Е. В. Смыкалова

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ по МАТЕМАТИКЕ

для учащихся 6 класса

Издание седьмое

Санкт-Петербург
СМИО Пресс
2018

С 21

Рецензенты:
Т. А. Торубарова, к. п. н., доцент РГПУ им. А. И. Герцена
О. В. Симонов, методист СПб АППО

Смыкалова Е. В.
С21 ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ по МАТЕМАТИКЕ для учащихся 6 класса. СПб: СМИО Пресс, 2018. — 48 с.

Учебное пособие является дополнением к учебнику математики для учащихся 6 класса. Оно содержит внепрограммный материал и задачи по следующим разделам: 1. Четность. 2. Делимость. 3. Остатки. 4. Логические задачи. 5. Игровые задачи. Весь материал излагается в доступной и занимательной форме. Пособие можно использовать в классной или внеклассной работе, на занятиях математического кружка, для самостоятельного изучения математики.

ISBN 978-5-7704-0073-1

ООО «Издательство «СМИО Пресс», включено в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, которые допускаются к использованию в образовательном процессе в имеющих государственную аккредитацию и реализующих образовательные программы общего образования образовательных учреждениях. Приказ Минобрнауки РФ № 699, от 9 июня 2016 г., зарегистрирован в Минюсте 4 июля 2016 г., № 42729.

Редакторы
к. ф.-м. н. *Золина Н. К.*, к. ф.-м. н. *Черкасова Т. Х.*
Художественный редактор *Соловьева Н. Д.*
Директор издательства *Морозова И. С.*

Издательство «СМИО Пресс»
Санкт-Петербург, ул. Седова, д. 97, к. 3, лит. А.
Тел/факс (812) 976-94-76,
тел. (911) 290-90-26 (МТС), (962) 722-55-46 (БиЛайн)
e-mail: smiopress@mail.ru, http://www.smio.ru

Подписано к печати 10 июля 2017 г. Формат 84×108 $^1/_{32}$.
Бумага офсетная. Гарнитура школьная. Усл.-печ. л. 0,72.
Печать офсетная. Тираж 1000 экз. Заказ № .

Отпечатано в типографии L-print
197183, г. Санкт-Петербург, ул. Сабировская, д. 37.

Предисловие

Данное пособие является дополнением к учебнику математики. Оно содержит внепрограммный теоретический материал и задачи по следующим темам:

1. Четность.
2. Делимость.
3. Остатки.
4. Логические задачи.
5. Игровые задачи.

Дополнительные главы можно использовать на уроках, на занятиях математического кружка, а также для индивидуальной работы с учащимися. Дополнительные главы помогут учителю математики в реализации основных принципов развивающего обучения:

- обучение на высоком уровне трудности;
- ведущая роль теоретических знаний;
- продвижение вперед быстрым темпом;
- сознательное участие школьников в учебном процессе.

Все задачи пособия были апробированы на уроках математики в 5–6 классах гимназии № 52 Приморского района Санкт-Петербурга в 1997–2005 гг. Ко всем задачам есть ответы, страницы с которыми могут быть отрезаны по усмотрению учителя.

Автор выражает искреннюю признательность доценту кафедры методики обучения математике РГПУ им. А. И. Герцена Т. А. Торубаровой за ряд ценных замечаний и дополнений, кандидату физ.-мат. наук, доц. БГТУ Т. Х. Черкасовой, а также С. А. Осмехину и Ю. П. Смыкалову за помощь в подготовке рукописи.

Глава I
ЧЕТНОСТЬ

Четное число — это целое число, делящееся без остатка на 2.

Всякое четное число можно представить в виде $2n$, где n — целое число.

Нечетное число можно представить в виде $2n + 1$.

Мы будем рассматривать только натуральные числа.

• Четность суммы

1. ***Сумма любого числа четных слагаемых — четна.***

Примеры: $2 + 4 = 6$ (два четных слагаемых); $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 30$ (пять четных слагаемых).

2. ***Если число нечетных слагаемых четно, то и сумма четна.***

Примеры: $1 + 3 = 4$ (два нечетных слагаемых); $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$ (четыре нечетных слагаемых).

3. ***Если число нечетных слагаемых нечетно, то и сумма нечетна.***

Примеры: $1 + 2 = 3$ (одно нечетное слагаемое); $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ (три нечетных слагаемых).

• Четность произведения

1. ***Если хотя бы один из множителей — четное число, то и произведение четно.***

Примеры: $2 \times 3 = 6$ (один из множителей — четное число 2); $3 \times 4 \times 5 = 60$ (один из множителей — четное число 4).

2. ***Если все множители нечетны, то и произведение нечетно.***

Примеры: $1 \times 3 = 3$; $1 \times 3 \times 5 \times 7 = 105$ (все множители — нечетные числа).

Задачи

1. Четно или нечетно число $1 + 2 + 3 + ... + 2000$?
2. Докажите, что в равенстве
$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + ... + 99 \times 100 = 20002001$
допущена ошибка.
3. Можно ли квадрат 25×25 разрезать на прямоугольники 1×2?
4. Какое из чисел всегда будет нечетным, если x — нечетное число: $3(x + 1)$; $x \times x + 7$; $x \times x$?
5. В 16-этажном доме лифт с кнопками $+4$ и -2. Докажите, что этим лифтом неудобно пользоваться.
6. В наборе было 23 гирьки массой 1 г, 2 г, 3 г,.. 23 г. Можно ли их разложить на две равные по массе кучки, если гирьку в 21 г потеряли?
7. Может ли вращаться система из 7 шестеренок, если 1-я сцеплена со 2-й, 2-я — с 3-й и т. д., а 7-я сцеплена с 1-й?
8. Можно ли разменять 100 рублей при помощи 25 монет достоинством 1 и 5 рублей?
9. Докажите, что в равенстве
$1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? 6 ? 7 ? 8 ? 9 = 20$, где «?» — это знаки плюс или минус, допущена ошибка.
10. Кузнечик прыгает по прямой: первый раз — на 1 см, второй раз — на 2 см и т. д. Может ли он через 25 прыжков вернуться на старое место?
11. Улитка ползет по плоскости с постоянной скоростью, каждые 15 минут поворачивая под прямым углом. Докажите, что вернуться в исходную точку она сможет лишь через целое число часов.
12. Можно ли соединить 13 городов дорогами так, чтобы из каждого города выходило ровно 5 дорог?

