М.В. Губко

УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ С КОАЛИЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ УЧАСТНИКОВ

Российская Академия Наук
Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова

М.В. Губко

УПРАВЛЕНИЕ ОРГАНИЗАЦИОННЫМИ СИСТЕМАМИ С КОАЛИЦИОННЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ УЧАСТНИКОВ

Москва – 2003

УДК 519
ББК 22.18
Г 93

Губко М.В. **Управление организационными системами с коалиционным взаимодействием участников**. М.: ИПУ РАН (научное издание), 2003. – 140 с.

Настоящая работа посвящена исследованию задач управления организационными системами с коалиционным взаимодействием участников, в том числе, разработке эффективных механизмов стимулирования в веерной и матричной организационных структурах, механизмов распределения ресурса и механизмов формирования состава организационных систем.

Работа рассчитана на специалистов (теоретиков и практиков) по управлению организационными системами.

Рецензент: д.т.н. Д.А. Новиков

Утверждено к печати Редакционным советом Института

Текст воспроизводится в виде, утвержденном Редакционным советом Института

ã Институт проблем управления РАН, 2003

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

«…Every individual necessarily labors to render the annual revenue of the society as great as he can. He generally indeed neither intends to promote the public interest, nor knows how much he is promoting it. He intends only his own gain… By pursuing his own interest he frequently promotes that of the society more effectually than when he really intends to promote it.»[1]

Adam Smith, «The Wealth of Nations»

На протяжении всей истории человечества в области экономических взаимодействий между собой борются два мотива – стремление отдельного человека к достижению личных благ и неизбежное его стремление к объединению и сотрудничеству с другими людьми. Наличие в поведении индивидуума столь противоречивых устремлений порождает вопросы, относящиеся к сфере экономики и управления – вопросы эффективного производства и справедливого разделения произведенных благ. Движимый стремлением к собственному благополучию, но объективно вынужденный действовать для его достижения в рамках общественных институтов человек непрерывно сталкивается с конфликтом его интересов и интересов других людей [6, 37].

Каждое общество, когда-либо существовавшее на протяжении истории человечества, демонстрировало тот или иной компромисс между индивидуальными интересами его членов. Изучение закономерностей образования и поддержания таких компромиссов является главной задачей общественных наук: социологии, экономики и т.д. Задачей же математики в этой

[1] …Каждый индивидуум с необходимостью стремится по мере своих сил к увеличению собственного дохода. Обычно он не интересуется реализацией интересов общества, и даже не знает, в какой степени он их реализует… Однако, преследуя собственные интересы, индивидуум часто реализует общественные цели более эффективно, чем он к этому стремится.

области является исследование формальных моделей подобных компромиссов.

Объединение людей, совместно реализующих программу или цель и действующих на основе определённых правил и процедур называется *организационной системой* (ОС) [71]. ОС позволяют направлять усилия многих людей на совместное решение крупных задач, снижая при этом издержки за счет специализации. Однако эти преимущества достижимы только в том случае, когда ОС действует как единое целое [7, 12, 52]. Координация действий отдельных участников ОС требует *управления* ими. При этом специфика управления в ОС заключается как раз в необходимости учета и согласования в процессе управления интересов *всех участников системы*, в том числе управляемых субъектов (*агентов*) и управляющего органа (*центра*) [11, 12, 61].

На протяжении прошлого века развитие технологий потребовало создания все более крупных и сложных организаций, что привело к необходимости разработки научно обоснованных методов управления ОС – *теории контрактов*, *mechanism design*, *исследования операций*, *теории активных систем* (*ТАС*) и др.

Математической основой этих методов стала *теория игр* – раздел прикладной математики, исследующий модели принятия решений в условиях несовпадения интересов сторон (*игроков*), когда каждая сторона стремится воздействовать на ситуацию в собственных интересах [49].

Современная теория игр имеет два связанных друг с другом раздела – теория *некооперативных игр* [3, 4, 17, 19, 22, 34, 37, 43, 48, 65, 70, 76, 83] исследует поведение игроков в условиях отсутствия *коалиционного взаимодействия* (переговоров, соглашений и сотрудничества между *игроками*), в то время как теория *кооперативных игр* [1, 5, 14, 15, 16, 52, 53, 67, 75, 79] акцентирует свое внимание как раз на коалиционном взаимодействии.

Исторически так сложилось, что для построения моделей ОС теория управления использует в основном аппарат теории некооперативных игр, что зачастую ограничивает применимость этих моделей к управлению реальными ОС, учитывая важность кооперации в самом понятии организационной системы.

Необходимость учета сотрудничества между участниками организационной системы при осуществлении управления ОС можно проиллюстрировать следующими простыми примерами.

Пример 1 *«Два начальника»* [34]. Рассмотрим ситуацию, характерную для проектных и матричных организационных структур управления, в которой один сотрудник находится в прямом подчинении двух начальников и должен выполнять задания как одного, так и другого. Каждый из начальников может как потребовать от подчиненного выполнения своего задания в первую очередь («эгоистическое поведение»), так и выполнения своего задания наряду с заданием другого начальника («сотрудничество»). В случае, когда первый начальник требует выполнения своего задания, а второй выбирает сотрудничество, сотрудник выполняет задание первого начальника. Будем считать, что в этой ситуации первый начальник получает доход в размере пяти единиц, а второй получает нулевой доход. Если оба начальника выбирают сотрудничество, то выполняются оба задания (хотя, может, и не так быстро, как в предыдущем случае) и начальники получают доход в размере четырех единиц каждый. Если же оба начальника выбирают эгоистическое поведение, сотрудник выполняет их задания в спешке, менее тщательно, и каждый начальник получает доход в три единицы.

Некооперативное рассмотрение данного конфликта (известного также под названием «Дилемма заключенного») предполагает независимое поведение начальников, и единственным устойчивым исходом в данном случае является эгоистическое поведение обоих начальников (оно является для них *гарантирующей стратегией*). В то же время в реальных организационных системах более типичен исход «обоюдное сотрудничество», приносящий обоим начальникам <u>б**о**льший доход</u>. Устойчивость этого исхода можно обосновать только в рамках кооперативного подхода, учитывающего возможность согласованных действий участников конфликта, способность их к достижению (и выполнению) взаимных договоренностей. •[1]

Пример 2. «*Конкурс*». Предприятие ищет подрядчика для выполнения некоторого проекта. Для этого оно организует конкурс, в котором участвуют две фирмы. Заявкой в данном конкурсе является предлагаемая фирмой стоимость проекта, причем подряд получает фирма, заявившая меньшую стоимость. Себестоимость выполнения проекта первой фирмой равна десяти единицам, второй – пятнадцати единицам.

При некооперативном рассмотрении показывается [8], что победителем конкурса будет первая фирма – она получит проект при заявленной стоимости, чуть меньшей пятнадцати (в этом случае второй фирме просто невыгодно выполнять проект). Первая фирма получает прибыль в размере пяти единиц, вторая получает нулевую прибыль.

Однако если предположить возможность сговора подрядчиков, ситуация в корне меняется. Победитель конкурса может договориться с проигравшим о том, чтобы тот не заявлял стоимость проекта меньше, скажем, двадцати. При этом первая фирма побеждает при заявке, равной двадцати единицам, получает прибыль, равную десяти единицам, и отдает часть прибыли (например, одну единицу) второй фирме, чтобы участие в соглашении было ей выгодно. Устойчивость такого сговора обеспечивается угрозой первой фирмы заявить (в случае невыполнения второй фирмой своих обязательств) стоимость проекта, равную четырнадцати, и не делиться с проигравшей второй фирмой. •

В примере 1 неучет возможности коалиционного взаимодействия может заставить руководство компании без реальных на то оснований отказаться от матричной структуры управления. В примере 2 – приводит к существенному удорожанию проекта при использовании предприятием описанной схемы конкурса.

Данные примеры показывают необходимость построения моделей, учитывающих коалиционное взаимодействие участников ОС[1], и разработки эффективных механизмов управления подобными ОС.

Для достижения этой цели необходимо последовательно решить следующие **задачи**:

1. Разработать модель коалиционного взаимодействия участников ОС, то есть формально описать, каким образом ведут

---

[1] Символом «•» в тексте обозначается конец примеров и доказательств.

[1] Исследование коалиционного взаимодействия участников ОС было перечислено в обзоре [13] среди актуальных направлений развития теории активных систем.

себя участники ОС, вовлеченные в коалиционное взаимодействие.
2. Сформулировать общую задачу управления ОС с коалиционным взаимодействием участников, то есть определить, каким образом управляющий орган может воздействовать на состояние ОС, как система будет реагировать на те или иные управляющие воздействия, и как управляющий орган должен сравнивать эффективность различных механизмов управления.
3. На основании предложенной модели коалиционного взаимодействия участников ОС рассмотреть конкретные задачи управления ОС и разработать эффективные базовые механизмы управления ОС с коалиционным взаимодействием участников.

Структура работы. В разделе 1.1 первой главы приводится обзор проблематики теории активных систем с целью классификации механизмов управления ОС. Выделяются основные типы механизмов управления – стимулирования и планирования (распределения ресурса), для которых во второй и третьей главах проводится исследование коалиционного взаимодействия.

Разделы 1.2 и 1.3 первой главы посвящены обзору и анализу результатов теории кооперативных игр с целью оценки и выбора теоретико-игровых концепций решения, которые лягут в основу модели коалиционного взаимодействия участников ОС. Проведенный анализ позволил выбрать *сбалансированность игры* [5] в качестве критерия устойчивости *максимальной коалиции*[1] и *несущественность кооперативной игры* [67] в качестве критерия невыгодности коалиционного взаимодействия для участников ОС. Для исследования несбалансированных существенных игр предлагается использовать *решение в угрозах и контругрозах* [75].

В разделе 1.4 выбранные концепции решения используются для построения модели коалиционного поведения участников ОС и формулируется задача управления ОС с коалиционным взаимодействием участников.

Во второй главе исследуются механизмы управления в детерминированных ОС. В разделе 2.1 для базовой модели стимулирования в веерной ОС рассматривается ряд систем стимулирования, имеющих в рамках некооперативной теории максимальную эффективность и исследуется влияние возможности объединения агентов в коалиции на результат игры. Предлагаются системы стимулирования, имеющие максимальную эффективность в условиях коалиционного взаимодействия агентов.

В разделе 2.2 рассматривается задача стимулирования в матричной структуре управления, найдено множество равновесий игры *центров промежуточного уровня иерархии*. Также найдены условия устойчивости коалиции, состоящей из всех центров и предложен механизм согласования интересов *высшего руководства* с интересами центров промежуточного уровня.

В разделе 2.3 формулируется и решается задача формирования состава веерной ОС. Исследуются возможности агентов к скрытому от центра изменению состава и влияние подобных изменений на эффективность управления.

Третья глава посвящена исследованию *механизмов управления с сообщением информации* на примере механизмов распределения ресурса). Для *приоритетных механизмов распределения ресурса* [8, 61] приводятся достаточные условия устойчивости коалиции всех агентов, показано, что коалиционное взаимодействие повышает эффективность механизма распределения ресурса. Предложен механизм распределения, гарантирующий устойчивость коалиции всех агентов для произвольных профилей их типов.

В разделе 3.6 для задачи распределения ресурса между тремя агентами с линейными производственными функциями находится множество *равновесий в угрозах и контругрозах*.

На протяжении всей работы получаемые теоретические результаты обсуждаются на содержательных примерах задач управления торгово-промышленным холдингом.

В заключении кратко резюмируются основные результаты исследования организационных систем с коалиционным взаимодействием участников.

[1] *Максимальной* будем называть коалицию, состоящую из всех игроков.

ГЛАВА I. МОДЕЛИ КОАЛИЦИОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ УЧАСТНИКОВ ОС

В данной главе приводится классификация механизмов управления ОС с позиций теории активных систем [11, 13], выделяются основные классы механизмов управления. В разделах 1.2 и 1.3 на основе анализа разработанных в теории кооперативных игр концепций решения производится выбор теоретико-игровой концепции решения для моделирования коалиционного взаимодействия участников ОС. Обосновывается выбор сбалансированности кооперативной игры в качестве критерия устойчивости «максимальной» коалиции и понятия несущественности игры в качестве критерия невыгодности коалиционного взаимодействия. Для исследования несбалансированных существенных игр предлагается использовать *решение в угрозах и контругрозах*. В разделе 1.4 строится модель ОС с коалиционным взаимодействием участников и ставится задача управления подобными ОС, рассматриваются общие подходы к решению задачи управления.

1.1. Классификация механизмов управления организационными системами

Теория активных систем – раздел теории управления социально-экономическими системами, изучающий свойства механизмов их функционирования, обусловленные проявлениями активности участников системы [11]. Основным методом исследования в ТАС является математическое (теоретико-игровое) [21, 38, 41] и имитационное [2] моделирование. По основным своим подходам и используемым методам исследований ТАС чрезвычайно тесно связана с такими разделами теории управления социально-экономическими системами как: теория иерархических игр [19, 20, 21]; теория контрактов, исследующая задачи стимулирования в условиях вероятностной неопределенности [23, 26, 77, 81]; теория реализуемости [74, 78] и др.

Специфика ОС заключается в том, что составляющие их элементы (человек, группа, коллектив и т.д.), в отличие от элементов технических систем, обладают активностью – способностью к целенаправленному поведению, то есть к выбору действий

в соответствии с собственными предпочтениями и интересами. Элемент ОС может, например, если ему это выгодно, сообщить данные, не соответствующие истинному положению дел; может сознательно пойти на невыполнение данных обещаний, опять же, если это соответствует его интересам и т.п. [13].

Следовательно, при выборе управляющих воздействий необходимо предсказывать возможные реакции управляемых субъектов и использовать такие механизмы принятия управленческих решений, которые позволяли бы максимально учитывать и согласовывать интересы управляющего органа и управляемых субъектов.

Механизмом управления называется совокупность правил принятия решений участниками ОС при заданных ее *составе* [27, 57], *структуре* [29, 30, 33] и т.д. (например, правило принятия решений центром[1] – зависимость, ставящая соответствие состояниям агентов конкретное значение управляющего воздействия) [61].

Одними из самых распространенных на практике моделей механизмов управления ОС являются задачи *стимулирования* [9, 10, 58, 59, 60, 62, 64].

В *задаче стимулирования* (стимулированием в ОС называется комплексное целенаправленное внешнее воздействие на компоненты деятельности (и процессы их формирования) управляемых субъектов [61]) стратегия центра состоит в выборе системы (механизма) стимулирования (набора функций стимулирования) $s(y) = \{s_i(y)\}$, ставящей в соответствие *действиям* агентов размеры *вознаграждений*, получаемых от центра. Задачей синтеза оптимальной системы стимулирования называется задача поиска допустимой системы стимулирования, имеющей максимальную эффективность.

На примере задачи стимулирования видна первая из особенностей управления ОС – способность агентов к выбору действий в соответствии с собственными интересами. Вторая важная особенность управления ОС – способность агентов к искажению сообщаемых данных о положении дел, проявляется в *механизмах*

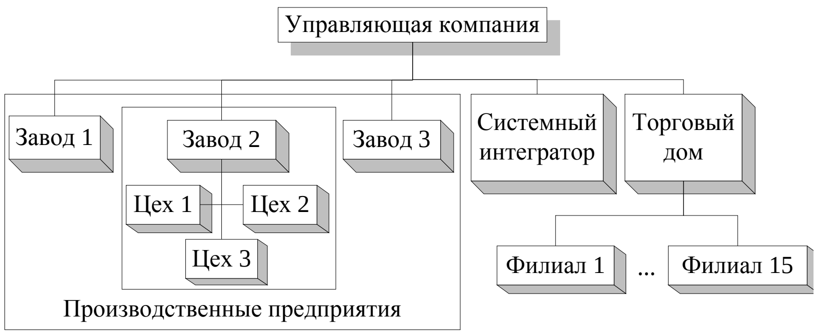
[1] В моделях управления социально-экономическими системами центр играет роль управляющего органа, а агент, или активный элемент (АЭ) – роль управляемого субъекта.

управления с сообщением информации.

Практически все рассматриваемые ТАС модели с сообщением информации можно свети к постановке *задачи планирования* [69], в которой стратегия центра состоит в выборе множества возможных сообщений агентов и механизма (процедуры) планирования, ставящего в соответствие сообщениям[1] назначаемый агентам вектор планов. При их изучении основной акцент, помимо анализа эффективности, делается на исследовании выгодности для агентов сообщения центру достоверной информации – так называемая *проблема манипулируемости* [8, 11].

Подробно исследованные в ТАС практически значимые детализации общих задач планирования и стимулирования получили название *базовых механизмов управления*. Они являются элементами «конструктора», используя которые можно синтезировать механизмы управления теми или иными классами реальных ОС. К базовым механизмам управления относят механизмы стимулирования, механизмы комплексного оценивания, механизмы активной экспертизы, механизмы формирования состава и структуры ОС [29, 30, 33], механизмы распределения (среди которых можно выделить приоритетные, конкурсные механизмы распределения ресурса, а также механизмы внутренних цен для распределения ресурса, заказа или финансирования), механизмы обмена [13].

Пример 3. «*Механизмы управления промышленным холдингом*».



[1] Агенты сообщают центру информацию о неизвестных ему существенных параметрах системы.

Рис. 1. Структура промышленного холдинга

Рассмотрим промышленный холдинг, часть структуры которого изображена на рис. 1. Холдинг состоит из трех производственных предприятий (заводов), производящих некоторый ассортимент продукции, Торгового дома и компании – Системного интегратора, подчиненных Управляющей компании. Задача производственных предприятий заключается только в производстве продукции, функции же обеспечения сырьем и продажи готовой продукции берет на себя Торговый дом, имеющий широкую сеть отделений и филиалов в различных регионах России. Функции Системного интегратора заключаются в информационном обеспечении (обеспечение компьютерами и оргтехникой, программным обеспечением, связью и т.д.) компаний холдинга, а также в оказании подобных IT-услуг третьим лицам. Помимо прямых функций стратегического управления Управляющая компания занимается также привлечением внешних инвестиций и инновационными разработками.

На разных уровнях данной структуры возникают все перечисленные выше задачи управления.

Так, например, *задача стимулирования в веерной ОС* является частью системы мотивации и управления персоналом на уровне любого производственного предприятия (завода) и отдельного цеха. Так, в рамках предоставляемого Торговым домом ежемесячного плана продаж руководству завода необходимо решить задачу выработки совокупного месячного плана производства и распределения данного плана по цехам для минимизации совокупных производственных затрат, а также обеспечить выполнение цехами назначенного плана. При этом обязательства завода состоят в обеспечении выпуска продукции, покрывающего (с учетом складских запасов) планируемые продажи по каждой производимой ассортиментной позиции (см. рассматриваемый в разделе 2.1 пример 4).

Также на различных уровнях управления холдингом возникают и *задачи стимулирования в системе с распределенным контролем*: на внутрицеховом (совместное использование трудовых ресурсов) и межцеховом уровнях производственных предприятий, при ведении сотрудниками компании – Системного интегратора одновременно нескольких проектов, но особенно отчетливо проблемы двойного подчинения видны на примере взаимодействия производственных и торговых компаний холдинга с Системным интегратором (см. пример 5 в разделе 2.2).

Наряду с различными задачами стимулирования, немаловажную роль в управлении холдингом играют задачи рационального распределения ресурсов, как сырьевых так и финансовых. Перечислим лишь некоторые из подобных задач, возникающих в процессе управления:

1. Распределение Управляющей компанией инвестиций между производственными предприятиями;
2. Распределение между производственными предприятиями холдинга сырья и производственных планов;
3. Распределение сметного финансирования между филиалами Торгового дома.

Помимо типичных проблем, связанных с дефицитом ресурса, во всех трех случаях задача также осложняется тем, что распределяющий орган, *центр* (Управляющая компания задачах 1 и 2 и руководство Торгового дома – в задаче 3) не имеет полной и достоверной информации об эффективности использования ресурса его получателями (производственными предприятиями задачах 1 и 2 и филиалами Торгового дома – в третьей задаче). Попытки наладить систему распределения ресурса, основанную на заявках получателей ресурса, сталкиваются с отмеченной выше проблемой *манипулирования информацией*, когда подразделения начинают завышать свои заявки с целью получения б**о**льшего количества ресурса. В примере 7 раздела 3.5 задача распределения финансирования между филиалами Торгового дома описывается более подробно. •

Одним из оснований классификации [13] моделей ОС является *информированность* ее участников. Разделяют ОС с *симметричной* (одинаковой) и *асимметричной* информированностью участников (в первую очередь важно определить различие в информированности агентов и центра). Соответственно в ситуации асимметричной информированности, когда центр обладает неполной информацией о характеристиках ОС, возникает необходимость получения этой недостающей информации.

Примером модели с симметричной информированностью является *детерминированная задача стимулирования*, подробно

исследованная как для веерных [58, 62], так и для многоуровневых ОС [57, 63]. В свою очередь среди моделей с асимметричной информированностью наиболее полно исследованы и широко применяются *механизмы распределения ресурса* [12].

Таким образом, с исследования именно этих классов механизмов управления предлагается начать применение модели коалиционного взаимодействия участников ОС. Этот подход нашел свое отражение и в структуре настоящей работы – вторая глава посвящена исследованию механизмов с полной информацией на примере различных моделей стимулирования, в то время как в третьей главе на примере задач распределения ресурса проводится анализ коалиционных взаимодействий в механизмах с сообщением информации.

1.2. Концепции решения кооперативных игр

Несомненно, построение модели коалиционного взаимодействия участников ОС не может начинаться «с нуля». В настоящее время в теории кооперативных игр уже имеется значительное количество моделей учета подобного взаимодействия игроков. Следовательно, для решения первой из сформулированных во введении задач необходимо проанализировать различные подходы и концепции теории кооперативных игр для выбора из них одной или нескольких, наиболее полно отвечающих специфике задач, решаемых теорией управления ОС.

Основы теории кооперативных игр были заложены одновременно с основами некооперативной теории [54], однако исследование коалиционного взаимодействия игроков потребовало создания моделей, значительно отличающихся от характерных для теории некооперативных игр постановок игровых задач в *нормальной* или *развернутой* формах [83].

В теории кооперативных игр взаимодействие игроков формализуется с помощью понятия *коалиции*. Для игры n лиц коалицией является любое непустое подмножество множества игроков $N = \{1,\dots,n\}$. *Информационными коалициями* будем называть группу игроков, обменивающихся друг с другом информацией. Считается, что в процессе образования коалиции заключаются соглашения, *заставляющие* игроков сообщать необходимую информацию. При этом возможность *блефа*, сообщения недостоверной информации, не рассматривается.

Коалиции, члены которых могут обмениваться между собой выигрышем, будем называть *коалициями полезности*, или просто *коалициями*.

Игры, в которых игроки могут образовывать коалиции полезности, называются *играми с трансферабельной полезностью* (*ТП-играми*). В отличие от них, игры, в которых игроки могут образовывать только информационные коалиции, называются *играми с нетрансферабельной полезностью* (*НТП-играми*).

Характеристическая функция игры

Теорию кооперативных игр интересует в основном то, какие коалиции образуются в процессе игры и какие условия необходимы для устойчивого существования коалиций.

Игра в нормальной форме, как достаточно подробное описание конфликтной ситуации, оказалась слишком сложной моделью для исследования кооперативных взаимодействий игроков. Чтобы описать с помощью игры в нормальной форме даже самый простой переговорный процесс между игроками, требуется немыслимое усложнение множества их стратегий, включающее в себя как элементы, соответствующие передаче информации другим игрокам, так и элементы, описывающие реакцию на их сообщения. Основная идея теории кооперативных игр состоит в том, чтобы, не рассматривая переговорный процесс как таковой, анализировать возможные его исходы и делать выводы о реализуемости того или иного результата переговоров. Поэтому и элементами описания *игры в форме характеристической функции* – базовой модели теории кооперативных игр – являются не стратегии игроков, а выигрыши, которые может себе гарантировать та или иная коалиция.

Игра в форме характеристической функции может быть построена на основе игры в нормальной форме. Так обычно и приходится делать, потому что реальные конфликты обычно формулируются сперва в нормальной форме – перечислением множества игроков, их стратегий и функций выигрыша. Характеристическая функция определяет выигрыш, получаемый коалицией S (если в процессе игры такая коалиция образовалась) при

рациональных действиях ее участников [70]. Решение о том, что понимать в каждом конкретном случае под рациональными действиями игроков, принимается из анализа игры в нормальной форме и выбранной модели рационального поведения.

Базовая модель кооперативной игры разрешает передачу выигрыша между игроками, а это значит, что предполагается наличие линейно-трансферабельного товара [72], например, денег. Это предположение типично для экономических моделей, к которым относятся и модели управления ОС.

Характеристической функцией игры n лиц называется такая вещественнозначная функция $v(S)$, определенная на подмножествах $S \subseteq N$ множества игроков N, что $v(\varnothing) = 0$ [67]. Характеристическая функция называется *супераддитивной*, если

(1) $\forall S, T \subseteq N : S \cap T = \varnothing \quad v(S) + v(T) \le v(S \cup T)$,

то есть для любых непересекающихся коалиций их объединение может получить полезность не меньшую, чем эти коалиции могли бы в сумме получить, действуя по отдельности [67]. В этих условиях объединение в *коалицию, включающую всех игроков*, представляет собой *самое эффективное* с точки зрения суммарной полезности поведение участников игры, однако *устойчивость* этой коалиции требует дополнительного исследования (см. ниже).

Супераддитивные игры представляют собой в некотором смысле типичный случай. Действительно, пусть имеются коалиции S и T с их выигрышами $v(S)$ и $v(T)$. Что мешает образующейся коалиции $S \cup T$ действовать так, как если бы такого объединения не существовало? Тогда полезность этой коалиции будет как минимум равна сумме полезностей коалиций S и T, обеспечивая супераддитивность. Эти нестрогие рассуждения, как показано ниже, *верны лишь при некоторых предположениях*.

Классическая теория [54, 67] рассматривает в основном супераддитивные игры. Главные вопросы, которые встают при их исследовании – это вопросы об условиях реализуемости *максимальной коалиции* N и справедливом распределении выигрыша $v(N)$ между игроками.

Обычно игровые задачи, в том числе и задачи управления ОС, ставятся в нормальной форме. Для исследования коалиционного взаимодействия игру необходимо *перевести* в форму характеристической функции. При этом процедура перехода существенно зависит от используемого принципа рационального поведения игроков.

Для классической постановки задачи теории кооперативных игр характерно отсутствие информированности членов коалиции о стратегиях игроков, не входящих в коалицию и о структуре других образовавшихся коалиций. В этих условиях *осторожные игроки* должны использовать *принцип максимального гарантированного результата* (МГР) для оценки выигрыша коалиции, к которой они собираются присоединиться. Применение принципа МГР для некоторой коалиции S состоит в минимизации выигрыша коалиции по стратегиям игроков, не входящих в коалицию S, и, затем, в максимизации выигрыша по стратегии коалиции S.

Под *стратегией коалиции* понимается вектор стратегий ее участников, а под *выигрышем коалиции* – сумма их выигрышей. Характеристическая функция определяется выражением

(2) $v(S) = \max_{y_S \in A_S} \min_{y_{N\setminus S} \in A_{N\setminus S}} [\sum_{i \in S} f_i(y_S, y_{N\setminus S})]$,

где $y_S = (y_i)_{i \in S} \in A_S = \prod_{i \in S} A_i$ – вектор действий участников коалиции S, а $f_i(.)$ – их целевые функции.

В выражении (2) можно заменить *чистые стратегии* на *смешанные*. Тогда $v(S)$ будет в точности совпадать с *нижним значением* [54, 68] антагонистической игры двух лиц – коалиции S и коалиции $N\setminus S$. Введенная таким образом характеристическая функция всегда супераддитивна [70].

Несмотря на удобство применения принципа МГР для построения характеристической функции, дополнительная информированность игроков может сделать более логичным использование других концепций равновесия. Обратим внимание на то, что переговорный процесс должен сопровождаться передачей игроками друг другу информации о своих функциях выигрыша, поскольку подобные данные могут оказывать существенное влияние на структуру коалиций. В связи с этим можно предположить, что к моменту окончательного выбора коалиции каждый игрок (а значит и любая коалиция) будет

обладать информацией о целевых функциях всех остальных игроков (а, значит, и всех возможных коалиций).

Тогда коалиция S должна ожидать от остальных игроков действий, направленных на *максимизацию их функций полезности*, а не действий, *наихудших для коалиции* S, как предписывает МГР.

Описание игры в форме характеристической функции

<u>Определение 1</u> [67]: Игра в форме характеристической функции задается множеством игроков N и характеристической функцией $v(\cdot)$ на его подмножествах.

Многими исследователями отмечалось [65, 67, 70, 83], что вопрос о порядке и способах взаимодействия игроков в теории кооперативных игр разработан недостаточно полно. Однако целью введения характеристической функции, как основы описания игры, является именно упрощение постановки задачи за счет того, что подробности функционирования, такие как: переговорный процесс, процесс образования коалиций, механизмы выработки совместной стратегии, и т.д. скрыты «внутри» характеристической функции игры. Такое смысловое наполнение характеристической функции может быть достаточно сложным, однако на уровне постановки задачи поведение игроков описывается относительно просто.

Игроки в процессе игры выбирают, к какой коалиции им присоединиться и каким образом будет распределяться выигрыш этой коалиции. Затем, после образования коалиций, каждая из них получает выигрыш $v(S)$, равный значению ее характеристической функции. Полученный выигрыш распределяется между членами коалиции согласно предварительной договоренности.

Обычно считается, что выигрыш коалиции равен значению характеристической функции для этой коалиции. Однако можно заметить, что характеристическая функция определяет *гарантированный* выигрыш, но, в общем случае, в результате игры коалиция может получить и выигрыш, б**о**льший гарантированного, определяющего лишь минимальное значение выигрыша при самых неблагоприятных условиях. Проблема распределения такого «неожиданного» дохода лежит за рамками исследования кооперативной теории игр, поскольку считается, что процесс коалиционного взаимодействия опирается только на имеющуюся информацию, в роли которой выступает характеристическая функция игры.

Определение дележа, доминирование дележей

<u>Определение 2</u> [67]: *Эффективным распределением* супераддитивной игры (N, v) называется такой вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, что

(3) $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$.

<u>Определение 3</u> [67]: *Дележом* для игры (N, v) называется *индивидуально-рациональное* эффективное распределение, то есть эффективное распределение, для которого выполнены условия индивидуальной рациональности:

(4) $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$.

Множество дележей игры (N, v) будем обозначать $E(v)$.

Условие (3) ограничивает понятие дележа лишь случаем, когда игроки достигли достаточного взаимопонимания, чтобы образовать коалицию, состоящую из всех игроков. Условие (4) предлагает рассматривать только распределения полезности, дающие каждому игроку значения выигрыша *не меньшие*, чем он получил бы, действуя в одиночку. Супераддитивная игра называется *существенной*, если

(5) $v(N) > \sum_{i \in N} v(\{i\})$.

В противном случае супераддитивная игра называется *несущественной* [67]. Несущественность игры означает нулевой эффект от кооперации. Действительно, выигрыш любой коалиции в несущественной игре равен просто сумме индивидуальных выигрышей ее участников. Множество дележей несущественной игры состоит из единственного элемента

(6) $x_i = v(\{i\}),\ i \in N$ [18].

Обычно рассматриваются лишь существенные игры, так как вопрос о поиске решения среди дележей несущественной игры тривиален.

Пусть x и y – два дележа, а S – произвольная коалиция. Говорят, что *дележ x доминирует дележ y по коалиции S* (обозначается $x \succ_S y$), если

(7) $\forall i \in S \quad x_i > y_i$,

(8) $\sum_{i \in S} x_i \leq v(S)$.

Если существует такая коалиция S, что $x \succ_S y$, говорят, что *дележ x доминирует дележ y* (обозначается $x \succ y$) [67]. Условие (7) означает, что дележ x лучше дележа y для всех участников коалиции S, а (8) отражает реализуемость дележа x коалицией S – если оно выполнено, то коалиция *действительно* может предложить своим участникам выигрыши x_i.

Понятия дележа и доминирования дележей играют немаловажную роль в формулировках представленных ниже концепций решения.

Концепции решения кооперативных игр

В настоящее время в теории кооперативных игр, так же как и вообще в теории игр, не существует единой *концепции решения* [70, 83, 85]. Связано это, по всей видимости, с тем, что в начальной стадии развития теории были разработаны достаточно простые модели игр, которые легко поддавались анализу, и, соответственно, простые концепции решений, такие, как C-ядро и НМ-решения (см. ниже). По мере развития теории встал вопрос о практической применимости полученных результатов. Для того, чтобы приблизить теорию к примерам встречающихся в жизни конфликтов, были разработаны более сложные модели, например, игры с нетрансферабельной полезностью [67], игры «в разбиениях» [67] и др. Параллельно появлялись как обобщения понятий решения на эти более сложные модели, так и новые концепции решений.

Некоторые концепции решения пришли в теорию игр из *теорий общественного благосостояния* и *коллективного выбора* [50, 52, 74, 78]. Предметом исследования этих теорий является задача выбора коллективных решений в обществе. Понятно, что коллективный выбор должен быть (или желательно, чтобы был) единственным. Для сужения круга возможных решений эти теории пользуются аксиоматическими предположениями о стратегии принятия коллективных решений. В этих аксиомах широко используется понятие «справедливого» распределения благ (распределения выигрышей, полезности и т.д.). Применение аксиоматического подхода к теории кооперативных игр привело к появлению понятий *N-ядра* [52] и *вектора Шепли* [1].

