+c)(a+b-c)=[a-(b-c)][a+(b-c)]=$
$$=a^2-(b-c)^2=a^2-(b^2-2bc+c^2)=a^2-b^2+2bc-c^2.$$

Упражнения.

81. $(a+1)^2$; $(1+2a)^2$; $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2$.

82. $(3a^2+1)^2$; $(0{,}1mx+5x^2)^2$.

83. $(5a-2)^2$; $(3x-2a)^2$; $\left(3a^2-\dfrac{1}{2}\right)^2$.

84. Пользуясь формулами для $(a+b)^2$ и $(a-b)^2$, найти следующие квадраты: 101^2; 997^2; 96^2; 57^2; 72^2; 89^2.

85. $(2m-3n)^2$; $(3a^2x-4ay)^2$; $\left(0{,}2x^3-\dfrac{3}{8}\right)^2$.

86. $\left(\dfrac{1}{2}x^2-3\dfrac{1}{3}x\right)^2$; $(0{,}25p-0{,}2q)^2$.

87. $(a+1)(a-1)$; $(2a+5)(2a-5)$.

88. $(2x-3)(3+2x)$; $(a^2+1)(1-a^2)$.

Найти сокращённым путём следующие произведения:

89. $(x^2+1)(x+1)(x-1)$; $(4x^2+y^2)(2x+y)(2x-y)$.

90. $(m+n-p)(m+n+p)$; $[a+(b+c)][a-(b+c)]$.

55. Куб суммы и куб разности двух чисел. К формулам умножения двучленов добавим ещё следующие две:

а) $\boldsymbol{(a+b)^3}=(a+b)^2(a+b)=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=$
$$=a^3+\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}+\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}+b^3=\boldsymbol{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3},$$

т. е. *куб суммы двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа.*

Например:

$$11^3=(10+1)^3=10^3+3\cdot 10^2\cdot 1+3\cdot 10\cdot 1^2+1^3=$$
$$=1\,000+300+30+1=1\,331.$$

б) $\boldsymbol{(a-b)^3}=(a-b)^2(a-b)=(a^2-2ab+b^2)(a-b)=$
$$=a^3-\underline{2a^2b}+\underline{\underline{ab^2}}-\underline{a^2b}+\underline{\underline{2ab^2}}-b^3=\boldsymbol{a^3-3a^2b+3ab^2-b^3},$$

т. е. *куб разности двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе* *плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа.*

Например:

$$29^3 = (30-1)^3 = 30^3 - 3\cdot 30^2\cdot 1 + 3\cdot 30\cdot 1^2 - 1^3 = \\ = 27\,000 - 2\,700 + 90 - 1 = 24\,389.$$

Если возьмём члены возводимого в куб двучлена с их знаками, то оба предыдущих правила мы можем соединить в одно:

Куб двучлена равен кубу первого члена плюс утроенное произведение квадрата первого члена на второй плюс утроенное произведение первого члена на квадрат второго плюс куб второго члена.

Например:

$$(2a-3b)^3 = (2a)^3 + 3(2a^2)(-3b) + 3(2a)(-3b)^2 + (-3b)^3 = \\ = 8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3.$$

Упражнения.

91. $(a+1)^3$; $(a-1)^3$; $(2x+3)^3$; $(5+3x)^3$.

92. $\left(\frac{1}{2}m-2\right)^3$; $\left(\frac{3}{4}p+\frac{1}{3}q\right)^3$; $(5-3x)^3$.

IV. Алгебраическое деление

56. Деление одночленов. а) Пусть требуется разделить:

$$a^5 : a^2.$$

Так как делимое должно равняться делителю, умноженному на частное, а при умножении показатели одинаковых букв складываются, то в искомом частном показателем буквы a должно быть такое число, которое, сложенное с 2, составляет 5; такое число равно разности $5-2$.

Значит:

$$a^5 : a^2 = a^{5-2} = a^3.$$

Подобно этому найдём:

$$x^3 : x^2 = x; \quad y^4 : y = y^3 \quad \text{и т. п.}$$

Значит, частное от деления степеней одного и того же числа равно такой степени этого числа, у которой показатель есть разность от вычитания из показателя делимого показателя делителя. Это выражают короче так: *при делении степеней одного* *и того же числа показатель делителя вычитается из показателя делимого.*

б) Пусть дано разделить:

$$12a^3b^2x : 4a^2b^2.$$

Согласно определению деления частное, будучи умножено на делитель, должно составить делимое. Поэтому у искомого частного коэффициент должен быть $12 : 4$, т. е. 3; показатель у буквы a получится вычитанием из показателя этой буквы в делимом показателя той же буквы в делителе, буква b совсем не войдёт в частное, а буква x перейдёт в частное со своим показателем.

Таким образом: $12a^3b^2x : 4a^2b^2 = 3ax$.

Проверка: $3ax \cdot 4a^2b^2 = 12a^3b^2x$.

Правило. *Чтобы разделить одночлен на одночлен, надо коэффициент делимого разделить на коэффициент делителя, из показателей букв делимого вычесть показатели тех же букв делителя и перенести в частное без изменения показателей те буквы делимого, которых нет в делителе.*

Примеры.

1. $3m^3n^4x : 4m^2nx = \frac{3}{4}\,mn^3$.
2. $-ax^4y^3 : \left(-\frac{5}{6}\,axy^2\right) = +\frac{6}{5}\,x^3y$.
3. $0{,}8ax^n : (-0{,}02ax) = -40x^{n-1}$.

57. Нулевой показатель. Если при делении степеней одного и того же числа показатель делителя окажется равным показателю делимого, то частное должно равняться 1; например $a^3 : a^3 = 1$, потому что $a^3 = a^3 \cdot 1$. Условимся производить вычитание показателей и в этом случае; тогда в частном мы получим букву с нулевым показателем: $a^3 : a^3 = a^{3-3} = a^0$. Конечно, этот показатель не имеет того значения, которое мы придавали показателям ранее, так как нельзя повторить число сомножителем 0 раз. Мы условимся под выражением a^0 разуметь частное от деления одинаковых степеней буквы a, и так как это частное равно 1, то мы будем принимать a^0 за 1.

58. Признаки невозможности деления одночленов. Если частное от деления целых одночленов не может быть выражено точно целым одночленом, то говорят, что такое деление невозможно. Деление одночленов невозможно в двух случаях:

а) *Когда в делителе есть буквы, которых нет в делимом.* Например, нельзя разделить $4ab^2$ на $2ax$, так как всякий целый одночлен, умноженный на $2ax$, даст произведение, содержащее букву x, а в нашем делимом такой буквы совсем нет.

б) *Когда показатель какой-либо буквы в делителе больше показателя той же буквы в делимом.* Например, деление $10a^3b^2 : 5ab^3$ невозможно, так как какой бы целый одночлен мы ни написали в частном, он, будучи умножен на делитель, даст в произведении одночлен, содержащий букву b с показателем не меньше 3, тогда как в делимом эта буква входит с показателем 2.

Когда один одночлен не делится на другой, то частное может быть обозначено при помощи знаков деления; так, частное от деления $4a$ на $5b$ можно записать:

$$4a : 5b, \text{ или } \frac{4a}{5b}.$$

Упражнения.

93. $8a^5x^3y : 4a^3x^2$; $3ax^3 : (-5ax)$.

94. $a^8b : \left(-\frac{5}{6}\,a^5b\right)$; $12a^mb^3 : 4ab$.

59. Деление многочлена на одночлен. Пусть требуется разделить многочлен $a + b - c$ на какой-нибудь одночлен, который мы обозначим одной буквой m:

$$(a + b - c) : m, \quad \text{или} \quad \frac{a+b-c}{m}.$$

Многочлен $a + b - c$ есть алгебраическая сумма, а чтобы разделить алгебраическую сумму на какое-нибудь число, можно разделить на это число каждое слагаемое отдельно. Поэтому:

$$\frac{a+b-c}{m} = \frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}.$$

В этом можно убедиться и проверкой: умножив многочлен $\frac{a}{m} + \frac{b}{m} - \frac{c}{m}$ на делитель m, мы получим делимое $a + b - c$.

Правило. *Чтобы разделить многочлен на одночлен, надо разделить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные частные сложить.*

Примеры.

1. $(20a^3 - 8a^2 - a) : 4a = 5a^2 - 2a - \frac{1}{4}$.

2. $(4x^2 - 2x + 10) : 2x = 2x - 1 + \frac{5}{x}$.

3. $\left(\frac{1}{2}\,x^3 - 0{,}3x^2 + 1\right) : 2x^2 = \frac{1}{4}\,x - 0{,}15 + \frac{1}{2x^2}$.

Упражнения.

95. $(4a^2b + 6ab^2 - 12a^3b^5) : \frac{3}{4}ab.$

96. $(36a^2x^5 - 24a^3x^4 + 4a^4x^3) : 4a^2x^3.$

97. $(3a^2y - 6a^2y^2 + 3a^2y^3 - 3a^2y^4) : 3a^2y.$

60. Деление одночлена на многочлен. Пусть, например, требуется одночлен a разделить на многочлен $b + c - d$. Частное от такого деления не может быть выражено ни целым одночленом, ни целым многочленом, так как если допустим, что частное равно какому-нибудь целому одночлену или целому многочлену, то, выполнив умножение этого частного на многочлен $b + c - d$, получили бы тоже многочлен, а не одночлен (§ 45, 47). Частное от деления a на $b + c - d$ обозначается знаками деления так:

$$a : (b + c - d), \quad \text{или} \quad \frac{a}{b + c - d}.$$

61. Деление многочлена на многочлен. Частное от деления многочлена на многочлен только в редких случаях можно выразить в виде целого многочлена. Например:

$$(a^2 + 2ab + b^2) : (a + b) = a + b,$$

так как

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2.$$

Вообще же подобные частные можно о б о з н а ч и т ь знаком деления. Например, частное от деления $a - b + c$ на $d - e$ выразится так:

$$\frac{a - b + c}{d - e}, \quad \text{или} \quad (a - b + c) : (d - e).$$

62. Деление расположенных многочленов. Частное удаётся иногда выразить в виде целого многочлена. Покажем, как это сделать, на следующем примере:

$$(5x^2 - 19x^3 + 17x + 6x^4 - 4) : (1 - 5x + 3x^2).$$

Напишем оба многочлена по убывающим степеням буквы x и расположим деление так, как оно располагается при делении целых чисел:

$$
\begin{array}{lr|l}
 & 6x^4-19x^3+5x^2+17x-4 & 3x^2-5x+1 \\
\cline{3-3}
 & -\,6x^4+10x^3-2x^2 & 2x^2-3x-4 \\
\cline{2-2}
\text{1-й остаток} \ldots\ldots & -9x^3+\ 3x^2+17x-4 & \\
 & +9x^3-15x^2+\ 3x & \\
\cline{2-2}
\text{2-й остаток} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & -12x^2+20x-4 & \\
 & +12x^2-20x+4 & \\
\cline{2-2}
\text{3-й остаток} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 0. &
\end{array}
$$

Предположим, что искомое частное равно какому-нибудь многочлену и что члены этого многочлена расположены тоже по убывающим степеням буквы x.

Делимое должно равняться произведению делителя на частное. Из умножения расположенных многочленов известно, что высший член произведения равен произведению высшего члена множимого на высший член множителя. В делимом высший член есть первый, в делителе и частном высшие члены тоже первые. Значит, 1-й член делимого $(6x^4)$ должен быть произведением 1-го члена делителя $(3x^2)$ на 1-й член частного. Отсюда следует: чтобы найти 1-й член частного, достаточно разделить 1-й член делимого на 1-й член делителя. Разделив, находим 1-й член частного $2x^2$. Пишем его под чертой в частном.

Умножим все члены делителя на 1-й член частного и полученное произведение вычтем из делимого. Для этого напишем его под делимым так, чтобы подобные члены стояли под подобными, и у всех членов вычитаемого переменим знаки на обратные. Получим после вычитания 1-й остаток. Если бы этот остаток оказался равным нулю, то это значило бы, что в частном никаких других членов, кроме найденного 1-го, нет, т. е. что частное есть одночлен. Если же, как в нашем примере, 1-й остаток не есть нуль, то будем дальше рассуждать так:

Делимое есть произведение всех членов делителя на каждый член частного. Мы вычли из делимого произведение всех членов делителя на 1-й член частного; следовательно, в 1-м остатке заключается произведение всех членов делителя на 2-й, на 3-й и следующие члены частного. Высший член в остатке есть 1-й; высший член делителя тоже 1-й; высший член в частном (не считая 1-го) есть 2-й член. Значит, 1-й член остатка $(-9x^2)$ должен равняться произведению 1-го члена делителя на 2-й член частного. Отсюда заключаем: чтобы найти 2-й член частного, достаточно разделить 1-й член 1-го остатка на 1-й член делителя. Разделив, находим 2-й член частного $-3x$. Пишем его в частном.

Умножим на 2-й член частного все члены делителя и полученное произведение вычтем из 1-го остатка. Получим 2-й остаток. Если этот остаток равен нулю, то деление окончено; если же, как в нашем примере, 2-й остаток не равен нулю, то будем рассуждать так:

2-й остаток есть произведение всех членов делителя на 3-й, 4-й и следующие члены частного. Так как из этих членов частного высший есть 3-й, то, подобно предыдущему, 3-й член частного найдём, если 1-й член 2-го остатка разделим на 1-й член делителя. Разделив, находим -4. Умножив на -4 все члены делителя и вычтя произведение из остатка, получим 3-й остаток. В нашем примере этот остаток оказался нулём; это показывает, что в частном других членов, кроме найденных, не может быть. Если бы 3-й остаток был не 0, то надо было бы делить первый член этого остатка на 1-й член делителя; от этого получился бы 4-й член частного и т. д.

Можно было бы расположить делимое и делитель по возрастающим степеням одной и той же буквы и затем поступать так, как сейчас было сказано; при этом пришлось бы основываться на том, что низший член произведения равен произведению низшего члена множимого на низший член множителя.

П р и м е р ы.

а)
$$
\begin{array}{l|l}
28x^4 - 13ax^3 - 26a^2x^2 + 15a^3x & 7x^2 + 2ax - 5a^2 \\ \cline{2-2}
\quad " \quad - \ 8ax^3 + 20a^2x^2 & 4x^2 - 3ax \\ \cline{1-1}
\qquad - 21ax^3 - \ 6a^2x^2 + 15a^3x & \\
\qquad\quad " \qquad + \ 6a^2x^2 - 15a^3x & \\ \cline{1-1}
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Мы здесь не писали произведений 1-го члена делителя на 1-й, 2-й и т. д. члены частного, потому что эти произведения всегда равны тем членам, под которыми они подписываются, и при вычитании всегда взаимно уничтожаются. Обыкновенно так и делают.

б)
$$
\begin{array}{l|l}
x^3 - a^3 & x - a \\ \cline{2-2}
\ " \ + ax^2 & x^2 + ax + a^2 \\ \cline{1-1}
ax^2 - a^3 & \\
\ " \quad + a^2x & \\ \cline{1-1}
a^2x - a^3 & \\
\ " \quad + a^3 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}
$$

в)
$$
\begin{array}{l|l}
x^4 - a^4 & x - a \\ \cline{2-2}
\ " \ + ax^3 & x^3 + ax^2 + a^2x + a^3 \\ \cline{1-1}
ax^3 - a^4 & \\
\ " \quad + a^2x^2 & \\ \cline{1-1}
a^2x^2 - a^4 & \\
\ " \quad + a^3x & \\ \cline{1-1}
a^3x - a^4 & \\
\ " \quad + a^4 & \\ \cline{1-1}
\qquad 0 &
\end{array}
$$

Подобным образом можно также убедиться, что разности $x^5 - a^5$, $x^6 - a^6$, ... и вообще $x^m - a^m$ делятся без остатка на разность $x - a$, т. е. что *разность одинаковых степеней двух чисел делится на разность этих чисел без остатка*.

63. Признаки невозможности деления многочленов. Деление многочлена на многочлен нельзя выполнить в следующих случаях:

а) *Если показатель главной буквы в высшем члене делимого меньше показателя той же буквы в высшем члене делителя*, потому что тогда нельзя получить высшего члена частного.

б) *Если показатель главной буквы в низшем члене делимого меньше показателя той же буквы в низшем члене делителя*, потому что тогда нельзя получить низшего члена частного.

в) Если показатели главной буквы в высшем и низшем членах делимого не меньше соответственно показателей этой буквы в высшем и низшем членах делителя, то ещё нельзя сказать, чтобы деление было возможно. В этом случае, чтобы судить о возможности или невозможности деления, надо приступить к выполнению самого действия и продолжать его до тех пор, пока окончательно не убедимся в возможности или невозможности получить частное в виде многочлена.

Упражнения.

98. $(x^2 - 3x - 4) : (x + 1)$; $(y^2 - y - 2) : (y - 2)$.

99. $(6x^3 + 2 - 3x^2 - 4x) : (2x - 1)$.

100. $(3ax^5 - 15a^2x^4 + 6a^3x^3) : (x^2 - 5ax + 2a^2)$.

101. $(x^6 - a^6) : (x^5 + ax^4 + a^2x^3 + a^3x^2 + a^4x + a^5)$.

V. Разложение на множители

64. Предварительное замечание. Говоря об алгебраическом делении, мы указывали, что в некоторых случаях частное можно только обозначить знаком деления. Получаемые при этом выражения, вроде таких: $\frac{a}{b}$, $\frac{2x}{3a}$, $\frac{x^2 - 4x + y^2}{x + y}$ и т. п., принято называть *алгебраическими дробями*.

Мы вскоре увидим, что алгебраические дроби, подобно арифметическим, могут быть иногда упрощены посредством с о к р а щ е н и я, т. е. посредством деления делимого и делителя на их общие множители, если таковые окажутся. Для того чтобы такое сокращение возможно было производить без затруднения, надо научиться разлагать алгебраические выражения на множители (подобно тому как в арифметике для сокращения дробей надо уметь разлагать целые числа на составляющие их множители).

65. Разложение целых одночленов. Возьмём какой-нибудь целый одночлен, например, $6a^2b^3$. Так как он представляет собой произведение, то по одному его виду сразу можно разложить его на составляющие множители. Так:

$$6a^2b^3 = 2 \cdot 3(aa)(bbb) = 2 \cdot 3aabbb.$$

Соединяя эти сомножители в какие-нибудь группы (пользуясь сочетательным свойством умножения), мы можем для этого одночлена указать разнообразные разложения, например:

$$6a^2b^3 = (6a)(ab^3) = (2a^2b)(3b^2) = (3ab^2)(2ab) \text{ и т. п.}$$

66. Разложение многочленов. Укажем простейшие случаи, когда многочлен может быть разложен на множители.

а) Так как

$$(a + b - c)m = am + bm - cm,$$

то и наоборот:

$$am + bm - cm = (a + b - c)m.$$

Таким образом, *если все члены многочлена содержат общий множитель, то его можно вынести за скобки.*

Например:

$x^6 - 2x^2 + 3x = x(x^5 - 2x + 3);$
$16a^2 - 4a^3 = 4a^2(4 - a);$
$5m(x - 1) + 3n(x - 1) = (x - 1)(5m + 3n).$

б) Так как

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2,$$

то и наоборот:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b).$$

Таким образом, *если двучлен представляет собой квадрат одного числа без квадрата другого числа, то его можно заменить произведением суммы этих чисел на их разность.*

Например:

$x^2 - 4 = x^2 - 2^2 = (x + 2)(x - 2);$
$y^2 - 1 = y^2 - 1^2 = (y + 1)(y - 1);$
$9a^2 - \frac{1}{4} = (3a)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(3a + \frac{1}{2}\right)\left(3a - \frac{1}{2}\right);$

$$25x^2 - 0{,}01 = (5x)^2 - 0{,}1^2 = (5x + 0{,}1)(5x - 0{,}1);$$
$$m^4 - n^4 = (m^2)^2 - (n^2)^2 = (m^2 + n^2)(m^2 - n^2) = \\ = (m^2 + n^2)(m + n)(m - n);$$
$$x^2 - (x-1)^2 = [x + (x-1)][x - (x-1)] = \\ = (x + x - 1)(x - x + 1) = 2x - 1.$$

в) Так как

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ и } (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2,$$

то и наоборот:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 = (a+b)(a+b)$$

и

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2 = (a-b)(a-b).$$

Значит, *если трёхчлен представляет собой сумму квадратов каких-нибудь двух чисел, увеличенную или уменьшенную на удвоенное произведение этих чисел, то его можно заменить квадратом суммы или разности этих чисел.*

Примеры.

1. $a^2 + 2a + 1$.

Так как

$$1 = 1^2 \quad \text{и} \quad 2a = 2 \cdot a \cdot 1, \quad \text{то} \quad a^2 + 2a + 1 = (a+1)^2.$$

2. $x^4 + 4 - 4x^2$.

Здесь $x^4 = (x^2)^2$, $4 = 2^2$ и $4x^2 = 2x^2 \cdot 2$; поэтому:

$$x^4 + 4 - 4x^2 = (x^2 - 2)^2.$$

Можно также написать, что $x^4 + 4 - 4x^2 = (2 - x^2)^2$, так как двучлены $x^2 - 2$ и $2 - x^2$, будучи возведены в квадрат, дают трёхчлены, отличающиеся только порядком членов:

$$(x^2 - 2)^2 = x^4 - 4x^2 + 4; \quad (2 - x^2)^2 = 4 - 4x^2 + x^4.$$

3. $-x + 25x^2 + 0{,}01$.

Здесь есть два квадрата: $25x^2 = (5x)^2$ и $0{,}01 = 0{,}1^2$. Удвоенное произведение чисел $5x$ и $0{,}1$ составляет $2 \cdot 5x \cdot 0{,}1 = x$. Так как в данном трёхчлене оба квадрата стоят со знаком «+», а удвоенное произведение (т. е. x) со знаком «−», то

$$-x + 25x^2 + 0{,}01 = 25x^2 - x + 0{,}01 = (5x - 0{,}1)^2 = (0{,}1 - 5x)^2.$$

4. $-x^2 - y^2 + 2xy$.

Вынесем знак «−» за скобки: $-(x^2 + y^2 - 2xy)$. Трёхчлен, стоящий в скобках, очевидно, есть $(x-y)^2$. Значит:

$$-x^2 - y^2 + 2xy = -(x^2 + y^2 - 2xy) = -(x-y)^2 = -(y-x)^2.$$

г) Иногда многочлен можно разложить на множители посредством соединения его членов в некоторые группы.