13. Можно ли из 37 веревочек сплести сетку так, чтобы каждая веревочка была связана ровно с тремя другими?
14. Можно ли организовать шахматный турнир с 15 шахматистами так, чтобы каждый сыграл по 15 партий?
15. Из шахматной доски вырезали две клетки — a1 и h8. Можно ли оставшуюся часть доски разрезать на прямоугольники из двух клеток?
16. Конь вышел с клетки a1 и через несколько ходов вернулся обратно. Докажите, что он сделал четное число ходов.
17. Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки a1, закончив на клетке h8 и на каждой клетке доски побывав ровно один раз?
18. В школе 1688 учащихся, причем мальчиков на 373 больше, чем девочек. Докажите, что такого быть не может.
19. Докажите, что:

    1) если сумма двух чисел — четное число, то их разность – тоже четное число;

    2) если сумма двух чисел — нечетное число, то их разность – тоже нечетное число.
20. Даны два натуральных числа a и b. Докажите, что:

    1) если сложить их сумму с их разностью, то получим четное число;

    2) если из их суммы вычесть их разность, то получим четное число.
21. Докажите, что:

    1) произведение двух последовательных натуральных чисел делится на 2;

    2) произведение трех последовательных натуральных чисел делится на 6;

3) произведение двух последовательных четных чисел делится на 8.

22. Произведение двух натуральных чисел умножили на их сумму. Могло ли получиться число 20002001?

23. Докажите, что $n \times n + 3n$ четно при любом натуральном n.

24. Докажите, что дробь $\frac{k(k-3)}{2}$ есть целое число при любом натуральном k.

25. Может ли произведение суммы трех последовательных натуральных чисел на сумму трех следующих за ними натуральных чисел быть равным 33333?

26. В ряд выписаны числа от 1 до 2000. Можно ли, меняя местами числа через одно, переставить их в обратном порядке?

27. На доске написаны числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

28. На прямой отметили несколько точек. Затем между каждыми двумя соседними точками поставили еще по точке, и так несколько раз. Докажите, что после каждой такой операции общее количество точек будет нечетным.

29. Можно ли из 2000 квадратиков со стороной 1 см сложить фигуру с периметром 2001 см?

30. Можно ли числа от 1 до 13 разбить на несколько групп так, чтобы одно из чисел в каждой группе равнялось сумме всех остальных чисел в этой группе?

Глава II
ДЕЛИМОСТЬ

Делимость — это способность одного числа делиться на другое.

Если рассматривать только натуральные числа, то говорят, что одно число делится на другое, если частное от деления первого числа (делимого) на другое (делитель) будет также натуральным числом.

• Делимость суммы

1. ***Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число.***

Пример: слагаемые 5, 10 и 15 делятся на 5; сумма $5 + 10 + 15 = 30$ тоже делится на 5.

2. ***Если одно из слагаемых не делится на некоторое число, а остальные делятся, то сумма на это число не делится.***

Пример: слагаемое 10 делится на 5, а слагаемое 16 не делится на 5; сумма $10 + 16 = 26$ не делится на 5.

• Делимость произведения

Если один из множителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число.

Пример: в произведении $4 \times 5 \times 6$ один из множителей — 6 делится на 3, значит, и произведение делится на 3; $4 \times 5 \times 6 = 120$; 120 делится на 3.

• Признаки делимости

Чтобы узнать, делится ли одно число на другое, не всегда нужно выполнять деление, иногда можно воспользоваться признаком делимости.

Рассмотрим некоторые из них.

Признак делимости на 2^m ($m = 1, 2, 3, ...$)

Число n делится на 2^m, если на 2^m делится m-значное число, которое образуют m последних цифр числа n.

Примеры:

1) число 1524 делится на 4, т. к. число 24 делится на 4;
2) число 7160 делится на 8, т. к. число 160 делится на 8;
3) число 160030 не делится на 16, т. к. число 30 не делится на 16.

Признак делимости на 5^m ($m = 1, 2, 3, ...$)

Число n делится на 5^m, если на 5^m делится m-значное число, которое образуют m последних цифр числа n.

Примеры:

1) число 775 делится на 25, т. к. число 75 делится на 25;
2) число 83250 делится на 125, т. к. число 250 делится на 125;
3) число 1250250 не делится на 625, т. к. число 250 не делится на 625.

Признак Паскаля

Этот признак делимости сформулировал французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623—1662).

Если в десятичном разложении натурального числа n все степени числа десять заменить на остатки, получающиеся при делении этих степеней на некоторое фиксированное число m, то в результате такой замены образуется число p, которое дает точно такой же остаток при делении на m, что и число n.

Пример:

число $n = 546$; $n = 5 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 + 6$;
$m = 7$; $100 : 7 = 14$ (ост. 2); $10 : 7 = 1$ (ост. 3);
число $p = 5 \times 2 + 4 \times 3 + 6 = 28$; число $p = 28$ делится на 7, значит, и число $n = 546$ делится на 7.

Признак делимости на 11

Число n делится на 11, если сумма его цифр, стоящих на нечетных местах, отличается от суммы цифр, стоящих на четных местах, на величину, кратную 11. Пример: число 2959 делится на 11, потому что разность $(9 + 9) - (2 + 5) = 11$ делится на 11.

Признак делимости на 13

Число n делится на 13, когда на 13 делится число k, полученное из него зачеркиванием последней цифры и прибавлением к полученному числу учетверенного значения этой цифры.