С-ядро

Если игроки пришли к такому дележу x выигрыша максимальной коалиции, что не существует дележа, доминирующего дележ x, то дележ x *устойчив* в том смысле, что никакой коалиции S не выгодно отделяться от коалиции N и делить между членами этой коалиции выигрыш $v(S)$.

Определение 4 [67]: Множество недоминируемых дележей игры называется ее *С-ядром*[1].

Множество дележей, принадлежащих C-ядру, считается *решением кооперативной игры*.

Определение 5: *Собственной коалицией* называется коалиция, отличная от максимальной коалиции (коалиции, состоящей из всех игроков).

Теорема VII.4.2 [67]. Чтобы дележ x принадлежал C-ядру, необходимо и достаточно выполнения для всех собственных коалиций $S \subset N$ неравенств

(9) $v(S) \le \sum_{i \in S} x_i$.

Решение этой системы линейных неравенств – это выпуклый многогранник в пространстве $\Re^{|N|}$. Можно найти его крайние точки и описать любой дележ из C-ядра, как их взвешенную линейную комбинацию [39].

Необходимым и достаточным условием существования непустого C-ядра является свойство *сбалансированности* игры.

Определение 6 [5]: Для данного множества игроков N *сбалансированным покрытием* называется такое отображение $d_{(\cdot)}$ из множества собственных коалиций $2^N \backslash \{N\}$ в отрезок [0, 1], что

(10) $\sum_{S:\, i \in S} d_S = 1$ для всех игроков $i \in N$,

где суммирование ведется по всем собственным коалициям, содержащим игрока i.

[1] От английского core – ядро.

Теорема Бондаревой [5]. C-ядро игры $(N,\ v)$ не пусто *тогда и только тогда*, когда для любого сбалансированного покрытия $d_{(\cdot)}$ выполнено неравенство

(11) $\sum_{S \subset N} d_S v(S) \le v(N)$.

Если для некоторой кооперативной игры выполнено условие (11), то игра называется *сбалансированной*.

Если характеристическая функция v игры имеет вид $v(S) = u(S) + w(S)$ и игры u и w сбалансированы, то и игра v также сбалансирована [67].

Если для игры с характеристической функцией v найдется такая сбалансированная игра w, что

$$v(N) = w(N)\ ,\ \forall S \subset N\ v(S) \le w(S)\ ,$$

то игра v также сбалансирована [67].

Несущественные игры

Несущественность игры зачастую можно проверить еще на той стадии исследования, когда известна только ее нормальная форма.

Пусть полезность игроков линейно-трансферабельна.

Определение 7 [70]: Ситуация $y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ называется *сильным равновесием Нэша* игры n лиц с функциями выигрыша $f_i(y_1, ..., y_n)$ и стратегиями $y_i \in A_i$, $i \in N$, если для любой коалиции $S \subseteq N$ и для любого ее действия $y_S \in \prod_{i \in S} A_i$ выполнено неравенство $\sum_{i \in S} f_i(y^*) \ge \sum_{i \in S} f_i(y_S, y^*_{N \backslash S})$, где $y^*_{N \backslash S}$ – вектор компонент равновесной ситуации, относящихся к игрокам множества $N \setminus S$.

Иначе говоря, ситуация является сильным равновесием Нэша, если *никакая коалиция не может выиграть*, *отклоняясь от равновесной ситуации*.

Можно заметить также, что суммарный выигрыш $\sum_{i \in N} f_i(.)$ всех игроков в двух различных сильно равновесных ситуациях одинаков, иначе ситуация с меньшим доходом была бы неустойчивой относительно отклонения от нее максимальной коалиции.

Множество сильных равновесий Нэша может оказаться пустым, однако если в некоторой игре с трансферабельной полезностью имеется единственное сильное равновесие Нэша, то соответствующая кооперативная игра будет несущественной:

Лемма [70]. Если в игре *единственное* равновесие Нэша, дающее игрокам выигрыши f_i^*, является *сильным равновесием*, и для построения характеристической функции используется равновесие Нэша, то характеристическая функция получившейся игры будут иметь вид $v(S) = \sum_{i \in S} f_i^*$ и будет несущественной.

НМ-решения

Поскольку C-ядро кооперативной игры слишком часто оказывается пустым, приходится искать другие концепции решения.

Понятие НМ-решения было введено Дж. фон-Нейманом и О. Моргенштерном [54].

Они предложили рассматривать в качестве множества решений игры не отдельный дележ и даже не множество дележей, *а множество подмножеств множества дележей*, обладающих определенными свойствами. Каждое из этих подмножеств называется НМ-решением.

Идея, которая лежит в основе НМ-решений – это стремление к *внешней и внутренней устойчивости*. Внутренняя устойчивость гарантирует равноправность дележей одного НМ-решения, то есть то, что в НМ-решении нельзя найти пару дележей, такую, что один из них доминирует другой. Внешняя устойчивость НМ-решения состоит в том, что для произвольного дележа найдется доминирующий его дележ, принадлежащий НМ-решению.

Итак, множество $V \subseteq E(v)$ называется *НМ-решением*, если

1. Не существует такой пары дележей $x, y \in V$, что $x \succ y$;
2. Если дележ y не принадлежит решению V, то найдется такой дележ $x \in V$, что $x \succ y$.

Между НМ-решениями и C-ядром существует определенная связь:

Теорема §13.3 [18]. Если в сбалансированной игре существует НМ-решение, то оно *содержит в себе* C-ядро.

НМ-решения должны были решить проблему возможной пустоты C-ядра. Однако в 1967 году была найдена игра десяти лиц, не имеющая НМ-решений [79]. Обычно же игра имеет огромное множество НМ-решений, что очень ограничивает применимость этого понятия к практическим задачам. НМ-решения скорее представляют собой *философскую* категорию, чем практически применимую концепцию решения.

Заметим, что понятие НМ-решения оперирует дележом, как выигрышем максимальной коалиции, то есть в определении предполагается, что максимальная коалиция все-таки образовалась. Чтобы определить, каким же образом будет распределен доход между участниками максимальной коалиции, игроки должны сначала определить, в рамках какого НМ-решения они будут выбирать дележ, а потом выбрать дележ из множества дележей, принадлежащих этому НМ-решению.

Поиск НМ-решений достаточно трудоемок ввиду их многочисленности. Примеры построения НМ-решений можно найти в [54, 67].

Решения в конфигурациях

Недостатки классических НМ-решений привели к необходимости их модификаций. Так, Р. Ауман и М. Машлер [75], предложили в качестве исхода игры использовать не дележи, а *конфигурации*, которые учитывают образование *коалиционной структуры*, отличной от максимальной коалиции.

<u>Определение 8</u> [67]: *Коалиционной структурой* для игры (N, v) называется *разбиение* P множества игроков N, то есть множество непересекающихся коалиций, объединение которых дает N.

<u>Определение 9</u> [67]: *Конфигурацией* для игры (N, v) и коалиционной структуры P называется такое распределение дохода $x = \{(x_i, i \in S); S \in P\}$ между участниками коалиций, что

(12) $\sum_{i \in S} x_i = v(S)$, $S \in P$,

(13) $x_i \geq v(\{i\})$, $i \in N$.

Здесь же определим понятия, которые понадобятся ниже при описании *решений в угрозах и контругрозах*.

<u>Определение 10</u> [67]: *Индивидуально рациональной* называется конфигурация x, в которой для всех игроков $i \in N$ справедливо

неравенство $x_i \geq v(\{i\})$ (все конфигурации, удовлетворяющие формуле (13), индивидуально рациональны по определению).

Определение 11 [67]: Если в конфигурации $x = \{(x_i, i \in S); S \in P\}$ никакая подкоалиция T произвольной коалиции $S \in P$ не может гарантировать себе бо**л**ьший доход, чем она получает в конфигурации x, (то есть если $\forall S \in P$ и $\forall T \subset S$ $\sum_{i \in T} x_i \geq v(T)$), то такая конфигурация называется *коалиционно рациональной*.

Понятно, что индивидуальная рациональность – более слабое условие, чем коалиционная рациональность.

Определение 12 [67]: Конфигурация $x = \{(x_i, i \in S); S \in P\}$ *доминирует* конфигурацию $y = \{(y_i, i \in T); T \in R\}$, если найдется такая коалиция $S \in P$, что $x_i > y_i, \forall i \in S$.

Легко видеть, что при этом коалиция S не может принадлежать коалиционной структуре R.

На основании введенного таким образом отношения доминирования можно определить решение по Нейману и Моргенштерну аналогично тому, как это было сделано выше. Определенное таким образом решение называется *НМ-решением в конфигурациях*.

Известно, что любая игра пяти лиц имеет решение в конфигурациях, а для игры n лиц можно сколь угодно мало изменить значение характеристической функции, чтобы игра имела решение в конфигурациях [67].

Значения игры

Общими недостатками рассмотренных выше концепций решения является то, что, во-первых, решение существует не для всех игр, во-вторых, если оно существует, то в большинстве случаев не является единственным. Однако в реальности результатом игры является всегда *единственное* распределение выигрыша между игроками. В этой связи представляется заманчивым построение концепции решения, которая всегда давало бы *единственный дележ в качестве решения*. Такие концепции решения называются *операторами значения игры*.

Определение 13 [52]: *Оператором значения игры* называется отображение $j\ [v]$, ставящее в соответствие любой кооперативной

игре единственный дележ из множества дележей, называемый *значением игры*.

Этот подход к поиску решения разрабатывался, в основном, аксиоматической теорией принятия решений [52, 74]. Его основной чертой является введение некоторых аксиом о механизме принятия решения и поиск понятия решения, удовлетворяющего данным аксиомам.

Уже само определение оператора значения несет в себе черты вводимой аксиоматики. Так, по сути дела, априори предполагается, что любая игра *обязательно* должна иметь решение, и решение это должно быть единственным. Дальнейшие аксиомы вводятся в основном в рамках основных направлений теории коллективного выбора – утилитаризма и эгалитаризма [52], приводя к разным концепциям решения – вектору Шепли и N-ядру соответственно.

Вектор Шепли

Определение 14 [52]: Оператор значения *анонимен*, если он коммутирует с перестановкой агентов, то есть при перестановке двух игроков местами соответственно переместятся и компоненты значения игры.

Определение 15 [52]: Оператор значения *маргинален*, если его значение зависит только от маргинальных вкладов игроков в коалиции, то есть от величин $v(S \cup \{i\}) - v(S)$.

Определение 16 [52]: *Носителем игры* называется такая коалиция S, что для любой коалиции T выполнено равенство $v(T) = v(T \cap S)$.

Определение 17 [52]: Для двух игр N лиц с характеристическими функциями u и v их суммой называется игра с характеристической функцией $w(S) = u(S) + v(S)$ для любой коалиции S.

Аксиомы Шепли [1]:

1. Если S – любой носитель игры v, то $\sum_{i \in S} (j\,[v])_i = v(S)$, где $(j\,[v])_i$ – это компонента вектора Шепли, относящаяся к i-му игроку.
2. $j\,[v]$ анонимен.
3. Для любой пары игр u и v выполнено $j\,[u + v] = j\,[u] + j\,[v]$.

Вектор Шепли – это оператор значения, задаваемый формулами:

$$x_i = \sum_{0 \le s \le n-1} \frac{s!(n-s-1)!}{n!} \sum_{\substack{S \subset N \setminus \{i\} \\ |S|=s}} (v(S \cup \{i\}) - v(S)) \text{ [1].}$$

Теорема 5.2 [52]. Аксиомы Шепли определяют единственный оператор значения – вектор Шепли.

Существует и альтернативный набор аксиом, также единственным образом характеризующий вектор Шепли:

Теорема 5.1 [52]. Вектор Шепли – единственный анонимный и маргинальный оператор значения.

Для содержательной интерпретации вектора Шепли используется так называемая *арбитражная схема Шепли*. Пусть игроки договорились собраться в определенном месте. Из-за случайных флуктуаций они будут прибывать в разное время. Будем предполагать, что вероятность любого из $n!$ порядков появления игроков одинакова и равна $1/n!$. Предположим, что если игрок, прибывая на место, находит там членов коалиции S и только их, то он получает выигрыш $x_i = v(S \cup \{i\}) - v(S)$. Значение компоненты вектора Шепли – это математическое ожидание выигрыша игрока в условиях описанной рандомизированной схемы.

От оператора значения было бы логично ожидать, чтобы справедливо (в соответствии с принятой аксиоматикой) распределенный доход давал бы дележ, принадлежащий C-ядру (если игра сбалансирована), то есть чтобы он был *селектором ядра*. Одним из недостатков вектора Шепли является то, что он, в общем случае, селектором ядра не является [52].

N-ядро

Самый распространенный оператор значения, являющийся селектором C-ядра – это N-ядро. Этот оператор реализует эгалитарный подход в распределении кооперативной прибыли. Эгалитаризм [52] считает справедливым распределение дохода, максимизирующее доход наименее удовлетворенного члена общества.

Для вектора x будем обозначать $L(x)$ вектор, составленный из компонент вектора x, ранжированных по возрастанию.

Определение 18 [52]: *Вектор* $x \in R^n$ *превосходит вектор* $y \in R^n$ *в смысле лексиминного порядка*, если найдется такой *индекс* $i \in \{1, \dots, n-1\}$, что $L(x)_k = L(y)_k$ при $k < i$, и $L(x)_i > L(y)_i$.

Определение 19 [52]: Поставим в соответствие каждому эффективному распределению x в игре (N, v) такой *вектор эксцессов* $e(x) \in \Re^{|2^N \setminus \{N\}|}$, что любой собственной коалиции S соответствует компонента этого вектора $e(x)_S$ и $\sup_{x_2 \in X_2^0} f_2(\tilde{x}_1^e(x_2), x_2)$.

На множестве эффективных распределений существует единственное распределение g, такое, что для любого эффективного распределения x вектор $e(g)$ предпочтительнее $e(x)$ в смысле лексиминного порядка. Это распределение называется *N-ядром* игры (N, v).

В супераддитивных играх N-ядро удовлетворяет условию индивидуальной рациональности, то есть является дележом [52].

По сути, механизм выбора N-ядра следующий. Для любого эффективного распределения коалиции ранжируются по их *сверхприбыли* (разнице дохода коалиции в результате распределения дохода $v(N)$ и значения характеристической функции $v(S)$ для нее). На множестве эффективных распределений вводится отношение предпочтения, основанное на лексиминном порядке векторов эксцессов, и определяем наилучшее в этом смысле распределение. Более подробное рассмотрение аксиоматической характеризации N-ядра и его модификаций проведено в [52].

Решения в угрозах и контругрозах

Еще одна концепция решения, которая, подобно решениям в конфигурациях, не ограничивается исследованием случая, когда реализуется максимальная коалиция, а рассматривает как результат игры и случаи неполного согласия игроков, это концепция *решений в угрозах и контругрозах*, которая основана на следующей идее.

Пусть, например, в процессе игры трех лиц образовалась коалиционная структура $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, содержащая коалицию $T = \{1, 2\}$, в которую входят игроки с номерами 1 и 2. При распределении дохода коалиции $v(\{1, 2\})$ игроки 1 и 2 получают суммы x_1 и x_2 соответственно. Тогда, если игрок 1 недоволен таким распределением, то он может сказать своему партнеру, что если его доля дохода не будет увеличена, то он сформирует коалицию $S = \{1, 3\}$, где сможет рассчитывать на бо́льший выигрыш. Если такая коалиция S может образоваться, то есть если игроку 3 выгодно сменить конфигурацию x на новую конфигурацию y, то такое заявление может реально угрожать целостности коалиции T и называется *угрозой игрока* 1 *игроку* 2. В свою очередь, игрок 2, интересы которого ущемлены подобным сценарием, может заявить игроку 1, что в случае подобных его действий он может предложить игроку 3 такую конфигурацию z коалиционной структуры $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$, что игрок 3 получит бо́льший доход, чем в конфигурации y, а сам игрок 2 получит не меньше, чем в исходной конфигурации x. Таким образом, игрок 2 выдвигает *контругрозу*, «защищающую» его долю x_2. Для общего описания этой идеи введем следующие определения.

Пусть $\Gamma = \{T_1, ..., T_N\}$ – некоторая коалиционная структура, а K – произвольная коалиция. Тогда *партнерами* коалиции K назовем множество $P(K, \Gamma) = \{i : i \in T_k, T_k \cap K \neq \varnothing\}$. Таким образом, игрок i – партнер коалиции K в Γ, если он входит в ту же коалицию, что и какой-либо из игроков K. Смысл этого определения состоит в следующем: чтобы члены коалиции K могли получить свою долю в коалиционно рациональной конфигурации (x, Γ), им необходимо согласие только своих партнеров.

Пусть (x, Γ) – коалиционно рациональная конфигурация в игре v, а K и L – непустые непересекающиеся подмножества некоторой коалиции $T_k \in \Gamma$. Тогда *угрозой* коалиции K против коалиции L называется коалиционно рациональная конфигурация (y, U), удовлетворяющая условиям: $P(K, U) \cap L = \varnothing$, $x_2 = x_2^e$ для всех $i \in K$, $y_i \geq x_i$ для всех $i \in P(K, U)$.

Пусть (x, Γ) – коалиционно рациональная конфигурация в игре v, а K и L – те же коалиции, что и в предыдущем определении. Если (y, U) – угроза коалиции K против коалиции L, то *контругрозой коалиции L против коалиции K* называется коалиционно рациональная конфигурация (z, V), удовлетворяющая условиям: $K \not\subset P(L, V)$, $z_i \geq x_i$ для всех $i \in P(L, V)$, $z_i \geq y_i$ для всех $i \in P(L, V) \cap P(K, U)$.

То есть члены коалиции K, выдвигая угрозу против L, претендуют на то, что они смогут получить больше путем перехода к новой коалиционно рациональной конфигурации, и что их новые партнеры будут согласны с этим. Члены коалиции L могут выдвинуть контругрозу, если они сумеют найти третью коалиционно рациональную конфигурацию, в которой и они, и все их партнеры получат не меньше своей первоначальной доли. Если для этого членам L в качестве партнеров нужны некоторые партнеры коалиции K (или даже некоторые члены K) в конфигурации угрозы, то им дают не меньше, чем они получали в коалиционно рациональной конфигурации угрозы.

Определение 20 [67]: Конфигурация называется *устойчивой*, если на каждую угрозу произвольной коалиции K против другой коалиции L найдется контругроза коалиции L против коалиции K. Множество устойчивых конфигураций называется *решением в угрозах и контругрозах*.

Итак, в данном разделе кратко описаны основные концепции решения, используемые теорией кооперативных игр. Обзор позволяет сделать вывод, что в настоящее время в теории кооперативных игр не существует единой и общепризнанной концепции решения игры.

В связи с этим, для решения поставленной во введении задачи, а именно – формулировки модели коалиционного взаимодействия участников ОС, необходимо осуществить выбор одной (или нескольких, совместимых между собой в некотором смысле) концепции решения.

1.3. Выбор концепции решения кооперативной игры

Итак, на основе описанных выше концепций решения кооперативной игры необходимо сформулировать модель коалиционного взаимодействия, в рамках которой можно было бы в дальнейшем проводить анализ задач управления ОС. Основным *критерием сравнения* рассмотренных концепций решения должна быть именно их *применимость к моделированию задач управления*. Задачи управления обуславливают определенные *требования* к используемому аппарату исследования.

Среди таких требований можно выделить следующие:

1. Наличие понятной содержательной интерпретации решений;

2. Адекватность модели поведению участников ОС;
3. Существование решения для всех игр;
4. Единственность решения для всех игр;
5. Простота поиска решения.

Сравнение концепций решения по этим признакам представлено в Таблице 1.

Как видно из таблицы, ни одна из строк не набирает положительной оценки сразу по всем критериям. Таким образом, чтобы выбрать концепцию решения для использования, необходимо установить *приоритетные критерии*, которым при выборе будет приписываться наибольший вес.

Таблица 1. Сравнение концепций решения

Концепция Решения	Содерж-я интерпр-я	Адекватность	Существование	Единственность	Простота
C-ядро (сбалансированность)	+	+	-	-	+
Несущественность	+	+	-	+	+
НМ-решения	-	+/-	-	-	-
В конфигурациях	+/-	+/-	-	-	+/-
Операторы значения	+/-	-	+	+	+
В угрозах и контругр-х	+	+	+/-	-	-

Оценка проводится по трехбалльной системе: («+», «+/-», «-»).

Для начального этапа, на котором находится исследование коалиционного взаимодействия в механизмах управления ОС, основной задачей, по-видимому, является получение для хорошо изученных моделей ОС простых, легко поддающихся интерпретации результатов, которые давали пусть самое общее, но хорошо аргументированное представление о закономерностях коалиционного поведения участников ОС. Поэтому предложенные концепции предлагается рассматривать в первую очередь с точки зрения наличия содержательной интерпретации и адекватности описания

экономического поведения. Также немаловажна и простота поиска решений. В таблице 1 столбцы, соответствующие этим критериям, выделены серым цветом.

Как уже отмечалось, *C*-ядро является самой «простой» концепцией решения – оно имеет простую содержательную интерпретацию. Действительно, если *C*-ядро не пусто, объединение в максимальную коалицию выгодно всем игрокам, если им предлагается один из дележей ядра. Устойчивость такого решения основывается на полном отсутствии возможностей угрозы со стороны произвольной коалиции.

Тем не менее, эта концепция имеет два серьезных недостатка. Во-первых, *C*-ядро может быть очень обширным для некоторых игр, и тогда непонятно – какой из дележей предпочтут игроки. В то же время, для многих игр *C*-ядро оказывается *пустым* и тогда поведение игроков с точки зрения этой концепции решения оказывается полностью неопределенным.

Как, однако, оказывается, первый из этих недостатков зачастую не имеет принципиального значения в задачах управления. Действительно, для центра (с позиций которого производится исследование) не столько важны подробности распределения выигрыша максимальной коалиции (по крайней мере пока исключается возможность его объединения с частью агентов против остальных, что, в принципе, представляет интерес для исследования), сколько важен *факт образования максимальной коалиции*.

Для произвольной коалиции в ТП-игре считается, что целью ее участников является увеличение суммарного выигрыша коалиции для последующего его дележа. Поэтому если центр точно знает целевые функции всех элементов, то для предсказания всех стратегий игроков (с точностью до стратегий, приводящих к одинаковому результату для всех коалиций) ему достаточно знать только – какая именно коалиционная структура реализовалась. Ну и действительно, чтобы предсказать действия людей, интересы которых известны, обычно не требуется знать, как они поделили между собой доход, достаточно лишь знать, что они действуют сообща.

Однако зачастую целевые функции агентов центру не известны. Такая ситуация характерна для механизмов с сообщением информации, в том числе и рассматриваемых ниже механизмах распределения ресурса. Тогда, очевидно, знания коалиционной структуры уже недостаточно для предсказания действий агентов. Тем не менее, в важном частном случае, когда целью центра является *увеличение суммарной производительности системы* в целом, что характерно для внутрифирменных механизмов управления [12, 45, 56, 57, 84], информация о том, что образовалась максимальная коалиция, вообще избавляет центр от необходимости получения информации о целевых функциях. Сами агенты, которые обычно обладают б**о**льшей информацией о своих параметрах, чем центр, берут на себя реализацию максимальной суммарной производительности системы, задаваясь целью увеличения выигрыша максимальной коалиции, причем, в силу своей большей информированности, выполняют эту задачу даже лучше, чем сам центр. Если задачей центра является увеличение суммарной прибыли системы, то его интересы совпадают с интересами максимальной коалиции и, значит, его действия должны быть направлены на создание механизмов управления, стимулирующих образование максимальной коалиции, то есть на создание сбалансированной игры. Таким образом, представляется логичным рассматривать в качестве базовой концепции решения именно сбалансированность игры.

Отдельного упоминания требует случай несущественной игры, в которой выигрыш любой коалиции в точности равен индивидуальным выигрышам ее участников, и множество дележей (как и C-ядро) состоит из единственного дележа. Кооперация не приносит дополнительной прибыли и роль начинают играть неизбежные затраты на поддержание коалиции, которые обычно не учитываются в наших моделях. Следовательно, *в несущественной игре можно говорить о полном отсутствии кооперации*.

Гораздо б**о**льшим недостатком C-ядра с точки зрения задач управления является его возможная пустота. Если C-ядро оказывается пустым, это может говорить о том, что максимальная коалиция в данной игре *неустойчива*, то есть некоторым коалициям выгодно отделиться от максимальной коалиции. Ответа на вопрос, каким именно образом будет происходить это отделение и какой в конце концов будет коалиционная структура, концепция C-ядра не дает. Здесь уже необходим гораздо более тонкий

анализ, чем просто анализ наличия угроз. Какая же из рассмотренных концепций решения может послужить основой такого анализа? Помимо удовлетворения приоритетным критериям эта концепция должна быть «совместима» с C-ядром в том смысле, что если игра сбалансирована, то она должна давать решения, принадлежащие C-ядру. Из рассмотренных концепций решения только решения в угрозах и контругрозах удовлетворяют этим требованиям. Поэтому именно их предлагается использовать для определения возможных решений игры в случае пустоты C-ядра в существенной игре. Получение результатов для решений в угрозах и контругрозах тем не менее сильно затруднено сложностью этой концепции. В Главе III рассмотрен лишь простой пример использования решений в угрозах и контругрозах для анализа задач распределения ресурса.

Таким образом, в данном разделе проведен сравнительный анализ концепций решения кооперативных игр. На основании оценки по выделенным *приоритетным критериям* было предложено использовать для построения модели коалиционного взаимодействия участников ОС непустоту C-ядра, как критерий образования максимальной коалиции, несущественность игры, как критерий невыгодности кооперации, и решение в угрозах и контругрозах в качестве концепции решения существенной игры с пустым С-ядром.

1.4. Постановка задачи управления ОС с коалиционным взаимодействием участников

В настоящем разделе рассматривается модель принятия решений участниками ОС с коалиционным взаимодействием. В рамках этой модели определяется понятие *управления* и выделяются его основные типы, а также кратко описываются общие подходы к решению задач управления.

Модель принятия решений

Рассмотрим ОС, состоящую из *центра* и n агентов, обладающих свойством *активности*, то есть собственными предпочтениями и способностью самостоятельно предпринимать некоторые действия [34].

Опишем модель принятия решений агентом. Для того чтобы определить, как задаются предпочтения агентов, введем следующее описание взаимодействия каждого агента с его *обстановкой*, в которую могут входить другие агенты, управляющие органы и прочие объекты и субъекты.

Пусть агент с номером i способен выбирать *действия* (стратегии, состояния и т.д.) из множества A_i допустимых действий данного агента. Действие i-го агента будем обозначать $y_i \in A_i$. Каждому из n агентов поставим в соответствие целевую функцию $f_i(y,u)$, где $y=(y_1,...,y_n)\in A'=\prod_{i\in N} A_i$ – *вектор действий* всех агентов, $N=\{1,2,...,n\}$ – *множество агентов*, а u – *управляющее воздействие* со стороны центра. Следуя сложившейся терминологии теории игр, будем называть действия y_i стратегиями, вектор y – *ситуацией игры*, а агентов – игроками. Совокупность стратегий $y_{-i}=(y_j)_{j\in N\setminus\{i\}}$ называется *обстановкой игры* для i-го игрока[1].

Коллективное поведение агентов в такой системе описывается *игрой* – взаимодействием игроков (участников ОС), в котором полезность каждого игрока зависит как от его собственного действия (стратегии), так и от действий других игроков. Если, в силу *гипотезы рационального поведения* [47, 54, 82], каждый из игроков стремится выбором стратегии максимизировать свою целевую функцию, то в случае нескольких игроков рациональная стратегия каждого из них зависит от стратегий других игроков. Набор таких рациональных стратегий называется *решением игры*.

Предположения, накладываемые на взаимодействие игроков в ходе игрового конфликта, приводят к использованию в качестве решения игры концепций решения теории некооперативных или кооперативных игр.

[1] Из возможных видов неопределенности [34, 66], характерных для задач управления ОС, рассматриваемая постановка задачи описывает только *игровую неопределенность*, то есть неопределенность относительно действий других участников ОС. Так как в настоящей работе рассматривается в основном чисто игровые модели взаимодействия агентов, усложнение описания модели за счет включения природной неопределенности было признано нецелесообразным.

Если считается, что игроки в процессе игры не могут общаться друг с другом, заключать соглашения и обмениваться полезностью, то такую игру логично рассматривать, как *некооперативную*. Однако такая ситуация зачастую не соответствует реальным возможностям агентов в реальных ОС, в которых наблюдаются все виды взаимодействий, перечисленные в разделе 1.2, что позволяет рассматривать игру агентов уже как *кооперативную игру*.

Исследование кооперативной игры проводится с использованием модели игры в форме характеристической функции. В разделе 1.2 перечислены способы построения характеристической функции игры на основе функций полезности игроков. В большинстве рассматриваемых далее моделей характеристическая функция коалиции $S\subseteq N$ вычисляется как равновесный по Нэшу выигрыш коалиции S с функцией выигрыша $f_S(y)=\sum_{i\in S} f_i(y,u)$ и стратегией $y_S=(y_i)_{i\in S}$ в ее игре с коалицией $N\setminus S$ (состоящей из всех остальных агентов) со стратегией $y_{N\setminus S}=(y_i)_{i\in N\setminus S}$ и функцией выигрыша $f_{N\setminus S}(y)=\sum_{i\in N\setminus S} f_i(y,u)$. Если равновесий Нэша в этой игре двух лиц (коалиций S и $N\setminus S$) несколько, то отдельно оговаривается, на основании какого из них коалиция вычисляет значение своей характеристической функции. Для устранения этой неопределенности используются *принцип гарантированного результата* (когда коалиция рассчитывает на наихудшее с точки зрения размера ее выигрыша равновесие), *принцип оптимистических оценок* (когда выбирается наилучшее равновесие), а также другие способы выбора равновесия Нэша (например, выбор среднего по равновесиям значения выигрыша).

В разделе 1.3 проанализированы концепции решения кооперативных игр и обосновано применение концепции C-ядра в качестве основной концепции решения кооперативной игры для исследования коалиционного взаимодействия элементов ОС. Таким образом, если в игре с построенной вышеописанным способом характеристической функцией C-ядро не пусто, то можно с уверенностью говорить о том, что образуется максимальная коалиция N, состоящая из всех игроков.

Коалиция N, стремясь при заданном управлении u выбором своей стратегии $(y_1,...,y_n)$ максимизировать свою целевую функцию $f_N(y) = \sum_{i \in N} f_i(y,u)$, решает задачу

$$P(u) = Arg \max_{y \in A'} \sum_{i \in N} f_i(y,u) .$$

Следовательно, при непустом C-ядре $P(u)$ – это множество действий, реализуемых системой *при заданном управлении* u.

Как отмечено выше, существенным недостатком C-ядра является то, что в некоторых играх оно оказывается пустым. При этом коалиционное взаимодействие игроков может быть более сложными и может не приводить к образованию максимальной коалиции. Тем не менее, можно относительно просто выделить важные для управления ОС случаи, в которых коалиционное взаимодействие не оказывает никакого влияния на исход игры. Так, если кооперативная игра является несущественной, выигрыш любой коалиции равен сумме индивидуальных выигрышей ее участников. Кооперация не приносит выгоды. При этом, как показано в разделе 1.2, зачастую можно считать, что множество $P(u)$ действий, реализуемых системой при заданном управлении совпадает с некооперативным решением – множеством равновесий Нэша игры n агентов.

Если же *в существенной игре* C-ядро пусто, для анализа игры требуется привлечение более «*слабой*» концепции решения – решения в угрозах и контругрозах. Она позволяет предсказать, образование каких коалиций более вероятно – какие коалиции будут *устойчивыми*. Тем не менее, в данной работе исследуются в основном модели в которых либо C-ядро не пусто, либо игра несущественна.

Игровая неопределенность, как правило, устраняется введением предположений о принципах поведения участников системы, позволяющих однозначно определить выбираемые ими стратегии. То есть устранение игровой неопределенности производится в два этапа – на первом этапе определяется концепция решения (C-ядро или несущественность игры), на втором этапе – принцип выбора игроками конкретных стратегий в случае, если решение состоит нескольких наборов стратегий – гипотеза

благожелательности, принцип гарантированного результата и т.д. [46, 51, 66, 77].

Описав модель принятия индивидуальных и коллективных решений, перейдем к рассмотрению модели управления.

Управление и его типы

В общем случае *управлением* называется воздействие на управляемую систему (управляемый субъект или объект управления), нацеленное на обеспечение требуемого ее поведения[1] [71]. Классификация управлений может строиться на основании тех компонентов управляемой системы (точнее, ее модели) – агентов, на которые оказывается воздействие при использовании управлений тех или иных типов [34].

В общем случае, в рамках представления предпочтений агента в терминах функции полезности, модель принятия им решений описывается следующим кортежем: $\Psi = \{A, A_0, \Theta, f(\cdot), w(\cdot), I\}$, то есть множествами допустимых действий A, допустимых результатов деятельности A_0, возможных значений обстановок (неопределенности) Θ; функциями: полезности $f(\cdot)$ и «технологии» $w(\cdot)$ между действиями, обстановкой и результатом деятельности; а также информацией I, которой обладает агент на момент принятия решений[2].

Будем считать, что закон $w(\cdot)$ известен всем участникам ОС и не может быть изменен. Содержательно это предположение соответствует фиксированной технологии деятельности агента (или фиксированной технологии функционирования управляемого агентом объекта) и не является критическим, так как практически любое изменение связи между действием и результатом может быть отражено зависимостью этой связи от обстановки.