Например:

$$ax + ay + bx + by = (ax + ay) + (bx + by) = \\ = a(x + y) + b(x + y) = (x + y)(a + b);$$

$$12 - 4x - 3x^2 + x^3 = (12 - 4x) - (3x^2 - x^3) = \\ = 4(3 - x) - x^2(3 - x) = (3 - x)(4 - x^2) = (3 - x)(2 + x)(2 - x);$$

$$m^2 + n^2 - 2mn - p^2 = (m^2 + n^2 - 2mn) - p^2 = \\ = (m - n)^2 - p^2 = (m - n + p)(m - n - p);$$

$$x^2 - y^2 + 6y - 9 = x^2 - (y^2 - 6y + 9) = x^2 - (y - 3)^2 = \\ = [x + (y - 3)][x - (y - 3)] = (x + y - 3)(x - y + 3).$$

д) Иногда бывает полезно ввести вспомогательные члены или какой-нибудь член разложить на два члена.

Например:

$$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - b^3 = a^2(a - b) + b(a^2 - b^2) = \\ = a^2(a - b) + b(a + b)(a - b) = (a - b)[a^2 + b(a + b)] = \\ = (a - b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$a^3 + b^3 = a^3 + a^2b - a^2b + b^3 = a^2(a + b) - b(a^2 - b^2) = \\ = (a + b)[a^2 - b(a - b)] = (a + b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$2x^2 + 3xy + y^2 = 2x^2 + 2xy + xy + y^2 = 2x(x + y) + \\ + y(x + y) = (x + y)(2x + y).$$

Упражнения.

102. $2a + 2x$; $ax + ay$; $4y^2 - 6xy$.
103. $4ax - 2ay$; $6x^2y + 9xy^2$.
104. $12a^2b - 9a^2b^2 - 6ab^3$; $xy^2 - 7xy + 4x^2y$.
105. $m^2 - n^2$; $a^2 - 1$; $1 - a^2$.
106. $x^2 - 4$; $m^2 - 9$; $4x^2 - y^2$.
107. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{9}y^6$; $0{,}01a^6 - 9$; $3a^5 - 48ab^8$.
108. $(x - y)^2 - a^2$; $9(a + 2b)^2 - 1$; $a^2 - (b + c)^2$.
109. $(x + y)^2 - (x - y)^2$; $16x^2 - 4(x + y)^2$.
110. $x^2 - 2xy + y^2$; $m^2 + n^2 + 2mn$.
111. $2ab + a^2 + b^2$; $a^2 - 4ab + 4b^2$.
112. $x^2 + 8x + 16$; $x^2 + 1 + 2x$.

113. $5a^3 - 20a^2b + 20ab^2$.

114. $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; $a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

115. $ax + bx + ay + by$; $ac - ad + bd - bc$.

116. $a^2 + ab - a - b$; $xz - 3y - 3z + xy$.

117. $4mn + xy - 2nx - 2my$; $8a^3 - 12a^2 - 18a + 27$ (на 3 множителя).

VI. Алгебраические дроби

67. Отличие алгебраической дроби от арифметической. Частное от деления двух алгебраических выражений называется *алгебраической дробью*. Таковы, например, выражения:

$$\frac{a}{b},\ \frac{a+b}{c-d},\ \frac{2x^2 - x + 5}{x+2}.$$

Рассмотрим некоторые особенности алгебраических дробей.

Возьмём дробь $\frac{a}{b}$; найдём её численную величину при $a = 12$ и $b = 4$, затем при $a = 3$ и $b = 7$, далее при $a = -20$ и $b = 30$ и, наконец, при $a = 0$ и $b = 3$. Получим соответственно числа: 3, $\frac{3}{7}$, $-\frac{2}{3}$ и 0. Таким образом:

численная величина алгебраической дроби может быть числом целым и дробным, положительным и отрицательным, а также и нулём.

Так как a и b могут принимать, в зависимости от условий задачи, всевозможные числовые значения, то:

числитель и знаменатель алгебраической дроби могут, каждый в отдельности, быть числом целым и дробным, положительным и отрицательным. Числитель дроби может также обращаться в нуль, если же в нуль обращается знаменатель, то дробь теряет смысл (так как делить на нуль нельзя).

Таким образом, понятие алгебраической дроби шире, чем арифметической. Последнюю можно рассматривать как частный случай алгебраической дроби.

68. Основное свойство дроби. Так как дробь есть частное от деления числителя на знаменатель, а частное не изменяется от умножения (или деления) делимого и делителя на одно и то же число (кроме нуля, § 34, г), то это же свойство принадлежит и дроби, т. е. *величина дроби не изменится, если её числитель и знаменатель умножим (или разделим) на одно и то же число (кроме нуля).*

Например, если мы умножим числитель и знаменатель дроби $\dfrac{-\frac{2}{3}}{\frac{7}{5}}$ на $-\frac{4}{9}$, то будем иметь: прежняя дробь

$$-\frac{2}{3} : \frac{7}{5} = -\frac{10}{21};$$

новая дробь

$$\left[\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right] : \left[\frac{7}{5}\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\right] = \left(+\frac{8}{27}\right) : \left(-\frac{28}{45}\right) =$$
$$= -\frac{8\cdot 45}{27\cdot 28} = -\frac{8\cdot 5}{3\cdot 28} = -\frac{2\cdot 5}{3\cdot 7} = -\frac{10}{21};$$

мы видим, что величина дроби осталась прежняя.

Пользуясь этим свойством дроби, мы можем выполнять над алгебраическими дробями такие же преобразования, какие в арифметике указываются для дробей арифметических, т. е. мы можем сокращать, если возможно, дроби и приводить их, если нужно, к одному знаменателю.

69. Приведение членов дроби к целому виду. Если случится, что члены дроби сами содержат в себе дроби, то, умножая их на выбранное надлежащим образом число или на алгебраическое выражение, мы можем освободиться от этих дробей. Например:

1) $\dfrac{\frac{3}{4}a}{b}$; умножив оба члена на 4, получим $\dfrac{3a}{4b}$;

2) $\dfrac{\frac{2}{3}m}{\frac{7}{8}n}$; " " " " 24, " $\dfrac{16m}{21n}$;

3) $\dfrac{ax-1}{1-\frac{1}{x}}$; " " " " x, " $\dfrac{ax^2-x}{x-1}$.

Упражнения.

Привести члены дроби к целому виду:

118. $\dfrac{\frac{5}{7}x}{y}$; $\dfrac{0{,}3ab}{m}$; $\dfrac{a^3}{1\frac{3}{8}b}$; $\dfrac{m}{2{,}36n}$.

119. $\dfrac{\frac{3}{4}ab}{\frac{5}{6}x^2}$; $\dfrac{3\frac{1}{2}a^3}{3\frac{3}{4}b}$; $\dfrac{3x-\frac{1}{4}}{a-b}$.

120. $\dfrac{2\frac{1}{8}(a+b)}{4\frac{1}{4}}$; $\dfrac{3a-\frac{7}{3}}{1-\frac{1}{6}a}$.

121. $\dfrac{ax+b+\frac{c}{x}}{ax+1}$; $\dfrac{1+\frac{a}{x}-\frac{b}{x^2}}{1-\frac{1}{x}}$.

70. Перемена знаков у членов дроби. Переменить знак на противоположный перед числителем и знаменателем дроби — это всё равно, что умножить их на -1, от чего величина дроби не изменится. Так:

$$\frac{-8}{-4}=2 \quad \text{и} \quad \frac{+8}{+4}=2; \qquad \frac{-10}{+2}=-5 \text{ и } \frac{+10}{-2}=-5.$$

Заметим, что если переменим знак перед каким-нибудь одним членом дроби и в то же время переменим знак перед самой дробью, то величина дроби тоже не изменится; например:

$$\frac{-10}{+2}=-5; \qquad -\frac{-10}{-2}=-5; \; -\frac{+10}{+2}=-5.$$

Этими свойствами дроби можно иногда воспользоваться для некоторого её преобразования, например:

$$\frac{m^2-n^2}{n-m}=-\frac{m^2-n^2}{-(n-m)}=-\frac{(m+n)(m-n)}{m-n}=-(m+n).$$

Упражнения.

Переменить знаки у числителя и знаменателя дробей:

122. $\dfrac{1-x}{-x}$; $\dfrac{-3a^2}{a-b}$; $\dfrac{1-a}{2-b}$.

123. $\dfrac{-a^2-b^2+2ab}{b-a}$; $\dfrac{1-m^2}{-m+1}$.

124. Не изменяя величины дробей, поставить знак «$-$» перед каждой дробью:

$$\frac{-3a}{6};\ \frac{5x^2}{-3};\ \frac{1-a}{b};\ \frac{a}{2-x};\ \frac{m^2-n^2}{n-m}.$$

71. Сокращение дробей. Алгебраическая дробь может быть приведена к более простому виду в том случае, когда числитель и знаменатель содержат общие множители.

П р и м е р ы.

$$\frac{48ab}{60ac}=\frac{4b}{5c}; \quad \frac{3a^2b}{7a^3b}=\frac{3}{7a}; \quad \frac{160a^5b^2cd^2}{120a^3b^5c}=\frac{4a^2d^2}{3b^3}.$$

Из приведённых примеров видно, что

при сокращении дробей коэффициенты числителя и знаменателя сокращаются на их общий делитель, а общие буквенные множители сокращаются на общую степень, в которой они входят в числитель и в знаменатель.

Если у дроби числитель или знаменатель (или тот и другой) — многочлены, то надо предварительно разложить эти многочлены на множители (так, как было указано в § 66); если в числе их окажутся одинаковые, то на них дробь можно сократить.

Примеры.

$$\frac{6x^2+8xy}{9xy+12y^2}=\frac{2x(3x+4y)}{3y(3x+4y)}=\frac{2x}{3y};$$

$$\frac{x^2-1}{2x+2}=\frac{(x+1)(x-1)}{2(x+1)}=\frac{x-1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)$$

$\left(\text{вместо деления на 2 поставлено умножение на } \frac{1}{2}\right)$.

Упражнения.

Сократить дроби:

125. $\frac{7}{7x}$; $\frac{2m}{3m^2}$; $\frac{4a^2b}{6ab^2}$; $\frac{42x^3y^3}{112x^2y^2}$.

126. $\frac{12ab}{8ax}$; $\frac{3a^2bc}{12ab^2}$; $\frac{48a^3x^2y^4}{45a^2xy}$.

127. $\frac{ab}{a^2+ab}$; $\frac{9xy}{3x^2-3xy}$; $\frac{4a+8}{4a-8}$.

128. $\frac{a^2+a}{a^2-a}$; $\frac{x-3}{x^2-9}$; $\frac{a^2+a}{a^2-1}$.

129. $\frac{x(x-1)^2}{2x^2(x-1)(x+1)}$; $\frac{ax+x^2}{3bx-cx^2}$; $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2}$.

130. $\frac{(a+b)^2(a-b)^2}{a^2-b^2}$; $\frac{p^2-1}{(1+py)^2-(p+y)^2}$.

72. Приведение дробей к общему знаменателю. а) Возьмём дроби, у которых знаменатели — буквенные одночлены, например:

$$\frac{a}{2b};\ \frac{c}{3ab};\ \frac{d}{5ab^2}.$$

За общий знаменатель нужно, очевидно, взять $30ab^2$. Дополнительными множителями тогда будут: $15ab$, $10b$ и 6.

$$\frac{a^{\underbrace{15ab}}}{2b} = \frac{15a^2b}{30ab^2};\ \frac{c^{\underbrace{10b}}}{3ab} = \frac{10bc}{30ab^2};\ \frac{d^{\underbrace{6}}}{5ab^2} = \frac{6d}{30ab^2}.$$

Возьмём ещё пример:

$$\frac{a}{12b^2c};\quad \frac{3b}{8a^3c^4d^2};\quad \frac{5c}{18ab}.$$

Общий знаменатель должен делиться на все данные знаменатели. Следовательно, наименьшим коэффициентом в общем знаменателе является общее наименьшее кратное данных коэффициентов. Буквенные сомножители должны войти в общий знаменатель в такой степени, которая делилась бы на каждую степень, которую этот множитель имеет в знаменателях. Значит, в данном примере за коэффициент общего знаменателя мы должны взять общее наименьшее кратное чисел 12, 8 и 18, т. е. 72.

Множитель a должен быть взят с показателем 3, множитель b — с показателем 2 и т. д. Общий знаменатель будет: $72a^3b^2c^4d^2$.

Дополнительными множителями будут: $6a^3c^3d^2$, $9b^2$ и $4a^2bc^4d^2$.

$$\frac{a^{\underbrace{6a^3c^3d^2}}}{12b^2c} = \frac{6a^4c^3d^2}{72a^3b^2c^4d^2};\ \frac{3b^{\underbrace{9b^2}}}{8a^3c^4d^2} = \frac{27b^3}{72a^3b^2c^4d^2};\ \frac{5c^{\underbrace{4a^2bc^4d^2}}}{18ab} = \frac{20a^2bc^5d^2}{72a^3b^2c^4d^2}.$$

Из этих примеров видно:

Чтобы найти общий знаменатель нескольких алгебраических дробей с одночленными знаменателями, достаточно взять общее наименьшее кратное коэффициентов знаменателей данных дробей, затем взять буквенные множители в наивысшей степени, в которой они входят в данные знаменатели, произведение всех этих множителей и будет общим знаменателем данных дробей.

б) Далее возьмём дроби, у которых знаменатели — многочлены; например:

$$\frac{x}{a-b};\ \frac{y}{a+b};\ \frac{z}{a^2-b^2}.$$

Разложим каждый знаменатель на множители. Первые два не разлагаются, а третий равен $(a+b)(a-b)$. Значит, общим знаменателем будет a^2-b^2; получим:

$$\frac{x^{\underbrace{a+b}}}{a-b} = \frac{ax+bx}{a^2-b^2};\quad \frac{y^{\underbrace{a-b}}}{a+b} = \frac{ay-by}{a^2-b^2};\quad \frac{z}{a^2-b^2}.$$

в) Может случиться, что никакая пара знаменателей не имеет общих множителей. Тогда надо поступить так, как это делается в арифметике, а именно: умножить числитель и знаменатель каждой дроби на произведение знаменателей всех остальных дробей.

Например:

$$\frac{a}{3m};\ \frac{2b}{5n};\ \frac{3c}{2p};\ \ldots\ \frac{a\cdot 5n\cdot 2p}{3m\cdot 5n\cdot 2p};\ \frac{2b\cdot 3m\cdot 2p}{5n\cdot 3m\cdot 2p};\ \frac{3c\cdot 3m\cdot 5n}{2p\cdot 3m\cdot 5n},\ \text{т. е.}\ \frac{10anp}{30mnp};\ \frac{12bmp}{30mnp};\ \frac{45cmn}{30mnp};$$

$$\frac{a}{a+b};\ \frac{b}{a-b};\ \ldots\ \frac{a(a-b)}{(a+b)(a-b)};\ \frac{b(a+b)}{(a+b)(a-b)},\ \text{т. е.}\ \frac{a^2-ab}{a^2-b^2};\quad \frac{ab+b^2}{a^2-b^2}.$$

Упражнения.

Привести дроби к одному знаменателю:

131. $\frac{3}{a}$, $\frac{4}{b}$; $\frac{x}{3y}$, $\frac{y}{4x}$; $\frac{x}{4}$, $\frac{4}{x}$.

132. $\frac{2}{a}$, $\frac{3}{b}$, $\frac{1}{2c}$; $\frac{7x}{4a^2}$, $\frac{2}{3b^2}$, $\frac{4b^2}{5x}$.

133. $\frac{5xy}{3a^2bc}$, $\frac{3ab}{4mx^2y}$; $\frac{x}{4ab}$, $\frac{y}{8a^3b^2}$.

134. $\frac{3}{8ab}$, $3x$, $\frac{a}{5x^3}$ $\left(\text{представить } 3x \text{ дробью } \frac{3x}{1}\right)$.

135. $\frac{x+y}{2x-2y}$, $\frac{x-y}{3x+3y}$; $\frac{1}{m+1}$, $\frac{2}{m^2-1}$, $\frac{3}{m-1}$.

136. $\frac{2}{x^2-2x+1}$, $\frac{3a}{x-1}$; $\frac{1}{x-1}$, $\frac{2}{2x-1}$, $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$.

137. $\frac{x}{28a^3b^2}$, $\frac{y}{21a^2b}$; $\frac{a-b}{b}$, $\frac{2a}{a-b}$, $\frac{1}{a^2-b^2}$.

73. Сложение и вычитание дробей. По правилу деления многочлена на одночлен (§ 59) мы можем написать:

$$\frac{a+b+c}{m}=\frac{a}{m}+\frac{b}{m}+\frac{c}{m};\quad \frac{a-b}{m}=\frac{a}{m}-\frac{b}{m}.$$

Читая эти равенства справа налево, находим:

1. *Чтобы сложить дроби с одинаковыми знаменателями, надо сложить их числители и под суммой подписать тот же знаменатель.*

2. *Чтобы вычесть дроби с одинаковыми знаменателями, надо вычесть их числители и под разностью подписать тот же знаменатель.*

Если данные для сложения или вычитания дроби имеют разные знаменатели, то предварительно их следует привести к одному знаменателю.

Примеры.

1. $\dfrac{a^{\overset{df}{\smile}}}{b}+\dfrac{c^{\overset{bf}{\smile}}}{d}+\dfrac{e^{\overset{bd}{\smile}}}{f}=\dfrac{adf+cbf+ebd}{bdf}.$

2. $\dfrac{3m^{2\,\overset{2b}{\smile}}}{10a^2bc}-\dfrac{5n^{2\,\overset{5ac}{\smile}}}{4ab^2}=\dfrac{6bm^2-25acn^2}{20a^2b^2c}.$

3. $\dfrac{x+1}{2x-2}-\dfrac{x^2+3}{2x^2-2}.$

$$\begin{array}{l|l}
2x-2=2(x-1) & \text{Доп. множ.} = x+1 \\
2x^2-2=2(x^2-1)=2(x+1)(x-1) & \quad\text{"}\qquad\text{"}\quad = \quad 1 \\
\hline
\end{array}$$

Общий знам. $2(x+1)(x-1)$

В результате вычитания получим:

$$\frac{(x+1)^2-(x^2+3)}{2(x+1)(x-1)}=\frac{x^2+2x+1-x^2-3}{2(x+1)(x-1)}=\frac{2x-2}{2(x+1)(x-1)}=\frac{1}{x+1}.$$

Упражнения.

138. $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{3c};\quad \dfrac{2}{x^2}+\dfrac{5}{3x};\quad \dfrac{a-1}{2}-\dfrac{2x+3}{4}.$

139. $1-\dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ $\left(\text{изобразить 1 дробью } \dfrac{1}{1}\right).$

140. $1+\dfrac{x-1}{2};\quad x-\dfrac{2(3-x)}{3};\quad 1-\dfrac{2(x-1)}{3}.$

141. $\dfrac{2+x}{1+2x}-\dfrac{2-x}{1-2x}-\dfrac{1+6x}{4x^2-1}.$

142. $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}+\dfrac{b}{a^2+ab}-\dfrac{a+b}{a^2-ab}.$

143. Во что обратится дробь $\dfrac{m-x}{n-1}$, если вместо x подставить $\dfrac{mn}{m+n}$?

74. Умножение дробей. *Чтобы умножить дробь на дробь, надо умножить числитель на числитель и знаменатель на знаменатель и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем*, т. е.:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}. \tag{1}$$

Это правило совпадает с правилом умножения арифметических дробей. Но так как под буквами могут подразумеваться не только целые положительные числа, но и дробные и отрицательные, то необходимо проверить это правило и для дробей алгебраических, когда числа a, b, c и d будут какие угодно. Предположим сначала, что все эти числа положительные и дробные. Пусть, например:

$$a = \frac{2}{3}, \quad b = \frac{7}{8}, \quad c = \frac{5}{6} \quad \text{и} \quad d = \frac{9}{4}.$$

Подставим эти числа в равенство (1), вычислим отдельно его левую и его правую части и, сравнив результаты, получим:

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3} : \frac{7}{8} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 7}; \quad \frac{c}{d} = \frac{5}{6} : \frac{9}{4} = \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9};$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{2 \cdot 8}{3 \cdot 7} \cdot \frac{5 \cdot 4}{6 \cdot 9} = \frac{2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9}$$

(окончательного вычисления производить не будем).

Теперь найдём правую часть равенства (1):

$$ac = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6}; \quad bd = \frac{7}{8} \cdot \frac{9}{4} = \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 4};$$
$$\frac{ac}{bd} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 6} : \frac{7 \cdot 9}{8 \cdot 4} = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4}{3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9}.$$

Сравнивая полученные результаты, мы видим, что они одинаковы, так как (согласно переместительному закону умножения целых чисел) $2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 4 = 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 4$ и $3 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9 = 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9$. Следовательно, равенство (1) остаётся верным и в этом случае.

Теперь допустим, что какое-нибудь из чисел a, b, c и d сделалось отрицательным. Пусть, например, $a = -\frac{2}{3}$ (b, c и d имеют прежние значения). Тогда дробь $\frac{a}{b}$ сделается отрицательной, и вся левая часть равенства (1) также будет отрицательным числом. В правой части произведение ac сделается отрицательным, и потому вся правая часть тоже будет отрицательным числом. Абсолютная же величина у левой части и у правой части останется прежняя. Значит, равенство (1) не нарушится. Так же убедимся, что равенство (1) остаётся верным и тогда, когда и другие числа сделаются отрицательными.

Всё то, что мы сейчас говорили о частном примере, может быть повторено о всяком другом примере; значит, равенство (1) верно при всяких значениях букв a, b, c и d.

75. Квадрат и куб дроби. Применим правило умножения дробей к возведению их в квадрат и куб. Согласно правилу:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2};\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

Отсюда следует:

Чтобы возвести в квадрат или куб алгебраическую дробь, надо возвести в эту степень отдельно числитель и знаменатель.

76. Деление дробей. *Чтобы разделить дробь на дробь, надо умножить числитель первой дроби на знаменатель второй, знаменатель первой на числитель второй и первое произведение взять числителем, а второе знаменателем*, т. е.:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}.$$

Что это равенство верно для всех чисел a, b, c, d, можно убедиться простой проверкой деления: умножив частное на делитель, мы получим делимое:

$$\frac{ad}{bc}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\overset{cd}{\overbrace{dc}}}{bcd} = \frac{a}{b}.$$

77. Замечания. 1) Так как $\dfrac{ad}{bc} = \dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{d}{c}$, то правило деления можно высказать иначе:

Чтобы разделить дробь на дробь, достаточно первую умножить на обратную второй.

2) Всякое целое алгебраическое выражение можно рассматривать как дробь, у которой числитель есть это целое выражение, а знаменателем служит 1; например, $a = \dfrac{a}{1}$; $3x^2 = \dfrac{3x^2}{1}$ и т. п. Поэтому данные нами *правила действий над дробями можно применять и к таким случаям, когда какое-нибудь из данных выражений есть целое*, стоит только это целое изобразить дробью. Например:

$$a : \frac{b}{c} = \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{ac}{b}.$$

Упражнения.