Пример: число 2002 делится на 13, т. к. в результате зачеркивания и прибавления получаем ряд чисел 2002, 208, 52, 13.

2002;

$200 + 4 \times 2 = 208$;

$20 + 4 \times 8 = 52$;

$5 + 4 \times 2 = 13$.

Число 13 делится на 13, значит, и число 2002 тоже делится на 13.

Признак делимости на 7, 11 и 13

Воспользуемся тем, что $1001 = 7 \times 11 \times 13$. Все числа, делящиеся на 1001, делятся и на 7, и на 11, и на 13.

Чтобы узнать, делится ли число n на m (7, 11, 13), надо разбить его десятичную запись справа налево на группы по три цифры в каждой (самая левая группа может содержать две или одну цифру) и взять группы с нечетными номерами со знаком минус, а с четными номерами со знаком плюс. Если значение получившегося выражения делится на m, то и число n делится на m.

Примеры:

1) число 16002 делится на 7, т. к. $16 - 2 = 14$ делится на 7;

2) число 45012 делится на 11, т. к. $45 - 12 = 33$ делится на 11;
3) число 350324 делится на 13, т. к. $350 - 324 = 26$ делится на 13;
4) число 1530514 не делится ни на 7, ни на 11, ни на 13, т. к. число $530 - 1 - 514 = 15$ не делится на эти числа.

• НОД и НОК

Наибольшим общим делителем двух чисел — НОД (a; b) — называется наибольший из общих делителей этих чисел.

Наименьшим общим кратным двух чисел — НОК (a; b) — называется наименьшее число, делящееся на каждое из них.

НОД $(a; b) \times$ НОК $(a; b) = a \times b$.

Пример: даны числа 10 и 12; НОД (10, 12) = 2; НОК (10, 12) = 60; произведение чисел $10 \times 12 = 120$; НОД (10, 12) $\times$ НОК (10, 12) $= 2 \times 60 = 120$.

• Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида — это очень простой и эффективный метод нахождения НОД.

Алгоритм Евклида с вычитанием

Пусть даны два числа. Большее из них заменим разностью этих чисел. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не останется одно ненулевое число. Это число и будет НОД исходных чисел.

Пример: НОД (420, 150) = НОД (270, 150) = = НОД (120, 150) = НОД (120, 30) = НОД (90, 30) = = НОД (60, 30) = НОД (30, 30) = 30.

Алгоритм Евклида с делением

Пусть даны два числа. Большее из них заменим остатком от деления на меньшее. Этот процесс повторяется до тех пор, пока не останется одно ненулевое число. Это число и будет НОД исходных чисел.

Пример: даны числа 420 и 150;

420 : 150 = 2 (ост. 120);

150 : 120 = 1 (ост. 30);

120 : 30 = 4 (ост. 0);

НОД (420, 150) = 30.

Задачи

31. Докажите, что произведение любых трех последовательных натуральных чисел делится на 6.

32. Докажите, что произведение любых пяти последовательных чисел делится на 120.

33. Число $a + 1$ делится на 3. Докажите, что $4 + 7a$ делится на 3.

34. Может ли число, записываемое при помощи 100 нулей, 100 единиц и 100 двоек, быть точным квадратом?

35. Число $n \times (n + 2)$ оканчивается цифрой 4. Назовите предпоследнюю цифру этого числа.

36. Доказать, что сумма двух нечетных последовательных чисел делится на 4.

37. Докажите, что слово ХАХАХА делится на 7, если в нем буквами Х и А обозначены любые разные цифры.

38. Поле разделили на 9 участков, некоторые из полученных участков снова разделили на 9 участков, некоторые из полученных участков снова разделили на 9 и т. д. Может ли в результате получиться 2000 или 2001 участков?

39. Восстановите цифру b в числе $1bb2$, которое делится на 9. Не производя деления, установите, делится ли полученное число на 12.

40. На нескольких примерах проверьте, что если из трехзначного числа вычесть число, записанное теми же цифрами, но взятыми в обратном порядке, то средняя цифра разности будет 9, а сумма крайних цифр будет равна 9.

41. Доказать, что разность трехзначных чисел, из которых одно написано теми же цифрами, что и другое, но в обратном порядке, делится на 9 и на 11.

42. Докажите, что четырехзначное число, у которого цифра тысяч равна цифре сотен, а цифра десятков — цифре единиц, делится на 11.

43. Найдите такое наименьшее натуральное n, для которого $n!$ делится на 990.

44. Из трех различных цифр, отличных от нуля, составили всевозможные двузначные числа так, чтобы цифры в записи числа не повторялись. Докажите, что сумма всех полученных чисел делится на 22 независимо от исходного выбора цифр.

45. Не выполняя деления, назовите числа, делящиеся на 11:
246 915 658, 371 846 205, 865 914 324 015.

46. В числе 4758967? напишите последнюю цифру такую, чтобы число делилось на 11.

47. Числа $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

48. Найдите наименьшее число, которое записано только единицами и делится на 33.

49. Делятся ли числа 5742, 4356, 8712 и 1584 на 99? Найдите закономерность в записи этих чисел. Проверьте вывод на других примерах.

50. Не выполняя деления, назовите число, делящееся и на 7, и на 13: 659 865 024, 251 311 805.

51. Поставьте вместо «?» такие цифры, чтобы число 30?0?03 делилось на 13.

52. Припишите к числу 523 справа три цифры так, чтобы полученное шестизначное число делилось на 7, 8 и 9.

53. Даны два четырехзначных числа, у одного из которых вторая и третья цифры — нули, и другое — написанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что разность делится на 27 и на 37.

54. Докажите, что только одно число, состоящее из четного числа одинаковых цифр, простое. Найдите это число.

55. Можно ли составить магический квадрат из первых 36 простых чисел?

56. Может ли произведение цифр натурального числа равняться 2002?

57. Проверьте, все ли четные числа от 2 до 50 являются разностями двух простых чисел.