Также без ограничения общности можно считать, что множество обстановок Θ известно всем участникам ОС и фиксировано (для выполнения этого предположения всегда можно выбрать это

---

[1] Принятие решений агентом также может рассматриваться как выработка управляющих воздействий. Агент, осуществляющий управление активным субъектом, должен рассматриваться как центр.

[2] Для введения классификации управлений в данном пункте, в отличие от предыдущего, рассматривается более широкая модель, включающая помимо игровой неопределенности и другие ее виды.

множество достаточно широким, ограничивая в каждом конкретном случае возможные значения обстановок имеющейся у агента информацией).

В соответствии с приведенным выше определением, управление – это воздействие на управляемую систему. Так как управляемая система (точнее, управляемый субъект – агент) описывается кортежем Ψ, то внешнее воздействие в общем случае может быть направлено на каждый из элементов этого кортежа. Выделим три группы переменных (элементов кортежа Ψ, которые могут изменяться) – допустимые множества A и A_0, функция полезности $f(\cdot)$ и информация I. Этим трем группам переменных соответствуют *три типа управлений* (основание классификации – группа переменных, описывающих модель принятия решений, на изменение которых направлено управление) [34]:

- *институциональное управление* (изменение допустимых множеств);
- *мотивационное управление* (изменение функции полезности);
- *информационное управление* (изменение информации, которую агент использует при принятии решений).

Обсудим кратко специфику каждого из этих типов управлений[1].

Институциональное управление, которое обозначим $u_A \in U_A$, является наиболее жестким и заключается в том, что центр целенаправленно ограничивает множества возможных действий и результатов деятельности агента. Такое ограничение может осуществляться явными или неявными воздействиями[2] – правовыми актами, морально-этическими нормами и т.д.

Мотивационное управление, которое обозначим $u_v \in U_v$, является более «мягким», чем институциональное, и заключается в целенаправленном изменении функции полезности агента. Такое изменение может осуществляться введением системы штрафов и/или поощрений за выбор тех или иных действий и/или

[1] Естественно, на практике иногда трудно выделить в явном виде управление того или иного типа, так как они используются одновременно.

[2] Достаточно ярко институциональное управление проявляется в моделях управления многоэлементными ОС, в которых центр может запрещать или разрешать совместный выбор агентами определенных комбинаций действий (примеры – производственные цепочки, управление проектами [12] и др.) или достижение определенных результатов совместной деятельности [73, 78].

достижение определенных результатов деятельности. Примерами моделей мотивационного управления являются рассмотренные в разделе 1.1 *задачи планирования и стимулирования* [8, 61]. В случае, например, задачи стимулирования, мотивационное управление заключается в непосредственном (входящем в функцию полезности аддитивно) вознаграждении агента за выбор определенных действий.

Наиболее «мягкое» (косвенное), по сравнению с институциональным и мотивационным, и, одновременно, наименее исследованное (с точки зрения формальных моделей) – это *информационное управление* [44, 55].

Введенные типы управлений характеризуют объекты воздействия (компоненты управляемой системы, на которые направлено управляющее воздействие), поэтому обсудим, что следует понимать под требуемым поведением управляемой системы, и, в первую очередь – «требуемым» с чьей точки зрения.

Исследователь операций, занимающийся построением и анализом модели, как правило, находится на позициях оперирующей (управляющей) стороны, то есть центра [19, 21, 51]. Следовательно, необходимо описать предпочтения центра и рассмотреть модель принятия им решений по выбору управлений.

Модель принятия решений центром описывается кортежем[1] $\Psi_0 = \{U_A, U_v, U_I, A_0, \Theta, w(.), \Phi(.), I_0\}$.

«Действиями» центра (выбираемыми им стратегиями) являются управления $u_A \in U_A$, $u_v \in U_v$, $u_I \in U_I$. Обозначим $u = (u_A, u_v, u_I) \in U = = U_A \times U_v \times U_I$ – вектор управлений.

В большинстве моделей управления ОС считается, что единственная роль центра заключается в осуществлении управления, то есть у него отсутствует собственный (не опосредованный действиями агентов) результат деятельности, поэтому результатом деятельности центра обычно считают совокупный результат деятельности агентов.

Так как в условиях отсутствия природной неопределенности предпочтения центра $v_0(\cdot)$ определены на множестве A' возмож-

[1] В сложных (многоуровневых иерархических) системах центр может рассматриваться как субъект, управляемый центром более высокого уровня, а агент – как центр, управляющий агентом более низкого уровня [57].

ных действий агентов, то качественно управление заключается в побуждении центром агентов к выбору определенных действий. Обсудим, какие действия следует центру побуждать выбирать агентов.

Рациональный выбор $P(.)$ агентов (см. предыдущий пункт) зависит от управляющих воздействий $u(.) \in U$, используемых центром, то есть *множество рационального выбора* агентов есть $P(u) \subseteq A$.

Итак, центр может предсказать, что, если он использует некоторое управление $u \in U$, то агенты выбирают одно из действий множества $P(u)$. Если это множество содержит более одного элемента, то у центра остается неопределенность относительно выбора агентов, которая может устраняться одним из описанных в [34] методов. Далее в тексте обычно будет использоваться принцип максимального гарантированного результата, в соответствии с которым значение целевой функции центра при использовании управления $u \in U$ равно $K(u) = \min\limits_{y \in P(u)} \Phi(y, u)$.

Величина $K(u)$, $u \in U$, называется *эффективностью управления* [11]. Следовательно, ***задача управления ОС*** формально может быть сформулирована следующим образом: найти допустимое управление, имеющее максимальную эффективность (такое управление называется *оптимальным управлением*), то есть $K(u) \to \max\limits_{u \in U}$.

Рассмотренная модель управления является *базовой моделью управления ОС*, так как она позволяет унифицировано описывать процессы принятия решений участниками ОС. Действительно, в многоуровневых системах взаимодействие между участниками различных уровней управления может описываться наращиванием рассмотренной структуры по «вертикали». Введение нескольких управляющих органов (центров) или нескольких управляемых субъектов (агентов) соответствует «горизонтальному» расширению этой структуры.

Игровая неопределенность в принятии решений отражает взаимодействие субъектов, в результате которого выигрыши (полезности и т.п.) каждого из них в общем случае зависят от действий всех участников системы. Предположение о рациональном их поведении в зависимости от используемого способа устранения игровой неопределенности приводит к той или иной концепции равновесия игры. Равновесие игры управляемых субъектов зависит от используемых центрами управляющих воздействий, поэтому можно считать, что решение задачи управления ОС заключается в исследовании, во-первых, *равновесия игры управляющих органов* и, во-вторых, – *управляемого равновесия* игры агентов. В зависимости от уровней иерархии, которым принадлежат участники рассматриваемого игрового взаимодействия, можно выделять *игры между агентами* (см. разделы 2.1, 3.1), *игры между центрами* (см. раздел 2.2) и *игры между центрами и агентами* (см. раздел 2.3).

Итак, кратко подведем **итоги первой главы**.

В разделе 1.1 приведена классификация механизмов управления ОС, выделены основные классы механизмов управления – механизмы стимулирования и планирования. Проведенный в разделах 1.2 и 1.3 анализ концепций решения кооперативных игр позволил обосновать использование для построения модели коалиционного взаимодействия участников ОС сбалансированность кооперативной игры в качестве критерия устойчивости максимальной коалиции и понятие несущественности кооперативной игры в качестве критерия невыгодности коалиционного взаимодействия. Для исследования существенных игр с пустым C-ядром предложено использовать *решение в угрозах и контругрозах*. В разделе 1.4 построена модель ОС с коалиционным взаимодействием участников и сформулирована общая задача управления подобными ОС, заключающаяся в выборе центром допустимого управления, максимизирующего его критерий эффективности при условии, что действия агентов определяется решением кооперативной игры (в рамках выбранных концепций решения).

ГЛАВА II. КОАЛИЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЧАСТНИКОВ ОС С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Во второй главе на примере различных моделей стимулирования исследуются коалиционные взаимодействия в детерминированных ОС. Рассматривается стимулирование в веерной ОС (раздел 2.1), в ОС с распределенным контролем (раздел 2.2), а также задача формирования состава веерной ОС (раздел 2.3).

2.1. Задача стимулирования в веерной ОС

В [58, 60, 62] был подробно исследован класс задач стимулирования в детерминированных ОС с несколькими агентами. Рассматривалась следующая модель: ОС состоит из центра, который управляет n агентами. Целевая функция центра

(14) $\Phi(y) = H(y) - \sum_{i \in N} s_i(y)$,

где $y = (y_1, ..., y_n) \in A' = \prod_{i \in N} A_i$ – вектор действий агентов – это разность неотрицательного непрерывного *дохода* $H(y)$ и суммарного стимулирования (также неотрицательного), которое центр выплачивает агентам, $N = \{1, ..., n\}$ – множество агентов, $A_i = \Re^1_+$ – множество допустимых действий агента, $i \in N$. Целевая функция i-го агента

(15) $f_i(y) = s_i(y) - c_i(y)$, $i \in N$,

это разность получаемого им от центра *стимулирования* $s_i(y)$ и *затрат* агента $c_i(y)$, связанных с реализацией всеми агентами вектора действий y. Функцию затрат $c_i(y)$, $i \in N$ будем считать неотрицательной неубывающей по каждой компоненте вектора действий функцией.

Как центр, так и все агенты точно знают функции $\Phi(.)$, $f_i(.)$, поэтому данная модель и называется детерминированной.

Порядок функционирования системы следующий. Центр сообщает агентам зависимость $s_i(y)$ стимулирования от выбираемого ими вектора действий y. Затем все агенты одновременно и независимо выбирают каждый свою компоненту

y_i^* вектора действий y^*. Наконец, центр получает доход $H(y^*)$, зависящий от реализовавшегося вектора действий и выплачивает i-му агенту стимулирование $s_i(y^*)$, $i \in N$.

Задача центра заключается в выборе *системы стимулирования* (то есть набора функций $s_i(.)$), приводящей к максимальному значению его целевой функции при условии, что агенты выбором действия максимизируют свою целевую функцию при заданной центром системе стимулирования. Таким образом, при заданной системе стимулирования агенты участвуют в игре, в которой стратегиями являются их действия, а выигрыши определяются выражением (15).

Ранее [58, 60, 62] при решении данной задачи считалось, что агенты не могут координировать выбор своих действий, обмениваться информацией и заключать между собой соглашения. В этом случае игру агентов можно рассматривать как некооперативную и использовать в качестве концепции решения данной игры равновесие Нэша (или равновесие в доминантных стратегиях, если оно имеется).

В [62] было показано, что, в зависимости от заданных ограничений на механизм стимулирования, оптимальными являются следующие системы стимулирования:

Если центр может назначать i-му агенту стимулирование, зависящее от всего вектора действий y, то система стимулирования

(16) $s_i(y) = \begin{cases} c(y_i^*, y_{-i}) + e_i & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}$,

где $y^* \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A'} [H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y)]$,

реализует действие y^* как единственное равновесие в доминантных стратегиях и является e-оптимальной для центра.

Если стимулирование i-го агента может зависеть только от его компоненты действия, то система стимулирования

(17) $s_i(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + e_i, & y_i = y_i^* \\ 0, & y_i \neq y_i^* \end{cases}$,

где $y^* \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A'} [H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y)]$, реализует действие y^* как единственное равновесие Нэша и является e-оптимальной для центра.

Если центр наблюдает только результат деятельности $z = g(y)$, где $g : \Re^n_+ \to \Re^m_+$ – однозначное непрерывное отображение, и доход центра зависит только от результата деятельности z, то система стимулирования

(18) $s_i(z) = \begin{cases} c_i(y^*(z^*)) + e_i, z = z^* \\ 0, \qquad\qquad z \neq z^* \end{cases}$,

где $y^*(z^*) \in \operatorname{Arg} \min\limits_{y: g(y)=z^*} \sum\limits_{i \in N} c_i(y)$, $z^* \in \operatorname{Arg} \max [H(z) - \sum\limits_{i \in N} s_i(z)]$

реализует результат z^* как единственное равновесие Нэша и является e-оптимальной для центра.

Интерес представляет проверка влияния на данные результаты коалиционного взаимодействия агентов. Далее предполагается, что агенты могут образовывать коалиции, и в ОС имеется линейно-трансферабельный товар (деньги), которым агенты могут обмениваться между собой.

Заметим, что в данной задаче *коалиционное взаимодействие агентов нежелательно для центра* [26, 28]. Действительно, системы стимулирования (16)-(18) реализуют оптимальное для центра действие с наименьшими затратами. Любые договоренности между агентами могут только изменить реализуемое ими действие, что уменьшит результат игры для центра. Важным поэтому представляется поиск условий, при которых кооперативное взаимодействие агентов не сказываются на реализуемом системами стимулирования (16)-(18) результате.

Далее будем называть *коалиционной структурой* $\Im=\{S_1, \dots, S_k\}$ произвольное разбиение множества агентов N на коалиции $S_1, \dots, S_k$. При объединении группы агентов в коалицию S они начинают действовать как один игрок с целевой функцией

(19) $f_S(y) = \sum\limits_{i \in S} [s_i(y) - c_i(y)]$

и векторной стратегией

(20) $y_S = (y_i)_{i \in S}$.

Фиксация (при заданной системе стимулирования) коалиционной структуры $\Im=\{S_1, \dots, S_k\}$ определяет игру k лиц с целевыми функциями (19) и стратегиями (20).

Кооперация агентов невозможна, если для произвольной коалиционной структуры $\Im$ в любом равновесии Нэша y^*_Γ игры Г выигрыш всех коалиций $S \in \Im$ не превышает их выигрыша в равновесии Нэша некооперативной игры, то есть справедливо неравенство

(21) $\forall S \subseteq N \quad f_S(y^*_\Gamma) \leq \sum\limits_{i \in S} f_i(y^*)$.

Действительно, условие (21) совпадает с определением сильного равновесия Нэша, при наличии которого, как показано выше в разделе 1.2, кооперативная игра является несущественной.

Рассмотрим последовательно модели, соответствующие системам стимулирования (16)-(18).

Стимулирование каждого агента зависит от действий всех агентов

Если центр использует систему стимулирования (16), то целевая функция произвольной коалиции S имеет вид

(22) $f_S(y) = \sum\limits_{i \in S} \Delta(y_i^* - y_i) \cdot [c_i(y_i^*, y_{-i}) + e_i] - \sum\limits_{i \in S} c_i(y_i, y_{-i})$,

где Δ – символ Кронекера.

При выборе коалицией стратегии y^*_S она получает выигрыш $\sum\limits_{i \in S} e_i$. Обозначим $S_0 \subset S$ – множество участников коалиции S, не отклоняющихся от плана.

Тогда выигрыш коалиции S будет иметь вид

$$f_S(y) = \sum_{i \in S_0} [c_i(y_i^*, y_{-i}) + e_i] - \sum_{i \in S_0} c_i(y_i^*, y_{-i}) - \sum_{i \in S \backslash S_0} c_i(y_i, y_{-i}) =$$

(23)

$$= \sum_{i \in S_0} e_i - \sum_{i \in S \backslash S_0} c_i(y_i, y_{-i}),$$

что в силу неотрицательности функции затрат меньше, чем $\sum\limits_{i \in S} e_i$ независимо от действий участников других коалиций, то есть выполнение плана y^* является *доминантной стратегией* не только для каждого агента, но и для любой коалиции (в том числе и состоящей из всех агентов). Таким образом, при образовании коалиции реализуемое системой стимулирования действие не изменяется, условие (21) выполнено, а, следовательно, кооперация между агентами невозможна.

Стимулирование агента зависит только от его действия

Если центр использует систему стимулирования (17), целевая функция произвольной коалиции S имеет вид

(24) $f_S(y) = \sum_{i \in S} \Delta(y_i^* - y_i) \cdot [c_i(y_i^*, y_{-i}^*) + e_i] - \sum_{i \in S} c_i(y_i, y_{-i})$,

где Δ – символ Кронекера.

Если остальные коалиции коалиционной структуры выполняют план, то есть $y_{N \setminus S} = y_{N \setminus S}^*$, то при выполнении коалицией S плана y_S^* она получает выигрыш $\sum_{i \in S} e_i$. Обозначим S' – подмножество участников коалиции S, отклоняющихся от плана. Тогда выигрыш коалиции S примет вид

(25) $f_S(y) = \sum_{i \in S \setminus S'} [c_i(y^*) + e_i] - \sum_{i \in S} c_i(y_{N \setminus S'}^*, y_{S'})$.

План y^* будет реализовываться как равновесие Нэша любой коалиционной структурой, если выигрыш произвольной коалиции S при любом ее действии y_S не превышает ее выигрыша при выполнении плана: $f_S(y_S^*, y_{N \setminus S}^*) \geq f_S(y_S, y_{N \setminus S}^*)$, то есть для всех коалиций S и всех $S' \subset S$ справедливо неравенство

(26) $\sum_{i \in S \setminus S'} c_i(y^*) \leq \sum_{i \in S'} e_i + \min_{y_{S'}} \sum_{i \in S} c_i(y_{N \setminus S'}^*, y_{S'})$.

Проверка этой системы неравенств сводится к решению большого числа задач математического программирования. Эту систему, однако, можно несколько упростить, поскольку по предположению затраты всех агентов возрастают по каждой из компонент действия y.

В этом случае единственным способом увеличения выигрыша коалиции является выбор *нулевого* действия некоторыми из участников коалиции. Они при этом не получают стимулирования, но остальные участники коалиции выигрывают за счет уменьшения затрат. Система неравенств (26) приобретает тогда вид:

(27) $\sum_{i \in S \setminus S'} c_i(y_i^*, y_{-i}^*) \leq \sum_{i \in S'} e_i + \sum_{i \in S} c_i(y_{N \setminus S'}^*, (0)_{S'})$.

Несмотря даже на это упрощение, задача проверки реализуемости равновесия Нэша остается технически довольно сложной.

Тем не менее, в частном случае, когда затраты каждого агента зависят только от его собственного действия (система со слабо связанными агентами) можно легко констатировать невыгодность кооперации, так как, отклоняясь от плана, каждый агент продолжает нести неотрицательные затраты, но не получает стимулирования.

Из формулы (27) видно, что увеличение «доплат» e_i повышает «устойчивость» системы стимулирования к коалиционному взаимодействию агентов. Можно сформулировать задачу минимизации суммарных доплат, которые гарантируют реализацию некооперативного равновесия и при коалиционном взаимодействии агентов:

(28) $\min \sum_{i \in N} e_i$ при условии выполнения неравенств (27).

Это задача линейного программирования с довольно большим числом ограничений: для любой коалиции S (из всевозможных $2^n - 1$ коалиций) необходимо проверить выполнение $2^{|S|} - 1$ неравенств, а общее число ограничений равно $\sum_{S \subseteq N} 2^{|S|} - 1$, то есть имеет экспоненциальный по числу агентов порядок.

Центр наблюдает только результат совместной деятельности агентов

Из формулы (18) для оптимальной в этом случае системы стимулирования видно, что если агенты не реализуют своими действиями результат z^*, то стимулирование всех агентов равно нулю. Поэтому единственным способом повышения выигрыша коалиции является изменение действий участников коалиции, не сказывающееся на результате z^*. Эти отклонения от плана не сказываются на результате центра, так как его целевая функция зависит только от результата z^*.

Поэтому можно констатировать: невзирая на то, что коалиционное взаимодействие в данной модели теоретически возможно, оно проходит для центра совершенно незаметным, не приводит к изменению реализуемого системой результата *z*, затрат на стимулирование, а, следовательно, и эффективности управления, а потому его более подробное исследование не представляется целесообразным.

В данном разделе исследовано влияние коалиционного взаимодействия на игру агентов при использовании центром оптимальных в некооперативном случае систем стимулирования. Показано, что важным для выполнения агентами назначенных планов является возможность для центра назначать стимулирование каждому агенту в зависимости не только от его действия, но и от действий других агентов или общего результата деятельности.

Если же стимулирование *i*-го агента может зависеть только от его действия, то для выполнения назначенных планов могут потребоваться дополнительные доплаты от центра агентам. Нахождение минимальных доплат сводится к задаче линейного программирования.

Пример 4. *Система мотивации цехов производственных предприятий торгово-промышленного холдинга.*

Рассмотрим описанную в примере 3 проблему разработки системы мотивации цехов производственных предприятий в торгово-промышленном холдинге. Эта задача сводится к задаче стимулирования в веерной ОС.

Мотивация включает штрафные санкции за отклонение фактического объема производства каждого цеха от плана. При этом причиной начисления штрафов для конкретного цеха могут быть как его индивидуальное отклонение от планового объема производства, так и невыполнение всеми цехами в целом суммарного производственного плана. Как показано выше, если цеха завода не связаны друг с другом, то есть если производственные затраты одного цеха не зависят от объема производства в другом цехе, то эти системы мотивации приводят к одинаковому результату.

Однако если (в силу, например, необходимости использования общих производственных мощностей, трудовых или сырьевых ресурсов) затраты одного цеха зависят от объема производства в другом цехе, то, при использовании руководством завода штрафов, зависящих только от индивидуальных отклонений каждого цеха от плана, коалиционное взаимодействие между

цехами может сделать выгодным для них перераспределение плана или даже недовыпуск отдельных видов продукции при перевыпуске других; таким образом, общезаводской план производства может быть сорван. В этом случае руководство должно использовать систему штрафов, при которой цех может быть «наказан» не только при невыполнении индивидуального производственного плана, но и при невыполнении всеми цехами общезаводского плана. •

2.2. Задача стимулирования в ОС с распределенным контролем

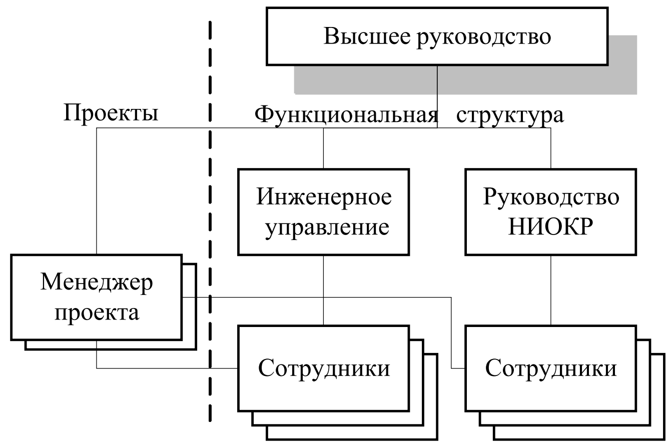


Рис. 2. Фрагмент матричной структуры управления

В разделе 2.2 рассматриваются задачи стимулирования, характерные для матричных структур управления ОС, находится множество равновесий Нэша в двухуровневой ОС с распределенным контролем. Для исследования коалиционного взаимодействия строится характеристическая функция и исследуются условия реализуемости максимальной коалиции элементов промежуточного уровня иерархии. Также решается задача согласования интересов уровней иерархии путем «внутреннего налогообложения» промежуточного звена управления.

Постановка задачи

В настоящее время в теории и практике менеджмента считается перспективным организация управления компанией с помощью матричных структур управления (МСУ). Их суть заключается в том, что на иерархическую организационную структуру накладывается «горизонтальная» структура проектов (см. рис. 2).

Одним из недостатков МСУ является то, что при недостаточном разделении полномочий между менеджерами проектов и руководителями функциональных подразделений возможен конфликт между ними. Представляет интерес исследование этого конфликта с целью сравнения возможных потерь в эффективности при той или иной организации управления и определение условий, при которых эффективность управления максимальна.

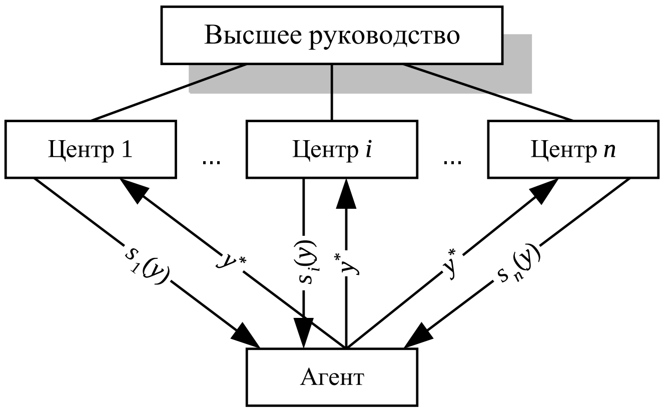


Рис. 3. Модель ОС с распределенным контролем

Рассмотрим ОС со структурой, изображенной на рис. 3 [32, 35]. Центры (промежуточного уровня) представляют собой менеджеров проектов и руководителей функциональных подразделений, а агент – сотрудника подразделения или подразделение в целом. Далее будет рассматриваться в основном взаимодействие центров промежуточного уровня и агента, роль высшего руководства будет проанализирована в последнем пункте данного раздела.

Интересы n центров описываются их целевыми функциями

$$\Phi_i(y) = H_i(y) - s_i(y),\ i \in N = \{1,\dots,n\},$$

где $H_i(y)$ – непрерывная функция дохода i-го центра от выбора агентом действия $y \in A = [0,+\infty)^m$, $\sigma_i(y)$ – неотрицательная функция стимулирования агента i-м центром в зависимости от выбираемого агентом действия.

Интересы агента представлены целевой функцией

$$f(y) = \sum_{i \in N} s_i(y) - c(y),$$

где $c(y)$ – положительная выпуклая возрастающая по всем компонентам вектора y функция затрат агента в зависимости от выбираемого действия y.

Все центры и агент имеют полную информацию о функциях $H_i(y)$ и $c(y)$, а также о множестве A.

Порядок функционирования системы следующий:

1. Центры одновременно сообщают агенту функции стимулирования $\sigma_i(y)$;
2. Если есть точка, в которой $f(y) \geq 0$, то агент выбирает действие $y^* \in \operatorname{Arg}\max_{y \in A}[\sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)]$ и несет затраты $c(y^*)$, иначе он отказывается от игры, и все ее участники получают нулевые выигрыши.
3. Центры получают доходы $H_i(y^*)$ и выплачивают агенту суммы $\sigma_i(y^*)$.

Предположение 1. Для функций стимулирования центров выполнено балансовое ограничение: $s_i(y^*) \leq H_i(y^*)$, то есть центры должны иметь достаточно средств, чтобы оплатить агенту обещанную сумму.

Предположение 2. Условие «обоснованности угроз», или «запрета блефа»,

(29) $s_i(y) \leq H_i(y) \quad \forall y \in A, \forall i \in N$,

говорящее о том, что обещания каждого из центров не превышают его дохода.

Далее будем требовать выполнения предположения 1. Выполнение более сильного предположения 2 ниже всегда оговаривается отдельно.

Для завершения описания модели необходимо указать, какое действие выберет агент, если множество

$$Y(s) = \operatorname{Arg}\max_{y \in A}[\sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)],$$

где $s = (s_i(y))_{i \in N}$ – вектор функций стимулирования всех центров, состоит более чем из одной точки и агент должен выбрать одно действие из множества равнозначных для него действий. Для описания процесса выбора агентом действия из множества «оптимальных» действий Y введем функцию $\Psi(s)$, известную всем центрам, которая каждому вектору функций стимулирования s ставит в соответствие точку из соответствующего множества $Y(s)$.

Предположение 3. Для функции $\Psi(s)$ выполнено свойство «*независимости от посторонних альтернатив*» [74]: для любых наборов стратегий s^1, s^2

$$\Psi(s^1) \in Y(s^2) \subset Y(s^2) \Rightarrow \Psi(s^2) = \Psi(s^1),$$

то есть если агент выбрал действие $\Psi(s^1)$ из более широкого множества $Y(s^1)$, то и из более узкого множества $Y(s^2)$ он выберет действие $\Psi(s^1)$ (если оно содержится в $Y(s^2)$).

Построение множества равновесий Нэша игры центров

Задача представляет собой анализ игры центров [63], стратегиями которых является выбор функции стимулирования. Эта игра довольно сложна, так как множество стратегий представляет собой пространство функций. Хотелось бы упростить ее, введя ограничения на рассматриваемые функции стимулирования. Ниже доказывается лемма 3 о том, что достаточно рассматривать только функции стимулирования, отличные от нуля не более чем в n точках, что *редуцирует* стратегию каждого центра *до конечномерного вектора*. Затем приводится характеризация (с помощью системы неравенств) множества равновесий Нэша редуцированной задачи.

Далее значком «$\mathbf{0}$» обозначается стратегия агента, при которой он отказывается от игры. Также для краткости будем

обозначать $(s_i(y))_{i \in N} \Rightarrow y^*$ тот факт, что вектор стратегий $(s_i(y))_{i \in N}$ реализует действие агента y^*, то есть, что

(30) $y^* = \begin{cases} \Psi(s), & \max_{y \in A}[\sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)] \geq 0; \\ \mathbf{0}, & \max_{y \in A}[\sum_{i \in N} s_i(y) - c(y)] < 0. \end{cases}$

Решением игры центров будем считать набор e-равновесных по Нэшу ситуаций. Напомним, что e-равновесием Нэша называется такой вектор стратегий $s = (s_i(y))_{i \in N}$, что для любого центра i и любой стратегии $s'_i(y)$

(31) $\Phi_i(\Psi[s'_i(y), s_{-i}(y)]) - \Phi_i(\Psi(s)) \leq e$,

где $s_{-i}(y) = (s_j(y))_{j \in N \setminus \{i\}}$ [60, 65].

Определение e-равновесия Нэша при $e = 0$ переходит в определение равновесия Нэша.

Введем обозначение для функций стимулирования, отличных от нуля только в одной точке:

(32) $P(p, y^*) := \begin{cases} p, & y = y^*; \\ 0, & y \neq y^*. \end{cases}$

Лемма 1. Пусть $(s_i(y))_{i \in N}$ – произвольный вектор стратегий центров. Тогда для центра i существует стратегия (функция стимулирования) вида (32), которая при заданной обстановке $s_{-i}(y) = (s_j(y))_{j \in N, j \neq i}$ дает i-му центру тот же выигрыш, что и исходная стратегия $s_i(y)$.

Доказательство. Достаточно взять стратегию i-го центра

(33) $\tilde{s}_i(y) = P(s_i(y^*), y^*)$,

где $(s_i(y))_{i \in N} \Rightarrow y^*$. При таком изменении стимулирования множество действий, доставляющих максимум целевой функции агента может только сузиться и, по предположению 3, агент выберет то же действие, что и при исходном векторе стратегий. Так как $\tilde{s}_i(y^*) = s_i(y^*)$, то выигрыш i-го центра не изменился. •

Следствие 1. Для любого центра i при фиксированной обстановке $s_{-i}(y)$ любое достижимое с помощью произвольной стратегии значение его целевой функции Φ_i достижимо и с помощью стратегии вида (33). •

Лемма 2. Пусть $(s_i(y))_{i\in N}$ – e-равновесие Нэша игры центров, приводящее к выбору агентом действия y_0, и выигрыш центра i в равновесии равен Φ_i. Тогда центр i может в одиночку изменить свою функцию стимулирования $s_i(y)$ на функцию вида

(34) $\tilde{s}_i(y) = P(s_i(y_0), y_0) + \sum_{j\in N\setminus\{i\}} P(s_i(y_j), y_j)$,

где y_j находится из условия $(s_j(y) = 0, s_{-j}(y)) \Rightarrow y_j$, и полученный набор стратегий $(\tilde{s}_i(y), s_{-i}(y))$ будет e-равновесием Нэша, реализующим ту же точку y_0, причем выигрыши всех центров не изменятся.

Доказательство. Очевидно, что система стимулирования $(\tilde{s}_i(y), s_{-i}(y))$ реализует точку y_0. Действительно, выигрыш агента в точках y_i $(i\in\{0\}\cup N)$ остался прежним, во всех же прочих точках не увеличился, то есть, по предположению 3, действие y_0 останется выбором агента. Выигрыши всех центров не изменились, так как значение их функций стимулирования в точке y_0 не изменилось. Необходимо теперь доказать, что новый вектор стратегий будет e-равновесием Нэша. Для этого нужно показать, что стратегии центров являются наилучшими (с точностью до e) ответами на новую обстановку.

Стратегия $s_i(y)$ центра i была одним из наилучших (с точностью до e) ответов на обстановку $s_{-i}(y)$ (так как исходный вектор стратегий был e-равновесием Нэша). Его выигрыш при использовании стратегии (34) не изменился, то есть эта стратегия является наилучшим с точностью до e ответом на ту же обстановку $s_{-i}(y)$.

Рассмотрим теперь произвольный центр с номером k ($k \neq i$). По следствию 1 при фиксированной обстановке $s_{-k}(y)$ все значения его целевой функции достигаются на множестве его стратегий вида (33), кроме того, одним из его e-наилучших ответов является функция $P(s_k(y_0), y_0)$ (так как исходный вектор стратегий является e-равновесием Нэша). Поскольку функция стимулирования (34) i-го центра уменьшилась по сравнению со своим исходным значением во всех точках, кроме y_j, $j\in\{0\}\cup N$, а стратегии остальных центров не изменились, то и в новой ситуации центру k выгодна реализация действия y_0.