144. $-\dfrac{3x}{5a}\cdot\dfrac{10ab}{7x^3}$; $\quad\dfrac{1-a}{5x^3}\cdot\dfrac{x^2}{1-a^2}$.

145. $\dfrac{4x^2y^2}{15n^4a^3}\cdot 45p^2q^2$; $\quad\dfrac{x^2-1}{3}\cdot\dfrac{6a}{x+1}$.

146. $\left(a+\dfrac{ab}{a+b}\right):\left(b-\dfrac{ab}{a+b}\right)$; $\quad \dfrac{3a^2b^5c^4}{4x^2y^2z^4}:\dfrac{4a^4b^3c^2}{3x^4y^2z^2}$.

147. $\dfrac{12a^4b^2}{5mp}:4ab^2$; $\quad 81a^3b^2:\dfrac{27ab^2}{5x^2y}$.

148. $\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}:\dfrac{5a^2+5b^2}{a+b}$; $\quad \left(x+\dfrac{xy}{x-y}\right):\left(x-\dfrac{xy}{x+y}\right)$.

Глава 4

УРАВНЕНИЯ ПЕРВОЙ СТЕПЕНИ

I. Общие свойства уравнений

78. Равенства и их свойства. Два числа или два алгебраических выражения, соединённые между собой знаком «$=$», составляют *равенство*. Числа эти или выражения называются *частями* равенства; то, что стоит налево от знака «$=$», составляет *левую* часть, а то, что стоит направо от этого знака, составляет *правую* часть. Например, в равенстве:

$$a + a + a = a \cdot 3$$

левая часть есть сумма $a + a + a$, а правая — произведение $a \cdot 3$.

Обозначив каждую часть равенства одной буквой, мы можем главнейшие свойства равенства выразить так:

а) Если $a = b$, то и $b = a$, т. е. *части равенства можно менять местами.*

б) Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$, т. е. *если два числа равны порознь третьему, то они равны между собой.*

в) Если $a = b$ и $m = n$, то $a + m = b + n$ и $a - m = b - n$, т. е. *если к равным числам прибавим или из равных чисел вычтем равные числа, то равенство не нарушится.*

г) Если $a = b$ и $m = n$, то $am = bn$ и $\dfrac{a}{m} = \dfrac{b}{n}$, т. е. *если равные числа умножим или разделим на равные числа, то равенство не нарушится.*

Полезно обратить внимание на то, что *умножение или деление обеих частей равенства на -1 равносильно перемене знаков перед частями равенства*. Так, если обе части равенства $-x = -5$ умножить на -1, то получим: $x = 5$.

79. Тождество. Два алгебраических выражения называются *тождественными*, если при всяких численных значениях входящих в них букв они имеют одну и ту же численную величину. Таковы, например, выражения:

$$ab \text{ и } ba; \quad a + (b + c) \text{ и } a + b + c.$$

Если в каком-нибудь равенстве обе его части составляют тождественные алгебраические выражения, то такое равенство называется *тождеством*. Таково, например, равенство:

$$a + b + c = a + (b + c).$$

Тождеством называется также и такое равенство, в которое входят только числа, выраженные цифрами, если обе его части по выполнении всех действий, указанных в них, дают одно и то же число, например:

$$(40 \cdot 5) : 8 = 5^2.$$

80. Уравнение. Положим, мы желаем решить такую задачу: отцу 40 лет, сыну 17 лет. Через сколько лет отец будет вдвое старше сына?

Обыкновенным (арифметическим) путём задачу решить трудно. Решим её, применив буквенное обозначение. Обозначим искомое число лет буквой x. Через x лет отцу будет $(40 + x)$ лет, а сыну будет $(17 + x)$ лет. По условию задачи число лет отца, т. е. $(40 + x)$, должно быть вдвое больше числа лет сына, т. е. $(17 + x)$. Это мы можем записать в виде равенства:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Проверкой убеждаемся, что это равенство верно при $x = 6$. В самом деле, при этом значении x будет:

$$40 + 6 = 2(17 + 6); \quad 46 = 46.$$

При всяком другом числе, которое мы подставим вместо x, равенство нарушится.

Это равенство нельзя назвать тождеством, так как оно верно не при всяких значениях входящей в него буквы. Только подстановка 6 вместо x обращает это равенство в тождество:

$$46 = 46.$$

Если обе части равенства, содержащие одну или несколько букв, имеют одинаковую численную величину не при всяких численных значениях этих букв, то данное равенство называется *уравнением*, а числа, обозначенные этими буквами, называются *неизвестными* (числами) уравнения. Эти числа обыкновенно обозначаются последними буквами латинского алфавита (x, y, $z \ldots$).

Уравнения бывают с одним неизвестным, с двумя и т. д.

Р е ш и т ь у р а в н е н и е — значит найти те значения входящих в него неизвестных, которые у д о в л е т в о р я ю т уравнению, т. е. обращают его в тождество. Эти значения неизвестных называются *корнями* уравнения.

Уравнение с одним неизвестным может иметь один корень, два корня и более; например, уравнение $3x - 2 = 13$ имеет один корень (5), уравнение $x^2 + 2 = 3x$ имеет два корня (1 и 2), уравнение $(x-1)(x-2)(x+1) = 0$ имеет три корня (1, 2 и -1) [1] и т. п. Может даже случиться, что уравнение совсем не имеет корня. Таково, например, уравнение $x^2 = -4$; какое бы положительное или отрицательное число мы ни подставили на место x, квадрат этого числа не может равняться отрицательному числу.

Уравнение, выведенное выше из условий нашей задачи, имеет корень 6. Это и есть ответ на вопрос задачи. В самом деле, через 6 лет отцу будет 46 лет, а сыну 23 года, т. е. вдвое меньше.

Таким образом, для решения некоторых задач полезно прибегать к составлению уравнений и научиться решать их; а для этого необходимо ознакомиться с некоторыми общими свойствами уравнений.

Решим для примера приведённое выше уравнение:

$$40 + x = 2(17 + x).$$

Раскроем скобки в правой части уравнения:

$$40 + x = 34 + 2x.$$

Отнимем от обеих частей уравнения по x; получим:

$$40 = 34 + x.$$

Отнимем, наконец, от обеих частей уравнения по 34; получим:

$$6 = x, \text{ и, значит, } x = 6.$$

Итак, посредством ряда преобразований нашего уравнения мы получили для x значение 6.

Примерно таким образом, как мы увидим далее, решаются и другие уравнения.

Упражнения.

149. Какие из следующих равенств можно назвать тождествами и какие — уравнениями?

$$x + y = y + x; \quad (a - b + x)c = ac - bc + xc;$$
$$3a - 4 = 2a + 1; \quad 8x + 1 = 5x + 7; \quad a(bc) = abc;$$
$$2x = x + 1; \quad (xy) : y = x; \quad a : 2b = \frac{a}{2} : b.$$

[1] Вспомним, что если какой-нибудь сомножитель равен нулю, то и произведение равно нулю, и обратно.

81. Равносильные уравнения. *Два уравнения называются равносильными, если все корни первого уравнения служат корнями второго уравнения и, обратно, все корни второго уравнения служат корнями первого уравнения.* Например, два уравнения:

$$x^2 + 2 = 3x \quad \text{и} \quad 3x - 2 = x^2$$

равносильны, так как у них одни и те же корни, именно: 1 и 2; уравнения же

$$7x = 14 \quad \text{и} \quad x^2 + 2 = 3x$$

не равносильны, так как первое имеет только один корень 2, тогда как второе, кроме этого корня, имеет ещё другой корень 1.

Когда, решая какое-нибудь уравнение, мы совершаем над ним некоторые преобразования, то этими преобразованиями мы заменяем данное уравнение последовательно другими, более простыми, до тех пор, пока не получим уравнения самого простого вида: $x = a$; тогда мы говорим, что это число a и есть корень данного уравнения. Но утверждать это безошибочно мы можем только тогда, когда у нас есть уверенность, что все уравнения, полученные при преобразованиях, равносильны данному уравнению.

Преобразования, которые нам приходится совершать над уравнениями, основаны на двух свойствах уравнения, которые мы сейчас рассмотрим.

82. Первое свойство уравнений. Возьмём какое-нибудь уравнение, например, такое:

$$x^2 + 2 = 3x. \tag{1}$$

Положим, что к обеим частям этого уравнения мы прибавили какое-нибудь одно и то же число m (положительное, отрицательное или нуль); тогда мы получим новое уравнение:

$$x^2 + 2 + m = 3x + m. \tag{2}$$

Докажем, что это уравнение равносильно данному. Для этого достаточно убедиться, во-первых, в том, что всякий корень уравнения (1) удовлетворяет и уравнению (2), и, во-вторых, обратно, в том, что всякий корень уравнения (2) удовлетворяет и уравнению (1).

а) Пусть уравнение (1) имеет какой-нибудь корень, например, $x = 1$. Это значит, что когда в это уравнение на место x подставим 1, то выражение $x^2 + 2$ сделается равным выражению $3x$ (каждое из этих выражений обратится в число 3). Но тогда при

$x = 1$ суммы $x^2 + 2 + m$ и $3x + m$ сделаются равными, так как если к равным числам (3 и 3) прибавим одно и то же число (m), то и получим равные числа ($3 + m$ и $3 + m$). Значит, корень $x = 1$ должен быть также корнем уравнения (2). Если уравнение (1) имеет ещё какой-нибудь корень, то о нём можно сказать то же самое, что сейчас мы говорили о корне $x = 1$, т. е. что он удовлетворяет и уравнению (2). Таким образом, каждый корень уравнения (1) принадлежит и уравнению (2).

б) Допустим, что уравнение (2) имеет какой-нибудь корень, например, $x = 2$. Это значит, что если в это уравнение на место x подставим 2, то выражение $x^2 + 2 + m$ сделается равным выражению $3x + m$ (именно, каждое из этих выражений обратится в число $6 + m$). Но тогда при $x = 2$ и выражения $x^2 + 2$ и $3x$ сделаются равными, так как если от равных чисел ($6 + m$ и $6 + m$) отнимем одно и то же число (m), то и получим равные числа. Значит, $x = 2$ есть также корень и уравнения (1). Если бы уравнение (2) имело ещё какой-нибудь корень, то о нём можно было бы повторить то же самое, что мы сейчас сказали о корне $x = 2$, т. е. что и этот другой корень должен удовлетворять уравнению (1).

Значит, всякий корень уравнения (2) должен быть и корнем уравнения (1).

Если же корни уравнений (1) и (2) одни и те же, то уравнения эти равносильны. Свойство это относится и к вычитанию из частей уравнения одного и того же числа, так как вычитание какого-нибудь числа равносильно прибавлению этого числа с противоположным знаком.

Таким образом, *если к обеим частям уравнения прибавим или из них вычтем одно и то же число, то получим новое уравнение, равносильное первому.*

83. Следствия. Из этого свойства можно вывести следующие следствия, которыми часто приходится пользоваться при решении уравнений.

1. *Члены уравнения можно переносить из одной его части в другую, переменив перед этими членами знаки на обратные.* Например, прибавив к обеим частям уравнения

$$8 + x^2 = 7x - 2$$

по 2, получим:

$$8 + x^2 + 2 = 7x.$$

Член -2 из правой части перешел в левую с обратным знаком «$+$». Вычтя из последнего уравнения по x^2, получим:

$$8 + 2 = 7x - x^2.$$

Член $+x^2$ перешел из левой части в правую с обратным знаком.

2. *Если два одинаковых члена с одинаковыми знаками стоят в разных частях уравнения, то такие члены можно уничтожить.* Например, если дано уравнение

$$6x + 3 = x^2 + 3,$$

то, отняв от обеих частей этого уравнения по 3, получим:

$$6x = x^2.$$

84. Второе свойство уравнений. Возьмём то же самое уравнение

$$x^2 + 2 = 3x \tag{1}$$

и умножим обе его части на какое-нибудь число m, положительное или отрицательное (только не на нуль). Тогда получим новое уравнение:

$$(x^2 + 2)m = 3xm. \tag{2}$$

Чтобы обнаружить равносильность этих двух уравнений, будем рассуждать совершенно так же, как мы рассуждали относительно первого свойства, а именно: покажем, во-первых, что всякий корень уравнения (1) удовлетворяет уравнению (2), и, во-вторых, обратно: всякий корень уравнения (2) удовлетворяет уравнению (1).

а) Пусть уравнение (1) имеет какой-нибудь корень, например, $x = 1$. Это значит, что когда в это уравнение на место x подставим 1, то выражение $x^2 + 2$ сделается равным выражению $2x$ (каждое из этих выражений обратится в число 3). Но тогда при $x = 1$ и произведения $(x^2 + 2)m$ и $3xm$ сделаются равными, так как если равные числа (3 и 3) умножим на одно и то же число (m), то получим равные числа ($3m$ и $3m$). Значит, корень $x = 1$ должен быть также и корнем уравнения (2). Так как всё это можно повторить о всяком ином корне уравнения (1), то заключаем, что в с я к и й корень уравнения (1) принадлежит и уравнению (2).

б) Обратно, пусть уравнение (2) имеет какой-нибудь корень, например, $x = 2$. Это значит, что если в это уравнение на место x подставим 2, то произведения $(x^2 + 2)m$ и $3xm$ сделаются равными (каждое из них обратится в число $6m$). Но тогда при

$x = 2$ и выражения $x^2 + 2$ и $3x$ сделаются равными, так как если равные числа ($6m$ и $6m$) разделим на одно и то же число m, не равное нулю, то получим равные числа. Значит, корень $x = 2$, как и всякий другой корень уравнения (2), есть также и корень уравнения (1); поэтому уравнения эти равносильны.

Предположим теперь, что число m, на которое мы умножали обе части уравнения, равно нулю. Например, умножим на нуль части уравнения $x^2 + 2 = 3x$, которое имеет два корня: 1 и 2; мы получим тогда новое уравнение:

$$(x^2 + 2) \cdot 0 = 3x \cdot 0.$$

Уравнению этому удовлетворяют не только 1 и 2, но и произвольное значение x. Так, подставляя на место x числа 5, 6 и т. д., получим:

$$(5^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 5 \cdot 0; \quad (6^2 + 2) \cdot 0 = 3 \cdot 6 \cdot 0,$$

т. е.

$$27 \cdot 0 = 15 \cdot 0; \quad 38 \cdot 0 = 18 \cdot 0,$$

или

$$0 = 0; \quad 0 = 0$$

(так как произведение всякого числа на нуль есть нуль). Значит, от умножения на нуль равносильность уравнений может нарушиться.

Таким образом, *если обе части уравнения мы умножим или разделим на одно и то же число, не равное нулю, то получим новое уравнение, равносильное первому*.

85. Следствия. Из второго свойства уравнений можно вывести следующие три следствия:

1. *Если все члены уравнения имеют общий множитель, не равный нулю и не содержащий неизвестных, то все члены уравнения можно на него разделить*. Например:

$$60x - 160 = 340 - 40x.$$

Разделив все члены на 20, получим уравнение более простое:

$$3x - 8 = 17 - 2x.$$

2. *Уравнение можно освободить от дробных членов, не содержащих неизвестное в знаменателе*. Например:

$$\frac{7x - 3}{6} - \frac{x - 5}{4} = \frac{43}{6}.$$

Приведём все члены к общему знаменателю:

$$\frac{14x-6}{12}-\frac{3x-15}{12}=\frac{86}{12}, \text{ или } \frac{14x-6-(3-x-15)}{12}=\frac{86}{12}.$$

Отбросив общий знаменатель, мы тем самым умножим обе части уравнения на одно и то же число, не равное нулю (на 12); от этого получим уравнение, равносильное данному:

$$14x-6-(3x-15)=86, \text{ или } 14x-6-3x+15=86.$$

3. *Перед всеми членами уравнения можно переменить знаки на противоположные*, потому что это всё равно, что умножить обе части уравнения на -1. Например, произведя такое умножение частей уравнения $-8-x^2=-7+2$, получим: $8+x^2=7-2$.

86. Умножение или деление частей уравнения на одно и то же алгебраическое выражение. Иногда приходится для преобразования данного уравнения умножить (или разделить) обе его части на одно и то же алгебраическое выражение (в следующем параграфе мы увидим этому пример). Полученное после умножения новое уравнение лишь тогда окажется равносильным данному, когда алгебраическое выражение, на которое мы умножим (или разделим) обе части данного уравнения, не равно нулю, так как от умножения на нуль равносильность уравнений нарушается.

87. Посторонние корни. Умножать обе части уравнения на одно и то же алгебраическое выражение приходится тогда, когда мы решаем уравнение, содержащее дроби, в знаменатели которых входит неизвестное. Пусть, например, надо решить уравнение:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2}. \tag{1}$$

Общий знаменатель всех дробей есть, очевидно, $(x-2)^2$. Приведём все члены к этому знаменателю:

$$\frac{x^2}{(x-2)^2}+\frac{2}{(x-2)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}+\frac{2x+2}{(x-2)^2};$$

отбросим его, т. е. другими словами, умножим все члены на $(x-2)^2$:

$$x^2+2=x-2+2x+2,$$

т. е.

$$x^2+2=3x. \tag{2}$$

Уравнение это имеет два корня: 1 и 2. Но мы не можем ручаться за то, что оба эти корня годны и для первоначального уравнения, так как обе части этого уравнения нам пришлось умножить на выражение $(x-2)^2$, которое при $x=2$ обращается в нуль, а при умножении на нуль равносильность уравнений может нарушиться.

Остаётся испытать найденные корни 1 и 2 с целью определить, годны ли они не только для уравнения (2), но и для уравнения (1). Корень $x=1$ удовлетворяет уравнению (1):

$$\frac{1^2}{(1-2)^2}+\frac{2}{(1-2)^2}=\frac{1}{1-2}+\frac{2\cdot 1+2}{(1-2)^2},$$
$$\frac{1}{(-1)^2}+\frac{2}{(-1)^2}=\frac{1}{-1}+\frac{2+2}{(-1)^2},$$
$$1+2=-1+4, \text{ т. е. } 3=3.$$

Но другой корень, $x=2$, для уравнения (1) не годится, так как при $x=2$ оно теряет смысл:

$$\frac{4}{0}+\frac{2}{0}=\frac{1}{0}+\frac{6}{0}$$

(деление на нуль невозможно).

Мы видим, таким образом, что если в данном уравнении имеются дроби, знаменатели которых содержат неизвестное, и мы освободились от этих знаменателей, умножив обе части уравнения на общий знаменатель, то, найдя корни полученного уравнения, мы должны ещё подстановкой испытать их с целью определить, нет ли среди корней посторонних.

Разделив обе части уравнения на алгебраическое выражение, содержащее неизвестное, мы можем потерять некоторые корни.

Например, разделив обе части уравнения:

$$(2x+3)(x-3)=(3x-1)(x-3)$$

на $x-3$, получим новое уравнение:

$$2x+3=3x-1,$$

которое не будет равносильно данному, так как имеет лишь один корень $x=4$, тогда как первое имеет два корня: $x=4$ и $x=3$.

II. Уравнения с одним неизвестным

88. Решение уравнений первой степени с одним неизвестным. На следующих двух примерах покажем способ решения уравнений первой степени с одним неизвестным.

1. Решить уравнение:

$$3x + 2(4x - 3) = 5(x + 2) - 4.$$

Раскрыв скобки, получим:

$$3x + 8x - 6 = 5x + 10 - 4.$$

Перенесём члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а известные члены — в правую (см. следствие первого свойства уравнений):

$$3x + 8x - 5x = 10 - 4 + 6.$$

Сделаем приведёние подобных членов:

$$6x = 12.$$

Наконец делим обе части уравнения на 6 (на основании второго свойства уртвнений). Получаем окончательно:

$$x = 2.$$

Чтобы убедиться, не совершили ли мы какой-либо ошибки при решении уравнения, надо произвести п р о в е р к у решения. Для этого подставим найденный корень в данное уравнение вместо x, произведём указанные в уравнении действия, и если уравнение превратится в тождество, то корень найден правильно. В нашем случае получим:

$$3 \cdot 2 + 2(4 \cdot 2 - 3) = 5(2 + 2) - 4,$$

или

$$16 = 16.$$

Значит, решение правильно.

2. Решить уравнение:

$$\frac{3x - 4}{2} + \frac{3x + 2}{5} - x = \frac{7x - 6}{6} - 1.$$

Приводим все члены к общему знаменателю, который равен 30:

$$\frac{15(3x - 4)}{30} + \frac{6(3x + 2)}{30} - \frac{30x}{30} = \frac{5(7x - 6)}{30} - \frac{30}{30}.$$

Умножаем все члены уравнения на 30 (или, что то же, отбрасываем общий знаменатель):

$$15(3x - 4) + 6(3x + 2) - 30x = 5(7x - 6) - 30.$$

Тот же результат получили бы, если бы сразу все члены данного уравнения умножили на их общий знаменатель:

$\dfrac{30(3x-4)}{2}+\dfrac{30(3x+2)}{5}-30x=\dfrac{30(7x-6)}{6}-30\cdot 1$, или по сокращении: $15(3x-4)+6(3x+2)-30x=5(7x-6)-30$.

Раскрываем скобки:

$$45x-60+18x+12-30x=35x-30-30.$$

Переносим члены, содержащие неизвестное, в левую часть, а известные члены — в правую:

$$45x+18x-30x-35x=60-12-30-30.$$

Приводим подобные члены:

$$-2x=-12.$$

Делим обе части на коэффициент при неизвестном (можно было предварительно умножить обе части на -1, чтобы сделать их положительными):

$$x=\frac{-12}{-2}=\frac{12}{2}=6.$$

Производим проверку:

$$\frac{3\cdot 6-4}{2}+\frac{3\cdot 6+2}{5}-6=\frac{7\cdot 6-6}{6}-1;\quad 7+4-6=6-1;\quad 5=5.$$

Из приведённых примеров находим, что для решения уравнения первой степени с одним неизвестным надо:

1. *Освободить уравнение от дробных членов.*
2. *Раскрыть скобки.*
3. *Перенести члены, содержащие неизвестное, в одну часть, а известные члены — в другую.*
4. *Сделать приведение подобных членов.*
5. *Разделить обе части уравнения на коэффициент при неизвестном.*

Далее надо произвести проверку правильности найденного решения путём подстановки его в первоначальное уравнение.

Понятно, что в зависимости от вида уравнения не всегда приходится производить все пять указанных операций.

З а м е ч а н и е. После выполнения над уравнением первых четырёх операций у нас остаётся в каждой части по одному члену: в левой — член, содержащий неизвестное, в правой — известный член. В общем виде это уравнение может быть представлено в такой форме:

$$ax=b,$$

где a и b могут быть числами положительными, отрицательными или равными нулю. Уравнение такого вида называется нормальным видом уравнения первой степени с одним неизвестным.