58. Проверьте, каждое ли четное число от 2 до 50 является либо суммой двух простых чисел, либо суммой простого числа и единицы.

59. Проверьте, все ли натуральные числа от 6 до 50 можно представить в виде суммы простого и составного числа.

60. Если 4373 и 826 разделить на одно и то же число, то получим соответственно остатки 8 и 7. Чему равен делитель?

61. Докажите, что если в трехзначном числе две последние цифры одинаковы и сумма его цифр делится на 7, то в разложении этого числа на простые множители имеется число 7.

62. Докажите, что существует бесконечно много простых чисел.

63. Доказать, что два последовательных нечетных числа — числа взаимно простые.

64. Разность двух нечетных чисел равна 8. Найдите НОД этих чисел.

65. Делится ли разность двух неравных чисел на НОД этих чисел?

66. Найдите два числа, зная их сумму 168 и общий делитель 24.

67. Какое наибольшее значение может принимать НОД девятнадцати натуральных чисел, если их сумма равна 2000?

68. Сумма двух чисел равна 221, а их НОК — 612. Найдите эти числа.

69. Проверьте равенство НОД $(a;\ b) \times$ НОК $(a;\ b) = \mathrm{a} \times b$ для чисел $a = 21120$ и $b = 30720$.

70. Одно число в 10 раз больше другого. Во сколько раз НОК этих чисел больше их НОД?

71. Является ли целым числом частное $\dfrac{\text{НОК}\,(a, b, c)}{\text{НОД}\,(a, b, c)}$?

72. НОК двух чисел, не делящихся друг на друга, равно 630, а их НОД равен 18. Найдите эти числа.

73. Найдите НОД (451, 287), используя алгоритм Евклида.

74. Найдите НОК (469459; 519203), используя алгоритм Евклида.

75. Найдите НОД и НОК чисел 42628 и 33124, используя алгоритм Евклида.

76. Приведите к одному знаменателю дроби $\frac{111}{21120}$ и $\frac{1237}{30720}$.

77. Найдите НОД чисел:
1) $2a$ и $2a + 2$;
2) $3a$ и $6a + 3$;
3) $2a$ и $4a + 2$;
4) $30a + 25$ и $20a + 15$.
a — натуральное число.

78. Найдите НОД чисел $2n + 3$ и $n + 7$.

79. Докажите, что при любом натуральном n дробь $\frac{14n+3}{21n+4}$ несократима.

80. Найдите все целые x, при которых дробь $\frac{5x+6}{8x+7}$ сократима.

Глава III

ОСТАТКИ

В общем случае при делении двух натуральных чисел получается остаток. Например:

$203 : 4 = 50$ (ост. 3);

$203 = 4 \times 50 + 3$.

Делимое = Делитель × Неполное частное + Остаток

Остаток меньше делителя!

При делении натурального числа n на натуральное число m возможны различные остатки: $0, 1, 2, ..., m - 1$.

Если два натуральных числа a и b имеют одинаковые остатки при делении на m, то числа a и b называются ***сравнимыми по модулю m.***

$$\boldsymbol{a \equiv b \pmod{m}}.$$

При делении числа 0 на любое натуральное число получается 0 и в остатке 0.

Примеры:

1) $6 \equiv 11 \pmod{5}$;
2) $3 \equiv 23 \pmod{10}$;
3) $7 \equiv 0 \pmod{7}$;
4) $15 \equiv 0 \pmod{5}$.

• Свойства остатков

1) $a \equiv b \pmod{m}$ тогда и только тогда, когда разность $a - b$ делится на m;
2) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то
$$a + c \equiv (b + d) \pmod{m};$$
3) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то
$$a - c \equiv (b - d) \pmod{m};$$
4) если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то
$$a \times c \equiv (b \times d) \pmod{m}.$$

Примеры:

1) чтобы убедиться в сравнимости чисел 705 и 565 по модулю 7, достаточно рассмотреть их разность $705 - 565 = 140$. Разность делится на 7, значит, числа 705 и 565 имеют одинаковые остатки при делении на 7, т. е. $705 \equiv 565 \pmod 7$;

2) чтобы найти остаток от деления на 3 суммы $214 + 452$, необходимо найти остатки от деления на 3 чисел 214 и 452. Они равны 1 и 2 соответственно. Сумма $214 + 452$ при делении на 3 дает такой же остаток, как и $1 + 2 = 3$, т. е. делится нацело;

3) чтобы найти остаток от деления на 4 разности $327 - 142$, необходимо найти остатки от деления на 4 чисел 327 и 142. Они равны 3 и 2 соответственно. Разность $327 - 142$ при делении на 4 дает такой же остаток, как и $3 - 2 = 1$, т. е. остаток равен 1;

4) чтобы найти остаток от деления на 6 произведения 661×305, необходимо найти остатки от деления на 6 чисел 661 и 305. Они равны 1 и 5 соответственно. Произведение 661×305 при делении на 6 дает такой же остаток, как и $1 \times 5 = 5$, т. е. остаток равен 5.

Задачи

81. Найдите остаток от деления суммы $123456 + 1234567$ на 3.

82. Найдите остаток от деления суммы $1234567 + 8910$ на 9.

83. Найдите остаток от деления разности $1234567 - 12345$ на 5.

84. Найдите остаток от деления разности $12345678 - 1234567$ на 10.

85. Найдите остаток от деления произведения 123456×1234567 на 4.

86. Найдите остаток от деления произведения 123456×1234567 на 5.

87. Какой остаток при делении на 7 дает произведение нескольких 2?

88. Какой остаток при делении на 555 дает произведение чисел от 1 до 115?

89. Какой остаток при делении на 42 дает сумма $10! + 49$.

90. Найдите последнюю цифру числа $1 \times 1 + 2 \times 2 + \ldots + 99 \times 99$.

91. Докажите, что из любых 11 чисел всегда можно выбрать два таких числа, разность которых кратна 10.

92. Четное число a при делении на 3 дает остаток 1. Чему равен остаток от деления числа a на 6?