В то же время, в новой ситуации k-й центр не может уменьшить значение своей функции стимулирования в точке y_0. Действительно, в исходной ситуации выбор k-м центром стратегии $P(\breve{s}_k, y_0)$, где $\breve{s}_k(y_0) < s_k(y_0)$ приводит к реализации точки y_k, то есть равнозначен выбору стратегии $s_k(y) = 0$. В новой ситуации равновесия значение целевой функции агента в точке y_k не изменилось (так как не изменилось суммарное стимулирование в этой точке). Значит, при уменьшении k-м центром значения своего стимулирования в точке y_0 агент выберет действие y_k, что приносит k-му центру меньший выигрыш, что следует из того, что $s_k(y) = 0$ не являлась его наилучшим ответом в исходной обстановке. Следовательно, $(\tilde{s}_i(y), s_{-i}(y))$ является e-равновесием Нэша. •

Иначе говоря, для любого e-равновесия Нэша можно найти e-равновесие, реализующее ту же точку, что и исходное, дающее всем центрам те же выигрыши, но в котором функция стимулирования каждого центра отлична от нуля не более чем в n точках.

Лемма 3. Для произвольного набора чисел y_0, Φ_1, …, Φ_n, такого, что существует e-равновесие Нэша, реализующее действие y_0 и дающее i-му центру выигрыш Φ_i, $i\in N$, найдется e-равновесие Нэша со стратегиями центров вида (34), реализующее действие y_0 и дающее i-му центру выигрыш Φ_i.

Доказательство производится n-кратным применением леммы 2•

Необходимость использования e-равновесий Нэша в формулировках лемм 2 и 3 обусловлена тем, что функцию $\Psi(s)$ в некоторых случаях можно определить так, что множество равновесий Нэша (но не множество e-равновесий) будет пусто. Однако справедливо следующее замечание:

Замечание 1. Можно положить $e = 0$ и считать e-равновесия, в которых стратегии центров имеют вид (34) обычными равновесиями Нэша, дополнительно указывая, что агент при прочих равных условиях должен выбирать действие y_0. То есть переход к рассмотрению равновесий Нэша требует введения предположения о том, что *при прочих равных условиях агент выбирает «определенное центрами» действие* y_0.

Если равновесные стратегии центров имеют вид (34), то равновесие Нэша можно полностью описать набором $n + 1$ действий $y_0, y_1, \ldots, y_n$ и значениями функций стимулирования всех центров в n точках (всего $n^2 + n + 1$ чисел).

Таким образом, если интересоваться (что достаточно для дальнейшего изложения) только выбираемым агентом действием y_0 и выигрышами $\{\Phi_i\}_{i\in N}$ всех центров в равновесии, то достаточно рассматривать только равновесия, в которых все центры используют стратегии вида

(35) $s_i(y) = P(s_i^0, y_0) + \sum_{j\in N} P(s_i^j, y_j)$,

где $s_i^k \geq 0, s_i^i = 0 \ \forall i \in N, k \in \{0\} \cup N$.

Опишем множество равновесий Нэша, в которых стратегии всех центров имеют вид (35). Введем обозначения:

(36) $G_i := \max_{y\in A}\{H_i(y) - c(y)\}, i \in N$,

выигрыш i-го центра, который он может получить «в одиночку» (будем считать, что $G_i > 0$, $i \in N$, то есть у каждого из центров есть допустимая функция стимулирования, при которой агент не отказывается от игры);

(37) $f := \sum_{i\in N} s_i^0 - c(y_0) \geq 0$,

выигрыш агента в равновесии.

Теорема 1. Все равновесия Нэша (в смысле замечания 1), в которых стратегии центров имеют вид (35), можно разбить на два типа: равновесия С-типа («сотрудничество»), в которых $f = 0$ (то есть центры не переплачивают агенту за выбор нужного им действия y_0), определяемые условиями:

(38) $\sum_{i\in N} s_i^0 = c(y_0)$, $\sum_{i\in N} s_i^j \leq c(y_j) \quad \forall j \in N$,

(39) $0 \leq s_i^0 \leq H_i(y_0) - G_i$ для каждого центра $i \in N$;

и равновесия К-типа («конкуренция»), определяемые системой условий

(40) $\sum_{i\in N} s_i^j - c(y_j) = f > 0 \quad \forall j \in \{0\} \cup N$,

(41) $\max[H_i(y_i); G_i - f] \leq H_i(y_0) - s_i^0 \leq H_i(y_0)$,

(42) $0 \leq H_i(y_j) - s_i^j \leq \min[H_i(y_j); H_i(y_0) - s_i^0] \quad \forall i, j \in N$

Левые неравенства в (42) должны выполняться только если требуется выполнение предположения 2 «запрета блефа».

Доказательство. Введем обозначения:

(43) $f_{-i}^j = \sum_{k\in N\setminus\{i\}} s_k^j - c(y_j)$ – выигрыш агента в точке y_j, $j \in N \cup \{0\}$ при условии, что стимулирование этого действия i-м центром равно нулю: $s_i(y_j) = 0$.

(44) $f_{-i} = \max[\max_{j\in N\cup\{0\}} f_{-i}^j; 0]$ – значение целевой функции, которое i-й центр должен обеспечить агенту в некоторой точке y при фиксированных стратегиях других центров для того, чтобы агент выбрал это действие.

Набор стратегий $s_i(y)$ вида (35) будет равновесием Нэша, реализующим (в смысле Замечания 1) точку y_0, если стратегия каждого центра будет наилучшим ответом на стратегии остальных центров. Для стратегий центров вида (35) неравенство (31) можно записать в виде условий (для каждого центра $i \in N$):

(45) $s_i^0 = f_{-i} - f_{-i}^0$

– условие наименьших затрат на стимулирование при реализации действия y_0. Это же условие обеспечивает выгодность для агента участия в игре.

(46) $H_i(y_0) + f_{-i}^0 \geq H_i(y_j) + f_{-i}^j \quad \forall j \in N$,

(47) $H_i(y_0) + f_{-i}^0 \geq H_i(y) - c(y) \quad \forall y \in A$

– условия выгодности реализации действия y_0 для i-го центра, как по сравнению с действиями y_j (46), так и по сравнению с прочими действиями $y \in A$ (47).

(48) $0 \leq s_i^j \leq H_i(y_j)$ – балансовое ограничение (если требуется выполнение предположения 2, то это неравенство должно

выполняться для всех действий y_j, $j \in N \mathbf{U} \{0\}$, в противном случае – только для y_0).

Так как неравенство (47) должно выполняться для всех действий y, его можно записать так:

$H_i(y_0) - s_i^0 \geq G_i$ (см. определение G_i, формула (36)).

Из формул (37), (45) следует, что, так как $s_i^0 + f_{-i}^0 = f$, то $\forall i \in N \quad f_{-i} = f$.

Рассмотрим сначала случай $f = 0$ (С-равновесие). Из (45) следует, что

(49) $\sum_{i \in N} s_i^0 = c(y_0)$, то есть доказано условие (38).

Условия выгодности реализации действия y_0 для i-го центра (46), (47) можно записать в виде

(50) $0 \leq s_i^0 \leq H_i(y_0) - G_i$, положив s_i^j при $j \neq 0$ равными нулю, так как они не влияют на выигрыши центров в равновесии, то есть доказано (39).

Пусть теперь $f > 0$ (К- равновесие). Тогда (45) преобразуется к виду

(51) $\forall i \in N \;\; f = f_{-i} = \max_{j \in N} f_{-i}^j = \max_{j \in N} [\sum_{k \in N} s_k^j - c(y_j) - s_i^j]$.

Из этой формулы следует, что

(52) $f = \sum_{k \in N} s_k^j - c(y_j) \quad \forall j \in N \cup \{0\}$, а не только для $j = 0$, как следует из формулы (37).

Действительно, обозначим $j(j) := \sum_{k \in N} s_k^j - c(y_j)$. Надо доказать, что $\forall j \in N \; j(j) = f$. Предположим, что $\exists j^* : j(j^*) = \max_{j \in N} j(j) > f$.

Возьмем $i^* = j^*$, тогда, так как $s_{i^*}^{i^*} = 0$, выполнено неравенство $\max_{j \in N} [j(j) - s_{i^*}^j] = j(j^*) > f$. Но, по формуле (51), $\forall i \quad \max_{j \in N} [j(j) - s_i^j] = f$. Таким образом, $\max_{j \in N} j(j) = f$.

Пусть теперь $\exists j^{**} : j(j^{**}) = \min_{j \in N} j(j) < f$. Тогда, из формулы (51) для $i^{**} = j^{**}$ следует, что найдется такой j, что

$j(j^{**}) < j(j) - s_{i^{**}}^j = f$. Но, так как $\max_{j \in N} j(j) = f$, следовательно $j(j) - s_{i^{**}}^j < j(j^{**}) = f$. Получили противоречие, следовательно, (52) верно.

Из (52) следует, что

$\forall i \in N, j \in N \mathbf{U} \{0\} \quad f - [\sum_{k \in N \setminus \{i\}} s_k^j - c(y_j)] = f - f_{-i}^j = s_i^j$.

Тогда балансовое ограничение (48) можно записать в виде

(53) $H_i(y_0) - s_i^0 \geq H_i(y_j) - s_i^j \quad \forall i, j \in N$, что в совокупности с требованием неотрицательности s_i^j доказывает условие (42). Так как $s_i^i = 0$, можно написать, что $H_i(y_0) - s_i^0 \geq H_i(y_i) \quad \forall i \in N$, В сочетании с (47) это утверждение доказывает условие (41). •

Из доказательства теоремы 1 следует, что условия (38)-(42) являются необходимым и достаточным условием того, что набор стратегий вида (35) является равновесием Нэша.

Для исследования кооперации центров в рассматриваемой задаче потребуется искать равновесия Нэша игры двух центров. Определим множество равновесий Нэша для этого случая.

Равновесия С-типа можно записать следующим образом:

(54) $c(y_0) - H_2(y_0) + G_2 \leq s_1^0 \leq H_1(y_0) - G_1$, $s_2^0 = c(y_0) - s_1^0$.

Эта область не пуста при $G_1 + G_2 \leq \max_{y_0 \in A} [H_1(y_0) + H_2(y_0) - c(y_0)]$.

Множество равновесий К-типа задается условиями

(55) $s_1^0 + s_2^0 - c(y_0) = s_2^1 - c(y_1) = s_1^2 - c(y_2) = f > 0$,

(56) $\max[H_1(y_1), G_1 - f] \leq H_1(y_0) - s_1^0 \leq H_1(y_0)$,

$\max[H_2(y_2), G_2 - f] \leq H_2(y_0) - s_2^0 \leq H_2(y_0)$,

(57) $0 \leq H_1(y_2) - c(y_2) - f \leq H_1(y_0) - s_1^0$,

$0 \leq H_2(y_1) - c(y_1) - f \leq H_2(y_0) - s_2^0$.

Имея эти выражения для множества равновесий Нэша игры центров, можно переходить к рассмотрению их коалиционного взаимодействия.

Кооперативное взаимодействие центров в ОС с распределенным контролем

Для исследования возможностей кооперации центров в рассматриваемой игре построим характеристическую функцию $v(S)$, ставящую в соответствие каждой коалиции суммарный выигрыш, на который могут рассчитывать ее участники, играя совместно. Будем считать, что характеристическая функция определяется как равновесный по Нэшу выигрыш коалиции S в игре с коалицией $N\backslash S$, состоящей из всех остальных центров. Тогда задача исследования игры состоит в том, чтобы определить, какие коалиции будут образованы, и каким образом доход коалиций будет распределен между их участниками.

Построение функции $v(S)$ можно разбить на следующие этапы:

1. Определение целевой функции коалиций S и $N\backslash S$ и множеств их стратегий.
2. Построение множества равновесий Нэша игры коалиций S и $N\backslash S$.
3. Выбор одного из равновесий в качестве основы для вычисления характеристической функции.

В данной задаче целевая функция коалиции S имеет вид:

(58) $\Phi_S(y,(s_i(y))_{i\in S}) = \sum_{i\in S} H_i(y) - \sum_{i\in S} s_i(y) = H_S(y) - s_S(y)$,

где $H_S(y) = \sum_{i\in S} H_i(y)$, $s_S(y) = \sum_{i\in S} s_i(y)$.

Соответственно, для коалиции $N\backslash S$ имеем:

(59) $\Phi_{N\backslash S}(y,(s_i(y))_{i\in N\backslash S}) = H_{N\backslash S}(y) - s_{N\backslash S}(y)$.

Для такой игры двух лиц множество равновесий Нэша описывается условиями (54)-(57). Это множество достаточно обширно и состоит из равновесий двух типов – С и К. Наличие равновесий С-типа может интерпретироваться как возможность *совместной работы* для центров. Пустота множества равновесий С-типа говорит о *принципиальной невозможности кооперации центров*. Поскольку нас интересует случай кооперации центров, будем считать, что для произвольной коалиции S выполнено неравенство

(60) $G_S + G_{N\backslash S} \le G_N$

и зона равновесий С-типа не пуста.

Для построения характеристической функции необходимо взять одно из равновесий (или несколько, дающих коалиции S одинаковый выигрыш) за основу, то есть предположить, что центры, присоединяясь к коалиции S и оценивая перспективу совместных действий, рассчитывают именно на этот результат. Механизм выбора того или иного равновесия зависит от условий решаемой прикладной задачи. Рассмотрим некоторые возможные варианты.

Одним из общепринятых методов оценки выигрыша является принцип *максимального гарантированного результата* [19], когда в качестве оценки берется наихудший из возможных исходов.

1. *Гарантированный результат в игре с разрешенным блефом*. В игре, где блеф разрешен (то есть не требуется выполнения предположения 2), всегда найдется равновесие К-типа, в котором выигрыш коалиции S $v_{\Gamma 1}(S) = \max[\min_{y\in A} H_S(y);0]$. Это следующее равновесие:

$$s_S^0 = H_S(y_0) - \max[\min_{y\in A} H_S(y);0],\ s_{N\backslash S}^0 =$$

$$= H_{N\backslash S}(y_0) - \max[\min_{y\in A} H_{N\backslash S}(y);0],$$

(61) $s_S^{N\backslash S} = f(y_0) + c(y_{N\backslash S}),\ s_{N\backslash S}^S = f(y_0) + c(y_S)$,

$$y_S = \arg\min_{y\in A} H_S(y),\ y_{N\backslash S} = \arg\min_{y\in A} H_{N\backslash S}(y),$$

$$y_0 = \arg\max_{y\in A}[H_S(y_0) + H_{N\backslash S}(y_0) - c(y_0)],$$

где $f(y_0)$ – выигрыш агента в точке y_0.

Иначе говоря, если блеф разрешен, то у каждой коалиции есть возможность угрозой в точке y_S «загнать» противников в точку наименьшего дохода.

2. *Гарантированный результат в игре с запрещенным блефом*. Из (57) следует, что $f \le \min[H_S(y_{N\backslash S}) - c(y_{N\backslash S}); H_{N\backslash S}(y_S) - c(y_S)]$.

Тогда на основании формулы (56) можно записать условие на Φ_S:

$$\Phi_S \ge \max[H_S(y_S); G_S - H_S(y_{N\backslash S}) + c(y_{N\backslash S}); G_S - H_{N\backslash S}(y_S) + c(y_S)].$$

Для расчета гарантированного результата необходимо найти минимум правой части этого выражения по всевозможным равновесиям. Этот минимум достигается при

(62) $G_S = H_S(y_S^*) + H_{N\setminus S}(y_S^*) - c(y_S^*) = H_N(y_S^*) - c(y_S^*)$,

$y_{N\setminus S} = \arg\max_{y\in A}[H_S(y) - c(y)]$,

и равен $v_{Г2}(S) = \max[H_S(y_S^*);0]$, где y_S^* определяется из уравнения (62).

Очевидно, что $v_{Г2}(S) \geq v_{Г1}(S)$.

Другим способом сужения множества равновесий Нэша является выделение среди них оптимальных по Парето ситуаций. Действительно, выбираемая точка y_0 в равновесиях вида (54) является по сути дела результатом некоторых «переговоров» между коалициями S и $N\setminus S$. Результаты же переговоров обычно не доминируются по Парето [53, 80, 81, 85]. То есть эффективны по Парето решения, реализующие действие

(63) $y_N := Arg\max_{y\in A} G_N(y) = Arg\max_{y\in A}[H_S(y) + H_{N\setminus S}(y) - c(y)]$.

3. *Гарантированный результат по равновесиям, оптимальным по Парето*. Если область равновесий С-типа не пуста, то есть справедливы неравенства (60), достаточно рассматривать только равновесия С-типа. Тогда из неравенства (54) следует, что гарантированный результат коалиции S $v_{П1}(S) = G_S$. К этому же результату приводит и более слабое, чем оптимальность по Парето, ограничение на равновесие, а именно, «условие взаимной благожелательности» $f = 0$.

Действительно, из (54) следует, что при реализации одного из равновесий С-типа наихудшее для коалиции равновесие реализуется при $s_S = H_S(y_0) - G_S$. Тогда гарантированный выигрыш коалиции S будет равен G_S независимо от реализуемого действия y.

Применимость условия $f = 0$ (при непустой области С-равновесий) обусловлена тем, что для любого равновесия К-типа одна из коалиций или оба сразу могут изменять свою функцию стимулирования, не уменьшая своего выигрыша, но увеличивая выигрыш противника, до тех пор, пока не будет реализовано одно из равновесий С-типа. Поэтому при доброжелательности по отношению к противникам реализация таких равновесий более вероятна.

4. *Средний выигрыш по равновесиям, оптимальным по Парето*. Коалиция может более оптимистично оценивать результаты

переговоров, рассчитывая не на наихудший их исход, а, например, на среднее значение выигрыша. При непустой области С-равновесий и реализации действия (63) среднее значение выигрыша $v_{СП}(S) = 0.5(G_S + G_N - G_{N\setminus S})$.

Завершая рассмотрение способов построения характеристической функции, отметим, что во всех случаях выигрыш максимальной коалиции $v(N) = G_N$.

Для целей управления особенно важны условия, при которых возможно объединение всех центров в максимальную коалицию N. При этом все они действуют как один игрок с целевой функцией

(64) $\Phi_N(.) = \sum_{i\in N} H_i(y) - \sum_{i\in N} s_i(y)$.

Необходимым и достаточным условием устойчивости максимальной коалиции является условие *сбалансированности кооперативной игры* (11). Проверка условия сбалансированности произвольной кооперативной игры сводится к задаче линейного программирования. Интересным представляется, однако, нахождение просто интерпретируемых достаточных условий сбалансированности игры (то есть достаточных условий устойчивости коалиции из всех центров).

Достаточные условия сбалансированности игры центров

Если для построения характеристической функции используется гарантированный результат с разрешенным блефом, то $v(S) = \max[\min_{y\in A} \sum_{i\in S} H_i(y);0]$ для всех коалиций, кроме максимальной коалиции N – для нее $v(N) = G_N$.

Теорема 2. Если независимо от номера $i \in N$, $\min_{y\in A} H_i(y)$ достигается в одной точке $y_{\min} := \arg\min_{y\in A} H_i(y)$, то игра сбалансирована.

Доказательство. По условию теоремы $v(S) = \max[\sum_{i\in S} H_i(y_{\min});0]$.

Игра сбалансирована, если выполнено условие (11), то есть если для произвольного сбалансированного покрытия d верно неравенство

(65) $\sum_{S \subset N} d(S) \cdot \max[\sum_{i \in S} H_i(y_{\min});0] \le G_N$.

Преобразуем левую часть этого неравенства:

$$\sum_{S \subset N} d(S) \cdot \max[\sum_{i \in S} H_i(y_{\min});0] = \sum_{\substack{S \subset N, \\ \sum_{j \in S} H_j(y_{\min})>0}} d(S) \cdot \sum_{i \in S} H_i(y_{\min}) =$$

$$= \sum_{i \in N} H_i(y_{\min}) \sum_{\substack{S: i \in S, \\ \sum_{j \in S} H_j(y_{\min})>0}} d(S) \le \sum_{\substack{i \in N, \\ H_i(y_{\min})>0}} H_i(y_{\min}) \sum_{S: i \in S} d(S) =$$

$$\sum_{i \in N} \max[H_i(y_{\min}),0] \sum_{S: i \in S} d(S).$$

Но $\sum_{S: i \in S} d(S) = 1$ для всех i, так как $d(S)$ – сбалансированное покрытие, то есть условие (65) выполнено, если справедливо неравенство

(66) $\sum_{i \in N} \max[H_i(y_{\min}),0] \le G_N$.

Из вида равновесия (61) для данного случая следует, что

(67) $\forall S \subset N \quad \max[\min_{y \in A} \sum_{i \in S} H_i(y),0] + \max[\min_{y \in A} \sum_{i \in N \setminus S} H_i(y),0] \le G_N$.

Пусть $\min_{y \in A} \sum_{i \in S} H_i(y) > 0 \quad \forall i \in N$. Тогда из (67) следует, что $G_N \ge \min_{y \in A} \sum_{i \in S} H_i(y) + \min_{y \in A} \sum_{i \in N \setminus S} H_i(y) \ge \sum_{i \in N} \min_{y \in A} H_i(y)$, и условие (66) верно.

Предположим теперь, что $\exists i \in N : \min_{y \in A} \sum_{i \in S} H_i(y) < 0$. Рассмотрим коалицию $S = \{i \in N : H_i(y_{\min}) > 0\}$. Формула (67) для такой коалиции преобразуется к виду $\sum_{i \in S} H_i(y_{\min}) \le G_N$, то есть $\sum_{i \in N} \max[H_i(y_{\min}),0] \le G_N$, следовательно, неравенство (66) верно. •

Если коалиция рассчитывает на средний (среди оптимальных по Парето равновесий) выигрыш, то есть $v(S) = v_{СП}(S)$, то кооперативная игра является *игрой с постоянной суммой* [67], то есть $\forall S \subset N \quad v(S) + v(N \setminus S) = v(N)$. Такие игры не сбалансированы [67], если $\sum_{i \in N} v(\{i\}) \ne v(N)$, то есть если игра является существенной.

Пусть теперь коалиция рассчитывает на гарантированный Парето-эффективный выигрыш: $v(S) = v_{ГП}(S) = G_S$. Приведем несколько вспомогательных результатов.

Лемма 4. Для любого сбалансированного покрытия d и произвольных векторов $A_i \in \Re^m$, $i \in N$, справедливо равенство

(68) $\sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S} A_i = \sum_{i \in N} A_i$.

Доказательство. Порядок суммирования в (68) можно изменить, суммируя сначала по коалициям, содержащим некоторого игрока i, а затем по всем игрокам из N.

$$\sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S} A_i = \sum_{i \in N} \sum_{S: i \in T} d_S A_i = \sum_{i \in N} A_i \sum_{S: i \in S} d_S .$$

По определению сбалансированного покрытия, $\sum_{S: i \in S} d_S = 1$ для всех i.

Следовательно, $\sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S} A_i = \sum_{i \in N} A_i \sum_{S: i \in S} d_S = \sum_{i \in N} A_i$. •

<u>Определение 21:</u> Пусть задана функция $p : \Re_+^m \to \Re^1$. Будем говорить, что функция *линейно мажорируема* в точке $A \in \Re_+^m$, если найдется такой вектор $B \in \Re^m$, что $p(A) = \langle A, B \rangle$ и для любого вектора $A' \le A$ (неравенство выполнено в отдельности по каждой из компонент векторов) верно неравенство $p(A') \le \langle A', B \rangle$.[1]

<u>Определение 22:</u> Функция $p : \Re_+^m \to \Re^1$ называется супераддитивной, если для любой пары векторов $A, B \in \Re_+^m$ справедливо неравенство $p(A) + p(B) \le p(A + B)$.[2]

Например, выпуклая и неположительная в нуле функция неотрицательной <u>вещественной</u> переменной супераддитивна.

Лемма 5. Если функция $p : \Re_+^m \to \Re^1$ имеет вид $p(A') = q(\langle A', C \rangle)$, где $C \in \Re_+^m$ – вектор с неотрицательными компонентами, а $q(.)$ – супераддитивная функция действительной

---

[1] Угловыми скобками здесь и далее обозначается скалярное произведение векторов.

[2] Данное понятие не следует путать с супераддитивностью функции множества (1).

переменной, то $p(.)$ линейно мажорируется в любой точке $A \in \Re_+^m$.

Доказательство. Действительно, выберем вектор

$$B = \frac{q(<A,C>)}{<A,C>} C.$$

Тогда $p(A) = <A,B>$. Так как $q(.)$ супераддитивна и для любой точки $A' \le A$ в силу неотрицательности каждой компоненты вектора C $<A',C> \le <A,C>$, то

$$p(A') = q(<A',C>) \le \frac{q(<A,C>)}{<A,C>} <A',C> = <A',B>. \bullet$$

Лемма 6. Если функция $p: \Re_+^m \to \Re^1$ *сепарабельна*, то есть имеет вид $p(A') = \sum_{j=1}^m q_j((A')_j)$, причем $q_j(.)$ – супераддитивные функции действительной переменной, то $p(.)$ линейно мажорируется в любой точке $A \in \Re_+^m$.

Доказательство. Выберем вектор $B = (\frac{q_j((A)_j)}{(A)_j})_{j=1...m}$.

Он удовлетворяет определению линейной мажорируемости, поскольку $p(A) = \sum_{j=1}^m q_j((A)_j) = <A,B>$ и, в силу супераддитивности функций $q_j(.)$, для произвольной точки $A' \le A$ верно неравенство

$$p(A') = \sum_{j=1}^m q_j((A')_j) \le \sum_{j=1}^m \frac{q_j((A)_j)}{(A)_j} (A')_j = <A'B>. \bullet$$

Лемма 7. Если $v(S) = p(\sum_{i \in S} A_i)$, где $A_i \in \Re_+^m$, $i \in N$ и $p(.)$ линейно мажорируется в точке $\sum_{i \in N} A_i$, то игра сбалансирована.

Доказательство. По определению линейно мажорируемой функции найдется такой вектор $B \in \Re^m$, что $p(\sum_{i \in N} A_i) = <\sum_{i \in N} A_i, B>$ и для любого вектора $A' \in \Re_+^m$, $A' \le \sum_{i \in N} A_i$, справедливо неравенство $p(A') \le <A',B>$.

Игра сбалансирована, если для произвольного сбалансированного покрытия верно неравенство (11): $\sum_{S \subset N} d_S p(\sum_{i \in S} A_i) \le p(\sum_{i \in N} A_i)$. Положим $A' = \sum_{i \in S} A_i$ и увеличим левую часть неравенства по свойству мажорируемой функции: $\sum_{S \subset N} d_S p(\sum_{i \in S} A_i) \le \sum_{S \subset N} d_S <\sum_{i \in S} A_i, B> = <\sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S} A_i, B>$. По лемме 4 $\sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S} A_i = \sum_{i \in N} A_i$, а значит, верна и оценка

$$\sum_{S \subset N} d_S p(\sum_{i \in S} A_i) \le <\sum_{i \in N} A_i, B> = p(\sum_{i \in N} A_i). \bullet$$

Из леммы 7 следует, что если характеристическая функция удовлетворяет условиям лемм 5 или 6, то игра сбалансирована.

Лемма 8. Если затраты агента – выпуклая сепарабельная функция, то есть $c(y) = \sum_{j=1}^m c_j(y_j)$, где функции $c_j(.)$ – выпуклые неубывающие, а доходы центров – линейные неубывающие по всем компонентам вектора действия функции, то кооперативная игра центров сбалансирована.

Доказательство. Линейные функции дохода центров имеют вид $H_i(y) = <l_i y>$, то есть представляют собой скалярное произведение вектора действия y на вектор коэффициентов l_i. При этом для произвольной коалиции S функция $G_S(y)$ принимает вид

$G_S(y) = <l_S, y> - c(y)$,

где l_S – вектор коэффициентов функции дохода коалиции.

Максимум функции $G_S(y)$ по действию y достигается при обращении в ноль всех частных производных этой функции, то есть при

(69) $(l_S)_j = c'_{y_j}(y) = c'_j(y_j)$, $j = 1...m$.

Так как все производные $c'_j(y_j)$ монотонны, из уравнений (69) можно явно выразить оптимальное для коалиции действие y как вектор-функцию от вектора коэффициентов функции дохода: $y_j((l_S)_j) = [c'_j]^{-1}((l_S)_j)$. Подставляя это выражение в (62), с учетом (69) получим выражение для характеристической функции, как функции от вектора коэффициентов l_S:

(70) $v(S)=p(l_S):=\sum_{j=1}^{m}\Big[(l_S)_j[c_j^{'}]^{-1}\big((l_S)_j\big)-c_j\big([c_j^{'}]^{-1}((l_S)_j)\big)\Big]$.

Эта функция сепарабельна по компонентам вектора l_S, таким образом, если каждое из слагаемых вида

$$q_j((l_S)_j):=(l_S)_j[c_j^{'}]^{-1}\big((l_S)_j\big)-c_j\big([c_j^{'}]^{-1}\big((l_S)_j\big)\big)$$

в (70) представляет собой супераддитивную функцию, то, по лемме 5 характеристическая функция линейно мажорируема, а, следовательно, игра сбалансирована.

Функция действительного аргумента супераддитивна, если она неположительная в нуле и выпуклая. Очевидно, что $q_j(0)=-c_j\big([c_j^{'}]^{-1}(0)\big)\le 0$. Покажем, что q_j выпукла.

Функцию $q_j(.)$ можно записать в виде сложной функции:

$$g_j\big(y_j(.)\big):=q_j\big((l_S)_j\big)=c_j^{'}\big(y_j((l_S)_j)\big)y_j\big((l_S)_j\big)-c_j\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big),$$

где $y_j(l)=[c_j^{'}]^{-1}(l)$.

тогда $q_j^{''}\big((l_S)_j\big)=g_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)\big[y_j^{'}\big((l_S)_j\big)\big]^2+g_j^{'}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)y_j^{''}\big((l_S)_j\big)$.

Дифференцируя $g_j(.)$ по y_j, имеем $g_j^{'}\big(y_j\big)=c_j^{''}(y_j)y_j$, $g_j^{''}(y_j)=c_j^{'''}(y_j)y_j+c_j^{''}(y_j)$. Дифференцируя $y_j(.)$ по $(l_S)_j$, имеем также $y_j^{'}\big((l_S)_j\big)=\dfrac{1}{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)}$, $y_j^{''}\big((l_S)_j\big)=\dfrac{c_j^{'''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)}{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)^3}$.

Подставляя полученные функции в выражение для $q_j^{''}(.)$, имеем:

$$q_j^{''}\big((l_S)_j\big)=\Big\{c_j^{'''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)y_j\big((l_S)_j\big)+c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)\Big\}\frac{1}{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)^2}-$$

$$-c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)y_j\big((l_S)_j\big)\frac{c_j^{'''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)}{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)^3}=\frac{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)}{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)^2}=\frac{1}{c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)}\ge 0$$

То есть $q_j(.)$ выпукла, если $c_j^{''}\big(y_j\big((l_S)_j\big)\big)\ge 0$ для всех $(l_S)_j$, то есть затраты агента выпуклы, что предполагается условием леммы. •

Если функция затрат агента не сепарабельна – лемма 8 неприменима.

Тогда для вычисления характеристической функции $v_{ГП}(S)=v(l_S)=\max_{y\in A}G(y,l_S):=\max_{y\in A}[<l_S,y>-c(y)]$

в предположении, что максимум достигается во внутренней точке множества A допустимых действий агента, необходимо решить систему уравнений

(71) $\big(l_S\big)_j=c_{y_j}^{'}(y)$, $j=1...m$,

из которой определяется зависимость $y=y(l)$ оптимального вектора действия от вектора коэффициентов l функции дохода произвольной коалиции.

Лемма 9. Если для любого $l\in\Re_+^m$ решение системы (71) единственно и имеет вид $y_j=B_j g(<l,B>)$, $j=1...m$, где $B\in\Re_+^m$, а $g(.)$ – неубывающая функция, то игра с характеристической функцией $v_{ГП}(S)$ сбалансирована.

Доказательство. Покажем, что характеристическая функция $v_{ГП}(S)$ в зависимости от вектора коэффициентов l_S функции дохода имеет вид

(72) $v_{ГП}(S)=p(<l,B>)$,

где $p(.)$ – некоторая супераддитивная функция скалярного аргумента.

Если характеристическая функция

$$v_{ГП}(S)=<l_S,y(l_S)>-c(y(l_S))$$

представима в виде (72), то для любого вектора $l\in\Re_+^m$ верно тождество

$\dfrac{\partial G(l)}{\partial l_j}\equiv p'(<l,B>)B_j$, $j=1...m$, где $G(l):=<l,y(l)>-c(y(l))$,

то есть

$$y_j(l)+\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial y_i(l)}{\partial l_j}\left[l_i-\frac{\partial c_i(y(l))}{\partial y_i}\right]\equiv p'(<l,B>)B_j\ ,\ j=1...m.$$

Из (71) следует, что второе слагаемое в левой части тождества равно нулю, то есть $y_j(l)\equiv p'(<l,B>)B_j$ или, с учетом условия леммы, $g(<l,B>)\equiv p'(<l,B>)$. Таким образом, тождество верно.

Очевидно, что если функция $g(.)$ возрастает, то $p(.)$ выпукла. Кроме того, $p(0) = -c(y(0)) \le 0$, то есть $p(.)$ – супераддитивная функция. Значит, по леммам 6 и 7, игра супераддитивна. •

Таким образом, если условия леммы 9 выполнены, то для любой пары коалиций их оптимальные планы коллинеарны[1]. Для гладкой функции затрат агента это условие выполняется только в частных случаях, однако, если функция $p(.)$ в (72) строго выпукла, то игра остается сбалансированной, если для произвольной коалиции оптимальное действие $y = y(l)$ агента лежит *в некоторой окрестности* прямой $y = Bt$, $t \in [0,+\infty)$.