Упражнения.

Решить следующие уравнения:

150. $2x + 1 = 35;\quad 19 = 4 + 3y;\quad 7y - 11 = 24.$

151. $3x + 23 = 104;\quad 89 = 11y - 10;\quad 38 = 2 + 3x.$

152. $3x = 15 - 2x;\quad 4x - 3 = 9 - 2x;\quad 5x + \frac{1}{4} = 3\frac{1}{2}.$

153. $2{,}5x - 0{,}86 = 4 + 0{,}7x;\quad 29 + 2x = (x - 7) \cdot 3.$

154. $x - 7 = \frac{3x + 13}{20};\quad -x = 3;\quad -2x = 8.$

155. $\frac{2x+1}{2} = \frac{7x+5}{8};\quad x + \frac{11 - x}{3} = \frac{20 - x}{2}.$

156. $x + \frac{3x - 9}{5} = 11 - \frac{15x - 12}{3}.$

157. $3x - 4 - \frac{4(7x - 9)}{15} = \frac{4}{5}\left(6 + \frac{x - 1}{3}\right).$

158. $2x - \frac{19 - 2x}{2} = \frac{2x - 11}{2}.$

159. $\frac{x - 1}{7} + \frac{23 - x}{5} = 2 - \frac{4 + x}{4}.$

89. Понятие о составлении уравнений. С помощью уравнений можно сравнительно легко решать такие задачи, которые решить арифметическим путём затруднительно или даже невозможно. Вся трудность заключается в том, как составить такое уравнение, решение которого дало бы искомый ответ. Общего способа составления уравнений указать нельзя, так как условия задач могут быть очень разнообразны. Можно лишь указать на некоторые общие приёмы при составлении уравнений по данным задачи. Вообще же навыки в этом отношении даёт только практика.

Покажем на примере общие приёмы составления уравнений.

Задача. Школа закупила толстых и тонких тетрадей всего 80 штук. Толстая тетрадь стоит 35 коп., тонкая 4 коп. Сколько было куплено тех и других тетрадей, если уплачено 9 руб. 40 коп.?

1. Определяем, какую из неизвестных величин обозначить через x.

В нашей задаче два неизвестных: число толстых тетрадей и число тонких. Обозначим через x, например, число толстых тетрадей. Так как всех тетрадей 80, то тонких будет $(80 - x)$.

Число толстых тетрадей x
" тонких " $80 - x$.

2. Выражаем математически при помощи x и данных в задаче чисел все условия задачи.

В нашей задаче сказано, что толстая тетрадь стоят 35 коп., а тонкая 4 коп. Следовательно, мы можем задать вопрос, сколько стоили все купленные толстые и тонкие тетради (такой вопрос мы ставим потому, что в задаче дана стоимость всех тетрадей).

Стоимость толстых тетрадей $35x$ коп.
" тонких " $4(80 - x)$ коп.
Общая стоимость тетрадей 9 руб. 40 коп.

3. Составляем уравнение.

Так как в задаче сказано, что общая стоимость тетрадей равна 9 руб. 40 коп., то сумма стоимости толстых тетрадей $35x$ и тонких $4(80 - x)$ должна дать как раз 9 руб. 40 коп.:

$$35x + 4(80 - x) = 940.$$

Решив это уравнение, получим для x число 20.

Мы через x обозначили число толстых тетрадей. Следовательно, толстых тетрадей было куплено 20, а тонких

$$80 - 20 = 60 \text{ тетрадей.}$$

Заметим, что обычно в задаче бывает ровно столько данных, сколько их требуется для составления уравнения. Поэтому, составив уравнение, полезно посмотреть, были ли использованы все данные задачи, т. е. все ли данные в задаче числа в той или иной форме вошли в уравнение.

Упражнения.

160. Сумма двух чисел равна 2548; найти эти числа, если известно, что одно из них меньше другого на 148.

161. Сумма трёх слагаемых равна 100; второе слагаемое больше первого на 10, а третье слагаемое больше второго на 20. Найти эти слагаемые.

162. Всадник догоняет пешехода, находящегося впереди него на 15 км. Через сколько часов всадник догонит пешехода, если каждый час первый проезжает по 10 км, а второй проходит только по 4 км?

163. Из двух сортов чая составлена смесь в 32 кг. Килограмм первого сорта стоит 8 руб., а второго сорта 6 руб. 50 коп. Сколько килограммов взято того и другого сорта, если килограмм смеси стоит (без прибыли и убытка) 7 руб. 10 коп.?

164. Велосипедист проехал некоторое расстояние со скоростью 8 км/ч. Возвратиться он должен был другой дорогой, которая была на 3 км длиннее первой, и, хотя он, возвращаясь, ехал со скоростью

9 км/ч, он употребил времени на $7\frac{1}{2}$ минут более. Как длинны были обе дороги?

90. Буквенные уравнения. Нет надобности, чтобы неизвестное всегда обозначалось буквой x: оно может быть обозначено и какой угодно другой буквой. Возьмём, например, формулу:

$$s = \frac{1}{2}\,bh,$$

выражающую площадь s треугольника, у которого основание равно b линейных единиц и высота равна h таких же единиц. Формула эта представляет собой уравнение, в котором каждое из чисел s, b и h может быть принято за неизвестное. Пусть, например, предложена такая задача: найти основание треугольника, у которого высота равна h каких-нибудь линейных единиц, а площадь равна s соответственных квадратных единиц. Тогда в нашей формуле число b должно считаться неизвестным, а числа s и h известными. Конечно, мы можем неизвестное основание обозначить буквой x и написать уравнение так:

$$s = \frac{1}{2}\,hx,$$

откуда:

$$x = s : \frac{1}{2}\,h = 2s : h = \frac{2s}{h}.$$

Но можно, не заменяя b на x, прямо из уравнения $s = \frac{1}{2}\,bh$ определить b в зависимости от s и h:

$$s = \frac{1}{2}\,bh; \quad 2s = bh; \quad b = \frac{2s}{h}.$$

Вообще надо привыкнуть решать не только *численные* уравнения, в которых данные числа выражены цифрами, а неизвестное обозначено буквой x, но и *буквенные* уравнения, в которых данные числа и неизвестное обозначены какими угодно буквами.

Примеры.

1. $a + bx = c$; $bx = c - a$; $x = \dfrac{c-a}{b}$.

2. $a(x - c) = b(x + d)$; $ax - ac = bx + bd$; $ax - bx = bd + ac$; $x(a - b) = bd + ac$; $x = \dfrac{bd + ac}{a - b}$.

3. $\dfrac{y}{a} - y = b;$
$y - ay = ab;$
$y(1-a) = ab;$
$y = \dfrac{ab}{1-a}.$

4. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{b} = 1;$
$bx + ax = ab;$
$x(b+a) = ab;$
$x = \dfrac{ab}{a+b}.$

Упражнения.

165. $(a+x)(b+x) = (a-x)(b-x)$.

166. $(x-a)(x+b) + c = (a+x)(x-b)$.

167. Из уравнения: $a + bx = 4 - 3(a-x)$ найти x в зависимости от a и b.

168. Площадь q трапеции, у которой основания равны b_1 и b_2, а высота h, определяется по формуле: $q = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$. Найти отсюда h в зависимости от q, b_1 и b_2.

III. Системы уравнений первой степени

Система двух уравнений с двумя неизвестными

91. Задача. Из опыта найдено, что слиток из серебра и меди весом в 148 кГ теряет в воде веса $14\frac{2}{3}$ кГ. Определить, сколько в нём серебра и сколько меди, если известно, что в воде 21 кГ серебра теряет 2 кГ, а 9 кГ меди теряют 1 кГ.

Положим, что в данном слитке содержится серебра x кГ, а меди y кГ. Тогда одно уравнение будет:

$$x + y = 148.$$

Для составления другого уравнения примем во внимание, что если 21 кГ серебра теряет в воде 2 кГ веса, то это значит, что 1 кГ серебра теряет в воде $\frac{2}{21}$ кГ. Тогда x кГ должны терять в воде $\frac{2}{21}x$ кГ веса.

Подобно этому, если 9 кГ меди теряют в воде 1 кГ, то это значит что 1 кГ меди теряет $\frac{1}{9}$ кГ; следовательно, y кГ меди теряют $\frac{1}{9}y$ кГ. Поэтому второе уравнение будет:

$$\frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = 14\frac{2}{3}.$$

Мы получили, таким образом, два уравнения с двумя неизвестными:

$$x + y = 148 \quad \text{и} \quad \frac{2}{21}x + \frac{1}{9}y = \frac{44}{3}.$$

Второе уравнение можно упростить, освободив его от дробей. Для этого умножим обе части уравнения на 63, после чего получим равносильное уравнение:

$$6x + 7y = 924.$$

Мы имеем теперь два уравнения:

$$x + y = 148 \quad \text{и} \quad 6x + 7y = 924.$$

Мы можем решить эти два уравнения несколькими способами. Например, из первого уравнения определим x в зависимости от y:

$$x = 148 - y.$$

Так как во втором уравнении буквы x и y обозначают те же числа, что и в первом уравнении, то мы можем во второе уравнение подставить вместо x разность $148 - y$:

$$6(148 - y) + 7y = 924.$$

Решим это уравнение с одним неизвестным:

$$888 - 6y + 7y = 924; \qquad y = 924 - 888 = 36.$$

Тогда:

$$x = 148 - 36 = 112.$$

Таким образом, в данном слитке содержится 112 кГ серебра и 36 кГ меди.

92. Нормальный вид уравнения первой степени с двумя неизвестными. Возьмём такой пример уравнения с двумя неизвестными:

$$2(2x + 3y - 5) = \frac{5}{8}(x + 3) + \frac{3}{4}(y - 4).$$

С целью упростить это уравнение сделаем в нём тот же ряд преобразований, какой был указан раньше для уравнений с одним неизвестным, а именно:

1. Раскроем скобки:

$$4x + 6y - 10 = \frac{5}{8}x + \frac{15}{8} + \frac{3}{4}y - 3.$$

2. Освободимся от знаменателей, умножив все члены на 8:

$$32x + 48y - 80 = 5x + 15 + 6y - 24.$$

3. Перенесём неизвестные члены в одну часть уравнения, а известные в другую:

$$32x + 48y - 5x - 6y = 15 - 24 + 80.$$

4. Сделаем приведение подобных членов:

$$27x + 42y = 71.$$

Таким образом, данное уравнение после указанных преобразований оказывается такого вида, при котором в левой части уравнения находятся только два члена: один с неизвестным x (в первой степени) и другой с неизвестным y (в первой степени), правая же часть уравнения состоит только из одного члена, не содержащего неизвестных. Коэффициенты при x и y могут быть или оба положительные (как во взятом нами примере), или оба отрицательные (этот случай, впрочем, можно свести к предыдущему, умножив все члены уравнения на -1), или один положительный, а другой отрицательный; член, стоящий в правой части, может быть или положительным числом (как в настоящем примере), или отрицательным, а также нулём. Обозначив коэффициенты при x и y буквами a и b и член, не содержащий неизвестных, буквой c, мы можем уравнение с двумя неизвестными первой степени в общем виде представить так:

$$ax + by = c.$$

Такой вид уравнения называется *нормальным* видом уравнения первой степени с двумя неизвестными.

93. Неопределённость одного уравнения с двумя неизвестными. Одно уравнение с двумя неизвестными имеет бесчисленное множество решений. Действительно, если для одного какого-нибудь неизвестного мы назначим произвольное число и это число подставим в уравнение, то тогда мы получим уравнение с одним вторым неизвестным, которое и можно найти из этого уравнения. Назначив для первого неизвестного какое-нибудь другое число, мы тем же путём получим для второго неизвестного новое число и т. д. Таким образом, мы можем получать сколько угодно решений.

Пусть, например, нам дана такая задача: найти стороны равнобедренного треугольника, периметр которого равен 40 м. Обозначив длину основания этого треугольника буквой x и длину каждой из его боковых сторон буквой y, мы можем написать уравнение: $x + 2y = 40$.

Назначим для x какое-нибудь произвольное число, например 10. Тогда найдём: $10 + 2y = 40$, $2y = 30$, $y = 15$. Значит, если основание треугольника будет 10 м, то каждая боковая сторона его должна быть по 15 м. Теперь назначим для x какое-нибудь другое число, например, 8. Тогда $2y = 32$ и $y = 16$. Таким образом, мы можем найти сколько угодно решений, и, следовательно, уравнение и задача оказываются неопределенными.

94. Система уравнений. Принято говорить, что несколько уравнений образуют систему, если во всех этих уравнениях каждая из букв x, y, … означает одно и то же число для всех уравнений. Если, например, два уравнения

$$\begin{cases} 2x - 5 = 3y - 2; \\ 8x - y = 2y + 21 \end{cases}$$

рассматриваются при том условии, что буква x означает одно и то же число в обоих уравнениях, равным образом и буква y, то такие уравнения образуют систему. Это бывает всякий раз в том случае, когда уравнения составлены из условий одной и той же задачи.

Укажем два способа решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

95. Способ подстановки. Этот способ мы уже применяли раньше, когда решали задачу о слитке из серебра и меди.

Возьмём теперь более сложный пример:

$$8x - 5y = -16; \quad 10x + 3y = 17.$$

(Оба уравнения приведёны к нормальному виду.)

Из одного уравнения, например, из первого, определим одно какое-нибудь неизвестное, например, y, в зависимости от другого неизвестного [1]):

$$y = \frac{8x + 16}{5}.$$

Так как второе уравнение должно удовлетворяться теми же значениями, как и первое, то мы можем подставить в него вместо y найденное выражение, отчего получим уравнение с одним неизвестным x:

$$10x + 3 \cdot \frac{8x + 16}{5} = 17.$$

[1]) Для вывода этой формулы мы перенесли член $-5y$ направо, а член -16 налево; затем разделили обе части уравнения на 5 и поменяли местами части уравнения. Надо привыкнуть эти преобразования делать в уме.

Решим это уравнение:

$$10x + \frac{24x + 48}{6} = 17; \quad 50x + 24x + 48 = 85; \quad x = \frac{1}{2}.$$

Тогда:

$$y = \frac{8x + 16}{5} = \frac{4 + 16}{5} = 4.$$

Мы могли бы определить из одного уравнения неизвестное x в зависимости от y и полученное выражение подставить на место x в другое уравнение; тогда мы получили бы уравнение с неизвестным y.

Способ этот особенно удобен тогда, когда коэффициент при каком-нибудь неизвестном равен 1. Тогда всего лучше определить это неизвестное в зависимости от другого неизвестного (не придётся делить на коэффициент). Например:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 11; \\ 4x + y = 22. \end{cases}$$

Из второго уравнения находим: $y = 22 - 4x$.

Тогда первое уравнение даёт:

$$3x - 2(22 - 4x) = 11; \quad 3x - 44 + 8x = 11; \quad 11x = 44 + 11 = 55;$$
$$x = \frac{55}{11} = 5; \quad y = 22 - 4 \cdot 5 = 2.$$

Правило. *Чтобы решить систему двух уравнений с двумя неизвестными способом подстановки, надо определить из какого-нибудь уравнения одно неизвестное в зависимости от другого неизвестного и полученное выражение подставить в другое уравнение, от этого получается уравнение с одним неизвестным. Решив его, находят это неизвестное. Подставив найденное число в выражение, выведенное раньше для первого неизвестного, находят и это другое неизвестное.*

96. Способ алгебраического сложения. Предположим сначала, что в данной системе уравнений (приведённых предварительно к нормальному виду) коэффициенты при каком-нибудь неизвестном, например, при y, отличаются только знаками. Пусть, например, нам дана система:

$$\begin{cases} 7x - 2y = 27; \\ 5x + 2y = 33. \end{cases}$$

Мы знаем, что если к равным числам прибавим (или из них вычтем) равные числа, то и получим равные числа. Поэтому, если мы сложим (или вычтем) левые части данных уравнений между собой, а правые части между собой, то знак «=» не нарушится (это выражают короче так: уравнения можно почленно складывать или вычитать).

Заметив это, сложим данные уравнения; тогда члены $-2y$ и $+2y$ взаимно уничтожатся, и мы получим уравнение с одним неизвестным x:

$$+\begin{cases} 7x - 2y = 27 \\ 5x + 2y = 33 \end{cases}$$
$$\overline{12x \qquad\quad = 60}, \text{ откуда } x = 5.$$

Подставив в одно из данных уравнений вместо x найденное для него число 5, получим уравнение, из которого найдём y:

$$7 \cdot 5 - 2y = 27; \quad 35 - 2y = 27; \quad 35 - 27 = 2y; \quad 8 = 2y; \quad y = 4.$$

Если бы в уравнениях коэффициенты перед исключаемыми неизвестными были одинаковы по абсолютной величине и по знаку, то, переменив перед всеми членами одного какого-нибудь уравнения знаки на противоположные, мы привели бы этот случай к только что рассмотренному. Так, если дана система:

$$\begin{cases} 3x - 5y = \ \ 8; \\ 3x + 7y = 32, \end{cases}$$

в которой перед неизвестным x в обоих уравнениях стоит один и тот же коэффициент $+3$, то мы переменим, положим, в первом уравнении знаки на противоположные (другими словами, умножим обе части уравнения на -1) и затем сложим уравнения [1]):

$$+\begin{cases} -3x + 5y = -8 \\ \ \ \ 3x + 7y = \ \ 32 \end{cases}$$
$$\overline{\qquad\qquad 12y = \ 24}, \quad y = 2,$$

$$3x + 7 \cdot 2 = 32; \quad 3x = 32 - 14 = 18; \quad x = 6.$$

Возьмём теперь систему, в которой коэффициенты различны, например, такую:

$$\begin{cases} \ \ \ 7x + 6y = 29; \\ -5x + 8y = 10. \end{cases}$$

[1]) Конечно, переменить знаки перед всеми членами уравнения на противоположные и затем сложить его почленно с другим уравнением — это всё равно, что вычесть его почленно из этого другого уравнения.

Мы можем тогда предварительно уравнять абсолютные величины коэффициентов при каком-нибудь одном неизвестном, например, при x. Для этого найдём кратное (лучше всего наименьшее) чисел 7 и 5 (это будет 35) и умножим обе части каждого уравнения на соответствующий дополнительный множитель (как это делается при приведёнии дробей к общему знаменателю):

$$\left\{\begin{aligned} 7x+6y&=29 \quad (\text{на } 5);\\ -5x+8y&=10 \quad (\text{на } 7), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} 35x+30y&=145;\\ -35x+56y&=\ \ 70, \end{aligned}\right.$$

и тогда этот случай приведётся к предыдущему.

Правило. *Чтобы решить систему двух уравнений с двумя неизвестными способом алгебраического сложения, сначала уравнивают в данных уравнениях абсолютные величины коэффициентов перед одним из двух неизвестных и в том случае, когда перед этим неизвестным знаки в уравнениях даны одинаковые, переменяют в одном из уравнений знаки на противоположные. Сложив затем уравнения, получают одно уравнение с одним неизвестным, которое и определяют из этого уравнения. Подставив найденное число в одно из данных уравнений, находят затем и другое неизвестное.*

97. Система уравнений с буквенными коэффициентами. Иногда приходится решать такую систему уравнений, в которой коэффициенты выражены буквами. Пусть, например, требуется решить систему;

$$\left\{\begin{aligned} a\,x+b\,y&=c;\\ a'x+b'y&=c'. \end{aligned}\right.$$

Мы можем решить эту систему любым из двух способов, указанных нами для системы с числовыми коэффициентами. Всего проще в данном случае применить способ алгебраического сложения, т. е. поступить так: переменить в одном из уравнений знаки на противоположные, уравнять абсолютные величины коэффициентов перед одним неизвестным, например, перед y, и сложить оба уравнения:

$$\begin{array}{r|l} a\,x+b\,y=\ \ c & b'\\ -a'x-b'y=-c' & b \end{array} \qquad \begin{array}{rl} ab'x+bb'y &= b'c\\ -a'bx-bb'y &= -bc'\\ \hline (ab'-a'b)x \qquad\qquad &= b'c-bc', \end{array}$$

откуда находим, если $ab'-a'b\neq 0$:

$$x=\frac{b'c-bc'}{ab'-a'b}.$$

Подобным же образом найдём y:

$$\begin{array}{r|l} a\,x + b\,y = c & a' \\ -a'x - b'y = -c' & a \end{array} \qquad \begin{array}{r} aa'x + a'by = a'c \\ -aa'x - ab'y = -ac' \\ \hline (a'b - ab')y = a'c - ac', \end{array}$$

откуда:

$$y = \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'}.$$

Упражнения.

169. Решить способом подстановки следующие системы уравнений:
$\begin{cases} y = 2x - 3; \\ 3x + 2y = 8. \end{cases}$ $\begin{cases} 5x + y = 3; \\ 3x - 2y = 7. \end{cases}$ $\begin{cases} 3x - 5y = 6; \\ x + 4y = -15. \end{cases}$

170. Следующие системы решить способом алгебраического сложения:

$$\begin{cases} 4x + 7y = 5; \\ -2x + 5y = 6. \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x + 5y = 20; \\ 2x - 10y = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} 5x - 8y = 19; \\ 2x - 2y = 10. \end{cases}$$

171. Решить следующую систему уравнений каким-нибудь способом:

$$\begin{cases} (2x-1)(y+2) = (x-2)(2y+5); \\ 5x - 2 = 2y + 15. \end{cases}$$

172. $\begin{cases} ax + by = c; \\ y = mx. \end{cases}$ $\begin{cases} x + a = my; \\ y + b = nx. \end{cases}$

173. Найти значения a и b в двучлене $y = ax + b$ при условии, что $y = -11$, если $x = -2$, и $y = 1$, если $x = 2$.

174. Куплено 8 кг одного товара и 19 кг другого, и за всё заплачено 16 руб. 40 коп.; в другой раз по тем же ценам куплено 20 кг первого товара и 16 кг второго и заплачено за всё 28 руб. 40 коп. Узнать цену килограмма каждого товара.

175. Трест приобрёл для продажи 65 велосипедов, обыкновенных и моторных. За обыкновенные велосипеды он платил по 100 руб. за каждый, а за моторные по 400 руб. При продаже всего этого товара трест получил прибыли 2980 руб., причём прибыль составляла 12% на обыкновенные велосипеды и 25% на моторные. Сколько было тех и других?

176. Инженер должен поставить телеграфные столбы между двумя местами. Он рассчитал, что если поставить по одному столбу в крайних пунктах и через каждые 50 м между этими пунктами, то тогда у него не хватит 21 столба. Если же ставить столбы через 55 м, то не хватит только 1 столба. Сколько всех столбов и на каком расстоянии он должен их поставить?