93. Нечетное число a кратно 3. Чему равен остаток от деления числа a на 6?

94. Число a при делении на 12 дает остаток 7. Чему равен остаток от деления числа a на 6?

95. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

96. Число a — четное. Может ли остаток от деления числа a на 6 быть равным 1 или 3?

97. Существует ли такое целое число, которое при делении на 12 дает остаток 11, а при делении на 18 — остаток 1?

98. Докажите, что число $n \times n + 1$ не делится на 3 ни при каком натуральном n.

99. Докажите, что число $n \times n \times n + 2n$ делится на 3 для любого натурального n.

100. Известно, что число k при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 — остаток 1. Найдите остаток от деления числа k на 15.

101. Известно, что число n при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 дает в остатке 2. Найдите остаток от деления числа n на 15.

102. Докажите, что если даны три каких-нибудь числа, из которых ни одно не делится на 3, то или сумма всех этих чисел, или сумма двух каких-нибудь из них должна делиться на 3.

103. Докажите, что два натуральных числа a и b обладают следующим свойством: либо a, либо b, либо $a + b$, либо $a - b$ делится на 3.

104. Докажите, что если два числа при делении на третье число дают одинаковые остатки, то их разность делится на это третье число.

105. Четные числа a и b, не кратные 6, при делении на 6 дают разные остатки. Докажите, что сумма $a + b$ делится на 6.

106. Напишите общую формулу чисел, которые как при делении на 3, так и при делении на 4 дают в остатке 1.

107. Напишите общую формулу чисел, которые как при делении на 6, так и при делении на 8 дают в остатке 5.

108. Напишите общую формулу чисел, которые при делении на 3 дают остаток 1, а при делении на 5 дают остаток 3.

109. Найдите число, если известно, что при делении его на 113 и 118 получено одно частное, а остаток равен соответственно 60 и 0.

110. Числа 2146, 1991 и 1805 дают равные остатки при делении на натуральное число n, большее 1. Найдите n.

Глава IV

ЛОГИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

• Высказывания

Высказывание — это всякое утверждение, о котором имеет смысл говорить, что оно истинно или ложно.

Примеры высказываний:

1) число 13 — простое (истинно);
2) слон — насекомое (ложно).

Утверждения не являются высказываниями, если судить об их истинности или ложности невозможно. Так, например, не являются высказываниями:

1) x меньше 5;
2) учиться в 6 классе нелегко.

Не являются высказываниями и предложения, содержащие определения, например:

1) процент — одна сотая часть числа;
2) угол — геометрическая фигура, образованная двумя лучами, выходящими из одной точки.

Не являются высказываниями призывы, например:

1) Все на субботник!
2) Летайте самолетами Аэрофлота!

Не являются высказываниями вопросы, например:

1) Был звонок на урок?
2) Кто решил задачу?

Из данных высказываний при помощи так называемых логических связок, к которым относятся частица «не», союзы «или», «и», слова «если... то...», можно образовывать новые высказывания.

• Отрицание

Отрицание — это логическая операция, которая в обыденной речи соответствует частице «не».

Например, если мы хотим сказать, что высказывание «$\frac{1}{2}$ — целое число» неверно, мы говорим: «$\frac{1}{2}$ — не целое число».

Каждому высказыванию можно сопоставить отрицание высказывания.

Например: «3 меньше 5» — «неверно, что 3 меньше 5».

Если исходное высказывание истинно, то его отрицание ложно, и наоборот.

Например, для высказывания «число 8 простое» отрицание можно построить так:

«число 8 не простое»;

«неверно, что число 8 простое»;

«число 8 составное».

В данном случае исходное высказывание ложно, поэтому его отрицание истинно.

- **Сумма высказываний**

Сумма высказываний (дизъюнкция) — это новое высказывание, которое образуется из данных высказываний A и B при помощи союза ***«или»***.

Например, из высказываний «данный треугольник прямоугольный», «данный треугольник равнобедренный» получается новое высказывание «данный треугольник прямоугольный ***или*** равнобедренный».

Сумма высказываний A и B считается истинным высказыванием тогда и только тогда, когда истинно ***хотя бы одно*** из данных высказываний.

Например, высказывания A и B таковы: «5 больше 3»; «2 больше 4». Тогда сумма высказываний ***«5 больше 3» или «2 больше 4»*** истинна, т. к. истинно высказывание A — «5 больше 3».

Высказывание «или A, или B» будет истинным, когда только одна часть — истинна, а вторая — ложна.

Например, высказывание «или 3 больше 2, или 3 больше 1» будет ложно, т. к. обе части — истинны.

• Произведение высказываний

Произведение высказываний (конъюнкция) — это новое высказывание, которое образуется из данных высказываний А и В при помощи союза ***«и»***.

Например, из высказываний «число 2 простое», «число 2 четное» получается новое высказывание «число 2 простое ***и*** четное».

Произведение высказываний АВ считается истинным высказыванием тогда и только тогда, когда ***оба*** высказывания А и В истинны.

Например, высказывания А и В таковы: «число 3 простое», «число 3 нечетное». Тогда произведение высказываний ***«число 3 простое и нечетное»*** истинно, т. к. истинны оба высказывания и А, и В.

• Импликация высказываний

Импликация высказываний — это новое высказывание, образованное из данных высказываний А и В при помощи слов ***«если ... то ...»***.

Например, «если данное число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6».

Высказывание А называют ***условием***, а высказывание В — ***заключением***.

В рассмотренном примере условием является высказывание «данное число делится на 2 и на 3», заключением — «число делится на 6».

Импликация считается ***ложным*** высказыванием только в том случае, когда ***условие истинно, а заключение ложно***.

Примеры истинной импликации:

1) если число 12 делится на 2 и на 3, то оно делится на 6;

2) если число 14 делится на 2 и на 3, то оно делится на 6;

3) если число 25 делится на 7, то оно делится на 5.