Следствие 2. Увеличение функции дохода всех центров на константу не влияет на результат лемм 8, 9.

Доказательство. Пусть $H_i(y) = h_i + l_i y$. Тогда, как легко видеть, характеристическая функция $w(S)$ полученной игры равна $w(S) = \sum_{i\in S} h_i + v(S)$ (где $v(S)$ удовлетворяет условиям лемм). Обозначим $u(S) = \sum_{i\in S} h_i$, тогда $w(S) = u(S) + v(S)$. По свойствам характеристических функций [67], если игры $u(S)$ и $v(S)$ сбалансированы, то сбалансирована и игра $w(S)$. Но, по лемме 4 для $u(S)$ сбалансирована, по леммам 8, 9 сбалансирована и $v(S)$. •

Теорема 3. Если функции дохода $H_i(y)$ гладкие, вогнутые и неубывающие, а функция затрат агента удовлетворяет условиям лемм 8 или 9, то игры с характеристическими функциями $v_{\Gamma 1}(S)$, $v_{\Gamma 2}(S)$, $v_{\Gamma\Pi}(S)$ сбалансированы.

Доказательство. Для игры $v_{\Gamma\Pi}(S)$ характеристическая функция имеет вид

$$v(S) = \sum_{i\in S} H_i(y_S) - c(y_S),$$

[1] Такая ситуация характерна для предприятий химической промышленности, где из одного вида сырья вырабатываются m видов продукции. При этом объем производства каждого вида готовой продукции из единицы сырья жестко определяется технологическим вектором B. Тогда точка оптимального плана $y_j = B_j g(< l, B >)$ определяется эффективностью $< l, B >$ использования продукции, произведенной из единицы сырья.

где $y_S = \arg\max_{y\in A}\left[\sum_{i\in S} H_i(y) - c(y)\right]$. Так как функции дохода $H_i(.)$ гладкие, вогнутые и неубывающие, то для каждой из них существует такой линейный функционал вида $\tilde{H}_i(y) = H_{i0} + < l_i, y >$, $l_i \in \Re^m_+$, что $\tilde{H}_i(y_N) = H_i(y_N)$ и для любого действия y верно неравенство $\tilde{H}_i(y) \ge H_i(y)$.

Рассмотрим игру с характеристической функцией

$$\tilde{v}(S) = \sum_{i\in S} H_{i0} + < \sum_{i\in S} l_i, y_S > - c(y_S).$$

Для произвольной коалиции $S \subset N$ имеет место неравенство $v(S) \le \tilde{v}(S)$, кроме того, для коалиции N оно превращается в равенство $v(N) = \tilde{v}(N)$.

По известному свойству характеристических функций [67] из сбалансированности игры $\tilde{v}(S)$ следует сбалансированность игры $v(S)$. Но из следствия 2, а также леммы 8 следует, что игра $\tilde{v}(S)$ сбалансирована. Значит, сбалансирована и игра $v(S)$.

Для произвольной коалиции $S \subset N$ значение характеристической функции $v_{\Gamma 2}(S)$ не превышает значения характеристической функции $v_{\Gamma\Pi}(S) = G_S$, так как в случае $v_{\Gamma 2}(S)$ шире множество, по которому вычисляется гарантированный результат (все равновесия Нэша, а не только оптимальные по Парето). Для максимальной же коалиции $v_{\Gamma 2}(N) = v_{\Gamma\Pi}(N) = G_N$. Значит, по тому же свойству характеристических функций, из сбалансированности игры $v_{\Gamma\Pi}(S)$ следует сбалансированность игры $v_{\Gamma 2}(S)$. Для $v_{\Gamma 1}(S)$ доказательство аналогично.•

Следствие 3. Как видно из доказательства, результат теоремы 3 легко обобщить на еще более широкий класс функций дохода центров, а именно, на все функции дохода, которые можно так аппроксимировать сверху возрастающими линейными функциями, чтобы данные аппроксимирующие функции касалась функций дохода центров в точке y_N (плановое действие для максимальной коалиции). •

Итак, на основании полученных результатов можно сделать вывод, что для образования максимальной коалиции *осторож-*

ных центров (то есть центров, использующих гарантированный результат для оценки выигрыша) достаточно, чтобы функции их доходов удовлетворяли условиям следствия 3, а затраты агента – условиям леммам 8 или 9. Эти условия выполняются для широкого класса ОС.

Если же центры промежуточного уровня более оптимистично настроены на результат переговоров ($v(S) = v_{СП}(S)$), то кооперация им не нужна, так как переговоры между коалициями дают им то же значение выигрыша, что и переговорный процесс внутри коалиции N, состоящей из всех центров.

Согласование интересов центров промежуточного уровня иерархии с интересами высшего руководства

В предыдущем пункте были исследованы случаи, когда в матричной структуре управления центрам промежуточного уровня иерархии (например, менеджерам проектов) выгодно объединяться в одну коалицию и совместно выбирать план агента. При этом всех центров можно рассматривать как одного игрока с целевой функцией

(73) $\Phi_N(.) = \sum_{i \in N} H_i(y) - c(y)$.

Хорошо это или плохо с точки зрения *высшего руководства* (ВР), представляющего интересы организации в целом? Для того чтобы ответить на этот вопрос, необходимо определить интересы ВР и методы его воздействия на функционирование системы.

Предположим, что цели ВР заключаются *в увеличении*, насколько это возможно, *дохода всех проектов* и в *уменьшении затрат* по этим проектам. Простейшим способом представления таких интересов является линейная свертка с неотрицательными весами a_i всех подцелей в единый критерий:

(74) $F(y) = \sum_{i \in N} a_i H_i(y) - a_0 c(y)$.

Таким образом, при $a_i \neq 1$ наблюдается рассогласование интересов ВР и менеджеров проектов, которые реализуют *не то действие агента*, *которое необходимо ВР*. Следовательно, ВР должно воздействовать каким-то образом на центры промежуточного уровня с тем, чтобы приблизить реализуемое действие y к требуемому (доставляющему максимум критерию эффективности (74)).

Методов воздействия на функционирование системы у ВР может быть много, но в рамках данной работы рассмотрим лишь один из них – внутрифирменное «налогообложение», когда устанавливается ставка b_i отчислений в пользу ВР с доходов $H_i(.)$ или ставка g_i отчислений с прибыли $H_i(.) - s_i(.)$ по проекту *i*. Как будет показано ниже, для полного согласования интересов ВР и центров промежуточного уровня достаточно единой ставки $g \in [0; g_{\max}]$ налога с прибыли, поэтому рассматривается только этот случай.

С учетом единой ставки налога с прибыли и дифференцированной ставки подоходного налога, целевые функции ВР и коалиции из всех центров среднего звена можно записать соответственно как

(75) $F(y) = g[\sum_{i \in N} a_i b_i H_i(y) - a_0 c(y)]$ и

$$\Phi(y) = (1-g)[\sum_{i \in N} (1-b_i) H_i(y) - c(y)].$$

Для согласования интересов ВР и менеджеров достаточно, чтобы их целевые функции достигали максимума в одной точке. Из (75) следует, что это условие выполнено при $a_i b_i / a_0 = 1 - b_i$, то есть при ставках подоходного налога $b_i = \dfrac{1}{1 + a_i / a_0}$. ВР заинтересовано в увеличении своей доли прибыли, поэтому $g = g_{\max}$. При такой системе налогообложения достигается полное согласование интересов ВР и менеджеров проектов (центров промежуточного уровня). Так, например, если $a_i = 1$, ставка подоходного налога должна быть равна 0.5.

Пример 5. *Взаимодействие компаний торгово-промышленного холдинга с Системным интегратором.*

Рассмотрим торгово-промышленный холдинг со структурой, изображенной на рис. 1. Появление в структуре холдинга отдельной компании – Системного интегратора объясняется тем, что вынесение функций информационного обеспечения в отдельное юридическое лицо приводят к существенному сокращению издержек за счет концентрации финансовых, информационных и трудовых ресурсов.

Однако частичная самостоятельность такой компании вступает в конфликт с необходимостью согласованного и сбалансированного развития информационных технологий на всех предприятиях холдинга. Монопольное положение Системного интегратора в холдинге приводит к необходимости постоянного контроля со стороны Управляющей компании как за внутренними тарифами, так и за приоритетами развития отдельных проектов автоматизации, в которых Системный интегратор выступает подрядчиком. При этом цели Управляющей компании (сбалансированное развитие информационных технологий всех предприятий, централизация информационных потоков и стремление к созданию в холдинге единой информационной среды) вступает в противоречие как с интересами предприятий в холдинге, каждое из которых заинтересовано в развитии своего направления и первоочередного решения его проблем, так и с интересами Системного интегратора, заинтересованного в реализации лишь наиболее рентабельных проектов.

При существующей в холдинге степени децентрализации управления Управляющая компания не может обеспечить такого контроля, поэтому особенно важными для нее являются условия, при которых функции контроля и выбора направления развития IT-проектов можно возложить на сами компании холдинга.

Взаимодействие компаний холдинга с системным интегратором оформляется договорами на оказание услуг, при этом Системный интегратор имеет возможность выделять для себя первоочередные проекты, а также в некоторых пределах определять ценовую политику. В целом эта задача соответствует рассмотренной выше задаче стимулирования с распределенным контролем. Проведенный анализ позволяет сказать, что при достаточно общих предположениях согласованная политика всех компаний холдинга представляет собой самое рациональное для них поведение. При этом неизбежный компромисс, связанный с необходимостью учета интересов всех компаний, поддерживается угрозой существенных убытков при сепаратных действиях одной или нескольких компаний. Тем не менее, одной возможности компромисса мало, и необходимой организационной мерой по его реализации может служить создание рабочей группы по автоматизации, включающей в себя представителей различных

подразделений производственных и торговых компаний холдинга. Поскольку развитие информационных проектов на предприятиях должно быть согласовано с интересами Управляющей компании, в рабочую группу должны также входить и ее представители. Корректировка приоритетов развития в сторону необходимых Управляющей компании может осуществляться с помощью субсидирования отдельных проектов (например, проектов по внедрению единой системы управленческого учета и отчетности, в создании которой Управляющая компания заинтересована в существенно б**о**льшей степени, чем управляемые компании). Этот механизм в некотором смысле аналогичен предложенному выше механизму внутреннего налогообложения. •

Итак, в данном разделе исследована характерная для матричных структур управления модель стимулирования одного агента несколькими центрами. Для этой задачи найдено множество равновесий Нэша игры центров, предложены несколько способов определения характеристической функции игры центров с целью построения кооперативной игры и исследования возможностей образования коалиций центров: гарантированный выигрыш по равновесиям Нэша для игры с блефом; гарантированный выигрыш по равновесиям Нэша для игры без блефа; гарантированный выигрыш среди Парето-оптимальных равновесий и средний выигрыш среди оптимальных по Парето равновесий Нэша.

Для всех, кроме последнего, способов построения характеристической функции были получены достаточные условия реализуемости коалиции всех центров (менеджеров промежуточного уровня иерархии), что описывает условия, при которых возможно полное согласование интересов менеджеров. Для последнего же способа показано, что полная кооперация центров невозможна.

Также была поставлена и (с помощью системы «внутреннего налогообложения») решена задача согласования интересов высшего руководства и среднего звена управления.

2.3. Механизмы стимулирования в задачах формирования состава ОС

В данном разделе на основе модели стимулирования в веерной ОС формулируются и решаются задачи первоначального формирования состава агентов и задача привлечения дополнительных агентов в систему. Исследуется влияние коалиционного поведения агентов на процессы формирования состава ОС.

Задачи формирования состава пока слабо изучены в рамках ТАС. Эти задачи являются предметом изучения других областей науки управления (теории операций, теории массового обслуживания и др.), однако пока имеется весьма малое количество работ, учитывающих активность поведения участников в задачах формирования состава [57]. Таким образом, актуальным является именно изучение задач формирования состава в условиях активного поведения элементов ОС.

Описание модели и обозначения [27, 31]

Рассмотрим задачу стимулирования в системе с n агентами. Как и прежде, N обозначает множество агентов.

Целевая функция центра $\Phi(y) = H(y) - \sum_{i \in N} s_i(y_i)$, где $y_i \in A_i = [0,+\infty)$ – действие i-го агента, $y := (y_1,..., y_n)$ – вектор действий агентов, $H(y)$ – доход центра от данного вектора действий – вогнутая по каждой компоненте y_i функция. Целевая функция i-го агента $f_i(y_i) = s_i(y_i) - c_i(y_i)$, где затраты агента $c_i(y_i)$ – выпуклая неотрицательная функция, зависящая только от действия $y_i \in A_i$ самого агента, при этом $c_i'(0) = 0$.

К данной постановке сводится и более общий случай *сепарабельных* затрат агентов вида $c_i(y) = c_i^1(y_i) + c_i^2(y_{-i})$. Эта задача приводится к исходной заменой функции дохода центра на $\tilde{H}(y) = H(y) + \sum_{i \in N} c_i^2(y_{-i})$ и затрат агентов на функции вида $\tilde{c}_i(y_i) = c_i^1(y_i)$.

Введем обозначение $c_i^0 := c_i(0)$ для постоянной составляющей функции затрат агентов, и $e_i(y_i) := c_i(y_i) - c_i^0$ – для переменных затрат агентов.

Определим доход центра в задаче стимулирования с заданным фиксированным составом исполнителей N.

Как показано в [58], решение задачи стимулирования для данного случая имеет вид:

(76) $s_i(y) = \begin{cases} c_i(y_i^*), & y = y_i^* \\ 0, & y \neq y_i^* \end{cases}$, где вектор планов y^* определяется из условия

(77) $y^* \in \operatorname{Arg}\max_y [H(y) - \sum_{i \in N} c_i(y)]$.

Введем упрощающее предположение о том, что

(78) $H(y) = H(\sum_{i \in N} y_i)$,

то есть доход центра зависит только от *общего объема производства* (например, когда все агенты производят однородную продукцию). Тогда формулу (77) на y^* можно записать в виде системы уравнений $c'_1(y_i^*) = ... = c'_n(y_i^*) = H'(y^*)$, то есть в точке равновесия производные затрат агентов равны между собой.

Целевая функция центра в равновесии имеет вид:

(79) $\Phi_{\max}(y^*) = H(\sum_{i \in N} y_i^*) - \sum_{i \in N} c_i(y_i^*)$.

Введем дополнительные обозначения:

$Y = \sum_{i \in N} y_i$ – *суммарное действие, реализуемое системой*,

$C(Y) = \min_{y: \sum_{i \in N} y_i = Y} \sum_{i \in N} c_i(y_i)$ – *минимальные затраты центра* по реализации суммарного действия Y. Тогда (79) можно записать в виде

(80) $\Phi_{\max}(Y^*) = \max_Y [H(Y) - \min_{y: \sum_{i \in N} y_i = Y} \sum_{i \in N} c_i(y_i)] = \max_Y [H(Y) - C(Y)]$.

Для функции минимальных затрат введем аналогичные введенным выше обозначения для ее постоянной и переменной составляющих:

$C^0 = \sum_{i \in N} c_i^0$, $E(Y) = \min_{y: \sum_{i \in N} y_i = Y} [e_i(y_i)]$.

Задачи формирования состава

В рамках данной модели можно рассмотреть следующие задачи формирования состава:

I. Для имеющегося множества N принять решение о включении или невключении в систему нового агента a (a – additional) с функцией затрат $c_a(y_a) = c_a^0 + e_a(y_a)$
   1. не изменяя функций стимулирования прочих агентов;
   2. изменяя функции стимулирования прочих агентов.

II. Для заданного множества претендентов N_0 определить оптимальный состав агентов N.

Задача I относится к случаю уже функционирующей системы, а задача II – к случаю формирования начального состава системы.

Задача I.1

С учетом пришедшего агента целевая функция центра принимает вид

(81) $\Phi_d(y_a) = H(Y^* + y_a) - C_0 - c_a^0 - E(Y^*) - e_a(y_a)$ (d – distorted).

Принимать на работу нового агента имеет смысл, если целевая функция центра от этого увеличивается, то есть если выполнено условие

(82) $\max\limits_{y_a \geq 0} \Phi_d(y_a) > \Phi_{\max} = \Phi(Y^*)$.

Тогда условие выгодности привлечения нового агента принимает вид:

$$\max_{y_a \geq 0}[H(Y^* + y_a) - H(Y^*) - e_a(y_a)] = \max_{y_a \geq 0}[\Delta H(y_a) - e_a(y_a)] > c_a^0,$$

или, иначе,

(83) $\max\limits_{y_a \geq 0}[\Delta H(y_a) - c_a(y_a)] > 0$.

Рис. 4 показывает, как графически можно найти оптимальный план нового агента. Начиная от точки Y^* от функции дохода центра отнимается функция затрат дополнительного агента. Если максимум получившейся функции достигается правее точки Y^* – добавление дополнительного агента целесообразно.

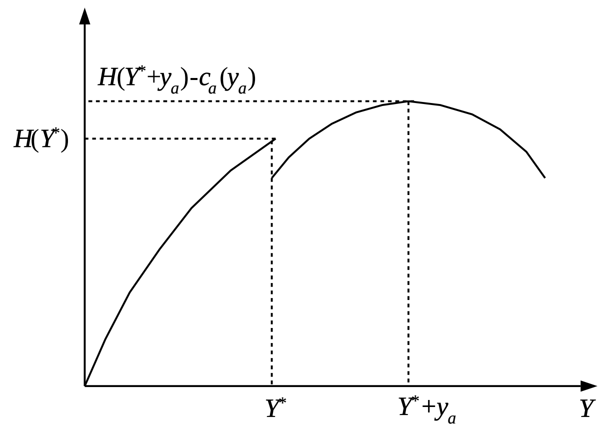


Рис. 4. Графическое построение оптимального плана нового агента

Задача I.2

В отличие от предыдущей модели, при введении нового агента центр имеет возможность пересчитать планы и стимулирование всех агентов. Тогда равновесные значения исходной целевой функции центра и «новой» целевой функции будут иметь вид:

(84) $\Phi_{\max} = \Phi(Y^*) = \max\limits_{Y}[H(Y) - \min\limits_{y:\sum_{i \in N} y_i = Y} \sum_{i \in N} c_i(y_i)]$

$$\Phi_{\max}^d = \Phi^d(Y'^*) = \max_{Y'}[H(Y') - \min_{y, y_a: \sum_{i \in N} y_i + y_a = Y'} \{\sum_{i \in N} c_i(y_i) + c_a(y_a)\}].$$

Лемма 10. Задачу нахождения максимального значения «новой» целевой функции центра можно привести к следующей задаче максимизации:

$$\Phi_{\max}^d = \max_{Y'}[H(Y') - \min_{Y, y_a: Y + y_a = Y'} \{C(Y) + c_a(y_a)\}].$$

Доказательство. Необходимо показать, что

$$\min_{y, y_a: \sum_{i \in N} y_i + y_a = Y'} [\sum_{i \in N} c_i(y_i) + c_a(y_a)] = \min_{Y, y_a: Y + y_a = Y'} [\min_{z: \sum_{i \in N} z_i = Y} [\sum_{i \in N} c_i(z_i)] + c_a(y_a)].$$

Преобразуя минимум в левой части к двум последовательным минимумам, получаем утверждение леммы. •

Лемма 10 позволяет свести задачу нахождения максимального значения «новой» целевой функции центра к задаче стимулирования для двух игроков – нового агента a, и «агента», затраты которого описываются функцией $C(Y)$, представляющего собой совокупность имеющихся агентов.

Тем не менее, задачу можно еще упростить, если число агентов n в системе велико. В этом случае для нахождения приближенного решения задачи функции дохода $H(Y)$ и затрат $C(Y)$ можно *линеаризовать* в окрестности точки Y^*. Так как Y^* – точка максимума «старой целевой функции центра», то $H'(Y^*) = -C'(Y^*)$, поэтому линеаризация выглядит следующим образом:

(85) $H(Y) = H(Y^*) + a\,(Y - Y^*)$, $C(Y) = C(Y^*) - a\,(Y - Y^*)$, где a – *предельные затраты* (или, что то же самое, *предельная доходность* в «старой» точке равновесия). Тогда

$$\Phi^d_{\max} = H(Y^*) - C(Y^*) + \max_{Y'}[a\,(Y' - Y^*) - \min_{Y, y_a : Y + y_a = Y'}\{a\,(Y - Y^*) +$$

$$+ c_a(y_a)\}] = \Phi_{\max} + \max_{Y'}[aY' - \min_{Y, y_a : Y + y_a = Y'}\{aY + c_a(y_a)\}],$$

поэтому условие выгодности добавления нового агента –

(86) $\Phi^d_{\max} - \Phi_{\max} = \max_{Y'}[aY' - \min_{Y, y_a : Y + y_a = Y'}\{aY + c_a(y_a)\}] > 0$.

Можно вычислить внутренний минимум выражения (86). Условие Лагранжа (равновесные значения Y и y_a обозначены знаком **, в отличие от «старого» равновесия Y^*) дает условие на производную затрат нового агента: $a = c'_a(y_a^{**})$. Отсюда можно выразить оптимальный план нового агента $y_a^{**} = [c'_a]^{-1}(a)$. Тогда $Y^{**} = Y' - y_a^{**}$ и условие (86) преобразуется к выражению

(87) $\max_{Y'}[aY' - a\,(Y' - y_a^{**}) - c_a(y_a^{**})\}] = a \cdot y_a^{**} - c_a(y_a^{**}) > 0$.

Сведение к линейному случаю привело к исчезновению Y' из максимизируемого выражения. Значит в линейном случае выбор нового плана из малой окрестности точки Y^* не влияет на выигрыш центра. Если выбрать $Y^{**} = Y^*$, то результат решения линеаризованной задачи I.2 совпадает с решением линеаризованной задачи I.1 (получаемой из условия (83) линеаризацией функций дохода и затрат аналогично (85)).

Отсюда можно сделать вывод о том, что наличие у центра возможности изменения планов «старых» агентов в задаче I.2 дает прибавку *второго порядка малости* к результату центра в задаче I.1. Таким образом, большие системы (для которых линеаризация в окрестности равновесной точки корректна) достаточно сложны, чтобы неизбежные накладные расходы по изменению стимулирования всех агентов системы перекрывали выигрыш от оптимизации планов, связанной с появлением нового агента.

В то же время, последовательное добавление большого количества агентов все больше сдвигает вектор планов «старых» агентов (рассчитанный для исходного состава N) от вектора оптимальных планов, то есть, в *активно развивающихся ОС* центр время от времени все же должен корректировать планы для нового состава агентов, даже если изменение существующих планов связано с организационными сложностями.

С технической точки зрения, пересчет оптимальных планов при введении нового агента сводится к вычислению новой функции совокупных затрат $C_{N+a}(Y_{N+a}) = \min_{Y_N + y_a = Y_{N+a}}[C_N(Y_N) + c_a(y_a)]$ и последующей оптимизации целевой функции центра $\Phi_{N+a}(.)$. Эта задача при известных функциях затрат $C_N(.)$ и $c_a(.)$ является задачей выпуклого программирования.

В то же время, для минимизации времени «перенастройки» системы при изменении ее состава или изменении функции дохода центра полезно для имеющегося состава агентов иметь рассчитанные оптимальные планы $y_i^*(Y)$ в некоторой окрестности оптимального совокупного плана Y^*.

Задача II

«Прямолинейный» подход к задаче первоначального формирования состава N агентов из множества претендентов N_0 (каждый из претендентов полностью описывается своей функцией затрат $c_i(y_i)$), состоит в рассмотрении $2^{N_0} - 1$ задач стимулирования для каждого непустого подмножества N_0 и последующего выбора подмножества, доставляющего максимум целевой функции центра. Несмотря на то, что никаких теоретических трудностей эта процедура не вызывает, однако вычислительно она довольно трудоемка – для выбора оптимального состава системы с помощью данной процедуры уже при 10-ти претендентах требуется решить более двух тысяч задач выпуклой оптимизации. Таким образом, интерес представляют возможные способы упрощения вычислительной сложности данной задачи.

Решение задачи стимулирования (с учетом упрощения (78)) для каждого состава $N \subseteq N_0$ состоит из следующих этапов:

1. Вычисление совокупной функции затрат (задача выпуклой оптимизации с $|N|$ переменными и одним ограничением):

(88) $C_N(Y) = \min_{y:\ \sum_{i \in N} y_i = Y} \sum_{i \in N} c_i(y_i)$.

2. Решение одномерной задачи выпуклой оптимизации

(89) $\Phi_{N\max}(Y_N^*) = \max_Y [H(Y) - C_N(Y)]$.

Затем производится определение оптимального состава

(90) $N^* \in Arg \max_{N \subseteq N_0} \Phi_{N\max}$.

Один из возможных подходов к упрощению задачи состоит в поиске условий, позволяющих сократить множество рассматриваемых составов. Примеры таких условий рассматриваются ниже.

Мы не будем рассматривать случай, когда $c_i^0 = 0$ для всех $i \in N_0$. В этом случае, очевидно, $N^* = N_0$. Однако если условие $c_i^0 = 0$ выполняется только для некоторых агентов (множество таких агентов обозначим M), этот факт позволяет сократить количество рассматриваемых составов только составами, в которые входят все агенты множества M.

Рассмотрим агентов *с линейными затратами* вида $c_i(y_i) = c_i^0 + g_i y_i$.

Выражение (88) для произвольного состава $N \subseteq N_0$ принимает вид

(91) $C_N(Y) = \sum_{i \in N} c_i^0 + Y \min_{i \in N} g_i$,

то есть для любого состава работает только самый «дешевый» агент, остальные получают нулевой план и минимальную ставку c_i^0. Поэтому очевидно, что в линейном случае кандидатами на

оптимальный состав могут быть только составы, состоящие только из одного агента.

Решая таким образом N_0 задач стимулирования (для системы с одним агентом), определяем для каждой системы значение целевой функции центра и выбираем агента, при котором выигрыш центра максимален:

(92) $i^{**} = \arg\max_{N \subseteq N_0} \left[H(Y_N^*) - g_i Y_N^* - c_i^0 \right]$, где $Y_N^* = [H']^{-1}(g_i)$.

Как видно из этого выражения, даже рассмотрение линейных функций затрат, хоть и упрощает задачу, все же не позволяет ввести *априорное ранжирование* агентов на основании только знания функций их затрат, что позволило бы, не решая задачу стимулирования, определить оптимальный состав системы.

Другой возможный подход состоит в модификации самой задачи: определим функции затрат претендентов следующим образом:

$\tilde{c}_i(y_i) = \begin{cases} c_i(y_i), & y_i > 0 \\ 0, & y_i = 0 \end{cases}$ и решим N_0-мерную задачу максимизации разрывной функции $y^* = \arg\max_y \left[H\left(\sum_{i \in N_0} y_i\right) - \sum_{i \in N_0} \tilde{c}_i(y_i) \right]$. Если оптимальный план некоторого агента равен нулю, значит, этот агент не входит в оптимальный состав исполнителей. Этот прием позволяет свести $2(2^{N_0} - 1)$ задач оптимизации к двум, но с разрывными функциями.

Пример 6. «*Задача первоначального формирования состава*».

Рассмотрим задачу выбора состава исполнителей из двух претендентов с функциями затрат

$$c_1(y_1) = 2 + y_1^2,\ c_2(y_2) = 1 + 2y_2^2.$$

Как следует из вида функций затрат, первый кандидат отличается относительно б**о**льшей производительностью (его функция затрат возрастает *более полого*), но и более высокими начальными затратами, чем второй.

Пусть доход центра возрастает линейно, $H(Y) = aY$.

Построим функцию затрат $\tilde{C}(Y) = \min_{y_1 + y_2 = Y} (\tilde{c}_1(y_1) + \tilde{c}_2(y_2))$.

В случае двух претендентов нужно рассмотреть лишь три возможных состава – функции затрат для каждого из них можно построить непосредственно:

$$C_1(Y) = 2 + Y^2,\ C_2(Y) = 1 + 2Y^2,\ C_{12}(Y) = 3 + \frac{5}{9}Y^2,$$

функции затрат системы, состоящей из первого агента, второго агента и обоих агентов соответственно.

Очевидно, что $\tilde{C}(Y) = \min[C_1(Y), C_2(Y), C_{12}(Y)]$, то есть

$$\tilde{C}(Y) = \begin{cases} 1 + 2Y^2 & при\ Y < 1 \\ 2 + Y^2 & при\ 1 \le Y < 1.5 \\ 3 + 5Y^2/9 & при\ Y \ge 1.5. \end{cases}$$

Оптимальный план Y находится из условия равенства производных функции дохода центра и функции минимальных затрат $\tilde{C}(Y)$. Это условие имеет вид: $H'(Y) = a = \tilde{C}'(Y)$. Таким образом, в зависимости от значения *доходности* a, оптимальным составом будет:

1. При $0 < a < 3$ – система из единственного первого агента,
2. при $3 < a < 4.25$ – система из единственного второго агента,
3. при $a > 4.25$ – система из обоих агентов (при этом план второго агента в два раза меньше плана первого агента). •

Коалиционное взаимодействие в задачах формирования состава

В существующих работах [9, 26, 59, 60, 62], посвященных исследованию задач стимулирования, почти никогда не делалось предположения о том, что центр может изменять состав ОС. Это значит, что при решении задачи стимулирования центр назначает каждому агенту стимулирование s_i, как минимум, равное постоянной составляющей c_i^0 его функции затрат, даже если план для этого агента равен 0. Понятно, что имей центр такую возможность, он обязательно уволил бы агента, содержание которого в системе убыточно. Методы решения подобных задач оптимизации состава рассмотрены в предыдущем пункте.

Если центр по тем или иным причинам не занимается оптимизацией состава системы, то сами агенты могут внутренними усилиями «оптимизировать» состав, незаметно для центра исключив из нее неэффективный агент и распределив его план (а также и стимулирование) между собой. При этом все агенты выигрывают, даже исключенный, так как он получает за свой уход выплату. Проигрывает только центр, поскольку он продолжает платить за уже отсутствующего в системе агента.

Для описанной «оптимизации» состава системы требуются совместные действия всех или части агентов, ведь агент не может сам незаметно устраниться – кто-то должен взять на себя выполнение его плана. Поэтому вполне логичным представляется рассмотрение данной задачи с использованием подходов теории кооперативных игр.

Введем следующие обозначения:

Для произвольной коалиции агентов S введем обозначение $C_S(Y) := \min\limits_{\sum_{i \in S} z_i = Y} \sum_{i \in S} c_i(z_i)$ для функции наименьших затрат коалиции S по реализации этой коалицией некоторого суммарного действия Y. Обозначим $Y_S = \sum_{i \in S} y_i^*$ – план, назначенный центром коалиции S, $s_S = \sum_{i \in S} s_i$ – стимулирование, назначенное центром коалиции S за достижение плана Y_S.

Итак, пусть образовалась коалиция $S \subseteq N$. Действие коалиции заключается в выборе подмножества своих участников, позволяющего с минимальными затратами реализовать назначенный центром план Y_S (чтобы центр не заметил изменения состава, коалиция должны выполнить план). Тогда суммарный выигрыш коалиции (характеристическая функция игры) определяется выражением

(93) $v(S) = s_S - \min\limits_{K \subseteq S} C_K(Y_S)$.

Исследуем реализуемость максимальной коалиции агентов в этой игре. Как обычно, будем считать, что максимальная коалиция реализуется в случае сбалансированности (непустоты C-ядра) кооперативной игры.

Необходимое и достаточное условие непустоты C-ядра (11) для данной игры можно записать следующим образом: для любого сбалансированного покрытия d

(94) $\sum_{S \subset N} d_S \min_{K \subseteq S} C_K(Y_S) \geq \min_{L \subseteq N} C_L(Y_N)$.

Обозначим

(95) $K(S) = \arg\min_{K \subseteq S} C_K(Y_S)$ – «эффективное» подмножество коалиции,

(96) $(z_{iS})_{i \in K(S)} = \arg \min_{\sum_{i \in K(S)} z_i = Y_S} \sum_{i \in K(S)} c_i(z_i)$ – «эффективное» распределение планов коалицией S между членами ее эффективного подмножества $K(S)$.

Введем также индикатор

(97) $a_{iS} = \begin{cases} 1, & i \in K(S) \\ 0, & i \notin K(S) \end{cases}$.

Тогда условие сбалансированности (94) можно преобразовать к виду:

(98) $\sum_{S \subset N} d_S C_{K(S)}(Y_S) \geq C_{K(N)}(Y_N)$.

Или, изменяя порядок суммирования в левой части,

(99) $\sum_{i \in N} \sum_{S: i \in S} d_S a_{iS} c_i(z_{iS}) \geq \sum_{i \in N} a_{iN} c_i(z_{iN})$.

Теорема 4. Если есть такой агент (с номером l), что его выгодно исключить из любой коалиции, в которую он входит (за исключением, естественно, коалиции $\{l\}$), то C-ядро кооперативной игры (93) не пусто. Иначе говоря, C-ядро игры не пусто если

(100) $\exists l \in N : \forall S \subseteq N$, $a_{lS} = 0$.