177. Два прямоугольных треугольника имеют одинаковые гипотенузы. У первого треугольника один катет на 4 м короче, а другой на 8 м длиннее соответствующих катетов другого треугольника. Вычислить эти катеты, если известно, что площадь первого треугольника на 34 м^2 больше площади второго.

Система трёх уравнений с тремя неизвестными

98. Нормальный вид уравнения первой степени с тремя неизвестными. Если в уравнении первой степени с тремя неизвестными x, y и z сделать те же преобразования, какие были нами раньше указаны для уравнений с одним и двумя неизвестными, то мы приведём уравнение к такому виду (называемому *нормальным*), при котором в левой части уравнения находятся только три члена: один с x, другой с y и третий с z, а в правой части будет один член, не содержащий неизвестных.

Таково, например, уравнение:

$$5x - 3y - 4z = -12.$$

Общий (нормальный) вид его следующий:

$$ax + by + cz = d,$$

где a, b, c и d — какие-нибудь данные относительные числа.

99. Неопределённость двух и одного уравнений с тремя неизвестными. Положим, дана система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$5x - 3y + z = 2; \quad 2x + y - z = 6.$$

Назначим одному неизвестному, например, z, какое-нибудь произвольное значение, положим, 1, и подставим это число на место z:

$$\begin{cases} 5x - 3y + 1 = 2; \\ 2x + y - 1 = 6, \end{cases} \text{т. е.} \begin{cases} 5x - 3y = 1; \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Мы получим, таким образом, систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив её каким-нибудь способом, найдём:

$$x = 2, \quad y = 3;$$

значит, данная система с тремя неизвестными удовлетворяется при $x = 2$, $y = 3$ и $z = 1$. Дадим теперь неизвестному z какое-нибудь иное значение, например, $z = 0$, и подставим это значение в данные уравнения:

$$5x - 3y = 2; \quad 2x + y = 6.$$

Мы снова получили систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решив её каким-нибудь способом, найдём:

$$x = \frac{20}{11} = 1\frac{9}{11}; \quad y = 2\frac{4}{11}.$$

Значит, данная система удовлетворяется при $x = 1\frac{9}{11}$, $y = 2\frac{4}{11}$ и $z = 0$. Назначив для z ещё какое-нибудь (третье) значение, мы снова получим систему двух уравнений с двумя неизвестными, из которой найдём новые значения для x и y. Так как для z мы можем назначать сколько угодно различных значений, то и для x и y можем получить сколько угодно значений (соответствующих взятому значению z). Значит, два уравнения с тремя неизвестными вообще допускают бесчисленное множество решений; другими словами, такая система неопределённа.

Ещё бóльшая неопределённость будет, если имеется всего одно уравнение с тремя неизвестными. Тогда можно будет для каких-нибудь двух неизвестных назначить произвольные значения; третье же неизвестное найдётся из данного уравнения, если подставить в него значения, взятые произвольно для двух неизвестных.

100. Система трёх уравнений с тремя неизвестными. Для того чтобы можно было найти определённые численные значения для трёх неизвестных x, y и z, необходимо, чтобы была задана система трёх уравнений. Такая система может быть решена способом подстановки, а также и способом алгебраического сложения. Покажем применение этих способов на следующем примере (каждое уравнение предварительно приведено к нормальному виду):

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5z = 7; \\ 7x + 4y - 8z = 3; \\ 5x - 3y - 4z = -12. \end{cases}$$

101. Способ подстановки. Из какого-нибудь уравнения, например, из первого, определим одно неизвестное, например, x, в зависимости от двух остальных неизвестных:

$$x = \frac{7 + 2y - 5z}{3}.$$

Так как во всех уравнениях x означает одно и то же число, то мы можем подставить найденное выражение на место x в остальные уравнения:

$$\begin{aligned} 7\cdot\frac{7+2y-5z}{3}+4y-8z &= \quad 3,\\ 5\cdot\frac{7+2y-5z}{3}-3y-4z &= -12. \end{aligned}$$

Мы приходим, таким образом, к системе двух уравнений с двумя неизвестными y и z. Решив эту систему по какому-нибудь из способов, указанных раньше, найдём численные значения для y и z. В нашем примере это будут значения: $y = 3$, $z = 2$; подставив эти числа в выражение, выведенное нами для x, найдём и это неизвестное:

$$x = \frac{7+2\cdot 3-5\cdot 2}{3} = 1.$$

Таким образом, предложенная система имеет решение: $x = 1$, $y = 3$, $z = 2$ (в чём можно убедиться проверкой).

102. Способ алгебраического сложения. Из трёх данных уравнений возьмём какие-нибудь два, например, первое и второе, и, уравняв в них абсолютные величины коэффициентов перед одним неизвестным, например, перед z, исключим из них это неизвестное способом алгебраического сложения; от этого получим одно уравнение с двумя неизвестными x и y. Потом возьмём какие-нибудь два других уравнения из трёх данных, например, первое и третье (или второе и третье), и тем же способом исключим из них то же неизвестное, т. е. z; от этого получим ещё одно уравнение с x и y:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ 3x-2y+5z=7\ (\text{на } 8)\\ &2)\ 7x+4y-8z=3\ (\text{на } 5) \end{aligned}\right|\quad \begin{aligned} 24x-16y+40z&=56\\ 35x+20y-40z&=15\\ \hline 59x+4y\qquad\quad &=71 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &1)\ 3x-2y+5z=\quad 7\ (\text{на } 4)\\ &3)\ 5x-3y-4z=-12\ (\text{на } 5) \end{aligned}\right|\quad \begin{aligned} 12x-\ \ 8y+20z&=\quad 28\\ 25x-15y-20z&=-60\\ \hline 37x-23y\qquad\quad &=-32 \end{aligned}$$

Решим получившиеся два уравнения: $x = 1$, $y = 3$. Подставим эти числа в одно из трёх данных уравнений, например, в первое:

$$3\cdot 1-2\cdot 3+5z=7;\quad 5z=7-3+6=10;\quad z=2.$$

З а м е ч а н и е. Теми же двумя способами мы можем привести систему четырёх уравнений с четырьмя неизвестными к системе трёх уравнений с тремя неизвестными (а эту систему — к системе двух уравнений с двумя неизвестными и т. д.). Вообще систему m уравнений с m неизвестными мы можем привести к системе $(m-1)$ уравнений с $(m-1)$ неизвестными [а эту систему — к системе $(m-2)$ уравнений с $(m-2)$ неизвестными и т. д.].

Упражнения.

178. $\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9; \\ 2x + 5y - 3z = 4; \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$

179. $\begin{cases} 2x + 5y - 3z - 6\frac{1}{4} = 0; \\ 5x - 6y + 2z = 12; \\ 5z = 42\frac{1}{4} - 7x + y. \end{cases}$

180. $\begin{cases} 3x - y + z = 17; \\ 5x + 3y - 2z = 10; \\ 7x + 4y - 5z = 3. \end{cases}$

181. $\begin{cases} \dfrac{x+2y}{5x+6} = \dfrac{7}{9}; \\ \dfrac{3y+4}{x+2y} = \dfrac{8}{7}; \\ x + y + z = 128. \end{cases}$

Н е к о т о р ы е ч а с т н ы е в и д ы с и с т е м у р а в н е н и й

103. Случай, когда не все неизвестные входят в каждое из данных уравнений, например:

$$\begin{cases} 10x - y + 3z = 5; \\ 4v - 5x = 6; \\ 2y + 3z = 6; \\ 3y + 2v = 4. \end{cases}$$

В этом случае система решается быстрее, чем обыкновенно, так как в некоторых уравнениях уже исключены те или другие неизвестные. Надо только сообразить, какие неизвестные и из каких уравнений следует исключить, чтобы возможно скорее дойти до одного уравнения с одним неизвестным. В нашем примере, исключив z из первого и третьего уравнений и v из второго и четвёртого, получим два уравнения с x и y:

$$\begin{array}{rcl} 10x - y + 3z &=& 5 \\ -2y - 3z &=& -6 \\ \hline 10x - 3y &=& -1; \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} 4v - 5x &=& 6 \\ -4v - 6y &=& -8 \\ \hline -5x - 6y &=& -2. \end{array}$$

Решив эти уравнения, найдём: $x = 0$; $y = \frac{1}{3}$.

Теперь вставим эти числа во второе и третье уравнения; тогда получим:

$$v = \frac{3}{2}, \quad z = \frac{16}{9} = 1\frac{7}{9}.$$

104. Случай, когда неизвестные входят только в виде дробей $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, ... Пусть дана, например, система:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = \frac{7}{6}; \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = -\frac{5}{6}; \\ \frac{1}{y} - \frac{1}{x} - \frac{1}{z} = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Всего проще такую систему можно решить посредством введения вспомогательных неизвестных. Положим, что $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ и $\frac{1}{z} = z'$. Тогда получим такую систему с неизвестными x', y' и z':

$$\begin{cases} x' + y' - z' = \frac{7}{6}; \\ x' - y' - z' = -\frac{5}{6}; \\ y' - x' - z' = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём:

$$x' = \frac{1}{2}, \quad y' = 1, \quad z' = \frac{1}{3},$$

т. е.

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{y} = 1, \quad \frac{1}{z} = \frac{1}{3}.$$

Отсюда окончательно находим:

$$x = 2, \quad y = 1, \quad z = 3.$$

Возьмём ещё другой пример:

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} - \dfrac{4}{z} = -13; \\ \dfrac{6}{x} - \dfrac{3}{y} - \dfrac{1}{z} = \quad 5\dfrac{1}{2}; \\ -\dfrac{5}{x} + \dfrac{7}{y} + \dfrac{2}{z} = \quad 3\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Дроби $\frac{3}{x}$, $\frac{2}{y}$ и т. д. можно рассматривать как произведения: $3 \cdot \frac{1}{x}$, $2 \cdot \frac{1}{y}$ и т. д. Поэтому если положим, что $\frac{1}{x} = x'$, $\frac{1}{y} = y'$ и $\frac{1}{z} = z'$, то система изобразится так:

$$\begin{aligned} 3x' + 2y' - 4z' &= -13; \\ 6x' - 3y' - \ z' &= \quad 5\frac{1}{2}; \\ -5x' + 7y' + 2z' &= \quad 3\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений находим:

$$x' = 2, \quad y' = \frac{1}{2}, \quad z' = 5;$$

значит:

$$\frac{1}{x} = 2, \quad \frac{1}{y} = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{z} = 5;$$

откуда:

$$x = \frac{1}{2}, \quad y = 2, \quad z = \frac{1}{5}.$$

105. Случай, когда полезно данные уравнения сложить. Пусть имеем систему:

$$\begin{cases} x + y = a; \\ y + z = b; \\ x + z = c. \end{cases}$$

Сложив все уравнения, найдём:

$$2(x + y + z) = a + b + c;$$

$$x + y + z = \frac{a + b + c}{2}.$$

Вычтя из последнего уравнения каждое из данных, получим:

$$z = \frac{a + b + c}{2} - a; \quad x = \frac{a + b + c}{2} - b; \quad y = \frac{a + b + c}{2} - c.$$

Упражнения.

182. $\begin{cases} 3x + 5y = 74; \\ 7x + 2z = 66; \\ 2y + \ \ z = 25. \end{cases}$

183. $\begin{cases} \dfrac{6}{x} + \dfrac{5}{y} = 1; \\ \dfrac{30}{x} + \dfrac{31}{y} = 6. \end{cases}$

184. $\begin{cases} 4x - 3z + u = 10; \\ 5y + z - 4u = 1; \\ 3y + u = 17; \\ x + 2y + 3u = 25. \end{cases}$

185. $\begin{cases} \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{y} - \dfrac{4}{z} = \dfrac{1}{12}; \\ \dfrac{3}{x} - \dfrac{4}{y} + \dfrac{5}{z} = \dfrac{19}{24}; \\ \dfrac{4}{x} - \dfrac{5}{y} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{6}{z}. \end{cases}$

186. Как всего проще решить систему:

$$\begin{cases} x + y + z = 29\dfrac{1}{4}; \\ x + y - z = 18\dfrac{1}{4}; \\ x - y + z = 13\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

187. Три покупателя купили кофе, сахар и чай. Первый покупатель за 8 кг кофе, 10 кг сахара и 3 кг чая уплатил 35 руб.; второй покупатель за 4 кг кофе, 15 кг сахара и 5 кг чая уплатил 40 руб., а третий покупатель израсходовал 82 руб. 50 коп. на покупку 12 кг кофе, 20 кг сахара и 10 кг чая. Найти цену килограмма кофе, сахара и чая.

188. Имеются три куска сплава из золота, серебра и меди; куски эти содержат:

1) 5 частей	золота,	6	частей	серебра,	8	частей	меди;
2) 3 части	"	5	"	"	7	"	"
3) 7 частей	"	13	"	"	18	"	"

По скольку килограммов надо взять от каждого куска, чтобы образовать сплав, в котором было бы 79 кг золота, 118 кг серебра и 162 кг меди?

Исторические сведения

С уравнением мы встречаемся уже в глубокой древности у египтян. В папирусе, написанном Ахмесом (за 2000 лет до нашей эры), встречаются уравнения первой степени с одним неизвестным, причём это неизвестное обозначалось словом «хау» — куча.

У греческого математика Диофанта (в IV в. нашей эры) мы находим самые разнообразные уравнения, в том числе и уравнения с несколькими неизвестными, однако он не даёт общего способа их решения.

Ньютон даёт уже несколько способов решения системы уравнений, в том числе и способ подстановки.

Уравнениями много занимались арабские ученые, причём они при решении уравнений пользовались правилами прибавления к обеим частям уравнения и вычитания из них одинаковых членов. Первое действие называлось «восстановление», по-арабски algebre; второе — «противоположение» — almukabalah. От первого из этих слов (альджебр) и произошло название «алгебра».

Глава 5

ИЗВЛЕЧЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

I. Основные свойства корней

106. Определение корня. Корнем второй степени (или квадратным) из числа a называется такое число, квадрат которого равняется a. Так, квадратный корень из 49 есть 7, а также и -7, так как $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$. Корнем третьей степени (кубическим) из числа a называется такое число, куб которого равняется a. Например, кубический корень из -125 есть -5, так как $(-5)^3 = (-5)(-5)(-5) = -125$.

Вообще *корнем n-й степени из числа a называется такое число, n-я степень которого равна a.*

Число n, означающее, в какой степени находится корень, называется показателем корня.

Корень обозначается знаком $\sqrt{}$ (знак радикала, т. е. знак корня). Под горизонтальной чертой его пишут то число, из которого корень отыскивается (подкоренное число), а над отверстием угла ставят показатель корня. Так:

корень кубический из 27 обозначается $\sqrt[3]{27}$;

корень пятой степени из 32 обозначается $\sqrt[5]{32}$.

Показатель квадратного корня принято не писать вовсе; например, вместо $\sqrt[2]{16}$ пишут $\sqrt{16}$.

Действие, посредством которого отыскивается корень, называется извлечением корня; оно обратно возведению в степень, так как посредством этого действия отыскивается то, что дано при возведении (именно основание степени), а дано то, что при возведении в степень отыскивается (именно сама степень). Поэтому *правильность извлечения корня мы можем всегда проверять возведением в степень*. Например, чтобы проверить равенство $\sqrt[3]{125} = 5$, достаточно 5 возвести в куб; получив подкоренное число 125, мы заключаем, что число 5 есть действительно корень кубический из 125.

107. Арифметический корень. Корень называется *арифметическим*, если он извлекается из положительного числа и сам представляет собой положительное число. Например, арифметический квадратный корень из 49 есть 7, тогда как число -7, которое тоже есть квадратный корень из 49, нельзя назвать арифметическим.

Укажем следующие два свойства арифметического корня.

а) Пусть требуется найти арифметический $\sqrt{49}$. Такой корень будет 7, так как $7^2 = 49$. Зададимся вопросом, нельзя ли подыскать какое-нибудь другое положительное число x, которое тоже было бы равно $\sqrt{49}$. Предположим, что такое число существует. Тогда оно должно быть либо меньше 7, либо больше 7. Если допустим, что $x < 7$, то тогда $x^2 < 49$ (с уменьшением множимого и множителя произведение уменьшается, если сомножители положительные); если же допустим, что $x > 7$, то тогда и $x^2 > 49$. Значит, никакое положительное число, ни меньшее 7, ни большее 7, не может равняться $\sqrt{49}$. Таким образом, *арифметический корень данной степени из данного числа может быть только один*.

К другому заключению мы бы пришли, если бы говорили не только о положительном значении корня; так, $\sqrt{49}$ равен и числу 7, и числу -7 [так как и $7^2 = 49$ и $(-7)^2 = 49$].

б) Возьмём каких-нибудь два неравных положительных числа, например, 49 и 64. Из того, что $49 < 64$, мы можем заключить, что и $\sqrt{49} < \sqrt{64}$ (если только знаком $\sqrt{}$ будем обозначать арифметический квадратный корень). Действительно: $7 < 8$. Подобно этому из того, что $64 < 125$, мы можем заключить, что и $\sqrt[3]{64} < \sqrt[3]{125}$. Действительно: $\sqrt[3]{64} = 4$, $\sqrt[3]{125} = 5$ и $4 < 5$. Вообще:

Меньшему положительному числу соответствует и меньший арифметический корень (*той же степени*).

108. Алгебраический корень. Корень называется *алгебраическим*, если не требуется, чтобы он извлекался из положительного числа и чтобы сам он был положительный. Таким образом, если под выражением $\sqrt[n]{a}$ разумеется алгебраический корень n-й степени, то это значит, что число a может быть и положительное, и отрицательное и самый корень может быть и положительным, и отрицательным.

Укажем следующие четыре свойства алгебраического корня.

а) *Корень нечётной степени из положительного числа есть положительное число.*

Так, $\sqrt[3]{8}$ должен быть числом положительным (он равен 2), так как отрицательное число, возведённое в степень с нечётным показателем, даёт отрицательное число.

б) *Корень нечётной степени из отрицательного числа есть отрицательное число.*

Так, $\sqrt[3]{-8}$ должен быть отрицательным числом (он равен -2), так как положительное число, возведённое в какую бы то ни было степень, даёт положительное число, а не отрицательное.

в) *Корень чётной степени из положительного числа имеет два значения с противоположными знаками и с одинаковой абсолютной величиной.*

Так, $\sqrt{+4} = +2$ и $\sqrt{+4} = -2$, потому что $(+2)^2 = +4$ и $(-2)^2 = +4$; точно так же $\sqrt[4]{+81} = +3$ и $\sqrt[4]{+81} = -3$, потому что степени $(+3)^4$ и $(-3)^4$ равны одному и тому же числу $+81$.

Двойное значение корня обозначается обыкновенно постановкой двух знаков перед абсолютной величиной корня; так, пишут:

$$\sqrt{4} = \pm 2; \quad \sqrt{a^2} = \pm a; \quad \sqrt{9x^4} = \pm 3x^2.$$

Чтобы в дальнейшем не оговаривать каждый раз, берём ли мы алгебраический или арифметический корень, условимся в следующем: 1) В случае чётной степени под выражением $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$ и т. д. будем всегда подразумевать *только арифметический корень*. Так, $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt[4]{81} = 3$. 2) Если мы берём алгебраический корень, то будем ставить перед корнем двойной знак. Так, $\pm\sqrt{25} = \pm 5$; $\pm\sqrt[4]{81} = \pm 3$.

г) *Корень чётной степени из отрицательного числа не может равняться никакому, ни положительному, ни отрицательному, числу*, так как и то и другое после возведения в степень с чётным показателем даёт положительное число, а не отрицательное. Например, $\sqrt{-9}$ не равен ни $+3$, ни -3 и никакому иному числу.

Корень чётной степени из отрицательного числа принято называть *мнимым* числом, остальные же числа называются *вещественными*, или *действительными* числами.

Упражнения.

Чему равны следующие выражения:

189. $\sqrt{100}$; $\sqrt{0{,}01}$; $\sqrt{\dfrac{9}{16}}$; $\sqrt{a^2}$.

190. $(\sqrt{5})^2$; $(\sqrt[5]{a})^5$.

191. $\sqrt[3]{+27}$; $\sqrt[3]{-27}$; $\sqrt[3]{-0{,}001}$.

192. $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt{-4}$; $\sqrt{-a^2}$.

109. Извлечение корня из произведения, из степени и из дроби. а) Пусть надо извлечь арифметический квадратный корень из произведения abc. Если бы требовалось произведение возвести в квадрат, то, как мы видели (§ 46), можно возвести в квадрат каждый сомножитель отдельно. Так как извлечение корня есть действие, обратное возведению в степень, то надо ожидать, что и для извлечения корня из произведения можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно, т. е. что $\sqrt{abc} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c}$.

Чтобы убедиться в верности этого равенства, возведём правую часть его в квадрат (по теореме о степени произведения):

$$(\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \cdot \sqrt{c})^2 = (\sqrt{a})^2 \cdot (\sqrt{b})^2 \cdot (\sqrt{c})^2.$$

Но согласно определению корня:

$$(\sqrt{a})^2 = a, \quad (\sqrt{b})^2 = b, \quad (\sqrt{c})^2 = c.$$

Следовательно, $(\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c})^2 = abc$.

Если же квадрат произведения $\sqrt{a}\,\sqrt{b}\,\sqrt{c}$ равен abc, то это значит, что произведение это равно квадратному корню из abc. Подобно этому:

$$\sqrt[3]{abc} = \sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}\,\sqrt[3]{c},$$

так как

$$(\sqrt[3]{a}\,\sqrt[3]{b}\,\sqrt[3]{c})^3 = (\sqrt[3]{a})^3(\sqrt[3]{b})^3(\sqrt[3]{c})^3 = abc.$$

Значит, *чтобы извлечь арифметический корень из произведения, можно извлечь его из каждого сомножителя отдельно.*

б) Легко убедиться проверкой, что следующие равенства верны.

$\sqrt{a^4} = a^2$, потому что $(a^2)^2 = a^4$,

$\sqrt[3]{x^{12}} = x^4$, " " $(x^4)^3 = x^{12}$ и т. п.

Значит, *чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, можно разделить показатель степени на показатель корня.*

в) Верны будут также и следующие равенства:

$\sqrt{\dfrac{9}{16}} = \dfrac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \dfrac{3}{4}$, потому что $\left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{3^2}{4^2} = \dfrac{9}{16}$,

$\sqrt[3]{\dfrac{8}{27}} = \dfrac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{27}} = \dfrac{2}{3}$, " " $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3 = \dfrac{2^3}{3^3} = \dfrac{8}{27}$.

Вообще:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}; \quad \sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}.$$

Значит, *чтобы извлечь корень из дроби, можно извлечь его из числителя и знаменателя отдельно.*

Напомним, что в этих правилах предполагается, что речь идёт о корнях арифметических.

Примеры.