Пример ложной импликации:
если число 8 делится на 2, то оно делится на 5. Здесь условие истинно, а заключение ложно.

Подчеркнем еще раз, что если А ложно, то, каково бы ни было В, высказывание «если А, то В» считается истинным. Из неверного утверждения следует все что угодно.

Например: если 4 простое число, то в тихом омуте черти водятся.

Это истинное высказывание!

Задачи

111. Коля произнес истинное утверждение. Миша его повторил дословно, и оно стало ложным. Что мог сказать Коля?

112. Илья всегда говорит правду, но когда ему задали дважды один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Какой это мог быть вопрос?

113. Федя всегда говорит правду, а Вадим всегда лжет. Какой вопрос надо было бы им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы?

114. Из четырех учеников А, Б, В и Г один отличник. Кто отличник, если:
    1) в тройке А, Б, В есть отличник;
    2) в тройке А, В, Г есть отличник;
    3) А не отличник?

115. Определите, кто из мальчиков А, Б и В играет в шахматы, если:
    1) из А и Б один играет в шахматы, другой не играет;
    2) А и В оба играют в шахматы или оба не играют;
    3) если играет А, то играет и Б.

116. В трех коробках лежат шары: в одной — два белых, в другой — два черных, в третьей — белый и черный. На коробках наклеены этикетки ББ, ЧЧ и БЧ так, что содержимое каждой из коробок не соответствует этикетке. Как, вынув один шар, узнать, в какой коробке что лежит?

117. Ученик нашел тетрадь. В ней было написано десять следующих утверждений.

— В этой тетради ровно одно неверное утверждение.

— В этой тетради ровно два неверных утверждения.

— В этой тетради ровно три неверных утверждения.

...

— В этой тетради ровно десять неверных утверждений.

Какое из этих утверждений верное?

118. Среди четырех утверждений три верных, а одно неверное:

1) число x делится на 2;
2) число x делится на 4;
3) число x делится на 12;
4) число x делится на 24.

Какое утверждение неверное?

119. Предположим, что справедливы следующие утверждения:

1) среди людей, имеющих телевизоры, есть такие, которые не являются малярами;
2) люди, каждый день купающиеся в бассейне, но не являющиеся малярами, не имеют телевизоров.

Следует ли из этого, что справедливо утверждение:

3) не все владельцы телевизоров каждый день купаются в бассейне?

120. Каково наибольшее число утверждений из приводимых ниже, которые одновременно могут быть истинными:
1) Джо ловкач;
2) Джо не везет;
3) Джо везет, но он не ловкач;
4) если Джо ловкач, то ему не везет;
5) Джо является ловкачом тогда и только тогда, если ему везет;
6) либо Джо ловкач, либо ему везет, но не одновременно то и другое?

121. Для какого натурального числа x среди следующих неравенств три верны и два не верны:
1) $2x$ больше 70;
2) x меньше 100;
3) $3x$ больше 25;
4) x больше 10;
5) x больше 5?

122. Найдите все натуральные числа от 980 до 1000, для которых истинно одно и только одно из следующих утверждений:
1) число делится на 2;
2) число делится на 3;
3) число делится на 6;
4) число делится на 2, но не делится на 3;
5) число делится на 3, но не делится на 2;
6) число не делится ни на 2, ни на 3;
7) число делится на 5.

123. В забеге участвовали три бегуна: Иванов, Петров и Сидоров. Перед забегом четыре болельщика дали такие прогнозы:
1) победит Иванов;
2) Сидоров обгонит Петрова;
3) Петров финиширует следующим после Иванова;
4) Сидоров не победит.

После забега оказалось, что среди этих четырех прогнозов было четное число верных. В каком порядке финишировали бегуны?

124. В забеге участвовали Коля, Саша, Олег и Антон. После окончания соревнований каждого из них спросили, какое он место занял. Ребята дали следующие ответы:
Коля: «Я не был ни первым, ни последним».
Саша: «Я не был первым».
Олег: «Я был первым».
Антон: «Я был последним».
Оказалось, что трое сказали правду, а один солгал. Кто победил в этом забеге?

125. В забеге участвовали Костя, Илья, Дима и Миша. После окончания соревнований каждого из них спросили, какое он место занял. Ребята дали следующие ответы:
Костя: «Я был последним».
Миша: «Я не был последним».
Илья: «Я был первым».
Дима: «Я не был ни первым, ни последним».
Оказалось, что трое сказали правду, а один солгал. Кто победил в этом забеге?

126. Трое учеников решили две задачи, после чего каждый из них сделал два заявления об ответах, которые у них получились в этих задачах:
Первый: «В первой задаче ответ больше 18. Во второй — не больше 14».
Второй: «В первой задаче получается меньше 20, а во второй — 14».
Третий: «В первой ответ — 15, а во второй ответ больше 14».
Известно, что один из них оба раза ошибся, а два других оба раза были правы. Какие ответы в этих задачах, если известно, что это — целые числа?

127. Перед уроком учитель написал на доске какое-то целое число от 1 до 10. После этого дети по очереди сказали следующее:
Первый: «Это число больше 1».
Второй: «Это число больше 2».
...
Девятый: «Это число больше 9».
Десятый: «Это число больше 10».
Одиннадцатый: «Это число меньше 10».
...
Двадцатый: «Это число меньше 1».
Сколько раз ученики сказали правду?

128. Лев установил в лесу несколько законов:
«На одной полянке не должно быть больше трех ушастых и хвостатых одновременно»;
«Все волки и зайцы имеют по два уха и одному хвосту, а кроме того — острые зубы»;
«Зайцы должны находиться в лесу парами»;
«Зубастые звери не ходят поодиночке»;
«Нельзя делать действия, заставляющие других нарушать закон».
Может ли волк съесть зайца, не нарушив законов?

129. Житель острова Крит говорит: «Все критяне — лжецы». Истинно или ложно это утверждение?