Доказательство. Если выполнено (100), то

$$\sum_{i \in N} \sum_{S: i \in S} d_S a_{iS} c_i(z_{iS}) = \sum_{i \in N \setminus \{l\}} \sum_{S: i \in S} d_S c_i(z_{iS}) + d_{\{l\}} c_l(y_l).$$

Из свойств выпуклых функций [42]

$$\sum_{i \in N \setminus \{l\}} \sum_{S: i \in S} d_S c_i(z_{iS}) \geq \sum_{i \in N \setminus \{l\}} c_i\Big(\sum_{S: i \in S} d_S z_{iS}\Big).$$

Значит, если верно неравенство

(101) $\sum_{i \in N \setminus \{l\}} c_i\Big(\sum_{S: i \in S} d_S z_{iS}\Big) + d_{\{l\}} c_l(y_l) \geq \sum_{i \in N \setminus \{l\}} c_i(z_{iN})$,

то верно и неравенство (94). Обозначим $x_i = \sum_{S: i \in S} d_S z_{iS}$, $i \in N \setminus \{l\}$, тогда

$$\sum_{i \in N \setminus \{l\}} x_i = \sum_{i \in N \setminus \{l\}} \sum_{S: i \in S} d_S z_{iS} = \sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S \setminus \{l\}} z_{iS} = \sum_{S \subset N} d_S \sum_{i \in S} y_i - d_{\{l\}} y_l =$$

$$= \sum_{i \in N} y_i \sum_{S: i \in S} d_S - d_{\{l\}} y_l = \sum_{i \in N} y_i - d_{\{l\}} y_l = Y_N - d_{\{l\}} y_l.$$

Уменьшим еще левую часть неравенства (101):

$$\sum_{i \in N \setminus \{l\}} c_i(x_i) + d_{\{l\}} c_l(y_l) \geq \min_{\sum_{i \in N \setminus \{l\}} z_i = Y_N - d_{\{l\}} y_l} \sum_{i \in N \setminus \{l\}} c_i(z_i) + d_{\{l\}} c_l(y_l) =$$

$$= C_{N \setminus \{l\}}(Y_N - d_{\{l\}} y_l) + d_{\{l\}} c_l(y_l).$$

Таким образом, необходимо доказать неравенство

$$d_{\{l\}} c_l(y_l) \geq C_{N \setminus \{l\}}(Y_N) - C_{N \setminus \{l\}}(Y_N - d_{\{l\}} y_l).$$

В силу выпуклости $C_{N \setminus \{l\}}(.)$ можно увеличить правую часть неравенства следующим образом:

$$C_{N \setminus \{l\}}(Y_N) - C_{N \setminus \{l\}}(Y_N - d_{\{l\}} y_l) \leq [C_{N \setminus \{l\}}(Y_N) - C_{N \setminus \{l\}}(Y_N - y_l)] d_{\{l\}}.$$

Значит, теорема верна, если

$$c_l(y_l) + C_{N \setminus \{l\}}(Y_N - y_l) = C_N(Y_N) \geq C_{N \setminus \{l\}}(Y_N) = \min_{K \subset N} C_K(Y_N),$$

а это неравенство очевидно. •

Из доказанной теоремы следует, что если некоторого агента выгодно исключить из любой коалиции, то такой агент будет исключен, а оставшиеся агенты перераспределят план так, чтобы минимизировать суммарные затраты всей системы по реализации плана Y^*.

Если бы центр знал о выгодности исключения этого агента из системы, но не имел возможности изменить суммарный план системы[1], он именно таким образом перераспределил бы индивидуальные планы между остающимися агентами. Таким образом, максимальная кооперация агентов в данном случае является, несомненно, положительным явлением с точки зрения

---

[1] Например, в силу необходимости выполнения центром взятых на себя обязательств перед внешним заказчиком. Как показано выше, при большом количестве агентов изменение суммарного плана дает лишь прибавку второго порядка малости к выигрышу центра, в то время как исключение «лишнего» агента приводит к существенному уменьшению затрат системы.

центра, если он заинтересован в сокращении затрат, но не считает нужным по тем или иным причинам сам заниматься оптимизацией состава системы.

Исследованная модель коалиционного взаимодействия относится к случаю, когда для выполнения плана достаточно меньшего числа агентов, чем имеется в системе. Рассмотрим обратный случай, когда для выполнения плана агенты, входящие в ОС, могут привлекать других агентов «со стороны».

Итак, имеется центр с целевой функцией $\Phi(y) = H(\sum_{i \in N} y_i) - \sum_{i \in N} s_i(y)$, и n агентов с целевыми функциями $f_i(y) = s_i(y) - c_i(y_i)$. Центр использует систему стимулирования (76)-(77). В этих условиях агенты заинтересованы в выполнении плана y_N. Пусть, однако, имеется дополнительный агент с функцией затрат $c_a(y_a)$, о котором центру неизвестно, но известно агентам. Условия выгодности для коалиции агентов S привлечения его к выполнению плана описываются следующим критерием:

$$\min_{y_a \geq 0}\left[C_S(Y_S - y_a) + c_a(y_a)\right] \leq C_S(Y_S).$$

Если выполнено это неравенство, то коалиция S в принципе может выиграть от привлечения дополнительного агента. Однако это же неравенство может быть выполнено, например, и для коалиции $N \backslash S$, что может привести к конфликту и «перетягиванию» каждой коалицией дополнительного агента «на себя». При исследовании этого конфликта можно провести аналогию с рассмотренной выше в разделе 2.2 моделью с распределенным контролем, где было показано, что в некоторых случаях конфликт может привести к переплатам дополнительному агенту, что порождает нерациональное расходование ресурсов системы «наружу». Такие переплаты, однако, не возникают, если агент присоединяется к коалиции N из всех агентов. Поэтому представляет интерес поиск условий реализуемости этой коалиции, то есть к поиску условий сбалансированности кооперативной игры агентов.

Будем считать, что привлечение дополнительного агента выгодно хотя бы для коалиции N, иначе его присутствие не оказывает на поведение агентов никакого влияния. Таким образом, имеем игру агентов, в которой каждая коалиция может привлекать дополнительного агента для выполнения своего плана. Если коалиции при расчете характеристической функции рассчитывают на гарантированный результат в игре с разрешенным блефом, то для данной игры справедлив следующий результат:

Теорема 5. Кооперативная игра агентов сбалансирована.

Доказательство. Для того, чтобы воспользоваться результатами, полученными в разделе 2.2, сведем игру агентов к *задаче стимулирования с распределенным контролем*, в которой агенты множества N будут выполнять роль *центров промежуточного уровня*, а дополнительный агент – роль стимулируемого ими агента.

Обозначим Δ_i ту часть своего плана y_i^*, которую i-й «промежуточный центр» передает агенту. Тогда действие агента представляет из себя вектор $\Delta = (\Delta_i)_{i \in N}$. Функции дохода «центров» имеют вид

$$H_i(\Delta_i) = \begin{cases} s_i - c_i(y_i^* - \Delta_i), \Delta_i \leq y_i^* \\ s_i - c_i(0), \qquad \Delta_i > y_i^* \end{cases},$$

а затраты агента $c(\Delta) = c_a(\sum_{i \in N} \Delta_i)$.

Функции дохода «центров» достигают минимума при назначении агенту нулевых планов, то есть модель в целом удовлетворяет условию теоремы 2. Следовательно, C-ядро данной игры не пусто, и максимальная коалиция агентов устойчива. •

Максимальная коалиция назначает такое действие дополнительному агенту, чтобы суммарные затраты системы с учетом присоединившегося агента были минимальны, то есть это действие совпадает с планом, который назначил бы сам центр, если бы он знал о дополнительном агенте, но не имел возможности изменить назначенный ранее суммарный план Y_N.

Таким образом, исследование коалиционного взаимодействия в моделях формирования состава ОС показало, что при наличии у агентов возможности привлекать дополнительных сотрудников, они будут действовать сообща, минимизируя суммарные затраты системы. Отличие их поведения от поведения центра заключается только в том, что центр, знай он о дополнительном агенте, мог бы изменить суммарный план, учитывающий добавление в систему нового агента.

Отметим, что после добавления нового агента в систему агенты могут просить центр *увеличить* суммарный план к обоюдной выгоде: центр получает возможность реализовать б**о**льшее действие с меньшими затратами, а агенты – более полно использовать новый состав системы. Действительно, максимум совокупной прибыли системы $H(\sum_{i\in N} y_i + y_a) - \sum_{i\in N} c_i(y_i) - c_a(y_a)$ достигается теперь при суммарном действии, отличном от y_N, то есть при изменении плана возникает положительный «бонус», распределение которого уже может являться предметом переговоров центра и агентов. Исследование возможных исходов этих переговоров является перспективной задачей исследований.

Если же агенты имеют возможность незаметного для центра исключения из системы одного или нескольких из них, то единодушие уже возможно не всегда. Тем не менее, выше приведены условия (теорема 4), при которых исключение определенного агента становится «общим делом» всех остальных агентов и в этой ситуации перераспределение между ними плана исключенного агента также *оптимально* при заданном суммарном плане. Здесь также возможны переговоры между центром и агентами об изменении суммарного плана к всеобщей выгоде.

Подведем **итоги второй главы**, посвященной исследованию коалиционного взаимодействия участников ОС с полной информацией.

В разделе 2.1 рассмотрена задача стимулирования в веерной ОС. Показано, что в условиях коалиционного взаимодействия важным для выполнения агентами назначенных им центром планов является возможность для центра назначать стимулирование каждому агенту в зависимости не только от его действия, но и от действий других агентов или общего результата деятельности. Если же стимулирование агента может зависеть только от его действия, для выполнения назначенных планов могут потребоваться дополнительные доплаты от центра агентам. Нахождение минимальных доплат сведено к задаче линейного программирования.

В разделе 2.2 для модели стимулирования в ОС с распределенным контролем найдено множество равновесий Нэша игры центров среднего звена управления, предложены несколько способов определения характеристической функции игры центров, были получены достаточные условия реализуемости коалиции всех центров, применимые для широкого класса реальных ОС. Также поставлена и решена задача согласования интересов высшего руководства и среднего звена управления.

В разделе 2.3 показано, что решение задачи формирования состава ОС сводится к решению набора задач стимулирования в веерной ОС. Предложены методы уменьшения вычислительной сложности этой задачи. Также рассмотрено коалиционное взаимодействие агентов при самопроизвольном изменении состава системы. Найдены условия, при которых коалиционное поведение агентов при несанкционированном изменении ими состава системы совпадает с санкционированными центром действиями по оптимизации состава.

ГЛАВА III. КОАЛИЦИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ УЧАСТНИКОВ ОС С СООБЩЕНИЕМ ИНФОРМАЦИИ

В данной главе на примере задачи распределения ресурса исследуется коалиционное взаимодействие агентов в механизмах управления ОС с сообщением информации. Рассматриваются теоретико-игровые модели как с трансферабельной, так и с нетрансферабельной полезностью.

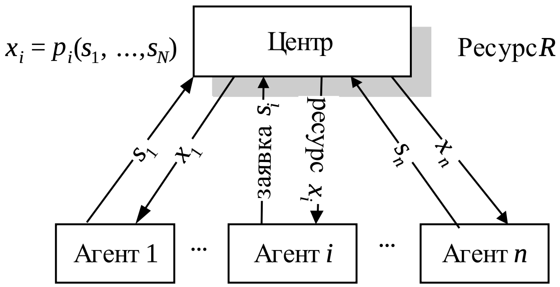


Рис. 5. Модель задачи распределения ресурса

Механизмы распределения ресурса – одни из наиболее часто используемых механизмов планирования. Распределение сырья между подразделениями производственного объединения, распределение финансирования между филиалами корпорации, распределение трудовых ресурсов между задачами некоторого проекта и многое другое – все это примеры задач распределения ресурса. Целью центра в таких задачах обычно считается максимизация суммарной полезности (например, прибыли) системы в целом [61], поэтому в данном случае особенно важен анализ условий реализуемости максимальной коалиции агентов.

3.1. Постановка задачи распределения ресурса

Рассмотрим систему из центра и n агентов (см. рис. 5). Центр распределяет между агентами некоторое количество ресурса R для последующей его переработки. Переработкой называется процесс «превращения» ресурса в полезность агентов, которая может интерпретироваться в некоторых задачах как их прибыль, в других же может обозначать, например, выполненную работу.

Процесс переработки моделируется производственной функцией агента $f_i(x_i)$, определяющей соответствие между количеством ресурса x_i в распоряжении i-го агента и его полезностью.

Задача осложняется тем, что центр в общем случае не знает точно производственных функций агентов, то есть вынужден действовать в условиях неопределенности, в том числе и относительно своих собственных целей, поскольку целью центра в данной задаче считается максимизация суммарной полезности агентов системы.

Для получения информации о потребностях агентов центр собирает от них заявки $s_i \in [0, R]$ на ресурс, то есть сообщения о том количестве ресурса, которое агенты хотели бы получить. На основе этих заявок центр выдает i-му агенту ресурс в объеме, определяемом *механизмом распределения ресурса* p. Механизм распределения ресурса – это вектор-функция $x_i = p_i(s_1, \ldots, s_n)$, $i \in N$, которая по набору заявок определяет для каждого агента количество ресурса, которое тот получит.

Ниже считается, что производственные функции *неотрицательные вогнутые и однопиковые*, что характерно для большинства экономических интерпретаций [39, 40, 80]. Так, например, производственная функция может представлять собой разницу линейного (или вогнутого) дохода от реализации готовой продукции и выпуклых затрат. Такая функция будет иметь максимум, соответствующий оптимальным для агента условиям производства. Если допустить, что помимо производства, которое всегда имеет ограниченные мощности, агент имеет возможность реализации ресурса на внешнем рынке (то есть вне рамок ОС), в производственную функцию добавится линейная или вогнутая (по продаваемым излишкам ресурса) составляющая. Однопиковость производственных функций представляется вполне логичным предположением и с точки зрения более общих предпосылок. Наличие единственного *пика*, до которого функция возрастает, а после – убывает, предполагает наличие наиболее желательного количества ресурса, при удалении от которого полезность агента монотонно убывает. Точки максимума функций $f_i(x_i)$ обозначаются далее r_i (если максимум отсутствует, r_i полагается равным $+\infty$), $i \in N$.

Предполагается, что каждый агент точно знает целевые функции всех агентов. Центр же знает только общий вид целевых функций, то есть то, что они вогнутые и однопиковые.

При фиксированном механизме распределения центр не является одним из игроков, так как его воздействие (выраженное в избранном порядке функционирования и механизме распределения ресурса) фиксировано и известно агентам.

Некооперативная модель распределения ресурса

Рассмотрим сначала модель распределения ресурса, в которой коалиционное взаимодействие агентов отсутствует.

Обычно предполагается, что сумма точек пика r_i больше имеющегося у центра количества ресурса, то есть имеется *дефицит ресурса*. Понятно, что при этом одновременно все агенты не могут получить ресурс в желаемом ими объеме. Агенты начинают *манипулировать* своими заявками, то есть начинают сообщать не положение своей точки пика, а отличные от него значения, чтобы увеличить количество получаемого ресурса. Рассмотрение данной игры, как некооперативной [8, 61] показывает, что по результатам игры агентов можно разбить на две группы – «диктаторов» и «не диктаторов». Требуемое диктаторам количество ресурса обычно сравнительно мал**о** по сравнению с оптимальным количеством ресурса для «не диктаторов». Диктаторы получают ресурс в необходимом им объеме, «не диктаторы» получают меньше, чем им хотелось бы. «Не диктаторы» подают максимальные заявки, чтобы получить максимально возможное для них количество ресурса, диктаторы же делают такие заявки, чтобы получить ровно оптимальное для них количество r_i. Можно сказать, что диктаторы – это агенты, «силы» которых хватает, чтобы реализовать оптимальное для себя распределение ресурса, в отличие от «не диктаторов».

Классификация механизмов распределения ресурса

Центр при распределении ресурса может следовать различным принципам. Большинство из используемых на практике механизмов распределения ресурса можно разбить на следующие классы [8]:

1. *Конкурсные механизмы распределения ресурса.*

Это, например, широко распространенные на практике конкурсы и тендеры исполнителей. Их характерной особенностью является то, что в процессе распределения ресурса из числа агентов выделяется группа «победителей», заявки на ресурс которых удовлетворяется полностью. Остальные агенты, «проигравшие конкурс» обычно не получают ресурса вовсе. Подробное исследование конкурсных механизмов распределение ресурса можно найти в [61, 69].

2. *Приоритетные механизмы распределения ресурса*

Как следует из названия, в приоритетных механизмах количество ресурса, получаемое агентами, существенно определяется их *приоритетами* для центра. Общий вид приоритетных механизмов распределения ресурса таков [11]:

$$(102)\qquad x_i(s) = \begin{cases} s_i, & \sum_{i=1}^{n} s_i \le R \\ \min(s_i, gh_i(s_i)), & \sum_{i=1}^{n} s_i > R \end{cases},$$

где h_i – приоритет i-го агента, а γ – нормировочный коэффициент, гарантирующий полное распределение ресурса при его дефиците. Знак минимума означает, что в любом случае агент получит ресурс в объеме, не большем запрашиваемого.

Как видно из формулы (102), приоритеты могут зависеть от заявок агентов и по виду этой зависимости можно выделить следующие виды приоритетных механизмов:

- *механизмы прямых приоритетов*

В этих механизмах действует принцип «больше просишь – больше получишь», то есть функция приоритета h_i возрастает при росте заявки агента. Примером такого механизма служит *механизм пропорционального распределения ресурса*, который для случая дефицита имеет вид:

$$(103)\qquad x_i = \frac{s_i}{\sum_{j=1}^{n} s_j}.$$

Несмотря на справедливую критику подобных механизмов за присутствующую в них тенденцию завышения заявок для получения большего количества ресурса, эти механизмы обладают рядом очень полезных свойств, в частности, легко децентрализуются [57], что обуславливает их широкое применение на практике. Далее будут рассматриваться, в основном, механизмы прямых приоритетов.

- *механизмы постоянных приоритетов*

В этих механизмах приоритеты не зависят от заявок агентов, так что, строго говоря, их нельзя назвать *механизмами с сообщением информации*, так как заявки агентов не используются при распределении ресурса. Распределение основано лишь на *априорных оценках* центром важности того или иного агента. Ниже будет приведен пример ситуации, в которой такое поведение центра вполне обосновано.

- *механизмы обратных приоритетов*

В них приоритет убывает с возрастанием заявок, что должно, по идее, ограничивать тенденции их завышения. Примером является механизм распределения пропорционально эффективности A_i / s_i использования ресурса. Несмотря на многие положительные свойства, использование этих механизмов ограничивается их *плохой децентрализуемостью* [57]. В данной работе они практически не затронуты.

3. Децентрализованные механизмы распределения ресурса.

Использование таких механизмов характерно для крупных проектов, в которые вовлечено очень большое число исполнителей. В этом случае центр в одиночку не может обработать заявки всех агентов. Вместо этого агенты разбиваются на группы, характеризующие, например, основные направления производственной деятельности и центр сначала распределяет ресурс между этими направлениями, а затем центры промежуточного уровня (менеджеры направлений) распределяют ресурс между агентами. Такая система будет уже трехуровневой (центр – менеджеры направлений – агенты) в отличие от рассмотренной выше двухуровневой системы (центр – агенты). На различных этапах распределения ресурса (между направлениями, в рамках одного направления) могут использоваться как конкурсные, так и приоритетные механизмы распределения. Исследование децентрализованных механизмов распределения ресурса сводится к изучению *децентрализуемости* механизмов распределения ресурса первых двух видов [57].

Механизмы распределения ресурса могут удовлетворять некоторым свойствам, часть из которых отвечает требованиям здравого смысла, часть отражает представления о справедливости механизмов распределения, частью же эти свойства выделяют математически более удобные для исследования механизмы.

<u>Определение 23:</u> Механизм распределения ресурса называется *непрерывным*, если процедура распределения p непрерывна по заявкам агентов.

Так, например, механизм пропорционального распределения непрерывен, в отличие от большинства конкурсных механизмов.

<u>Определение 24:</u> Механизм распределения ресурса называется *монотонным*, если увеличение заявки некоторого агента при фиксированных остальных заявках приводит к монотонному изменению (увеличению или уменьшению) получаемого им ресурса.

Все рассмотренные выше механизмы распределения ресурса монотонны.

<u>Определение 25:</u> Механизм распределения ресурса называется *анонимным*, если получаемое агентами количество ресурса не меняется при их произвольной перестановке.

Так, механизм распределения ресурса пропорционально эффективности будет анонимным, только если все коэффициенты важности A_i равны между собой.

<u>Определение 26:</u> Говорят, что механизм распределения ресурса обладает *свойством «меньшей заявки»* [11], если при некотором исходном распределении заявок агент изменением своей заявки (при фиксированных остальных) может получить сколь угодно меньшее количество ресурса.

Обычно также предполагается, что при увеличении общего количества ресурса R каждый агент получает ресурса не меньше, чем раньше.

Далее рассматриваются *монотонные непрерывные* механизмы прямых приоритетов. Дополнительные предположения о виде механизма распределения ресурса всегда оговариваются отдельно.

Влияние информированности центра на эффективность управления

Эффективность механизма распределения ресурса определяется как отношение значения целевой функции центра, полученного в результате игры, к значению целевой функции центра при оптимальном с его точки зрения распределении ресурса. Если в процессе игры заявки агентов равны s_i^*, то эффективность механизма K будет равна

$$(104)\qquad K = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i(p_i(s_1^*,...,s_n^*))}{\max\limits_{y_i:\sum_{i=i}^{n} y_i = R} \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i)}.$$

Гарантированная эффективность K_0 есть нижняя грань эффективности K по изменению параметров модели – вида производственных функций агентов, в частности, положения точек пика производственных функций.

В классической для теории активных систем постановке задачи распределения ресурса предполагается, что центр не имеет никакой информации о точках пика целевых функций агентов, то есть точки пика, с его точки зрения, могут принимать любое значение от нуля до бесконечности. Очевидно, что дополнительная информация о положении точек пика, если бы она имелась у центра, не может ухудшить эффективности управления. Эта дополнительная информация может, например, иметь вид неравенств $\underline{r_i} \le r_i \le \overline{r_i}$, ограничивающих точку пика r_i в некотором диапазоне (*интервальная неопределенность* [34]). Тогда центр может запретить агентам подачу заявок, лежащих вне этого диапазона.

В более общем виде информацию о точках пика целевых функций агентов, которой может обладать центр, можно описать подмножеством L положительного сегмента пространства R^n (представляющего собой множество возможных профилей точек пика при отсутствии у центра дополнительной информации). Тогда центр может дополнительно потребовать от агентов сообщения только таких заявок, вектор которых принадлежит L.

Следующие результаты показывают влияние интервальной неопределенности различного вида на эффективность механизма распределения ресурса.

Лемма 11. Для произвольного непрерывного механизма прямых приоритетов гарантированная эффективность

$$(105)\qquad K_0 = \min_i \{x_i(R,...,R)\} / R,$$

если о целевых функциях агентов известно только, что они вогнутые однопиковые.

Доказательство. Наихудший случай реализуется, когда отношение эффективности использования ресурса агентами в реальности и в идеальном случае минимально, то есть производственные функции агентов, получающих ресурс в результате игры, должны быть сколь угодно малы по сравнению с производственными функциями агентов, получающих ресурс при оптимальном распределении. Тогда наихудшей будет ситуация, когда только <u>один</u> из агентов будет иметь относительно больш**у**ю эффективность переработки ресурса, остальные же – произвольно малую. Тогда в идеале почти весь ресурс должен получить этот высокоэффективный агент, в реальности же он делится на основании заявок, а малоэффективные агенты могут быть чрезвычайно *ресурсоемкими*. Наихудший случай реализуется, когда они забирают максимум ресурса. Так как рассматривается механизм прямых приоритетов, это соответствует максимальным заявкам «неэффективных» агентов. Тогда эффективность K для набора таких агентов запишется в виде

$$(106)\qquad K = \frac{f_i(\min[r_i, p_i(R,...,s_n^*,...,R)])}{f_i(\min[r_i, R])},$$ где i – номер «эффективного» агента.

Здесь первый элемент под знаком минимума в числителе соответствует случаю, когда «эффективный» агент является диктатором, а второй – когда он является «не диктатором». Первый случай не интересен при рассмотрении гарантированного результата, так как эффективность управления в этом случае равна 1. То есть мы должны предполагать, что «эффективный» агент – «не диктатор». Тогда по свойствам «не диктаторов» его заявка должна быть равна R. Соответственно, чтобы получить максимальный знаменатель, следует предположить, что точка пика целевой функции этого агента больше, чем имеющееся количество ресурса *R*, что является еще более сильным условием чем «недиктаторство».

Тогда выражение для эффективности преобразуется к виду

$$K = \frac{f_i(p_i(R,...,R)])}{f_i(R)}.$$

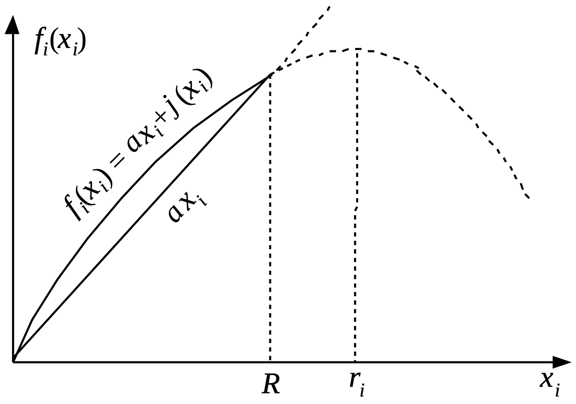


Рис. 6. Производственная функция «эффективного» агента

Центр же не знает, какой из агентов эффективен, поэтому может оказаться, что это наиболее «дискредитированный» (при *не анонимном* механизме распределения) агент. При этом эффективность механизма $K = \min_i (f_i(x_i(R,...,R)) / f_i(R))$. Для вогнутых производственных функций минимум этого выражения достигается в линейном случае, то есть для производственных функций вида $f_i(x_i) = a_i x_i$.

Действительно, представим произвольную вогнутую функцию в виде линейной и положительной функции j, как показано на рис. 6: $f_i(x_i) = \frac{f_i(R)}{R} x_i + j(x_i)$. Тогда эффективность можно записать в виде

$K = \frac{f_i(R)x_i / R + j(x_i)}{f_i(R)} = \frac{x_i}{R} + \frac{j(x_i)}{f_i(R)}$. Так как для строго вогнутой функции f_i, $j > 0$ для всех точек $x_i \in (0, R)$, то минимум этого выражения достигается при $j \equiv 0$, то есть именно в линейном случае. В результате гарантированная эффективность $K_0 = \min_i \{x_i(R,...,R)\} / R$, что в точности равно (105). •

Заметим, что гарантированная эффективность максимальна для анонимных механизмов и равна $1/n$.

Теорема 6. Для монотонных механизмов прямых приоритетов наличие у центра информации вида $\underline{r_i} \le r_i$, $i \in N$ не влияет на эффективность механизма, определяемую формулой (105), а при наличии у центра дополнительной информации вида $r_i \le \overline{r_i}$ гарантированная эффективность

(107) $\quad K_0 = \min_i \{x_i(\overline{r_1},...,\overline{r_n})\} / R$.

Доказательство Для механизмов прямых приоритетов заявки агентов всегда не меньше требуемого им количества ресурса r_i, поэтому ограничения снизу не увеличивают реальной информированности центра.

Для ограничений сверху вида $r_i \le \overline{r_i}$ доказательство повторяет доказательство леммы 11 с учетом ограничений на заявки агентов. •

Результат теоремы 6 используется ниже при сравнении влияния информированности центра на эффективность управления в кооперативной и некооперативной моделях.

3.2. Классификация коалиционных взаимодействий агентов в задачах распределения ресурса

Целью данного раздела является классификация и типизация коалиционных взаимодействий агентов в задачах распределения ресурса для последующего их систематического изучения.

Любое рассмотрение кооперативных взаимодействий агентов должно включать возможность совместного выбора ими стратегий (заявок на ресурс) – заключения соглашений о заявках. Это необходимое условие создания информационных коалиций, которые представляют собой самый слабый вид коалиционного взаимодействия. Так как модель предполагает полную информированность агентов о параметрах игры, целью их переговоров должна быть как минимум выработка согласованных стратегий поведения, то есть образование *коалиции действия*. Возможность создания коалиций действия разрешена во всех рассматриваемых ниже моделях. Прочие коалиционные взаимодействия в этой задаче можно разбить на два следующих типа:

- Перераспределение агентами полученного от центра ресурса.
- Передача агентами друг другу полезности (выигрыша).

В зависимости от того, в каких сочетаниях разрешены эти взаимодействия, можно выделить четыре класса моделей.

Таблица 2. Модели коалиционного взаимодействия агентов в задаче распределения ресурса

Возможности коалиционного взаимодействия		Ресурс	
		нетрансферабелен	Трансферабелен
Полезность	нетрансферабельна	**1**	**2**
	трансферабельна	**3**	**4**

1. *Нетрансферабельный ресурс, нетрансферабельная полезность*. То есть возможен только обмен информацией и совместное принятие решений.
2. *Трансферабельный ресурс, нетрансферабельная полезность*. Агенты могут перераспределять ресурс, но не полезность. Это, например, случай, когда ресурс – это деньги, а полезность – выполненная работа, как в задаче финансирования направлений проектных работ [38].
3. *Нетрансферабельный ресурс, трансферабельная полезность*. Ресурс агенты передавать не могут, но могут брать *трансферты* от других агентов за изменение своей заявки на ресурс.
4. *Трансферабельный ресурс, трансферабельная полезность*. Возможны как передача ресурса, так полезности, совместное принятие решений, совместное производство и купля-продажа ресурса за деньги.

В данной работе представлены результаты исследования всех этих моделей, за исключением третьей. Рассмотрение модели 3 связано со значительными математическими трудностями, поэтому ее изучение пока не принесло значительных результатов.

С точки зрения теории кооперативных игр первые два вида моделей принадлежат к играм с нетрансферабельной полезностью (НТП-играм), менее исследованному классу игр, по сравнению с

играми с трансферабелной полезностью (ТП-играми), тем не менее, для нашей задачи эти случаи представляются довольно простыми.

Нетрансферабельный ресурс, нетрансферабельная полезность

Легко показать, что в условиях полной нетрансферабельности объединение агентов в коалиции нецелесообразно. Проверка этого утверждения сводится к проверке того, что равновесие Нэша некооперативной игры одновременно является сильным равновесием Нэша [70], которое гарантирует невыгодность отклонения от равновесия не только отдельного агента, но и произвольной их группы.

Действительно, в равновесии Нэша агенты разделаются на «диктаторов», чьи возможности позволяют им получить ресурс в полном объеме, и «не диктаторов», которые вынуждены заявлять максимально возможное значение желаемого ресурса, чтобы получить ресурс в б**о**льшем объеме.

Возможны три варианта объединения агентов в коалиции:

- Коалиция, состоящая только из диктаторов бесполезна: все ее участники и так получают максимум того, что они могут получить (а передача полезности в этой модели запрещена).
- Коалиция, состоящая как из диктаторов, так и из «не диктаторов»

Подобные коалиции невыгодны диктаторам – членам коалиции. Действительно, коалиционные действия в данной постановке задачи могут проявляться только в смещении заявок коалиции от бескоалиционного равновесия. Но любое смещение заявок, меняющее распределение ресурса, не может быть выгодным для всех ее членов одновременно. Для максимальной коалиции количество ресурса постоянно и равно его полному объему R, для любой меньшей коалиции уменьшение заявок как «диктаторов», так и «не диктаторов» приводит к уменьшению количества ресурса в распоряжении коалиции, увеличивать же заявку могут только диктаторы, но только за счет уменьшения собственной полезности.

- Коалиция, состоящая только из «не диктаторов»

Участники такой коалиции могут смещаться в сторону от равновесия только в сторону уменьшения заявок, уменьшая тем самым количество ресурса в распоряжении коалиции, а, следовательно, и выигрыш одного или нескольких ее участников.

Таким образом, доказана

Теорема 7. В случае нетрансферабельных ресурса и полезности сильное равновесие Нэша кооперативной игры совпадает с равновесием Нэша некооперативной игры, изменения заявок, а следовательно, выигрышей агентов и эффективности механизма распределения, не происходит.

Трансферабельный ресурс, нетрансферабельная полезность

Аналогично предыдущему случаю можно показать, что создание коалиций, как состоящих из одних только диктаторов, так и из одних только «не диктаторов» *нерационально*. В первом случае потому, что коалиция не может увеличить суммарную полезность (все ее участники и так имеют максимально возможную полезность), во втором же случае потому, что любое изменение заявок «не диктаторов» приводит к уменьшению количества ресурса в распоряжении коалиции, а значит, и полезности хоть одного из ее участников. Напомним, что полезность нетрансферабельна, и коалиция никак не может компенсировать это уменьшение.

Значит, возможно только объединение диктаторов и «не диктаторов». Легко показать, что при наличии некоторых отношений между агентами, не охватываемых моделью (симпатии, антипатии), здесь возможно изменение равновесных заявок. При этом диктаторы повышают свои заявки на ресурс, а полученные *излишки ресурса* распределяют между агентами, которым они симпатизируют (то есть между «не диктаторами», входящим с ними в одну коалицию). Более точно понять, кому пойдет ресурс, невозможно, так как (в рамках рассматриваемой модели) выигрыш диктаторов от изменения заявки не изменяется. В равновесии все заявки равны R, и *смысл сообщения заявок полностью пропадает*. Если же мы считаем, что для изменения заявки агентом необходимо, чтобы в новом равновесии его

выигрыш стал *строго больше*, чем в старом, то равновесие игры совпадает с некооперативным равновесием.

Трансферабельный ресурс, трансферабельная полезность

В этом классе моделей налицо практически неограниченные возможности для сотрудничества, поэтому следует ожидать значительных изменений в поведении агентов. Ниже проводится подробное исследование именно этого класса моделей.