1. $\sqrt{9a^4b^6} = \sqrt{9}\,\sqrt{a^4}\,\sqrt{b^6} = 3a^2b^3$.
2. $\sqrt[3]{125a^6x^9} = \sqrt[3]{125}\,\sqrt[3]{a^6}\,\sqrt[3]{x^9} = 5a^2x^3$.

Замечание. Если искомый корень чётной степени и предполагается алгебраическим, то перед найденным результатом надо поставить двойной знак $\pm$. Так:

$$\sqrt{9x^4} = \pm 3x^2.$$

Упражнения.

193. $\sqrt{4\cdot 9}$; $\sqrt{\frac{1}{4}\cdot 0{,}01\cdot 25}$; $\sqrt{4a^2b^2}$; $\sqrt{9a^2x^2y^4}$.

194. $\sqrt[3]{-27a^3b^3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}\,a^4x^4}$; $\sqrt[5]{abc}$.

195. $\sqrt{a^4}$; $\sqrt{2^4}$; $\sqrt{x^6}$; $\sqrt{(a+b)^4}$.

196. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{-a^6}$; $\sqrt[3]{x^9}$; $\sqrt[3]{(m+n)^6}$.

197. $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{-\frac{27}{1\,000}}$; $\sqrt[3]{\frac{a^6}{b^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{y^3}}$; $\sqrt{\frac{x}{y}}$.

198. $\sqrt{25a^6b^2c^4}$; $\sqrt{0{,}36x^4y^2}$; $\sqrt{\frac{1}{4}\,(b+c)^6x^4}$.

II. Извлечение квадратного корня из чисел

110. Предварительные замечания. а) Для сокращения речи в этой главе вместо «квадратный корень» будем просто говорить «корень».

б) Если возведём в квадрат числа натурального ряда: 1, 2, 3, 4, 5, …, то получим такую таблицу квадратов:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,\ 100,\ 121,\ 144,\ \ldots.$$

Очевидно, имеется очень много целых чисел, которые в этой таблице не находятся; из таких чисел, конечно, нельзя извлечь целый корень. Поэтому если требуется извлечь корень из какого-нибудь целого числа, например, требуется найти $\sqrt{4082}$, то мы условимся это требование понимать так: извлечь целый корень из $\sqrt{4082}$, если это возможно, если же нельзя, то мы должны найти **наибольшее** целое число, квадрат которого заключается в 4082 (такое число есть 63, так как $63^2 = 3969$, а $64^2 = 4096$).

в) Если данное число меньше 100, то корень из него находится по таблице умножения.

111. Извлечение корня из целого числа, меньшего 10 000, но большего 100. Пусть надо найти $\sqrt{4082}$. Так как это число меньше 10 000, то корень из него меньше 100. С другой стороны, данное число больше 100, значит, корень из него больше 10. Но всякое число, которое больше 10, но меньше 100, имеет две цифры, значит, искомый корень есть сумма:

$$\text{десятки} + \text{единицы},$$

и поэтому квадрат его должен равняться сумме:

$$(\text{десятки})^2 + 2 \cdot (\text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицы})^2.$$

Сумма эта должна быть наибольшим квадратом, заключающимся в 4082. Так как $(\text{десятки})^2$ составляют сотни, то квадрат десятков надо искать в сотнях данного числа. Сотен в данном числе 40 (мы находим их число, отделив запятой две цифры справа). Но в 40 заключается несколько целых квадратов: 36, 25, 16 и др. Возьмём из них наибольший, 36, и допустим, что квадрат десятков корня будет равен именно этому наибольшему квадрату. Тогда число десятков в корне должно быть 6. Проверим теперь, что это всегда должно быть так, т. е. всегда *число десятков корня равно наибольшему целому корню из числа сотен подкоренного числа*. Действительно, в нашем примере число десятков корня не может быть больше 6, так как $(7 \text{ дес.})^2 = 49$ сотен, что превосходит 4082. Но оно не может быть и меньше 6, так как 5 дес. (с единицами) меньше 6 дес., а между тем $(6 \text{ дес.})^2 = 36$ сотен, что меньше 4082. А так как мы ищем **наибольший** целый корень, то мы не должны брать для корня 5 дес., когда и 6 дес. оказывается немного. Итак, мы нашли число десятков корня, именно 6. Пишем эту цифру направо от знака «=», запомнив, что она означает десятки корня. Возведя её в квадрат, получим 36 сотен. Вычитаем эти 36 сотен из 40 сотен подкоренного числа и к остатку приписываем число 82:

$$\begin{array}{l} \sqrt{40'82} = 6 \\ \underline{\;36\;\;\;\;} \\ \;\;48'2 \end{array}$$

В числе 482 должна содержаться сумма:

$$2 \cdot (6\ \text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{един.})^2.$$

Произведение (6 дес.)$\cdot$(един.) должно составлять десятки, поэтому удвоенное произведение десятков на единицы надо искать в десятках остатка, т. е. в 48 (мы получим число их, отделив в остатке $48'2$ одну цифру справа). Удвоенные десятки корня составляют 12. Значит, если 12 умножим на единицы корня (которые пока неизвестны), то мы должны получить число, содержащееся в 48. Поэтому мы разделим 48 на 12. Для этого влево от остатка проводим вертикальную черту и за ней (отступив от черты на одно место влево, для цели, которая сейчас обнаружится) напишем удвоенную первую цифру корня, т. е. 12, и на неё разделим 48.

В частном получим 4. Однако заранее нельзя ручаться, что цифру 4 можно принять за единицы корня, так как мы сейчас разделили на 12 всё число десятков остатка, тогда как некоторая часть из них может и не принадлежать удвоенному произведению десятков на единицы, а входить в состав квадрата единиц. Поэтому цифра 4 может оказаться велика. Надо её *испытать*. Она, очевидно, будет годиться в том случае, если сумма $2 \times \times (6\ \text{дес.}) \cdot 4 + 4^2$ окажется не больше остатка 482. Сумму эту мы можем вычислить сразу таким простым приёмом: за вертикальной чертой к удвоенной цифре корня (к 12) приписываем справа цифру 4 (поэтому-то мы и отступили от черты на одно место) и на неё же умножим полученное число (124 на 4):

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{40'8\,2} = 6 \\
 & \;\;36 \\
\hline
124 & \;\;4\,8'2 \\
4 & \;\;4\,9\,6
\end{array}$$

Действительно, проводя это умножение, мы умножаем 4 на 4, значит, находим квадрат единиц корня; затем мы умножаем 12 десятков на 4, значит, находим удвоенное произведение десятков корня на единицы. В результате получаем сразу сумму того и другого. Полученное произведение оказалось 496, что больше остатка 482, значит, цифра 4 велика. Тогда испытаем таким же образом следующую меньшую цифру, 3. Для этого сотрём цифру 4 и произведение 496 и вместо цифры 4 поставим 3 и умножим

123 на 3:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{40'82}=63 \\ & 36 \\ 123 & \vert\ 48'2 \\ 3 & \vert\ \underline{36\,9} \\ & \ \ 11\,3 \end{array}$$

Произведение 369 оказалось меньше остатка 482; значит, цифра 3 годится (если бы случилось, что и эта цифра велика, тогда надо было бы испытать следующую меньшую цифру, 2). Напишем цифру 3 в корне направо от цифры десятков. Последний остаток 113 показывает избыток данного числа над наибольшим целым квадратом, заключающимся в нём. Для проверки возведём в квадрат 63 и к результату прибавим 113:

$$\begin{array}{r} 63^2 = 3969 \\ +\ \ 113 \\ \hline 4082 \end{array}$$

Так как в сумме получилось данное число 4082, то действие сделано верно.

Примеры.

1. $\begin{array}{rl} & \sqrt{12'25} = 35 \\ & 9 \\ 65 & \vert\ 32'5 \\ 5 & \vert\ \underline{32\,5} \\ & \quad 0 \end{array}$ 2. $\begin{array}{rl} & \sqrt{86'55} = 93 \\ & 81 \\ 183 & \vert\ 55'5 \\ 3 & \vert\ \underline{54\,9} \\ & \quad 6 \end{array}$ 3. $\begin{array}{rl} & \sqrt{16'0\,5} = 40 \\ & 16 \\ 8 & \vert\ \ \ 0'5 \end{array}$

4. $\begin{array}{rl} & \sqrt{8'7\,2}=29 \\ & 4 \\ 49 & \vert\ 4\,7'2 \\ 9 & \vert\ \underline{4\,4\,1} \\ & \ \ 3\,1 \end{array}$ 5. $\begin{array}{l} \sqrt{64'00}=80 \\ \underline{64\quad} \\ \quad 00 \end{array}$

В примере четвёртом при делении 47 десятков остатка на 4 мы получаем в частном 11. Но так как цифра единиц корня не может быть двузначным числом 11 или 10, то надо прямо испытать цифру 9.

В примере пятом после вычитания из первой грани квадрата 8 остаток оказывается равным 0 и следующая грань тоже состоит из нулей. Это показывает, что искомый корень состоит только из 8 десятков, и потому на место единиц надо поставить нуль.

112. Извлечение корня из целого числа, большего 10 000. Пусть требуется найти $\sqrt{35\,782}$. Так как подкоренное число превосходит 10 000, то корень из него больше $\sqrt{10\,000} = 100$ и, следовательно, он состоит из 3 цифр или более. Из скольких бы цифр он ни состоял, мы можем его всегда рассматривать как сумму только десятков и единиц. Если, например, корень оказался бы 482, то мы можем его считать за сумму 48 десятков + 2 единицы. Тогда квадрат корня будет состоять по-прежнему из трёх слагаемых:

$$(\text{десятки})^2 + 2 \cdot (\text{дес.}) \cdot (\text{един.}) + (\text{единицы})^2.$$

Теперь мы можем рассуждать совершенно так же, как и при нахождении $\sqrt{4082}$ (в предыдущем параграфе). Разница будет только та, что для нахождения десятков корня из 4082 мы должны были извлечь корень из 40 и это можно было сделать по таблице умножения; теперь же для получения десятков $\sqrt{357'82}$ нам придётся извлечь корень из 357, что по таблице умножения выполнить нельзя. Но мы можем найти $\sqrt{357}$ тем приёмом, который был описан в предыдущем параграфе, так как число $357 < 10\,000$:

$$\sqrt{3'5\,7'8\,2} = 189$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
28 & 2\,5'7 \\
8 & 2\,2\,4 \\
\hline
369 & 3\,3\,8'2 \\
9 & 3\,3\,2\,1 \\
\hline
 & \quad\;\; 6\,1
\end{array}$$

Наибольший целый корень из 357 оказывается 18. Значит, в $\sqrt{3'57'82}$ должно быть 18 десятков.

Чтобы найти единицы, надо из $3'57'82$ вычесть квадрат 18 десятков, для чего достаточно вычесть квадрат 18 из 357 сотен и к остатку снести две последние цифры подкоренного числа. Остаток от вычитания квадрата 18 из 357 у нас уже есть: это 33. Значит, для получения остатка от вычитания квадрата 18 десятков из $3'57'82$ достаточно к 33 приписать справа цифры 82.

Далее поступаем так, как мы поступали при нахождении $\sqrt{4082}$, а именно: влево от остатка 3382 проводим вертикальную черту и за нею пишем (отступив от черты на одно место) удвоенное число найденных десятков корня, т. е. 36 (дважды 18). В остатке отделяем одну цифру справа и делим число десятков остатка, т. е. 338, на 36. В частном получаем 9. Эту цифру испытываем, для чего её приписываем к 36 справа и на неё же умножаем. Произведение оказалось 3321, что меньше остатка. Значит, цифра 9 годится, пишем её в корне.

Вообще, *чтобы извлечь квадратный корень из какого угодно целого числа, надо сначала извлечь корень из числа его сотен, если это число более 100, то придётся искать корень из числа сотен этих сотен, т. е. из десятков тысяч данного числа, если и это число более 10 000, придётся извлекать корень из числа сотен десятков тысяч, т. е. из миллионов данного числа, и т. д.*

Примеры:

1. $\sqrt{8'7\,2'0\,0'0\,0} = 2952$

$$\begin{array}{r|l}
 & 4 \\
49 & 4\,7'2 \\
9 & 4\,4\,1 \\ \hline
585 & 3\,1\,0'0 \\
5 & 2\,9\,2\,5 \\ \hline
5902 & 1\,7\,5\,0'0 \\
2 & 1\,1\,8\,0\,4 \\ \hline
 & 5\,6\,9\,6
\end{array}$$

2. $\sqrt{3'5\,0'3\,2'6\,0'8\,9} = 18717$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
28 & 2\,5'0 \\
8 & 2\,2\,4 \\ \hline
367 & 2\,6\,3'2 \\
7 & 2\,5\,6\,9 \\ \hline
3741 & 6\,3\,6'0 \\
1 & 3\,7\,4\,1 \\ \hline
37427 & 2\,6\,1\,9\,8'9 \\
7 & 2\,6\,1\,9\,8\,9 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

3. $\sqrt{9'5\,1'1\,0'5\,6} = 3084$

$$\begin{array}{r|l}
 & 9 \\ \hline
608 & 5\,1\,1'0 \\
8 & 4\,8\,6\,4 \\ \hline
6164 & 2\,4\,6\,5'6 \\
4 & 2\,4\,6\,5\,6 \\ \hline
 & 0
\end{array}$$

В последнем примере, найдя первую цифру и вычтя квадрат её, получаем в остатке 0. Сносим следующие 2 цифры, 51. Отделив десятки, мы получаем 5 дес., тогда как найденная удвоенная цифра корня есть 6. Значит, от деления 5 на 6 мы получаем 0. Ставим в корне 0 на втором месте и к остатку сносим следующие 2 цифры; получаем 5110. Далее продолжаем как обыкновенно.

4. $\sqrt{81'00'00} = 900$

$$\begin{array}{c}
81 \\ \hline
0
\end{array}$$

В этом примере искомый корень состоит только из 9 сотен, и потому на месте десятков и на месте единиц надо поставить нули.

Правило. *Чтобы извлечь квадратный корень из данного целого числа, разбивают его, от правой руки к левой, на грани по две цифры в каждой, кроме первой (крайней левой), в которой может быть одна цифра.*

Чтобы найти первую цифру корня, извлекают квадратный корень из первой грани.

Чтобы найти вторую цифру, из первой грани вычитают квадрат первой цифры корня, к остатку сносят вторую грань и число десятков получающегося числа делят на удвоенную первую цифру корня; полученное целое число подвергают испытанию.

Испытание это производится так: за вертикальной чертой (налево от остатка) пишут удвоенное ранее найденное число корня и к нему с правой стороны приписывают испытуемую цифру; получившееся после этой приписки число умножают на испытуемую цифру. Если после умножения получится число, большее остатка, то испытуемая цифра не годится и надо испытать следующую меньшую цифру.

Следующие цифры корня находятся по тому же приёму.

Если после снесения грани число десятков получившегося числа окажется меньше делителя, т.е. меньше удвоенной найденной части корня, то в корне ставят 0, сносят следующую грань и продолжают действие дальше.

113. Число цифр корня. Из рассмотрения процесса нахождения корня следует, что *в корне должно быть столько цифр, сколько в подкоренном числе заключается граней по две цифры каждая* (в левой грани может быть и одна цифра); другими словами: *если в подкоренном числе — чётное число цифр, то в корне цифр будет вдвое меньше этого числа, если же в подкоренном числе — нечётное число цифр, то в корне будет цифр вдвое меньше этого нечётного числа, увеличенного на единицу.*

Упражнения.

Извлечь квадратный корень из следующих чисел:

199. $\sqrt{289}$; $\sqrt{4225}$; $\sqrt{61009}$; $\sqrt{582169}$.

200. $\sqrt{135424}$; $\sqrt{956484}$; $\sqrt{57198969}$.

201. $\sqrt{68492176}$; $\sqrt{422220304}$;

202. $\sqrt{285970396644}$.

203. Объяснить, почему всякое целое число, оканчивающееся на какую-нибудь из четырёх цифр: 2, 3, 7 и 8, не может быть точным квадратом.

III. Извлечение приближённых квадратных корней

114. Два случая, когда нельзя извлечь точный корень. Точным квадратным корнем из данного целого или дробного числа называется такое число, квадрат которого в точности равняется данному числу. Укажем признаки, по которым можно иногда судить, что из данного числа точный корень не извлекается.

а) Если из данного целого числа не извлекается точный целый корень (получается при извлечении остаток), то из такого числа нельзя найти и дробный точный корень, так как всякая дробь, не равная целому числу, будучи умножена сама на себя, даёт в произведении тоже дробь, а не целое число.

б) Так как корень из дроби равен корню из числителя, делённому на корень из знаменателя, то точный корень из несократимой дроби не может быть найден в том случае, если его нельзя извлечь из числителя и знаменателя. Например, из дробей $\frac{4}{5}$, $\frac{8}{9}$ и $\frac{11}{51}$ нельзя извлечь точный корень, так как в первой дроби нельзя его извлечь из знаменателя, во второй — из числителя и в третьей — ни из числителя, ни из знаменателя.

Из таких чисел, из которых нельзя извлечь корень, можно извлекать лишь приближённые корни, о которых мы будем сейчас говорить.

115. Приближённый корень с точностью до 1. Приближенным квадратным корнем с точностью до 1 из данного числа (целого или дробного — всё равно) называется такое целое число, которое удовлетворяет следующим двум требованиям: 1) квадрат этого числа меньше данного числа (или равен ему), но 2) квадрат этого числа, увеличенного на 1, больше данного числа. Другими словами, *приближённым квадратным корнем с точностью до* 1 *называется наибольшее целое число, квадрат которого не превосходит данного числа*, т. е. тот корень, который мы находили в предыдущей главе. Корень этот называется приближённым с точностью до 1, потому что для получения точного корня к этому приближённому корню надо было бы добавить ещё некоторое число, меньшее 1, так что если вместо неизвестного точного корня мы возьмём этот приближённый, то сделаем ошибку, меньшую 1.

Положим, требуется найти приближённый квадратный корень с точностью до 1 из 395,74. Тогда, не обращая внимания на дробь, извлекаем корень только из целого числа:

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{3'9\,5} = 19 \\
 & \;1 \\
\cline{2-2}
29 & 2\,9'5 \\
9 & 2\,6\,1 \\
\cline{2-2}
 & \;\;3\,4
\end{array}$$

Полученный корень 19 будет искомый, так как

$$19^2 < 395{,}74, \quad \text{а} \quad 20^2 > 395{,}74.$$

Правило. *Чтобы извлечь приближённый квадратный корень с точностью до 1, надо извлечь наибольший целый корень из целой части данного числа.*

Найденное по этому правилу число есть приближённый корень с недостатком, так как в нём недостаёт до точного корня некоторого числа (меньше 1). Если этот корень увеличим на 1, то получим другое число, в котором есть некоторый избыток над точным корнем и избыток этот меньше или равен 1. Этот увеличенный на 1 корень можно назвать тоже приближённым корнем с точностью до 1, но с избытком.

116. Приближённый корень с точностью до $\frac{1}{10}$. Пусть требуется найти $\sqrt{2{,}35\,104}$ с точностью до $\frac{1}{10}$ (с недостатком). Это значит, что требуется найти такую десятичную дробь, которая состояла бы из целых единиц и десятых долей и которая удовлетворяла бы двум следующим требованиям: 1) квадрат этой дроби не превосходит 2,35104, но 2) если увеличим её на $\frac{1}{10}$, то квадрат этой увеличенной дроби превосходит 2,35104.

$$\begin{array}{r|l}
 & \sqrt{2'3\,5'\,10'4} = 1{,}5 \\
 & \;1 \\
\cline{2-2}
25 & 1\,3'5 \\
5 & 1\,2\,5 \\
\cline{2-2}
 & \;\;1\,0
\end{array}$$

Чтобы найти такую дробь, мы сначала найдём приближённый корень с точностью до 1, т. е. извлечём корень только из целого числа 2. Получим 1 (и в остатке 1). Пишем в корне цифру 1 и ставим после неё запятую. Теперь будем искать цифру десятых. Для этого приписываем к остатку 1 цифры 35, стоящие направо от запятой, и продолжаем извлечение так, как будто мы извлекали корень из целого числа 235. Полученную цифру 5 пишем в корне на месте десятых. Остальные цифры подкоренного числа (104) нам не нужны. Что полученное число 1,5 будет действительно приближённый корень с точностью до $\frac{1}{10}$, видно из следующего: если бы мы находили наибольший целый корень из 235 с точностью до 1, то получили бы 15, значит,

$$15^2 \leqslant 235, \quad \text{но} \quad 16^2 > 235.$$

Разделив все эти числа на 100, получим:

$$\frac{15^2}{100} \leqslant 2{,}35; \quad \frac{16^2}{100} > 2{,}35,$$

т. е.

$$\left(\frac{15}{10}\right)^2 \leqslant 2{,}35; \quad \left(\frac{16}{10}\right)^2 > 2{,}35,$$

или

$$1{,}5^2 \leqslant 2{,}35; \quad 1{,}6^2 > 2{,}35.$$

Следовательно,

$$1{,}5^2 < 2{,}35104; \quad 1{,}6^2 > 2{,}35104 \;^{1)}.$$

Значит, число 1,5 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближённым корнем с точностью до $\frac{1}{10}$.

Найдём этим приёмом ещё следующие приближённые корни с точностью до 0,1:

$$\begin{array}{rl} & \sqrt{57{,}4\,0} = 7{,}5 \\ & \;\;4\,9 \\ 145 & \big|\;8\,4'0 \\ 5 & \big|\;7\,2\,5 \\ & \;\;1\,1\,5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{0{,}30} = 0{,}5 \\ \quad\;\; \underline{25} \\ \quad\;\;\; 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \sqrt{0{,}03'8} = 0{,}1 \\ \quad\;\; \underline{1\;\;\;} \\ \quad\;\; 2\,8 \end{array}$$

117. Приближённый корень с точностью до $\frac{1}{100}$, до $\frac{1}{1000}$ и т. д. Пусть требуется найти с точностью до $\frac{1}{100}$ приближённый $\sqrt{248}$ с недостатком. Это значит: найти такую десятичную

---

[1]) От прибавления числа 0,00104 двойной знак «$\leqslant$» должен измениться, очевидно, в знак «$<$», а знак «$>$» остаётся (так как $0{,}00104 < 0{,}01$).