130. Жители города А говорят только правду, жители города Б — только ложь, жители города В — попеременно правду и ложь, т. е. из двух утверждений, высказанных ими, одно истинно, а другое ложно. Дежурному по пожарной части по телефону сообщили: «У нас пожар, приезжайте скорее!» «Где?» — спросил дежурный. «В городе В», — ответили ему. Куда должна выехать пожарная машина?

В следующих задачах речь идет о сказочных персонажах — рыцарях, лжецах и хитрецах. Рыцари всегда говорят только правду, лжецы всегда только лгут, а хитрецы иногда говорят правду, а иногда лгут.

131. Дело происходит на острове, где живут рыцари и лжецы. Человек говорит: «Я лжец». Является ли он жителем острова?

132. На острове рыцарей и лжецов разговаривают A и B. A говорит: «По крайней мере один из нас лжец». Что можно сказать об A и B?

133. На площади собрались рыцари и лжецы. Каждый из собравшихся заявил остальным: «Все вы лжецы». Сколько рыцарей среди них?

134. За круглым столом 7 жителей острова рыцарей и лжецов. Каждый из сидящих сказал: «Мои соседи — лжец и рыцарь». Кто сидит за столом?

135. За круглым столом 12 человек — рыцари и лжецы. Каждый из них видит всех, за исключением своих соседей и, конечно, себя. Все люди по очереди сказали: «Все, кого я вижу, — лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом?

136. A и B — жители острова рыцарей и лжецов.
A говорит: «Я лжец, а B не лжец».
Кто из них рыцарь и кто лжец?

137. A, B и C — жители острова рыцарей и лжецов.
Двое из них говорят:
A: Мы все лжецы.
B: Один из нас рыцарь.
Кто из них рыцарь и кто лжец?

138. A, B и C — жители острова рыцарей и лжецов.
Двое из них говорят:
A: Мы все лжецы.
B: Ровно один из нас лжец.
Кем является C — рыцарем или лжецом?

139. Трое жителей острова рыцарей и лжецов разговаривали между собой. Путешественник спросил у А: «Вы рыцарь или лжец?». Тот пробурчал что-то непонятное. Тут вмешался В: «Он сказал, что он лжец!». «Не верьте В, он лжец!» — воскликнул С. Кто есть кто?

140. На острове всего два города, в одном живут рыцари, а в другом — лжецы. Встретились три человека А, В и С.
А говорит: «В лжец».
В говорит: «А и С из одного города».
Кто такой С?

141. На острове всего два города, в одном живут рыцари, а в другом — лжецы. Встретились три человека А, В и С.
А говорит: «В лжец».
В говорит: «А и С из разных городов».
С говорит: «А рыцарь».
Кто есть кто?

142. A, B, C и D — жители острова рыцарей и лжецов разговаривают.
А говорит: «По меньшей мере один из нас лжец».
В говорит: «По меньшей мере двое из нас лжецы».
С говорит: «По меньшей мере трое из нас лжецы».
D говорит: «Среди нас нет лжецов».
Кто из них рыцарь и кто лжец?

143. На острове рыцарей и лжецов было совершено преступление. К суду привлечены три жителя острова — А, В и С. На вопрос судьи А ответил неразборчиво. Когда судья переспросил двух оставшихся, то В сказал, что А утверждает, что он рыцарь, а С сказал, что А назвал себя лжецом. Кем являются В, С и А?

144. В правительстве острова рыцарей и лжецов 12 министров. Некоторые из них – лжецы, а остальные – рыцари.
На заседании первый министр сказал:
«Здесь нет ни одного честного человека».
Второй: «Здесь не более одного честного человека».
Третий: «Здесь не более двух честных людей».
И так далее до двенадцатого, который сказал:
«Здесь не более одиннадцати честных людей».
Сколько лжецов в правительстве этого острова?

145. На острове живут рыцари и лжецы — 100 человек. Каждый житель острова поклоняется одному из трех богов — богу Солнца, богу Луны или богу Земли. Каждому жителю острова задали три вопроса:
1) поклоняетесь ли вы богу Солнца;
2) поклоняетесь ли вы богу Луны;
3) поклоняетесь ли вы богу Земли?
На первый вопрос утвердительно ответили 60 человек, на второй — 40 человек и на третий — 30 человек. Сколько лжецов на острове?

146. За круглым столом 2001 человек — рыцари и хитрецы. Каждый сидящий сказал: «Один из моих соседей — рыцарь, а другой — хитрец». Какое наибольшее число рыцарей может быть за этим столом?

147. Три человека — рыцарь, лжец и хитрец — разговаривают:
А: «Я хитрец».
В: «Это правда».
С: «Я не хитрец».
Кто такие А, В и С?

148. Двое людей А и В, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец, утверждают:
А: «В рыцарь».
В: «А не рыцарь».
Докажите, что по меньшей мере один из них говорит правду и является хитрецом.

149. Один из трех человек А, В или С, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец, либо хитрец, совершил преступление. Их высказывания:
А: «Я не делал этого, В не делал этого».
В: «А не делал этого, С сделал это».
С: « Я не делал этого, А сделал это».
Было установлено, что один из них дважды солгал, другой дважды сказал правду, а третий об одном человеке солгал, о другом сказал правду. Кто же преступник?

Глава V

ИГРОВЫЕ ЗАДАЧИ

В игровых задачах необходимо грамотно сформулировать стратегию игры и доказать, что она действительно ведет к выигрышу. Обычный вопрос в таких задачах: «Кто и как выиграет при правильной игре?»

Рассмотрим некоторые типы игровых задач:

Игры-шутки. Это игры, исход которых не зависит от того, как играют соперники.

Игры с симметрией. В таких играх выгодно отвечать на ход противника «симметричным» ходом.

Игры с выигрышными позициями. В таких играх следует искать выигрышную позицию и стремиться передать очередь невыгодного хода противнику.

Задачи

150. На столе лежит кучка конфет — 31 штука. Двое играющих делают ходы по очереди. Одним ходом разрешается разделить любую из существующих кучек конфет на две. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет при правильной игре?