3.3. Построение характеристической функции игры [24]

Для произвольной коалиции $T \subseteq N$ обозначим

(108) $x_T := \sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} p_i$ – получаемое коалицией количество ресурса;

(109) $r_T := \sum_{i \in T} r_i$ – оптимальное для коалиции количество ресурса;

(110) $Z(x_T, T) := \{ y_T(x_T) = (y_{iT})_{i \in T} : \sum_{i \in T} y_{iT} = x_T \}$ – множество возможных распределений ресурса x_T между участниками коалиции.

Для r_N будем использовать также обозначение $r := r_N$.

(111) $f_T(x_T) = \max_{y_T \in Z(x_T, T)} \sum_{i \in T} f_i(y_{iT}(x_T))$ – целевая функция коалиции в зависимости от получаемого ею количества ресурса x_T. Коалиция максимизирует суммарную полезность распределением полученного ресурса x_T между своими участниками. При этом максимум этой функции достигается при $x_T = r_T$, когда все члены суммы (111) одновременно достигают своего максимума. При $x_T < r_T$ целевая функция монотонно возрастает, при $x_T > r_T$ – монотонно убывает. Так как все члены суммы в (111) – вогнутые функции, то целевая функция коалиции также вогнута.

Таким образом, на первом шаге построения характеристической функции необходимо определить количество ресурса x_T, получаемого коалицией T в равновесии. Агенты имеют полную информацию о целевых функциях друг друга, поэтому, как и при некооперативном рассмотрении, логично рассматривать равновесие Нэша в качестве решения игры. Отличие же заключается в том, что теперь будет рассматриваться не игра n агентов, а игра коалиций.

Для построения получаемого коалицией количества ресурса x_T воспользуемся *методом анализа множеств диктаторства* [69].

Для упрощения построения будем рассматривать только случай дефицита ресурса. Это не уменьшает общности рассмотрения, так как только при наличии дефицита распределение ресурса нетривиально.

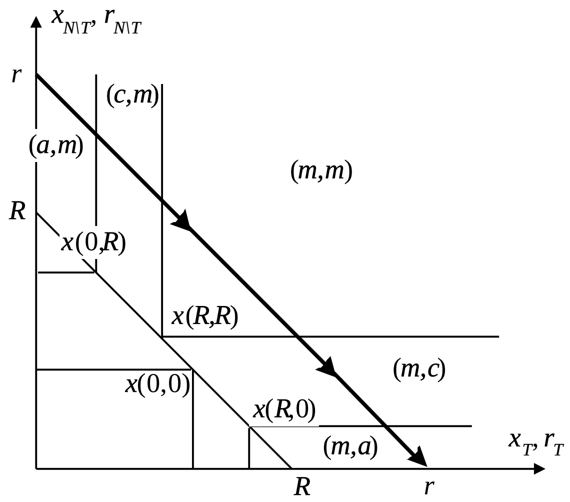


Рис. 7. Множества диктаторства механизма распределения ресурса

При построении характеристической функции коалиции T считается, что все остальные агенты объединились в коалицию $N\backslash T$. Тогда равновесие Нэша в игре коалиций T и $N\backslash T$ будет равновесием Нэша игры двух лиц с векторными стратегиями. Перейдем от векторных стратегий коалиций к скалярным, воспользовавшись непрерывностью и монотонностью механизма распределения.

Пусть некоторая векторная заявка s_T коалиции T при фиксированной заявке $s_{N\backslash T}$ их противников дает суммарное значение ресурса коалиции T

(112) $$x_T = \sum_{i \in T} x_i = \sum_{i \in T} p_i(s_T, s_{N\backslash T}).$$

Тогда по лемме о непрерывности [49] для коалиции T существует такая допустимая скалярная заявка $u_T(x_T)$, что если все участники коалиции заявят $u_T(x_T)$, то коалиция получит столько же, сколько и при исходных заявках, то есть x_T Для обоснования этого утверждения положим сначала $u_T = 0$. При этом, по свойствам монотонных механизмов, ресурс в распоряжении коалиции T не больше, чем при произвольной векторной заявке. Затем положим $u_T = R$ (при этом ресурс не меньше, чем при произвольной векторной заявке) и заметим, что рост заявки u_T от 0 до R приводит к непрерывному росту $x_T(u_T, s_{N\backslash T})$.

При таком варьировании заявок коалиции T коалиция $N\backslash T$ не заинтересована в изменении своих заявок, так как получаемое ее участниками суммарное количество ресурса не изменяется. Аналогично и их заявки можно заменить *единой заявкой* $u_{N\backslash T}$. Таким образом, равновесие Нэша для этой игры будет совпадать с равновесием Нэша игры двух лиц со скалярными стратегиями u_T, $u_{N\backslash T}$ и целевыми функциями f_T и $f_{N\backslash T}$. На рис. 7 приведены множества диктаторства игры двух коалиций. По осям откладывается ресурс, получаемый коалициями T и $N\backslash T$ в зависимости от их заявок. Точки $x(0, 0)$, $x(0, R)$, $x(R, 0)$, $x(R, R)$ представляют собой ресурс, получаемый коалициями при их заявках (0, 0), (0, R) и т.д. Так как в условиях дефицита ресурса механизм сбалансирован (то есть ресурс всегда распределяется полностью), эти точки (как и остальные точки отображения множества заявок агентов на множество получаемых ими ресурсов), лежат на прямой $x_T + x_{N\backslash T} = R$. Кроме того, из монотонности механизма следует, что точка $x(0, R)$ лежит левее и выше точки $x(0, 0)$, а $x(R, 0)$ – правее и ниже. Соответственно точка $x(R, R)$ лежит на прямой между точками $x(0, R)$ и $x(R,0)$. На этой же плоскости будем откладывать точки $r=(r_T, r_{N\backslash T})$ максимума целевых функций коалиций. Так как сумма точек максимума r превышает имеющееся количество ресурса R (дефицит), то эта точка будет лежать правее и выше прямой $x_T + x_{N\backslash T}=R$. Можно показать [69], что если эта точка лежит в области (a, m), то равновесные заявки агентов будут (0, R), и распределение ресурса будет $x(0, R)$. В области (m, a) наоборот, равновесные заявки будут (R, 0), а распределение ресурса – $x(R, 0)$. Если точка r лежит в области (m, c), то коалиция $N \backslash T$ будет диктатором и получит ресурс в необходимом ей объеме, тогда как коалиция T в равновесии будет сообщать максимальную заявку. В области же (c, m) наоборот, коалиция T будет диктатором, а $N \backslash T$ будет сообщать максимальную заявку. В области (m, m) равновесные заявки обоих коалиций максимальны, и распределение ресурса между ними будет $x(R, R)$.

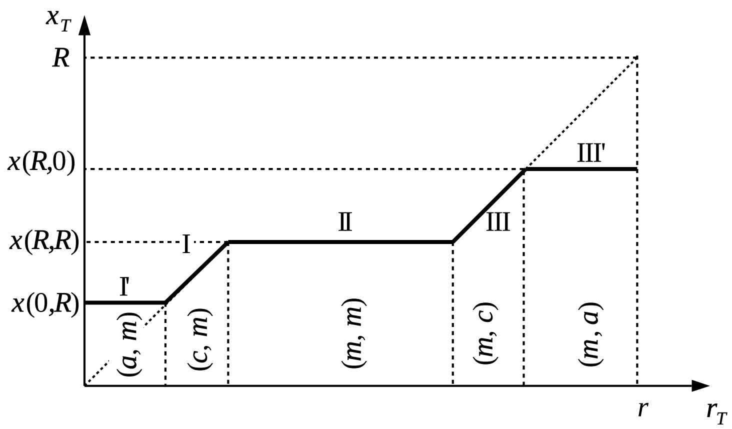


Рис. 8. Зависимость получаемого в равновесии коалицией T ресурса x_T от ее потребности в ресурсе r_T

Для фиксированного r построим все сочетания оптимальных точек целевых функций агентов. Все они лежат на прямой $r_T + r_{N \backslash T} = r$, которая проходит последовательно через все описанные зоны (изображена жирной линией на рис. 7). Для любой ее точки известны количества ресурса, получаемые коалициями в равновесии. График зависимости x_T, от точки пика r_T коалиции приведен на рис. 8. Теперь мы можем пользоваться зависимостью $x_T = x_T(r_T, T)$ для произвольной коалиции T.

Подставляя полученную зависимость в (111), получаем характеристическую функцию коалиции T в зависимости от ее состава и положения оптимальной точки r_T ее целевой функции.

(113) $v(T) = \sum_{i \in T} f_i(y_{iT})$, где $y_T = \arg\max_{z_T \in Z(r_T, T)} \sum_{i \in T} f_i(z_{iT}(x_T(r_T, T)))$.

Аналогичный анализ можно провести и для немонотонного, разрывного и несбалансированного механизма, однако при этом процесс построения функции $x_T(r_T)$ уже нельзя представить наглядно на графике.

Отдельно заметим, что если механизм распределения ресурса обладает «свойством нулевой заявки», то на рис. 8 останутся только зоны I, II и III, а если механизм анонимен, то $x(R, R) = \frac{|S|}{N} R$, и рис. 8 будет выглядеть следующим образом:

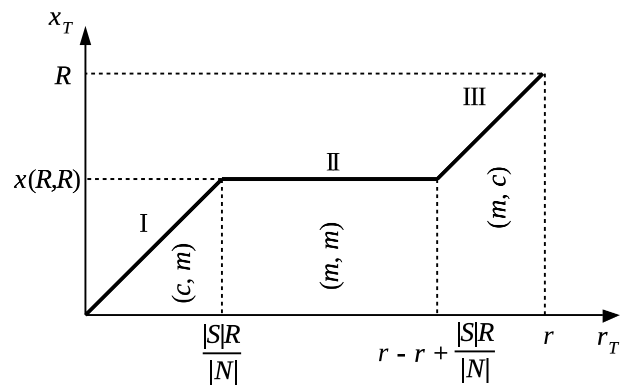


Рис. 9. Зависимость x_T от r_T для анонимного механизма, обладающего «свойством нулевой заявки»

3.4. Условия сбалансированности игры агентов

Кооперативная игра сбалансирована, если она имеет непустое C-ядро. По определению, C-ядро есть набор таких распределений дохода максимальной коалиции, которые дают каждой возможной коалиции суммарный доход не меньший, чем эта коалиция могла гарантировать себе сепаратными от остальных агентов действиями. Если такие дележи возможны при заданной характеристической функции игры, это значит, что максимальная коалиция реализуема, то есть устойчива относительно претензий произвольной коалиции агентов.

Сбалансированность игры дает центру уверенность в том, что рациональные агенты образуют устойчивую максимальную коалицию. В задаче распределения ресурса целевая функция центра совпадает с целевой функцией максимальной коалиции, которая равна сумме целевых функций ее участников, то есть всех агентов. В данном случае можно говорить о *полном совпадении целей центра и агентов*, что создает идеальные условия для управления, так как, максимизируя внутренним распределением ресурса свою целевую функцию, максимальная коалиция максимизирует одновременно и целевую функцию центра. Эффективность механизма при этом максимальна, так как агенты делят ресурс именно так, как разделил бы центр, если бы точно знал целевые функции всех агентов.

Значит, сбалансированность игры является положительным моментом с точки зрения управления ОС и говорит о возможности полного согласования интересов всех участников ОС, включая центр.

Коснемся вкратце неманипулируемости [61, 69] механизма распределения ресурса в сбалансированной игре. При реализации максимальной коалиции весь ресурс в объеме R попадает в ее распоряжение независимо от заявок агентов, и участники коалиции могут реализовать произвольное внутреннее распределение ресурса, независимое от исходного механизма. Это распределение будет даже лучшим, так как основано на б**о**льшей информированности о производственных возможностях агентов (тогда роль исходного механизма будет сводиться просто к стимулированию образования именно максимальной коалиции). Поскольку заявки коалиции никак не влияют (в рамках рассматриваемой модели) на их результирующие выигрыши, центр может рассчитывать на честное сообщение точек пика целевых функций агентов только в рамках *гипотезы благожелательности* [11], когда при прочих равных условиях агенты предпочитают говорить правду. Условие благожелательности, однако, является довольно сильным предположением, особенно с точки зрения повышения информированности центра при большом числе повторений игры, что не всегда может быть выгодным агентам. Действительно, получив информацию о положении пиков, центр при следующем повторении игры может изменить механизм распределения, что может затронуть интересы некоторых агентов, которые постараются этого не допустить. Таким образом, центру, по-видимому, придется

довольствоваться лишь высокой эффективностью, не получая при этом дополнительной информации о системе.

Дело обстоит иначе, если объединение в коалицию требует дополнительных затрат от агентов, включающих помимо *организационных расходов* и *транспортные расходы* по перераспределению полученного от центра ресурса. Если предположить, что расходы по доставке ресурса при начальном его распределении центр берет на себя, то любые перемещении ресурса впоследствии уменьшают совокупный выигрыш коалиции. Таким образом, при возрастании транспортных расходов в некоторый момент агенты предпочтут сообщать центру такие заявки, чтобы *централизованное распределение ресурса* совпадало с *оптимальным для коалиции* распределением. Заметим, что только у максимальной коалиции есть возможности такого снижения своих транспортных затрат, так как ей не приходится манипулировать заявками в целях получения б**о**льшего количества ресурса. Однако эти заявки в общем случае будут иметь мало общего с точками пика целевых функций агентов.

Тем не менее, в важном с практической точки зрения случае, когда используется механизм пропорционального распределения ресурса, а производственные функции агентов имеют вид $f_i(x_i) = r_i f(x_i / r_i)$ [12, 40] (*обобщенные производственные функции Кобба-Дугласа*), оптимальные заявки максимальной коалиции будут по крайней мере пропорциональны реальным значениям точек пика агентов. Это обусловлено тем, что распределение пропорционально эффективностям r_i является оптимальным для агентов с подобными целевыми функциями [12].

Достаточное условие сбалансированности игры [25, 36]

При некооперативном рассмотрении задачи распределения ресурса [8] для предсказания стратегий агентов не нужно знать точного вида их целевых функций – достаточно знать положение их точек пика r_i. Чтобы в кооперативной модели найти ситуации когда игра сбалансирована, необходимо более точное знание целевых функций. На практике определение точного вида целевых функций часто невозможно, поэтому интересным представляется получение достаточных условий сбалансированности, основанных на анализе только положения точек пика целевых функций агентов.

Теорема 8. Если для любого сбалансированного покрытия $\sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T) \le R$, то кооперативная игра агентов сбалансирована.

Доказательство. Подставляя в критерий сбалансированности игры (11) значение характеристической функции (111), имеем:

(114) $$\sum_{T \subset N} d_T \sum_{i \in T} f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN}).$$

Заменим местами порядок суммирования так же, как это было сделано при доказательстве леммы 4:

(115) $$\sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN}).$$

В этой сумме фигурируют только *собственные коалиции*.

Для любой вогнутой функции f_i справедливо свойство [42].

$$\forall x_k \ (k = 1 ... M), \quad \forall d_k > 0 : \sum_k d_k = 1 \quad \sum_k d_k f(x_k) \le f(\sum_k d_k \cdot x_k)$$

По определению сбалансированного покрытия (10), $\sum_{T: i \in T} d_T = 1$ для любого агента i, то есть для произвольного агента i можно записать:

$$\sum_{T: i \in T} d_T f_i(y_{iT}) \le f_i(\sum_{T: i \in T} d_T \cdot y_{iT}).$$

Отсюда следует, что неравенство (115) можно огрубить следующим образом:

(116) $$\sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(\sum_{T: i \in T} d_T y_{iT}).$$

Если обозначить

$$Y_i := \sum_{T: i \in T} d_T y_{iT},$$

(117) $$Y := \sum_{i \in N} Y_i = \sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T y_{iT},$$

то достаточное условие сбалансированности примет вид:

(118) $$\sum_{i \in N} f_i(Y_i) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN}).$$

Заметим, что, по определению y_T, $\sum_{i \in T} y_{iT} = x_T(r_T, T)$, то есть компоненты этого вектора представляют собой распределение всего ресурса $x_T(r_T, T)$ в распоряжении коалиции между ее участниками.

Тогда, проводя замену порядка суммирования (аналогично процедуре, описанной в доказательстве леммы 4) в (117), получим

(119) $$Y = \sum_{i \in N} \sum_{T: i \in T} d_T y_{iT} = \sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} y_{iT} = \sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T).$$

То есть левая часть неравенства (118) представляет собой, по сути, выигрыш максимальной коалиции N при некотором распределении между ее участниками ресурса в количестве Y. При этом каждый агент получает ресурс в количестве Y_i. В правой части этого неравенства стоит выигрыш той же максимальной коалиции N при <u>оптимальном</u> распределении между ее участниками ресурса в количестве R. Б**о**льшее количество ресурса в распоряжении максимальной коалиции дает б**о**льшую полезность в силу монотонного возрастания целевой функции при росте количества распределяемого ресурса в условиях дефицита (то есть при $R < r$).

Значит, если $Y \le R$, то, даже если распределение Y_i окажется оптимальным распределением ресурса между участниками максимальной коалиции, все равно будет выполняться неравенство $\sum_{i \in N} f_i(Y_i) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN})$, так как правая часть есть результат оптимального распределения б**о**льшего количества ресурса R. Поскольку это неравенство – достаточное условие сбалансированности, то сбалансированность игры будет следовать и из условия $Y \le R$, то есть для любого сбалансированного покрытия

(120) $$\sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T) \le R. \bullet$$

Если это условие <u>не выполняется</u> для некоторого набора (*профиля*) точек пика r_i целевых функций агентов, то найдутся такие вогнутые функции с максимумами в этих точках, что построенная на этих целевых функциях игра будет несбалансированной.

Покажем, что для механизма обладающего «свойством нулевой заявки» доказанное достаточное условие является необходимым и достаточным, если производственные функции агентов имеют вид:

(121) $$f_i(x_i) = \begin{cases} x_i & x_i < r_i \\ r_i & x_i \ge r_i \end{cases}.$$

Такие целевые функции представляют собой модель линейного производства с ограничениями на мощность. Здесь оптимальным для агентов является количество ресурса r_i.

Следствие 4. Если в условиях теоремы 8 производственные функции агентов имеют вид (121), а механизм распределения ресурса обладает «свойством нулевой заявки», то условие (120) является необходимым и достаточным условием сбалансированности игры.

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 8 запишем необходимое и достаточное условие непустоты *C*-ядра (11):

(122) $$\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} f_i(y_{iT}) \le \sum_{i \in N} f_i(y_{iN}) .$$

Воспользуемся частным видом производственных функций агентов. Так как при использовании центром механизма, обладающего «свойством нулевой заявки», произвольная коалиция изменением своих заявок может произвольно уменьшить получаемое ей количество ресурса (см. рис. 8), то получаемое коалицией количество ресурса всегда меньше или равно чем оптимальное, то есть все $y_{iT} \le r_i$, и, следовательно, можно пользоваться только линейной частью производственной функции. Тогда (122) можно записать в виде:

(123) $$\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} y_{iT} \le \sum_{i \in N} y_{iN} = R .$$

Как показано при доказательстве теоремы 8, для произвольной коалиции $\sum_{i \in T} y_{iT} = x_T(r_T, T)$. То есть из (123) следует, что условие сбалансированности принимает вид $\sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T) \le R$. Так как это условие получено последовательностью тождественных преобразований, оно является необходимым и достаточным. •

Таким образом, по крайней мере для механизмов, обладающих «свойством нулевой заявки», наихудший с точки зрения обеспечения сбалансированности игры случай реализуется при линейных производственных функциях агентов, представляющих собой предельный случай вогнутых производственных функций. Для вогнутых функций зона сбалансированности будет шире, однако центр, не зная точно параметрического вида производственных функций агентов (то есть не зная функций $f_i = f_i(x_i, r_i)$,

зависящих от параметра r_i) не может гарантировать сбалансированность, если не выполнено условие (120). Использование выражения (120) в качестве условия сбалансированности при отсутствии такой информации можно рассматривать, как применение *принципа максимального гарантированного результата*, который рекомендует предполагать наихудший случай при отсутствии информации.

К сожалению, большинство используемых на практике механизмов распределения ресурса не гарантирует сбалансированности игры агентов с произвольными профилями точек пика $r=(r_i)_{i \in N}$ их целевых функций, то есть возможны профили, при которых условие (120) нарушается.

Тогда дальнейшее использование принципа МГР для получения гарантий сбалансированности, предполагающее максимизацию левой части неравенства (120) по всем профилям точек пика, приводит к неутешительному выводу: гарантировать при заданных условиях сбалансированность игры невозможно. Иначе дело обстоит при наличии у центра дополнительной информации о положении точек пика целевых функций агентов.

Выше в разделе 3.1 был приведен пример вида подобной информации. Предполагалось, что центр имеет информацию о том, что вектор точек пика r_i принадлежит некоторому множеству L. В частности, L может представлять собой декартово произведение диапазонов P_i возможного изменения индивидуальных точек пика, то есть $L = P_1 \times P_2 \times ... \times P_n$.

Тогда для того, чтобы узнать, может ли центр на основе имеющейся информации о положении точек пика (и в отсутствие информации о виде целевых функций) гарантировать сбалансированность, нужно производить максимизацию левой части неравенства (120) уже по более узкому множеству профилей L.

Проверка для каждого профиля сбалансированности игры сводится к задаче линейного программирования, где необходимо максимизировать выбором коэффициентов d_T сбалансированного покрытия выражение $\sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T)$ при дополнительных ограничениях сбалансированности коэффициентов (10). Коэффициенты x_T берутся из найденной зависимости (см. рис. 8) количества ресурса от положения точки пика целевой функции коалиции. В ряде случаев эту вычислительную задачу можно заменить алгоритмом проверки ядра «по определению», что сводится к поиску решения системы неравенств.

В случае, когда центру известна параметрическая зависимость целевых функций агентов, вместо использования огрубленного достаточного условия (120) можно рекомендовать использование необходимого и достаточного условия в соответствии с теоремой Бондаревой.

Выполнение этой процедуры для всех агентов должно выделить подмножество C множества всех профилей точек пика, которое содержит все профили, для которых игра гарантированно сбалансирована.

Если множество L допустимых точек пика полностью содержится в этом множестве, значит при любых допустимых профилях центр может рассчитывать на гарантированное образование максимальной коалиции и на все связанные с этим преимущества.

Как уже было выяснено ранее, множество всех профилей точек пика целевых функций агентов при которых игра сбалансирована, может быть найдено для фиксированных механизма и количества агентов. Эту процедуру можно проделать один раз и затем пользоваться полученными результатами при оценке сбалансированности игр при различных возникающих в жизни случаев информированности центра. Однако даже однократное вычисление вышеописанных множеств может стать вычислительной задачей большой сложности, не говоря уже о плохой наглядности результатов уже при $n > 3$. Поэтому представляет интерес конкретизация формулы (120), которая позволяла бы получить простые и понятные условия, характеризующие принадлежность некоторых простых информационных множеств L к множеству C (где игра сбалансирована).

Рассмотрим подобные ограничения, которые гарантируют сбалансированность игры при попадании профилей точек пика целевых функций агентов в условия нижеописанных следствий.

Следствие 5. Если для всех коалиций T оптимальная точка r коалиций T и $N\backslash T$, лежит в области (m, m) (см. рис. 7) то C-ядро игры не пусто.

Доказательство. Если точка пика коалиций T и $N\backslash T$, лежит в области (m, m), то равновесные заявки всех агентов равны R. Агенты при этом получают ресурс $x_i = p_i(R,..., R)$. Следовательно, условие непустоты C-ядра (120) запишется в виде

(124) $$\sum_{T\in D} d_T \sum_{i\in T} p_i(R,..., R) \le R .$$

Положим $A_i := p_i(R,..., R)$, тогда, по лемме 4,

(125) $$\sum_{i\in N} p_i(R,..., R) \le R .$$

Но в левой части (125) стоит общее количество распределяемого ресурса R при заявках агентов $s_i = R$. При этом неравенство (125) обращается в тождество, и C-ядро не пусто. •

Условие этого следствия выполняется, например, если все точки пика $r_i \ge R / n$. При этом $P_i = [R/n, +\infty)$.

Следствие 6. Если есть такой агент k, что для всех коалиций T, содержащих его, оптимальная точка r целевых функций коалиций T и $N\backslash T$ лежит в области (m, c) (см. рис. 7), а для остальных коалиций – в области (c, m) то C-ядро не пусто.

Доказательство. Разобьем множество D собственных коалиций на два подмножества:

$$D_I = \{T : (r_T, r_{N\backslash T}) \in (c, m)\},\ D_{II} = \{T : (r_T, r_{N\backslash T}) \in (m, c)\}$$

По условию следствия, $D=D_I \cup D_{II}$. На рис. 7 видно, что если некоторая коалиция T принадлежит D_I, то коалиция $N\backslash T$ принадлежит D_{II}. Коалиции $T\in D_I$ – диктаторские, то есть получаемое такими коалициями количество ресурса x_T совпадает с их точкой пика r_T. Следовательно, коалиция $N\backslash T$ получит ресурс в объеме $x_{N\backslash T} = R - r_T$.

Условие непустоты ядра (120) в данном случае запишется так:

(126) $$\sum_{T\in D_I} d_T r_T + \sum_{T\in D_{II}} d_T (R - r_{N\backslash T}) \le R .$$

Так как $r_{N\backslash T} = r - r_T$, то

$$\sum_{T\in D_I} d_T r_T + \sum_{T\in D_{II}} d_T (R - r_{N\backslash T}) = \sum_{T\in D_I} d_T r_T + \sum_{T\in D_{II}} d_T (R - r + r_T) =$$
$$\sum_{T\in D} d_T r_T + (R - r) \sum_{T\in D_{II}} d_T .$$

По лемме 4 для A_i=r_i, верно равенство $\sum_{T\in D} d_T r_T = r$. По определению теоремы, коалиции $T\in D_{II}$ и только они содержат агента k. Тогда условие $T\in D_{II}$ можно переписать как T: $k\in T$. Но, по определению сбалансированного покрытия (10), для любого k имеем $\sum_{T:k\in T} d_T = 1$. Значит,

(127) $\sum_{T\in D} d_T r_T + (R-r)\sum_{T\in D_{II}} d_T = r + R - r = R$. •

Для класса механизмов распределения, обладающих «свойством нулевой заявки», предположения, необходимые для выполнения условий данного следствия, выглядят так:

$P_i = [0, R/n]$ *для* $i \neq k$, $\quad P_k = [R/n, +\infty)$.

Таким образом, сформулированные в виде следствий 5 и 6 результаты позволяют дать центру рекомендации по подбору состава агентов на основании имеющейся о них информации. Как уже отмечалось, сбалансированность игры приводит к максимальной эффективности управления. Поэтому можно рекомендовать центру подбирать состав агентов таким образом, чтобы все агенты имели сравнительно больши́е потребности в ресурсе, то есть представляли собой «не диктаторов». Заметим, что ограничения на положение точек пика следствия 5 представляют собой ограничения снизу. Как показано в разделе 3.2, наличие такой информации у центра не влияло на эффективность механизма в некооперативной модели. Зато такая информация оказывается чрезвычайно полезной для повышения эффективности управления в кооперативном случае.

Также игра сбалансирована, если есть единственный агент, производственные возможности которого значительно превышают производительность остальных агентов (то есть все агенты, кроме него, являются диктаторами). При этом неэффективные агенты «продают» ресурс (то есть меняют ресурс на долю в дележе) эффективному агенту для переработки. Несмотря на некоторую несправедливость такой ситуации с точки зрения эффективного агента, она приводит к максимальной производительности системы, как и всегда при образовании максимальной коалиции.

Заметим, что случай произвольно малых эффективностей всех агентов, кроме одного, был наихудшим для эффективности управления при некооперативном рассмотрении. В кооперативном же случае эффективность управления системой таких агентов максимальна и равна 1.

На основании вышесказанного можно утверждать, то внесение возможности коалиционных взаимодействий положительно влияет именно на слабые стороны некооперативного распределения ресурса.

Распределение ресурса между тремя агентами

Проиллюстрируем результаты, полученные для n агентов в случае, если агентов всего трое. Предположим, что механизм анонимен и обладает «свойством нулевой заявки», а целевые функции агентов можно записать в виде $f_i = r_i \cdot f\left(\frac{x_i}{r_i}\right)$ (обобщенные производственные функции Кобба-Дугласа). Здесь f одинакова для всех агентов и обладает следующими свойствами:

(128) $f(0)=0,\ f(1)=1,\ f'(x)>0$ при $x<1,\ f'(x)<0$ при $x>1,\ f''(x)<0.$

Примером подобной функции является $f(x) = 2x - x^2$.

Лемма 12. При $f(x) = 1(x) := \begin{cases} 0, x = 0 \\ 1, x > 0 \end{cases}$ игра агентов сбалансирована.

Доказательство. Условие сбалансированности (11) для таких производственных функций агентов имеет вид: $\sum_{S\subset N} d_S r_S \le r_N$. Непосредственно применяя лемму 4 для m = 1, получаем результат леммы. •

Функция $f(x) = 1(x)$ является поточечным пределом последовательности производственных функций вида Кобба-Дугласа $\left(x^{1/k}\right)_{k=1}^{+\infty}$. Таким образом, можно утверждать, что для произвольного вектора точек пика производственных функций существуют такие вогнутые производственные функции агентов, имеющие максимумы в этих точках, что игра агентов будет сбалансирована, однако гарантировать сбалансированность для произвольных вогнутых производственных функций можно только если вектор точек пика удовлетворяет условиям следствий 5 или 6.

Построим зоны сбалансированности и несбалансированности игры на симплексе $r_1 + r_2 + r_3 = r$ для некоторого значения r (см. рис. 10).

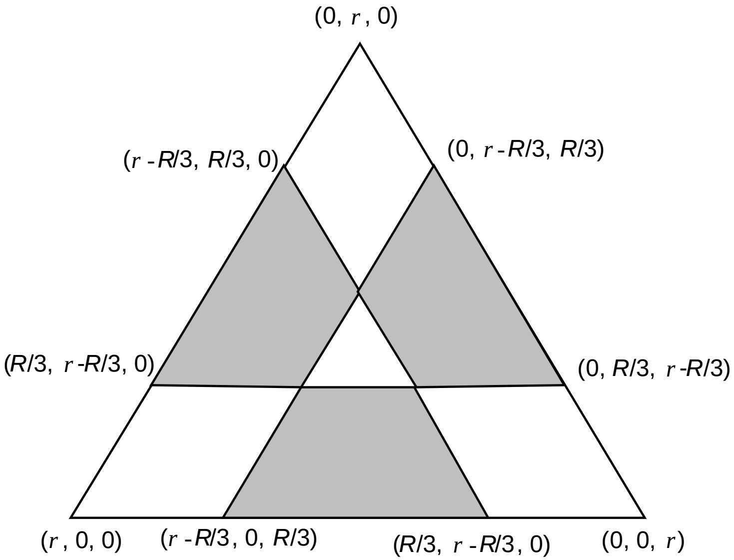


Рис. 10. Зоны сбалансированности и несбалансированности игры

На рис. 10 зоны, где в соответствии с результатами следствий 5 и 6 игра гарантированно сбалансирована, изображены светлым тоном, а зоны, где в зависимости от конкретного вида производственных функций агентов игра может быть как сбалансирована, так и нет – темным.

Как видно из рис. 10, центральная и угловые зоны симплекса соответствуют сбалансированным играм. Данный рисунок построен для некоторого фиксированного значения r (равного примерно 1.3R). Если центр знает только общую степень дефицита в системе, описываемую величиной R/r, то сравнение площади областей с пустым и непустым C-ядром может помочь центру в оценке вероятности реализации максимальной коалиции.

Действительно, если вероятность реализации того или иного значения точки пика целевой функции агента представлена равномерным распределением, отношение площади области сбалансированности C к полной площади симплекса даст вероятность того, что профиль точек пика агентов гарантирует образование максимальной коалиции. При этом интересным представляется проследить, хотя бы качественно, как меняется площадь области C при варьировании дефицита в системе (параметр R/r). Рис. 11 демонстрирует зоны сбалансированности и несбалансированности для разных степеней дефицита в системе. Стрелки показывают рост дефицита, то есть уменьшение параметра R/r.

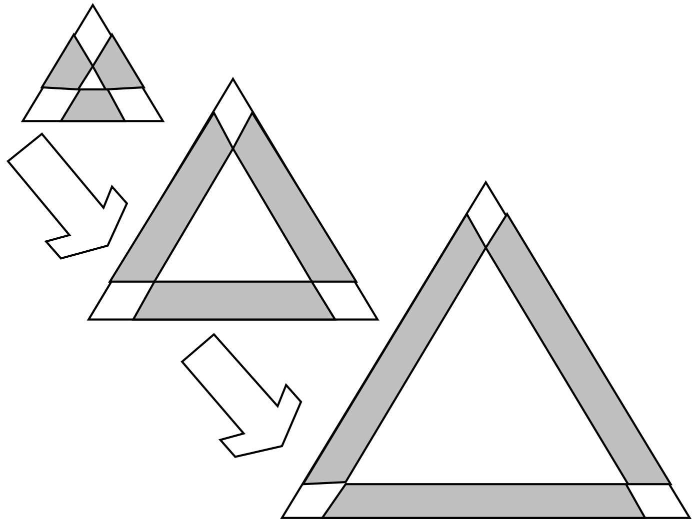


Рис. 11. Динамика зон пустого и непустого С-ядра при росте дефицита

Как видно из рис. 11, при росте общей потребности в ресурсе центральная зона увеличивается в размерах, угловые зоны сохраняют свой размер. При больших (относительно имеющегося количества ресурса R) потребностях основную площадь занимает центральная зона.