дробь, которая состояла бы из целых, десятых и сотых долей и которая удовлетворяла бы двум требованиям: 1) квадрат её не превосходит 248, но 2) если увеличим эту дробь на $\frac{1}{100}$, то квадрат этой увеличенной дроби превосходит 248. Такую дробь мы найдём в такой последовательности: сначала отыщем целое число, потом цифру десятых, затем и цифру сотых. Корень из целого числа будет 15 целых. Чтобы получить цифру десятых, надо, как мы видели, приписать к остатку 23 ещё 2 цифры, стоящие направо от запятой:

$$\sqrt{2'\,4\,8',0\,0\,0\,0}=15{,}74$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\ \hline
25 & 1\,4'8 \\
5 & 1\,2\,5 \\ \hline
307 & 2\,3\,0'0 \\
7 & 2\,1\,4\,9 \\ \hline
3144 & 1\,5\,10'0 \\
4 & 1\,2\,57\,6 \\ \hline
 & \quad 2\,52\,4
\end{array}$$

В нашем примере этих цифр нет вовсе; ставим на их место нули. Приписав их к остатку и продолжая действие так, как будто находим корень из целого числа 24 800, мы найдём цифру десятых, 7. Остаётся найти цифру сотых. Для этого приписываем к остатку 151 ещё 2 нуля и продолжаем извлечение, как будто мы находим корень из целого числа 2 480 000. Получаем 15,74. Что это число действительно есть приближённый корень из 248 с точностью до $\frac{1}{100}$ с недостатком, видно из следующего. Если бы мы находили наибольший целый квадратный корень из целого числа 2 480 000, то получили бы 1574; значит,

$$1574^2 \leqslant 2\,480\,000, \text{ но } 1575^2 > 2\,480\,000.$$

Разделив все числа на 10 000 ($= 100^2$), получим:

$$\frac{1574^2}{100^2} \leqslant 248{,}0000; \quad \frac{1575^2}{100^2} > 248{,}0000,$$

т. е.

$$\left(\frac{1574}{100}\right)^2 \leqslant 248{,}0000; \quad \left(\frac{1575}{100}\right)^2 > 248{,}0000,$$

или

$$15{,}74^2 \leqslant 248; \quad 15{,}75^2 > 248.$$

Значит, 15,74 есть та десятичная дробь, которую мы назвали приближённым корнем с недостатком с точностью до $\frac{1}{100}$ из 248.

Применяя этот приём к нахождению приближённого корня с точностью до $\frac{1}{1000}$, до $\frac{1}{10000}$ и т. д., найдём следующее:

Правило. *Чтобы извлечь из данного целого числа или из данной десятичной дроби приближённый корень с недостатком с точностью до* $\frac{1}{10}$, *до* $\frac{1}{100}$, *до* $\frac{1}{1000}$ *и т. д., находят сначала приближённый корень с недостатком с точностью до* 1, *извлекая корень из целого числа (если его нет, пишут в корне* 0 *целых).*

Потом находят цифру десятых. Для этого к остатку приписывают две цифры подкоренного числа, стоящие направо от запятой (если их нет, приписывают к остатку два нуля), и продолжают извлечение так, как это делается при извлечении корня из целого числа. Полученную цифру пишут в корне на месте десятых.

Затем находят цифру сотых. Для этого к остатку приписывают снова две цифры, стоящие направо от тех, которые были только что снесены, и т. д.

Таким образом, при извлечении корня из целого числа с десятичной дробью надо *делить на грани по две цифры в каждой, начиная от запятой как влево* (*в целой части числа*), *так и вправо* (*дробной части*).

Примеры.

1. Найти до $\frac{1}{100}$ корни: а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{0,3}$.

$$
\text{а) } \sqrt{2} = 1{,}41 \qquad\qquad \text{б) } \sqrt{0{,}30} = 0{,}54
$$

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
24 & 10'0 \\
4 & \ \ 9\,6 \\
\hline
281 & 40'0 \\
1 & 28'1 \\
\hline
 & 11\,9
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
 & 25 \\
104 & 50'0 \\
4 & 41\,6 \\
\hline
 & \ \ 8\,4
\end{array}
$$

2. Извлечь до $\frac{1}{10000}$: а) $\sqrt{0,38472}$; б) $\sqrt{\frac{3}{7}}$.

а) $\sqrt{0{,}3\;8'4\;7'2\,0} = 0{,}6202$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3\,6 \\ \hline
122 & 2\;4'7 \\
2 & 2\;4\;4 \\ \hline
12402 & 3\;200'0 \\
2 & 2\;480\,4 \\ \hline
 & 719\,6
\end{array}$$

б) $\sqrt{\dfrac{3}{7}} = \sqrt{0{,}42'85'71'42}$

$\sqrt{0{,}4\;2'8\;5'7\;1'4\,2} = 0{,}6546$

$$\begin{array}{r|l}
 & 3\,6 \\ \hline
125 & 6\;8'5 \\
5 & 6\;2\;5 \\ \hline
1304 & 6\;0\;7'1 \\
4 & 5\;2\;1\;6 \\ \hline
13086 & 8\;5\;5\;4\,2 \\
6 & 7\;8\;5\;1\,6 \\ \hline
 & 7\;0\;2\,6
\end{array}$$

В последнем примере мы обратили дробь $\frac{3}{7}$ в десятичную, вычислив 8 десятичных знаков, чтобы образовались 4 грани, потребные для нахождения 4 десятичных знаков корня.

Замечание. Существуют особые таблицы, в которых помещены квадратные корни (вычисленные с известной точностью) из очень многих чисел. Способы пользования такими таблицами обыкновенно указываются в предисловии к таблицам.

118. Извлечение корня из обыкновенных дробей. Точный квадратный корень из несократимой дроби можно извлечь лишь тогда, когда оба члена дроби — точные квадраты (§ 114). В этом случае достаточно извлечь корень из числителя и знаменателя отдельно, например:

$$\sqrt{\frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} = \frac{3}{4}.$$

Приближённый корень из обыкновенной дроби с какой-нибудь десятичной точностью проще всего можно находить, если, предварительно обратив обыкновенную дробь в десятичную, вычислить в этой дроби такое число десятичных знаков после запятой, которое было бы вдвое больше числа десятичных знаков в искомом корне. Пусть, например, надо найти $\sqrt{2\frac{3}{7}}$ с точностью до 0,01, т. е. с двумя десятичными знаками после запятой. Для этого обратим $2\frac{3}{7}$ в десятичную дробь с 4 десятичными знаками: $2\frac{3}{7} = 2{,}4285\ldots$ и извлечём приближённый корень из 2,4285 с точностью до 0,01:

$$\sqrt{2{,}4\,28\,5} = 1{,}55$$

$$\begin{array}{r|l}
 & 1 \\
25 & 1\;4'2 \\
5 & 1\;2\;5 \\
\hline
305 & 1\;78'5 \\
5 & 1\;52\;5 \\
\hline
 & \;\;26\;0
\end{array}$$

Впрочем, можно поступать и иначе. Объясним это на следующем примере:

Найти приближённый $\sqrt{\dfrac{5}{24}}$.

Сделаем знаменатель точным квадратом. Для этого достаточно было бы умножить оба члена дроби на знаменатель 24; но в этом примере можно поступить иначе. Разложим 24 на простые множители: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$. Из этого разложения видно, что если 24 умножить на 2 и ещё на 3, то тогда в произведении каждый простой множитель будет повторяться чётное число раз и, следовательно, знаменатель сделается квадратом:

$$\sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{5}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2^4 \cdot 3^2}} = \frac{\sqrt{50}}{2^2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{30}}{12}.$$

Остаётся вычислить $\sqrt{30}$ с какой-нибудь точностью и результат разделить на 12. При этом надо иметь в виду, что от деления на 12 уменьшится и дробь, показывающая степень точности. Так, если найдём $\sqrt{30}$ с точностью до $\frac{1}{10}$ и результат разделим на 12, то получим приближённый корень из дроби $\frac{5}{24}$ с точностью до $\frac{1}{120}$ $\left(\text{а именно: } \frac{54}{120} \text{ и } \frac{55}{120}\right)$.

Упражнения.

204. $\sqrt{13}$ до 1; $\sqrt{13}$ до 0,1; $\sqrt{13}$ до 0,001.

205. $\sqrt{101}$ до $\frac{1}{100}$; $\sqrt{0{,}8}$ до 0,01.

206. $\sqrt{0{,}0081}$ до $\frac{1}{100}$; $\sqrt{19{,}0969}$ до $\frac{1}{100}$.

207. $\sqrt{356}$ до 1, затем до 0,1, далее до 0,01.

208. Вычислить до 0,01 квадратный корень из следующих дробей, обратив каждую из них в десятичную с достаточным числом десятичных знаков:

$$\frac{3}{5}, \quad \frac{3}{7}, \quad \frac{7}{11}, \quad \frac{5}{12}, \quad \frac{7}{250}.$$

209. Вычислить квадратный корень из тех же дробей, не обращая дроби в десятичные, а сделав знаменатель точным квадратом.

210. Вычислить корни:

$$\sqrt{0{,}3}, \quad \sqrt{5{,}7} \ \left(\text{оба до } \frac{1}{10}\right);$$
$$\sqrt{2{,}313}, \quad \sqrt{0{,}00264} \quad \left(\text{оба до } \frac{1}{100}\right).$$

Исторические сведения

Знак $\sqrt{\ }$ для обозначения действия извлечения корня введён в математику Рудольфом в 1525 г. Раньше просто писали целое слово «корень» (по-латыни radix), которое затем было сокращено до одной первой буквы, а эта последняя постепенно и приняла вид $\sqrt{\ }$.

Глава 6

КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

119. Задача. Моторная лодка спустилась по течению реки на расстояние 28 км и тотчас же вернулась обратно; на это ей потребовалось 7 ч. Найти скорость движения лодки в стоячей воде, если известно, что вода в реке движется со скоростью 3 км/ч.

Пусть скорость движения лодки в стоячей воде будет x км/ч; тогда по течению реки она двигалась бы со скоростью $(x+3)$ км/ч, а против течения со скоростью $(x-3)$ км/ч. Следовательно, 28 км лодка прошла в $\frac{28}{x+3}$ ч, когда двигалась по течению, и в $\frac{28}{x-3}$ ч, когда возвращалась назад.

Согласно условию задачи, мы имеем уравнение:

$$\frac{28}{x+3} + \frac{28}{x-3} = 7.$$

Освободив уравнение от знаменателей, получим:

$$28(x-3) + 28(x+3) = 7(x+3)(x-3),$$

т. е.

$$28x - 84 + 28x + 84 = 7(x^2 - 9),$$

или

$$56x = 7x^2 - 63.$$

Мы получили уравнение, в котором есть член, содержащий неизвестное во второй степени, но нет членов, содержащих неизвестное в более высоких степенях. Такое уравнение называется *уравнением второй степени, или квадратным*.

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что это уравнение имеет корни 9 и -1, из которых ответом на вопрос задачи может служить только первый корень.

Выведем общее правило для решения квадратных уравнений.

120. Нормальный вид квадратного уравнения. В квадратном уравнении (а также и в уравнениях более высоких степеней) принято, после упрощения уравнения, переносить все его члены в одну левую часть, так что правая часть уравнения делается равной нулю. Так, уравнение, составленное нами для решения предыдущей задачи, после указанного перенесения членов будет:

$$56x - 7x^2 + 63 = 0,$$

или после расположения членов по убывающим степеням буквы x:

$$-7x^2 + 56x + 63 = 0.$$

Числа -7, $+56$ и $+63$ называются *коэффициентами* этого квадратного уравнения: из них число $+63$ называется *свободным* членом, а числа -7 и $+56$ — *первым* и *вторым* коэффициентами (мы предполагаем, что члены уравнения всегда расположены по убывающим степеням буквы x). Числа эти могут быть и положительные, и отрицательные, а также нули (кроме первого коэффициента, который не может быть нулём, так как в противном случае уравнение не было бы квадратным). Если ни один из трёх коэффициентов не равен нулю, то уравнение называется *полным*. Общий вид такого уравнения (*нормальный* вид) есть следующий:

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Заметим, что первый коэффициент a мы можем всегда сделать положительным, переменив в случае надобности перед всеми членами знаки на противоположные (другими словами, умножив обе части уравнения на -1). Так, приведённое выше уравнение мы можем написать так:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

121. Решение неполных квадратных уравнений. Квадратное уравнение называется *неполным*, когда в нём нет члена, содержащего x в первой степени, или нет свободного члена; другими словами, когда второй коэффициент равен нулю или когда свободный член c равен 0. В первом случае уравнение имеет вид $ax^2 + c = 0$, во втором $ax^2 + bx = 0$ (может случиться, что одновременно и $b = 0$ и $c = 0$; тогда уравнение будет вида $ax^2 = 0$). Рассмотрим решение всех этих неполных уравнений.

1. ***Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$.*** Возьмём три следующих примера:

а) $3x^2 - 27 = 0$. Перенеся свободный член направо, получим $3x^2 = 27$ и, следовательно, $x^2 = 9$. Значит, x есть квадратный корень из 9, т. е. число $+3$ или число -3. Условимся знаком $\sqrt{}$ обозначать арифметическое значение корня; тогда мы можем написать: $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$. Таким образом, данное уравнение имеет 2 решения. Обозначая одно из них x_1, а другое x_2, мы можем эти решения написать так:

$$x_1 = +\sqrt{9} = +3, \quad x_2 = -\sqrt{9} = -3.$$

б) $2x^2 - 0{,}15 = 0$. Перенеся свободный член, получим:

$$2x^2 = 0{,}15 \quad \text{и} \quad x^2 = 0{,}075.$$

Значит,

$$x = \pm\sqrt{0{,}075}\,.$$

Найдём $\sqrt{0{,}075}$ с точностью, положим, до $\dfrac{1}{100}$ (§ 117):

$$\begin{array}{r|l}
\multicolumn{2}{l}{\sqrt{0{,}07'5\,0} = 0{,}27} \\
\multicolumn{2}{l}{\quad\;\; 4} \\ \cline{2-2}
47 & 3\,5'0 \\
7 & \underline{3\,2'9} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \quad 2\,1
\end{array}$$

Следовательно, $x_1 = 0{,}27\ldots$, $x_2 = -0{,}27\ldots$

в) $2x^2 + 50 = 0$. Перенеся 50 направо, получим:

$$2x^2 = -50; \quad x^2 = -\frac{50}{2} = -25; \quad x = \pm\sqrt{-25}\,.$$

Так как из отрицательного числа нельзя извлечь квадратного корня, то данное уравнение не имеет решений (вещественных).

Таким образом, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + c = 0$ вообще решается так:

$$ax^2 = -c; \quad x^2 = -\frac{c}{a}; \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}\,.$$

Если выражение $-\dfrac{c}{a}$ есть число положительное (что будет тогда, когда числа a и c разных знаков), то из него можно извлечь квадратный корень (точно или приближённо), и тогда для x получаем два значения с одинаковой абсолютной величиной, но одно положительное, другое отрицательное. Если же выражение $-\dfrac{c}{a}$ есть число отрицательное (что будет тогда, когда числа c и a одинаковых знаков), то уравнение не имеет вещественных корней.

2. ***Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$.*** Как частный пример возьмём уравнение $2x^2 - 7x = 0$. В левой части этого уравнения вынесем x множителем за скобки:

$$x(2x - 7) = 0.$$

Теперь левая часть уравнения есть произведение, а правая равна нулю. Но произведение равняется нулю только тогда, когда какой-нибудь из сомножителей равен нулю; поэтому наше уравнение удовлетворяется только тогда, когда первый сомножитель x равен нулю или когда второй сомножитель $2x - 7$ равен нулю $\left(\text{и когда, следовательно, } x = \dfrac{7}{2}\right)$. Значит, данное уравнение имеет два решения:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}.$$

Таким образом, неполное квадратное уравнение вида $ax^2 + bx = 0$ решается вообще так:

$$ax^2 + bx = 0; \quad x(ax + b) = 0;$$
$$x_1 = 0; \quad ax_2 + b = 0; \quad x_2 = -\frac{b}{a}.$$

3. ***Неполное квадратное уравнение вида $ax^2 = 0$.*** Такое уравнение имеет, очевидно, только корень $x = 0$.

Упражнения.

211. $3x^2 - 147 = 0$; $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0$; $x^2 + 25 = 0$.

212. $\dfrac{3(x^2 - 11)}{5} - \dfrac{2(x^2 - 60)}{7} = 36$; $\dfrac{4}{x - 3} - \dfrac{4}{x + 3} = \dfrac{1}{3}$.

213. $2x^2 - 7x = 0$; $\frac{3}{7}x^2 + x = 0$; $0{,}2x^2 - \frac{3}{4}x = 0$.

214. $x^2 = x$; $x^2 - 16x = 0$; $7x^2 = 0$; $0{,}7x^2 = 0$.

215. $(x - 2)(x - 5) = 0$; $x(x + 4) = 0$; $3(y - 2)(y + 3) = 0$.

122. Примеры решения полных квадратных уравнений. Для первого примера возьмём то квадратное уравнение, которое было составлено для задачи § 119:

$$7x^2 - 56x - 63 = 0.$$

Разделим все его члены на 7 и перенесём свободный член направо:

$$x^2 - 8x = 9.$$

Зададимся теперь вопросом, нельзя ли к двучлену $x^2 - 8x$ прибавить такой третий член, чтобы образовался трёхчлен, представляющий собой полный квадрат. Мы легко ответим на этот вопрос, если изобразим двучлен так:

$$x^2 - 2x \cdot 4.$$

Теперь ясно, что если этот двучлен дополним членом 4^2, то получим трёхчлен:

$$x^2 - 2x \cdot 4 + 4^2,$$

равный квадрату разности $x - 4$. Но если к левой части уравнения мы добавим число 4^2 (т. е. 16), то и к правой части должны добавить то же самое число. Сделав это, получим:

$$x^2 - 8x + 16 = 9 + 16, \text{ т. е. } (x-4)^2 = 25.$$

Таким образом, разность $x - 4$ есть такое число, квадрат которого равен 25; значит, эта разность должна равняться квадратному корню из 25, т. е. числу 5 или числу -5:

$$x - 4 = +\sqrt{25} = +5 \quad \text{или} \quad x - 4 = -\sqrt{25} = -5.$$

Перенеся теперь член -4 в правую часть, найдём два решения:

$$x_1 = 4 + 5 = 9 \quad \text{и} \quad x_2 = 4 - 5 = -1.$$

Оба эти решения годны для данного уравнения (в чём можно убедиться проверкой), но для задачи, из которой выведено уравнение, отрицательное решение -1 не годится, так как в задаче отыскивается абсолютная величина скорости, а не её направление.

Для второго примера возьмём уравнение:

$$3x^2 + 15x - 7 = 0.$$

Разделим все члены на 3 и перенесём свободный член направо:

$$x^2 + 5x = \frac{7}{3}.$$

Из двучлена $x^2 + 5x$ можно сделать квадрат суммы, если добавим к нему третий член $\left(\frac{5}{2}\right)^2$. Прибавив этот член к обеим частям уравнения, получим:

$$x^2 + 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{3},$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}+\frac{7}{3}=\frac{75+28}{12}=\frac{103}{12}.$$

Отсюда видно, что $x+\frac{5}{2}=\pm\sqrt{\frac{103}{12}}$; следовательно,

$$x_1=-\frac{5}{2}+\sqrt{\frac{103}{12}}; \quad x_2=-\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{103}{12}}.$$

Вычислим $\sqrt{\frac{103}{12}}$ с точностью, положим, до $\frac{1}{10}$:

$$\sqrt{\frac{103}{12}}=\sqrt{8{,}58\ldots}=2{,}9\ldots.$$

Следовательно,

$$x_1=-2{,}5+2{,}9\ldots=0{,}4\ldots,\ x_2=-2{,}5-2{,}9\ldots=-5{,}4\ldots$$

123. Формула корней приведённого квадратного уравнения. Квадратное уравнение, у которого первый коэффициент есть $+1$, называется приведённым уравнением. К такому виду, как мы видели сейчас на примерах, уравнение может быть приведено и в том случае, когда первый коэффициент не 1; стоит только все члены уравнения разделить на этот коэффициент. В общем виде приведённое уравнение обыкновенно изображается так:

$$x^2+px+q=0.$$

Решим это буквенное уравнение, проделав над ним те же преобразования, которые были указаны на частных примерах.

Перенесём свободный член в правую часть:

$$x^2+px=-q.$$

Так как $px=2x\cdot\frac{p}{2}$, то, желая получить в левой части полный квадрат, прибавим к обеим частям уравнения по $\left(\frac{p}{2}\right)^2$:

$$x^2+px+\left(\frac{p}{2}\right)^2=-q+\left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Теперь уравнение можно представить так:

$$\left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q,$$

откуда находим:

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{и} \quad x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Формулу эту можно высказать так:

Корень приведённого квадратного уравнения равен половине второго коэффициента, взятого с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этой половины без свободного члена.

Формулу эту надо запомнить и в буквенном выражении и в словесном.

Примеры.

1. $x^2 - x - 6 = 0$. Чтобы уравнение это уподобить буквенному $x^2 + px + q = 0$, представим его так:

$$x^2 + (-1)x + (-6) = 0.$$

Теперь видно, что в этом примере $p = -1$ и $q = -6$; поэтому:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \pm \frac{5}{2};$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3; \quad x_2 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2} = -2.$$

Проверка: $3^2 - 3 - 6 = 0$; $(-2)^2 - (-2) - 6 = 0$.

2. $x^2 - 18x + 81 = 0$; здесь $p = -18$, $q = 81$; поэтому:

$$x = 9 \pm \sqrt{81 - 81} = 9 \pm 0 = 9.$$

Уравнение имеет только один корень.

3. $x^2 - 2x + 5 = 0$; $x = 1 \pm \sqrt{1 - 5} = 1 \pm \sqrt{-4}$. Корни мнимые.

Упражнения.

216. $x^2 + 10x + 5 = 2x^2 - 6x + 53$.

217. $x^2 + 6x = 27$.

218. $x^2 - 5\frac{3}{4}\,x = 18$.

219. $12x - \frac{6}{x} = 21$.

220. $\frac{x}{7} + \frac{21}{x+5} = 6\frac{5}{7}$.

221. $x + 2 = \frac{9}{x+2}$.

222. $\frac{x-5}{4} - \frac{4}{5-x} = \frac{3x-1}{4}$.

223. $x + \dfrac{1}{x-3} = 5.$

224. $\dfrac{2x}{x-d} = \dfrac{x-d}{d}.$

225. При каком значении t произведение $2t-5$ на $t-4$ равно сумме $t+8$?

226. $abx^2 - (a^2+b^2)x + ab = 0.$

124. Общая формула корней квадратного уравнения. Уравнение $ax^2+bx+c=0$ по разделении его членов на a приводится к приведённому уравнению:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Решив это уравнение по формуле приведённого уравнения, найдём:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}\,.$$

Выражение это можно упростить так:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \\ = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

В этом упрощённом виде формулу полезно запомнить; её можно высказать так:

Корень полного квадратного уравнения равен дроби, у которой числитель есть второй коэффициент, взятый с противоположным знаком, плюс-минус корень квадратный из квадрата этого коэффициента без учетверённого произведения первого коэффициента на свободный член, а знаменатель есть удвоенный первый коэффициент.