151. Двое по очереди ломают шоколадку 6×8. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из кусков вдоль углубления. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход.

152. Имеется три кучки камней: в первой — 10, во второй — 15, в третьей — 20. За ход разрешается разбить любую кучку на две меньшие. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

153. Числа от 1 до 20 выписаны в строчку. Двое игроков по очереди расставляют между ними плюсы и минусы. После того как все места заполнены, подсчитывается результат. Если он четен, то выигрывает первый игрок, если нечетен, то второй. Кто и как выиграет при правильной игре?

154. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре?

155. На столе лежат две кучки конфет, по 30 в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число конфет из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние конфеты. Кто и как выиграет при правильной игре?

156. На столе лежат три кучки камешков, по 30 в каждой кучке. Два игрока по очереди берут со стола любое число камешков из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние камешки. Кто и как выиграет при правильной игре?

157. На столе лежат две кучки спичек: в одной — 50, в другой — 30 спичек. Два игрока по очереди берут со стола любое число спичек из какой-либо одной кучки. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние спички. Кто и как выиграет при правильной игре?

158. На столе лежат 30 камешков. Два игрока по очереди берут 1, 2 или 3 камешка. Проигравшим считается тот, кто возьмет со стола последние камешки. Докажите, что при правильной игре выигрывает начинающий игру.

159. Из кучки камней двое играющих по очереди берут 1, 2 или 3 камня. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Как играть второму, чтобы выиграть, если в кучке 17 камней?

160. На столе лежат 60 монет. Два игрока по очереди берут со стола 1, 2, 3 или 4 монеты. Выигравшим считается тот, кто возьмет со стола последние монеты. Кто выиграет при правильной игре?

161. На столе лежат 40 спичек. Два игрока по очереди берут 1, 2, 3, 4 или 5 спичек. Выигравшим считается тот, кто берет со стола последние спички. Кто и как выиграет при правильной игре?

162. Два игрока по очереди кладут монеты на круглый стол. Класть монеты одна на одну нельзя. Монеты одинакового размера, и их достаточно для того, чтобы закрыть ими весь стол. Выигравшим считается тот, кто положит монету на последнее свободное место на столе. Докажите, что начинающий при правильной игре выигрывает.

163. Дана стоклеточная доска 10×10. За ход разрешается покрыть любые 2 соседние клетки прямоугольником 1×2 так, чтобы прямоугольники не перекрывались. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре?

164. На плоскости дан правильный 30-угольник. Два игрока по очереди проводят его диагонали, соблюдая следующие правила:

— нельзя соединять диагональю две вершины, если хотя бы из одной из них уже проведена диагональ;

— нельзя пересекать уже проведенные диагонали. Выигравшим считается тот, кто проведет последнюю диагональ. Кто и как выиграет при правильной игре?

165. На окружности расставлено 20 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим отрезков, проведенных ранее. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре?

166. У ромашки n лепестков. За ход разрешается оторвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре, если:
1) $n = 12$;
2) $n = 13$?

167. На доске написано n минусов. Два игрока по очереди исправляют один или два соседних минуса на плюсы. Выигравшим считается тот, кто исправит последний минус. Кто и как выиграет при правильной игре, если:
1) $n = 9$;
2) $n = 10$?

168. На листе бумаги по окружности нарисовано несколько минусов. Двое игроков по очереди исправляют один или два соседних минуса на плюсы. Проигравшим считается тот, кто исправит последний минус. Кто и как выиграет при правильной игре, если вначале минусов было:
1) 14;
2) 15?

169. Двое по очереди разламывают шоколадку 5×10. За ход разрешается сделать прямолинейный разлом любого из имеющихся кусков вдоль углубления. Выигрывает тот, кто первым отломит дольку 1×1.

170. Два игрока по очереди выписывают цифры девятизначного числа: первую цифру пишет первый,

вторую — второй, третью — снова первый и т. д. Первый игрок хочет, чтобы получилось число, делящееся на 9, а второй хочет ему помешать. Кто и как выиграет при правильной игре?

171. Имеются равенства:

$* = *;$

$* + * = *;$

$* + * + * = *.$

Два игрока по очереди вписывают вместо звездочек числа. Каждый из них может написать любое число вместо любой свободной звездочки. Докажите, что начинающий игру всегда может добиться того, чтобы все равенства выполнялись.

172. Двое играют в следующую игру. На доске написаны шесть равенств:

$* = *;$

$* = * + *;$

$* = * + * + *;$

$* = * + * + * + *;$

$* = * + * + * + * + *;$

$* = * + * + * + * + * + *.$

Игроки по очереди вписывают вместо звездочек числа. Первый стремится сделать так, чтобы все равенства были верными, второй стремится ему помешать. Кто победит при правильной игре?

173. Имеются две кучки конфет: в одной — 20, в другой — 21. За ход нужно съесть одну из кучек, а вторую разделить на две не обязательно равные кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

174. В коробке лежит 300 спичек. За ход разрешается взять из коробки не более половины имеющихся в ней спичек. Из двух игроков проигрывает тот, кто

не может сделать ход. Кто и как выиграет при правильной игре?

175. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число от 1 до 9. Выиграет тот, кто получит число 100. Кто и как выиграет при правильной игре, если играют двое?

176. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выиграет тот, кто первым получит число, превосходящее 1000.

177. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число меньше его. Выиграет тот, кто получит 1000.

178. Игра начинается с числа 1000. За ход разрешается вычесть из имеющегося числа любое, не превосходящее его, натуральное число, являющееся степенью двойки. Единица — это два в степени 0. Выиграет тот, кто получит ноль.

179. На доске написано число 31. Два игрока по очереди пишут натуральное число, которое получается при уменьшении имеющегося натурального числа не более чем вдвое. Выигравшим считается тот, после которого получилось число 1. Кто и как выиграет при правильной игре?