Точный расчет зон сбалансированных и несбалансированных игр с помощью вычислительной модели для параболических производственных функций показал, что при росте уровня дефицита зона несбалансированных игр монотонно уменьшается, пропадая с некоторого момента.

3.5. Синтез сбалансированных механизмов распределения

Выше были исследовано коалиционное взаимодействие агентов при механизмах распределения ресурса, обладающих свойствами монотонности по заявке агента и непрерывности по всем переменным.

Было показано, что механизм распределения ресурса, удовлетворяющий этим свойствам, не может гарантировать сбалансированность игры для всех видов агентов одновременно, то есть возможны профили точек пика целевых функций агентов, для которых игра может быть как сбалансирована, так и нет.

Поэтому, если ставить задачу поиска механизма распределения ресурса с гарантированно непустым С-ядром, необходимо расширить множество исследуемых механизмов распределения ресурса за счет отказа хотя бы одного из этих предположений, например, от монотонности.

Следствие 7. Для механизма постоянных приоритетов $x_i = \frac{A_i}{\sum_{j \in N} A_j} R$ игра сбалансирована для произвольных профилей точек пика агентов.

Доказательство. В этом случае для любой коалиции T количество ресурса в ее распоряжении $x_T = \frac{\sum_{j \in T} A_j}{\sum_{j \in N} A_j} R$. По теореме 8, достаточное условие непустоты ядра записывается в виде $\sum_{T \in D} d_T x_T(r_T, T) \le R$. Подставляя в это неравенство объемы ресурса, получаемые коалициями, имеем следующее выражение:

$\sum_{T \in D} d_T \sum_{i \in T} A_i R \le R \sum_{i \in N} A_i$. По лемме 4 для $m = 1$ непосредственно получаем, что это неравенство выполняется всегда и игра сбалансирована. •

Механизм постоянных приоритетов дает каждому агенту фиксированное количество ресурса x_i вне зависимости от заявок агентов. Коэффициенты A_i соответствуют относительной важности агентов для центра.

Этот механизм представляет собой предельный случай для нестрого монотонных механизмов, в котором промежутков строгого возрастания количества получаемого ресурса в зависимости от заявки нет вообще.

Сбалансированность игры для механизма постоянных приоритетов может быть показана и из других соображений. Достаточно заметить, что если центр использует этот механизм, то игра агентов полностью совпадает с поведением агентов в известных моделях экономик с производством [80, 82]. Для этих моделей при весьма слабых ограничениях на параметры агентов сбалансированность доказана [1,82, 85].

Возможность того, что разрывные механизмы более перспективны с точки зрения реализации максимальной коалиции, представляется сомнительной, тем не менее, для ряда разрывных механизмов, например, для конкурсных механизмов распределения ресурса, такое рассмотрение необходимо ввиду их широкого распространения на практике. Подробное исследование разрывных механизмов распределения ресурса выходит за рамки данной работы.

Пример 7. *Распределение финансирования между филиалами Торгового дома в торгово-промышленном холдинге.*

Рассмотрим задачу распределения финансирования между филиалами Торгового дома в торгово-промышленном холдинге (см. рис. 1). Пусть центр (Торговый дом) использует приоритетный механизм распределения ресурса.

Как показано в разделе 3.1, эффективность такого механизма распределения ресурса может быть весьма малой. Как следует из раздела 3.4, поощрение коалиционного взаимодействия получающих ресурс подразделений, создание условий для внутреннего перераспределения ресурса между ними, в данной задаче хоть и повышает эффективность распределения ресурса, но не позволяет гарантированно добиться его оптимального распределения при использовании приоритетных механизмов.

Выше в разделе 3.5 показывается, что единственным способом обеспечения оптимального распределения ресурса является полная замена механизмов распределения, основанных на заявках, на «внутренний рынок» ресурса, когда получатели ресурса сами определяют цену данного ресурса и формируют оптимальное его распределение между собой.

Механизм действия этого рынка следующий. Сначала центр, не собирая никаких заявок, распределяет ресурс между подразделениями в соответствии со своими субъективными представлениями об их потребностях. Тем самым у каждого подразделения формируется начальный запас ресурса. Далее подразделения становятся участниками «внутреннего рынка»: каждое подразделение может продавать имеющийся у него ресурс, если предлагаемая цена превышает эффективность использования этого ресурса самим подразделением и покупать – если цена на «рынке» ниже эффективности использования подразделением этого ресурса. Таким образом, реализуется модель свободного рынка, формируется конкурентная цена на ресурс и осуществляется перераспределение ресурса между подразделениями. В соответствии с классической теорией рынка это перераспределение будет *эффективным*, то есть будет приводить к максимальной суммарной прибыли участников рынка, то есть к максимальной суммарной прибыли получающих ресурс подразделений.

Таким образом, центр полностью достигает своей цели – оптимального распределения ресурса между подразделениями.

Следует подчеркнуть разницу между данным механизмом и широко распространенными *механизмами внутренних цен*. Если в механизмах внутренних цен центр на основании сообщений получателей ресурса назначает внутреннюю цену, по которой те *покупают у него* ресурс, то в случае внутреннего рынка каждое из подразделений оперирует фиксированным объемом ресурса, полученным от центра, и внутренняя цена относится к перераспределению ресурса *между подразделениями*.

Платой за эффективность в рассматриваемом механизме является некоторая «несправедливость» в прибыли подразделений. Действительно, если первоначальное распределение ресурса не оптимально, то в процессе перераспределения ресурса

подразделения, получившие ресурс в объеме, большем того, который они получили бы при оптимальном распределении, «наживаются» на продаже ресурса подразделениям «недополучившим» ресурс. Тем не менее, такое внутреннее перераспределение прибыли в силу замкнутости системы не сказывается на ее суммарной прибыли, то есть подобная несправедливость не сказывается на результате центра. •

3.6. Равновесие в угрозах и контругрозах

Приведем пример построения решения в угрозах и контругрозах для игры трех агентов с целевыми функциями $f_i(.)$ вида:

$$f_i(x_i) = \begin{cases} x_i, & x_i < r_i \\ r_i, & x_i \geq r_i \end{cases},$$

то есть для линейных производственных элементов с ограничениями на мощность. Примем также, что непрерывный механизм прямых приоритетов удовлетворяет «свойству нулевой заявки».

Ценность исследования этого случая снижается тем, что центру безразлично, как распределять ресурс между агентами, так как в силу линейности производственных функций любое распределение ресурса приводит к одинаковой эффективности. Целью данного рассмотрения является демонстрация того, как сложен и громоздок может быть процесс поиска решения в угрозах и контругрозах даже в очень простых моделях.

Напомним, что решением в угрозах и контругрозах называется конфигурация (то есть сочетание коалиционной структуры и распределения доходов коалиций этой структуры между ее участниками), в которой на любую угрозу произвольной коалиции найдется контругроза. В случае трех агентов любая существенная для данной концепции решения коалиционная структура состоит из двух коалиций, в одну из которых входит один агент, а в другую – два. То есть возможны только угрозы и контругрозы одного агента другому (но не б**о**льшей коалиции), так как угрожать можно только членам своей коалиции в рассматриваемой коалиционной структуре. Таким образом, рассматриваться будут только коалиционные структуры вида {{1}, {2, 3}}, {{2}, {1, 3}} и {{1, 2}, {3}}. Оставшиеся коалиционные структуры (то есть {{1, 2, 3}} и {{1}, {2}, {3}}) интереса не представляют, так как в первой из них решение в угрозах и контругрозах совпадает с C-ядром (угроз нет вообще), во второй же угрожать некому, так как все коалиции состоят из одного агента.

В зависимости от параметров агентов (точек r_i) характеристическая функция игры будет выглядеть по-разному. Для того, чтобы сразу исключить симметричные случаи, примем, что $r_1 \le r_2 \le r_3$, что есть агенты упорядочены по возрастанию ограничения на мощность производства. Тогда возможны следующие случаи:

1. $r_1 < R/3$ (первый агент – диктатор), $r_2 < R/3$ (второй агент – также диктатор). Третий агент (в силу наличия дефицита в системе) диктатором быть не может. Характеристическая функция

$$v(1) = r_1,\ v(2) = r_2,\ v(3) = R - r_1 - r_2,\ v(12) = r_1 + r_2,$$
$$v(23) = R - r_1,\ v(13) = R - r_2,\ v(123) = R.$$

В коалиционной структуре {{1, 2}, {3}} объединение первых двух агентов не увеличивает их выигрыш, так как $v(12) = r_1 + r_2$. Единственный индивидуально рациональный дележ коалиции {12} будет $y_1 = r_1,\ y_2 = r_2$. При этом $v(3) = R - r_1 - r_2$. Как видно, любая угроза агента 1 или 2 должна предполагать партнерство с агентом 3. Значит, ему необходимо гарантировать не менее, чем $v(3)$. Так как $v(13) = R - r_2$ и $v(23) = R - r_1$, значит, доля агентов 1 и 2 в дележе коалиций {13} и {23} не может превышать r_1 и r_2, что они имеют как безо всякой кооперации, так и в коалиционной структуре {{1, 2}, {3}}. Аналогично и для коалиционных структур {{2}, {1,3}} и {{1}, {23}} единственным индивидуально рациональным распределением будет $y_1 = r_1,\ y_2 = r_2$, $y_3 = R - r_1 - r_2$. При этом никаких угроз быть не может, как и выигрыша от коалиции. При произвольно малых затратах на создание коалиции образование любой коалиционной структуры будет строго невыгодным. Таким образом, **при наличии двух диктаторов в рамках решения в угрозах и контругрозах кооперация агентов нерациональна**.

2. $r_1 < R/3$, второй агент – не диктатор ($r_2 \ge R/3$), но $r_1 + r_2 < 2R/3$. Характеристическая функция:

$$v(1) = r_1,\ v(2) = R/3,\ v(3) = R - r_1 - r_2,\ v(12) = r_1 + r_2,$$
$$v(23) = R - r_1,\ v(13) = 2R/3,\ v(123) = R.$$

Рассмотрим коалиционную структуру {{12}, {3}}. Возможные дележи определяются равенствами:

$$x_1 + x_2 = v(12) = r_1 + r_2,\ x_3 = v(3) = R - r_1 - r_2.$$

Возможны только угрозы агента 1 агенту 2 и агента 2 агенту 1. Рассмотрим угрозу агента 1 агенту 2. Он может предложить единственную коалиционную структуру {{13}, {2}}. При этом доля агента 3 в новой коалиционной структуре должна возрасти. То есть теперь дележи ограничиваются условиями:

$$y_1 + y_3 = v(13) = 2R/3,\ y_2 = v(2) = R/3,\ y_1 = x_1 + e,\ y_3 =$$
$$= 2R/3 - x_1 - e \ge x_3 = R - r_1 - r_2,$$

где e – некоторое положительное число. Дополнительно дележ ограничен условиями индивидуальной рациональности.

Среди возможных контругроз агента 2 (а он может угрожать только образованием коалиционной структуры {{1}, {23}}) можно ограничиться рассмотрением лишь самой сильной, в которой его доля z_2 минимальна и равна его доле x_2 в исходном дележе:

$$z_2 + z_3 = v(23) = R - r_1,\ z_1 = v(1) = r_1,\ z_2 = x_2,$$
$$z_3 = R - r_1 - x_2 \ge y_3 = 2R/3 - x_1 - e.$$

Таким образом, для того, чтобы для произвольной угрозы агента 1 существовала контругроза агента 2, необходимо, чтобы для произвольного e выполнялось неравенство

$$R - r_1 - x_2 \ge y_3 = 2R/3 - x_1 - e,$$

то есть чтобы выполнялось условие $x_2 \le R/3 - r_1 + x_1 + e$.

Рассматривая аналогичным образом угрозы агента 2 и контругрозы агента 1, получим подобное же условие $x_2 \ge R/3 - r_1 + x_1 - d$, где d – некоторое положительное число. Поскольку как d, так и e могут быть сколь угодно малы, совместного выполнения этих неравенств можно добиться лишь при равенстве $x_2 \ge R/3 - r_1 + x_1$, что в сочетании с условием сбалансированности конфигурации $x_1 + x_2 = v(12) = r_1 + r_2$, дает равновесие в угрозах и контругрозах

$$\{\{12\},\{3\}\}: \quad x_1 = r_1 + \frac{r_2 - R/3}{2}, \quad x_2 = \frac{r_2 + R/3}{2}, \quad x_3 = R - r_1 - r_2.$$

Рассмотрим теперь коалиционную структуру {{1}, {23}}. Дележи ограничены равенствами $x_2 + x_3 = v(23) = R - r_1$, $x_1 = v(1) = r_1$.

Здесь возможны угрозы агентов 2 и 3 друг другу.

Ограничения на угрозу агента 2 агенту 3 (2-й угрожает образованием коалиционной структуры {{12}, {3}}):

$y_1 + y_2 = v(12) = r_1 + r_2$, $y_3 = v(3) = R - r_1 - r_2$, $y_2 = x_2 + e$, $y_1 =$
$= r_1 + r_2 - x_2 - e \geq x_1 = r_1$.

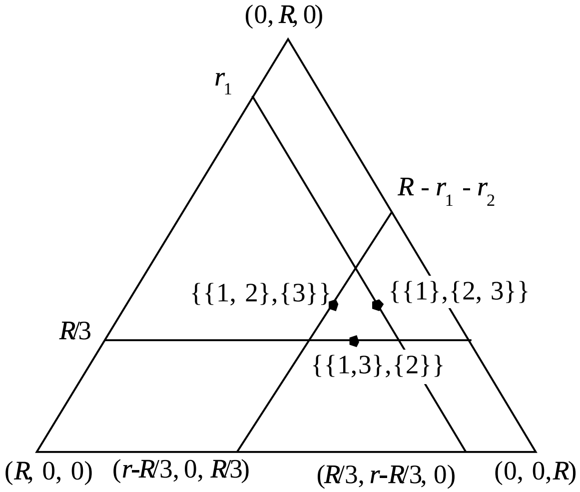


Рис. 12. Решения в угрозах и контругрозах для трех агентов в механизме пропорционального распределения ресурса

Сильнейшая контругроза агента 3 определяется неравенствами (для {{13}, {2}}):

$$z_1 + z_3 = v(13) = 2R/3, \; z_2 = v(2) = R/3, \; z_3 = x_3,$$
$$z_1 = 2R/3 - x_3 \geq y_1 = r_1 + r_2 - x_2 - e,$$

то есть для существования контругрозы необходимо выполнение условия $x_3 \leq 2R/3 - r_1 - r_2 + x_2 + e$. Аналогично для угроз агента 3, $x_3 \geq 2R/3 - r_1 - r_2 + x_2 - d$. Таким образом, получаем равновесие:

$$\{\{1\},\{23\}\}: \quad x_1 = r_1, \quad x_2 = \frac{r_2 + R/3}{2}, \quad x_3 = \frac{5R}{6} - r_1 - \frac{r_2}{2}.$$

Повторяя ту же цепочку рассуждений для коалиционной структуры {{13}, {2}} получаем следующее равновесие в угрозах и контругрозах:

$$\{\{13\},\{2\}\}: \quad x_1 = r_1 + \frac{r_2 - R/3}{2}, \quad x_2 = R/3, \quad x_3 = \frac{5R}{6} - r_1 - \frac{r_2}{2}.$$

Для наглядности все три равновесия изображены на рис. 12. Так как сумма всех дележей равна R, их можно изобразить на симплексе $x_1 + x_2 + x_3 = R$. Линии представляют собой ограничения индивидуальной рациональности. Видно, что во всех образующихся коалициях прибыль от кооперации делится поровну между партнерами коалиции. Агент же, не присоединившийся к коалиции, получает прибыль, определяемую характеристической функцией для коалиции, состоящей из него одного.

Таким образом, **для рассматриваемых параметров агентов показано, что будет образовываться одна из коалиций: {12}, {13} или {23}, и прибыль от кооперации будет делиться агентами поровну**.

3. $r_1 < R/3$, второй агент – не диктатор ($r_2 \geq R/3$), и $r_1 + r_2 \geq 2R/3$. Характеристическая функция

$$v(1) = r_1, \; v(2) = R/3, \; v(3) = R/3, \; v(12) = 2R/3,$$
$$v(23) = R - r_1, \; v(13) = 2R/3, \; v(123) = R.$$

Рассмотрим коалиционную структуру {{12}, {3}}.

Ее дележи удовлетворяют условиям:

$$x_1 + x_2 = v(12) = 2R/3, \; x_3 = v(3) = R/3.$$

Угрозы агента 1 агенту 2 удовлетворяют условиям:

$$y_1 + y_3 = v(13) = 2R/3, \; y_2 = v(2) = R/3, \; y_1 = x_1 + e, \; y_3 =$$
$$= 2R/3 - x_1 - e \geq x_3 = R/3.$$

Сильнейшая контругроза агента 2 агенту 1 удовлетворяет условиям:

$$z_2 + z_3 = v(23) = R - r_1, \; z_1 = v(1) = r_1, \; z_2 = x_2,$$
$$z_3 = R - r_1 - x_2 \geq y_3 = 2R/3 - x_1 - e.$$

Следовательно, для существования контругрозы необходимо выполнение условия $x_2 \le R/3 - r_1 + x_1 + e$. Аналогично для угроз агента 2 агенту 1 имеем условие: $x_2 \ge R/3 - r_1 + x_1 - e$.

Следовательно, равновесие будет выглядеть следующим образом:

$$\{\{12\},\{3\}\}: \quad x_1 = \frac{r_1 + R/3}{2}, \quad x_2 = \frac{R - r_1}{2}, \quad x_3 = \frac{R}{3}.$$

Аналогично получаются и два остальные равновесия:

$$\{\{13\},\{2\}\}: \quad x_1 = \frac{r_1 + R/3}{2}, \quad x_2 = \frac{R}{3}, \quad x_3 = \frac{R - r_1}{2},$$

$$\{\{1\},\{23\}\}: \quad x_1 = r_1, \quad x_2 = \frac{R - r_1}{2}, \quad x_3 = \frac{R - r_1}{2}.$$

4. $r_1 \ge R/3$ (первый агент – не диктатор, значит остальные – и подавно). В этом случае заявки всех агентов максимальны независимо от коалиционной структуры и характеристическая функция игры равна

$$v(1) = v(2) = v(3) = R/3, v(12) = v(23) = v(13) = 2R/3, v(123) = R,$$

то есть характеристическая функция полностью симметрична и линейна.

В силу линейности характеристической функции, единственный возможный дележ – это дележ $x_1 = x_2 = x_3 = R/3$. Соответственно он же и является *C*-ядром. При этом кооперация не приносит агентам никакой прибыли. Предполагая аналогично случаю 1 наличие малых затрат на образование коалиций, можно сказать, что здесь, как и в случае 1, **кооперация нерациональна**.

Заметим, что содержательные равновесия получились как раз для тех профилей типов агентов, где, как было показано выше, *C*-ядро оказывалось пустым. Для профилей, в которых было показана непустота *C*-ядра, любая кооперация оказалась не приносящей прибыли из-за того, что в рассматриваемом случае линейного производства игра несущественна.

В силу ограничений рассматриваемой модели оказалось также, что в случаях 2 и 3 (при «средней» мощности производства второго агента), любому из агентов все равно, кого из своих противников приглашать в коалицию, для них важен лишь сам факт образования коалиции, то, что их «не оставили в стороне».

На вопрос, какая именно коалиция образуется, данная модель ответа не дает, так как для этого необходимо изучение неформальных симпатий и антипатий между агентами.

Итак, **в третьей главе** рассмотрены коалиционные взаимодействия агентов в механизмах распределения ресурса:

Исследованы различные способы коалиционных взаимодействий агентов, предложена классификация коалиционных взаимодействий в задаче распределения ресурса. Для случая нетрансферабельной полезности показана невыгодность объединения агентов в коалиции. Для случая трансферабельной полезности построена характеристическая функция и найдено достаточное условие сбалансированности игры. Предложен механизм распределения ресурса (механизм постоянных приоритетов), имеющий максимальную эффективность в условиях коалиционного взаимодействия агентов. Приведен пример построения решений в угрозах и контругрозах в частном случае трех агентов с линейными производственными функциями.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построена модель коалиционного взаимодействия участников ОС: предложено использовать сбалансированность кооперативной игры в качестве критерия устойчивости коалиции из всех участников ОС, несущественность игры – в качестве критерия полного отсутствия кооперации и решение в угрозах и контругрозах в качестве уточняющей концепции решения для несбалансированных существенных игр.

Предложенная модель позволила сформулировать общую задачу управления ОС с коалиционным взаимодействием участников, заключающуюся в выборе центром допустимого управления, максимизирующего его критерий эффективности при условии, что действия агентов определяются решением их кооперативной игры.

Далее в работе решены задачи, являющиеся той или иной конкретизацией общей задачи управления: задачи стимулирования в веерной и матричной организационных структурах, формирования состава веерной ОС, распределения ресурса.

Для задачи стимулирования в веерной ОС предложены системы стимулирования, имеющие максимальную эффективность в условиях коалиционного взаимодействия агентов. Для задачи стимулирования в ОС с распределенным контролем найдены условия образования коалиции всех центров промежуточного уровня иерархии, построен механизм полного согласования их интересов с интересами высшего руководства.

Для задачи формирования состава ОС поставлены и решены задачи формирования первоначального состава ОС и привлечения дополнительных агентов, исследованы процессы несанкционированного изменения состава ОС в результате коалиционного взаимодействия агентов, а также влияние подобных изменений состава на эффективность управления ОС.

Для приоритетных механизмов распределения ресурса найдены условия устойчивости коалиции всех агентов, исследована эффективность механизмов, предложен механизм, гарантирующий устойчивость максимальной коалиции и имеющий максимально возможную эффективность.

На основании результатов работы можно сделать вывод о том, что имеющиеся в теории кооперативных игр методы исследования коалиционного взаимодействия возможно (и целесообразно) использовать при исследовании моделей управления в организационных системах.

Учет возможности создания агентами коалиций может привести к резкому повышению эффективности управления, особенно если целью центра является увеличение суммарной эффективности системы. В этом случае центру выгодно побуждать агентов к взаимодействию друг с другом, создавать условия и возможности передачи агентами друг другу информации, ресурса и полезности. Если же цели центра сильно отличаются от целей максимальной коалиции, то коалиционное взаимодействие невыгодно для центра и в его интересах препятствовать такому взаимодействию агентов.

Однако, коалиционное взаимодействие является неизбежной чертой поведения участников организационных систем и тогда основная задача управления заключается в таком формировании структуры и состава организационной системы, чтобы интересы максимальной коалиции ее участников были как можно более близкими к интересам центра.

Многочисленные примеры, рассмотренные выше, показывают важность учета коалиционных взаимодействий при управлении ОС. Правильное понимание места коалиционных взаимодействий в процессе функционирования организаций и их влияния на результаты управления заставляет по-новому взглянуть на цели и методы управления ОС, дает возможность создавать организации, в которых неизбежные конфликты между индивидуальными интересами сотрудников не мешают им совместно работать для достижения общей цели.

Решение подобных задач представляется перспективным направлением развития теории управления организационными системами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ауман Р., Шепли Л. Значения для неатомических игр. М.: Мир, 1977.
2. Бабкин В.Ф., Баркалов С.А., Щепкин А.В. Деловые имитационные игры в организации и управлении. Воронеж: ВГАСУ, 2001.
3. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. М.: Физматгиз, 1961.
4. Блекуэлл Д., Гиршик М. Теория игр и статистических решений. М.: Иностранная литература, 1958.
5. Бондарева О.Н. Некоторые применения методов линейного программирования к теории кооперативных игр / Проблемы кибернетики. Вып. 10. М.: Физматгиз, 1963. С. 119 – 140.
6. Бондарева О.Н. О теоретико-игровых моделях в экономике. Л.: ЛГУ, 1974.
7. Бурков В.Н., Данев Б., Еналеев А.К. и др. Большие системы: моделирование организационных механизмов. М.: Наука, 1989.
8. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы функционирования социально-экономических систем с сообщением информации // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 3. С. 3 - 25.
9. Бурков В.Н., Еналеев А.К., Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в вероятностных моделях социально-экономических систем // Автоматика и Телемеханика. 1993. № 11. С. 3 - 30.
10. Бурков В.Н., Заложнев А.Ю., Новиков Д.А. Теория графов в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2001.
11. Бурков В.Н., Кондратьев В.В. Механизмы функционирования организационных систем. М.: Наука, 1981.
12. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Как управлять проектами. М.: Синтег, 1997.
13. Бурков В.Н., Новиков Д.А. Теория активных систем: состояние и перспективы. М.: СИНТЕГ, 1999.
14. Васин А.А., Гурвич В.А. Коалиционные ситуации равновесия в метаиграх / Вестник МГУ. Вычислительная математика и кибернетика. 1980. № 3. С. 38 – 44.
15. Вилкас Э.Й. Аксиоматическое определение значения матричной игры // Теория вероятностей и ее применения. 1962. Том. 8. № 3. С. 324-327.
16. Вилкас Э.Й. Оптимальность в играх и решениях. М.: Наука, 1990.
17. Воробъев Н.Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры. М.: Наука, 1984.
18. Воробъев Н.Н. Теория игр для экономистов-кибернетиков. М.: Наука, 1985.
19. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами. М.: Наука, 1976.

20. Гермейер Ю.Б., Ерешко Ф.И. Побочные платежи в играх с фиксированной последовательностью ходов // ЖВМ и МФ. 1974. № 14. С. 1437 – 1450.
21. Горелик В.А., Кононенко А.Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. М.: Радио и связь, 1982.
22. Горелик В.А., Фомина Т.П. Элементы теории игр. Липецк: ЛГТУ, 1999.
23. Губко М.В. Об одном подходе к поиску оптимального решения задачи теории контрактов / Тезисы докладов XLI научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных наук». Долгопрудный, 1998. С. 34.
24. Губко М.В. Исследование механизмов распределения ресурса с учетом коалиционного взаимодействия активных элементов / Труды юбилейной международной научно-практической конференции «Теория активных систем». М.: Синтег, 1999. С. 147 – 148.
25. Губко М.В. Модели коалиционного взаимодействия активных элементов в механизмах распределения ресурса и активной экспертизы / Тезисы докладов XLII научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных наук». Долгопрудный, 1999. С. 46.
26. Губко М.В. Задача теории контрактов для модели «простого» агента / Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. С. 9 – 19.
27. Губко М.В. Механизмы стимулирования в задачах формирования состава организационной системы / Тезисы докладов XLIII научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных наук». Долгопрудный, 2000. С. 29.
28. Губко М.В. Коалиционные взаимодействия центров в задаче стимулирования с несколькими активными элементами / Труды международной научно-практической конференции «Теория активных систем». М.: ИПУ РАН, 2001. Т. 1. С. 34 – 36.
29. Губко М.В. Структура оптимальной организации континуума исполнителей // Автоматика и Телемеханика. 2002. № 12. С. 116 – 130.
30. Губко М.В. Оптимальные иерархические структуры при монотонном функционале стоимости / Сборник трудов молодых ученых «Управление большими системами». М.: ИПУ РАН, 2003. Выпуск 3. С. 27 – 34.
31. Губко М.В., Дольженко Ю.В. Коалиционные взаимодействия активных элементов в задачах формирования состава активной системы / Тезисы докладов XLIV научной конференции МФТИ «Современные проблемы фундаментальных наук». Долгопрудный,

2001. С. 20.
32. Губко М.В., Караваев А.П. Согласование интересов в матричных структурах управления // Автоматика и Телемеханика. 2001. № 10. С. 132 – 146.
33. Губко М.В., Мишин С.П. Оптимальная структура системы управления технологическими связями / Материалы международной научной конференции «Современные сложные системы управления». Старый Оскол: СТИ, 2002. С. 50 – 54.
34. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными системами. М.: Синтег, 2002. – 150 с.
35. Губко М.В., Новиков Д.А. Кооперативное взаимодействие центров в задачах стимулирования в организационных системах / Труды международной конференции «Современные сложные системы управления предприятием». Липецк: ЛГТУ, 2001. С. 47–51.
36. Губко М.В., Спрысков Д.С. Кооперативные модели распределения ресурса и активной экспертизы / Сборник трудов молодых ученых ИПУ РАН. М.: Фонд «Проблемы управления», 2000. С. 20 – 39.
37. Дюбин Г.Н., Суздаль В.Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.
38. Жуковский В.И., Салуквадзе М.Е. Некоторые игровые задачи управления и их приложения. Тбилиси: Мецниереба, 1998.
39. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1975.
40. Клейнер Г.Б. Производственные функции: теория, методы, применение. М.: Финансы и статистика, 1986.
41. Колмановский В.Б. Игровые задачи управления. М.: МИЭМ, 1990.
42. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1989.
43. Кукушкин Н.С., Морозов В.В. Теория неантагонистических игр. М.: МГУ, 1984.
44. Кульба В.В., Малюгин В.Д., Шубин А.Н., Вус М.А. Введение в информационное управление. С.Пб.: Изд-во С.-Петербургского Университета, 1999.
45. Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. М.: Дело, 2001.
46. Ларичев О.И. Объективные модели и субъективные решения. М.: Наука, 1987.
47. Льюс Р, Райфа Х. Игры и решения. М.: Иностранная литература, 1961.
48. Мак-Кинси Д. Введение в теорию игр. М.: Физматгиз, 1960.
49. Математическая энциклопедия. М.: Советская энциклопедия, 1979. Том. 2.

50. Миркин Б.Г. Проблема группового выбора. М.: Наука, 1974.
51. Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. М.: Высшая школа, 1986.
52. Мулен Э. Кооперативное принятие решений: аксиомы и модели. М.: Мир, 1991.
53. Мулен Э. Теория игр с примерами из математической экономики. М.: Мир, 1985.
54. Нейман Д., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М.: Наука, 1970.
55. Новиков Д.А., Чхартишвили А.Г. Активный прогноз. М.: ИПУ РАН, 2002.
56. Новиков Д.А. Динамика поведения систем с большим числом целенаправленных элементов // Автоматика и Телемеханика. 1996. № 4. С. 187 - 189.
57. Новиков Д.А. Механизмы функционирования многоуровневых организационных систем. М.: Фонд "Проблемы управления", 1999.
58. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в динамических и многоэлементных социально-экономических системах // Автоматика и Телемеханика. 1997. № 6. С. 3 - 26.
59. Новиков Д.А. Механизмы стимулирования в моделях активных систем с нечеткой неопределенностью. М.: ИПУ РАН, 1997.
60. Новиков Д.А. Обобщенные решения задач стимулирования в активных системах. М.: ИПУ РАН, 1998.
61. Новиков Д.А., Петраков С.Н. Курс теории активных систем. М.: СИНТЕГ, 1999.
62. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы стимулирования в многоэлементных организационных системах. М.: Апостроф, 2000.
63. Новиков Д.А., Цветков А.В. Механизмы функционирования организационных систем с распределенным контролем. М.: ИПУ РАН, 2001.
64. Новиков Д.А., Шохина Т.Е. Механизмы управления динамическими активными системами. М.: ИПУ РАН, 2002.
65. Нэш Д. Бескоалиционные игры / Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205 – 221.
66. Орловский С.А. Проблемы принятия решений при нечеткой исходной информации. М.: Наука, 1981.
67. Оуэн Г. Теория игр. М.: Мир, 1971.
68. Партхасаратхи Т., Рагхаван Т. Некоторые вопросы теории игр двух лиц. М.: Мир, 1974.
69. Петраков С.Н. Механизмы планирования в активных системах: неманипулируемость и множества диктаторства. М.: ИПУ РАН, 2002.

70. Петросян Л.А., Зенкевич Н.А., Семина Е.А. Теория игр. М.: Высшая школа, 1998.
71. Советский энциклопедический словарь. М.: Советская энциклопедия, 1988.
72. Фишберн П. Теория полезности для принятия решений. М.: Наука, 1978.
73. Шрейдер Ю.А. Равенство, сходство, порядок. М.: Наука, 1971.
74. Arrow K.J. Social choice and individual values. Chicago: Univ. of Chicago, 1951.
75. Aumann R.J., Mashler M. The bargaining set for cooperative games // Advances in Game Theory. Ann. Math. Studies. 52. Princeton: Princeton Univ. Press, 1964.
76. Fudenberg D., Tirole J. Game theory. Cambridge: MIT Press, 1995.
77. Harsanyi J. Games with incomplete information played by "Bayesian" players // Management Science. Part I: 1967. Vol. 14. № 3. P. 159 - 182. Part II: 1968. Vol. 14. № 5. P. 320 - 334. Part III: 1968. Vol. 14. № 7. P. 486 - 502.
78. Kreps D. Theory of choice. London: Vestview Press, 1988.
79. Lucas W. F. A game with no solution. RAND Memorandum RM-5518-PR. Rand Corporation, October 1967.
80. Mas-Colell A., Whinston M.D., Green J.R. Microeconomic theory. N.Y.: Oxford Univ. Press, 1995.
81. Moore J. Implementation, contracts and renegotiation in environment with complete information / Advances in Economic Theory. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. Vol. 1. P. 182 – 281.
82. Moulin H. Cooperative microeconomics: a game-theoretical introduction. London: Prentice Hall, 1995.
83. Myerson R.B. Game theory: analysis of conflict. London: Harvard Univ. Press, 1991.
84. Novikov D.A. Management of active systems: stability or efficiency // Systems science. 2001. Vol. 26. № 2. P.85-93.
85. Shubik M. Game theory in the social sciences: concepts and solutions. Massachusetts: MIT Press, 1991.