Эту формулу можно назвать *общей*, так как она годится и для приведённого уравнения (если, положим, $a=1$) и для неполных квадратных уравнений (если, положим, $b=0$ или $c=0$).

125. Упрощение общей формулы, когда коэффициент b есть чётное число. Общая формула упрощается, если b чётное число. Так, положив $b=2k$, найдём:

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2-4ac}}{2a} = \frac{-2k \pm \sqrt{4(k^2-ac)}}{2a} = \\ = \frac{2k \pm 2\sqrt{k^2-ac}}{2a} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2-ac}}{a}.$$

Эта формула отличается от общей отсутствием цифровых множителей 4 и 2.

126. Число корней квадратного уравнения. Мы видели, что квадратное уравнение имеет иногда два корня, иногда один, иногда ни одного (случай мнимых корней). Однако согласились приписывать квадратным уравнениям во всех случаях два корня, разумея при этом, что корни могут быть иногда равными, иногда мнимыми. Причина такого соглашения состоит в том, что формулы, выражающие мнимые корни, обладают теми же свойствами, какие принадлежат вещественным корням, стоит только, совершая действия над мнимыми числами, руководиться правилами, выведенными дли вещественных чисел, принимая притом, что $(\sqrt{-a}\,)^2 = -a$. Точно так же, когда уравнение имеет один корень, условились считать, что уравнение имеет два одинаковых корня.

Упражнения.

227. $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

228. $(2x - 3)^2 = 8x$.

229. $5x^2 - 8x + 0{,}24 = 0$.

230. $65x^2 + 118x - 55 = 0$.

231. $(x - 3)(x - 4) = 12$.

232. $\dfrac{x}{x + 60} = \dfrac{7}{3x - 5}$.

233. $x + \dfrac{1}{x} = a + \dfrac{1}{a}$.

234. Найти три последовательных чётных числа, чтобы сумма их квадратов равнялась 776.

235. Площадь прямоугольника равна 48 см^2, а периметр его 28 см. Найти стороны.

236. Найти стороны прямоугольного треугольника, зная, что они выражаются тремя последовательными целыми числами.

237. Если многоугольник имеет n сторон, то число всех его диагоналей равно $\dfrac{1}{2}n(n - 3)$. Определить, сколько сторон должен иметь многоугольник, чтобы всех диагоналей у него оказалось 54.

238. Самолёт пролетел по прямой линии 450 км, тотчас же повернул назад и по прямой линии вернулся к начальному месту через $5\dfrac{1}{2}$ ч после начала полета. Туда он летел против ветра, оттуда по ветру. Какова была скорость этого ветра, если скорость движения самого самолёта при безветрии равна 165 км/ч?

239. Куплено несколько платков за 60 руб. Если бы за эту же сумму платков было куплено тремя больше, то каждый платок стоил бы на 1 руб. дешевле. Сколько куплено платков?

240. В первом классе школы было роздано 240 листов бумаги всем ученикам поровну. Во втором классе было роздано такое же число листов бумаги и также поровну. Каждый ученик этого класса получил на два листа более, чем в первом классе. По скольку листов получил каждый ученик первого класса, если во втором классе было на 10 учеников меньше, чем в первом?

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

1. $4a$; a^2. **2.** $6m^2$; m^3. **3.** $x(x-d)$. **4.** $10x+y$. **5.** $100a+10b+c$. **6.** $\frac{ma+nb}{a+b}$. **7.** x^2+y^2; $(x+y)^2$; x^2y^2; $(xy)^2$; $(a+b)(a-b)$; $\frac{m+n}{m-n}$, или $(m+n):(m-n)$. **8.** 84; 44; 552; 336; $9\frac{1}{3}$; $5\frac{3}{5}$. **9.** $3(x+y)(x-y)$. **10.** $3a+2b$; 25. **11.** $5+ab-4a$; $a+2x$. **12.** n; $5a^3b^2x^3$. **13.** $6xyz$; $2ax$. **14.** $5x+15$; $7x+7y+7z$. **15.** $\frac{a}{2}+2b-c$; $5a^2b$. **16.** $8x-2y$; $4ax$. **17.** $\frac{a}{b}$; $3x$. **18.** $+10$; -10; $+3$. **19.** -3; $+8$; -2. **20.** 0; -3; $+1$. **21.** -1; -2; $+2$. **22.** $+2$. **23.** 0. **24.** $b-a$; -5 (убыток). **25.** $m-n$; -10 (долг). **26.** 14; 10; 18; 2. **27.** $a+b$; $m+n$; $5x$. **28.** 12. **29.** $-1\frac{3}{4}$. **30.** $+5$. **31.** $10+(-2)+(-3)+7$. **32.** $10-(-8)$. **33.** $+6$; -14; $+80$. **34.** $-23\frac{3}{8}$; 0,054. **35.** $+1$; -1; $+1$; -1. **36.** 27. **37.** -27. **38.** 0; 0; 0; 0; 0. **39.** $3\frac{1}{16}$. **40.** $+5$; -5; -5; $+5$. **41.** $-a$; -5; x^2. **42.** 0; 0; 0; 0. **43.** $+10$; $+300$; -35; $+0{,}4275$. **44.** 30 000; 750; 246. **45.** $-0{,}5$. **46.** $10a^3x^3$; $-10a^2bx^2$; $-\frac{3}{8}a^2bx^2$; $-20m^2x^2y^3$. **47.** $a+a$; $ax+ax+ax$; $a^2b+a^2b+a^2b+a^2b+a^2b$; $(a+1)+(a+1)+(a+1)+(a+1)$. **48.** 90; $\frac{13}{15}$; $2\frac{25}{48}$; -28; -936. **49.** 0; 31; -4. **50.** $+1$ и -1. **51.** $a^3x^2+4\frac{1}{2}a^2x^3$. **52.** $2x-16{,}3xy$. **53.** $a+3\frac{1}{2}mxy^2$. **54.** $a-3\frac{1}{2}mxy^2$. **55.** $4a^3-3a^2b-13ab^2$. **56.** $x^5-7a^2x^3$. **57.** $2z$. **58.** $4x^3+x^2+3x+1$. **59.** $8a^3-11a^2b+14ab^2-3b^3$. **60.** p^2+p+15. **61.** $4x^2+3y^2-y-1$. **62.** $\frac{1}{4}x^2-x+\frac{4}{5}$. **63.** $4a^2+4b^2-c^2$. **64.** $x+y$; $2m-2n$. **65.** $b-2c$. **66.** $4x^2$. **67.** $a-(b+c-d)$; $a-b+(-c+d)$; $a-(b+c)+d$. **68.** $15a^3b^7c$; $\frac{5}{8}a^2x^6$. **69.** $0{,}81a^3b^2x^3$; $a^6b^8c^3$. **70.** $\frac{9}{49}m^2x^4y^6$; $8a^9b^3x^6$. **71.** $0{,}01x^{2m}y^6$; $\frac{1}{8}m^6n^3y^9$. **72.** $6a^3b-4ab^4+2abc$. **73.** $25a^3b-20a^4b^2+15a^5b^3-35a^6b^4$. **74.** $am+bm-cm-an-bn+cn$; $6a^2-3ab+2ab^2-b^3$. **75.** $2a^2-\frac{1}{2}b^2$; x^3-y^3. **76.** x^3+y^3. **77.** $6x^2+5xy-6y^2$; y^4-1. **78.** $x^6+1008x+720$. **79.** $x^9-x^5-x^4+2x^3-x^2-x+1$. **80.** x^6-a^6. **81.** a^2+2a+1; $1+4a+4a^2$; $x^2+x+\frac{1}{4}$. **82.** $9a^4+6a^2+1$; $0{,}01m^2x^2+mx^3+25x^4$. **83.** $25a^2-20a+4$; $9x^2-12ax+4a^2$; $9a^4-3a^2+\frac{1}{4}$. **84.** $101^2=(100+1)^2=100^2+2\cdot100\times$ $\times1+1^2=10\,201$; $997^2=(1000-3)^2=\ldots=994\,009$; $96^2=9\,216$; $57^2=3\,249$; $72^2=5\,184$; $89^2=7\,921$. **85.** $4m^2-12mn+9n^2$; $9a^4x^2-24a^3xy+16a^2y^2$; $0{,}04x^6-0{,}15x^3+\frac{9}{64}$. **86.** $\frac{1}{4}x^4-3\frac{1}{2}x^3+12\frac{1}{4}x^2$; $0{,}0625p^2-0{,}1pq+0{,}04q^2$. **87.** a^2-1; $4a^2-25$. **88.** $4x^2-9$; $1-a^4$. **89.** $(x^2+1)(x^2-1)=x^4-1$; $(4x^2+$

$+y^2)(4x^2-y^2)=16x^4-y^4$. **90.** $[(m+n)-p][(m+n)+p]=(m+n)^2-p^2$; $a^2-(b+c)^2=a^2-b^2-2bc-c^2$. **91.** a^3+3a^2+3a+1; a^3-3a^2+3a-1; $8x^3+36x^2+54x+27$; $125+225x+135x^2+27x^3$. **92.** $\frac{1}{8}m^3-\frac{3}{2}m^2+6m-8$; $\frac{27}{64}p^3+\frac{9}{16}p^2q+\frac{1}{4}pq^2+\frac{1}{27}q^3$; $125-225x+135x^2-27x^3$. **93.** $2a^2xy$; $-\frac{3}{5}x^2$. **94.** $-\frac{6}{5}a^3$; $3a^{m-1}b^2$. **95.** $5\frac{1}{3}a+8b-16a^2b^4$. **96.** $9x^2-6ax+a^2$. **97.** $1-2y+y^2-y^3$. **98.** $x-4$; $y+1$. **99.** $3x^2-2$. **100.** $3ax^3$. **101.** $x-a$. **102.** $2(a+x)$; $a(x+y)$; $2y(2y-3x)$. **103.** $2a(2x-y)$; $3xy(2x+3y)$. **104.** $3ab(4a-3ab-2b^2)$; $xy(y-7+4x)$. **105.** $(m+n)(m-n)$; $(a+1)(a-1)$; $(1+a)(1-a)$. **106.** $(x+2)(x-2)$; $(m+3)(m-3)$; $(2x+y)(2x-y)$. **107.** $\left(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}y^3\right)\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}y^3\right)$; $(0{,}1a^3+3)(0{,}1a^3-3)$; $3a(a^2+4b^4)\times$ $\times(a+2b^2)(a-2b^2)$. **108.** $(x-y+a)(x-y-a)$; $[3(a+2b)+1][3(a+2b)-1]$; $(a+b+c)(a-b-c)$. **109.** $(x+y+x-y)(x+y-x+y)=2x\cdot 2y=4xy$; $4(x-y)(3x+y)$. **110.** $(x-y)^2$; $(m+n)^2$. **111.** $(a+b)^2$; $(a-2b)^2$. **112.** $(x+4)^2$; $(x+1)^2$. **113.** $5a(a-2b)^2$. **114.** $(a+b)^2-c^2=(a+b+$ $+c)(a+b-c)$; $a^2-(b^2+2bc+c^2)=a^2-(b+c)^2=(a+b+c)(a-b-c)$. **115.** $(a+b)x+(a+b)y=(a+b)(x+y)$; $a(c-d)+b(d-c)=a(c-$ $-d)-b(c-d)=(c-d)(a-b)$. **116.** $a(a+b)-(a+b)=(a+b)(a-1)$; $xz+xy-3y-3z=x(y+z)-3(y+z)=(y+z)(x-3)$. **117.** $4mn-$ $-2nx+xy-2my=2n(2m-x)+y(x-2m)=2n(2m-x)-y(2m-x)=$ $=(2m-x)(2n-y)$; $(2a-3)(2a-3)(2a+3)$. **118.** $\frac{5x}{7y}$; $\frac{3ab}{10m}$; $\frac{8a^2}{11b}$; $\frac{25m}{59n}$. **119.** $\frac{9ab}{10x^2}$; $\frac{14a^3}{15b}$; $\frac{12x-1}{4a-4b}$. **120.** $\frac{17(a+b)}{34}=\frac{a+b}{2}$; $\frac{2(9a-7)}{6-a}$. **121.** $\frac{ax^2+bx+c}{ax^2+x}$; $\frac{x^2+ax-b}{x^2-x}$. **122.** $\frac{x-1}{x}$; $\frac{3a^2}{b-a}$; $\frac{a-1}{b-2}$. **123.** $\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}$; $\frac{m^2-1}{m-1}$. **124.** $-\frac{3a}{6}$; $-\frac{5x^2}{3}$; $-\frac{a-1}{b}$; $-\frac{a}{x-2}$; $-\frac{m^2-n^2}{m-n}$. **125.** $\frac{1}{x}$; $\frac{2}{3m}$; $\frac{2a}{3b}$; $\frac{3xy}{8}$. **126.** $\frac{3b}{2x}$; $\frac{ac}{4b}$; $\frac{16axy^3}{15}$. **127.** $\frac{b}{a+b}$; $\frac{3y}{x-y}$; $\frac{a+2}{a-2}$. **128.** $\frac{a+1}{a-1}$; $\frac{1}{x+3}$; $\frac{a}{a-1}$. **129.** $\frac{x-1}{2x(x+1)}$; $\frac{a+x}{3b-cx}$; $\frac{5a}{a-x}$. **130.** $(a+b)(a-b)$; $\frac{1}{y^2-1}$. **131.** $\frac{3b}{ab}$, $\frac{4a}{ab}$; $\frac{4x^2}{12xy}$, $\frac{3y^2}{12xy}$; $\frac{x^2}{4x}$, $\frac{16}{4x}$. **132.** $\frac{4bc}{2abc}$, $\frac{6ac}{2abc}$, $\frac{ab}{2abc}$; $\frac{105b^2x^2}{60a^2b^2x}$, $\frac{40a^2x}{60a^2b^2x}$, $\frac{48a^2b^4}{60a^2b^2x}$. **133.** $\frac{20mx^3y^2}{12a^2bcmx^2y}$, $\frac{9a^3b^2c}{12a^2bcmx^2y}$; $\frac{2a^2bx}{8a^3b^2}$, $\frac{y}{8a^3b^2}$. **134.** $\frac{15x^3}{40abx^3}$, $\frac{120abx^4}{40abx^3}$, $\frac{8a^2b}{40abx^3}$. **135.** $\frac{3(x+y)^2}{6(x^2-y^2)}$, $\frac{2(x-y)^2}{6(x^2-y^2)}$; $\frac{m-1}{m^2-1}$, $\frac{2}{m^2-1}$, $\frac{3(m+1)}{m^2-1}$. **136.** $\frac{2}{(x-1)^2}$, $\frac{3a(x-1)}{(x-1)^2}$; $\frac{2x-1}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{2(x-1)}{(x-1)(2x-1)}$, $\frac{1}{(x-1)(2x-1)}$. **137.** $\frac{3x}{84a^3b^2}$, $\frac{4aby}{84a^3b^2}$; $\frac{(a-b)(a^2-b^2)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{2ab(a+b)}{b(a^2-b^2)}$, $\frac{b}{b(a^2-b^2)}$. **138.** $\frac{6bc+3ac+2ab}{6abc}$; $\frac{6+5x}{3x^2}$; $\frac{2a-2x-5}{4}$. **139.** $\frac{x^2-5x+2}{x^2}$. **140.** $\frac{1+x}{2}$; $\frac{5x-6}{3}$; $\frac{5-2x}{3}$. **141.** $\frac{1}{1-4x^2}$. **142.** $\frac{2a^2b-ab-2b^2-a^2}{a(a+b)(a-b)}$. **143.** $\frac{m^2}{(m+n)(n-1)}$.

144. $-\frac{6b}{7x^2}$; $\frac{1}{5(1+a)x}$. **145.** $\frac{12p^2q^2x^2y^2}{n^4a^3}$; $2a(x-1)$. **146.** $\frac{a(a+2b)}{b^2}$; $\frac{9b^2c^2x^2}{16a^2z^2}$. **147.** $\frac{3a^3}{5mp}$; $15a^2x^2y$. **148.** $\frac{1}{5(a-b)}$; $\frac{x+y}{x-y}$. **149.** Равенства 3-е, 4-е и 6-е — уравнения, остальные — тождества. **150.** 17; 5; 5. **151.** 27; 9; 12. **152.** 3; 2; $\frac{13}{20}$. **153.** 2,7; 50. **154.** 9; -3; -4. **155.** 1; $5\frac{3}{7}$. **156.** $2\frac{6}{11}$. **157.** $7\frac{1}{13}$. **158.** 2. **159.** $-17\frac{25}{27}$. **160.** 1348 и 1200. **161.** 20, 30, 50. **162.** $2\frac{1}{2}$. **163.** 12,8 кг и 19,2 кг. **164.** 15 км и 18 км. **165.** 0. **166.** $\frac{c}{2(a-b)}$. **167.** $\frac{4-4a}{b-3}$. **168.** $\frac{2q}{b_1+b_2}$. **169.** $x=2$, $y=1$; $x=1$, $y=-2$; $x=-3$, $y=-3$. **170.** $x=-\frac{1}{2}$, $y=1$; $x=5$, $y=1$; $x=7$, $y=2$. **171.** $x=\frac{35}{13}$; $y=-\frac{23}{13}$. **172.** $x=\frac{c}{a+bm}$, $y=\frac{mc}{a+bm}$; $x=\frac{a+bm}{mn-1}$, $y=\frac{an+b}{mn-1}$. **173.** $a=3$, $b=-5$. **174.** 1 руб. 10 коп. и 40 коп. **175.** 40 и 25. **176.** 200; 11 км. **177.** $9\frac{1}{3}$ м, $9\frac{2}{3}$ м и $13\frac{1}{3}$ м, $1\frac{2}{3}$ м. **178.** $x=2$, $y=3$, $z=5$. **179.** $x=3\frac{1}{2}$, $y=2\frac{1}{4}$, $z=4$. **180.** $x=4$, $y=0$, $z=5$. **181.** $x=51$, $y=76$, $z=1$. **182.** $x=8$, $y=10$, $z=5$. **183.** $x=36$, $y=6$. **184.** $x=2$, $y=4$, $z=1$, $u=5$. **185.** $x=6$, $y=12$, $z=8$. **186.** Сложив 2-е уравнение с 3-м, получим: $2x=32$, $x=16$. Вычтя из 1-го уравнения 2-е, получим: $2z=11$, $z=5\frac{1}{2}$. Наконец, вычтя из 1-го уравнения 3-е, найдём: $2y=15\frac{1}{2}$, $y=7\frac{3}{4}$. **187.** $1\frac{7}{8}$ руб.; $\frac{1}{2}$ руб.; 5 руб. **188.** 133; 150; 76. **189.** ± 10; $\pm 0{,}1$; $\pm\frac{3}{4}$; $\pm a$. **190.** 5; a. **191.** $+3$; -3; $-0{,}1$. **192.** ± 2; мнимые числа. **193.** ± 6; $\pm 0{,}25$; $\pm 2ab$; $\pm 3axy^2$. **194.** $-3ab$; $\pm\frac{1}{2}ax$; $\sqrt[5]{a}$, $\sqrt[5]{b}$, $\sqrt[5]{c}$. **195.** $\pm a^2$; $\pm 2^2$; $\pm x^3$; $\pm(a+b)^2$. **196.** 2^2; $-a^2$; x^3; $(m+n)^2$. **197.** $\frac{2}{5}$; $-\frac{3}{10}$; $\frac{a^2}{b}$; $\frac{\sqrt[3]{x}}{y}$; $\pm\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$. **198.** $\pm 5a^3bc^2$; $\pm 0{,}6x^2y$; $\pm\frac{1}{2}(b+c)^3x^2$. **199.** 17; 65; 247; 763. **200.** 368; 978; 7563. **201.** 8276; 20 548. **202.** 534 762. **203.** Последняя цифра квадрата целого числа должна быть одной из тех цифр, на которые оканчиваются квадраты первых 10 чисел: 0, 1, 2, 3, …, 9. Но ни один из этих квадратов не оканчивается ни на 2, ни на 3, ни на 7, ни на 8. **204.** 3; 3,6; 3,606. **205.** 10,05; 0,89. **206.** 0,09; 4,37. **207.** 19; 18,9; 18,89. **208.** 0,77; 0,65; 0,79; 0,65; 0,17. **209.** $\frac{1}{5}\sqrt{15}=\frac{387}{500}$ $\left(\text{с точн. до } \frac{1}{500}\right)$; $\frac{1}{7}\sqrt{21}=\frac{458}{700}$ $\left(\text{с точн. до } \frac{1}{700}\right)$; $\frac{1}{11}\sqrt{77}=\frac{877}{1100}$ $\left(\text{с точн. до } \frac{1}{1100}\right)$; $\frac{1}{12}\sqrt{60}=\frac{774}{1200}$ $\left(\text{с точн. до } \frac{1}{1200}\right)$; $\frac{1}{250}\sqrt{1750}=\frac{4183}{25000}$ $\left(\text{с точн. до } \frac{1}{25000}\right)$. **210.** 0,5; 2,4; 1,52; 0,05. **211.** ± 7; ± 3; $\pm\sqrt{-25}$. **212.** ± 9; ± 9. **213.** 0 и $3\frac{1}{2}$; 0 и $-2\frac{1}{3}$; 0 и 3,75. **214.** 0 и 1; 0 и 16; 0; 0. **215.** 2 и 5; 0 и -4; 2 и -3. **216.** 12 и 4. **217.** 3 и -9. **218.** 8 и $-2\frac{1}{4}$. **219.** 2 и $-\frac{1}{4}$. **220.** 44 и -2. **221.** 1 и -5. **222.** 6 и -3. **223.** 4. **224.** $d(2\pm\sqrt{3})$. **225.** $t_1=6$; $t_2=1$. **226.** $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$.

227. $2\frac{1}{2}$ и -1. **228.** $4\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{2}$. **229.** $\approx 1{,}5694$ и $\approx 0{,}0306$. **230.** $\frac{5}{13}$ и $-\frac{11}{5}$. **231.** 7 и 0. **232.** 14 и -10. **233.** a и $\frac{1}{a}$. **234.** 14, 16, 18 и -18, -16, -14. **235.** 6 и 8. **236.** 3, 4, 5. **237.** 12. **238.** 15 км/ч. **239.** 12. **240.** Каждый ученик класса, состоящего из 40 человек, получил по 6 листов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

КИСЕЛЁВ Андрей Петрович

АЛГЕБРА

Часть I

Редактор *В.С. Аролович*
Оригинал-макет: *Д.А. Воробьев*
Оформление переплета: *А.Ю. Алехина*

Подписано в печать 25.01.06. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 9,5. Уч.-изд. л. 10,4. Тираж 1500 экз.
Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, fmlsale@maik.ru;
http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ОАО «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0676-7

9 785922 106764

Школьные учебники СССР